

CHƯƠNG 3: XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

- **Hệ phẳng:** là hệ có các trục thanh, đường tác dụng của tải trọng và phương của liên kết nằm trong cùng một mặt phẳng.
- **Hệ tĩnh định:** là hệ mà trong trạng thái không biến dạng có thể xác định được tất cả các thành phần phản lực và nội lực của hệ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học. Hệ tĩnh định là hệ đủ liên kết và bất biến hình.
- **Tải trọng bất động:** là tải trọng có cường độ và vị trí tác dụng không thay đổi theo thời gian.
- Nội lực trong hệ tĩnh định phụ thuộc vào tải trọng, sơ đồ hình học của công trình, không phụ thuộc vào vật liệu, kích thước tiết diện.

§ 3.1 PHÂN TÍCH TÍNH CHẤT CHỊU LỰC CỦA CÁC HỆ TĨNH ĐỊNH

1. Hệ đơn giản

1.1. Hệ dầm: là hệ BBH được cấu tạo từ một miếng cứng nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động có phương thẳng đứng

a. Dầm tĩnh định đơn giản:

khi miếng cứng được hình thành từ một thanh thẳng



❖ Dầm đơn giản không có đầu thừa

❖ Dầm đơn giản có đầu thừa

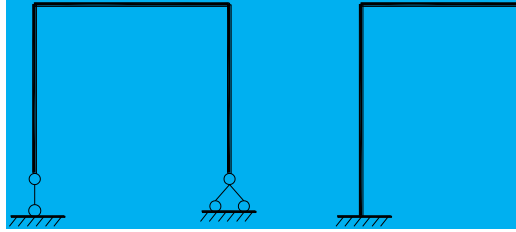
❖ Dầm công xôn

- Dưới tác dụng của tải trọng trong dầm có nội lực: M , Q , N



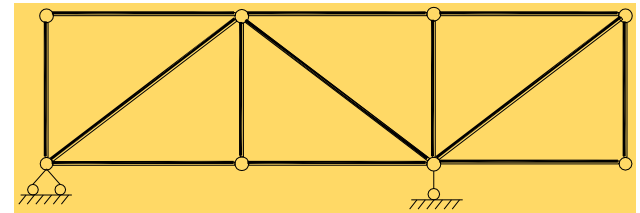
b. Khung tĩnh định: khi miếng cứng hình thành từ một thanh gãy khúc

- Trong khung phát sinh các thành phần nội lực: M , Q , N



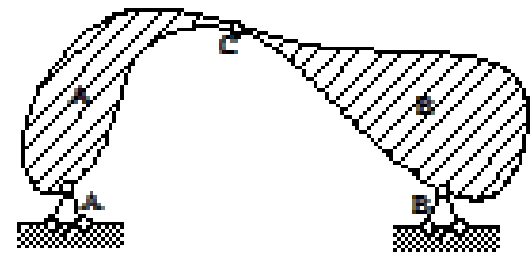
c. Dàn dầm tĩnh định: khi miếng cứng được hình thành từ các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.

- Trong các thanh dàn phát sinh nội lực : N



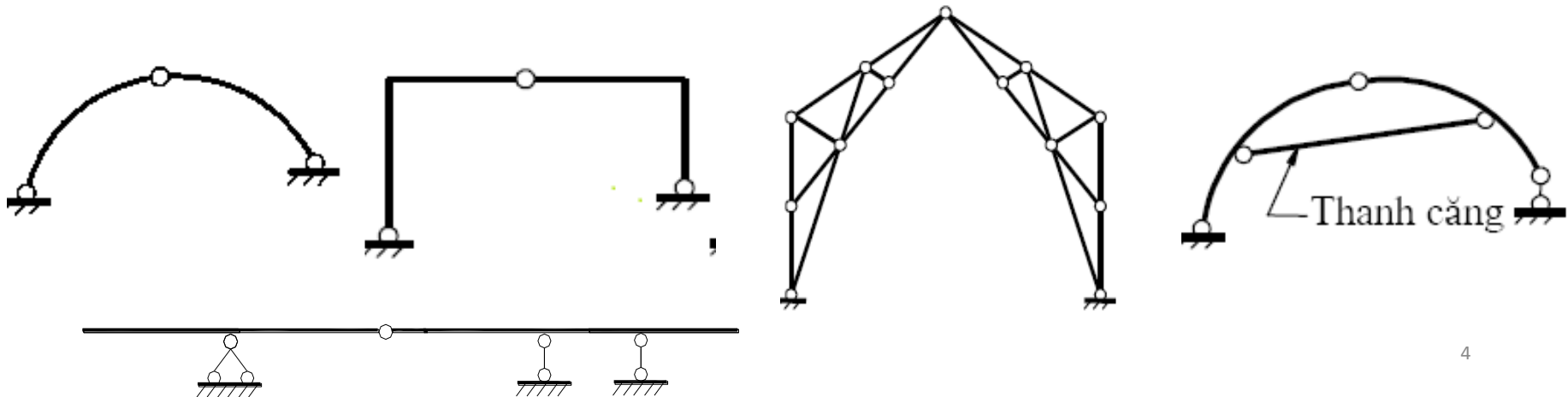
1.2. Hệ ba khớp: là hệ được cấu tạo từ hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và nối với trái đất bằng hai gối tựa cố định.

- Trong hệ có thành phần phản lực ngang ngay cả khi chịu tải trọng theo phương thẳng đứng.

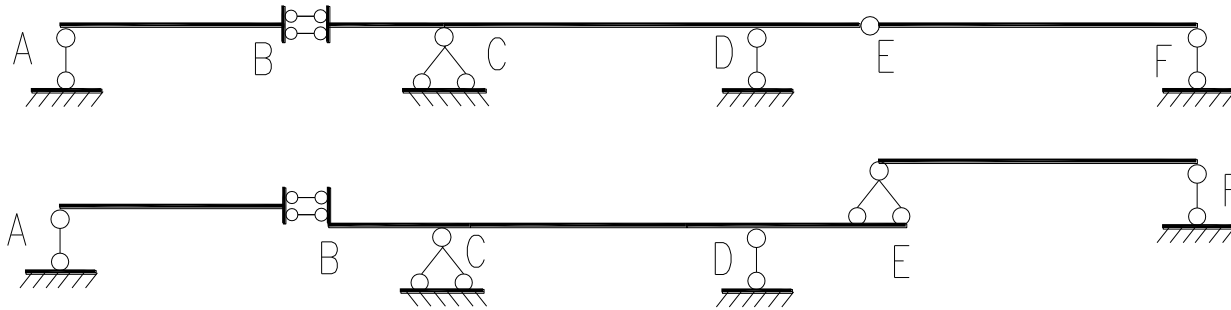


- ❖ **Vòm ba khớp**: khi miếng cứng là thanh cong, trong hệ có : M, Q, N
- ❖ **Khung ba khớp**: khi miếng cứng là thanh gãy khúc, trong hệ có : M, Q, N
- ❖ **Dàn vòm ba khớp**: khi miếng cứng là hệ dàn phẳng, trong hệ có N
- ❖ **Hệ ba khớp có thanh căng**: hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và một thanh, sau đó nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động.

Thanh căng tiếp nhận lực xô ngang, gối tựa chỉ còn phản lực đứng.



2. Hệ ghép: là hệ gồm nhiều hệ tĩnh đơn giản nối với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh và nối với trái đất bằng các liên kết tựa sao cho hệ là BBH và đủ liên kết



- Hệ chính là hệ sẽ BBH nếu loại bỏ các hệ lân cận
- Hệ phụ là hệ sẽ biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận
- Tải trọng tác dụng lên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính
- Tải trọng tác dụng lên hệ phụ gây ra nội lực trong hệ phụ và cả hệ chính. Tải trọng truyền từ hệ phụ vào hệ chính qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

3. Hệ liên hợp: là hệ BBH được cấu tạo bởi nhiều hệ có tính chất chịu lực khác nhau (dầm, vòm, dàn, dây cáp hoặc dây xích) nối với nhau bằng số liên kết vừa đủ để cùng tham gia chịu lực.



- Cấu kiện tạo thành đường cong võng xuống gọi là dây xích, các thanh ở phía trên dầm cứng thường chịu kéo.
- Cấu kiện tạo thành đường cong võng lên gọi là vòm dảo, các thanh ở phía dưới dầm cứng thường chịu nén.
- Hệ dầm chịu uốn gọi là dầm cứng.

§ 3.2 BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

1. Nội lực

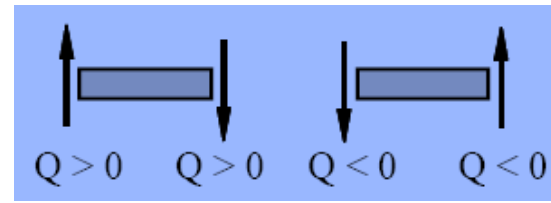
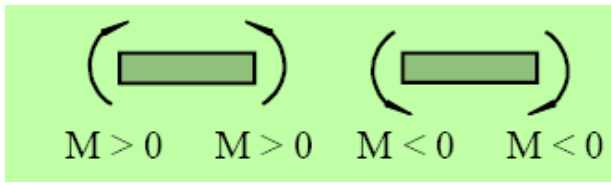
1.1. Khái niệm: nội lực là độ biến thiên lực liên kết của các phần tử bên trong cấu kiện khi cấu kiện chịu tác dụng của ngoại lực và các nguyên nhân khác.

1.2. Các thành phần nội lực:

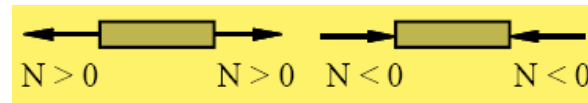
- ❖ Mômen uốn: M
- ❖ Lực cắt: Q
- ❖ Lực dọc: N

1.3. Quy ước dấu các thành phần nội lực:

- Mômen uốn được coi là dương nếu có khuynh hướng làm căng thớ bên dưới.



- Lực cắt được coi là dương nếu có khuynh hướng làm cho phần hệ có đặt lực cắt đó quay thuận chiều kim đồng hồ.



- Lực dọc được coi là dương khi có khuynh hướng gây tác dụng kéo.

2. Cách xác định nội lực: dùng phương pháp mặt cắt.

- Thực hiện mặt cắt qua tiết diện cần xác định nội lực. Mỗi mặt cắt chia hệ thành hai phần độc lập với nhau.
- Khảo sát một phần nào đó. Thay thế tác dụng của phần bên kia lên phần đang xét bằng các phản lực (hoặc nội lực) tương ứng tại các liên kết (hoặc tiết diện) bị mặt cắt cắt qua. Các phản lực (hoặc nội lực) có thể giả thiết chiều dương, chúng là đại lượng cần tìm.

- Thiết lập các điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng giải tích cho phần hệ được khảo sát.
- Giải hệ phương trình các điều kiện cân bằng sẽ xác định các thành phần nội lực.

2. Biểu đồ nội lực: là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực dọc theo chiều dài cấu kiện.

2.1. Các quy ước khi vẽ biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: thường chọn là đường trục thanh
- Tung độ: dựng vuông góc với đường chuẩn
- Biểu đồ mômen: tung độ dương ở phía dưới, tung độ âm dựng lên trên đường chuẩn và không ghi dấu
- Biểu đồ lực cắt và lực dọc: tung độ dương dựng trên đường chuẩn và ngược lại, có ghi dấu.

2.2. Cách vẽ biểu đồ nội lực:

- ❖ Xác định các thành phần phản lực
- ❖ Xác định nội lực tại **các tiết diện đặc trưng** là những tiết diện chia hệ thành các đoạn thanh thẳng sao cho trên đoạn thanh đó hoặc là không chịu tải trọng hoặc là chỉ chịu tải trọng phân bố liên tục.

Tiết diện đặc trưng thường ở các vị trí sau

- Tiết diện ở nút, các đầu thanh quy tụ tại nút.
- Chân lực tập trung
- Hai đầu tải trọng phân bố
- Gối tựa
- Hai bên mômen tập trung

- ✓ Mômen uốn M_x tại tiết diện K có giá trị được xác định bằng tổng mômen của tất cả các lực tác dụng lên phần bên trái hoặc phần bên phải lấy đối với trọng tâm của tiết diện K.
- ✓ Lực cắt Q tại tiết diện K có giá trị bằng tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên phần bên trái hoặc phần bên phải lên phương vuông góc với tiếp tuyến tại K của trục thanh.
- ✓ Lực dọc N tại tiết diện K có giá trị bằng tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên phần bên trái hoặc phần bên phải lên phương tiếp tuyến tại K của trục thanh.

❖ **Vẽ biểu đồ nội lực: sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ**

Công thức biểu diễn liên hệ vi phân (đã biết trong SBVL).

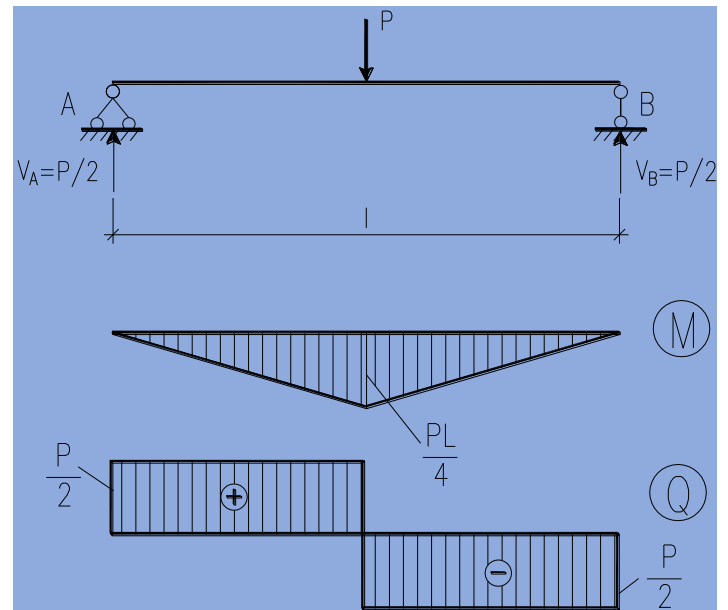
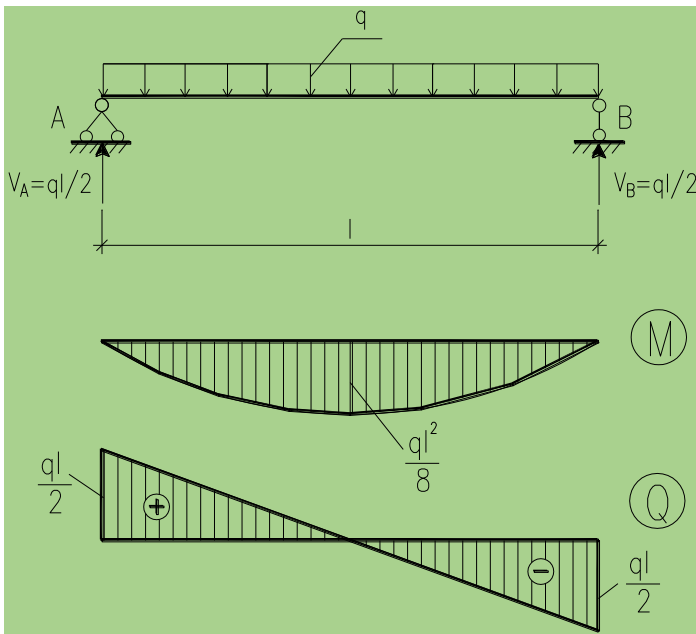
$$\frac{\partial M_X}{\partial z} = Q_Y; \quad \frac{\partial Q_Y}{\partial z} = q_{(z)}; \quad \frac{\partial^2 M_X}{\partial z^2} = \frac{\partial Q_Y}{\partial z} = q_{(z)};$$

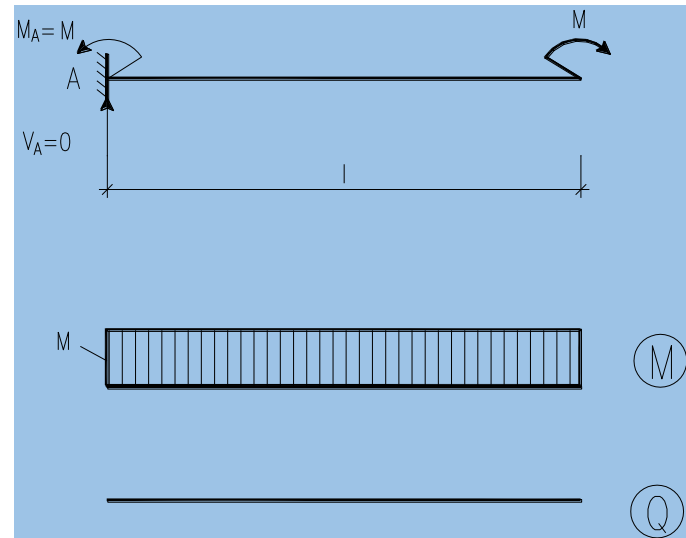
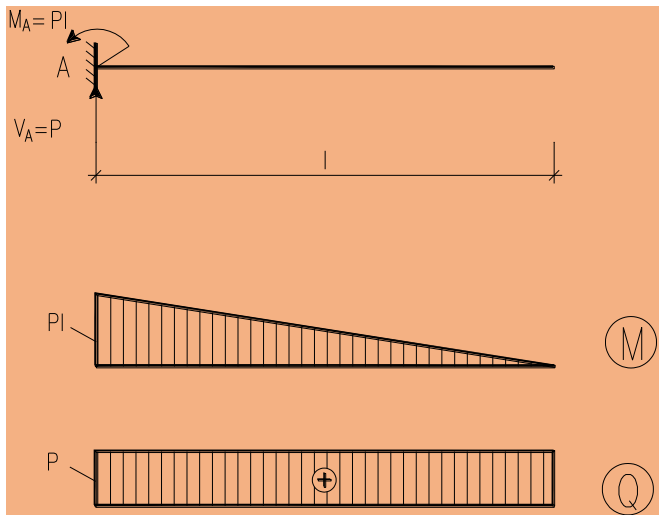
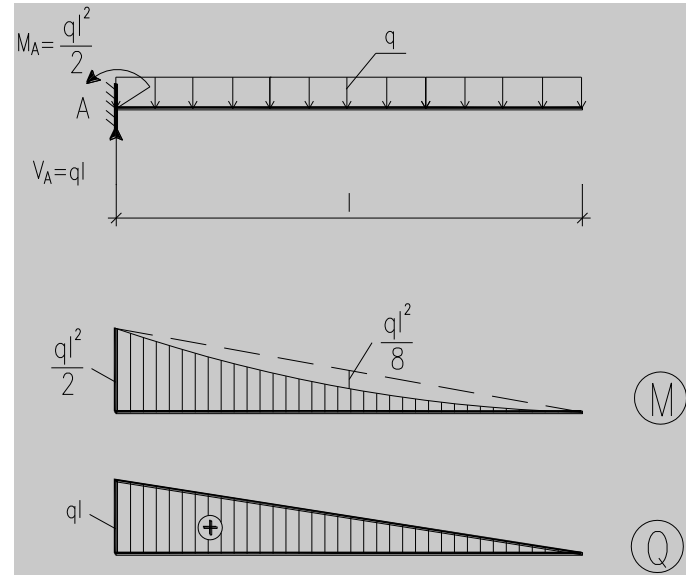
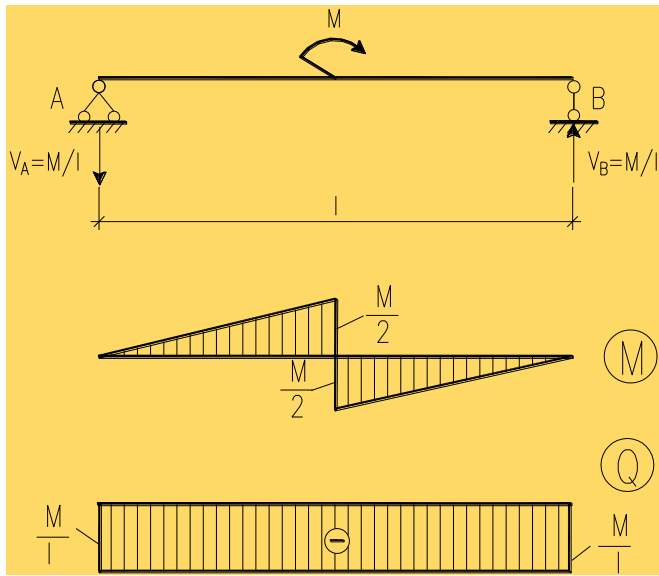
- Nếu tải trọng phân bố theo phương vuông góc với trục thanh có bậc là n thì biểu đồ lực cắt có bậc $n+1$ và biểu đồ mômen có bậc $n+2$.
 - Nếu tải trọng phân bố là bằng không thì biểu đồ lực cắt là đường hằng số và biểu đồ mômen là đường bậc nhất.
 - Nếu tải trọng phân bố là hằng số thì biểu đồ lực cắt là đường bậc nhất và biểu đồ mômen là đường bậc hai.
 - Số điểm cần thiết để vẽ đường hằng số là 1; đường bậc nhất là 2, đường bậc 2 là 3.. và đường bậc n là $n+1$.
- ❖ Yêu cầu đọc bảng 2.1 và 2.2 trong bài 2.4 trang 60, 65 SGK.

§ 3.3 DẦM VÀ KHUNG ĐƠN GIẢN

1. Dầm đơn giản

Một số dầm đơn giản chịu các loại tải trọng cơ bản thường gặp

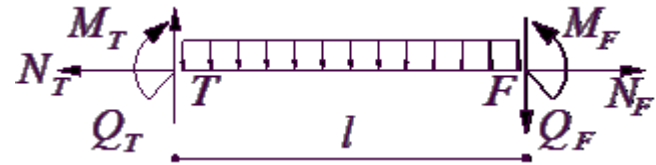




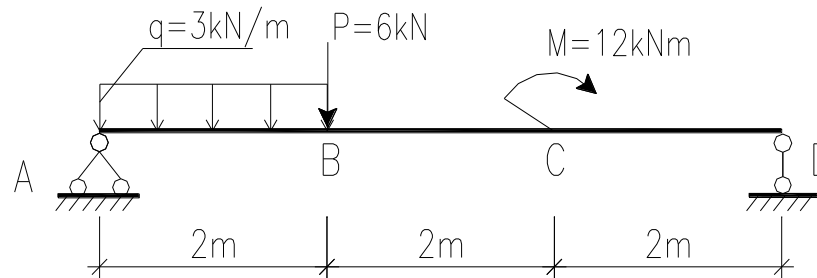
❖ Trình tự thực hiện:

- Xác định phản lực tại gối tựa
- Xác định mômen tại các tiết diện đặc biệt, vẽ M
- Từ M \longrightarrow Q bằng công thức :

$$Q_F^T = \frac{M_F - M_T}{l} \pm \frac{ql}{2}$$



VD1: Cho hệ dầm như trên hình vẽ. Yêu cầu: vẽ các biểu đồ nội lực cho hệ.



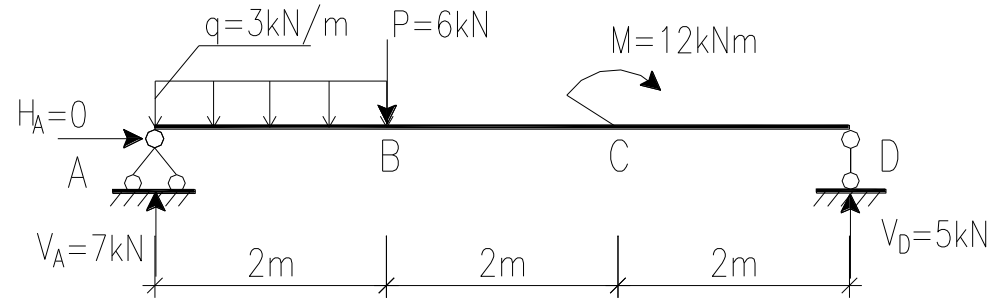
Bài giải:

❖ Xác định phản lực liên kết tại gối tựa:

$$\sum X = H_A = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M - V_D \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_D = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 12}{6} = 5 \text{ kN}$$

$$\sum Y = V_A - q \cdot 2 - P + V_D = 0 \Rightarrow V_A = 3 \cdot 2 + 6 - 5 = 7 \text{ kN}$$



❖ **Vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt:**

▪ **Vẽ biểu đồ mô men M**

Biểu đồ M của dầm bao gồm 3 đoạn: AB, BC, CD.

- Đoạn AB: đoạn này chịu tải trọng phân bố đều nên biểu đồ M có dạng đường cong parabol bậc 2, $q < 0$ nên biểu đồ M quay bề lõm về phía trục âm (lên trên) và đi qua 3 tung độ.

- $M_A = 0$

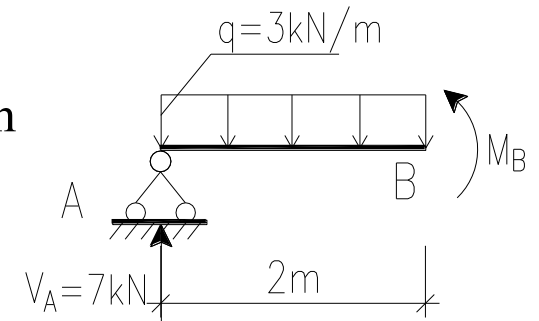
- M_B . Muốn tìm M_B thực hiện mặt cắt đi qua B, xét cân bằng phần bên trái mặt cắt như hình vẽ

$$\sum M_B = M_B + q \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_B = -3 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 8 \text{ kNm}$$

- Tung độ thứ ba ở giữa AB xác định bằng cách nối tung độ tại A và B bằng đường đứt nét,

từ chính giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn theo chiều của tải trọng q một đoạn:

$$\eta_M = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 2^2}{8} = 1,5 \text{ kNm}$$



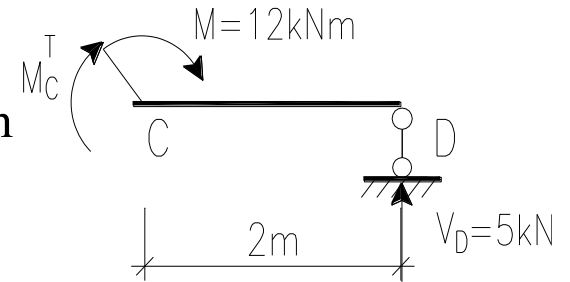
Nối ba tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp có bề lõm hướng lên trên.

• Đoạn BC: đoạn này không có tải trọng tác dụng nên biểu đồ M là đường bậc nhất đi qua 2 tung độ:

- $M_B = 8\text{kNm}$

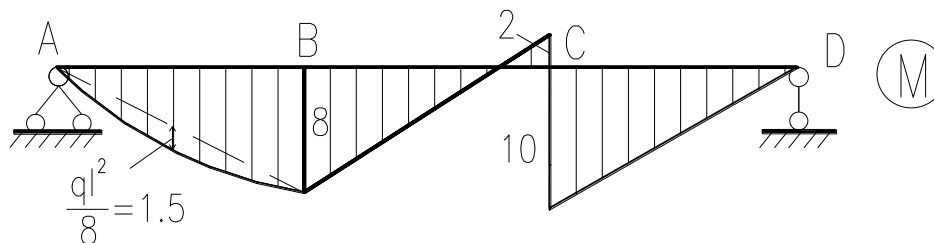
- M_C^T Muốn tìm M_C^T thực hiện mặt cắt đi qua bên trái C, xét cân bằng phần bên phải mặt cắt như hình vẽ

$$\sum M_C = M_C^T + M - V_D \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_C^T = -12 + 5 \cdot 2 = -2\text{kNm}$$



- Đoạn CD: đoạn này không có tải trọng tác dụng nên biểu đồ M là đường bậc nhất đi qua 2 tung độ:
- M_C^P : tại C có mô men tập trung $M = 12\text{kNm}$ nên tại C phải có bước nhảy, xét từ trái sang phải mô men quay thuận chiều kim đồng hồ nên bước nhảy đi xuống, trị số của bước nhảy bằng trị số của mô men tập trung. $M_C^T = -2\text{kNm}$ nhảy một đoạn bằng 12kNm nên suy ra $M_C^P = 10\text{kNm}$
- $M_D = 0$

Biểu đồ mômen của dầm



■ Vẽ biểu đồ lực cắt Q

Biểu đồ M có 3 đoạn, suy ra biểu đồ Q cũng có 3 đoạn tương ứng.

- Đoạn AB: Q có dạng đường bậc nhất đi qua 2 tung độ

$$Q_{AB}^{T,P} = \frac{M_B - M_A}{1} \pm \frac{ql}{2} = \frac{8 - 0}{2} \pm \frac{3.2}{2} \Rightarrow Q_{AB}^T = 7\text{kN}, Q_{AB}^P = 1\text{kN}$$

- Đoạn BC: Q có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn

$$Q_{BC} = \frac{M_C^T - M_B}{1} = \frac{-2 - 8}{2} = -5\text{kN}$$

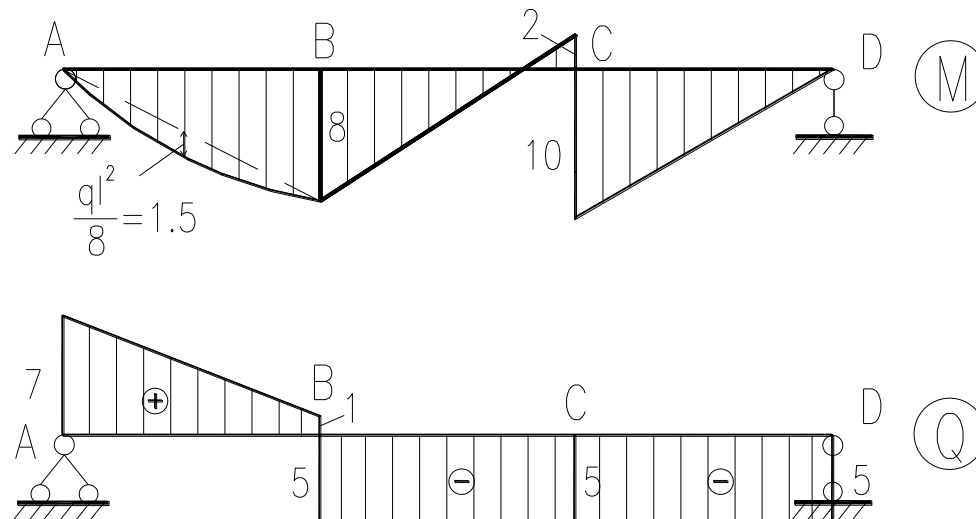
- Đoạn CD: Q có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn

$$Q_{CD} = \frac{M_D - M_C^P}{1} = \frac{0 - 10}{2} = -5\text{kN}$$

▪ Vẽ biểu đồ lực dọc N

Trong trường hợp này dầm là thanh thẳng theo phương ngang, tải trọng vuông góc với trục dầm nên lực dọc trên mọi tiết diện đều bằng không, ta bỏ qua không vẽ biểu đồ N.

Biểu đồ M và Q của hệ được thể hiện ở hình vẽ sau:

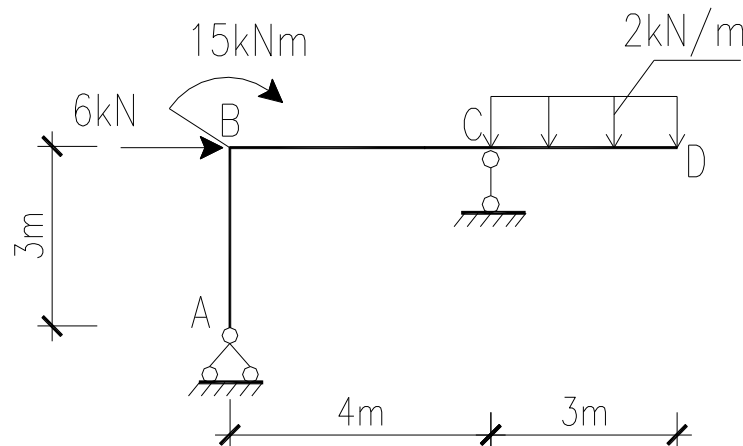


2. Khung đơn giản

❖ Trình tự thực hiện:

- Xác định phản lực tại gối tựa
- Xác định mômen tại các tiết diện đặc biệt, vẽ M
- Từ M \rightarrow Q bằng công thức trên
$$Q_F^T = \frac{M_F - M_T}{l} \pm \frac{ql}{2}$$
- Từ Q \rightarrow N bằng cách tách và xét cân bằng tại các nút khung

VD2: Cho hệ khung như trên hình vẽ. Yêu cầu: vẽ các biểu đồ nội lực cho hệ.



Bài giải:

❖ Xác định phản lực liên kết tại gối tựa:

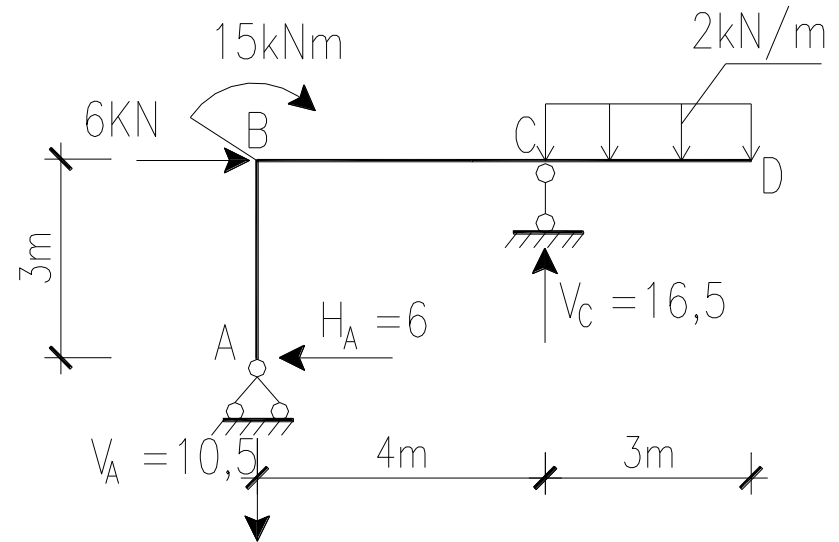
$$\sum X = H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 2 \cdot 3 \cdot 5,5 + 6 \cdot 3 + 15 - V_C \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{33 + 18 + 15}{4} = 16,5 \text{ kN};$$

$$\sum Y = V_A - 2 \cdot 3 + V_C = 0$$

$$\Rightarrow V_A = -16,5 + 6 = -10,5 \text{ kN}$$



❖ Vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt:

▪ Vẽ biểu đồ mô men M

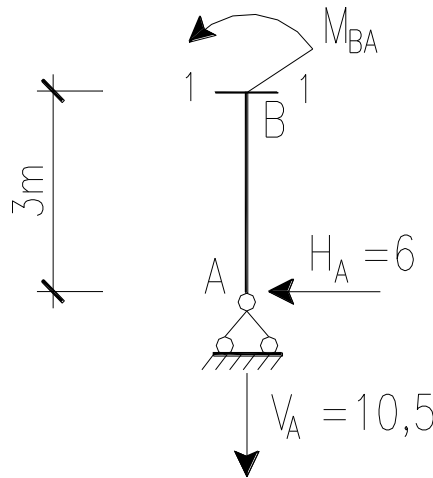
Biểu đồ M của khung bao gồm 3 đoạn: AB, BC, CD.

- Đoạn AB: đoạn này không có tải trọng tác dụng nên biểu đồ M_x là đường bậc nhất đi qua 2 tung độ:

$$-M_A = 0$$

- M_{BA} . Thực hiện mặt cắt 1-1 đi qua B, xét cân bằng phần bên dưới mặt cắt.

$$\sum M_{1-1} = M_{BA} - 6.3 = 0 \Rightarrow M_{BA} = 18 \text{ kNm}$$

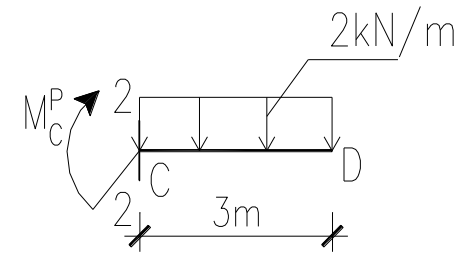


- Đoạn CD: đoạn này có tải trọng tác dụng là tải trọng phân bố đều $q=3$ kN/m nên biểu đồ M là đường cong bậc 2 đi qua 3 tung độ:

$$- M_D = 0$$

- M_C^F Thực hiện mặt cắt 2-2 đi qua điểm C, xét cân bằng phần bên phải mặt cắt

$$\sum M_{2-2} = M_C^F + 2.3.1,5 = 0 \Rightarrow M_C^F = -9 \text{ kNm}$$



- Tung độ thứ ba ở giữa CD xác định bằng cách nối tung độ tại C và D bằng đường đứt nét, từ chính giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn lấy xuống (khi q đi xuống) một đoạn

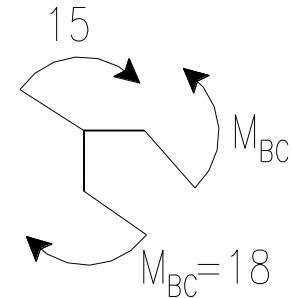
$$\eta_M = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.3^2}{8} = 2,25 \text{ kNm}$$

Nối ba tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp có bề lõm hướng lên trên.

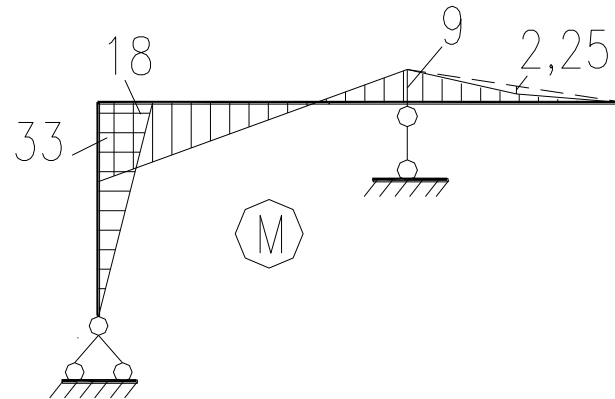
- Đoạn BC: đoạn này không có tải trọng tác dụng nên biểu đồ M là đường bậc nhất đi qua 2 tung độ:

- M_{BC} : tại nút B có mômen tập trung $M=15$ kNm tác dụng. Nên cân bằng nút B ta tìm được giá trị mômen tại điểm B đầu thanh.

$$M_{BC} = 15 + 18 = 33 \text{ kNm} \quad M_C^T = M_C^P = 9 \text{ kNm}$$



Biểu đồ M toàn hệ:



■ Vẽ biểu đồ lực cắt Q

Biểu đồ M có 3 đoạn suy ra biểu đồ Q_y cũng có 3 đoạn tương ứng

- Đoạn AB: biểu đồ lực cắt Q có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn

$$Q_{AB} = \frac{M_{BA} - M_A}{1} = \frac{18 - 0}{3} = 6 \text{ kN}$$

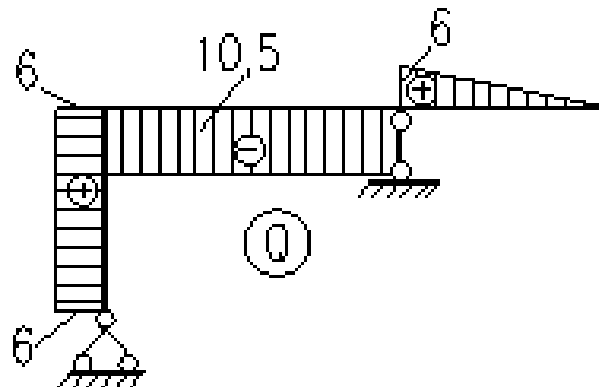
- Đoạn BC: biểu đồ Q có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn

$$Q_{BC} = \frac{M_C^T - M_{BC}}{1} = \frac{-9 - 33}{4} = -10,5 \text{ kN}$$

- Đoạn CD: biểu đồ Q có dạng đường bậc nhất đi qua 2 tung độ

$$Q_{CD}^{(T)} = \frac{M_D - M_C^F}{1} \pm \frac{ql}{2} = \frac{0 - (-9)}{3} \pm \frac{2.3}{2} \Rightarrow Q_{CD}^{(T)} = 6 \text{ kN}, \quad Q_{CD}^{(F)} = 0$$

Biểu đồ Q toàn hệ:

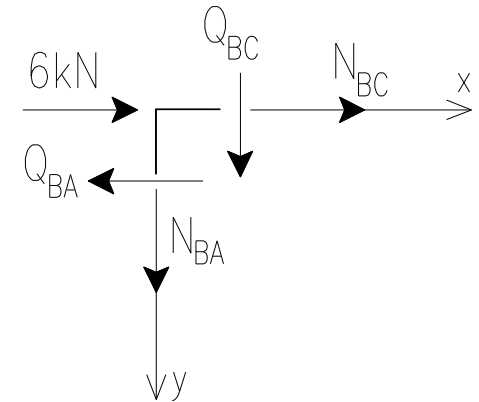


- Vẽ biểu đồ lực dọc N

Biểu đồ lực dọc N được vẽ bằng phương pháp tách nút, kết hợp với biểu đồ lực cắt Q. Tách nút B ta có:

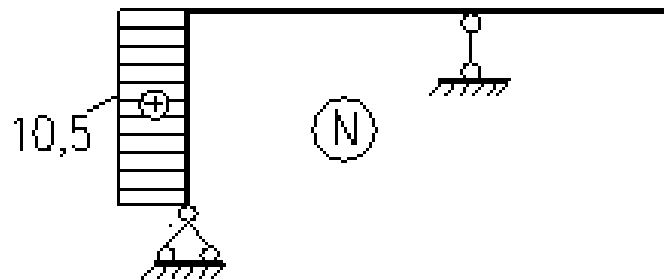
$$\sum Y = N_{BA} + Q_{BC} = 0 \Rightarrow N_{BA} = -Q_{BC} = -(-10,5) = 10,5 \text{ kN}$$

$$\sum X = N_{BC} + 6 - Q_{BA} = 0 \Rightarrow N_{BC} = 0$$



Trên BD không có lực tác dụng theo phương ngang nên $N_{BC} = N_{CD} = 0$

Biểu đồ lực dọc N toàn hệ:

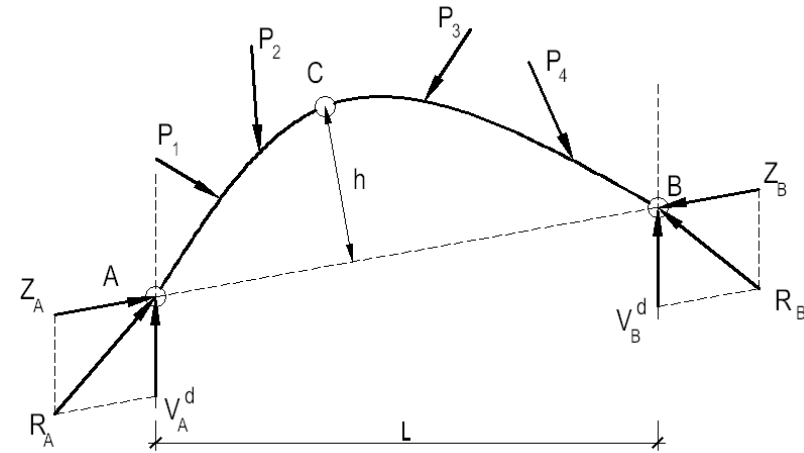


§ 3.4. HỆ BA KHỚP

1. Xác định phản lực

1.1. Phân tích theo phương AB và phương đứng (Y)

Tại A và B xuất hiện phản lực R_A và R_B .



Chiếu lên hai phương AB và Y có các thành phần V_A^d , Z_A và V_B^d , Z_B .

a. Xác định V_A^d , V_B^d $\sum M_B = 0 \rightarrow V_A^d$; $\sum M_A = 0 \rightarrow V_B^d$

Việc xác định hai thành phần đứng này giống phần tính toán trong dầm, nên V_A^d , và V_B^d còn được gọi là phản lực dầm.

b. Xác định Z_A , Z_B $\begin{cases} M_C^{trai} = -Z_A h + M_C^{tr} = 0 \\ M_C^{phai} = +Z_B h + M_C^{ph} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h} \\ Z_B = \frac{M_C^{ph}}{h} \end{cases}$

MC^{tr} , MC^{ph} là mô men của các lực tác dụng lên phần trái (Do P_1, P_2, \dots) hay phần phải (P_3, P_4, \dots) lấy với tâm là điểm C.

Z_A, Z_B chỉ tồn tại trong hệ vòm mà không xuất hiện trong hệ dầm, nên được gọi là lực vòm.

1.2. Phân tích theo hệ tọa độ xoy

Có các thành phần

V_A, H_A và V_B, H_B .

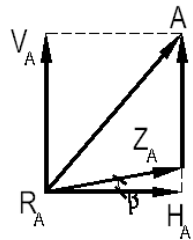
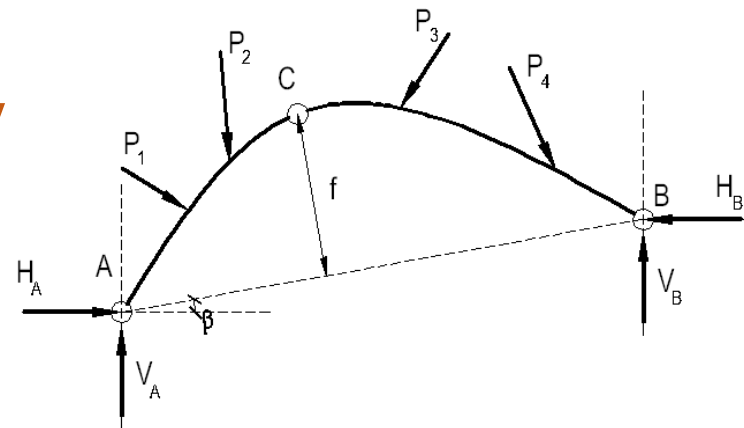
a. Xác định H_A, H_B

$$\begin{cases} H_A = Z_A \cos(\beta) \\ H_B = Z_B \cos(\beta) \end{cases}$$

Khi hệ chỉ chịu tải trọng đứng: $H_A = H_B = H$. và $Z_A = Z_B = Z$. Tức là lực vòm và lực xô tại hai gối là bằng nhau.

b. Xác định V_A, V_B

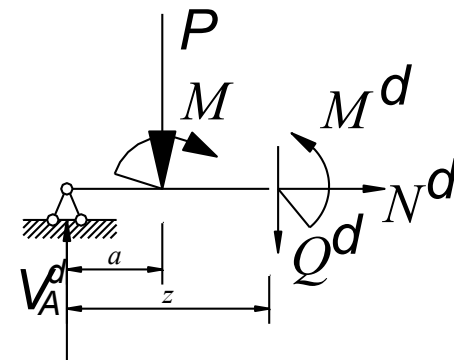
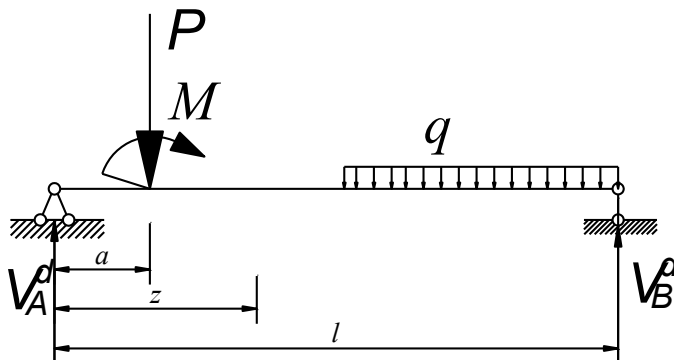
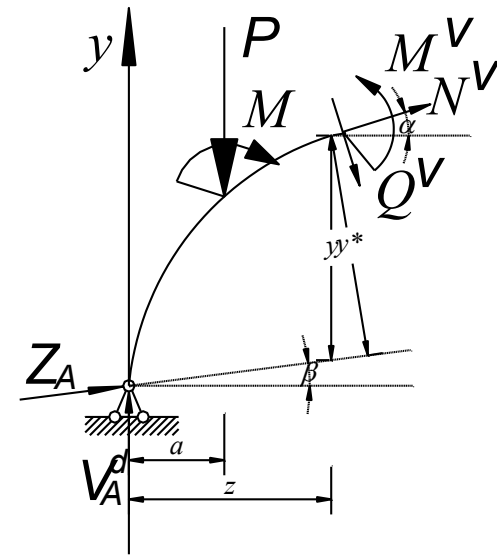
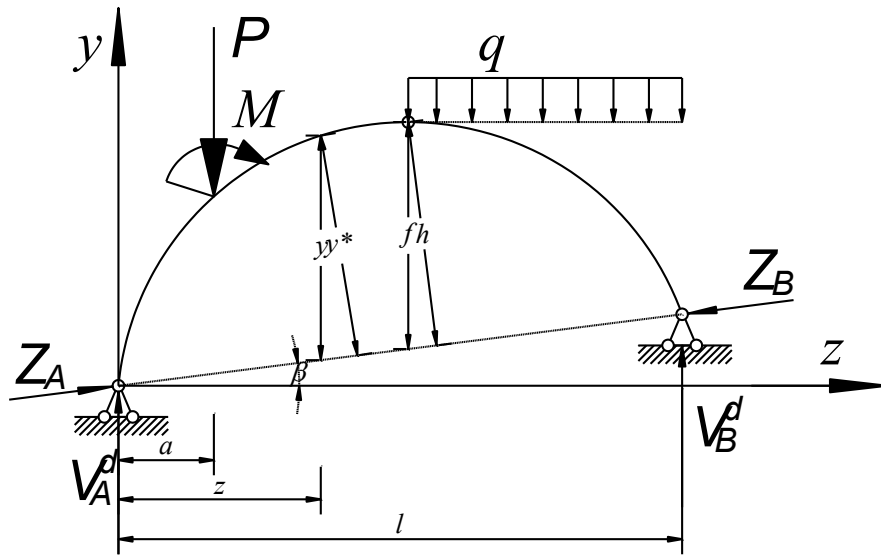
$$\begin{cases} V_A = V_A^d + Z_A \sin(\beta) = V_A^d + H_A \tan(\beta) \\ V_B = V_B^d - Z_B \sin(\beta) = V_B^d - H_B \tan(\beta) \end{cases}$$



c. Phản lực toàn phần

$$\begin{cases} R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} \\ R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} \end{cases}$$

2. Xác định nội lực



Dùng mặt cắt qua tiết diện K của vòm xét phần bên trái :

$$M_{(z)}^v = V_A^d \times z - P \times (z - a) + M - Z_A \times y_k^*$$

Xét một dầm đơn giản cùng chiều dài nhịp, chịu tải trọng như vòm, ta có:

$$M_{(z)}^d = V_A^d \times z - P \times (z - a) + M$$

$$M_{(z)}^v = M_{(z)}^d - Z_A \times y_k^*$$

$$y_k^* = y_k \times \cos \beta \text{ và } H_A = Z_A \times \cos \beta$$

Do đó biểu thức mômen trong vòm có dạng

$$M_{(z)}^v = M_{(z)}^d - H_A \times y_k$$

Với trường hợp vòm chịu tải thẳng đứng ta có $H_A = H_B = H$, vậy :

$$M_{(z)}^v = M_{(z)}^d - H \times y_k$$

$$Q_{(z)}^v = Q_{(z)}^d \times \cos \alpha - H \times \sin \alpha;$$

$$N_{(z)}^v = Q_{(z)}^d \times \sin \alpha - H \times \cos \alpha;$$

- Mômen uốn trong vòm thường nhỏ hơn mômen uốn trong dầm cùng nhịp và chịu cùng tải trọng
- Nếu chọn được tích số $H \times y_k$ luôn bằng đúng đại lượng $M_{(z)}^d$ thì mômen uốn tại mọi tiết diện của vòm đều bằng không, lúc này vòm hoàn toàn không chịu uốn. Gọi trục của vòm trong trường hợp này là trục hợp lý của vòm ba khớp. Trong trường hợp này sẽ tiết kiệm vật liệu mà còn có thể sử dụng được các loại vật liệu có tính chịu nén tốt nhưng chịu kéo kém như: gạch, đá, bê tông,...

3. Trục hợp lý của hệ vòm ba khớp

3.1. Định nghĩa: là trục của kết cấu vòm ba khớp được chọn sao cho thể tích của vòm có giá trị nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo điều kiện bền của vật liệu.

Tiết diện hợp lý của kết cấu phụ thuộc vào các yếu tố: nội lực M, Q, N và khả năng chịu lực của vật liệu sử dụng $[\sigma]$

$$A = A(M, Q, N, [\sigma]).$$

Do đó, thể tích V của vòm có chiều dài S sẽ là:
$$V = \int_0^S A(M, Q, N, [\sigma]) ds$$

Với những vòm có kích thước thông thường, chiều dài trục vòm và lực dọc ít thay đổi hơn nhiều so với mômen và lực cắt. Do đó có thể nói thể tích vòm do mômen quyết định.

Trục hợp lý của hệ vòm ba khớp là trục của kết cấu được chọn sao cho mômen uốn trên tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không (lực cắt cũng bằng không).

3.2. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm.

$$M_{(z)}^v = M_{(z)}^d - H \times y_k = 0 \Rightarrow y_{(z)} = \frac{M_{(z)}^d}{H}$$

Trục hợp lý có dạng biểu đồ mômen uốn trong dầm tương ứng với tung độ nhỏ hơn H lần.

3.3. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm.

$$y_{(z)} = \frac{M_{(z)}^d}{H} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{q}{H}$$

§ 3.5 HỆ GHÉP

1. Trình tự thực hiện:

- Phân tích cấu tạo của hệ

Phân biệt hệ chính, hệ phụ

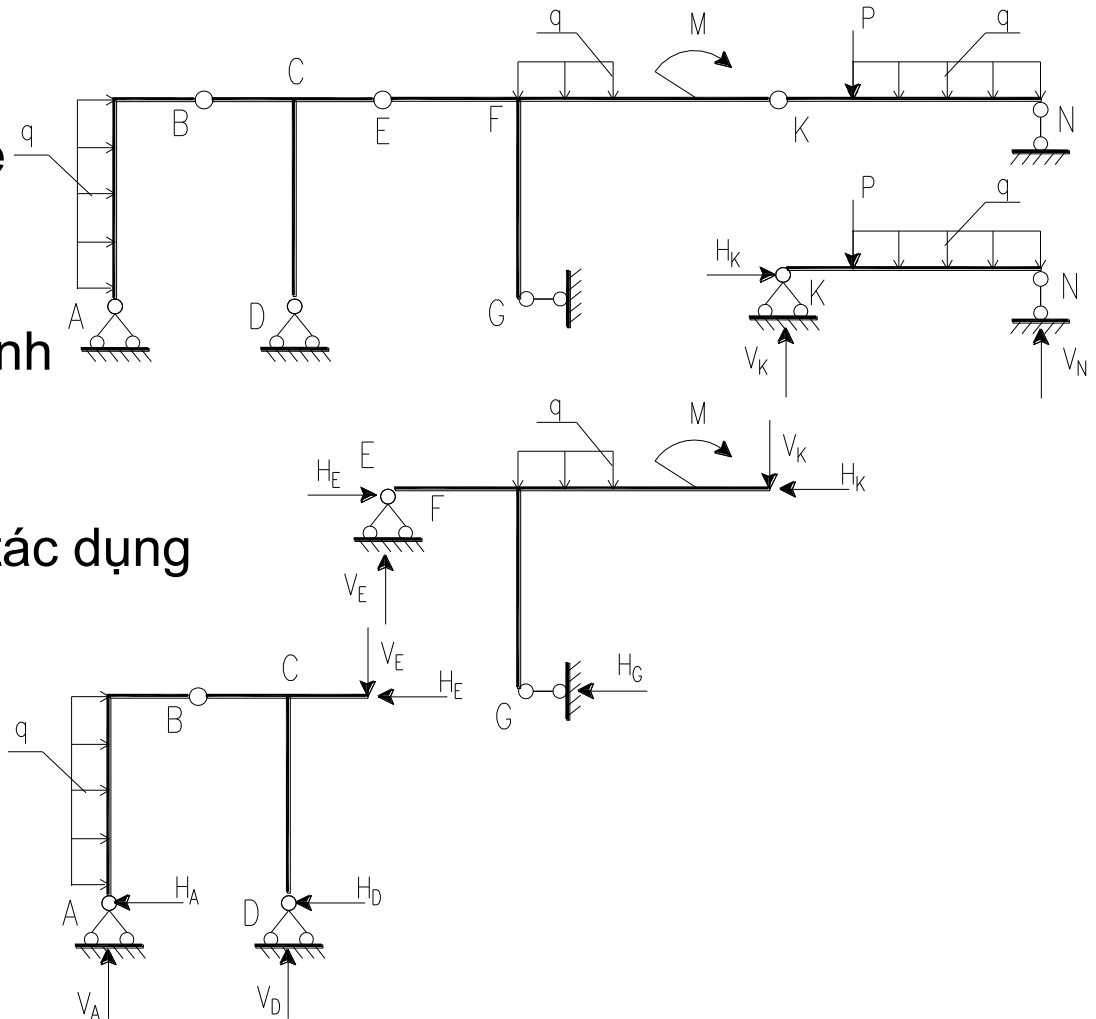
- Đưa hệ ghép về sơ đồ tính

tách biệt từng hệ đơn giản

- Tính hệ phụ trước dưới tác dụng của tải trọng

- Tính hệ chính dưới tác dụng của tải trọng và áp lực do hệ phụ truyền vào

(cùng giá trị nhưng ngược chiều)

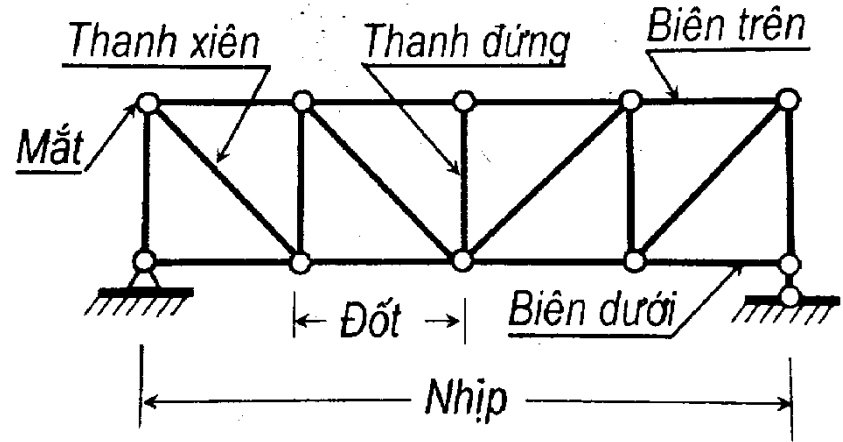


§ 3.5 HỆ DÀN

1. Định nghĩa: dàn là một hệ gồm các thanh thẳng liên kết với nhau bằng các khớp lý tưởng ở hai đầu.

2. Các giả thiết

- Mắt của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng.
- Tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt của dàn.
- Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng lên dàn.
- ❖ **Kết luận:** các thanh trong dàn chỉ chịu kéo hoặc nén (trong dàn chỉ tồn tại lực dọc N)



3. Tính dàn bằng giải tích

3.1. Phương pháp tách mắt

❖ Trình tự thực hiện.

- Xác định phản lực tại gối tựa
- Dùng các mặt cắt, cắt quanh mắt dàn, tách mắt dàn ra khỏi dàn. Thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai thanh chưa biết lực dọc
- Lần lượt xét từng mắt dàn, thay thế tác dụng của những thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó, luôn giả thiết là dương (hướng từ mắt ra ngoài).
- Khi xét các mắt dàn ta nhận thấy mỗi mắt dàn là một hệ lực đồng quy. Mỗi hệ lực phẳng đồng quy chỉ viết được hai phương trình cân bằng

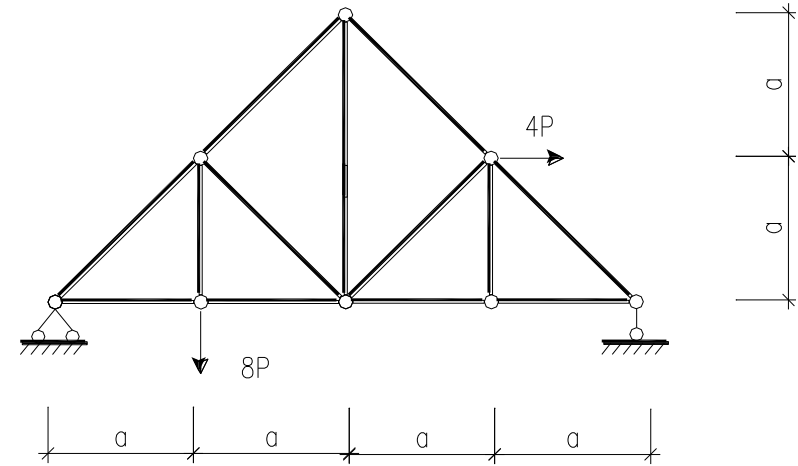
$$\sum X = 0; \sum Y = 0$$

❖ **Ví dụ:** tính lực dọc trong các thanh của dàn bên.

▪ Xác định phản lực:

Đặt lần lượt các mắt dàn có thứ tự từ 1 đến 8.

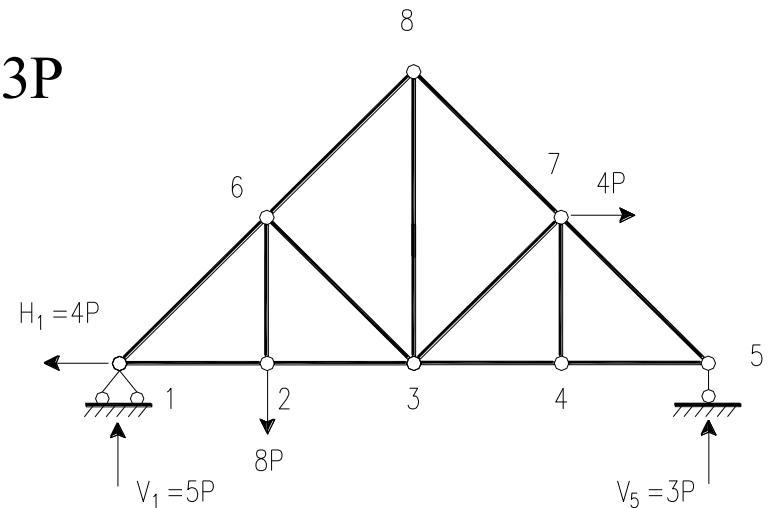
Dựa vào các phương trình cân bằng, xác định được các phản lực :



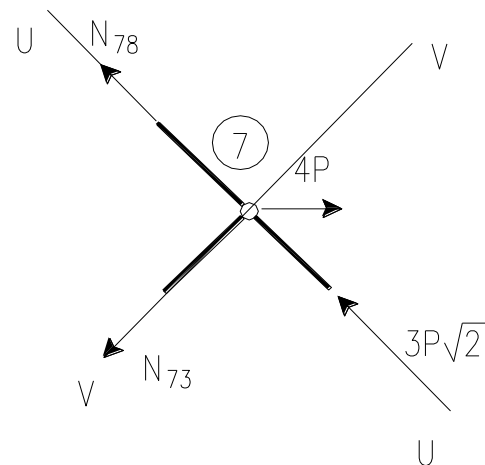
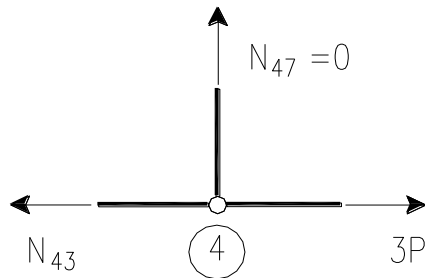
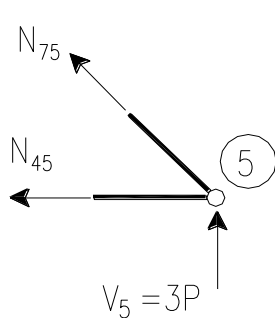
$$\sum M_1 = V_5 \cdot 4a - 8P \cdot a - 4P \cdot a = 0 \Rightarrow V_5 = 3P$$

$$\sum Y = V_1 - 8P - 4P + 3P = 0 \Rightarrow V_1 = 5P$$

$$\sum X = H_1 - 4P = 0 \Rightarrow H_1 = 4P$$



- Tách mắt, xác định lực dọc (lần lượt tách mắt 5, 4, 7, 8, 3, 2 và 1).



- ✓ Tách mắt 5: chiếu lên các trục Y và X, thu được:

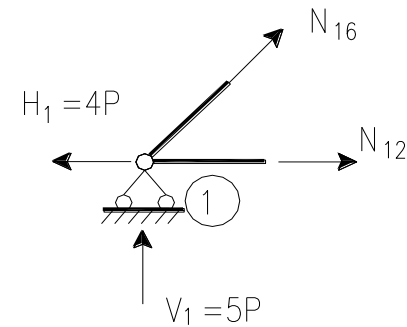
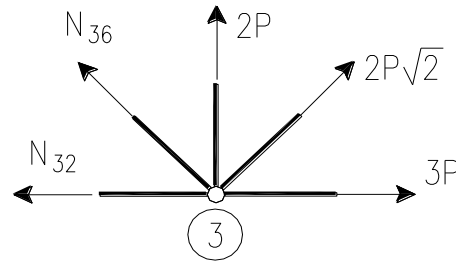
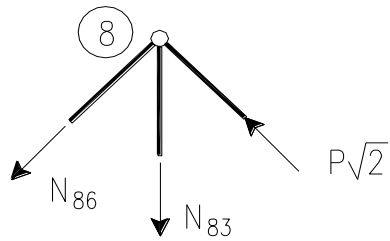
$$\sum Y = \frac{N_{75}}{\sqrt{2}} + 3P = 0 \Rightarrow N_{75} = -3P\sqrt{2} \quad ; \quad \sum X = N_{45} - \frac{3P\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{45} = 3P$$

- ✓ Tách mắt 4: chiếu lên các trục Y và X xác định được: $N_{47} = 0$;

$$N_{43} = N_{45} = 3P$$

- ✓ Tách mắt 7: chiếu lên các trục U và V như hình vẽ, thu được:

$$\sum U = N_{78} + 3P\sqrt{2} - \frac{4P}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{78} = -P\sqrt{2} \quad ; \quad \sum V = N_{73} - \frac{4P}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{73} = 2P\sqrt{2}$$



✓ Tách mắt 8: chiếu lên các trục U và V, thu được:

$$\sum U = \frac{N_{83}}{\sqrt{2}} - P\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{83} = 2P \quad \sum V = N_{86} + \frac{2P}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{86} = -P\sqrt{2}$$

✓ Tách mắt 3: chiếu lên các trục Y và X, thu được:

$$\sum Y = \frac{N_{36}}{\sqrt{2}} + 2P + \frac{2P\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{36} = -4P\sqrt{2} \quad \sum X = N_{32} - 3P - \frac{2P\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{4P\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{32} = 9P$$

✓ Tách mắt 2: chiếu lên các trục Y và X, thu được: $N_{26} = 8P$;

$$N_{23} = N_{21} = 9P$$

✓ Tách mắt 1: chiếu lên các trục Y và X, thu được:

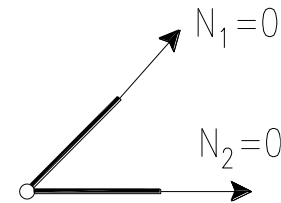
$$\sum Y = \frac{N_{16}}{\sqrt{2}} + 5P = 0 \Rightarrow N_{16} = -5P\sqrt{2} \quad \sum X = N_{12} - 4P - \frac{5P\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{12} = 9P$$

So sánh kết quả N_{12} khi tách mắt 1 và mắt 2 ta thấy kết quả đều trùng nhau

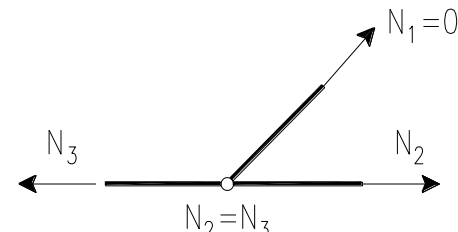
❖ Gợi ý: để xác định N của thanh thứ 1 nên lập phương trình hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chưa biết thứ 2.

❖ Hệ quả (hay còn gọi là nguyên tắc xác định thanh 0):

➤ Tại 1 mắt có 2 thanh không thẳng hàng, không có tải trọng tác dụng thì lực dọc trong 2 thanh đó bằng 0;



➤ Tại 1 mắt có 3 thanh, trong đó có 2 thanh thẳng hàng, không có lực tác dụng thì lực dọc trong 2 thanh thẳng hàng bằng nhau và lực dọc trong thanh thứ 3 bằng 0.



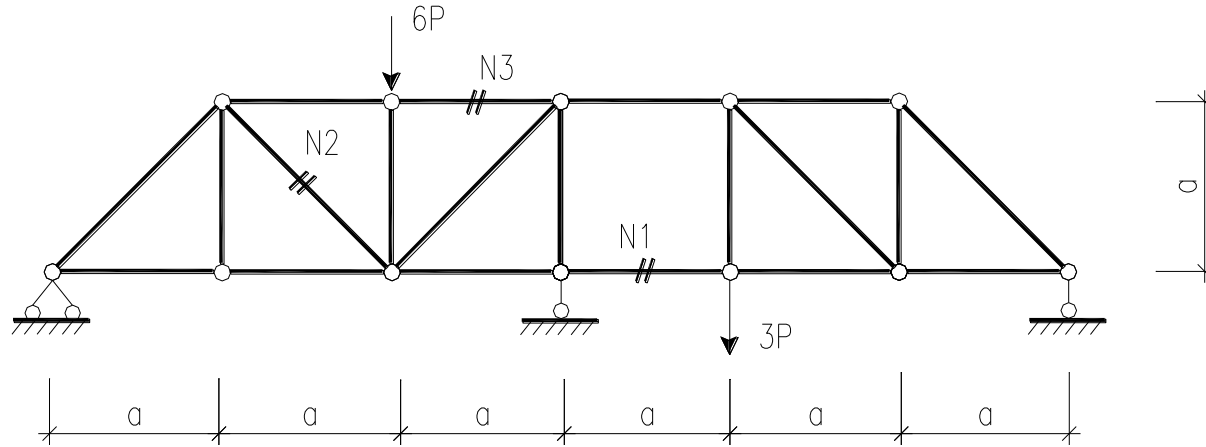
3.2. Phương pháp mặt cắt đơn giản

❖ Trình tự thực hiện

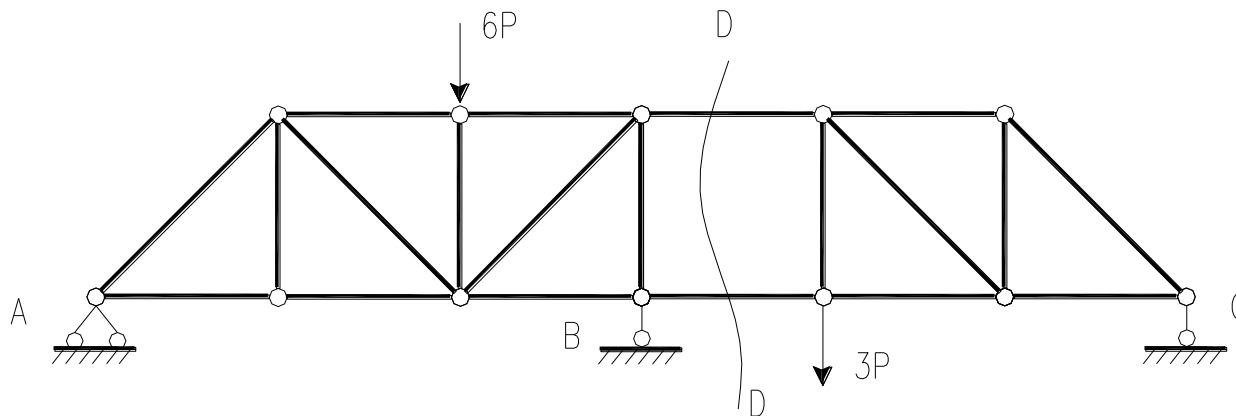
- Xác định phản lực (dựa vào các phương trình cân bằng).
- Dùng một mặt cắt, cắt qua các thanh cần xác định nội lực và chia dàn làm hai phần độc lập (điều kiện là số thanh chưa biết N không quá 3).
- Thay thế tác dụng của phần bị cắt bằng lực dọc N của các thanh vừa bị cắt.
- Xác định lực dọc dựa vào các phương trình cân bằng.

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0$$

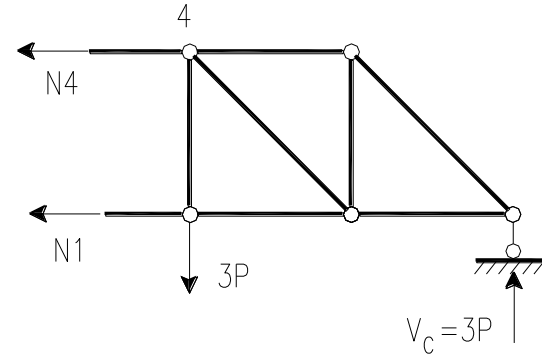
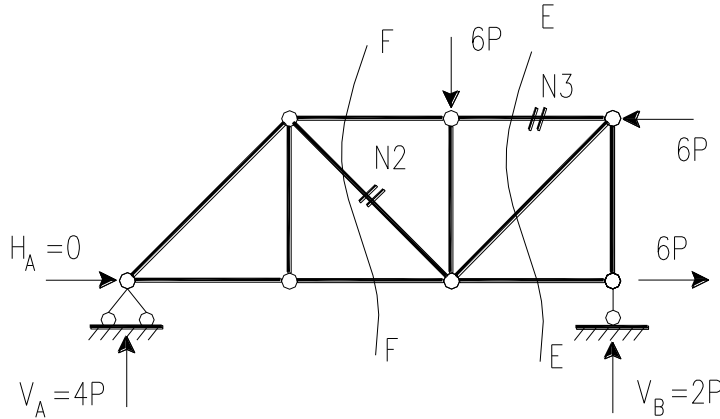
- ❖ Ví dụ: vận dụng phương pháp mặt cắt xác định lực dọc các thanh N_1 , N_2 , N_3 .



- Đây là hệ dàn ghép TĐ. Hệ bên trái nối với đất bởi gối cố định và gối di động đóng vai trò hệ chính, dàn TĐ bên phải nối với hệ chính bởi 2 thanh song song nằm ngang và nối với đất bởi gối di động ngoài cùng bên phải đóng vai trò hệ phụ



- Tách hệ bởi mặt cắt D-D, tính với hệ phụ



$$\sum Y = V_C - 3P = 0 \Rightarrow V_C = 3P$$

$$\sum M_4 = N_1 \cdot a - 3P \cdot 2a = 0 \Rightarrow N_1 = 6P$$

$$\sum X = N_4 + 6P = 0 \Rightarrow N_4 = -6P$$

- Tính với hệ chính
- Xác định phản lực:

$$\sum X = H_A + 6P - 6P = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

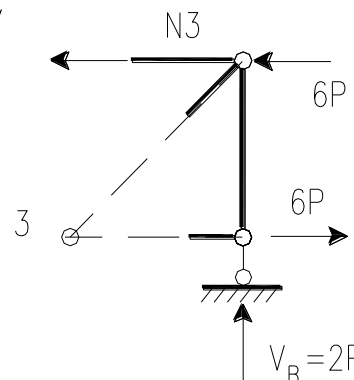
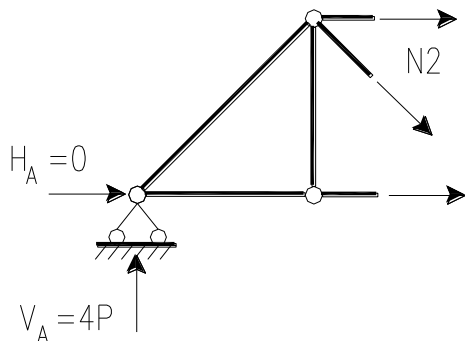
$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 6P \cdot 2a + 6P \cdot a = 0 \Rightarrow V_B = 2P$$

$$\sum Y = V_A + 2P - 6P = 0 \Rightarrow V_A = 4P$$

- Áp dụng mặt cắt E-E và F-F, lần lượt xác định :

✓ Mặt cắt F-F: xét phần trái

$$\sum Y = \frac{N_2}{\sqrt{2}} - 4P = 0 \Rightarrow N_2 = 4P\sqrt{2}$$



✓ Mặt cắt E-E: xét phần phải

$$\sum M_3 = N_3 \cdot a + 6P \cdot a + 2P \cdot a = 0 \Rightarrow N_3 = -8P$$

Gợi ý:

- Để xác định N của thanh mà 2 thanh còn lại cắt nhau, nên lập phương trình cân bằng dưới dạng tổng M đối với giao điểm của 2 thanh đó;
- Nếu 2 thanh còn lại song song với nhau, nên lập phương trình cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu của các lực lên phương vuông góc với 2 thanh song song.

3.3. Phương pháp mặt cắt phối hợp

- Phương pháp này được áp dụng khi phương pháp mặt cắt đơn giản không áp dụng được, nghĩa là khi tại 1 mặt cắt, số thanh chưa biết N lớn hơn 3.
- Mục đích là thiết lập số phương trình cân bằng ít nhất có thể chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó.
- Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua 4 thanh chưa biết N mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm lực dọc và chia hệ thành 2 phần độc lập thì sử dụng 2 mặt cắt phối hợp. Với 2 mặt cắt sẽ tìm được 2 nội lực với 2 phương trình.
- ✓ Hai mặt cắt phải cùng đi qua 2 thanh cần tìm N và mỗi mặt cắt chỉ cắt qua 2 thanh khác chưa cần tìm N . Hai thanh chưa cần tìm N của mặt cắt thứ 1 không trùng với 2 thanh chưa cần tìm N của mặt cắt thứ 2.
- ✓ Trong mỗi mặt cắt thiết lập 1 phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia.

❖ **Ví dụ** : vận dụng phương pháp mặt cắt phối hợp xác định lực dọc các thanh N_1, N_2

- Xác định phản lực:

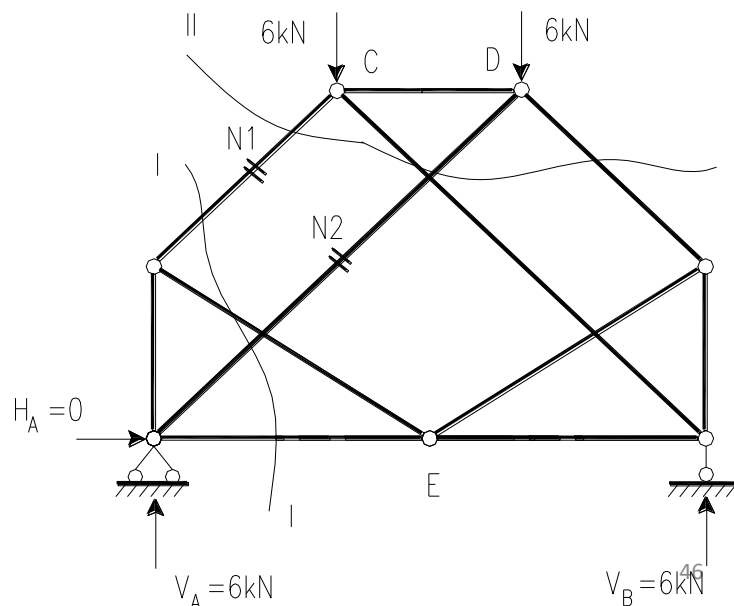
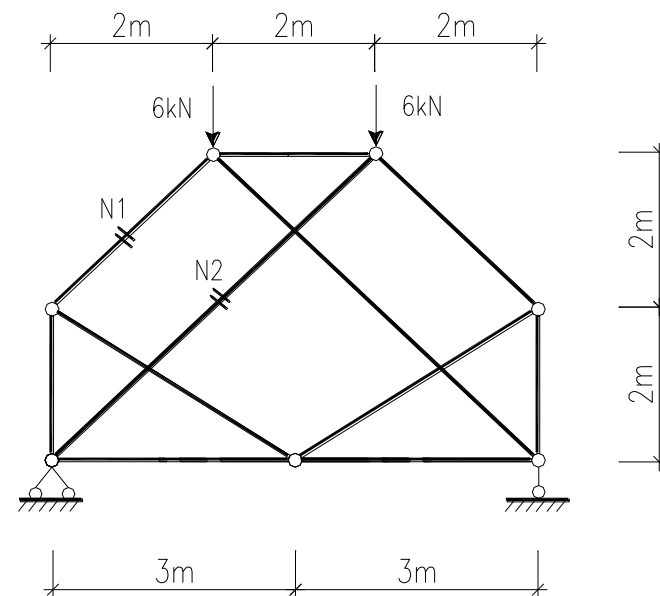
$$\sum X = H_A = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

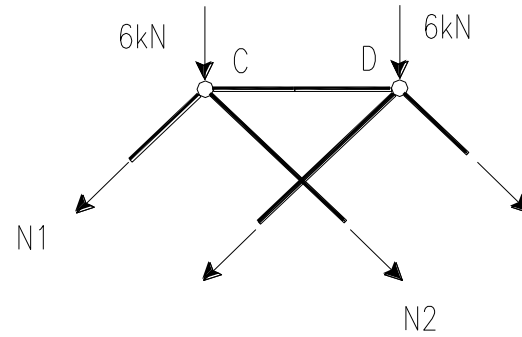
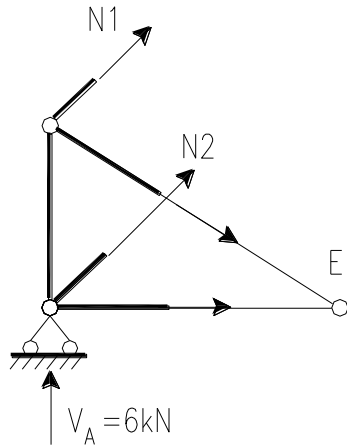
$$\sum M_A = V_B \cdot 6 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = 6(\text{kN})$$

$$\sum Y = V_A + 6 - 6 - 6 = 0 \Rightarrow V_A = 6(\text{kN})$$

- Xác định N_1, N_2 :

Hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng
nên lực dọc các thanh cũng sẽ đối xứng





✓ Mặt cắt I-I $\sum M_E = N_1 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} + N_2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + 6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow 5N_1 + 3N_2 = -18\sqrt{2}$

✓ Mặt cắt II-II $\sum M_D = N_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + N_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + 6 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = -6\sqrt{2}$

✓ Giải 2 phương trình a và b, thu được

$$N_1 = 0; N_2 = -6\sqrt{2} \quad (\text{kN})$$