PHẠM VĂN NHUẦN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC HỌA HÌNH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

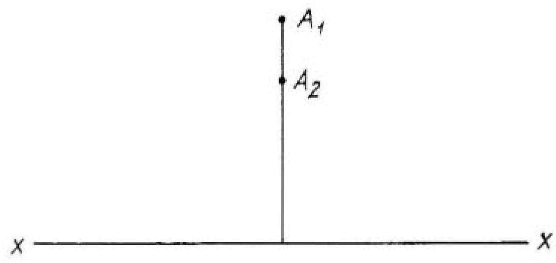
CÁCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC HỌA HÌNH

Trong mỗi bài toán, bước thứ nhất là phân tích bài toán, bước thứ hai là tìm cách dựng hình không gian để thỏa mãn yêu cầu của bài toán và bước cuối cùng là dùng hình học họa hình để thực hiện.

I. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

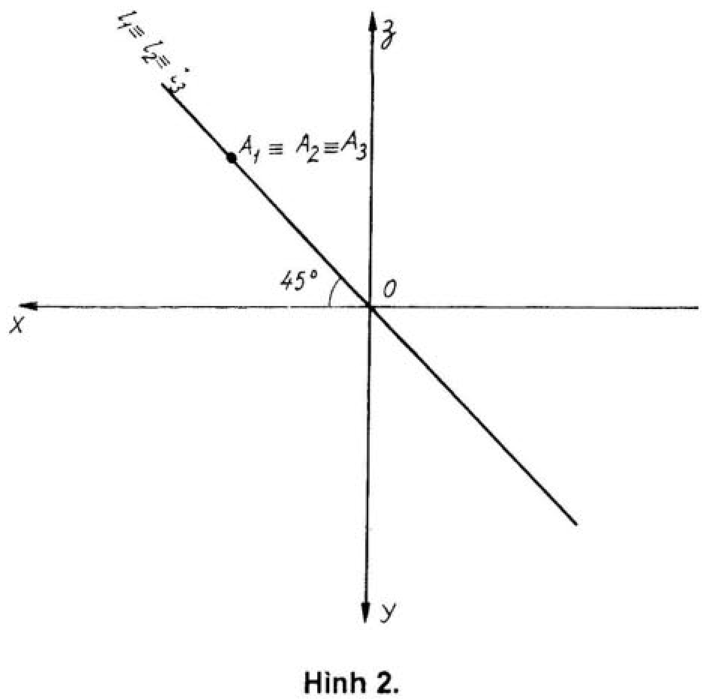
<u>**BÀI 1**</u>: Xét xem điểm A ở hình 1 thuộc góc tư nào?

Phân tích: Trong lý thuyết ta đã biết: điểm A thuộc *góc tư I* thì có A_1 ở trên trục xx và A_2 ở dưới trục xx, còn điểm A thuộc góc *tư II* thì A_1 và A_2 đều ở phía trên trục xx. Vậy điểm A ở hình 1 thuộc *góc tư II*. Đối lại với góc tư I, điểm A thuộc *góc tư III* thì A_2 ở phía trên và A_1 ở phía dưới trục xx, và ngược với góc tư II, điểm thuộc *góc tư IV* thì có hai hình chiếu A_1 và A_2 đều ở phía dưới trục xx. Vậy A thuộc góc tư II.



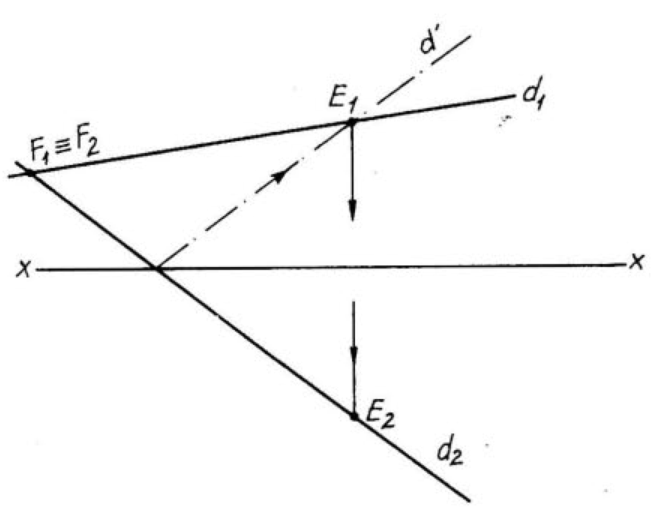
Hình 1.

<u>**BÀI 2**</u>: Trong không gian tìm quĩ tích các điểm có ba hình chiếu trùng nhau.



Hình 2.

Phân tích: Các điểm thuộc mặt phẳng phân giác II thì có hai hình chiếu trùng nhau. Muốn cho cả hình chiếu cạnh A_3 cũng trùng với $A_1 \equiv A_2$ thì ta phải vận dụng đến góc tám. Theo qui ước khi xoay mặt phẳng π_3 quanh trục z đến trùng với π_1 thì cũng tồn tại một mặt phẳng phân giác II khác đi qua trục z, chia đôi góc tám II và góc tám III, đồng thời chia đôi góc tám V và góc tám VIII. Giao tuyến l của hai mặt phẳng phân giác trên chính là quĩ tích các điểm có ba hình chiếu trùng nhau. Trên đồ thức đó là đường thẳng đi qua gốc O và làm với trục x một góc 45° như trên hình 2.

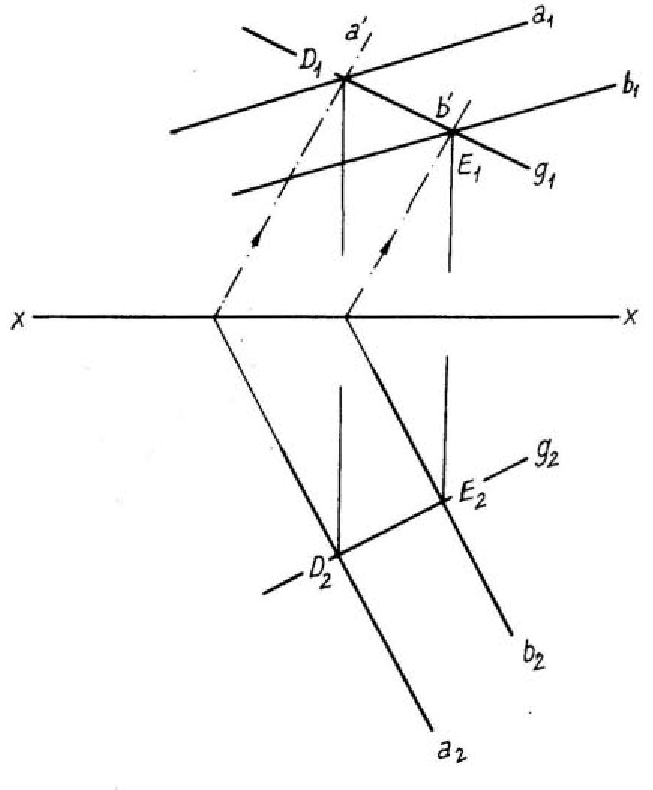


Hình 3.

<u>BÀI 3</u>: Tìm trên đường thẳng d một điểm E có hai hình chiếu đối xứng qua trục x, và một điểm F có hai hình chiếu trùng nhau.

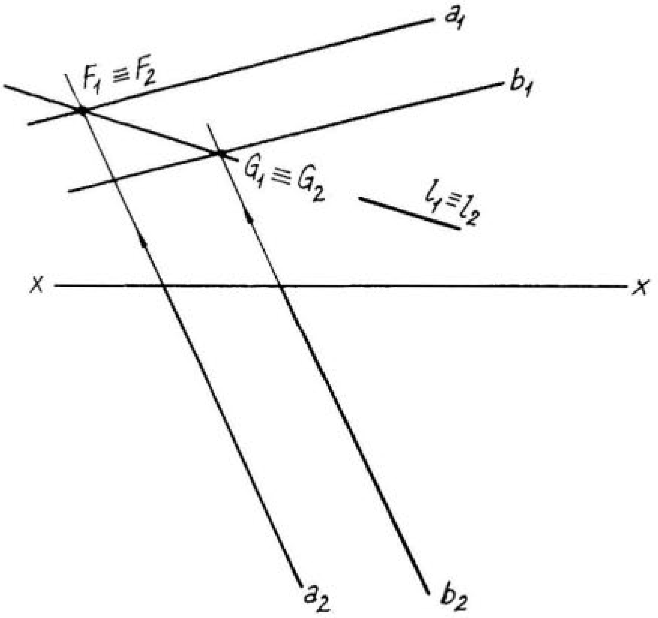
Phân tích: Ta phải tìm được E_1 trên d_1 và E_2 trên d_2 sao cho E_1 và E_2 đối xứng qua trục x. Rồi lại tìm điểm F_1 trên d_1 và F_2 trên d_2 sao cho $F_1 \equiv F_2$.

Giải toán: Để tìm E_1 ta phải kẻ d' đối xứng với d_2 qua trục x, d' cắt d_1 tại E_1, dóng xuống d_2 ta có E_2. Vì d' đối xứng với d_2 nên E_1 đối xứng với E_2. Thực chất E là giao điểm của d với mặt phân giác I. Để tìm F, chỉ việc kéo dài d_2 cho cắt d_1 thì đó là $F_1 \equiv F_2$, thực chất đây là giao điểm của d với mặt phân giác II.



Hình 4.

Biện luận: Nếu d' // d_1 thì không tồn tại điểm E có nghĩa là d // mặt phẳng phân giác I, và nếu không tìm được F (khi d_1 // d_2) thì tức là d//mặt phân giác II. Muốn tìm giao tuyến của một mặt phẳng α với mặt phẳng phân giác I hoặc II thì ta chỉ cần tìm các giao điểm của hai đường nào đó thuộc mặt phẳng α với mặt phân giác I rồi nối chúng lại thì đó là giao tuyến g của α với mặt phẳng phân giác I và tìm các giao điểm của hai đường thẳng đó với mặt phẳng phân giác II rồi nối lại thì đó là giao tuyến *l* của mặt phẳng α với mặt phẳng phân giác II. Nếu cho α cho bằng 2 vết thì giao điểm của 2 vết đó đã là một điểm của giao tuyến cần tìm.

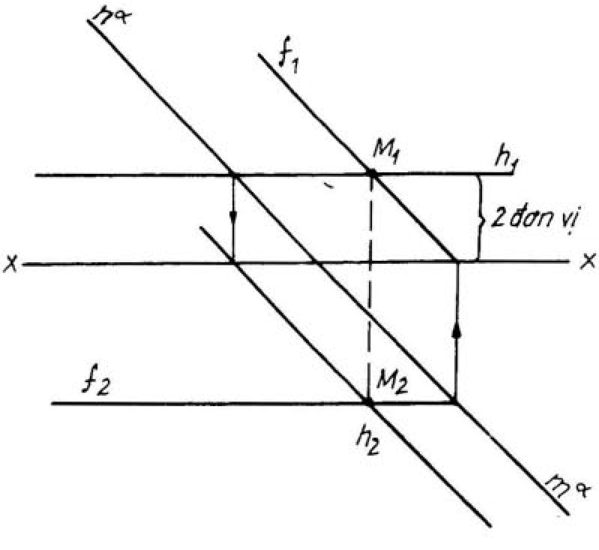


Hình 5.

BÀI 4: Tìm trên mặt phẳng α một điểm M có độ cao bằng 2 đơn vị và có độ xa bằng 2 đơn vị.

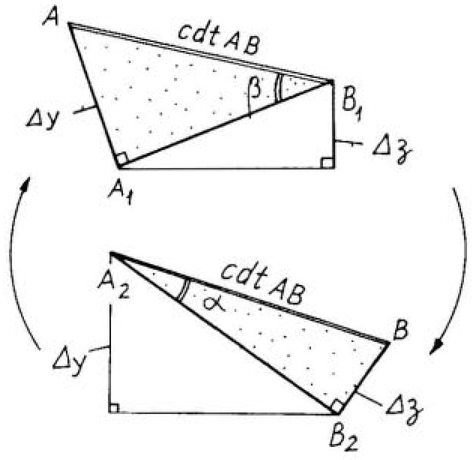
Phân tích: Trong mặt phẳng α tập hợp các điểm có độ cao đều bằng 2 đơn vị nằm trên một đường bằng h (có độ cao là 2 đơn vị) và tập hợp các điểm có độ xa đều bằng 3 đơn vị thì thuộc một đường mặt f (có độ xa bằng 3 đơn vị). Vậy giao điểm của h và f là điểm M có độ cao là 2 đơn vị và có độ xa bằng 3 đơn vị.

Dựng hình: Kẻ đường bằng h có độ cao là 2 đơn vị và một đường mặt f có độ xa là 3 đơn vị. Chú ý: $f_1//n^\alpha$ và $h_2//m^\alpha$. Giao điểm của h và f chính là điểm M cần tìm.

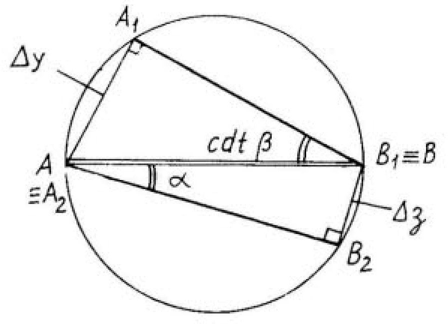


Hình 6.

BÀI 5: Kẻ một đoạn thẳng AB có chiều dài thật là 6 đơn vị làm với π_1 một góc β và làm với π_2 một góc α cho trước.



Hình 7.



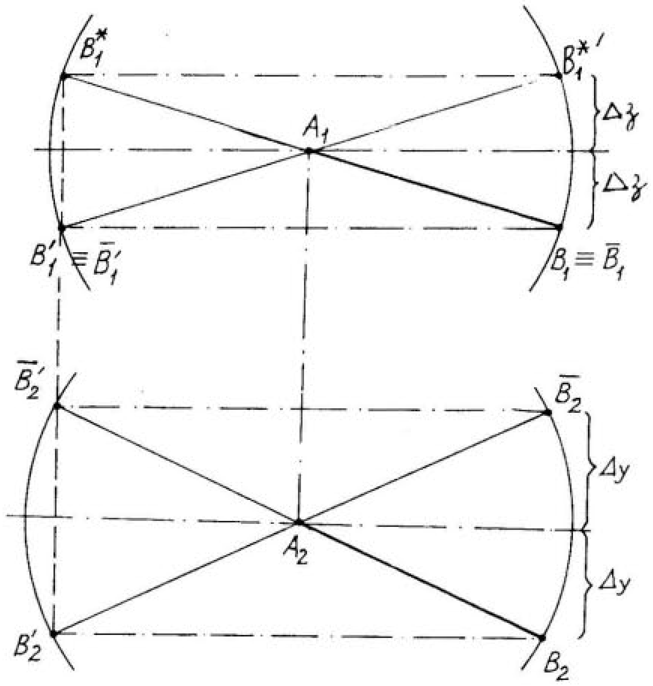
Hình 8.

Phân tích: Như ta đã học cách tìm độ lớn thật của một đoạn thẳng biết trước hai hình chiếu, thì ta thấy có quan hệ giữa chiều dài thật của AB, góc β, chiều dài A_1B_1 của hình chiếu đứng và Δy trong tam giác vuông AA_1B_1.

Tương tự dưới hình chiếu bằng ta có quan hệ giữa chiều dài thật của AB, góc α, chiều dài A_2B_2 và Δz.

Dựng hình: Lấy một đoạn AB tùy ý làm chiều dài thật, vạch đường tròn có đường kính là AB. Qua A kẻ một đường thẳng làm với AB một α cho trước. Đường này cắt đường tròn tại B_2.

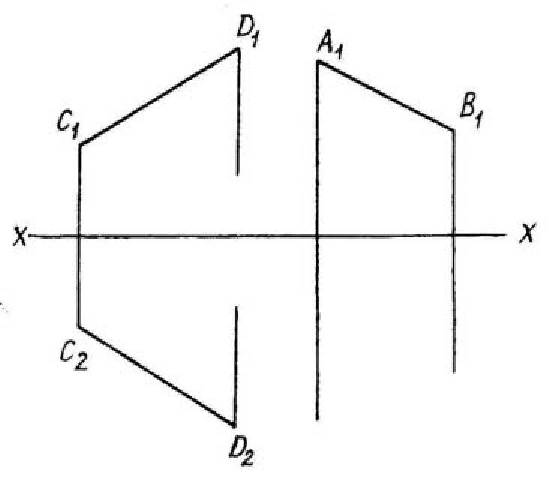
Ta có Δ vuông A_2B_2B tức là có chiều dài hình chiếu bằng A_2B_2 và có Δz của AB. Trong Δ vuông AB_1A_1, với góc $\hat{B}_1$ là β cho trước chúng ta có A_1B_1 là chiều dài hình chiếu đứng và Δy là hiệu độ xa của AB.



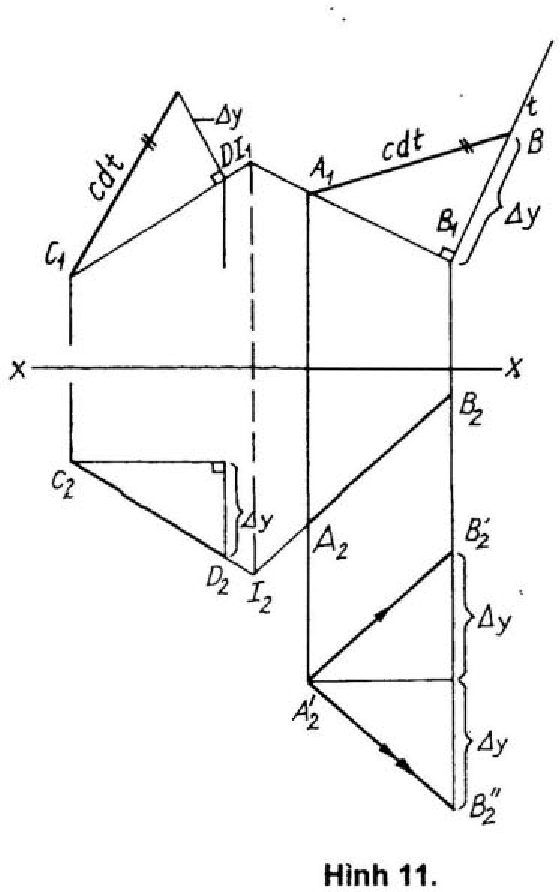
Hình 9.

Ta được $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, Δy và Δz. Chỉ cần dùng ba trong bốn đoạn thẳng này là dựng hình được. Qua A_2 kẻ một đường // trục x, rồi kẻ hai đường song song với nó sao cho khoảng cách là Δy. Với tâm là A_2 với bán kính bằng A_2B_2 lấy trên hình 8 ta vạch một cung tròn cắt chúng tại B_2 và B'_2, $\overline{B_2}$ và $\overline{B'_2}$. Lấy A_1 làm tâm và với bán kính bằng A_1B_1 (trên hình 8), ta vạch hai cung tròn là quĩ tích của B_1, $\overline{B_1}$, B_1 và $\overline{B_1}$. Lấy Δz ở hình 8 đưa lên hình chiếu đứng kẻ hai đường song song với trục x, ta có các điểm $B_1^{\bullet}$, $B_1^{\bullet\prime}$ khác nữa. Do tính chất đối xứng, nói chung có tám đoạn thẳng thỏa mãn điều kiện bài toán. Chúng thẳng hàng từng đôi một. Nếu ta dùng hai hình nón có góc đáy là α và β có chung đỉnh tại tâm một hình cầu tùy ý và hai đáy nón đều thuộc mặt cầu thì các đường sinh giao tuyến của hai nón là các nghiệm.

<u>BÀI 6</u>: Vẽ nốt hình chiếu bằng của đoạn AB, biết rằng AB và CD cùng thuộc một mặt phẳng và $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Hình 10.

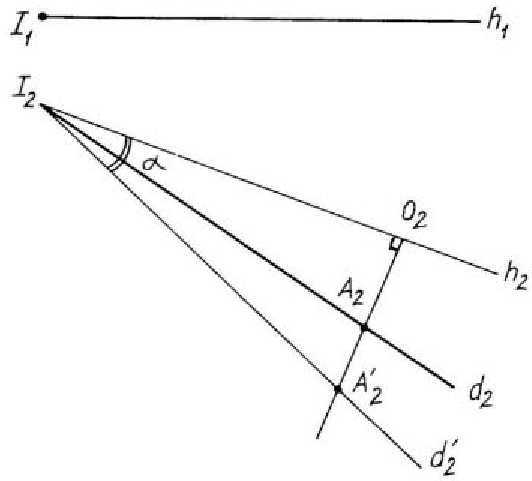


Hình 11.

Phân tích: Từ hai hình chiếu của CD ta tìm được độ dài thật của CD và cũng là của $\overline{AB}$ (theo đầu bài) bằng phương pháp dựng Δ vuông. Rồi kẻ một đoạn $B_1t \perp A_1B_1$. Lấy A_1 làm tâm và với bán kính bằng chiều dài thật của CD ta vạch một cung tròn cắt B_1t tại B, thì theo lý thuyết ở trên, B_1B là Δy. Dưới hình chiếu bằng trên đường dóng thẳng đứng qua B_1 ta đặt Δy vào vị trí tùy ý, ta có

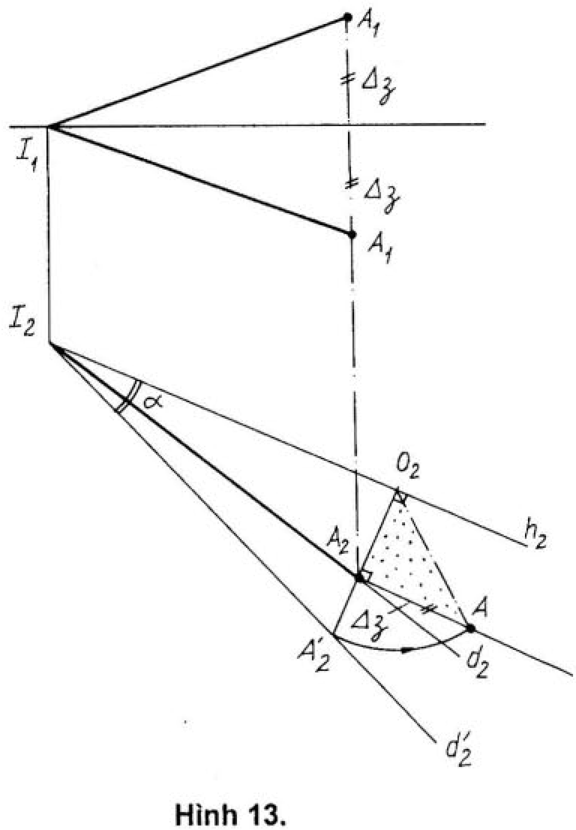
$A'_2B'_2$. Vậy A_1B_1 và $A'_2B'_2$ là hai hình chiếu của một đoạn thẳng nhận A_1B_1 là hình chiếu đứng và có độ dài thật bằng độ dài thật của AB. Nhưng, đoạn này phải cắt CD nữa. AB phải cắt CD tại điểm I. Qua I kẻ một đường thẳng $//A'_2B'_2$ sẽ cắt các đường dóng tại A_2B_2 cần tìm. Nếu ta lấy B''_2 xuống phía dưới của B'_2 thì ta còn một hướng của nghiệm thứ hai nữa.

BÀI 7: Hai đường thẳng h và d cắt nhau tại I và làm với nhau một góc α. Cho trước h_2, d_2 và $h_1//xx$. Hãy vẽ nốt d_1.



Hình 12.

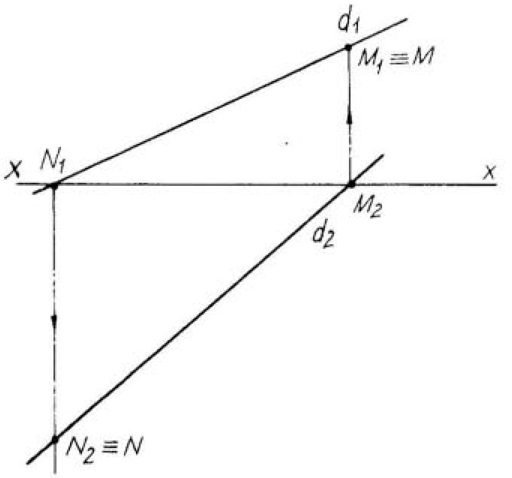
***Phân tích*:** Đầu bài cho h là một đường bằng nên ta lợi dụng phép xoay quanh đường bằng h để giải. Ta lấy một hình chiếu A_2 của điểm A thuộc đường thẳng d. Khi xoay A quanh h cho tới vị trí A' có cùng độ cao với h thì mặt phẳng (d x h) thành mặt phẳng bằng nên ta có ngay độ lớn thật của góc α. Đồng thời khi đó A_2 chạy trên một đường $\perp h_2$ và tới vị trí trí A'_2 sao cho góc $\widehat{A'_2I_2h_2} = \alpha$ $O_2A'_2$ chính là độ lớn thật của bán kính xoay khi A xoay quanh h. Từ A_2 kẻ một đường $//h_2$.



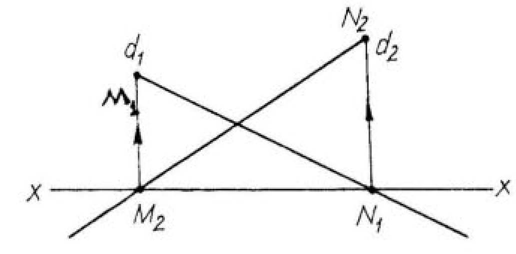
Hình 13.

Lấy O_2 làm tâm với khẩu độ compa bằng $\overline{O_2A'_2}$ ta vạch một cung tròn cắt đường thẳng vừa kẻ tại A thì trong Δ vuông O_2A_2A : $O_2A_2 = O_2A'_2$ độ lớn thật của bán kính xoay mà hình chiếu bằng là O_2A_2, và $\overline{A_2A}$ là hiệu độ cao Δz của tâm O và điểm A trước khi xoay. Với Δz có được, từ A_2 dóng thẳng lên ta có hai nghiệm A_1. Chỉ việc nối A_1I_1 thì đó là d_1 cần tìm. Bài toán có hai nghiệm vì có hai giá trị của Δz ngược dấu nhau. Tóm lại từ góc cho trước α suy ra được Δz của A và h nên suy ra được A_1 rồi suy ra d_1 (I_1A_1).

BÀI 8: Tìm hai vết M và N của một dường thẳng d.

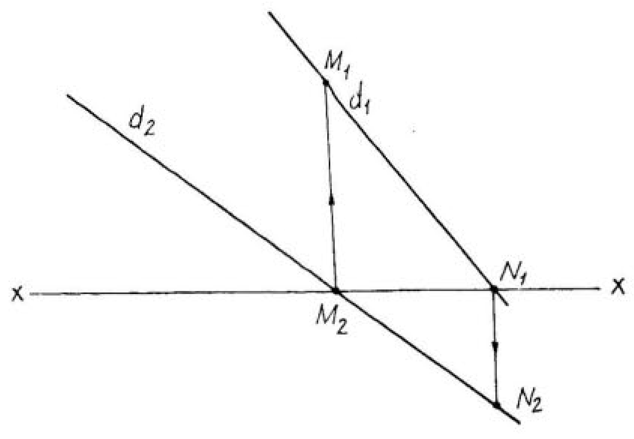


Hình 14.



Hình 15.

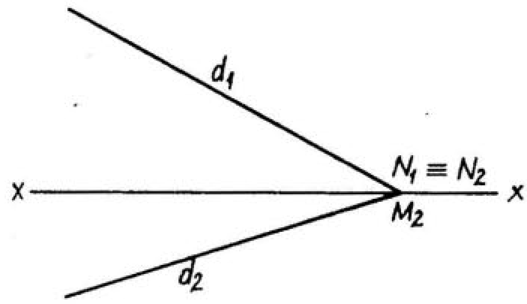
Phân tích: Vết đứng M là giao điểm của d với π_1 nên M có độ xa bằng không. Vậy trên d_2 chỉ có M_2 là có độ xa bằng không. Đây chính là hình chiếu bằng của vết đứng M_2, từ đó suy ra M_1 trên d_1. Tương tự d_1 cắt trục xx tại N_1 là hình đứng của vết bằng N, rồi từ đó suy ra N_2. Suy ra cách thao tác sau:



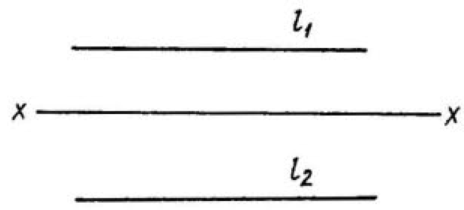
Hình 16.

* *Hình chiếu đứng của đường thẳng (d_1, l_1) cắt trục xx tại N_1 rồi dóng xuống d_2, l_2... có được N_2.*

* ***Hình chiếu bằng của đường thẳng (d_2, l_2...) cắt trục xx tại M_2 rồi suy ra M_1 trên d_1, l_1...***



Hình 17.



Hình 18.

Hình 15 và hình 16 minh họa cách tìm các vết M và N của đường thẳng theo cách thao tác như trên một cách nhanh chóng.

Theo cách trên d_1 cắt trục xx cho ta N_1. Nhưng d_2 cũng qua đó nên $N_1 \equiv N_2$. Còn d_2 cắt trục xx tại M_2 là chính là điểm N_2 nên ta có:

$$N_1 \equiv N_2 \equiv M_2 \equiv M_1.$$

Vậy hai vết M và N của đường thẳng trùng nhau tại một điểm. Đó chính là giao điểm của đường thẳng d với trục xx (hình 17).

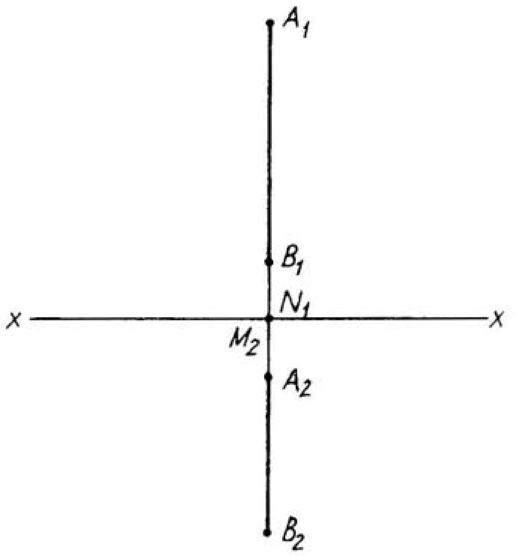
Trên hình 18, chúng ta không thể tìm được vết đứng M cũng như vết bằng N của đường thẳng *l*. Vậy đường thẳng *l* // trục xx, tức là // với π_1 và // π_2.

<u>BÀI 9</u>: Không dùng hình chiếu cạnh, hãy tìm hai vết M và N của đường cạnh AB

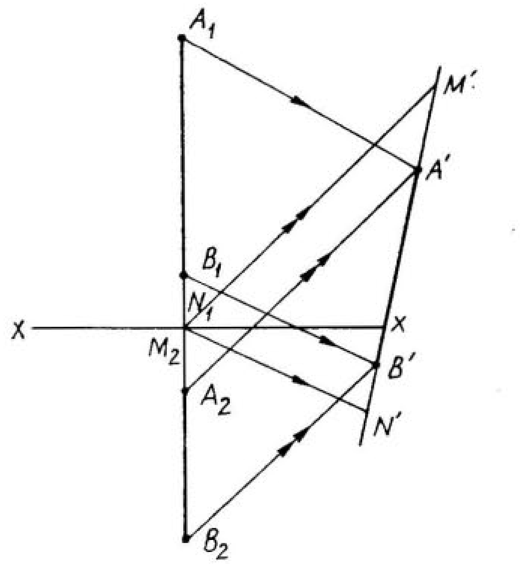
Phân tích: A_1B_1 là d_1 trên bài 7, A_2B_2 là d_2.

Áp dụng cách dựng hình để tìm vết N ta kéo dài A_1B_1 (tức d_1) cắt trục xx tại N_1, nhưng không thể dóng xuống d_2 (tức A_2B_2) để tìm N_2 được mà phải tìm một điểm N_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1N_1} = \frac{A_2B_2}{B_2N_2}$. Đã có A_1, B_1, N_1, A_2, B_2 rồi, vậy ta sẽ dùng tỷ số để xác định nốt N_2. Tương tự ta kéo dài A_2B_2 (tức d_2) thì cắt xx tại M_2, còn M_1 được suy ra theo tỷ số $\frac{B_2A_2}{A_2M_2} = \frac{B_1A_1}{A_1M_1}$, từ đó suy ra M_1 như sau:

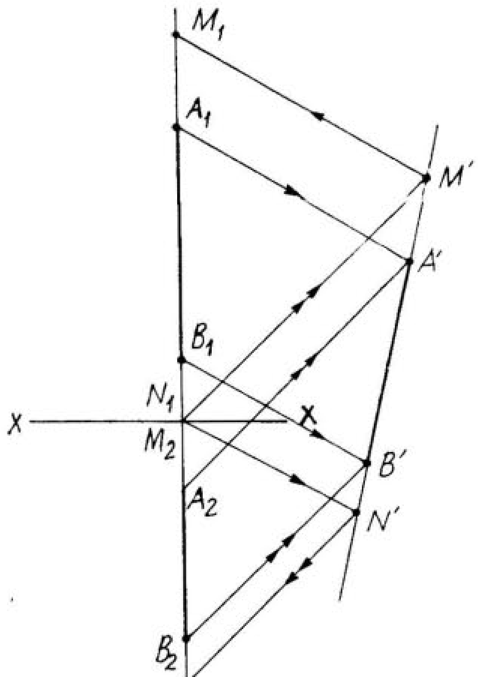
Qua $A_1B_1N_1$ kẻ ba đường thẳng song song theo một phương tùy ý. Các tia qua $A_2B_2M_2$ cũng song song nhau theo một phương khác. Tia qua A_1 và tia qua A_2 cắt nhau tại điểm A'. Các tia qua B_1 và B_2 cắt nhau tại B'. Ta nối đường thẳng A'B'. Vì A, B, M và N thẳng hàng vì cùng thuộc đường cạnh, nên tia qua M_2 (// A_2A') sẽ cắt A' B' tại M'. Rồi từ M' kẻ song song với $A'A_1$ ta có M_1. Và từ N' kẻ tia // B_2B' ta có N_2 trên A_2B_2. Theo Talét các tỷ số được thỏa mãn.



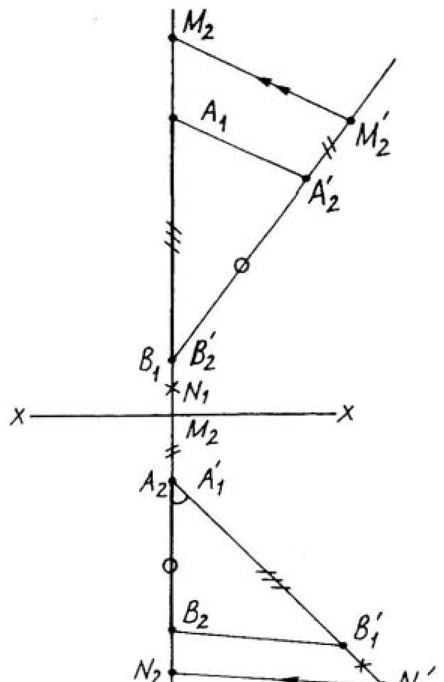
Hình 19.



Hình 20.



Hình 21.



Hình 22.

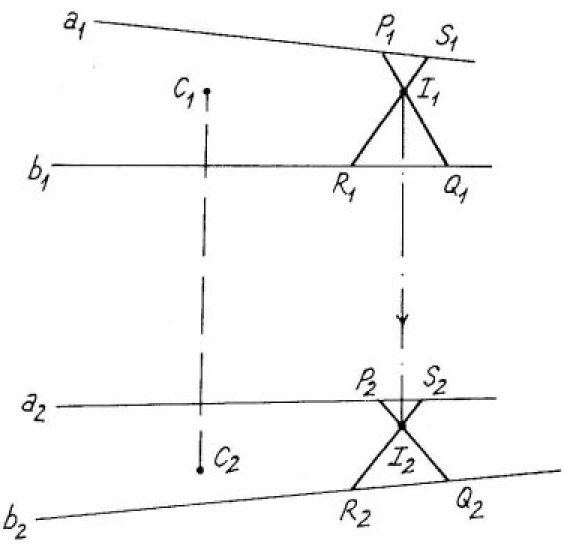
Vậy (M_1, M_2) là vết đứng của AB và (N_1, N_2) là vết bằng của AB. Thực chất đây là phép chiếu xiên theo phương tùy ý lên mặt phẳng phân giác II.

Ta có thể giải bằng cách đưa các tỷ số đã biết vào. Đã có $A_1B_1N_1$ thì N_2 phải thỏa mãn $\frac{A_1B_1}{B_1N_1} = \frac{A_2B_2}{B_2N_2}$. Để các tỷ số bằng nhau ta làm như sau:

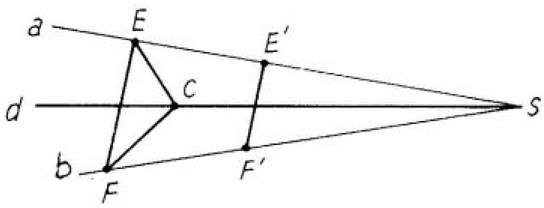
Qua A_2 kẻ một tia tùy ý rồi trên đó đặt các đoạn A_1B_1 và B_1N_1 ($A'_1B'_1 = A_1B_1$; $B'_1N'_1 = B_1N_1$). Nối B_2 với B'_1, rồi từ N'_1 kẻ // $B_2B'_1$ ta có được N_2 trên A_2B_2 kéo dài.

Trên hình chiếu đứng ta làm tương tự. Qua B_1 kẻ một tia bất kỳ và đặt lên đó các đoạn $B'A'_2 = B_2A_2$ và $A'_2M'_2 = A_2M_2$. Nối $A_1A'_2$, rồi từ M'_2 kẻ // $A_1A'_2$ cắt A_1B_1 kéo dài tại M_1 và ta cũng có kết quả như trên.

BÀI 10: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ở ngoài bản vẽ. Qua điểm C cho trước hãy kẻ một đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường a và b.



Hình 23.



Hình 24.

Phân tích: Đầu tiên phải kiểm tra xem a và b có cắt nhau không. Nếu chúng cắt nhau thì chúng xác định một mặt phẳng. Vậy nếu ta kẻ hai đoạn thẳng PQ và RS tựa lên hai đường a và b thì PQ và RS phải cắt nhau tại I. Như vậy a, b và d tạo thành một hình chóp.

Cách giải: Xét trong không gian một hình chóp đỉnh S, các cạnh là a, b và d. Trên a lấy một điểm E, trên b lấy một điểm F thì EFC là một thiết diện của chóp. Trên a lại lấy E', trên b lại lấy F'. Rồi qua E' kẻ // EC và qua F' kẻ // FC thì chúng phải cắt nhau tại C' thuộc đường d. vì đây là hai thiết diện song song nên đồng dạng. Bây giờ ta chỉ việc thực hiện trên đồ thức để có điểm C'. Nối C với C' thì đó là d cần tìm.

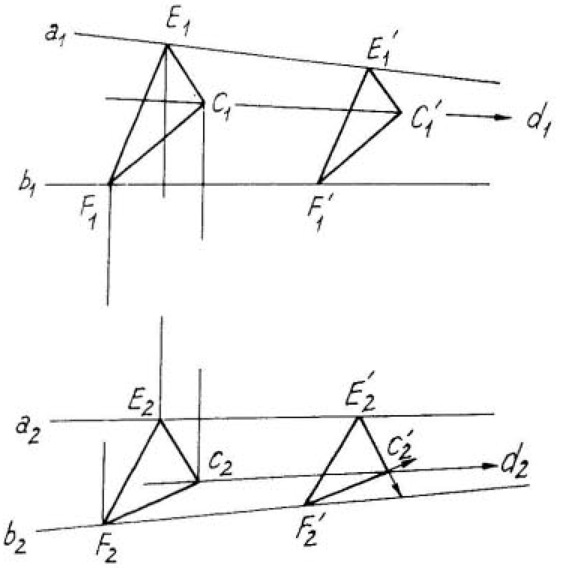
<u>BÀI 11</u>: Cho các hình chiếu a_1, b_1, b_2, M_2, biết M thuộc đường thẳng a. Vẽ nốt a_2 để cho hai đường thẳng a và b cắt nhau (hình 26).

Phân tích: Theo lý thuyết đã học thì hai đường thẳng a và b cắt nhau thì trên đồ thức ta phải có:

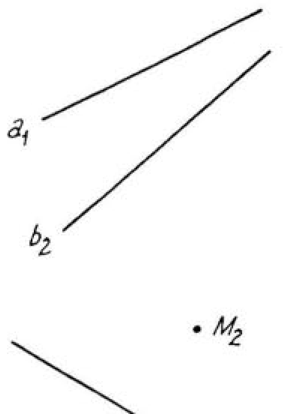
$$a_1 \times b_1 = I_1$$

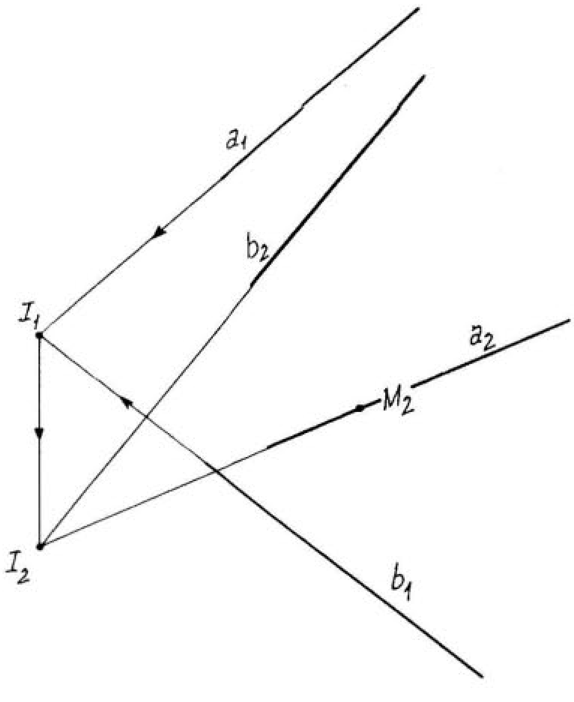
$$a_2 \times b_2 = I_2$$

Giải: Ta có a_1 cắt b_1 tại I_1, rồi dóng xuống b_2 ta có I_2 (I là giao điểm). Để thỏa mãn điều kiện trên thì A_2 phải qua I_2 và qua M_2. Vậy đường thẳng I_2M_2 là a_2 cần tìm.



Hình 25.

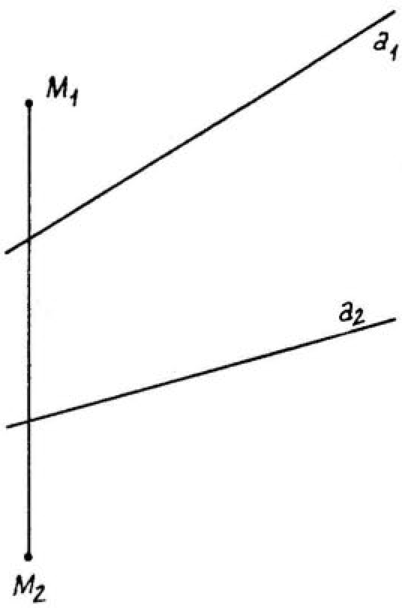




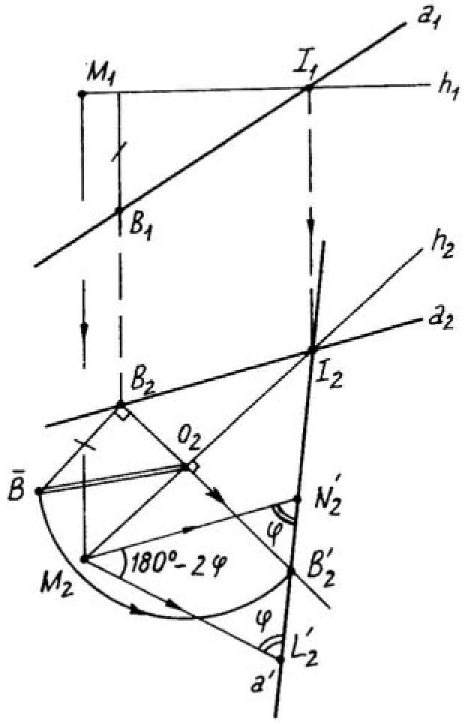
Hình 26.

Hình 27

BÀI 12: Cho a_1 và a_2 của đường thẳng a, và M_1 và M_2 của điểm M. Qua M kẻ một đường thẳng b cắt a dưới một góc φ cho trước (hình 28).



Hình 28.



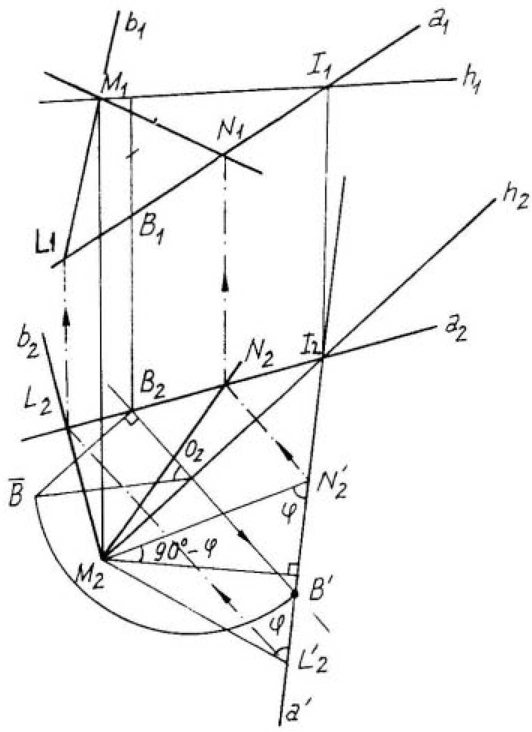
Hình 29.

Phân tích: Ta phải biến đổi hình chiếu để mặt phẳng (M, a) thành mặt phẳng bằng rồi mới có thể kẻ được đường thẳng b qua M và cắt a theo một góc φ cho trước.

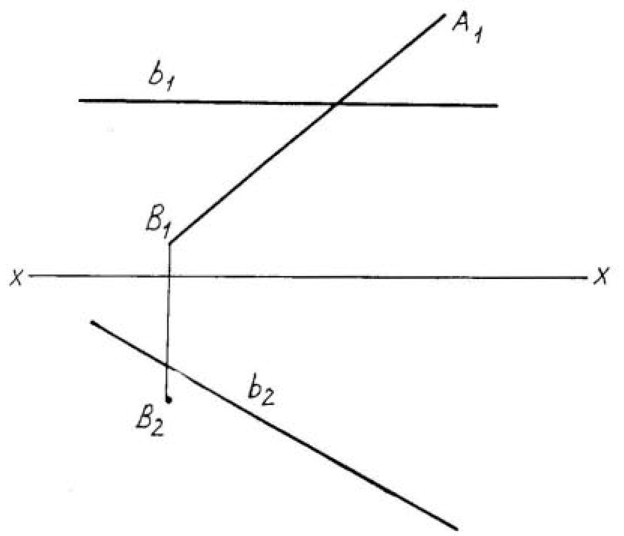
Giải: Dùng xoay quanh một dường bằng h của mặt phẳng (M, a) để biến mặt phẳng đó thành mặt bằng. Trước tiên ta kẻ một đường bằng h qua M và cắt a tại I.

Bây giờ ta lấy một điểm B trên dường thẳng a, rồi ta xoay B quanh đường bằng h tới vị trí mới B' có cùng độ cao với h thì B' và h tạo thành mặt bằng. Khi xoay thì B_2 tới B'_2 theo một đường thẳng qua B_2 và vuông góc với h_2 (lý thuyết đã học). Bây giờ ta tìm độ lớn thật của bán kính xoay OB, bằng phương pháp tam giác. Đó là đoạn $O_2\overline{B}$. Các điểm M, I trên trục xoay h không đổi vị trí, nên a_2 (B_2I_2) thành $B'I_2$ tức là a'. Từ M_2 ta kẻ $M_2N'_2$ và $M_2L'_2$ làm với a' một góc φ cho trước. Dóng về hình chiếu bằng ta có L_2 và N_2, dóng lên hình chiếu đứng ta có L_1 và M_1. L_1M_1 là b_1, L_2M_2 là b_2 của đường thẳng b cần tìm. Kết quả thể hiện trên hình 30. Một nghiệm nữa là N_1M_1 và N_2M_2.

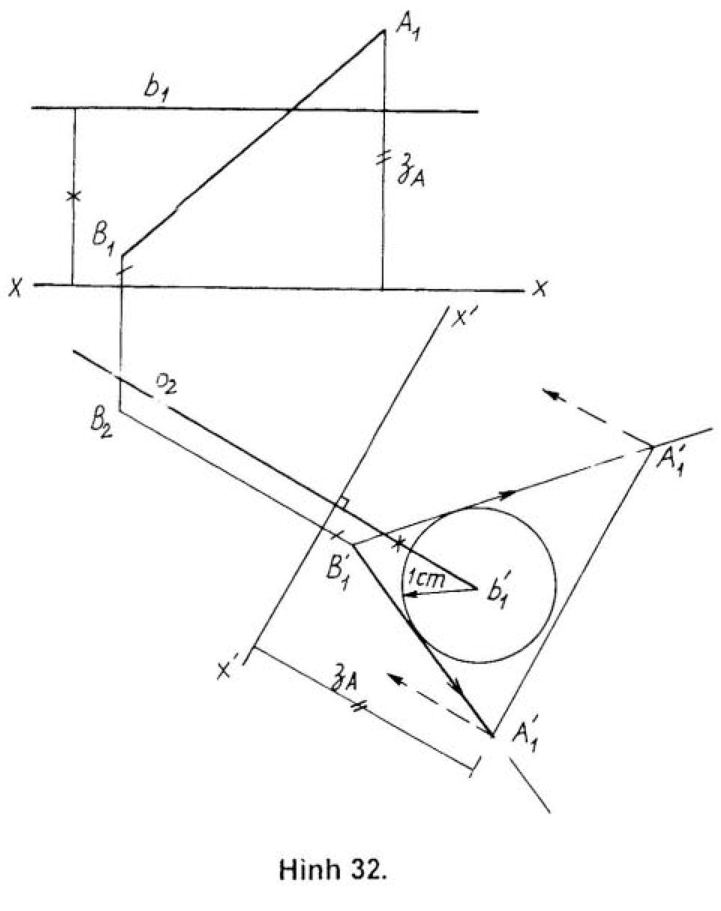
BÀI 13: Cho đường bằng b, một điểm B (B_1 và B_2) và hình chiếu đứng A_1 của điểm A. Hãy xác định nốt A_2 để khoảng cách giữa b và AB là 1 cm (hình 31).



Hình 30.

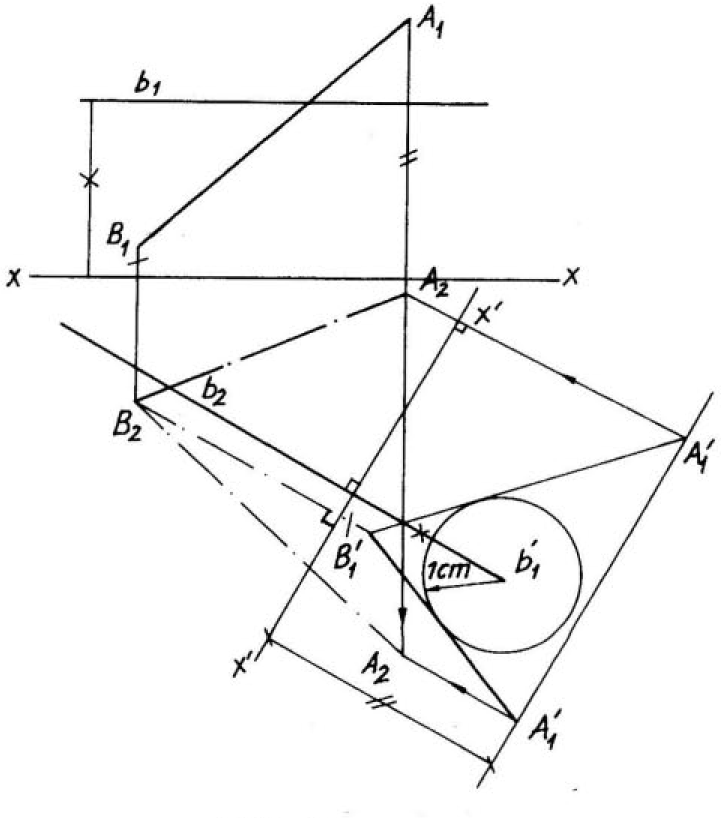


Hình 31.



Hình 32.

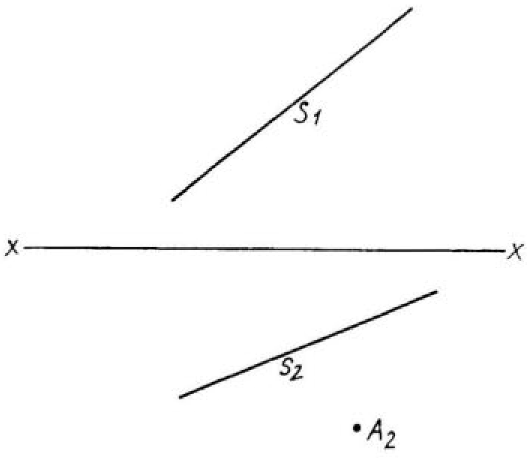
Phân tích: Khoảng cách giữa b và AB chính là đường vuông góc chung. Ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng để trên π'_1 đường thẳng b thành chiếu đứng b'_1 (suy biến thành một điểm), khi đó khoảng cách từ điểm b'_1 này đến $A'_1B'_1$ sẽ đúng là 1 cm. Từ b'_1 làm tâm, vẽ một đường tròn bán kính là 1 cm, rồi từ B'_1 kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn. A'_1 phải nằm trên tiếp tuyến và phải có độ cao mới bằng độ cao cũ của A_1. Vậy kẻ một đường d // xx' và cách xx' một đoạn bằng z_A. Đường thẳng d sẽ cắt hai tiếp tuyến tại hai điểm A'_1 nếu B'_1 ở ngoài đường tròn trên. Nếu B'_1 ở trên đường tròn thì có một nghiệm A'_1. Còn nếu B'_1 ở trong đường tròn thì không có nghiệm (hình 32). Đưa về hình chiếu bằng và hình chiếu đứng thì xem cách dóng vẽ ở hình 33. Có hai đáp số A_2B_2.



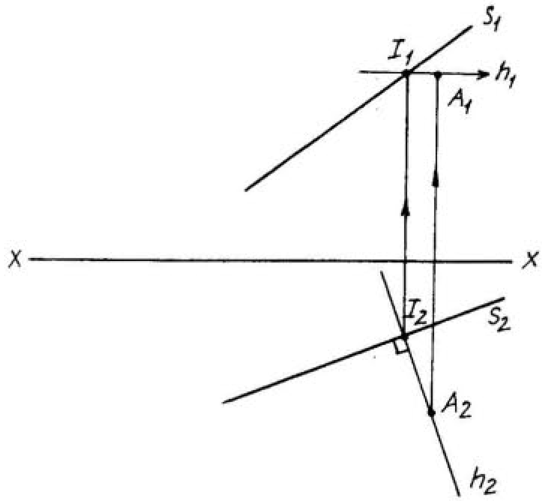
Hình 33.

BÀI 14: Mặt phẳng α cho bởi đường dốc nhất s đối với π_2. A_2 là hình chiếu bằng của điểm A thuộc mặt phẳng α. Xác định nốt A_1 của điểm A.

Phân tích: Để điểm A thuộc mặt phẳng α thì A phải thuộc một đường thẳng của α. Sử dụng tính chất của đường dốc nhất đối với π_2 là nó $\perp$ mọi đường bằng của mặt phẳng, nên qua A_2 chỉ có thể kẻ $h_2 \perp s_2$ và giao điểm là I_2. Dóng lên ta có I_1 trên s_1. Qua I_1 vẽ hình chiếu đứng h_1 của đường bằng h. Từ A_2 dóng lên h_1 ta có được A_1 cần tìm.

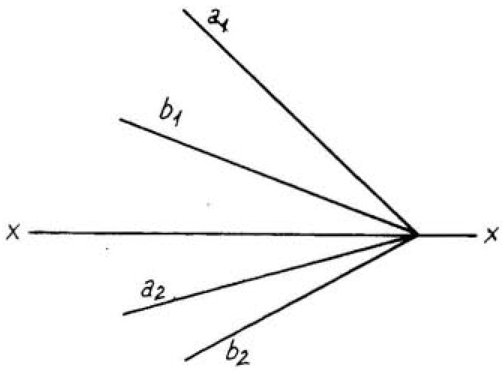


Hình 34.



Hình 35

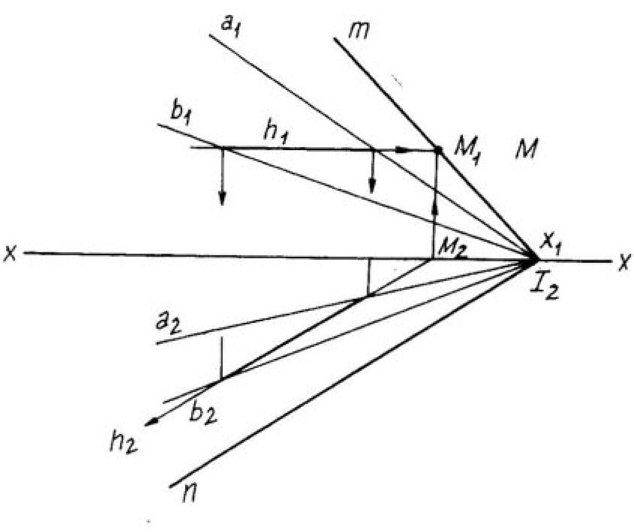
<u>BÀI 15</u>: Tìm hai vết của mặt phẳng được xác định bởi hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm trên trục xx (h.36).



Hình 36.

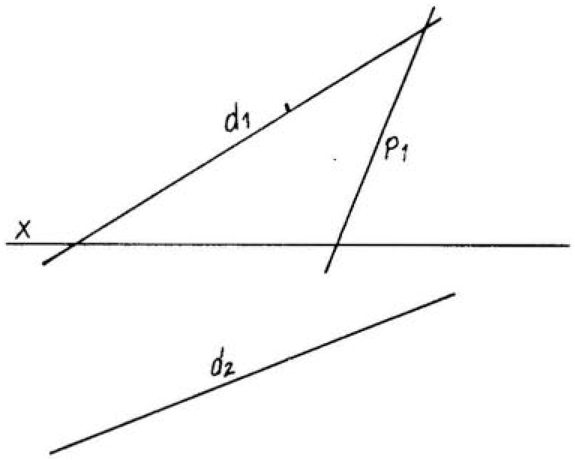
***Phân tích*:** Một mặt phẳng thông thường chỉ có chung với trục xx một điểm: đó là giao điểm của hai vết m và n của mặt phẳng đó. Ở đây hai đường thẳng a và b cắt nhau tại I thuộc trục xx, vậy I là giao điểm của hai vết m và n của mặt phẳng.

Giải: Vạch một đường bằng h trong mặt phẳng (a x b). Ta suy ra h_2. Qua I kẻ n // h_2. Tiếp theo tìm vết đứng M của đường bằng h. Nối I_1 M chính là vết đứng m của mặt phẳng (hình 37).

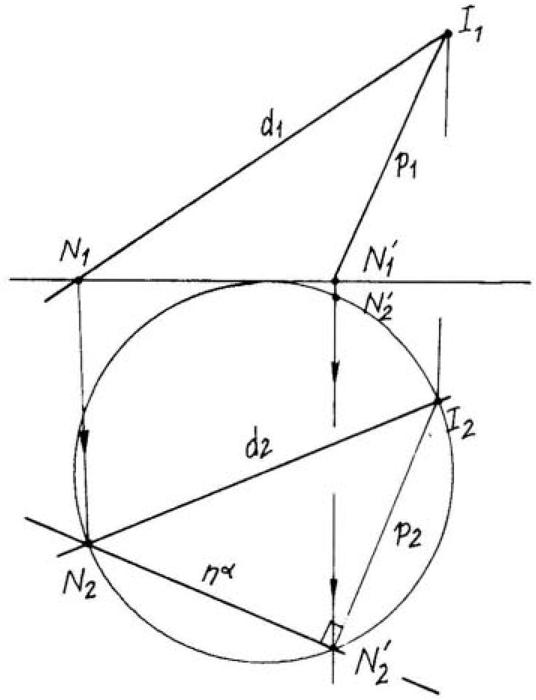


Hình 37.

BÀI 16: Tìm hai vết của mặt phẳng α, biết một đường thẳng d của mặt phẳng đó và biết hình chiếu đứng p_1 của đường dốc nhất của mặt phẳng α đối với π_2.



Hình 38.



Hình 39

Phân tích:

a. Hai đường thẳng d và p cắt nhau tại I, nên hình chiếu bằng p_2 phải đi qua I_2.

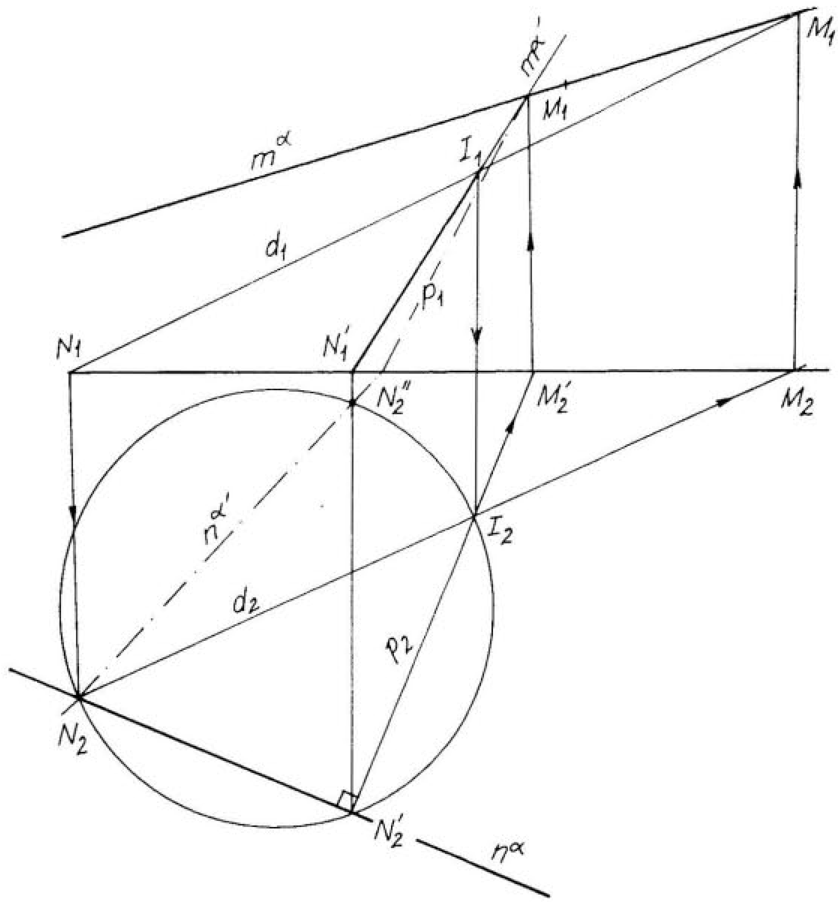
b. Tính chất của đường dốc nhất cho ta biết rằng p_2 phải vuông góc với vết bằng n^α của mặt phẳng.

c. Ta còn biết vết bằng n^α phải đi qua vết bằng N của d.

Kết luận: n^α phải qua N_2 và n^α phải vuông góc với p_2 đi qua I_2. Muốn vậy vẽ một đường tròn đường kính N_2I_2. Từ N'_1 của p_1 dóng thẳng xuống cắt đường tròn tại N'_2 là vết bằng của p. $N_2N'_2$ là vết bằng n^α của mặt phẳng, $I_2N'_2$ là p_2.

Để tìm vết đứng m^α của mặt phẳng ta tìm 2 vết đứng M và M' của d và p, sau nối MM' ta có được m^α. Còn một nghiệm $n^{\alpha'}$ qua N''_2 (hình 40).

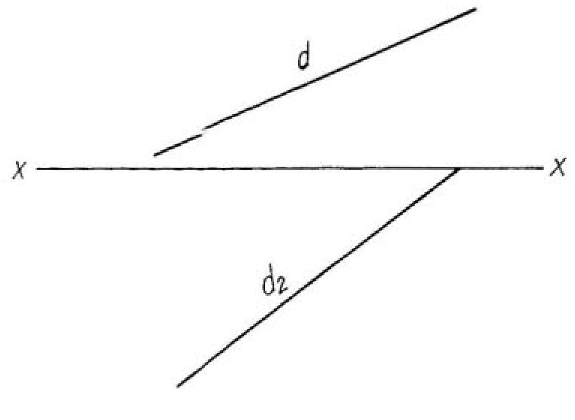
BÀI 17: Cho một đường thẳng d. Qua d hãy lập một mặt phẳng α có hai vết m^α và n^α đối xứng qua trục x, mà một mặt phẳng β có hai vết n^β và m^β trùng nhau. Có nhận xét gì về vị trí của các mặt phẳng đó (hình 41).



Hình 40.

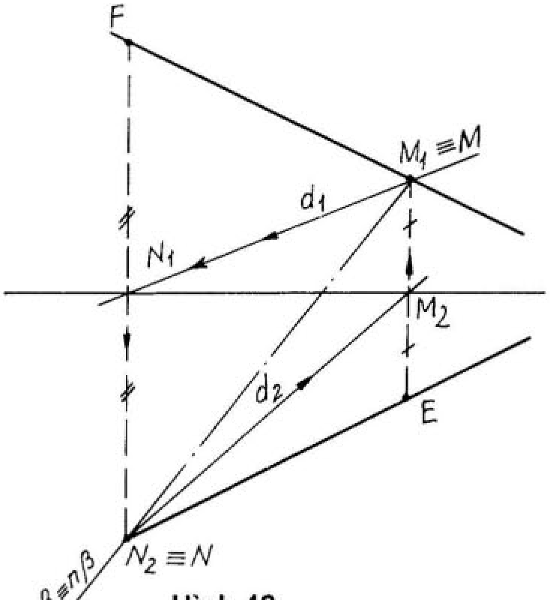
Phân tích: a) Qua d có vô số mặt phẳng.

b) Mặt phẳng qua d thì vết m^α phải qua vết M của d và vết n^α phải qua vết N của d.

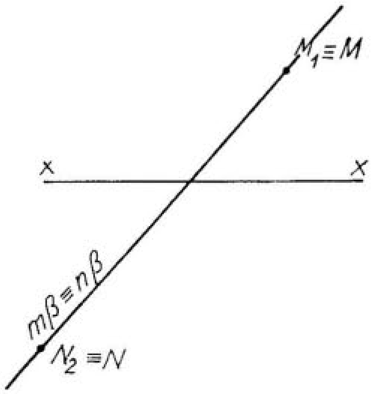


Hình 41.

c) Vì m^α và n^α đối xứng qua trục xx nên nếu m^α qua M thì n^α phải qua điểm E là điểm đối xứng của M qua trục xx, và nếu n^α qua N thì m^α cũng phải qua F là điểm đối xứng của N qua trục xx. Nối FM là m^α và EN là n^α. Đối với mặt phẳng β thì m^β qua vết M thì n^β cũng qua đó và n^β qua N thì m^β cũng qua N. Vậy chỉ việc nối M với N (tức M_1 với N_2) thì đó là cả vết đứng m^β và vết bằng n^β của mặt phẳng β (hình 43).



Hình 42.



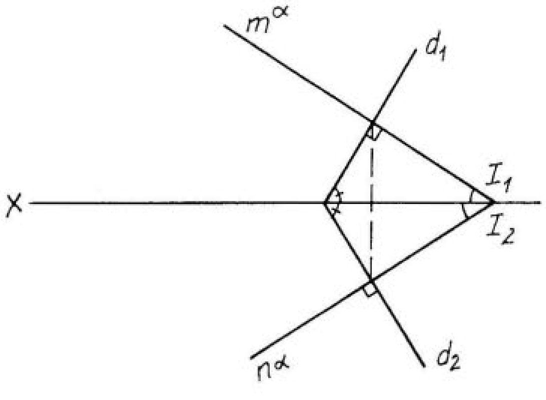
Hình 43.

Nhận xét về tư thế của mặt phẳng α và mặt phẳng β:

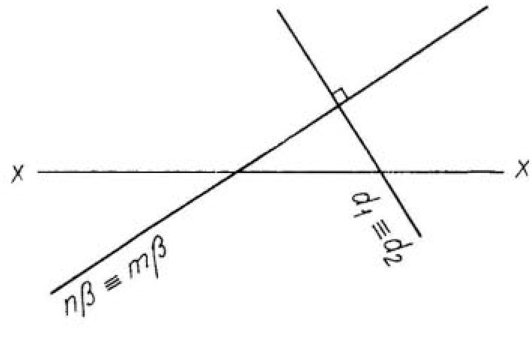
1. Mặt phẳng α có hai vết đối xứng qua trục x là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng phân giác I.

2. Mặt phẳng β có hai vết trùng nhau là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng phân giác II.

Thật vậy bây giờ ta vẽ hai vết m^α và n^α đối xứng qua trục x. Rồi ta vẽ hai hình chiếu d_1 và d_2 của một đường thẳng d và d_1 và d_2 đối xứng qua trục x và $d_1 \perp m^\alpha$, $d_2 \perp n^\alpha$.



Hình 44.



Hình 45

Đây là một đường thẳng d của mặt phẳng phân giác I. Theo định lý đường thẳng $\perp$ mặt phẳng:

$$d_1 \perp m^\alpha$$

$$d_2 \perp n^\alpha$$

Vậy mặt phẳng $\alpha \perp d$ của mặt phẳng phân giác I, nên mặt phẳng α vuông góc với mặt phẳng phân giác I.

Với mặt phẳng β có hai vết trùng nhau ($m^\beta \equiv n^\beta$), ta kẻ l_1 và l_2 trùng nhau và $\perp$ $n^\beta \equiv m^\beta$.

Theo định lý đã học $d_1 \equiv d_2$ thì d thuộc mặt phẳng phân giác II. Mà $m^\beta \perp d_1$ và $n^\beta \perp d_2$, vậy mặt phẳng β vuông góc với d của mặt phẳng phân giác II, do đó mặt phẳng $\beta \perp$ với mặt phẳng phân giác II.

<u>BÀI 18</u>: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng trong các trường hợp sau:

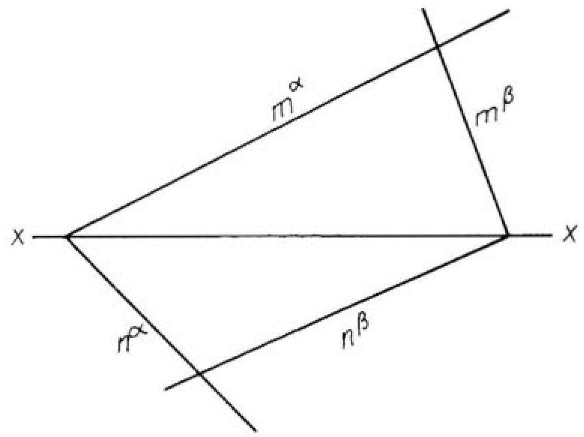
a) Hai mặt phẳng đều cho bằng các vết (hình 46).

***Phân tích*:** Giao tuyến của hai mặt phẳng là một đường thẳng. Vậy cần phải *tìm được hai điểm chung* của hai mặt phẳng rồi nối hai điểm đó lại.

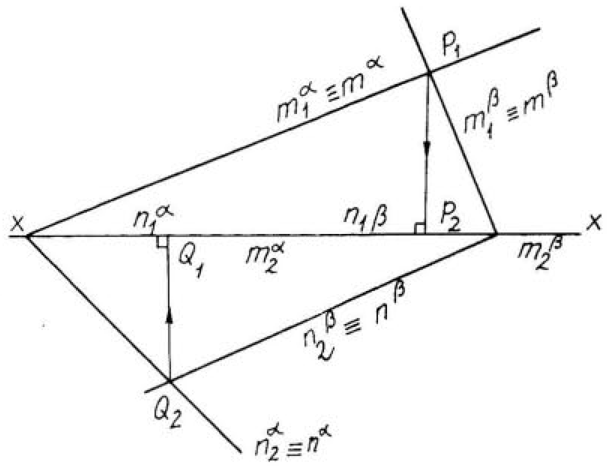
1) Trường hợp này ta nhận thấy m^α và m^β cùng thuộc mặt phẳng π_1 nên cắt nhau tại một điểm P.

Vết đứng m^α có hình chiếu đứng $m_1^\alpha \equiv m^\alpha$ và hình chiếu bằng $m_2^\alpha \equiv xx$.

Tương tự vết bằng n^α có hình chiếu bằng $n_2^\alpha \equiv n^\alpha$ còn hình chiếu đứng $n_1^\alpha \equiv xx$ (xem lại vết của mặt phẳng). Suy cho cùng m^α và n^α là hai đường thẳng đặc biệt của hai mặt phẳng; chúng cắt nhau tại một điểm trên trục xx.



Hình 46.



Hình 47.

Tương tự hai vết bằng n^α và n^β sẽ cắt nhau tại một điểm Q. Đường thẳng PQ chính là giao tuyến của hai mặt phẳng mà ta gọi là đường thẳng g.

m_1^α cắt m_1^β tại P_1 thì P_2 trên trục xx

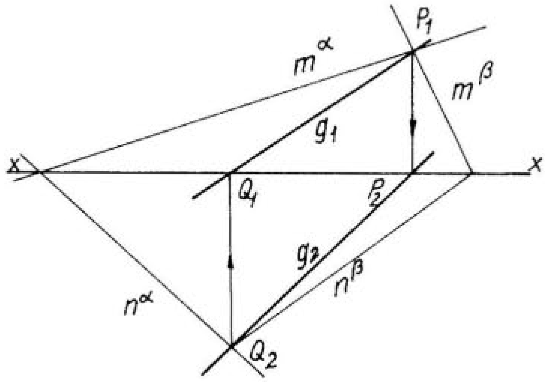
n_2^α cắt n_2^β tại Q_2 thì Q_1 trên trục xx.

P_1Q_1 là hình chiếu đứng của giao tuyến.

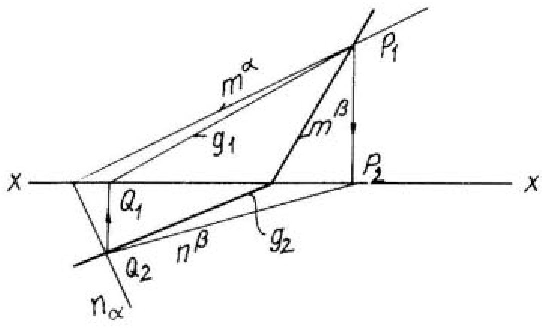
P_2Q_2 là hình chiếu bằng của giao tuyến.

Vậy tất cả các bài toán giao tuyến của hai mặt phẳng có các vết tương ứng cắt nhau đều tiến hành như vậy.

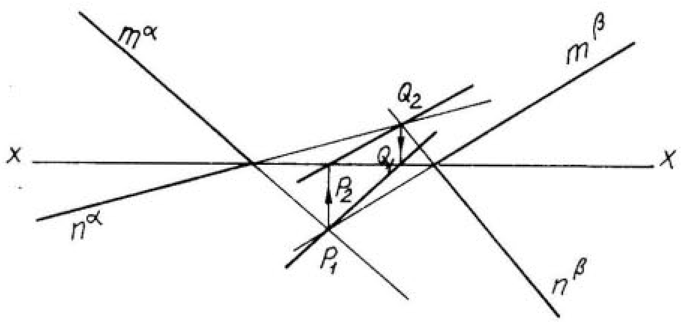
Trường hợp trên hình 51 ta tìm được ngay $P_1 \rightarrow P_2$. Còn hai vết bằng song song (n^α // n^β) có nghĩa là chúng cắt nhau tại điểm Q_2^∞ ở vô tận, Q_1^∞ thì là điểm vô tận trên trục xx.



Hình 48.



Hình 49.



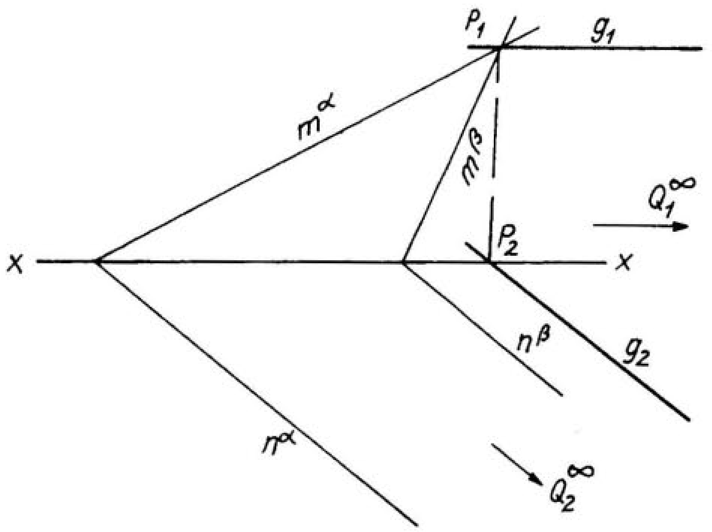
Hình 50.

$$P_1Q_1 \rightarrow g_1$$

$$P_2Q_2 \rightarrow g_2$$

Ngoài ra theo định lý hai mặt phẳng có hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó: $g \parallel n^\alpha \parallel m^\beta$.

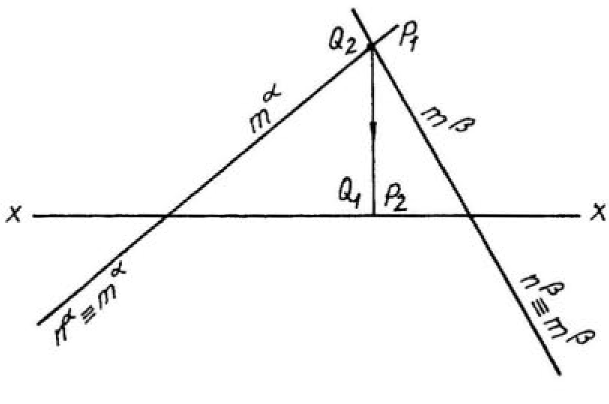
Trường hợp hình 52, ta cứ tiến hành như hình 48. Ta sẽ có kết quả của giao tuyến là một đường cạnh vuông góc với mặt phẳng phân giác II: m^α và m^β cắt nhau tại $P_1 \rightarrow$ xx có P_2. Hai vết bằng n^α và n^β cắt nhau tại Q_2 ($\equiv P_1$), dóng xuống trục xx ta có Q_1.



Hình 51.

P_1Q_1 là hình chiếu đứng, P_2Q_2 là hình chiếu bằng (đây là đường cạnh).

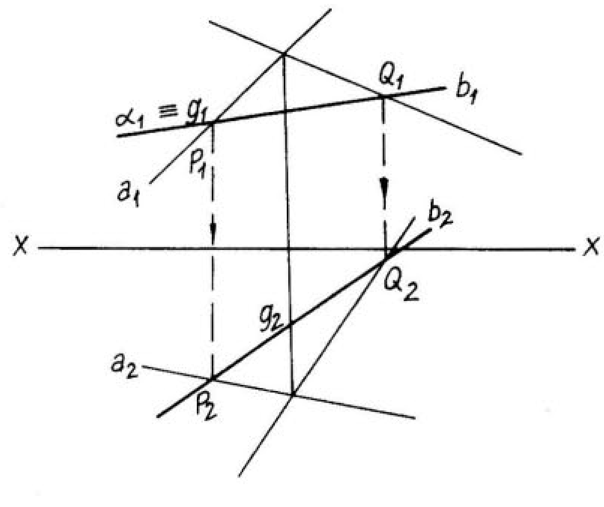
2) Trường hợp một trong hai mặt phẳng là một mặt phẳng chiếu đứng α_1 (hoặc chiếu bằng), mặt phẳng còn lại được xác định bằng hai đường thẳng cắt nhau (a x b) (hình 53). Như ta đã biết giao tuyến g của hai mặt phẳng phải có hình chiếu đứng $g_1 \equiv \alpha_1$, (tính chất mặt phẳng chiếu đứng). Mà g cũng thuộc cả mặt phẳng (a x b), nên ta cho g_1 cắt a_1 và b_1 tại P_1 và Q_1 thì ta suy ra P_2 và Q_2, tức g_2.



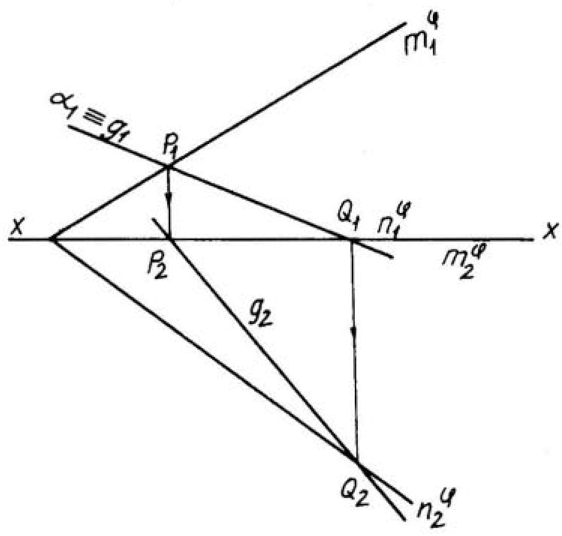
Hình 52.

Nếu mặt phẳng thứ hai cho bằng hai vết (m^α và n^α) thì cũng tiến hành như vậy vì hai vết cũng là hai đường thẳng của mặt phẳng (xem hình 54). Người ta hay dùng trường hợp 2) này để tìm giao điểm đường thẳng với mặt phẳng.

3) Trường hợp hai mặt phẳng đều được xác định bằng các đường thẳng (hai đường thẳng // hoặc cắt nhau).



Hình 53.



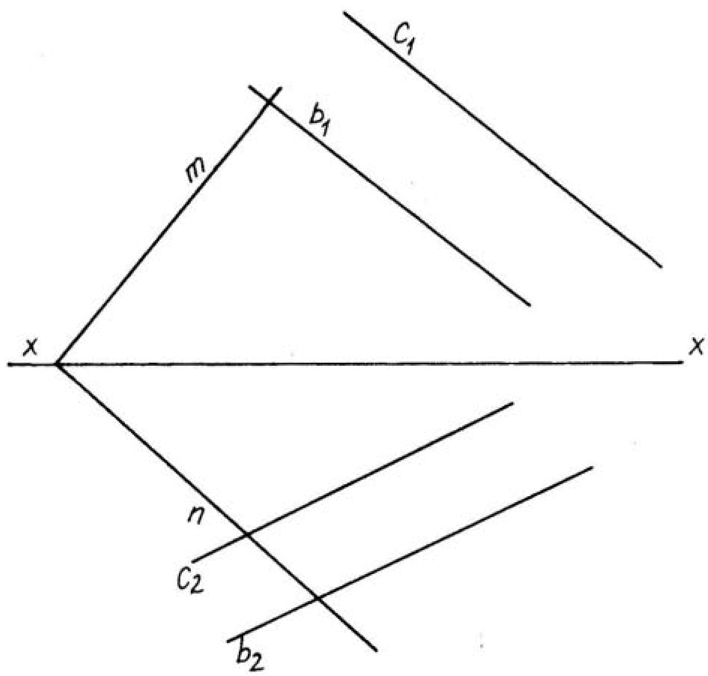
Hình 54.

Phân tích: Phương hướng chung vẫn là tìm cho được hai điểm chung. Cần nhắc thêm là ta có thể chuyển đổi cách xác định mặt phẳng này sang cách khác để thuận tiện cho việc giải bài toán. Thí dụ mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B và C có thể đổi thành mặt phẳng xác định bằng hai đường thẳng cắt nhau AB và AC v.v...

Trên hình 55 một mặt phẳng α cho bằng hai vết m và n, một mặt phẳng cho bằng b//c.

Trước tiên ta ký hiệu $m_1 \equiv m$ và $m_2 \equiv xx$; $n_2 \equiv n$ và $n_1 \equiv xx$.

Bây giờ ta dùng mặt phụ trợ chiếu đứng (xem trường hợp b) bài 17).

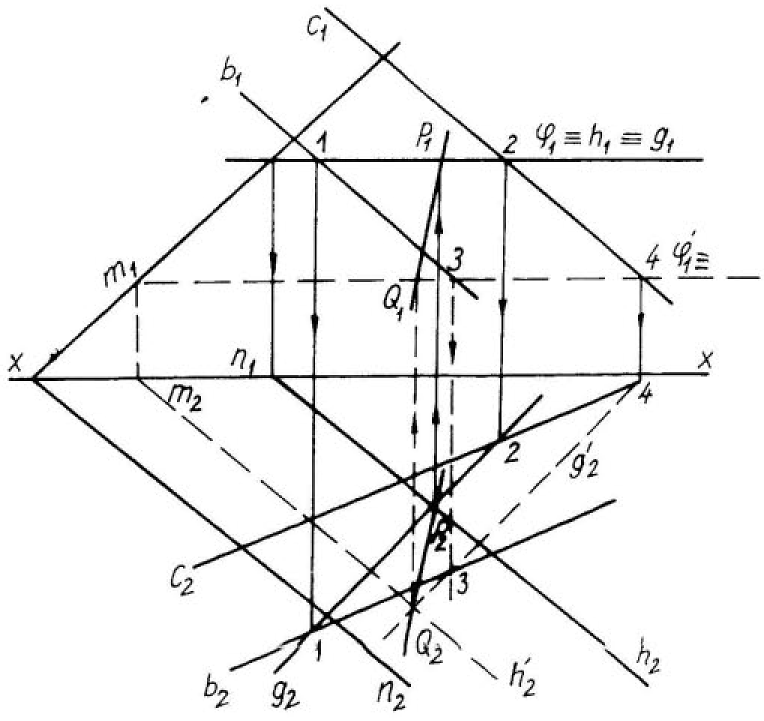


Hình 55.

Đây là mặt phẳng bằng φ_1. Như vậy φ_1 cắt mặt phẳng α theo một đường bằng $h_1 \equiv \varphi_1$, cắt mặt phẳng α (b // c) theo một giao tuyến g_1 cũng $\equiv \varphi_1$. g được xác định bởi hai điểm 1 và 2.

Hai giao tuyến phụ h và g cùng thuộc mặt phẳng φ_1 nên chúng phải cắt nhau tại P (tìm được P_2 trước, sau dóng lên φ_1 có được P_1)P là một điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng. Muốn tìm điểm chung thứ hai ta dùng mặt phẳng bằng phụ trợ φ'_1 và tiến hành dựng hình như đối với φ_1 thì ta có được điểm chung Q nữa. (Xem các bước dựng hình bằng nét đứt ở hình 56).

PQ chính là giao tuyến của hai mặt phẳng.

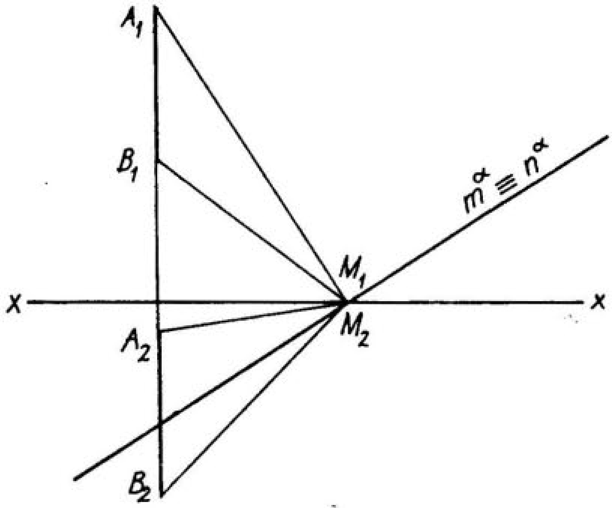


Hình 56.

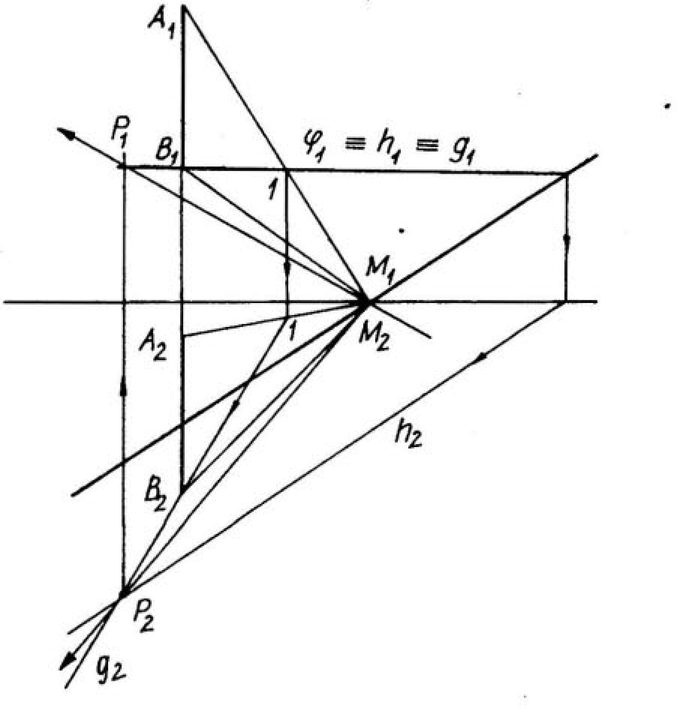
<u>BÀI 19</u>: Tìm giao tuyến của mặt phẳng α (cho bằng vết) và mặt phẳng ABM. ($M_1 \equiv M_2$ trên trục xx).

Phân tích: M chính là điểm chung có sẵn của hai mặt phẳng. Cần tìm điểm chung thứ hai.

Giải: Đầu tiên ta biểu hiện mặt phẳng ABM bằng tam giác $A_1B_1M_1$ và $A_2B_2M_2$. Sau đó dùng mặt bằng phụ trợ φ_1 cắt mặt phẳng α theo một đường bằng h và cắt mặt phẳng ABM theo một giao tuyến g (có $g_1 \equiv \varphi_1$). Từ đó suy ra g_2. Giao điểm p của g và h là điểm chung thứ hai cần tìm. MP chính là giao tuyến cần tìm.



Hình 57.

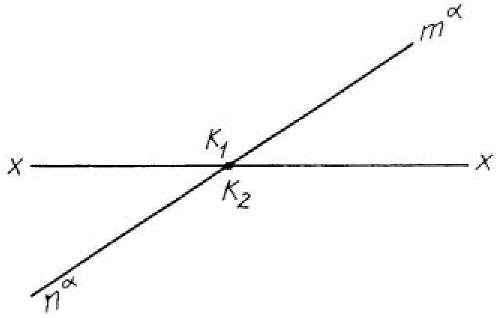


Hình 58.

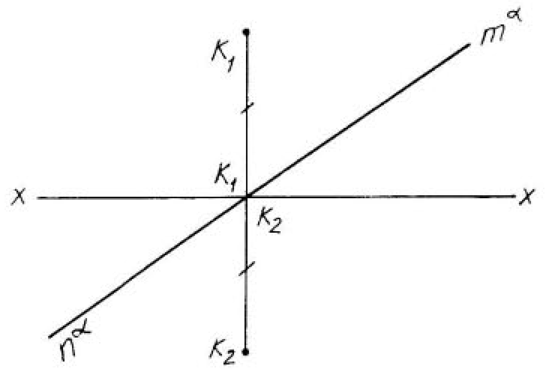
<u>BÀI 20</u>: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng α ($m^\alpha \equiv n^\alpha$) với mặt phẳng phân giác I. (hình 59).

***Phân tích*:** Mặt phẳng α ($m^\alpha \equiv n^\alpha$) và mặt phẳng phân giác I đều cùng vuông góc với mặt phẳng phân giác II. Vậy giao tuyến IK của chúng sẽ là một đường cạnh vuông góc với mặt phẳng phân giác II, cũng tức là IK là *đường cạnh thuộc mặt phẳng phân giác I*, vì K là điểm chung đã có sẵn của chúng.

Vậy chỉ cần lấy một điểm I có I_1 đối xứng với I_2 qua trục xx là ta có giao tuyến cần tìm IK.

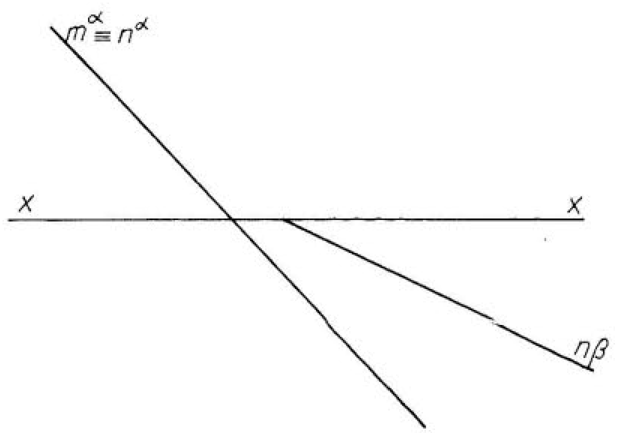


Hình 59.



Hình 60.

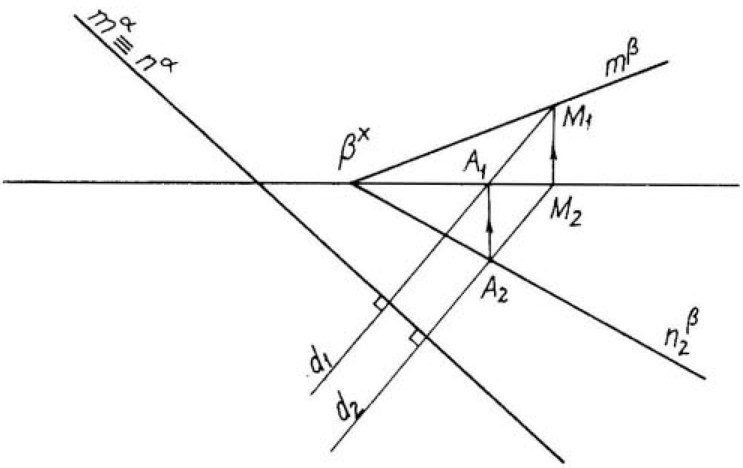
<u>BÀI 21</u>: Vẽ nốt vết đứng m^β của mặt phẳng β biết rằng mặt phẳng α vuông góc với mặt phẳng β (hình 61).



Hình 61

Phân tích: Hai mặt phẳng α và β vuông góc với nhau. Vậy nếu từ một điểm A của mặt phẳng β tôi kẻ một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng α thì d phải thuộc mặt phẳng β. Từ đó suy ra vết đứng N của d, cũng tức là suy ra được vết đứng m^β của mặt phẳng β.

Giải: Lấy một điểm A trên vết bằng n^β ($A_2 \in n_2^\beta$ và $A_1 \in n_1^\beta$ tức trục xx). Sau đó kẻ d_1 qua A_1 và $\perp$ m^α và qua A_2 kẻ $d_2 \perp n_\alpha$ (chú ý $m^\alpha \equiv n^\alpha$ nên $d_1 // d_2$). Tìm vết đứng M của d. Vậy vết đứng m^β của mặt phẳng β phải qua M_1 và cắt n^β tại một điểm β_x trên trục xx.

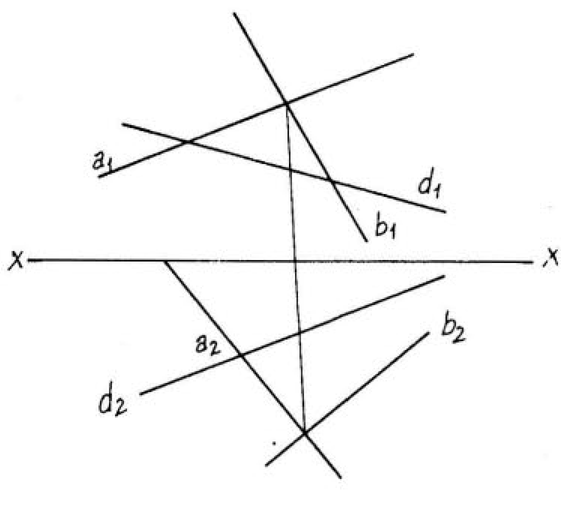


Hình 62

BÀI 22: Tìm giao điểm của một đường thẳng d với một mặt phẳng xác định bằng hai đường thẳng cắt nhau (a x b).

Phân tích: Ta đã biết muốn tìm giao điểm của một đường thẳng d với một mặt phẳng (a x b), ta phải qua ba bước dựng hình.

1. Qua d lập một mặt phẳng phụ trợ (thông thường là mặt phẳng chiếu đứng hoặc chiếu bằng).

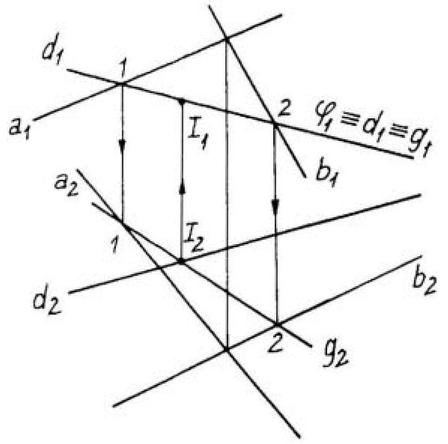


Hình 63.

2. Tìm giao tuyến g của mặt phẳng phụ trợ (chiếu đứng chẳng hạn) với mặt phẳng (a x b) cho trước. Vì đã chọn mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng φ_1 nên theo tính chất của mặt phẳng chiếu đứng $\varphi_1 \equiv g_1$ và $\varphi_1 \equiv d_1$, do đó ta có $\varphi_1 \equiv d_1 \equiv g_1$. Nhưng giao tuyến g cũng thuộc mặt phẳng (a x b) nên cho g_1 cắt a_1 và b_1 thì suy ra được g_2.

3. g_2 sẽ cắt d_2 tại I_2 là hình chiếu bằng của giao điểm I cần tìm. Từ I_2 suy ra I_1 trên d_1.

Trường hợp mặt phẳng cho bằng hai vết m và n thì ta coi m và n là hai đường thẳng cắt nhau, nên phải phân tích ra m_1, m_2 và n_1, n_2 rồi tiến hành như ở trên đây.



Hình 64.

BÀI 23: Đường thẳng d có song song với mặt phẳng α không ? Tại sao? (hình 65). Thử tìm giao điểm của d với α ($d_1 \parallel d_2 \parallel m^\alpha \equiv n^\alpha$).

***Phân tích*:** Đầu tiên ta biểu thị các hình chiếu của m^α và n^α.

Ta có: $d_1 \parallel m_1^\alpha$ nhưng $d_2 \nparallel m_2^\alpha$ (trục x).

Vậy d không // với m^α.

Ta lại có $d_2 \parallel n_2^\alpha$ nhưng $d_1 \nparallel n_1^\alpha$ (xx).

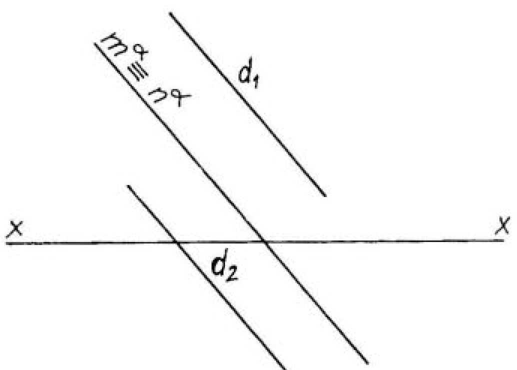
Vậy d cũng không // với n^α.

Kết luận: d không // với đường thẳng nào của α. Vậy d không // với α.

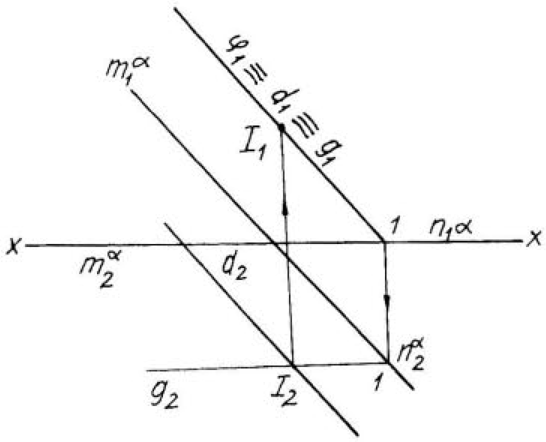
Tìm giao điểm của d với mặt phẳng α: theo bài 18, ta phải qua ba bước dựng hình (hình 66).

1. Qua d lập mặt phẳng chiếu đứng φ_1 ($\varphi_1 \equiv d_1$).

2. φ_1 cắt mặt phẳng α theo g mà g_1 thì $\equiv \varphi_1$. Vì g cũng là một đường của α vậy g là 1 đường mặt của α nên ta suy ra g_2 // xx. g_2 cắt d_2 tại I_2 là hình chiếu bằng của giao điểm cần tìm. Từ đó suy ra I_1 trên d_1.



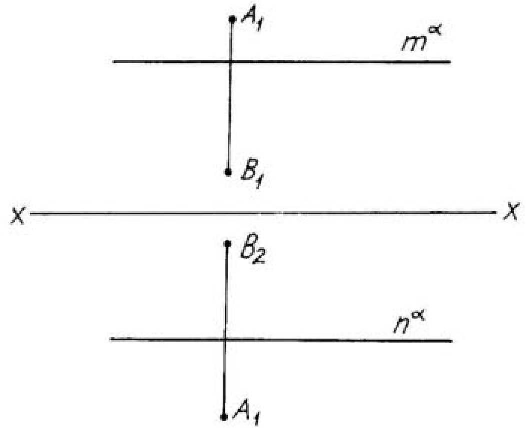
Hình 65.



Hình 66.

BÀI 24: Không dùng hình chiếu cạnh, tìm giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng α.

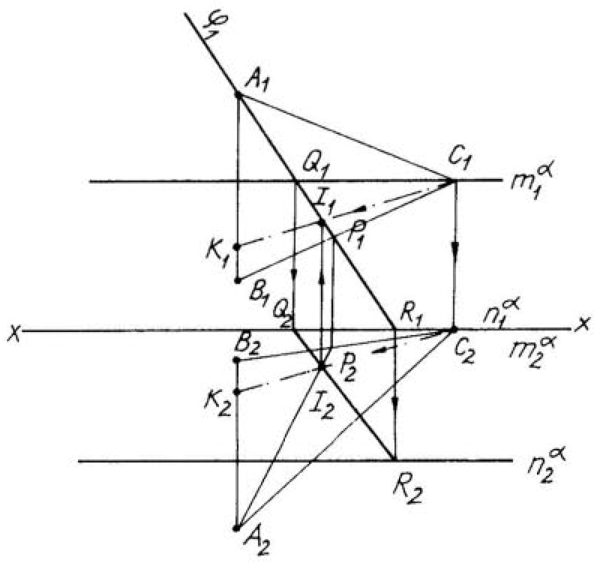
Phân tích: AB là đường cạnh. Qua AB ta lập một mặt phẳng phụ trợ bất kỳ ABC, chứ không dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng ở các bài trên.



Hình 67.

Ta lấy một điểm C trên m^α để lập mặt phẳng phụ trợ ABC.

Bây giờ tìm giao tuyến của mặt phụ trợ ABC với mặt phẳng α. Ta đã có một điểm chung của chúng là C. Ta phải tìm một điểm chung thứ hai.

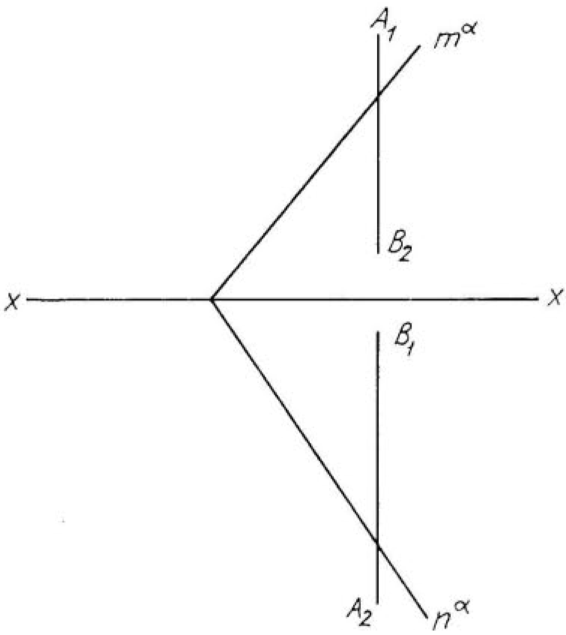


Hình 68.

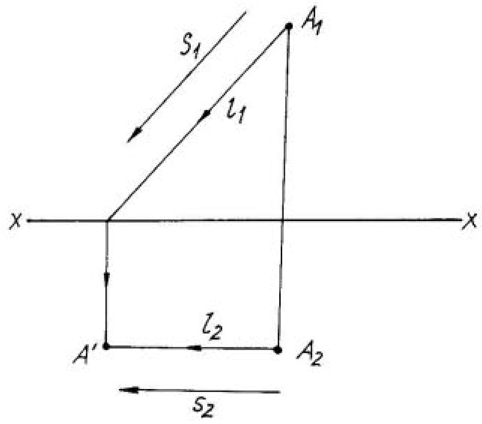
Muốn vậy, ta lập một mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng φ_1 qua A_1. φ_1 cắt ABC theo đường thẳng g tức AP. Có A_1P_1 ta suy ra A_2P_2 dưới hình chiếu bằng. φ_1 cắt mặt phẳng α theo Q_1R_1 ta suy ra Q_2R_2. A_2P_2 cắt Q_2R_2 tại I_2 rồi đưa lên φ_1 có I_1. I là điểm chung thứ hai. Vậy ABC cắt mặt phẳng α theo giao tuyến CI (hai điểm chung). C_1I_1 cắt A_1B_1 tại K_1 và C_2I_2 cắt A_2B_2 tại K_2. Cuối cùng K là giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng chiếu cạnh α.

BÀI 25: Tìm giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng α cho bằng hai vết.

Phân tích: Ta có thể dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ bất kỳ đã dùng trong bài 15 để giải. Sau đây là một cách giải khác dùng phép chiếu xiên góc theo một phương chiếu tùy chọn.



Hình 69.

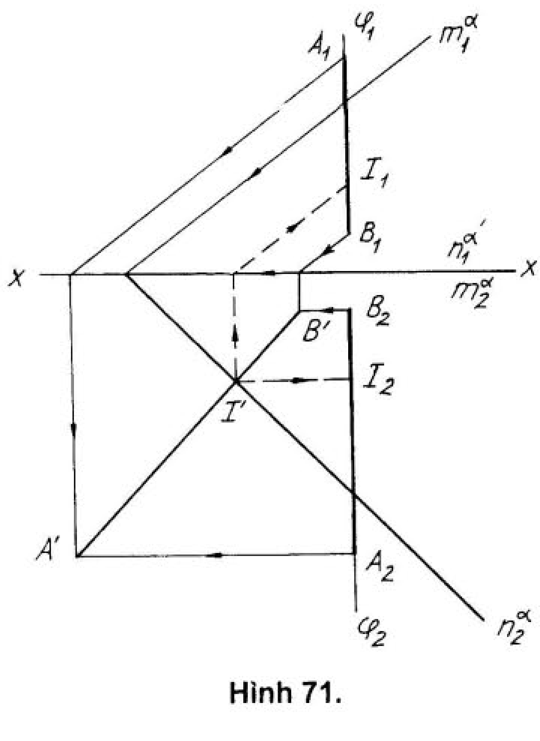


Hình 70.

Nếu ta có một điểm A và ta muốn chiếu điểm A theo phương s (s_1, s_2) lên mặt phẳng chiếu xiên mà ta chọn là π_2 thì giao điểm của tia chiếu l qua A với mặt phẳng π_2 là hình chiếu xiên A' của điểm A. Ở đây thực chất A' là vết bằng của tia chiếu l.

Bây giờ nếu ta dùng phép chiếu xiên lên mặt phẳng π_2 theo phương của vết đứng (m_1^α, m_2^α) thì trên π_2 mặt phẳng α được chiếu thành vết bằng n_2^α của nó, còn AB thành A'B'.

Giao điểm I' của A'B' với n_2^α là hình chiếu xiên của giao điểm cần tìm. Sau đó chiếu ngược lại, ta có I_1 trên A_1B_1 và I_2 trên A_2B_2. Áp dụng dựng hình như trên hình 70, ta sẽ có được A'B'.



Hình 71.

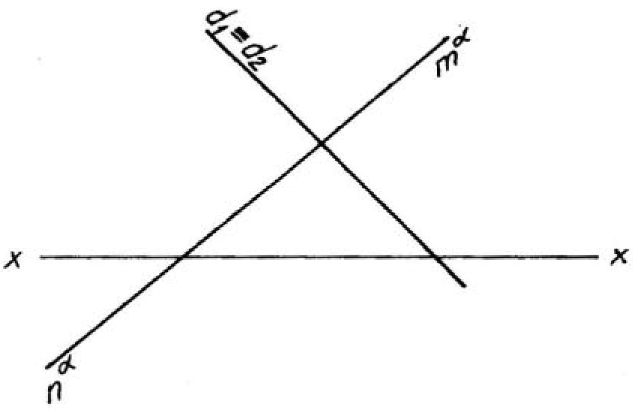
BÀI 26: Tìm giao điểm của đường thẳng d ($d_1 \equiv d_2$) với mặt phẳng α.

Phân tích: Đầu tiên phân tích m^α thành m_1^α và m_2^α và n^α thành n_1^α và n_2^α. Vẫn tiến hành ba bước dựng hình.

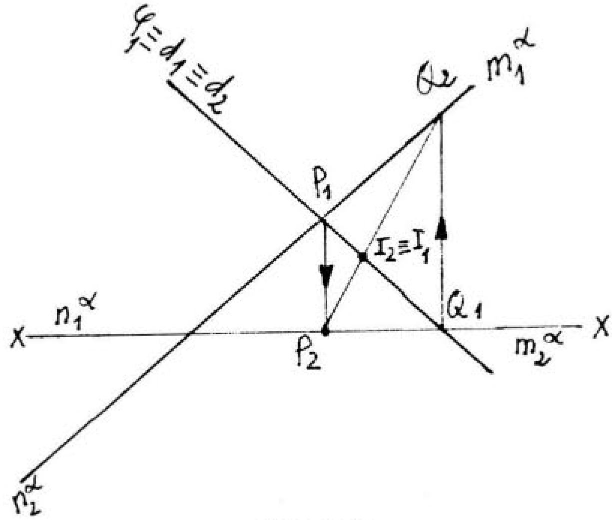
1. Qua d_1 lập mặt phẳng phụ trợ φ_1.

2. φ_1 cắt m_1^α tại P_1 dóng xuống m_2^α ta có P_2. φ1 cắt n_1^α tại Q_1, dóng lên n_2^α ta có Q_2. PQ là giao tuyến giữa φ_1 và α.

3. P_2Q_2 cắt d_2 tại $I_2 \equiv I_1$ là giao điểm I của d và mặt phẳng α.



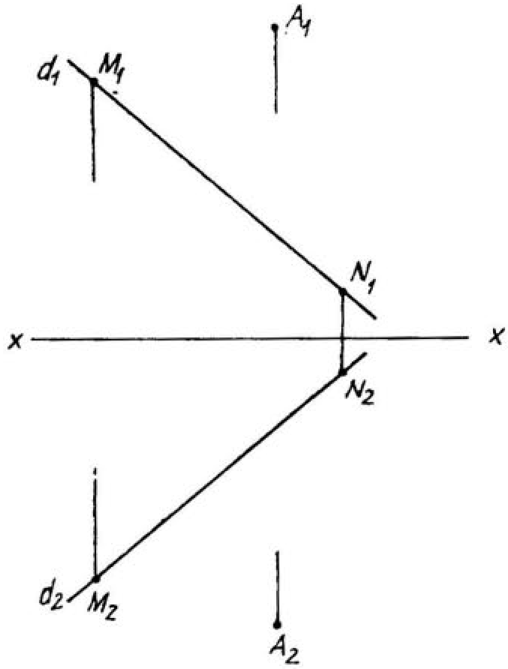
Hình 72a.



Hình 72b.

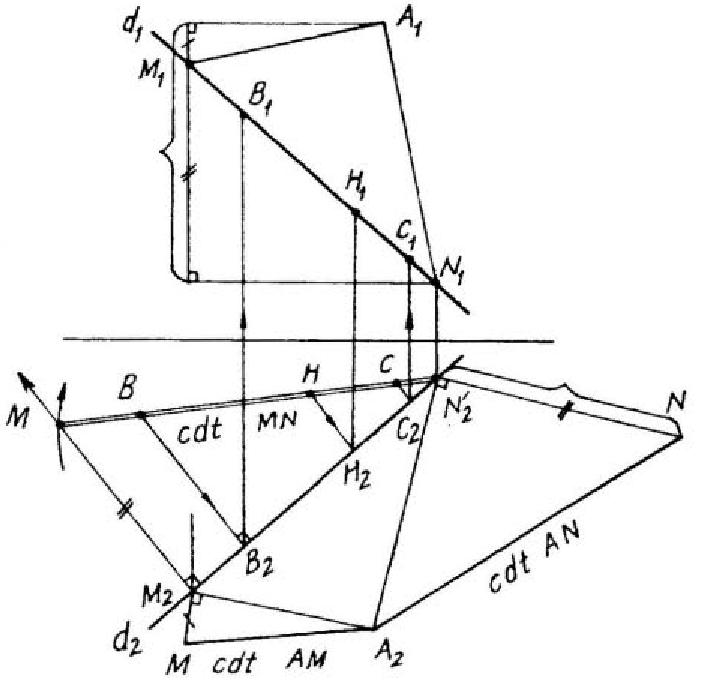
BÀI 27: Cho đường thẳng d và một điểm A. Hãy dựng một hình thang ABCD vuông tại A biết rằng đáy lớn BC thuộc đường thẳng d, đáy nhỏ AD dài bằng AB và cạnh bên CD bằng 1,15 AB (hình 73).

Phân tích: Ta phải làm sao để dựng được độ lớn thực của hình thang vuông ABCD. Muốn vậy ta phải lấy hai điểm M, N, tùy ý trên đường thẳng d để có được tam giác AMN. Có hai cách giải bài toán.



Hình 73.

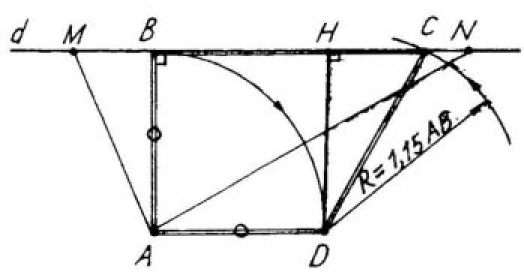
Cách1: Dùng cách tìm độ lớn thật của các đoạn thẳng và dùng tỷ số đơn được bảo toàn.



Hình 74.

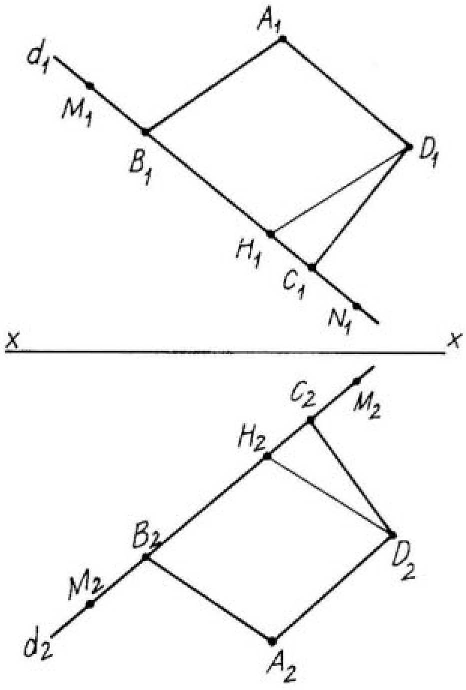
Trước tiên ta tìm độ dài thật của các cạnh của tam giác nền AMN bằng phương pháp tam giác.

Với chiều dài thật của MN, AM và AN ta dựng được độ lớn thật của ΔAMN (hình 75) trên cơ sở ΔAMN, ta hạ AB ⊥ MN (đây là đường **thẳng d**). Vậy AB là một cạnh vuông của hình thang. Qua A kẻ // MN và đặt AD = AB thì ta có đáy nhỏ là AD. Từ D làm tâm với bán kính bằng 1,15 AB ta vạch một cung tròn cắt MN tại đỉnh C của hình thang. Bây giờ ta đặt MN của hình 75 trùng với MN_2 ở hình 74. Ta biết rằng ABHD được chiếu thành các hình bình hành. Có $A_1B_1H_1$ và $A_2B_2H_2$, ta sử dụng tính chất song song của các cạnh đối để xây dựng được D_1 và D_2. Nối $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$ thì đây là 2 hình chiếu của hình thang vuông cần dựng. Hình 76 trình bày bước dựng hình cuối cùng.

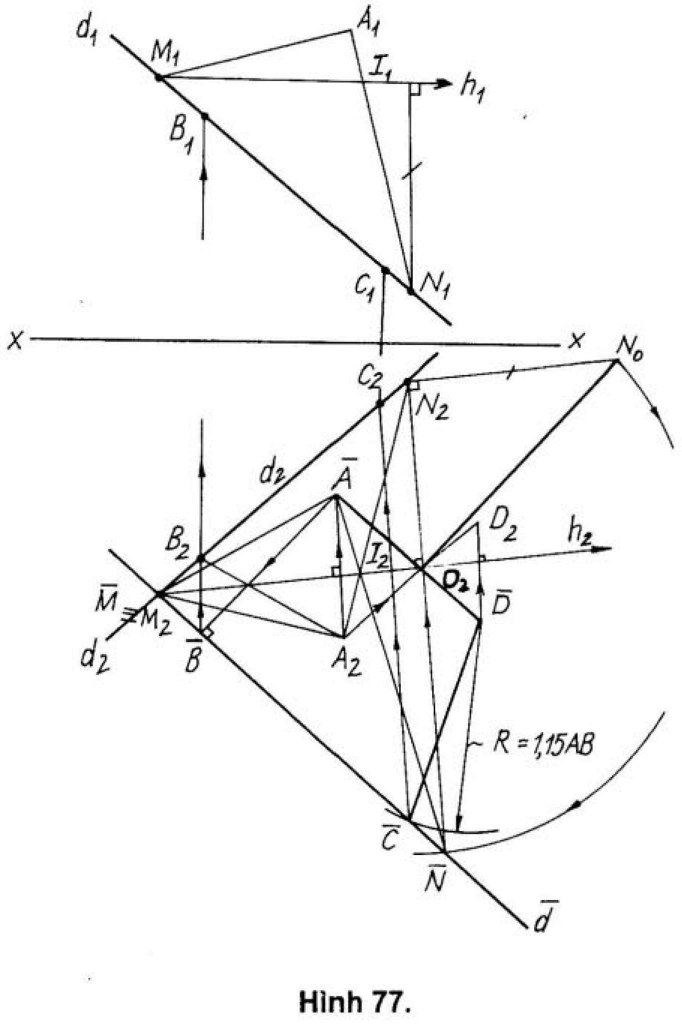


Hình 75.

Cách 2: Ta dùng phép xoay quanh đường bằng h của mặt phẳng AMN để tìm độ lớn thật của AMN. Dựa trên hình thật này ta dựng được độ lớn thật của hình thang vuông. Ta xoay điểm N quanh h theo lý thuyết đã học thì ta có vị trí sau khi xoay của N là $\overline{N}$. Từ điểm này dóng vuông góc với h_2 ta có N_2 trên d_2. $\overline{M} \equiv M_2$, $\overline{I} \equiv I_2$ (hình 77). Nối A_2N_2 cắt h_2 tại I_2. Nối $\overline{N}\,I_2$ kéo dài, rồi từ A_2 kẻ vuông góc với h_2 sẽ cắt $\overline{N}\,I_2$ tại $\overline{A}$.

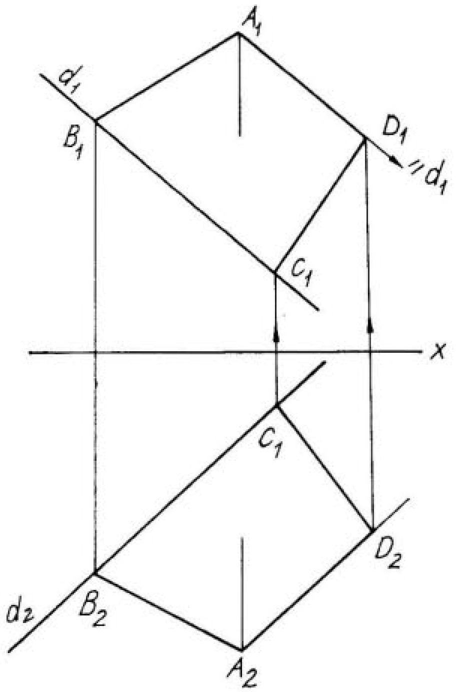


Hình 76.



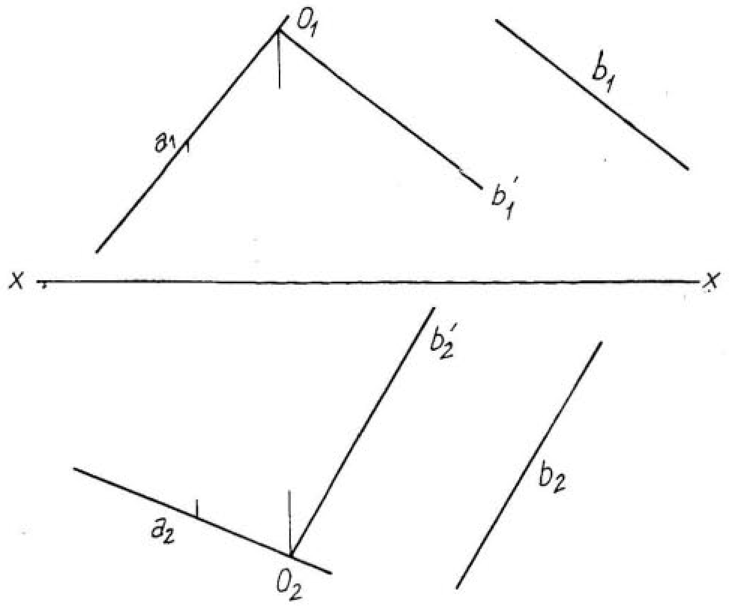
Hình 77.

Từ $\overline{A}$ hạ vuông góc với $\overline{d}$ ta có $\overline{B}$. Từ $\overline{A}$ kẻ $\overline{A}\,\overline{D}$ // $\overline{d}$ và $\overline{A}\,\overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}$ thì ta có $\overline{D}$. Từ $\overline{D}$ làm tâm vạch một cung tròn $R = 1{,}15$ AB cho cắt $\overline{d}$ thì đó là $\overline{C}$. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ là độ lớn thật của hình thang vuông theo yêu cầu. Bằng các đường dóng $\perp$ với h_2 ta suy ra $\overline{B} \to B_2$; $\overline{C} \to C_2$, $\overline{A}$, O_2 và $\overline{D}$ thẳng hàng, vậy $A_2O_2D_2$ cũng thẳng hàng, từ đó suy ra D_2. Từ đó dóng lên có $A_1B_1C_1$. Muốn xác định D_1 thì kẻ A_1D_1 // B_1C_1 và dóng từ D_2 lên ta có D_1. Nối các đỉnh ABCD ta có hai hình chiếu của hình thang vuông cần dựng (hình 78).



Hình 78.

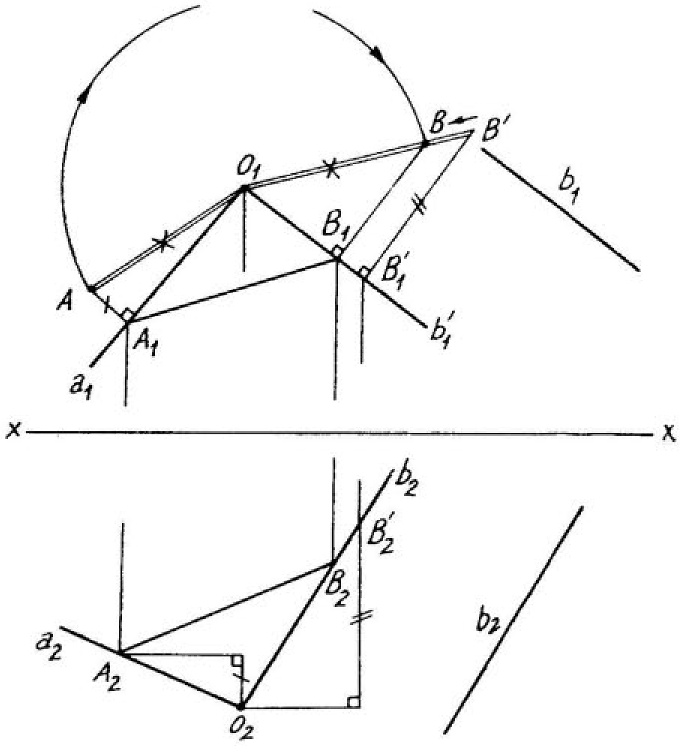
<u>BÀI 28</u>: Vẽ một đường bằng cắt hai đường thẳng a và b chéo nhau và làm với chúng các góc bằng nhau.



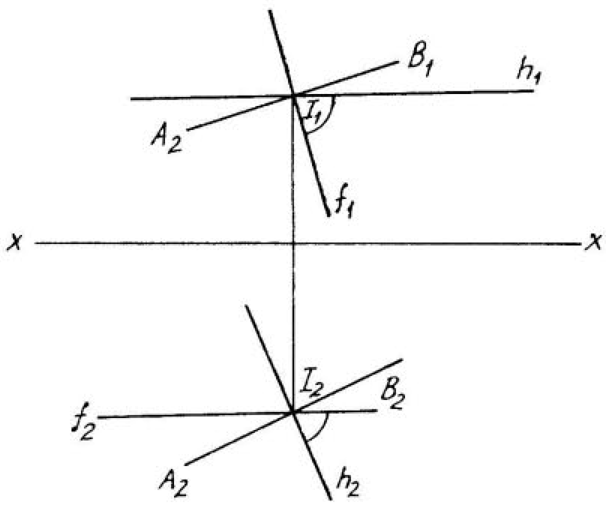
Hình 79.

***Phân tích*:** Theo một mệnh đề nói rằng: "các đường thẳng muốn làm với hai đường thẳng cho trước các góc bằng nhau thì phải song song với một mặt phẳng đi qua một trong hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau tương ứng song song với hai đường thẳng cho trước và vuông góc với mặt phẳng của góc đó".

Vậy trước tiên qua O bất kỳ của a ta kẻ b' // b (b'_1 // b_1 và b'_2 // b_2). Bây giờ ta lấy một điểm A trên a và một điểm B trên b' sao cho $\overline{OA} = \overline{OB}$. Mặt phẳng trung trực của AB chính là mặt phẳng cần dựng và đường bằng cần tìm phải // với mặt phẳng này thì mới cắt a và b theo các góc bằng nhau. Lấy A tùy ý trên a, rồi tìm độ lớn thật OA. Trên b' lấy B' tùy ý trên b' rồi tìm độ lớn thật OB'. Tất nhiên OA thường khác OB'. Trên độ lớn thật của OB' ta đặt một điểm B sao cho $\overline{OA} = \overline{OB}$. Dóng tỷ lệ về ta có B_1 và B_2. Qua trung điểm I của AB ta lập mặt phẳng trung trực của AB, xác định bởi đường bằng h sao cho $h_2 \perp A_2B_2$ và đường mặt f sao cho $f_1 \perp A_1,B_1$.

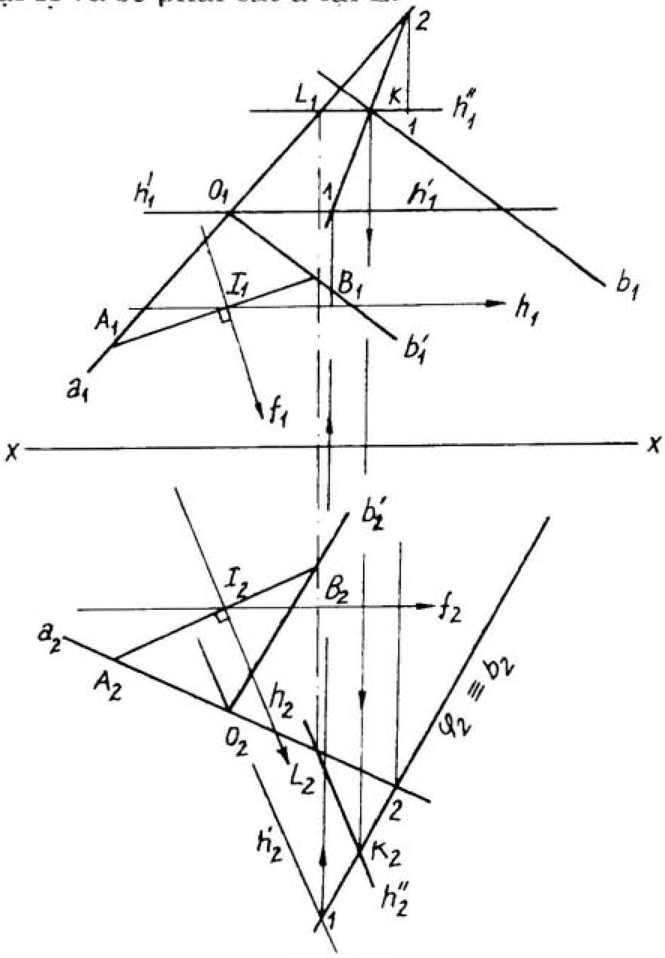


Hình 80.



Hình 81.

Bây giờ qua O kẻ một đường bằng h' // h (h'_1 // h_1 và h'_2 // h_2). Đường thẳng a và đường bằng h' xác định một mặt phẳng γ. Rồi tìm giao điểm K của b với mặt phẳng này. Sau đó qua K kẻ một đường bằng h" thì h" cũng cắt cả a nữa, vì cùng thuộc một mặt phẳng. Để tìm giao điểm K của b với một phẳng γ, ta dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng φ_2 cắt γ theo giao tuyến 1–2. Trên hình chiếu đứng 1–2 cắt b_1 tại giao điểm K_1. Qua K_1 kẻ đường bằng h''_1 và qua K_2 kẻ h''_2 // h'_2. Vậy h" cắt b tại K và sẽ phải cắt a tại L.

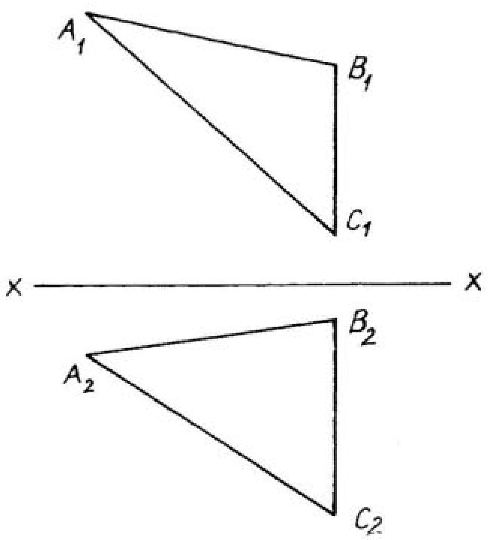


Hình 82.

BÀI 29: (hình 83).

Trong mặt phẳng ABC (với BC là đường cạnh), tìm điểm K có độ cao là 2 cm và độ xa là 1,5 cm.

Phân tích: Trên ABC, tập hợp các điểm có cùng độ cao là 2 cm là đường bằng h có độ cao là 2 cm. Ta xác định h_1 rồi suy ra h_2. Ở hình chiếu bằng h_2 chọn một điểm K có độ xa là 1,5 cm.



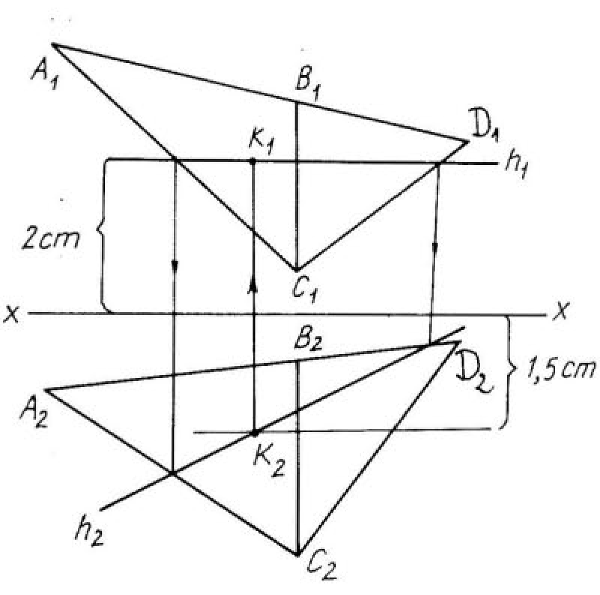
Hình 83

Giải: Để vẽ được đường bằng h ta lấy một điểm D bất kỳ trên AB kéo dài rồi thay ABC bằng ADC để giải toán.

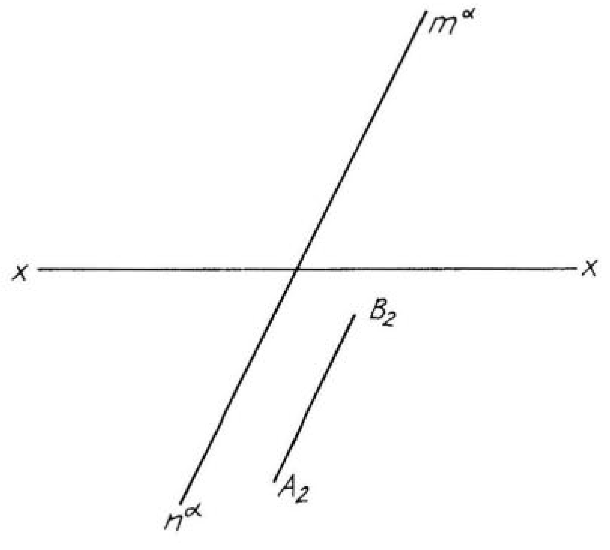
<u>BÀI 30</u>: Vẽ hình vuông ABCD trong đó AB là một đường bằng thuộc mặt phẳng α, còn CD thuộc mặt phẳng π_2. (hình 85).

Phân tích: AB là đường bằng của α nên ta gắn vào một đường bằng h thì tìm được A_1B_1. Bây giờ xác định đỉnh C; Vì AB ⊥ BC mà AB là đường bằng nên $A_2B_2 \perp B_2C_2$, vậy C_2 nằm trên đường thẳng ⊥ với A_2B_2. Ngoài ra C_1D_1 nằm trên trục xx (vì CD thuộc π_2).

Vậy C_2 phải ở vị trí sao cho độ lớn thực của BC bằng độ lớn thực của $AB = A_2B_2$. Hơn nữa hiệu độ cao của B và C là Δz đã có trên hình chiếu đứng.



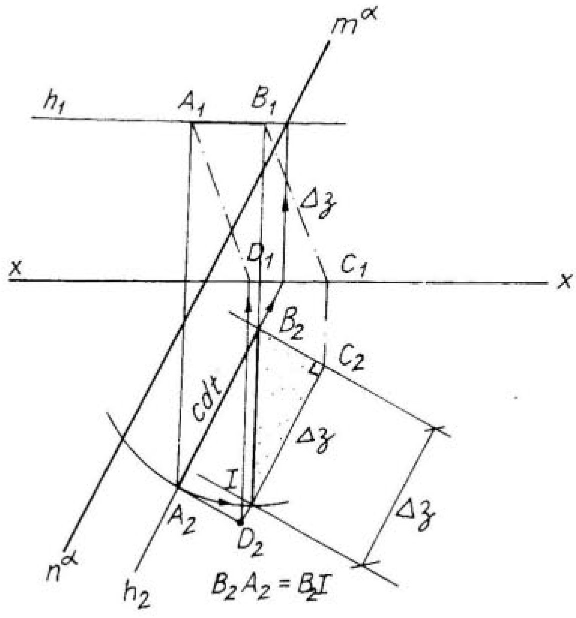
Hình 84.



Hình 85.

Kết hợp độ dài thật của BC và Δz ta dựng được chiều dài hình chiếu bằng B_2C_2.

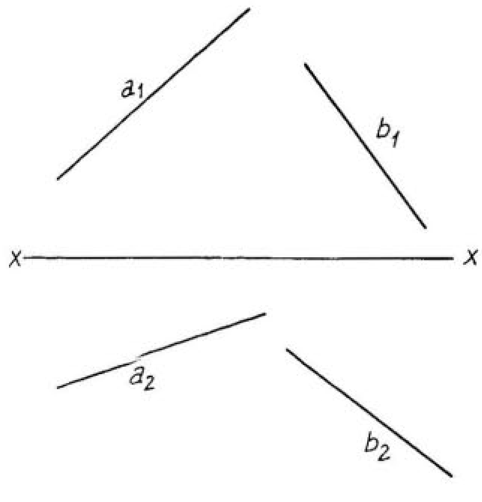
Giải: Cho $h_2 \equiv A_2B_2 \rightarrow h_1 \rightarrow A_1B_1$. Từ đó ta có Δz của BC. Qua B_2 kẻ một đường thẳng ⊥ A_2B_2 rồi kẻ một đường thẳng // thứ nhất và cách một đoạn là Δz. Từ B_2 làm tâm, vạch cung tròn bán kính A_2B_2 cắt đường thẳng vừa vẽ tại I. Vẽ tam giác vuông IB_2C_2 thì cạnh B_2C_2 là chiều dài hình chiếu bằng của cạnh BC. Hoàn chỉnh hình chữ nhật $A_2B_2C_2D_2$. Dóng lên trục xx ta có C_1D_1, và hoàn chỉnh hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. Đó là hai hình chiếu của hình vuông ABCD.



Hình 86.

<u>BÀI 31</u>: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Bằng cách thay đổi mặt phẳng chiếu một lần để sao cho hai hình chiếu mới của chúng song song với nhau (hình 87).

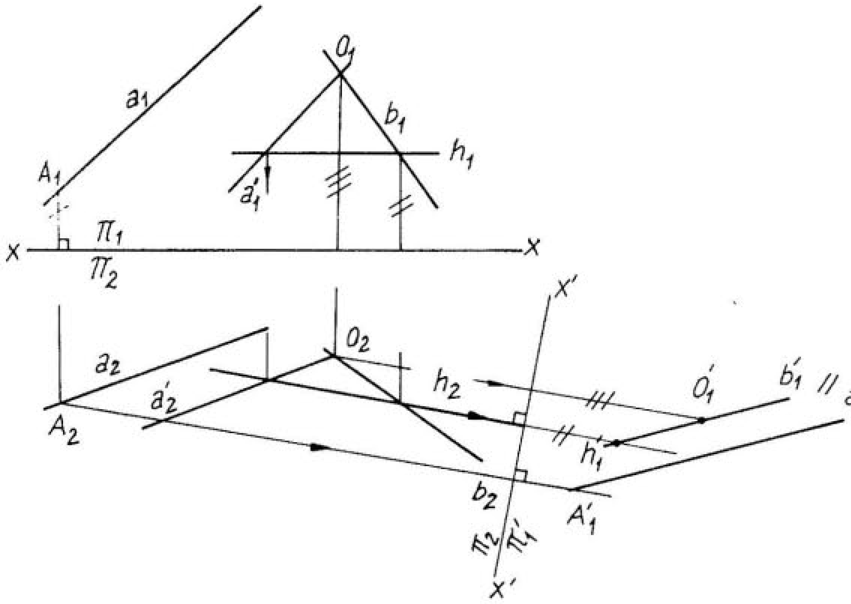
Phân tích: Bây giờ ta cắt b bởi một đường thẳng a' // a thì mặt phẳng (a' x b) // với a. Nếu mặt phẳng này suy biến thành một đường thẳng thì phải song song với a.



Hình 87.

Giải: Cắt b bởi a' // a. Vẽ một đường bằng h trong mặt phẳng (a' x b). Bây giờ thay π_1 bằng π'_1 với x'x' $\perp$ h_2 thì bằng cách thay mặt phẳng hình chiếu đứng ta thấy mặt phẳng (a' x b) suy biến thành đường thẳng b'_1 và đường thẳng a thành a'_1 và a'_1 // b'_1 (hình 88).

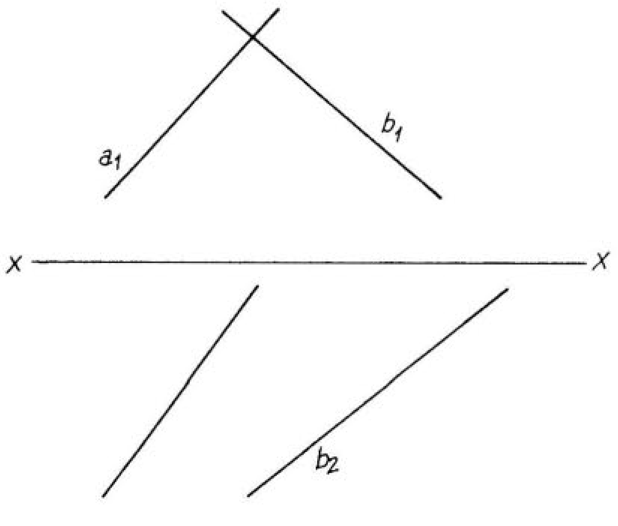
<u>BÀI 32</u>: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Hãy kẻ một đường thẳng C song song với trục xx cắt cả a và b (hình 89).



Hình 88.

Phân tích: Cho một đường thẳng *l* // trục xx cắt a tại I để xác định một mặt phẳng α. Tìm giao điểm K của b với mặt phẳng α. Qua K chỉ việc kẻ *l'* // *l* thì *l'* cắt cả hai đường thẳng a và b.

Giải: Lập mặt phẳng α bằng cách cắt a bởi *l* // xx. Tìm giao điểm K của b với mặt phẳng α. Qua K kẻ *l'* // *l*. (xem hình 90) tìm K thì xem lại bài 17 (hình 52).

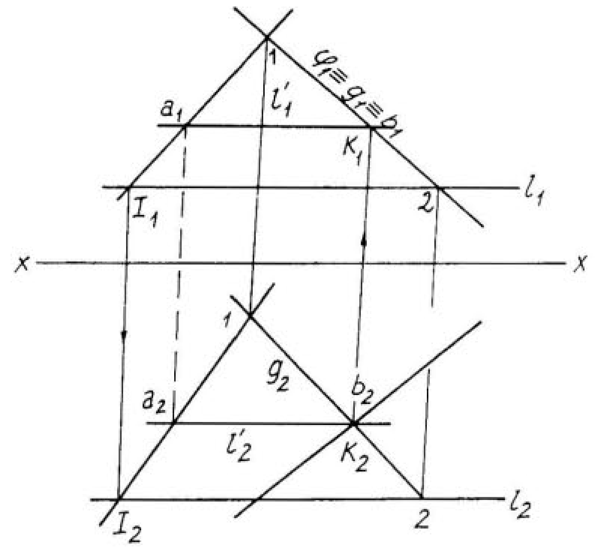


Hình 89.

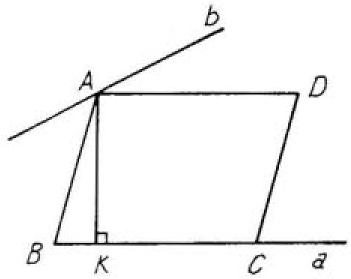
BÀI 33: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Dựng một hình bình hành ABCD có đáy lớn BC thuộc đường thẳng a, đỉnh A thuộc đường thẳng b, cạnh bên AB dài hơn đường cao AK là 5 mm, còn đáy lớn BC bằng 1,5 AK (hình 91).

Phân tích: Các cạnh AB và BC đều phụ thuộc vào chiều dài của đường cao AK. Vậy đầu tiên ta có chân vuông góc K rồi: AK $\perp$ BC tức a, mà a là đường bằng. Vậy $A_2K_2 \perp a_2$ tại K_2. Từ đó có đỉnh A_2 trên b_2, rồi có A_1 trên b_1. Sau đó tìm độ lớn thật của AK. Bây giờ vạch một nửa đường tròn đường kính AB = AK + 5 mm. Vì B_1C_1 phải trùng với a_1 nên hiệu độ cao giữa A_1B_1 cũng bằng Δz. Đặt

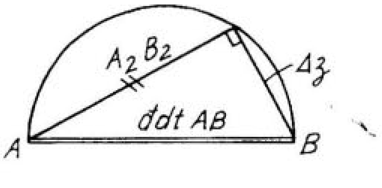
Δz lên nửa đường tròn trên hình 92 ta có chiều dài của hình chiếu bằng A_2B_2. Đặt lên hình chiếu bằng ta được B_2 và B'_2. Ta chỉ lấy B_2 để giải nốt bài toán. Đặt C_2 trên a_2 sao cho $B_2C_2 = 1{,}5$ AK. Có A, B, C thì xác định nốt đỉnh D bằng cách lợi dụng tính chất của hình bình hành có hai cạnh đối song song.



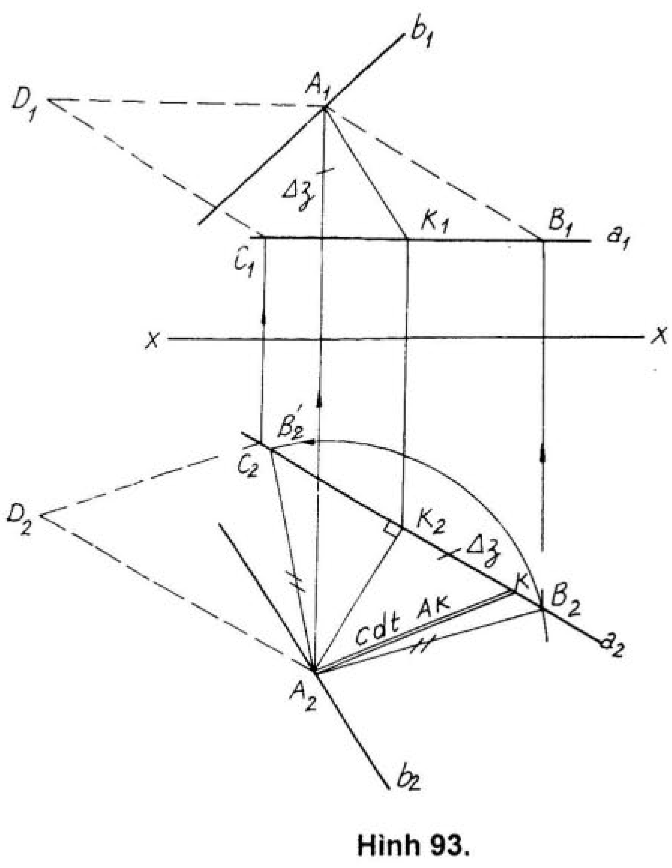
Hình 90.



Hình 91.

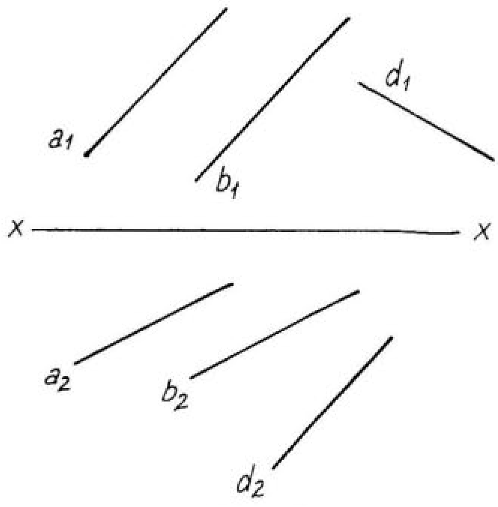


Hình 92.



Hình 93.

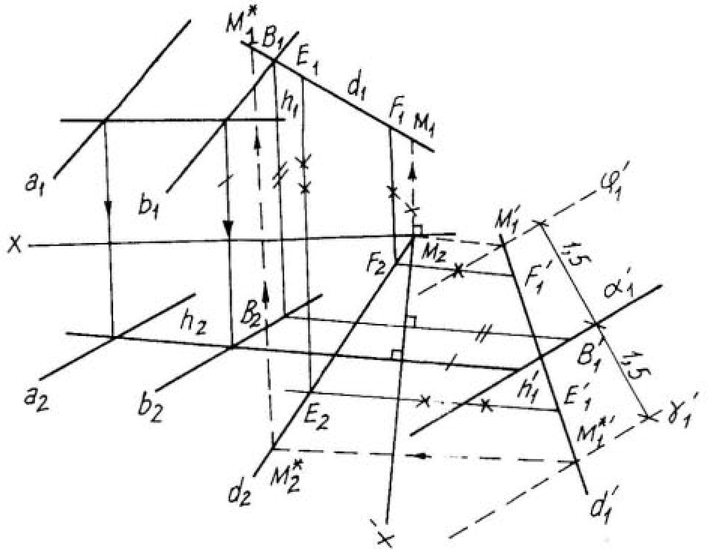
<u>BÀI 34</u>: Cho mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng a và b song song, và một đường thẳng d. Tìm trên d một điểm M cách mặt phẳng α một đoạn bằng 1,5 cm (hình 94).



Hình 94.

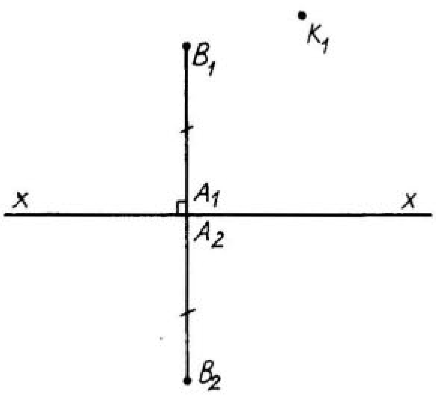
***Phân tích*:** Quĩ tích của M là hai mặt phẳng φ và γ song song với mặt phẳng α cho trước và cách α một đoạn bằng 1,5 cm. Phải thay mặt phẳng hình chiếu đứng để ba mặt phẳng // thành ba đường thẳng //. Các giao điểm của d với hai mặt phẳng quĩ tích sẽ là điểm M cần tìm (hình 95).

***Giải*:** Kẻ một đường bằng h cắt a và b. Chọn $x'x' \perp h_2$. Lấy một điểm B trên b và đưa sang hình chiếu đứng mới là B'_1. Đường thẳng h'_1B' là hình chiếu suy biến α'_1 của mặt phẳng α. Sau đó kẻ hai đường thẳng φ'_1 và γ'_1 song song với α'_1 và cách 1,5 cm. Hai mặt phẳng φ'_1 và γ'_1 sẽ cắt d'_1 tại hai điểm M và M* là hai nghiệm cần tìm. Sau đó đưa kết quả về hai hình chiếu cũ. (hình 95).

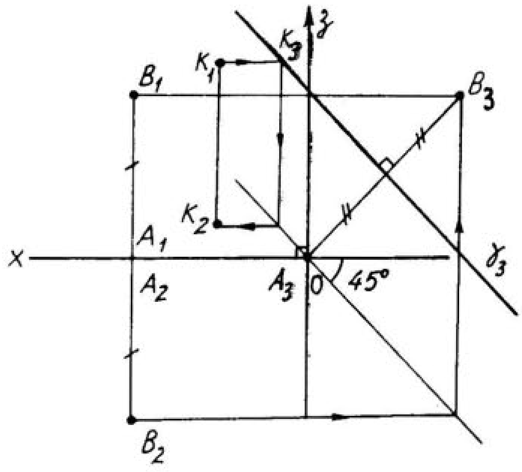


Hình 95.

BÀI 35: Tìm nốt hình chiếu bằng K_2 của điểm K biết rằng K cách đều A và B (hình 96).

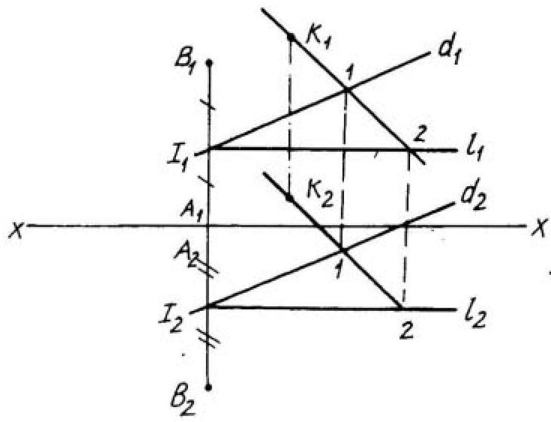


Hình 96.



Hình 97.

Phân tích: K phải thuộc mặt phẳng trung trực của AB. Vì AB là đường cạnh nên nếu ta dùng hình chiếu cạnh để giải bài toán thì đơn giản hơn. Mặt phẳng trung trực của AB là đường thẳng trung trực γ_3 của A_3B_3, và K_3 phải thuộc γ_3. Dựng hình ngược trở lại ta có K_2. Còn có thể giải bài toán này như sau (hình 98) AB là một đường cạnh thuộc mặt phẳng phân giác I.

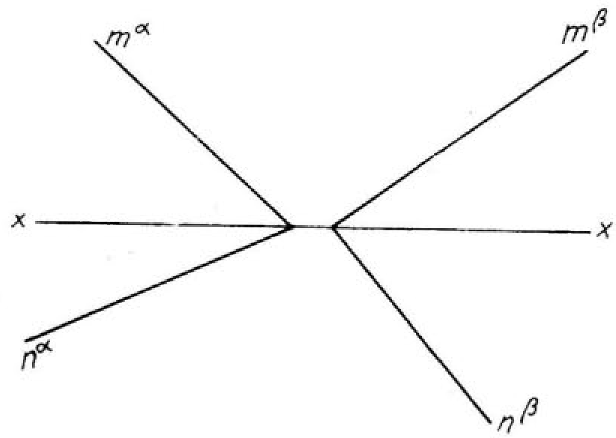


Hình 98.

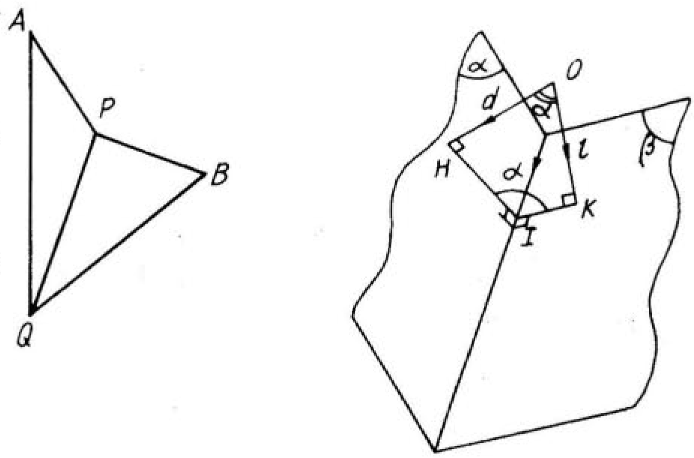
Vậy mặt phẳng trung trực γ của AB phải là một mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và song song với mặt phẳng phân giác II. Vậy qua I tôi kẻ hai đường d và l cùng song với mặt phẳng phân giác hai ($d_1 // d_2$) và ($l_1 // l_2$) thì d x l xác định mặt phẳng trung trực γ của AB. Cuối cùng chỉ việc gắn K vào một đường thẳng bất kỳ của γ là ta tìm được K_2.

BÀI 36: Xác định độ lớn thật của góc giữa hai mặt phẳng α và β cho bằng vết (hình 99).

***Phân tích*:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng đó. Ta có thể tìm giao tuyến PQ của hai mặt phẳng đó, rồi trên mặt phẳng thứ nhất lấy một điểm A bất kỳ, trên mặt phẳng thứ hai lấy một điểm B. Ta có hai tam giác APQB cắt nhau theo PQ. Sau đó thay mặt phẳng hình chiếu hai lần để PQ thành đường thẳng chiếu: $P'_2 \equiv Q'_2$, suy biến thành một điểm thì góc $\widehat{A'_2P'_2B'_2}$ là góc cần tìm. Nhưng sau đây là cách giải bài toán ngắn gọn hơn.

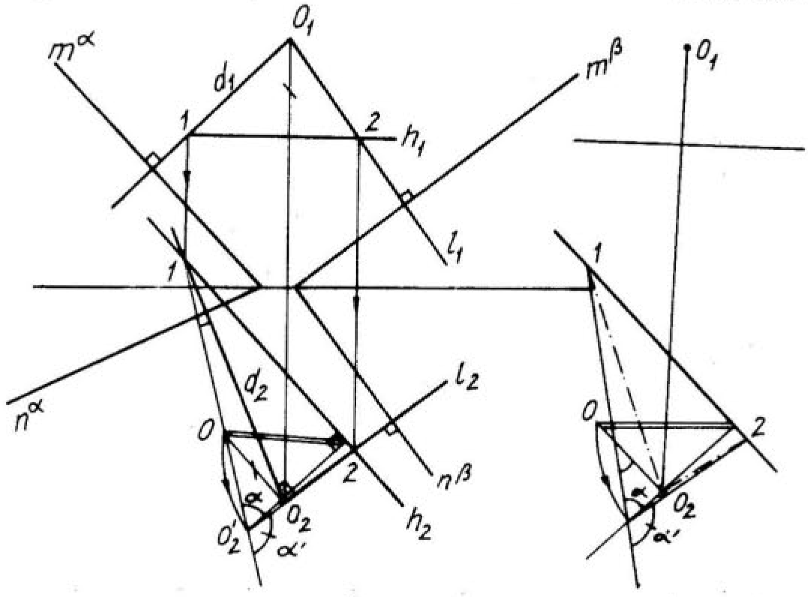


Hình 99.



Hình 100.

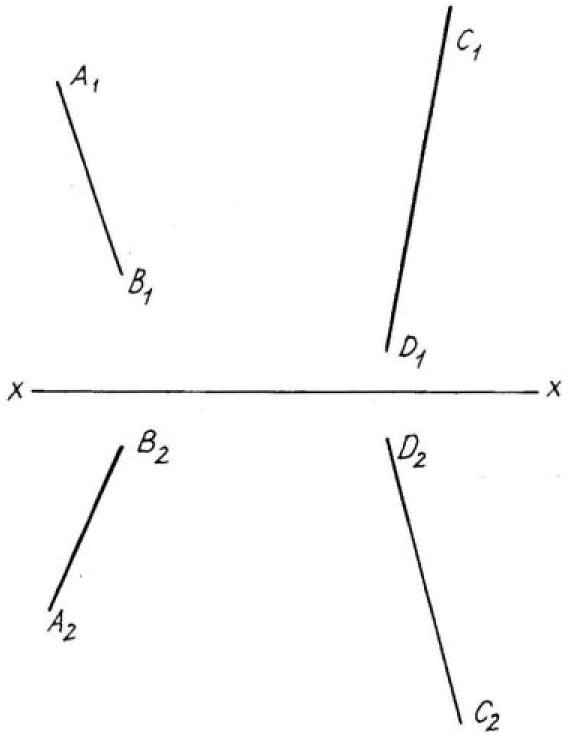
Qua O bất kỳ không thuộc hai mặt phẳng trên, ta kẻ d ⊥ α và l ⊥ β, thì góc giữa d và l là góc α là góc bù của góc α' giữa hai mặt phẳng. Dùng xoay quanh đường bằng để tìm độ lớn thật của góc α rồi suy ra góc α'.



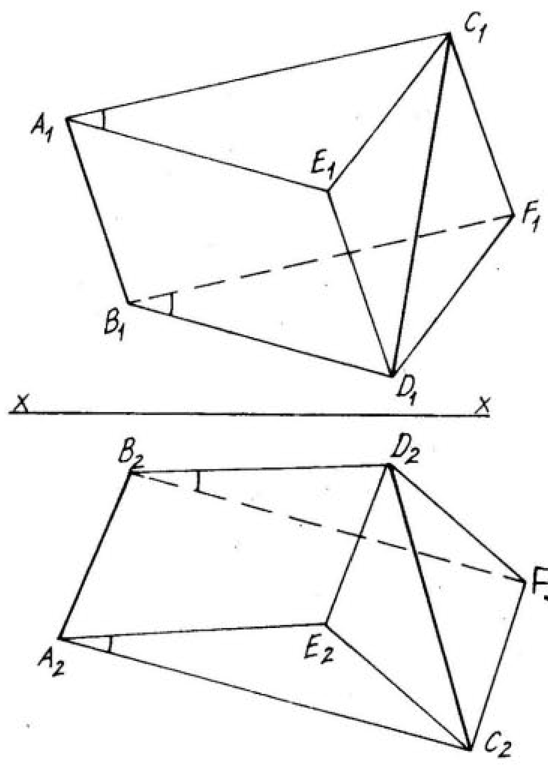
Hình 101.

II. CÁC BÀI TOÁN PHỨC TẠP

BÀI 37: Cho hai đoạn thẳng AB và CD chéo nhau. Kẻ một đường bằng h cắt AB và CD theo cùng tỷ lệ, hình (102).



Hình 102.

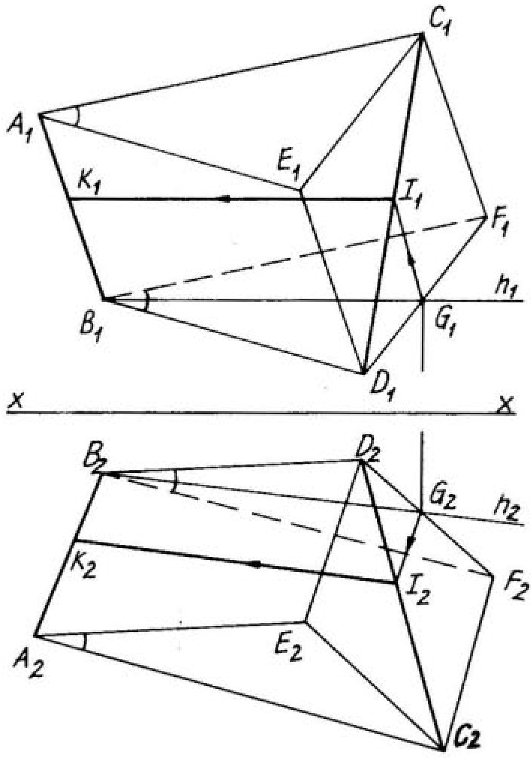


Hình 103.

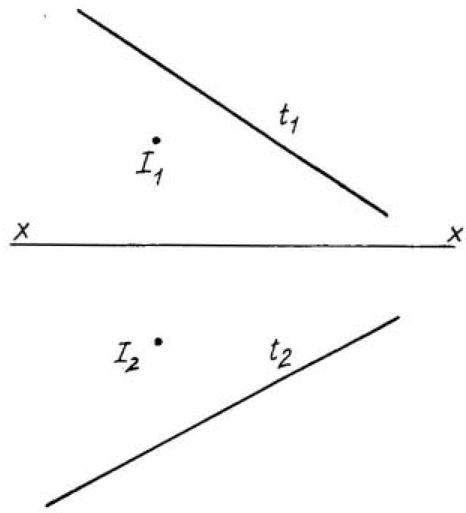
Phân tích: Qua AC và BD phải lập được hai mặt phẳng song song. Sau đó dùng định lý Talét để giải quyết.

Giải: Kẻ DE // và = BA; kẻ CF // và = AB. Như vậy ta có hai mặt phẳng AEC và BDF song song với nhau (hình 103).

Trong mặt phẳng BDF kẻ một đường bằng h. h_1 cắt d_1F_1 tại G_1. Kẻ G_1I_1 // C_1F_1. Từ I_1 kẻ I_1K_1 // h_1, thì I_1K_1 là hình chiếu đứng của đường bằng cắt AB tại K và CD tại I. Theo Talet ta có: $\frac{I_1D_1}{C_1D_1} = \frac{I_1G_1}{C_1F_1} = \frac{K_1B_1}{A_1B_1} \rightarrow \frac{I_1D_1}{C_1D_1} = \frac{K_1B_1}{A_1B_1}$. Vậy K và I đã chia AB và CD theo cùng tỷ lệ. Cũng có thể kẻ AK // và = CD rồi giải như trên (hình 104).



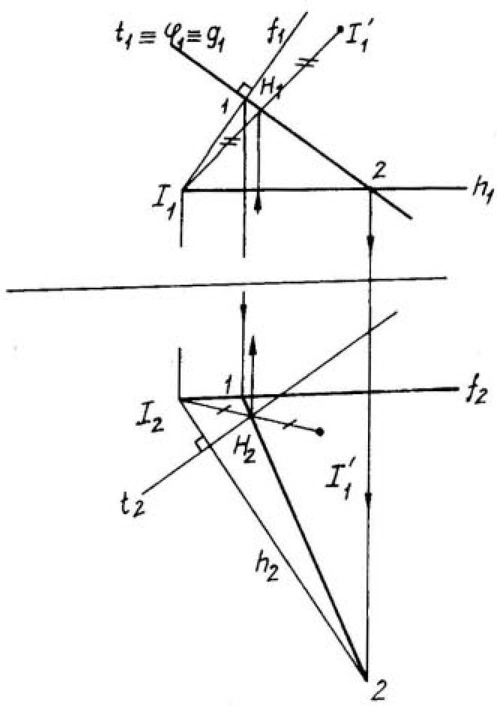
Hình 104.



Hình 105.

BÀI 38: Vẽ điểm đối xứng của điểm I qua đường thẳng t (hình 105).

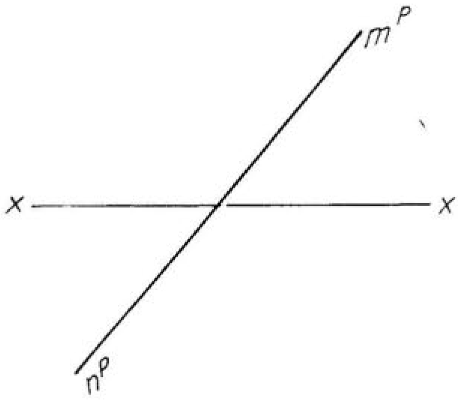
Phân tích: Phải tìm chân vuông góc H hạ từ I xuống đường thẳng t, (không hạ vuông góc ngay trên đồ thức được). Để tìm H, qua I ta lập một mặt phẳng γ (h x f) $\perp$ t: $f_1 \perp t_1$ và $h_2 \perp t_2$. Sau đó tìm giao điểm của γ với t. Mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\varphi_1 \equiv t_1$, cắt γ (h x f) theo giao tuyến có $g_1 \equiv d_1$. g_1 cắt h_1 và f_1 tại hai điểm 1 và 2 từ đó suy ra g_2. g_2 cắt t_2 tại H_2, suy ra H_1. Bây giờ chỉ việc lấy I'_2 đối xứng với I_2 qua H_2; I'_1 đối xứng với I_1 qua H_1, thì I' là điểm đối xứng của I qua đường thẳng t (hình 106).



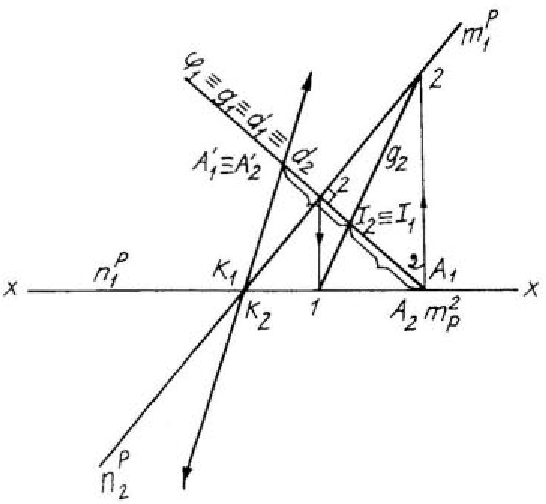
Hình 106.

BÀI 39: Vẽ đường thẳng x' đối xứng với trục x qua mặt phẳng P có $m^P \equiv n^P$ (hình 107).

Phân tích: Về nguyên tắc phải lấy hai điểm A và B trên xx rồi tìm điểm đối xứng A' và B' qua mặt phẳng P sau đó nối A'B'. Nhưng ở đây trục x ($x_1 \equiv x_2 \equiv x$) có một điểm chung với mặt phẳng P rồi. Đó là giao điểm xx với $m^P \equiv n^P$. Ta gọi là K ($K_1 \equiv K_2$). Thì điểm đối xứng với K qua mặt phẳng P lại là chính điểm K. Nên ta chỉ cần lấy một điểm A trên trục xx ($A_1 \equiv A_2$) rồi tìm điểm đối xứng A' của A qua mặt phẳng P. Để tìm A', từ A hạ một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng P: $d_1 \perp m^P$ và $d_2 \perp n^P$, và ở đây $d_1 \equiv d_2$. Sau đó tìm giao điểm I của d với mặt phẳng P, rồi lấy A'I = IA. Chú ý là d $\perp$ P mà P $\perp$ mặt phẳng phân giác II vì P có hai vết trùng nhau nên d đi qua I phải thuộc mặt phân giác II nên $d_1 \equiv d_2$ (hình 108).



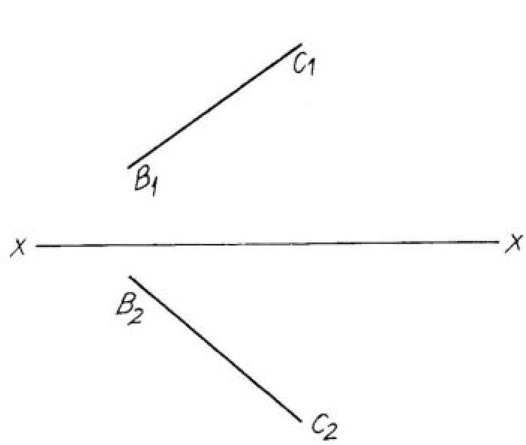
Hình 107.



Hình 108.

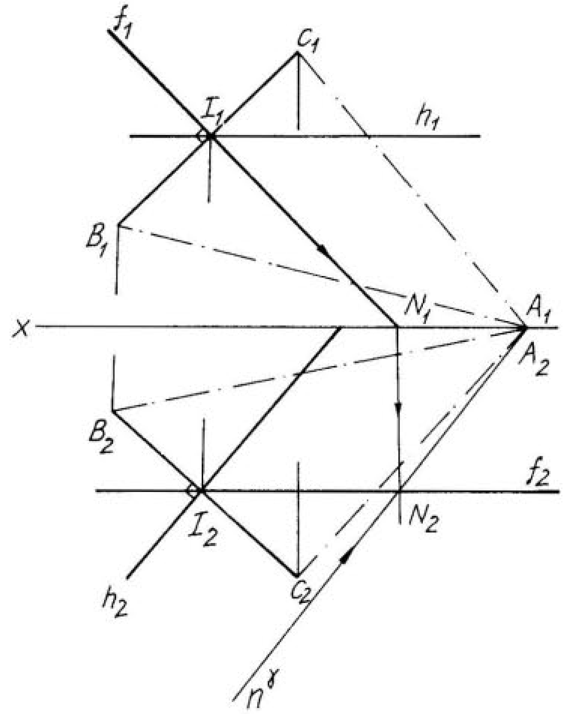
BÀI 40: Vẽ tam giác cân ABC, AB = AC, đỉnh A thuộc trục xx (hình 109).

Phân tích: Quỹ tích của điểm A là mặt phẳng trung trực của BC. Sau đó tìm giao điểm của trục xx với mặt phẳng trung trực thì đó là điểm A cần tìm.



Hình 109.

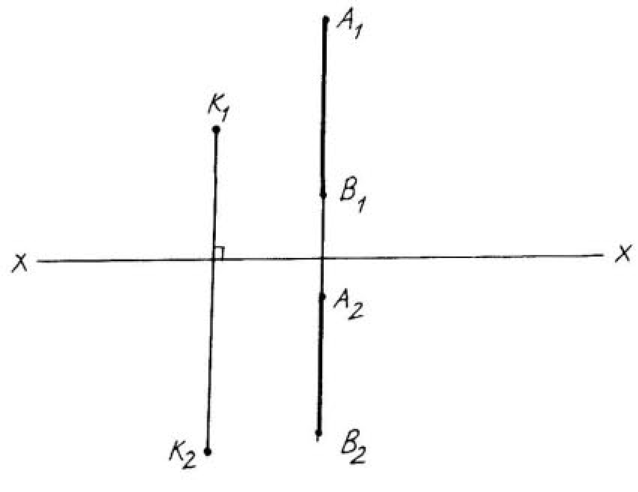
***Giải*:** Lập mặt phẳng trung trực γ của BC (hình 110). Qua trung điểm I của BC kẻ một đường bằng h và một đường mặt f sao cho $h_2 \perp B_2C_2$ và f_1 B_1C_1 thì $\perp$(h x f) tạo ra mặt phẳng trung trực γ. Mặt phẳng trung trực có một điểm chung với trục xx, đó chính là giao điểm của 2 vết của mặt phẳng trên trục xx. Vì vậy chỉ cần tìm một vết n^{γ} của mặt trung trực và vết này cắt trục xx tại chính điểm A cần tìm. Vết bằng N_2 của đường mặt f cho ta một điểm của n^{γ}, rồi kẻ $n^{\gamma} // h_2$ thì có $A_1 = A_2$ trên trục xx.



Hình 110.

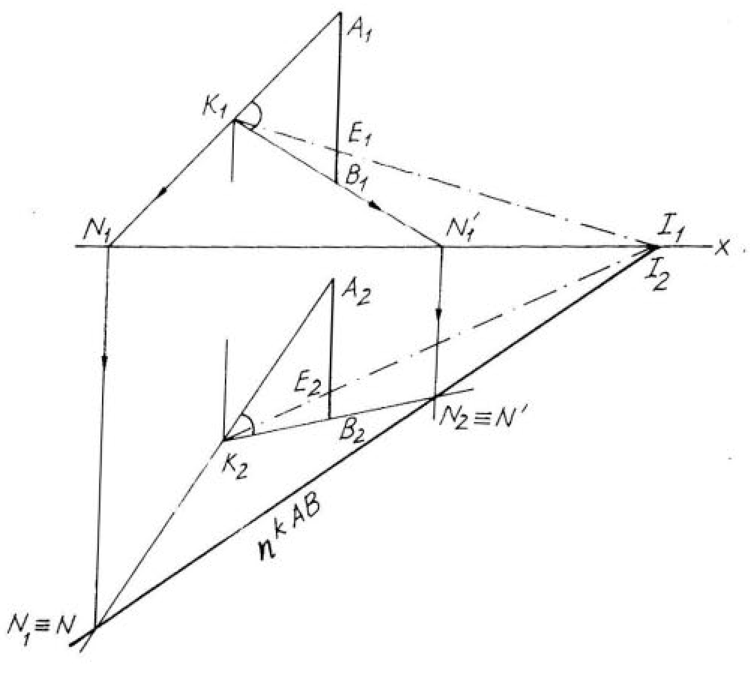
<u>BÀI 41</u>: Qua điểm K kẻ một đường thẳng d cắt cả trục xx và đường cạnh CD, (hình 111).

***Phân tích*:** Qua K và AB lập mặt phẳng KAB. Sau đó tìm giao điểm I của trục xx với mặt phẳng KAB. I, K và AB đều thuộc mặt phẳng KAB nên IK sẽ cắt AB tại E. Muốn tìm vết bằng n^{KAB} thì tìm vết bằng N của KA, sau đó tìm vết bằng N' của KB. Nối N và N' thì đó là vết bằng n^{KAB} của mặt phẳng KAB. n^{KAB} cắt trục xx tại I $(I_1 \equiv I_2)$ K_1I_1 cắt A_1B_1 tại E_1 và K_2I_2 cắt A_2B_2 tại E_2 (hình 112).

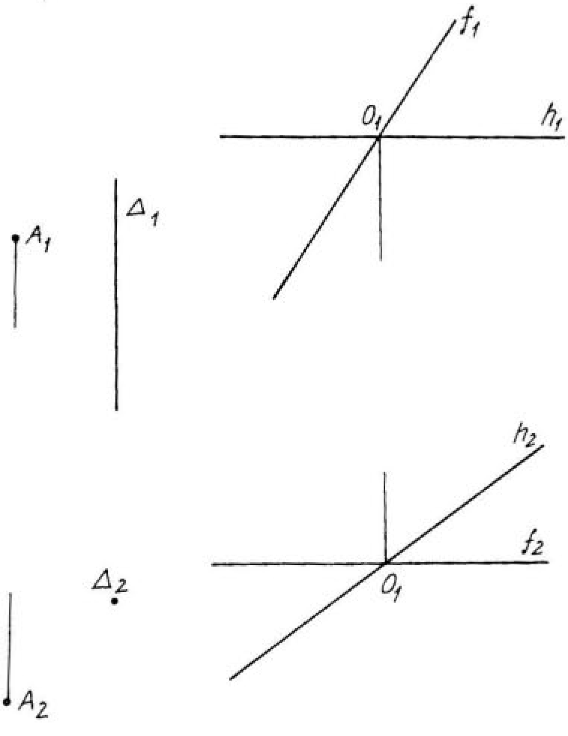


Hình 111.

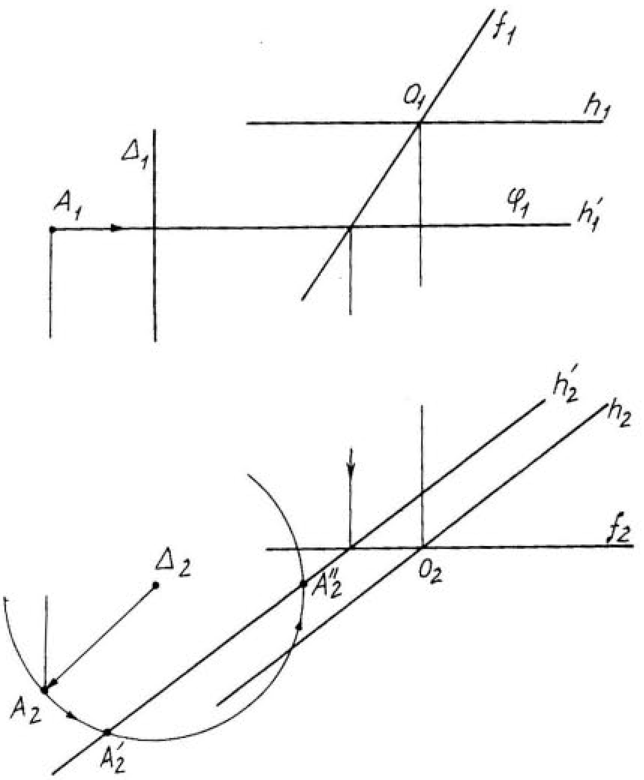
<u>BÀI 42</u>: Cho một điểm A và (hình 113) một mặt phẳng (h x f). Xoay A quanh Δ trục xoay chiếu bằng để A tới vị trí mới A' thuộc mặt phẳng cho trước (h x f).



Hình 112.



Hình 113.



Hình 114.

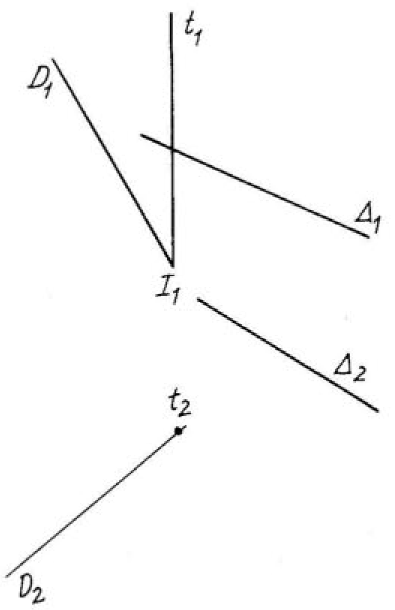
Phân tích: Khi xoay điểm A quanh Δ chiếu bằng thì A vạch nên một đường tròn thuộc một mặt phẳng bằng φ_1 nên hình chiếu đứng của đường tròn là một đoạn thẳng // trục xx, còn hình chiếu bằng là một đường tròn có bán kính là $A_2\Delta_2$. Mặt phẳng bằng φ_1 chứa đường tròn sẽ cắt mặt phẳng (h x f) theo một đường bằng h'. Giao điểm của đường tròn với h'_2 là vị trí mới A' của A. Xem dựng hình trên hình 114, ta có hai vị trí A' và A", vậy bài toán này có hai nghiệm.

Chú ý: Nếu trục xoay Δ là một đường bằng, đường mặt, hoặc đường thẳng bất kỳ thì phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu một lần hoặc hai lần để cho trục xoay Δ thành chiếu bằng hoặc chiếu đứng rồi tiến hành như trên.

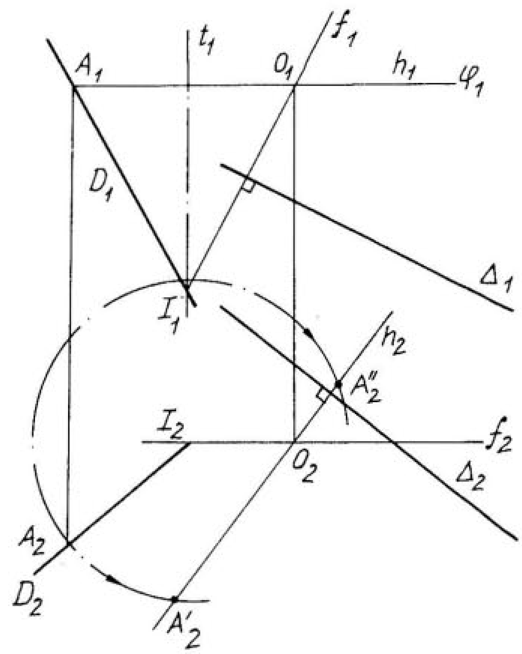
<u>BÀI 43</u>: Cho hai đường thẳng D và Δ chéo nhau và một trục t chiếu bằng cắt D tại I. Quay D quanh t để đến vị trí mới $D' \perp \Delta$ (hình 115).

Phân tích: Mọi đường thẳng D' đi qua I mà vuông góc với Δ thì phải thuộc một mặt phẳng α qua I và $\perp \Delta$ ($f_1 \perp \Delta_1$ và $h_2 \perp \Delta_2$). Khi xoay, D có điểm I không đổi. Vậy sang vị trí mới D' cũng qua I. Bây giờ lấy một điểm A trên D để xoay quanh t thì A vạch nên một đường tròn thuộc một mặt phẳng bằng φ_1 nên hình chiếu bằng của đường tròn vẫn là tròn. Mặt bằng φ_1 cắt mặt phẳng α theo một đường bằng h có $h_2 \perp \Delta_2$. Chỉ cần kẻ qua I một đường mặt f của mặt phẳng α ($f_1 \perp \Delta_1$). h_1 cắt f_1 tại O_1, suy ra O_2 thuộc f_2 qua O_2 kẻ $h_2 \perp \Delta_2$. Đường tròn trên cắt h_2 ở đâu thì đó là vị trí mới A' của A. Tất nhiên khi đó A' thuộc α. IA' là D' cần tìm (hình 116).

Đường tròn cắt h_2 tại hai điểm bên ta có hai nghiệm IA' và IA"



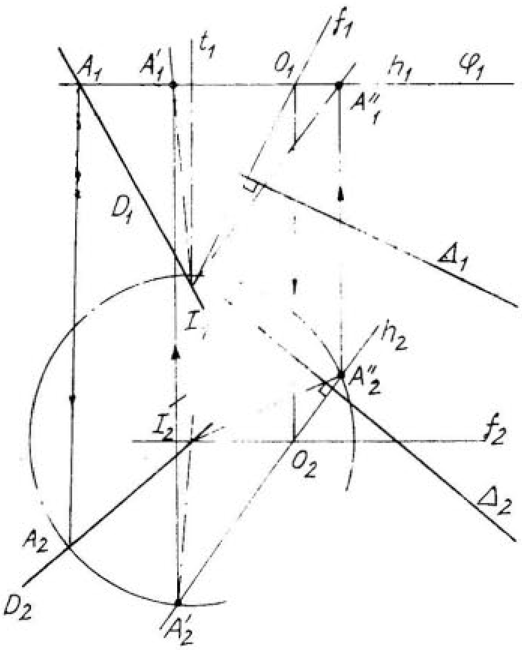
Hình 115.



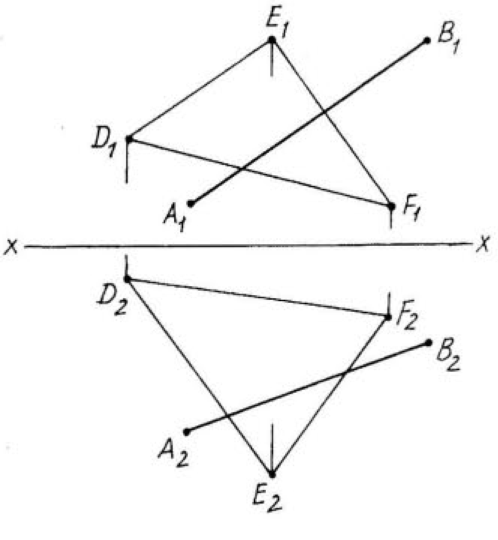
Hình 116.

BÀI 44: Tìm trên đường thẳng AB điểm C cách mặt phẳng DEF một đoạn bằng a cho trước (hình 118).

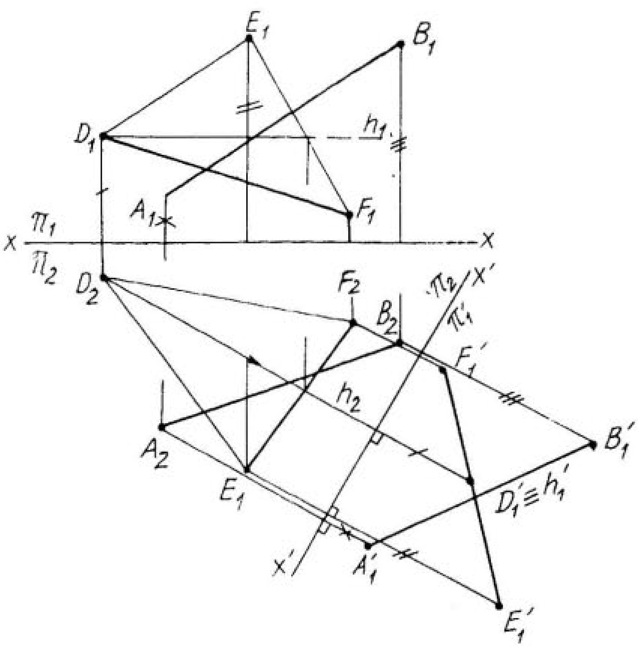
Phân tích: Những điểm trong không gian mà cách mặt phẳng DEF một đoạn bằng a là hai mặt phẳng α và β song song với DEF và cách DEF một đoạn bằng a. Tìm giao điểm của AB với α và β chính là các điểm C cần tìm. Để giải bài toán dễ dàng, ta thay mặt phẳng hình chiếu đứng thì khi đó 3 mặt phẳng sẽ có thể thành 3 đường thẳng song song và bài toán trở thành tìm giao điểm của AB với hai đường thẳng α'_1 và β'_1.



Hình 117.

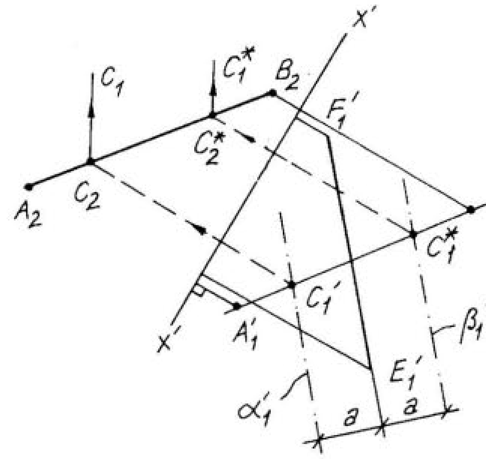


Hình 118.



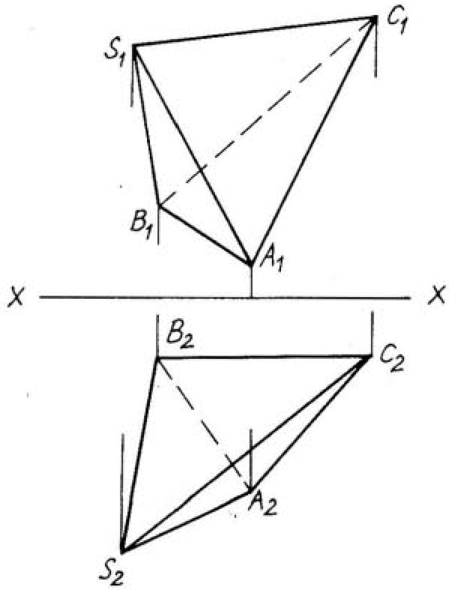
Hình 119.

Giải: Để DEF thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ $\frac{\pi'_1}{\pi_2}$, ta dùng một đường bằng h thuộc DEF, rồi lấy trục x'x' vuông góc với h_2 thì h'_1 sẽ thành một điểm và mặt phẳng DEF thành một đường thẳng E_1F_1 đi qua h'_1, và hai mặt phẳng α và β sẽ thành α'_1 // E_1F_1 // β'_1(hình 119). Giao điểm C'_1 và C^*_1 của $A'_1B'_1$ với α'_1 và β'_1 chính là hai nghiệm cần tìm. Sau đó đưa kết quả về hai hình chiếu ban đầu (hình 120).

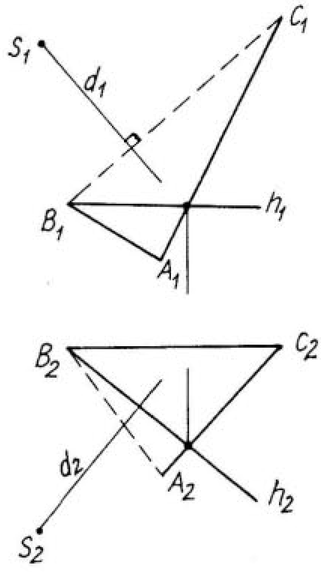


Hình 120.

BÀI 45: Cho một hình chóp SABC, có $BC//\pi_1$. Xác định đường cao SH của hình chóp (hình 121).



Hình 121.



Hình 122.

Phân tích: Bây giờ ta phải hạ một đường thẳng vuông góc d từ S xuống mặt phẳng ABC, sau đó tìm giao điểm H của d với mặt phẳng ABC. SH là đường cao cần tìm.

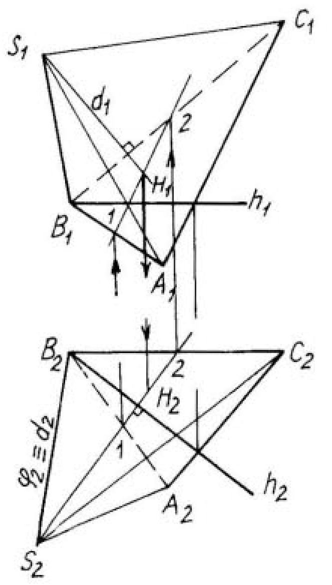
Giải: d qua S mà vuông góc với ABC thì $d_1 \perp f_1$ và $d_2 \perp h_2$ của ABC. Đầu bài cho BC là đường mặt f rồi nên $d_1 \perp B_1C_1$. Phải vẽ h_1 để có h_2. Sau đó kẻ $d_2 \perp h_2$. Rồi dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng $\varphi_2 \equiv d_2$ để tìm giao điểm H của d với mặt ABC. Có H_1 suy ra H_2(hình 122, 123).

BÀI 46: Cho một mặt phẳng chiếu cạnh α và một điểm A ngoài mặt phẳng α. Không dùng các phép biến đổi và không dùng hình chiếu cạnh, hạ một đường thẳng vuông góc từ A xuống mặt phẳng α và tìm chân H đường vuông góc đó. (hình 124)

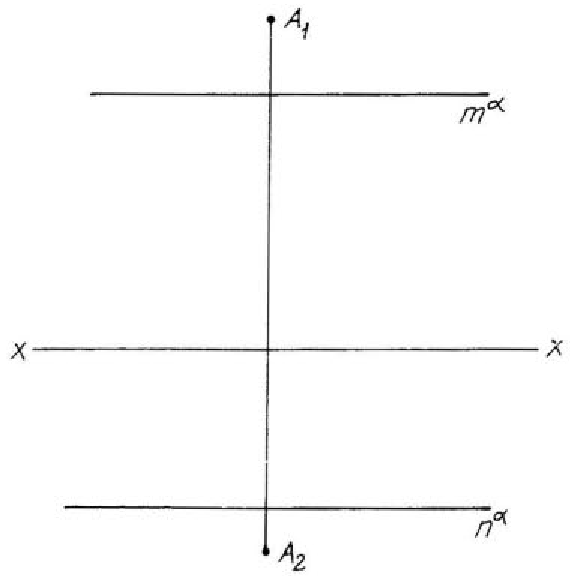
Phân tích:

a) α là mặt phẳng chiếu cạnh ($\perp$ π_3) nên đường vuông góc AH $\perp$ α tức AH // π_3, và AH là một đường cạnh, do đó chân đường vuông góc (H_1, H_2) phải trên đường thẳng A_1A_2.

b) H phải thuộc giao tuyến g với α của mọi mặt phẳng qua A và vuông góc với α. Nên đường thẳng A_1A_2 cắt g_1 tại H_1 và cắt g_2 tại H_2, và (A_1H_1, A_2H_2) là đường vuông góc cần dựng.



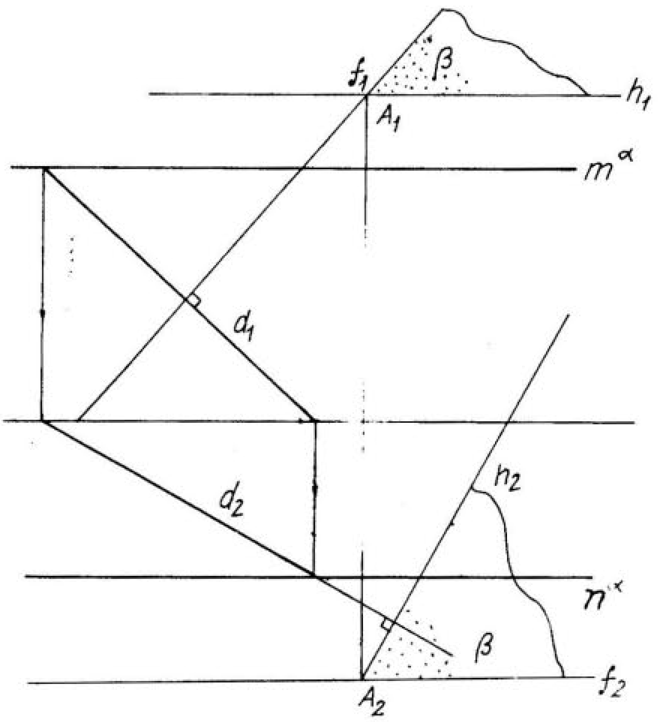
Hình 123.



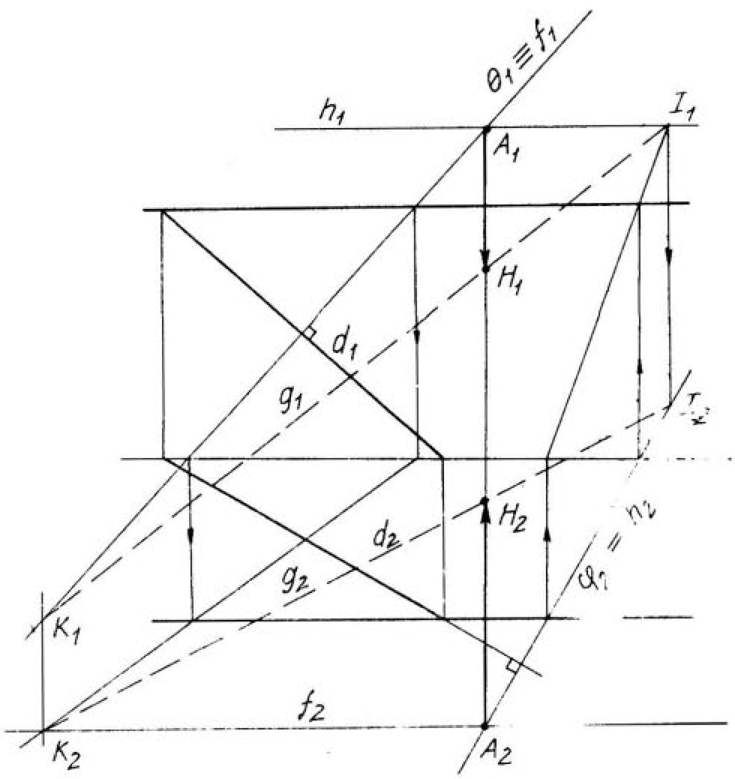
Hình 124.

Giải: Đầu tiên kẻ một đường thẳng bất kỳ d thuộc mặt phẳng α. Sau đó qua A lập một mặt phẳng β vuông góc với d tức là β cũng $\perp$ với α. Để xác định β, qua A ta kẻ một đường mặt f sao cho $f_1 \perp d_1$ và một đường bằng h sao cho $h_2 \perp d_2$ (hình 125).

Bây giờ ta phải tìm giao tuyến g của mặt phẳng β với mặt phẳng α. Muốn vậy dùng một mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng $\varphi_2 \equiv h_2$ để tìm giao điểm I của h với mặt phẳng α. Sau đó dùng mặt phẳng chiếu đứng $\theta_1 \equiv f_1$ để tìm giao điểm K của f với α. Kẻ K_1I_1 cắt đường dóng A_1A_2 tại H_1 và K_2I_2 cắt A_1A_2 tại H_2. A_1H_1 và A_2H_2 chính là hai hình chiếu của đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng α (KI là giao tuyến của mặt phẳng β với mặt phẳng α) (hình 126).



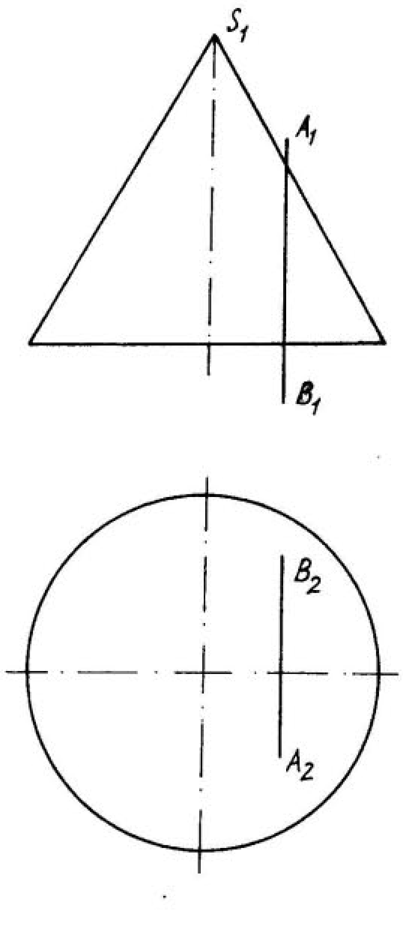
Hình 125.



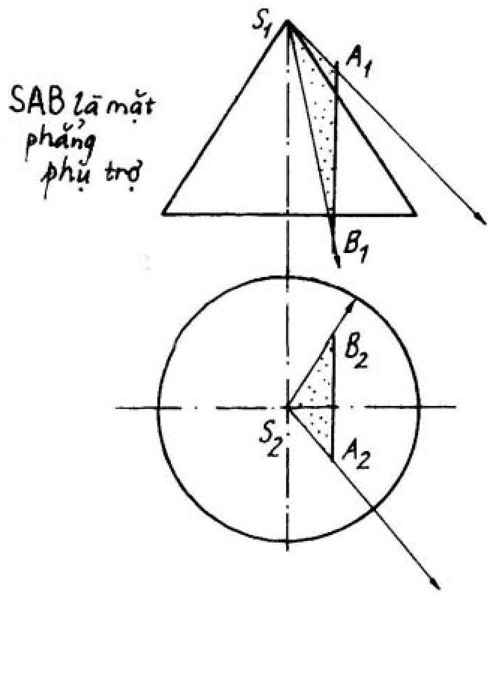
Hình 126.

BÀI 47: Tìm giao điểm của đường cạnh AB với một mặt nón tròn xoay thẳng đứng (hình 127).

Phân tích: Theo lý thuyết đã học, phải lập một mặt phẳng phụ trợ qua AB và phải qua đỉnh S của nón thì giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ (S, AB) với mặt nón mới là một tam giác cân. Nếu mặt phẳng phụ trợ không qua S thì sẽ cắt nón theo các đường cônic (ellíp, parabôn, hypecbôn), khi đó xác định giao điểm không chính xác. Vậy mặt phẳng phụ trợ phải là SAB (hình 128). Để tìm tam giác cân giao tuyến của SAB với nón, ta tìm giao tuyến của SAB với đáy nón (ở đây là mặt phẳng bằng) bằng cách tìm giao điểm N và N' của SA và SB với mặt đáy nón rồi nối lại và cho cắt vòng tròn đáy nón tại E, F thì SEF là tam giác cân giao tuyến. A_2B_2 cắt S_2F_2 và E_2F_2 tại I_2 và K_2 thì đó là các giao điểm của AB với hình nón. Chú ý K_2 thuộc E_2F_2 nên K_1 thuộc đáy nón ở hình chiếu đứng (hình 129).

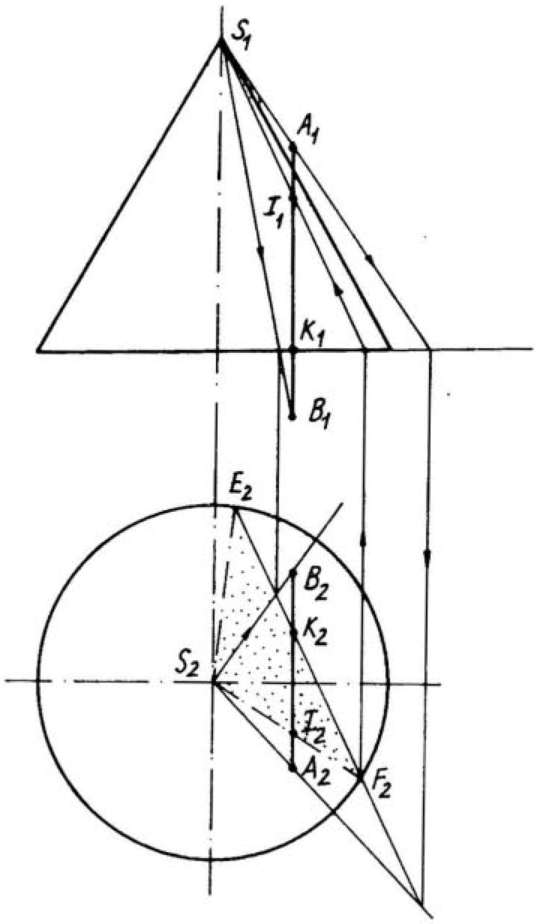


Hình 127.

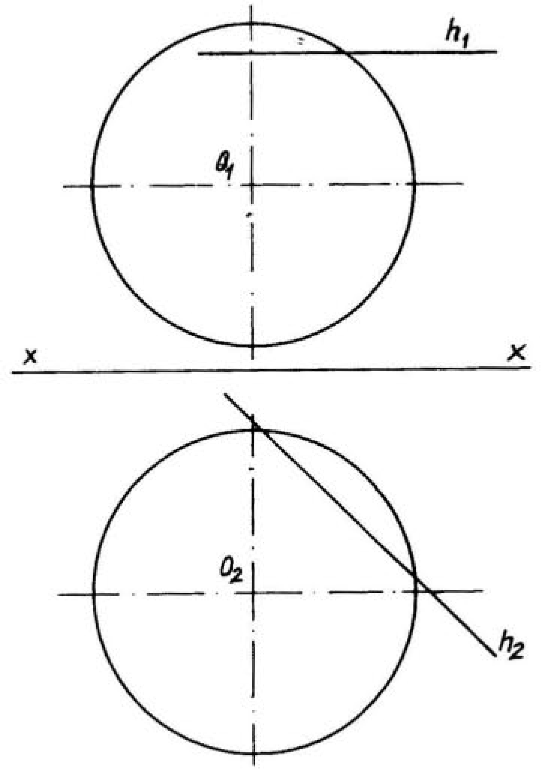


Hình 128.

BÀI 48: Cho mặt cầu tâm O, bán kính R và đường bằng h. Qua h dựng một mặt phẳng α (bằng vết) sau cho nó cắt mặt cầu theo đường tròn lớn nhất, rồi vẽ các hình chiếu của giao tuyến đó (hình 130).



Hình 129.

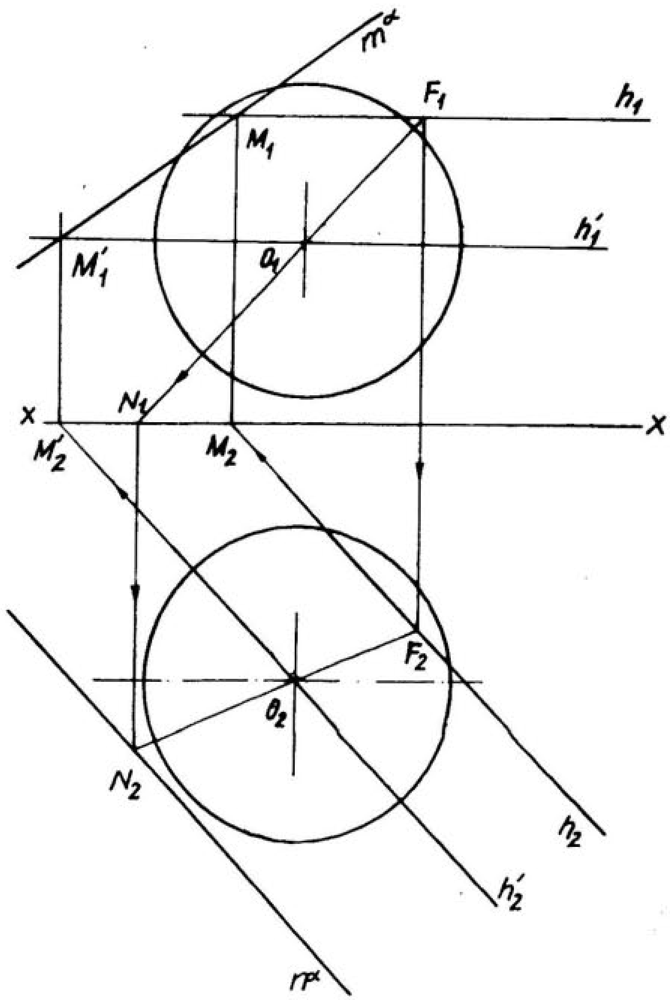


Hình 130.

Phân tích: Mặt phẳng α muốn cắt được hình cầu theo đường tròn lớn nhất thì α phải qua tâm cầu. Vậy mặt phẳng α chính là mặt phẳng (h, O).

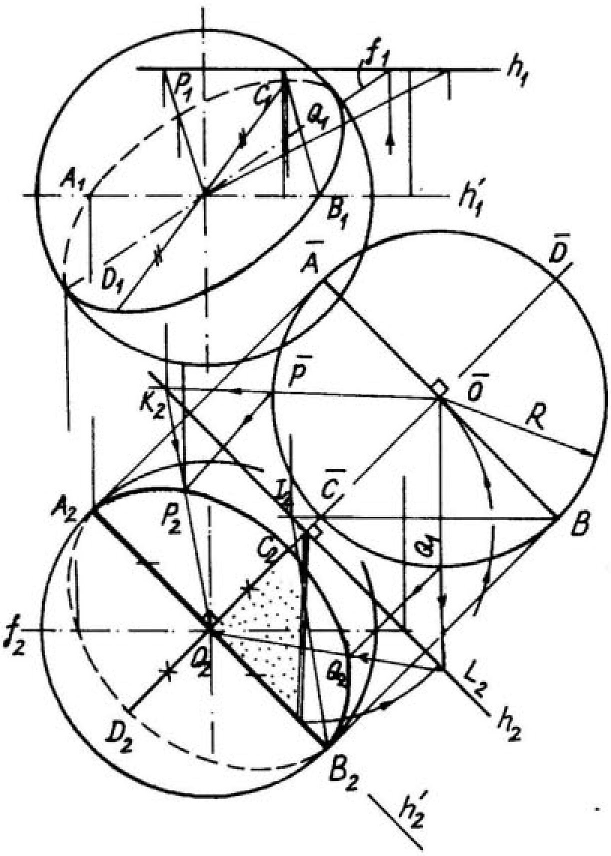
Giải: Việc đầu tiên là tìm hai vết n^α và m^α của mặt phẳng α (h; O), vết bằng n^α phải song song với h_2 vì mặt phẳng α đi quanh.

Muốn vậy ta kẻ một đường thẳng OF bất kỳ của mặt phẳng α (h; O). Tìm vết bằng N_2 của OF. Qua N_2 kẻ n^α // h_2. Muốn tìm vết đứng m^α của α thì ta kẻ thêm đường bằng h' // h qua O. Tìm vết đứng M_1 và M'_1 của h và h' thì đường thẳng $M_1M'_1$ chính là vết đứng m^α của α. Nếu vết bằng n^α cắt trục xx tại α_x thì chỉ cần tìm M_1 của h rồi nối $M_1\alpha_x$ thì đó là vết đứng m^α. Để vẽ giao tuyến của mặt phẳng α (h; O) với mặt cầu ta sẽ tiến hành như sau. Ta xoay điểm O quanh đường bằng h thì sau khi xoay ($\overline{O}$, h_2) là độ lớn thật và giao tuyến là đường tròn tâm $\overline{O}$ và bán kính R. O_2 thành $\overline{O}$; A_2B_2 thành $\overline{A}\,\overline{B}$ Muốn tìm C_2 thì kẻ $\overline{B}\,\overline{C}$ cắt trục xoay h_2 tại I_2 không đổi khi xoay. Rồi kẻ B_2I_2, từ $\overline{C}$ dóng $\perp$ h_2 cắt B_2I_2 tại C_2. Về nguyên tắc có trục lớn A_2B_2 và trục nhỏ C_2D_2 thì elíp đã được xác định, đây là hình chiếu bằng của giao tuyến của mặt phẳng α (h; O) với mặt cầu. Nếu muốn đưa về hình chiếu bằng điểm $\overline{P}$ của giao tuyến, thì kẻ $\overline{O}\,\overline{P}$ cắt h_2 tại K_2. Nối O_2K_2 rồi dóng $\overline{P}$ về O_2K_2 thì có được P_2. Đối với điểm $\overline{Q}$ cũng làm tương tự. Đồng thời lợi dụng tính chất đối xứng qua tâm của ellíp, để vẽ nốt các điểm khác. Muốn đưa các điểm của giao tuyến về hình chiếu đứng thì coi các điểm đó hoặc là thuộc mặt phẳng (h // h') như điểm P và điểm Q, hoặc là thuộc mặt cầu như các điểm A, B v.v...

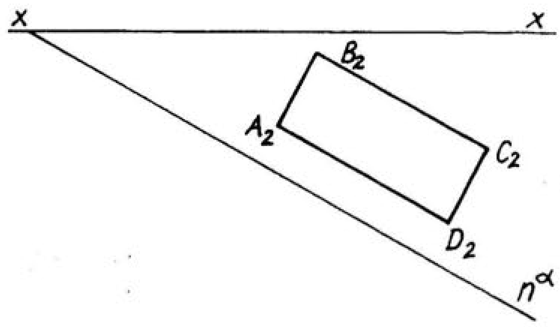


Hình 131.

<u>BÀI 49</u>: Cạnh AD của hình vuông ABCD là một đường bằng của mặt phẳng α chứa hình vuông ABCD. Cho trước $A_2B_2C_2D_2$ và n^α hãy vẽ nốt hình chiếu đứng của hình vuông đó (hình 133).



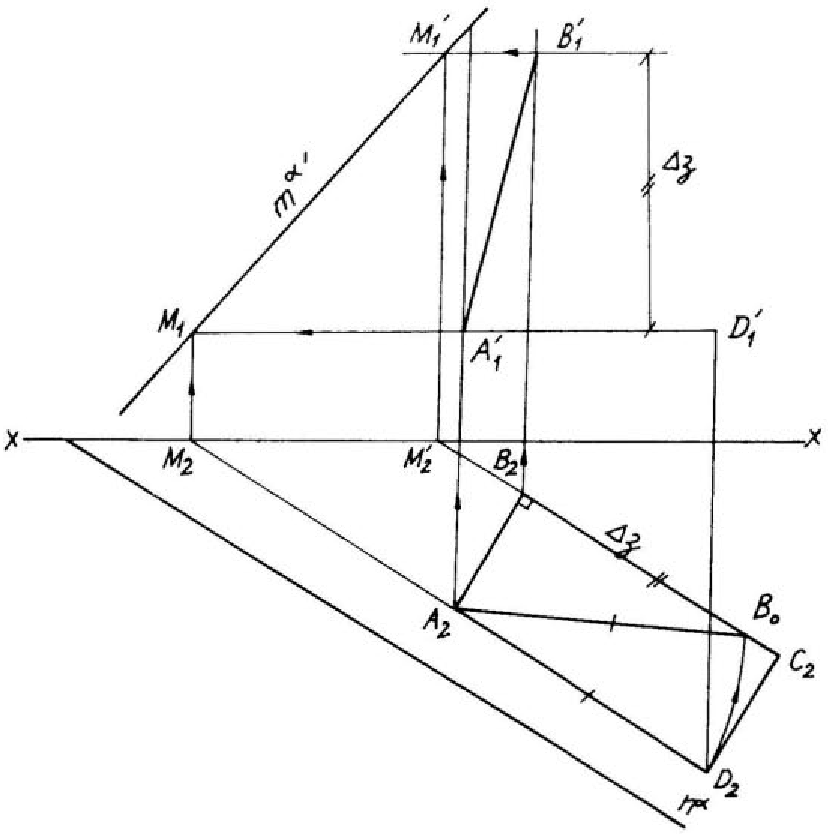
Hình 132.



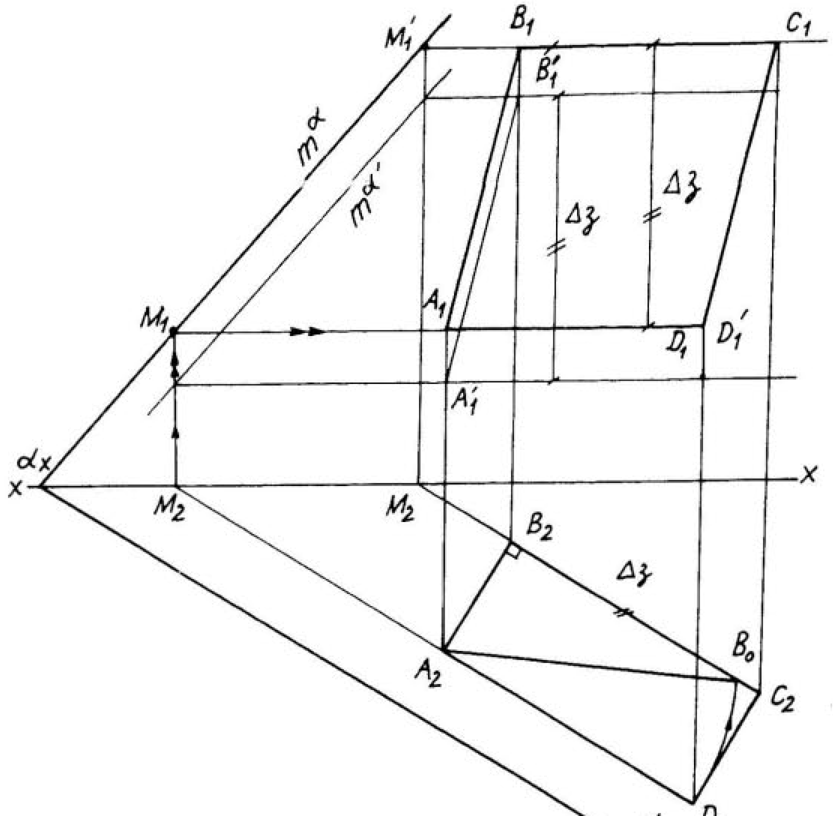
Hình 133.

Phân tích: Hình chiếu bằng của hình vuông phải là hình chữ nhật $A_2B_2C_2D_2$ (định lý hình chiếu của góc vuông). Vì AD là đường bằng nên chiều dài A_2D_2 là độ lớn thật của cạnh hình vuông. Dựa vào A_2B_2 và dựa vào độ dài thật của AB chính là A_2B_2 ta dựng tam giác vuông $A_2B_2B_o$ thì trong đó B_2B_o là Δz giữa A và B. Nhưng ta chưa biết độ cao cụ thể của chúng. Vậy tạm lấy vị trí $A'_1B'_1$ liên hệ chiếu với A_2B_2 cho trước và sao cho hiệu độ cao bằng Δz. Dựa vào hai đường bằng AD và BC ta tìm các vết đứng của chúng là M_1 và M'_1, rồi nối vào thì nói chung vết $m^{\alpha'}$ không cắt $n^{\alpha'}$ trên trục xx. Vậy $m^{\alpha'}$ chưa phải là vết đứng m^{α} cần tìm (hình 134).

Bây giờ kẻ m^{α} // $m^{\alpha'}$ và qua điểm α_x trên trục xx, thì đây mới là vết đứng của α (hình 135). Vậy phải điều chỉnh hình chiếu đứng của A_1B_1. Từ M_2, dóng tiếp lên m^{α} thì có M_1 từ đó xác định được A_1. Tương tự cho B_1, Dựa vào nhận xét là hình chiếu đứng là hình bình hành, ta hoàn chỉnh được hình chiếu đứng $A_1B_1C_1D_1$.

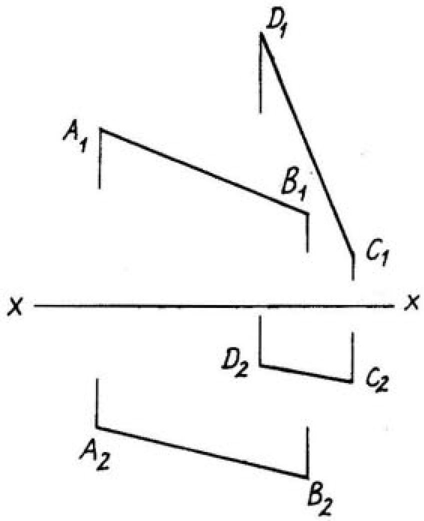


Hình 134.

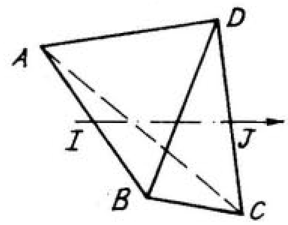


Hình 135.

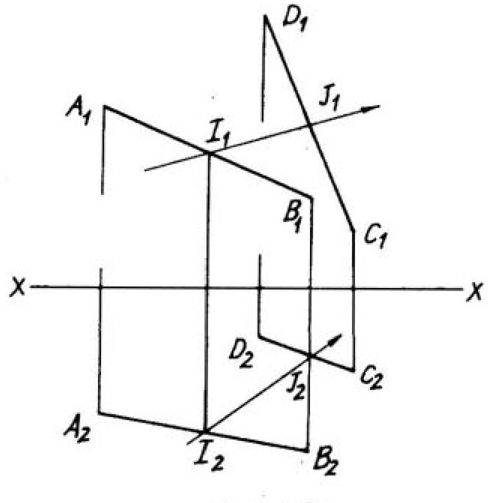
<u>BÀI 50</u>: Thay mặt phẳng hình chiếu để hình chiếu bằng mới $A'_2B'_2C'_2D'_2$ là hình bình hành (hình 136).



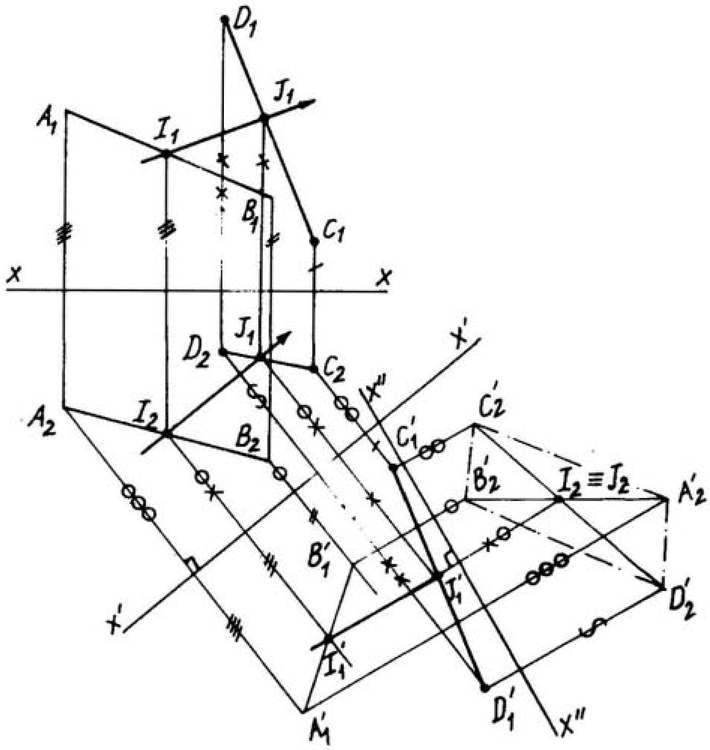
Hình 136.



Hình 137.



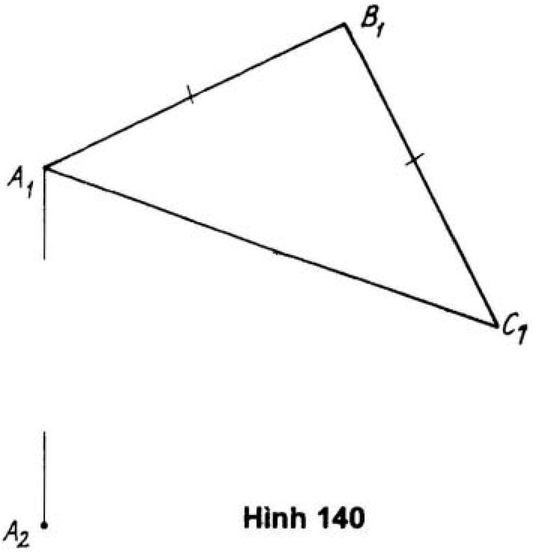
Hình 138.



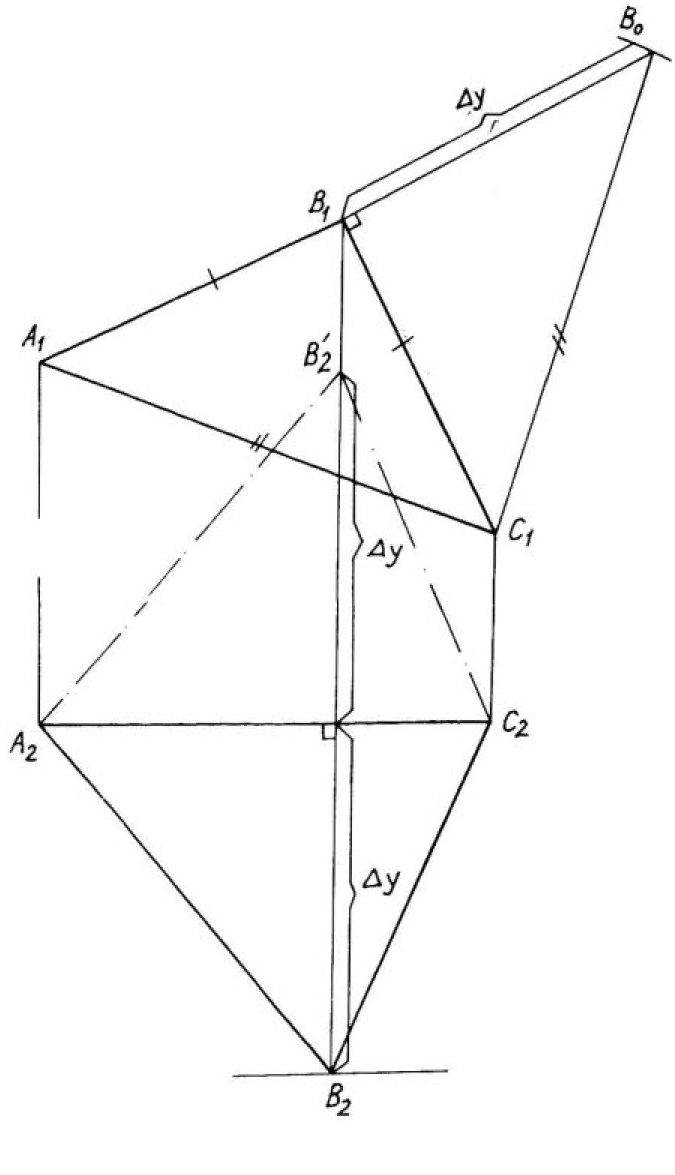
Hình 139.

Phân tích: Bốn điểm A, B, C và D tạo thành một tứ giác ghềnh (hình 137). Muốn cho ABCD chiếu thành một hình bình hành thì phải chiếu theo phương xác định bởi hai trung điểm của hai cặp cạnh đối nào đó. Ta có ba cặp cạnh đối, vậy có 3 phương chiếu. Ở đây ta chọn cặp cạnh AB và CD, nên phương chiếu là đường thẳng nối các trung điểm I và J (hình 138).

Muốn biến IJ thành đường chiếu thì phải thay mặt phẳng hình chiếu đứng trước để IJ thành đường mặt trong hệ thống mới $\frac{\pi'_1}{\pi_2}$. Sau đó thay mặt phẳng π_2 để đường thẳng IJ thành đường thẳng chiếu bằng trong hệ thống $\frac{\pi'_1}{\pi'_2}$. I'_2 trùng với J'_2 thành một điểm nên hình chiếu mới $A'_2C'_2B'_2D'_2$ thành một hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại điểm giữa. Trước tiên chọn x'x' // I_2J_2. Sau đó chọn x"x" vuông góc với $I'_1J'_1$ thì sẽ có $I''_2 \equiv J'_2$ sau khi dựng hình theo qui tắc thay mặt phẳng chiếu: độ cao cũ bằng độ cao mới, độ xa cũ bằng độ xa mới (hình 139).



Hình 140

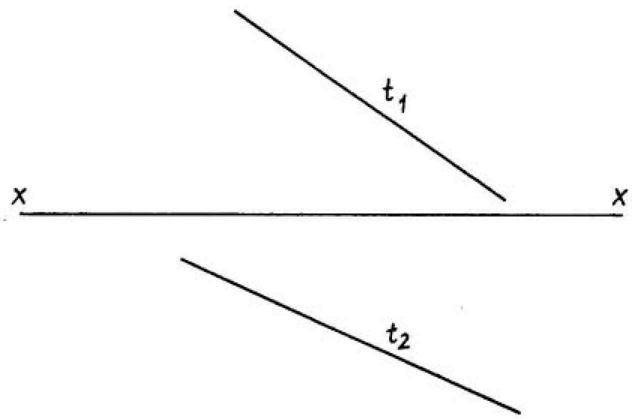


Hình 141

BÀI 51: Vẽ hình chiếu bằng của tam giác đều ABC có hình chiếu đứng là tam giác cân, cạnh bên nhỏ hơn cạnh đáy.

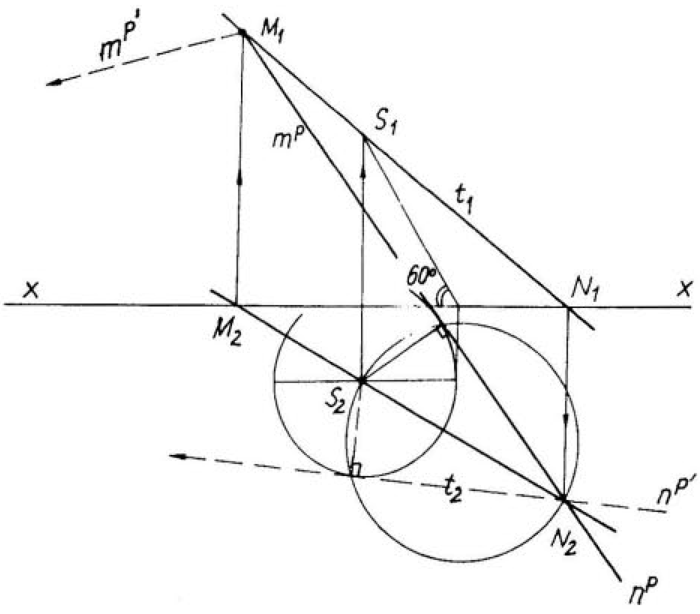
Phân tích: Vì ABC là đều nêu ba cạnh đều có độ lớn thật bằng nhau. Nhưng $A_1B_1 = B_1C_1$ theo đầu bài, vậy để có độ dài thật bằng nhau (phương pháp tam giác) thì hiệu độ xa của chúng phải bằng nhau (Δy của $A_2B_2 = \Delta y$ của B_2C_2), cũng có nghĩa là AC là một đường mặt, và A_2C_2 phải // xx và A_1C_1 là độ dài thật của ba cạnh của Δ đều ABC. Kẻ $B_1B_o \perp B_1C_1$ rồi đặt $C_1B_o = C_1A_1$ thì ta có ngay $\overline{B_1B_o}$ là Δy của A_2B_2 và B_2C_2. Theo hình ta có hai nghiệm là $A_2B_2C_2$ và $A_2B'_2C_2$.

BÀI 52: Vẽ các vết của mặt phẳng P chứa đường thẳng t và P nghiêng với π_2 một góc 60^o (hình 142).



Hình 142.

Phân tích: Mặt phẳng P chứa đường thẳng t, trên vết bằng n^P của mặt phẳng P phải chứa vết bằng N_2 của t và vết đứng m^P phải chứa vết đứng M_1 của t. Bây giờ lấy một điểm S bất kỳ trên t. Lập một hình nón thẳng đứng tròn xoay có đỉnh là S có góc đáy là 60^o và đáy thuộc π_2 (hình 143). Mặt phẳng P mà làm với π_2 một góc 60^o thì mặt phẳng P phải tiếp xúc với mặt nón trên. Đỉnh S thuộc t tức thuộc P. Vậy chỉ cần vạch vết bằng n^P đi qua N_2 và tiếp xúc với đáy nón trên. n^P cắt trục xx tại một điểm α_x, nối α_x với M_1 là vết đứng m^P của mặt phẳng P. Còn một nghiệm $n^{P'}$ nữa. Chú ý: nếu N_2 ở ngoài đường tròn đáy nón thì có hai nghiệm. Nếu N_2 thuộc đáy nón thì có một nghiệm, còn nếu N_2 ở trong đường tròn đáy nón thì vô nghiệm.



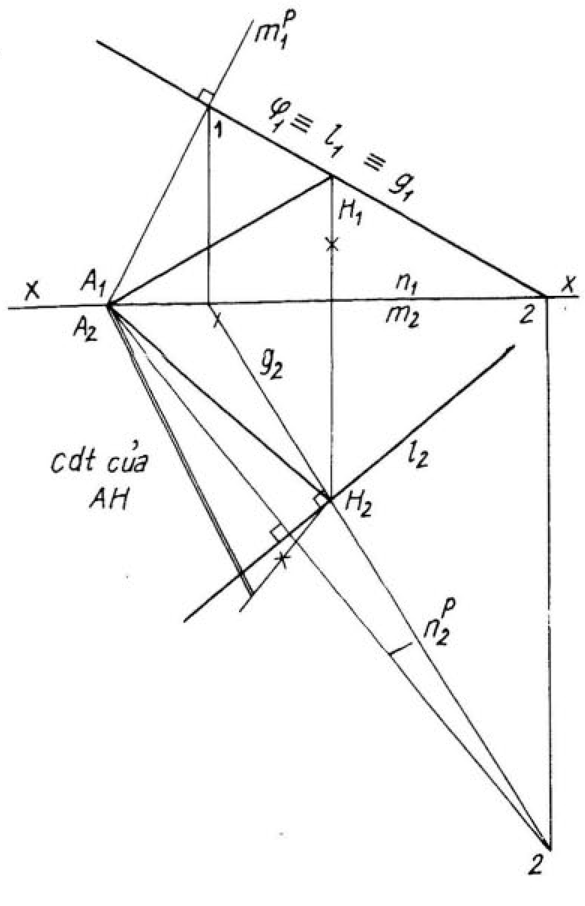
Hình 143.

BÀI 53: Tìm khoảng cách từ A đến đường thẳng l (hình 144).

(*Chú ý*: $A_1 \equiv A_2$).

Phân tích: Qua A lập một mặt phẳng $\alpha \perp l$. Sau đó tìm giao điểm H của l với mặt phẳng α thì AH là khoảng cách. Vì A thuộc x nên đây là giao điểm của hai vết của mặt phẳng P, mặt phẳng P muốn $\perp l$ thì $n_1^P \perp l_1$ và $n_2^P \perp l_2$.

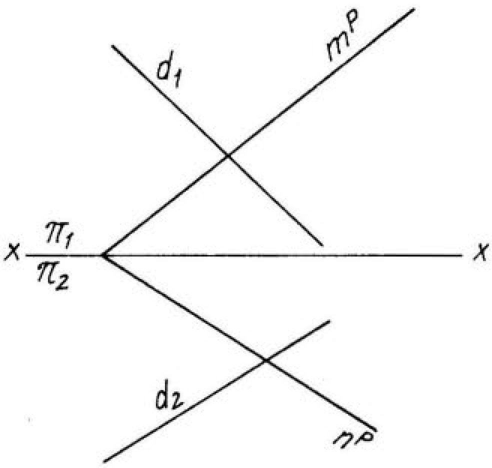
Bây giờ tìm giao điểm của l với P, bằng dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\varphi_1 \equiv l_1 \equiv g_1$ (g là giao tuyến của φ_1 với mặt phẳng P). Ta suy ra g_2 cắt l_2 tại H_2, từ đó suy ra H_1. AH chính là khoảng cách từ A đến l. Tìm độ lớn thật của AH bằng phương pháp tam giác vuông.



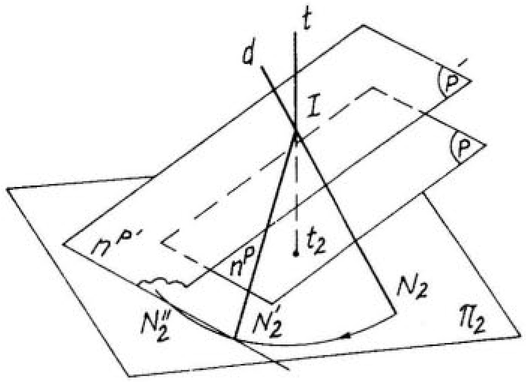
Hình 144.

BÀI 54: Cho đường thẳng d và mặt phẳng P bằng hai vết. Hãy xoay d quanh một đường thẳng chiếu bằng t tự xác định để d tới vị trí mới d' song song với P và cách P một khoảng bằng 1 cm (hình 145).

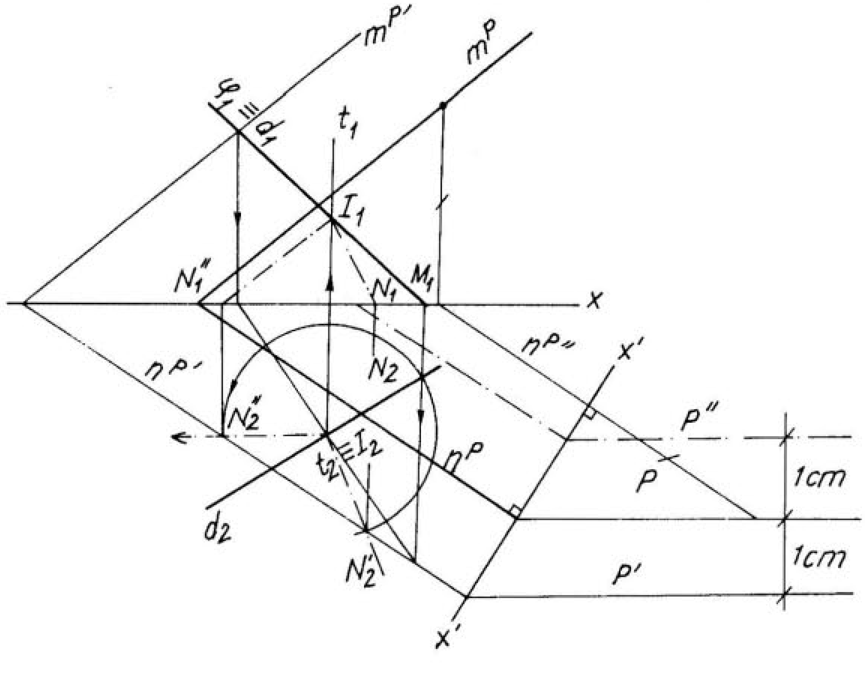
Phân tích: Đường thẳng d sau khi xoay thành d' thì d' phải thuộc một mặt phẳng P' song song với P và cách 1 cm. Bấy giờ tìm giao điểm I của d với mặt phẳng P'. Qua I kẻ một đường thẳng chiếu bằng t ($t_2 \equiv I_2$). Vậy trước khi xoay d đã có một điểm chung I cố định với P' vì I thuộc t. Sau đó chỉ việc xoay vết bằng N_2 của d quanh t_2 tới trùng với $n^{P'}$ là d thuộc mặt phẳng P' (hình 146).



Hình 145.



Hình 146.



Hình 147.

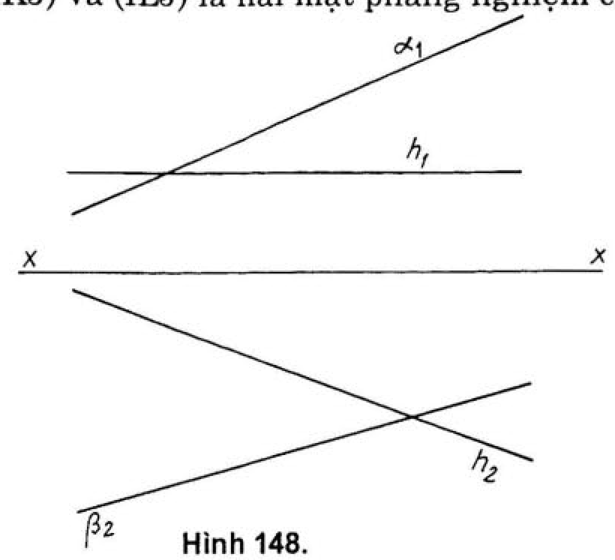
Giải: Trước hết thay mặt phẳng π_1 để mặt phẳng P thành chiếu đứng (hình chiếu đứng mới thành một đường thẳng) và khi đó P và P' thành 2 đường // và cách nhau 1 cm (hình 147). Đưa các vết của P' về ($n^{P'}$ // n^P; $m^{P'}$ // m^P). Dùng mặt phẳng phụ trợ φ_1 để tìm giao điểm I của d với P'. Qua I kẻ trục xoay t chiếu bằng ($t_2 \equiv I_2$). Với I_2 làm tâm và bán kính I_2N_2 (vết bằng của d) vạch một cung tròn cắt $n^{P'}$ tại N'_2 và N''_2. $I_2N'_2$ và $I_2N''_2$ là hai nghiệm. Đường tròn không cắt $n^{P''}$ nên không có nghiệm trên P".

BÀI 55: Dựng một mặt phẳng chứa đường bằng h sao cho nó cắt hai mặt phẳng chiếu đứng α_1 và chiếu bằng β_2 theo hai giao tuyến vuông góc nhau (hình 148).

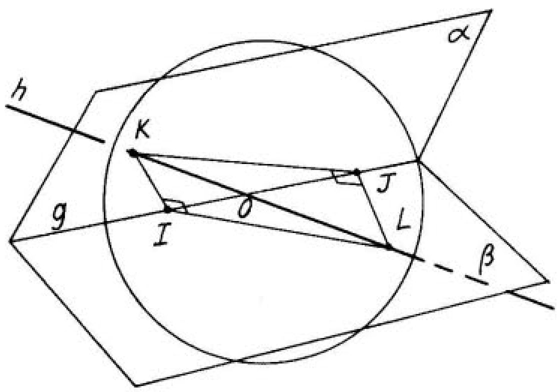
Phân tích: Trước hết phải tìm giao điểm K và L của h với α_1 và β_2. Sau đó lập hình cầu đường kính KL. Rồi tìm giao tuyến g của α và β, $g_1 \equiv \alpha_1$ và $g_2 \equiv \beta_2$ (hình 150). Cuối cùng tìm giao điểm I và J của g với hình cầu trên thì hai mặt phẳng (KLI) và (KLJ) là nghiệm của bài toán (hình 149).

Giải: Vì α_1 là mặt phẳng chiếu đứng (suy biến thành đường thẳng) nên ta có ngay K_1 của giao điểm ($K_1 = \alpha_1 \times h_1$). Suy ra K_2 trên h_2. Tương tự ta lại có $L_2 = \beta_2 \times h_2$, rồi suy ra L_1 trên h_1. Bấy giờ lập mặt cầu đường kính là $KL = K_2L_2$ (đường bằng). Bây giờ tìm giao tuyến g của hai mặt phẳng α_1 và β_2. Vì hai mặt phẳng đều mặt phẳng chiếu nên đương nhiên $g_1 \equiv \alpha_1$ và $g_2 \equiv \beta_2$.

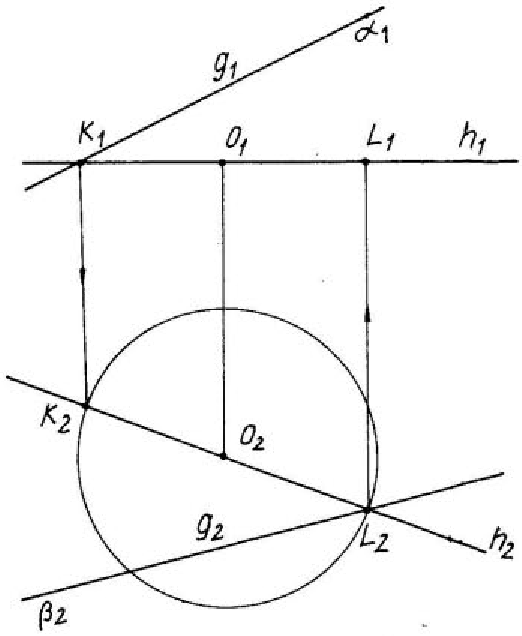
Vấn đề còn lại là tìm giao điểm g với mặt cầu (hình 151). Thay mặt phẳng hình chiếu đứng với trục x'x' // g_2. Trên g lấy hai điểm A và B để chuyển sang $A'_1B'_1$ là g'_1. Để tìm IJ, lập mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng γ_2. Trên hình chiếu đứng mới thiết diện là một đường tròn bán kính là R, sẽ cắt $A'_1B'_1$ tại I'_1 và J'_1. Đưa về hình chiếu cũ: (IKJ) và (ILJ) là hai mặt phẳng nghiệm cần tìm.



Hình 148.

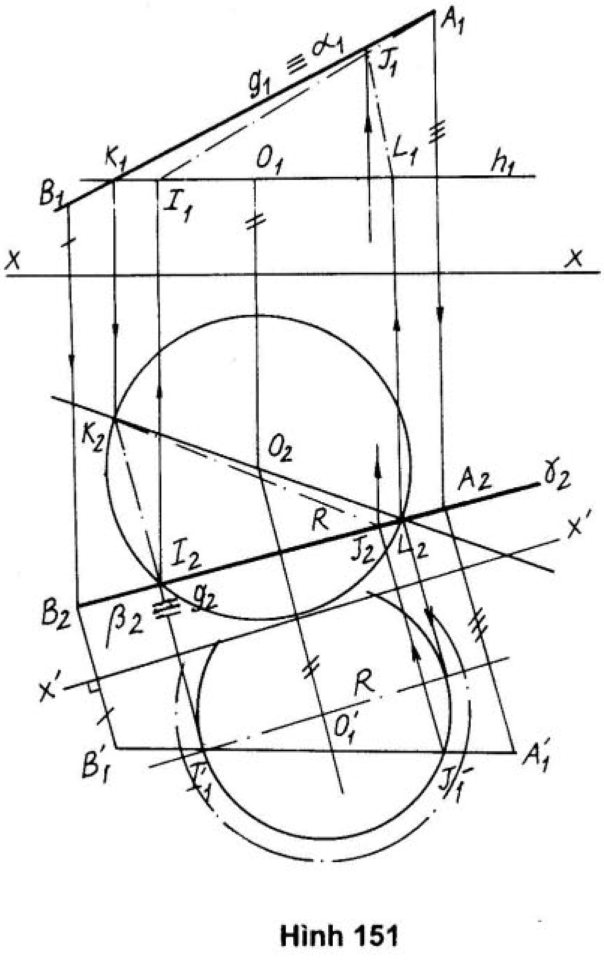


Hình 149.



Hình 150.

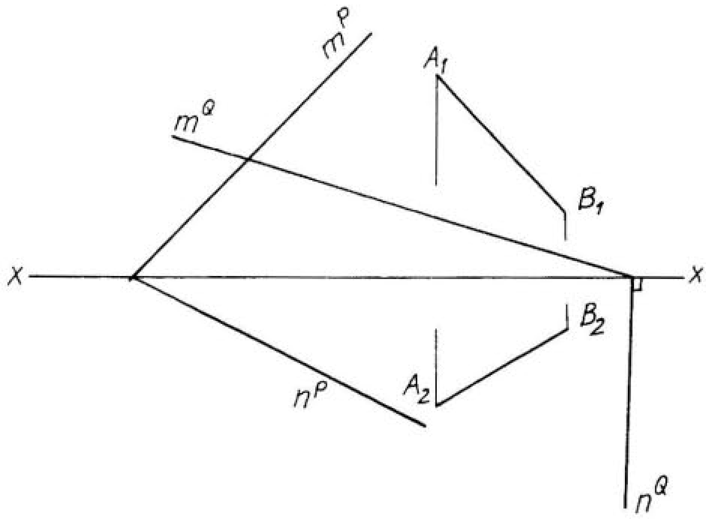
<u>BÀI 56</u>: Tìm trên đường thẳng AB một điểm I cách đều hai mặt phẳng P và Q, đều cho bằng các vết(hình 152).



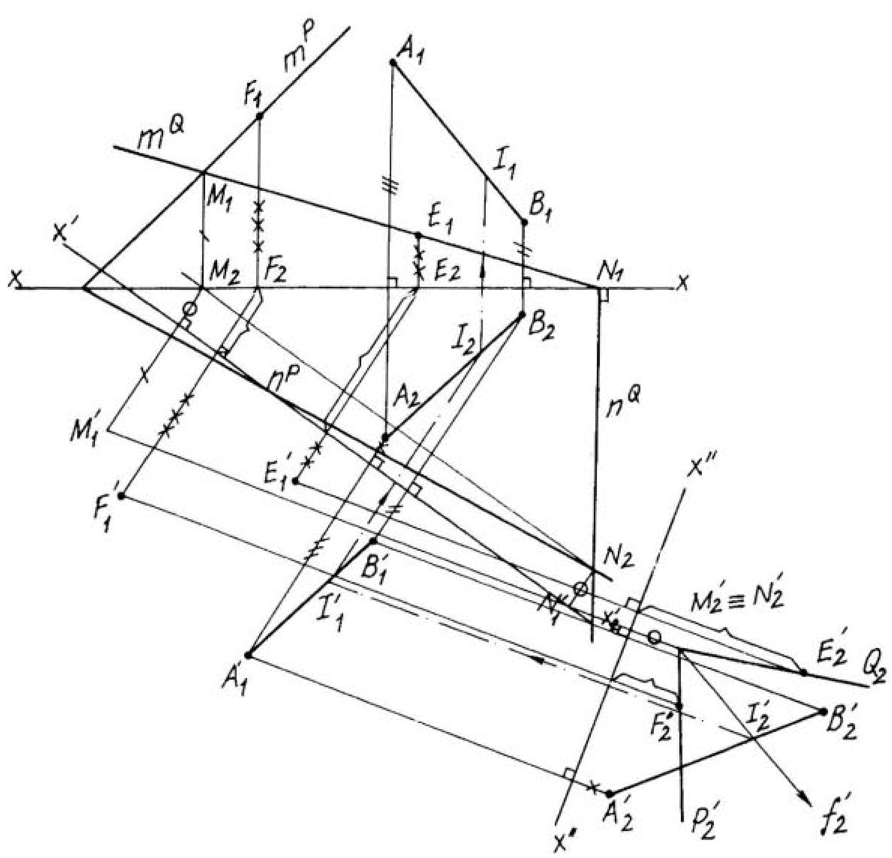
Hình 151

Phân tích: Đó là giao điểm I của AB với một mặt phẳng phân giác của nhị diện tạo bởi P và Q.

Giải: Đầu tiên tìm giao tuyến MN của P và Q (xem bài 17). Trên m^P ta lấy một điểm F và trên m^Q, ta lấy một điểm E. (MNE) chính là mặt phẳng Q và (MNF) là mặt phẳng P. Thay đổi mặt phẳng chiếu hai lần (x'x' // M_2N_2 và x"x" $\perp$ $M'_1N'_1$) thì MN thành một điểm $M'_2 \equiv N'_2$; $M'_2E'_2$ chính là mặt phẳng Q'_2 suy biến và $M'_2F'_2$ là mặt phẳng P'_2 suy biến. Mặt phẳng phân giác sẽ là đường phân giác M'_2f_2 của góc $\widehat{E'_2M'_2F'_2}$ (hình 153).

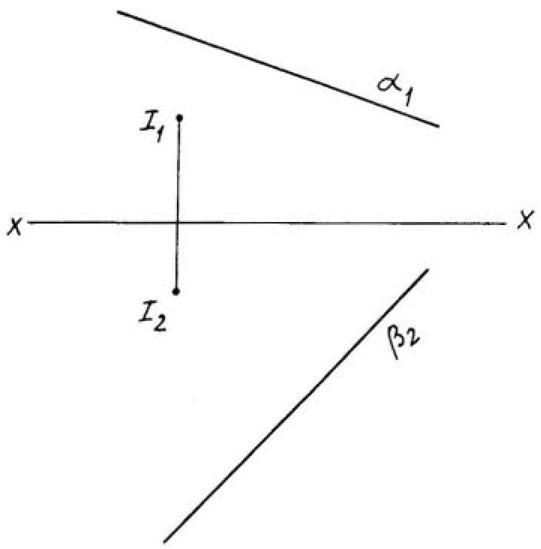


Hình 152.

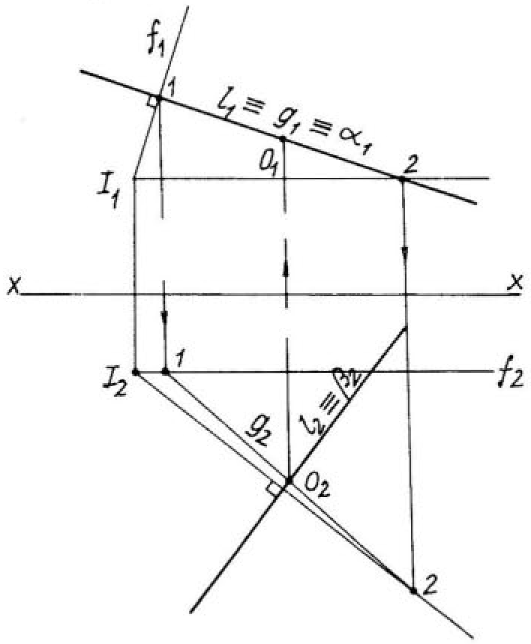


Hình 153.

Đường phân giác $M'_2f'_2$ cắt $A'_2B'_2$ tại I'_2. Từ đó dùng đường chấm gạch dóng về I'_1 thuộc $A'_1B'_1$. I_2 thuộc A_2B_2 và I_1 thuộc A_1B_1. I là một điểm của AB nhưng thuộc mặt phẳng phân giác của nhị diện tạo bởi P và Q nên I cách đều P và Q. Nếu vẽ đường phân giác ngoài của góc $\widehat{E'_2M'_2F'_2}$ thì còn một nghiệm I nữa.



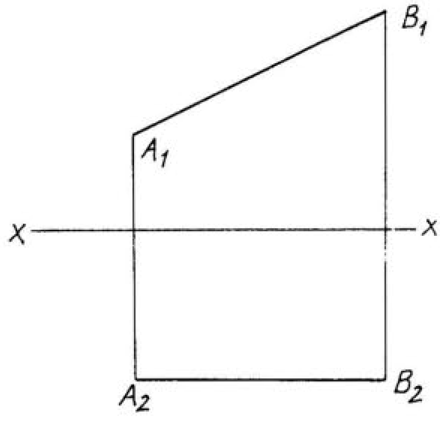
Hình 154.



Hình 155.

<u>BÀI 57</u>: Qua điểm I vạch một mặt phẳng γ thẳng góc với cả hai mặt phẳng chiếu α_1 và β_2 đã cho. Sau đó xác định điểm chung của cả ba mặt phẳng đó (hình 154).

Phân tích: Mặt phẳng γ muốn vuông góc với mặt phẳng chiếu đứng α_1 thì phải chứa một đường thẳng $\perp$ α_1. Ở đây α_1 là chiếu đứng nên đường thẳng $\perp$ với nó phải là một đường mặt f sao cho $f_1 \perp \alpha_1$. Mặt phẳng γ muốn $\perp$ β_2 thì cũng phải chứa một đường bằng h sao cho $h_2 \perp \beta_2$. Mặt phẳng γ là mặt phẳng chứa f và h cắt nhau tại I cho trước.



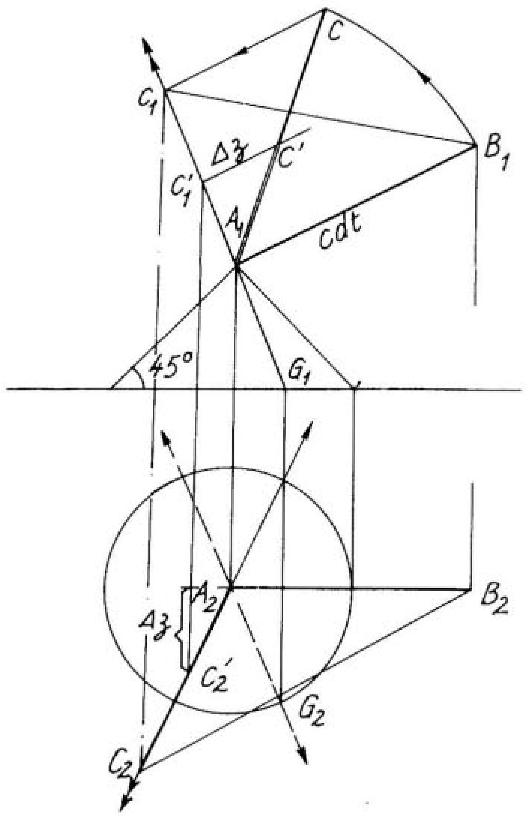
Hình 156.

Muốn xác định điểm chung của 3 mặt phẳng thì ta phải tìm giao điểm O của hai giao tuyến của hai cặp mặt phẳng, thí dụ: $\alpha_1 \times \gamma = g$ và $\alpha_1 \times \beta_2 = l$. Giao tuyến g cắt giao tuyến l tại O là điểm chung cho ba mặt phẳng đó.

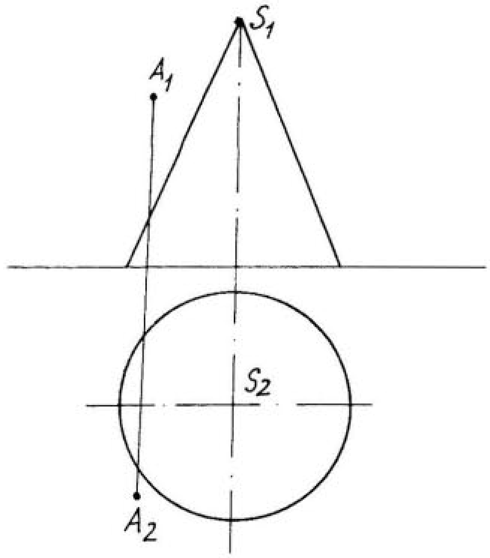
Vì α_1 là chiếu đứng nên giao tuyến $g_1 \equiv \alpha_1$, ta suy ra được g_2 bằng cách cho nó cắt f và h. Còn giao tuyến của α và β thì vì α_1 là chiếu đứng nên $l_1 \equiv \alpha_1$ và β_2 là chiếu bằng nên $l_2 \equiv \beta_2$. Dưới hình chiếu bằng, l_2 cắt g_2 tại O_2, rồi suy ra O_1 trên l_1. O chính là điểm chung của ba mặt phẳng α, β và γ (hình 155).

BÀI 58: Cho đường mặt AB. Vẽ một tam giác vuông cân ABC, vuông tại A, AC = AB và sao cho AC làm với mặt phẳng hình chiếu π_2 một góc 45° (hình 156).

Phân tích: ΔABC vuông tại A và AB là đường mặt nên phương của A_1C_1 phải vuông góc với A_1B_1. Ngoài ra AC phải làm với π_2 một góc 45° nên AC phải là đường sinh của mặt nón tròn xoay thẳng đứng đỉnh là A và góc đáy là 45°. Dưới hình chiếu bằng có 4 hướng của A_2C_2. Ở đây, để đơn giản, chỉ lấy một hướng, trên đó lấy thử một điểm C'_1, và tìm độ lớn thật của AC thì nhận thấy không bằng A_1B_1 (chiều dài thật của hai cạnh bên). Chuyển chiều dài A_1B_1 sang thành A_1C rồi dóng về hình chiếu đứng C_1 và xuống hình chiếu bằng C_2 trên hướng đã chọn, thì ta có hai hình chiếu $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ của tam giác vuông cân ABC cần dựng. Bài toán có 4 nghiệm C_2 đối xứng từng đôi một qua A_2.



Hình 157.



Hình 158.

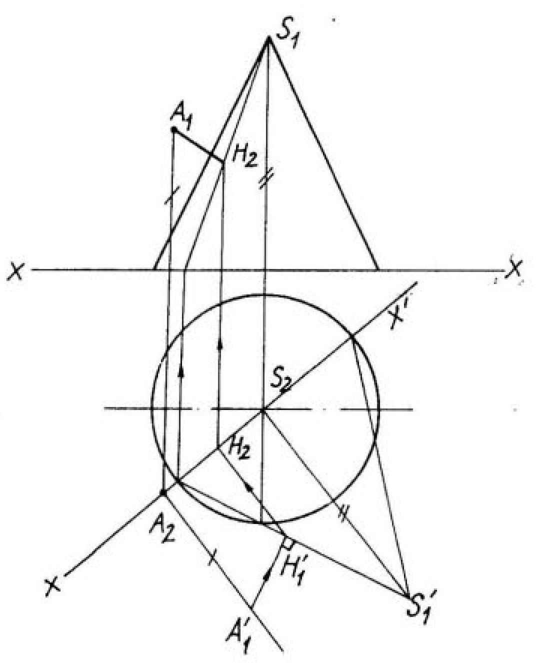
BÀI 59: Thay mặt phẳng hình chiếu để tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm A đến mặt nón thẳng đứng tròn xoay đỉnh S (hình 158).

Phân tích: Khoảng cách AH phải thuộc mặt phẳng chứa A và qua trục tròn xoay của hình nón. Ta phải thay mặt phẳng hình chiếu đứng để có độ lớn thật của thiết diện đó.

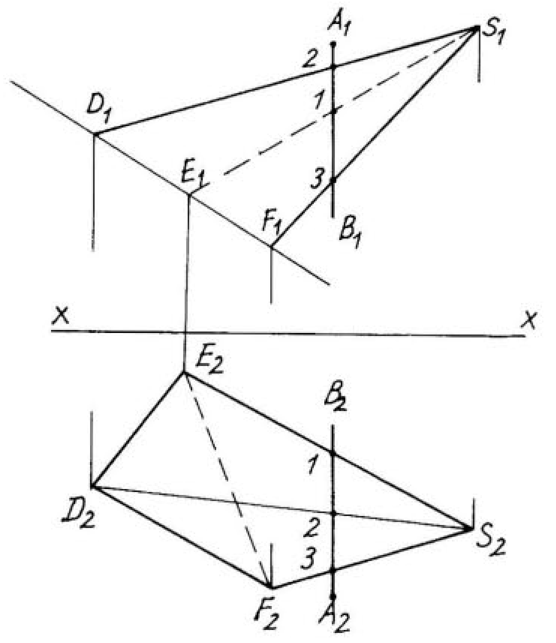
Cho x'x' đi qua A_2 và S_2. Sau đó từ A'_1 hạ vuông góc tới đường sinh biên gần nhất của nón thì ta có chân vuông góc H'_1 và AH là khoảng cách ngắn nhất.

$A'_1H'_1$ là độ dài thật của AH. Gắn H vào đường sinh của hình nón ta đưa về hai hình chiếu cho trước thì sẽ có H_1 và H_2.

BÀI 60: Tìm giao điểm của đường cạnh AB với hình chóp đỉnh S (hình 160).



Hình 159.



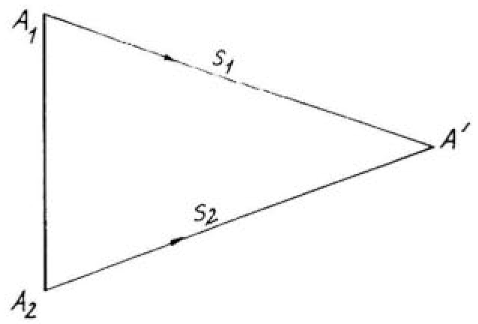
Hình 160.

Phân tích: Trước tiên để đỡ nhầm lẫn ta ký hiệu đáy chóp là DEF.

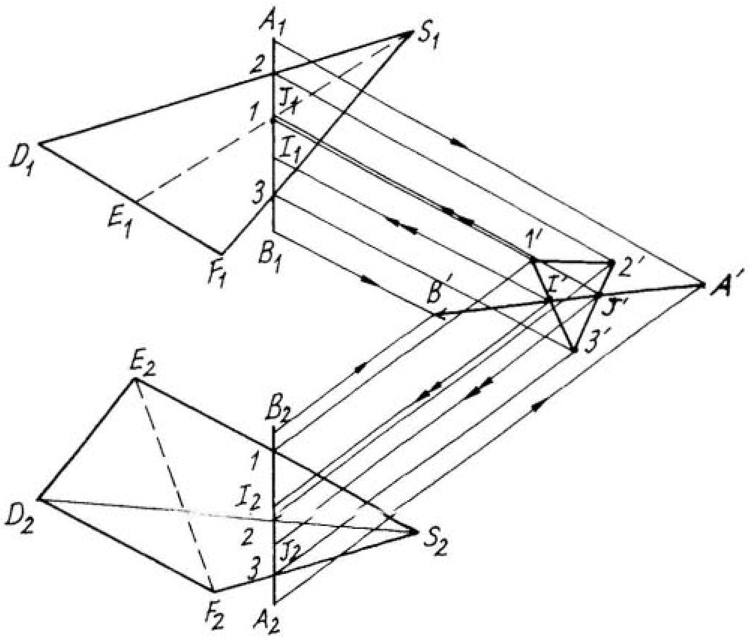
Qua AB lập một mặt phẳng phụ trợ bất kỳ sẽ cắt chóp theo một thiết diện là một tam giác (dễ xác định chính xác), rồi tam giác này cắt AB ở đâu thì đó là các giao điểm. Thường dùng hai cách sau:

Cách 1: Lập một mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng cạnh φ (vừa là chiếu đứng vừa là chiếu bằng) qua AB để cắt SE tại điểm 1, SD tại điểm 2 và SF tại điểm 3. Thiết diện là Δ123 (hình 161, 162).

Nhưng ở đây hình chiếu của thiết diện lại trùng với AB nên không xác định được giao điểm, nên ta làm thêm một động tác nữa là chiếu AB và thiết diện 123 theo một phương bất kỳ $\vec{s}$ lên mặt phẳng phân giác II thì khi đó tìm được giao điểm. Hình 161 trình bày cách chiếu một điểm A lên mặt phân giác II theo một hướng $\vec{s}$. Chiếu như vậy ta có được A'B' và tam giác 1'2'3'.



Hình 161.

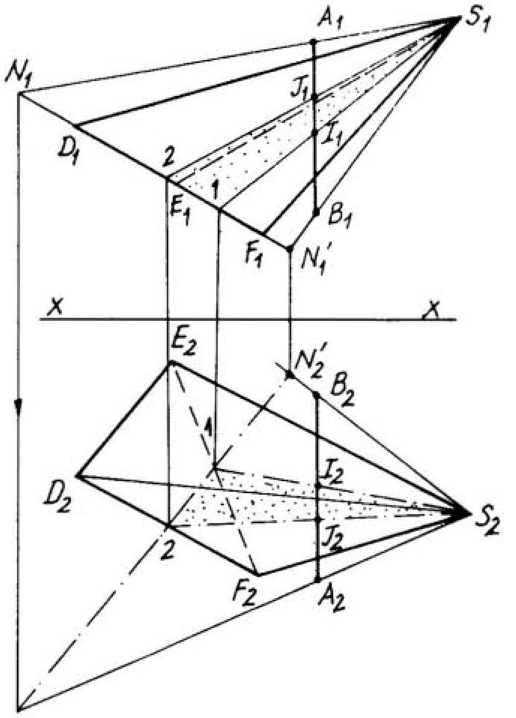


Hình 162.

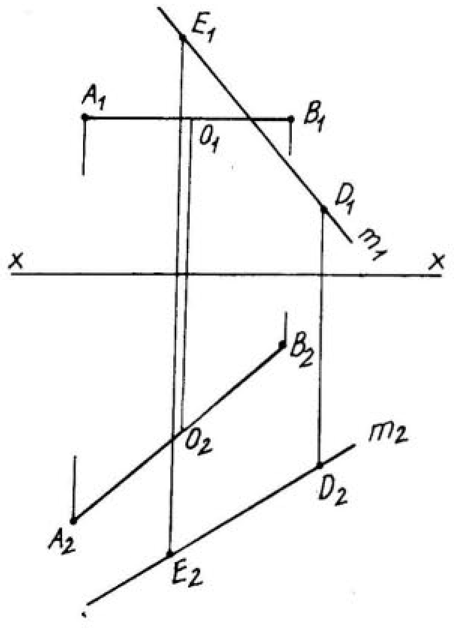
Sau khi A'B' cắt tam giác 1'2'3' tại I', J' thì đưa I' và J' về các hình chiếu đứng và bằng rất dễ dàng.

Cách 2: Lập mặt phẳng phụ trợ qua AB và qua đỉnh S (giống như trường hợp hình nón ở bài 47) tức mặt phẳng SAB.

Vì mặt phẳng phụ trợ qua S nên chắc chắn cắt chóp theo một tam giác mà một đỉnh là S. Bây giờ tìm giao tuyến của SAB với đáy DEF bằng cách tìm giao điểm N của SA với đáy DEF ở hình chiếu đứng suy biến thành một đường thẳng nên ta có ngay N_1 rồi suy ra N_2 trên S_2A_2; tương tự tìm được giao điểm N'_1 của SB với đáy $D_1E_1F_1$, từ đó có N'_2 trên S_2B_2. Nối $N_2N'_2$ thì đây là giao tuyến của SAB với đáy hình chóp. $N_2N'_2$ cắt $\Delta D_2E_2F_2$ tại hai điểm 1 và 2, đây là chân của hai đường sinh mang các giao điểm I và J. Thiết diện S_{12} cắt AB tại I và J.



Hình 163.



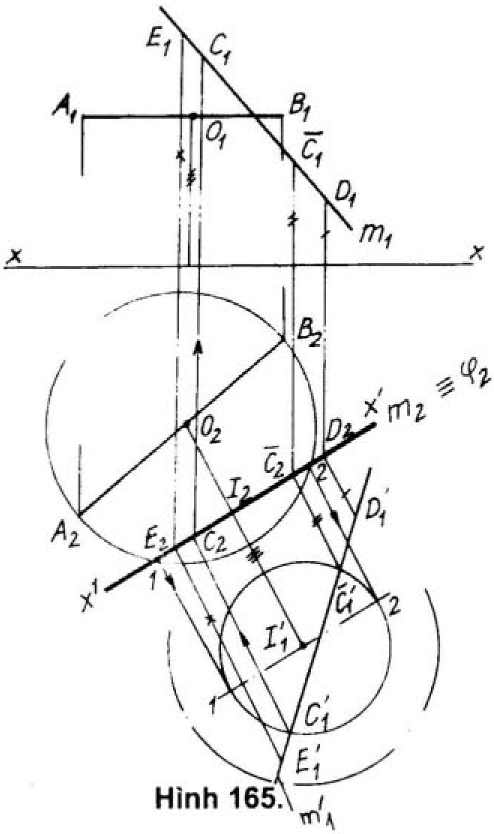
Hình 164.

<u>BÀI 61</u>: Tìm trên đường thẳng m một điểm C sao cho góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (hình 164). AB là đường bằng.

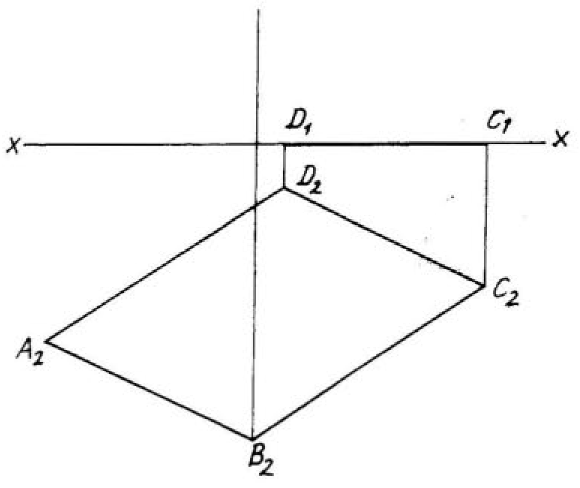
Phân tích: Muốn góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$ thì C phải thuộc mặt cầu đường kính AB. AB là đường bằng nên A_2B_2 là độ lớn thật. Hình chiếu bằng của hình cầu là đường tròn đường kính A_2B_2.

Muốn tìm giao điểm C của đường thẳng m với hình cầu thì ta phải dùng mặt phẳng phụ trợ $\varphi_2 \equiv m_2$, rồi thay mặt phẳng hình chiếu đứng và chọn $x'x' \equiv m_2$. Để thay mặt phẳng hình chiếu, lấy hai điểm D và E trên m để di chuyển. Sang hình chiếu đứng mới, φ_2 cắt cầu theo đường tròn 1–2. m'_1 cắt đường tròn này tại C'_1 và $\overline{C}'_1$ chính là hai giao điểm của m với mặt cầu đường kính AB. Hai nghiệm là $\widehat{ACB} = \widehat{A\overline{C}B} = 90^\circ$ (hình 165).

<u>BÀI 62</u>: Tìm nốt hình chiếu đứng của hình bình hành ABCD biết rằng mặt phẳng ABCD làm với π_2 một góc 45° (hình 166).

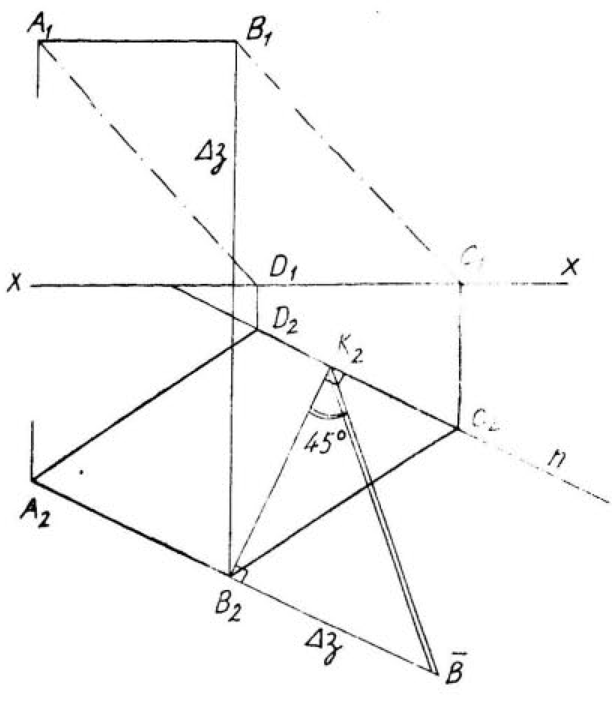


Hình 165.



Hình 166.

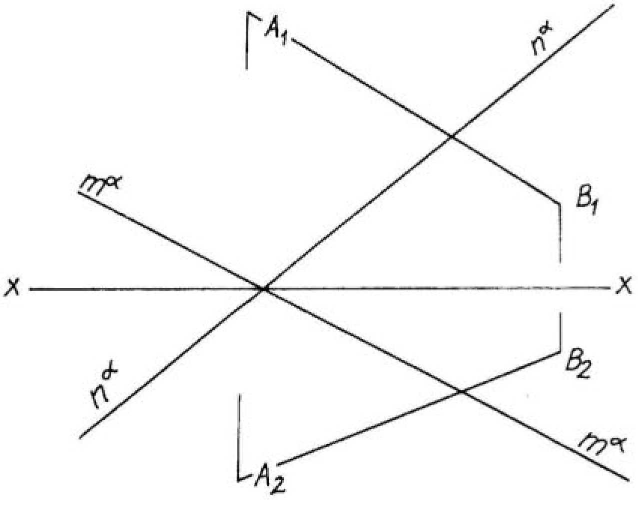
Phân tích: Đường thẳng C_2D_2 chính là vết bằng n của mặt phẳng ABCD. Từ B_2 kẻ B_2K_2 là hình chiếu bằng của đường dốc nhất đối với mặt phẳng π_2 nên $B_2K_2 \perp C_2D_2$. Dựng tam giác vuông $BB_2\overline{K}$ để tìm độ dài thật của BK, nhưng đặt góc $\widehat{B_2K_2\overline{B}} = 45^\circ$ thì ta có $B_2\overline{B}$ là Δz hiệu độ cao của B và K, nhưng K∈CD nên độ cao của K bằng không. Vậy Δz chính là độ cao của B. Từ B_2 dóng thẳng lên với độ cao $B_2\overline{B}$ ta xác định được B_1. Từ đó ta hoàn thành nốt được hình chiếu đứng $A_1B_1C_1D_1$ (một hình bình hành) (hình 167).



Hình 167.

BÀI 63: Vẽ hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB lên mặt phẳng α cho bằng vết $m^\alpha \equiv n^\alpha$ (hình 168).

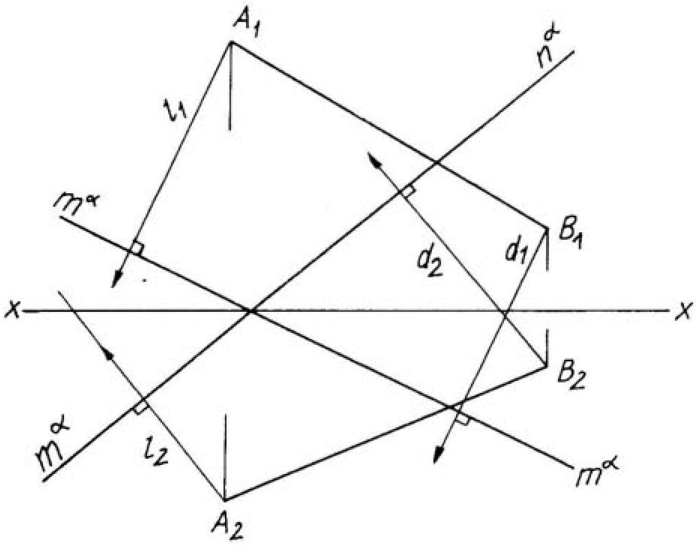
Phân tích: Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng α là chân đường vuông góc A' hạ từ A xuống mặt phẳng α. Tương tự B' là chân đường vuông góc hạ từ B. Nối A'B' thì đó là hình chiếu vuông góc của AB lên mặt phẳng α.



Hình 168.

Giải: Muốn tìm A', từ A kẻ đường thẳng $l \perp \alpha$ ($l_1 \perp m^\alpha$ và $l_2 \perp n^\alpha$). Sau đó tìm giao điểm A' của l với mặt phẳng α. Dùng mặt phẳng phụ trợ $\varphi_2 \equiv l_2$. Ta được A'_1, rồi suy ra $A'_2 \in l_2$ (hình 170).

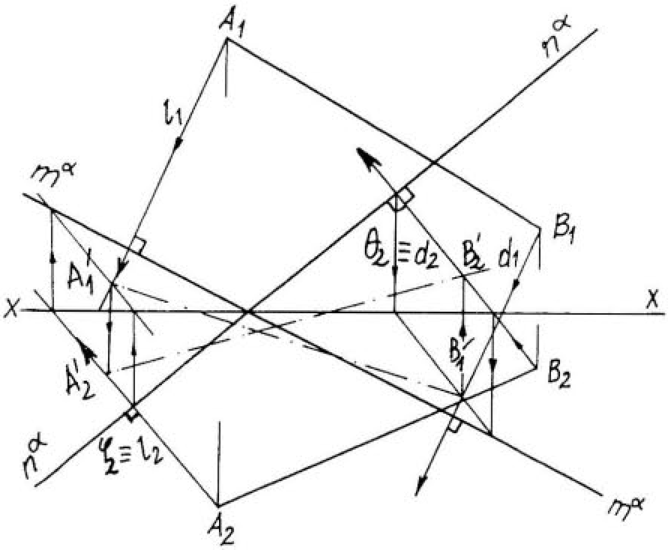
Tương tự qua B ta kẻ $d \perp \alpha$ ($d_1 \perp m^\alpha$; $d_2 \perp n^\alpha$), rồi tìm giao điểm B' bằng mặt phẳng phụ trợ $\theta_2 \equiv d_2$. $A'_1B'_1$ và $A'_2B'_2$ là hai hình chiếu của A'B' cần tìm (hình 170).



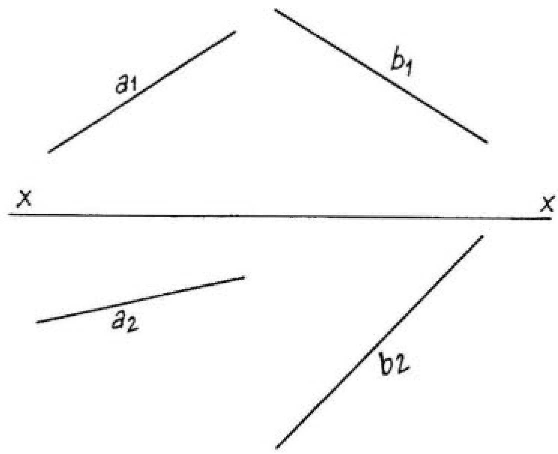
Hình 169.

<u>BÀI 64</u>: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Hãy thay mặt phẳng chiếu sao cho hai hình chiếu mới của chúng song song nhau (hình 171).

Phân tích: Bây giờ nếu ta cắt b tại điểm O bởi một đường thẳng d // a thì mặt phẳng (d x b) // đường thẳng a. kẻ một đường bằng h trong mặt phẳng (d x b). Thay π_1 và lấy $x'x' \perp h_2$, thì sang hình chiếu đứng mới h thành một điểm h'_1 mặt phẳng suy biến thành một đường thẳng $d'_1 = b'_1$ và a thành một đường thẳng a'_1 // với mặt phẳng suy biến, tức làg a'_1 // b'_1 (hình 172).



Hình 170.

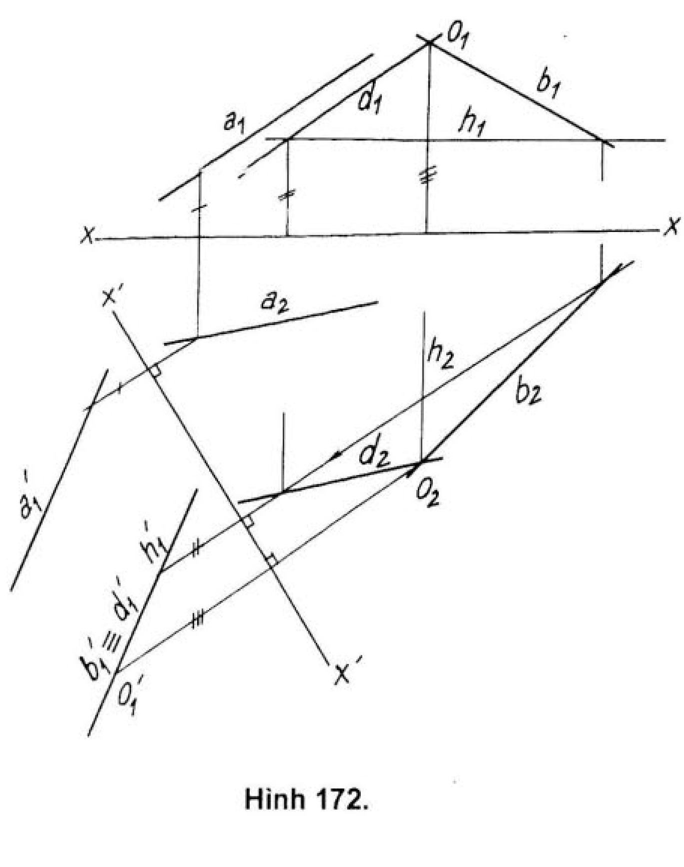


Hình 171.

<u>BÀI 65:</u> Cho đoạn thẳng AC và đường thẳng m (hình 173). Hãy vẽ một hình thoi ABCD nhận AC là một đường chéo, còn đỉnh B thì thuộc đường thẳng m.

Phân tích: Đây là một hình thoi nên hai đường chéo vuông góc nhau. Vậy nửa đường chéo OB phải thuộc một mặt phẳng γ vuông góc với AC tại trung điểm O của AC. Để xác định γ, kẻ qua O một đường bằng h sao cho $\perp$ h_2 $\perp$ A_2C_2, và một đường mặt f sao cho $f_1 \perp A_1C_1$ (hình 174).

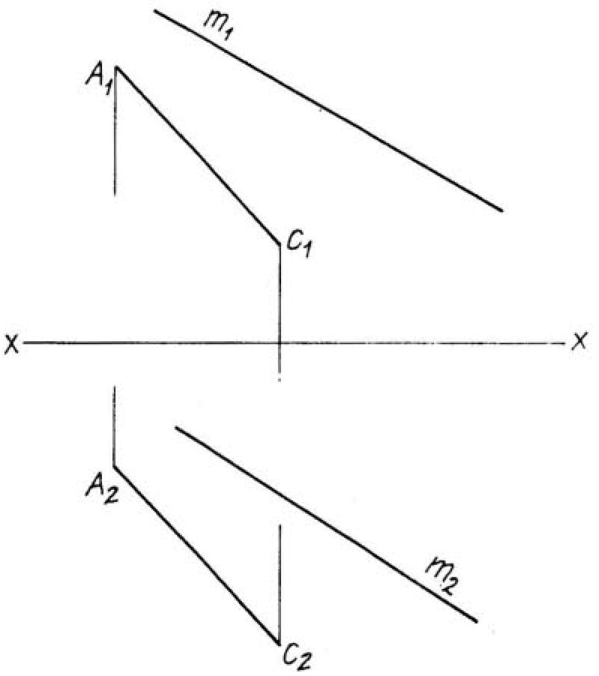
Sau đó dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\varphi_1 \equiv m_1$ để tìm giao điểm của m với mặt phẳng γ. Đó chính là đỉnh B cần tìm (hình 175). Lợi dụng tính chất của hình chiếu của hình thoi là hình bình hành ta hoàn thành nốt hai hình chiếu.



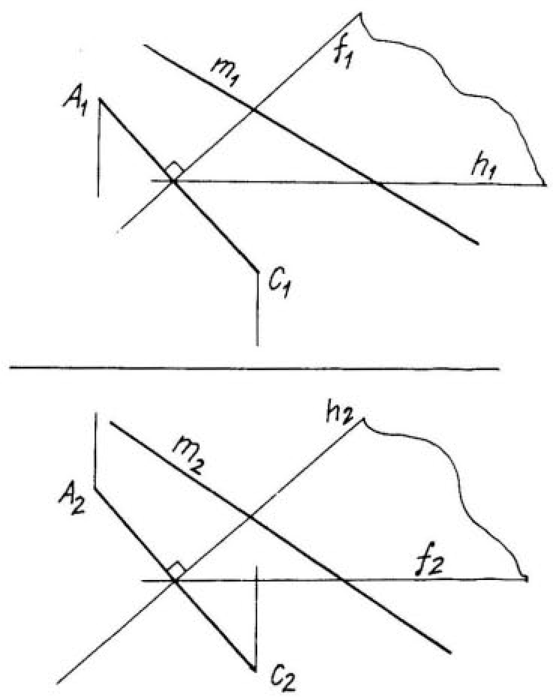
Hình 172.

<u>BÀI 66:</u> Vẽ phân giác của góc tạo bởi m^α và n^α của mặt phẳng α (hình 176).

Phân tích: Phải tìm được độ lớn thật của góc đó thì mới kẻ được đường thẳng phân giác. Muốn vậy trên m^{α} ta lấy một điểm A và trên n^{α} ta lấy một điểm B, rồi tìm độ lớn thật của $\Delta(A\alpha_x B)$ sau đó vẽ đường phân giác.



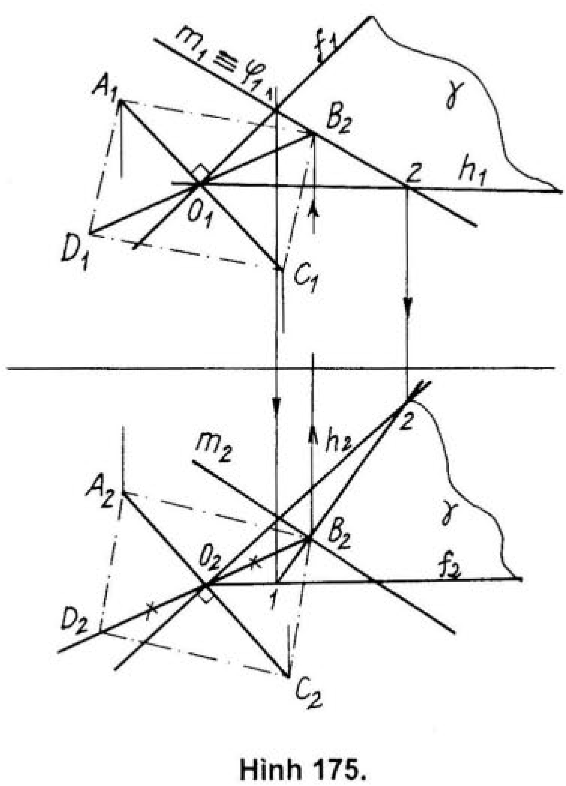
Hình 173.



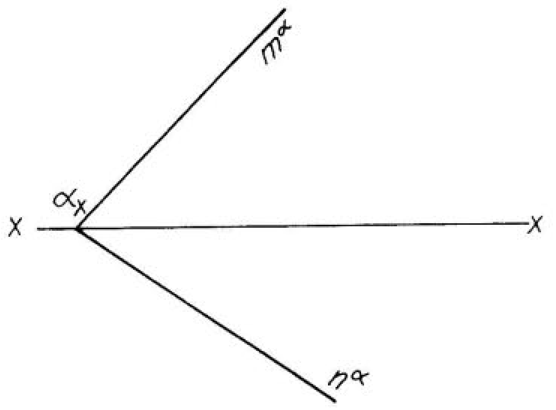
Hình 174.

Bây giờ ta xoay điểm A quanh vết bằng n^{α} vì n^{α} cũng là một đường bằng có độ cao bằng không. Khi đó A_2 di chuyển tới A'_2 theo phương $\perp n_2^{\alpha}$. Tìm độ lớn thật của bán kính xoay R của điểm A. Hai điểm α_x và B không đổi vì thuộc trục xoay n^{α} nên độ lớn thực của $\Delta B\alpha_x A$ chính là $B_2\alpha_2A'_2$.

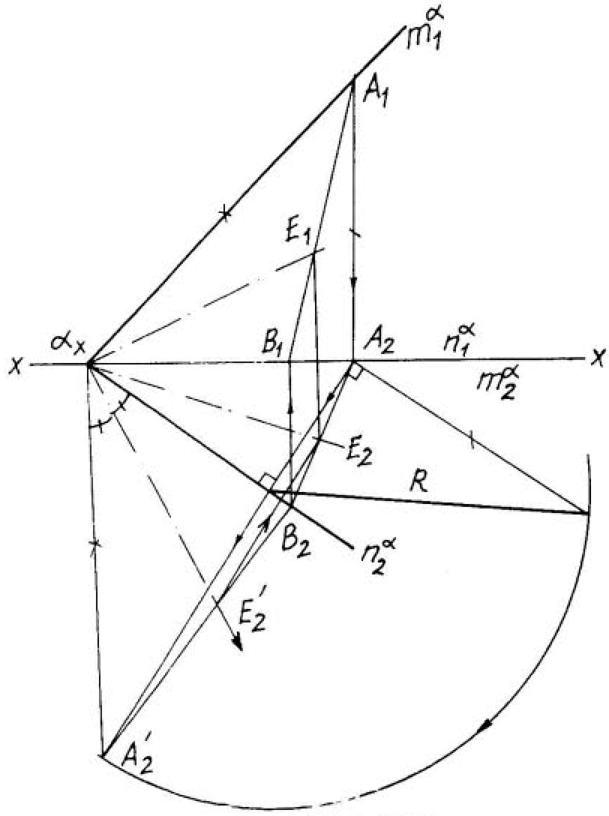
Vẽ đường phân giác $\alpha_x E'_2$. E thuộc cạnh A'_2B_2 nên đưa về hai hình chiếu cũ không khó khăn gì.



Hình 175.



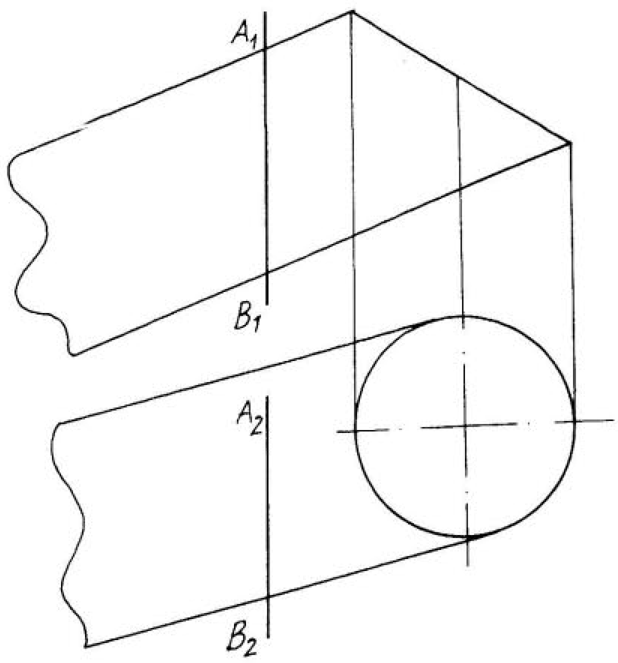
Hình 176.



Hình 177.

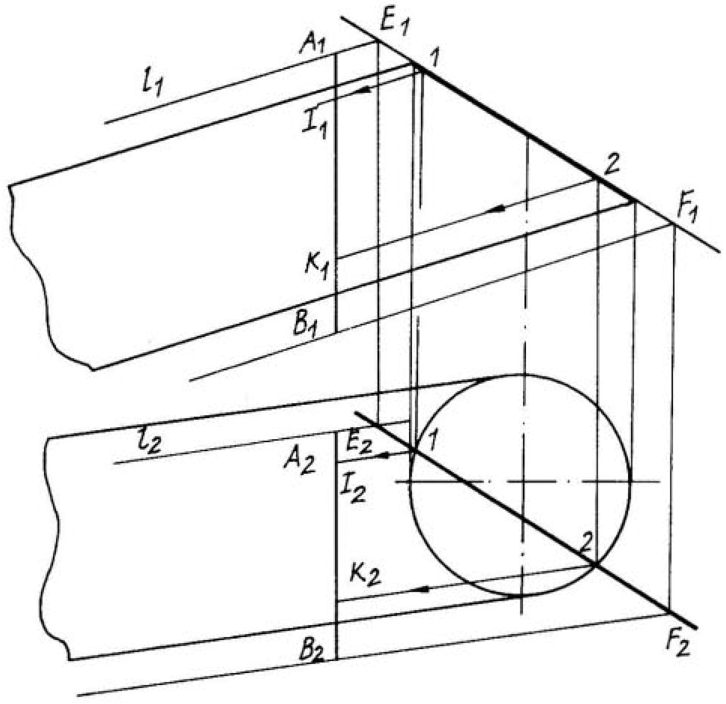
<u>BÀI 67</u>: Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mặt trụ (hình 178).

Phân tích: Mặt đáy của trụ là mặt phẳng chiếu đứng. Theo nguyên tắc chung, muốn tìm giao điểm, qua AB lập một mặt phẳng phụ trợ sao cho nó cắt trụ theo các đường sinh thì mới vẽ được chính xác. Vậy qua A và B kẻ l và d song song với đường sinh của hình trụ để làm mặt phẳng phụ trợ. Bây giờ tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ với đáy trụ bằng cách tìm giao điểm E và F của l và d với đáy trụ rồi nối EF. Đó là giao tuyến



Hình 178

của mặt phụ trợ với đáy trụ. E_2F_2 cắt đường tròn đáy tại 1 và 2 là chân hai đường sinh giao tuyến của mặt phụ trợ với mặt bên của trụ. Hai đường sinh này cắt AB tại hai giao điểm I và K của AB với trụ (hình 179).

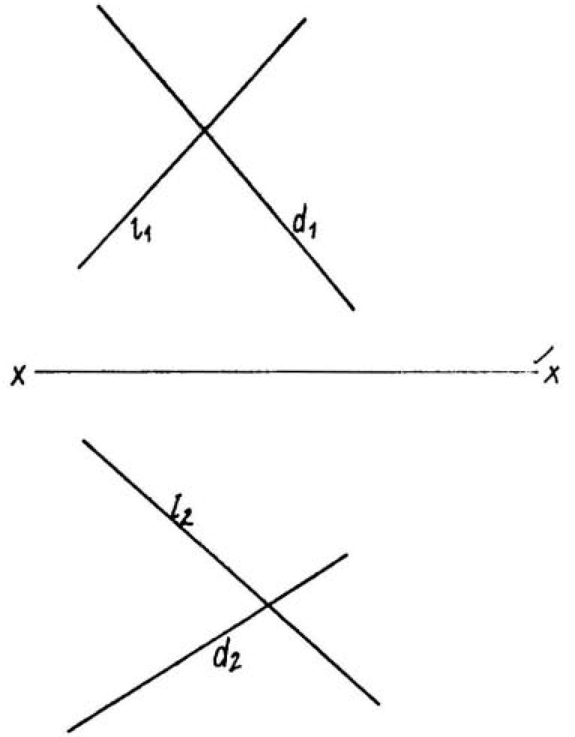


Hình 179

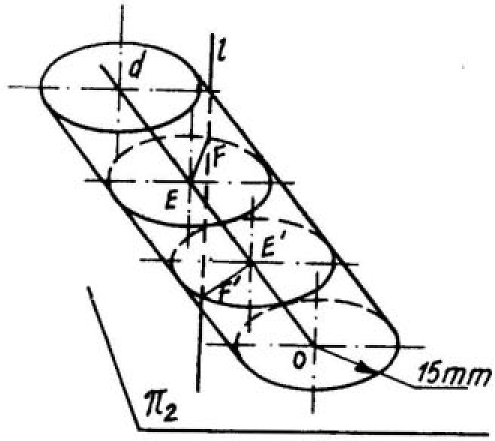
<u>BÀI 68</u>: Cho hai đường thẳng d và *l* chéo nhau. Hãy kẻ một đường bằng cắt d tại E và cắt *l* tại F sao cho EF có chiều dài là 15 mm (hình 180).

***Phân tích*:** Nếu quĩ tích của E là đường thẳng d thì quĩ tích của F là một mặt trụ xiên trục là d, đáy là một đờng tròn bán kính 15 mm thuộc π_2 (hình 181). Vì vậy phải tìm giao điểm F và F' của *l* với hình trụ trên thì ta có thể vẽ được EF = 15 mm tựa lên d và *l* và là đường bằng. Tương tự có EF' = 15 mm.

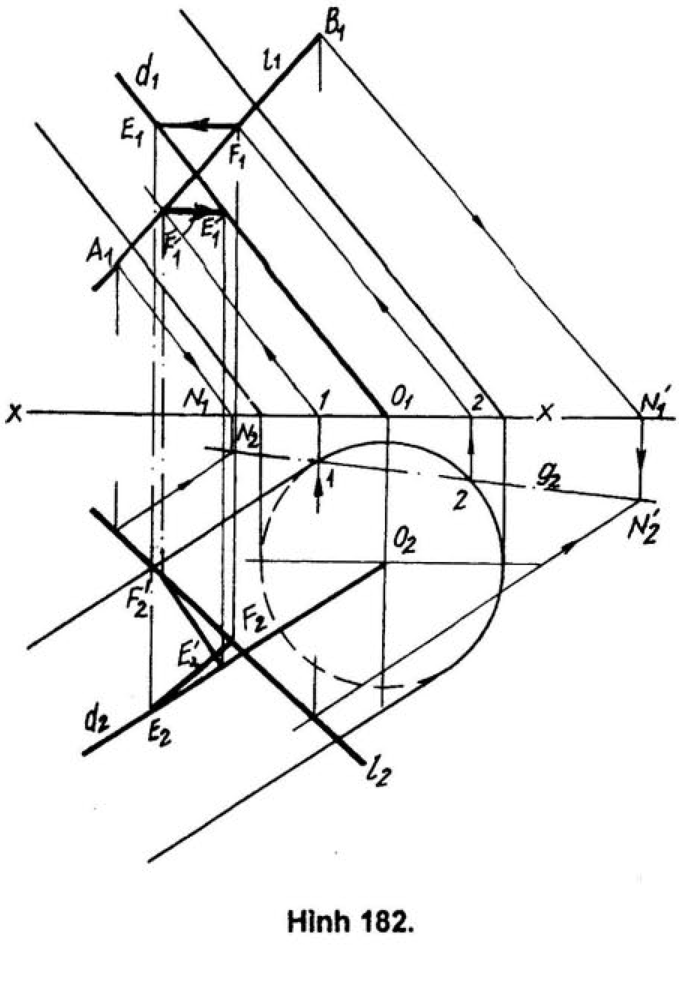
Chuyển sang bài toán tìm giao điểm của *l* với hình trụ xiên (hình 182). Lập mặt phẳng phụ trợ qua *l* (tức AB) và // với d. Ta tìm được hình chiếu bằng g_2 của mặt phẳng phụ trợ với mặt đáy (π_2) của trụ. g_2 cắt đáy trụ ta có 1 và 2 là chân hai đường sinh thiết diện do mặt phụ trợ cắt mặt bên của trụ. Hai đường sinh này cắt *l* tại F và F'. Có F_1 và F'_1 ta kẻ F_1E_1 và $F'_1E'_1$ song song với trục xx sẽ cắt d_1 tại E_1 và E'_1. Dóng xuống hình chiếu có E_2F_2 và $E'_2F'_2$ là hai đáp số (hình 182). Cũng có thể lấy *l* làm trục một hình trụ như vậy và tìm giao điểm của d với trụ này thì vẫn có cùng đáp số.



Hình 180.

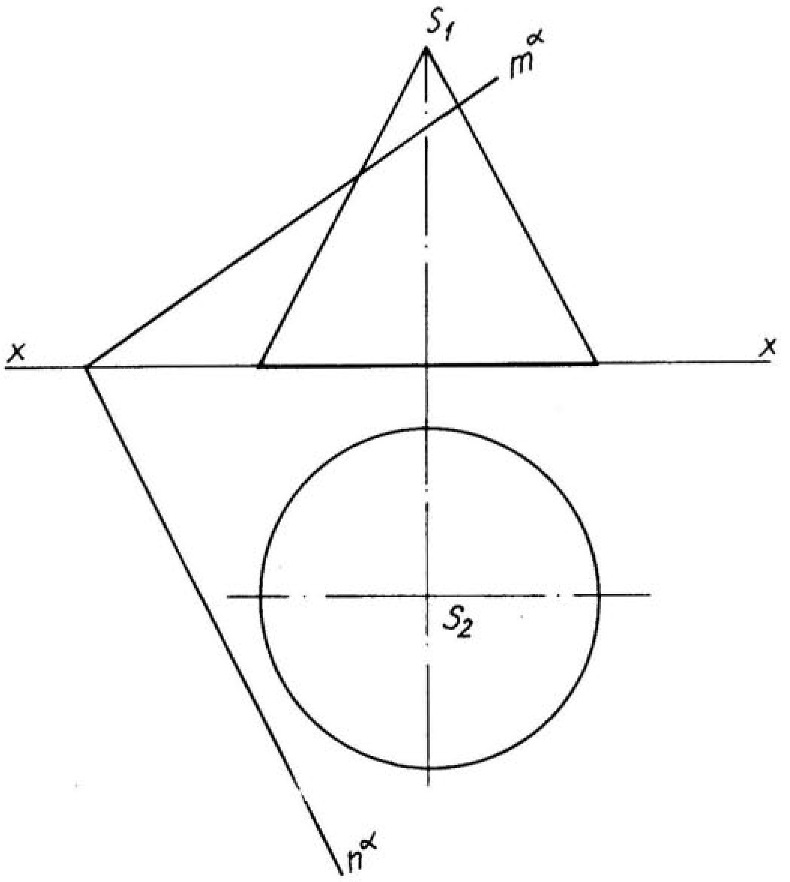


Hình 181.



Hình 182.

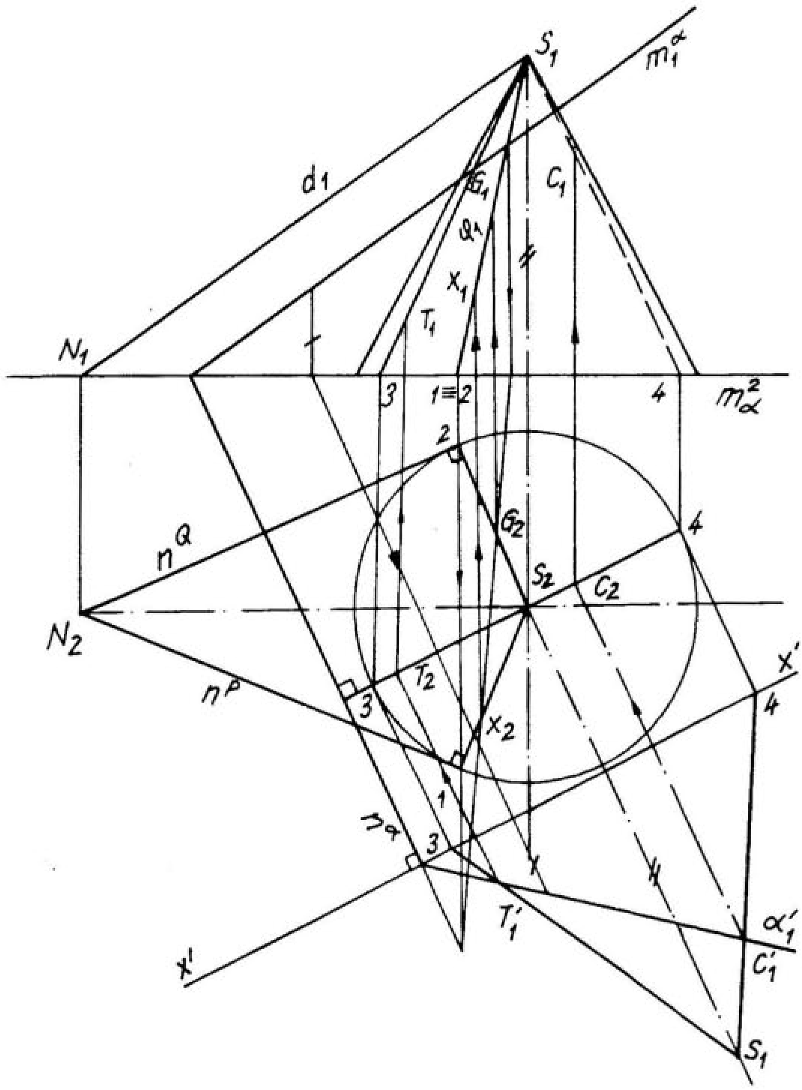
BÀI 69: Tìm điểm xa nhất, điểm gần nhất, điểm cao nhất và điểm thấp nhất của giao tuyến giữa mặt phẳng α và mặt nón tròn xoay đỉnh S mà không cần vẽ giao tuyến (hình 183).



Hình 183.

Phân tích: Điểm xa nhất và gần nhất của giao tuyến giữa mặt phẳng α với mặt nón nằm trên 2 đường sinh tiếp xúc của hai mặt phẳng P và Q song song với vết đứng m^α và tiếp xúc với nón. Để có hai đường sinh tiếp xúc đó ta phải xác định hai mặt phẳng P và Q. Giao điểm của hai đường sinh đó với mặt phẳng α là điểm xa nhất và gần nhất.

Giải: Để lập P và Q, qua đỉnh S của nón kẻ d $//m^\alpha$ ($d_1 // m_1^\alpha$, $d_2 // m_2^\alpha$ tức // trục xx). Rồi tìm vết bằng N của d. Vậy các vết bằng n^P và n^Q phải qua N_2 và tiếp xúc với đáy nón (hình 184) tại 1 và 2, thì S1 và S2 là hai đường sinh tiếp xúc phải tìm. Bây giờ tìm các giao điểm của chúng với α thì có điểm xa nhất X và điểm gần nhấ G của giao tuyến. Dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng φ_1 ta tìm được X và G.

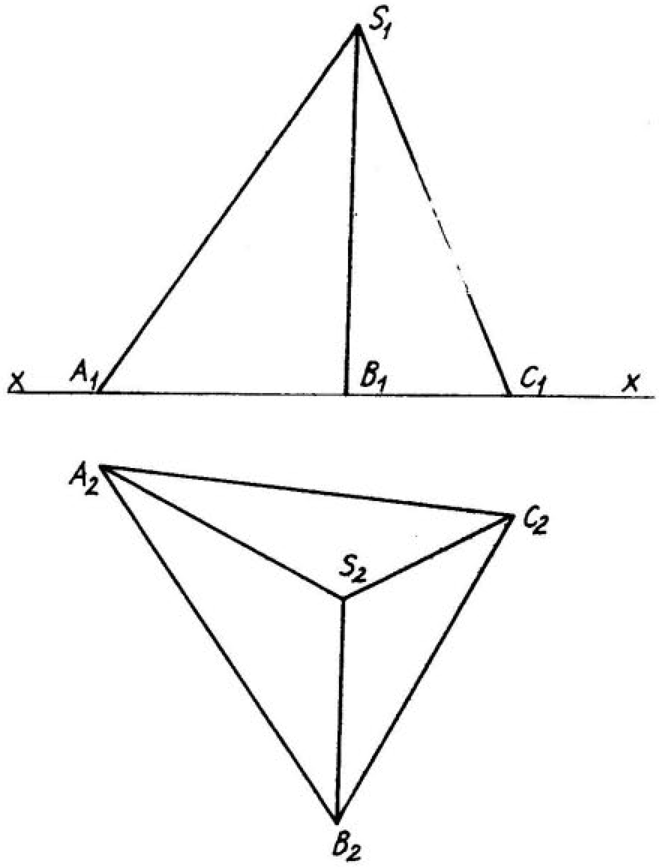


Hình 184.

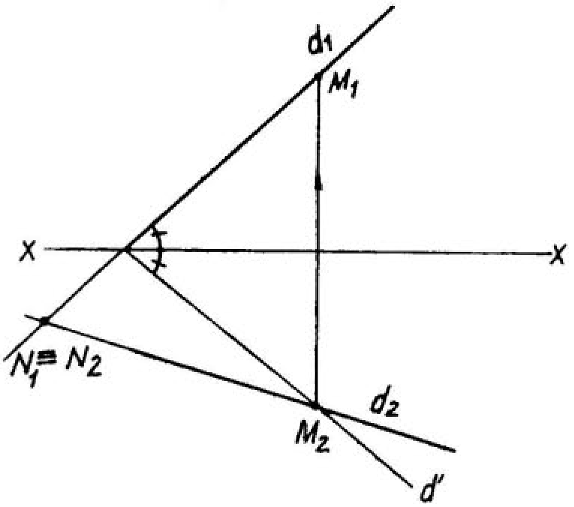
Muốn tìm điểm cao nhất C và thấp nhất T, ta thay mặt phẳng hình chiếu với x'x' $\perp$ n^{α} . α suy biến thành đường thẳng α'_1 cắt hai đường sinh biên tại T'_1 và C'_1. Đưa về hai hình chiếu cũ ta có điểm cao nhất C và đường thấp nhất T. Để tìm C và T ta cũng có thể lập hai mặt phẳng // n^{α} và tiếp xúc với nón, suy ra hai đường sinh tiếp xúc khác. Tìm giao điểm các đường sinh này với mặt phẳng α thì ta cũng có điểm C và điểm T.

<u>BÀI 70</u>: Tìm các giao tuyến của mặt phẳng phân giác I và mặt phẳng phân giác II với hình chóp SABC (hình 185).

Phân tích: Ta phải tìm giao điểm của từng cạnh của hình chóp với các mặt phân giác rồi nối lại. Hình 186 trình bày cách tìm giao điểm của một đường thẳng d với các mặt phẳng phân giác I và II. M là giao điểm với mặt phẳng phân giác I và N là giao điểm với mặt phẳng phân giác II.



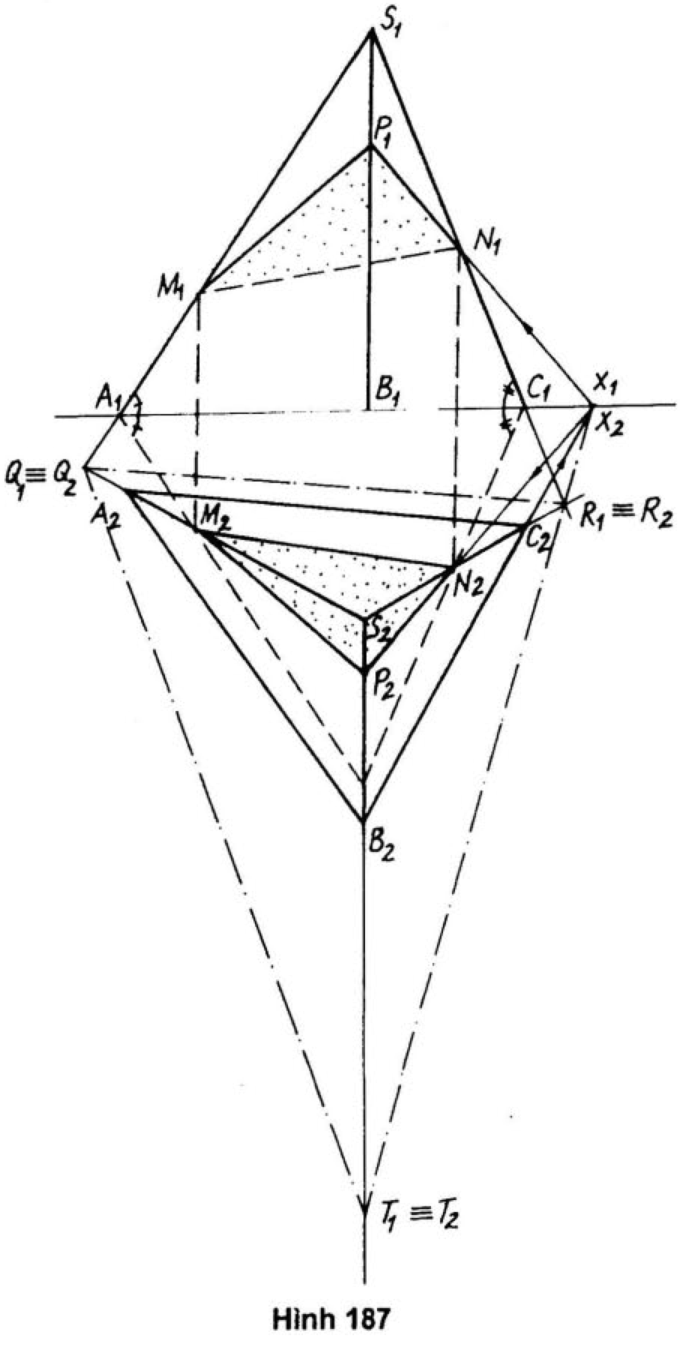
Hình 185.



Hình 186.

Giải: Kẻ d' là đường đối xứng với d_1 qua trục xx.

Bằng phương pháp trên ta tìm được giao điểm M và N của SA và SC với mặt phẳng phân giác I. Còn giao điểm P của SB với phân giác I ta làm như sau. SBC đã có 1 điểm chung N với mặt phẳng phân giác I. Nếu kéo dài B_2C_2 (vết bằng của mặt phẳng SBC) cho cắt trục xx tại điểm $X_1 \equiv X_2$ thì X là điểm chung thứ hai. Nối X_2N_2 là hình chiếu bằng của giao tuyến của SBC với mặt phẳng phân giác I. Kéo dài X_2N_2 cắt S_2B_2 tại P_2 cần tìm. Nối X_1N_1 ta có P_1. Thiết diện là MNP.

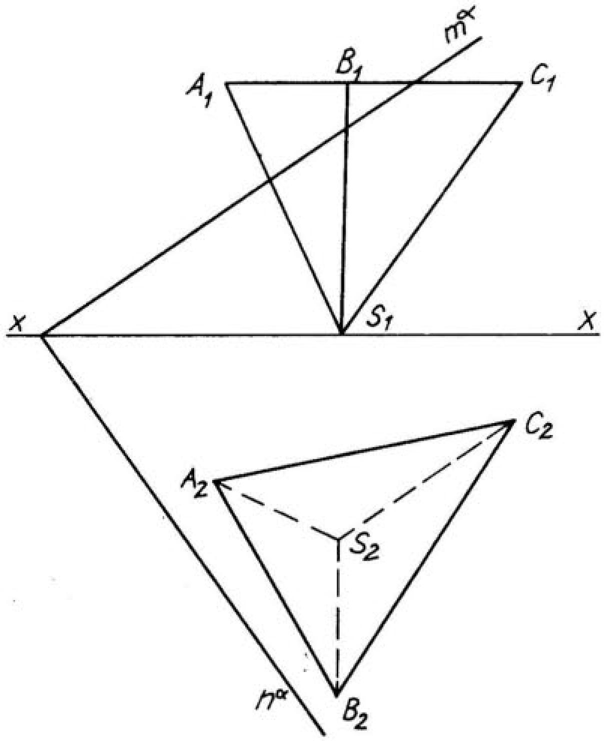


Hình 187

Đối với mặt phẳng phân giác II: $S_1A_1 \times S_2A_2 = Q_1 \equiv Q_2$ giao điểm SA với mặt phẳng phân giác II; $S_1C_1 \times S_2C_2 = R_1 \equiv R_2$ giao điểm của SC. Điểm X cũng là điểm chung của SBC với mặt phẳng phân giác II, do đó nối X_2R_2 cắt S_2B_2 kéo dài tại $T_1 \equiv T_2$ là giao điểm của SB với mặt phẳng phân giác II. Thiết diện là QTR có hai hình chiếu trùng nhau.

<u>BÀI 71</u>: Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với hình chóp (hình 188).

Phân tích: Tìm giao điểm từng cạnh của hình chóp với mặt phẳng α (hình 189). Lập mặt phẳng phụ trợ $\varphi_1 \equiv S_1A_1$ để tìm giao điểm M. Kéo dài A_2B_2 (chính là vết bằng của mặt phẳng SAB) cho cắt n_2^α tại X_2 là một điểm chung nữa. Giao điểm giữa SAB và α là XM. Kéo dài X_2M_2 cắt S_2B_2 tại N_2 là hình chiếu bằng của giao điểm của SB với α. Nối X_1M_1 thì có N_1 trên S_1B_1.



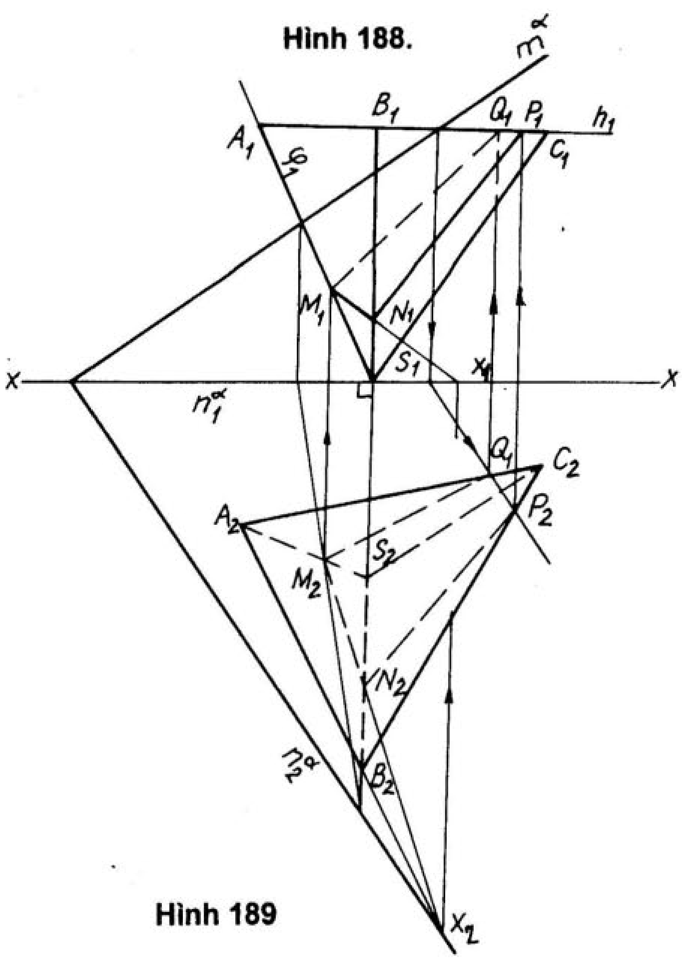
Hình 188.

Mặt bằng ABC cắt mặt phẳng α theo một đường bằng h. Nhưng giao tuyến chỉ lấy trong giới hạn của ΔABC. Đó là đoạn PQ (hình 189). Nối M_2Q_2 và N_2P_2 là hai cạnh đối của thiết diện MNPQ.

Từ P_2Q_2 dóng lên h_1 ta có P_1Q_1.

Vì chóp có đáy hướng lên trên nên dưới hình chiếu bằng chỉ có đoạn P_2Q_2 là thấy. Trên hình chiếu đứng mặt SAC khuất phía sau nên đoạn M_1Q_1 của giao tuyến là khuất.

Ta cũng có thể tìm giao điểm của SC với mặt phẳng α. Giao điểm này ở phần SC kéo dài, sau đó giới hạn tại P và Q thì cũng tìm được giao tuyến (hình 189).



Hình 189

PHƯƠNG PHÁP HÌNH CẦU NỘI TIẾP TRONG HÌNH NÓN

Đây là một công cụ hữu hiệu để giải một số bài toán trong hình học hoạ hình, đôi lúc phương pháp thông thường không giải được.

Một số tính chất

Khi hình cầu nội tiếp trong hình nón ta có các tính chất sau:

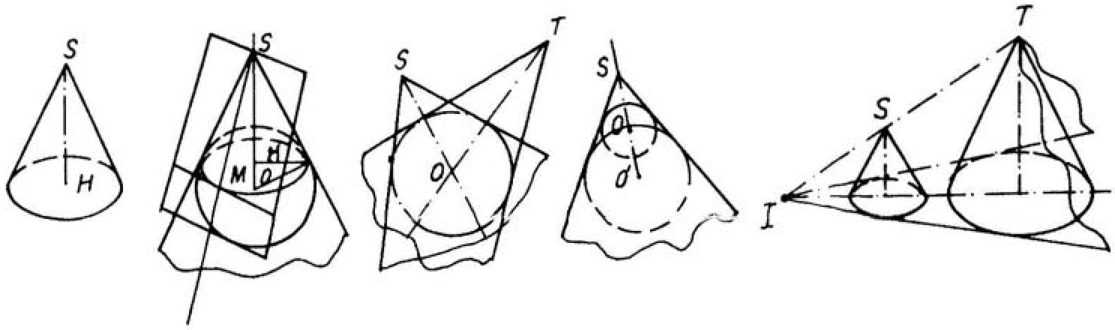
a) Có thể thay thế đường tròn đáy nón tròn xoay bởi một hình cầu nội tiếp mà đường tròn tiếp xúc là đường tròn đáy nón, do đó không phải vẽ các ellíp là hình chiếu của đáy nón.

b) Nếu một mặt phẳng tiếp xúc với nón thì cũng tiếp xúc với cầu.

Ngược lại một mặt phẳng qua đỉnh nón và tiếp xúc với cầu cũng tiếp xúc với nón.

c) Hình nón tiếp xúc với nón, hình cầu tiếp xúc với cầu, hoặc hình cầu tiếp xúc với hình nón đều có một mặt phẳng tiếp xúc chung qua tiếp điểm.

d) Hai hình nón đồng dạng phối cảnh thì có hai mặt phẳng tiếp xúc chung đi qua tâm đồng dạng phối cảnh.

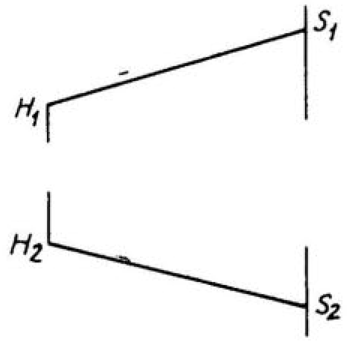


Hình 190

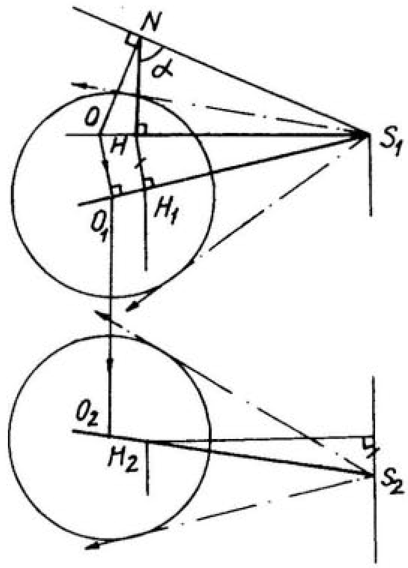
BÀI 72: Hãy vẽ các đường sinh biên trên hai hình chiếu của một hình nón tròn xoay có đường cao SH và góc đáy α cho trước (hình 191).

Phân tích: Trên hai hình chiếu, đáy của nón được chiếu thành hai ellíp, các đường sinh biên tiếp xúc với các ellíp đó. Nhưng vẽ ellíp thì không chính xác nên các đường sinh biên cũng không được chính xác.

Bây giờ ta lập một hình cầu nội tiếp sao cho đường tròn tiếp xúc chính là đường tròn đáy nón. Đầu tiên ta tìm độ lớn thật của SH. Sau đó dựng nửa thiết diện qua SH (độ lớn thật). Đó là Δ vuông SHN, với góc $\hat{N}$ là góc đáy α. Từ N kẻ vuông góc với SN cắt SH tại O thì O là tâm cầu nội tiếp với bán kính là ON. Đưa O về O_1 trên S_1H_1, suy ra O_2 trên S_2H_2. Từ O_1 và O_2 làm tâm vẽ hai đường tròn bán kính ON, rồi từ S_1 và S_2 vẽ các đường sinh tiếp xúc với hai đường tròn trên thì đó là các đường sinh biên cần tìm trên hai hình chiếu (hình 192).



Hình 191.

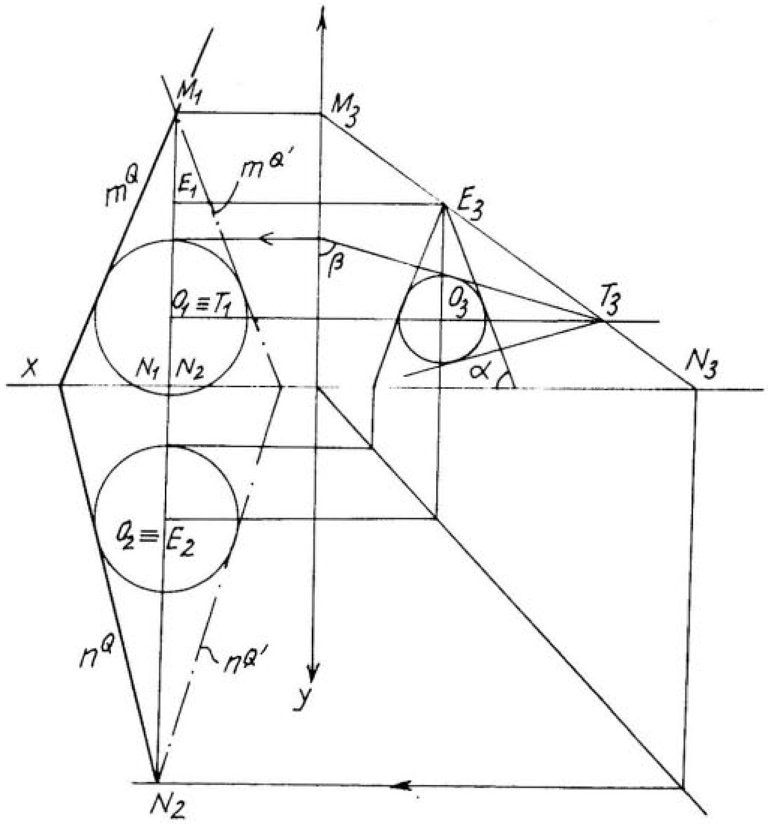


Hình 192.

BÀI 73: Qua điểm E cho trước lập một mặt phẳng Q nghiêng với π_2 một góc α và với π_1 một góc β.

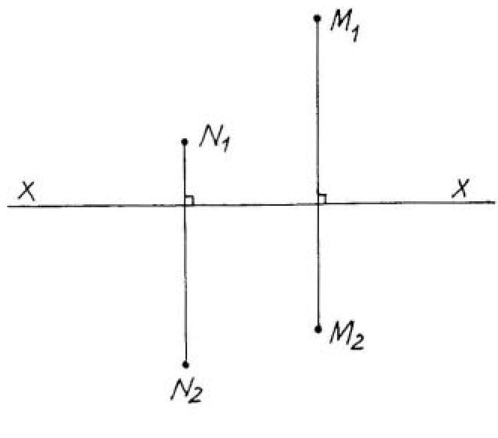
Phân tích: Một mặt phẳng Q qua E mà làm với π_2 một góc bằng α thì phải là bao hình của một mặt nón tròn xoay thẳng đứng góc đáy là α. Q qua E mà làm với π_1 một góc β thì cũng là bao hình của một hình nón đỉnh E có trục $\perp$ π_1. Mặt phẳng Q phải tiếp xúc với cả hai hình nón đó. Nhưng nếu chúng có chung đỉnh E thì xác định mặt phẳng tiếp xúc chung rất khó. Ta dùng hình cầu nội tiếp trong hình nón để giải quyết như sau: ta dùng hình chiếu cạnh để dựng hình. Đầu tiên vẽ một hình nón đỉnh E góc đáy bằng α; sau đó nội tiếp trong nón một hình cầu tùy ý tâm O thuộc đường cao của hình nón đỉnh E. Ngoại tiếp cho hình cầu tâm O một hình nón thứ hai đỉnh T, có trục $\perp$ π_1 và có góc đáy là β. Đường thẳng nối hai đỉnh nón TE có vết đứng và vết bằng là M và N. Vậy một mặt phẳng Q chứa TE mà tiếp xúc với cầu tâm O thì sẽ tiếp xúc với cả hai nón, và vết đứng m^Q phải qua M_1 và tiếp xúc với đường tròn đáy của nón có đỉnh là T, và vết bằng n^Q phải qua N_2 và tiếp xúc với đường tròn đáy của nón đỉnh E. Như vậy ta có hai mặt phẳng Q và Q' thỏa mãn điều kiện bài toán (hình 193).

BÀI 74: Cho hai điểm M và N. Qua M lập một mặt phẳng Q làm với π_2 một góc α và cách điểm N một khoảng cách bằng r cho trước (hình 194).



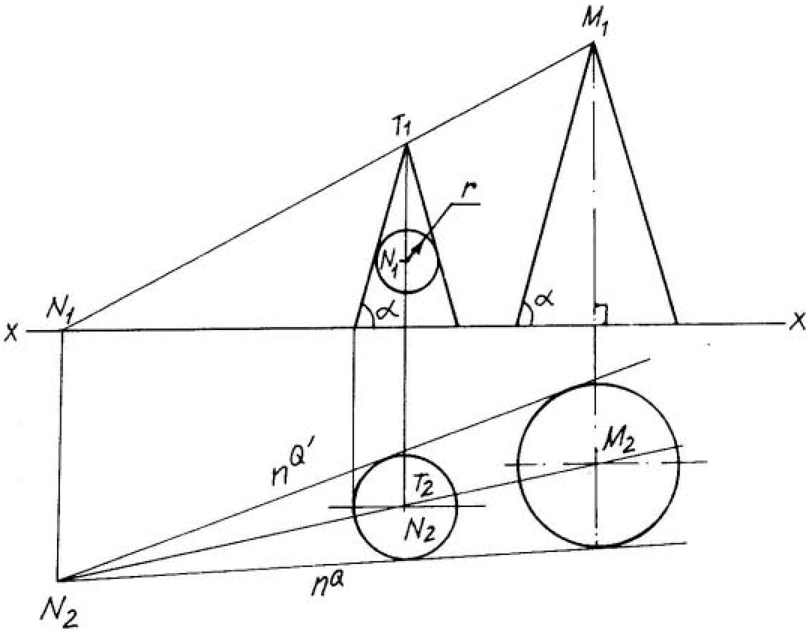
Hình 193.

Phân tích: Mặt phẳng Q phải tiếp xúc một mặt nón đỉnh M, trục vuông góc với π_2, và góc đáy là α, đồng thời Q phải tiếp xúc với một mặt cầu tâm N bán kính r cho trước. Một mặt phẳng tiếp xúc với cầu lại tiếp xúc với nón thì khó giải quyết. Bây giờ thay việc tiếp xúc với cầu tâm N, ta cho Q tiếp xúc với một hình nón tròn xoay thẳng đứng có góc cũng là α có đỉnh là T và ngoại tiếp cho cầu. Một mặt phẳng qua đỉnh nón mà tiếp xúc với nón thì cũng tiếp xúc với cầu. Bài toán thành ra lập một mặt phẳng Q



Hình 194

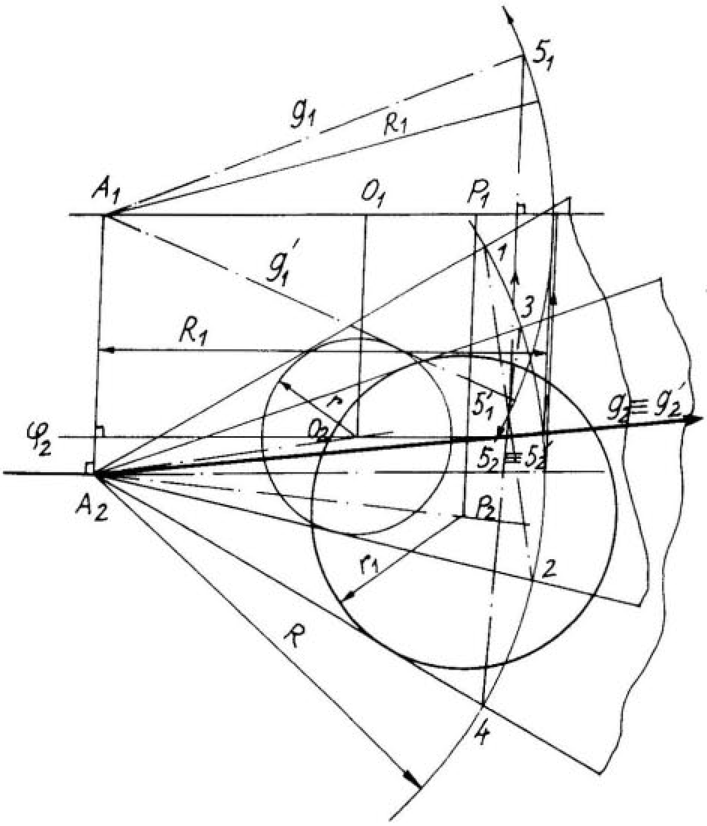
tiếp xúc chung cho hai hình nón đồng dạng phối cảnh. Đường thẳng nối hai đỉnh nón MT có vết bằng là N_2. Vết bằng n^Q qua N_2 và tiếp xúc với một trong hai đường tròn đáy nón. Còn một nghiệm $n^{Q'}$ nữa (hình 195) (TM x n^Q) là mặt phẳng Q (TM x $n^{Q'}$) là mặt phẳng Q'.



Hình 195.

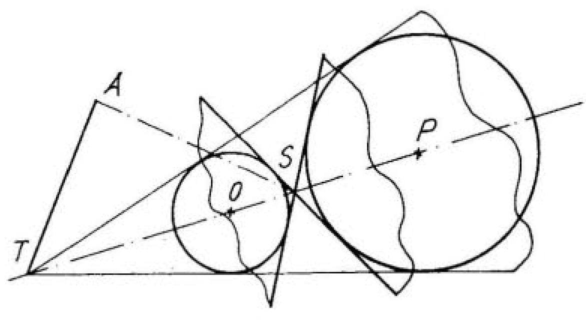
BÀI 75: Cho 3 điểm A, O và P cùng thuộc một mặt phẳng bằng. Qua A kẻ một đường thẳng cách O một đoạn bằng r và cách P một đoạn bằng r_1 (hình 196).

Phân tích: Đường thẳng cần dựng phải qua A, cách O một đoạn r và cách P một đoạn r_1, tức là nó phải qua A và tiếp xúc với hai hình cầu tâm O bán kính r và hình cầu tâm P bán kính r_1. Bây giờ ta ngoại tiếp cho hai cầu hai hình nón tròn xoay có chung đỉnh A, thì các đường sinh của nón thứ nhất đều cách O một đoạn r, và các đường sinh của nón thứ hai thì đều cách P một đoạn bằng r_1. Vậy vì hai nón có chung đỉnh nên chúng cắt nhau theo hai đường sinh chính là hai nghiêm g và g' cần tìm. Để tìm giao tuyến của hai nón, ta vạch một mặt cầu tâm A, bán kính R tùy ý. Vì 3 tâm cầu đều thuộc mặt phẳng bằng nên cầu bán kính R cắt hình nón thứ nhất theo một đường tròn mà hình chiếu bằng là đoạn 1 – 2, và cắt hình nón thứ hai theo đường tròn có hình chiếu bằng là đoạn 3 – 4. Đoạn 1 – 2 cắt đoạn 3 – 4 tại 5 ≡ 5' thì A – 5 là g và A – 5' là g', g và g' là hai đường sinh giao tuyến của hai mặt nón trên. Gắn 5 và 5' vào một đường tròn của cầu tâm A bán kính R thì tìm được hình chiếu đứng 5_1 và $5'_1$ của chúng. Ở đây ta đã gắn 5 và 5' vào một đường tròn thuộc cầu tâm A và thuộc một mặt phẳng $\varphi_2 // \pi_1$. Đó là đường tròn tâm A_1 bán kính R_1 (< R).



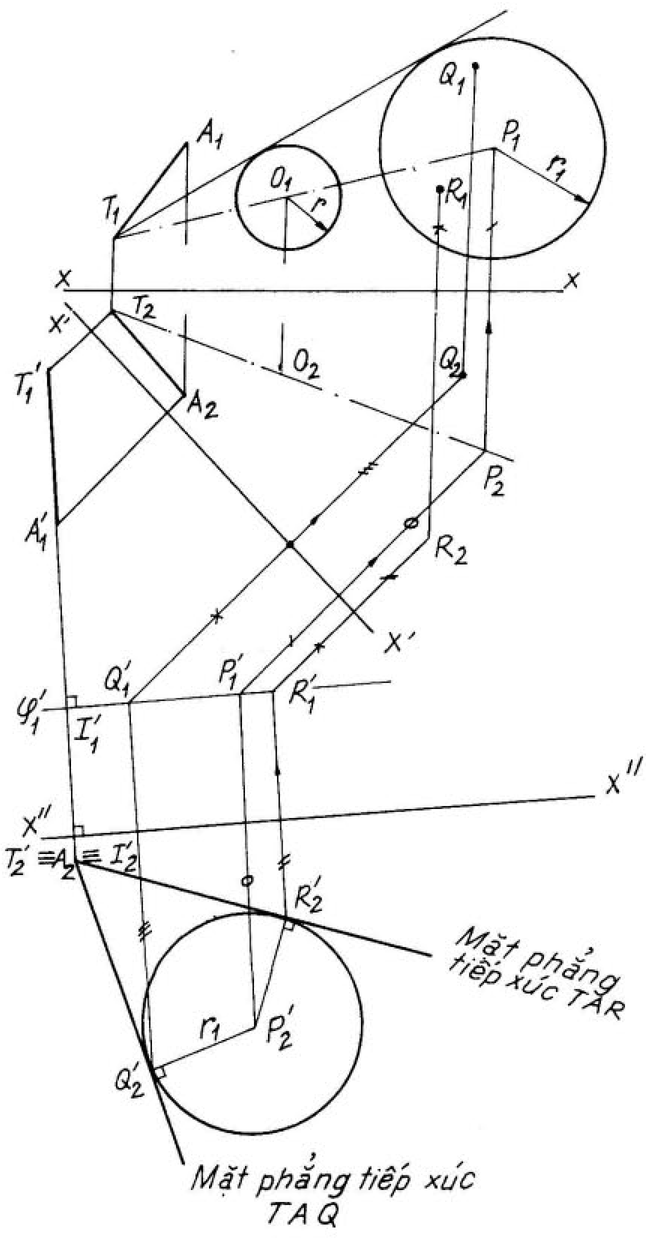
Hình 196

BÀI 76: Cho ba điểm A, O, P không thẳng hàng. Qua A lập một mặt phẳng cách O một khoảng bằng r và cách P một khoảng bằng r_1.



Hình 197

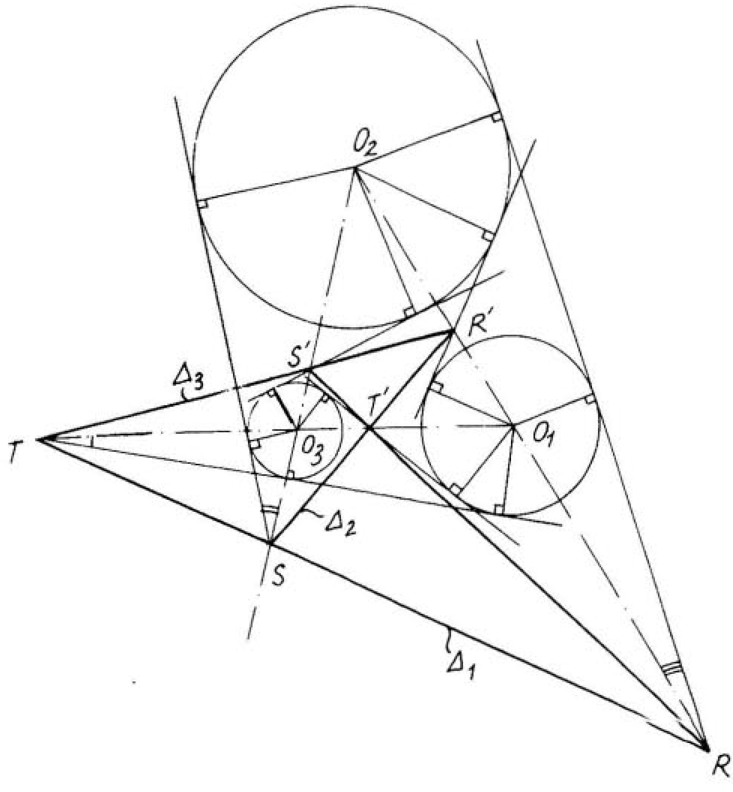
Phân tích: Gọi T là tâm đồng dạng phối cảnh ngoài và S là tâm đồng dạng phối cảnh trong của hai hình cầu. Để cách O một đoạn r và cách P một đoạn r_1 thì mặt phẳng đó phải tiếp xúc với hai hình cầu, vậy phải qua một trong hai tâm đồng dạng phối cảnh. Ở đây ta dùng tâm T để giải bài toán. Do đó mặt phẳng cần dựng phải chứa TA. Vì hai cầu đều nội tiếp trong hình nón đỉnh T nên một mặt phẳng chứa TA chỉ cần tiếp xúc với một trong hai hình cầu thì tiếp xúc với cả hai cầu.



Hình 198.

Giải: Xác định tâm đồng dạng phối cảnh ngoài T (hình 198). Nối TA. Bây giờ lập một mặt phẳng chứa TA và tiếp xúc với cầu tâm P bán kính r_1. Thay mặt phẳng chiếu hai lần để biến TA thành đường thẳng chiếu bằng $T'_2 \equiv A'_2$. Dùng mặt bằng φ'_1 cắt ong song với x"x" thì nó cắt mặt cầu tâm P theo đường tròn lớn nhất, cắt TA theo điểm I'_1. Qua I'_2 vẽ hai tiếp tuyến $I'_2Q'_2$ và $I'_2R'_2$ với đường tròn lớn. Hai mặt phẳng TAR và TAQ chứa TA, tiếp xúc với cầu nên hai mặt phẳng này qua A và cách O và P những đoạn r và r_1 cho trước. Dựa vào sự bằng nhau giữa các toạ độ cũ và mới, ta đưa về hai hình chiếu ban đầu. Nếu ta dùng tâm đồng dạng phối cảnh trong S thì ta lại có hai mặt phẳng nghiệm nữa.

BÀI 77: Cho ba hình cầu đường kính khác nhau, có 3 tâm cùng nằm trên một mặt phẳng bằng, và không cắt nhau. Trình bày cách lập mặt phẳng tiếp xúc với ba hình cầu trên. Biện luận số nghiệm.

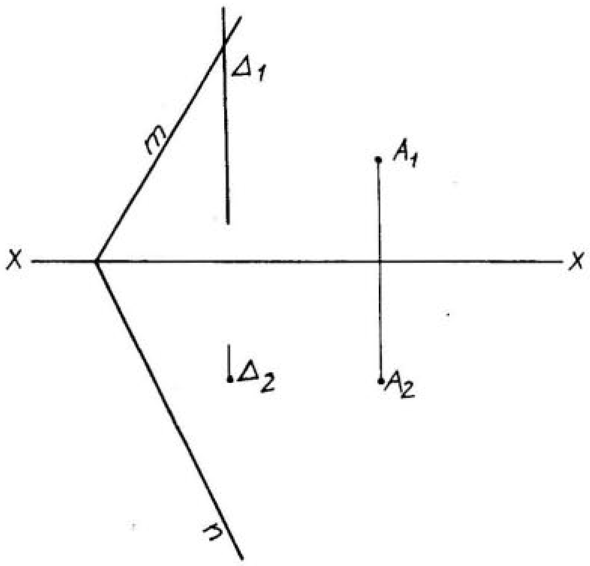


Hình 199.

Phân tích: Chúng ta chỉ cần biểu diễn bài toán trên hình chiếu bằng để trình bày cách lập mặt phẳng tiếp xúc chung. Theo nhận xét ở trên, mỗi cặp hình cầu có hai mặt nón ngoại tiếp chung có đỉnh là tâm đồng dạng phối cảnh trong và ngoài. Như vậy ở dây có tất cả là 6 đỉnh hình nón mà 3 một lại thẳng hàng. Đường thẳng Δ_1 chứa T, S và R, đường thẳng Δ_2 chứa S, T' và R', đường thẳng Δ_3 chứa T, S' và R' và đường thẳng Δ_4 chứa RS'T'. Mỗi mặt phẳng chỉ cần đi qua hai đỉnh nón, thí dụ T và S là có thể tiếp xúc với hai nón, vậy tiếp xúc với ba hình cầu (vì hai nón cùng ngoại tiếp cho 1 hình cầu nội tiếp). Tóm lại một mặt phẳng chỉ cần chứa một trong bốn đường Δ_1, Δ_2, Δ_3 hoặc Δ_4 và tiếp xúc với một hình cầu thôi là tiếp xúc với cả ba hình cầu. Vậy tối đa có tám mặt phẳng tiếp xúc chung cho ba hình cầu, mỗi cặp mặt phẳng chứa một đường Δ. Theo dựng hình như trên, nếu hai hình cầu cắt nhau thì có hai đường Δ cắt hình cầu nên không dùng được chỉ còn bốn mặt phẳng nghiệm. Nếu hai cặp hình cầu cắt nhau hoặc cả ba cắt nhau thì chỉ còn hai nghiệm.

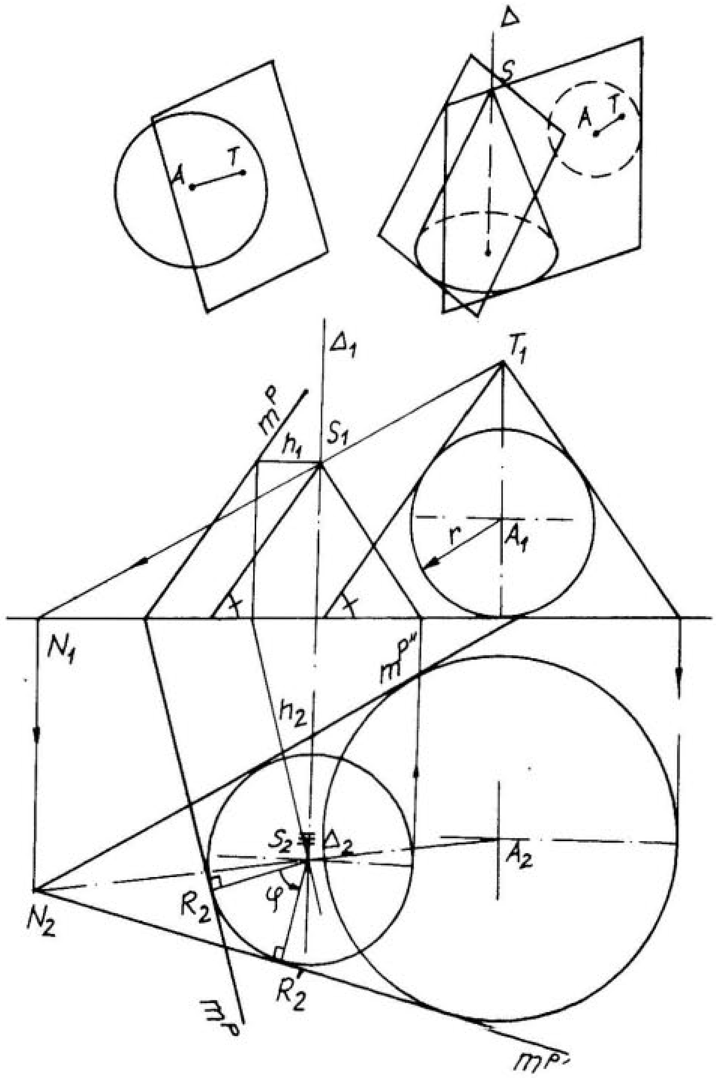
BÀI 75: Cho mặt phẳng P bằng hai vết (n^P và m^P), một đường thẳng chiếu bằng Δ, và một điểm A. Hãy xoay mặt phẳng P quanh đường thẳng Δ tới vị trí mới P' cách điểm A một khoảng bằng r (hình 200).

Phân tích: Một mặt phẳng muốn cách điểm A một khoảng bằng r thì phải tiếp xúc với mặt cầu tâm A bán kính r. Một mặt phẳng P khi xoay quanh Δ thì luôn luôn tiếp xúc với một hình nón đỉnh là giao điểm S của Δ với mặt phẳng P, đường sinh là đường dốc nhất đối với π_2 đi qua S. Mặt phẳng P' cũng phải tiếp xúc với hình nón đỉnh S này, đồng thời tiếp xúc với cầu tâm A bán kính r. Để giải được bài toán mặt phẳng tiếp xúc với nón và với cầu, ta chuyển nó thành mặt phẳng tiếp xúc với hai nón đồng dạng bằng cách ngoại tiếp cho cầu một hình nón thẳng đứng đỉnh T đồng dạng với hình nón đỉnh S.



Hình 200.

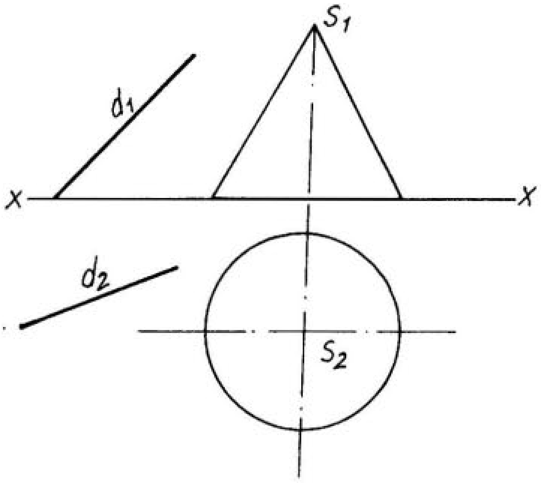
Giải: Tìm giao điểm S của Δ với mặt phẳng P, thì $S_2 \equiv \Delta_2$, dùng đường bằng h của P tìm được S_1. Qua S_2 kẻ $S_2R_2 \perp m^P$ thì đó là hình chiếu bằng đường dốc nhất của P đối với π_2. Lấy S_2 làm tâm vạch một đường tròn bán kính S_2R_2 thì đó là đáy nón đỉnh S tiếp xúc với mặt phẳng P theo đường sinh SR. Với bán kính S_2R_2 ta vẽ được hình chiếu đứng của hình nón này. Sau đó vẽ một hình nón đồng dạng với hình nón đỉnh S và ngoại tiếp cho hình cầu tâm A bán kính r. Từ đó suy ra được hình chiếu bằng của đáy nón đó. Nối ST kéo dài ta có vết bằng N. Qua N_2 ta kẻ $m^{P'}$ và $m^{P''}$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đáy nón. Vậy vết m^P phải xoay quanh Δ một góc φ $(\widehat{R_2S_2R'_2})$ để đến vị trí $m^{P'}$ hoặc $m^{P''}$ thì tiếp xúc với nón đỉnh T, tức là cũng tiếp xúc với cầu tâm A bán kính r. Ở đây có hai nghiệm: mặt phẳng P' và mặt phẳng P". Vị trí mới là P'(S, $m^{P'}$) và P"(S, $m^{P''}$).



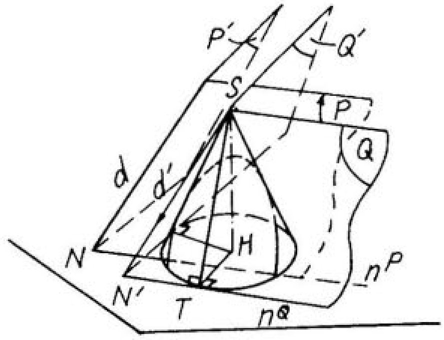
Hình 201.

<u>BÀI 78</u>: Cho một hình nón đỉnh S và một đường thẳng d. Qua d lập một mặt phẳng P cắt hình nón theo một đường parabôn. Có mấy nghiệm? (hình 202).

Phân tích: Một mặt phẳng P muốn cắt hình nón theo parabon thì P phải song song với một đường sinh của hình nón. Muốn vậy qua đỉnh nón ta kẻ d' // d, rồi tìm vết bằng N_2 của d'. Qua N_2 ta lập được hai vết bằng n^Q và $n^{Q'}$ của hai mặt phẳng // d và tiếp xúc với hình nón theo một đường sinh ST và ST'. Vậy bây giờ ta kẻ qua vết bằng L_2 của d một vết bằng n^P // n^Q thì mặt phẳng P xác định bởi d và n^P sẽ // một đường sinh ST của hình nón, sẽ cắt nón theo một parabôn. Nghiệm thứ hai $n^{P'}$ // $n^{Q'}$. Mặt phẳng P' xác định bởi d và $n^{P'}$ (hình 204).



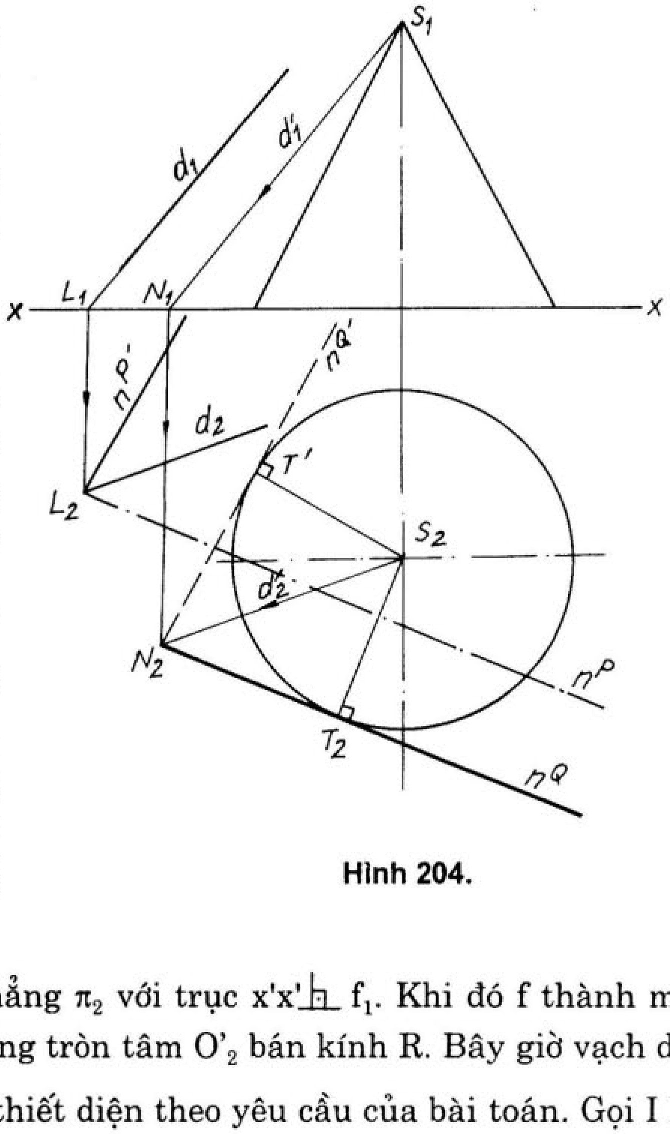
Hình 202.



Hình 203.

BÀI 79: Vẽ hai vết bằng n^{α} và vết đứng m^{α} của mặt phẳng α biết rằng α đi qua đường mặt f và cắt hình cầu tâm O bán kính R cho trước theo một đường tròn đường kính là $\frac{3R}{2}$ (hình 205).

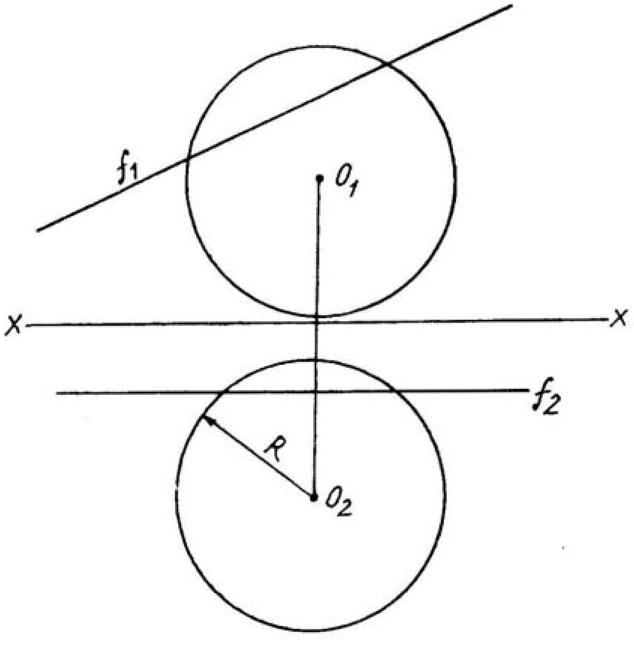
Phân tích: Phải biến đổi hình chiếu để mặt phẳng cắt α thành một đường thẳng thì mới xác định được đường kính $\frac{3R}{2}$ của tiết diện và mới xác định được vị trí cần thiết của mặt phẳng α. Sau đó mới đưa về hình chiếu bằng cho trước. Bây giờ ta xem cách giải cụ thể trên hình 206.



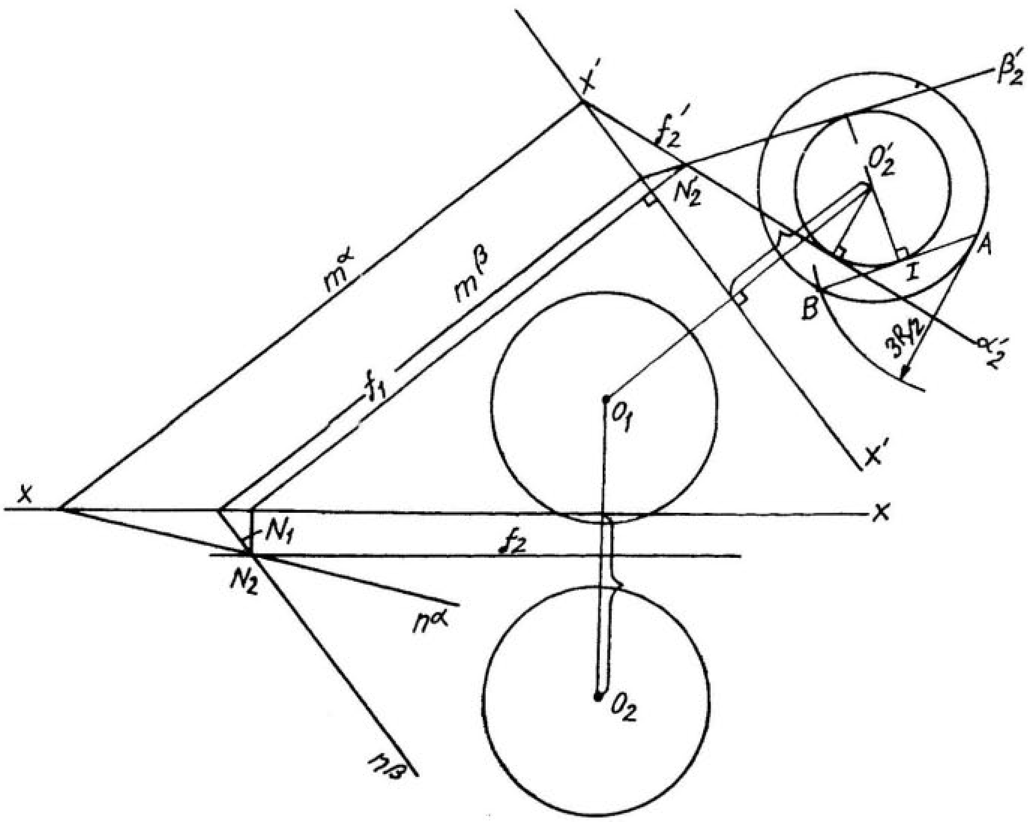
Hình 204.

Trước tiên thay mặt phẳng π_2 với trục $x'x' \perp f_1$. Khi đó f thành một điểm $f'_2 \equiv N'_2$. Hình cầu thành đường tròn tâm O'_2 bán kính R. Bây giờ vạch dây cung $AB = \frac{3R}{2}$ = đường kính của thiết diện theo yêu cầu của bài toán. Gọi I là trung điểm của AB. Vạch đường tròn tâm O'_2 bán kính O'_2I. Mọi đường thẳng tiếp xúc với đường tròn này sẽ cắt đường tròn lớn theo một dây cung bằng $AB = \frac{3R}{2}$.

Qua f'_2 kẻ α'_2 và β'_2 tiếp xúc với đường tròn nhỏ thì đó là hình chiếu suy biến của hai mặt phẳng cần dựng (α và β). Tại giao điểm của α'_2 với trục x'x' ta kẻ m^α // f_1, tại m^α cắt trục xx ta kẻ n^α đi qua N_2 của f.



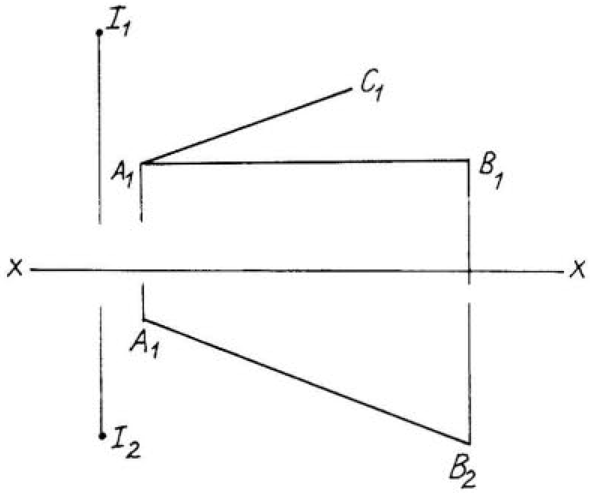
Hình 205.



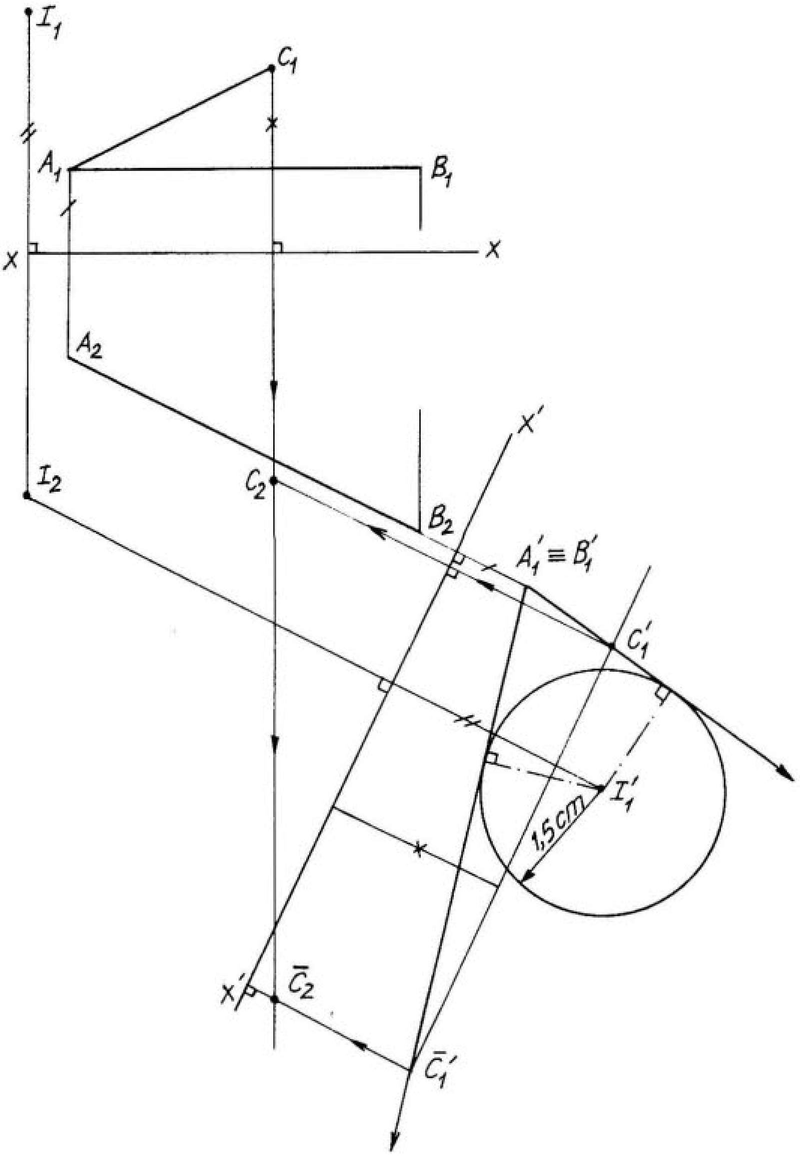
Hình 206.

Tương tự, qua f'_2 kẻ β'_2 tiếp xúc với đường bán kính O'_2I. Tại giao điểm của β'_2 với trục x'x' kẻ m^β // f_1, rồi tại giao điểm m^β với trục xx ta kẻ n^β đi qua điểm N_2. Như vậy ta đã lập được hai mặt phẳng α (m^α, n^α) và β (m^β, n^β) qua f và cắt cầu tâm O theo một đường tròn có đường kính bằng $\frac{3R}{2}$.

<u>BÀI 80</u>: Vẽ nốt hình chiếu C_2 của điểm C biết rằng mặt phẳng ABC cách điểm I một đoạn bằng 1,5 cm, với AB // π_2 (hình 207).



Hình 207.



Hình 208.

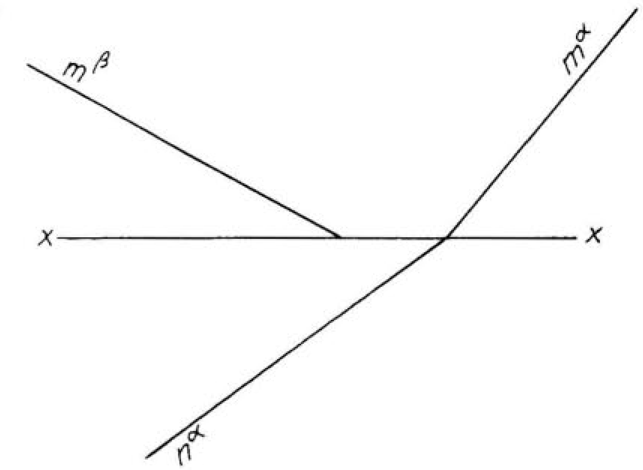
Phân tích: Phải biến đổi hình chiếu để mặt phẳng ABC suy biến thành một đường thẳng thì khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng được thể hiện bằng độ lớn thật. Vì AB là đường bằng nên nếu ta thay mặt phẳng hình chiếu đứng với trục x'x' $\perp$ A_2B_2 thì hình hoặc chiếu đứng mới của AB thành một điểm $A'_1 \equiv B'_1$, và mặt phẳng ABC thành 1 đường thẳng qua điểm này và tiếp xúc với một đường tròn tâm I'_1 và bán kính bằng 1,5 cm. Hai đường tiếp tuyến này là quỹ tích của C'_1. Đưa độ cao cũ của C, sang hình chiếu đứng mới ta có được C'_1 và $\overline{C}'_1$. Dóng từ C_1 xuống, rồi từ C'_1 và $\overline{C}'_1$, dóng vuông góc với x'x' và cho cắt đường dóng của C_1 thì ta được C_2 và $\overline{C}'_2$ của điểm C cần tìm.

<u>BÀI 81</u>: Vẽ nốt vết bằng n^β của mặt phẳng β biết rằng mặt phẳng β vuông góc với mặt phẳng α (hình 209).

Phân tích: Để mặt phẳng β vuông góc với mặt phẳng α thì mặt phẳng β phải chứa thêm một đường thẳng d cắt m^β và d phải $\perp$ với mặt phẳng α, tức là $d_1 \perp m^\alpha$

$$d_2 \perp n^\alpha$$

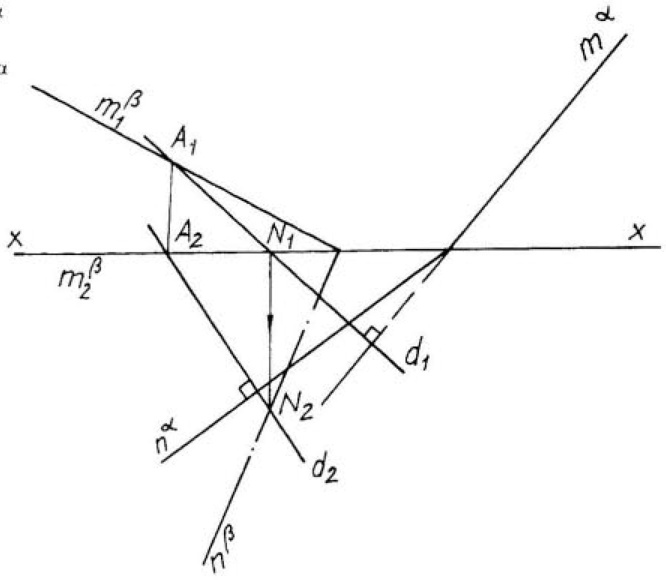
(m^β x d) là mặt phẳng β. Trước tiên lấy điểm A thuộc m^β (hình 210).



Hình 209.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \in m_1^\beta \\ A_2 \in m_2^\beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{qua } A_1 \text{ kẻ } d_1 \perp m^\alpha \\ \text{qua } A_2 \text{ kẻ } d_2 \perp n^\alpha \end{array}$$

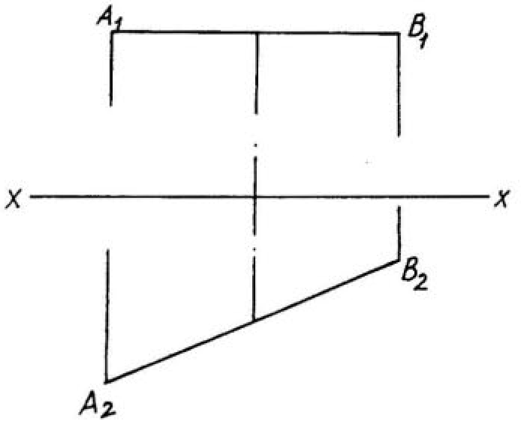
Mặt phẳng β chứa d nên vết bằng n^β phải qua vết bằng N_2 của d. Ngoài ra n^β phải cắt m^β trên trục xx. Như vậy ta đã xác định được n^β.



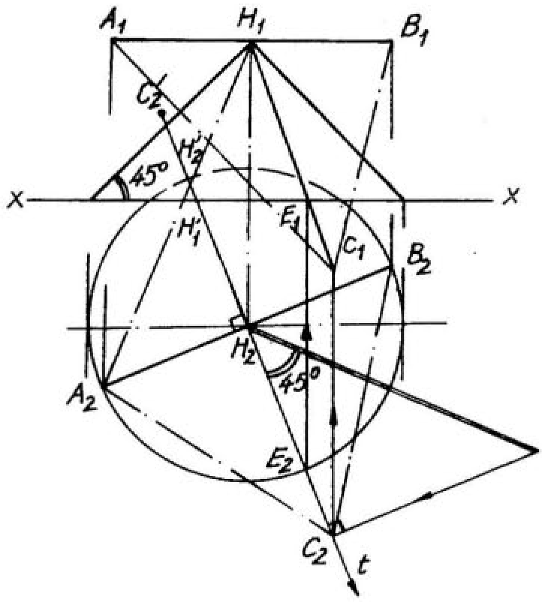
Hình 210.

<u>BÀI 82</u>: Cho một đường bằng AB. Hãy vẽ hai hình chiếu của tam giác cân ABC nhận AB làm đáy, còn đường cao CH = AB và CH hợp với mặt phẳng π_2 một góc 45° (hình 211).

Phân tích: ΔABC cân có đường cao là CH nên H là trung điểm của AB. Ngoài ra CH làm với π_2 một góc 45° nên CH phải thuộc một đường sinh của mặt nón tròn xoay có đỉnh là H và có góc đáy là 45°. Đường cao CH phải $\perp$ AB, mà AB là đường bằng thì hình chiếu bằng của CH phải thuộc một đường thẳng $H_2t \perp A_2B_2$ tại H_2. Rồi kẻ một đường thẳng làm với H_2t một góc 45° (xem hình 212) trên đó ta đặt $H_2C = A_2B_2$ (chiều dài thật). Từ C kẻ vuông góc với H_2t ta có được C_2. Gắn C vào một đường sinh HE ta tìm được C_1. $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là hai hình chiếu của tam giác cần tìm. Còn một nghiệm C'_2 đối xứng với C_2 qua H_2. Cách tìm C'_1 cũng tương tự.



Hình 211.



Hình 212.

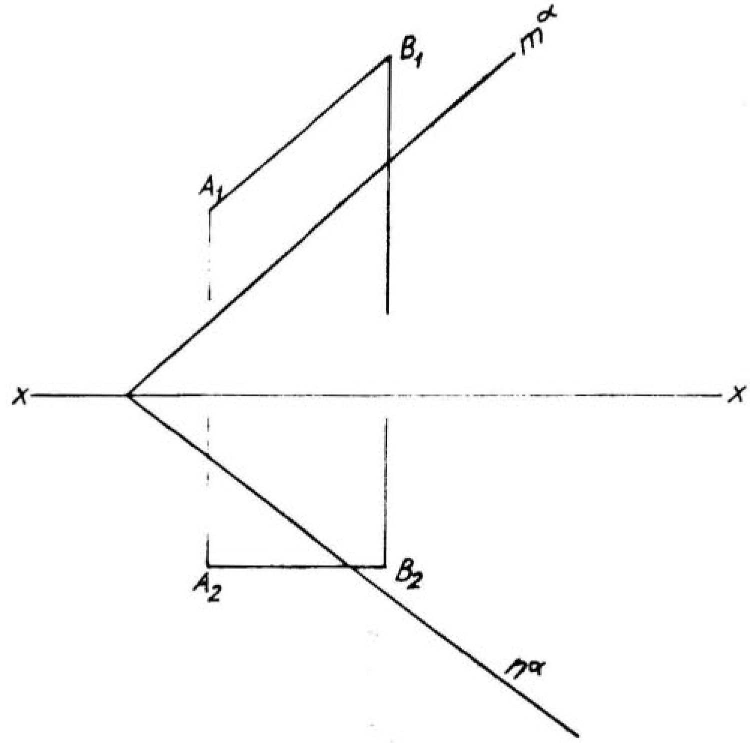
<u>BÀI 83</u>: Cho đường mặt AB. Dựng một Δ đều ABC sao cho đỉnh C thuộc mặt phẳng α (hình 213).

Phân tích: AB là đường mặt, A_1B_1 là độ dài thật. Theo định lý hình chiếu của góc vuông, quĩ tích của C_1 là một đường thẳng $\perp$ A_1B_1 tại trung điểm H_1.

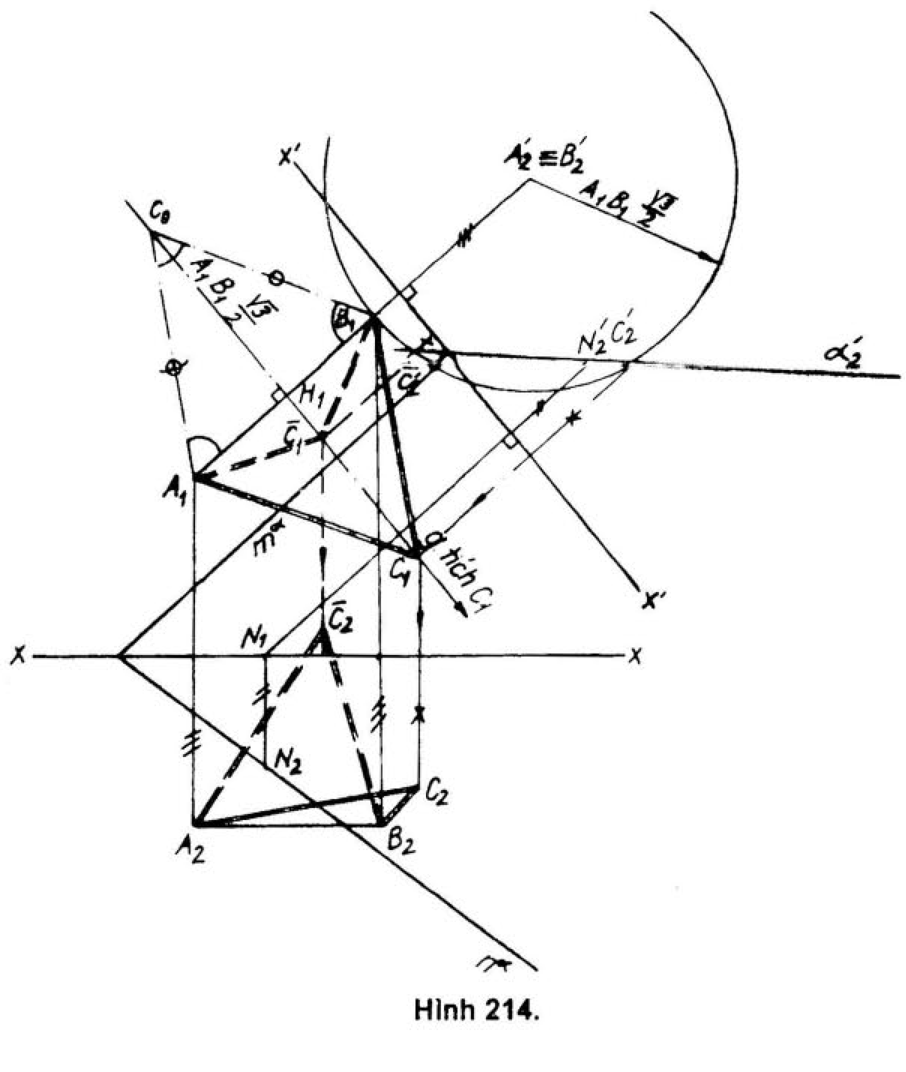
Ngoài ra CH là đường cao của Δ đều nên CH = AB $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Bây giờ ta thay mặt phẳng hình chiếu bằng và lấy trục $x'x' \perp A_1B_1$ thì ở hình chiếu bằng mới AB thành một điểm $A'_2 \equiv B'_2$ và khoảng cách giữa $A'_2B'_2$ và C'_2 là $A_1B_1\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy

C'_2 phải nằm trên đường tròn tâm $A'_2 \equiv B'_2$ bán kính là $A_1B_1\frac{\sqrt{3}}{2}$ và nằm trên đường thẳng α'_2 (hình chiếu suy biến của mặt phẳng α). Giao điểm của α'_2 và đường tròn là C'_2 (và $\overline{C'}_2$) cần tìm. Từ C'_2 dóng về quĩ tích của C_1 ta có được C_1. Đưa độ xa mới về độ xa cũ ta có C_2. Đối với $\overline{C}_2$ cũng dóng về tương tự. Chú ý ở đây độ xa của $\overline{C}$ là âm (hình 214).

Bài toán có hai nghiệm.

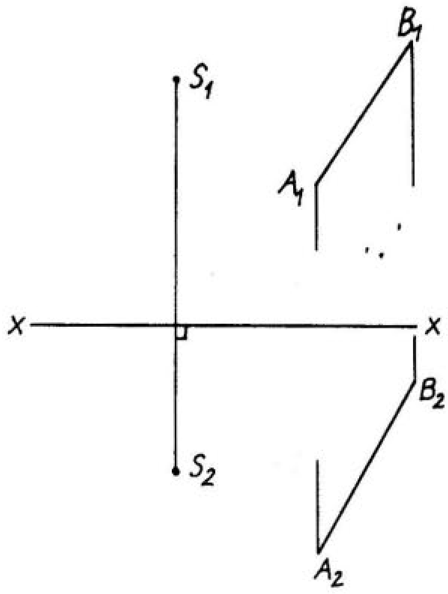


Hình 213.

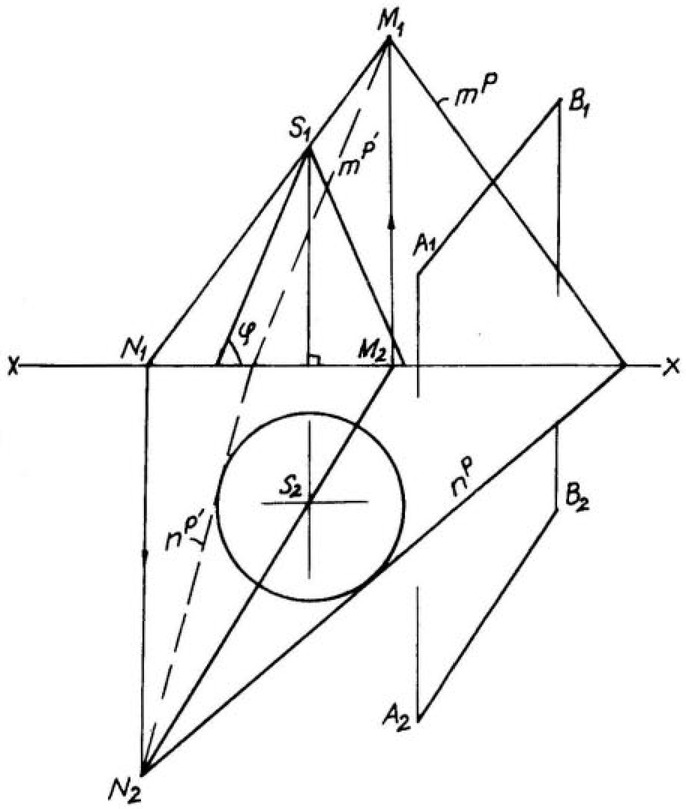


Hình 214.

BÀI 84: Cho một đoạn thẳng AB và một điểm S. Qua S lập một mặt phẳng P // AB và làm với mặt phẳng π_2 một góc φ cho trước (hình 215).



Hình 215.

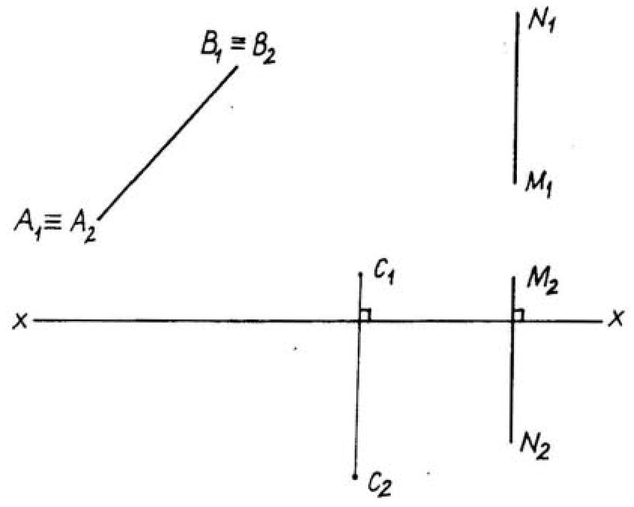


Hình 216.

Phân tích: Mặt phẳng P qua S mà muốn // AB thì phải chứa SN // AB. SN có vết bằng là N_2, vết đứng là M_1. Mặt phẳng P muốn làm một góc φ với π_2 thì phải tiếp xúc với một hình nón đỉnh S góc đáy là φ. Vậy vết bằng n^P phải qua N_2 và tiếp xúc với đường tròn đáy nón.

Đầu tiên kẻ S_1N_1 // A_1B_1 và S_2N_2 // A_2B_2 và SN có vết bằng là N_2 và vết đứng là M_1. Qua S_1 vẽ một tam giác cân đáy trên xx và góc đáy là φ, từ đó suy ra hình chiếu bằng của đáy là đường tròn có đường kính là cạnh đáy của Δ trên. Cuối cùng qua N_2 kẻ n^P tiếp xúc với đường tròn đáy. Nghiệm thứ hai là $n^{P'}$. Sau đó nối M_1 với giao điểm của n^P với trục xx thì đó là vết đứng m^P của mặt phẳng P. Và ta cũng có $n^{P'}$ của mặt phẳng P' là nghiệm thứ hai (hình 216).

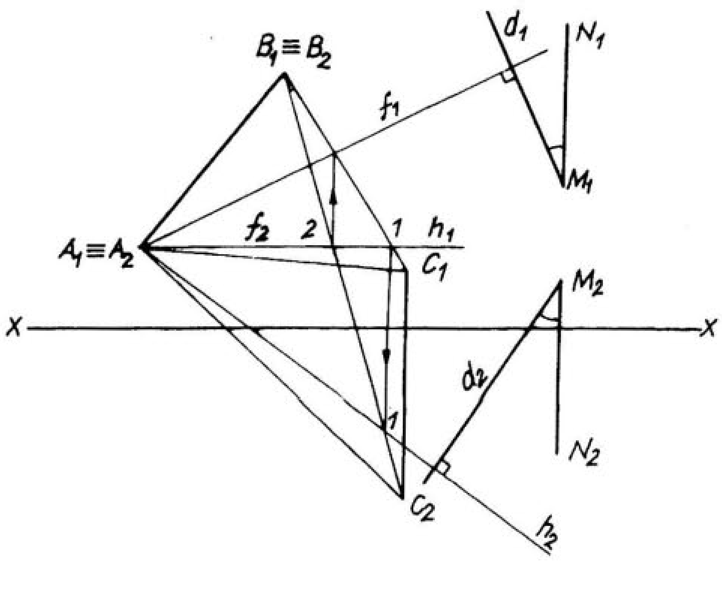
BÀI 85: Cho mặt phẳng P xác định bởi đoạn AB và điểm C. Qua đường cạnh MN hãy lập một mặt phẳng Q vuông góc với mặt phẳng P.



Hình 217

Phân tích: Trước tiên ta nối các hình chiếu của tam giác ABC tượng trưng cho mặt phẳng P. Mặt phẳng Q muốn vuông góc với mặt phẳng P(ABC) thì phải chứa một đường thẳng d sao cho:

$$\left.\begin{array}{r} d_1 \perp f_1 \text{ của P} \\ \text{và } d_2 \perp h_2 \text{ của P} \end{array}\right\} d \perp P$$



Hình 218

Bây giờ qua A_1 ta kẻ h_1 // xx, dóng điểm 1 xuống B_2C_2 ta có h_2. Ta lại kẻ qua A f_2 cắt B_2C_2 tại 2, dóng lên ta có f_1.

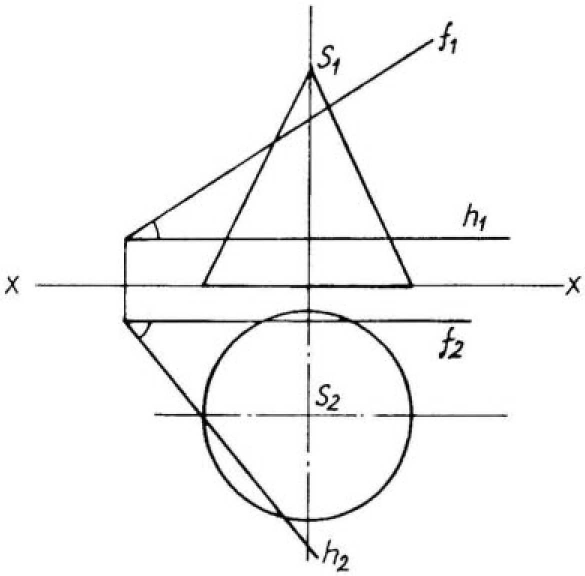
Cuối cùng qua M_1 kẻ $d_1 \perp f_1$ và qua M_2 kẻ $d_2 \perp h_2$ thì $d \perp$(ABC)P. MN cắt d tại M xác định mặt phẳng Q cần dựng.

BÀI 86: Tìm giao tuyến của mặt phẳng (h x f) với hình nón thẳng đứng tròn xoay (hình 219).

Phân tích: Có nhiều cách giải bài toán.

1. Thay mặt phẳng hình chiếu đứng, xoay quanh trục của hình nón, chiếu xiên để mặt phẳng suy biến thành đường thẳng và thiết diện có hình chiếu là một đoạn thẳng. Từ đó đưa về hình chiếu cũ.

2. Tìm giao điểm từng đường sinh của nón với mặt phẳng cắt rồi nối lại.



Hình 219

3. Dùng mặt phẳng phụ trợ cắt nón theo giao tuyến phụ có hình chiếu là đường tròn hoặc tam giác và cắt mặt phẳng theo một đường thẳng. Đường thẳng này cắt đường tròn hay tam giác tại hai điểm là thuộc giao tuyến cần tìm. Hình 220 trình bày thứ tự giải bài toán bằng phối hợp các phương pháp trên.

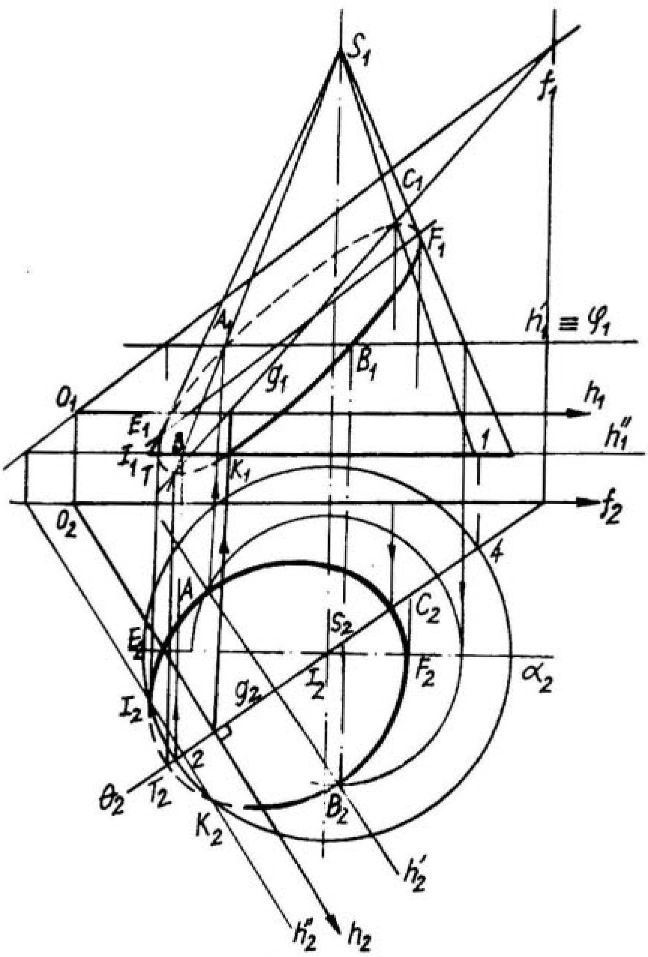
Giải: Trước hết lập mặt phẳng bằng φ_1 cắt nón theo đường tròn, cắt mặt phẳng theo đường bằng h'_1. h'_2 cắt đường tròn tại A_2 và B_2 là hai điểm của giao tuyến. Dóng trả lên φ_1 ta có A_1 và B_1.

Sau đó dùng mặt phẳng chiếu bằng θ_2 qua đỉnh S_2 của nón; θ_2 cắt nón theo hai đường sinh S1 và S2, cắt mặt phẳng theo g. g_1 cắt $S_1 1$ và $S_1 2$ theo C_1 và T_1, dóng xuống có C_2 và T_2. C là điểm cao nhất, T là điểm thấp nhất. Chú ý là θ_2 phải $\perp$ h_2 thì g là đường dốc nhất của mặt phẳng.

Tương tự dùng α_2 ta có hai điểm E_1 và F_1 là các điểm giới hạn thấy khuất trên đường sinh biên.

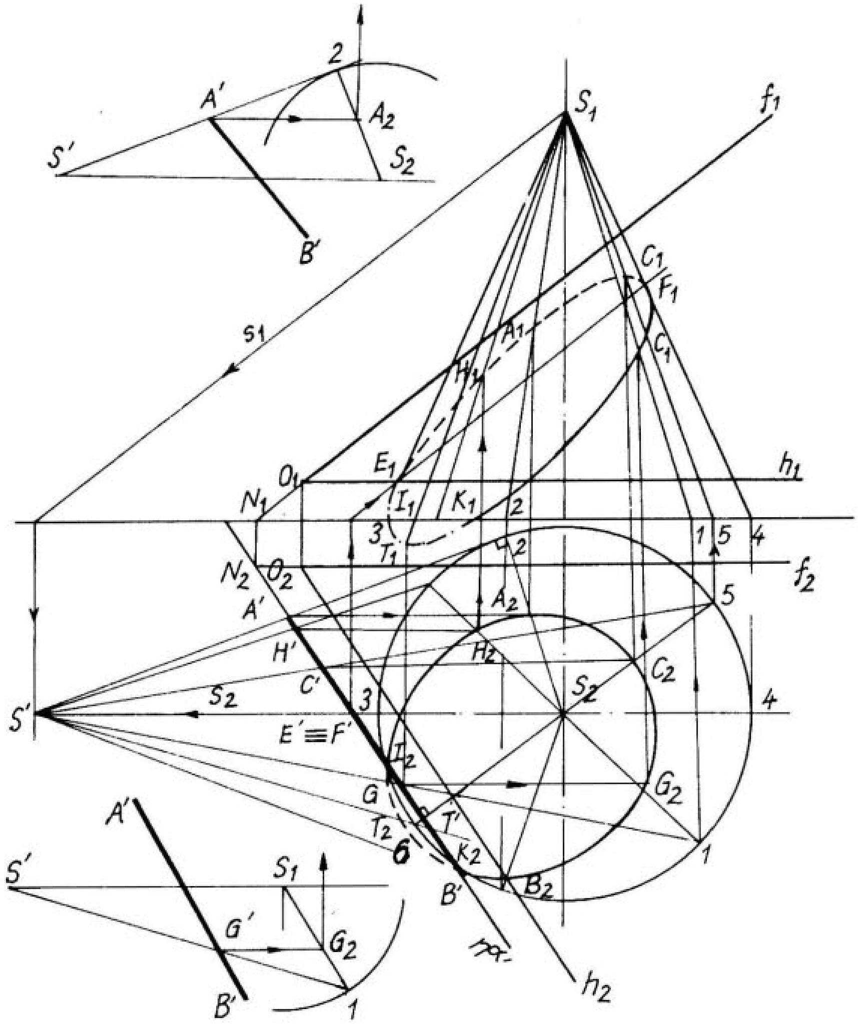
Mặt phẳng đáy nón cắt mặt phẳng cắt theo đường bằng h", do đó ta có hai điểm giới hạn I và K của giao tuyến. Nối các điểm tìm được ta có hình chiếu của giao tuyến cần tìm.

Một cách giải khác được trình bày trên hình 221. Bây giờ nếu ta chiếu theo phương của đường mặt f xuống mặt phẳng π_2, thì mặt phẳng (h x f) sẽ có hình chiếu xiên trên π_2 là chính vết bằng n^{α} của nó. Đỉnh S chiếu xiên thành S', đường tròn đáy nón thì trùng với hình chiếu xiên của nó. Hình chiếu xiên của



Hình 220

hình nón là hình nón đỉnh S' đáy vẫn là hình chiếu bằng đáy nón đã cho. Đường sinh $S_2$1 có hình chiếu xiên là S'1. Thiết diện suy biến thành đoạn thẳng A'B'.S'1 mang điểm G' của thiết diện. Từ G' kẻ // trục xx cắt $S_2$1 tại G_2, dóng lên $S_1$1 ta có G_1. Tương tự S'2 mang điểm A', kẻ // xx về $S_2$2 ta có điểm A_2, từ đó suy ra A_1. Ta thấy hình chiếu bằng của 1 đường sinh có chân chung với hình chiếu xiên của đường sinh đó, và chân chung đó nằm trên đường tròn đáy nón. Tương tự ta tìm được nhiều điểm của giao tuyến rồi nối lại. Hai đường sinh biên S_3 và S_4 có hình chiếu xiên trùng nhau và mang hai điểm E' ≡ F' Chiếu ngược lại ta có E_1 và F_1 trên các đường sinh biên. Đó là các điểm giới hạn thấy khuất. S5 cho ta điểm C_1 là điểm cao nhất, và S6 cho ta điểm thấp nhất T_1 (nằm ở phần kéo dài của S6). Vết bằng N_2 của f cho ta vết bằng n^{α} của mặt phẳng (h x f) và $n^{\alpha'}$ là hình chiếu xiên suy biến của mặt phẳng đó nên nó chứa mọi hình chiếu xiên của các điểm thuộc giao tuyến. Vết bằng n^{α} cắt đường tròn đáy tại I và K là hai điểm giới hạn của giao tuyến. Cung ellíp ITK không thuộc ellíp giao tuyến nữa vì mặt phẳng cắt đáy nón theo đoạn IK.



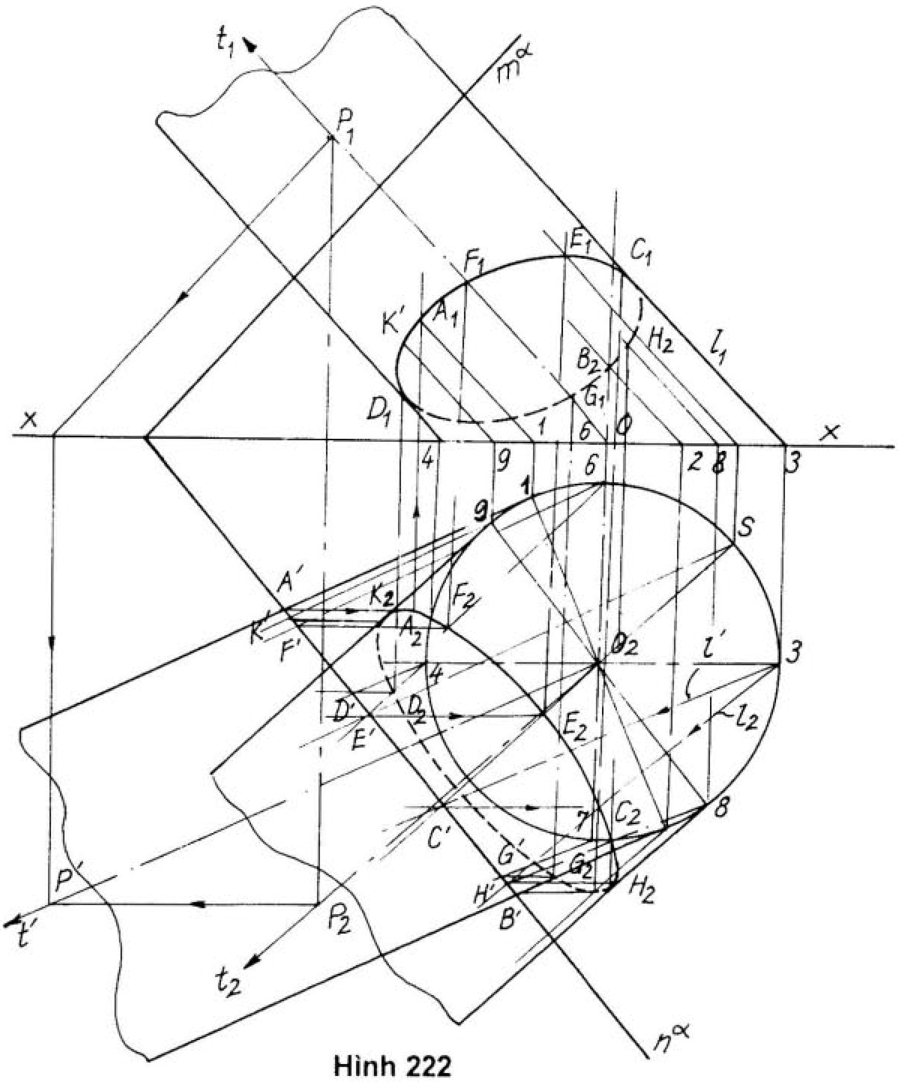
Hình 221

<u>BÀI 87</u>: Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với hình trụ xiên (hình 222).

Phân tích: Ta cũng dùng phép chiếu xiên // với m$^{\alpha}$ xuống mặt phẳng π_2. Tâm O của đường tròn đáy có hình chiếu xiên trùng với nó. Chiếu một điểm P của trục Ot thành P'. Hình chiếu xiên của trục Ot thành O_2t'. Thí dụ đường sinh biên *l* có hình chiếu bằng l_2 và hình chiếu xiên l' có chân chung là điểm 3. Hình chiếu xiêncủa thiết diện là A'B'. *l'* cắt A'B' tại C', ta dóng ngang về l_2 thì có C_2 rồi dóng lên l_1 có C_1. Các điểm khác ta làm tương tự rồi nối lại ta có hai hình chiếu của giao tuyến là hai ellíp (hình 222) (tham khảo hình 221 của bài 86).

<u>BÀI 88</u>: Không dùng hình chiếu cạnh tìm giao tuyến của mặt phẳng phân giác I với mặt cầu tâm O (hình 223).

Phân tích: Ta dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt. Chúng cắt cầu theo một đường tròn mà một hình chiếu là tròn và cắt mặt phẳng phân giác I theo một đường thẳng có hai hình chiếu đối



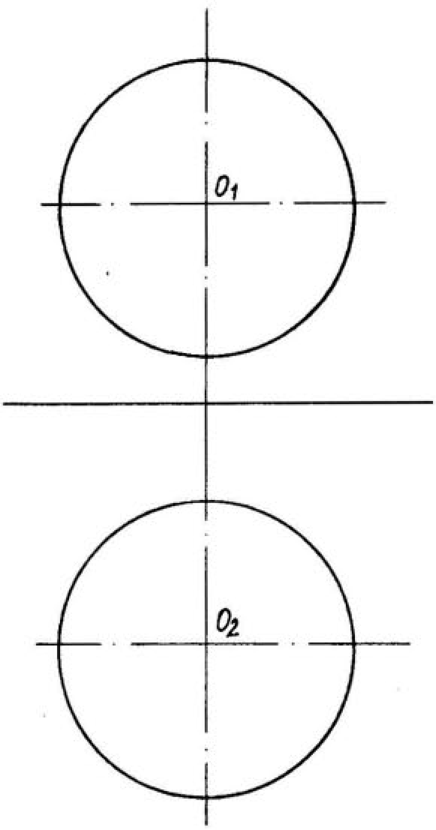
Hình 222

xứng qua trục xx. Đường tròn và đường thẳng cắt nhau tại các điểm của giao tuyến cần tìm. Thí dụ mặt bằng θ_1 cắt mặt cầu theo một đường tròn bán kính là r_1 và cắt mặt phân giác I theo đường m có $m_1 \equiv \theta_1$. Còn m_2 đối xứng với m_1 qua trục xx. Đường tròn bán kính r_1 cắt m_2 tại G_2 và H_2, suy ra trên $\theta_1 G_1$ và H_1 là hai điểm của giao tuyến.

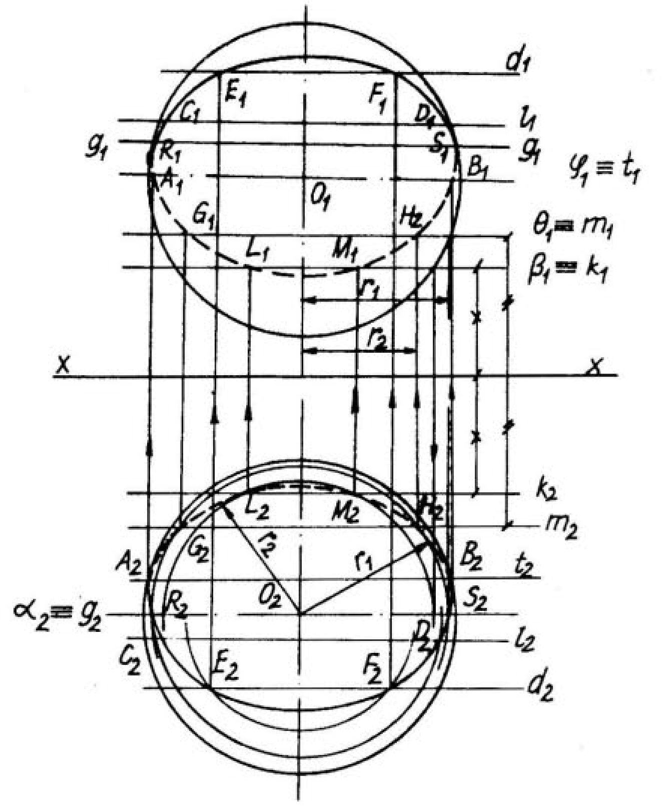
Dùng mặt bằng φ_1 ta có hai điểm tiếp xúc A_2 và B_2 ở hình chiếu bằng. Dùng mặt phẳng mặt α_2 thì ta có hai điểm tiếp xúc R_1 và S_1 ở hình chiếu đứng, suy ra R_2, S_2. Tương tự ta có các điểm khác rồi nối lại thành giao tuyến (hình 224).

<u>BÀI 89</u>: Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với một nửa hình xuyến (hình 225).

Phân tích: Ta dùng mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng mặt để cắt hình xuyến theo các đường tròn và cắt α theo một đường mặt. Đường mặt cắt các đường tròn tại những điểm thuộc giao tuyến của hai mặt.



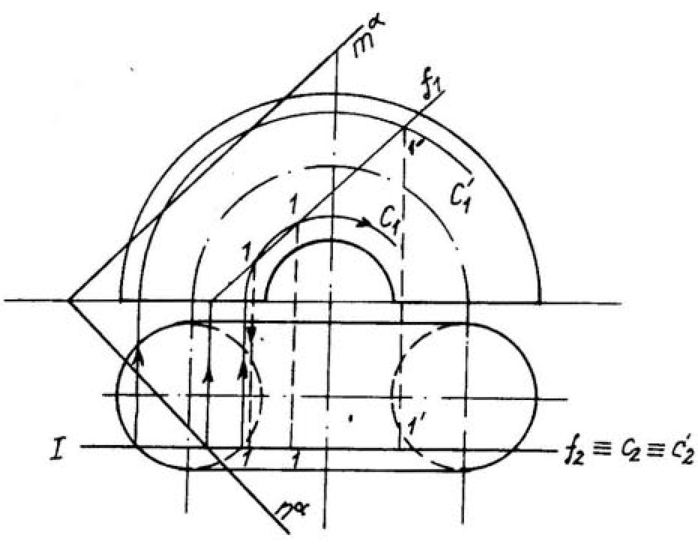
Hình 223.



Hình 224.

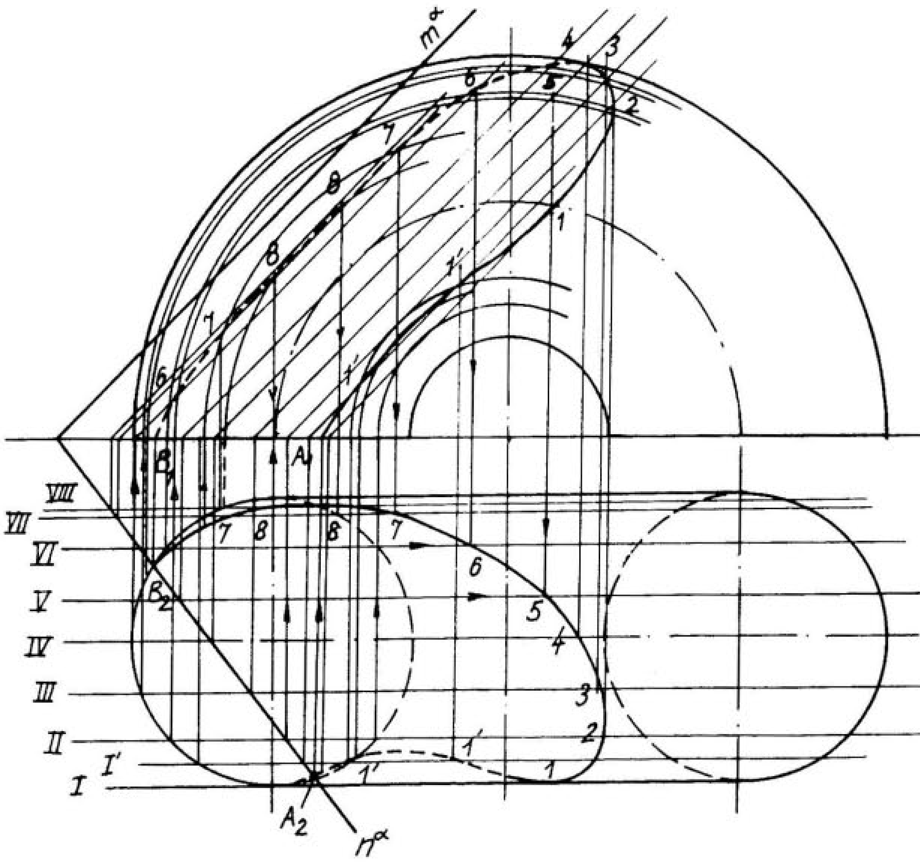
Thí dụ trên hình 225 trình bày cách dùng mặt phẳng mặt I cắt mặt phẳng theo một đường mặt f, và cắt hình xuyến theo hai đường tròn C và C'. Ở đây f_1 cắt C_1 tại hai điểm 1 và cắt C'_1 tại một điểm 1'. Ta cắt nhiều lát cắt I, II, III..., ta sẽ có nhiều điểm của giao tuyến (hình 226). Mặt cắt IV cắt xuyên theo đường tròn lớn nhất và cho ta điểm 4 trên hình chiếu đứng là điểm tiếp xúc giới hạn phần thấy của giao tuyến. Mặt cắt I trên hình 226 cho ta điểm 1 là đường tiếp xúc giới hạn phần thấy ở hình chiếu bằng (hình 226).

Để xét thấy khuất ta xem điểm nào có hình chiếu đứng thuộc vùng gạch gạch trên hình chiều đứng thì điểm đó khuất ở hình chiếu bằng. Thí dụ ở hình chiếu bằng $A_2 \equiv B_2$,



Hình 225

nhưng B_1 ở vùng gạch gạch nên B khuất ở hình chiếu bằng, còn A là thấy. Trên hình chiếu đứng $C_1 \equiv D_1$, nhưng D_2 ở vùng gạch gạch dưới hình chiếu bằng nên D khuất ở hình chiếu đứng, tất nhiên C là thấy (hình 227).

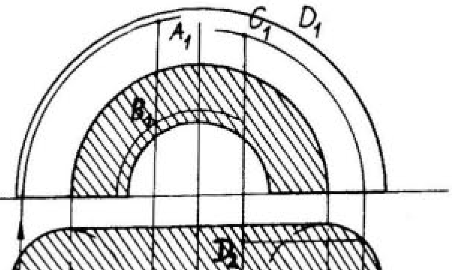


Hình 226

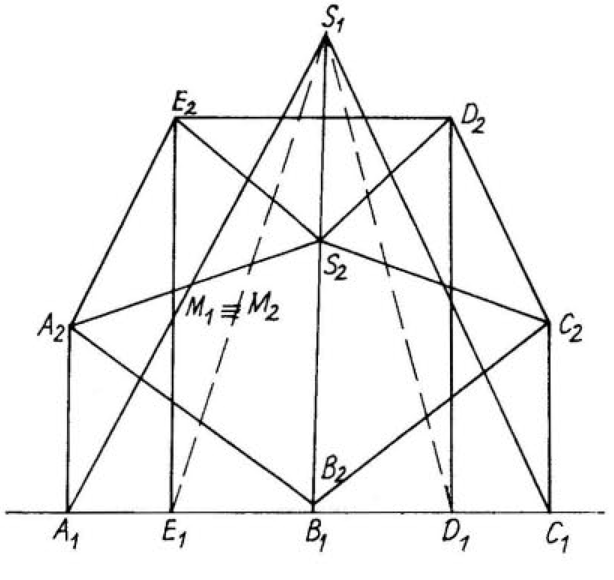
<u>BÀI 90</u>: Cho một hình chóp SABCDE nằm ở góc tư thứ hai, hãy tìm giao tuyến của mặt phẳng phân giác II với hình chóp trên (hình 228).

Phân tích: Ta sẽ phải tìm giao điểm từng cạnh của hình chóp với mặt phẳng phân giác II. Trên hình 228, giao điểm M của cạnh SA với mặt phân giác II chính là giao điểm của hai hình chiếu của SA:

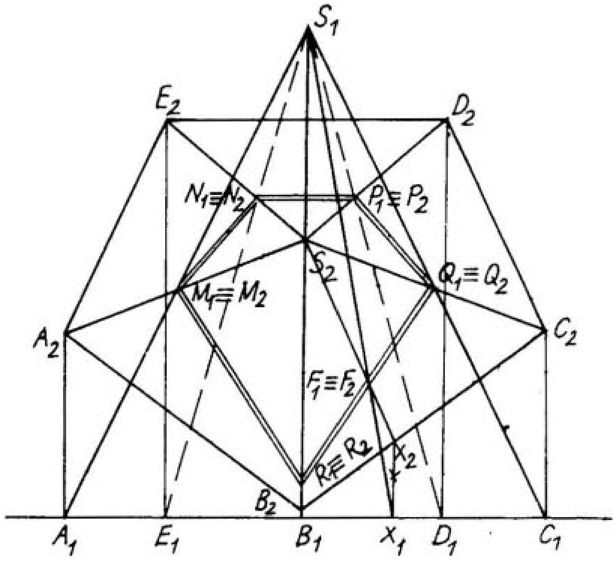
$S_1A_1 \times S_2A_2 = M_1 \equiv M_2$



Hình 227



Hình 228.



Hình 229.

Tương tự trên hình 229 $S_1E_1 \times S_2E_2 = N_1 \equiv N_2$, $S_1D_1 \times S_2D_2 = P_1 \equiv P_2$ và $S_1C_1 \times S_2C_2 = Q_1 \equiv Q_2$. Riêng SB có hai hình chiếu trùng nhau thì không tìm được giao điểm. Bây giờ ta kẻ một đường thẳng SX trên mặt bên SBC, và ta có $S_1X_1 \times S_2X_2 = F_1 \equiv F_2$. QF chính là giao tuyến của mặt SBC với mặt phân giác II. Do đó nếu SB cắt mặt phân giác II tại R thì Q, F và R phải thẳng hàng. Từ đó ta tìm được giao điểm R. Giao tuyến là ngũ giác MNPQR có hai hình chiếu trùng nhau.

III. KHAI TRIỂN CÁC MẶT

Khai triển một mặt là trải mặt đó lên một mặt phẳng mà không có hiện tượng gấp nếp hoặc rách mặt đó. Đây là một phép biến đổi một–một bảo toàn góc giữa hai đường cong và bảo toàn các chiều dài. Sau đây là một số bài toán về khai triển các mặt thông dụng, trong phần này chúng tôi có nêu một số cách tính toán các chiều dài để tiện việc xác định các hình khai triển có kích thước lớn.

BÀI 91: Khai triển một hình chóp đều đáy là một lục giác (hình 230).

Phân tích: Ta phải tính toán độ dài thật của các cạnh bên của hình chóp rồi dựng các tam giác cân kế tiếp nhau. Hình 231 là các hình khai triển của các hình chóp đều có số cạnh đáy là chẵn (6) và lẻ (5).

Liên hệ giữa các kích thước:

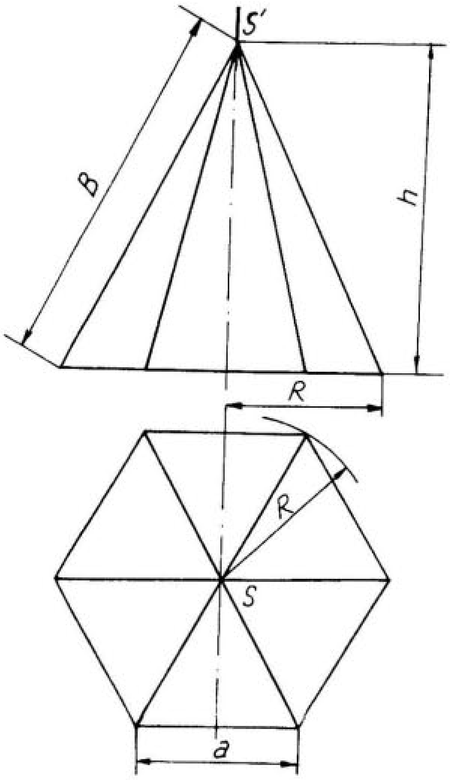
$$B = \sqrt{h^2 + R^2} \;;\; K = \sqrt{B^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{h^2 + R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a}{2K}=\frac{a}{2\sqrt{h^2+R^2-\dfrac{a^2}{4}}}\;;$$

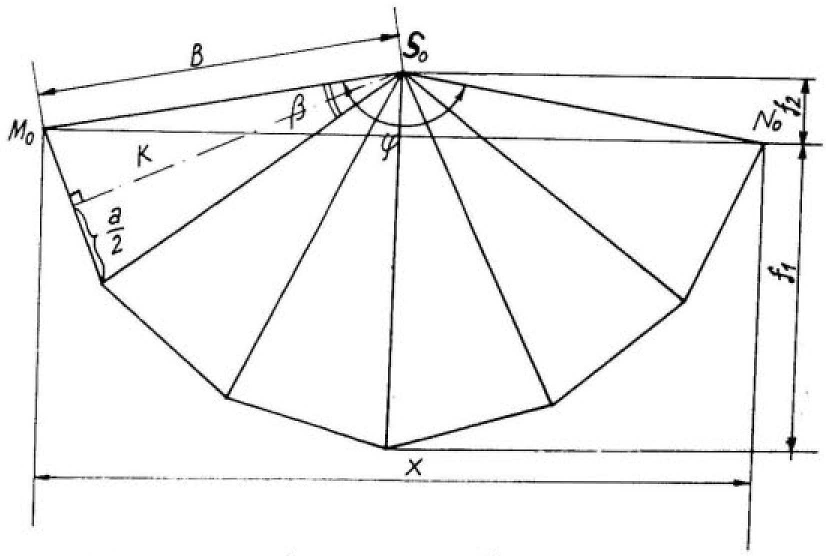
$$x=2.B\sin\frac{\varphi}{2}=2\sqrt{h^2+R^2}.\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$f_2=B\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{h^2+R^2}.\cos\frac{\varphi}{2}$$

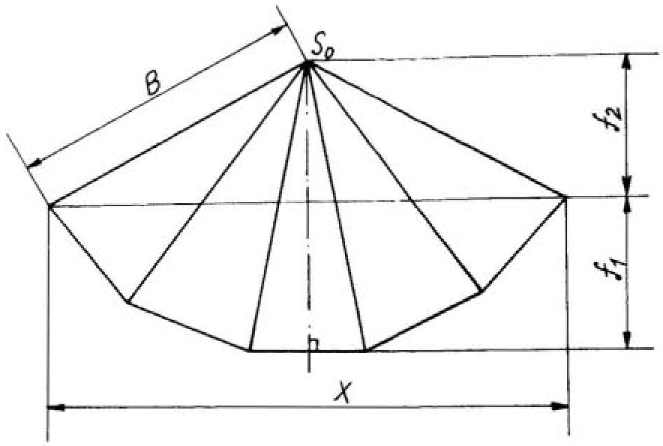
$$f_1=B-f_2=\sqrt{h^2+R^2}\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$



Hình 230.



Hình 231. a) Số cạnh đáy n chẵn



Hình 231. b)

Với số cạnh đáy n chẵn: $\varphi = n.\beta$ (hình 231a).

Với số cạnh lẻ thì ta có: $f_1 = K - f_2$ (hình 231b).

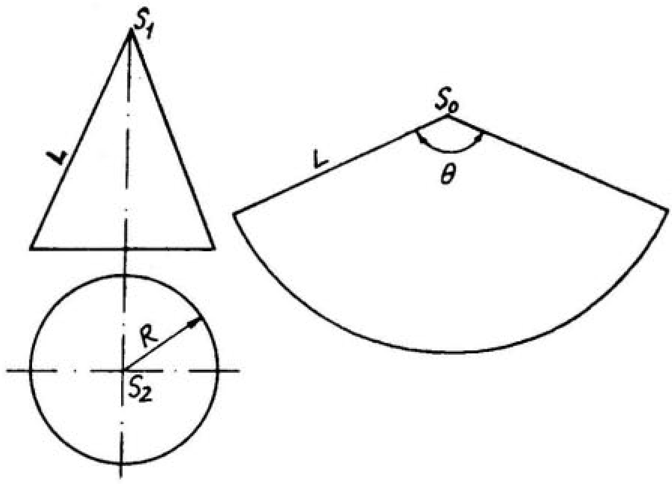
Biết R, h và B, và số cạnh đáy n, ta tính được tất cả các yếu tố để dựng hình khai triển.

BÀI 92: Khai triển một hình nón cụt tròn xoay.

Phân tích: Hình khai triển của cả một hình nón tròn xoay là một hình quạt có góc tâm là θ° được tính như sau: (hình 232).

$$L.\theta = 2\pi R \rightarrow \theta = \frac{2\pi R}{L}$$

(R bán kính đáy, L chiều dài đường sinh).

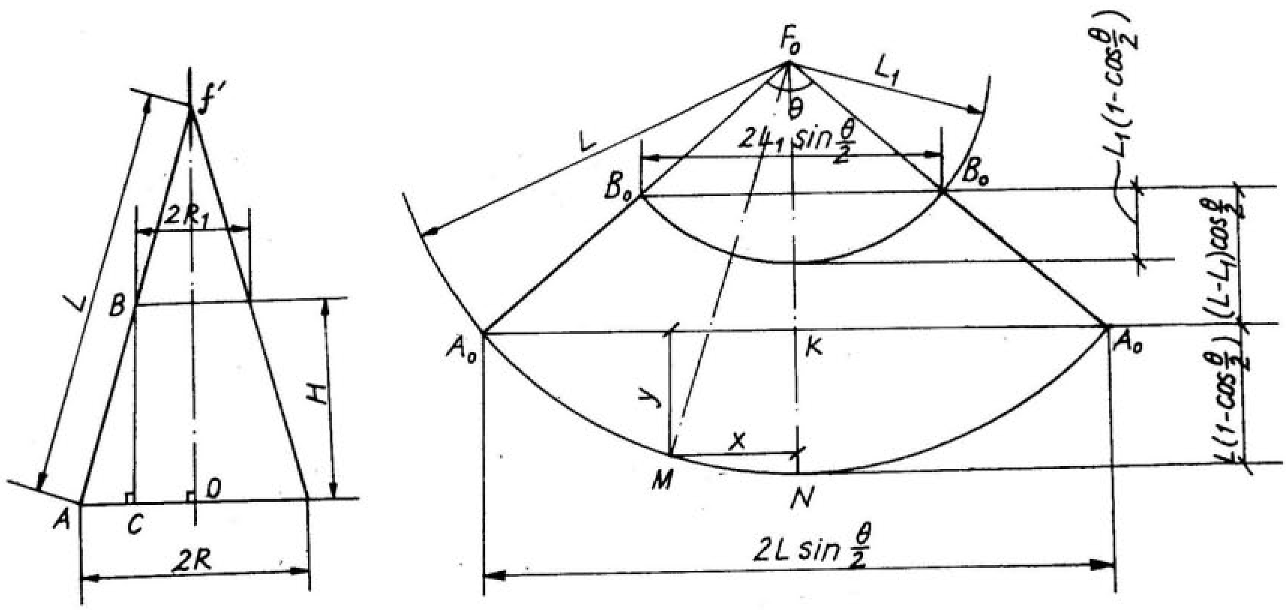


Hình 232.

Bây giờ ta nghiên cứu khai triển hình nón cụt tròn xoay có các bán kính đáy là R và R_1, chiều cao là H, chiều dài đường sinh là L (hình 233).

Liên hệ giữa các kích thước:

$AB = L - L_1 = \sqrt{H^2 + (R - R_1)^2}$. Hai tam giác Af'O và ABC đồng dạng: $\frac{Af'}{AB} = \frac{AO}{AC}$. Từ đó suy ra $Af' = L = \frac{AO}{AC} \times AB = \frac{R}{R - R_1}(L - L_1)$.



Hình 233

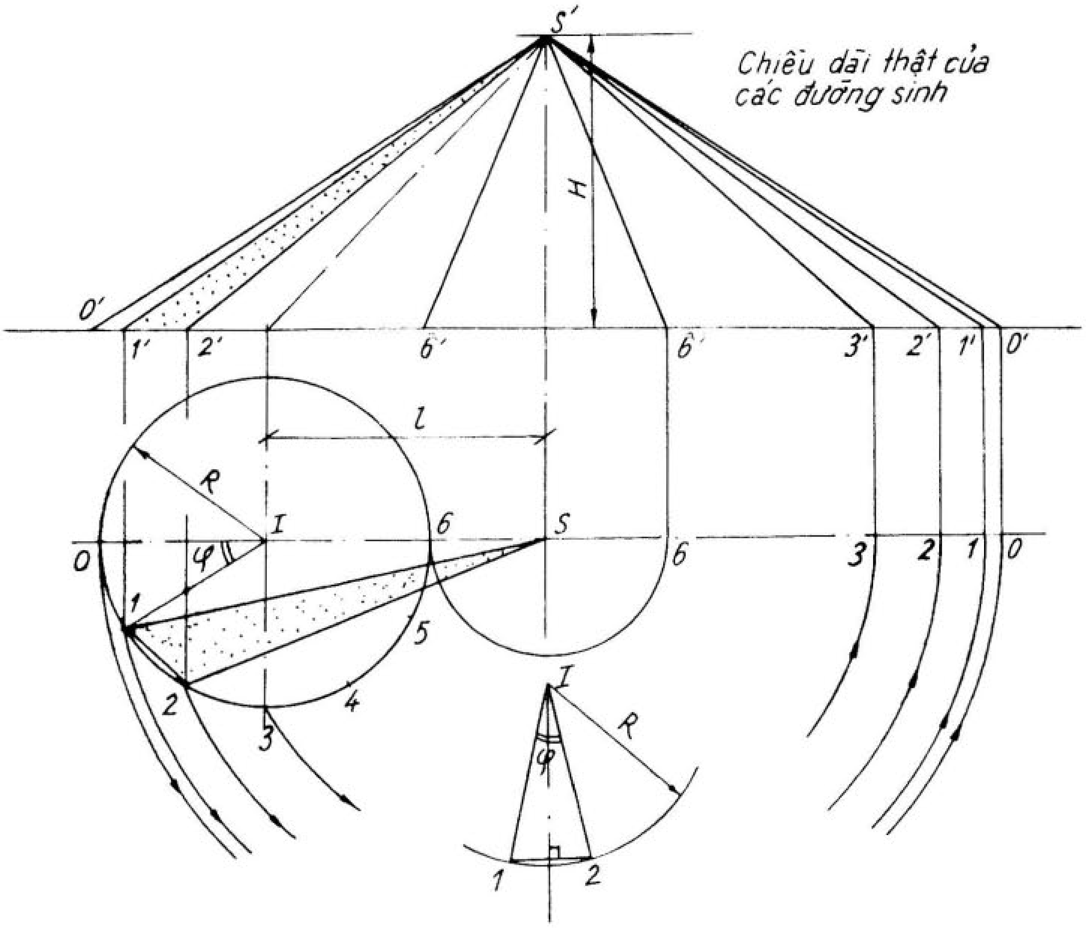
Còn góc $\theta = 360^o \dfrac{R}{L}$ hoặc $360^o \dfrac{R_1}{L_1}$. Khi hình khai triển quá to, không thể xác định được F_o, ta phải dựng hình như sau:

Sau khi đã tính được L ; L_1 ; θ ; $\overline{A_oA_o}$; $\overline{B_oB_o}$ (với $\overline{A_oA_o} = 2\,L \sin\dfrac{\theta}{2}$ và $\overline{B_oB_o} = 2\,L_1 \sin\dfrac{\theta}{2}$), bắt đầu dựng hình thang cân $A_oB_oB_oA_o$ với chiều cao là $(L - L_1)\cos\dfrac{\theta}{2}$. Rồi dựng cung $\overset{\frown}{A_oNA_o}$ như hình 233. Sau đó dựng cung B_oB_o. Hoặc xác định một số điểm M của cung $\overset{\frown}{A_oNA_o}$ với các toạ độ như trên hình 233:

$y = \sqrt{L^2 - x^2} - L\cos\dfrac{\theta}{2}$ hoặc $y = \sqrt{L^2 - x^2} - (L - h)$ với θ là góc tâm hình khai triển và $h = NK = L\left(1 - \cos\dfrac{\theta}{2}\right)$.

BÀI 93: Khai triển một hình nón xiên (hình 234).

Ta chỉ có thể khai triển gần đúng bằng cách chia mặt bên ra thành những tam giác rồi tìm độ lớn thật của các cạnh của tam giác sau đó ghép lại thành hình khai triển mặt nón xiên.



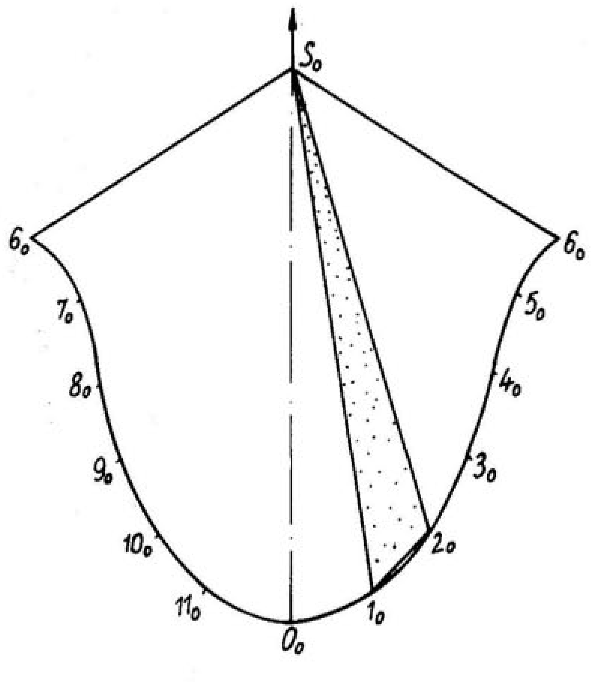
Hình 234.

Thí dụ ta chia đáy ra 12 phần bằng nhau. Bây giờ ta tìm độ lớn thật của các cạnh của một tam giác S12 chẳng hạn. Dựa vào đường tròn đáy nón có bán kính R, ta có: cạnh đáy $\overline{1\,2}$ của Δ S12 bằng $2R\sin\frac{\varphi}{2}$; $\varphi = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ cung 1 2 = R.φ. Từ đó $\varphi = \frac{\overset{\frown}{1\,2}}{R} \rightarrow$ cạnh đáy $\overline{1\,2}$ của Δ bằng $2R\sin\frac{\overset{\frown}{12}}{R}$. Khi khai triển ta thường thay cung bằng dây cung tương ứng, chấp nhận một sai số nhất định. Nếu φ = 30° thì sai số là khoảng 1,14%, nếu φ = 15° sai số là 0,29%, còn nếu φ = 7°30' (n = 48) thì sai số chỉ còn 0,07%.

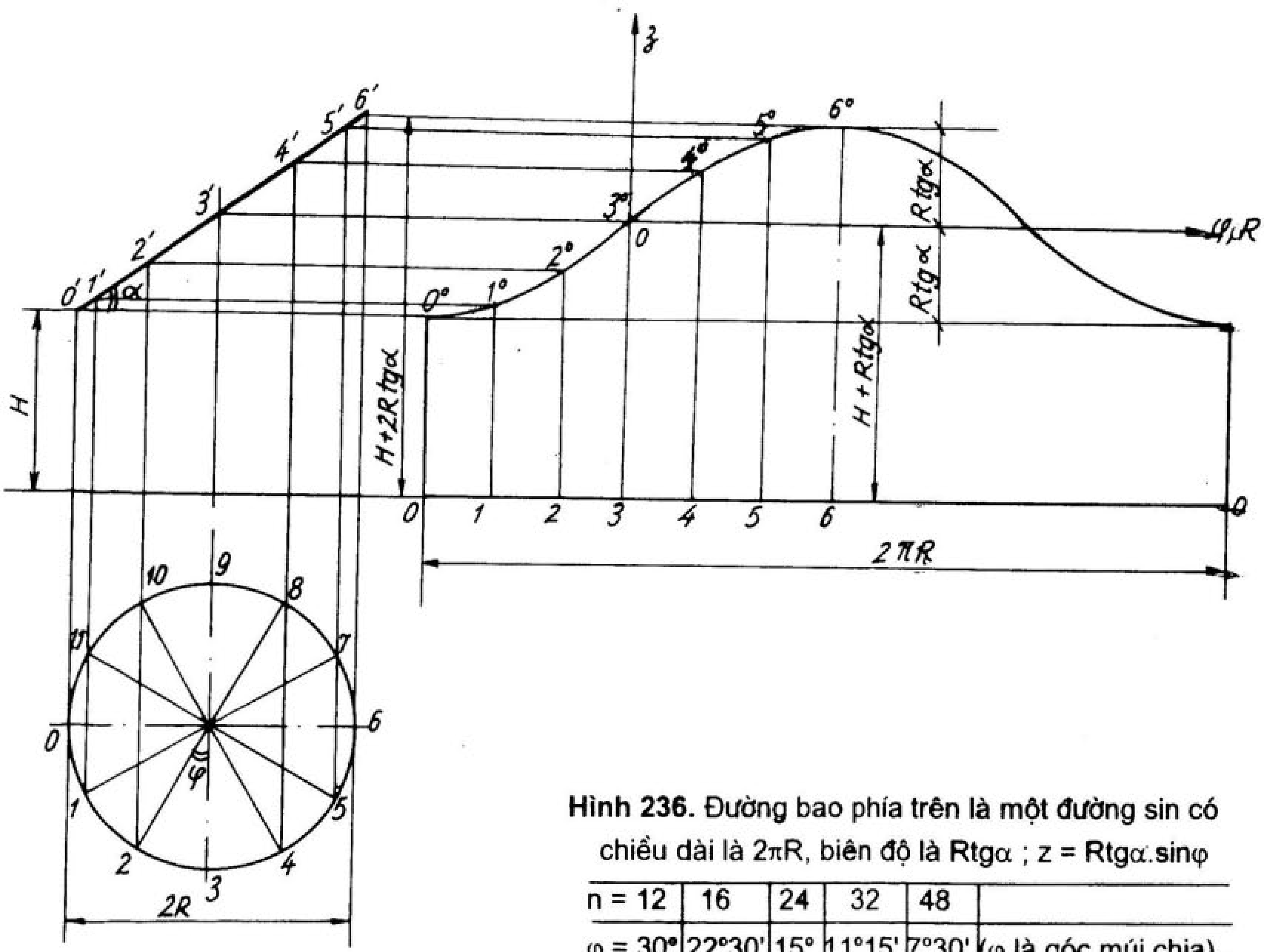
Vậy cạnh đáy $\overline{1\,2}$ đã biết. Muốn tìm độ lớn thật hai đường sinh S1 và SC ta xoay chúng quanh một trục chiếu bằng đi qua S, sang thành các đường mặt thì hình chiếu đứng mới là các chiều dài thật tương tự cho các đường sinh khác, sau đó ghép lại ta có hình khai triển trên hình 235. Chú ý tính chất đối xứng của hình khai triển (hình 235).

<u>BÀI 94</u>: Khai triển một hình trụ bị cắt vát theo một góc α, có bán kính là R.

Phân tích: Ta cũng chia đáy trụ ra 12 phần bằng nhau. Đường tròn đáy trụ khai triển thành một đoạn thẳng $\overline{OO} = 2\pi R$. Vì trụ thẳng đứng nên trên hình khai triển các đường sinh là những đoạn thẳng vuông góc với đoạn $\overline{OO}$. Hình chiếu đứng của chúng chính là độ lớn thật, vì vậy ta chỉ việc dóng sang hình khai triển là xác định được các điểm của đường bao của hình khai triển (1°,2°,...6°). Chú ý tính chất đối xứng của hình. Thiết diện là một ellíp có $a = \frac{R}{\cos\alpha}$ và b = R ; phương trình là $\frac{x^2\cos^2\alpha}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$.



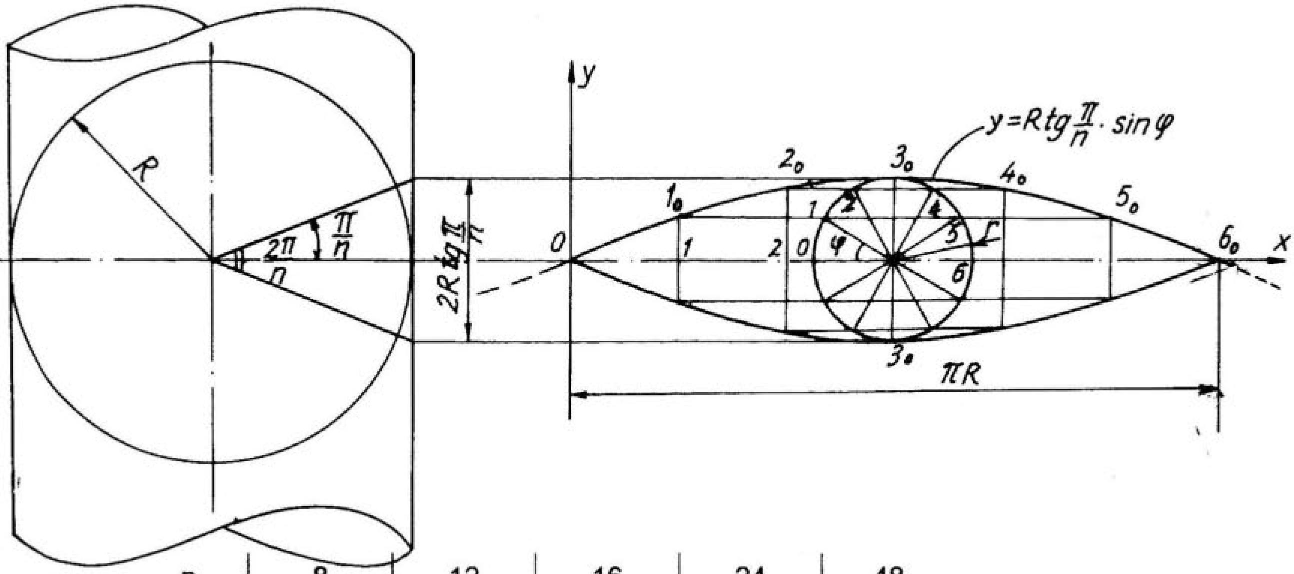
Hình 235



Hình 236. Đường bao phía trên là một đường sin có chiều dài là $2\pi R$, biên độ là $R tg\alpha$; $z = R tg\alpha . \sin\varphi$

n = 12	16	24	32	48	
φ = 30°	22°30'	15°	11°15'	7°30'	(φ là góc múi chia).

BÀI 95: Dùng mặt trụ ngoại tiếp, hãy khai triển một hình cầu có bán kính R.



n	8	12	16	24	48
$tg\dfrac{\pi}{n}$	0,4142	0,2680	0,1989	0,1316	0,0655

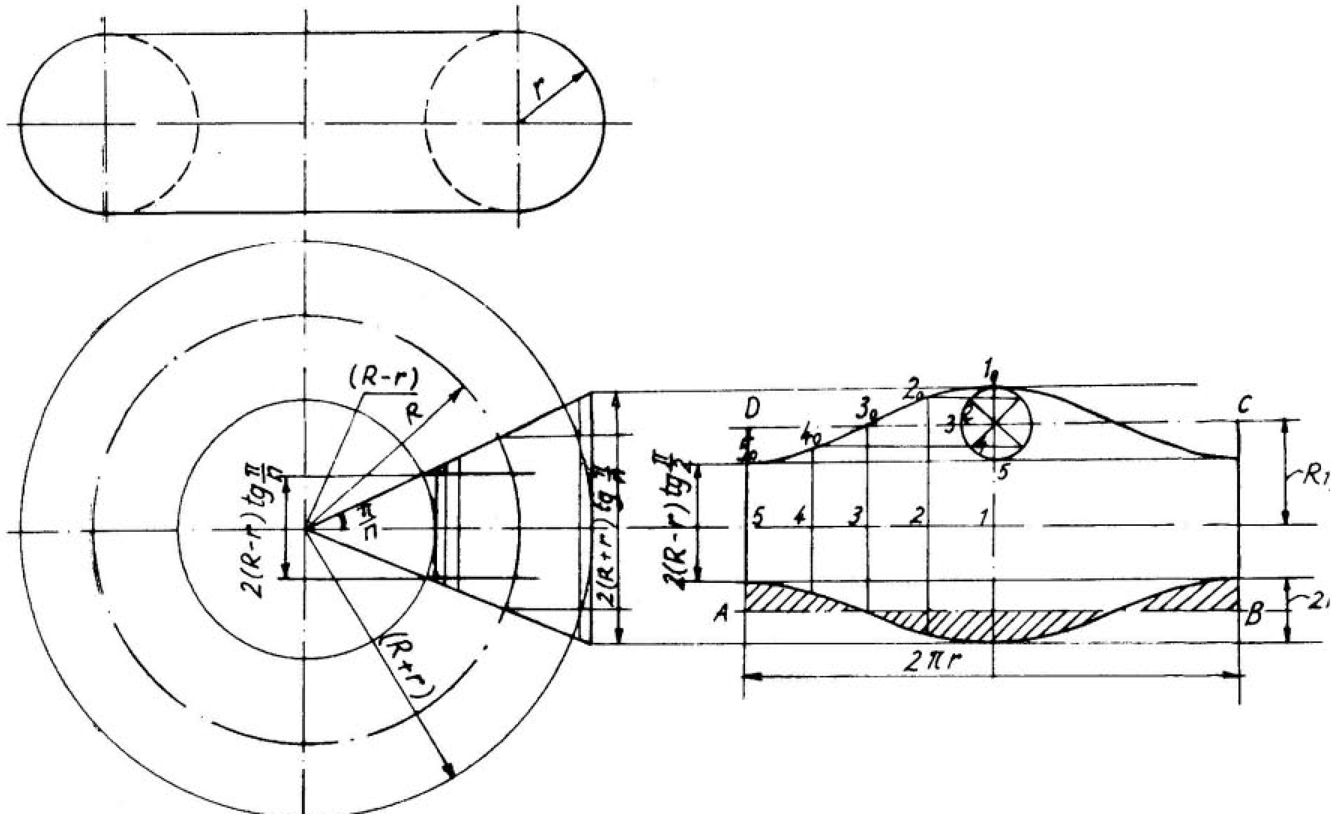
Hình 237.

Phân tích: Ta cũng phải chia hình cầu thành n múi được xác định bởi hai mặt phẳng kinh tuyến cắt hình trụ ngoại tiếp cho cầu. Góc giữa hai mặt phẳng kinh tuyến là $\frac{2\pi}{n}$.

Để vẽ đường bao, chia đoạn πR ra n_1 phần bằng nhau. Trên đoạn $\overline{33_0}$ vẽ một đường tròn nhận $\overline{33^0}$ làm đường kính rồi chia đường tròn này ra $2n_1$ phần bằng nhau. Trên hình 237, $n_1 = 6$ và $2n_1 = 12$, từ đường tròn này suy ra được góc $\varphi = \frac{2\pi}{2n_1} = \frac{\pi}{n_1}$, ở đây $\varphi = \frac{360^o}{12} = 30^o$.

Đường bao được xác định bởi nửa bước sóng của một đường sin có phương trình $y = R\text{tg}\frac{\pi}{n} \cdot \sin\varphi$, trong đó biên độ là $2R\text{tg}\frac{\pi}{n}$, tức là chiều rộng của múi chia tại đường xích đạo. Ghép các múi lại ta có hình khai triển của hình cầu.

BÀI 96: Khai triển hình xuyến bằng các đoạn hình trụ ngoại tiếp.



Hình 238

Phân tích: Nếu ta dùng các mặt phẳng đi qua trục tròn xoay của xuyến để chia xuyến ra n phần bằng nhau, rồi thay mỗi đoạn bởi một hình trụ ngoại tiếp cho đoạn đó, bị cắt bởi hai mặt phẳng chia múi. Như vậy hai mặt phẳng này làm với nhau một góc $\frac{2\pi}{n}$. Đường kính tâm hình xuyến là 2R, đường kính thiết diện vuông góc là 2r. Đoạn trụ thay thế cũng có đường kính là 2r, chiều dài đường sinh ngắn nhất là $2(R - r)\,tg\frac{\pi}{n}$, dài nhất là $2(R + r)\,tg\frac{\pi}{n}$.

Hình khai triển được giới hạn bởi hai đường sin: $y = Rtg\frac{\pi}{n} \pm rtg\frac{\pi}{n}.\sin\varphi$. Cách vẽ đường sin đã trình bày ở bài 93. Dưới đây là hình khai triển của một múi của hình xuyến. Số chia n càng lớn thì hình càng chính xác. Theo hình khai triển, ta thấy diện tích của một múi suy cho cùng là diện tích một hình chữ nhật ABCD có chiều dài là $2\pi r$ và chiều rộng là $2Rtg\frac{\pi}{n}$; $S_n = 4\pi R.rtg\frac{\pi}{n}$ là diện tích hình khai triển của một múi.

IV. GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT

Cách tìm giao tuyến của hai mặt đã được trình bày đầy đủ trong sách giáo khoa về hình học hoạ hình. Sau đây trình bày một cách đơn giản để tìm giao tuyến trong trường hợp đặc biệt, khi đã biết một hình chiếu của giao tuyến, chỉ còn tìm nốt hình chiếu thứ hai. Trong trường hợp nay ta nhận thấy:

a) Một trong hai mặt phải là *chiếu đứng* hoặc *chiếu bằng* nên có *một hình chiếu suy biến thành một đa giác hoặc đường tròn.*

b) Một hình chiếu đã biết của giao tuyến là "*phần chung trên hình chiếu suy biến*" (phần được tô đậm).

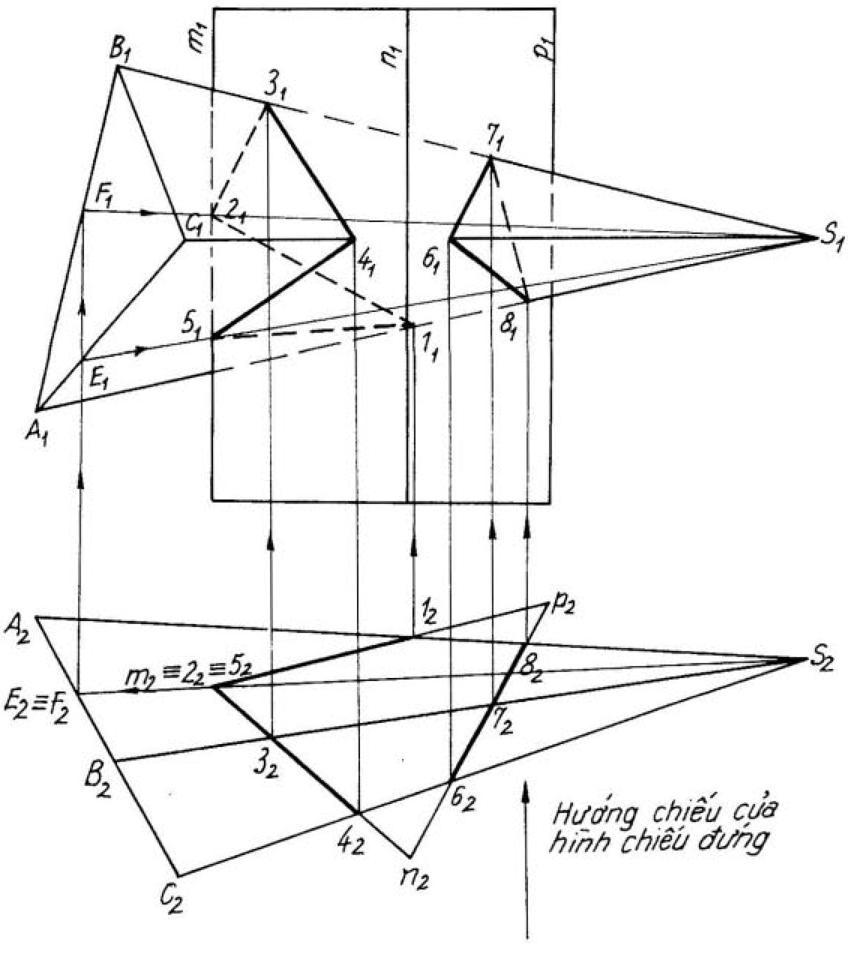
c) Gắn các điểm của giao tuyến vào mặt thứ hai (không suy biến) ta có được hình chiếu còn lại của giao tuyến.

BÀI 97: Tìm giao tuyến của một hình chóp SABC với một lăng trụ chiếu bằng (def).

Phân tích: Vì lăng trụ chiếu bằng nên hình chiếu bằng suy biến của nó là $\Delta m_2n_2p_2$. Nhưng giao tuyến đã biết là phần chung cho cả hai mặt trên hình chiếu suy biến (phần tô đậm: 1–2–3–4 và 6–7–8). Bây giờ ta gắn đoạn gẫy khúc 1–2–3 và đoạn 7–8 vào mặt SAB. 1 và 8 trên SA, 3 và 7 trên SB. Điểm 2 không thuộc cạnh nào của SAB nên ta gắn nó vào SF. Dóng lên A_1B_1 có F_1 tức là có S_1F_1 cắt m_1 tại điểm 2. Chỉ việc nối 1_1–2_1–3_1 và 7_1–8_1 là ta có hình chiếu đứng của giao tuyến trong phạm vi mặt SAB. Mặt SBC có hai đoạn 3–4 và 6–7 đều thuộc các cạnh SB và SC nên tìm hình chiếu đứng dễ dàng. Đó là hai đoạn 3_1–4_1 và 6_1–7_1. Bây giờ đến mặt SCA thì mặt này có chung với các mặt trên các điểm

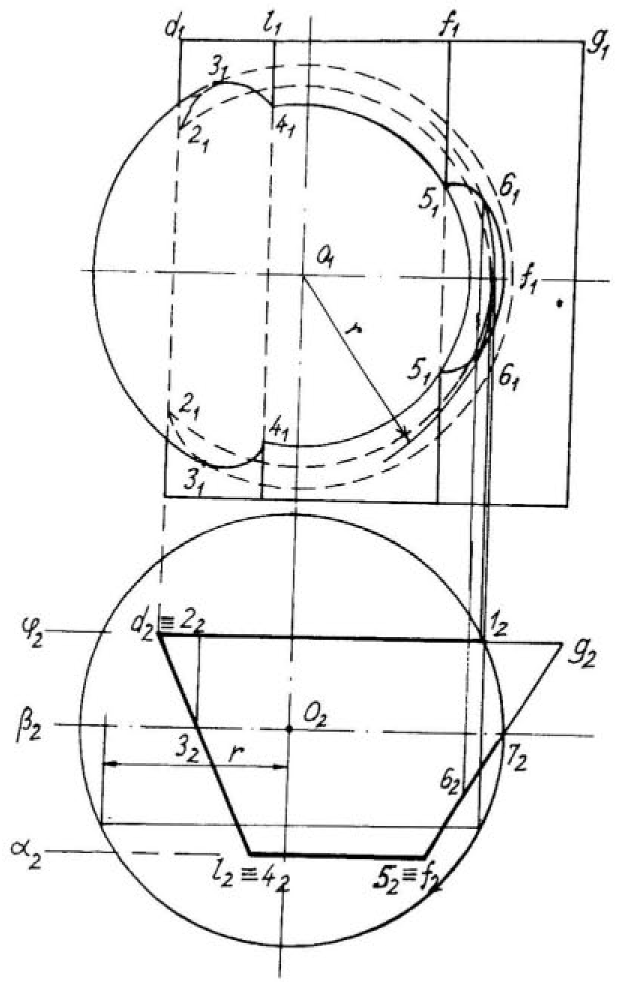
1, 4, 6 và 8 đã xác định. Chỉ còn điểm 5 (giao điểm của m với SAC) thì ta gắn vào SE của SAC ta suy ra được S_1E_1 cắt m_1 tại 5_1. Đối với SAC ta nối: 1_1–5_1–4_1 và 6_1–8_1 là xong cả giao tuyến của hai mặt.

Bây giờ ta xét thấy khuất từng mặt của hai hình. Muốn xét thấy khuất ở hình chiếu đứng thì phải quan sát dưới hình chiếu bằng. Theo hướng chiếu hình chiếu đứng thì mặt bên mp của lăng trụ bị hai mặt mn và np che khuất phía trước nên mặt mp khuất, vì vậy các đoạn của giao tuyến 1_12_1 và 1_15_1 đều khuất. Bây giờ lại xét hình chóp thì ta thấy SC có độ xa lớn nhất (nhô ra phía trước) nên SAB là mặt khuất nên các đoạn $3_12_11_1$ và 7_18_1 thuộc SAB đều khuất. Tổng kết lại trên hình chiếu đứng các đoạn $3_12_11_15_1$ và 7_18_1 là khuất. Cạnh nào của các hình có hai giao điểm thì đoạn giữa hai giao điểm là khuất. Hai cạnh chéo nhau như S_1B_1 và p_1 thì quan sát hình chiếu bằng thì p_2 có độ xa nhỏ hơn nên đoạn p_1 khuất (sử dụng các điểm đồng tia để xét thấy khuất hai đường thẳng chéo nhau). Rõ ràng ta đã đưa bài toán không gian thành các bài toán phẳng để giải quyết dễ dàng hơn và không phải lập bảng để nối giao tuyến.



Hình 239

BÀI 98: Tìm giao tuyến của hình lăng trụ chiếu bằng với hình cầu.



Hình 240.

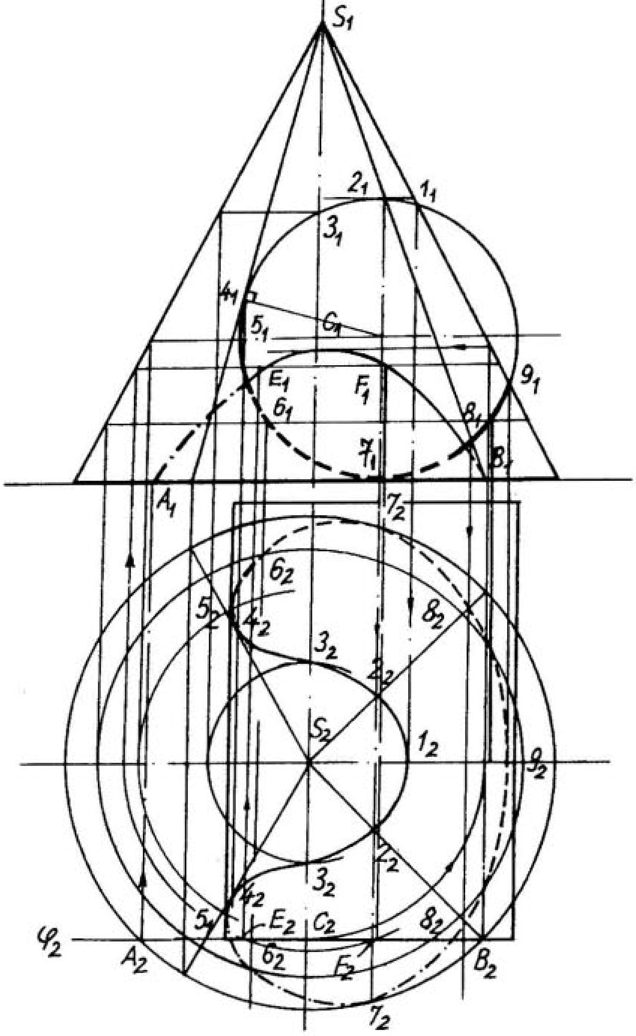
Phân tích: Theo nhận xét trên, hình chiếu bằng đã biết của giao tuyến là phần chung (tô đậm 1–2–3–4–5–6–7) trên hình chiếu suy biến (hình thang $d_2e_2f_2g_2$) của lăng trụ (hình 240). Như vậy lăng trụ đã cho ta biết hình chiếu bằng của giao tuyến (đường tô đậm), bây giờ chỉ việc gắn các điểm của giao tuyến vào mặt cầu để tìm nốt hình chiếu đứng của giao tuyến. Mặt phẳng mặt φ_2 cắt mặt cầu theo đường tròn giới hạn bởi cạnh d tại hai điểm 2. Mặt α_2 cắt cầu theo hai cung tròn xác định bởi hai điểm 4 và 5 (tức là cung $\widehat{4_1-5_1}$). Mặt phẳng mặt β_2 mang hai điểm 3_1 là các điểm tiếp xúc trên hình chiếu đứng. Điểm 7 thuộc đường tròn xích đạo. Để tìm hình chiếu đứng điểm 6 ta dùng đường tròn bán kính r ta sẽ có hai điểm 6_1.

Nếu quan sát dưới hình chiếu bằng thì trên hình chiếu đứng mặt d_1g_1 là khuất nên cung tròn lớn $\widehat{2_1 1_1 2_1}$ khuất. Đối với mặt cầu, nửa phía sau là khuất nên cung $\widehat{3-2}$ là khuất. Các cạnh của lăng trụ cắt mặt cầu thì khuất ở giữa 2 giao điểm (2_1-2_1, 4_1-4_1 và 5_1-5_1) còn các phần khác thì dựa vào các điểm đồng tia để xét nốt thấy khuất (hình 240).

BÀI 99: Tìm giao tuyến của hình nón và hình trụ chiếu đứng (hình 241).

Phân tích: Hình chiếu đứng đã biết của giao tuyến là phần chung trên hình chiếu suy biến của trụ chiếu đứng (cung tròn tô đậm $1_1 .... 9_1$). Bây giờ chỉ còn gắn các điểm 1, 2, 3....9 vào các đường sinh hay đường tròn của hình nón là tìm được hình chiếu bằng các điểm đó. Chú ý phải tìm điểm 5 là điểm giới hạn thấy khuất dưới hình chiếu bằng. Dùng đường sinh cho các điểm 2, 8 và 4; còn dùng đường tròn cho các điểm 3, 5 và 6.

Điểm 1 và 9 thuộc đường sinh biên. Hai điểm 7 thuộc đường tròn đáy của hình nón. Sau đó nối các điểm lân cận lại một cách trơn tru và đều đặn. Nhưng mặt đầu phía trước còn cắt vào mặt bên của hình nón, nên ta dùng mặt phẳng mặt φ_2 cắt mặt nón theo một cung hypecbôn $\overset{\frown}{ACB}$, mà ta biết được A và B thuộc đáy nón; dùng một đường tròn tìm được đỉnh C_1 và một đường tròn khác tìm được hai điểm trung gian E và F. Ta lấy phần cung hypecbôn nằm bên trong đường tròn trên hình chiếu đứng (hình 241). Dưới hình chiếu bằng các điểm 1, 2, 3, 4, 5 nằm ở phía trên của hình trụ là thấy.

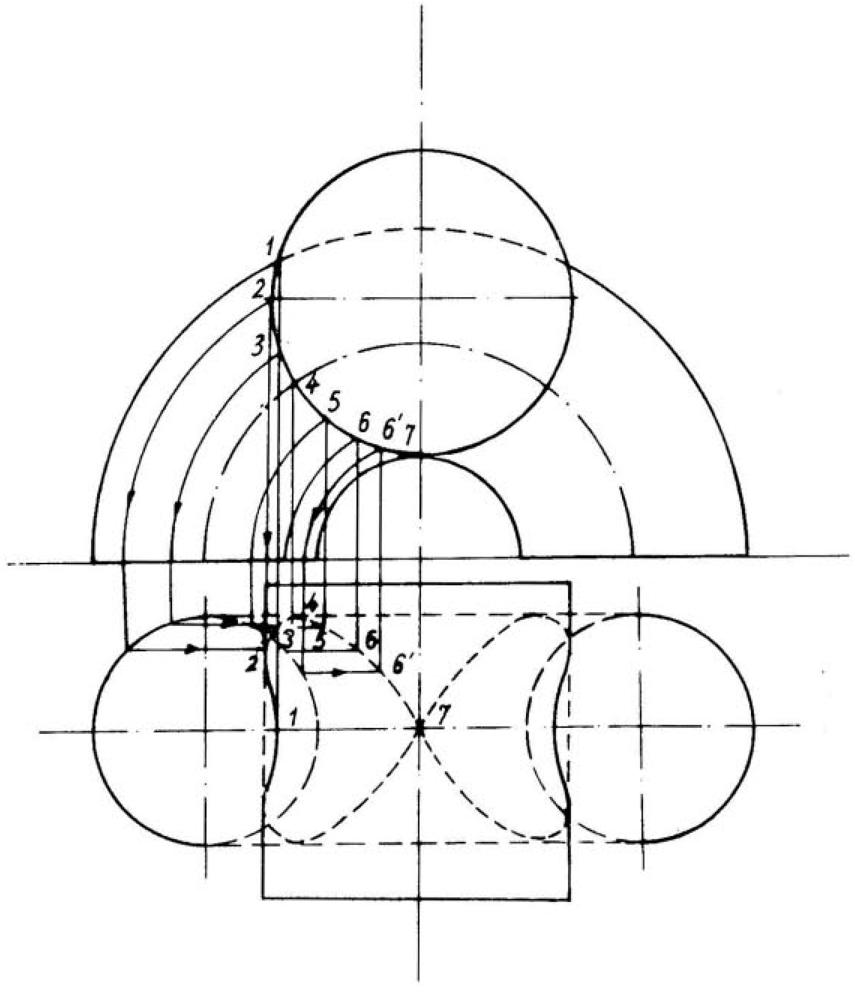


Hình 241.

BÀI 100: Tìm giao tuyến của hình trụ chiếu đứng với một nửa hình xuyến (hình 242).

Phân tích: Theo qui tắc là hình chiếu đã biết của giao tuyến là phần chung trên hình chiếu suy biến của trụ (cung tròn tô đậm). Vì vậy ta chỉ việc lần lượt gắn các điểm của giao tuyến đã biết vào các đường tròn của hình xuyến thì ta được các điểm của giao tuyến dưới hình chiếu bằng. Điểm 1 thuộc đường tròn lớn nhất (xích đạo) của xuyến, còn điểm 7 thuộc đường tròn nhỏ nhất (đường tròn họng) của xuyến mà ta tìm được ngay ở dưới hình chiếu bằng. Phải xác định điểm 4 để giới hạn phần thấy và khuất (xem lại xác định thấy khuất của hình xuyến ở bài 89). Điểm 7 là điểm tiếp xúc của hai mặt nên giao tuyến tự cắt tại điểm đó. Lợi dụng tính chất đối xứng qua hai trục ta có thể hoàn thành được hình chiếu bằng của giao tuyến.

Đối với hình xuyến, theo hình chiếu đứng, các điểm 4, 5, 6, 6', 7 là khuất dưới hình chiếu bằng, nhưng đối với hình trụ thì đoạn 4, 3, 2 vẫn nằm phía dưới của hình trụ nên cũng khuất nữa. Do đó chỉ còn có cung $\overset{\frown}{2\text{-}1\text{-}2}$ là thấy ở hình chiếu bằng (hình 242).



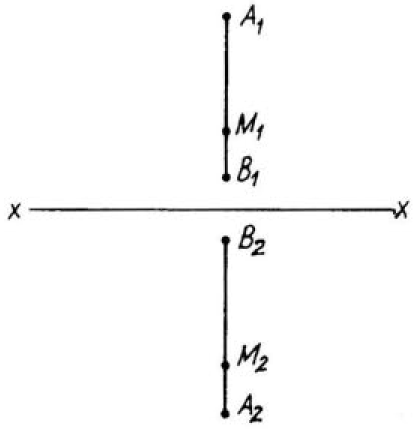
Hình 242

V. TOÁN CHƯA GIẢI

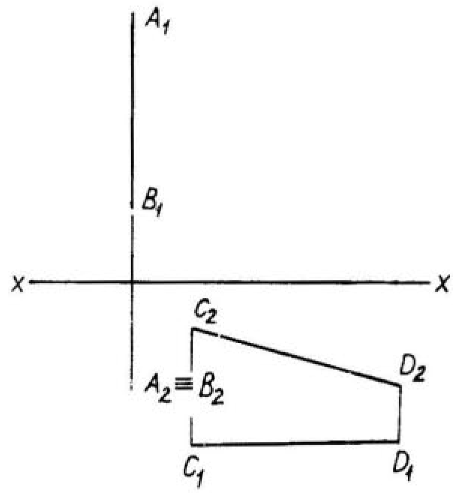
1. Cho hình chiếu đứng A_1, vẽ nốt hình chiếu bằng A_2 biết rằng A thuộc mặt phẳng phân giác của nhị diện tạo bởi mặt phẳng π_1 và mặt phẳng phân giác thứ nhất.

2. Cho đường cạnh AB và một điểm M. Kiểm tra xem M có thuộc AB không? (hình 243).

3. AB và CD có vuông góc với nhau không ? Tại sao ? (hình 244).



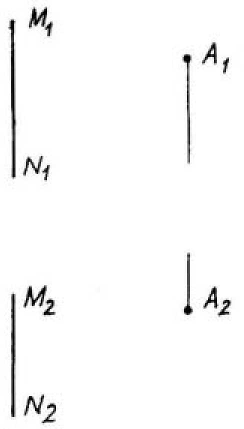
Hình 243.



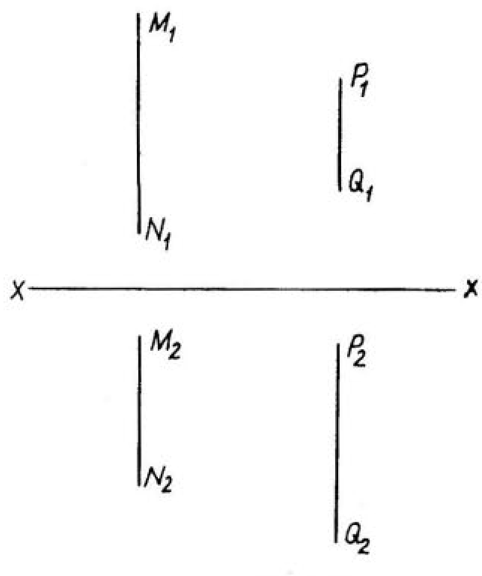
Hình 244.

4. Cho đường cạnh MN và một điểm A. Vẽ nốt hai hình chiếu của điểm B để đường cạnh AB // MN và AB = 3 cm (hình 245).

5. Tìm đường vuông góc chung của hai đường cạnh MN và AB (hình 246).



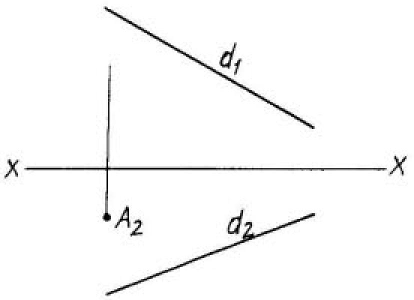
Hình 245.



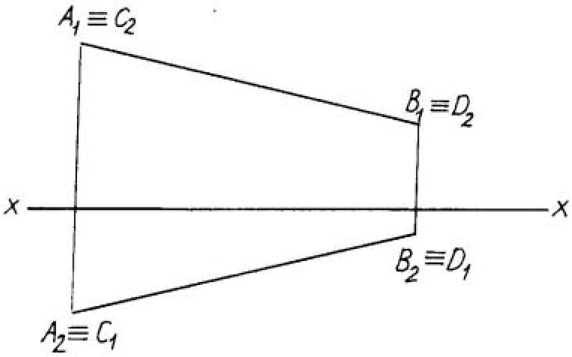
Hình 246.

6. Cho đường thẳng d và hình chiếu bằng A_2 của điểm A. Xác định nốt A_1 biết rằng A cách d một khoảng bằng 3 đơn vị (hình 247).

7. Xét vị trí tương quan giữa AB và CD (hình 248).



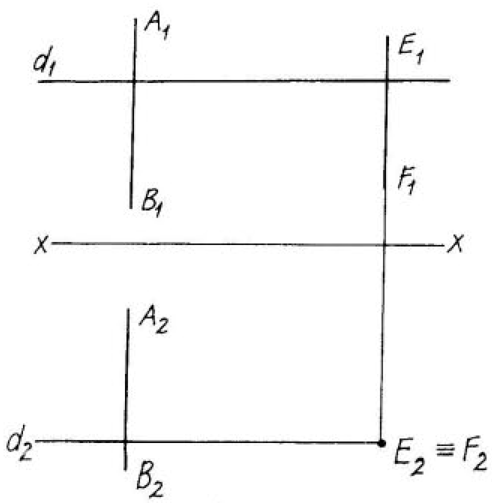
Hình 247.



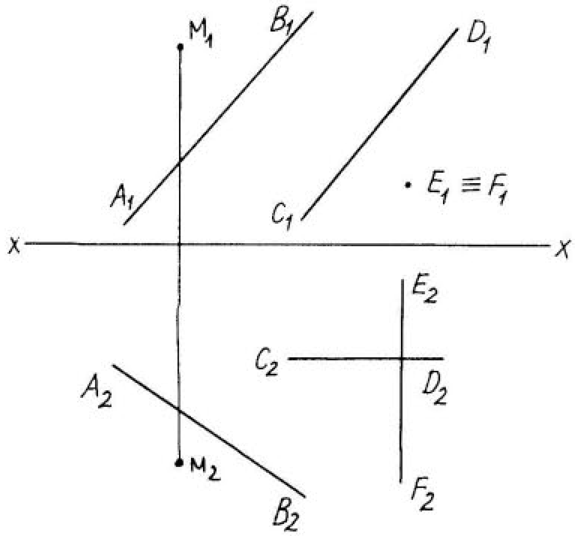
Hình 248.

8. Đường thẳng d có cắt EF và AB không ? Tại sao ? (hình 249).

9. Vạch một đường thẳng d qua điểm M cắt cả AB, CD và EF (hình 250).



Hình 249.

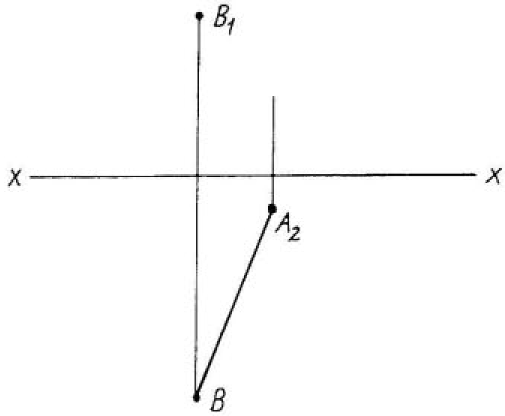


Hình 250.

10. Xác định nốt A_1 biết rằng AB làm với π_2 một góc 45° (hình 251).

11. Cho đường thẳng d và điểm A. Qua A kẻ một đường thẳng l cắt d theo một góc φ cho trước (hình 252).

12. Cho d và điểm A, tìm trên d một điểm M cách A một đoạn bằng r cho trước (hình 252).



Hình 251.

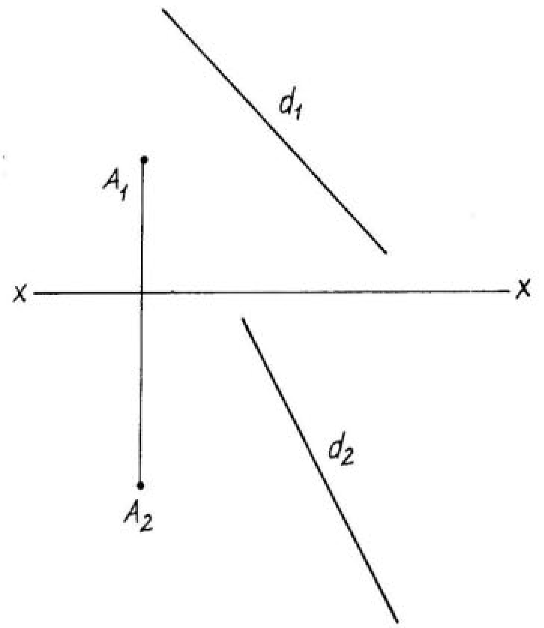
13. Tìm A'B' đối xứng với AB:

a) qua mặt phẳng π_1

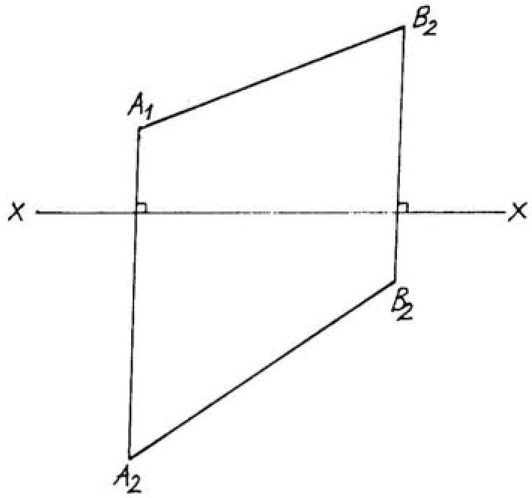
b) Qua mặt phẳng π_2

c) Qua mặt phẳng phân giác I

d) Qua mặt phẳng phân giác II (hình 253).

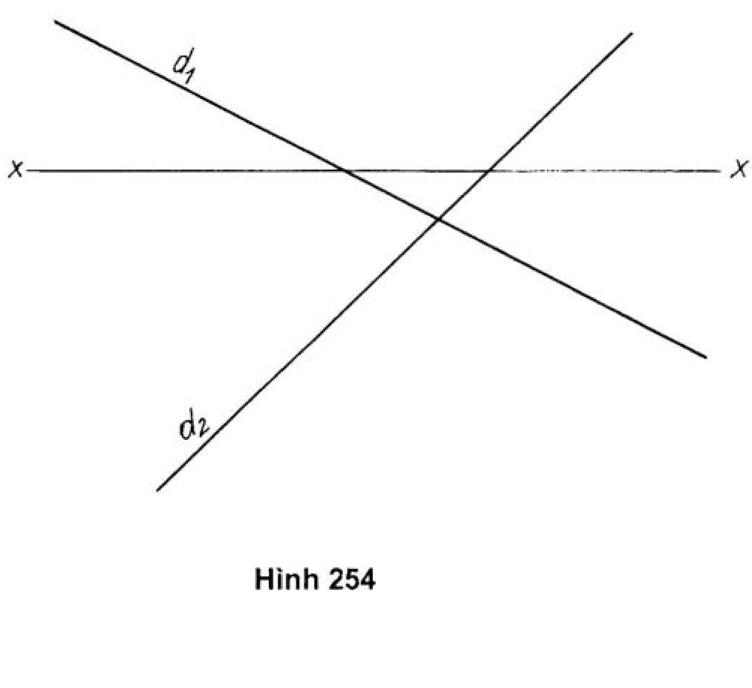


Hình 252.



Hình 253.

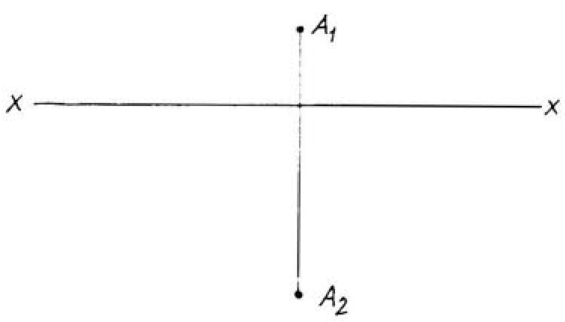
14. Tìm các vết của đường thẳng d và xét xem d qua các góc tư nào ? (hình 254).



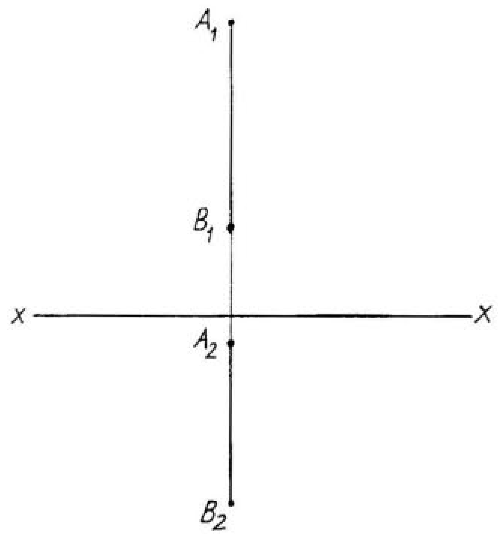
Hình 254

15. Qua A kẻ một đường thẳng d sao cho vết đứng và vết bằng của nó cách trục x những đoạn bằng nhau và d_1 làm với xx một góc 45°. Đường thẳng này có song song với mặt phẳng nào không ? Tại sao ? (hình 255).

16. Không dùng hình chiếu cạnh tìm các vết của đường cạnh AB. Xét xem AB qua các góc tư nào ? (hình 256).



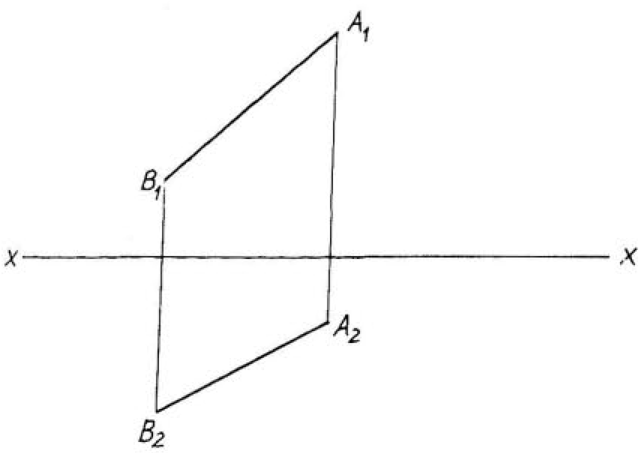
Hình 255.



Hình 256.

17. Vạch qua điểm A (tùy chọn) một đường thẳng làm với π_1 một góc β và π_2 một góc α. Số nghiệm ?

18. Dựng một tam giác cân ABC có đáy là AB, đỉnh C thuộc trục x (hình 257).

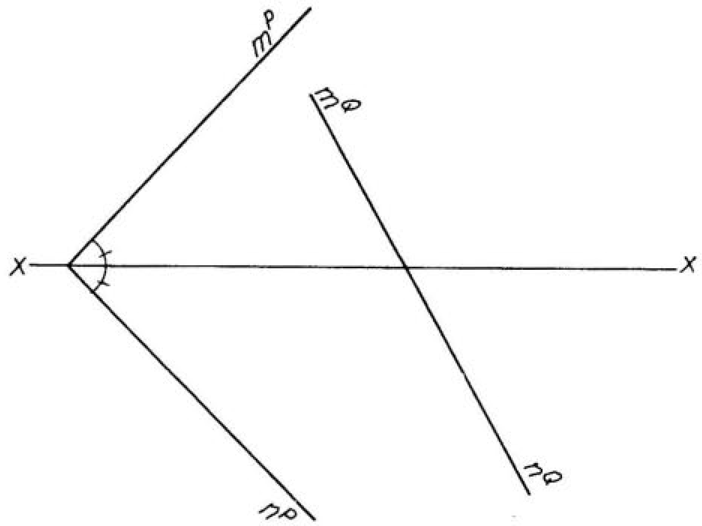


Hình 257

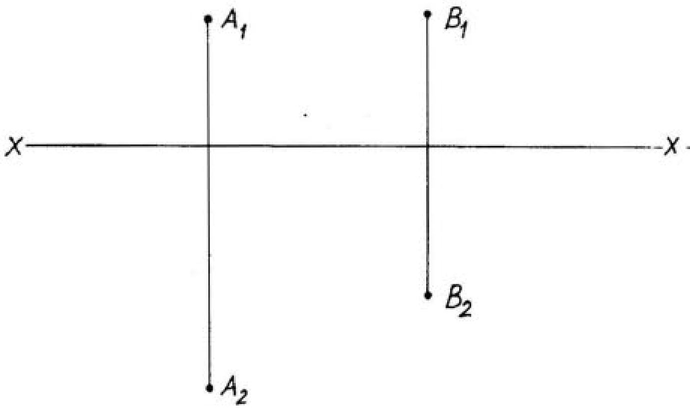
19. •Chứng minh rằng mặt phẳng P thì vuông góc với mặt phẳng phân giác I và mặt phẳng Q thì vuông góc với mặt phẳng phân giác II (hình 258).

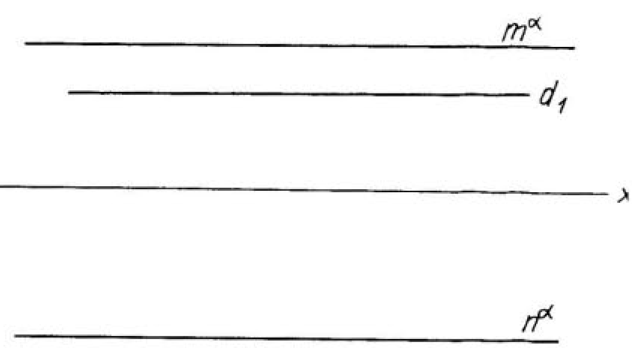
20. Qua điểm A kẻ một mặt phẳng song song với mặt phẳng phân giác I và qua điểm B kẻ một mặt phẳng // với mặt phẳng phân giác II (hình 259).

21. Xác định nốt d_2 biết rằng d thuộc mặt phẳng α (hình 260).



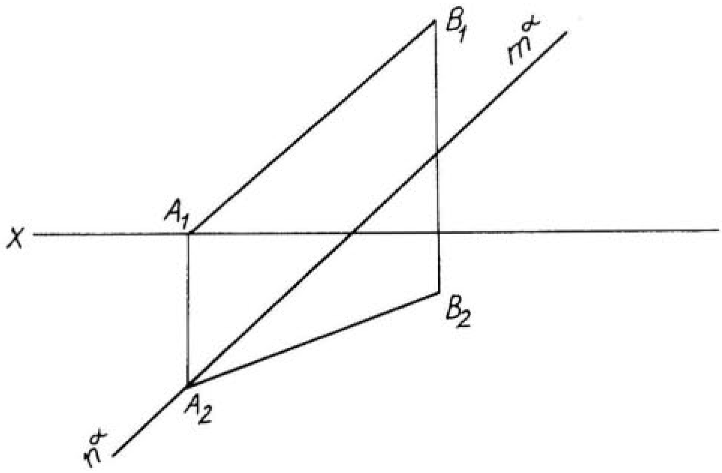
Hình 258





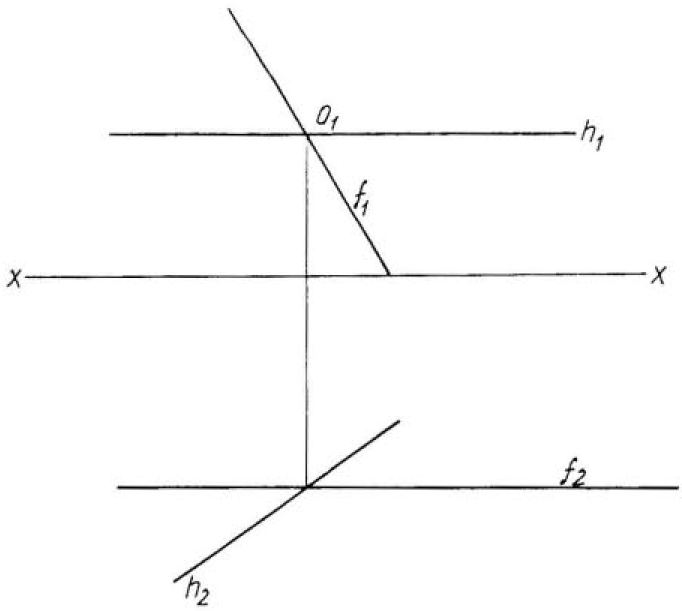
Hình 259. **Hình 260.**

22. Xét xem AB có thuộc mặt phẳng α không ? Tại sao (hình 261).



Hình 261

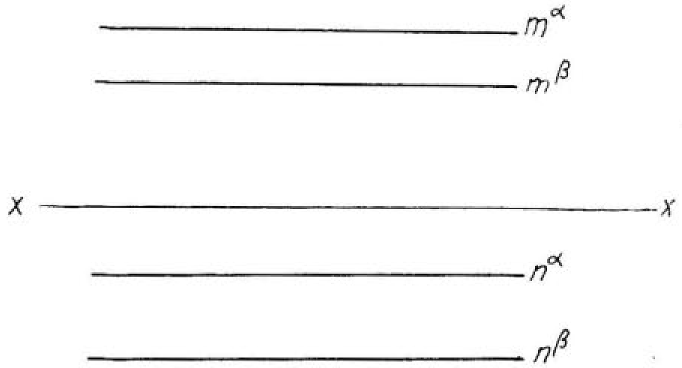
23. Xác định hai vết m^α và n^α của mặt phẳng xác định bởi đường bằng h và đường mặt f cắt nhau tại O (hình 262).



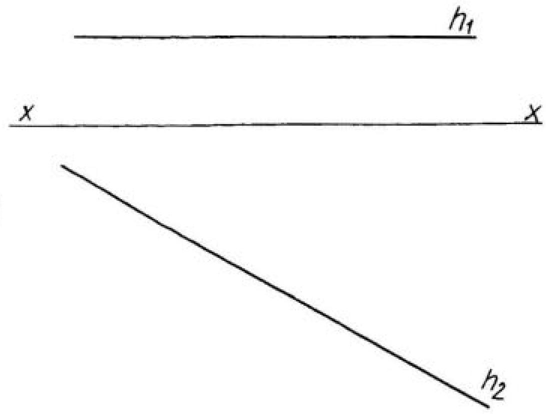
Hình 262

24. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng α và β (hình 263).

25. Cho đường bằng của một mặt phẳng α biết rằng α làm một góc 60° đối với π_2. Hãy vẽ một đường dốc nhất đối với π_2 của mặt phẳng α (hình 264).

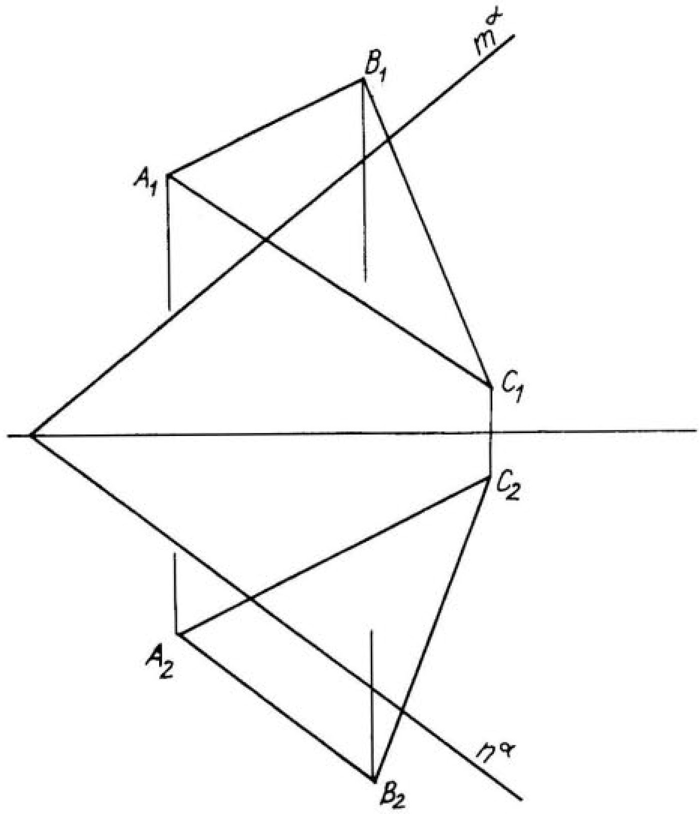


Hình 263.



Hình 264.

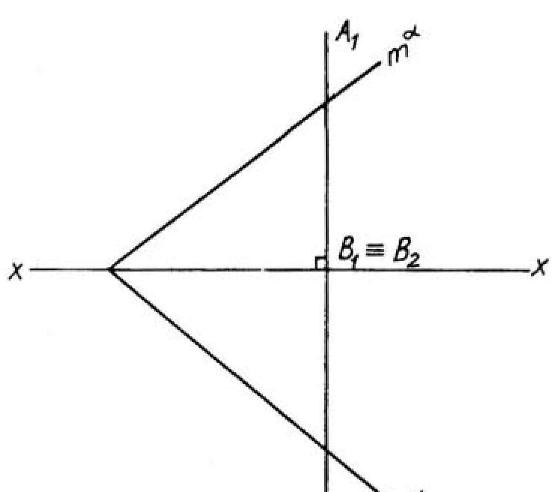
26. Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với mặt phẳng ABC rồi xét thấy khuất (hình 265).



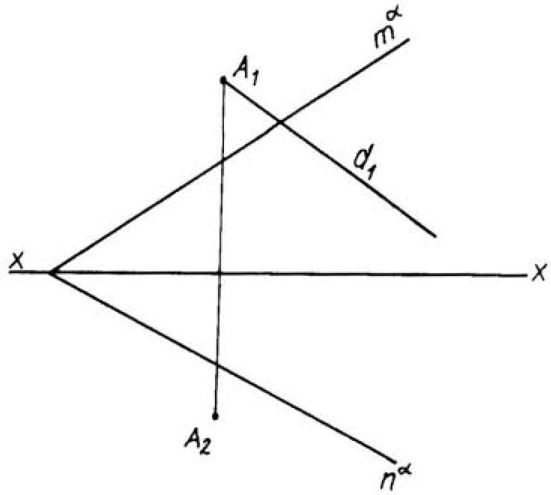
Hình 265

27. Tìm giao điểm của AB với mặt phẳng α (hình 266).

28. Vẽ nốt d_2 biết rằng d đi qua A và d // mặt phẳng α (hình 267).



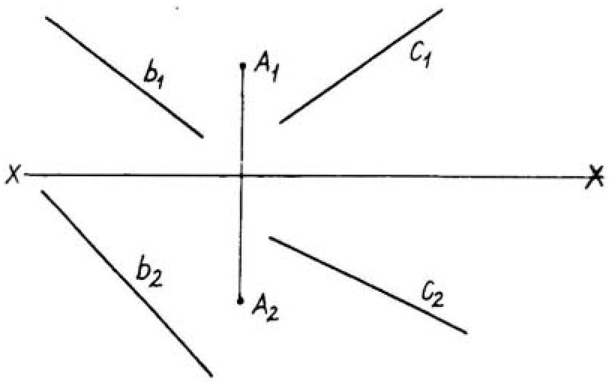
Hình 266.



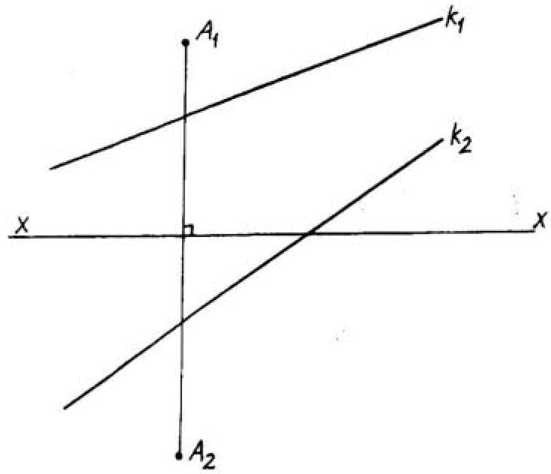
Hình 267.

29. Qua A kẻ một đường thẳng d cắt cả b và c (hình 268).

30. Tìm chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng k (hình 269).

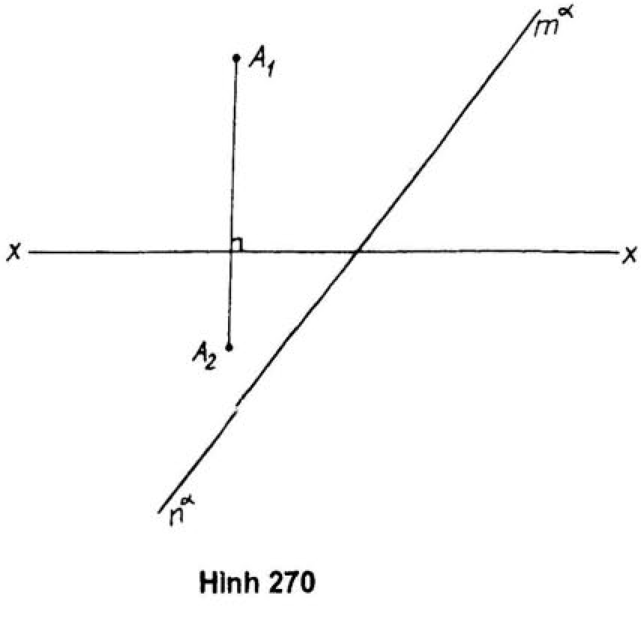


Hình 268.



Hình 269.

31. Tìm tập hợp các đường thẳng đi qua A và song song với mặt phẳng α (hình 270).



Hình 270

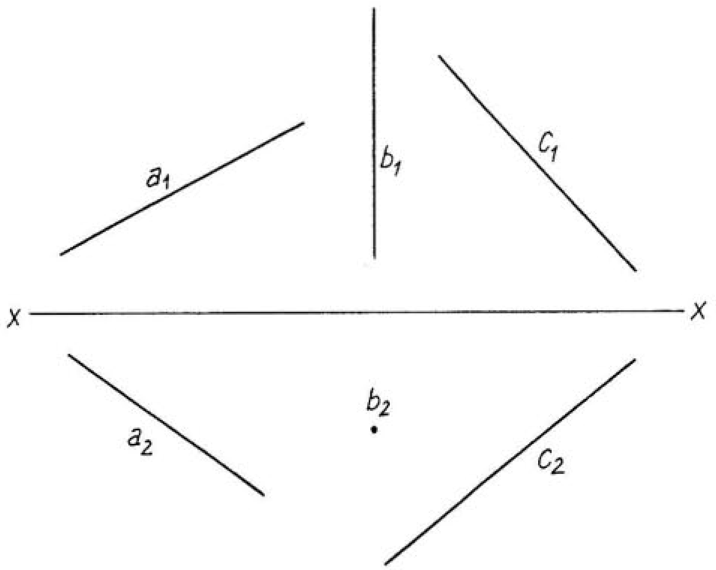
32. Hãy dựng một đường thẳng cắt ba đường thẳng chéo nhau a, b, c lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho AB = BC (hình 271).

33. Xác định góc nghiêng của mặt phẳng α với mặt phẳng π_2 (hình 272).

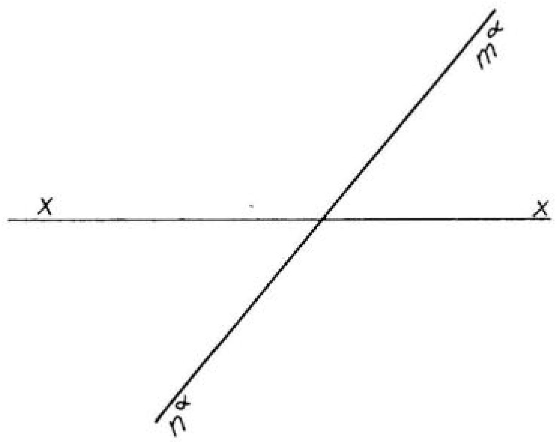
34. Vẽ nốt vết đứng m^{α} của mặt phẳng α biết rằng α cách điểm A một đoạn r (hình 273).

35. Tìm khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (h x f) (hình 274).

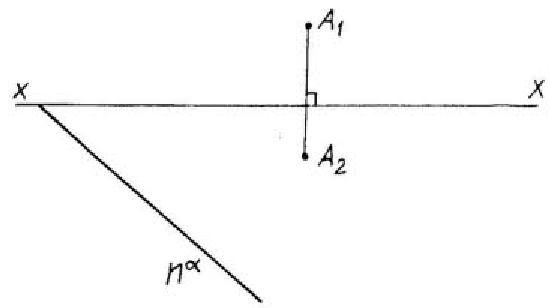
36. Tìm hình chiếu vuông góc của AB lên mặt phẳng α (hình 276).



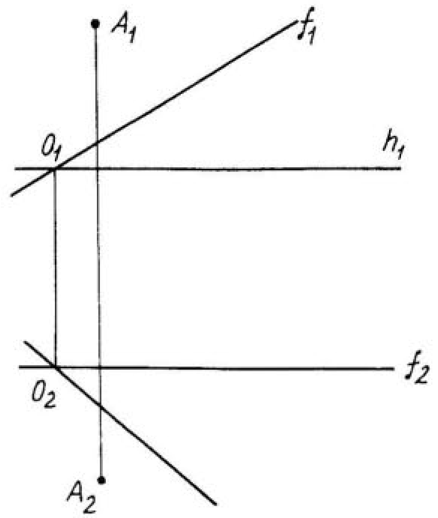
Hình 271



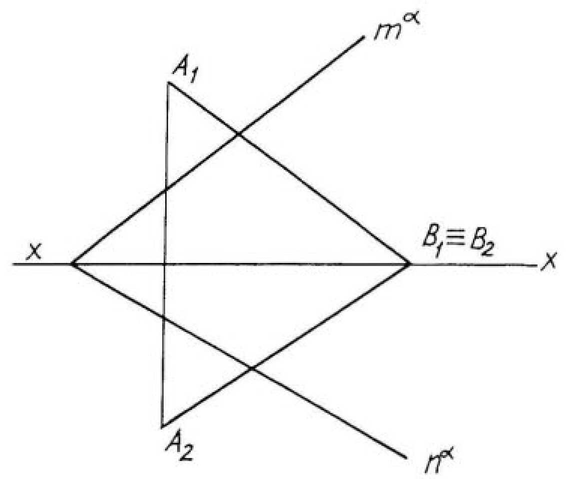
Hình 272.



Hình 273.



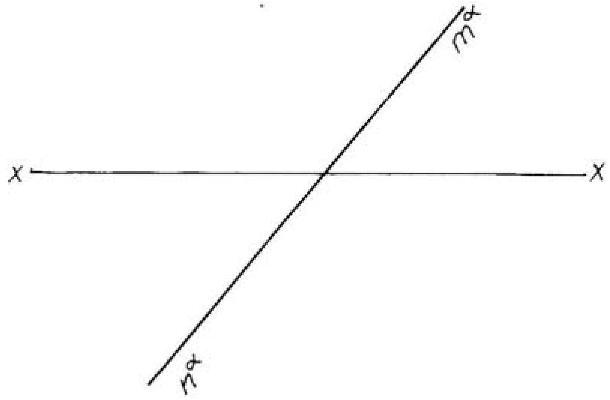
Hình 274.



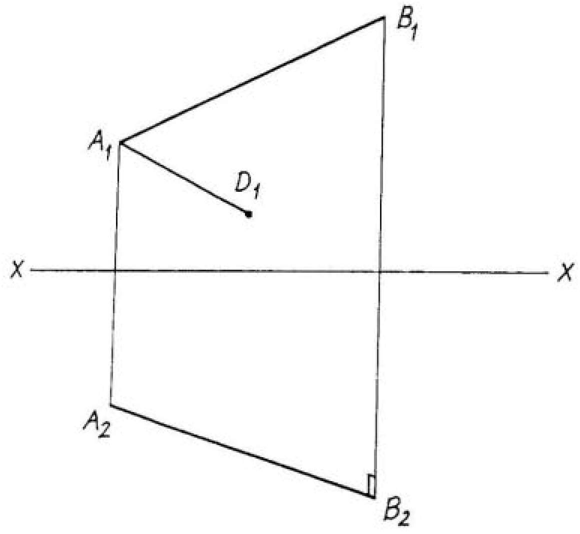
Hình 275.

37. Cho mặt phẳng α bằng hai vết. Lập mặt phẳng β bằng hai vết biết rằng β cách α ba đơn vị (hình 276).

38. Vẽ nốt các hình chiếu của một hình chữ nhật ABCD (hình 277).



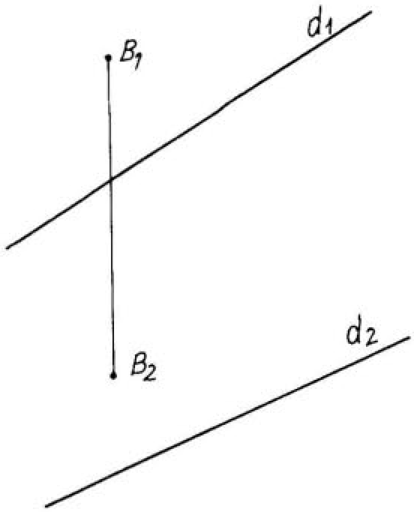
Hình 276.



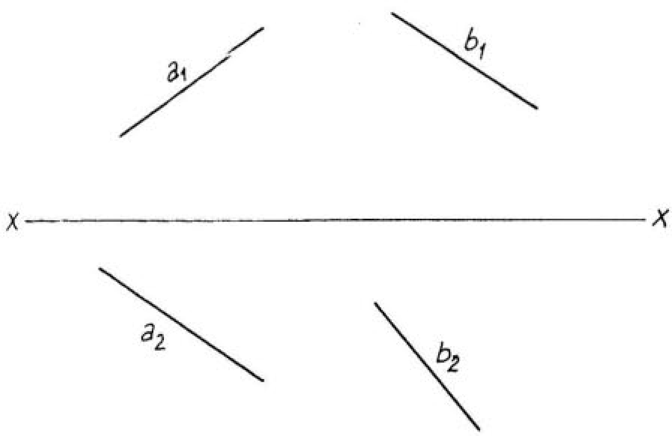
Hình 277.

39. Dựng tam giác ABC vuông tại A, sao cho cạnh AC thuộc đường thẳng d và AC = 1,5 AB (hình 278).

40. Thay mặt phẳng hình chiếu một lần để hình chiếu mới của hai đường thẳng chéo nhau trở thành vuông góc nhau (hình 279).



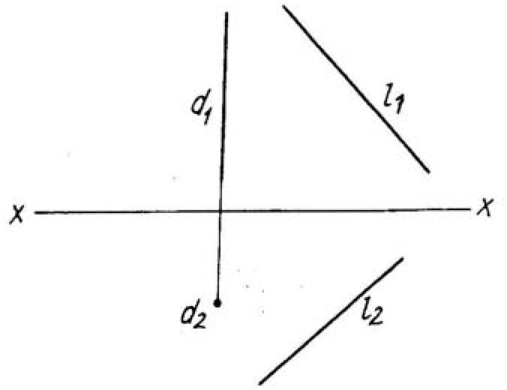
Hình 278.



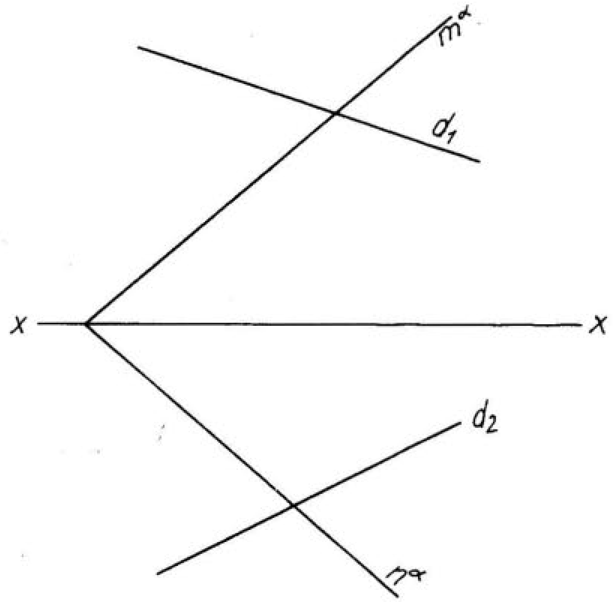
Hình 279.

41. Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b (hình 280).

42. Tìm góc giữa d với mặt phẳng α (hình 281).



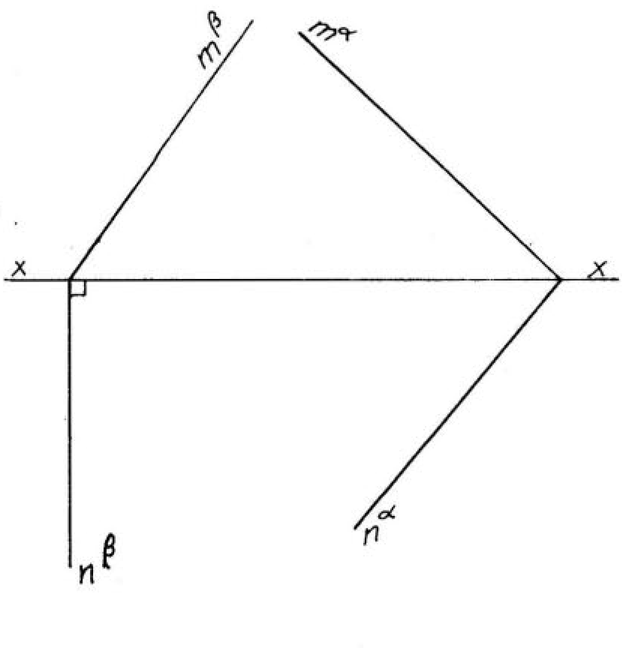
Hình 280.



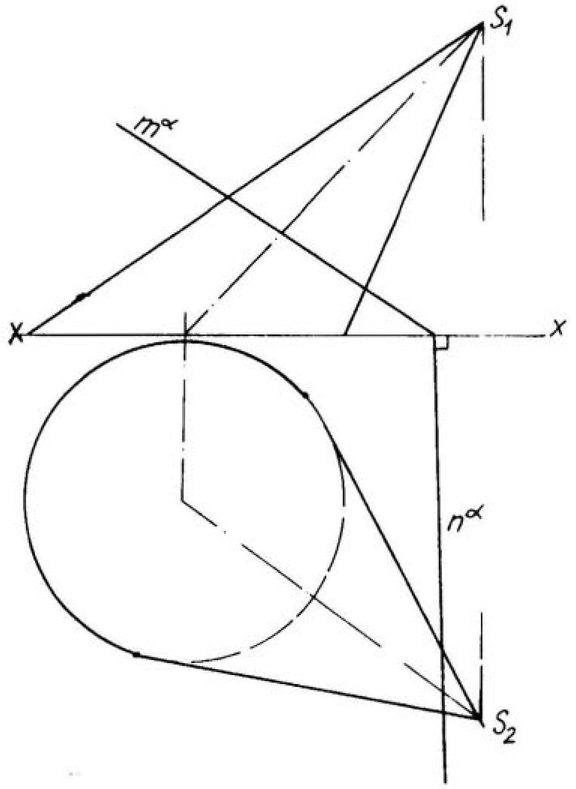
Hình 281.

43. Tìm góc giữa hai mặt phẳng α và β (hình 282).

44. Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với mặt nón xiên (hình 283). Xét thấy khuất.



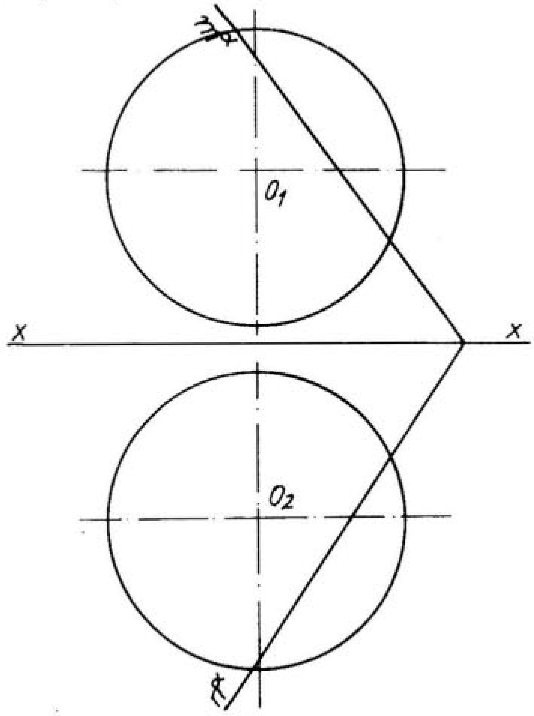
Hình 282.



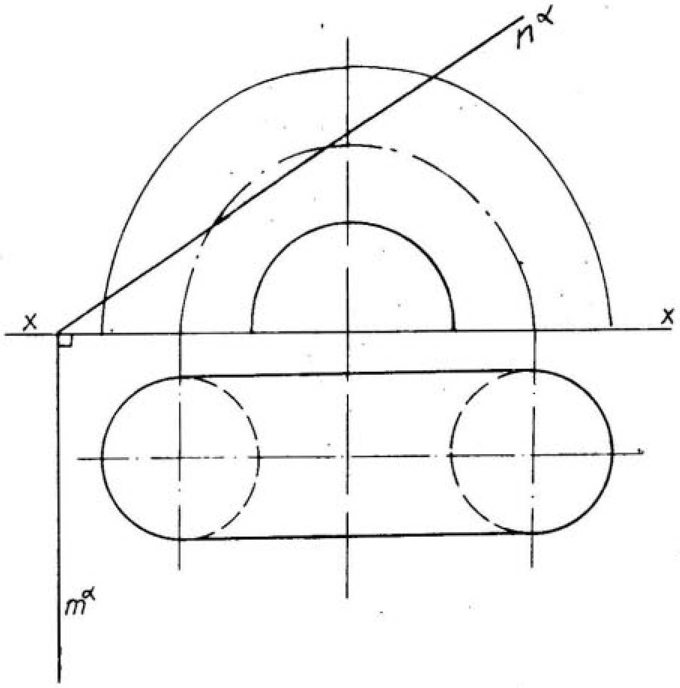
Hình 283.

45. Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với mặt cầu (hình 184). Xét thấy khuất.

46. Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với hình xuyến. Xét thấy khuất của giao tuyến (hình 285).



Hình 284.



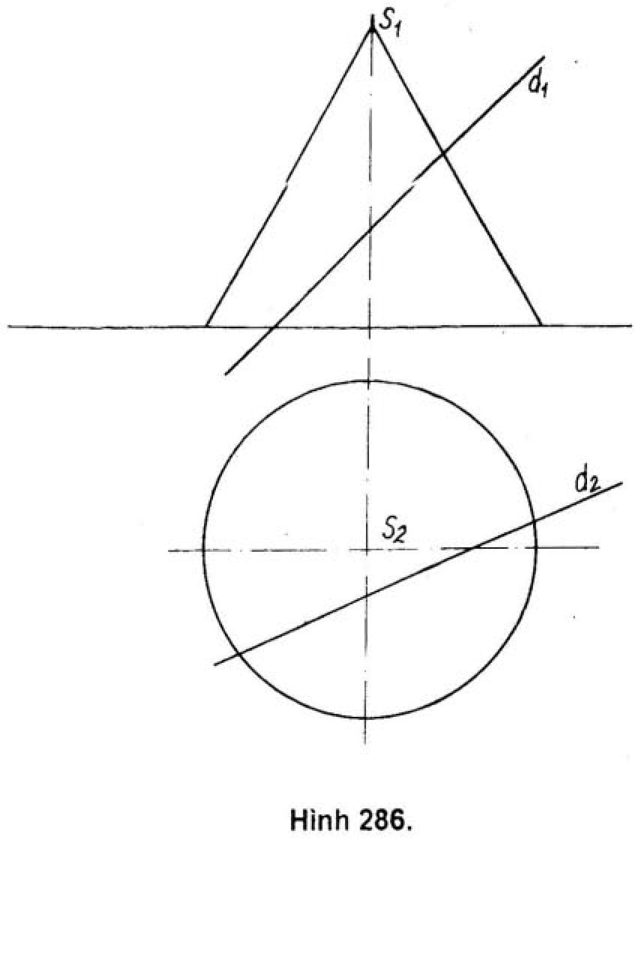
Hình 285.

47. Cho một mặt nón và một đường thẳng d. Qua d hãy lập một mặt phẳng cắt mặt nón theo một parabôn (hình 286).

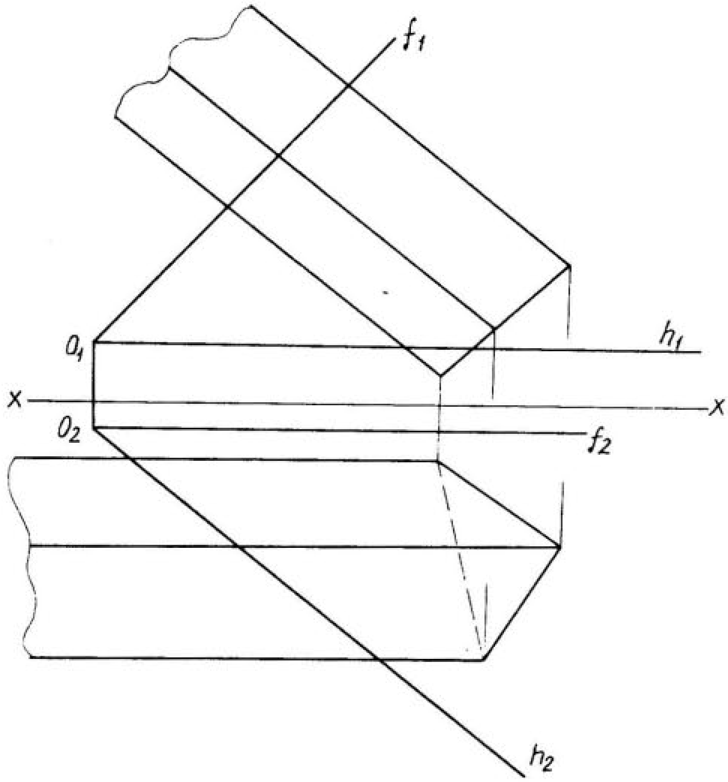
48. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (h x f) với lăng trụ xiên. Xét thấy khuất (hình 287).

49. Tìm giao tuyến của mặt phẳng α với mặt nón. Xét thấy khuất (hình 288).

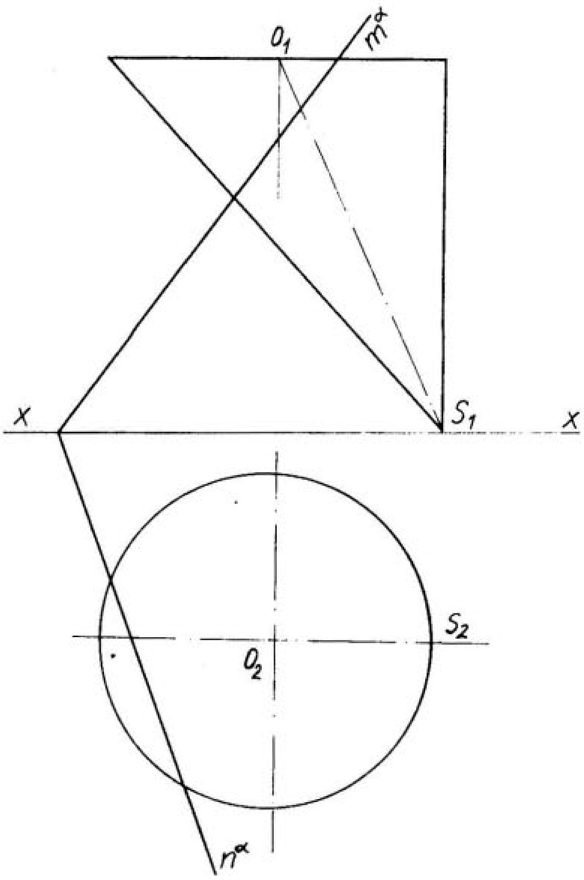
50. Tìm giao tuyến của mặt phẳng xác định bởi điểm A và trục x với mặt cầu. Xét thấy khuất (hình 289).



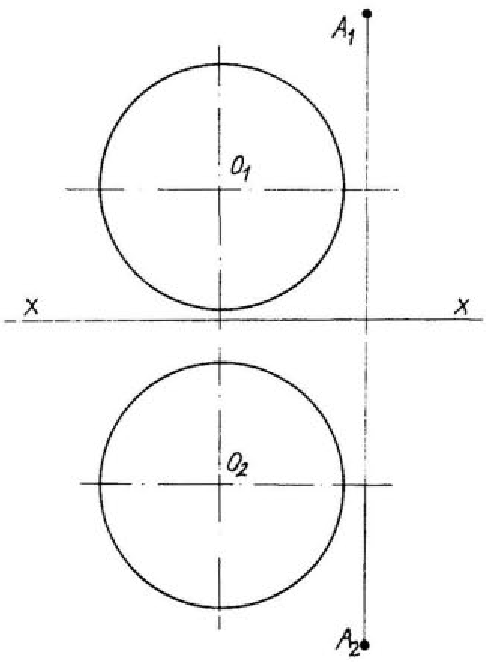
Hình 286.



Hình 287.



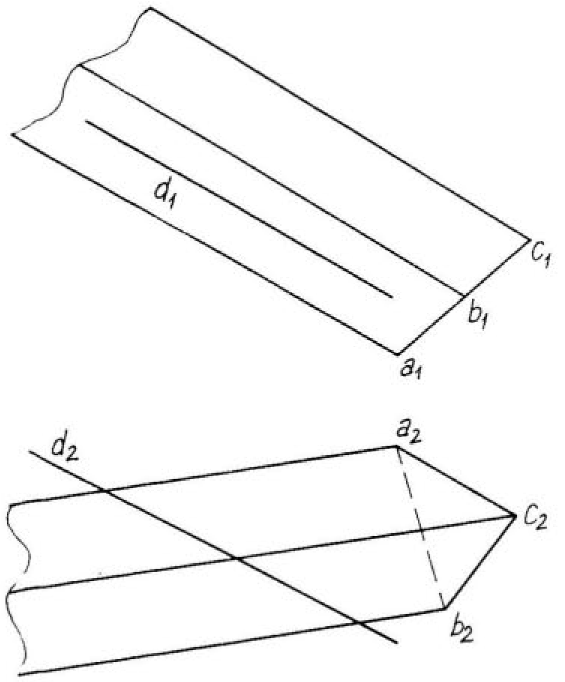
Hình 288.



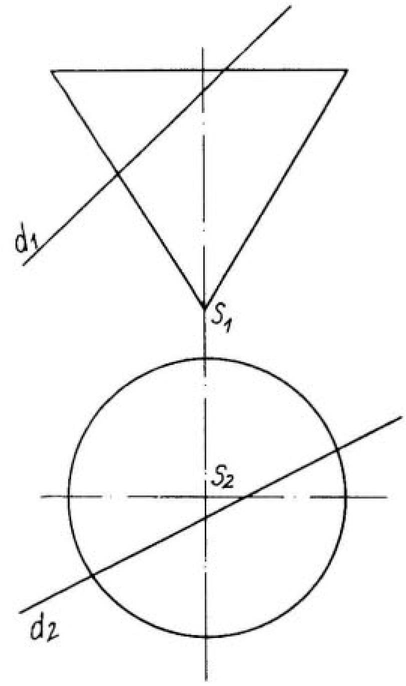
Hình 289.

51. Tìm giao điểm của đường thẳng d với lăng trụ. Xét thấy khuất (hình 290).

52. Tìm giao điểm của d với hình nón (hình 291). Xét thấy khuất.



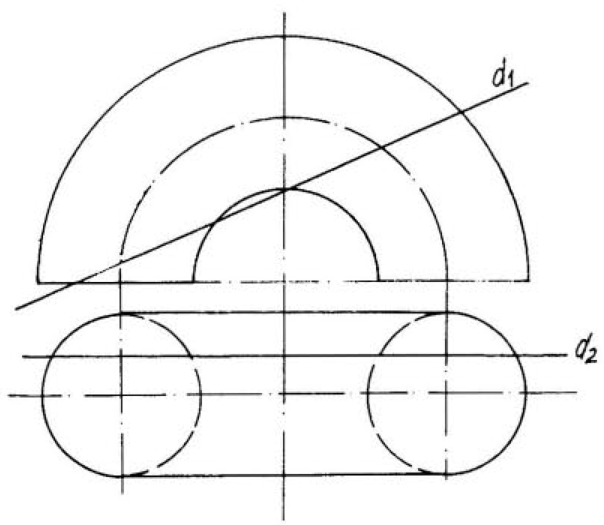
Hình 290.



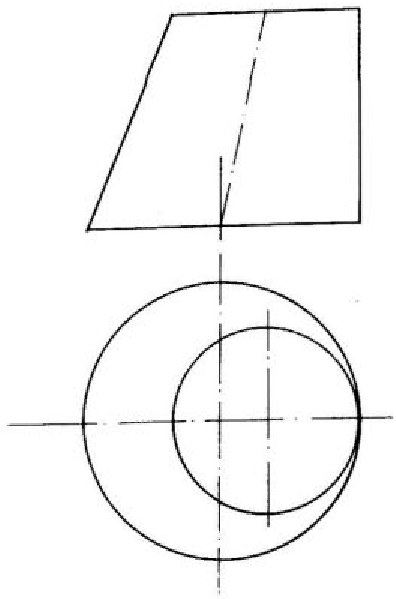
Hình 291.

53. Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt xuyến (hình 292). Xét thấy khuất.

54. Khai triển hình nón cụt (hình 293).



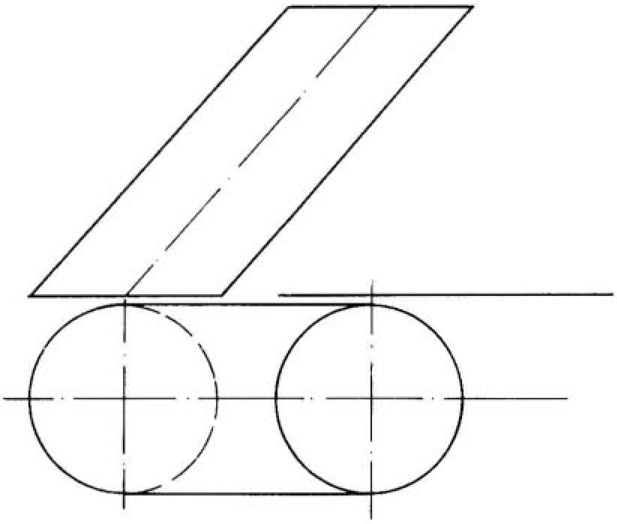
Hình 292.



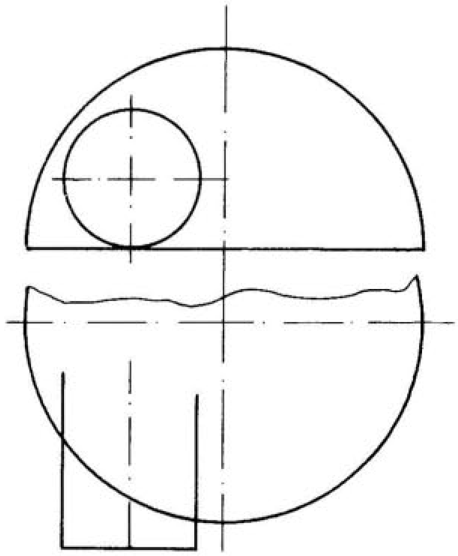
Hình 293.

55. Khai triển lăng trụ xiên (hình 294).

56. Tìm giao tuyến của hình trụ với bán cầu. Xét thấy khuất (hình 295).



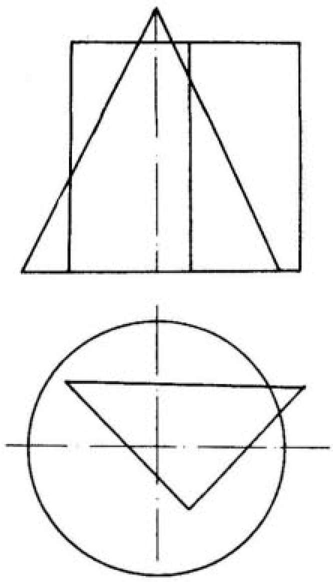
Hình 294.



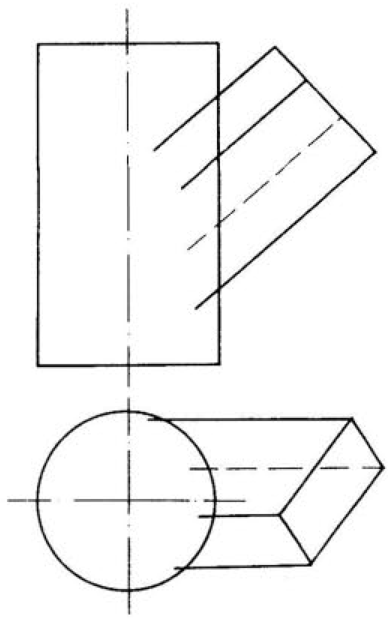
Hình 295.

57. Tìm giao tuyến của nón và lăng trụ (hình 296).

58. Tìm giao tuyến của trụ và lăng trụ xiên (hình 297).



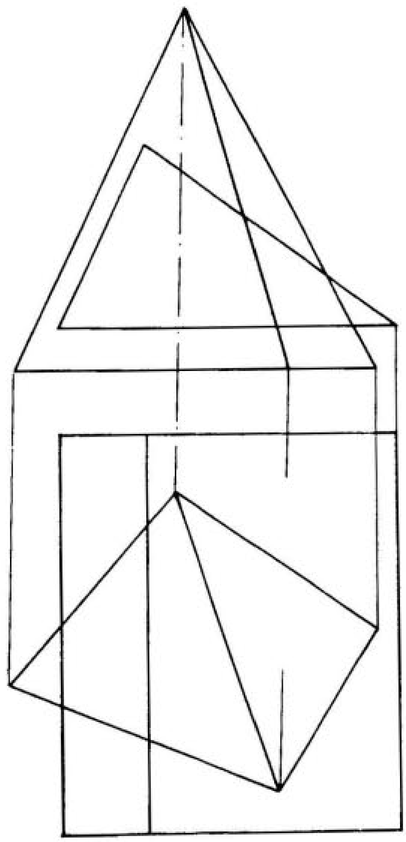
Hình 296.



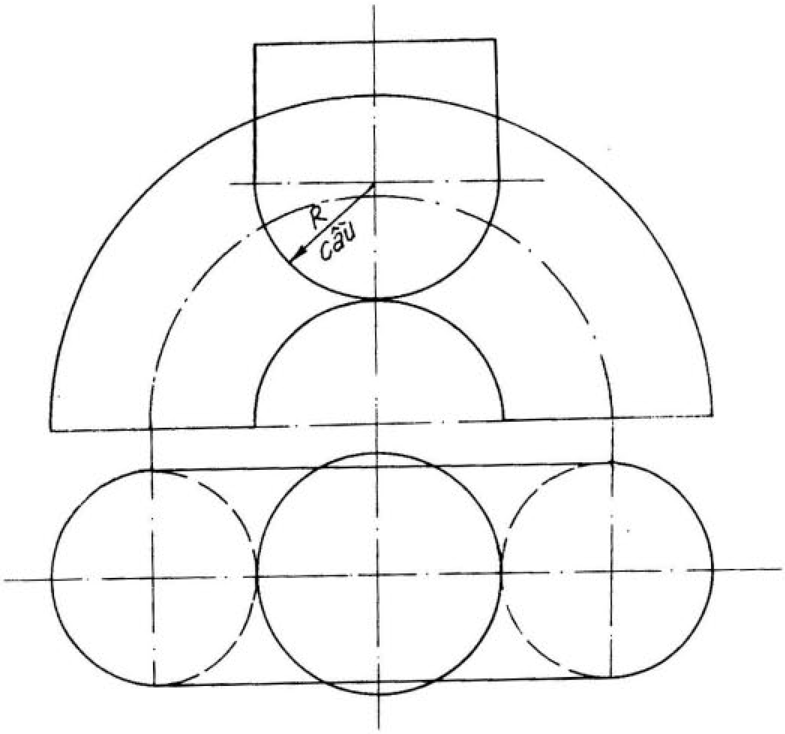
Hình 297.

59. Tìm giao tuyến của chóp với lăng trụ (hình 198).

60. Tìm giao tuyến của xuyến, trụ và bán cầu (hình 299).



Hình 298.



Hình 299.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hình học hoạ hình của C. Roubaudi
2. Bài tập hình học hoạ hình của K. A. Aruxtamốp
3. Bài tập hình học hoạ hình của Bộ môn Hình hoạ - VKT, trường ĐHBK Hà Nội
4. Các đề thi hình học hoạ hình đã sử dụng của Bộ môn Hình hoạ - VKT trường Đại học Bách khoa Hà Nội

MỤC LỤC