

Chương 3

Xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

3.1. Bài giải. Để vẽ các đường ảnh hưởng, ta chọn đường chuẩn vuông góc với phương của tải trọng di động.

♦ **Đ.a.h. phản lực.** Từ điều kiện cân bằng của toàn hệ, ta có:

$$\begin{aligned}\sum Z &= 0, & \text{suy ra} & & H_A &= 0; \\ \sum M_B &= 0, & \text{suy ra} & & V_A &= (l-z) / l; \\ \sum M_A &= 0, & \text{suy ra} & & V_B &= z / l.\end{aligned}$$

Từ các phương trình trên, dễ dàng vẽ được các đ.a.h. phản lực (hình 3.1b, c, d).

♦ **Đ.a.h. nội lực tại tiết diện 1** (tiết diện ở trong nhịp của dầm)

• Khi $P = 1$ di động trên phần dầm bên trái tiết diện 1 ($-a \leq z \leq d$). Xét cân bằng phần bên phải tiết diện 1:

$$\begin{aligned}M_1 &= V_B(l-d) = z(l-d) / l; \\ Q_1 &= -V_B \cos \alpha = -z \cos \alpha / l; \\ N_1 &= V_B \sin \alpha = -z \sin \alpha / l.\end{aligned}$$

Từ các phương trình này ta vẽ được phần trái của các đ.a.h.

• Khi $P = 1$ di động trên phần dầm bên phải tiết diện 1 ($d \leq z \leq l+b$). Xét cân bằng phần bên trái tiết diện 1:

$$\begin{aligned}M_1 &= V_A d = (l-z) / l; \\ Q_1 &= V_A \cos \alpha = (l-z) \cos \alpha / l; \\ N_1 &= -V_A \sin \alpha = -(l-z) \sin \alpha / l.\end{aligned}$$

Từ các phương trình này ta vẽ được phần phải của các đ.a.h.

Kết quả tìm được như trên hình 3.1e, f, g.

♦ **Đ.a.h. nội lực tại tiết diện 2** (tiết diện ở đầu thừa của dầm)

• Khi $P = 1$ di động trên phần dầm bên trái tiết diện 2 [$-a \leq z \leq -(a-c)$]. Xét cân bằng phần đầu thừa bên trái tiết diện 2:

$$M_2 = -l \cdot [z - (a-c)]; \quad Q_2 = -l \cdot \cos \alpha; \quad N_2 = l \cdot \sin \alpha.$$

Từ các phương trình này ta vẽ được phần trái của các đ.a.h.

- Khi $P = 1$ di động trên phần dầm bên phải tiết diện 2 $[-(a-c) \leq z \leq (l+b)]$.

Xét cân bằng phần bên trái tiết diện 2:

$$M_2 = 0; \quad Q_2 = 0; \quad N_2 = 0.$$

Từ các phương trình này, ta vẽ được phần phải (trùng với đường chuẩn) của các đ.a.h.

Kết quả như trên hình 3.1h, i, k.

- ♦ **Đ.a.h. nội lực tại tiết diện 3.** Tiết diện 3 thuộc loại tiết diện ở đầu thừa của dầm và là trường hợp đặc biệt của tiết diện 2. Do đó có thể sử dụng các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 2 để suy ra đ.a.h. nội lực tại tiết diện 3 bằng cách cho c tiến tới không. Kết quả như trên hình 3.1l, m, n.

- ♦ **Đ.a.h. nội lực tại tiết diện 4.** Tiết diện 4 ở tại gối tựa, tại đó có sự đột biến về nội lực nên cần khảo sát tách biệt hai tiết diện: bên trái và bên phải gối tựa.

- *Tiết diện 4 ở bên trái gối tựa:* thuộc loại tiết diện ở đầu thừa của dầm và là trường hợp đặc biệt của tiết diện 2. Do đó có thể sử dụng các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 2 để suy ra đ.a.h. nội lực tại tiết diện này bằng cách cho c tiến tới a . Kết quả như trên hình 3.1o, p, r.
- *Tiết diện 4 ở bên phải gối tựa:* thuộc loại tiết diện ở trong nhịp của dầm và là trường hợp đặc biệt của tiết diện 1. Do đó có thể sử dụng các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 1 để suy ra đ.a.h. nội lực tại tiết diện này bằng cách cho d tiến tới không. Kết quả như trên hình 3.1o, q, s.

Nhận xét :

- * Tại gối A có phản lực dưới dạng lực tập trung nên chỉ gây ra sự đột biến về lực cắt và lực dọc mà không gây ra sự đột biến về mômen uốn. Do đó, đ.a.h. mômen uốn tại hai tiết diện ở hai bên gối A trùng với nhau.
- * Đối chiếu với trường hợp dầm có trục nằm ngang đã nghiên cứu trong phân lý thuyết, trong trường hợp trục dầm nghiêng so với phương ngang theo góc α và lực di động $P=1$ thẳng đứng, ta nhận thấy:
 - Các đ.a.h. mômen uốn không thay đổi.
 - Các đ.a.h. lực cắt và lực dọc có thể suy ra từ đ.a.h. lực cắt của dầm nằm ngang bằng cách nhân với các hệ số $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

3.2. Đáp số. Cho trên hình 3.2.

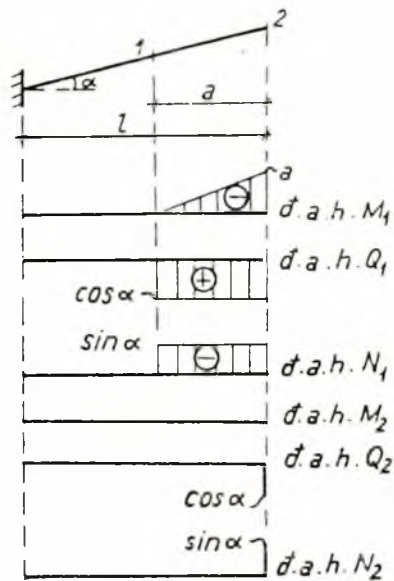
3.3. Chỉ dẫn. Đưa hệ về trường hợp đơn giản đặt trên hai gối tựa: gối A và gối giả tạo B là giao điểm của hai thanh tựa bên phải.

Kết quả như trên hình 3.3.

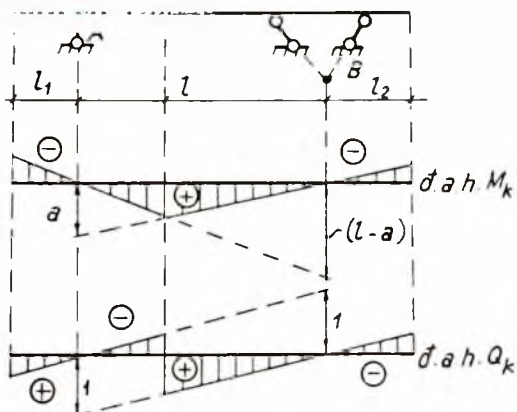
3.4. Chỉ dẫn. Thực hiện tương tự như trong bài 3.3. Trong trường hợp này gối giả tạo B ở xa vô cùng nên phần phải của đ.a.h. song song với đường chuẩn.

Kết quả như trên hình 3.4.

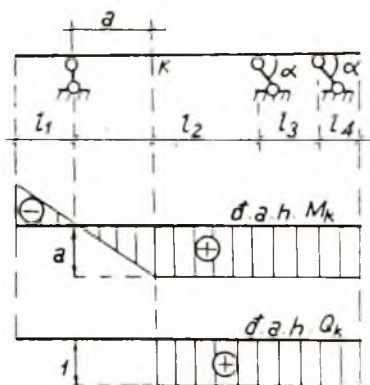
3.5. Đáp số. Cho trên hình 3.5.



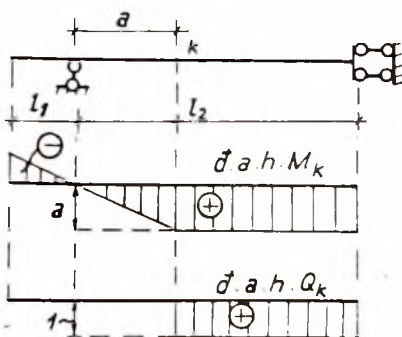
Hình 3.2



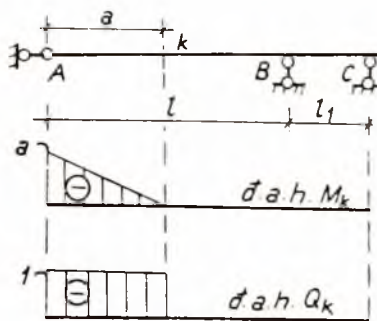
Hình 3.3



Hình 3.4



Hình 3.5



Hình 3.6

3.6. Chỉ dẫn. Lực $P = l$ di động theo phương thẳng đứng nên phản lực nằm ngang tại A luôn luôn bằng không. Do đó, khi vẽ đ.a.h. nội lực tại tiết diện k có thể xem hệ như dầm công xôn với đầu A là đầu tự do. Kết quả như trên hình 3.6.

3.7. Bài giải. Để vẽ các đường ảnh hưởng, ta chọn đường chuẩn theo trục của các thanh trong hệ. Trước tiên, cần lập các biểu thức của phản lực R_A , R_B , và H_A khi tải trọng $P = l$ di chuyển trên hệ.

Từ điều kiện cân bằng của toàn hệ, ta có:

$$\begin{aligned}\sum X &= -H_A + P = 0, & \text{suy ra} & \quad H_A = P = l; \\ \sum M_B &= R_A \cdot l - P y = 0, & \text{suy ra} & \quad R_A = P y / l = y / l; \\ \sum M_A &= R_B \cdot l - P y = 0, & \text{suy ra} & \quad R_B = P y / l = y / l.\end{aligned}$$

Tiếp đó lập các biểu thức và vẽ đ.a.h. nội lực tại tiết diện k đã chỉ định. Cần chia thành bốn trường hợp để xét:

◆ $P = l$ di động trên đoạn AC ($0 \leq y \leq h$)

$$M_k = R_B \cdot l / 2 = (y / l) \cdot l / 2 = y / 2;$$

$$Q_k = -R_B = -y / l;$$

$$N_k = 0.$$

• khi $y = 0$:

$$M_k = Q_k = N_k = 0;$$

• khi $y = h$: $M_k = h / 2$;

$$Q_k = -h / l; \quad N_k = 0.$$

◆ $P = l$ di động dọc trục thanh, trên đoạn Ck :

$$M_k = R_B \cdot l / 2 = (h / l) \cdot l / 2 = h / 2; \quad Q_k = -R_B = -h / l; \quad N_k = 0.$$

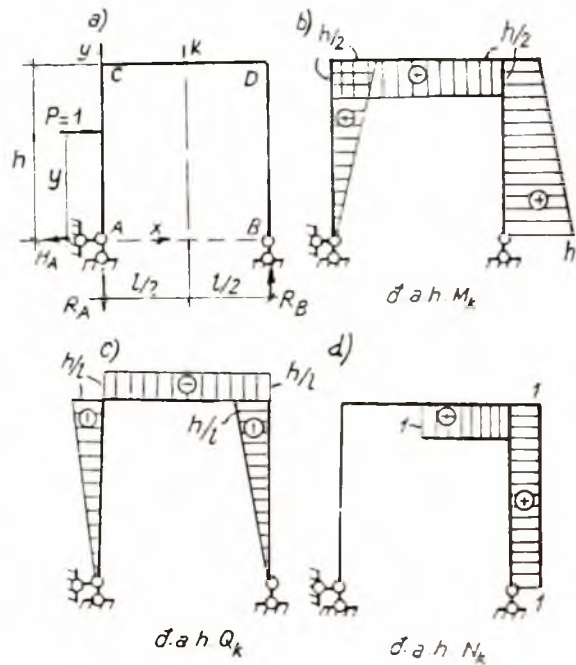
◆ $P = l$ di động dọc trục thanh, trên đoạn kD :

$$M_k = R_B \cdot l / 2 = (h / l) \cdot l / 2 = h / 2; \quad Q_k = -R_B = -h / l; \quad N_k = P = l.$$

◆ $P = l$ di động trên đoạn DB ($h \leq y \leq l$)

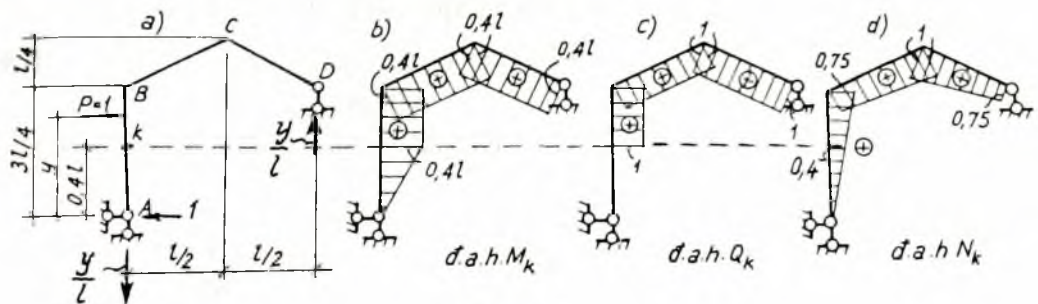
$$M_k = H_A h - R_A l / 2 = h + y / 2; \quad Q_k = -R_A = y / l; \quad N_k = P = l.$$

Từ các biểu thức trên, ta vẽ được các đ.a.h. M_k , Q_k , N_k như trên hình 3.7.

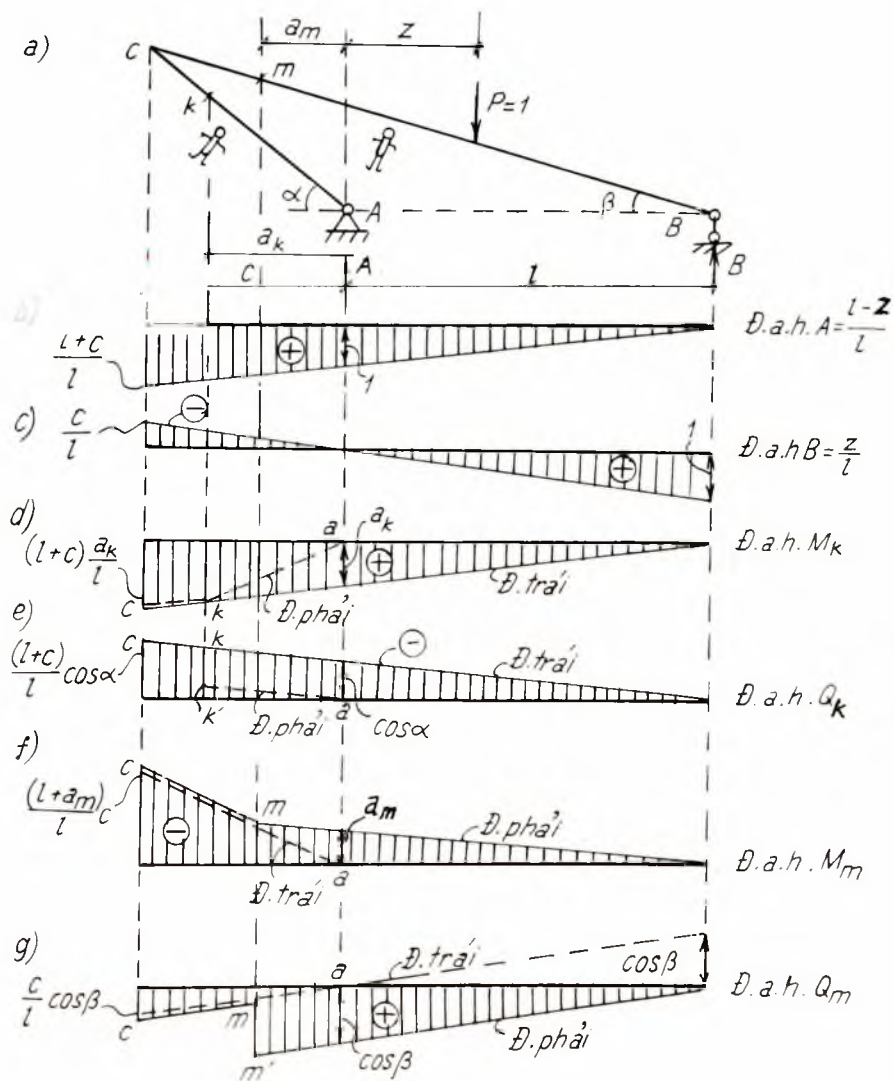


Hình 3.7

3.8. Đáp số. Cho trên hình 3.8.



Hình 3.8



Hình 3.9

3.9. Chỉ dẫn. Trong trường hợp này ta chọn đường chuẩn vuông góc với tải trọng di động $P=I$. Với người quan sát quy định như trên hình 3.9:

- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện k được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản với gối A là gối phải, gối B là gối trái.

Khi $P=I$ di động trên đoạn AC , đ.a.h. M_k là các đoạn ck và ka (hình 3.9d) đ.a.h. Q_k là các đoạn ck và $k'a$ (hình 3.9e).

- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện m được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản với gối A là gối trái, gối B là gối phải. Khoảng cách a_m từ gối trái đến tiết diện m có giá trị âm nên tại điểm ứng dưới gối trái cần dựng tung độ a_m lên phía trên.

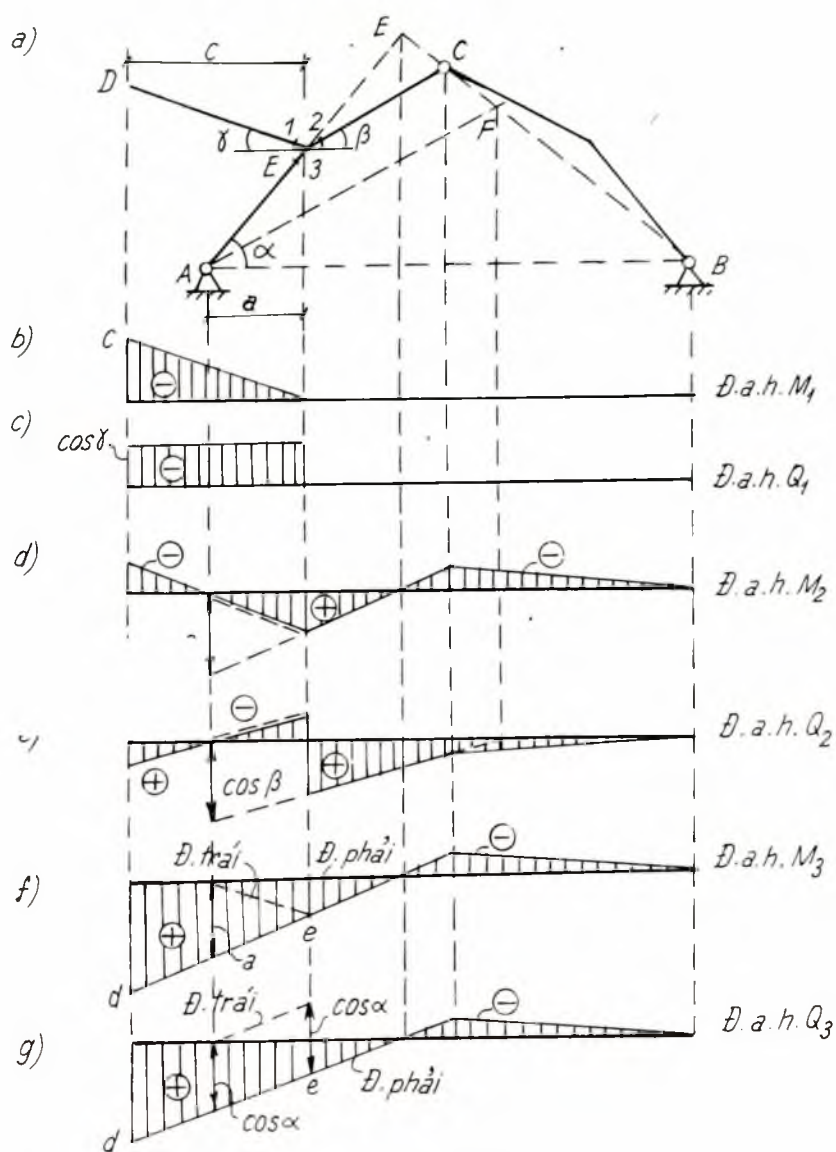
Khi $P=I$ di động trên đoạn AC , đ.a.h. M_m là các đoạn cm và ma (hình 3.9f), đ.a.h. Q_m là các đoạn cm và ma (hình 3.9g).

3.10. Chỉ dẫn

- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 1 được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện ở đầu thừa (hình 3.10b, c).
- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 2 được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp của hệ ba khớp. Khi $P=I$ di động trên đoạn AE , đ.a.h. là đoạn vẽ đứt nét trên các hình 3.10d, e.
- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 3 được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp của hệ ba khớp với chú ý là đoạn DEC thuộc phần bên phải của tiết diện 3 . Do đó: khi $P=I$ di động trên đoạn DE , đ.a.h. là đoạn thẳng de kéo dài của đường phải; khi $P=I$ di động trên đoạn AE , đ.a.h. là đường trái, đoạn vẽ đứt nét trên các hình 3.10f, g.

3.11. Chỉ dẫn

- ◆ Đ.a.h. lực dọc trong thanh căng được vẽ theo mẫu đ.a.h. lực xô trong hệ ba khớp tương ứng là A^*CB^* . Kết quả như trên hình 3.11b.
- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 1 được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản tương ứng AB với góc nghiêng của tiếp tuyến tại 1 là 45° . Kết quả như trên các hình 3.11c, d, e.
- ◆ Các đ.a.h. nội lực tại tiết diện 2 được vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp hệ ba khớp tương ứng là A^*CB^* với góc nghiêng của tiếp tuyến tại 2 là góc β . Các điểm không của đoạn đ.a.h. M_2 , đ.a.h. Q_2 và đ.a.h. N_2 , khi $P=I$ di động trên $C2$ lần lượt là các điểm f (hình 3.11f), g (hình 3.11g) và h (hình 3.11h) ứng dưới các điểm F , G , H trên hình 3.11a.

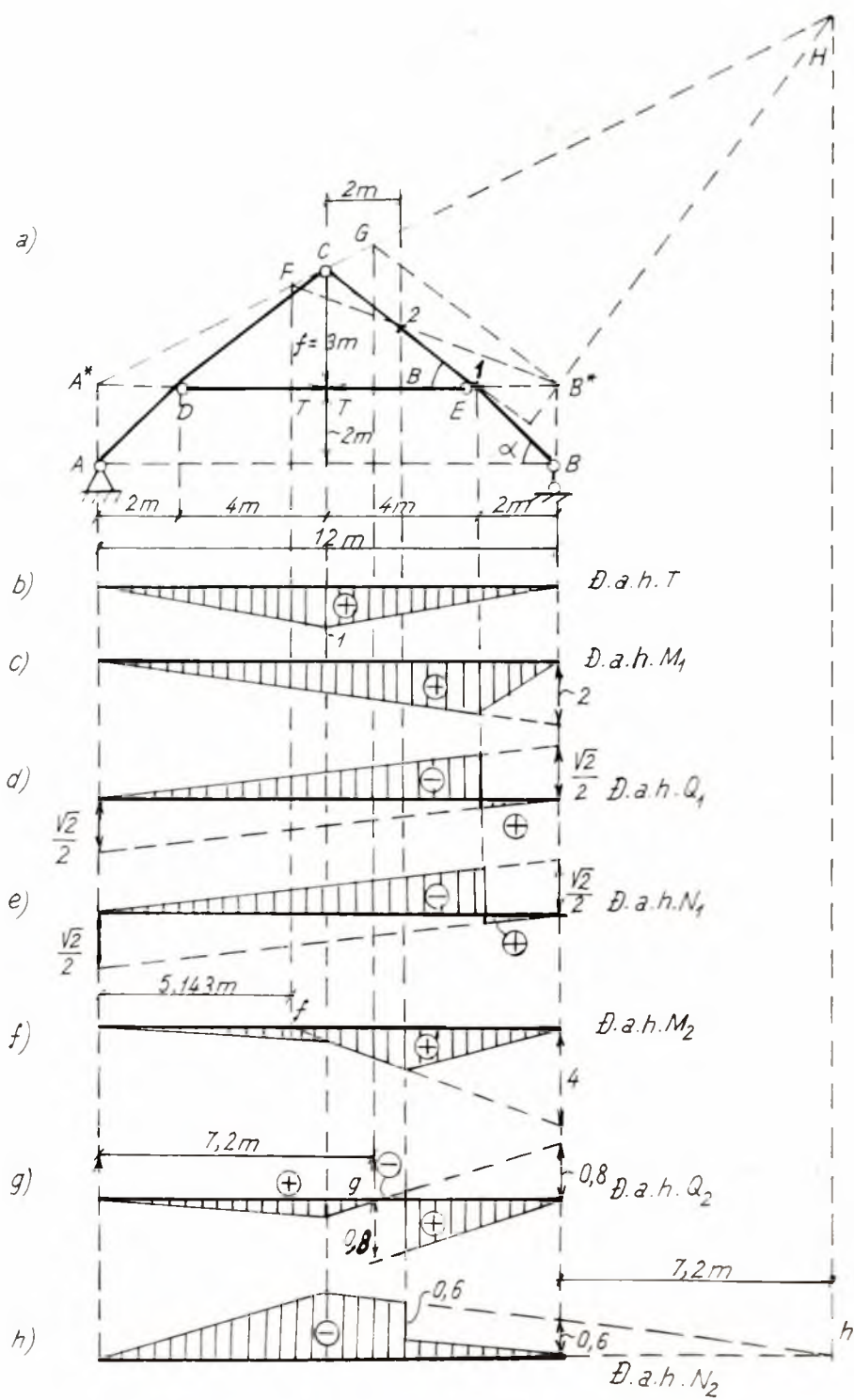


Hình 3.10

3.12. Bài giải

♦ Tiết diện k

- $\text{Đ.a.h. } M_k$ - Điểm không của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm D của đường BC và Ak (hình 3.12a). Nối điểm không này với tung độ bằng c ứng dưới gối A sẽ được đường phải. Phân tích dụng của đường phải tương ứng với khi P di động trên đoạn kC .



Hình 3.11

Nối điểm có tung độ bằng không ứng dưới gối A với tung độ của đường phải ứng dưới k sẽ được đường trái. Phần thích dụng của đường trái tương ứng với khi P di động từ F đến k .

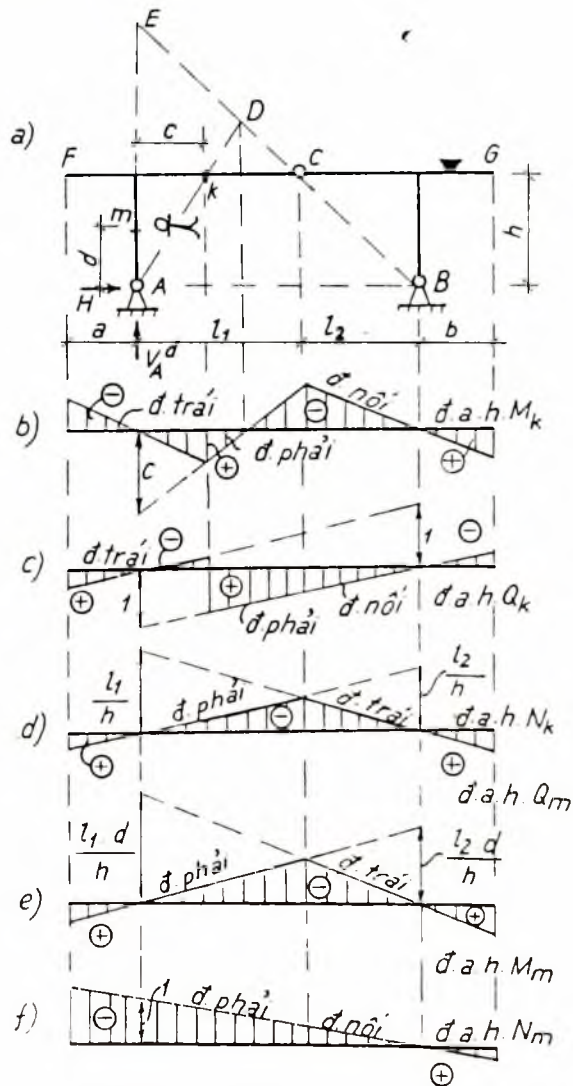
Nối tung độ của đường phải ứng dưới khớp C với điểm không ứng dưới gối B sẽ được đường nối. Phần thích dụng của đường này tương ứng với khi P di động từ C đến G .

Đ.a.h. M_k vẽ trên hình 3.12b.

- Đ.a.h. Q_k - Điểm không của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm B của đường BC và đường kẻ từ A song song với tiếp tuyến tại điểm

không này với tung độ bằng $\cos \alpha$ (trong trường hợp này, $\alpha = 0$ nên $\cos \alpha = 1$) ứng dưới gối A sẽ được đường phải. Phần thích dụng của đường phải tương ứng với khi P di động trên đoạn kC .

Từ điểm có tung độ bằng không ứng dưới gối a kẻ đường song song với đường phải được đường trái. Phần thích dụng của đường trái tương ứng với khi P di động từ F đến k .



Hình 3.12

Nối tung độ của đường phải ứng dưới khớp C với tung độ bằng không

ứng dưới gối B sẽ được đường nối. Phân tích dụng của đường này tương ứng với khi P di động từ C đến G .

Đ.a.h. Q_k vẽ trên hình 3.12c.

- Đ.a.h. N_k - Với mọi vị trí của lực P , ta luôn luôn có: $N_k = -H$.

Do đó:
$$d.a.h. N_k = -d.a.h. H.$$

Như vậy, đ.a.h. N_k chính là đ.a.h. lực xô H đã biết nhưng trái dấu.

Đ.a.h. N_k vẽ trên hình 3.12d.

♦ Tiết diện m

- Đ.a.h. M_m - Có thể thực hiện theo một trong hai cách sau:

1) Áp dụng quy tắc chung như đã thực hiện với tiết diện k . Trong trường hợp này, điểm không của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm E của đường BC và Am , còn tung độ của đường phải ứng dưới gối A bằng không. Hai điểm cần tìm của đường phải trùng với nhau nên chưa xác định được đường phải. Trong tình huống này cần sử dụng tung độ ứng dưới gối phải của đường phải. Tung độ này bằng $-(l_2.y_m) / f = -(l_2.d) / h$. Các bước tiếp sau, thực hiện tương tự như khi vẽ đ.a.h. M_k .

2) Vẽ theo đ.a.h. lực xô H đã biết. Với mọi vị trí của lực di động P , ta luôn luôn có: $M_m = -H.d$.

Do đó:
$$d.a.h. M_m = -(d.a.h. H).d.$$

Như vậy, đ.a.h. M_m chính là đ.a.h. lực xô H đã biết nhân với hằng lượng d nhưng trái dấu.

Đ.a.h. M_m vẽ trên hình 3.12e.

- Đ.a.h. Q_m - Biện pháp đơn giản nhất là vẽ theo đ.a.h. lực xô H . Với mọi vị trí của lực di động P , ta luôn luôn có: $Q_m = -H$.

Do đó:
$$d.a.h. Q_m = -d.a.h. H.$$

Đ.a.h. Q_m giống như đ.a.h. N_k đã vẽ trên hình 3.12d.

- Đ.a.h. N_m - Có thể thực hiện theo một trong hai cách sau:

1) Áp dụng quy tắc chung khi vẽ đ.a.h. lực dọc trong vòm. Trong trường hợp này, điểm không của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm B của đường BC và đường kẻ từ A vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh tại m . Nối điểm không này với tung độ bằng $-\sin\alpha = -\sin 90^\circ = -1$ ứng dưới gối A sẽ được đường phải. Phân tích dụng

2) Vẽ theo đ.a.h. của thành phần phản lực thẳng đứng tại A trong dầm tương ứng. Với mọi vị trí của lực di động P , ta luôn luôn có:

Do đó: $d.a.h. N_m = -d.a.h. V_A^d$.

Như vậy, đ.a.h. N_m chính là đ.a.h. V_A^d nhưng trái dấu (hình 3.12f).

- ◆ *D.a.h.* M_1 vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn trong dầm đơn giản vì tiết diện I chưa chịu ảnh hưởng của lực xô. Kết quả như trên hình 3.13b.
- ◆ *D.a.h.* M_2 vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn trong hệ ba khớp A^*CB^* .
 Khoảng cách x của điểm D so với khớp C được xác định như sau:

Kết quả như trên hình 3.13c.



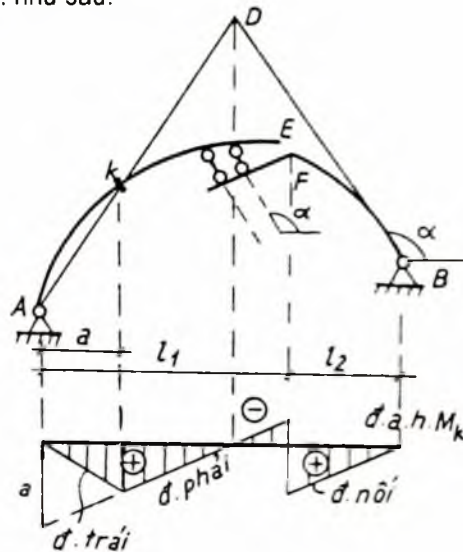
- ♦ *Đ.a.h.* M_3 vẽ theo *đ.a.h.* lực xô (lực căng trong thanh EF) của hệ ba khớp A^*CB^* . Nếu chọn chiều dương của M_3 như trên hình 3.13e, ta có $M_3 = -Hf$ với $f = -1,5$ m. Do đó, *đ.a.h.* $M_3 = 1,5(\text{đ.a.h. } H)$.

Kết quả như trên hình 3.13d.

Chú ý: Các tiết diện 1, 2, 3 ở quanh nút K , do đó từ điều kiện cân bằng nút (hình 3.13e) ta suy ra điều kiện kiểm tra các *đ.a.h.* như sau:

$$\text{đ.a.h. } M_2 + \text{đ.a.h. } M_3 = \text{đ.a.h. } M_1.$$

3.14. Chỉ dẫn. Điểm không của đường phải (khi P di động từ k đến E) là điểm ứng dưới giao điểm D của đường Ak và đường kẻ từ B song song với phương của các thanh nối giữa hai miếng cứng AE và FB vì khớp nối giữa hai miếng cứng này ở xa vô cùng. Đường nối song song với đường phải. Kết quả như trên hình 3.14.



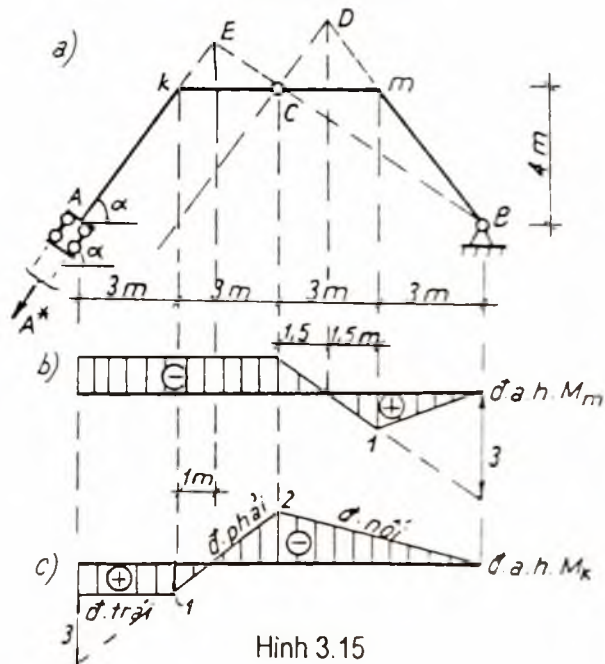
Hình 3.14

3.15. Chỉ dẫn

Trong bài toán này goni giả A^* ở xa vô cùng theo phương của hai thanh song song (hình 3.15a).

Với *đ.a.h.* M_m , khi P di động trên miếng cứng AC , *đ.a.h.* song song với đường chuẩn (hình 3.15b).

Với *đ.a.h.* M_k , khi P di động từ k đến C , *đ.a.h.* có điểm không là điểm ứng dưới giao điểm E của đường BC và đường kA^* .



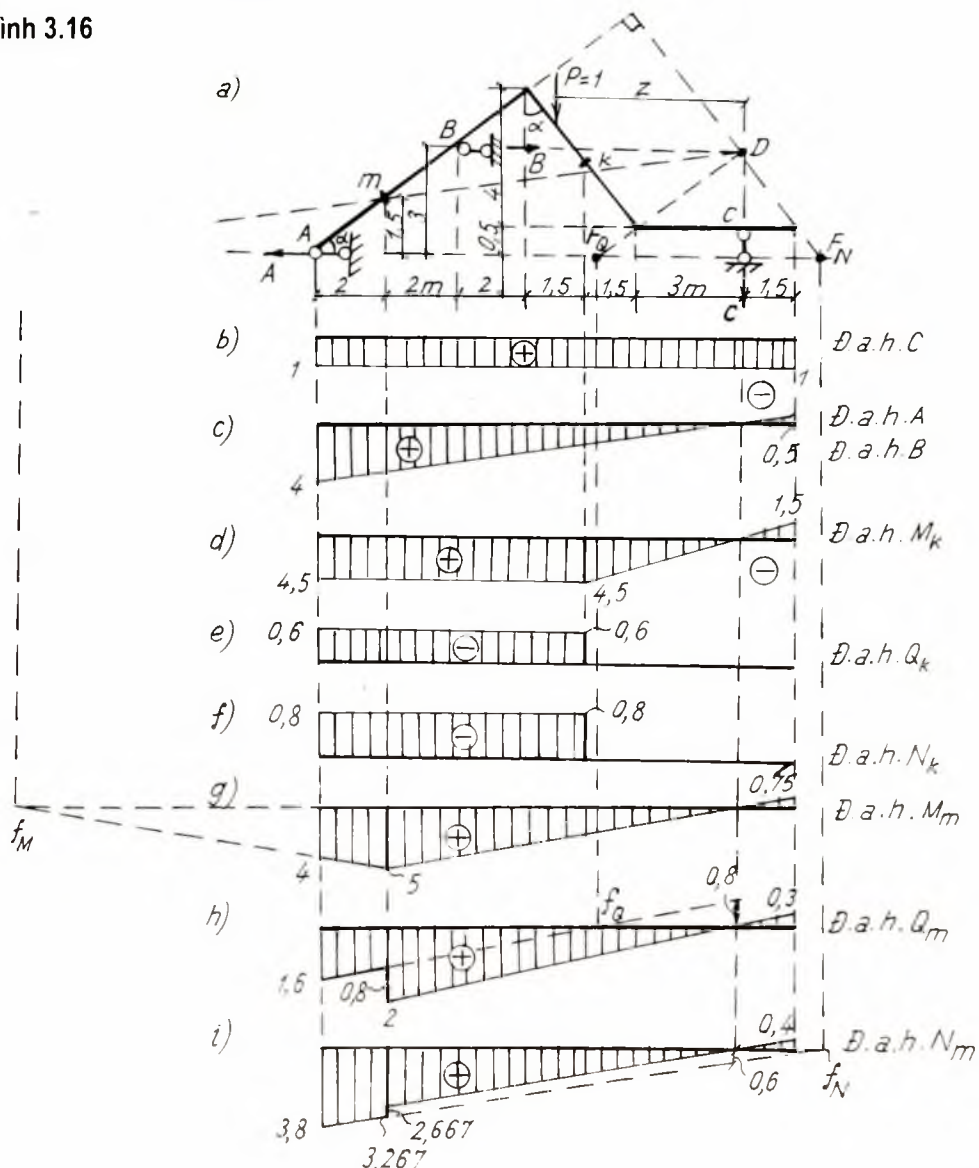
Hình 3.15

Từ các liên hệ hình học trên hình 3.15a ta xác định được vị trí của điểm E, cách tiết diện k theo phương ngang là 1 m. Để vẽ được đường phải, cần biết thêm một điểm thứ hai trên đường đó.

Cần chú ý đến đặc điểm của đ.a.h. mômen uốn: phản tung độ khép giữa đường trái và đường phải tại một vị trí bất kỳ luôn luôn bằng khoảng cách theo phương ngang từ tiết diện đang xét đến vị trí tương ứng đó.

Như vậy, trước tiên ta vẽ dạng của đ.a.h. M_k , tiếp đó căn cứ vào đặc điểm nêu trên ta thấy phản tung độ khép giữa đường trái và đường phải ứng dưới A bằng 3. Từ phản tung độ này và vị trí điểm không của đường phải ta tìm được các tung độ khác của đ.a.h. M_k . Kết quả như trên hình 3.15c.

Hình 3.16



3.16. Chỉ dẫn

- ♦ *Đ.a.h. C*: phản lực C bằng 1 với mọi vị trí của lực $P=1$ nên *đ.a.h.* song song với đường chuẩn, kết quả như trên hình 3.16b.
- ♦ *Đ.a.h. A và B*: hai phản lực này bằng nhau và có chiều như trên hình 3.16a, giá trị được xác định theo điều kiện cân bằng và bằng $z/3$. Kết quả như trên hình 3.16c.
- ♦ Các *đ.a.h.* nội lực tại tiết diện k được vẽ theo mẫu *đ.a.h.* đã xét trong bài tập 3.5. Các tung độ của *đ.a.h. Q_k* và *đ.a.h. N_k* có giá trị lần lượt bằng $\sin\alpha = 0,6$ và $\cos\alpha = 0,8$. Kết quả như trên hình 3.16d, e, f.
- ♦ Các *đ.a.h.* nội lực tại tiết diện m được vẽ theo mẫu *đ.a.h.* nội lực trong hệ ba khớp OAD với các điểm không của đường phải lần lượt ứng dưới các điểm F_M, F_Q, F_N trên hình 3.16a. Kết quả như trên hình 3.16g, h, i.

3.17. Chỉ dẫn

- ♦ *Đ.a.h. N₁*: thực hiện mặt cắt 1-1, lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm K . Ta có:

$$đ.a.h.N_1 = \frac{l}{2d} đ.a.h.M_k^d.$$

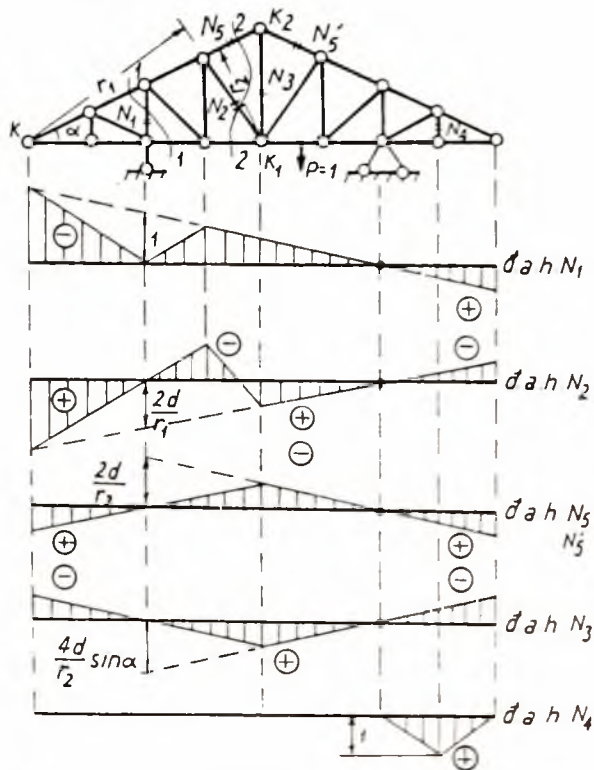
Khi vẽ *đ.a.h. M_k^d*, khoảng cách từ K đến gối trái ở bên trái gối nên khoảng cách này mang giá trị âm, cần dựng lên phía trên.

- ♦ *Đ.a.h. N₂*: thực hiện mặt cắt 2-2, lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm K . Ta có:

$$đ.a.h.N_2 = -\frac{l}{r_1} đ.a.h.M_k^d$$

Cách thực hiện tiếp theo tương tự như trường hợp trên.

- ♦ *Đ.a.h. N₃*: để chuẩn bị vẽ *đ.a.h. N₃*, nên vẽ *đ.a.h. N₅* trước. *Đ.a.h. N₅*



Hình 3.17

được vẽ theo mặt cắt 2-2 và phương trình cân bằng mômen đối với điểm K_1 . Tiếp đó, tách mắt K_2 , lập các phương trình cân bằng hình chiếu lên phương nằm ngang x và phương thẳng đứng y :

$$\sum X = 0 \rightarrow N_5 = N_5'; \quad \sum Y = 0 \rightarrow N_3 = -2N_5 \sin \alpha.$$

Như vậy, đ.a.h. N_3 chính là đ.a.h. N_5 nhân với hệ số $-2 \sin \alpha$.

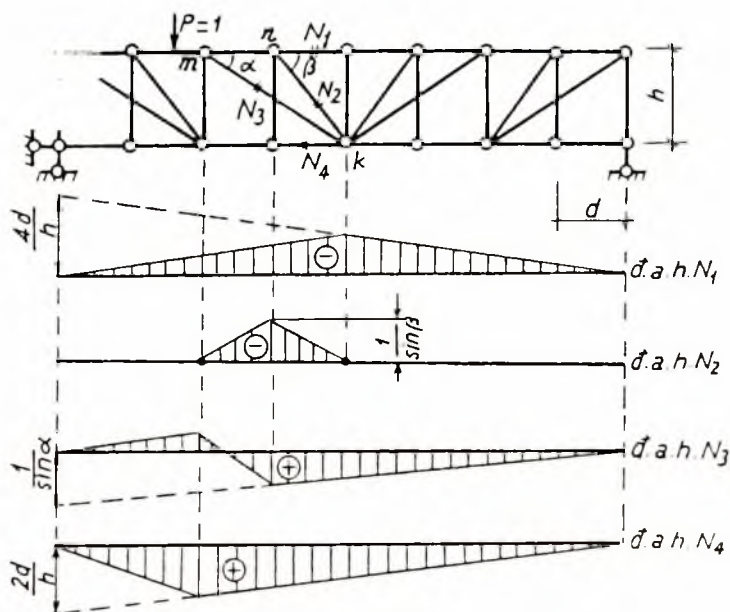
♦ Đ.a.h. N_4 : áp dụng phương pháp tách mắt.

Kết quả tìm được như trên hình 3.17.

3.18. Chỉ dẫn. Các đ.a.h. N_1, N_3, N_4 được vẽ theo đ.a.h. nội lực trong dầm đơn giản tương ứng qua các biểu thức sau:

$$\text{đ.a.h. } N_1 = -\frac{l}{h} \text{ đ.a.h. } M_k^d; \quad \text{đ.a.h. } N_3 = \frac{l}{\sin \alpha} \text{ đ.a.h. } Q_{mn}^d; \quad \text{đ.a.h. } N_4 = \frac{l}{h} \text{ đ.a.h. } M_m^d.$$

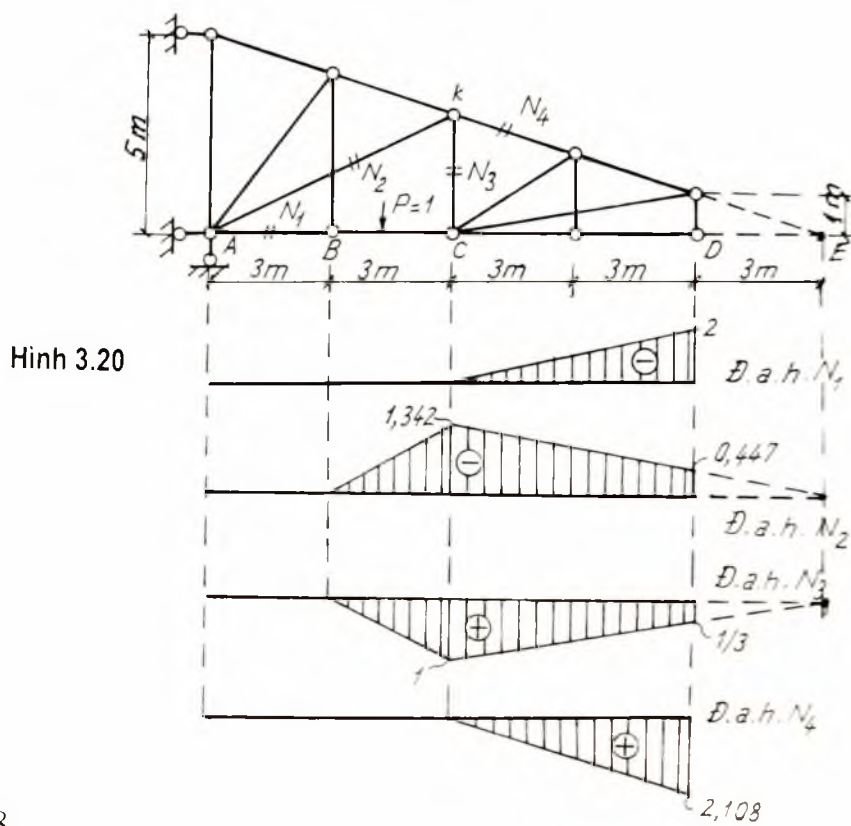
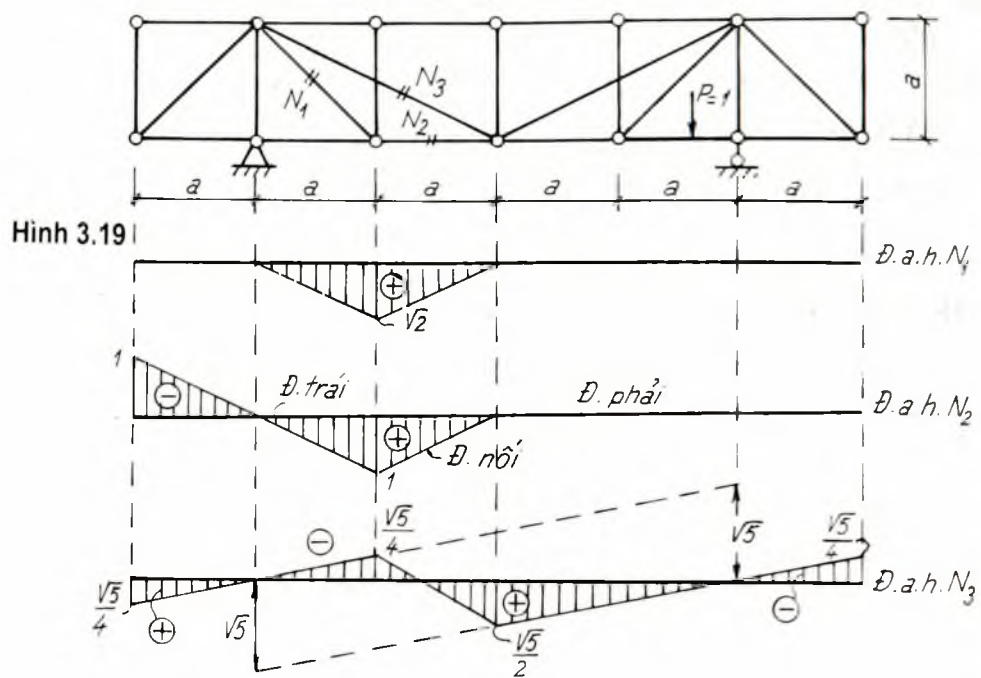
Kết quả như trên hình 3.18.



Hình 3.18

3.19. Đáp số. Kết quả như trên hình 3.19.

3.20. Chỉ dẫn. Các đ.a.h. cần tìm được vẽ theo đ.a.h. nội lực trong dầm côngxôn tương ứng với chú ý: khi $P=1$ di động trên CD đ.a.h. tương ứng với đường phải kẻ từ mặt cắt được dùng để tìm đ.a.h. Do đó, khi tâm mômen vượt ra ngoài hệ, ví dụ với tâm E , cần hình dung dầm côngxôn tương ứng có chiều dài lớn hơn, đủ chứa E để vẽ đường phải trong dầm, tiếp đó kéo dài đường phải về bên trái và sử dụng đoạn ứng dưới CD .

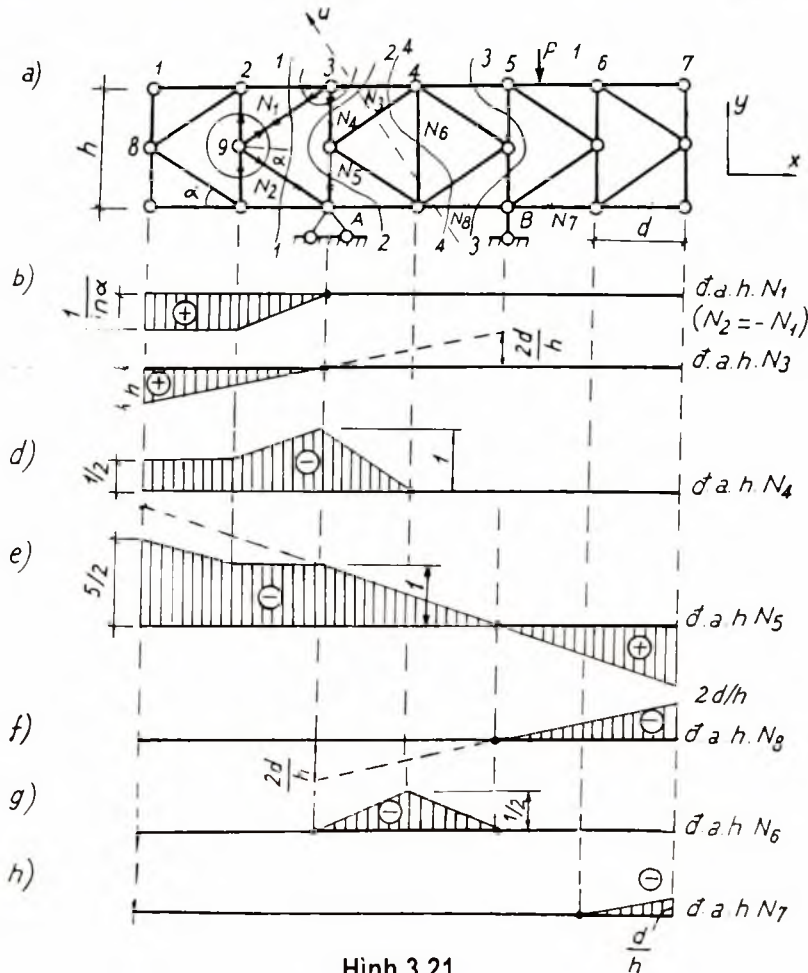


3.21. Bài giải

* $\overline{d.a.h.N_1}$ và $\overline{d.a.h.N_2}$: trong trường hợp này không thực hiện được mặt cắt đơn giản nên cần vẽ trước một vài $\overline{d.a.h.}$ hỗ trợ hoặc vận dụng các mặt cắt phối hợp như sau:

♦ Mặt cắt bao quanh mắt 9 (tách mắt), lập phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang (hình 3.21a):

$$\sum X = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0, \text{ vì } \alpha_1 \neq 0 \text{ nên } N_1 = -N_2.$$



Hình 3.21

♦ Mặt cắt I-I, lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng:

• Khi $P=I$ di động ở bên trái mặt cắt I-I, từ mắt 1 đến mắt 2:

$$\sum Y^w = N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha - P = 0, \text{ hay } 2N_1 \sin \alpha - I = 0.$$

Suy ra
$$N_1 = -N_2 = I / 2 \sin \alpha.$$

Như vậy, đ.a.h. N_1 trong đoạn này song song với đường chuẩn và có giá trị bằng $l / 2 \sin \alpha$; còn đ.a.h. $N_2 = -\text{đ.a.h. } N_1$.

- Khi $P=I$ di động ở bên phải mặt cắt 1-1, từ mắt 3 đến mắt 7:

$$\sum Y^w = N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \text{ hay } N_1 = -N_2 = 0.$$

Như vậy, đ.a.h. N_1 và đ.a.h. N_2 trong đoạn này trùng với đường chuẩn.

- Khi $P=I$ di động trên đốt bị cắt 2-3, áp dụng quy tắc "đường nối" trong hệ có hệ thống truyền lực: nối hai tung độ của hai phần đ.a.h. vừa tìm được ở trên, ứng dưới hai mắt 2 và 3 bằng một đoạn thẳng.

Kết quả như trên hình 3.21b.

* Đ.a.h. N_3 : Thực hiện mặt cắt 2-2, lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm A.

- Khi $P=I$ di động ở bên trái mặt cắt 2-2, từ mắt 1 đến mắt 3:

$$\sum M_A^{ph} = N_3 \cdot h + B \cdot 2d = 0, \text{ suy ra } N_3 = -B \cdot 2d / h,$$

$$+ P=I \text{ đặt tại mắt 3: } B = 0 \rightarrow N_3 = 0;$$

$$+ P=I \text{ đặt tại mắt 5: } B = l \rightarrow N_3 = -2d / h.$$

Phân tích dụng của đường trái từ mắt 1 đến mắt 3 (hình 3.21c).

- Khi $P=I$ di động ở bên phải mặt cắt 2-2, từ mắt 4 đến mắt 7:

$$\sum M_A^w = -N_3 \cdot h = 0, \text{ suy ra } N_3 = 0,$$

Do đó, đ.a.h. N_3 sẽ trùng với đường chuẩn, từ mắt 4 đến mắt 7 (hình 3.21c).

- Khi $P=I$ di động trên đốt bị cắt 3-4, áp dụng quy tắc "đường nối". Trong trường hợp này đường nối trùng với đường chuẩn, từ mắt 3 đến mắt 4.

Kết quả như trên hình 3.21c.

* Đ.a.h. N_4 : Tách mắt 3 (hình 3.21a), lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng.

- Khi $P=I$ di động ở bên ngoài các đốt bị cắt, từ mắt 1 đến mắt 2 và từ mắt 4 đến mắt 7 (hình 3.21a):

$$\sum Y = -N_4 - N_1 \sin \alpha = 0, \text{ suy ra } N_4 = -N_1 \sin \alpha.$$

Như vậy, đ.a.h. $N_4 = -(\text{đ.a.h. } N_1) \sin \alpha$. Phân tích dụng của các phần đ.a.h. này từ mắt 1 đến mắt 2 và từ mắt 4 đến mắt 7.

- Khi $P=I$ đặt ngay tại mắt 3:

$$\sum Y = -N_4 - N_1 \sin \alpha - P = 0, \text{ suy ra } N_4 = -(1 + N_1 \sin \alpha),$$

nhưng khi $P=1$ đặt ngay tại mắt 3 thì $N_1 = 0$ nên $N_4 = -1$. Do đó, tại mắt 3, đ.a.h. N_4 có tung độ bằng -1 .

- Khi $P=1$ di động trên các đốt bị cắt 2-3 và 3-4, áp dụng quy tắc "đường nối". Trong trường hợp này đường nối gồm hai đoạn: đoạn nối tung độ bằng $-1/2$ ứng dưới mắt 2 với tung độ bằng -1 ứng dưới mắt 3; đoạn nối tung độ bằng -1 ứng dưới mắt 3 với tung độ bằng 0 ứng dưới mắt 4.

Kết quả như trên hình 3.21d.

- * Đ.a.h. N_5 : Tách mắt A (hình 3.21a), lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng. Với mọi vị trí của lực $P=1$ trên đường xe chạy, ta có:

$$\sum Y = N_5 + N_2 \sin \alpha + A = 0, \text{ suy ra } N_5 = -(A + N_2 \sin \alpha).$$

Như vậy, đ.a.h. N_5 tìm được bằng cách cộng đ.a.h. A trong dầm đơn đã biết sau khi nhân với -1 với đ.a.h. N_2 đã biết sau khi
Kết quả tìm được như trên hình 3.21e.

- * Đ.a.h. N_6 : Để chuẩn bị vẽ đ.a.h. N_6 , ta vẽ đ.a.h. N_8 theo mặt cắt 3-3, lập phương trình cân bằng mômen đối với mắt 5 (hình 3.21a).

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt 3-3, từ mắt 1 đến mắt 4:

$$\sum M_5^{ph} = -N_8 \cdot h = 0, \text{ suy ra } N_8 = 0.$$

Như vậy, đ.a.h. N_8 trong đoạn này trùng với đường chuẩn, phần thích dụng của đường trái từ mắt 1 đến mắt 4 (hình 3.21f).

- Khi $P=1$ di động ở bên phải mặt cắt 3-3, từ mắt 5 đến mắt 7:

$$\sum M_5^u = N_8 \cdot h - A \cdot 2d = 0, \text{ suy ra } N_8 = 2d \cdot A / h.$$

$$+ P=1 \text{ đặt tại mắt 3: } A = 1, \quad \square \quad N_8 = 2d / h;$$

$$+ P=1 \text{ đặt tại mắt 5: } A = 0, \quad \square \quad N_8 = 0.$$

Phần thích dụng của đường phải từ mắt 5 đến mắt 7 (hình 3.21f).

- Khi $P=1$ di động trên đốt bị cắt 4-5, áp dụng quy tắc "đường nối". Trong trường hợp này đoạn nối trùng với đường chuẩn.

Kết quả tìm được như trên hình 3.21f.

Sau khi có đ.a.h. N_8 , ta vẽ đ.a.h. N_6 theo mặt cắt 4-4 và lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương u vuông góc với hai thanh xiên song song với nhau, thuộc mặt cắt 4-4 (hình 3.21a):

- Khi $P=I$ di động ở bên trái mặt cắt 4-4, từ mắt 1 đến mắt 3:

$$\sum u^{ph} = -N_6 \cos \alpha + N_3 \sin \alpha + N_8 \sin \alpha + B \cos \alpha = 0.$$

suy ra $N_6 = (N_3 + N_8) \operatorname{tg} \alpha + B.$

Tính các tung độ tương ứng tại các vị trí:

+ $P=I$ tại mắt 1: $N_3 = 2d/h = \operatorname{ctg} \alpha$; $N_8 = 0$; $B = -I \rightarrow N_6 = 0.$

+ $P=I$ tại mắt 2: $N_3 = d/h = (\operatorname{ctg} \alpha)/2$; $N_8 = 0$; $B = -I/2 \rightarrow N_6 = 0.$

+ $P=I$ tại mắt 3: $N_3 = N_8 = B = 0$; $\rightarrow N_6 = 0.$

Như vậy, đ.a.h. N_6 trong đoạn này trùng với đường chuẩn, từ mắt 1 đến mắt 3 (hình 3.21g).

- Khi $P=I$ di động ở bên phải mặt cắt 4-4, từ mắt 4 đến mắt 7:

$$\sum u^w = N_6 \cos \alpha - N_3 \sin \alpha - N_8 \sin \alpha + A \cos \alpha = 0.$$

suy ra $N_6 = (N_3 + N_8) \operatorname{tg} \alpha - A.$

Tính các tung độ tương ứng tại các vị trí:

+ $P=I$ tại mắt 4: $N_3 = N_8 = 0$; $A = I/2 \rightarrow N_6 = -I/2.$

+ $P=I$ tại mắt 5: $N_3 = N_8 = A = 0$; $\rightarrow N_6 = 0.$

+ $P=I$ tại mắt 6: $N_3 = 0$; $N_8 = -d/h = -(\operatorname{ctg} \alpha)/2$; $A = -I/2 \rightarrow N_6 = 0.$

+ $P=I$ tại mắt 7: $N_3 = 0$; $N_8 = -2d/h = -\operatorname{ctg} \alpha$; $A = -I$; $\rightarrow N_6 = 0.$

Đ.a.h. N_6 trong đoạn từ mắt 4 đến mắt 7 có dạng như trên hình 3.21g.

- Khi $P=I$ di động trên đốt bị cắt 3-4, áp dụng quy tắc "đường nối".

Toàn bộ đ.a.h. N_6 tìm được như trên hình 3.21g.

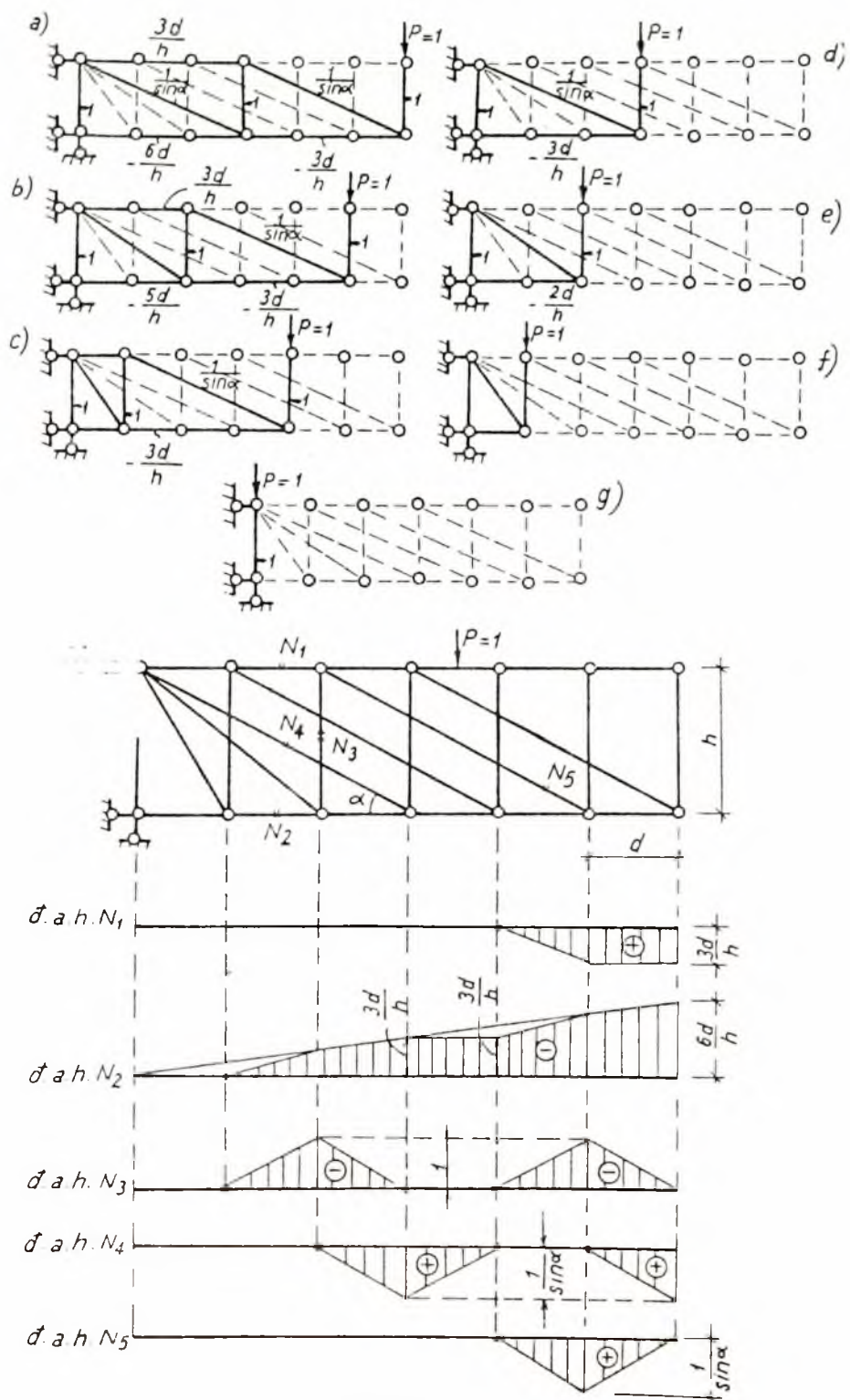
* Đ.a.h. N_7 : lần lượt cho $P=I$ đặt tại từng mắt trên đường xe chạy để xác định các tung độ của đ.a.h.

- Khi $P=I$ di động từ mắt 1 đến mắt 6 (hình 3.21a): vận dụng các hệ quả suy ra từ phương pháp tách mắt, ta dễ dàng tìm được $N_7 = 0.$

- Khi $P=I$ đặt tại mắt 7 (hình 3.21a): vận dụng phương pháp tách mắt, ta tìm được $N_7 = -d/h.$

Toàn bộ đ.a.h. N_7 tìm được như trên hình 3.21h.

3.22. Chỉ dẫn. Lần lượt đặt lực $P=I$ tại từng mắt thuộc đường xe chạy, ứng với mỗi vị trí đặt lực xác định giá trị các nội lực tức là tìm được các tung độ tương ứng của các đ.a.h. cần tìm.



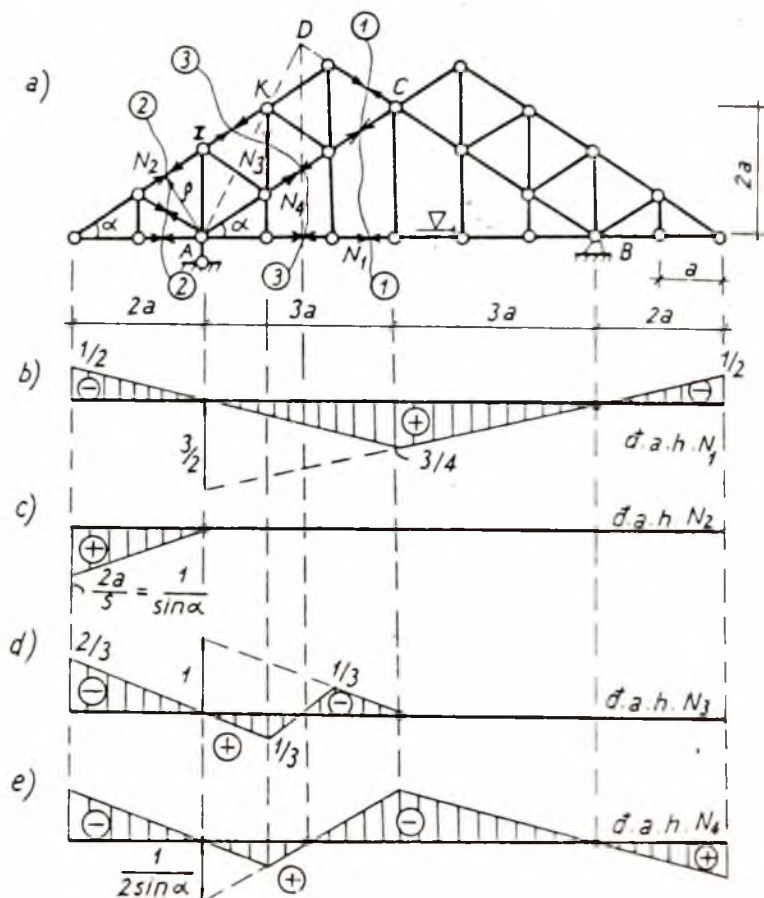
Hình 3.22

Trên các hình 3.22a-3.22g trình bày các trường hợp đặt lực $P=1$ tại từng mắt thuộc đường xe chạy và giá trị nội lực tương ứng trong các thanh cân tim; các thanh vẽ bằng đường đứt nét có giá trị nội lực bằng không. Kết quả như trên hình 3.22h.

3.23. Bài giải

- ♦ *Đ.a.h. N_1* : thực hiện mặt cắt 1-1, vẽ *đ.a.h. N_1* theo *đ.a.h. mômen uốn* tại tiết diện *C* trong dầm đơn giản tương ứng. Cũng có thể vẽ *đ.a.h. N_1* theo *đ.a.h. lực xô* trong hệ ba khớp *ACB* có thanh căng *AB*. Kết quả như trên hình 3.23b.

Hình 3.23



- ♦ *Đ.a.h. N_2* : thực hiện mặt cắt 2-2, chọn tâm mômen *A*, ta có:

$$đ.a.h. N_1 = -\frac{1}{\rho} (đ.a.h. M_A^d) = -\frac{1}{2a \sin \alpha} (đ.a.h. M_A^d).$$

Như vậy, *đ.a.h. N_2* được vẽ theo *đ.a.h. mômen uốn* tại tiết diện *A* (ngoài đầu thừa) trong dầm đơn giản tương ứng. Kết quả như trên hình 3.23c.

- ♦ *Đ.a.h. N_3* : thực hiện mặt cắt 3-3, mặt cắt đi qua bốn thanh nhưng nếu

coi lực dọc trong thanh ngang như lực xô thì ta có thể vẽ đ.a.h. N_3 theo đ.a.h. lực cắt trong vòm ba khớp ACB , tại tiết diện nằm trên đoạn song song với phương của hai thanh IK và N_4 , trong phạm vi của các thanh bị cắt bởi mặt cắt 3-3.

Ta có:
$$d.a.h. N_3 = -\frac{I}{\cos \alpha} (d.a.h. Q^V).$$

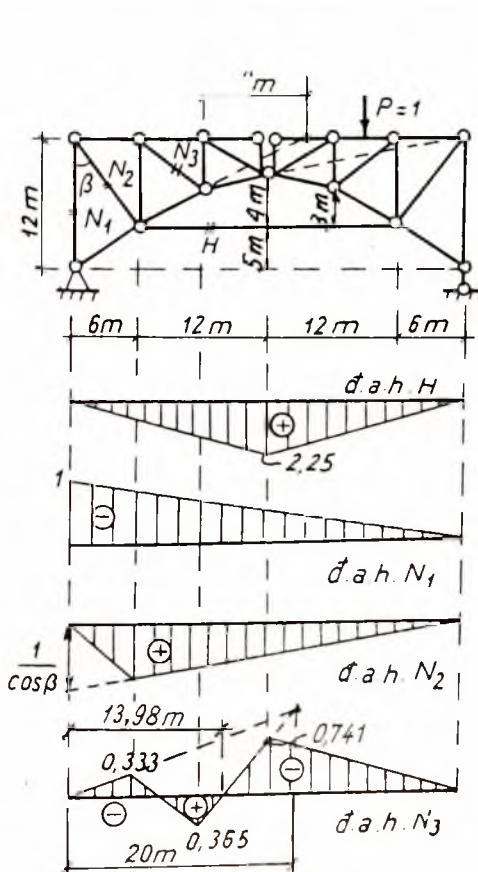
Kết quả như trên hình 3.23d.

- ♦ Đ.a.h. N_4 : lập luận tương tự như trường hợp đ.a.h. N_3 ta có thể vẽ đ.a.h. N_4 theo đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện K (tâm mômen) trong hệ ba khớp $AKCB$.

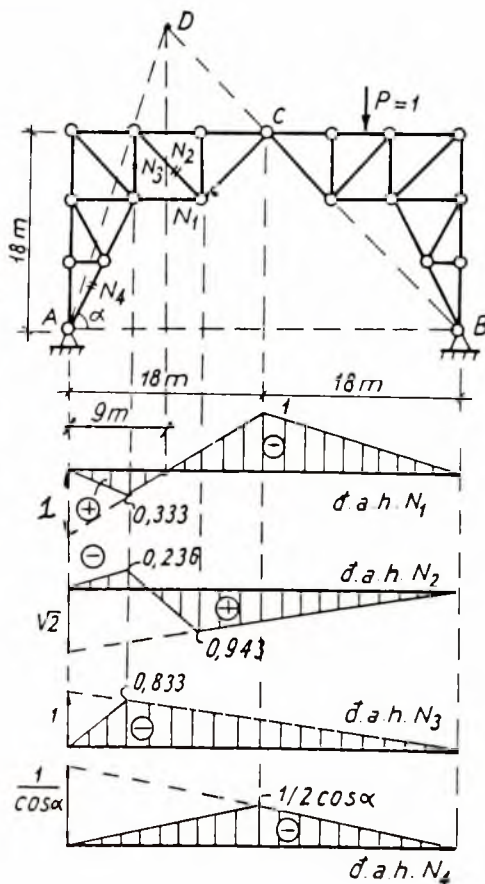
Ta có:
$$d.a.h. N_4 = \frac{I}{\rho} (d.a.h. M_K^V) = \frac{I}{2a \sin \alpha} (d.a.h. M_K^V).$$

Kết quả như trên hình 3.23e.

3.24 - 3.26. Đáp số. Cho trên các hình vẽ tương ứng.

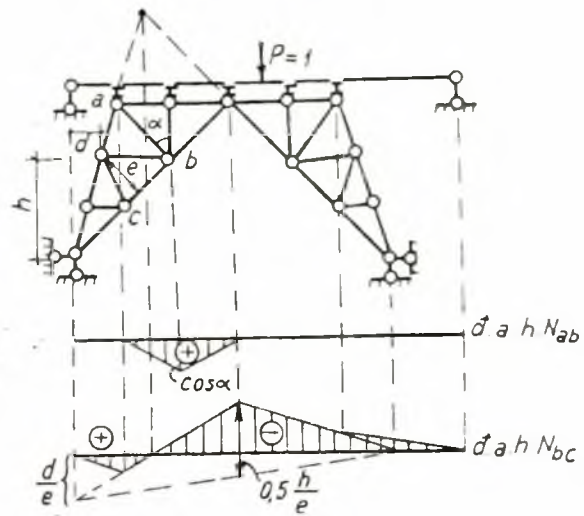


Hình 3.24



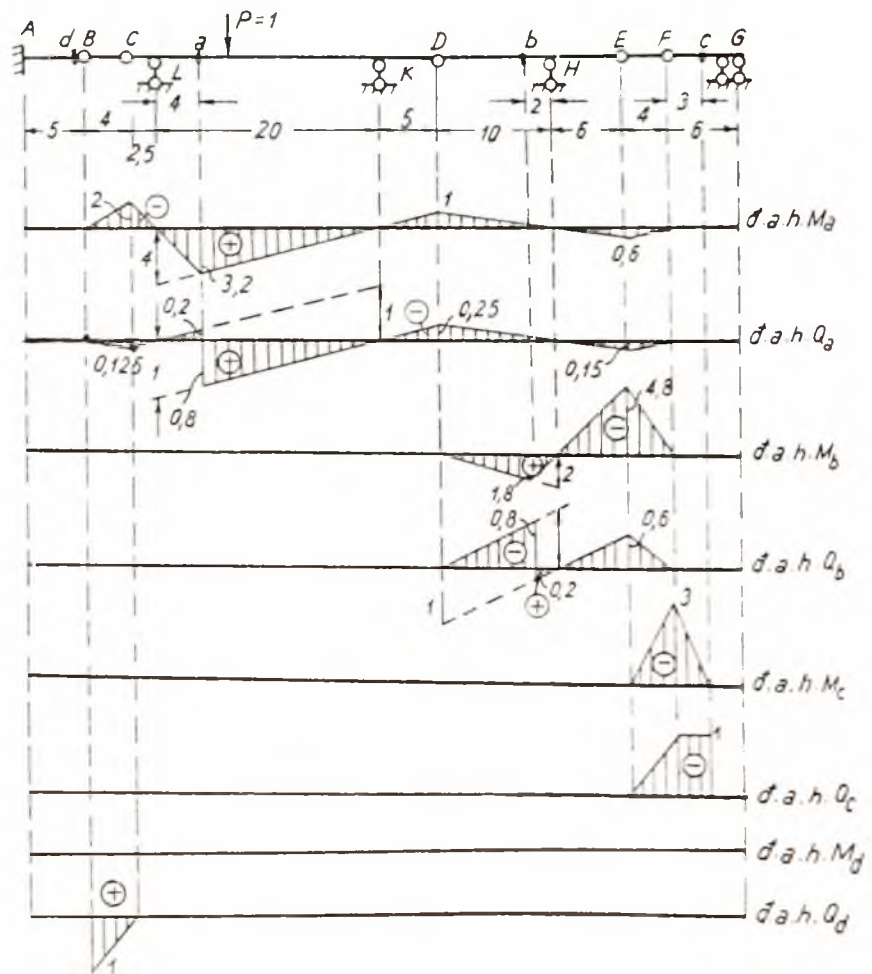
Hình 3.25

Hình 3.26

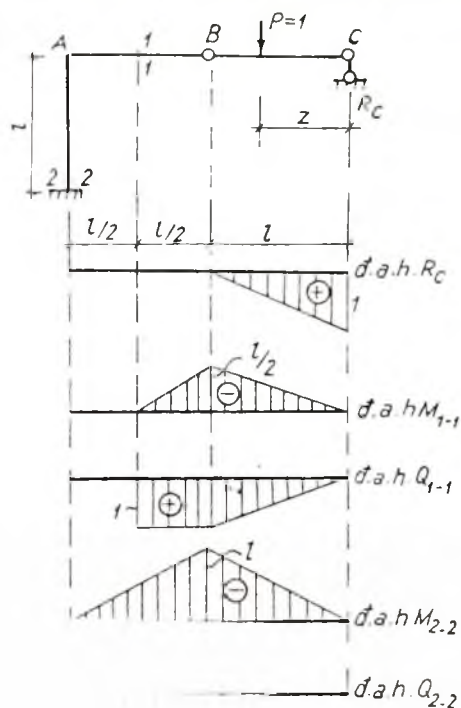


3.27. Đáp số. Cho trên hình 3.27.

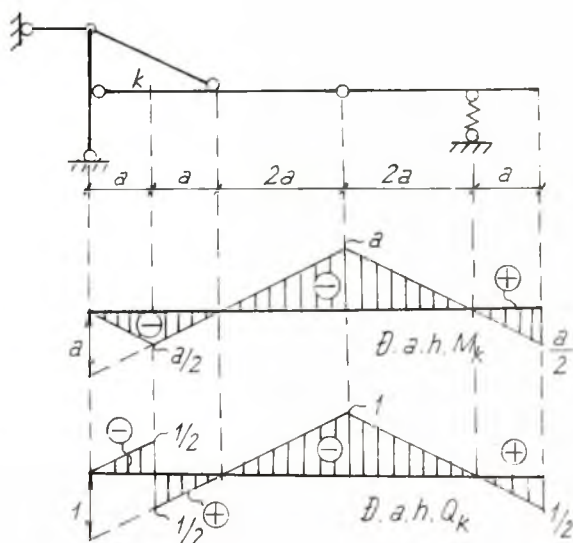
Hình 3.27



3.28-3.30. Đáp số. Cho trên các hình tương ứng.

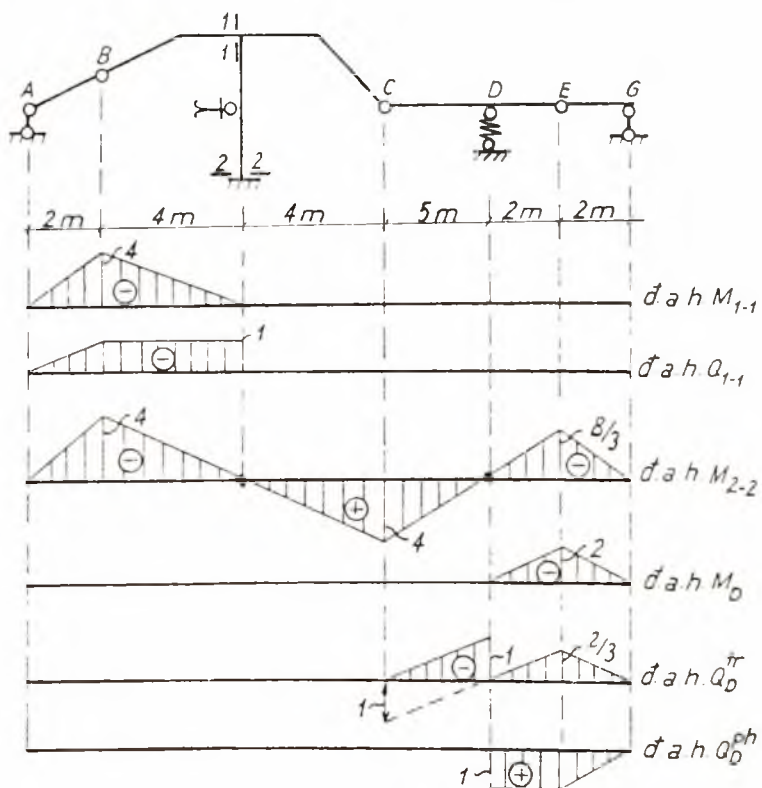


Hình 3.28



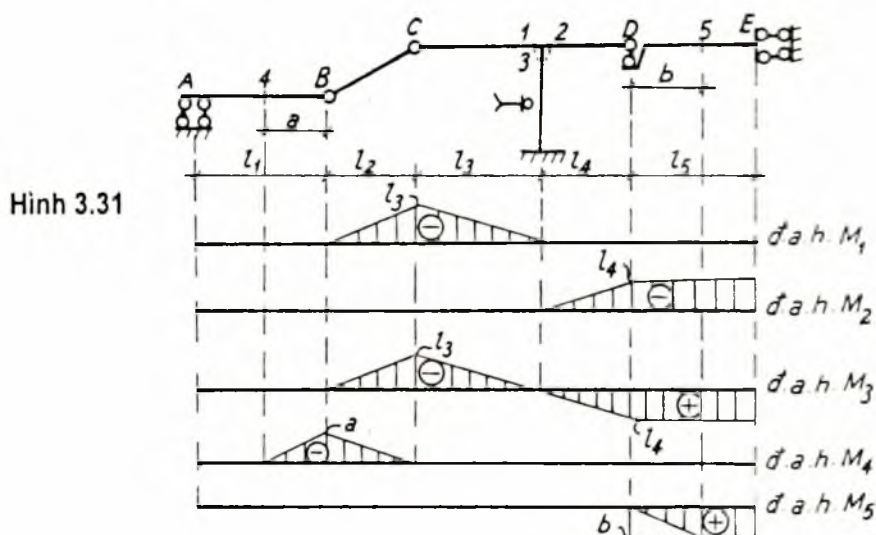
Hình 3.29

Hình 3.30



3.31. Chỉ dẫn

- ♦ Đối với đ.a.h. mômen uốn tại các tiết diện 1, 2, 3 thuộc hệ chính:
 - Khi $P = l$ di động trên CD thuộc hệ chính: cô lập hệ chính để vẽ đ.a.h. Dấu của đ.a.h. M_3 lấy theo vị trí của người quan sát vẽ trên sơ đồ hệ.



- Khi $P = l$ di động trên dầm phụ AB : nội lực trong BC bằng không (vì lực P thẳng đứng), do đó không ảnh hưởng đến nội lực trong hệ chính.
- Khi $P = l$ di động trên BC : áp dụng nguyên tắc đường nối.
- Khi $P = l$ di động trên DE : liên kết khớp nối với trái đất ở xa vô cùng nên đ.a.h. song song với đường chuẩn.
- ♦ Đối với đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 4, 5: tham khảo các bài tập 3.5 và 3.6.

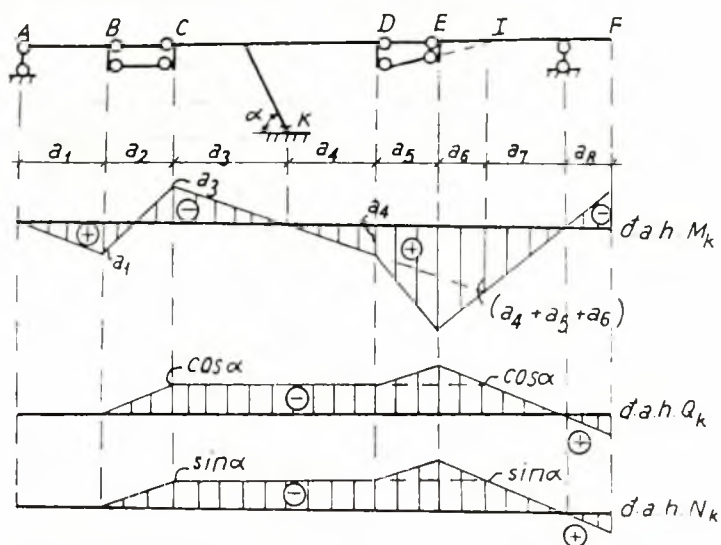
Kết quả tìm được như trên hình 3.31.

3.32. Chỉ dẫn

- ♦ Hệ phụ EF được nối với hệ chính CD bằng hai thanh đồng quy tại I . Xem khớp I như khớp giả tạo nối giữa các miếng cứng EF và CD . Do đó, các phần đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên hai miếng cứng đó phải cắt nhau tại điểm ứng dưới I .
- ♦ Hệ phụ AB nối với hệ chính CD bằng hai thanh song song nên khớp giả tạo nối giữa các miếng cứng AB và CD ở xa vô cùng. Do đó, các phần đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên hai miếng cứng đó phải song song với nhau.

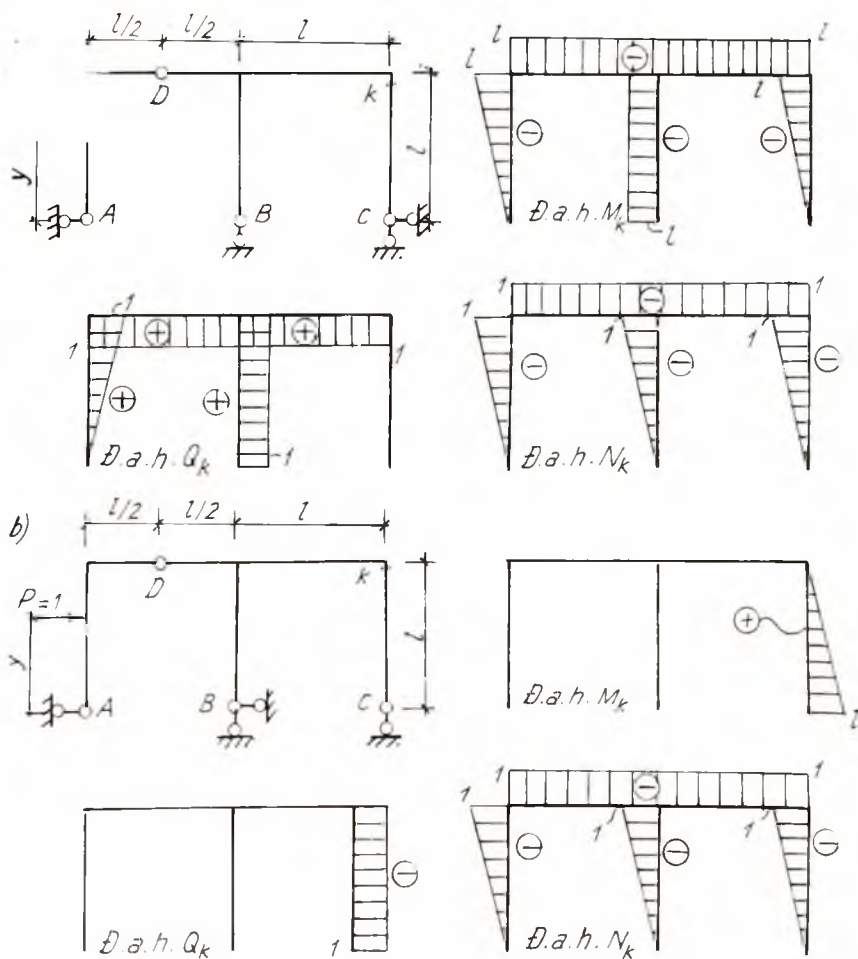
Kết quả tìm được như trên hình 3.32.

Hình 3.32

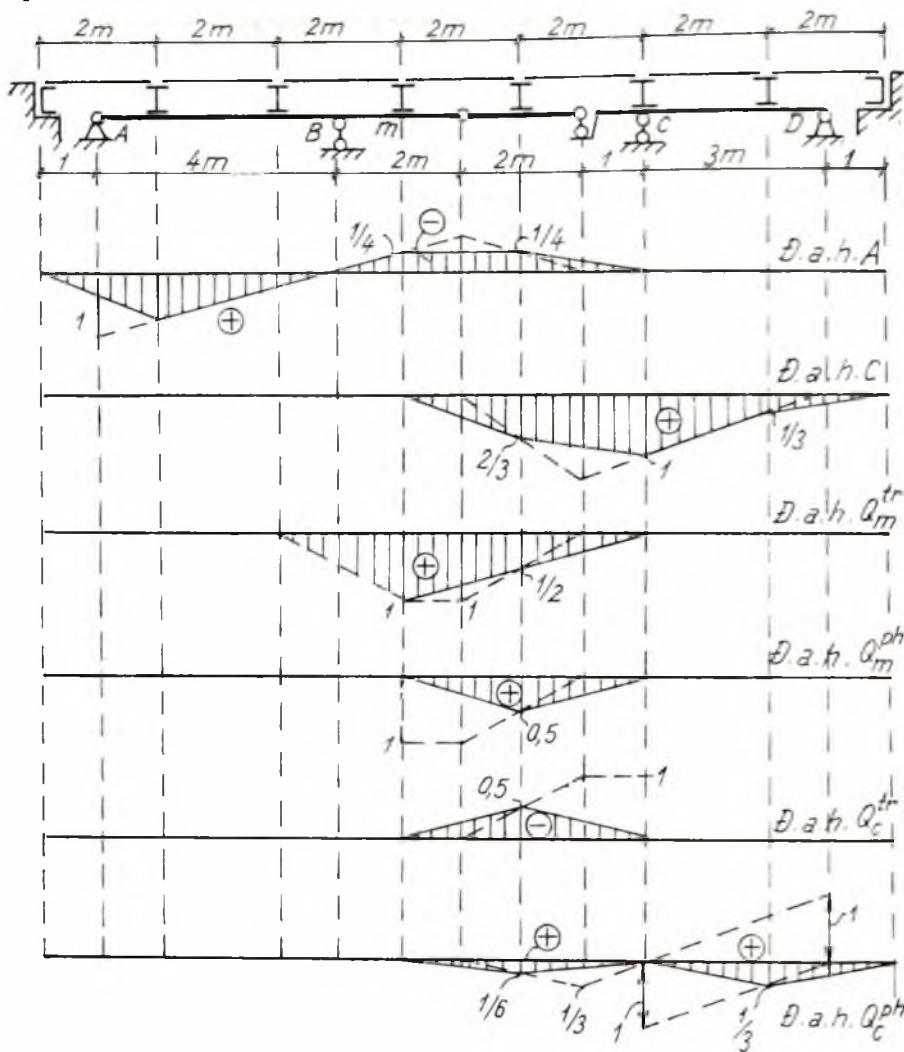


3.33. Đáp số. Cho trên hình 3.33.

Hình 3.33



3.34. Đáp số. Cho trên hình 3.34.



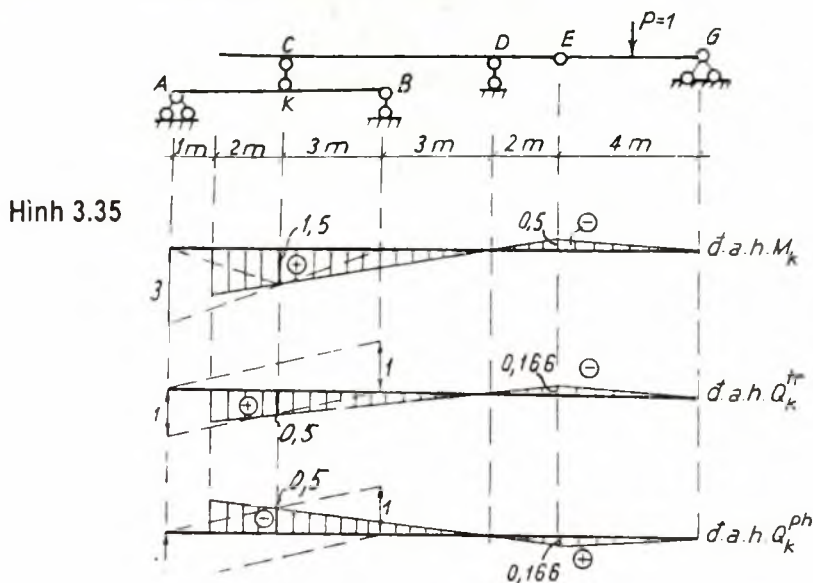
Hình 3.34

3.35. Chỉ dẫn

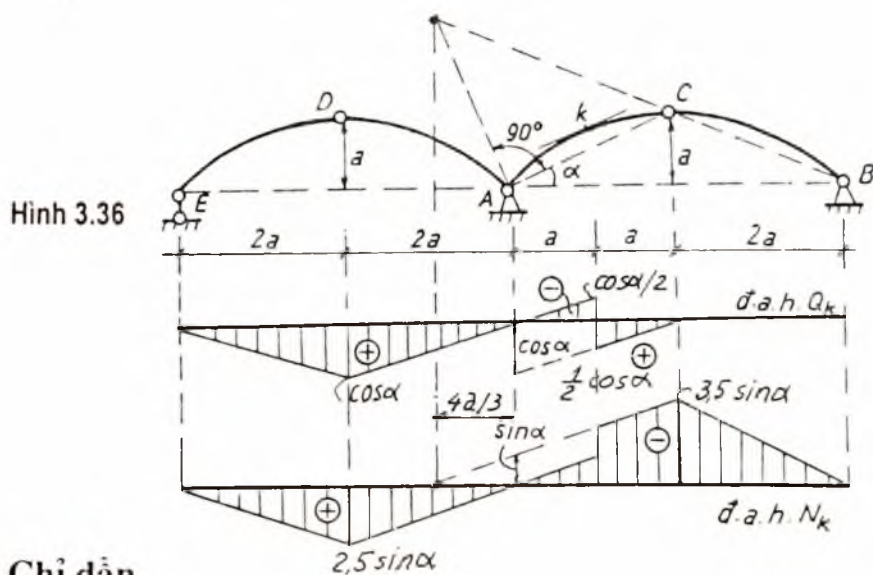
♦ Đối với hệ đã cho ta có thể vận dụng cách vẽ đ.a.h. trong hệ có hệ thống truyền lực. Trước tiên vẽ đ.a.h. M_k và đ.a.h. Q_k cho dầm AB với giả thiết lực P đi động trên AB. Xem liên kết tại K như mắt truyền lực, giữ lại tung độ ứng dưới K là tung độ tương ứng với khi lực P đặt tại C trên dầm CDE. Tiếp đó, nối tung độ vừa tìm được với tung độ bằng không ứng dưới gối D. Khi lực P đi động trên EG, áp dụng quy tắc vẽ đ.a.h. trong hệ ghép.

♦ Đối với đ.a.h. Q_k cần vẽ hai đ.a.h. tương ứng với hai trường hợp: tiết

diện K ở bên trái mắt C , tiết diện K ở bên phải mắt C .
 Kết quả tìm được như trên hình 3.35.



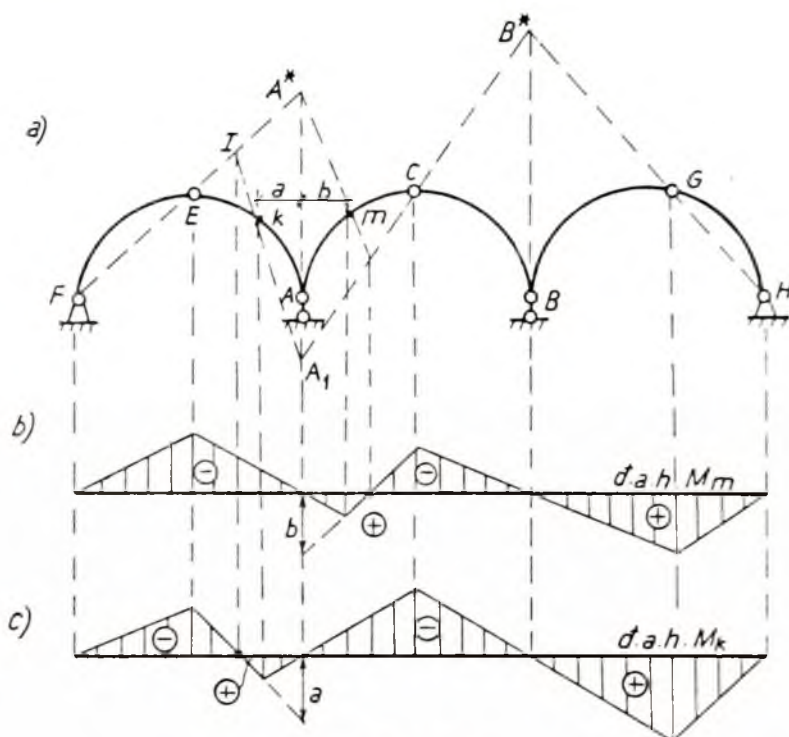
ên hình 3.36.



3.37. Chỉ dẫn.

- ♦ $\text{Đ.a.h. } M_m$ (hình 3.37b): vẽ theo đ.a.h. mômen uốn trong hệ ba khớp A^*CB^* (hình 3.37a) với miếng cứng bên trái là EAC và miếng cứng bên phải là CBG .
- ♦ $\text{Đ.a.h. } M_k$ (hình 3.37c): Khi P di động trên phần $FEAC$ (hình 3.37a),

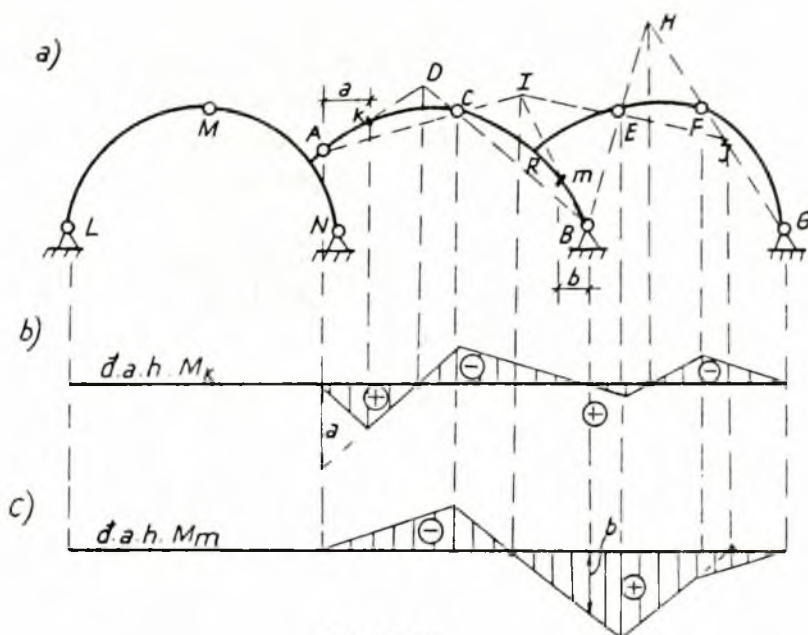
miếng cứng CBG chỉ chịu tác dụng của ba lực: lực đặt tại G có phương HG , lực đặt tại B có phương thẳng đứng và lực đặt tại C . Từ điều kiện cân bằng của miếng cứng CBG , ba lực đó phải đồng quy tại B^* , do đó, lực đặt tại C có phương CB^* . Xem FEA_I như một hệ ba khớp: FEA_I (A_I là giao điểm của B^*C với phương phản lực thẳng đứng tại A) và vẽ đ.a.h. M_k theo cách vẽ đ.a.h. trong hệ ba khớp. Khi P di động trên CBG , áp dụng quy tắc vẽ đ.a.h. trong hệ ghép.



Hình 3.37

3.38. Bài giải. Hệ đã cho là hệ ghép (hình 3.38a), bao gồm ba hệ ba khớp ghép nối với nhau, trong đó LMN là hệ chính còn EFG là hệ phụ.

- ♦ Khi lực P di động trên đường LMA , tức là trên hệ chính, nội lực tại k và m đều bằng không, do đó đ.a.h. M_k và đ.a.h. M_m trong đoạn này trùng với đường chuẩn.
- ♦ Khi lực P di động trên đường $ACRE$, áp dụng cách vẽ thực hành cho hệ ba khớp ACB ta dễ dàng vẽ được đ.a.h. M_k và đ.a.h. M_m . Riêng đối với đ.a.h. M_m cần lưu ý là lực P không di động trên mB mà chỉ di động trên $ACRE$, do đó cần kéo dài phần đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên CR tới điểm ứng dưới E .



Hình 3.38

động trên đoạn EF , đ.a.h. là đường thẳng nối tung độ đã hợp E với một tung độ thứ hai nào đó sẽ được xác định. Trong thực hành ta thường tìm điểm có tung độ bằng không của phần đ.a.h đó, hay nói khác đi là tìm vị trí của lực P khi nó đi động trên EF để sao cho mômen uốn tại tiết diện đang xét bằng không. Cách thực hiện cụ thể như sau:

- Đ.a.h. M_k : Lực P đang đi động trên EF nên miếng cứng AC chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại A và C . Từ điều kiện cân bằng của miếng cứng AC , hai lực này phải trực đối, nếu các lực này tồn tại thì mômen uốn tại tiết diện k sẽ khác không. Muốn cho $M_k = 0$ thì hai lực này phải bằng không. Do đó, miếng cứng $CRBE$ cũng chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại B và E . Phương của lực đặt tại E chỉ có thể là phương BE . Mặt khác, miếng cứng FG cũng chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại F và G , phương của lực đặt tại F là phương GF . Trở lại xét miếng cứng EF , miếng cứng này chịu tác dụng của ba lực: lực P , lực đặt tại E có phương BE và lực đặt tại F có phương GF . Từ điều kiện cân bằng của miếng cứng EF , ba lực này phải đồng quy. Do đó, muốn cho $M_k = 0$ thì lực P phải đi qua giao điểm H của hai đường BE và GF . Điểm không của phần đ.a.h. khi P đi động trên EF là điểm ứng dưới H .
- Đ.a.h. M_m . Muốn cho $M_m = 0$ thì phản lực tại B buộc phải có phương

Bm . Lúc này, miếng cứng $CRBE$ chịu tác dụng của ba lực: lực đặt tại B có phương Bm , lực đặt tại C có phương AC và lực đặt tại E . Từ điều kiện cân bằng của $CRBE$, ta thấy lực đặt tại E phải có phương EI với I là giao điểm của hai đường Bm và AC . Miếng cứng EF chịu tác dụng của ba lực: lực P , lực đặt tại E có phương BE và lực đặt tại F có phương GF . Từ điều kiện cân bằng của EF , ba lực này phải đồng quy. Do đó, muốn cho $M_m = 0$ thì lực P phải đi qua giao điểm J của hai đường IE và GF . Điểm không của phần đ.a.h. khi P đi động trên EF là điểm ứng dưới J . Phần thối dụng nằm trong phạm vi EF .

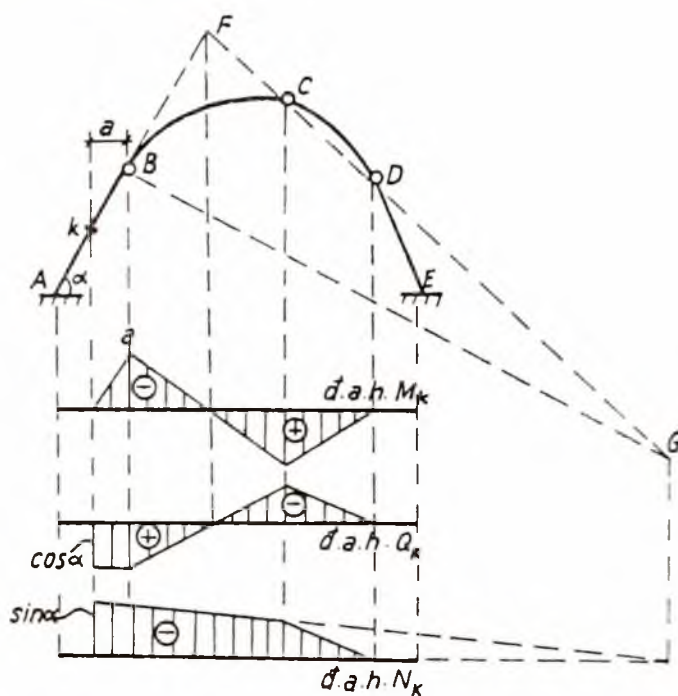
- ♦ Khi lực P đi động trên đoạn FG : nối các tung độ đã biết ứng dưới khớp F với điểm có tung độ bằng không ứng dưới gối B .

Kết quả tìm được như trên hình 3.38b, c.

3.39. Chỉ dẫn. Khi P đi động trên BC , cũng lý luận tương tự như đã thực hiện trong bài 3.38 để tìm điểm không của các phần đ.a.h. tương ứng.

Kết quả tìm được như trên hình 3.39.

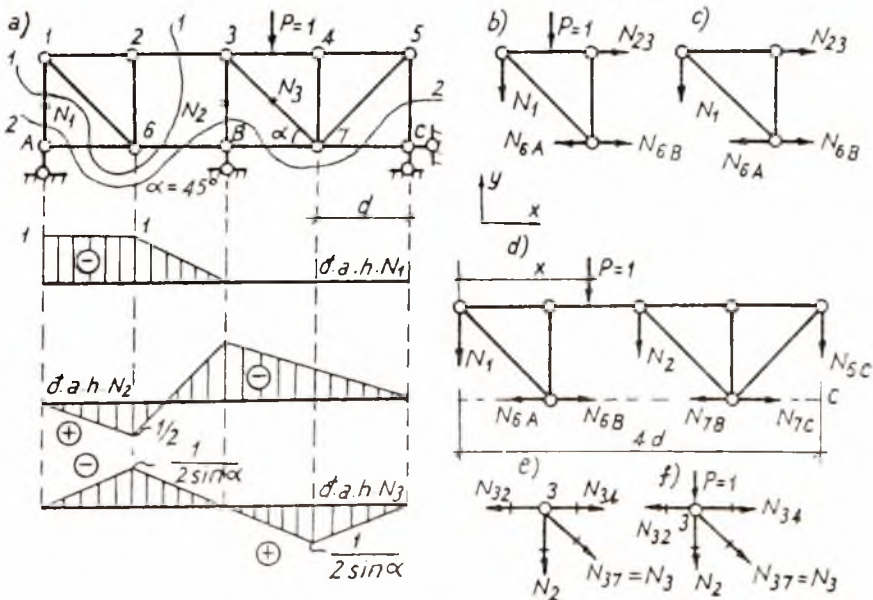
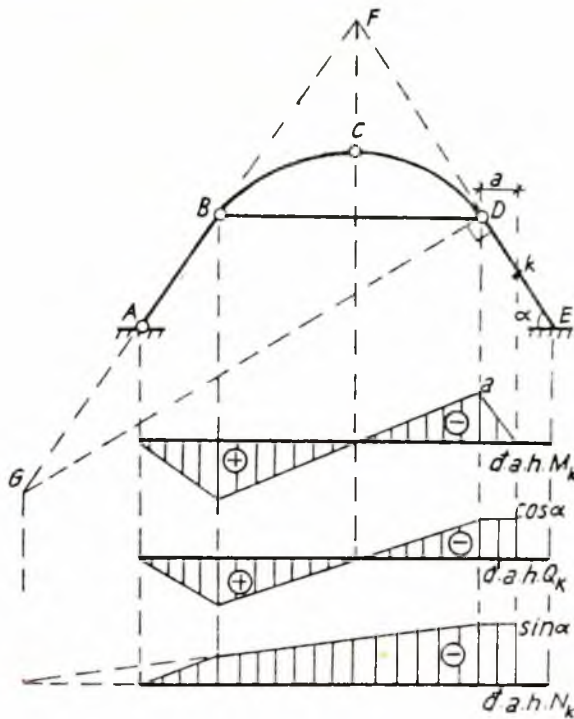
Hình 3.39



3.40. Chỉ dẫn. Các thanh BC, CD và BD được liên kết với nhau thành một miếng cứng BCD nên phần đ.a.h. tương ứng với khi P đi động trên BCD là một đoạn thẳng liên tục trong phạm vi miếng cứng đó. Cách tìm điểm có tung độ bằng không của đường thẳng này cũng được thực hiện tương tự như trong bài 3.39.

Kết quả tìm được như trên hình 3.40.

Hình 3.40

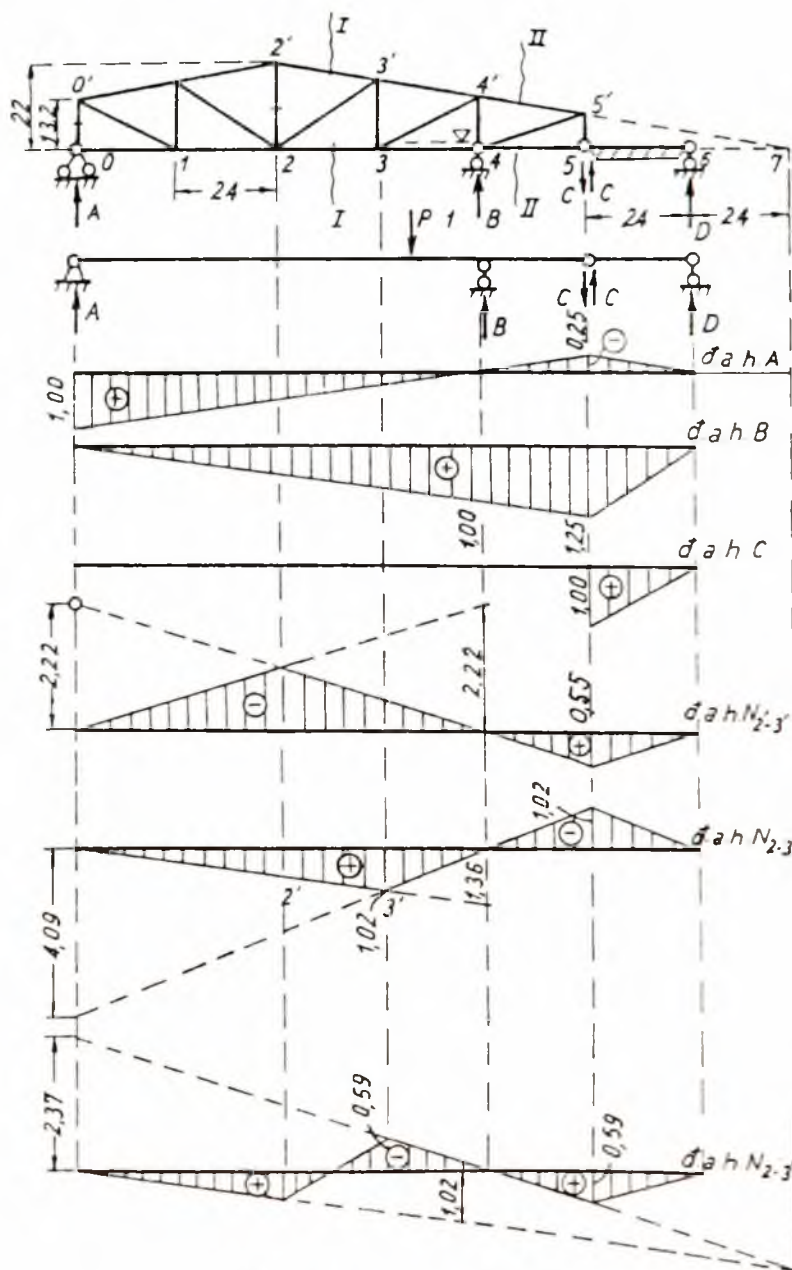


Hình 3.41

3.41. Chỉ dẫn

- ♦ *Đ.a.h. N_1* : thực hiện mặt cắt $I-I$, lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương y của phần bên trên mặt cắt (hình 3.41a). Khi lực $P=1$ di động trên thanh $1-2$, phần hệ khảo sát cân bằng như trên hình 3.41b. Khi lực $P=1$ di động từ mắt 3 đến mắt 5, phần hệ khảo sát cân bằng như trên hình 3.41c.
- ♦ *Đ.a.h. N_2* : thực hiện mặt cắt $2-2$, lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm C của phần hệ bên trên mặt cắt (hình 3.41d). Như vậy, đ.a.h. N_2 được vẽ theo đ.a.h. N_1 .

Hình 3.42

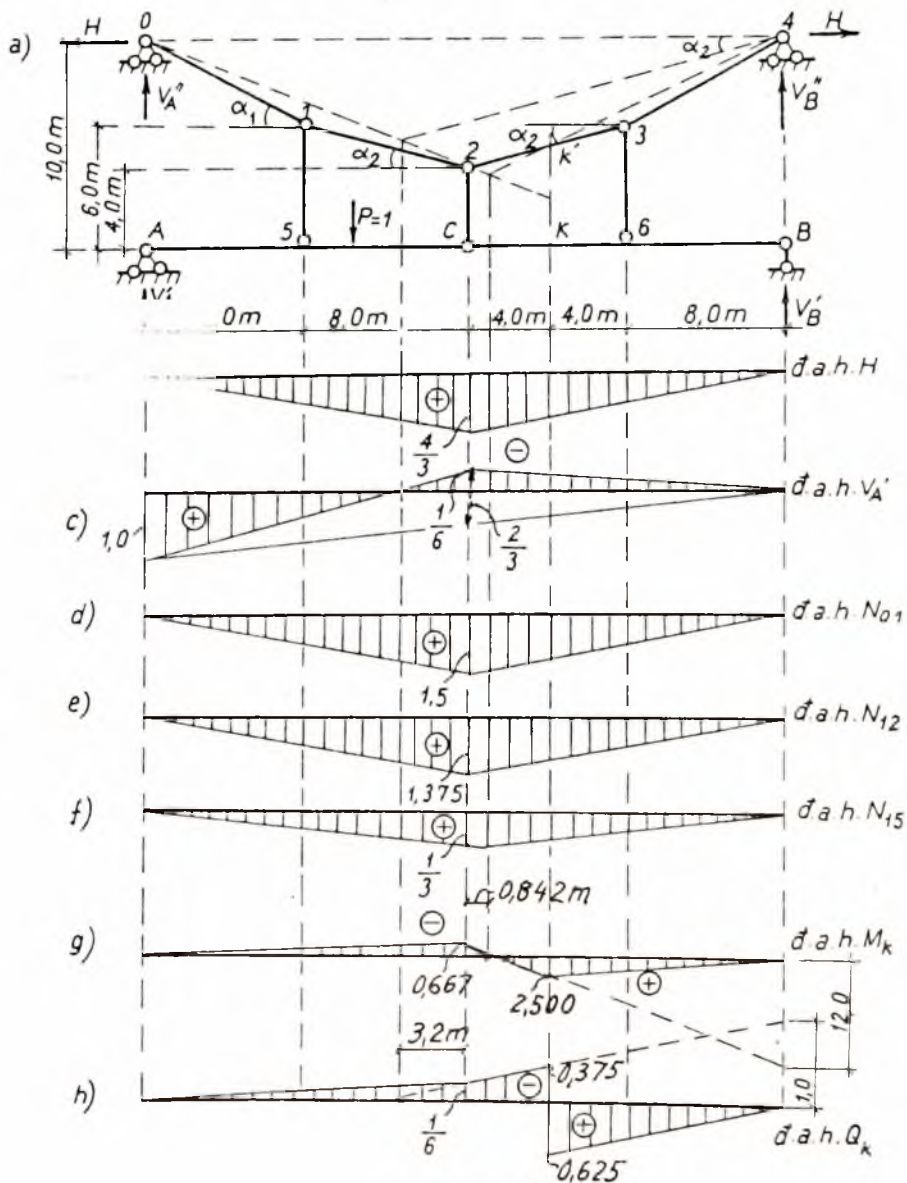


- ♦ *Đ.a.h. N_3* : tách mắt 3, lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương y. Trên các hình 3.41e, f lần lượt vẽ mắt 3 cân khảo sát cân bằng tương ứng với khi lực $P=1$ di động ở ngoài các chốt bị cắt và khi $P=1$ đặt tại mắt 3.

Kết quả như trên hình 3.41a.

3.42. Đáp số. Cho trên hình 3.42.

3.43. Bài giải



Hình 3.43

- ♦ *D.a.h. H*: tương tự như trong hệ ba khớp, *d.a.h. H* được xác định theo biểu thức:

$$d.a.h. H = \frac{l}{f} d.a.h. M_C^d,$$

với f là khoảng cách từ mắt 2 đến đường nối 0-4 tương ứng với vị trí của lực xô H ($f = 6$ m).

Nhân các tung độ *d.a.h.* mômen uốn tại tiết diện C trong dầm đơn giản tương ứng với l/f sẽ tìm được *d.a.h. H*. Kết quả như trên hình 3.43b.

- ♦ *D.a.h. V'_A* (hình 3.43c): $d.a.h. V'_A = d.a.h. V_A - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot d.a.h. H$.

- ♦ *D.a.h. N₀₁* (hình 3.43d): $d.a.h. N_{01} = (d.a.h. H) / \cos \alpha_1$
với $\cos \alpha_1 = 0,89$.

- ♦ *D.a.h. N₁₂* (hình 3.43e): $d.a.h. N_{12} = (d.a.h. H) / \cos \alpha_2$
với $\cos \alpha_2 = 0,97$.

- ♦ *D.a.h. N₁₅* (hình 3.43f): $d.a.h. N_{15} = (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)(d.a.h. H)$
với $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0,5$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = 0,25$.

- ♦ *D.a.h. M_k* (hình 3.43g): $d.a.h. M_k = d.a.h. M_k^d - (d.a.h. H) \cdot y_k$
với $y_k = 5$ m.

- ♦ *D.a.h. Q_k* (hình 3.43h): $d.a.h. Q_k = d.a.h. Q_k^d - (d.a.h. H) \cdot \operatorname{tg} \alpha_k$
với $\operatorname{tg} \alpha_k = \operatorname{tg} \alpha_3 = -0,25$.

3.44. Đáp số. Cho trên hình 3.44.

3.45. Bài giải

- ♦ *D.a.h. H*: thực hiện mặt cắt $I-I$ qua ba thanh $3'C'$, $3C$ và $6C$ rất gần bên trái khớp C' . Phân tích lực dọc trong thanh $3'C'$ thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng V và thành phần nằm ngang H .

Khi P di động trên CB , lập phương trình cân bằng mômen của phần bên trái đối với điểm C .

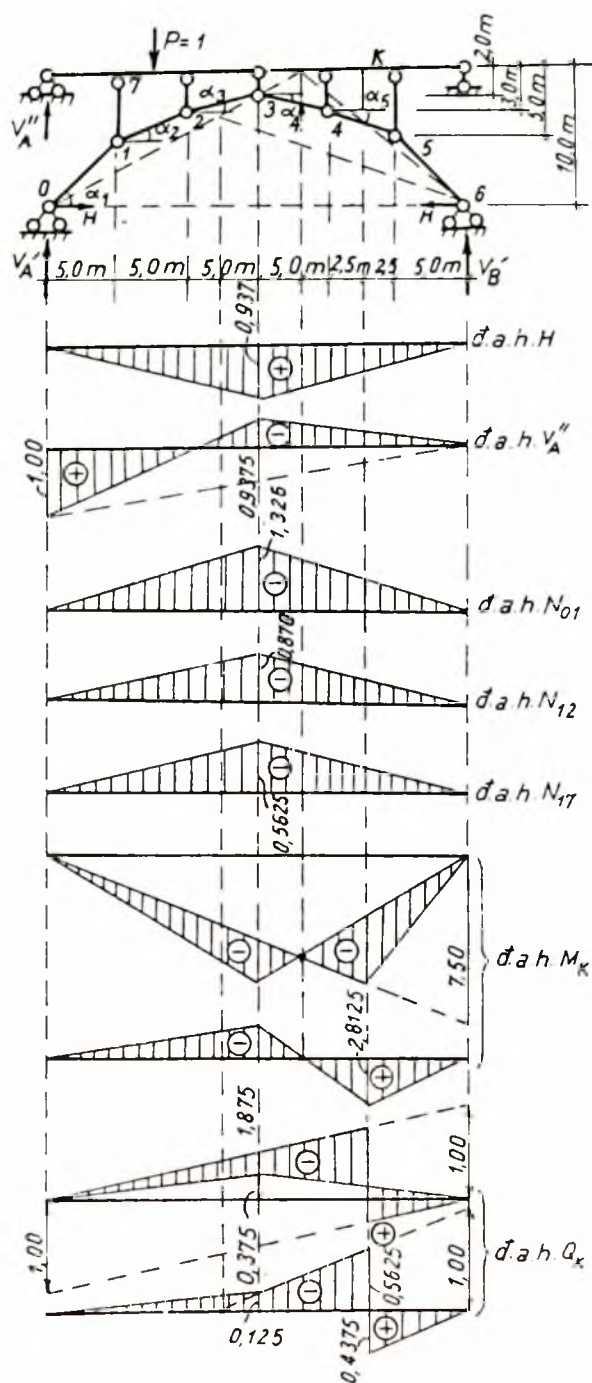
$$\sum M_C^{\text{tr}} = V_a \cdot \frac{l}{2} + H \cdot f = 0, \quad \text{suy ra} \quad H = -V_a \cdot \frac{l}{2f} = -\frac{l}{f} M_C^d.$$

Vậy:
$$d.a.h. H = -\frac{l}{f} d.a.h. M_C^d.$$

Khi P di động trên AB ta cũng lấy được biểu thức tương tự.

Ta thấy biểu thức *d.a.h. H* có dạng tương tự như *d.a.h. lực xô* trong vòm ba khớp nhưng trái dấu. Do đó, nếu tưởng tượng một vòm phụ trợ có ba khớp: hai khớp nối với trái đất ở A, B và khớp C' tương ứng với đường tên f thì ta có thể vẽ *d.a.h. H* theo *d.a.h. lực xô* trong vòm ba khớp phụ trợ ABC' và đổi dấu. Kết quả tìm được như trên hình 3.45c.

Hình 3.44



- ♦ *Đ.a.h. $N_{2'-3'}$* : Tách mắt $3'$, lập phương trình cân bằng hình chiếu lên trục nằm ngang x

$$\sum X = N_{3'-C'} \cos \alpha_4 - N_{2'-3'} \cos \alpha_3 = 0, \text{ nhưng } N_{3'-C'} \cos \alpha_4 = H \text{ nên:}$$

$$N_{2'-3'} = \frac{H}{\cos \alpha_3}.$$

Vì thành phần ngang H của lực căng trong tất cả các đốt dây xích như nhau nên lực dọc trong mọi thanh của dây xích đều được xác định theo công thức:

$$N_i = \frac{H}{\cos \alpha_i}. \quad \text{Do đó:} \quad d.a.h. N_{2'-3'} = \frac{I}{\cos \alpha_3} (d.a.h. H).$$

Kết quả tìm được như trên hình 3.45d.

- ♦ *D.a.h. N_{5-6}* : thực hiện mặt cắt 2-2 qua thanh $2'-3'$ rất gần bên trái mắt $3'$ của dây xích và qua ba thanh 2-3, 5-3, 5-6 của dàn.

Chuyển dời lực dọc $N_{2'-3'}$ theo trục thanh $2'-3'$ đến vị trí $3'$ ứng trên mắt 3 và phân tích lực dọc $N_{2'-3'}$ đặt tại $3'$ thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng V và thành phần nằm ngang H . Xét hai trường hợp:

- *Khi $P=I$ di động ở bên trái mặt cắt 2-2, từ A đến 2*: Lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm 3 của phần bên phải, lúc này thành phần nằm ngang của lực $N_{2'-3'}$ không tham gia phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum M_3^{ph} = N_{5-6} \cdot \rho - V_B(l-z_3) - H \cdot y'_3 = 0,$$

suy ra
$$N_{5-6} = \frac{I}{\rho} [V_B(l-z_3) + H \cdot y'_3].$$

Nhưng $V_B(l-z_3) = M_3^d$, nên
$$N_{5-6} = \frac{I}{\rho} [M_3^d + H \cdot y'_3]. \quad (a)$$

- *Khi $P=I$ di động ở bên phải mặt cắt 2-2, từ 3 đến B*: Lập phương trình cân bằng mômen đối với điểm 3 của phần bên trái, lúc này thành phần thẳng đứng của lực $N_{2'-3'}$ không tham gia phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum M_3^{tr} = N_{5-6} \cdot \rho - V_a z_3 - H \cdot y'_3 = 0,$$

suy ra
$$N_{5-6} = \frac{I}{\rho} [V_a z_3 + H \cdot y'_3].$$

Nhưng $V_a z_3 = M_3^d$, nên
$$N_{5-6} = \frac{I}{\rho} [M_3^d + H \cdot y'_3]. \quad (b)$$

Các biểu thức (a) và (b) có thể quy về một dạng chung:

$$N_{5-6} = \frac{I}{\rho} [M_3^d + H \cdot y'_3]. \quad (c)$$

Tương tự một vòm phụ trợ có ba khớp $AC'B$ và có trục đi qua điểm $3'$ thì biểu thức mômen uốn tại tiết diện $3'$ của vòm phụ trợ có dạng:

$$M_{3'} = M_3^d - H \cdot y_3'. \quad (d)$$

Đối chiếu (c) với (d) ta thấy thừa số thứ hai của (c) có cấu trúc như về phải của (d), chỉ khác nhau về dấu của H , đó là do lực xô H trong (d) đã được quy ước gây nén là dương còn thành phần ngang H của lực dọc trong (c) lại được quy ước gây kéo là dương. Do đó ta có thể biểu thị:

$$N_{5-6} = \frac{1}{\rho} M_{3'}^y, \quad \text{suy ra} \quad d.a.h. N_{5-6} = \frac{1}{\rho} (d.a.h. M_{3'}^y). \quad (e)$$

Như vậy, nếu lực dọc N_i trong dầm được xác định bằng phương trình cân bằng mômen đối với tâm mômen k và nếu sử dụng vòm ba khớp phụ trợ có hai khớp nối với trái đất ở A, B và khớp C' tương ứng với đường tên f và có trục đi qua điểm k^* thì từ biểu thức (e) ta có thể suy ra biểu thức viết cho lực dọc N_i như sau:

$$d.a.h. N_i = \pm \frac{1}{\rho} (d.a.h. M_{k^*}^y). \quad (f)$$

trong đó:

k^* – điểm có hoành độ tương ứng với hoành độ của tâm mômen k và có tung độ tính từ đường nối hai gối A, B bằng khoảng cách từ tâm mômen k đến vị trí của lực H ;

ρ – khoảng cách từ tâm mômen k đến phương của lực N_i .

Trong biểu thức (f) ta chọn dấu (+) khi mômen của lực dọc dương N_i đặt ở phần hệ bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm k , nếu quay thuận chiều kim thì chọn dấu (-).

Để tìm $d.a.h. M_{k^*}^y$ theo cách vẽ thực hành, tức là tìm điểm không của đường phái, ta có thể xác định hoành độ z_d của điểm không bằng các suy luận về hình học hoặc theo công thức đã biết trong phân lý thuyết như sau:

$$z_d = \frac{f l}{f + l_2 (y_{k^*} / z_{k^*})}, \quad (g)$$

trong đó:

z_{k^*}, y_{k^*} – hoành độ và tung độ của điểm k^* trên vòm phụ trợ;

f – đường tên của vòm phụ trợ;

l – chiều dài nhịp vòm;

l_2 – chiều dài nhịp của phần vòm bên phải (nếu mặt cắt thuộc phần vòm bên trái).

Đối với trường hợp đ.a.h. N_{5-6} : tâm mômen k ở tại mắt 3; $\rho = 0,836d$ (xác định bằng hình học); k^* ở tại mắt 3'; $z_{k^*} = z_3 = 3d$; $y_{k^*} = y_{3'} = 2,6d$; $f = 3d$; $l = 8d$; $l_2 = 4d$.

Sau khi áp dụng công thức (g), ta tìm được $z_d = 3,71d$. Nối tung độ bằng không có hoành độ $z_d = 3,71d$ với tung độ bằng $3d/\rho = 3,59$ ứng dưới gối A sẽ được đường phải, phần thích dụng của đường phải tương ứng với khi $P=1$ di động từ 3 đến C. Nối tung độ bằng không ứng dưới gối A với tung độ của đường phải ứng dưới mắt 3 sẽ được đường trái, phần thích dụng của đường trái tương ứng với khi lực $P=1$ di động từ A đến 2. Khi $P=1$ di động trên dốt bị cắt từ 2 đến 3, ta có đường nối giữa hai tung độ của đường trái và đường phải ứng dưới mắt 2 và mắt 3. Khi $P=1$ di động từ C đến B, ta có đường nối giữa tung độ của đường phải ứng dưới C với tung độ bằng không ứng dưới gối B.

Kết quả vẽ đ.a.h. N_{5-6} như trên hình 3.45e.

- ♦ Đ.a.h. N_{2-3} : ta vẫn sử dụng mặt cắt 2-2 như trên. Trong trường hợp này, tâm mômen là điểm 5; cánh tay đòn $\rho = h = 1,3d$; k^* ở tại điểm 2'' có hoành độ $z_{k^*} = z_5 = 2d$, tung độ tính từ đường AB bằng khoảng cách từ tâm mômen 5 đến cao độ của lực H ứng trên tâm mômen 5: $y_{k^*} = h + z_5 = 1,3d + 2d = 3,3d$; $f = 3d$; $l = 8d$; $l_2 = 4d$.

công thức (g), ta tìm được $z_d = 2,5d$.

(f) ta chọn dấu (-) vì mômen của lực dọc dương N_1 đặt ở phần hệ bên trái quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm 5.

Các bước tiếp theo cũng thực hiện tương tự như trường hợp trên, kết quả vẽ đ.a.h. N_{2-3} như trên hình 3.45f.

- ♦ Đ.a.h. N_{3-6} : thực hiện mặt cắt 3-3 qua thanh $C'-3'$ của dầm xích và ba thanh 3-C, 3-6, 5-6 của dầm. Chuyển dời lực dọc $N_{3'-C'}$ theo trục thanh $3'-C'$ đến vị trí m^* ứng trên giao điểm m của hai thanh 3-C, 5-6 và phân tích lực dọc $N_{3'-C'}$ đặt tại m^* thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng V và thành phần nằm ngang H . Nếu chọn m làm tâm mômen thì thành phần thẳng đứng V và lực dọc trong các thanh 3-C, 5-6 sẽ không tham gia phương trình cân bằng và ta có thể sử dụng biểu thức (f) để tìm đ.a.h. N_{3-6} . Trong trường hợp này, vòm phụ trợ sẽ đi qua A, m^* , C' và B như trên hình 3.45a, điểm m^* tuy lệch về bên phải khớp C' nhưng vẫn thuộc phần miếng cứng bên trái của vòm phụ trợ.

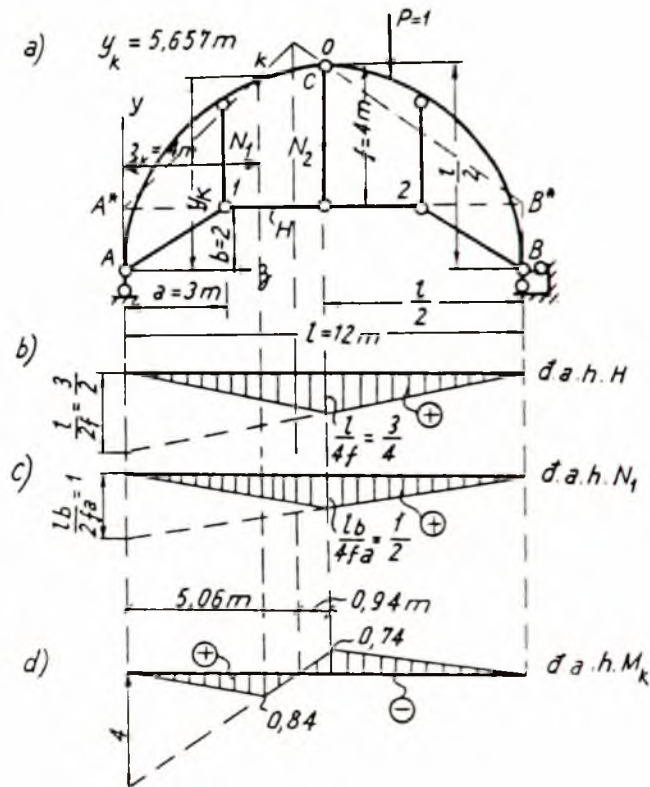
Trong trường hợp này, các số liệu tính toán khi áp dụng các biểu thức (f) và (g) như sau: tâm mômen là điểm m ; cánh tay đòn $\rho = 2,25d$; k^* ở tại điểm m^* có hoành độ $z_m = 5,25d$, tung độ tính từ đường AB bằng khoảng cách từ tâm mômen m đến cao độ của lực H ứng trên tâm mômen m : $y_{k^*} = 3,5d$; $f = 3d$; $l = 8d$; $l_2 = 4d$.

Sau khi áp dụng công thức (g), ta tìm được $z_d = 4,25d$.

Trong biểu thức (f) ta chọn dấu (+) vì mômen của lực dọc dương N_{3-6} đặt ở phần hệ bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm m . Sau khi tìm được $z_d = 4,25d$. Nổi tung độ bằng không có hoành độ $z_d = 4,25d$ với tung độ bằng $z_m / \rho = 5,25d / 2,25d = 2,33$ ứng dưới gối A sẽ được đường phải (đường đứt nét trên hình 3.45g), phần thích dụng của đường phải chỉ là một tung độ bằng $+0,13$ tương ứng với khi $P=1$ đặt tại C . Nổi tung độ bằng không ứng dưới gối A với tung độ của đường phải ứng dưới m^* sẽ được đường trái, phần thích dụng của đường trái tương ứng với khi $P=1$ di động từ A đến 3 .

Khi $P=1$ di động trên dốt bị cắt từ 3 đến C , ta có đường nối giữa hai tung độ của đường trái và đường phải ứng dưới mắt 3 và mắt C . Khi $P=1$ di động từ C đến B , đ.a.h. là đường nối giữa tung độ của đường phải ứng dưới C với tung độ bằng không ứng dưới gối B .

Kết quả vẽ đ.a.h. N_{3-6} như trên hình 3.45g.



Hình 3.46

3.46. Đáp số. Cho trên

hình 3.46.

3.47. Đáp số. $R_A = 7ql / 8$; $R_B = -ql / 8$.

3.48. Bài giải. Chọn đường chuẩn vuông góc với phương của tải trọng di động, chọn hoành độ x là khoảng cách nằm ngang tính từ gối A đến tải trọng $P=1$.

♦ Vẽ các đ.a.h. M_k, Q_k, N_k . Để lập các biểu thức nội lực tại k , sử dụng mặt cắt qua tiết diện k , và xét hai trường hợp:

• Khi $P=1$ di động trên phần trái k ($0 \leq x \leq l/2$):

$$M_k = B \frac{l}{2} = \frac{x}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{x}{2};$$

$$Q_k = -B \cos \alpha = -\frac{x}{l} \cos \alpha;$$

$$N_k = B \sin \alpha = \frac{x}{l} \sin \alpha.$$

- Khi $P=1$ di động trên phần phải k ($l/2 \leq x \leq l$):

$$M_k = A \frac{l}{2} = \frac{l-x}{2};$$

$$Q_k = A \cos \alpha = \frac{l-x}{l} \cos \alpha;$$

$$N_k = -A \sin \alpha = -\frac{l-x}{l} \sin \alpha.$$

Từ các biểu thức trên ta vẽ được các đ.a.h. như trên

đại lượng

M_k, Q_k, N_k - Các đ.a.h. bao gồm hai đoạn thẳng nên có thể xác định các đại lượng tương ứng theo công thức:

$$S = \sum R_i y_i = R_1 y_1 + R_2 y_2,$$

trong đó:

R_i - hợp lực của tải trọng giới hạn trong mỗi đoạn thẳng của đ.a.h., trong bài toán này ta có:

$$R_1 = R_2 = \frac{ql}{2 \cos \alpha};$$

y_i - tung độ của đ.a.h. S tương ứng với vị trí của hợp lực R_i .

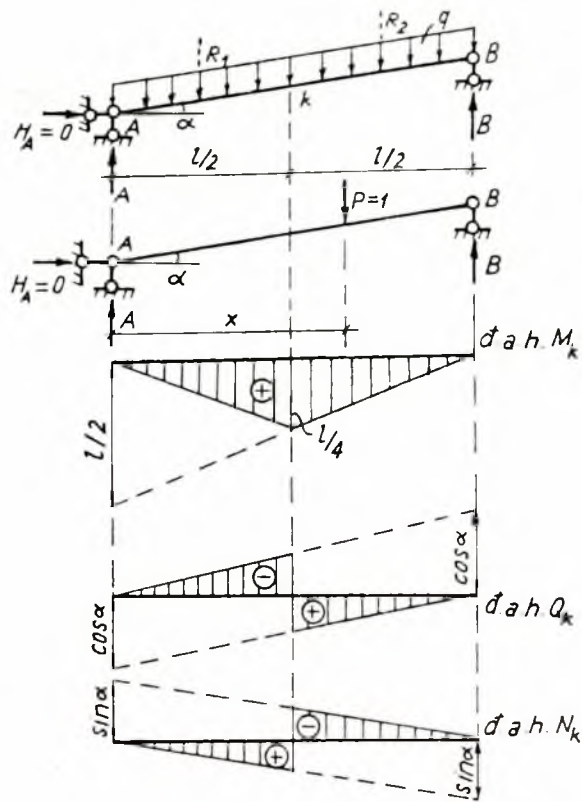
- **Mômen uốn tại k** - Từ đ.a.h. M_k , ta có: $y_1 = y_2 = l/8$. Do đó:

$$M_k = \frac{ql}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{l}{8} + \frac{ql}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{l}{8} = \frac{ql^2}{8 \cos \alpha}.$$

- **Lực cắt tại k** - Từ đ.a.h. Q_k , ta có: $y_1 = -y_2 = -\cos \alpha / 4$. Do đó:

$$Q_k = -\frac{ql}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{4} + \frac{ql}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{4} = 0.$$

- **Lực dọc tại k** - Từ đ.a.h. N_k , ta có: $y_1 = -y_2 = \sin \alpha / 4$. Do đó:



Hình 3.48

$$N_k = \frac{ql}{2\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{4} - \frac{ql}{2\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{4} = 0.$$

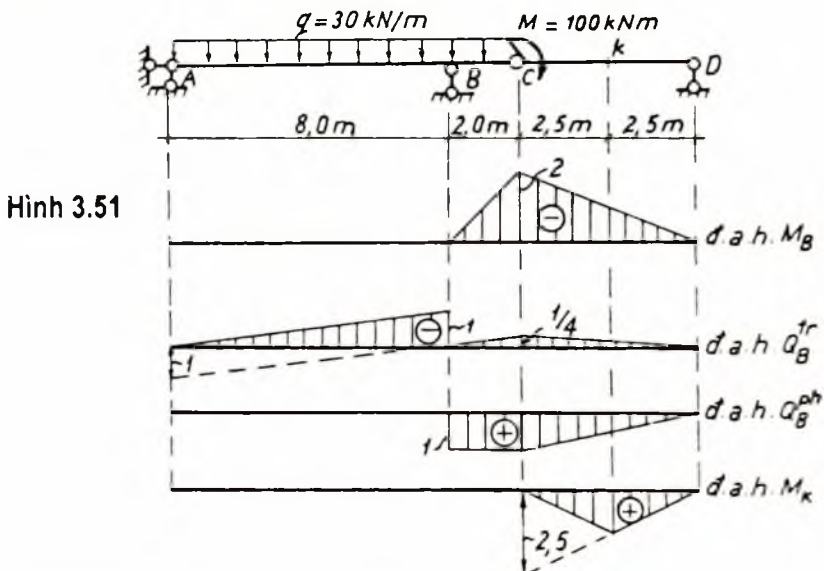
Bằng cách xác định trực tiếp, ta cũng tìm được kết quả như trên.

3.49. Đáp số. $M_k^{tr} = -150 \text{ kNm}; \quad M_k^{ph} = -50 \text{ kNm};$
 $Q_k^{tr} = 10 \text{ kN}; \quad Q_k^{ph} = 10 \text{ kN};$
 $Q_A^{tr} = -50 \text{ kN}; \quad Q_A^{ph} = 10 \text{ kN};$

3.50. Đáp số.

Tại tiết diện k : $M_k^{tr} = 30,9 \text{ kNm}; \quad M_k^{ph} = 45,9 \text{ kNm};$
 $Q_k = -6,4 \text{ kN}; \quad N_k = 66,4 \text{ kN};$
 Tại tiết diện m : $M_m = -16,9 \text{ kNm};$
 $Q_m^{tr} = -43,9 \text{ kN}; \quad Q_m^{ph} = 22,5 \text{ kN};$
 $N_m^{tr} = 65,4 \text{ kN}; \quad N_m^{ph} = 0.$

3.51. Đáp số. Hệ đã cho là dầm ghép tĩnh định.



Kết quả vẽ các đ.a.h. như trên hình 3.51.

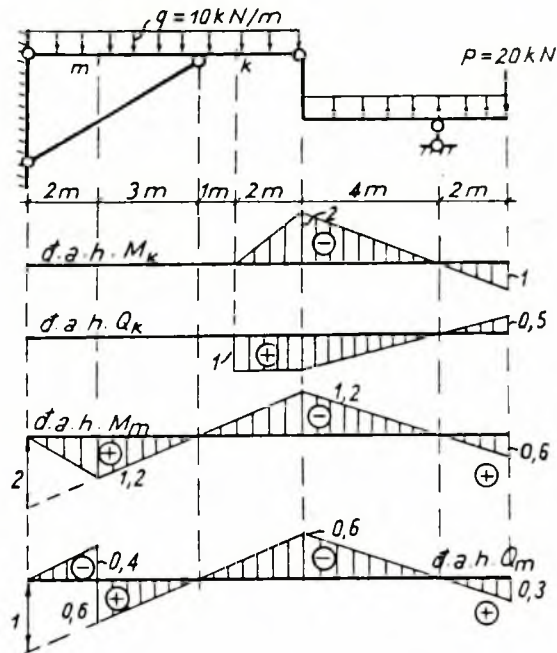
$$M_B = -20 \text{ kNm}; \quad Q_B^{tr} = -122,5 \text{ kN}; \quad Q_B^{ph} = 40 \text{ kN}; \quad M_k = 50 \text{ kNm}.$$

3.52. Đáp số. Cho trên hình 3.52.

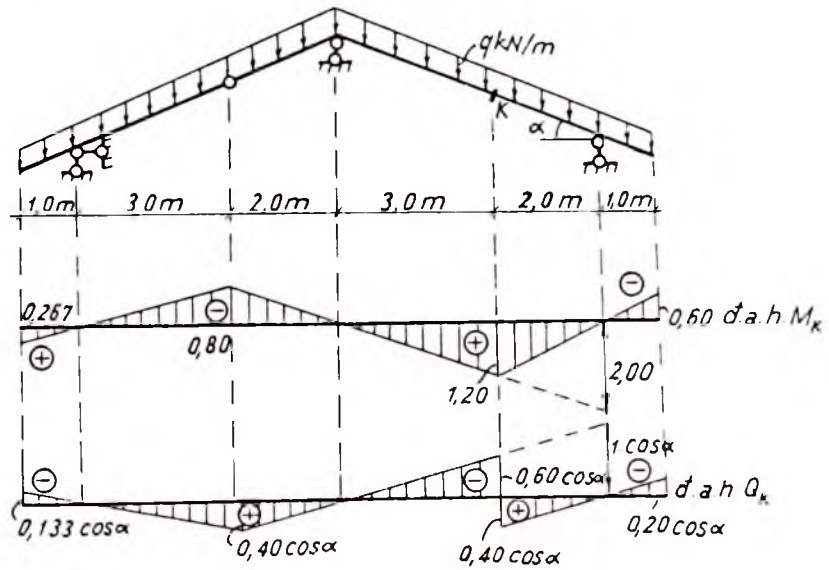
3.53. Đáp số. Các đ.a.h. M_k và đ.a.h. Q_k vẽ trên hình 3.53.

$$M_k = 0,8335q / \cos\alpha; \quad Q_k = 0,3335q.$$

Hình 3.52



Hình 3.53



3.54. Đáp số. Các đ.a.h. vẽ trên hình 3.54.

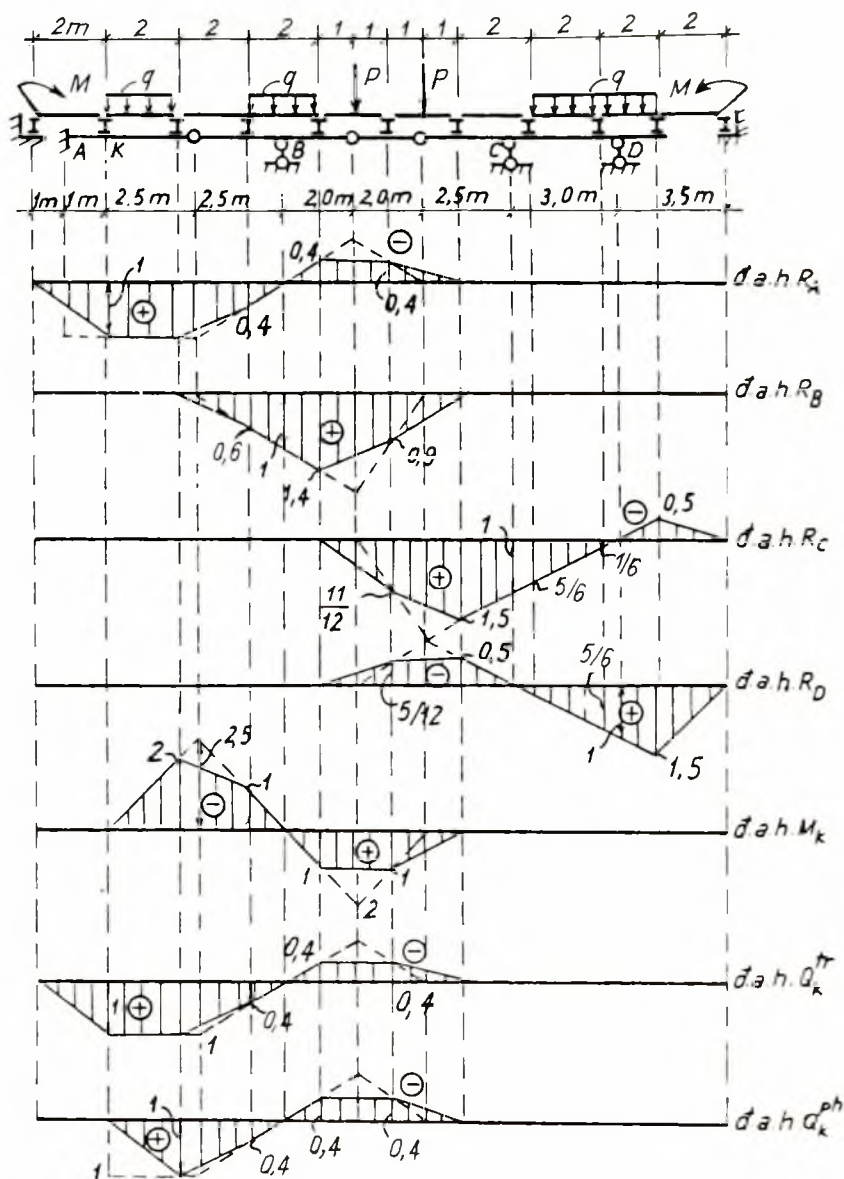
$$R_A = 0; \quad R_B = 100 \text{ kN}; \quad R_B = 85 \text{ kN}; \quad R_B = 15 \text{ kN};$$

$$M_K = 55 \text{ kNm}; \quad Q_K^{lr} = 0; \quad Q_K^{ph} = -20 \text{ kN}.$$

3.55. Đáp số. $H = 120,8 \text{ kN}; \quad M_K = 181,4 \text{ kNm}.$

$$Q_k^{lr} = 31,1 \text{ kN}; \quad Q_k^{ph} = -56 \text{ kN};$$

$$N_k^{lr} = 164 \text{ kN}; \quad N_k^{ph} = 286,4 \text{ kN}.$$



Hình 3.54

3.56. Bài giải. Để tìm vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng, ta áp dụng phương pháp thử dần thực hiện theo thứ tự như sau:

1. Phát hiện tất cả các vị trí cho S_{max} , S_{min} và tính các S_{max} , S_{min} tương ứng. Muốn vậy, lần lượt đặt từng tải trọng vào từng đỉnh lồi của đường

ảnh hưởng. Tương ứng với mỗi lần, tính đạo hàm của S theo công thức:

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^m R_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad (*)$$

và thực hiện các bước sau:

- ❖ Cho đoàn tải trọng dịch sang trái một đoạn dz . Tính dS/dz theo (*).
- ❖ Cho đoàn tải trọng dịch sang phải một đoạn dz . Tính dS/dz theo (*).
- ❖ So sánh các giá trị dS/dz trong hai lần tính.

• Nếu những giá trị này thỏa mãn các điều kiện:

◇ chuyển từ $\frac{dS}{dz} > 0$ sang $\frac{dS}{dz} = 0$ thì vị trí đó cho một giá trị S_{max} ;

◇ chuyển từ $\frac{dS}{dz} = 0$ sang $\frac{dS}{dz} < 0$ thì vị trí đó cho một giá trị S_{min} .

Tính S_{max} hoặc S_{min} .

Điều kiện trên không thỏa mãn thì cần dịch chuyển đoàn tải tới vị trí khác để sao cho có một tải trọng nào đó đặt ở đỉnh lồi của d.a.h. Muốn đạt được cực đại, nên dịch chuyển sang bên phải nếu dS/dz trong cả hai lần tính là dương, còn sang bên trái nếu dS/dz trong cả hai lần tính là âm. Muốn đạt cực tiểu thì làm ngược lại.

Về nguyên tắc, nếu có p lực và q đỉnh lồi thì cần thực hiện các bước tính trên $p \times q$ lần, tuy nhiên ta cần nhận xét trị số của các tải trọng và hình dạng của d.a.h. để loại trừ bớt những trường hợp vô ích. *Thường nên bố trí các tải trọng lớn trên phần d.a.h. có tung độ lớn và càng nhiều tải trọng nằm trong phạm vi d.a.h. càng tốt.*

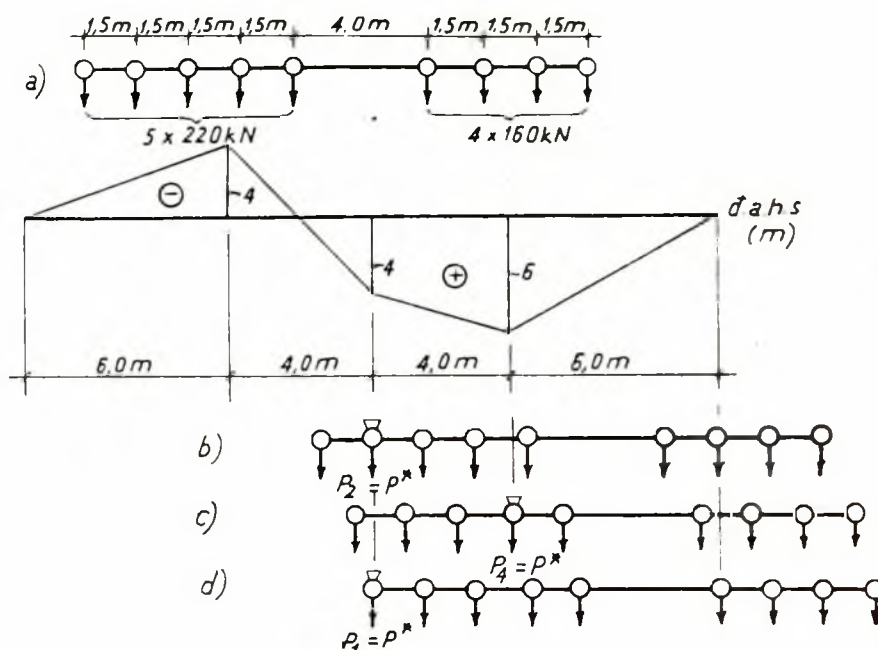
2. So sánh các S_{max} (hoặc các S_{min}) với nhau để tìm giá trị $\max S_{max}$ (hoặc $\min S_{min}$). Đó là giá trị $S_{tính}$ cần tìm, vị trí tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

Áp dụng vào bài toán đã cho:

Trước tiên, tính tg của các góc nghiêng:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -2/3; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = +2; \quad \operatorname{tg} \alpha_3 = +1/2; \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = -1.$$

Đ.a.h. S đã cho (hình 3.56a) có phần mang dấu dương chiếm một diện tích với các tung độ lớn hơn phần mang dấu âm, do đó để tìm giá trị tuyệt đối lớn nhất của S ta chỉ cần xếp tải trọng trên phần dương của d.a.h. để tìm giá trị $\max S_{max}$.



Hình 3.56

♦ *Tính thử lần 1*- Chọn tải trọng thứ hai P_2 làm lực P^* đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 (hình 3.56b).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 440 \text{ kN}; \quad R_3 = 440 \text{ kN}; \quad R_4 = 220 + 320 = 540 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 440.2 + 440(1/2) + 540(-1) = 1100 - 540 > 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 220 \text{ kN}; \quad R_3 = 660 \text{ kN}; \quad R_4 = 220 + 160 = 380 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 220.2 + 660(1/2) + 380(-1) = 770 - 380 > 0.$$

Ta thấy các điều kiện cực đại không thỏa mãn, vị trí này không cho cực đại. Vì trong cả hai lần dịch chuyển dS/dz đều dương nên ta chuyển dời đoàn tải trọng về phía bên phải.

♦ *Tính thử lần 2*- Chọn tải trọng thứ tư P_4 làm lực P^* đặt tại đỉnh có tung độ bằng 6 (hình 3.56c).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 220 \text{ kN}; \quad R_3 = 660 \text{ kN}; \quad R_4 = 220 + 160 = 380 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 220.2 + 660(1/2) + 380(-1) = 770 - 380 > 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 220 \text{ kN}; \quad R_3 = 440 \text{ kN}; \quad R_4 = 440 + 160 = 600 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 220.2 + 440(1/2) + 600(-1) = 660 - 600 > 0.$$

Ta thấy vị trí này không cho cực đại. Vì trong cả hai lần dịch chuyển dS/dz đều dương nên ta tiếp tục chuyển dời đoàn tải trọng về phía bên phải.

♦ **Tính thử lần 3-** Chọn tải trọng thứ nhất P_1 làm lực P^* đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 (hình 3.56d).

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 220 \text{ kN}; \quad R_3 = 440 \text{ kN}; \quad R_4 = 440 + 160 = 600 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 220.2 + 440(1/2) + 600(-1) = 660 - 600 > 0.$$

• Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn dz , ta có:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad R_3 = 660 \text{ kN}; \quad R_4 = 440 + 0 = 440 \text{ kN};$$

$$\text{do đó: } dS/dz = 660(1/2) + 440(-1) = 330 - 440 < 0.$$

Vị trí này thỏa mãn điều kiện cực đại. Đại lượng S_{max} tương ứng:

$$= 660.y_1 + 440.y_2 = 660(4 + 1,5 \text{tg}\alpha_3) + 440(4,75 \text{tg}\alpha_4) =$$

$$= 660(4 + 1,5.0,5) + 440(4,75.1) = 5225 \text{ kNm}.$$

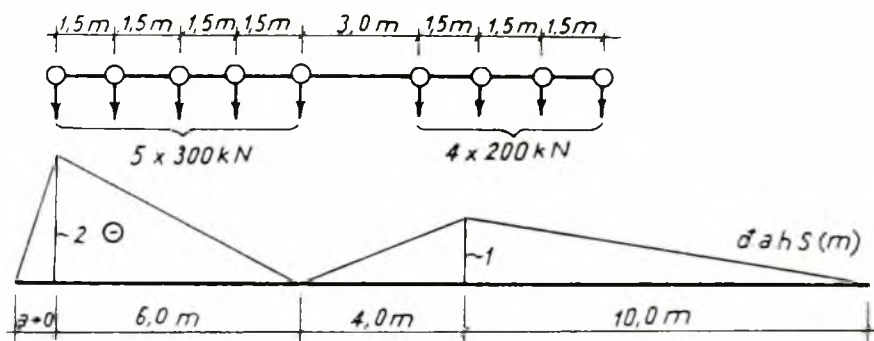
Nếu cho đoàn tải trọng tiếp tục chuyển dời thêm về phía bên phải thì các lực 160 kN sẽ ra ngoài phạm vi đ.a.h., các lực 220 kN sẽ đi vào vùng có các tung độ nhỏ hơn. Do đó, vị trí tương ứng với tải trọng thứ nhất P_1 đặt tại đỉnh có tung độ bằng 4 (hình 3.56d) là vị trí bất lợi nhất và $\max S_{max} = 5225 \text{ kNm}$.

3.57. Bài giải. Để áp dụng phương pháp thử dần đã giới thiệu trong bài 3.56, ta thay đ.a.h. S có bước nhảy tại đầu trái bằng đ.a.h. S có dạng như trên hình 3.57, trong đó bổ sung đoạn thứ nhất với chiều dài $a \rightarrow 0$; lúc này $\text{tg}\alpha_1 = -\infty$.

Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng với khi lực 300 kN đầu tiên đặt ở đỉnh có tung độ bằng 2 (vị trí bước nhảy) sẽ cho một giá trị $S_{min} = -2130 \text{ kNm}$. Thật vậy, khi đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn dz , ta có $dS/dz = -\infty < 0$; còn khi dịch chuyển về bên phải một đoạn dz , ta có $dS/dz = 375 > 0$ tức là thỏa mãn điều kiện cực tiểu.

Ngoài ra không còn có một vị trí nào khác cho S_{min} lớn hơn về giá trị tuyệt đối vì nếu cứ tiếp tục chuyển dời về phía bên phải thì các lực sẽ đi vào vùng có các tung độ nhỏ hơn. Do đó, vị trí tương ứng với tải trọng thứ nhất đặt tại đỉnh có tung độ bằng 2 (hình 3.57) là vị trí bất lợi nhất và

$$\min S_{\min} = -2130 \text{ kNm}.$$



Hình 3.57

3.58. Đáp số. $|M_c|_{\max} = 126 \text{ kNm}$; $|Q_c|_{\max} = 25,2 \text{ kN}$.

3.59. Đáp số. $V_{A,\max} = 225 \text{ kN}$; $R_{D,\max} = 295,3 \text{ kN}$;

$M_{D,\min} = -287,5 \text{ kNm}$; $M_{k,\max} = 275,0 \text{ kNm}$.

Bài giải mẫu bài tập lớn 1

TÍNH HỆ GHÉP TĨNH ĐỊNH

Sơ đồ hệ : hình 3.60.1a.

Số liệu hình học : $l = 24 \text{ m}$; $a = 8 \text{ m}$; $b = 12 \text{ m}$.

Tải trọng bất động: $P_{1c} = 40 \text{ kNm}$; $q_{1c} = 20 \text{ kN/m}$; $M_{1c} = 180 \text{ kNm}$.

Tải trọng di động: đoàn tải trọng tiêu chuẩn trên hình 3.60.1b.

Thứ tự thực hiện:

1. Xác định các tải trọng để tính với hệ số vượt tải $n = 1,1$ chung cho các loại tải trọng:

$$P = 1,1 \cdot 40 = 44 \text{ kN}; \quad q = 1,1 \cdot 20 = 22 \text{ kN/m}; \quad M = 1,1 \cdot 180 = 198 \text{ kNm}.$$

2. Xác định phản lực gối tựa (hình 3.60.1c)

• Dầm phụ ED:

$$\sum M_E = R_D b - P \left(b + \frac{a}{2} \right) = 0,$$

$$\text{suy ra: } R_D = \frac{P}{b} \left(b + \frac{a}{2} \right) = \frac{44}{12} \left(12 + \frac{8}{2} \right) = 58,67 \text{ kN}.$$

$$\sum M_D = R_E b - P \frac{a}{2} = 0,$$

$$\text{suy ra: } R_E = \frac{Pa}{2b} = \frac{44 \cdot 8}{2 \cdot 12} = 14,67 \text{ kN}.$$

♦ Dầm phụ CN:

$$\sum M_N = -R_C b - \frac{q}{2} (a+b)^2 = 0,$$

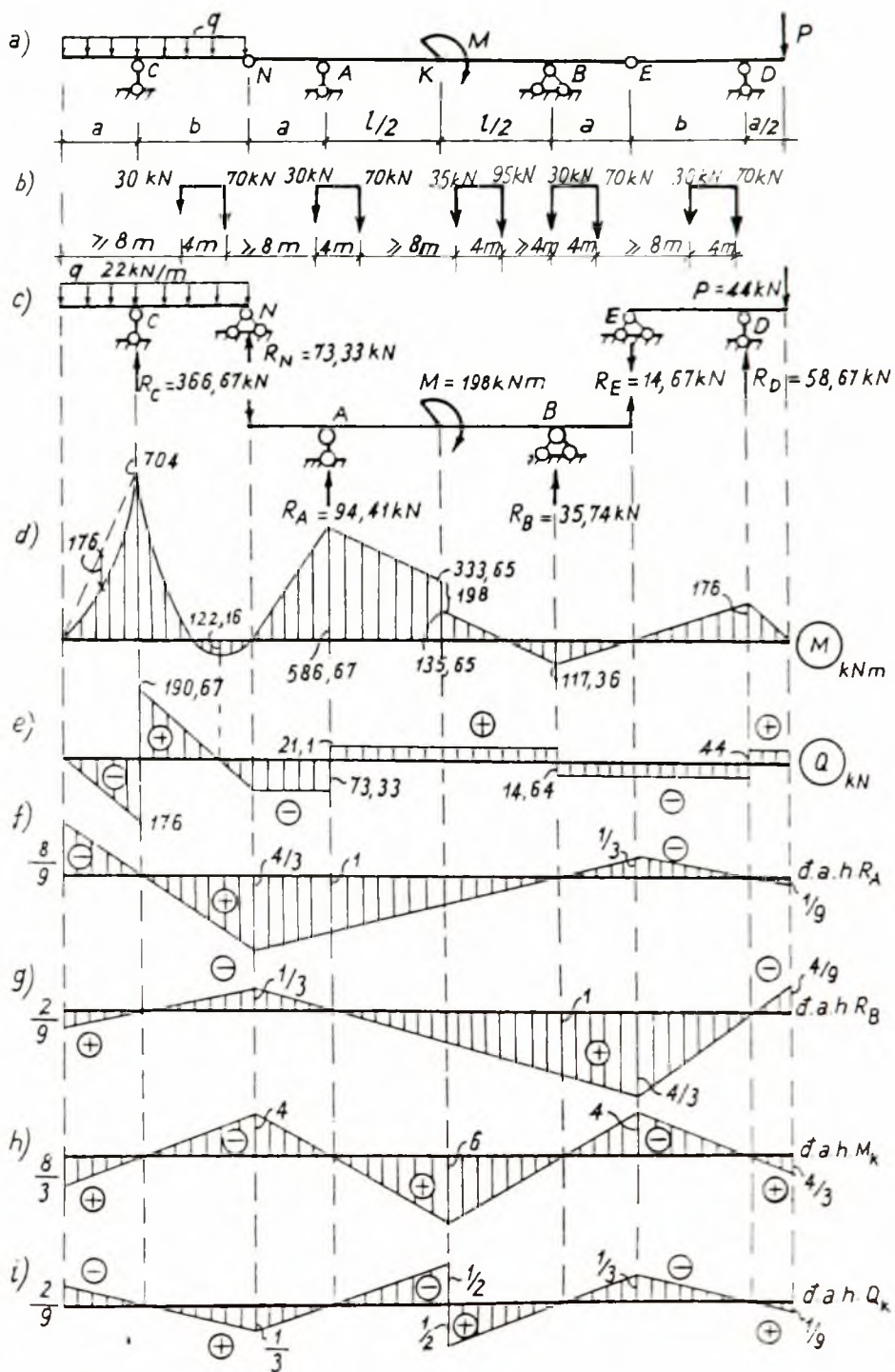
$$\text{suy ra: } R_C = \frac{q}{2b} (a+b)^2 = \frac{22}{2 \cdot 12} (8+12)^2 = 366,67 \text{ kN}.$$

$$\sum M_C = R_N b - q(a+b) \frac{(b-a)}{2} = 0,$$

$$\text{suy ra: } R_N = q(a+b) \frac{(b-a)}{2b} = 22(8+12) \frac{(12-8)}{2 \cdot 12} = 73,33 \text{ kN}.$$

♦ Dầm chính NABE:

$$\sum M_B = -M - R_A l + R_N (a+l) + R_E a = 0, \text{ suy ra:}$$



Hình 3.60.1

$$R_A = \frac{1}{l} [-M + R_N (a+l) + R_E a] =$$

$$= \frac{1}{24} [-198 + 73,33(8+24) + 14,64.8] = 94,41 \text{ kN.}$$

$$\sum M_A = -M + R_B l + R_E (a+l) + R_N a = 0, \text{ suy ra}$$

$$R_B = \frac{1}{l} [M - R_E(a+l) - R_N a] =$$

$$= \frac{1}{24} [198 - 14,64(8+24) - 73,33.8] = 35,74 \text{ kN.}$$

3. *Vẽ các biểu đồ mômen uốn, lực cắt.* Sau khi xác định được các phản lực ta vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt (biểu đồ lực dọc bằng không) cho từng dầm phụ và chính riêng biệt rồi ghép lại trên biểu đồ chung cho toàn hệ. Kết quả như trên hình 3.60.1d, e.

4. *Vẽ các đường ảnh hưởng:* thành phần phản lực thẳng đứng tại gối tựa A; phản lực tại gối tựa B; mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k. Kết quả 60.1f, g, h, i.

đường ảnh hưởng, xác định các đại lượng tương ứng với tải trọng đã cho.

$$R_D = \sum R_k y_k + \sum q_k \omega_k + \sum M_k \operatorname{tg} \alpha_k$$

$$= 44. \frac{1}{9} + 22 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{12}{2} - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{2} \right) - 198. \frac{1}{24} = 94,41 \text{ kN;}$$

$$R_B = -44. \frac{4}{9} + 22 \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{2} \right) + 198. \frac{1}{24} = 35,47 \text{ kN;}$$

$$M_k^{lr} = -44. \frac{4}{3} + 22 \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{2} - 4. \frac{12}{2} \right) - 198. \frac{6}{12} = 333,67 \text{ kNm;}$$

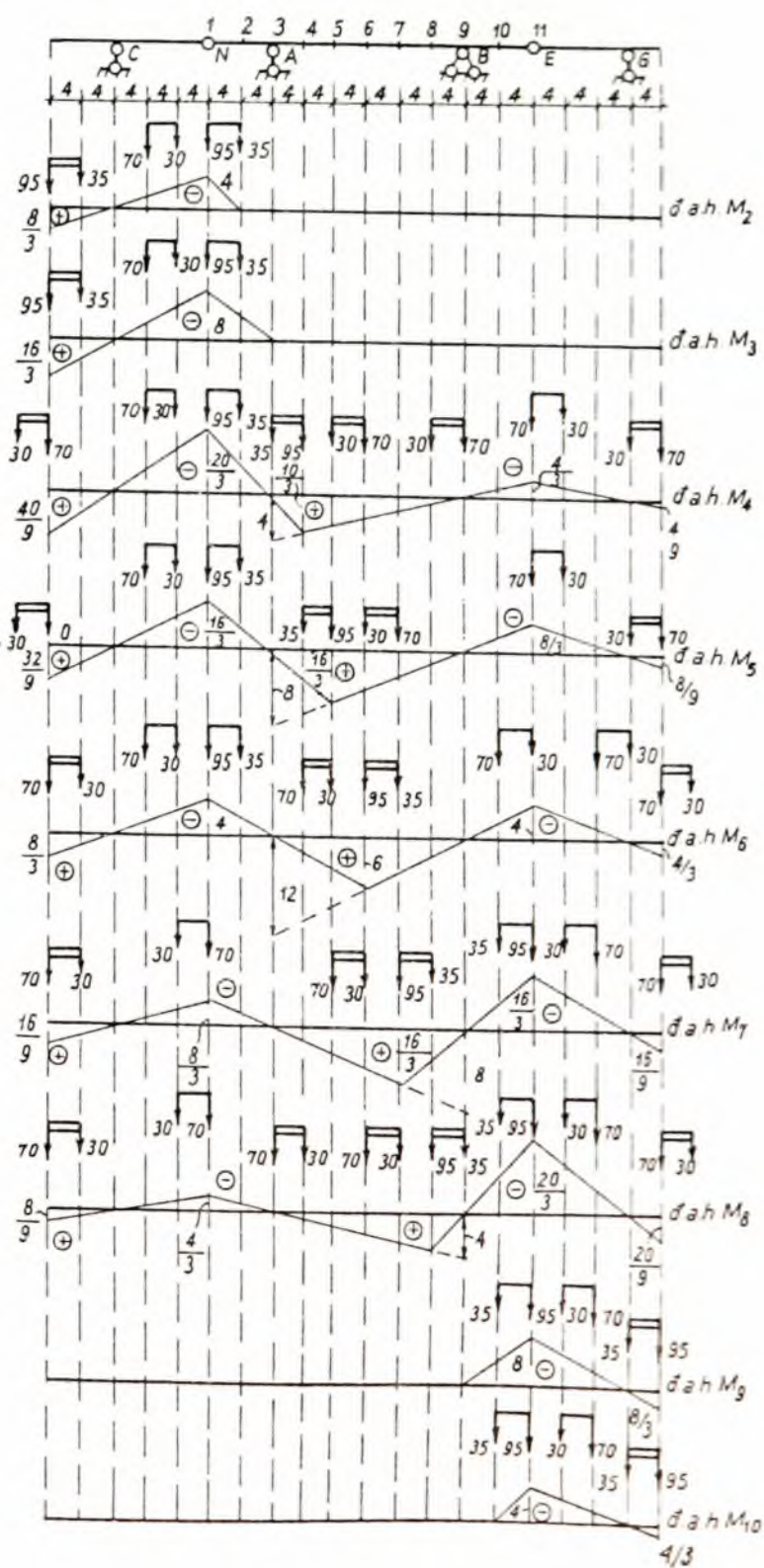
$$M_k^{ph} = -44. \frac{4}{3} + 22 \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{2} - 4. \frac{12}{2} \right) + 198. \frac{6}{12} = 135,67 \text{ kNm;}$$

$$Q_k = -44. \frac{1}{9} + 22 \left(-\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{2} \right) - 198. \frac{1}{24} = 21,08 \text{ kN.}$$

Đổi chiều với kết quả ở bước 3: phù hợp.

6. *Vẽ biểu đồ bao mômen uốn và lực cắt trong dầm chính N-E tương ứng với đoàn xe tiêu chuẩn cho trên hình 3.60.1b nhân với hệ số vượt tải 1,3 và với tải trọng bất động phân bố đều có cường độ $q = 30 \text{ kN/m}$ nhân với hệ số vượt tải bằng 1,1.*

Hình 3.60.2



* Biểu đồ bao mômen uốn

Trước hết, vẽ đ.a.h. mômen uốn tại các tiết diện đã chỉ định như trên hình 3.60.2 theo thứ tự 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Sau đó, đặt đoàn tải trọng di động ở các vị trí bất lợi để tìm các giá trị $M_{k,max}$, $M_{k,min}$; tìm mômen uốn do tải trọng bất động M_k^* bằng cách nhân cường độ tải trọng bất động với diện tích đ.a.h. M_k tương ứng. Xác định các tung độ biểu đồ bao mômen $M_{k,max}^b$ và $M_{k,min}^b$ tại các tiết diện đã chỉ định theo công thức:

$$M_{k,max}^b = M_{k,max} + M_k^* ; \quad M_{k,min}^b = M_{k,min} + M_k^* .$$

Trên hình 3.60.2 trình bày cách bố trí đoàn tải trọng ở vị trí bất lợi nhất trên mỗi đ.a.h.: vị trí cho $M_{k,max}$ tương ứng với đoàn xe vẽ thấp hơn, mỗi xe được nối bằng hai nét ngang; vị trí cho $M_{k,min}$ tương ứng với đoàn xe vẽ cao hơn, mỗi xe được nối bằng một nét ngang.

Ví dụ với tiết diện 2: $M_2^* = 33 \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{2} - \frac{4}{2} \cdot 16 \right) = -704 \text{ kNm}$;

$$M_{2,max} = 1,3 \left(95 \cdot \frac{8}{3} + 35 \cdot \frac{4}{3} \right) = 390 \text{ kNm};$$

$$M_{2,min} = -1,3 \left(70 \cdot \frac{4}{3} + 30 \cdot \frac{8}{3} + 95 \cdot 4 \right) = -719 \text{ kNm}.$$

Suy ra $M_{2,max}^b = -704 + 390 = -314 \text{ kNm}$;

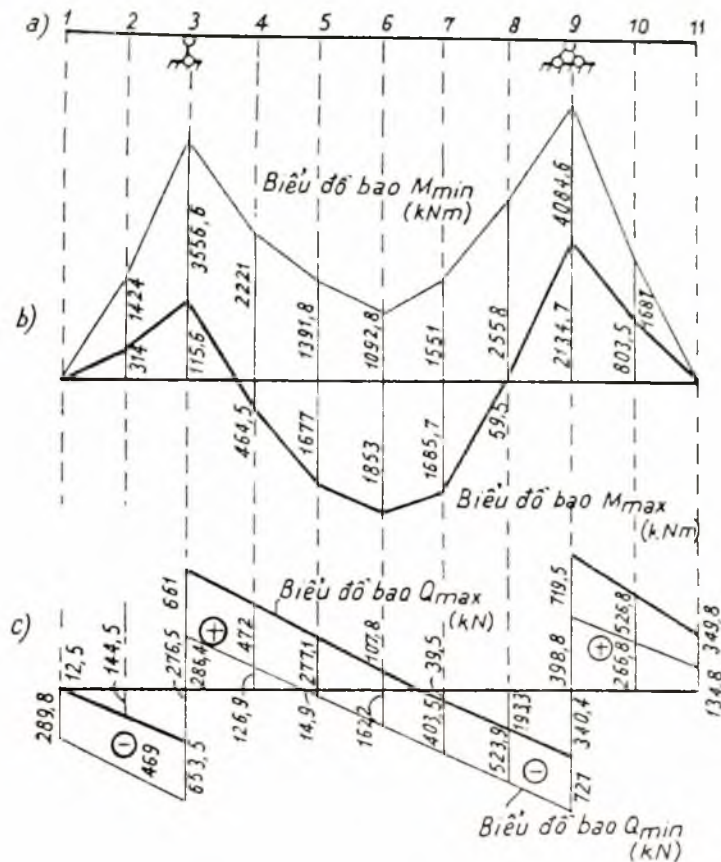
$$M_{2,min}^b = -704 - 719 = -1423 \text{ kNm}.$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác. Kết quả ghi trên bảng 3.60.1.

Bảng 3.60.1

Tiết diện	M^* (kNm)	M_{max} (kNm)	M_{min} (kNm)	M_{max}^b (kNm)	M_{min}^b (kNm)
2	- 704	390	- 719,0	- 314,0	- 1423,0
3	- 1936	780	- 1620,6	- 1156,0	- 3556,6
4	- 704	1168,5	- 1517,0	+ 464,5	- 2221,0
5	0	1677,0	- 1391,8	+ 1677,0	- 1391,8
6	+ 176	1677,0	- 1268,8	+ 1853,0	- 1092,8
7	- 176	1861,7	- 1375,0	+ 1685,7	- 1551,0
8	- 1057	997,5	- 1501,0	- 59,5	- 2558,0
9	- 2464	329,3	- 1620,6	- 2134,7	- 4084,6
10	- 968	164,5	- 719,0	- 803,5	- 1687,0

Biểu đồ bao mômen uốn vẽ trên hình 3.60.4b.



Hình 3.60.4

* Biểu đồ bao lực cắt

Thứ tự thực hiện cũng như khi vẽ biểu đồ bao mômen uốn. Đường ảnh hưởng lực cắt tại các tiết diện đã chỉ định như trên hình 3.60.3. Trên hình 3.60.3 trình bày cách bố trí đoàn tải trọng ở vị trí bất lợi nhất trên mỗi đ.a.h.: vị trí cho $Q_{k,max}$ tương ứng với đoàn xe vẽ thấp hơn, mỗi xe được nối bằng hai nét ngang; vị trí cho $Q_{k,min}$ tương ứng với đoàn xe vẽ cao hơn, mỗi xe được nối bằng một nét ngang. Lực cắt do tải trọng bất động Q^*_k tìm được bằng cách nhân cường độ tải trọng bất động với diện tích đ.a.h. Q_k tương ứng. Xác định các tung độ biểu đồ bao lực cắt tại các tiết diện đã chỉ định theo công thức:

$$Q_{k,max}^b = Q_{k,max} + Q_k^*; \quad Q_{k,min}^b = Q_{k,min} + Q_k^*.$$

Ví dụ với tiết diện 2: $Q_2^* = 33 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{2} - 1 \cdot \frac{12}{2} - 1 \cdot 4 \right) = -242 \text{ kN};$

$$Q_{2,max} = 1,3 \left(95 \cdot \frac{2}{3} + 35 \cdot \frac{1}{3} \right) = 97,5 \text{ kN};$$

$$Q_{2,min} = -1,3 \left(70 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{2}{3} + 95 \cdot 1 + 35 \cdot 1 \right) = -227 \text{ kN}.$$

Suy ra $Q_{2,max}^b = -242 + 97,5 = -144,5 \text{ kN};$

$$Q_{2,min}^b = -242 - 227 = -469 \text{ kN}.$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác. Kết quả ghi trên bảng 3.60.2.

Bảng 3.60.2

Tiết diện	Q^* (kN)	Q_{max} (kN)	Q_{min} (kN)	Q_{max}^b (kN)	Q_{min}^b (kN)
1	- 110	97,5	- 179,8	- 12,5	- 289,8
2	- 242	97,5	- 227,0	-144,5	- 469,0
3 (trái)	- 374	97,5	- 279,5	- 276,5	- 653,5
3 (phải)	374	287,0	- 87,6	661,0	286,4
4	242	230,0	- 115,1	472,0	126,9
5	110	167,1	- 124,9	277,1	- 14,9
6	- 22	129,8	- 140,2	107,8	- 162,2
7	- 154	114,5	- 249,5	- 39,5	- 403,5
8	- 286	92,7	- 237,9	- 193,3	- 523,9
9 (trái)	- 418	77,6	- 309,0	- 340,4	- 727,0
9 (phải)	440	279,5	- 41,2	719,5	398,8
10	308	218,8	- 41,2	526,8	266,8
11	176	173,8	- 41,2	349,8	134,8

Biểu đồ bao lực cắt vẽ trên hình 3.60.4c.

Chương 4

Xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng đàn hồi tuyến tính

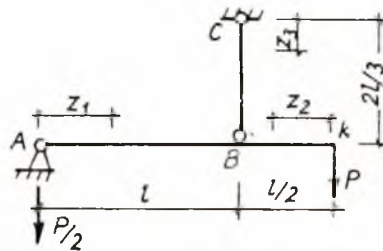
4.1. Bài giải. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt thì biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi có dạng:

$$U = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds + \sum \int \frac{N^2}{2EA} ds.$$

Đối với hệ đã cho (hình 4.1), ta có:

Mômen uốn:

trong đoạn thanh AB: $M = -\frac{P}{2}z_1$
 trong đoạn thanh Bk: $M = -Pz_2$.



Hình 4.1

Lực dọc trong thanh BC: $N = \frac{3P}{2}$.

Áp dụng biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi cho trường hợp này, ta có:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{(-0,5Pz_1)^2}{2EI} dz_1 + \int_0^l \frac{(-Pz_2)^2}{2EI} dz_2 + \int_0^{2l/3} \frac{(1,5P)^2}{2EA} dz_3 = \\ &= \frac{P^2 l^3}{24EI} + \frac{P^2 l^3}{48EI} + \frac{3P^2 l}{4EA} = \frac{P^2 l^3}{16EI} + \frac{3P^2 l}{4EA}. \end{aligned}$$

Chuyển vị thẳng đứng tại điểm đặt lực P :

$$y_k = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{8EI} + \frac{3Pl}{2EA},$$

Chuyển vị hướng theo chiều của lực P (hướng xuống phía dưới).

4.2. Đáp số. $U = \frac{5P^2 l^3}{192EI}$; $y_k = \frac{5Pl^3}{96EI}$ (hướng xuống phía dưới).

4.3. Đáp số.

$$U = \frac{4P^2 l^3}{15EI} + \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{133P^2 l^3}{48000EI}; \quad x_k = \frac{133Pl^3}{2400EI} \text{ (hướng về bên trái).}$$

4.4. Đáp số. $U = 2,4l \frac{P^2 l}{EA}$; $x_k = 4,82 \frac{Pl}{EA}$ (hướng về bên phải).

4.5. Bài giải. Trong bài toán này, dầm có tiết diện thay đổi và có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt nên công thức chuyển vị có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\overline{M}_k M_m}{EI(z)} dz + \sum \int \nu \frac{\overline{Q}_k Q_m}{GA(z)} dz.$$

Nếu chọn gốc tọa độ tại đầu tự do A và trục z hướng từ phải sang trái thì tại tiết diện có hoành độ z (hình 4.5a), ta có:

- tiết diện hình chữ nhật, chiều rộng $b = \text{const}$, chiều cao $h(z) = hz/l$;

- diện tích tiết diện: $A(z) = bh(z) = bh \cdot \frac{z}{l} = A_l \frac{z}{l}$

với A_l là diện tích tiết diện ở ngàm;

- mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện:

$$I(z) = \frac{bh^3(z)}{12} = \frac{bh^3}{12} \frac{z^3}{l^3} = I_l \frac{z^3}{l^3}$$

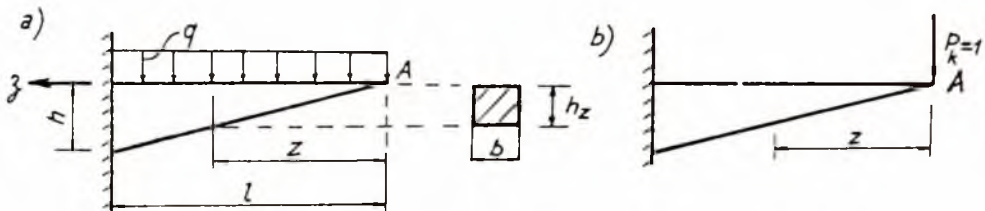
với I_l là mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện ở ngàm;

- biểu thức mômen uốn và lực cắt ở trạng thái m (hình 4.5a):

$$M_m = -q \frac{z^2}{2}; \quad Q_m = q \cdot z;$$

- biểu thức mômen uốn và lực cắt ở trạng thái k (hình 4.5b):

$$\overline{M}_k = -z; \quad \overline{Q}_k = 1;$$



Hình 4.5

Sau khi thay các biểu thức vừa tìm được vào công thức chuyển vị, với hệ số ν của tiết diện hình chữ nhật bằng $1,2$, ta được:

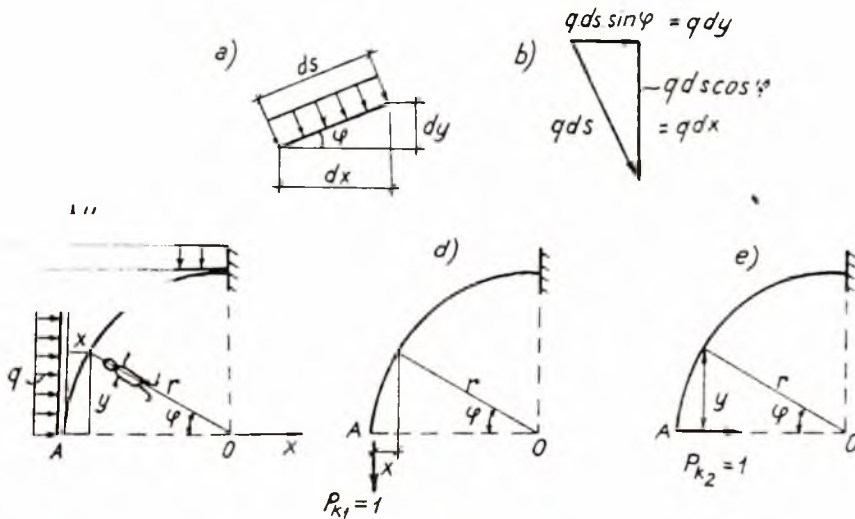
$$y_A = \Delta_{km} = \int_0^l (-z) \left(-q \frac{z^2}{2} \right) \frac{dz}{EI_l \frac{z^3}{l^3}} + 1,2 \int_0^l \frac{1 \cdot q \cdot z \cdot dz}{GA_l \frac{z}{l}} = \frac{ql^4}{2EI_l} + \frac{6ql^2}{5GA_l}.$$

(chuyển vị hướng xuống dưới).

4.6. Đáp số. $x_B = \frac{ql^3 f}{15EI_0}$ (hướng về bên phải).

4.7. Bài giải. Để lập biểu thức nội lực được dễ dàng, ta phân tích tải trọng hướng tâm q thành hai thành phần theo hai phương thẳng đứng và nằm ngang. Muốn vậy, ta xét một phân tố thanh bất kỳ có chiều dài ds . Vì ds rất nhỏ nên có thể xem như một đoạn thẳng nghiêng so với trục x theo góc φ (hình 4.7a). Hợp lực của tải trọng q trên đoạn dài ds là qds . Chiều hợp lực qds lên trục nằm ngang x và trục thẳng đứng y (hình 4.7b), ta được:

$$qds \cdot \sin\varphi = q \cdot dy; \quad qds \cdot \cos\varphi = q \cdot dx.$$



Hình 4.7

Như vậy, ta có thể thay tải trọng phân bố đều theo chiều dài cong của thanh với cường độ q bằng hai thành phần: tải trọng thẳng đứng phân bố đều với cường độ q theo chiều dài hình chiếu của thanh lên phương ngang và tải trọng nằm ngang phân bố đều với cường độ q theo chiều dài hình chiếu của thanh lên phương thẳng đứng (hình 4.7c).

Biểu thức mômen uốn trong hệ ở trạng thái thực "m" (hình 4.7c):

$$\begin{aligned} M_m &= -\frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qy^2 = -\frac{1}{2}q(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}qr^2[(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi] = \\ &= -qr^2(1 - \cos\varphi) \quad \text{với} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2). \end{aligned}$$

Biểu thức mômen uốn trong hệ ở trạng thái khả dĩ "k_l" (hình 4.7d) để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A:

$$\bar{M}_{k_l} = -1, \quad x = -r(1 - \cos\varphi) \quad \text{với} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

Biểu thức mômen uốn trong hệ ở trạng thái khả dĩ " k_2 " (hình 4.7d) để tìm chuyển vị ngang tại A:

$$\bar{M}_{k_2} = -l \cdot y = -r \sin \varphi \quad \text{với} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$$

- Chuyển vị thẳng đứng tại A:

$$y_A = \frac{l}{EI} \sum \int \bar{M}_{k_1} M_m ds = \frac{l}{EI} \int_0^{\pi/2} qr^4 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{qr^4}{EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right).$$

- Chuyển vị ngang tại A:

$$x_A = \frac{l}{EI} \sum \int \bar{M}_{k_2} M_m ds = \frac{l}{EI} \int_0^{\pi/2} qr^4 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{qr^4}{2EI}.$$

- Chuyển vị toàn phần tại A:

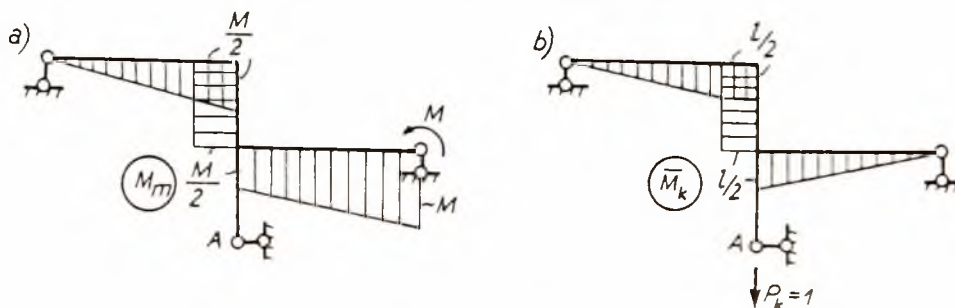
$$\Delta_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{qr^4}{EI} \sqrt{\frac{l}{4} + \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)^2} = 0,592 \cdot \frac{qr^4}{EI}, \quad (\text{hướng xuống dưới, về bên phải}).$$

4.8. Đáp số. $x_A = \frac{qr^4}{EI} (\pi - 3)$ (hướng về bên phải).

4.9. Chỉ dẫn. Hệ đã cho là hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng nên góc xoay tại B và A có giá trị bằng nhau và ngược chiều. Do đó, có thể vận dụng khái niệm về chuyển vị khái quát để tìm tập hợp chuyển vị $\theta_{AB} = \theta_A + \theta_B$ với trạng thái khả dĩ chịu các nguyên nhân đối xứng. Sau đó

$$\text{tìm: } \theta_B = \frac{\theta_{AB}}{2} = \frac{Pr^2}{4EI} (\pi - 2) \quad (\text{quay ngược chiều kim đồng hồ}).$$

4.10. Bài giải. Để xác định chuyển vị thẳng đứng tại A, ta cần vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng đã cho gây ra (hình 4.10a) và biểu đồ mômen uốn ở trạng thái " k " do lực $P_k = l$ đặt tại A theo phương thẳng đứng gây ra (hình 4.10b), sau đó áp dụng cách "nhân biểu đồ".



Hình 4.10

$$y_a = (M_m)(\overline{M}_k) = \frac{I}{EI} \left[\frac{M}{2} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{M}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} + \frac{M}{2} \frac{l}{4} + \frac{M}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{3} \frac{l}{2} \right] = \frac{3Ml^2}{8EI},$$

chuyển vị cùng chiều với lực $P_k = l$ đặt tại A, tức là hướng xuống dưới.

4.11. Đáp số. $\varphi_{AB} = \frac{5ql^3}{24EI}$ (hai tiết diện A và B cùng quay ngược chiều kim đồng hồ).

4.12. Đáp số. $x_A = 1,594 \text{ cm}$ (hướng về bên trái).

4.13. Đáp số. $x_B = 0,027 \text{ m}$ (hướng về bên phải).

4.14. Đáp số. $x_{AB} = \gamma \frac{b^2}{EI} \left(\frac{b^3}{15} + \frac{b^2 a}{6} - \frac{a^3}{12} \right)$ (chuyển dịch xa nhau),

γ – trọng lượng riêng của chất lỏng.

Để tính toán được dễ dàng, nên phân tích tải trọng đã cho phần:

- Tải trọng hướng xuống, phân bố theo hình tam giác, cường độ lớn nhất bằng q ở tại C (hình 4.15a).
- Tải trọng hướng lên, phân bố theo hình parabol, cường độ lớn nhất bằng $q/4$ ở tại giữa đoạn AC (hình 4.15a).

Kết quả vẽ biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "m" như trên hình 4.15a. Đường tên vòng ở giữa đoạn AC được xác định như sau:

$$f = \frac{ql^2}{16} - \frac{5}{48} \left(\frac{q}{4} \right) l^2 = \frac{ql^2}{16} - \frac{5ql^2}{192} = \frac{7}{192} ql^2.$$

❖ *Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A.* Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 4.15b. Trong trường hợp này, lực cắt tại tiết diện A bằng không nên tiếp tuyến tại A của biểu đồ mômen uốn song song với đường chuẩn. Do đó, khi nhân biểu đồ ta có thể tìm diện tích và trọng tâm của phần biểu đồ trên đoạn AC theo công thức của hình parabol bậc n đã biết trong phân lý thuyết. Với $n=4$, ta có:

- diện tích biểu đồ trên đoạn AC: $\Omega = \frac{al}{n+1} = \frac{al}{5} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{l}{5} = \frac{ql^3}{60}$;
- khoảng cách từ trọng tâm đến đầu trái A: $z = \frac{(n+1)l}{n+2} = \frac{5l}{6}$.

Áp dụng công thức chuyển vị cho trường hợp này ta có:

$$y_A = (\overline{M}_1)(M_m) = \frac{\cos \alpha}{EI} \left[\frac{ql^3}{60 \cos \alpha} \cdot \frac{5}{6} l \right] + \frac{1}{2EI} \frac{ql^2}{12} \frac{1}{2} \cdot l = \frac{5ql^4}{144 EI},$$

(hướng xuống).

❖ *Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B.*
Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 4.15c. Áp dụng công thức chuyển vị cho trường hợp này ta có:

$$y_B = (\overline{M}_2)(M_m) = \frac{ql^4}{48EI} \quad (\text{hướng lên}).$$

4.16. Đáp số.

Chuyển vị ngang tại C:

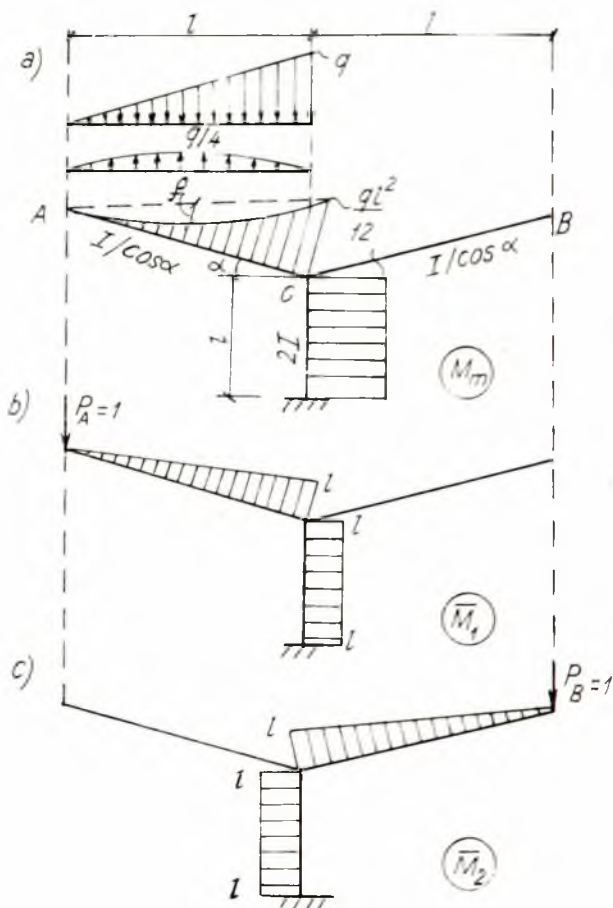
$$x_C = \frac{382,5}{EI} \quad (\rightarrow).$$

Chuyển vị đứng tại C:

$$y_C = \frac{90,0}{EI} \quad (\uparrow).$$

Chuyển vị toàn phần

tại C: $\Delta_C = \frac{110}{EI}.$



Hình 4.15

4.17. Đáp số. $\Delta_{1-2} = \frac{68}{3EI}$ (chuyển dịch gần nhau).

4.18. Đáp số. Góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên khớp C:

$\frac{25}{EI}$ rad, (tiết diện bên trái xoay thuận chiều kim đồng hồ, tiết diện bên phải xoay ngược chiều kim đồng hồ).

Chuyển vị ngang tại C: $x_C = 0.$

Chuyển vị thẳng đứng tại C: $y_C = \frac{33}{EI}$ (hướng xuống dưới).

4.19. Đáp số.

Chuyển vị thẳng tương đối giữa B và G : $x_{BG} = \frac{2560}{3EI}$ (chuyển dịch xa nhau).

Chuyển vị thẳng đứng tại C : $y_C = \frac{2560}{3EI}$ (hướng xuống dưới).

Góc xoay tại D : $\varphi = \frac{320}{3EI}$ rad, (ngược chiều kim đồng hồ).

Chuyển vị thẳng tương đối giữa B và C : $\Delta_{BC} = 0$.

4.20. Đáp số. $y_{AB} = \frac{17\sqrt{3}Pl^3}{24EI}$ (chuyển dịch xa nhau).

4.21. Đáp số.

Chuyển vị thẳng tương đối giữa a và b : $x_{ab} = \frac{472}{EA}$ (chuyển dịch xa nhau).

đứng tại C : $y_C = \frac{527}{EI}$ (hướng xuống dưới).

4.22. Đáp số.

Chuyển vị ngang tại C : $x_C = \frac{125P}{18EA}$ (hướng về bên phải).

Chuyển vị thẳng đứng tại C : $y_C = 0$ (hướng xuống dưới).

4.23. Đáp số. $x_{ab} = \frac{482,84}{EA}$ (chuyển dịch xa nhau).

4.24. Đáp số.

Chuyển vị thẳng đứng tại 1: $y_1 = \frac{960}{EA}$ (hướng lên trên).

Chuyển vị thẳng đứng tại 2: $y_2 = \frac{13100}{EA}$ (hướng xuống dưới).

4.25. Bài giải.

Khi liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong các hệ tĩnh định không phát sinh nội lực, do đó chuyển vị được xác định theo công thức:

$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm}.$$

trong đó:

Z_{jm} – chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ j ở trạng thái "m";

$\bar{R}_{jk}$ – phản lực tại liên kết thứ j do $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái khả dĩ " k ".

Tích $\bar{R}_{jk} Z_{jm}$ dương khi phản lực và chuyển vị cưỡng bức cùng chiều. Dấu tổng của công thức lấy theo j , tức là theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.

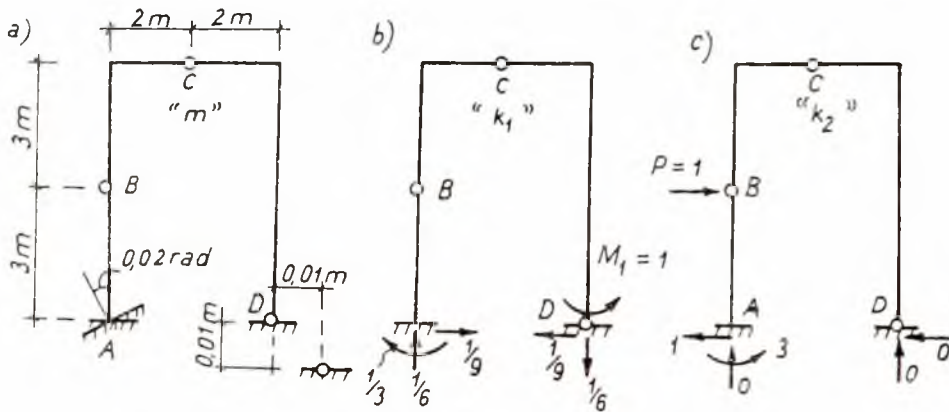
Với bài toán đã cho (hình 4.25a), các trạng thái khả dĩ " k_1 ", " k_2 " và các phản lực tương ứng dùng để xác định các chuyển vị cần tìm, như trên hình 4.25b, c.

Áp dụng công thức trên, ta có:

Góc xoay tại tiết diện D :

$$\varphi_D = - \left[-\frac{1}{3} \cdot 0,02 - \frac{1}{9} \cdot 0,01 - \frac{1}{6} \cdot 0,01 \right] = 0,0061 \text{ rad (ngược chiều kim đồng hồ)}.$$

Chuyển vị ngang tại B : $x_B = -[3 \cdot 0,02] = -0,06 \text{ m}$ (hướng về bên trái).



Hình 4.25

4.26. Đáp số. $\varphi = \frac{3}{400}$ rad (tiết diện bên trái khớp K quay thuận chiều kim đồng hồ, tiết diện bên phải khớp K quay ngược chiều kim đồng hồ).

4.27. Đáp số. $\varphi_H = 0,02$ rad (quay thuận chiều kim đồng hồ).

4.28. Đáp số.

Chuyển vị tương đối giữa m và n theo phương ngang: $x_{mn} = 2 \Delta x$.

Chuyển vị tương đối giữa m và n theo phương thẳng đứng:

$$y_{mn} = 2 \Delta y - 2a\varphi.$$

Chuyển vị xoay tương đối giữa m và n : $\varphi_{mn} = 0$.

4.29. Bài giải.

Sự thay đổi nhiệt độ chỉ gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh mà không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định. Do đó ta có thể xác định chuyển vị trong hệ tĩnh định theo công thức sau

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds. \quad (a)$$

trong đó:

α – hệ số giãn nở dài vì nhiệt của vật liệu;

h – chiều cao của tiết diện;

t_{1m} và t_{2m} – sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh;

t_{cm} – độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh: $t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$, với a và b

là khoảng cách từ trọng tâm tiết diện đến thớ dưới và thớ trên. Nếu $a=b=h/2$; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2};$$

M_k, N_k – momen uốn và lực dọc ở trạng thái "k".

Trong những trường hợp khi:

◇ nhiệt độ thay đổi như nhau theo chiều dài của từng đoạn thanh;

◇ vật liệu trong từng đoạn thanh như nhau, nghĩa là $\alpha = const$ trong từng đoạn thanh;

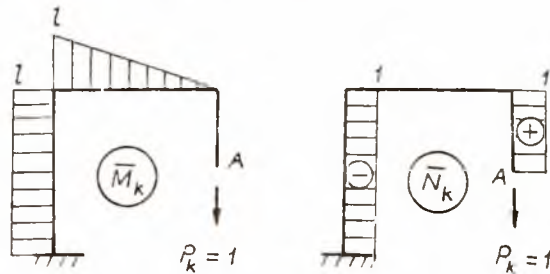
◇ chiều cao $h = const$ trong từng đoạn thanh,

ta có thể sử dụng công thức đơn giản hơn:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (b)$$

$\Omega(\bar{M}_k)$ – diện tích biểu đồ momen uốn trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".

$\Omega(\bar{N}_k)$ – diện tích biểu đồ lực dọc trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".



Hình 4.29

Tích $(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k) > 0$ khi diện tích biểu đồ $\overline{M}_k$ ở về phía có sự thay đổi nhiệt độ lớn hơn về giá trị đại số.

Với bài toán đã cho, trạng thái khả dĩ "k" và các biểu đồ mômen uốn, lực dọc tương ứng như trên hình 4.29. Áp dụng công thức (b), ta có:

$$y_A = \frac{\alpha}{h}(t + 2t) \left[-\frac{l^2}{2} - l^2 \right] + \alpha \frac{t - 2t}{2} \left[l \cdot \frac{l}{2} - l \cdot l \right] = -\frac{9\alpha t l^2}{2h} + \frac{\alpha t l}{4}.$$

Sau khi thay $h = l/20$, ta được: $y_A = -\frac{359}{4} \alpha t l$ (hướng lên trên).

4.30. Đáp số. $y_D = \frac{5}{2} \alpha t l$ (hướng xuống dưới).

4.31. Đáp số. $y_A = \frac{l}{2} \alpha t d$ (hướng lên trên).

4.32. Đáp số.

Chuyển vị thẳng tương đối giữa A và B: $y_{AB} = \frac{\alpha t l^2}{4h}$ (chuyển dịch xa nhau).

Góc xoay tại k: $\varphi_k = \frac{\alpha t l}{2h}$ (thuận chiều kim đồng hồ).

4.33. Bài giải.

Khi tính chuyển vị trong hệ dàn do lắp ráp các thanh chế tạo không chính xác ta có công thức:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik} \Delta_{im}.$$

trong đó:

Δ_{im} – độ dôi của thanh thứ i khi thanh được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu (nếu thanh thứ i được chế tạo ngắn hơn chiều dài yêu cầu thì Δ_{im} gọi là độ hụt và mang dấu âm);

$\overline{N}_{ik}$ – lực dọc trong thanh thứ i ở trạng thái khả dĩ "k".

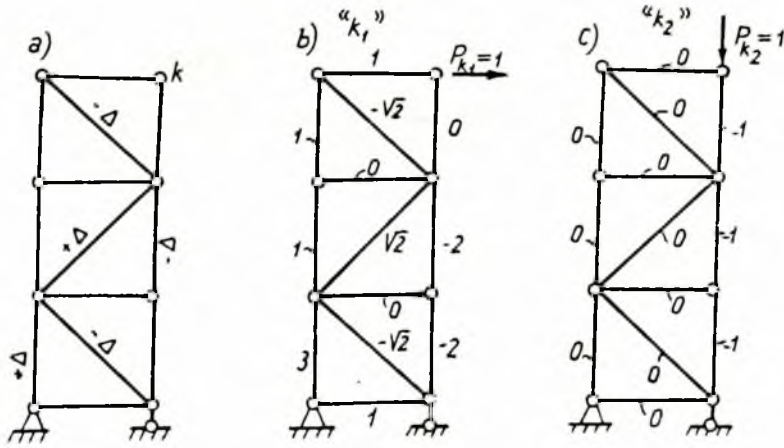
Với bài toán đã cho (hình 4.33a), các trạng thái khả dĩ " k_1 ", " k_2 " và các lực dọc tương ứng dùng để xác định các chuyển vị cần tìm, như trên hình 4.33b, c.

Áp dụng công thức trên, ta có:

Chuyển vị ngang tại K:

$$x_K = (-\sqrt{2})(-\Delta) + \sqrt{2}\Delta + (-\sqrt{2})(-\Delta) + 3\Delta + (-2)(-\Delta) = (5 + 3\sqrt{2})\Delta,$$

(hướng về bên phải).



Hình 4.33

đứng tại K: $y_K = (-1)(-\Delta) = \Delta$ (hướng xuống dưới).

Chuyển vị toàn phần tại K: $\Delta_K = \sqrt{1 + (5 + 3\sqrt{2})^2} \cdot \Delta$.

4.34. Đáp số

Chuyển vị ngang tại K: $x_K = 0$.

Chuyển vị thẳng đứng tại K: $y_K = (1 + \sqrt{2})\Delta$ (hướng lên trên).

Chuyển vị toàn phần tại K: $\Delta_K = (1 + \sqrt{2})\Delta$.

4.35. Bài giải

Công thức xác định chuyển vị cho trường hợp hệ dầm và khung tĩnh định có liên kết đàn hồi, chịu tải trọng có dạng:

$$\Delta_{kZ} = \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{R_{jm}}{c_j} + (\bar{M}_k)(M_m).$$

trong đó:

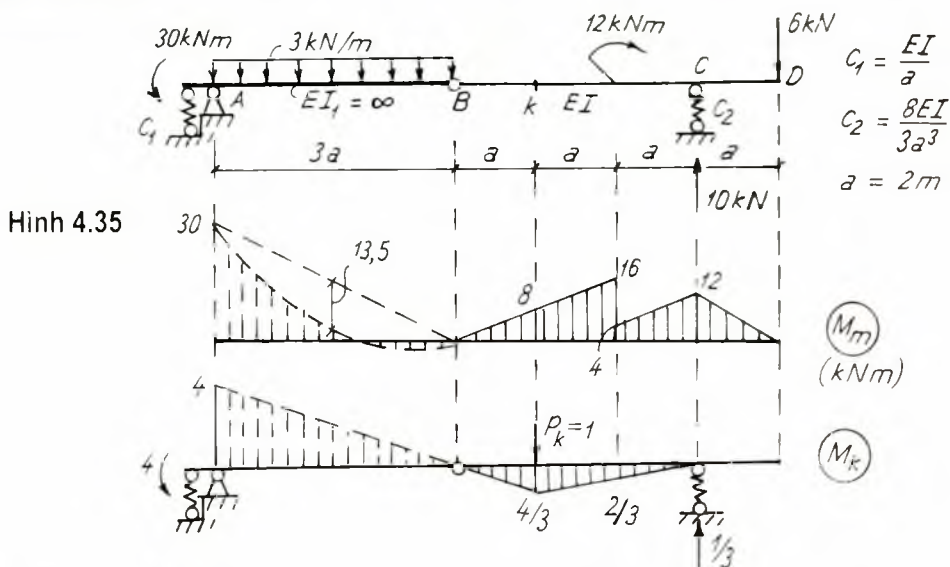
R_{jm} – phản lực tại liên kết đàn hồi j ở trạng thái "m";

$\bar{R}_{jk}$ – phản lực tại liên kết đàn hồi j ở trạng thái "k".

Hệ đã cho là hệ tĩnh định có liên kết ngàm đàn hồi tại A với hệ số c_1 và liên kết thanh đàn hồi tại C với hệ số c_2 , chịu tải trọng.

Kết quả tính phản lực và biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "m" như trên

hình 4.35a và b. Kết quả tính phản lực và biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "k" như trên hình 4.35c. Trong đoạn thanh AB, độ cứng bằng vô cùng nên các biểu đồ được vẽ bằng đường đứt nét và không cần thực hiện phép nhân biểu đồ.



Áp dụng công thức trên, ta có:

$$y_k = 30 \cdot 4 \cdot \frac{a}{EI} + 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^3}{8EI} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} \left(2 \cdot 8 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 16 \cdot \frac{2}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{6} \left(2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} \right) \right\} = \frac{215,333}{EI}$$

(hướng xuống dưới).

4.36. Đáp số. Chuyển vị thẳng đứng tại k: $y_k = \frac{108}{EI}$ m, (hướng xuống dưới).

4.37. Đáp số.

Chuyển vị ngang tại k: $x_k = (372 / EI)$ m (hướng về bên trái).

Chuyển vị thẳng đứng tại k: $y_k = (162 / EI)$ m (hướng lên trên).

Chuyển vị toàn phần tại k: $\Delta_k = (405,74 / EI)$ m.

4.38. Đáp số.

Chuyển vị ngang tại k: $x_k = (126 / EI)$ m (hướng về bên phải).

Chuyển vị thẳng đứng tại k: $y_k = (1080 / EI)$ m (hướng xuống dưới).

Chuyển vị toàn phần tại k: $\Delta_k = (1087,325 / EI)$ m.

4.39. Bài giải.

Đường ảnh hưởng của chuyển vị tại khớp D chính là đường đàn hồi do lực $P=I$ đặt tại khớp D gây ra trong hệ.

Do đó, để tìm các tung độ đường ảnh hưởng của chuyển vị tại khớp D ta sẽ xác định chuyển vị tại một số điểm trên hệ (hình 4.39a) do lực $P=I$ đặt tại D gây ra, chẳng hạn theo cách "nhân biểu đồ":

$$y_{iD} = (\overline{M}_D)(\overline{M}_i),$$

trong đó:

$(\overline{M}_D)$ – biểu đồ mômen uốn do lực $P=I$ đặt tại D gây ra trong hệ;

$(\overline{M}_i)$ – biểu đồ mômen uốn do lực $P=I$ đặt tại điểm chia thứ i gây ra trong hệ.

Với bài toán đã cho, dầm DEF là hệ phụ, lực $P=I$ đặt tại D trên hệ chính của nó nên đường đàn hồi trong đoạn DEF là đoạn thẳng và độ võng tại các điểm A, C, E luôn bằng không nên chỉ cần thực hiện các phép tính với lần lượt là $B, I, 2, 3, D, F$. Các biểu đồ đơn vị ở trạng thái

ứng với các điểm chia nói trên tìm được như trên hình 4.39c, d, e, f, g, h.

$$y_{BD} = (\overline{M}_D)(\overline{M}_B) = -\frac{I}{EI} \left(\frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{0,667}{EI};$$

$$y_{ID} = (\overline{M}_D)(\overline{M}_I) = -\frac{I}{EI} \left(2 \cdot \frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1,5 \cdot 6}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{5,500}{EI};$$

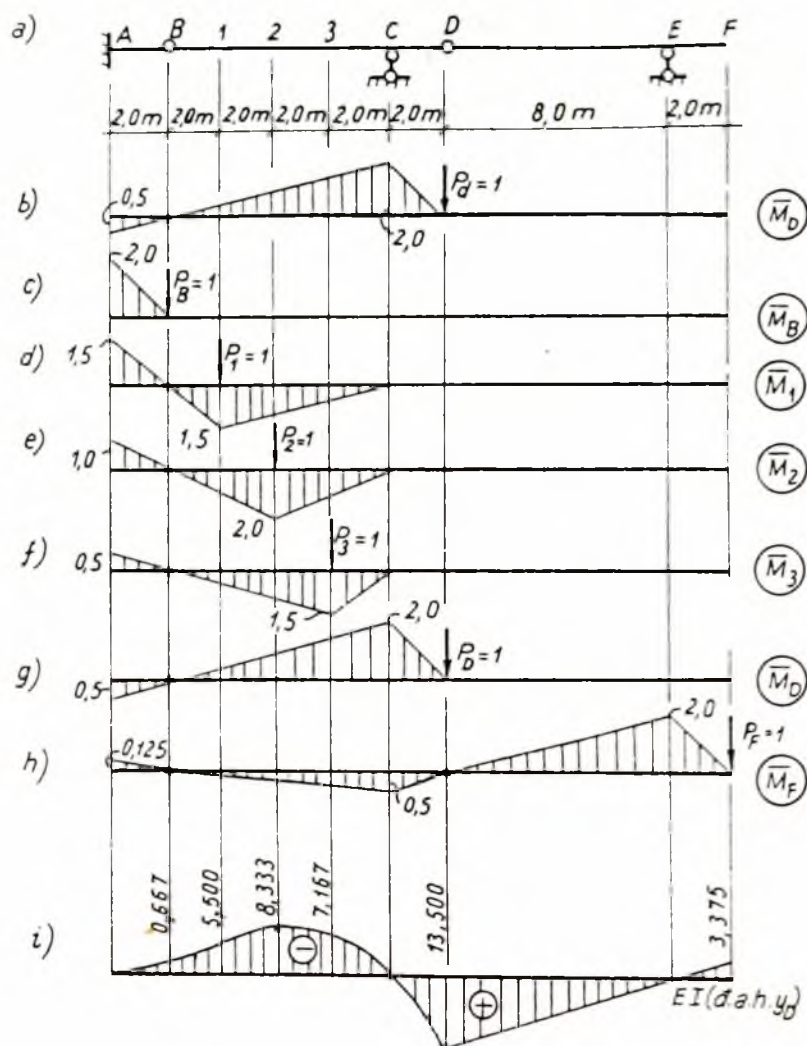
$$y_{2D} = (\overline{M}_D)(\overline{M}_2) = -\frac{I}{EI} \left(\frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2,8}{2} \cdot 1 \right) = -\frac{8,333}{EI};$$

$$\begin{aligned} y_{3D} &= (\overline{M}_D)(\overline{M}_3) = -\frac{I}{EI} \left[\frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1,5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1,5 \cdot 2}{2} \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right] = \\ &= -\frac{7,167}{EI}; \end{aligned}$$

$$y_{DD} = (\overline{M}_D)(\overline{M}_D) = -\frac{I}{EI} \left[\frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{2,8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2,2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = -\frac{13,500}{EI};$$

$$\begin{aligned} y_{FD} &= (\overline{M}_D)(\overline{M}_F) = -\frac{I}{EI} \left[\frac{0,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,125 + \frac{2,8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{2,2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right] = \\ &= -\frac{3,375}{EI}. \end{aligned}$$

Lần lượt dựng các tung độ vừa tìm được ứng dưới các điểm chia tương ứng ta sẽ được đường đàn hồi do lực $P=1$ đặt tại khớp D gây ra trong hệ tức là vẽ được đường ảnh hưởng của chuyển vị tại khớp D (hình 4.39i).

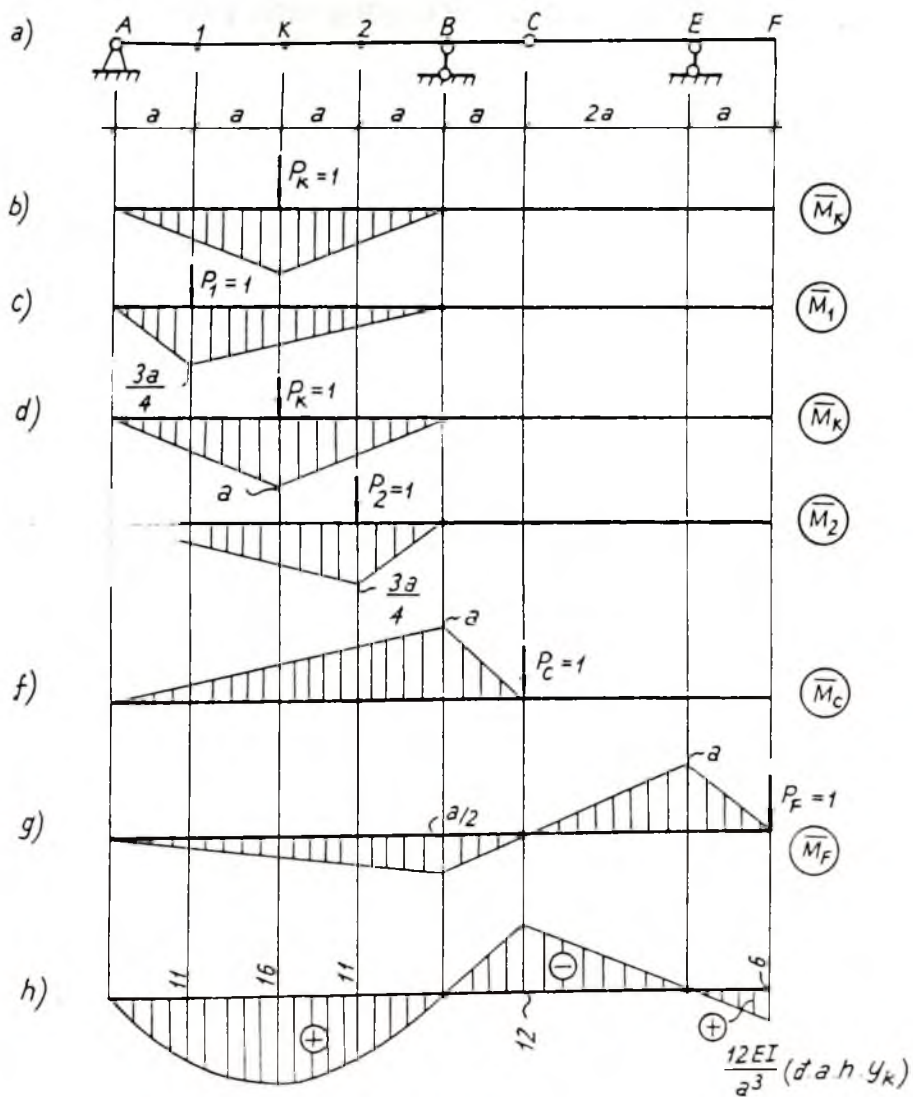


Hình 4.39

4.40. Chỉ dẫn

Đường ảnh hưởng của chuyển vị tại k chính là đường đàn hồi do lực $P=1$ đặt tại k gây ra trong hệ. Do đó, để tìm các tung độ đường ảnh hưởng của chuyển vị y_k ta sẽ xác định chuyển vị tại một số điểm trên hệ (hình 4.40a) do lực $P=1$ đặt tại k gây ra. Cách thực hiện cũng tương tự như trong bài 4.39. Biểu đồ mômen uốn do lực $P=1$ đặt tại k gây ra trong hệ như trên hình 4.40b; các biểu đồ đơn vị ở trạng thái khả dĩ tương ứng với các điểm

chia $I, k, 2, C, F$ như trên hình 4.40c, d, e, f, g. Kết quả cần tìm vẽ trên hình 4.40h.



Hình 4.40

Một số bài trong các đề thi sau đại học

Bài 1. Bài giải

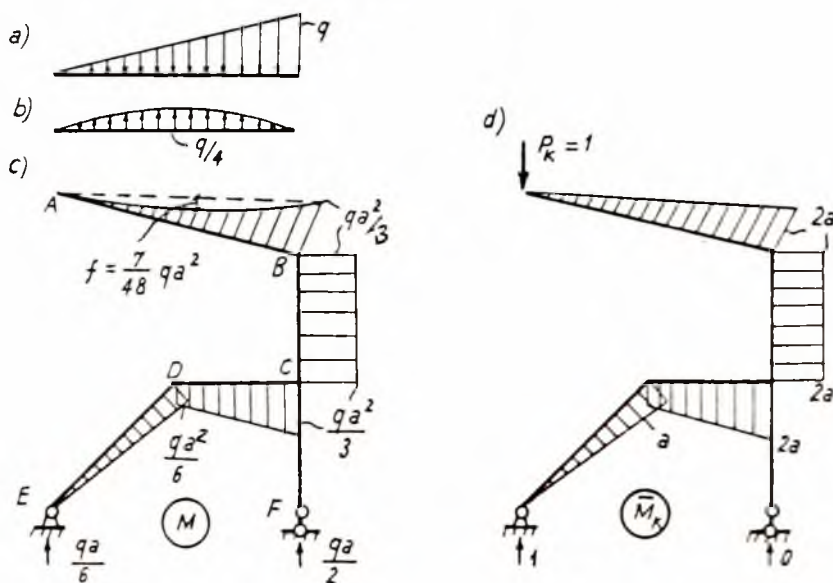
1. Vẽ biểu đồ mômen uốn

Để tính toán được dễ dàng, nên phân tích tải trọng đã cho thành hai thành phần:

- ❖ Tải trọng hướng xuống, phân bố theo hình tam giác, cường độ lớn nhất bằng q ở tại B (hình 1a).
- ❖ Tải trọng hướng lên, phân bố theo hình parabol, cường độ lớn nhất bằng $q/4$ ở tại giữa đoạn AB (hình 1b).

Kết quả tìm phản lực và biểu đồ mômen uốn như trên hình 1c. Đường tên ở giữa đoạn AB được xác định như sau:

$$f = \frac{q(2a)^2}{16} - \frac{5}{48} \left(\frac{q}{4} \right) (2a)^2 = \frac{qa^2}{4} - \frac{5qa^2}{48} = \frac{7}{48} qa^2.$$



Hình 1

- #### 2. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A. Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 1d. Khi áp dụng công thức chuyển vị,

để thực hiện phép nhân biểu đồ trong đoạn thanh AB ta nhận thấy: Trong trường hợp này, lực cắt tại tiết diện A bằng không nên tiếp tuyến tại A của biểu đồ mômen uốn M_m song song với đường chuẩn. Do đó, khi nhân biểu đồ ta có thể tìm diện tích và trọng tâm của phần biểu đồ trên đoạn AB theo công thức của hình parabol bậc n đã biết. Với $n=4$, ta có:

- diện tích biểu đồ trên đoạn AB : $\Omega = \frac{qa^2}{3} \cdot \frac{2a}{5 \cos \alpha} = \frac{2qa^3}{15 \cos \alpha}$;

- khoảng cách từ trọng tâm đến đầu trái A : $z_2 = \frac{5}{6} 2a = \frac{5}{3} a$.

Áp dụng công thức chuyển vị cho trường hợp này ta có:

$$y_A = (\overline{M}_k)(M_m) = \frac{\cos \alpha}{EI} \left[\frac{2qa^3}{15 \cos \alpha} \cdot \frac{5}{3} a \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{qa^2}{2} a \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{qa^2}{6} a \cdot \frac{4}{3} a + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{3} a \cdot \frac{5a}{3} \right] + \frac{1}{EI \sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \frac{qa^2}{6} a \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} a \right] .$$

Sau khi rút gọn, ta được: $y_A = \frac{4qa^4}{3EI}$ (hướng xuống dưới).

Bài 2. Bài giải

1. Khảo sát sự cấu tạo hình học (hình 2a)

❖ *Điều kiện cần*- Hệ nối với trái đất nên ta có điều kiện:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0.$$

Trong bài toán này ta có $D = 3$; $T = 2$; $K = 1$; $H = 0$; $C = 5$. Do đó:

$$n = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

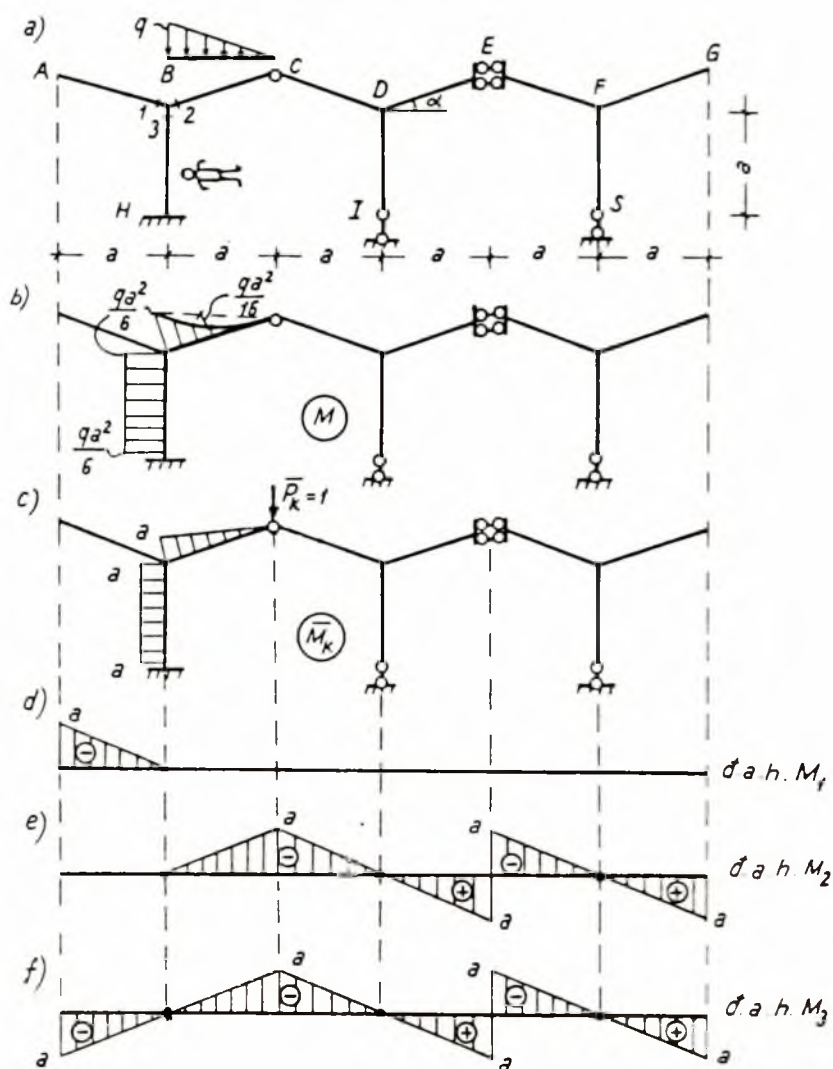
Điều kiện cần thỏa mãn với dấu bằng, hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện đủ*- Ta xét điều kiện đủ bằng cách phát triển dần miếng cứng, xuất phát từ trái đất.

Miếng cứng $ABCH$ được nối với trái đất bằng liên kết ngàm tại H nên bộ phận $ABCH$ hợp với trái đất tạo thành một miếng cứng. Miếng cứng $CDEI$ được nối với miếng cứng vừa phát triển ở trên bằng khớp C và liên kết thanh tại I không đi qua khớp. Như vậy, miếng cứng lại được phát triển thêm bộ phận $CDEI$. Miếng cứng $EFGS$ được nối với miếng cứng vừa phát triển ở bước thứ hai bằng ba liên kết thanh không đồng

quy, không cùng song song. Như vậy, toàn hệ trở thành một miếng cứng.

Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.



Hình 2

2. Vẽ biểu đồ mômen uốn. Nhận xét:

* Hệ đã cho (hình 2a) là hệ ghép tĩnh định bao gồm: $ABCH$ là hệ chính; hệ $CDEI$ là phụ của $ABCH$ và là chính của $EFGS$; hệ $EFGS$ là phụ của $CDEI$.

* Trong bài toán này, tải trọng chỉ tác dụng trên hệ chính $ABCH$ nên không gây ra nội lực trong các hệ phụ $CDEI$ và $EFGS$.

Kết quả vẽ biểu đồ mômen uốn như trên hình 2b.

3. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại khớp C. Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 2c. Áp dụng công thức chuyển vị cho trường hợp này, ta có:

$$y_C = (\overline{M}_k)(M) = \frac{1}{EI} \left[\frac{qa^2}{6} a.a \right] + \frac{1}{EI/\cos\alpha} \left[\frac{1}{2} \frac{qa^2}{6} \frac{a}{\cos\alpha} \frac{2a}{3} - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{16} \frac{a}{\cos\alpha} \frac{8a}{15} \right] = \frac{qa^4}{5EI},$$

(hướng xuống dưới).

4. Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại các tiết diện xung quanh nút B

Gọi 1, 2, 3 là các tiết diện xung quanh nút B lần lượt thuộc các thanh BA, BC và BH (hình 2a).

♦ *Đ.a.h. M_1* (hình 2d): vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện ở đầu

Đ.a.h. M_2 (hình 2e):

- *Khi $P = 1$ di động trên ABC*: vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện ở đầu thừa bên phải.
- *Khi $P = 1$ di động trên CDE*: đ.a.h. là đoạn thẳng kẻ tiếp nối tung độ ứng dưới khớp C với tung độ bằng không ứng dưới gối I.
- *Khi $P = 1$ di động trên EFG*: đ.a.h. là đoạn thẳng kẻ tiếp nối tung độ ứng dưới khớp giả tạo nối hệ EFG với hệ CDE và tung độ bằng không ứng dưới gối S. Khớp nối hệ EFG với hệ CDE là giao điểm của hai thanh song song nên khớp giả tạo ở xa vô cùng. Do đó, đ.a.h. trong đoạn này là đoạn thẳng đi qua tung độ bằng không ứng dưới gối S, song song với đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên CDE.
- ♦ *Đ.a.h. M_3* (hình 2f): Tiết diện 3 thuộc thanh đứng nên để quy định dấu của đ.a.h. mômen uốn ta chọn chiều nhìn của người quan sát như trên hình 2a.
- *Khi $P = 1$ di động trên ABC*: vẽ theo đ.a.h. mômen uốn trong khung đơn giản độc lập ABCH.
- *Khi $P = 1$ di động trên CDE và EFG*: cách tìm tương tự như đã thực hiện với đ.a.h. M_2 .

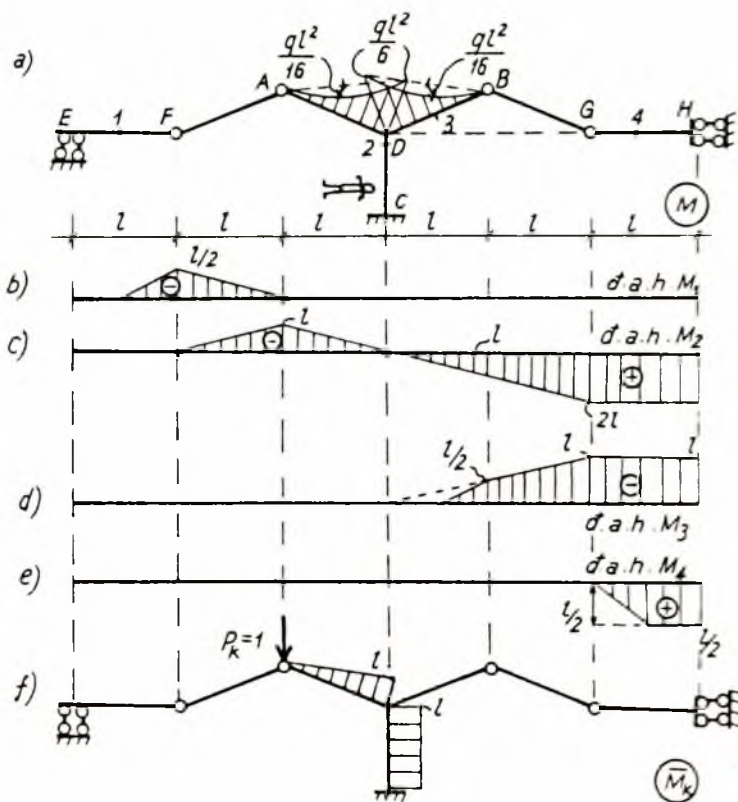
Nhận xét: Từ điều kiện cân bằng mômen tại nút B: $M_1 - M_2 + M_3 = 0$

ta suy ra điều kiện kiểm tra các đ.a.h. vừa tìm được như sau:

$$\text{đ.a.h. } M_1 - \text{đ.a.h. } M_2 + \text{đ.a.h. } M_3 = 0.$$

Bài 3. Chỉ dẫn

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn. Tải trọng chỉ tác dụng trên hệ chính ABC (hình 3a) nên không gây ra nội lực trong các hệ phụ. Do đó, có thể cô lập hệ chính để vẽ biểu đồ. Kết quả như trên hình 3a.



Hình 3

2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ◆ $\text{Đ.a.h. } M_1$ (hình 3b): Khi P di động trên EF , lực dọc trong thanh FA bằng không nên có thể vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn trong dầm côngxôn EF .
- ◆ $\text{Đ.a.h. } M_2$ (hình 3c) và $\text{đ.a.h. } M_3$ (hình 3d):
 - Khi P di động trên ADB : vẽ theo mẫu đ.a.h. trong khung côngxôn.
 - Khi P di động trên BG : Miếng cứng BG chịu tác dụng của ba lực: lực

P , lực đặt tại G có phương song song với hai thanh song song của ngàm trượt H và lực đặt tại B . Để tìm điểm không của đoạn đ.a.h. này, ta cần tìm vị trí của lực P sao cho mômen uốn tại 2 (tại 3) bằng không. Muốn vậy, lực đặt tại B phải đi qua tiết diện 2 (tiết diện 3), do đó điểm không của đoạn đ.a.h. này phải là điểm ứng dưới giao điểm D của đường $B2$ ($B3$) với đường GH .

- Khi P di động trên GH : nối tung độ ứng dưới G với tung độ không ứng dưới giao điểm ở xa vô cùng của hai thanh song song đặt tại H , đ.a.h. song song với đường chuẩn.
- Khi P di động trên EF : lực dọc trong thanh FA bằng không nên không gây ra nội lực trong hệ ADB . Đ.a.h. trùng với đường chuẩn.
- Khi P di động trên FA : áp dụng quy tắc đường nối.
- ♦ Đ.a.h. M_4 (hình 3e): vẽ theo đ.a.h. mômen uốn trong dầm đơn giản GH có gối trái là G , gối phải là giao điểm ở xa vô cùng của hai thanh song

..... chuyển vị thẳng đứng tại khớp A

Trạng thái khả dĩ " k " và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 3f.

$$y_A = (\overline{M}_k)(M) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{ql^2}{6} \frac{l}{\cos \alpha} \frac{2}{3} I - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{16} \frac{l}{\cos \alpha} \frac{8}{15} I \right] = \frac{ql^4}{30EI \cos \alpha}.$$

Kết quả mang dấu dương, chứng tỏ chuyển vị hướng xuống dưới.

Bài 4. Chỉ dẫn

1. **Khảo sát sự cấu tạo hình học** (hình 4a): Điều kiện cân thỏa mãn với dầm bằng, hệ đủ liên kết. Xét điều kiện đủ bằng cách phát triển dần miếng cứng, xuất phát từ trái đất. Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.

2. Vẽ các biểu đồ nội lực

Hệ đã cho (hình 4a) là hệ ghép, áp dụng quy tắc truyền lực trong hệ ghép ta có thể đưa hệ đã cho về ba hệ đơn giản. Kết quả như trên hình 4b, c, d.

3. Vẽ các đường ảnh hưởng

♦ Đ.a.h. M_3 và đ.a.h. M_4 (hình 4e): P di động theo phương thẳng đứng nên phản lực tại các gối nối với trái đất chỉ tồn tại thành phần thẳng đứng, các thanh đứng không chịu uốn. Suy ra:

Đ.a.h. $M_3 = \text{đ.a.h. } M_4 = 0$, trùng với đường chuẩn.

♦ *Đ.a.h.* M_1 và *d.a.h.*

M_2 (hình 4f): Vì *d.a.h.* M_3 trùng với đường chuẩn nên từ điều kiện cân bằng nút, ta có:

$$đ.a.h. M_1 = đ.a.h. M_2.$$

Khi P di động trên EF : nội tung độ không ứng dưới gối G với tung độ ứng dưới khớp nối giữa hai miếng cứng CDE và EFG . Khớp này là giao điểm ở xa vô cùng của hai thanh song song đặt tại E nên *đ.a.h.* song song với đoạn *đ.a.h.* khi P di động trên CE .

4. Vận dụng *đ.a.h.*, xác định giá trị mômen uốn

$$M_3 = M_4 = 0;$$

$$M_1 = M_2 = -qa^2.$$

Phù hợp với kết quả trên biểu đồ mômen uốn.

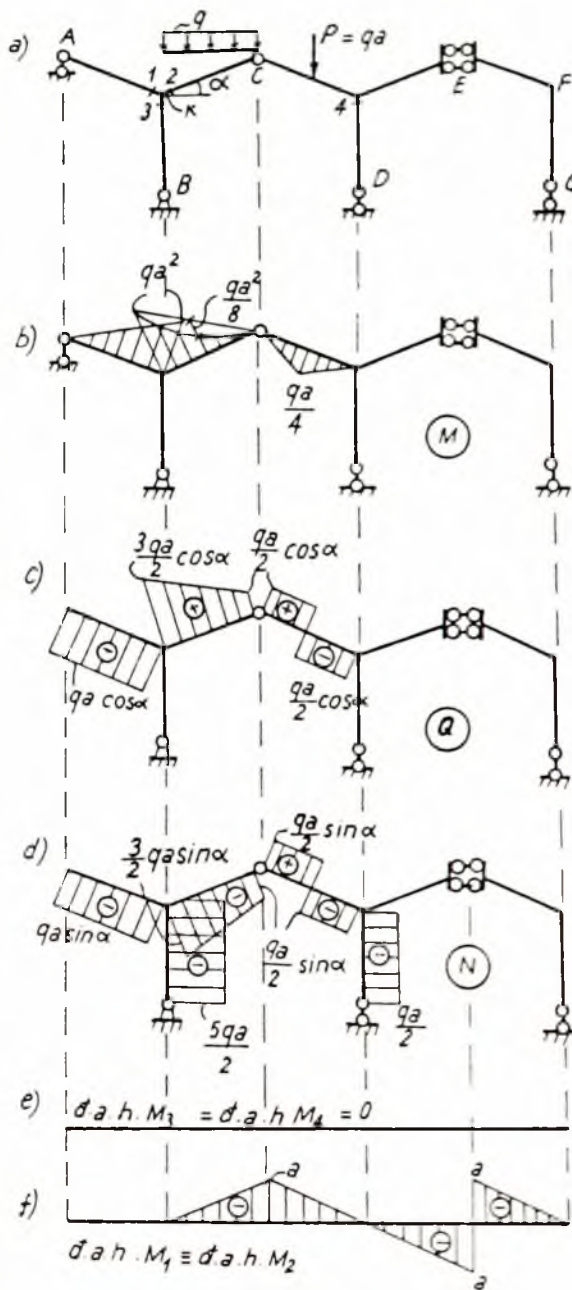
Bài 5. Đáp số

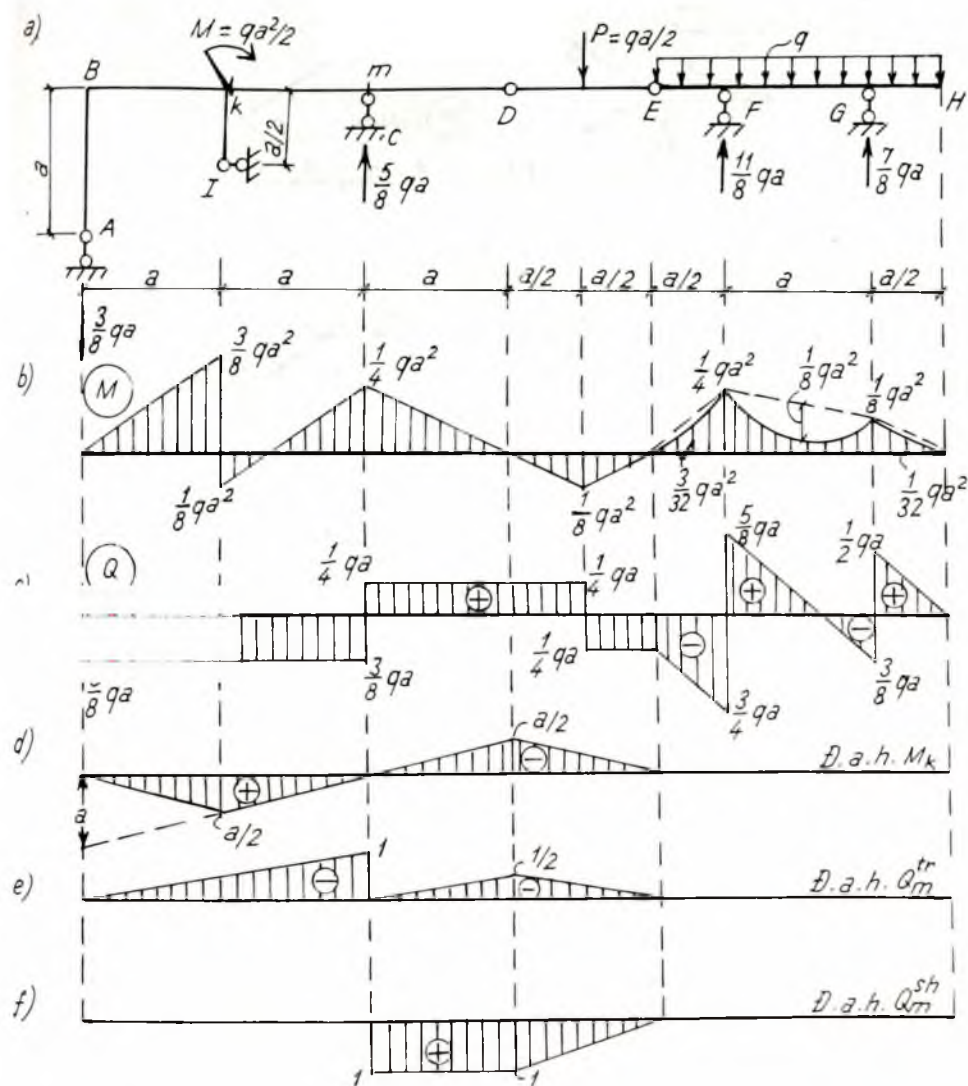
1. Hệ bất biến hình.
2. Các biểu đồ mômen uốn và lực cắt như trên hình 5b, c.
3. Các *đ.a.h.* cần tìm như trên hình 5d, e, f.

4. Kết quả tính: $M_k'' = -3qa^2 / 8;$

$$Q_m'' = -3qa / 8;$$

Hình 4





Hình 5

Bài 6. Bài giải

1. Vẽ các biểu đồ nội lực

♦ Xác định các phản lực tại A và B theo các điều kiện cân bằng của toàn hệ:

$$\sum X = H_A = 0,$$

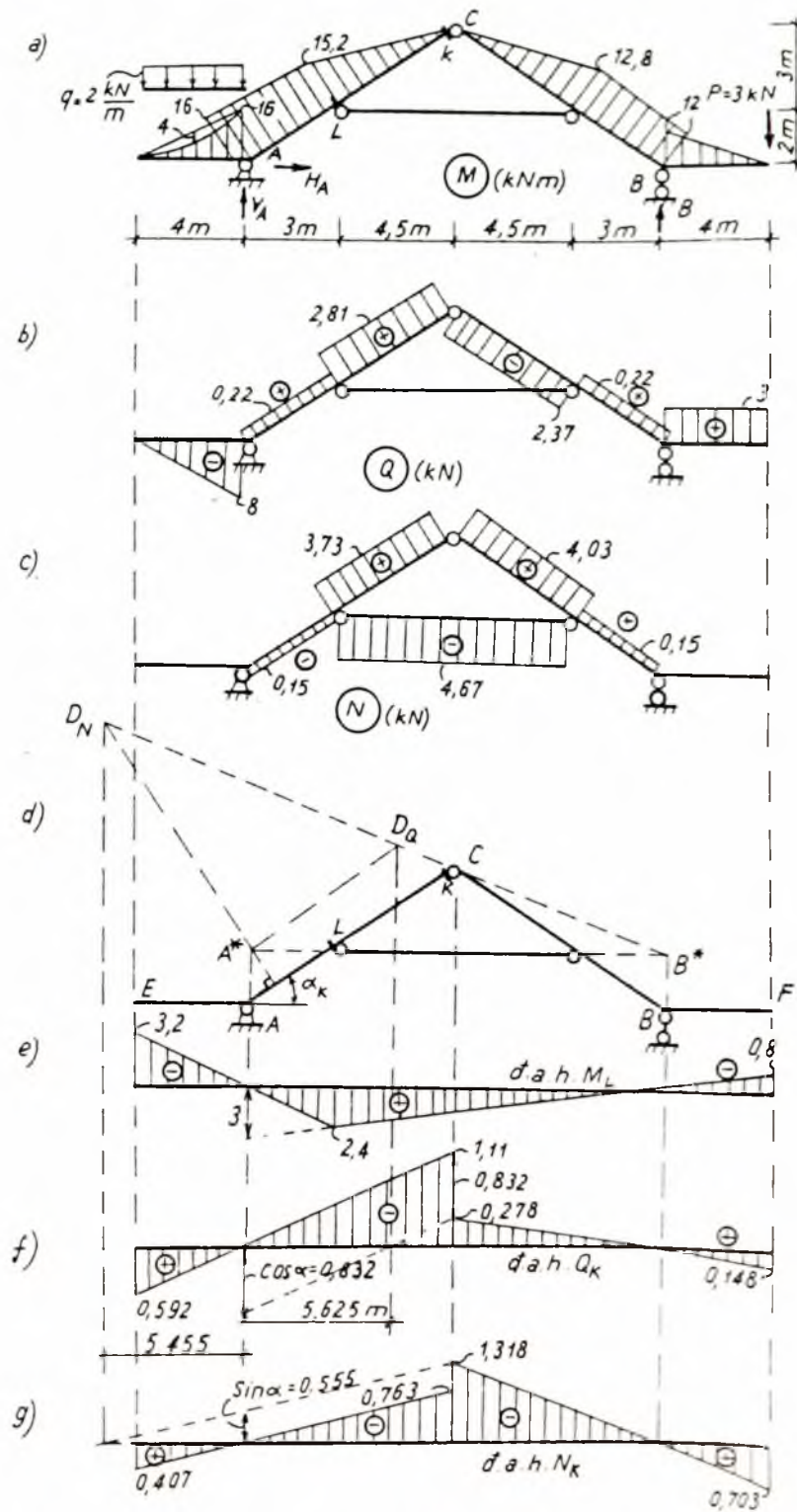
suy ra $H_A = 0;$

$$\sum M_B = 15V_A + 3.4 - 2.4.17 = 0,$$

suy ra $V_A = 124/15 \text{ kN};$

$$\sum M_A = 15V_B + 2.4.2 - 3.19 = 0,$$

suy ra $V_B = 41/15 \text{ kN};$



Hình 6

- ♦ *Vẽ các biểu đồ*: với các phản lực vừa tìm được ta có thể vẽ được biểu đồ mômen uốn như trên hình 6a. Từ biểu đồ mômen uốn suy ra biểu đồ lực cắt và lực dọc như trên hình 6b, c.

2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ *Đ.a.h. M_L* (hình 6e): vẽ theo mẫu đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện trong nhịp của hệ dầm đơn giản có nhịp AB .
- ♦ *Đ.a.h. Q_K* (hình 6f): vẽ theo mẫu đ.a.h. lực cắt trong hệ ba khớp A^*CB^* (hình 6d).
 - *Khi P di động từ tiết diện K đến khớp C* : đoạn đ.a.h. này được xác định theo tung độ bằng $\cos\alpha = 0,832$ ứng dưới A^* và tung độ bằng không ứng dưới D_Q là giao điểm của đường B^*C với đường kẻ từ A^* song song với tiếp tuyến tại K của trục thanh. Vì K ở bên trái khớp C nên phần thích dụng của đoạn này không được thể hiện trên hình 6f.
 - *Khi P di động trên EAK* : đoạn đ.a.h. này là đường kẻ từ tung độ bằng không ứng dưới A^* , song song với đoạn đ.a.h. khi P di động từ K đến
- *Khi P di động trên CBF* : nối tung độ ứng dưới C của đoạn đ.a.h. khi P di động từ K đến C với tung độ bằng không ứng dưới B^* .
- ♦ *Đ.a.h. N_K* (hình 6g): thực hiện tương tự như khi vẽ đ.a.h. Q_K với lưu ý là đoạn đ.a.h. khi P di động từ K đến C được xác định theo tung độ bằng $\sin\alpha = 0,555$ ứng dưới A^* và tung độ bằng không ứng dưới D_N là giao điểm của đường B^*C với đường kẻ từ A^* vuông góc với tiếp tuyến tại K của trục thanh. Vì K ở bên trái khớp C nên phần thích dụng của đoạn này cũng không được thể hiện trên hình vẽ.

4. Vận dụng đường ảnh hưởng để xác định giá trị các nội lực

$$M_L = 2.[-(3,2 \cdot 4)/2] + 3(-0,8) = -15,2 \text{ kNm};$$

$$Q_K = 2.(0,592 \cdot 4)/2 + 3.(0,148) = 2,81 \text{ kN};$$

$$N_K = 2.(0,406 \cdot 4)/2 + 3.(0,702) = 3,73 \text{ kN}.$$

Phù hợp với kết quả trên các biểu đồ nội lực.

Bài 7. Bài giải

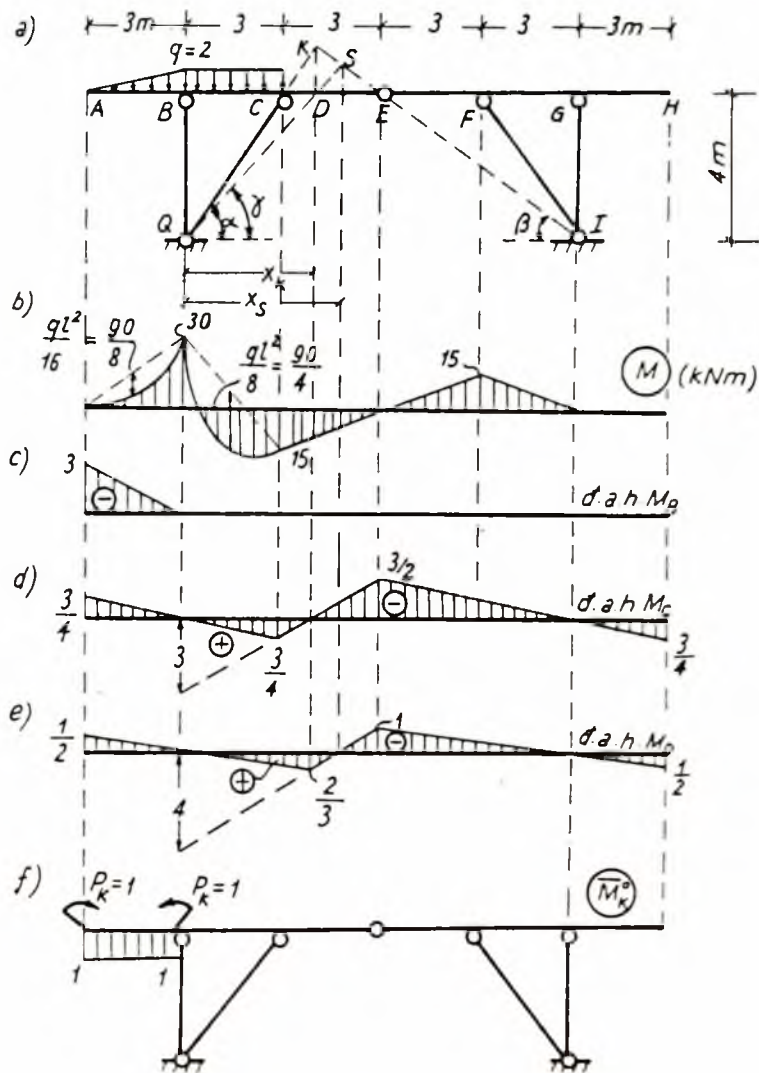
1. Vẽ biểu đồ mômen uốn

Nhận xét: Trong bài toán này (hình 7a), biểu đồ mômen uốn không có bước nhảy (vì không có nguyên nhân gây ra mômen tập trung) nên chỉ cần tìm mômen uốn tại các tiết diện A, B, C, E, F, G, H là đủ để vẽ. Mômen uốn tại A, B, G, H được xác định như trong dầm công xôn. Biểu

đồ mômen uốn trong đoạn CEF là đoạn thẳng không gãy, có giá trị bằng không tại khớp E , do đó chỉ cần tìm mômen uốn tại C (hoặc tại F) là đủ để vẽ. Để tìm M_C thì chỉ cần tìm phản lực thẳng đứng tại B là đủ.

Vì tải trọng chỉ tác dụng trên đoạn ABC nên muốn cho miếng cứng $EFGH$ cân bằng thì phản lực tại E phải có phương EI . Gọi K là giao điểm của EI và QC . Từ hình 7a ta dễ dàng xác định được vị trí của giao điểm K :

$$x_K = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} l_{QI} = \frac{2/3}{4/3 + 2/3} \cdot 12 = 4 \text{ m.}$$



Hình 7

Gọi R_B là phản lực thẳng đứng tại B , viết điều kiện cân bằng của miếng cứng $ABCE$ dưới dạng phương trình tổng mômen của các lực đối với điểm K , ta có:

$$\sum M_K = 4.R_B - \frac{1}{2} 3 \cdot 20 \cdot 4 - 3 \cdot 20 \cdot 2,5 = 0. \quad \text{Suy ra } R_B = 75 \text{ kN.}$$

$$M_C = -0,5 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 4 - 3 \cdot 20 \cdot 1,5 + 75 \cdot 3 = 15 \text{ kNm.}$$

Biểu đồ mômen uốn vẽ trên hình 7b.

2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ *Đ.a.h.* M_B (hình 7c): vẽ theo mẫu *đ.a.h.* mômen uốn trong dầm côngxôn.
- ♦ *Đ.a.h.* M_C (hình 7d): vẽ theo *đ.a.h.* mômen uốn trong hệ ba khớp QEI . Điểm không của phần *đ.a.h.* tương ứng với khi lực P di động trên đoạn CE là điểm K tìm được ở trên.
- ♦ *Đ.a.h.* M_D (hình 7e): vẽ theo *đ.a.h.* mômen uốn trong hệ ba khớp QEI . Điểm không của phần *đ.a.h.* tương ứng với khi lực P di động trên đoạn CE là điểm S của đường QD và đường IE . Vị trí của S được xác định theo công thức:

$$x_S = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} l_{QI} = \frac{2/3}{4/3 + 2/3} \cdot 12 = 4,8 \text{ m.}$$

3. Vận dụng đường ảnh hưởng, xác định các giá trị mômen uốn

Áp dụng tính chất của đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng, ta có thể hợp lực trong các đoạn:

- Đoạn AB , hợp lực bằng 30 kN, cách B là 1 m.
- Đoạn BC , hợp lực bằng 60 kN, cách B là 1,5 m.
- ♦ Từ *đ.a.h.* M_B : $M_B = 30 \cdot (-1) = -30 \text{ kNm.}$
- ♦ Từ *đ.a.h.* M_C : $M_C = 30 \cdot (-1) + 60 \cdot (3/8) = 15 \text{ kNm.}$
- ♦ Từ *đ.a.h.* M_D : $M_D = 30 \cdot (-1/6) + 60 \cdot (1/4) = 10 \text{ kNm.}$

Phù hợp với các số liệu trên biểu đồ mômen uốn.

4. Tìm góc xoay tương đối giữa hai tiết diện A và B

Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 7f.

$$\varphi_{aB} = (\overline{M}_k)(M) = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 30 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{90}{8} \cdot 3 \cdot 1 \right] = -\frac{45}{2EI} \text{ rad.}$$

Hai tiết diện A và B quay ngược với chiều của các lực P_k trên hình 7f.

Bài 8. Bài giải

1. Chứng minh hệ BBH

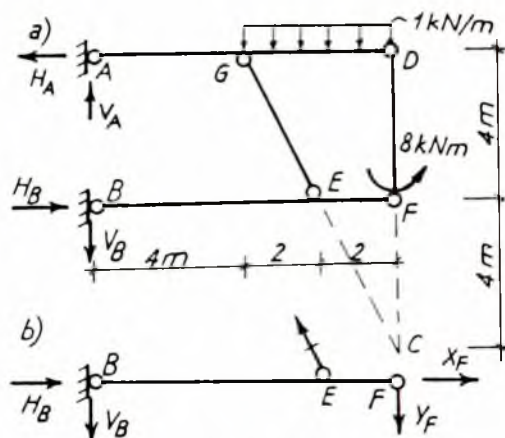
❖ *Điều kiện cần:* Hệ nối với trái đất nên: $n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0$.

Nếu quan niệm hệ gồm hai miếng cứng (AGD và BEF) tức là $D=2$ thì $T=2$; $K=0$; $H=0$; $C=4$, ta có: $n = 2 + 2.0 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$.

Điều kiện thỏa mãn với dấu bằng, hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện đủ:* Hệ được hình thành từ ba miếng cứng (trái đất, AGD và BEF) nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ A, B, C (giao điểm của hai thanh GE và DF) không cùng nằm trên một đường thẳng.

Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.



Hình 8.1

2. Vẽ các biểu đồ nội lực

♦ *Xác định các phản lực:* Từ các điều kiện cân bằng của toàn hệ (hình 8.1a):

$$\sum M_B = 4H_A + 8 - 1.4.6 = 0, \quad \text{suy ra} \quad H_A = 4 \text{ kN};$$

$$\sum X = H_A - H_B = 0, \quad \text{suy ra} \quad H_B = 4 \text{ kN}.$$

Khảo sát cân bằng của thanh DF, tìm được thành phần ngang X_F tại khớp F, bằng $M/4 = 8/4 = 2 \text{ kN}$. Khảo sát cân bằng thanh BEF (hình 8.1b):

$$\sum M_C(BEF) = 8V_B - 4X_F - 4H_B = 0, \quad \text{suy ra} \quad V_B = 3 \text{ kN}.$$

Khảo sát cân bằng của toàn hệ (hình 8.1a):

$$\sum Y = V_A - V_B - 1.4 = 0, \quad \text{suy ra} \quad V_A = 7 \text{ kN}.$$

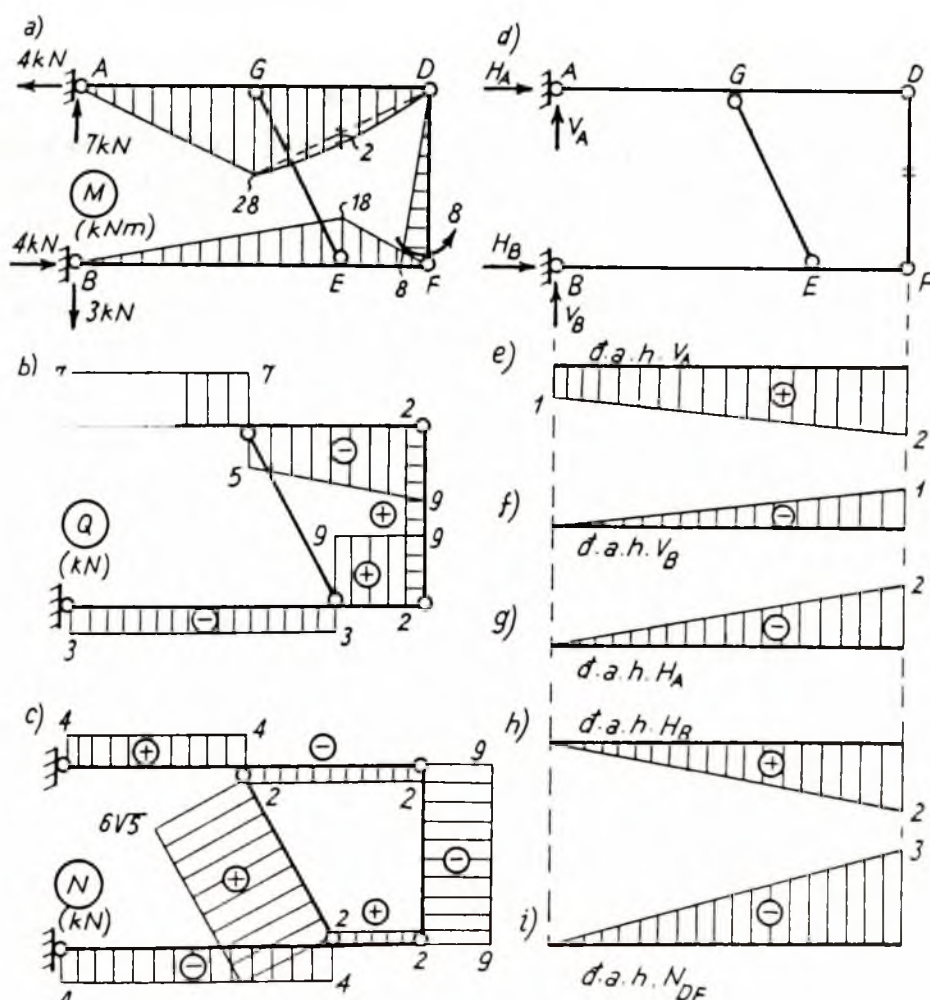
♦ *Vẽ các biểu đồ:* với các phản lực đã biết, ta vẽ được biểu đồ mômen uốn như trên hình 8.2a. Từ biểu đồ mômen uốn suy ra biểu đồ lực cắt và lực dọc như trên hình 8.2b, c.

3. Vẽ các đường ảnh hưởng khi tải trọng P di động trên đường AGD

Các đại lượng cần vẽ đ.a.h. đều ở ngoài phạm vi miếng cứng AGD thuộc đường xe chạy nên mỗi đ.a.h. cần tìm chỉ bao gồm một đoạn thẳng. Do

- Khi $P=1$ đặt tại D: $V_A = 2$; $V_B = -1$; $H_A = -H_B = -2$; $N_{DF} = -3$.

Căn cứ vào các giá trị này ta vẽ được các đ.a.h. như trên hình 8.2e, f, g, h, i.



Hình 8.2

4. Các đường ảnh hưởng khi tải trọng P di động trên đường BEF

- * Đ.a.h. H_A và đ.a.h. H_B không thay đổi so với trường hợp trên vì nguyên tắc xác định các đại lượng đó trong cả hai trường hợp như nhau.
- * Đ.a.h. V_A và đ.a.h. V_B có sự thay đổi so với trường hợp trên tại tung độ bên trái vì các phản lực này phụ thuộc trực tiếp vị trí của điểm đặt lực $P=I$ tại A hay tại B .

- * Đ.a.h. N_{DF} có sự thay đổi so với trường hợp trên về giá trị tại tung độ bên phải vì lực này phụ thuộc V_A hoặc V_B .

Bài 9. Bài giải. Nhận xét:

- * Hệ tĩnh định nên chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa không gây ra nội lực trong hệ.
- * Về thực chất, hệ đã cho được hình thành từ hai hệ độc lập với nhau: hệ AEB và hệ $BFCGD$ (hình 9a).

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực cắt

Tải trọng chỉ tác dụng trên hệ $BFCGD$ nên không gây ra nội lực trong hệ AEB . Hệ $BFCGD$ là hệ ghép gồm $BFCG$ là hệ chính, GD là hệ phụ. Nội lực trong hệ phụ được xác định theo cách tính dầm đơn giản. Sau khi thay thế tác dụng của hệ phụ GD bằng áp lực thẳng đứng $q/l/4$ đặt tại G ta có thể vẽ biểu đồ nội lực trong hệ chính theo một trong hai cách quan niệm như sau:

- ❖ hệ chính là hệ ba khớp BFC ;
- ❖ hệ chính là hệ dầm FCG có gối cố định C và liên kết thanh BF .

Kết quả vẽ các biểu đồ nội lực như trên hình 9b, c.

2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ Đ.a.h. M_1 và đ.a.h. Q_1 (hình 9d, e):

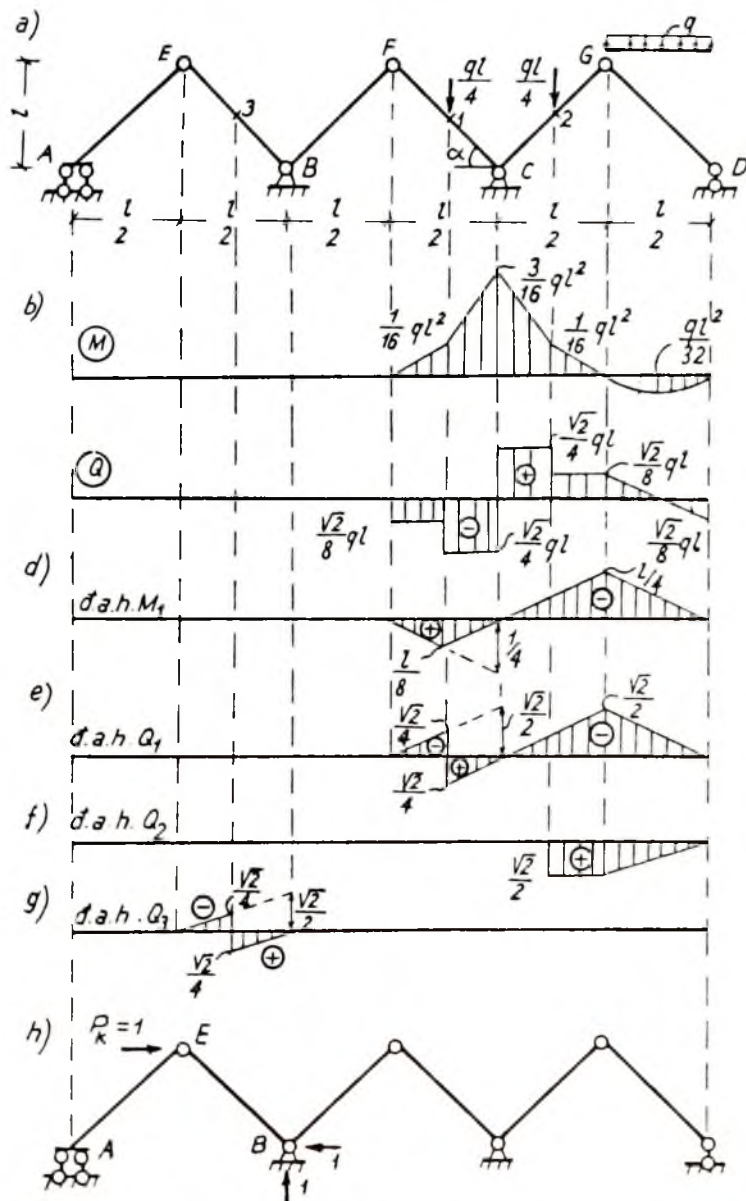
- Khi $P = 1$ di động trên hệ AEB , lực P không gây ra nội lực trong hệ $BFCGD$, đ.a.h. trùng với đường chuẩn.
- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính $BFCG$: vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba khớp BFC hoặc trong hệ dầm FCG có gối cố định C và liên kết thanh BF .
- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ GD : đ.a.h. là đoạn thẳng nối tung độ đ.a.h. thuộc hệ chính ứng dưới khớp G với tung độ bằng không ứng dưới gối D .

- ♦ Đ.a.h. Q_2 (hình 9f): thực hiện tương tự như đối với tiết diện I nhưng khi $P=1$ di động trên hệ chính $BFCG$, vẽ theo mẫu đ.a.h. nội lực trong hệ côngxôn.

- ♦ Đ.a.h. Q_3 (hình 9g):

- Khi $P = 1$ di động trên hệ $BFCGD$, lực P không gây ra nội lực trong hệ AEB , đ.a.h. trùng với đường chuẩn.
- Khi $P = 1$ di động trên hệ AEB : vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba

khớp. Trong trường hợp này, hệ AEB có: khớp cố định B , khớp E và khớp A^* ở xa vô cùng theo phương thẳng đứng. Điểm không của đoạn đ.a.h. tương ứng với khi $P=1$ di động trên đoạn Ek_3 là giao điểm của đường thẳng kẻ từ B song song với tiếp tuyến tại 3 và đường kẻ từ E song song với phương của hai thanh song song tại A . Giao điểm này ở tại E . Các bước tiếp theo được thực hiện như thường lệ.



Hình 9

3. Vận dụng đường ảnh hưởng để xác định nội lực

♦ Mômen uốn tại tiết diện 1: $M_{k1} = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{8} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{8} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^2}{16}$,

♦ Lực cắt tại các tiết diện 3, 1, 2: $Q_3 = 0$;

$$Q_1^r = \frac{ql}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} ql;$$

$$Q_1^{ph} = \frac{ql}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{ql}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} ql;$$

$$Q_2^r = \frac{ql}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} ql;$$

$$Q_2^{ph} = \frac{ql}{4} \cdot 0 + q \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} ql;$$

Các kết quả tìm được phù hợp với kết quả trên các biểu đồ nội lực.

4. Tìm chuyển vị ngang tại khớp E

Trạng thái khả dĩ "k" để tìm chuyển vị tại khớp E như trên hình 9h. Biểu đồ $(\bar{M}_k)$ bằng không, các phản lực $\bar{R}_{ik}$ tương ứng với chuyển vị cưỡng bức tại gối B ghi trên hình 9h. Áp dụng công thức chuyển vị, ta tìm được:

$$\Delta_E = \Delta_{km} = (\bar{M}_k)(M_m) - \sum_i \bar{R}_{ik} Z_{im} = -[l \cdot \Delta - l \cdot \Delta] = 0.$$

Bài 10. Bài giải

1. Khảo sát sự cấu tạo hình học (hình 10a)

❖ *Điều kiện cần*: Điều kiện cần thỏa mãn với dấu bằng, hệ đủ liên kết.

❖ *Điều kiện đủ*: Ta xét điều kiện đủ bằng cách lần lượt loại bỏ các bộ đôi: (HG-HI); (ED-EF) và (BA-BC). Phần còn lại là trái đất.

Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.

2. Vẽ biểu đồ mômen uốn. Nhận xét:

* Hệ tĩnh định, chuyển vị cưỡng bức tại gối C không gây ra nội lực trong hệ.

* Hệ đã cho là hệ ghép được hình thành từ hệ chính ABCD là hệ ba khớp; hệ ba khớp DEFG là phụ của ABCD và là chính của GH; hệ phụ GH là hệ dầm.

* Từ phương trình cân bằng tổng mômen đối với điểm F của phân hệ EFG ta nhận thấy nội lực trong thanh có hai đầu khớp DE bằng không. Do đó, khi vẽ biểu đồ mômen uốn ta có thể tách hệ thành hai phần riêng biệt như sau:

- Khung đơn giản EFG có gối cố định ở F và liên kết thanh DE , chịu các lực P đặt ở E và G .
- Khung ba khớp $ABCD$ chịu các lực P đặt ở 2 , B và D .

Kết quả tính các phản lực và biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 10a.

3. Vẽ các đường ảnh hưởng

♦ *Đ.a.h. M_1* (hình 10b). Tiết diện 1 thuộc phân hệ $DEFG$ nên:

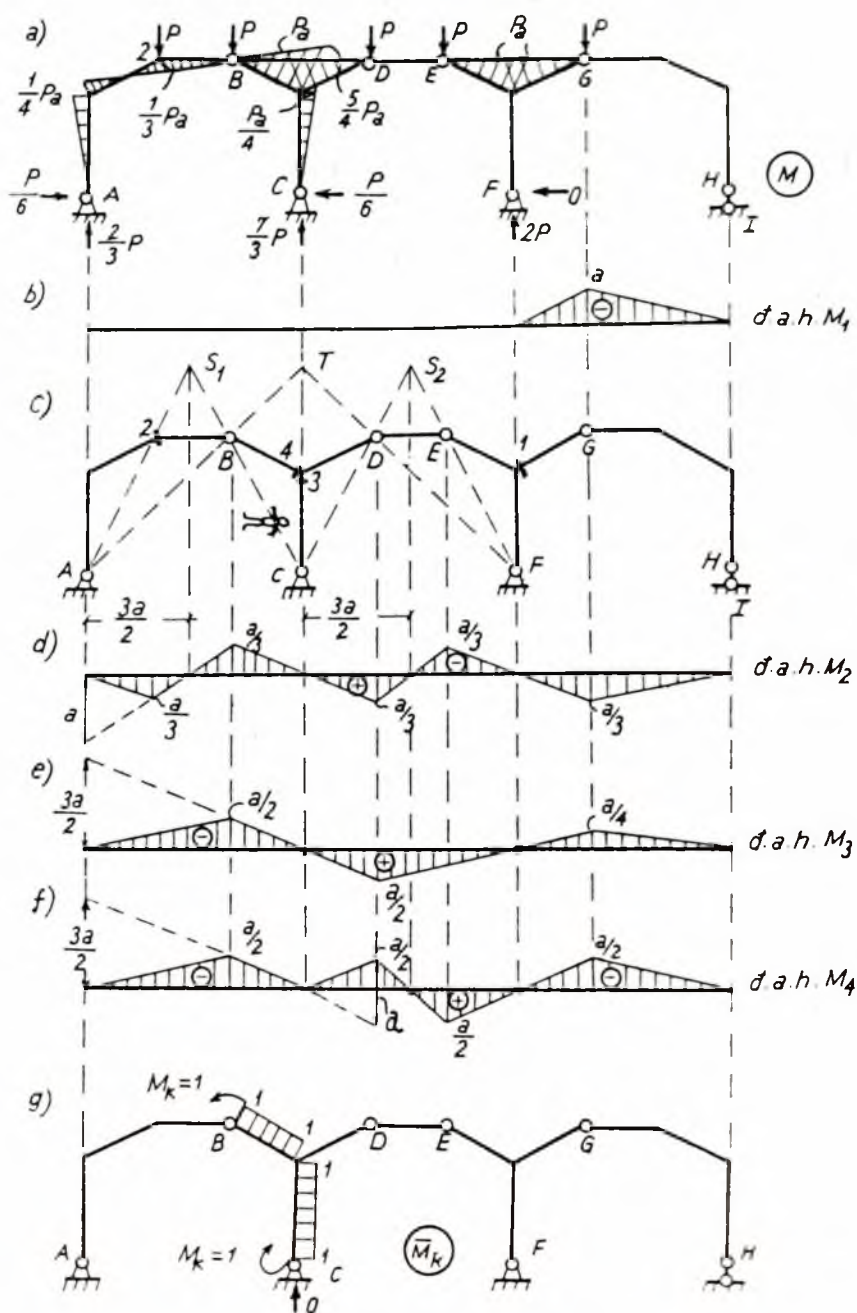
- Khi $P=1$ di động trên hệ chính $ABCD$: đ.a.h. trùng với đường chuẩn.
- Khi $P=1$ di động trên hệ $DEFG$: vẽ theo đ.a.h. tại tiết diện ở đầu thừa.
- Khi $P=1$ di động trên hệ phụ GH : đ.a.h. là đoạn thẳng nối tung độ ứng dưới khớp G với tung độ bằng không ứng

♦ *Đ.a.h. M_2* (hình 10d). Tiết diện 2 thuộc hệ chính $ABCD$ (hình 10c) nên:

- Khi $P=1$ di động trên hệ chính $ABCD$: vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba khớp (A , B và C). Điểm không của phân đ.a.h. khi P di động trên đoạn $2B$, ứng dưới giao điểm S_1 của hai đường Ak_2 và CB . Điểm này ở cách gối A một khoảng $3a/2$.
- Khi $P=1$ di động trên đoạn DE : đ.a.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp D với tung độ bằng không ứng dưới lực P có vị trí để sao cho mômen uốn tại 2 bằng không. Để tìm điểm này ta lập luận như sau:

◇ P di động trên DE nên các lực đặt tại G và H của hệ phụ bằng không; lực đặt tại F và E phải trực đối (vì EFG chỉ chịu tác dụng của hai lực này); do đó lực đặt tại E tác dụng vào miếng cứng DE phải có phương FE .

◇ Trên miếng cứng $A2B$ không có tải trọng P nên các lực đặt tại A và B phải trực đối, có phương AB . Nếu những lực này tồn tại thì mômen uốn tại 2 sẽ khác không. Muốn cho mômen uốn tại 2 bằng không thì các lực đặt tại A và B cũng phải bằng không, khi đó miếng cứng BCD chỉ chịu tác dụng của hai lực đặt tại C và D . Muốn cho miếng cứng BCD cân bằng thì hai lực này phải trực đối nghĩa là lực đặt tại D tác dụng vào miếng cứng DE phải có phương CD .



Hình 10

◇ Miếng cứng DE chịu tác dụng của ba lực: lực đặt tại D có phương CD , lực đặt tại E có phương FE và tải trọng P . Muốn cho miếng cứng DE cân bằng thì ba lực này phải đồng quy và lực P phải có vị

trí tương ứng với giao điểm S_2 của hai đường CD và EF .

Như vậy, điểm không của phần đ.a.h. khi P di động trên DE là điểm ứng dưới giao điểm S_2 của hai đường CD và EF .

- Khi $P = I$ di động trên đoạn EG : đ.a.h. là đoạn thẳng kể tiếp nối tung độ ứng dưới khớp E với tung độ bằng không ứng dưới gối F .
- Khi $P = I$ di động trên đoạn GH : đ.a.h. là đoạn thẳng kể tiếp nối tung độ ứng dưới khớp G với tung độ bằng không ứng dưới gối H .
- ♦ Đ.a.h. M_3 (hình 10e). Tiết diện 3 thuộc thanh đứng của hệ chính $ABCD$. Để quy định dấu của đ.a.h. mômen uốn ta chọn chiều nhìn của người quan sát như trên hình 10c.
- Khi $P = I$ di động trên hệ chính $ABCD$: vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba khớp ABC . Phần đ.a.h. khi P di động trên đoạn Bk_3 được xác định như sau:

$$\text{ứng dưới } A \text{ là } \frac{I_2 y_{k_3}}{f} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{3a}{2};$$

✓ uiem không ứng dưới giao điểm T của hai đường Ck_3 và AB ;

◇ phân thích dụng (hình 10e): đoạn ứng dưới khớp B đến khớp D (phần đầu thừa $3D$ thuộc phần bên trái 3 tức là thuộc đoạn $B3$).

Cũng có thể vẽ phần đ.a.h. này theo đ.a.h. lực xô trong hệ ba khớp.

- Khi $P=I$ di động trên đoạn DE : đ.a.h. là đoạn thẳng kể tiếp nối tung độ ứng dưới khớp D với tung độ bằng không ứng dưới lực P có vị trí để sao cho mômen uốn tại 3 bằng không. Để tìm điểm này ta cũng lập luận tương tự như trường hợp trên và có các nhận xét sau:
- ◇ Lực đặt tại E tác dụng vào miếng cứng DE phải có phương FE .
- ◇ Muốn cho mômen uốn tại 3 bằng không thì phản lực tại C phải có phương thẳng đứng. Khi đó miếng cứng BCD chịu tác dụng của ba lực: lực đặt tại C có phương thẳng đứng; lực đặt tại B có phương AB ; lực đặt tại D . Muốn cho miếng cứng BCD cân bằng thì ba lực này phải đồng quy nghĩa là lực đặt tại D phải đi qua giao điểm T của hai lực nói trên.
- ◇ Miếng cứng DE lúc này chịu tác dụng của ba lực: lực đặt tại D có phương TD , lực đặt tại E có phương FE và tải trọng P . Muốn cho miếng cứng DE cân bằng thì ba lực này phải đồng quy và lực P phải có vị trí tương ứng với giao điểm F của hai đường TD và EF .

- Khi $P=I$ di động trên đoạn EG : đ.a.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp E với tung độ bằng không ứng dưới gối F .
 - Khi $P=I$ di động trên đoạn GH : đ.a.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp G với tung độ bằng không ứng dưới gối H .
- ♦ Đ.a.h. M_4 (hình 10f). Tiết diện 4 thuộc hệ chính $ABCD$.
- Khi $P=I$ di động trên hệ chính $ABCD$: thực hiện tương tự như khi vẽ đ.a.h. mômen uốn tại 3 song cân chú ý về phân thích dụng của các đoạn đ.a.h. Trong trường hợp này (hình 10c) tiết diện 4 chia miếng cứng BCD thành hai phần: phần bên trái $B4$ và phần bên phải là $C4D$. Do đó, phân thích dụng của đoạn đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên phần $B4$ chỉ giới hạn trong phạm vi B và 4. Khi P di động trên phần $4D$ ta cân vẽ đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên phần bên phải của 4. Như đã biết, hai phần đ.a.h. mômen uốn ở hai bên tiết diện có tính chất: từ điểm ứng dưới tiết diện, nếu lấy theo phương song song với đường chuẩn một đoạn bằng a thì phần tung độ khớp giữa hai đoạn đ.a.h. ở hai bên tiết diện cũng bằng a . Từ nhận xét này ta dễ dàng suy ra đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên phần $4D$ (hình 10f).
 - Khi $P=I$ di động trên đoạn DE : cũng lập luận tương tự như trường hợp tiết diện 2, đ.a.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp D với tung độ bằng không ứng dưới giao điểm S_2 .
 - Khi $P=I$ di động trên đoạn EG và GH : đ.a.h. là các đoạn thẳng nối kế tiếp nhau, thực hiện tương tự như hai trường hợp trên.

4. Vận dụng đường ảnh hưởng để xác định giá trị mômen uốn

$$M_1 = P(-a) = -Pa;$$

$$M_2 = P.(a/3) + P.(-a/3) + P.(a/3) + P.(-a/3) + P.(a/3) = Pa/3;$$

$$M_3 = P.(-a/4) + P.(-a/2) + P.(a/2) + P.(a/4) + P.(-a/4) = -Pa/4;$$

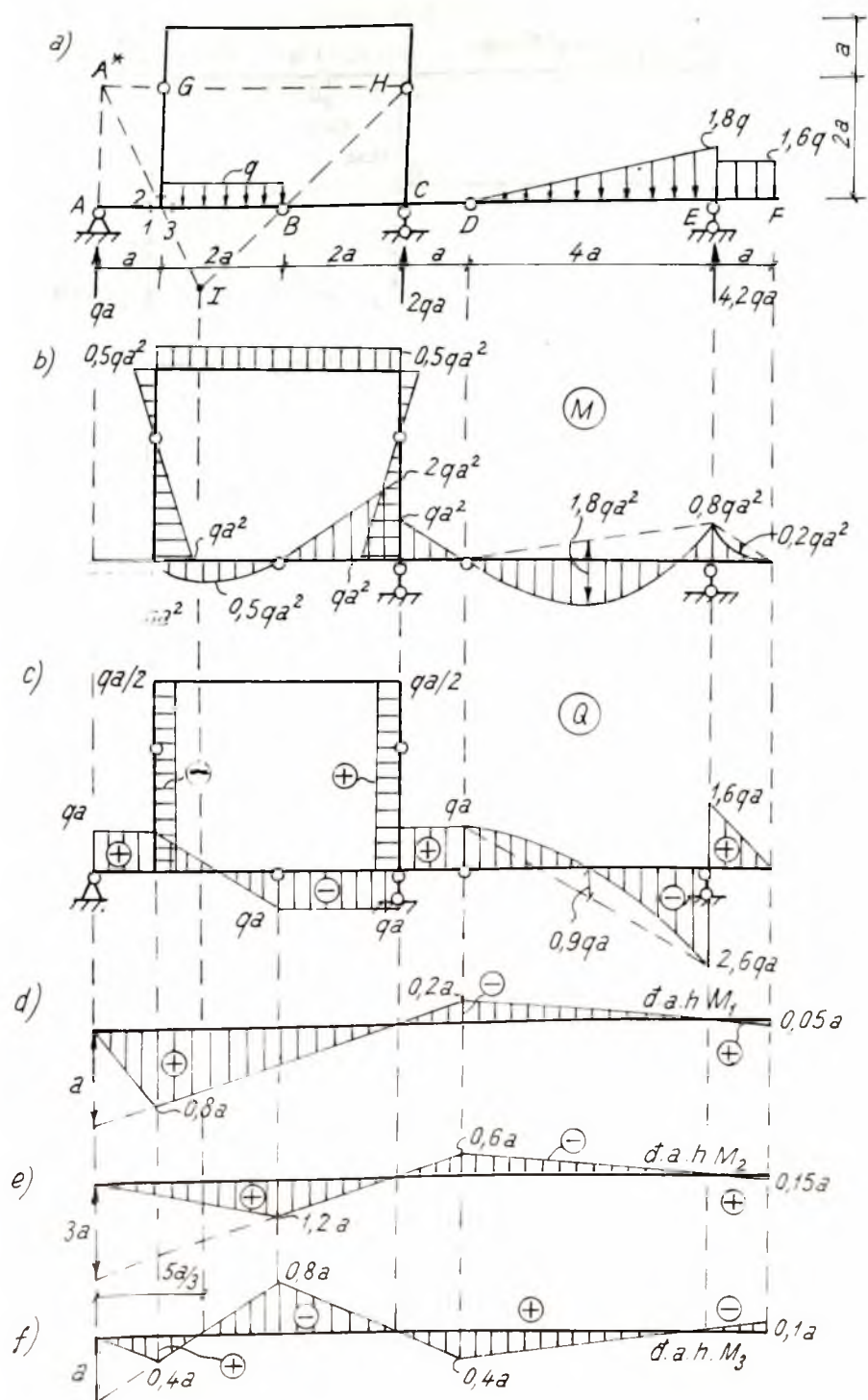
$$M_4 = P.(-a/4) + P.(-a/2) + P.(-a/2) + P.(a/2) + P.(-a/2) = -5Pa/4.$$

Phù hợp với kết quả trên biểu đồ mômen uốn (hình 10a).

5. Tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện B và C . Trạng thái k đã "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 10g.

$$\varphi_{BC} = (\bar{M}_k \times M) - \sum_i \bar{R}_{ik} Z_{im} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{a\sqrt{5}}{2} \frac{5}{4} Pa.l + \frac{1}{2} \frac{3a}{2} \frac{1}{4} Pa.l \right] - [0.4$$

$$\text{Suy ra: } \varphi_{BC} = (5\sqrt{5} + 3) \frac{Pa^2}{16EI}, \text{ (theo chiều các mômen trên hình 10g)}$$



Hình 11

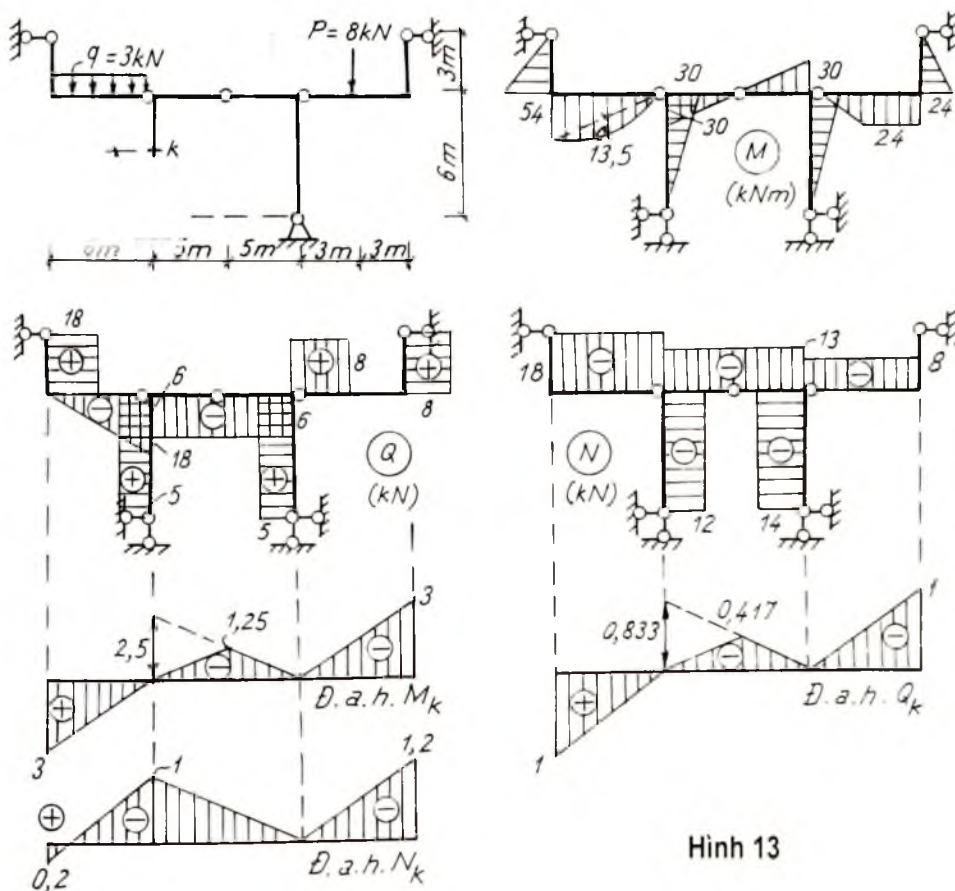
188

Bài 11. Chỉ dẫn.

Hệ đã cho là hệ ghép, hệ chính $ABCD$ được xem như hệ ba khớp A^*BH có thanh cằng GH (hình 11a). Kết quả vẽ biểu đồ nội lực như trên hình 11b, c. Các đ.a.h. cần tìm như trên hình 11 d, e, f. Giá trị M_2 tính theo đ.a.h. bằng qa^2 .

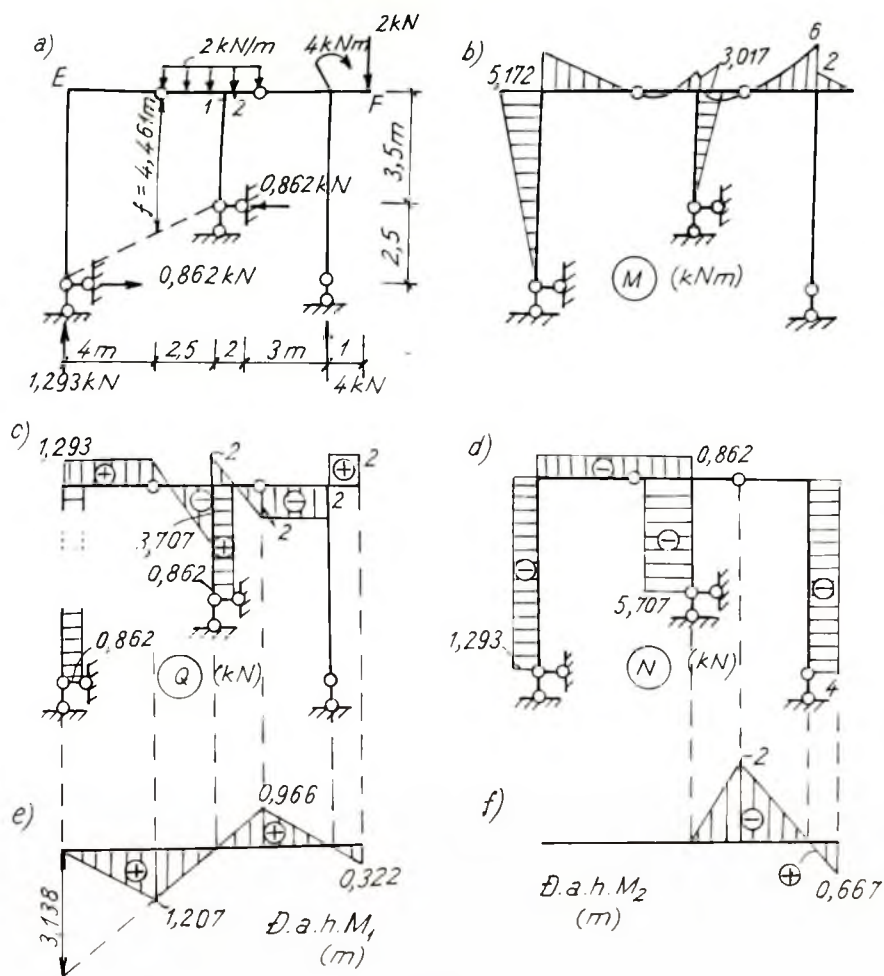
Bài 12. Đáp số. Kết quả vẽ biểu đồ nội lực và các đ.a.h. cần tìm như trên hình 12. Giá trị M_3 tính theo đ.a.h. bằng 45 kNm (căng thớ trên).

Bài 13. Đáp số. Kết quả vẽ biểu đồ nội lực và các đ.a.h. cần tìm như trên hình 13. Giá trị các nội lực tại k tính theo đ.a.h. phù hợp với các biểu đồ nội lực.



Bài 14. Đáp số. Kết quả vẽ biểu đồ nội lực và các đ.a.h. cần tìm như trên hình 14. Giá trị các đại lượng cần tìm theo đ.a.h. phù hợp với kết quả tìm được ở bước 1.

Bài 15. Đáp số. Kết quả vẽ biểu đồ nội lực và các đ.a.h. cần tìm như trên hình 15. Giá trị các đại lượng tìm theo đ.a.h.: $M_1 = 3,017 \text{ kNm}$; $M_2 = 0$.



Hình 15

Bài 16. Bài giải

Nhận xét: Hệ đối xứng, chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng, được hình thành từ hai hệ chính KA, DB là hệ côngxôn và một hệ phụ là hệ ba khớp ACB (hình 16a).

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn

Ta có thể vẽ nhanh biểu đồ mômen uốn trên cơ sở những nhận xét sau:

- ◇ Tại khớp C có hai cặp thành phần phản lực: cặp thẳng đứng là phản xứng bằng không vì hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng;

cặp nằm ngang tồn tại nhưng không gây ra mômen uốn trong các đoạn thanh CE và CF . Do đó khi vẽ biểu đồ mômen uốn ta có thể xem các đoạn thanh này như các phần đầu thừa có đầu tự do tại C .

◇ Biểu đồ mômen uốn trong đoạn thanh AE (BF) có dạng bậc nhất được xác định theo hai tung độ: tung độ bằng không tại khớp A (B) và tung độ tại E (F) có giá trị bằng mômen uốn tại E (F) thuộc đoạn EC (FC) xác định theo nguyên tắc cân bằng nút.

◇ Biểu đồ mômen uốn trong đoạn thanh AK (BD) là đoạn thẳng kéo dài của biểu đồ mômen uốn trong đoạn thanh AE (BF) vì tại A (B) không có lực tập trung.

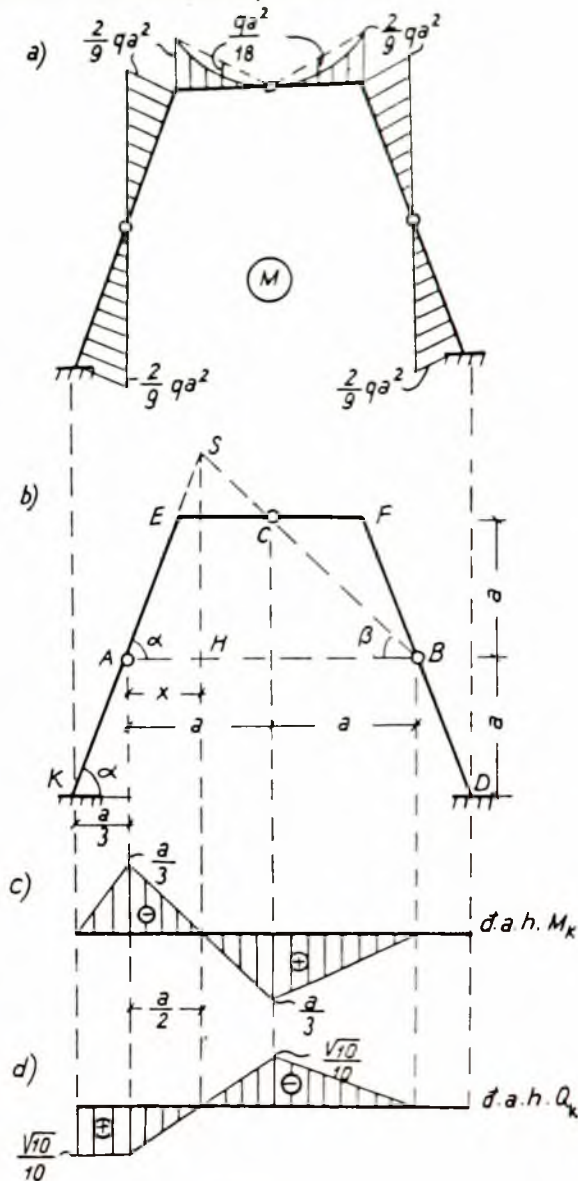
Kết quả tìm được như trên hình 16a.

2. Vẽ các đ.a.h. mômen uốn và lực cắt tại k

- Khi $P=1$ di động trên hệ chính BD : tiết diện k ở tại một hệ chính khác nên không phát sinh nội lực, đ.a.h. trùng với đường chuẩn.

- Khi $P=1$ di động trên hệ chính KA : vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ côngxôn.

- Khi $P=1$ di động trên AEC : đ.a.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp A với tung độ bằng không ứng dưới lực P có vị trí để sao cho nội lực cần vẽ đ.a.h. tại k bằng không.



Hình 16

Để tìm điểm này (hình 16b) ta lập luận như sau: Khi P di động trên AEC , muốn cho mômen uốn tại k bằng không thì lực đặt tại A phải có phương Ak . Tương tự, muốn cho lực cắt tại k bằng không thì lực đặt tại A phải có phương song song với tiếp tuyến tại k tức là phương Ak . Ta thấy trong cả hai trường hợp, lực đặt tại A tác dụng vào miếng cứng AEC đều phải có phương Ak . Mặt khác, miếng cứng CFB chỉ chịu tác dụng của hai lực nên lực đặt tại C tác dụng vào miếng cứng AEC phải có phương CB . Như vậy, miếng cứng AEC cân bằng dưới tác dụng của ba lực là lực P , lực đặt tại A có phương Ak , lực đặt tại C có phương CB , ba lực này phải đồng quy nên vị trí cần tìm của lực P tương ứng với giao điểm S của các đường Ak và BC .

Để xác định khoảng cách x theo phương ngang từ A đến giao điểm S (hình 16b) ta có điều kiện:

$$\begin{aligned} SH = x \operatorname{tg} \alpha &= (2a-x) \operatorname{tg} \beta, \quad \text{suy ra:} \quad x = \frac{2a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}, \\ &= a/(a/3) = 3; \quad \operatorname{tg} \beta = a/a = 1, \quad \text{nên} \quad x = \frac{2a \cdot 1}{3+1} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

- *Kiểm tra lại* *ai động trên CFB*: d.a.h. là đoạn thẳng kẻ tiếp nối tung độ ứng dưới khớp C với tung độ bằng không ứng dưới khớp B

Kết quả vẽ các d.a.h. như trên hình 16c, d.

Bài 17. Bài giải

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn. Có thể vẽ ngay biểu đồ mômen uốn mà không cần xác định các phản lực trên cơ sở các nhận xét sau:

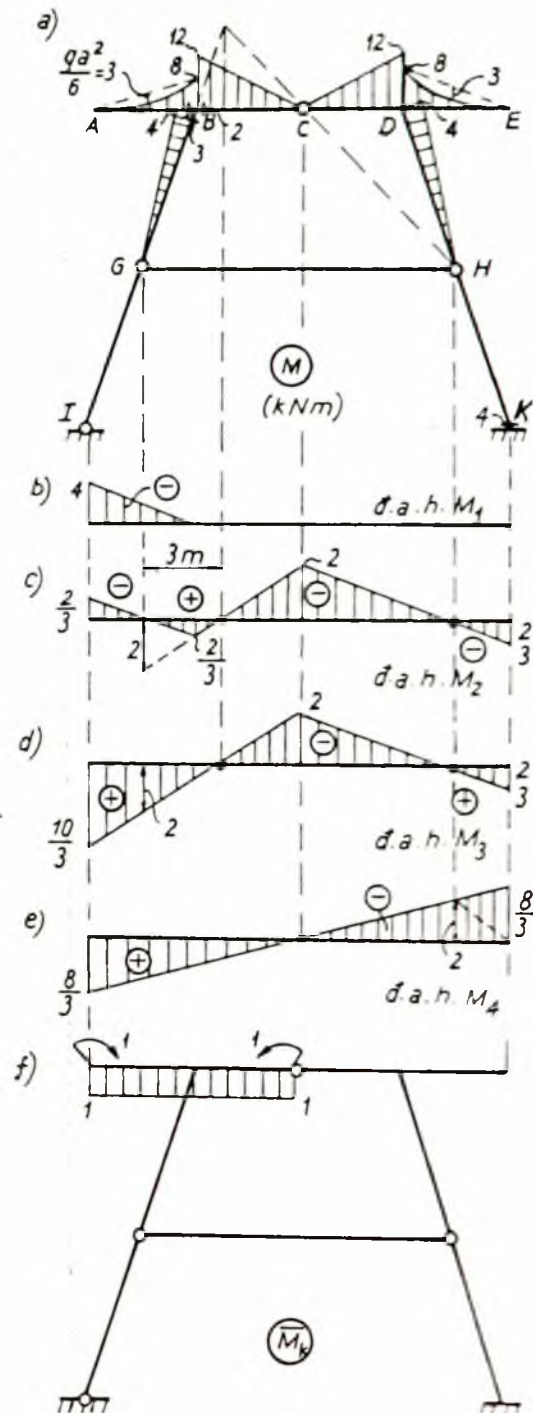
- *Đoạn AB và DE*: Thực hiện như trong dầm có đầu thừa.
- *Đoạn CB và CD*: Sau khi phân tích lực P thành hai lực đặt ở hai bên khớp C ta thấy thành phần thẳng đứng của phản lực tại khớp C bằng không vì phần bên trên của hệ là đối xứng và chịu nguyên nhân đối xứng. Do đó, khi vẽ ta có thể xem CB và CD như các đầu thừa chỉ chịu các lực đã biết là $P/2 = 30$ kN.
- *Đoạn BG và DH*: Mômen uốn tại B và D xác định theo điều kiện cân bằng nút còn mômen uốn tại G và H bằng không.
- *Đoạn IG và GH*: Các thanh này có khớp ở hai đầu và không chịu tải trọng trên thanh nên mômen uốn bằng không.
- *Đoạn HK*: Các áp lực truyền từ bộ phận đối xứng bên trên xuống các bộ phận bên dưới (GI và HK) phải có tính chất đối xứng. Do đó, nếu áp lực

tại G có phương GI thì áp lực tại H phải có phương HK , suy ra mômen uốn trong thanh HK cũng bằng không.

Kết quả tìm được như trên hình 17a.

2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ *Đ.a.h.* M_1 (hình 17b): vẽ theo *đ.a.h.* mômen uốn tại tiết diện ở đầu thừa.
- ♦ *Đ.a.h.* M_2 (hình 17c): vẽ theo *đ.a.h.* mômen uốn trong hệ ba khớp GCH . Khi P đi động trên đoạn $2C$, điểm không của *đ.a.h.* ứng dưới giao điểm của HC và $G2$ (hình 17a). Chú ý là đoạn AB thuộc phần bên trái tiết diện 2.
- ♦ *Đ.a.h.* M_3 (hình 17d): thực hiện tương tự như khi vẽ *đ.a.h.* M_2 . Cần chú ý đoạn AB lúc này thuộc phần bên phải tiết diện 3.
- ♦ *Đ.a.h.* M_4 (hình 17e): Trước tiên, giả thiết lực P đi động trên hệ chịu lực chính là dầm công xôn HK , *đ.a.h.* M_4 là đường đứt nét trên hình 17e. Bộ phận $ABCDEGH$ là hệ phụ và hình thành một miếng cứng.



Hình 17

Do đó khi P di động trên $ABCDE$, đ.a.h. M_4 là một đường thẳng trên toàn chiều dài $ABCDE$. Đường thẳng này được xác định từ hai tung độ:

- Tung độ bằng -2 ứng dưới khớp H nối hệ phụ với hệ chính.
- Tung độ bằng không ứng dưới giao điểm của IG và HK . Thật vậy, miếng cứng $ABCDEGH$ chịu tác dụng của ba lực: lực P , lực đặt tại G có phương IG và lực đặt tại H . Muốn cho mômen uốn tại tiết diện 4 bằng không thì lực đặt tại H phải đi qua tiết diện 4 tức là có phương HK , cho nên vị trí của lực P cho $M_4 = 0$ phải là giao điểm của IG và HK .

3. Xác định góc xoay tương đối giữa hai tiết diện A và C

Trạng thái khả dĩ "k" và biểu đồ mômen uốn tương ứng vẽ trên hình 17f.

$$\varphi_{aB} = (\overline{M}_k)(M) = -\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} 8.4.1 - \frac{2}{3} 3.4 + \frac{1}{2} 12.4.1 \right] = -\frac{32}{EI} \text{ rad.}$$

Góc xoay tương đối ngược với chiều giả định của các lực P_k trên hình 17f.

Hệ đã cho (hình 18a) là hệ dàn ghép tĩnh định được hình thành từ các dàn đơn giản: hệ chính $EACBF$ là hệ dàn ba khớp (A, B, C); hệ phụ DE nối với hệ chính tại khớp E ; hệ phụ GH nối với hệ chính bằng hai thanh song song FG và $6d$.

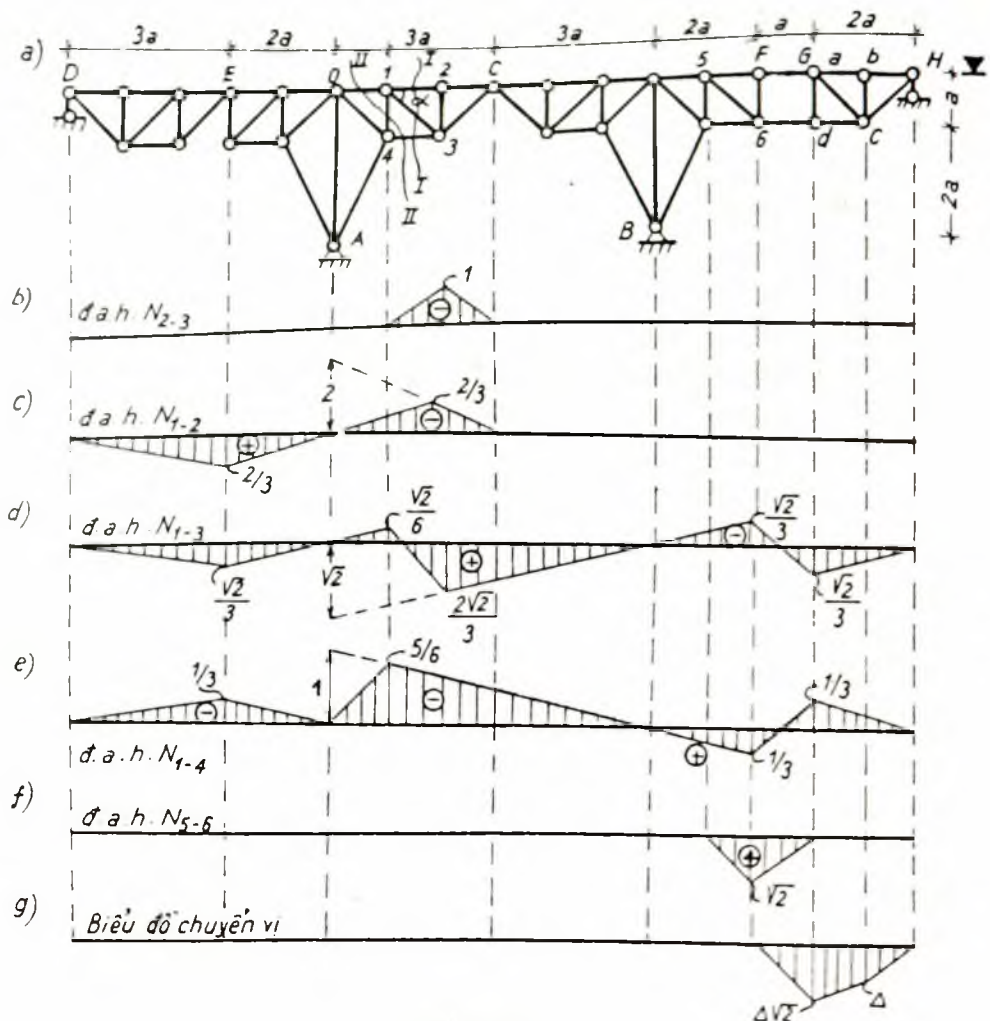
1. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ Đ.a.h. N_{2-3} (hình 18b): vận dụng phương pháp tách mắt (mắt 2).
- ♦ Đ.a.h. N_{1-2} (hình 18c):
 - Khi $P=1$ di động trên ECF : Thực hiện mặt cắt I-I qua ba thanh $1-2, 1-3, 4-3$, chọn tâm mômen 3 , ta có thể vẽ đ.a.h. N_{1-2} theo đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 3 trong vòm ba khớp phụ trợ ACB đi qua điểm 3 như sau:

$$\text{đ.a.h. } N_{1-2} = -\frac{1}{a} (\text{đ.a.h. } M_3^V).$$

Trong trường hợp này, phần đ.a.h. tương ứng với khi P di động trên CF trùng với đường chuẩn.

Đ.a.h. tìm theo cách này chỉ thích nghi với khi P di động ngoài dốt bị cắt trên đường xe chạy. Khi P di động trên dốt bị cắt (dốt $1-2$) ta sử dụng đường nối theo nguyên tắc truyền lực trong hệ có hệ thống truyền lực.



Hình 18

- Khi $P=1$ di động trên DE : đ.đ.h. là đoạn thẳng kế tiếp nối tung độ ứng dưới khớp E với tung độ bằng không ứng dưới gối D .
- Khi $P=1$ di động trên GH : hệ phụ GH được nối với hệ chính bằng hai thanh song song nên khớp giả tạo nối giữa hai hệ này ở xa vô cùng. Do đó, đ.đ.h. trong đoạn này là đoạn thẳng đi qua tung độ bằng không ứng dưới gối H , song song với đ.đ.h. tương ứng với khi P di động trên hệ CF nên cũng trùng với đường chuẩn.
- Khi $P=1$ di động trên dốt FG : đ.đ.h. là đoạn thẳng nối hai tung độ ứng dưới F và G theo nguyên tắc truyền lực trong hệ có hệ thống truyền lực.

♦ *Đ.a.h. N_{1-3} (hình 18d):*

- *Khi $P=1$ di động trên ECF:* Cũng thực hiện mặt cắt i-i qua ba thanh 1-2, 1-3, 4-3, tìm mômen để xác định N_{1-3} ở xa vô cùng nên ta có thể vẽ đ.a.h. N_{1-3} theo đ.a.h. lực cắt trong vòm ba khớp phụ trợ ACB. Áp dụng phương pháp thực hành ta có:

$$\text{đ.a.h. } N_{1-3} = \sqrt{2} (\text{đ.a.h. } Q_{1-2}^V),$$

với đ.a.h. Q_{1-2}^V là đ.a.h. lực cắt tại tiết diện trong phạm vi dốt bị cắt (1-2), có trục song song với phương của hai thanh 1-2, 4-3 (nằm ngang) trong vòm ba khớp phụ trợ ACB.

Đ.a.h. tìm theo cách này chỉ thích nghi với khi P di động ngoài dốt bị cắt trên đường xe chạy. Khi P di động trên dốt bị cắt (dốt 1-2) ta sử dụng đường nối theo nguyên tắc truyền lực trong hệ có hệ thống truyền lực.

- *Khi $P=1$ di động trên DE, GH, và trên dốt FG:* thực hiện tương tự như hình vẽ đ.a.h. N_{1-2} .

(hình 18e): Thực hiện tương tự như khi vẽ đ.a.h. N_{1-3} Song cần sử dụng mặt cắt II-II qua ba thanh 0-1, 1-4, 4-3 và vẽ đ.a.h. N_{1-4} theo đ.a.h. lực cắt trong vòm ba khớp phụ trợ ACB theo biểu thức:

$$\text{đ.a.h. } N_{1-4} = -(\text{đ.a.h. } Q_{0-1}^V),$$

với đ.a.h. Q_{0-1}^V là đ.a.h. lực cắt tại tiết diện trong phạm vi dốt bị cắt (0-1), có trục song song với phương của hai thanh 0-1, 4-3 (nằm ngang) trong vòm ba khớp phụ trợ ACB.

- ♦ *Đ.a.h. N_{5-6} (hình 18f):* Tách mắt 6, lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng. Với mọi vị trí của lực P , ta luôn luôn có:

$$N_{5-6} = -\sqrt{2} N_{F-6} \quad \text{suy ra} \quad \text{đ.a.h. } N_{5-6} = -\sqrt{2} (\text{đ.a.h. } N_{F-6}).$$

Đ.a.h. N_{F-6} tìm được dễ dàng bằng cách tách mắt F .

2. Vẽ biểu đồ chuyển vị thẳng đứng của đường xe chạy

Khi thay đổi chiều dài các thanh $a-c$, $b-c$ đường dần hồi của đường xe chạy có dạng đường đa giác. Do đó ta chỉ cần tìm chuyển vị thẳng đứng tại các điểm thuộc đường xe chạy rồi nối các tung độ biểu thị các chuyển vị vừa tìm được bằng các đoạn thẳng trong phạm vi mỗi dốt.

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại mắt bất kỳ trên đường xe chạy ta cần tạo trạng thái khả dĩ "k", xác định lực dọc tương ứng trong các thanh có chiều dài thay đổi và áp dụng công thức chuyển vị. Trong trường hợp này

ta có:

$$\Delta_{km} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_{im} = (\bar{N}_{(ac)k} + \bar{N}_{(bc)k})(-\Delta)$$

Các thanh $a-c$, $b-c$ thuộc hệ phụ GH nên lực dọc trong các thanh này chỉ phát sinh khi lực $P_k = I$ đặt tại a và b .

Như vậy, chuyển vị thẳng đứng tại các mắt thuộc đường xe chạy từ D đến F bằng không, biểu đồ chuyển vị thẳng đứng tương ứng trong phạm vi này trùng với đường chuẩn. Ta chỉ cần tìm chuyển vị thẳng đứng tại mắt a và b .

- Khi $P_k = I$ đặt tại a , áp dụng phương pháp tách mắt ta tìm được:

$$\bar{N}_{(ac)k} = -\sqrt{2}; \quad \bar{N}_{(bc)k} = 0. \quad \text{Suy ra: } \Delta_a = (-\sqrt{2})(-\Delta) = \sqrt{2}\Delta.$$

- Khi $P_k = I$ đặt tại b , áp dụng phương pháp tách mắt ta tìm được:

$$\bar{N}_{(ac)k} = 0; \quad \bar{N}_{(bc)k} = -1. \quad \text{Suy ra: } \Delta_b = (-1)(-\Delta) = \Delta.$$

Biểu đồ chuyển vị cần tìm có dạng như trên hình 18g.

Bài 19. Chỉ dẫn

1. Xác định nội lực trong toàn bộ các thanh

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng (hình 19a) nên sau khi khảo sát mắt 5 ta dễ dàng nhận thấy $N_{5d} = N_{5k} = 0$. Vận dụng các nhận xét suy ra từ phương pháp tách mắt ta sẽ phát hiện được các thanh có lực dọc bằng không: các thanh biên thuộc đường biên trên; các thanh đứng và thanh xiên của hệ thanh bụng; các thanh 1-2, 2-3, 7-8, 8-9 thuộc biên dưới.

Tách mắt 3 hoặc mắt 7, ta sẽ tìm được nội lực trong các thanh còn lại:

$$N_{3h} = N_{7i} = -P\sqrt{2}; \quad N_{34} = N_{45} = N_{56} = N_{67} = -P.$$

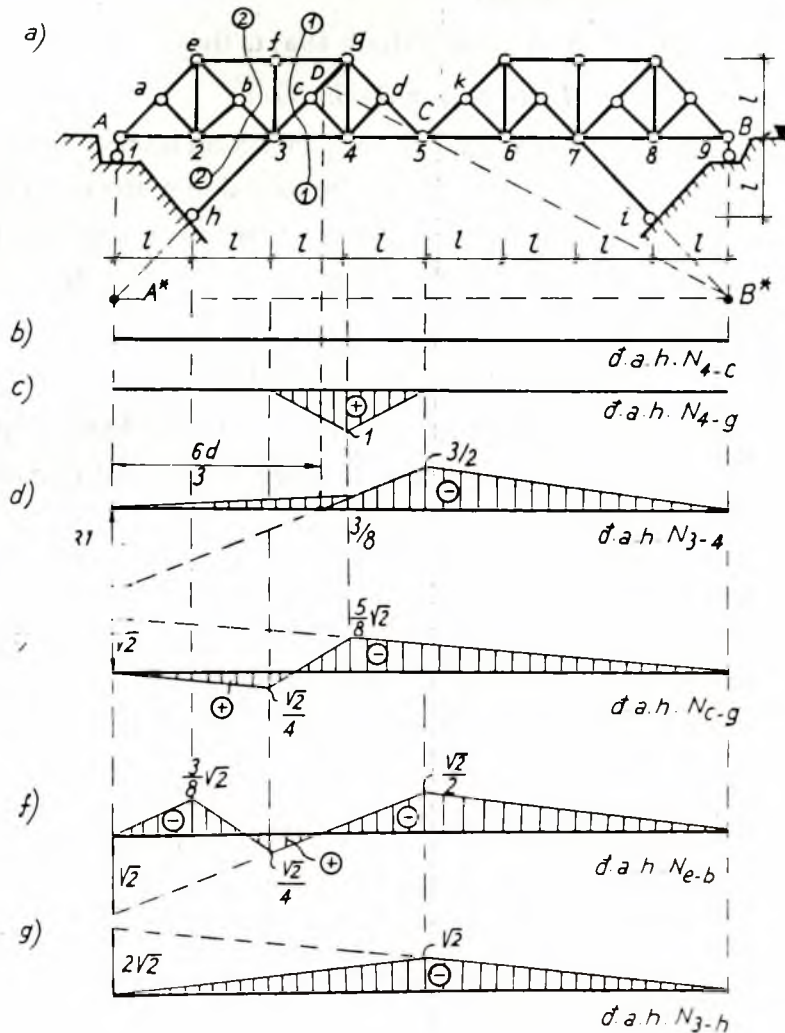
2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ Đ.a.h. N_{4-c} (hình 19b): trùng với đường chuẩn.
- ♦ Đ.a.h. N_{4-g} (hình 19c): Tách mắt 4 với chú ý là nội lực trong thanh 4-c và 4-d luôn bằng không với mọi vị trí của lực P trên đường xe chạy.
- ♦ Đ.a.h. N_{3-4} (hình 19d): Thực hiện mặt cắt 1-1 (hình 19a), chọn tâm mômen g , vẽ theo đ.a.h. mômen uốn tại g trong hệ ba khớp phụ trợ A^*CB^* có trục đi qua g theo biểu thức:

$$\text{đ.a.h. } N_{3-4} = \frac{1}{l}(\text{đ.a.h. } M_g^V).$$

Điểm không của phân đ.a.h. khi P di động trên đoạn 4-5 ứng dưới giao

điểm D của đường B^*C và đường A^*g (hình 19a).



Hình 19

♦ $\text{Đ.a.h. } N_{c-g}$ (hình 19e): Từ mắt c (hình 19a) ta thấy: ~

$$\text{đ.a.h. } N_{c-g} = \text{đ.a.h. } N_{3-c}.$$

Cũng thực hiện mặt cắt 1-1, ta có thể vẽ $\text{đ.a.h. } N_{c-g}$ theo đ.a.h. lực cắt trong hệ ba khớp phụ trợ A^*CB^* có đoạn song song với các thanh 3-4 và $f-g$ trong phạm vi đốt bị cắt. Ta có:

$$\text{đ.a.h. } N_{c-g} = -\sqrt{2} (\text{đ.a.h. } Q^V).$$

Điểm không của phần đ.a.h. khi P di động trên đoạn 4-5 ứng dưới giao

điểm của đường B^*C và đường đi qua A^* song song với các thanh 3-4 và $f-g$ (điểm B^* trên hình 19a).

- ♦ *Đ.a.h.* N_{e-b} (hình 19f): Từ mắt b (hình 19a) ta thấy:

$$d.a.h. N_{e-b} = d.a.h. N_{b-3}.$$

Thực hiện mặt cắt 2-2, khảo sát cân bằng của phần hệ bên trái, ta có thể vẽ *đ.a.h.* N_{e-b} theo *đ.a.h.* lực cắt trong hệ dầm đơn giản có gối trái là A , gối phải là gối giả tạo tại giao điểm D của thanh $h3$ với đường nối B^*C (vì có thể thay nửa bên phải của hệ bằng phản lực có đường tác dụng là B^*C) theo biểu thức:

$$d.a.h. N_{e-b} = \sqrt{2} (d.a.h. Q^d),$$

trong đó *đ.a.h.* Q^d là *đ.a.h.* lực cắt tại tiết diện thuộc đoạn có trục song song với các thanh $e-f$ và 2-3, trong hệ dầm đơn giản đặt trên các gối A và D .

- ♦ *Đ.a.h.* N_{3-h} (hình 19g): Có thể xác định N_{3-h} theo lực xô H trong vòm ba khớp A^*CB^* :

$$N_{3-h} \frac{\sqrt{2}}{2} = H, \quad \text{do đó:} \quad d.a.h. N_{3-h} = -\sqrt{2} (d.a.h. H).$$

Bài 20. Chỉ dẫn

1. **Chứng minh hệ là bất biến hình.** Điều kiện cần thỏa mãn với dầm bằng, hệ đủ liên kết. Xét điều kiện đủ bằng cách phát triển dầm miêng cứng, xuất phát từ trái đất. Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.
2. **Vẽ các biểu đồ mômen uốn, lực cắt**

Hệ đã cho là hệ có hệ thống truyền lực: hệ thống bên trên là dầm, truyền lực xuống kết cấu chịu lực chính bên dưới qua ba liên kết thanh: kết cấu chịu lực chính bên dưới là hệ ghép. Sơ đồ truyền lực và các biểu đồ nội lực tìm được như trên hình 20.1a,b.

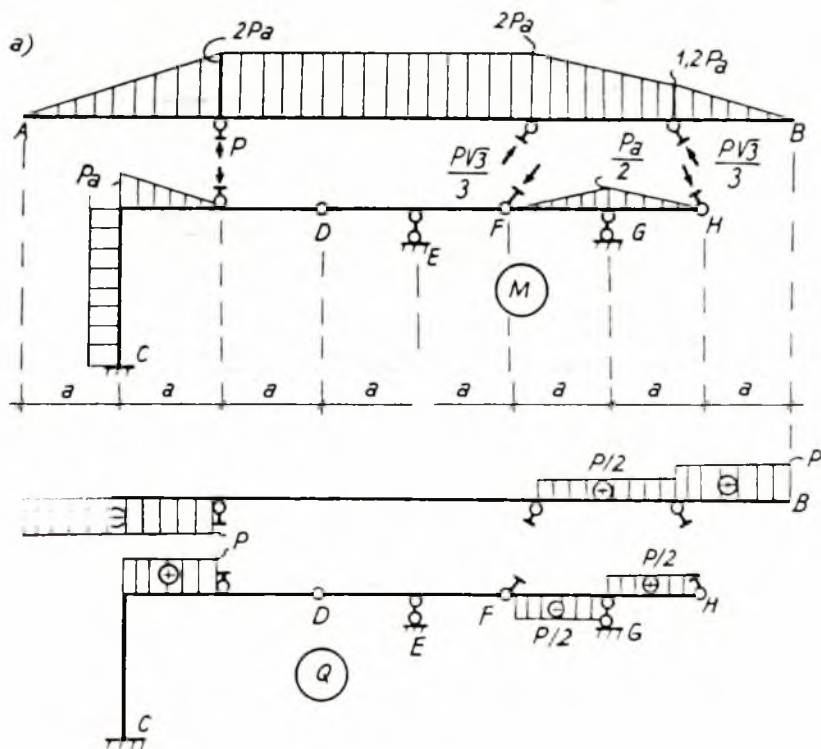
3. **Vẽ các đường ảnh hưởng**

- ♦ *Đ.a.h.* M_I và *đ.a.h.* Q_3 : Lực P di động trên dầm AB (hình 20.2a) sẽ truyền áp lực xuống kết cấu chịu lực chính qua hai mắt truyền lực: mắt 3 và mắt giả tạo G^* là giao điểm của hai thanh xiên tại F và H . Tiết diện I và 3 không thuộc phạm vi của dầm AB nên *đ.a.h.* nội lực tại các tiết diện này chỉ là một đoạn thẳng trên toàn chiều dài AB , do đó có thể xác định theo hai tung độ tương ứng với hai vị trí của lực P :

• Khi $P = l$ đặt tại 3: $M_1 = -a$; $Q_3^{tr} = 1$; $Q_3^{ph} = 0$.

• Khi $P = l$ đặt tại G^* : $M_1 = 0$; $Q_3^{tr} = 0$; $Q_3^{ph} = 0$.

Kết quả như trên hình 20.2b, c, d.



Hình 20.1

♦ Đ.a.h. M_2 : Tiết diện 2 thuộc dầm phụ AB nên có thể cô lập dầm AB để khảo sát. Cách vẽ đ.a.h. M_2 được trình bày trên sơ đồ hình 20.2e. Kết quả như trên hình 20.2f.

4. Vận dụng đường ảnh hưởng để kiểm tra các giá trị nội lực

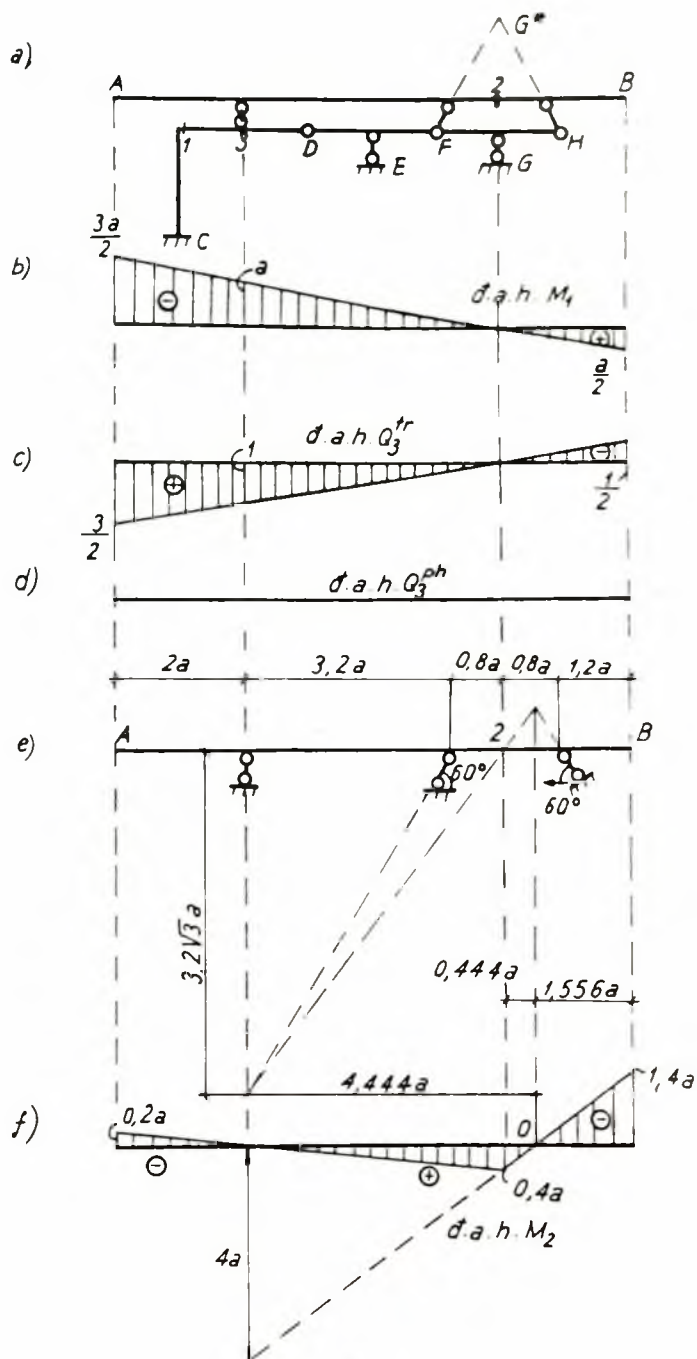
$$M_1 = P\left(-\frac{3a}{2}\right) + P\left(\frac{a}{2}\right) = -Pa;$$

$$Q_3^{tr} = P\left(\frac{3}{2}\right) + P\left(-\frac{1}{2}\right) = P;$$

$$Q_3^{ph} = P.0 + P.0 = 0;$$

$$M_2 = P(-0,25a) + P(-1,25a) = -1,5 Pa.$$

Phù hợp với kết quả trên các biểu đồ nội lực.



Hình 20.2

Bài 21. Chỉ dẫn

1. Khảo sát sự cấu tạo hình học (hình 21a). Điều kiện cân thỏa mãn với

dầu bằng, hệ đủ liên kết. Xét điều kiện đủ bằng cách phát triển dần miếng cứng, xuất phát từ trái đất. Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.

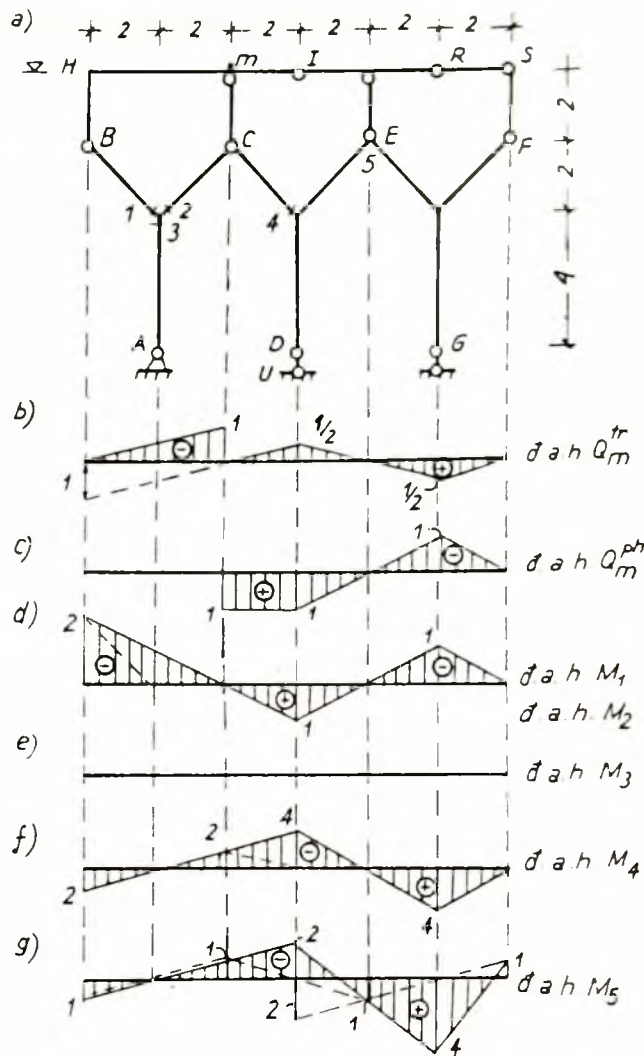
2. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ *Đ.a.h. lực cắt tại tiết diện m* : Tại m có liên kết thanh Cm nên cần phải vẽ hai đ.a.h. lực cắt:
- ❖ *Đ.a.h. lực cắt tại tiết diện bên trái liên kết thanh Cm* (hình 21b): Khi P di động trên HI , vẽ theo đ.a.h. lực cắt tại tiết diện trong nhịp của khung đơn giản có gối cố định B và gối di động Cm . Khi P di động trên IR và RS , áp dụng quy tắc vẽ đ.a.h. trong hệ ghép.
- ❖ *Đ.a.h. lực cắt tại tiết diện bên phải liên kết thanh Cm* (hình 21c): Khi P di động trên HI , vẽ theo đ.a.h. lực cắt tại tiết diện ở phần đầu thừa bên phải của dầm đơn giản. Khi P di động trên IR và RS , áp dụng quy tắc vẽ đ.a.h. trong hệ ghép.
- ♦ *Đ.a.h. mômen uốn tại các tiết diện 1, 2, 3, 4 và 5*. Các tiết diện này thuộc hệ chịu lực chính của hệ có hệ thống truyền lực, do đó ta cần thực



vẽ đ.a.h. với giả thiết lực P đặt trực tiếp trên hệ chịu lực chính.

- Giữ lại các tung độ đ.a.h. ứng dưới các mắt truyền lực và nối các tung độ đó với nhau bằng các đoạn thẳng. Cần chú ý là trong bài toán này hệ thống truyền lực là các hệ dầm đơn giản có đầu thừa (hệ III và IR) cho nên khi nối các tung độ ứng dưới các mắt truyền lực ta cần kéo dài mỗi đoạn thẳng nối đó cho tới hết phạm vi mỗi miếng cứng (HI và IR).
- ❖ *Đ.a.h. M_3* (hình 21e): vì P di động có phương thẳng đứng nên từ điều kiện cân bằng hình chiếu theo phương ngang của toàn hệ ta thấy thành phần ngang của phản lực tại A luôn luôn bằng không. Do đó, với mọi vị trí của lực P , mômen uốn tại tiết diện 3 luôn luôn bằng không và đ.a.h. trùng với đường chuẩn.
- ❖ *Đ.a.h. M_1 và đ.a.h. M_2* (hình 21d): vì M_3 luôn luôn bằng không nên từ điều kiện cân bằng nút ta có $M_1 = M_2$. Do đó chỉ cần vẽ đ.a.h. M_1 (hoặc đ.a.h. M_2) là đủ.
- *Khi P di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính*: vẽ theo đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện ở đầu thừa bên trái (đường đứt nét trên hình 21d).
- *Khi P di động trên hệ thống truyền lực*: Điều chỉnh lại đ.a.h. theo quy tắc đã nêu ở trên.



Hình 21

♦ Đ.a.h. M_4 (hình 21f):

• Khi P di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính:

◇ Trên $CDEGF$: Lúc này, bộ phận BAC không phản lực tại A và C phải có phương AC . Nhưng đứng nên thành phần ngang của phản lực tại A đó phản lực tại A và C chỉ có thể bằng không. Loại bỏ bộ phận BAC và vẽ đ.a.h. M_4 theo diện ở phần đầu thừa bên trái C (đường đi

◇ Trên BAC : Nối tung độ ứng dưới C với tung

- Khi P di động trên hệ thống truyền lực: Điều chỉnh lại đ.a.h. theo quy tắc đã nêu ở trên.

❖ Đ.a.h. M_5 (hình 21g):

- Khi P di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính:

◊ Trên $CDEGF$: Quan niệm hệ này làm việc như một hệ dầm có gối di động tại G và gối cố định là giao điểm của AC và DU . Vẽ đ.a.h. M_5 theo đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện ở trong nhịp hệ dầm nói trên (đường đứt nét trên hình 21g).

◊ Trên BAC : Nối tung độ ứng dưới C với tung độ bằng không ứng dưới A .

- Khi P di động trên hệ thống truyền lực: Điều chỉnh lại đ.a.h. theo quy tắc đã nêu ở trên.

Bài 22. Bài giải

 hệ là bất biến hình

 - Hệ nối với trái đất nên ta có điều kiện:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0.$$

Quan niệm hệ gồm năm miếng cứng (hình 22.1a): $ADFG$, $GHEB$, FI , IHK và LC được nối với nhau bởi hai thanh DE , KL ; bốn khớp tại F , I , G , H và nối với trái đất bằng năm liên kết tương đương loại một. Như vậy, $D = 5$; $T = 2$; $K = 4$; $H = 0$; $C = 5$, ta có:

$$n = 2 + 2.4 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Điều kiện cân thỏa mãn với dấu bằng, hệ đủ liên kết.

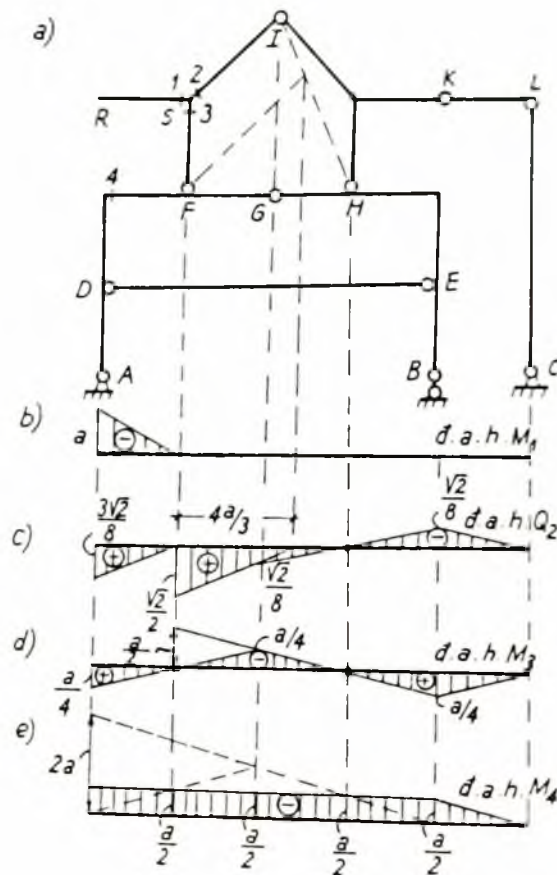
- ❖ Điều kiện đủ (hình 22.1a) - Trước tiên ta loại bỏ bộ đôi ($LK-LC$) ra khỏi hệ. Khi đó, hai thanh gãy khúc IF và IH giữ vai trò như bộ đôi nên được loại bỏ tiếp. Tính chất cấu tạo hình học của hệ không thay đổi, chỉ cần xét tiếp phần còn lại. Miếng cứng $ADFG$ nối với miếng cứng $BEHG$ bằng khớp G và thanh DE không đi qua khớp G , tạo thành miếng cứng $ADFGHEB$. Miếng cứng này được nối với trái đất bằng khớp A và liên kết thanh tại B không đi qua khớp A nên toàn bộ hệ là bất biến hình.

Kết luận: hệ bất biến hình, đủ liên kết.

2. Vẽ các biểu đồ mômen uốn, lực cắt

Ta nhận thấy hai thanh LK và LC là phần phụ (hình 22.1a), không chịu tải trọng nên không làm việc, có thể loại bỏ ra khỏi hệ. Dễ dàng nhận thấy thành phần ngang của phản lực tại A bằng không nên phần hệ còn

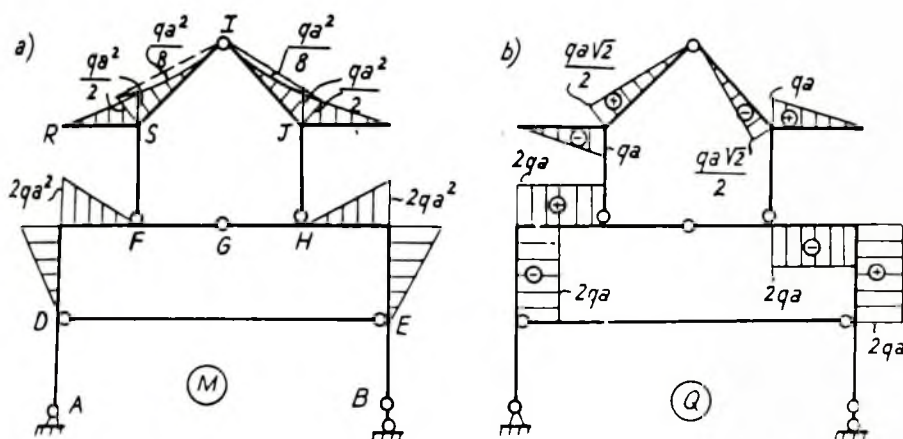
lại trở thành đối xứng và chịu tải trọng tác dụng đối xứng. Vận dụng tính chất đối xứng, tách riêng phần phụ là hệ ba khớp $RFIHK$ để thực hiện tính toán, tiếp đó tính hệ chính $ADFGHEB$ là hệ ba khớp có thanh cứng chịu các áp lực truyền từ hệ phụ xuống. Các biểu đồ mômen uốn và lực cắt tìm được như trên hình 22.2a, b.



Hình 22.1

3. Vẽ các đường ảnh hưởng

- ♦ $\text{đ.a.h. } M_1, \text{ đ.a.h. } Q_2, \text{ đ.a.h. } M_3$ (hình 22.1b, c, d): Các tiết diện 1, 2, 3 thuộc hệ phụ nên khi lực P di động trên $RSIJK$ các đ.a.h. này được vẽ theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba khớp FIH . Khi P di động trên KL , đ.a.h. là đường nối tung độ ứng dưới khớp K với tung độ bằng không ứng dưới L .



Hình 22.2

- ♦ *Đ.a.h. M_4* : Tiết diện 4 thuộc hệ chịu lực chính, lực P di động trên hệ phụ. Nếu xem hệ phụ như hệ thống truyền lực với các mắt truyền lực tại F và H (hình 22.1a) thì ta có thể áp dụng quy tắc vẽ đ.a.h. trong hệ có hệ thống truyền lực.

P di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính: Vẽ đ.a.h. M_4 theo đ.a.h. ng hệ ba khớp có thanh căng ta được đường đứt nét trên hình 22.1e.

- *Khi P di động trên hệ thống truyền lực*: Giữ lại các tung độ ứng dưới mắt truyền lực tại F và H . Trong phạm vi mỗi miếng cứng, đ.a.h. là một đoạn thẳng nên chỉ cần tìm thêm một tung độ ứng dưới khớp I là đủ để vẽ.

Đặt lực $P=1$ tại i ta có bài toán hệ đối xứng chịu lực đối xứng và dễ dàng tìm được $M_4 = -a/2$. Nối các tung độ liên tiếp ứng dưới F, I, H ta được đ.a.h. M_4 khi P di động từ R đến K .

Khi P di động trên KL , đ.a.h. là đường nối tung độ ứng dưới khớp K với tung độ bằng không ứng dưới L .

Kết quả như trên hình 22.1e.

4. Vận dụng đường ảnh hưởng để kiểm tra các giá trị mômen uốn

$$M_1 = q \left(-\frac{a^2}{2} \right) = -\frac{qa^2}{2};$$

$$M_3 = q \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a}{4} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{4} \right] = 0;$$

$$M_4 = q \left(-\frac{a}{2} \right) \cdot 4a = -2qa^2.$$

Các giá trị tìm được phù hợp với kết quả trên biểu đồ mômen uốn.

Mục lục

<i>Lời tựa</i>	3
<i>Chú thích</i>	4

Phần đề bài

<i>Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng</i>	5
<i>Chương 2. Xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động</i>	8
<i>Chương 3. Xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động</i>	22
<i>Bài tập lớn 1. Tính hệ ghép tĩnh định</i>	34
<i>Chương 4. Xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng dàn hồi tuyến tính</i>	37
<i>Một số bài trong các đề thi sau đại học</i>	45

Phần đáp số và bài giải

<i>Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng</i>	55
<i>Chương 2. Xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động</i>	60
<i>Chương 3. Xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động</i>	92
<i>Bài giải mẫu bài tập lớn 1. Tính hệ ghép tĩnh định</i>	143
<i>Chương 4. Xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng dàn hồi tuyến tính</i>	151
<i>Một số bài trong các đề thi sau đại học</i>	166

