

dnmai@imech.ac.vn
0904071055

BÀI TẬP SỨC BỀN VẬT LIỆU

Nha
Ngô Hoàng Nha

И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский,
Ф.З. Алмаметов, Н.А. Курицын,
К.Г. Смирнов-Васильев, Л.В. Яшина

ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

I.N. Mirôliubôp , X.A. Engalutrep, N.D. Xerghiepxki ,
Ph.D. Almametôp, N.A. Kuritxutn,
K.G. Xmirônôp-Vaxiliep, L.V. Iasina

BÀI TẬP SỨC BỀN VẬT LIỆU

Người dịch: Vũ Đình Lai, Nguyễn Văn Nhậm



Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội
Nhà xuất bản Mir, Maxcova

На вьетнамском языке

© Издательство «Высшая школа», 1974.

© dịch sang tiếng Việt, Nhà xuất bản Mir, 1988

ISBN 5-03-000206-5

LỜI NÓI ĐẦU

Đối với sinh viên học môn Sức bền vật liệu, việc giải bài tập thường là khó khăn lớn nhất. Tài liệu « Bài tập Sức bền vật liệu » này nhằm mục đích giúp đỡ sinh viên giảm bớt những khó khăn trong quá trình học giáo trình, nắm được phương pháp, đồng thời có một số kỹ năng cần thiết để giải bài tập.

Trong tài liệu có trình bày những khái niệm cơ bản của phần lý thuyết, các chỉ dẫn cần thiết về phương pháp, những thí dụ giải bài toán mẫu, những bài tập tự giải, đáp số và số liệu tra cứu. Để thuận tiện cho việc sử dụng tài liệu và nắm vững vấn đề, những chỉ dẫn đều đề ở ngay mỗi phần, còn đáp số và số liệu tra cứu thì đề ở cuối sách. Chúng tôi cho rằng điều trước tiên đối với sinh viên là phải nắm được những khái niệm về lý thuyết, phương pháp giải và bài giải mẫu của từng phần, điều này giúp cho họ nhớ lại, hiểu và nắm chắc hơn những vấn đề cơ bản của lý thuyết, nghĩ ra được phương pháp và tìm được cách cần thiết để tự mình giải được bài toán.

Các đề bài tập tự giải được trình bày dưới dạng sơ đồ cùng với các số liệu cần thiết. Vì một sơ đồ có thể đặc trưng cho sự làm việc không phải của một kết cấu mà nhiều kết cấu đôi khi rất khác nhau về mục đích, do đó hầu hết các đề bài tập ở đây đều không viết thành lời, để không hạn chế việc sử dụng mỗi sơ đồ chỉ cho một trường hợp riêng biệt.

Mỗi nhóm bài tập liên quan đến một đề tài và có một mục đích chung thì có một chỉ dẫn chung về mục đích cần phải đạt được khi giải. Như vậy sinh viên phải tự diễn đạt đầu đề bài toán, và do đó hình dung tốt hơn vấn đề phải giải quyết và những số liệu ban đầu.

Lần xuất bản thứ tư này về đại thể không khác những lần xuất bản trước, tuy có một số thay đổi và sửa chữa. Cũng như những lần xuất bản trước, lần xuất bản này có đưa vào hệ đơn vị quốc tế (SI). Trong một loạt thí dụ có trình bày đặc điểm giải bài toán khi sử dụng hệ đơn vị này. Trong các bài tập tự giải cũng có đưa hệ này vào.

Những sinh viên nào học Sức bền vật liệu, đồng thời lại có học tiếng nước ngoài thì có thể sử dụng tài liệu bài tập này theo bản dịch tiếng Pháp, tiếng Tây Ban Nha hoặc tiếng Anh.

Chúng tôi xin bày tỏ lòng cảm tạ sâu sắc đối với tất cả các bạn đã giúp đỡ chúng tôi trong việc biên soạn và hoàn thiện tài liệu này. Chúng tôi vô cùng cảm ơn các bạn có những nhận xét phê bình giúp chúng tôi sửa chữa tài liệu này được tốt hơn

Các tác giả

CHÚ THÍCH CHUNG VỀ CÁC ĐIỀU KIỆN CHO TRONG BÀI TẬP

1. Trong các bài tập, những đại lượng có ghi trên hình vẽ đều coi là dữ kiện, những đại lượng cần tìm (nếu có) đều có ghi dấu hỏi.
2. Những dữ kiện của bài tập cho theo hệ đơn vị quốc tế (SI) thì phải giải theo hệ này.*
3. Nếu trên hình vẽ, các kích thước hình học không ghi ký hiệu gì thì đơn vị sử dụng là milimét.
4. Những bộ phận vẽ bằng hai nét và có vạch chéo, thì coi như cứng tuyệt đối.
5. Nếu bị nén, các bộ phận kết cấu đều coi như đã được bảo đảm về mặt ổn định (trừ trường hợp có ghi chú riêng).

* Các đơn vị đo lường quốc tế và đo lường kỹ thuật cho ở phụ lục 6 cuối sách.

I - KÉO VÀ NÉN

§1. Lực dọc

Hợp lực của những lực đàn hồi vuông góc với mặt cắt ngang gọi là *lực dọc*. Lực dọc xác định bằng phương pháp mặt cắt. Giá trị lực dọc N_x ở một mặt cắt ngang nào đó của thanh bằng tổng đại số những ngoại lực dọc trục thanh (lực tập trung P hoặc lực phân bố theo quy luật bất kỳ q_x) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt đang xét. Nội lực kéo được coi là dương, nén là âm. Công thức tổng quát để xác định giá trị nội lực dọc trên một mặt cắt ngang bất kỳ có dạng sau đây:

$$N_x = \sum P + \sum \int q_x dx \quad (1)$$

Trong công thức trên, tích phân tính trên chiều dài đoạn thanh có lực phân bố tác dụng, và tính tổng đối với tất cả các đoạn ở về một bên của mặt cắt đang xét. Nếu vector lực dọc N_x hướng ra phía ngoài của mặt cắt, thì điều kiện cân bằng của phần thanh cắt ra, tức là công thức (1) sẽ cho cả giá trị và dấu của nội lực.

Thí dụ 1. Cho $P_1 = P$; $P_2 = 3P$; $P_3 = 2P$, tải trọng phân bố q_x biến đổi theo quy luật bậc nhất từ $q = 0$ đến $q = P/a$ (hình 1).

Vẽ biểu đồ N_x .

Bài giải. Cắt bằng một mặt cắt ngang bất kỳ ở mỗi đoạn, ta có thể xác định được giá trị lực dọc theo công thức (1):

$$N_1 = -P_1 = -P; \quad N_2 = -P_1 + P_2 = -P + 3P = 2P$$

$$N_3 = -P_1 + P_2 - \int_0^x P \frac{x}{2a^2} dx = -P + 3P - P \frac{x^2}{4a^2} = P \left(2 - \frac{x^2}{4a^2} \right)$$

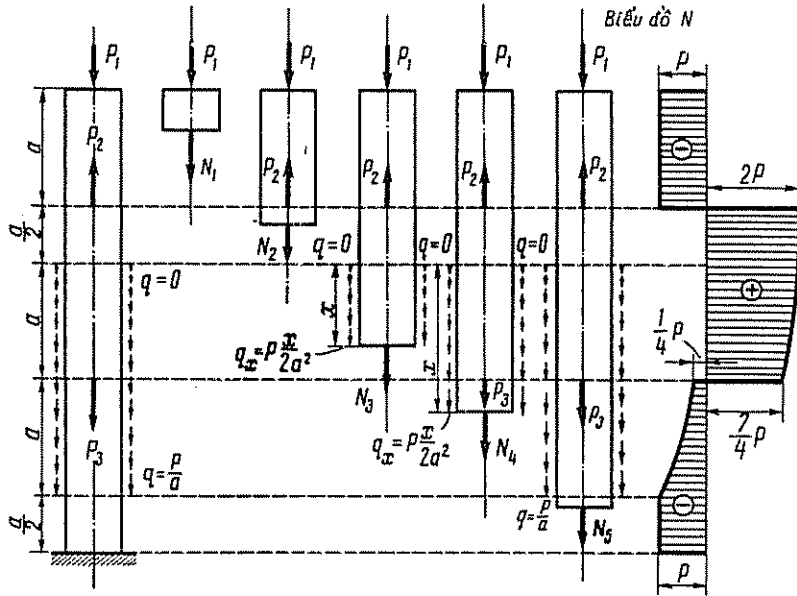
$$N_{3_{x=0}} = 2P, \quad N_{3_{x=a}} = \frac{7}{4}P.$$

$$N_4 = -P_1 + P_2 - \int_0^x P \frac{x}{2a^2} dx - P_3 = -P \frac{x^2}{4a^2}, \quad N_{4_{x=a}} = -\frac{1}{4}P;$$

$$N_{4_{x=2a}} = -P.$$

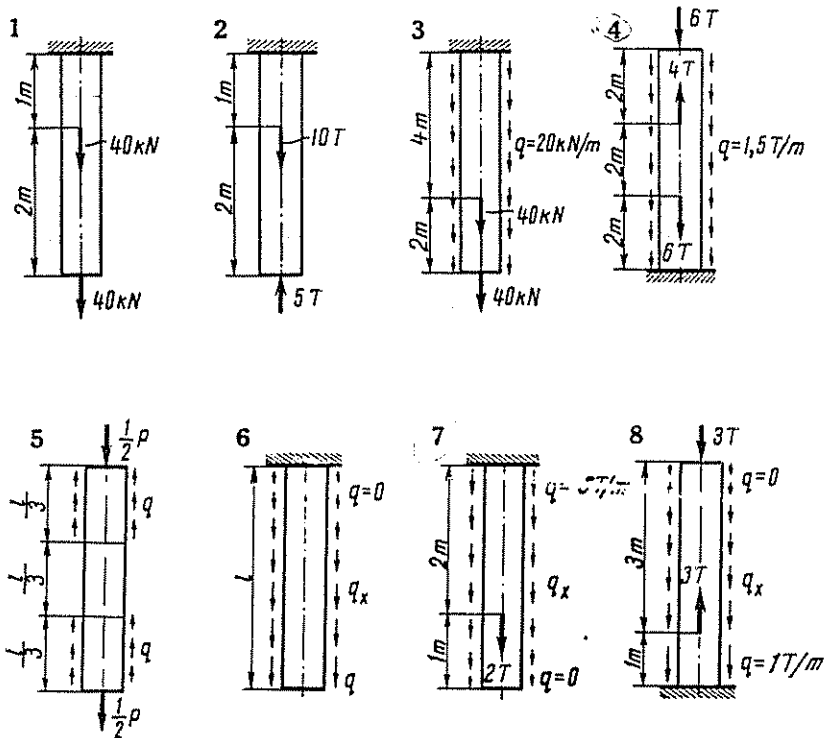
$$N_5 = -P_1 + P_2 - \int_0^{2a} P \frac{x}{2a^2} dx - P_3 = -P.$$

Biểu đồ N_x vẽ ở hình 1.



Hình 1

Bài tập 1—8. Vẽ biểu đồ lực dọc N_x . Trong các bài 6, 7, 8, ta coi tải trọng phân bố q_x biến đổi theo quy luật bậc nhất.



§ 2. Ứng suất pháp, biến dạng dài tuyệt đối và thế năng biến dạng

Ta coi ứng suất pháp σ_x trên mặt cắt ngang của các thanh kéo hoặc nén là phân bố đều (cũng gần đúng đối với thanh mặt cắt thay đổi). Do đó giá trị của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang bất kỳ của một thanh xác định bằng cách chia lực dọc N_x ở mặt cắt đó với diện tích F_x của nó, tức là:

$$\sigma_x = N_x / F_x \quad (2)$$

Nếu coi vật liệu tuân theo định luật Húc thì biến dạng tuyệt đối của thanh tính theo công thức tổng quát

$$\Delta l = \sum \int N_x dx / EF_x \quad (3)$$

trong đó E là môđun đàn hồi dọc của vật liệu.

Tích phân tính theo chiều dài mỗi đoạn và tổng đối với tất cả các đoạn của thanh. Nếu trên chiều dài l của thanh, N_x và F_x không đổi thì $\Delta l = Nl / EF$.

Công thức tổng quát tính thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong thanh bị kéo và nén có dạng:

$$U = \sum \int \frac{N_x^2 dx}{2EF_x} \quad (4)$$

Ở đây, tích phân và tổng cũng tính như khi tính biến dạng.

Vì trong giới hạn đàn hồi của vật liệu, có thể coi thế năng biến dạng có giá trị bằng công của ngoại lực, do đó đối với thanh bị kéo hoặc nén bởi lực P đặt ở đầu thanh, ta có:

$$U = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (5)$$

Thí dụ 2. Cho $P = 10 \text{ kN}$, $l = 0,3 \text{ m}$; $d = 0,01 \text{ m}$, $d_x = (0,01 + x^2) \text{ m}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ (Hình 2).

Vẽ biểu đồ σ_x và tính Δl và U .

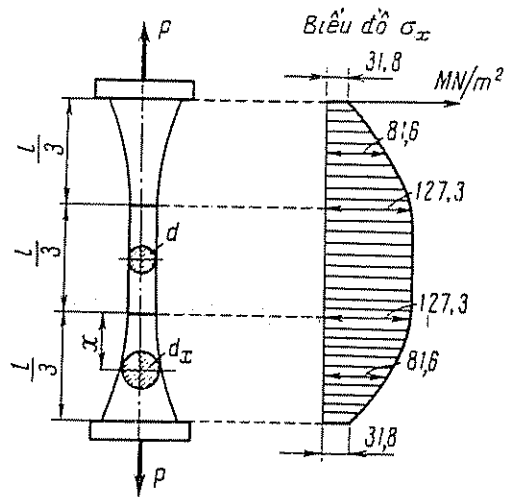
Bài giải: Lực dọc ở mặt cắt bất kỳ bằng $N_x = P = 10 \text{ kN}$. Diện tích mặt cắt ngang: ở phần hình trụ $F = \pi d^2 / 4 = 0,25\pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; ở phần chuyển tiếp $F_x = \pi d_x^2 / 4 = \frac{\pi}{4} (0,01 + x^2)^2 \text{ m}^2$.

Ứng suất pháp: ở phần hình trụ $\sigma_x = N_x / F = 10 \cdot 10^3 / (0,25\pi \cdot 10^{-4})$, hay $\sigma_x = 1,273 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 127,3 \text{ MN/m}^2$; ở phần chuyển tiếp

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x} = \frac{4P}{\pi(0,01 + x^2)^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi(0,01 + x^2)^2} = \frac{127,3}{(1 + 100x^2)^2} \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{x=0} = 127,3 \text{ MN/m}^2; \sigma_{x=1/6} = \frac{127,3}{(1 + 100 \cdot 0,05^2)^2} \approx 81,6 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{x=1/3} = 31,8 \text{ MN/m}^2.$$



Hình 2

8327797

Biểu đồ σ_x vẽ ở hình 2.

Theo công thức (3) biến dạng tuyệt đối của thanh

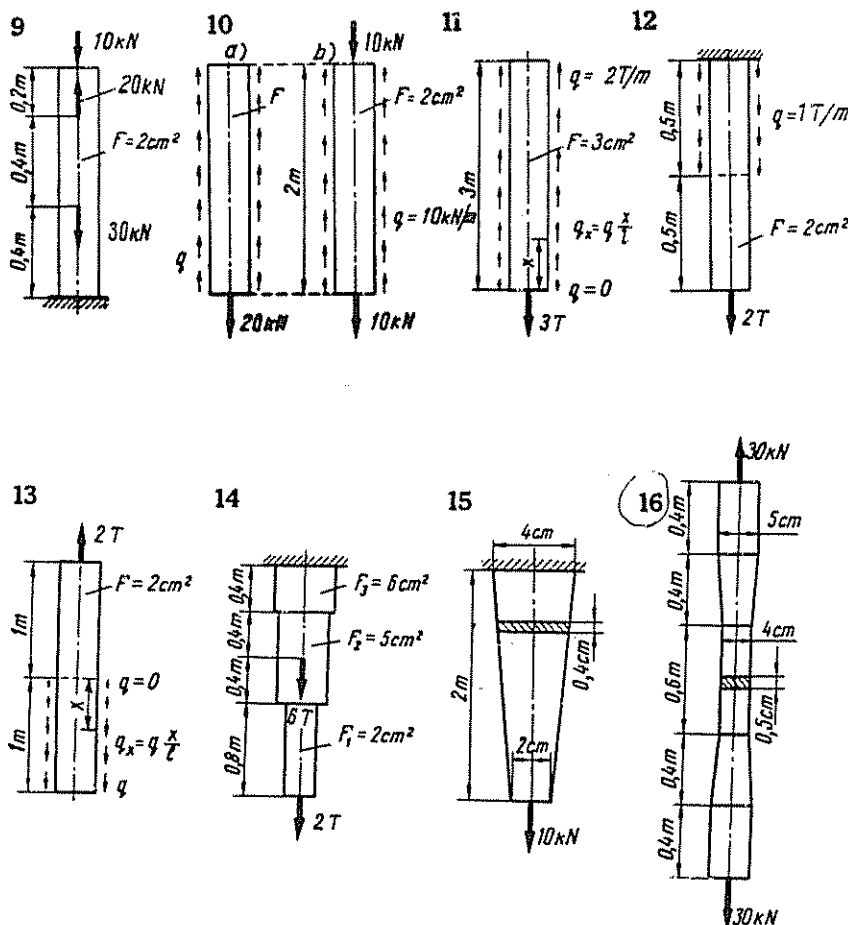
$$\begin{aligned} \Delta l &= \sum \int \frac{N_x dx}{EF_x} = \frac{Pl}{3EF} + \frac{2P \cdot 4}{\pi E} \int_0^{1/3} \frac{dx}{(0,01 + x^2)^2} = \\ &= \frac{Pl}{3EF} + \frac{8P}{\pi E} \left| \frac{x}{2(0,01 + x^2)} \cdot \frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{2 \cdot 0,1^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{0,1} \right|_0^{0,1} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,25\pi \cdot 10^{-4}} + \frac{8 \cdot 10^4}{\pi \cdot 2 \cdot 10^{11}} \left(\frac{0,1}{2(0,01 + 0,1^2)} \cdot \frac{1}{0,1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2 \cdot 0,1^3} \operatorname{arctg} 1 \right) \end{aligned}$$

$$\Delta l \approx 1,46 \cdot 10^{-4} \text{m} = 0,0146 \text{cm.}$$

Theo công thức (5), thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong thanh bằng:

$$U = \frac{P \cdot \Delta l}{2} = \frac{10^4 \cdot 1,46 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,73 \text{j} \approx 7,45 \text{kGcm.}$$

Bài tập 9.16. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp σ , tính độ biến dạng tuyệt đối Δl và thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong các thanh. Cho $E = 2 \cdot 10^5 \text{MN/m}^2$. Trong các bài 11-14 lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{kG/cm}^2$



§ 3. Biến dạng ngang và độ biến đổi thể tích.

Theo định luật Húc, biến dạng dọc tỉ đối trong kéo hoặc nén bằng:

$$\varepsilon = \sigma/E \quad (6)$$

và biến dạng ngang tỉ đối

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu(\sigma/E) \quad (7)$$

trong đó μ là hệ số Poátxông của vật liệu.

Độ biến đổi tỉ đối diện tích mặt cắt ngang tính theo công thức:

$$\Delta F/F \approx -2\mu\varepsilon = -2\mu(\sigma/E) \quad (8)$$

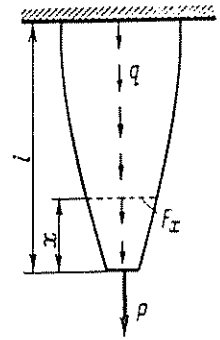
Độ biến đổi tỉ đối thể tích thanh tính theo công thức

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E} \sum \int N_x dx \quad (9)$$

Tích phân tính trên chiều dài mỗi đoạn và tổng đối với các đoạn.

Nếu thanh bị kéo hoặc bị nén bởi lực P đặt ở hai đầu thanh thì:

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E} Pl \quad (10)$$



Hình 3

Thí dụ 3. Cho P, q, l, F_x, E, μ (hình 3). Tính $\varepsilon_x, \Delta F_x/F_x, \Delta V$
Bài giải. Theo các công thức (1) và (2), lực dọc và ứng suất pháp ở mặt cắt bất kỳ bằng:

17

E, μ
 $\Delta d = ?$

18

$E; \Delta b; \mu = ?; b = ?$

19

$P=30kN$
 $E=2 \times 10^5 \text{ MN/m}^2$
 $\mu=0,3$
 $\Delta F = ?$
 $\Delta a = ?$

20

$E, \mu; \frac{\Delta V}{V} = ?$

21

$E, \mu, \Delta V = ?$

22

$E, \mu, \Delta V = ?$

23

$q=0$
 $q_x = q \frac{x}{l}$
 $E, \mu; \Delta V = ?$

24

Cr
 E, μ
 $d=2cm$
 $2d$
 $P = ?$
 $\Delta V_{tđ} = 0,1cm^3$

$$N_x = P + qx, \quad \sigma_x = N_x/F_x = (P + qx)/F_x$$

Vi theo định luật Húc, độ dẫn tỉ đối bằng $\epsilon_x = \sigma_x/E = (P + qx)/EF_x$, do đó theo công thức (8) độ biến đổi tỉ đối của diện tích mặt cắt ngang bằng:

$$\Delta F_x/F_x = -2\mu[(P + qx)/EF_x].$$

Dùng công thức (9), ta tính được độ biến đổi tuyệt đối của thể tích thanh:

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l N_x dx = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \int_0^l (P + qx) dx = \frac{(1 - 2\mu)}{E} \left(P + \frac{ql}{2} \right) l$$

Bài tập 17—24. Tính các đại lượng ghi ở mỗi bài tập. Trong bài 24 đối với thép lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\mu = 0,3$.

§ 4. Chuyển vị các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Chuyển vị đàn hồi các điểm của một hệ thanh liên kết khớp tính theo sơ đồ tổng quát sau đây. Từ các điều kiện tĩnh học, ta tìm được lực dọc trục của các bộ phận đàn hồi của hệ. Bằng định luật Húc, ta tính được độ dẫn tuyệt đối của các bộ phận. Vì khi bị biến dạng các bộ phận của hệ không rời nhau ra, do đó bằng phương pháp các đường giao nhau, ta lập được các điều kiện chấp của chuyển vị, tức là các quan hệ hình học của các bộ phận hợp thành hệ thống. Từ những quan hệ ấy ta xác định được các chuyển vị cần tìm.

Khi dùng phương pháp đường giao nhau cần chú ý rằng các bộ phận của hệ không những có biến dạng dọc trục mà còn có thể quay chung quanh khớp nào đó. Do đó mỗi một điểm của bộ phận đều có thể chuyển vị dọc trục của bộ phận và chuyển vị trên cung tròn có bán kính tương ứng. Cung tròn (đường giao) đó có thể thay bằng đường kẻ vuông góc với bán kính quay vì biến dạng của thanh rất bé so với chiều dài của nó.

Thí dụ 4. Cho P, a, E_1, F_1, E_2, F_2 (hình 4, a).

Xác định hình chiếu nằm ngang δ_x và hình chiếu thẳng đứng δ_y của chuyển vị δ của điểm đặt lực P .

Bài giải. Ta cắt các dây căng I và II để phân hệ cho trước thành hai hệ (hình 4, b). Từ các điều kiện tĩnh học $\Sigma M_A = 0$ và $\Sigma M_B = 0$, ta tìm được nội lực các dây căng:

$N_1 = P/3$ và $N_2 = 2P/3$. Theo định luật Húc:

$$\Delta l_1 = Pa/3E_1F_1 \quad \text{và} \quad \Delta l_2 = 2Pa/3E_2F_2.$$

Dùng phương pháp đường giao nhau (xem hình 4, b) ta tìm được chuyển vị nằm ngang của điểm C bằng Δl_2 , và chuyển vị của điểm C vuông góc với đường BC : $\delta_c = l\Delta_2 \sqrt{2}$.

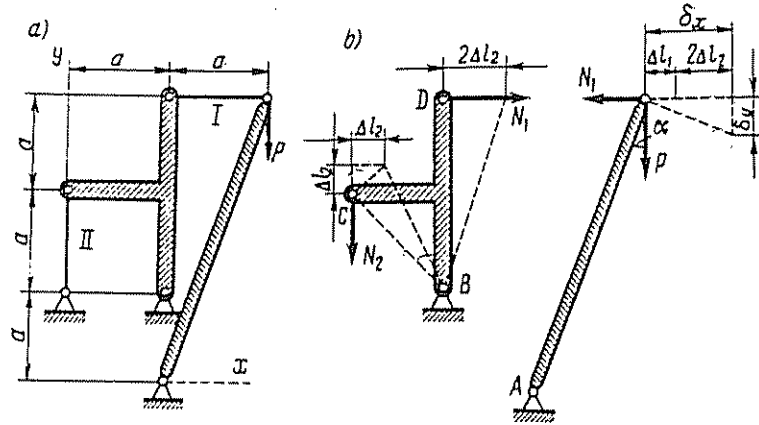
Điểm D chỉ có thể chuyển vị nằm ngang. Chuyển vị này bằng $\delta_D = \delta_c(2a/a\sqrt{2}) = 2\Delta l_2$.

Chuyển vị nằm ngang của điểm đặt lực P bằng chuyển vị nằm ngang của điểm D cộng với độ dẫn của dây căng I, tức là:

$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4}{3} \frac{Pa}{E_2 F_2} + \frac{1}{3} \frac{Pa}{E_1 F_1} = \frac{Pa}{3} \left(\frac{4}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_1 F_1} \right).$$

Chuyển vị thẳng đứng của điểm đặt lực P :

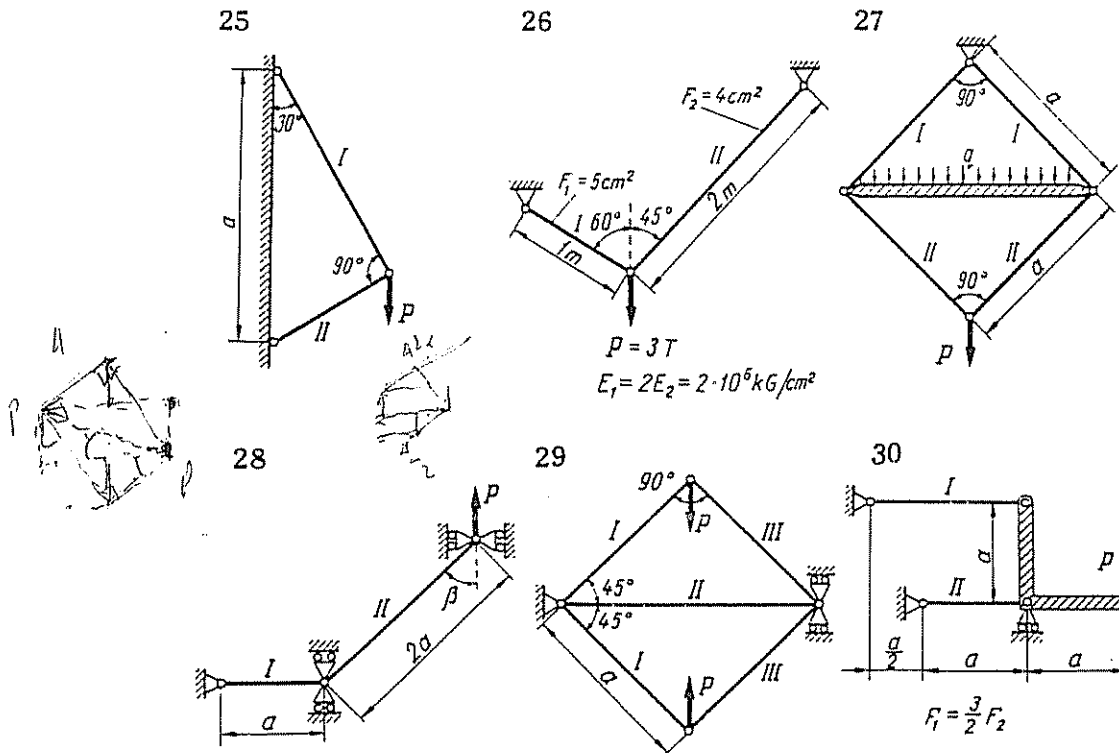
$$\delta_y = \delta_x \operatorname{tg} \alpha = \delta_x \frac{a}{3a} = \frac{Pa}{9} \left(\frac{4}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_1 F_1} \right)$$

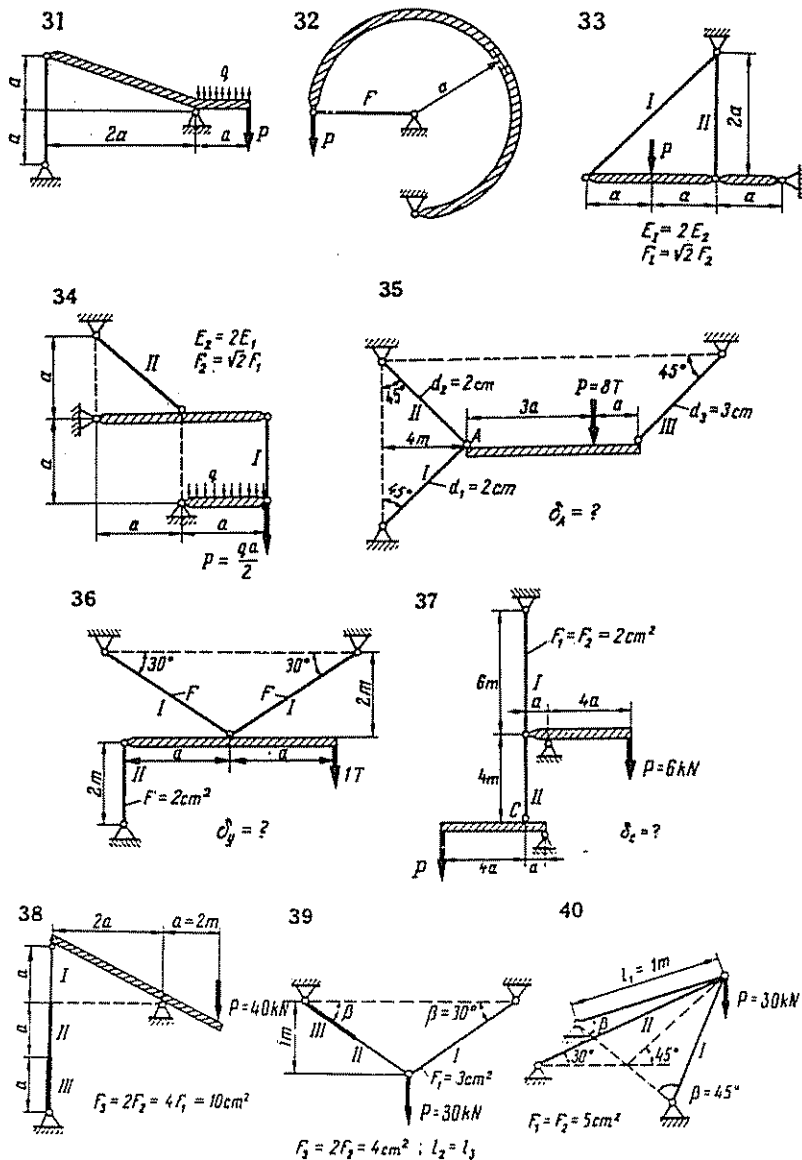


Hình 4

Bài tập 25—40. Xác định chuyển vị δ của các điểm đặt lực P (hoặc chuyển vị của điểm khác có ghi trên hình vẽ) và ứng suất trên mặt cắt ngang các thanh.

Trong những bài chỉ có đề chữ, không cho giá trị của E và F thì coi các thanh đều có E và F như nhau. Đối với bài 35—36, lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, bài 37—40, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$.





§ 5. Độ bền và độ cứng.

Kích thước diện tích F của mặt cắt ngang thanh bị kéo hay bị nén (thanh có mặt cắt ngang không thay đổi) tính từ công thức:

$$F = N_{\max} / [\sigma] \tag{11}$$

trong đó N_{\max} là giá trị tuyệt đối lớn nhất của lực dọc trên thanh đang xét; $[\sigma]$: ứng suất cho phép của vật liệu thanh về kéo $[\sigma_k]$ hoặc nén $[\sigma_n]$.

Đối với vật liệu có độ bền kéo bằng độ bền nén (vật liệu dẻo).

$$[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma] = \sigma_{ch} / n_{ch} \tag{12}$$

trong đó σ_{ch} là giới hạn chảy của vật liệu về kéo (nén), n_{ch} là hệ số an toàn đối với giới hạn chảy.

Đối với thanh mặt cắt thay đổi, kích thước tính theo điều kiện bền ở mặt cắt nguy hiểm. Nếu người ta có đặt thêm điều kiện bổ sung là chuyển vị đàn hồi δ của điểm nào đó của hệ không được vượt quá một giá trị cho phép $[\delta]$, thì việc kiểm tra độ cứng thực hiện theo bất đẳng thức:

$$\delta \leq [\delta] \quad (13)$$

Thí dụ 5. Cho $P = 1T$, $a = 1m$, $\alpha = 30^\circ$

$$[\sigma_k]_I = 1000kG/cm^2, E_1 = 2 \cdot 10^6 kG/cm^2,$$

$$[\sigma_n]_{II} = 100kG/cm^2, E_2 = 0,1 \cdot 10^6 kG/cm^2.$$

chuyển vị cho phép theo phương nằm ngang $[\delta_x]$ và theo phương thẳng đứng $[\delta_y]$ của điểm đặt lực P : $[\delta_x] = [\delta_y] = 1,3mm$ (hình 5, a).

Hãy xác định F_1 và F_2 .

Bài giải. Từ các điều kiện tĩnh học (xem hình 5, a) $\Sigma X = 0$, và $\Sigma Y = 0$.

$$N_1 = N_2 = N, N = P = 1T.$$

Theo công thức (11)

$$F_1 = N/[\sigma_k]_I = 10^3/10^3 = 1cm^2.$$

$$F_2 = N/[\sigma_n]_{II} = 10^3/10^2 = 10cm^2.$$

Theo định luật Húc.

$$\Delta l_1 = \frac{Na}{E_1 F_1} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0,05cm.$$

$$\Delta l_2 = \frac{Na}{E_2 F_2} = \frac{10^3 \cdot 10^2}{0,1 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0,1cm.$$

Trên hình 5, b vẽ theo phương pháp đường giao nhau, ta có Δl_1 bằng tổng hình chiếu của δ_x và δ_y lên phương của thanh I, và Δl_2 bằng tổng hình chiếu của δ_x và δ_y lên phương của thanh II, tức là:

$$\Delta l_1 = \delta_y \sin \alpha - \delta_x \cos \alpha;$$

$$\Delta l_2 = \delta_y \sin \alpha + \delta_x \cos \alpha.$$

Từ đó

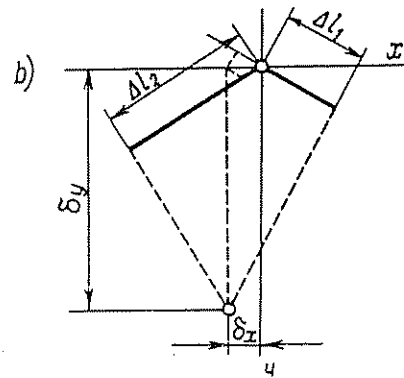
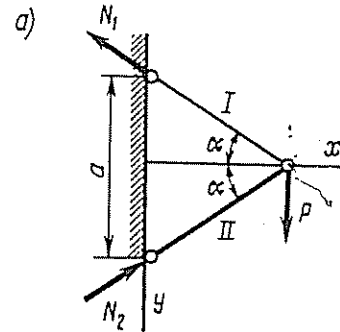
$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2 \sin \alpha} = 1,5mm; \quad \delta_x = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2 \cos \alpha} = 0,289mm$$

Vì $\delta_y > [\delta_y]$ nên ta phải tăng thêm diện tích mặt cắt các thanh. Ta giữ nguyên diện tích thanh I: $F_1 = 1cm^2$ và tìm diện tích cần thiết F_2 của thanh II.

Theo điều kiện về độ cứng $\delta_y = \frac{1}{2 \sin 30^\circ} (\Delta l_1 + \Delta l_2) \leq [\delta_y]$, hay $0,05 + \Delta l_2 \leq 0,13cm$. Từ đó ta được

$$\Delta l_2 = Na/E_2 F_2 \leq 0,08 \quad \text{và} \quad F_2 = Na/0,08 E_2 = 12,5cm^2.$$

Với diện tích này ứng suất ở thanh II: $\sigma_{II} = N/F_2 = 80kG/cm^2$, còn các chuyển vị nằm ngang và thẳng đứng của điểm đặt lực P :



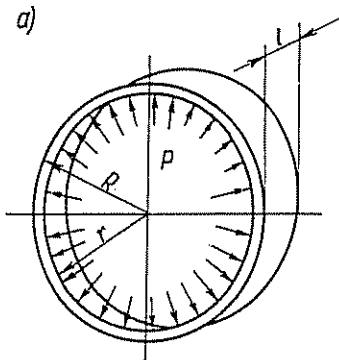
Hình 5

$$\delta_y = 1,3\text{mm}, \delta_x = (0,08 - 0,05)/\sqrt{3} \approx 0,0173\text{cm} = 0,173\text{mm}.$$

Thí dụ 6. Một vành tròn, đường kính trong $r = 100\text{mm}$, đường kính ngoài $R = 101\text{mm}$, chiều dài l , chịu tác dụng áp lực xuyên tâm ở phía trong $p = 20\text{ bar}$ (hình 6, a).

Tính độ tăng bán kính Δr và hệ số an toàn n_{ch} của vành, biết rằng vật liệu có môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^5 \text{MN/m}^2$ và giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 300 \text{MN/m}^2$.

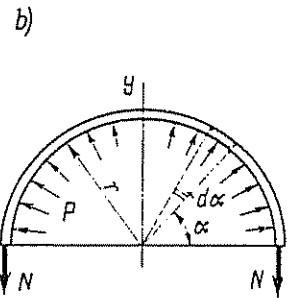
Bài giải. Để xác định lực căng N trên vành, ta cắt vành bằng mặt cắt chứa trục vành (hình 6, b). Từ điều kiện cân bằng của tổng hình chiếu lên trục y của các lực và nội lực tác dụng lên nửa vành tròn, ta được:



$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} plr \sin \alpha \cdot d\alpha = prl.$$

Ứng suất pháp trên thành vành

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{plr}{(R-r)l} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^8 \text{N/m}^2 = 200 \text{MN/m}^2$$



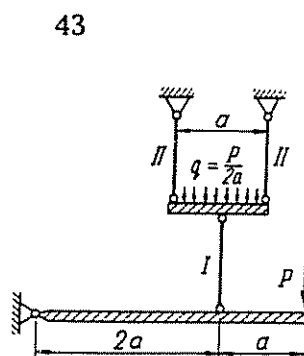
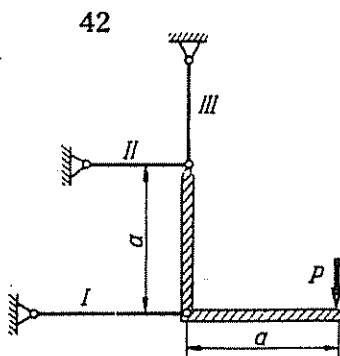
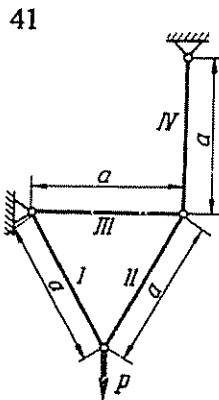
Hình 6

Hệ số an toàn (đối với giới hạn chảy của vật liệu) $n_{ch} = \sigma_{ch}/\sigma = 300/200 = 1,5$.

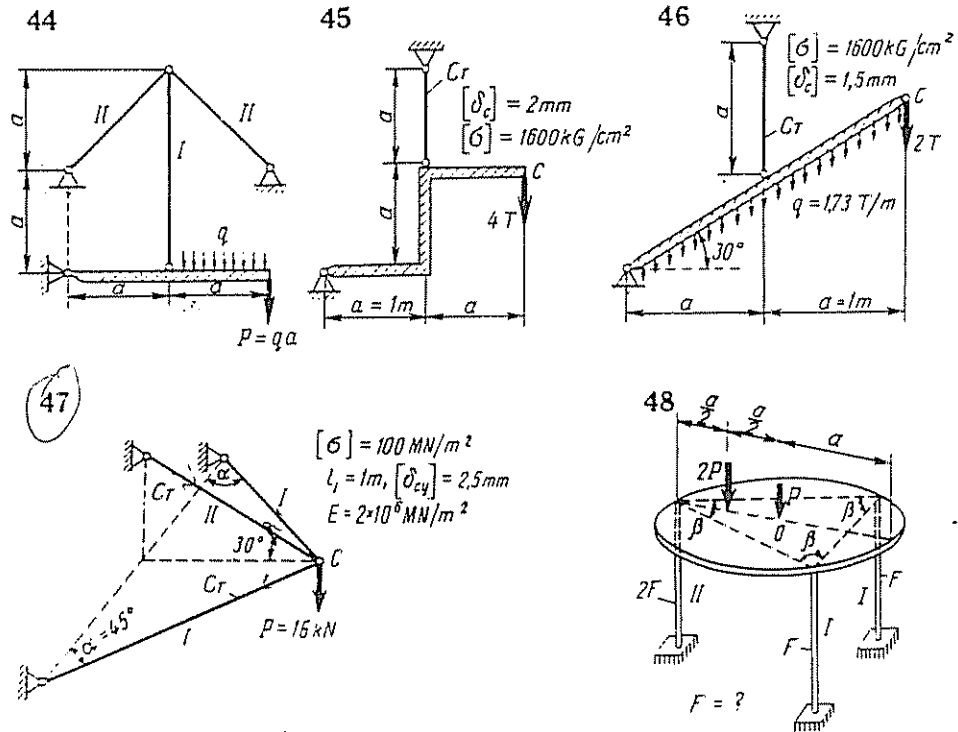
Độ tăng tuyệt đối Δr của bán kính trong của vành tính được theo định luật Húc. Vì $2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r = \frac{N \cdot 2\pi r}{E(R-r)l}$ do đó

$$\Delta r = \frac{pr^2}{E(R-r)} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot 10^{-2}} = 0,01 \cdot 10^{-2} \text{m} = 0,01 \text{cm}.$$

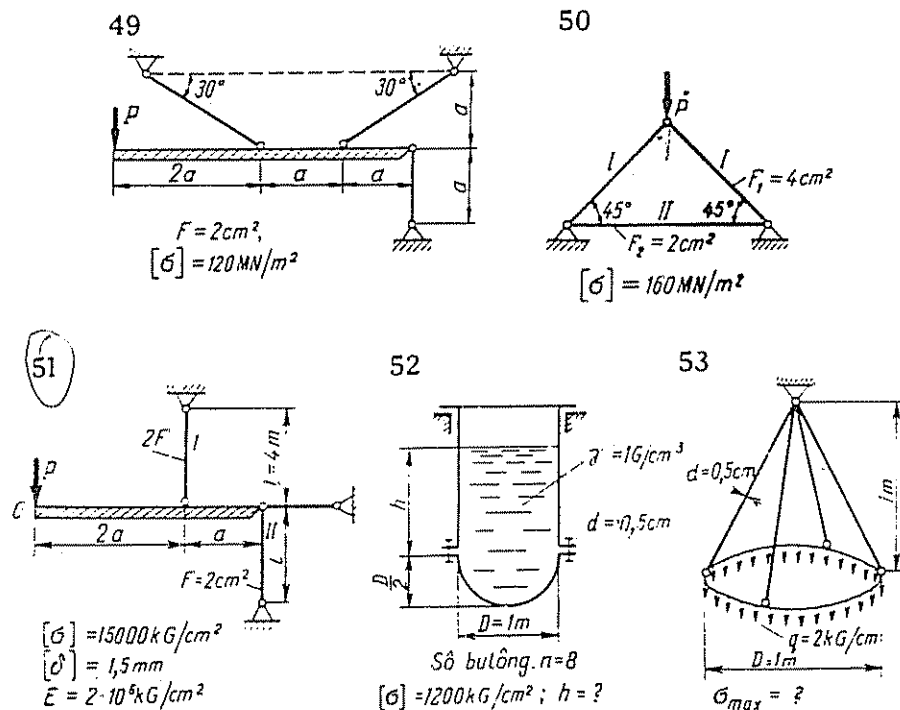
Bài tập 41—43. Chọn kích thước diện tích F mặt cắt ngang của các bộ phận đàn hồi của hệ: ở các bài mà dữ kiện cho bằng chữ thì ứng suất cho phép $[\sigma]$



bằng nhau về kéo và nén đối với tất cả các bộ phận của hệ. Nếu ở bài không cho môđun đàn hồi E thì coi như đã biết và giống nhau đối với tất cả các thanh. Ở những bài 45 — 46 lấy đối với thép $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$.



Bài tập 49 — 53. Tính lực cho phép P hoặc những đại lượng chỉ dẫn ở mỗi bài.



§ 6. Tính thanh có xét trọng lượng bản thân

Đối với thanh hình lăng trụ có tác dụng của trọng lượng bản thân và lực tập trung P đặt ở đầu tự do.

Lực dọc trục trên mặt cắt ngang cách đầu tự do là x :

$$N_x = P + \gamma Fx, \quad (14)$$

Ứng suất pháp trên mặt cắt này

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x \quad (15)$$

Diện tích cần thiết của mặt cắt ngang.

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} \quad (16)$$

Độ dẫn tuyệt đối

$$\Delta l = \frac{l}{EF} (P + Q/2) \quad (17)$$

trong đó γ là trọng lượng riêng (trọng lượng đơn vị thể tích) của vật liệu thanh, l — chiều dài thanh và $Q = \gamma Fl$ — trọng lượng thanh.

Đối với thanh độ bền đều, tức là thanh mà ứng suất pháp trên các mặt cắt ngang đều bằng nhau, diện tích mặt cắt ngang tính theo công thức:

$$F_x = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}, \quad (18)$$

trong đó e là cơ số lôga tự nhiên.

Độ dẫn tuyệt đối của thanh có độ bền đều tính theo công thức.

$$\Delta l = [\sigma] l / E \quad (19)$$

Đối với thanh hình bậc diện tích mặt cắt của bậc thứ i

$$F_i = \frac{P[\sigma]^{i-1}}{([\sigma] - \gamma l_1)([\sigma] - \gamma l_2)([\sigma] - \gamma l_3) \dots ([\sigma] - \gamma l_i)} \quad (20)$$

và độ dẫn tuyệt đối

$$\Delta l = \frac{[\sigma]}{E} \sum l_i \left(1 - \frac{\gamma l_i}{2[\sigma]}\right), \quad (21)$$

trong đó $l_1, l_2, l_3 \dots$ là chiều dài của bậc tương ứng.

Thí dụ 7. Cho $P = 16T$; $\gamma = 8 \text{ G/cm}^3$; $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; $l = 40m$.

Tính diện tích F_t , trọng lượng Q_t và độ dãn tuyệt đối Δl_t của thanh hình lăng trụ: diện tích lớn nhất F_b , trọng lượng Q_b và độ dãn tuyệt đối Δl_b của thanh có bốn bậc chiều dài như nhau; diện tích lớn nhất F_a , trọng lượng Q_a và độ dãn tuyệt đối Δl_a của thanh độ bền đều (hình 7).

Bài giải. Đối với thanh hình lăng trụ (hình 7, a) diện tích mặt cắt ngang tính theo công thức (16)

$$F_t = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3} \approx 10,204 \text{ cm}^2$$

trọng lượng

$$Q_t = \gamma F_t l = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 10,204 \cdot 4 \cdot 10^3 \approx 326,53 \text{ kG}$$

Độ dãn tuyệt đối tính theo công thức (17)

$$\Delta l_t = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 10,204} \left(16 \cdot 10^3 + \frac{327}{2} \right) \approx 3,168 \text{ cm.}$$

Đối với thanh hình bậc (hình 7, b): diện tích lớn nhất tính theo công thức (20).

$$\begin{aligned} F_b &= \frac{P[\sigma]^3}{\left([\sigma] - \frac{1}{4} \gamma l\right)^4} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l}{4[\sigma]}\right)^4} \\ &= \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2 \left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{4 \cdot 16 \cdot 10^2}\right)^4} \approx 10,203 \text{ cm}^2, \end{aligned}$$

trọng lượng

$$Q_b = [\sigma] F_b - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10,203 - 16 \cdot 10^3 \approx 324,8 \text{ kG,}$$

độ dãn tuyệt đối tính theo công thức (21).

$$\Delta l_b = \frac{[\sigma] l}{E} \left(1 - \frac{\gamma l}{2 \cdot 4[\sigma]}\right) = \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} \left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 10^2}\right) \approx 3,192 \text{ cm}$$

Đối với thanh độ bền đều (hình 7, c): diện tích lớn nhất tính theo công thức (18)

$$F_a = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2} e^{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^2}} = 10 \cdot e^{0,02} \approx 10,202 \text{ cm}^2.$$

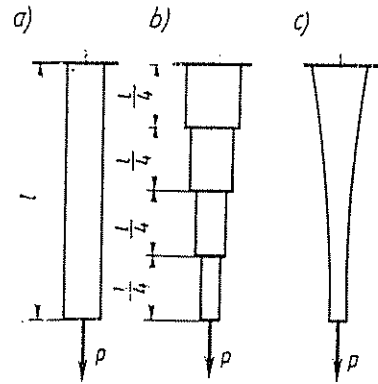
trọng lượng

$$Q_a = [\sigma] F_a - P = 16 \cdot 10^2 \cdot 10,202 - 16 \cdot 10^3 \approx 323,3 \text{ kG,}$$

độ dãn tuyệt đối tính theo công thức (19)

$$\Delta l_a = [\sigma] l / E = 16 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3 / 2 \cdot 10^6 = 3,2 \text{ cm.}$$

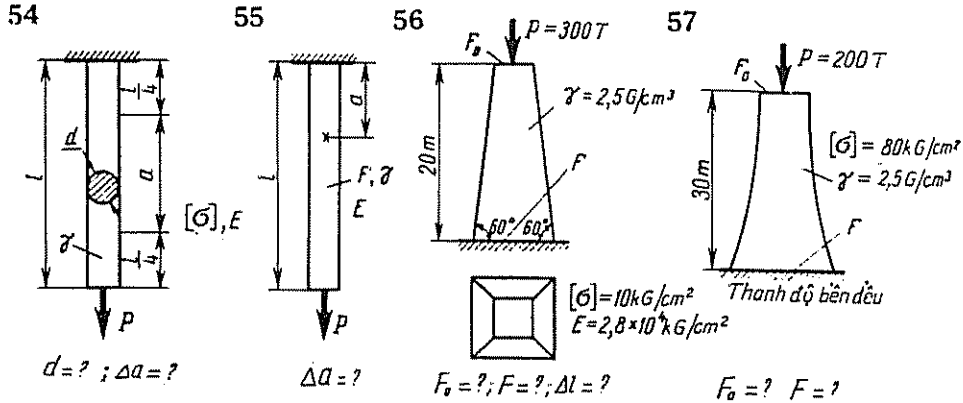
Từ các kết quả ở trên ta thấy đối với thanh thép dài 40m sự khác nhau giữa thanh hình lăng trụ, thanh hình bậc và thanh độ bền đều rất không đáng kể. Từ công thức (16) ta thấy ứng suất do trọng lượng bản thân của thanh hình lăng trụ đạt được trên 5,0% của $[\sigma]$ khi chiều dài thanh $l \geq 0,05[\sigma]/\gamma$. Nếu thanh bằng thép, và coi $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $\gamma = 8 \text{ G/cm}^3$, thì



Hình 7

$$l \geq \frac{0,05 \cdot 16 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^{-3}} = 10^4 \text{ cm} = 100 \text{ m}$$

Bài tập 54—57. Tính các đại lượng ghi trên mỗi bài.



§ 7. Hệ siêu tĩnh

Hệ siêu tĩnh là hệ mà người ta không thể tính được nội lực ở tất cả các bộ phận nếu chỉ sử dụng các điều kiện tĩnh học. Khi tính hệ siêu tĩnh, ngoài các điều kiện tĩnh học, người ta phải dùng những điều kiện chấp của chuyển vị và trình tự giải bài toán như sau.

Trước hết người ta viết các phương trình tĩnh học và định bậc siêu tĩnh của hệ, sau đó lập các điều kiện chấp của chuyển vị, tức là các quan hệ hình học giữa các biến dạng của các bộ phận của hệ. Bằng định luật Húc, người ta viết biến dạng của các bộ phận của hệ theo nội lực, và thay vào các điều kiện chấp của biến dạng. Giải những phương trình tĩnh học và phương trình chấp ta tìm được nội lực ở các bộ phận của hệ.

Để tính ứng suất do nhiệt độ, ta vẫn giữ sơ đồ tính đã nói trên. Trong các điều kiện tĩnh học chỉ có các nội lực tham gia, còn độ thay đổi chiều dài của thanh bị đốt nóng hay bị làm lạnh thì bằng tổng đại số của độ thay đổi chiều dài do nội lực và độ thay đổi chiều dài do nhiệt độ. Độ thay đổi chiều dài do nhiệt độ biến đổi tính theo công thức.

$$\Delta l = l \alpha \Delta t \quad (22)$$

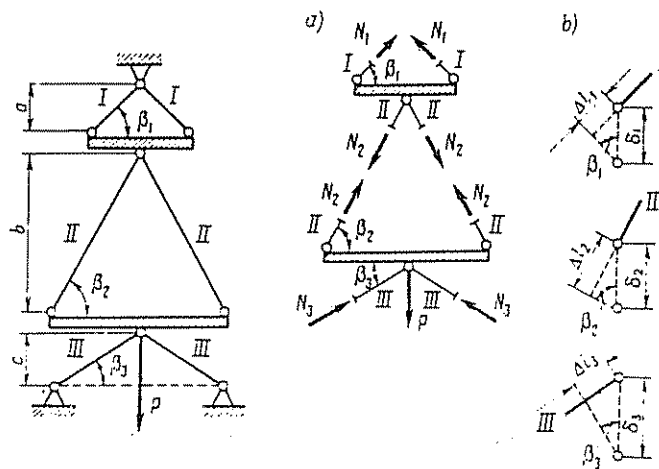
trong đó \$l\$ — chiều dài thanh, \$\alpha\$ — hệ số giãn nở bình quân của vật liệu và \$\Delta t\$ — sự biến đổi nhiệt độ.

Ứng suất lắp ghép tính từ những điều kiện tĩnh học và điều kiện chấp chuyển vị. Khi lập những điều kiện chấp chuyển vị, ta có xét đến độ sai lệch chiều dài của các bộ phận của hệ. Vì chiều dài thực tế của các bộ phận khi chế tạo khác rất ít so với chiều dài thiết kế, do đó khi tính biến dạng của các bộ phận theo định luật Húc, người ta vẫn lấy chiều dài thiết kế chứ không phải chiều dài thực tế.

Để xác định tải trọng tối đa theo phương pháp ứng suất cho phép, ta cho ứng suất lớn nhất của hệ bằng ứng suất cho phép, rồi từ đó tính được tải trọng an toàn lớn nhất.

Nếu tính hệ siêu tĩnh theo năng lực chịu tải (phương pháp phân tích dẻo), ta chỉ cần đến các điều kiện tĩnh học. Trong các điều kiện này, lực dọc đều lấy bằng tích của ứng suất cho phép với diện tích mặt cắt ngang. Vì phương pháp này dựa trên cơ sở biểu đồ kéo lý tưởng Porăng, mặt chảy coi như kéo dài vô hạn, do đó khi ứng suất các bộ phận đạt đến giới hạn chảy thì hệ bị biến dạng hình học.

Thí dụ 8. Cho : a) $E_1 = E_2 = E_3 = E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $a = 0,4\text{m}$, $b = 1,2\text{m}$; $c = 0,4\text{m}$, $\beta_1 = 45^\circ$, $\beta_2 = 60^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$, $F_1 = 12 \text{ cm}^2$; $F_2 = 14 \text{ cm}^2$, $F_3 = 16 \text{ cm}^2$ (hình 8), b) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$, $\Delta t = 40^\circ\text{C}$; c) Thanh II bị chế tạo ngắn hơn chiều dài thiết kế là $\Delta_2 = 1,2 \text{ mm}$.



Hình 8

Tính: a) P ; P_{\max} ; b) $\sigma_{I,II,III}$, c) $\sigma_{I,II,III}$.

Bài giải

a) *Tính theo ứng suất cho phép.* Từ các điều kiện tĩnh học là tổng hình chiếu các lực và nội lực lên phương thẳng đứng ở các nút (hình 8, a), ta có:

$$2N_1 \sin\beta_1 = 2N_2 \sin\beta_2;$$

$$2N_2 \sin\beta_2 + 2N_3 \sin\beta_3 = P.$$

Điều kiện chấp của chuyển vị là đẳng thức giữa chuyển vị của điểm đặt lực P do các thanh I và II dãn ra và do thanh III co lại (hình 8, b); tức là $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$.

Theo định luật Húc

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1 \sin\beta_1}; \quad \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2 \sin\beta_2}$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3 F_3 \sin\beta_3}$$

Theo hình vẽ ta có

$$l_1 = a/\sin\beta_1, \quad l_2 = b/\sin\beta_2, \quad l_3 = c/\sin\beta_3.$$

Thay các giá trị ở trên vào điều kiện chập, ta được.

$$N_1 a / (E_1 F_1 \sin^2 \beta_1) + N_2 b / (E_2 F_2 \sin^2 \beta_2) = N_3 c / (E_3 F_3 \sin^2 \beta_3)$$

Thay các giá trị bằng số:

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \sqrt{2}/2; \quad \sin \beta_2 = \sqrt{3}/2; \quad \sin \beta_3 = 1/2, \\ \text{a) } (F_1 \sin^2 \beta_1) &= 40 \cdot 4 / (12 \cdot 2) = 20/3 \text{ l/cm} \\ \text{b) } (F_2 \sin^2 \beta_2) &= 120 \cdot 4 / (14 \cdot 3) = 80/7 \text{ l/cm} \\ \text{c) } (F_3 \sin^2 \beta_3) &= 40 \cdot 4 / (16 \cdot 1) = 10 \text{ l/cm} \end{aligned}$$

Tính trong hệ SI

$$\begin{aligned} \text{a) } (F_1 \sin^2 \beta_1) &= 0,4 \cdot 4 / (12 \cdot 10^{-4} \cdot 2) = 2000/3 \text{ l/m} \\ \text{b) } (F_2 \sin^2 \beta_2) &= 1,2 \cdot 4 / (14 \cdot 10^{-4} \cdot 3) = 8000/7 \text{ l/m} \\ \text{c) } (F_3 \sin^2 \beta_3) &= 0,4 \cdot 4 / (16 \cdot 10^{-4}) = 1000 \text{ l/m} \end{aligned}$$

Thế những giá trị này vào các phương trình tĩnh học và phương trình chập biến dạng, ta được hệ ba phương trình.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} N_1 &= \sqrt{3} N_2 \\ \sqrt{3} N_2 + N_3 &= P \\ 14N_1 + 24N_2 &= 21N_3 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ này ta được

$$N_1 = \sigma_I F_1 \approx 0,332P; \quad N_2 = \sigma_{II} F_2 \approx 0,27P; \quad N_3 = \sigma_{III} F_3 \approx 0,53P.$$

Từ đó rút ra

$$\sigma_I = \frac{0,332}{12} P \approx 0,0276P; \quad \sigma_{II} = \frac{0,27}{14} P \approx 0,0193P; \quad \sigma_{III} = \frac{0,53}{16} P \approx 0,0331P.$$

Trong hệ SI

$$\begin{aligned} \sigma_I &= 0,332P / (12 \cdot 10^{-4}) \approx 276P, \quad \sigma_{II} = 0,27P / (14 \cdot 10^{-4}) \approx 193P, \\ \sigma_{III} &= 0,53P / (16 \cdot 10^{-4}) \approx 331P. \end{aligned}$$

Do ứng suất lớn nhất σ_{III} không được vượt quá ứng suất cho phép $[\sigma]$, ta rút ra lực P cho phép.

$$P \leq [\sigma] / 0,0331 = 1600 / 0,0331 \approx 48340 \text{ kG} = 48,3 \text{ T}$$

Với lực P này ứng suất ở các thanh bằng:

$$\sigma_I = 48,3 \cdot 27,6 \approx 1334 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{II} = 48,3 \cdot 19,3 \approx 932 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{III} = 1600 \text{ kG/cm}^2.$$

Trong hệ SI:

$$\begin{aligned} P \leq [\sigma] / 331 &= 157 / 331 \approx 0,475 \text{ MN} = 475 \text{ kN}, \quad \sigma_I = 0,475 \cdot 276 \approx 131 \text{ MN/m}^2; \\ \sigma_{II} &= 0,475 \cdot 193 \approx 91,7 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{III} = 157 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

b) *Tính theo năng lực chịu tải.* Hệ bị biến dạng hình học khi thanh thứ nhất và thứ ba chảy dẻo. Phương trình tĩnh học liên hệ nội lực của những thanh này có dạng:

$$2N_1 \sin \beta_1 + 2N_3 \sin \beta_3 = P.$$

Đặt $N_1 = [\sigma] \cdot F_1$ và $N_3 = [\sigma] \cdot F_3$ và thế vào phương trình trên, ta tính được lực cực đại cho phép

$$P_{\max} = 2[\sigma] (F_1 \sin\beta_1 + F_3 \sin\beta_3) = 2 \cdot 1600(12\sqrt{2}/2 + 16 \cdot 1/2) \\ \approx 52750 \text{ kG} = 52,75 \text{ T.}$$

Trong hệ SI:

$$P_{\max} = 2 \cdot 157 (12 \cdot 10^{-4} \sqrt{2}/2 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot 1/2) \approx 0,518 \text{ MN} = 518 \text{ kN}$$

Như vậy là khả năng chịu tải của hệ tính theo phương pháp năng lực chịu tải lớn hơn khả năng chịu tải tính theo phương pháp ứng suất cho phép (nếu lấy các hệ số an toàn như nhau).

$$\frac{P_{\max} - P}{P} 100\% = \\ = \frac{52,75 - 48,3}{48,3} 100\% \approx 9,1\%$$

c) *Tính ứng suất do nhiệt độ.* Từ các điều kiện tĩnh học (hình 9, a) ta có

$$2N_1 \sin\beta_1 = 2N_2 \sin\beta_2, \quad 2N_2 \sin\beta_2 = 2N_3 \sin\beta_3.$$

Do điều kiện chấp chuyển vị (điều kiện chiều cao hệ không đổi) (hình 9, b) ta có

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.$$

$$\text{Vì } \delta_1 = \Delta l_1 / \sin\beta_1; \quad \delta_2 = \Delta l_2 / \sin\beta_2; \quad \delta_3 = \Delta l_3 / \sin\beta_3$$

$$\Delta l_1 = l_1 \alpha_1 \Delta t - (N_1 l_1 / E_1 F_1); \quad \Delta l_2 = l_2 \alpha_2 \Delta t - (N_2 l_2 / E_2 F_2); \quad \Delta l_3 = l_3 \alpha_3 \Delta t - (N_3 l_3 / E_3 F_3),$$

Điều kiện chấp có dạng

$$\frac{a}{\sin^2\beta_1} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_1}{E F_1} \right) + \frac{b}{\sin^2\beta_2} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_2}{E F_2} \right) + \frac{c}{\sin^2\beta_3} \left(\alpha \Delta t - \frac{N_3}{E F_3} \right) = 0.$$

Với $N_1 = \sigma_I F_1$, $N_2 = \sigma_{II} F_2$, $N_3 = \sigma_{III} F_3$ và thay các giá trị bằng số, các điều kiện tĩnh học và điều kiện chấp thành các phương trình sau đây:

Trong hệ kỹ thuật:

$$6\sqrt{2} \sigma_I = 7\sqrt{3} \sigma_{II}$$

$$7\sqrt{3} \sigma_{II} = 8\sigma_{III}$$

$$\sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} = 5000$$

trong hệ SI:

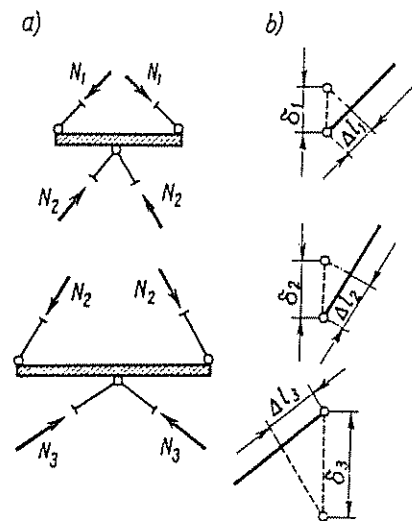
$$6\sqrt{2} \sigma_I = 7\sqrt{3} \sigma_{II}$$

$$7\sqrt{3} \sigma_{II} = 8\sigma_{III}$$

$$\sigma_I + 2\sigma_{II} + 2\sigma_{III} = 490$$

Giải hệ trên ta được:

$$\sigma_I \approx 1105 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{II} \approx 774 \text{ kG/cm}^2; \quad \sigma_{III} \approx 1172 \text{ kG/cm}^2.$$



Hình 9

Giải hệ dưới ta được:

$$\sigma_I \approx 108,5 \text{ MN/m}^2; \sigma_{II} \approx 75,9 \text{ MN/m}^2, \sigma_{III} \approx 115 \text{ MN/m}^2$$

d) Tính ứng suất lắp ghép (hình 10, a). Từ những điều kiện tĩnh học (hình 10, b)

$$2N_1 \sin \beta_1 = 2N_2 \sin \beta_2$$

$$2N_2 \sin \beta_2 = 2N_3 \sin \beta_3.$$

Từ những điều kiện chấp của chuyển vị ta được.

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\sin \beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\sin \beta_3} = \frac{\Delta_2}{\sin \beta_2}$$

hay

$$\frac{\sigma_I a}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\sigma_{II} b}{\sin^2 \beta_2} + \frac{\sigma_{III} c}{\sin^2 \beta_3} = E \frac{\Delta_2}{\sin^2 \beta_2}$$

Thay bằng số, những điều kiện trên thành những phương trình dưới đây.

Trong hệ kỹ thuật.

$$\left. \begin{aligned} 6 \sqrt{2} \sigma_I &= 7 \sqrt{3} \sigma_{II} \\ 7 \sqrt{3} \sigma_{II} &= 8 \sigma_{III} \\ \sigma_I + 2 \sigma_{II} + 2 \sigma_{III} &= 4000 \end{aligned} \right\}$$

trong hệ SI.

$$\left. \begin{aligned} 6 \sqrt{2} \sigma_I &= 7 \sqrt{3} \sigma_{II} \\ 7 \sqrt{3} \sigma_{II} &= 8 \sigma_{III} \\ \sigma_I + 2 \sigma_{II} + 2 \sigma_{III} &= 392. \end{aligned} \right\}$$

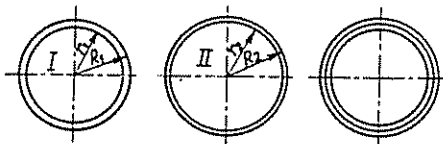
Giải hệ trên ta được:

$$\sigma_I \approx 886 \text{ kG/cm}^2; \sigma_{II} \approx 620 \text{ kG/cm}^2; \sigma_{III} \approx 939 \text{ kG/cm}^2$$

Giải hệ dưới ta được:

$$\sigma_I \approx 86,8 \text{ MN/m}^2; \sigma_{II} \approx 60,4 \text{ MN/m}^2; \sigma_{III} \approx 92 \text{ MN/m}^2$$

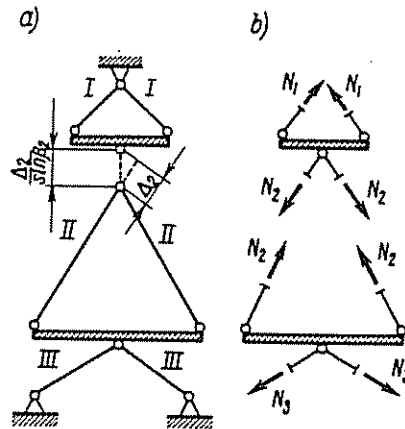
Thí dụ 9. Bằng cách đốt nóng người ta lấy một ống thép tròn II có đường kính trong $r_2 = 41,96 \text{ mm}$, đường kính ngoài $R_2 = 43 \text{ mm}$ ra ngoài ống thép tròn I có đường kính trong $r_1 = 40 \text{ mm}$, đường kính ngoài $R_1 = 42 \text{ mm}$ (hình 11).



Hình 11

Tính ứng suất σ_I trên thành ống I và σ_{II} trên thành ống II sau khi ống ngoài nguội. Môđun đàn hồi của vật liệu $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$.

Bài giải. Trong tính toán, ta thay ống bằng một vành có chiều dài bằng đơn vị (xem thí dụ 6). Khi nguội, vành II nén vào vành I bằng áp suất phân bố đều hướng tâm, còn vành I thì tác dụng vào



Hình 10

vành II một áp suất ngược lại tương tự. Áp suất p này tính từ điều kiện: độ biến đổi ΔR_1 của bán kính ngoài vành I cộng với độ biến đổi Δr_2 của bán kính trong vành II bằng độ chênh lệch ban đầu $R_1 - r_2$. Vì (xem thí dụ 6)

$$\Delta R_1 = \frac{p}{E} \cdot \frac{R_1^2}{R_1 - r_1} \quad \text{và} \quad \Delta r_2 = \frac{p}{E} \cdot \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}$$

nên điều kiện chấp của biến dạng có dạng:

$$\frac{p}{E} \left(\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2} \right) = R_1 - r_2$$

Từ đó, rút ra:

$$p = \frac{E(R_1 - r_2)}{\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,004}{\frac{4,2^2}{0,2} + \frac{4,196^2}{0,104}} \approx 31 \text{ kG/cm}^2$$

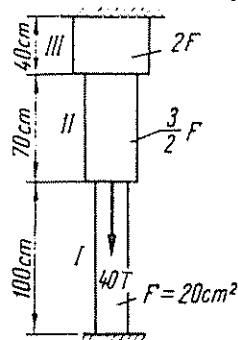
Ứng suất pháp σ_I và σ_{II} tính theo các công thức như ở thí dụ 6:

$$\sigma_I = \frac{pr_1}{R_1 - r_1} = \frac{31 \cdot 4,2}{0,2} = 651 \text{ kG/cm}^2$$

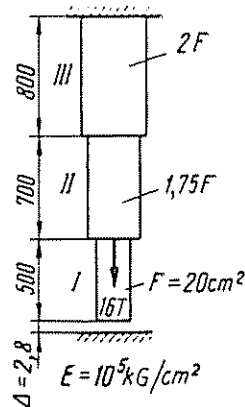
$$\sigma_{II} = \frac{pr_2}{R_2 - r_2} = \frac{31 \cdot 4,196}{0,104} = 1250 \text{ kG/cm}^2$$

Bài tập 58 — 70. Tính ứng suất pháp ở các bộ phận đàn hồi của hệ dưới tác dụng của ngoại lực. Nếu trong bài không ghi giá trị của môđun đàn hồi E thì coi môđun này ở các bộ phận của hệ đều như nhau.

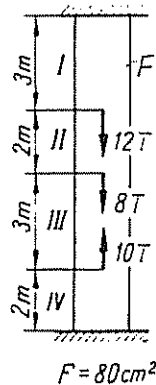
58



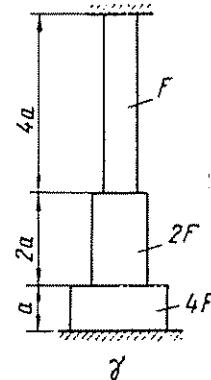
59



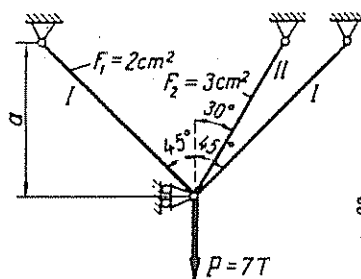
60



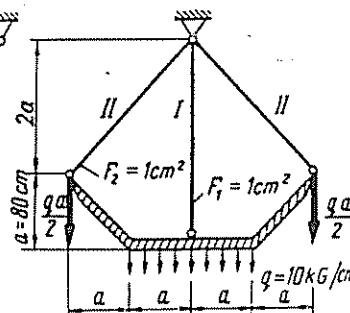
61



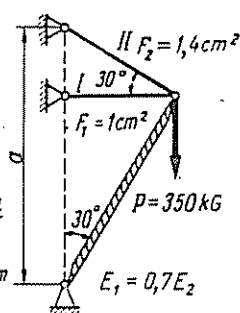
62



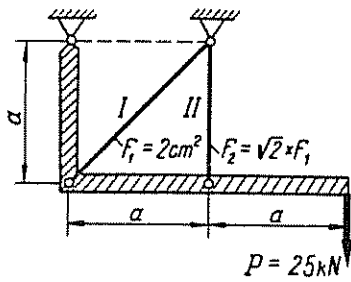
63



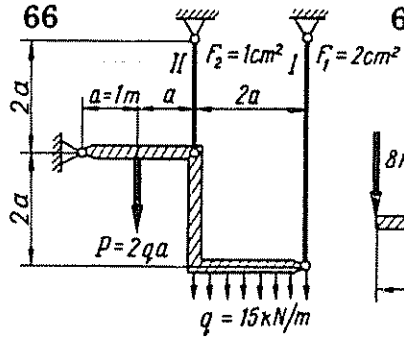
64



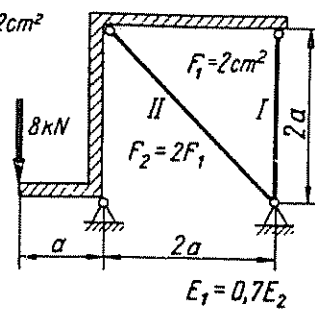
65



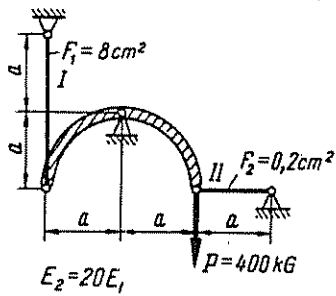
66



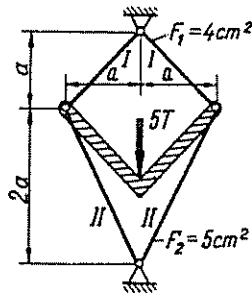
67



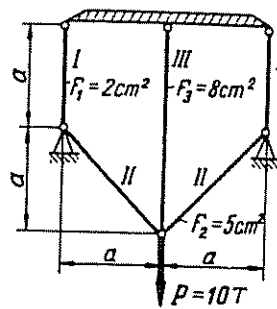
68



69

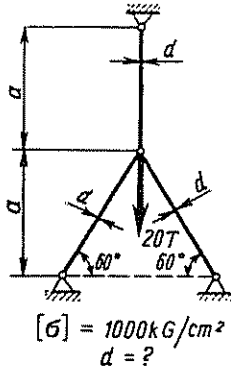


70

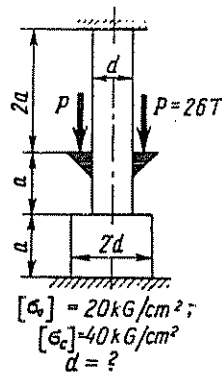


Bài tập 71 — 73. Chọn kích thước mặt cắt ngang của các bộ phận của hệ.

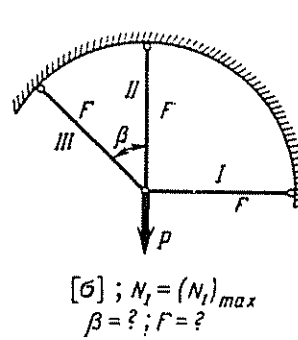
71



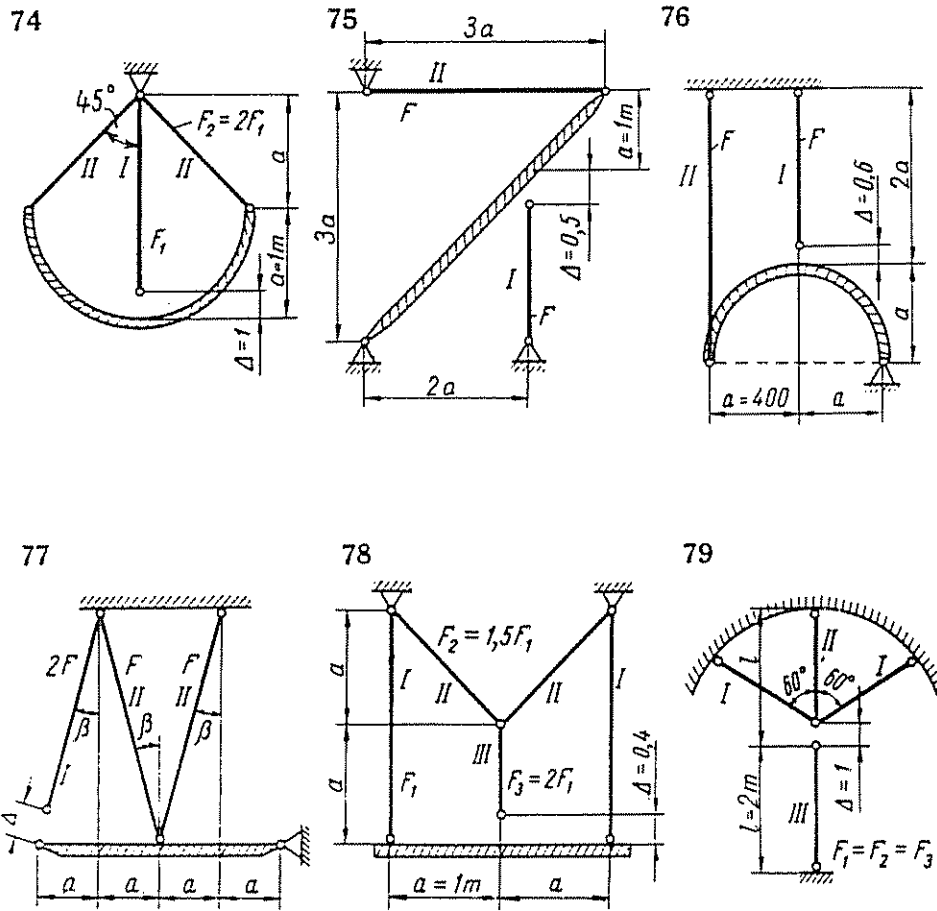
72



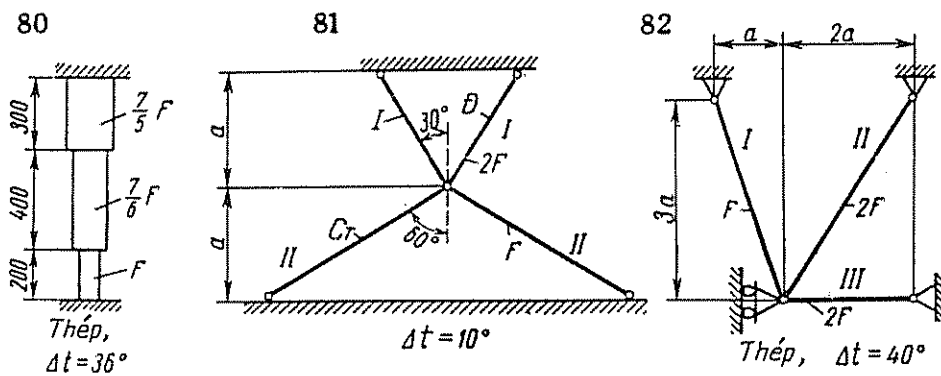
73

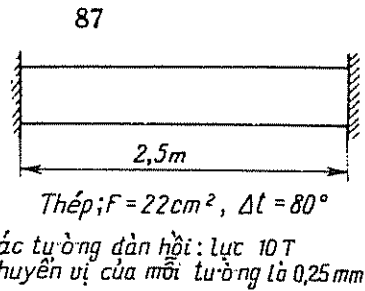
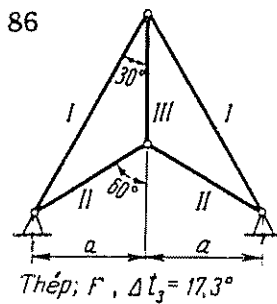
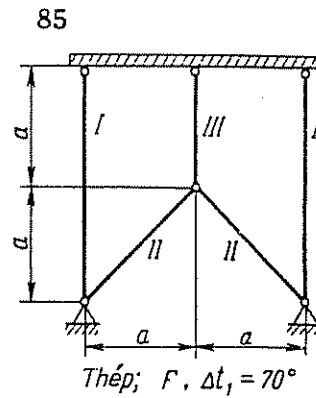
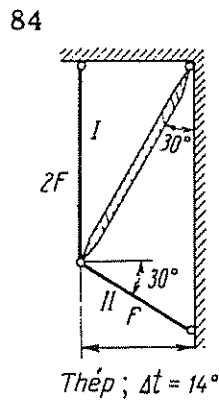
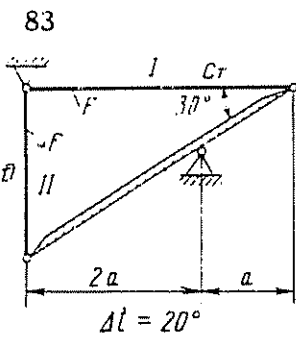


Bài tập 74 — 79. Tính ứng suất lắp ghép. Δ là độ lớn của đoạn chế tạo không chính xác. Đối với các thanh, lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$. Ở những bài 78 — 79 lấy $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$.

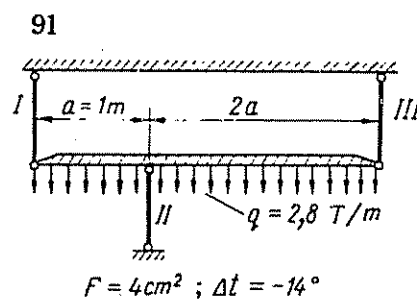
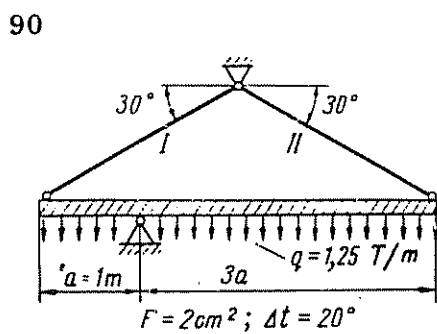
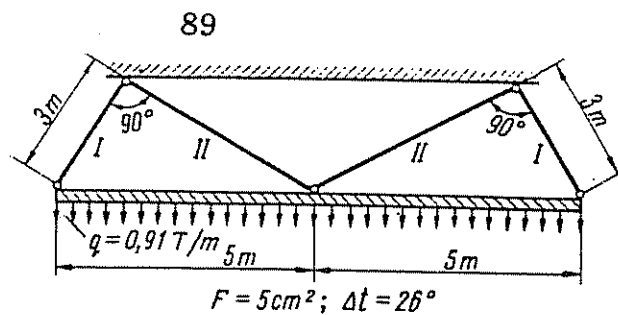
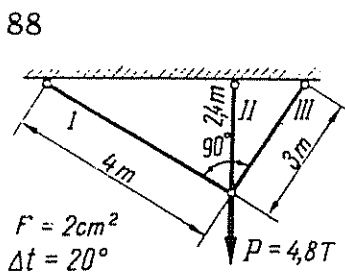


Bài tập 80 — 87. Tính ứng suất do nhiệt độ. Trong các hình Δt là độ thay đổi nhiệt độ tính theo độ Xenxint($^\circ C$); Δt_i : độ thay đổi nhiệt độ bộ phận thứ i của hệ; T: thép; Đ: đồng. Đối với thép, lấy $E = 2 \cdot 10^6 kG/cm^2$; $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$; đối với đồng $E = 1 \cdot 10^6 kG/cm^2$; $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$. Trong các bài tập 84, 86, 87 đối với thép lấy $E = 2 \cdot 10^5 MN/m^2$.



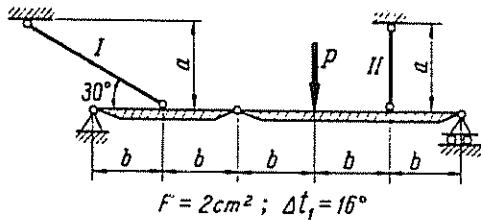


Bài tập 88 — 93. Tính ứng suất do tác dụng của ngoại lực và sự thay đổi nhiệt độ. Trong các hình $\sigma_{iP}, \sigma_{i\Delta t}$ là ứng suất của thanh thứ i do tác dụng của ngoại

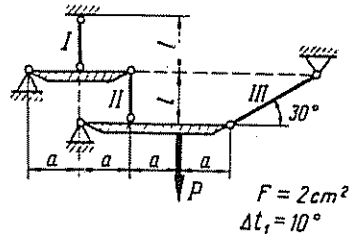


Đối với các thanh lấy $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$. Ở những bài 99, 101, lấy $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$.

100



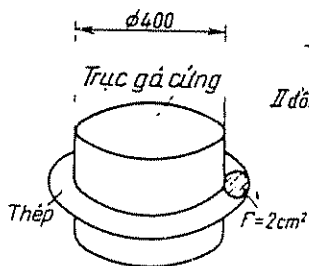
101



Bài tập 102—107. Tính những đại lượng ghi ở các bài tập về vành và ống hình trụ mỏng:

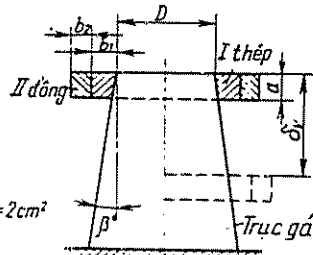
Trên các hình: p — áp suất mặt, q — tải trọng phân bố tác dụng giữa trục và vành hoặc giữa các vành với nhau. Đối với thép (T) lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$, đối với đồng (Đ) $E = 1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\alpha = 165 \cdot 10^{-7}$; đối với nhôm (N) $E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$. Ở các bài tập 106—107 tính σ từ điều kiện: khi giảm nhiệt độ khe hở Δ mất đi.

102



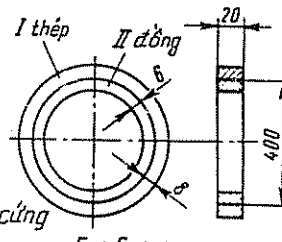
$E, \alpha; \Delta t = -40^\circ\text{C}$
 $\sigma = ?; q = ?$

103



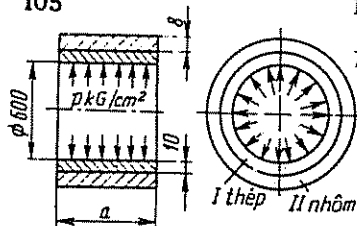
$D; E_1; b_1; E_2; b_2; a; \delta_v$
 $\sigma_1 = ?; \sigma_{II} = ?; q = ?$

104



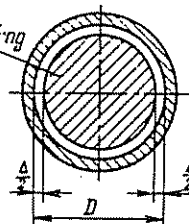
$E_1; E_2; \alpha_1; \alpha_2$
a) $\Delta t = 100^\circ\text{C}; \sigma_1 = ?; \sigma_{II} = ?; q = ?$
b) $[\sigma_1] = 1200 \text{ kG/cm}^2; [\sigma_{II}] = 800 \text{ kG/cm}^2$
 $[\Delta t^*] = ?$

105



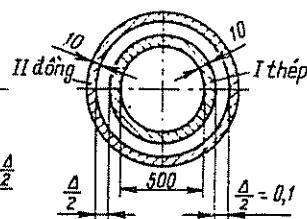
$E_1; E_2; [\sigma_I] = 1400 \text{ kG/cm}^2;$
 $[\sigma_{II}] = 1000 \text{ kG/cm}^2$
 $p = ?$

106



$D; E; \alpha; \Delta; \Delta t$
 $\sigma = ?$

107

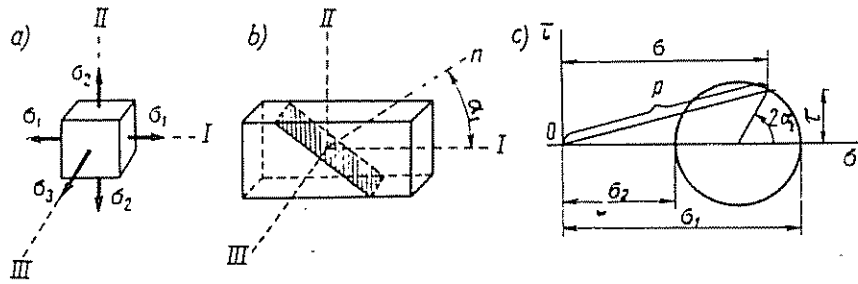


$E_1; E_2; \alpha_1; \alpha_2; \Delta t = -150^\circ\text{C}$
 $\sigma_1 = ?; \sigma_{II} = ?$

II — TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ CÁC THUYẾT BỀN

§ 8. Trạng thái ứng suất tuyến tính phẳng và khối

Trong trạng thái ứng suất khối, trên các mặt chính của phân tử tách ra ở lân cận điểm đang xét của vật thể có ba ứng suất chính khác không: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (hình 12, a)



Hình 12

Những mặt có ứng suất $\sigma_1, \sigma_2,$ và σ_3 tác dụng (không có ứng suất tiếp) gọi là *mặt chính*. Những phương (I, II, III) vuông góc với mặt chính gọi là *phương chính*.

Ứng suất pháp σ , ứng suất tiếp τ và ứng suất toàn phần p trên những mặt xiên góc xác định bằng các công thức sau đây:

Trên mặt song song với phương III (hình 12, b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

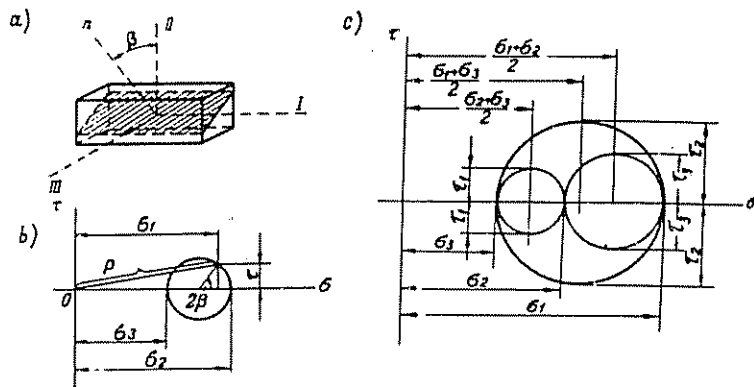
$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha_1}; \quad (24)$$

trên mặt song song với phương II (hình 13, a),

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_2, \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_2, \\ p &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_2}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

trên mặt song song với phương I (hình 14, a),

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta, \\ \tau &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta, \\ p &= \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \sin^2 \beta} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



Hình 14

Ta có thể xác định những ứng suất trên bằng vòng tròn ứng suất vẽ trên các hình 12c, 13b, 14b.

Đồ thị vẽ trên hình 14, c là tổng hợp các vòng tròn đã vẽ. Ứng suất tiếp cực trị bằng

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \pm (\sigma_2 - \sigma_3)/2, \\ \tau_2 &= \pm (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \\ \tau_3 &= \pm (\sigma_1 - \sigma_2)/2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Những ứng suất tiếp này ở trên những mặt tạo với những phương chính 45° : τ_1 trên hai mặt vuông góc với nhau và song song với phương I (hình 15, a); τ_3 trên hai mặt vuông góc với nhau và song song với phương II (hình 15, b), τ_2 trên hai mặt vuông góc với nhau và song song với phương III (hình 15, c), τ_2 là ứng suất tiếp lớn nhất về giá trị.

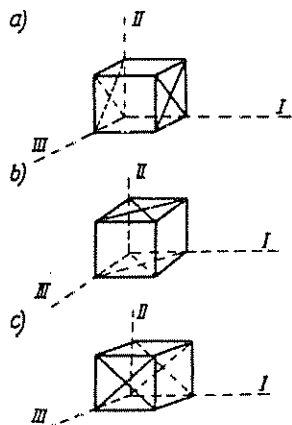
Ứng suất pháp bất diện σ_0 , ứng suất tiếp bất diện τ_0 và ứng suất toàn phần bất diện p_0 , tức là những ứng suất ở trên mặt xiên góc bằng nhau đối với ba phương chính (hình 16) tính theo các công thức sau đây:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_0 &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ p_0 &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

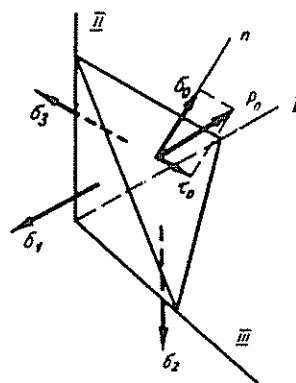
Biến dạng chính $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (biến dạng tỉ đối theo các phương chính) bằng:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Độ biến đổi thể tích tỉ đối



Hình 15



Hình 16

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (30)$$

Đại lượng $3(1-2\mu)/E = \alpha$ gọi là hệ số biến đổi thể tích của vật liệu. Nghịch đảo của đại lượng này $k = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ gọi là môđun đàn hồi thể tích.

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng.

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \quad (31)$$

Thế năng biến đổi hình dạng riêng.

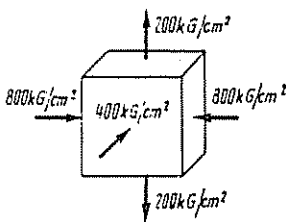
$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (32)$$

Thế năng biến đổi thể tích riêng

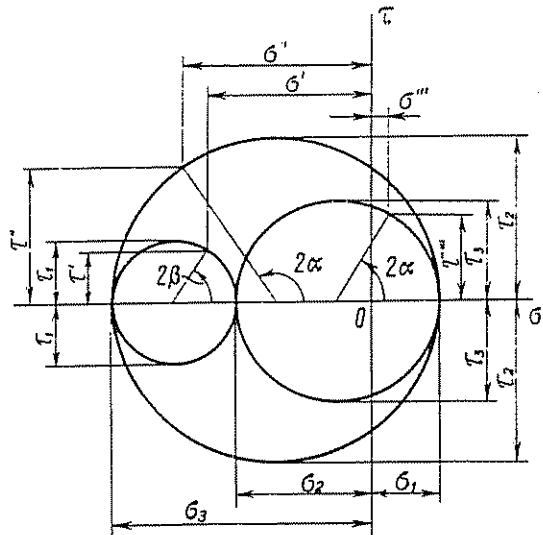
$$u_{tt} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (33)$$

Tất cả những công thức linh đối với trạng thái ứng suất khối đều có thể áp dụng đối với trạng thái ứng suất phẳng nếu cho một trong các ứng suất chính bằng không và đối với trạng thái ứng suất đường nếu cho hai trong các ứng suất chính bằng không.

Thi dụ 10. Cho trạng thái ứng suất vẽ trên hình 17. Tính $\tau_{1,2,3}$, σ' và τ' trên mặt song song với phương I với $\beta = 30^\circ$ bằng phương pháp giải tích và phương pháp đồ thị, σ'' và τ'' trên mặt song song với phương II và $\alpha = 60^\circ$, σ''' và τ''' trên mặt song song với phương III và $\alpha = 30^\circ$; p_o , σ_o , τ_o ; $\varepsilon_{1,2,3}$; $\Delta V/V$, u , u_{hd} và u_{tt} . Cho $E = 2 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\mu = 0,3$.



Hình 17



Hình 18

Bài giải: Với các ứng suất chính $\sigma_1 = 200 \text{kg/cm}^2$, $\sigma_2 = -400 \text{kg/cm}^2$ và $\sigma_3 = -800 \text{kg/cm}^2$, theo công thức (27) những ứng suất tiếp cực trị bằng:

$$\tau_1 = \pm \frac{-400 + 800}{2} = \pm 200 \text{kg/cm}^2, \quad \tau_2 = \pm \frac{200 + 800}{2} = \pm 500 \text{kg/cm}^2$$

$$\tau_3 = \pm \frac{200 + 400}{2} = \pm 300 \text{ kG/cm}^2$$

Theo công thức (26), trên mặt song song với phương I và $\beta = 30^\circ$.

$$\sigma' = -400 \cos^2 30^\circ - 800 \sin^2 30^\circ = -500 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\tau' = \frac{-400 + 800}{2} \sin 60^\circ \approx 173 \text{ kG/cm}^2$$

Theo công thức (25), trên mặt song song với phương II, và $\alpha = 60^\circ$.

$$\sigma'' = 200 \cos^2 60^\circ - 800 \sin^2 60^\circ = -550 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\tau'' = \frac{200 + 800}{2} \sin 120^\circ \approx 433 \text{ kG/cm}^2$$

Theo công thức (24), trên mặt song song với phương III và $\alpha = 30^\circ$.

$$\sigma''' = 200 \cos^2 30^\circ - 400 \sin^2 30^\circ = 50 \text{ kG/cm}^2$$

$$\tau''' = \frac{200 + 400}{2} \sin 60^\circ \approx 260 \text{ kG/cm}^2$$

Tất cả những ứng suất ở trên đều được xác định bằng phương pháp đồ thị trên vòng tròn ứng suất (hình 18).

Theo công thức (28) ta xác định được các ứng suất bất diện.

$$p_o = 100 \sqrt{\frac{4 + 16 + 64}{3}} \approx 529 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_o = \frac{200 - 400 - 800}{3} \approx -333 \text{ kG/cm}^2$$

$$\tau_o = \frac{100}{3} \sqrt{9 + 4 + 100} \approx 354 \text{ kG/cm}^2$$

Theo công thức (29) ta tìm được các biến dạng chính.

$$\epsilon_1 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (2 + 0,3 \cdot 1,2) = 2,8 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_2 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (-4 + 0,3 \cdot 6) = -1,1 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_3 = \frac{100}{2 \cdot 10^6} (-8 + 0,3 \cdot 2) = -3,7 \cdot 10^{-4}$$

Theo công thức (30), ta rút ra độ biến đổi thể tích tỉ đối.

$$\Delta V/V = 10^{-4} (2,8 - 1,1 - 3,7) = -2 \cdot 10^{-4}.$$

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng và thế năng biến đổi thể tích riêng.

$$u = 100 \cdot 10^{-4} \left(\frac{2 \cdot 2,8}{2} + \frac{4 \cdot 1,1}{2} + \frac{8 \cdot 3,7}{2} \right) = 19,8 \cdot 10^{-2} \text{ kG.cm/cm}^3$$

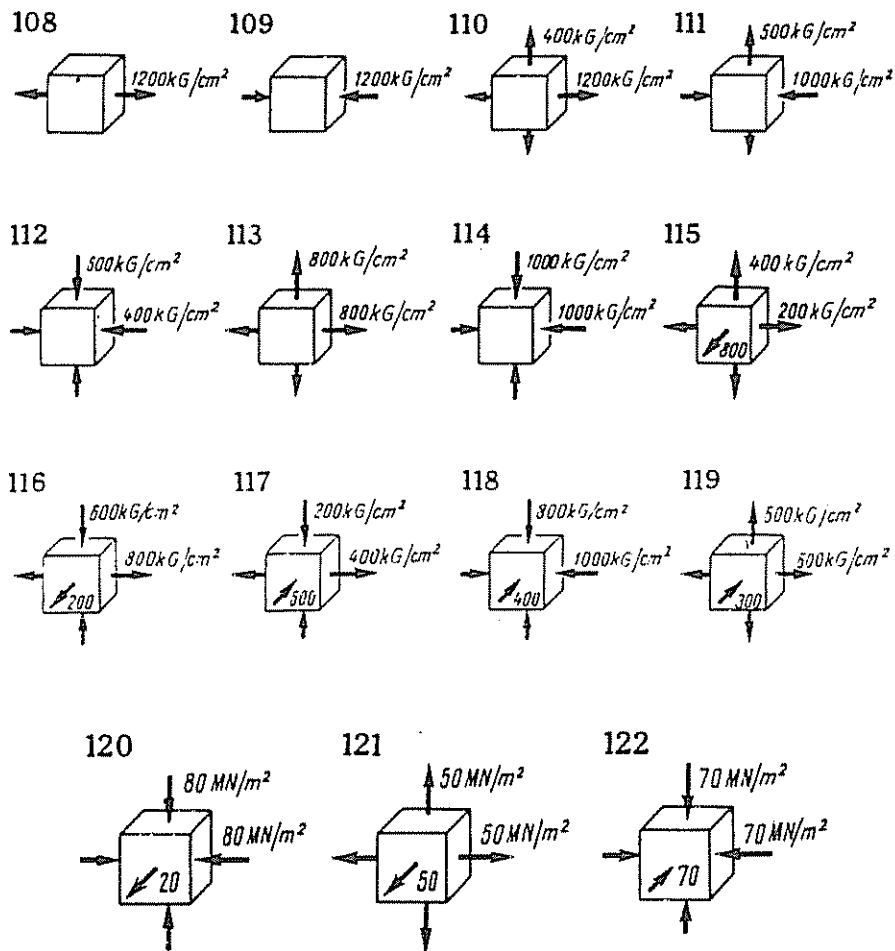
$$u_{tt} = \frac{1 - 0,6}{6 \cdot 2 \cdot 10^6} 10^4 (2 - 4 - 8)^2 \approx 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ kGcm/cm}^3$$

Thế năng biến đổi hình dạng riêng.

$$u_{hd} = u - u_{tt} = (19,8 - 3,3)10^{-2} = 16,5 \cdot 10^{-2} \text{ kGcm/cm}^3.$$

Bài tập 108 – 122. Xác định bằng giải tích và bằng đồ thị:

1. Ứng suất tiếp cực trị τ_1, τ_2, τ_3 ;
2. Ứng suất pháp σ_a và ứng suất tiếp τ_a :



a) trên mặt song song với phương I, và mặt đó có pháp tuyến tạo với phương II góc $\beta = 30^\circ$;

b) trên mặt song song với phương II, và mặt đó có pháp tuyến tạo với phương I góc $\alpha = 60^\circ$;

c) trên mặt song song với phương III, và mặt đó có pháp tuyến tạo với phương I góc $\alpha = 30^\circ$;

3. Các ứng suất bất diện: ứng suất toàn phần p_o , ứng suất pháp σ_o , ứng suất tiếp τ_o .

Bài tập 108' – 122'. Tính biến dạng tuyến tính chính $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$; độ biến đổi tỉ đối về thể tích $\Delta V/V$; thế năng biến dạng đàn hồi u , thế năng biến đổi thể tích u_{tt} và hình dạng u_{hd} của các trạng thái ứng suất ở bài tập 108 – 122. Cho $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; $\mu = 0,3$. Trong các bài 120, 121, 122 lấy $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$.

§ 9. Những lý thuyết bền và ứng suất tương đương

Trong các giả thuyết về độ bền, người ta đề ra các tiêu chuẩn xác định độ bền của phân tử vật liệu trong trạng thái ứng suất khối. Tương ứng với mỗi tiêu chuẩn người ta lập một ứng suất tương đương, đó là ứng suất kéo một phương của phân tử vật liệu có độ bền tương đương với chính phân tử ấy khi nó ở trạng thái ứng suất phức tạp. Một cách tổng quát, điều kiện kỹ thuật và độ bền của một phân tử vật liệu trong trạng thái ứng suất bất kỳ có dạng:

$$\sigma_{td} \leq [\sigma_k] \quad (34)$$

Khi ở trong trạng thái ứng suất khối, ứng suất tương đương có giá trị sau đây:

theo giả thuyết ứng suất pháp cực đại

$$\sigma_{tdI} = \sigma_1 \text{ khi } \sigma_1 > 0, \quad (35)$$

theo giả thuyết biến dạng dài cực đại

$$\sigma_{tdII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (36)$$

theo giả thuyết ứng suất tiếp cực đại

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (37)$$

theo giả thuyết thế năng biến đổi hình dạng riêng

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (38)$$

theo giả thiết trạng thái ứng suất giới hạn của Mo

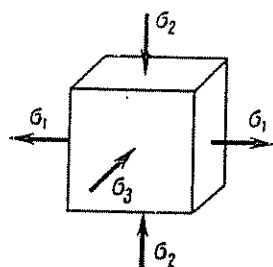
$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma \quad (39)$$

trong đó

$$\nu = [\sigma_k]/[\sigma_n] \quad (40)$$

Đôi khi trong thực tế nếu $|\sigma_3| > \sigma_1$ thì việc tính độ bền theo giả thuyết thứ nhất tính theo công thức:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_k], \quad |\sigma_3| \leq [\sigma_n]$$



Hình 19

Thí dụ 11. Có trạng thái ứng suất (hình 19) với

$$\sigma_1 = 200 \text{ kG/cm}^2; \quad \sigma_2 = -400 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_3 = -800 \text{ kG/cm}^2$$

(trong hệ SI: $\sigma_1 \approx 19,6 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_2 \approx -39,2 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_3 \approx -78,5 \text{ MN/m}^2$) và $\mu = 0,3$.

Tính ứng suất tương đương theo các lý thuyết về độ bền.

Khi tính ứng suất tương đương theo giả thuyết trạng thái ứng suất giới hạn, lấy $\nu = 0,25$.

$$\text{Bài giải: } \sigma_{tdI} = 200 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{tdII} = 200 + 0,3(400 + 800) = 560 \text{ kG/cm}^2, \quad \sigma_{tdIII} = 200 + 800 = 1000 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_{tdIV} = 100 \sqrt{\frac{1}{2} [(2 + 4)^2 + (-4 + 8)^2 + (-8 - 2)^2]} \approx 872 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_{tdV} = 200 + 0,25 \cdot 800 = 400 \text{ kG/cm}^2$$

Trong hệ SI:

$$\sigma_{dI} = 19,6 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{dII} = 19,6 + 0,3(39,2 + 78,5) \approx 54,9 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_{dIII} = 19,6 + 78,5 = 98,1 \text{ MN/m}^2.$$

$$\sigma_{dIV} = 10 \sqrt{\frac{1}{2} [(1,96 + 3,92)^2 + (-3,92 + 7,85)^2 + (-7,85 - 1,96)^2]} \approx 85,4 \text{ MN/m}^2.$$

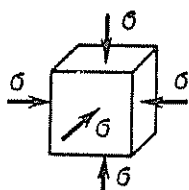
$$\sigma_{dV} = 19,6 + 0,25 \cdot 78,5 = 39,2 \text{ MN/m}^2.$$

Bài tập 108" – 122". Tính giá trị ứng suất trong đương theo các giả thuyết về độ bền của các trạng thái ứng suất của bài tập 108 – 122. Lấy $\mu = 0,3$. Đối với giả thuyết thứ 5 – giả thuyết trạng thái ứng suất giới hạn – lấy $\nu = 0,5$.

Bài tập 123 – 127. Tính các đại lượng ghi trên mỗi bài.

Ký hiệu: κ – hệ số biến đổi thể tích của vật liệu, K – mô đun đàn hồi thể tích, p – cường độ tải trọng phân bố trên bề mặt. Trong các bài tập bỏ qua ma sát. Trong bài 123 lấy đối với thép $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\mu = 0,28$, đối với đồng $E = 1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\mu = 0,34$, đối với nhôm $E = 0,7 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\mu = 0,33$.

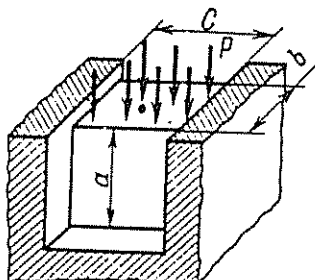
123



- a) thép
- b) đồng
- c) nhôm

$$\kappa = ?; K = ?$$

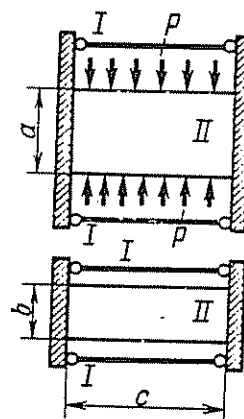
124



$$p; a; b; c; \mu; E$$

$$\sigma_{1,2,3} = ?; \Delta\sigma = ?; \Delta b = ?$$

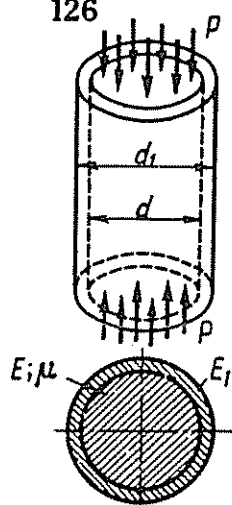
125



$$E_1; F_1; E_2; \mu_2$$

$$\sigma_I = ?; (\sigma_{1,2,3})_{II} = ?; \left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{II} = ?$$

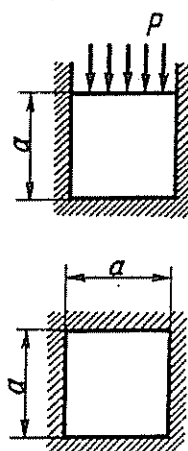
126



Trong thanh

$$\sigma_1 = ?; \sigma_2 = ?; \sigma_3 = ?$$

127



$$p; a; E; \mu$$

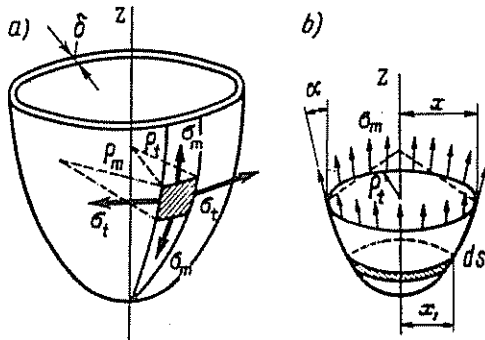
$$\sigma_{1,2,3} = ?; \Delta\sigma = ?$$

$$U = ?$$

III — BÌNH CHỨA MỎNG

§ 10. Bình chứa mỏng

Khi tính những bình chứa có dạng tròn xoay, thành mỏng và không có những chỗ chuyển tiếp và đường gãy đột ngột, chịu tác dụng của áp lực đối xứng, trục trục giao với thành bình, ta có thể áp dụng lý thuyết phi momen (lý thuyết



Hình 20

màng). Theo lý thuyết này, từ điều kiện cân bằng của phần tử cắt ra ở lân cận điểm đang xét bằng các mặt phẳng kinh tuyến và mặt phẳng vuông góc với phần tử sát nhau (hình 20a), ta rút ra phương trình (phương trình Laplace) để xác định ứng suất pháp vòng σ_t và ứng suất pháp kinh tuyến σ_m .

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta} \quad (41)$$

Trong đó ρ_t và ρ_m là bán kính

cong của mặt cắt vòng (hình vành khăn) và mặt cắt kinh tuyến của bình ở điểm đang xét; p là độ lớn áp suất trong, hàm của tọa độ z , và δ là bề dày thành bình

Từ điều kiện cân bằng của phần bình cắt ra bằng mặt vuông góc với kinh tuyến ở vị trí điểm đang xét (hình 20, b) ta được phương trình thứ hai

$$\sigma_m \delta x \cos \alpha = Z. \quad (42)$$

trong đó α là góc giữa trục z và tiếp tuyến với kinh tuyến tại điểm đang xét, x là bán kính vòng tròn của mặt cắt vành khăn cũng ở điểm đó, và

$$Z = \int_0^x p x_1 dx_1. \quad (43)$$

$2\pi Z$ là tổng hình chiếu trên trục z của những lực tác dụng vào phần bình cắt ra, ở đây x_1 là bán kính chạy của vòng tròn mặt cắt vành khăn của bình.

Nghiệm của các phương trình (41) và (42) cho giá trị của các ứng suất σ_t và σ_m :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p \rho_t}{\delta} - \frac{Z}{\delta \rho_m \cos^2 \alpha}, \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta \rho_t \cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Các trường hợp đặc biệt:

1. $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \rho$ (bình có đường sinh thẳng):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= p/\delta \\ \sigma_m &= Z/\delta \rho \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

2. $\rho_t = \rho_m = \rho$ (bình hình cầu)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho}{\delta} - \frac{Z}{\delta\rho\cos^2\alpha} \\ \sigma_m &= \frac{Z}{\delta\rho\cos^2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

a) $p = \text{const}$ (áp suất khí hoặc hơi nước):

$$Z = \frac{px^2}{2} = \frac{1}{2} p\rho^2\cos^2\alpha \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{p\rho_t}{2\delta} \left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m} \right) \\ \sigma_m &= p\rho_t/2\delta \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Khi $\rho_m = \infty$ và $\rho_t = \rho$, $\sigma_t = 2\sigma_m = p\rho/\delta$ (49)

Khi $\rho_t = \rho_m = \rho$, $\sigma_t = \sigma_m = p\rho/2\delta$ (50)

b) $p = \gamma(h - z)$ (áp suất chất lỏng, hình 21), trong đó γ : trọng lượng riêng chất lỏng, h : chiều cao chất lỏng trong bình, z : tung độ chạy.

$$Z = \gamma \left(\frac{h\rho_t^2\cos^2\alpha}{2} - Z_1 \right) \quad (51)$$

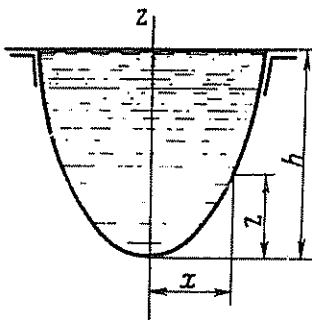
Đại lượng:

$$Z_1 = \int_0^x zx dx \quad (52)$$

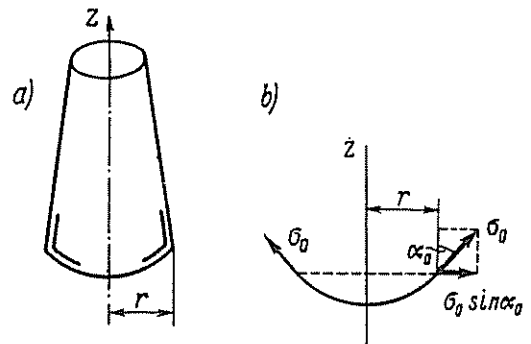
Tính được một cách dễ dàng nếu ta biết phương trình đường sinh của bình $z = z(x)$.

Trên mặt trong của thành bình có ứng suất chính thứ ba $\sigma_r = -p$. Trong hầu hết các trường hợp, ứng suất này bé so với σ_t và σ_m , do đó trong tính toán về độ bền có thể bỏ qua.

Nếu thành bình có đường gãy đột ngột (hình 22, a) thì ở mặt cắt chuyển tiếp phát sinh nội lực biên. Nội lực này lớn có thể làm tăng ứng suất mà lý thuyết phi mômen không xét đến. Để giảm bớt ảnh hưởng của ứng suất này, thường ở chỗ chuyển tiếp người ta tăng cường bằng vành đai.



Hình 21



Hình 22

Nếu ứng suất kinh tuyến ở chỗ chuyển tiếp $\sigma_m = \sigma_0$ (hình 22b) thì lực phân bố tác dụng vào vành đai.

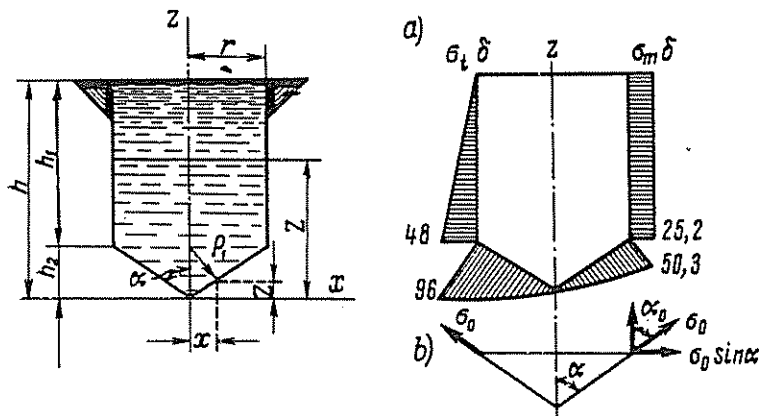
$$q_0 = \sigma_0 \delta \sin \alpha_0 \quad (53)$$

Diện tích cần thiết của vành đai bán kính r có thể tính theo công thức:

$$F = q_0 r / [\sigma] = (\sigma_0 \delta r \sin \alpha_0) / [\sigma] \quad (54)$$

Thí dụ 12. Cho $\gamma = 1,2 \text{G/cm}^3$, $h_1 = 4 \text{m}$, $r = 1 \text{m}$, $\alpha = 60^\circ$, $[\sigma] = 1000 \text{kG/cm}^2$ hình 23).

Tính δ , F .



Hình 23

Bài giải. Đối với phần hình nón của bình ($0 \leq z \leq h_2$)

$$\rho_m = \infty, \rho_t = \rho = x / \cos \alpha; \quad z = x \cot \alpha;$$

$$p = \gamma(h - z) = \gamma(h - x \cot \alpha).$$

Theo công thức (52)

$$Z_1 = \cot \alpha \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \cot \alpha.$$

Theo công thức (51) trọng lượng của chất lỏng chứa trong phần bình cắt ra (đã chia cho 2π).

$$Z = \gamma \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cot \alpha \right) = \gamma x^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \cot \alpha \right)$$

Theo công thức (45) ứng suất pháp vòng σ_t và ứng suất pháp kinh tuyến σ_m tại các điểm trên phần bình hình nón xác định theo tọa độ x bằng:

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - x \cot \alpha)x}{\delta \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} - \frac{x}{\sin \alpha} \right)$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma x^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{3} \cot \alpha \right)}{\delta x \cos \alpha} = \frac{\gamma x}{\delta} \left(\frac{h}{2 \cos \alpha} - \frac{x}{3 \sin \alpha} \right)$$

Vi :

$$h = h_1 + r \cot \alpha \text{ và } h/\cos \alpha = (h_1/\cos \alpha) + (r/\sin \alpha)$$

Do đó:

$$\sigma_{t_{x=0}} = 0, \sigma_{m_{x=0}} = 0; \sigma_{t_{x=r}} = \frac{\gamma r}{\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} - \frac{r}{\sin \alpha} \right) = \frac{\gamma r h_1}{\delta \cos \alpha}$$

$$r_{x=r} = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{r}{3 \sin \alpha} \right)$$

Thay các giá trị bằng số:

$$t_{x=r} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2}{\delta} = \frac{96}{\delta} \text{ kG/cm}$$

$$m_{x=r} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta} \left(\frac{40 \cdot 10^2 \cdot 2}{1} + \frac{10^2 \cdot 2}{3\sqrt{3}} \right) \approx \frac{50,3}{\delta} \text{ kG/cm}^2$$

Đối với phần bình hình trụ ($h_2 \leq z \leq h$), $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \rho = r$, $p = \gamma(h - z)$; $\alpha = 0$ và z bằng z của phần hình nón.

$$\text{Khi } r = r, \text{ tức là } Z = Z_{x=r} = \gamma r^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{r}{3} \cot \alpha \right)$$

Theo công thức (43) ứng suất pháp vòng σ_t và ứng suất pháp kinh tuyến σ_m trên phần bình hình trụ bằng:

$$\sigma_t = \frac{\gamma r}{\delta} (h - z)$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(h - \frac{2}{3} r \cot \alpha \right) = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(h_1 + \frac{h_2}{3} \right) = \frac{\gamma r}{2\delta} \left(h_1 + \frac{r}{3} \cot \alpha \right)$$

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = \frac{\gamma r}{\delta} h_1, \sigma_{t_{z=h}} = 0, \sigma_m = \text{const.}$$

Thay giá trị bằng số:

$$\sigma_{t_{z=h_2}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2 / \delta = 48 / \delta \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{2\delta} \left(4 \cdot 10^2 + \frac{10^2}{3} \cdot 0,577 \right) \approx \frac{25,2}{\delta} \text{ kG/cm}^2$$

Biểu đồ ứng suất σ_t và σ_m vẽ trên hình 23, a. Mặt cắt nguy hiểm ở chỗ cao nhất của phần bình hình nón, ở đây $\sigma_t = 96/\delta$ và $\sigma_m = 50,3/\delta$.

Áp dụng giả thuyết về độ bền thứ ba, ta xác định được bề dày δ của thành bình. Coi $\sigma_r = 0$, ta có phương trình $\sigma_t = 96/\delta = [\sigma]$

Từ đó rút ra.

$$\delta = 96/[\sigma] = 96/1000 = 0,096 \text{ cm} = 0,96 \text{ mm.}$$

Ta lấy $\delta = 1 \text{ mm}$.

Ở mặt cắt chuyển tiếp từ phần hình nón sang phần hình trụ (hình 23, b)

$$\sigma_o = \sigma_m = 50,3 \text{ kG/cm}^2.$$

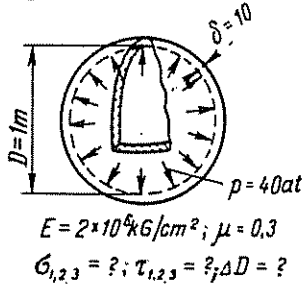
Vi $\alpha_o = \alpha = 60^\circ$, nên diện tích mặt cắt đai tính theo công thức (52) bằng:

$$F = 503 \cdot 0,1 \cdot 10^2 \cdot 0,87/10^3 \approx 4,4\text{cm}^2.$$

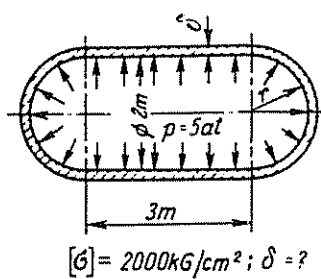
Trong thực tế các kích thước δ và F tìm được ở trên còn phải được xét thêm về mặt cấu tạo và ổn định của đai.

Bài tập 128 — 133. Tính các đại lượng ghi trên hình vẽ. Ký hiệu: p — áp suất khí bên trong, γ — trọng lượng riêng của chất lỏng, δ — bề dày thành bình (đơn vị tính theo lý thuyết thứ ba, δ_{IV} tính theo lý thuyết thứ tư), F_d — diện tích mặt

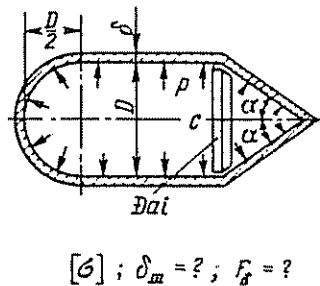
128



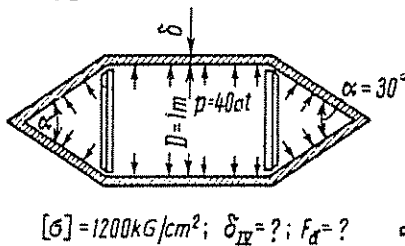
129



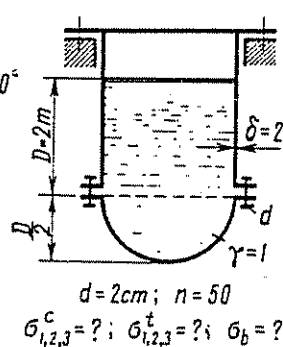
130



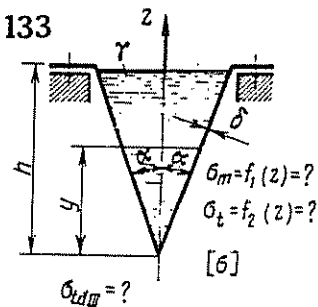
131



132



133



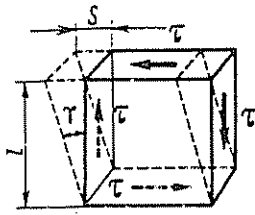
cắt ngang vành đai, d — đường kính một đỉnh bulông, n — số đỉnh bulông, $\sigma_{1,2,3}^c$ — ứng suất chính tại điểm nguy hiểm của phần bình hình cầu, $\sigma_{1,2,3}^t$ — như trên của phần bình hình trụ.

Tính theo lý thuyết phi mômen. Ở bài tập 133, nghiên cứu và vẽ biểu đồ biến thiên của ứng suất kinh tuyến (σ_m) và ứng suất vuông góc với nó (σ_t), ứng suất tương đương tính theo lý thuyết thứ ba σ_{dIII} theo tọa độ z . Viết điều kiện về độ bền.

IV — TRƯỢT

§ II. Ứng suất và biến dạng trượt

Trạng thái ứng suất trong đó ở các mặt bên của phần tử cắt ra chỉ có ứng suất tiếp tác dụng gọi là *sự trượt thuần túy*. Khi bị trượt thuần túy hai mặt đối



Hình 24

tiếp cực trị đôi một bằng nhau và ngược chiều τ_1, τ_2, τ_3) tính theo định luật Húc như sau:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \tau_1/G \\ \gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \tau_2/G \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \tau_3/G \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

trong đó

$$G = E/2(1 + \mu) \quad (57)$$

là môđun đàn hồ trượt hay môđun đàn hồi tiếp tuyến của vật liệu.

Độ trượt tỉ đối γ_0 sinh ra dưới tác dụng của ứng suất tiếp bất diện τ_0 gọi là độ trượt bất diện:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G} = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \quad (58)$$

Trong trạng thái ứng suất trượt thuần túy (hình 25) trên mặt xiên góc 45° có các ứng suất chính:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad (59)$$

biến dạng chính:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \varepsilon &= \frac{1 + \mu}{E} \tau, \\ \varepsilon_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

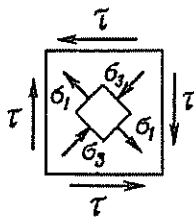
biến dạng góc

$$\gamma = 2\varepsilon. \quad (61)$$

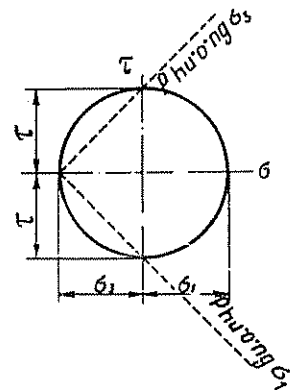
Vòng tròn ứng suất có tâm trùng với gốc tọa độ (hình 26). Nếu ta coi ứng suất tiếp phân bố đều trên mặt tác dụng F (hình 27) thì nội lực tiếp tuyến.

$$Q = \tau F \quad (62)$$

Kết hợp với các công thức (55) và (56), định luật Húc về trượt có thể viết dưới dạng sau đây:



Hình 25



Hình 26

$$s = Ql/GF \quad (63)$$

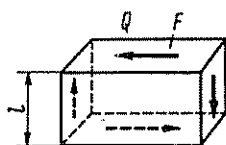
Thế năng biến dạng đàn hồi trong trượt tinh theo công thức:

$$U = \frac{Q^2 l}{2GF} = \frac{s^2 GF}{2l} = \frac{Qs}{2} \quad (64)$$

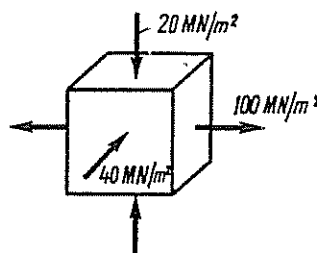
Thế năng riêng trong trượt thuần túy.

$$u = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (65)$$

Thí dụ 13. Tính $\gamma_{1,2,3}$ và γ_o đối với trạng thái ứng suất vẽ trên hình 28. Cho $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ và $\mu = 0,25$.



Hình 27



Hình 28

Bài giải: Những ứng suất chính của trạng thái ứng suất gồm $\sigma_1 = 100 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_2 = -20 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_3 = -40 \text{ MN/m}^2$.

Theo công thức (27), những ứng suất tiếp cực trị

$$\tau_1 = \frac{-20 + 40}{2} = 10 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_2 = \frac{100 + 40}{2} = 70 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_3 = \frac{100 + 20}{2} = 60 \text{ MN/m}^2$$

Theo công thức (57), môđun đàn hồi trượt.

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1 + 0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$$

Từ các biểu thức (56), ta tính được các biến dạng góc

$$\gamma_1 = \frac{10}{8 \cdot 10^4} = 1,25 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_2 = \frac{70}{8 \cdot 10^4} = 8,75 \cdot 10^{-4}$$

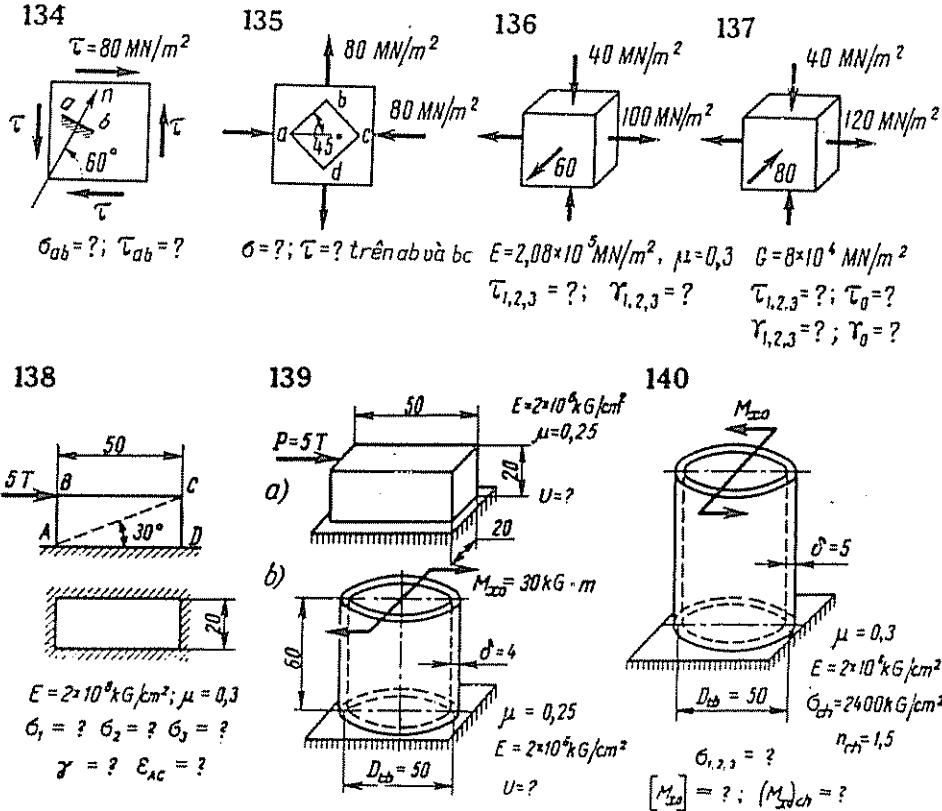
$$\gamma_3 = \frac{60}{8 \cdot 10^4} = 7,5 \cdot 10^{-4}$$

Theo công thức (58) độ trượt bất diện bằng:

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \sqrt{1,25^2 + 8,75^2 + 7,5^2} \approx 7,72 \cdot 10^{-4}$$

Bài tập 134 – 140. Tính các đại lượng ghi trên các hình vẽ.

Ký hiệu: σ_{ch} — giới hạn chảy, n_{ch} — hệ số an toàn, $(M_{xo})_{ch}$ — giá trị mômen tương ứng với trạng thái chảy của vật liệu. Bỏ qua biến dạng uốn và coi ứng suất tiếp phân bố đều trên bề dày ống.



V — TÍNH CÁC LIÊN KẾT ĐƠN GIẢN NHẤT CỦA CÁC BỘ PHẬN CÔNG TRÌNH

§12. Khái niệm cơ bản và công thức tính toán.

Trên các mặt khác nhau của các loại liên kết (bulông, chốt, then, nêm, đinh tán, hàn, mộng gỗ v.v.) có hiện tượng kéo, nén, trượt và đập.

Nếu hiện tượng kéo và nén thường phát sinh ở dạng thuần túy thì hiện tượng trượt thuần túy thường lại không gặp trong thực tế. Sự trượt luôn luôn đi kèm hoặc biến dạng uốn, hoặc biến dạng kéo hay nén, vì vậy trên mặt phẳng trượt ngoài ứng suất tiếp còn có ứng suất pháp tác dụng. Tuy nhiên vì ứng suất pháp nhỏ hơn nhiều so với ứng suất tiếp, do đó trong lĩnh toán kỹ thuật người ta chỉ tính về trượt (còn gọi là cắt đối với cấu kiện kim loại, và trượt vỡ đối với cấu kiện gỗ). Thường người ta coi ứng suất tiếp phân bố đều trên mặt bị trượt (F_t). Giả thiết gần đúng này được bù trong giá trị của ứng suất tiếp cho phép $[\tau]$.

Hiện tượng đập là hiện tượng nén cục bộ giữa các bộ phận với nhau. Vì không biết chính xác quy luật phân bố áp lực trên mặt bị đập nên trong tính toán kỹ thuật người ta quy ước áp lực này phân bố đều không phải trên mặt bị đập mà trên hình chiếu của mặt bị đập (F_a) lên mặt phẳng vuông góc với phương lực, đập P_a . Giả thiết gần đúng này cũng được bù trong giá trị của ứng suất cho phép về đập $[\sigma_a]$.

Để sử dụng vật liệu một cách hợp lý, các liên kết phải tính từ điều kiện độ bền đều của các bộ phận trong liên kết. Khi đó người ta sử dụng các công thức tính toán sau đây :

đối với kéo hoặc nén

$$F \geq N/[\sigma] \quad (66)$$

đối với cắt hoặc trượt

$$F_t \geq Q/[\tau] \quad (67)$$

đối với đập

$$F_a \geq P_a/[\sigma_a] \quad (68)$$

Diện tích viết trong công thức tính là diện tích đúng, tức là diện tích đã trừ đi những chỗ giảm yếu do các lỗ, rãnh tiện... Nếu ta tính một diện tích nào đó theo cả cắt và đập thì ta sẽ lấy diện tích lớn trong hai kết quả thu được.

Trong thực tế không bao giờ có thể thỏa mãn được điều kiện bền đều của các bộ phận trong liên kết. Vì kích thước liên kết thường còn do các yêu cầu cấu tạo quyết định nữa. Những điều này được trình bày trong các giáo trình chi tiết máy, kết cấu kim loại và kết cấu gỗ.

Thí dụ 14. Cho $P=4T$; $[\sigma]=1600\text{kG/cm}^2$; $[\tau]=1200\text{kG/cm}^2$; $[\sigma_a]=3200\text{kG/cm}^2$ (hình 29,a).

Tính d , δ , a , b .

Bài giải. Đường kính d của chốt được tính từ điều kiện bền trượt (hình 29, b):

$$\begin{aligned} 2 \frac{\pi d^2}{4} &\geq \frac{P}{[\tau]}, \quad d \geq \sqrt{\frac{2P}{\pi[\tau]}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12 \cdot 10^2}} \approx 1,46\text{cm} \end{aligned}$$

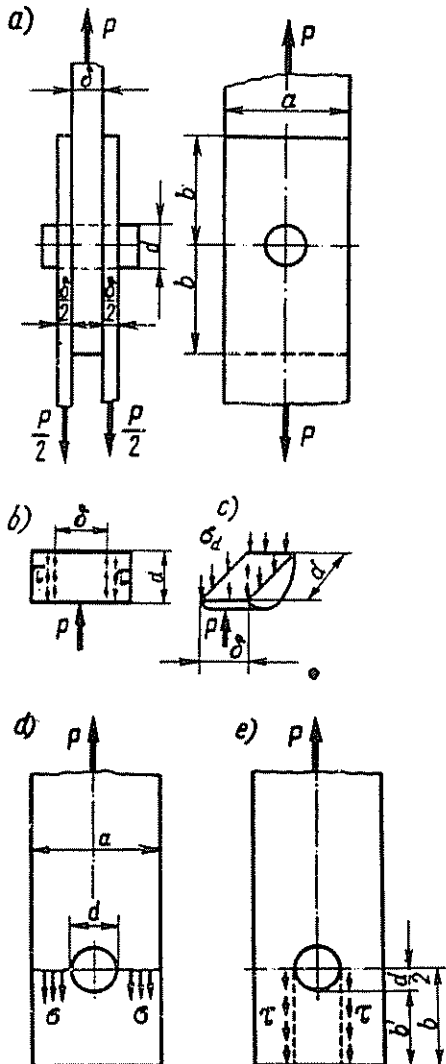
Bề dày δ của tấm được xác định từ điều kiện bền đập (hình 29c).

$$\delta_a \geq \frac{P}{[\sigma_a]}$$

$$\delta \geq \frac{P}{d[\sigma_a]} = \frac{4 \cdot 10^3}{1,46 \cdot 32 \cdot 10^2} \approx 0,86\text{cm}$$

Bề rộng a của tấm tính từ điều kiện bền đứt (hình 29, d)

$$\begin{aligned} (a - d)\delta &\geq \frac{P}{[\sigma]} ; \quad a = \frac{P}{\delta[\sigma]} + d = \\ &= \frac{4 \cdot 10^3}{0,86 \cdot 16 \cdot 10^2} + 1,46 \approx 2,92\text{cm}. \end{aligned}$$



Hình 29

Chiều dài b đầu tấm tính từ điều kiện bền trượt (H. 29, d)

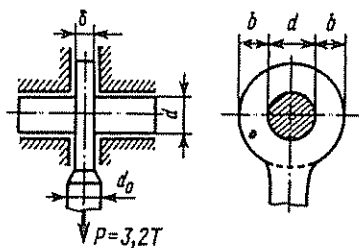
$$2b'\delta \geq \frac{P}{[\tau]} ; b' = \frac{P}{2\delta[\tau]} = \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,86 \cdot 12 \cdot 10^2} \approx 1,94\text{cm.}$$

Từ đó rút ra:

$$b = b' + d/2 = 1,94 + 0,73 = 2,67\text{cm.}$$

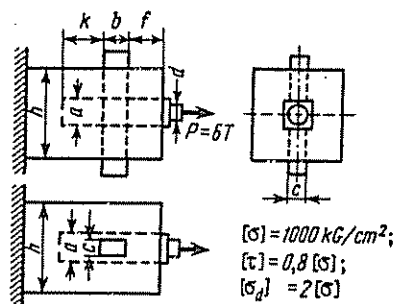
Bài tập 141 – 149. Tính tất cả các kích thước của những bộ phận của liên kết vẽ ở các hình dưới.

141



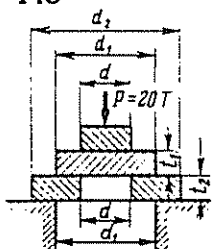
$$[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2; [\tau] = 0,7[\sigma]; [\sigma_d] = 2[\sigma]$$

142



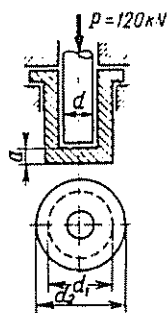
$$[\sigma] = 1000 \text{ kg/cm}^2; [\tau] = 0,8[\sigma]; [\sigma_d] = 2[\sigma]$$

143

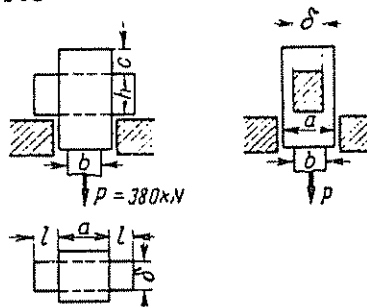


$$[\tau] = 800 \text{ kg/cm}^2; [\sigma_d] = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

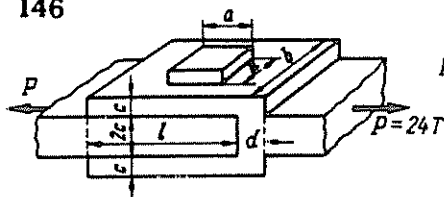
144



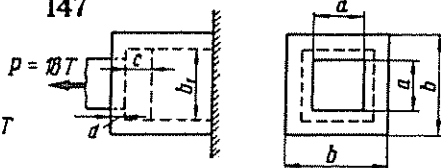
145



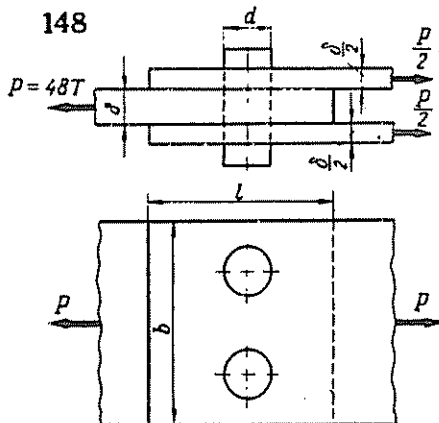
146



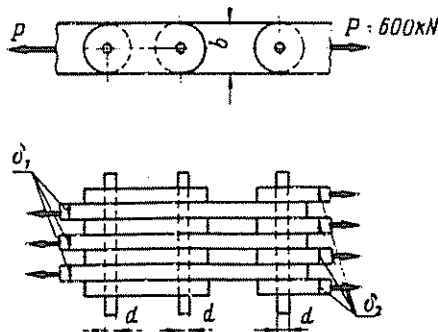
147



148



149



Khi tính coi các bộ phận có độ bền đều. Trong các bài 146 — 148 lấy $[\sigma] = 1600\text{kG/cm}^2$; $[\tau] = 1200\text{kG/cm}^2$; $[\sigma_d] = 3200\text{kG/cm}^2$. Trong các bài 144, 145, 149 lấy $[\sigma] = 160\text{MN/m}^2$; $[\tau] = 120\text{MN/m}^2$; $[\sigma_d] = 320\text{MN/m}^2$.

VI — ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

§13. Diện tích và Momen tĩnh của mặt cắt ngang

Ta gọi momen tĩnh của mặt cắt ngang đối với trục z và trục y (h. 30) là các tích phân xác định có dạng:

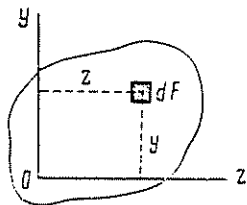
$$S_z = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F z dF \quad (69)$$

Trong đó F — diện tích mặt cắt; dF — phần tử diện tích; z và y — tọa độ của phần tử diện tích đó.

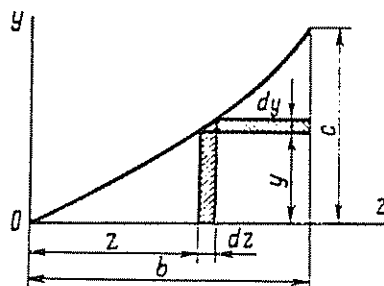
Tọa độ trọng tâm z_c và y_c của mặt cắt được xác định bằng tỉ số:

$$z_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} \quad (70)$$

Mômen tĩnh của diện tích mặt cắt đối với trục trung tâm bằng không



Hình 30



Hình 31

Thí dụ 15. Xác định tọa độ trọng tâm mặt cắt của hình giới hạn bởi hai đoạn thẳng b, c và đường parabol $y = az^n$ (h. 31).

Bài giải: Ta lấy phần tử diện tích $dF = ydz = az^n dz$. Lúc đó diện tích mặt cắt:

$$F = \int_F dF = a \int_0^b z^n dz = \frac{ab^{n+1}}{n+1} = \frac{bc}{n+1}$$

Mômen tĩnh của diện tích F đối với trục y được xác định theo công thức (69):

$$S = \int_F z dF = a \int_0^b z^{n+1} dz = \frac{ab^{n+2}}{n+2} = \frac{b^2 c}{n+2}$$

Để xác định mômen tĩnh của diện tích mặt cắt đối với trục z ta lấy phần tử diện tích

$$dF = (b - z)dy = an(b - z)z^{n-1}dz.$$

Khi đó, theo công thức (69)

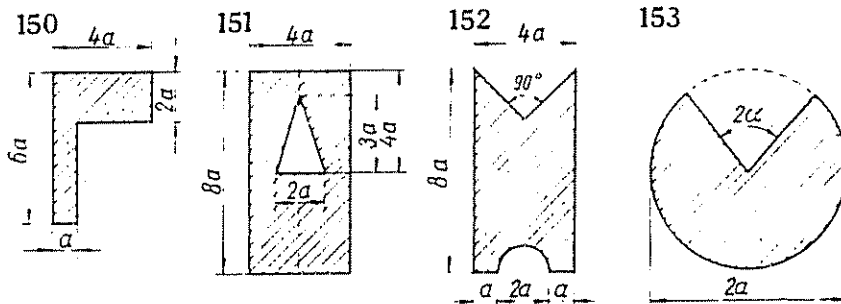
$$\begin{aligned} S_z &= \int_F y dF = a^2 n \int_0^b z^{2n-1} (b - z) dz = a^2 n b^{2n+1} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{a^2 b^{2n+1}}{2(2n+1)} = \frac{bc^2}{2(2n+1)} \end{aligned}$$

Từ biểu thức (70) của tọa độ trọng tâm mặt cắt ta được các giá trị:

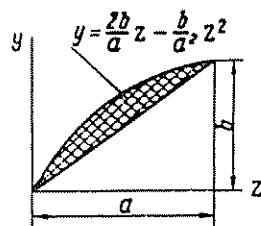
$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{b^2 c (n+1)}{(n+2) bc} = \frac{n+1}{n+2} b.$$

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{bc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{bc} = \frac{n+1}{2(2n+1)} c.$$

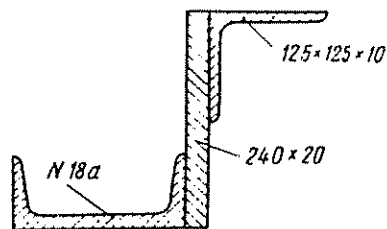
Bài tập 150-155. Xác định vị trí trọng tâm của các mặt cắt cho trên hình vẽ



154



155



§14. Mômen quán tính của mặt cắt.

— Các tích phân xác định dạng

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \int_F y^2 dF \\ I_y &= \int_F z^2 dF \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

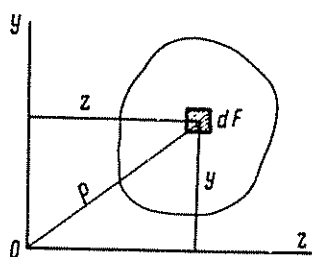
được gọi là *mômen quán tính trực*, *mômen quán tính đường* hoặc *mômen quán tính tích đạo* của mặt cắt đối với trục z và trục y ;

$$I_{yz} = \int_F yz dF \quad (72)$$

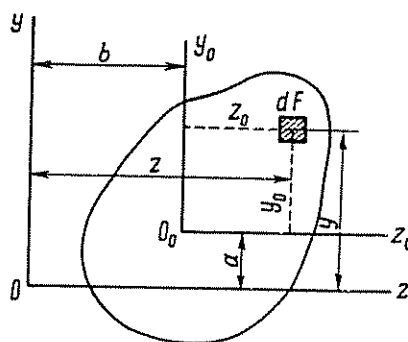
gọi là *mômen quán tính ly tâm* của mặt cắt đối với hệ trục vuông góc z và y ;

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = I_y + I_z \quad (73)$$

gọi là *mômen quán tính độc cực* của mặt cắt đối với gốc tọa độ O .



Hình 32



Hình 33

Mômen quán tính đối với hệ trục song song mà một trong những hệ trục đó (z_0, y_0) là hệ trục trung tâm (h. 33) có quan hệ như sau :

$$\left. \begin{aligned} I_z &= I_{z_0} + a^2 F \\ I_y &= I_{y_0} + b^2 F \\ I_{yz} &= I_{y_0 z_0} + ab F \\ I_\rho &= I_{\rho_0} + (a^2 + b^2) F \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Mômen quán tính khi xoay trục (h. 34)

$$\left. \begin{aligned} I_u &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_v &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \\ I_{\rho_{uv}} &= I_{\rho_{yz}} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

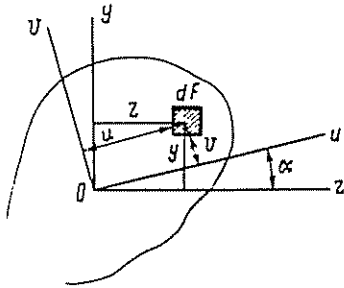
Trục quán tính chính là hai trục vuông góc với nhau và momen quán tính ly tâm của mặt cắt đối với hệ trục đó bằng không. Vị trí của trục được xác định bằng biểu thức sau:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (76)$$

Mômen quán tính chính là mômen quán tính trục đối với trục quán tính chính. Nó có các giá trị cực trị.

$$I_{\max/\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (77)$$

Nếu $I_{yz} < 0$ thì trục chính (đối với trục này mômen quán tính có giá trị cực đại) sẽ đi qua góc phần tư thứ I và thứ III. Nếu $I_{yz} > 0$ thì trục chính (đối với trục này mômen quán tính có giá trị cực tiểu) sẽ đi qua góc phần tư thứ II và thứ IV.



Hình 34

Hệ trục chính đi qua trọng tâm của mặt cắt được gọi là hệ trục chính trung tâm, còn mômen quán tính đối với hệ trục này gọi là mômen quán tính chính trung tâm.

Giá trị dương của các đại lượng

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} \text{ và v.v...} \quad (78)$$

gọi là bán kính quán tính của mặt cắt đối với các trục tương ứng.

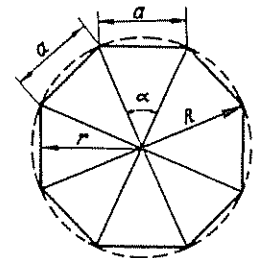
Êlip vẽ theo phương trình

$$\frac{z^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_z^2} = 1 \quad (79)$$

Gọi là êlip quán tính của mặt cắt. Ở đây các trục y và z đều là trục quán tính chính. Thông thường êlip quán tính vẽ trên hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

Trục đối xứng của mặt cắt phẳng là trục quán tính chính của mặt cắt đó. Trục bất kỳ vuông góc với trục đối xứng là trục quán tính chính thứ hai của mặt cắt đối với giao điểm của chúng.

Nếu mặt cắt có ít nhất hai trục đối xứng không vuông góc với nhau thì tất cả các trục đi qua trọng tâm của mặt cắt đều là trục quán tính chính trung tâm. Mômen quán tính trục của mặt cắt đối với các trục này đều bằng nhau.



Hình 35

Thí dụ 16. Xác định mômen quán tính chính trung tâm, mômen quán tính độc cực và vẽ êlip quán tính trung tâm của hình đa giác đều n cạnh trên hình 35.

Bài giải. Góc tâm chắn dây cung a bằng:

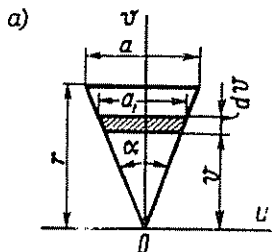
$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

Bán kính vòng tròn ngoại tiếp đa giác $R = \frac{a}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$. Bán kính vòng tròn

nội tiếp $r = R \cos \frac{\alpha}{2}$.

Ta xét một tam giác có đỉnh α (h. 36a) và tìm momen quán tính trục I_u và I_v và momen quán tính cực I_ρ . Diện tích của phân tử phẳng có độ dày dv là

$$dF = a_1 dv = \frac{a}{r} v dv$$

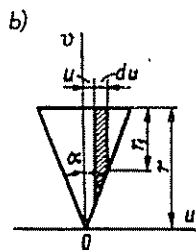


Momen quán tính trục của tam giác đối với trục u là:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \frac{a}{r} \int_0^r v^3 dv = \frac{ar^3}{4}$$

Diện tích của phân tử phẳng có độ dày du (hình 36b) là

$$dF = r_1 du = \frac{r}{a} (a - 2u) du.$$



Momen quán tính trục của tam giác đối với trục v là

$$I_v = 2 \int_{F/2} u^2 dF = 2 \frac{r}{a} \int_0^{a/2} u^2 (a - 2u) du = \frac{a^3 r}{48}$$

Momen quán tính độc cực của tam giác đối với điểm O

Hình 36

$$\begin{aligned} I_\rho &= I_u + I_v = \frac{ar^3}{4} + \frac{a^3 r}{48} \\ &= \frac{2R \sin \frac{\alpha}{2} R^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2}}{4} + \frac{8R^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2} R \cos \frac{\alpha}{2}}{48} \\ &= \frac{R^4}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \frac{R^4}{12} \sin \alpha (2 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Vì tất cả các tam giác (được chia thành n tam giác) đều bằng nhau và có chung đỉnh O nên momen quán tính độc cực của n tam giác đối với điểm O là:

$$I_\rho = n I_\rho' = \frac{nR^4}{12} \sin \alpha (\cos \alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{6\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2)$$

Trong đa giác đều có lõi thieu hai trục đối xứng không vuông góc với nhau, do đó tất cả các trục trung tâm đều là trục quán tính chính và momen quán tính của diện tích đa giác đối với các trục đó đều bằng nhau và bằng I , từ đó

$$I = \frac{1}{2} I_\rho = \frac{nR^4}{24} \sin \alpha (\cos \alpha + 2) = \frac{\pi R^4}{12\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2)$$

Vì diện tích n tam giác bằng:

$$F = \frac{n\pi r}{2} = \frac{n}{2} 2R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{n}{2} R^2 \sin \alpha$$

Cho nên bán kính quán tính chính của đa giác bằng:

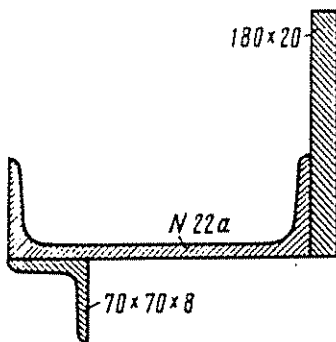
$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \sqrt{2 + \cos \alpha}$$

Êlíp quán tính là vòng tròn có bán kính này.

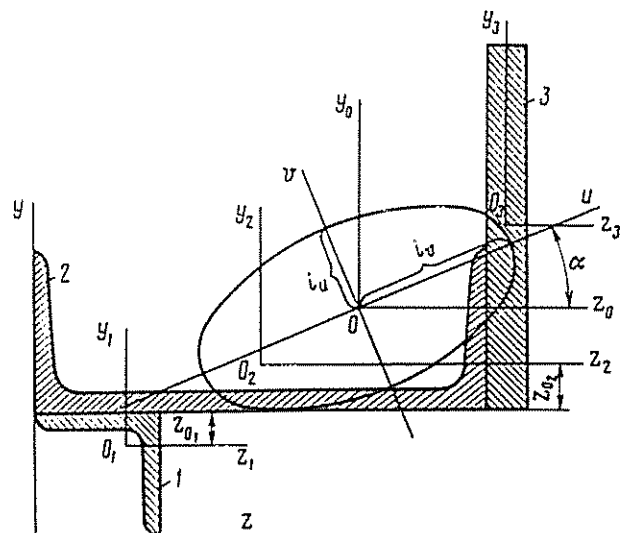
Thí dụ 17. Vẽ êlíp quán tính trung tâm đối với mặt cắt cho trên hình 37.

Bài giải: Ta đặt mặt cắt được vẽ theo tỉ lệ (h. 38) vào hệ trục tọa độ z, y song song với đường bao của mặt cắt.

Đặt mỗi phần tử mặt cắt (thép góc 1, thép chữ U2 và thép chữ nhật 3) vào các trục trung tâm z_i, y_i song song với các trục z, y . Ta tính được tọa độ trọng tâm của hình chữ nhật, còn tọa độ trọng tâm thép góc $z_0 = 2,02\text{cm}$ và thép U: $z_0 = 2,46\text{cm}$ lấy từ bảng số liệu thép cán định hình.



Hình 37



Hình 38

Các kết quả tính toán sau này sẽ lập thành bảng. Những đại lượng cần thiết của hình chữ nhật thì phải tính toán, còn đối với thép góc và thép U lấy từ bảng thép hình. Thí dụ đối với thép góc có kích thước $70 \times 70 \times 8\text{mm}$ diện tích $F_1 = 10,7\text{cm}^2$; đối với thép U số 22 $F_2 = 28,8\text{cm}^2$; đối với thép hình chữ nhật $F_3 = 18 \times 2 = 36\text{cm}^2$. Tọa độ trọng tâm của mỗi phần tử mặt cắt trong hệ trục y, z có giá trị:

- đối với thép góc: $z_1 = y_1 = 7 - 2,02 = 4,98\text{cm}$
- đối với thép U: $z_2 = 11\text{cm}, y_2 = 7 + 2,46 = 9,46\text{cm}$
- đối với hình chữ nhật: $z_3 = 22 + 1 = 23\text{cm}; y_3 = 7 + 9 = 16\text{cm}$

1. Xác định tọa độ trọng tâm của mặt cắt trong hệ trục Z, y .

Số hiệu phần tử mặt cắt	Diện tích F_i	Tọa độ trọng tâm trong hệ trục z, y		Momen tính đối với các trục z, y	
		z_i	y_i	$S_{z_i} = F_i y_i$	$S_{y_i} = F_i z_i$
	cm ²	cm		cm ³	
1	10,7	4,98	4,98	53,4	53,4
2	28,8	11	9,46	272,4	316,8
3	36	23	16	576	828
Toàn bộ mặt cắt	75,5			901,8	1198,2

Tọa độ trọng tâm mặt cắt

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{1198,2}{75,5} \approx 15,87\text{cm}; \quad y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{901,8}{75,5} \approx 11,94\text{cm}$$

Ta đặt vào hình hệ trục trung tâm z_0, y_0 song song với hệ trục zy . Bây giờ tìm các tọa độ trọng tâm z_{0i} và y_{0i} đối với các trục x_0, y_0 của các phần tử mặt cắt:

— đối với thép góc

$$z_{01} = 4,98 - 15,87 = -10,89\text{cm}$$

$$y_{01} = 4,98 - 11,94 = -6,96\text{cm}$$

— đối với thép U

$$z_{02} = 11 - 15,87 = -4,87\text{cm}$$

$$y_{02} = 9,46 - 11,94 = -2,48\text{cm}.$$

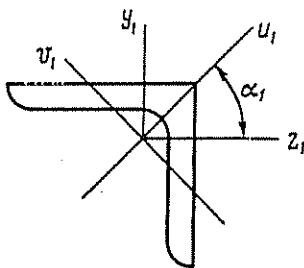
— đối với thép chữ nhật:

$$z_{03} = 23 - 15,87 = 7,13\text{cm}.$$

$$y_{03} = 16 - 11,94 = 4,06\text{cm}.$$

Tìm mômen quán tính của các phần tử mặt cắt đối với hệ trục trung tâm z_1, y_1 .

— Đối với thép góc (h. 39). Từ bảng thép cán định hình ta có:



$$I_{z_1} = I_{y_1} = 48,2\text{cm}^4$$

Dùng công thức xoay trục ta có:

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_{u_1} - I_{v_1}}{2} \sin 2(-45^\circ) = \frac{76,4 - 20}{2} (-1) = -28,2\text{cm}^4$$

Hình 39

Trục u_1, v_1 là trục quán tính chính của thép góc vì trục u_1 là trục đối xứng, do đó $I_{u_1 v_1} = 0$. Trị số $I_{u_1} = 76,4\text{cm}^4$ và $I_{v_1} = 20\text{cm}^4$, cho trong bảng thép cán định hình. Đối với thép ta tra được $I_{z_2} = 187\text{cm}^4$, $I_{y_2} = 2330\text{cm}^4$, còn $I_{z_2 y_2} = 0$ vì trục z_2, y_2 là hệ trục quán tính chính của nó.

2. Xác định momen quán tính của mặt cắt đối với trục z_0y_0 .

Số hiệu phần tử mặt cắt	F_i	z_{0i}	y_{0i}	I_{z_i}	I_{y_i}	$I_{z_i y_i}$	$F_i z_{0i}^2$	$F_i y_{0i}^2$	$F_i z_{0i} y_{0i}$	$I_{z_{0i}} = I_{z_i} + F_i y_{0i}^2$	$I_{y_{0i}} = I_{y_i} + F_i z_{0i}^2$	$I_{z_{0i} y_{0i}} = I_{z_i y_i} + F_i z_{0i} y_{0i}$
	cm ²	cm		cm ⁴			cm ⁴			cm ⁴		
1	10,7	-10,89	-6,96	48,2	48,2	-28,2	1269	518,3	811	566,5	1317,2	782,8
2	28,8	-4,87	-2,18	187	2330	0	683	177,1	317,8	364,1	3013	347,8
3	36	7,13	4,06	972	12	0	1830	593,3	1042	1565,3	1842	1042
Toàn bộ mặt cắt										2496	6172	2173

Đối với mặt cắt chữ nhật.

$$I_{z_3} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} = 972 \text{cm}^4; \quad I_{y_3} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} = 12 \text{cm}^4, \quad I_{z_3 y_3} = 0$$

3. Xác định vị trí trục quán tính chính trung tâm uv .

Theo công thức (76).

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{z_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} = \frac{2 \cdot 2173}{6172 - 2496} = 1,182$$

Theo bảng hàm số lượng giác ta có $2\alpha = 49^\circ 46'$, $\alpha = 24^\circ 53'$. Vì $\alpha > 0$ nên góc α quay ngược chiều kim đồng hồ và ta vẽ được trục quán tính chính trung tâm u và v . Vì $I_{z_0 y_0} > 0$ nên trục v — trục momen quán tính cực đại — đi qua góc phần tư thứ II và thứ IV.

4. Xác định giá trị momen quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

Căn cứ công thức (77).

$$I_{\max} = I_v = \frac{I_{z_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{z_0 y_0}^2} =$$

$$= \frac{2496 + 6172}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2496 - 6172)^2 + 4 \cdot 2173^2} = 4334 \pm 2846 \text{cm}^4.$$

Như vậy.

$$I_{\max} = I_v = 7180 \text{cm}^4; \quad I_{\min} = I_u = 1488 \text{cm}^4$$

5. Xác định bán kính quán tính chính của mặt cắt và vẽ êlip quán tính trung tâm.

Theo công thức (78) bán kính quán tính chính có giá trị:

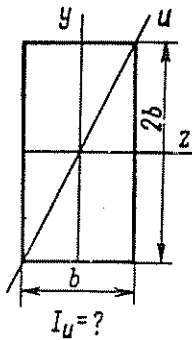
$$i_{\max} = i_v = \sqrt{\frac{I_v}{F}} = \sqrt{\frac{7180}{75,5}} \approx 9,75\text{cm}$$

$$i_{\min} = i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}} = \sqrt{\frac{1488}{75,5}} \approx 4,44\text{cm}$$

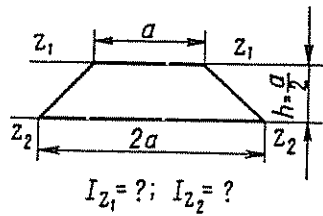
Vì phương trình êlip quán tính có dạng $\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1$ nên bán kính quán tính i_u trên trục v và i_v trên trục u đều là bán trục của êlip quán tính. Thay các giá trị i_u và i_v đã tìm được ta vẽ được êlip quán tính như hình 38.

Bài tập 156 – 158. Xác định momen quán tính của mặt cắt đối với các trục vẽ trên hình.

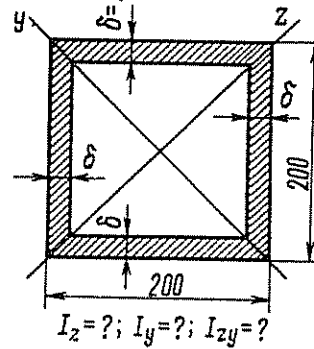
156



157

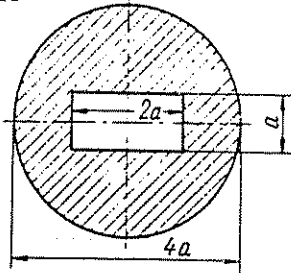


158

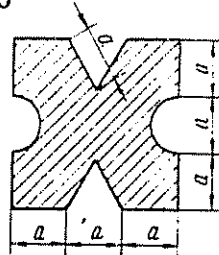


Bài tập 159 – 163: Xác định momen quán tính chính trung tâm.

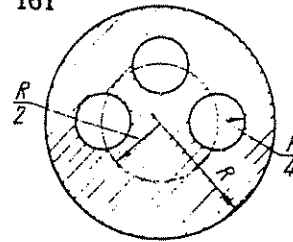
159



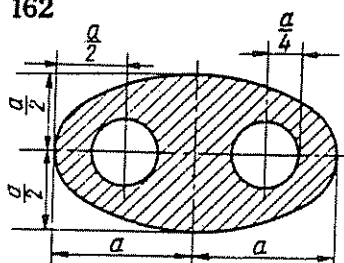
160



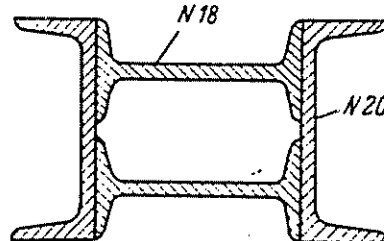
161



162



163



VII - XOẢN

§ 15. Momen xoắn

Momen xoắn được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Độ lớn của momen xoắn M_x tại mặt cắt bất kỳ của thanh bằng tổng đại số tất cả các momen ngoại

lực (momen tập trung M và momen phân bố dọc theo trục thanh với cường độ m) tác dụng cùng nằm về một phía của mặt cắt. Công thức tổng quát xác định độ lớn momen xoắn tại mặt cắt ngang của thanh như sau :

$$M_{xo} = \sum M + \sum \int m dx \quad (80)$$

Tích phân tính trên chiều dài của đoạn thẳng có momen phân bố tác dụng và tổng tính với tất cả các đoạn thanh cùng nằm về một phía của mặt cắt đang xét. Chiều của momen xoắn được xem là dương nếu từ ngoài nhìn vào mặt cắt momen quay ngược chiều kim đồng hồ.

Giữa momen ngoại lực M tính bằng kG cm, tốc độ góc n bằng (vg/ph) và công suất N có quan hệ sau:

$$M = 71620 \frac{N}{n} \quad (81a)$$

$$M = 97360 \frac{N}{n} \quad (81b)$$

Trong công thức (81a) công suất tính bằng mã lực, còn trong công thức (81b) tính bằng kW.

Trong hệ đơn vị quốc tế SI, giữa momen M tính bằng Nm, tốc độ quay ω tính bằng Rad/sec và công suất N tính bằng Wat có quan hệ sau:

$$M = \frac{N}{\omega} \quad (81c)$$

Vi momen xoắn tỉ lệ với công suất nên đối với trục quay có tốc độ đều truyền công suất cho các máy hoạt động ta có thể thay biểu đồ momen xoắn bằng cách vẽ biểu đồ công suất.

Thí dụ 18. Cho momen xoắn như hình 40. Vẽ biểu đồ momen xoắn nội lực M_{xo} .

Bài giải — Cắt các mặt cắt trong từng đoạn thanh theo công thức (80) có kể đến dấu, ta tính được:

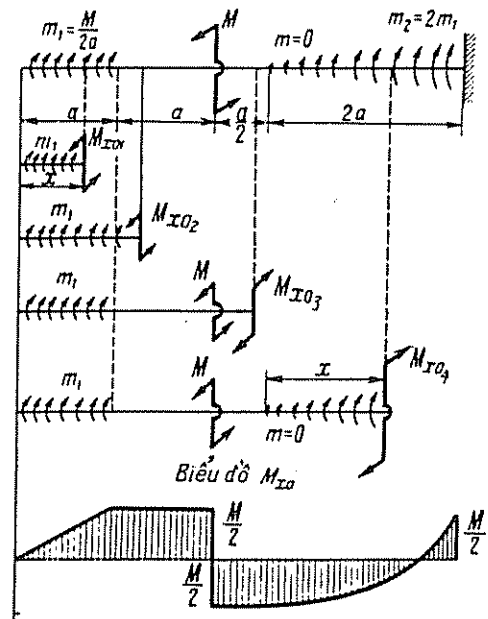
$$M_{xo1} = m_1 x = \frac{M}{2a} x$$

$$M_{xo1} = 0, \quad M_{xo1} = \frac{M}{2}$$

$x=0 \qquad x=a$

$$M_{xo2} = m_1 a = \frac{M}{2}$$

$$M_{xo3} = m_1 a - M = \left(\frac{M}{2} \right) - M = -\frac{M}{2}$$



Hình 40

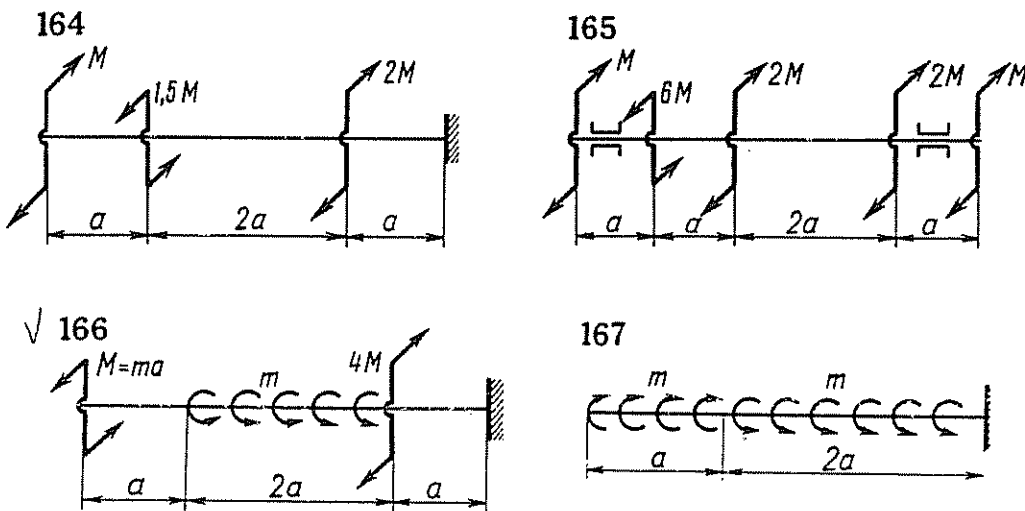
$$M_{Ox_4} = m_1 a - M + \int_0^x \frac{2m_1}{2a} x dx = \frac{M}{2} - M + \frac{M}{2a^2} \int_0^x x dx$$

$$= -\frac{M}{2} + \frac{Mx^2}{4a^2}$$

$$M_{x=0} = -\frac{M}{2}; \quad M_{x=2a} = \frac{M}{2}$$

Biểu đồ M_{x_0} vẽ trên hình 40.

Bài tập 164 — 167. Vẽ biểu đồ momen xoắn.



§ 16. Ứng suất tiếp, góc xoắn và thế năng biến dạng đàn hồi

Đối với thanh có mặt cắt tròn $d = 2r$, ứng suất tiếp T tại điểm trên mặt cắt cách tâm một khoảng ρ xác định bằng công thức:

$$\tau = \frac{M_{x_0} \rho}{I_\rho} \quad (82)$$

trong đó $I_\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ — Momen quán tính độc cực của mặt cắt tròn.

Ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra tại điểm cách xa tâm nhất và có giá trị:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x_0}}{W_\rho} \quad (83)$$

trong đó $W_\rho = \frac{I_\rho}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ — Momen chống xoắn độc cực của mặt cắt tròn.

Đối với thanh mặt cắt không tròn, ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x_0}}{W_{x_0}} \quad (84)$$

trong đó W_{x_0} — momen chống xoắn của mặt cắt, giá trị W_{x_0} của các dạng mặt cắt tìm trong các sổ tay và các giáo trình Sức bền vật liệu.

Trên đoạn thanh dài l có momen xoắn M_{x_0} không đổi, góc xoắn φ được xác định theo định luật Húc như sau:

$$\varphi = \frac{M_{x_0} l}{GI_{x_0}} \quad (85)$$

Trong đó G — môđun đàn hồi trượt; I_{x_0} — «momen quán tính» xoắn của mặt cắt ngang thanh. Đối với thanh tròn thì nó bằng I_ρ , còn đối với các dạng mặt cắt khác nó có giá trị khác nhau và tìm trong các sổ tay, trong các giáo trình Sức bền vật liệu.

Nếu thanh gồm một số đoạn, trên các đoạn M_{x_0} thay đổi theo những quy luật khác nhau thì góc xoắn toàn phần (góc xoay giữa các mặt cắt ở hai đầu thanh) được xác định theo biểu thức sau:

$$\varphi = \sum \int \frac{M_{x_0}}{GI_{x_0}} dx \quad (86)$$

Tích phân tính trên chiều dài của các đoạn thanh, còn tổng tính với tất cả các đoạn. Đối với những trục truyền thì tốt nhất nên tính các góc xoắn ở hai bên mặt cắt lắp bánh truyền động. Công thức tổng quát để xác định thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong thanh khi xoắn có dạng sau:

$$U = \sum \int \frac{M_{x_0}^2 dx}{2GI_{x_0}} \quad (87)$$

Ở đây cách lấy tích phân và lấy tổng cũng tiến hành giống như lúc tính góc xoắn.

Thi dụ 19. Cho thanh chịu xoắn như hình 41. Cho biết các đại lượng M , a , d G . Vẽ biểu đồ M_{x_0} , φ ; tính $\tau_{\max I, II}$ và U ?

Bài giải; Momen xoắn trong đoạn I :

$$M_{x_0 I} = -M.$$

Momen xoắn tại mặt cắt bất kỳ trong đoạn II :

$$\begin{aligned} M_{x_0 II} &= -M + 2M - m(2a - x_2) = M - \frac{2M}{a}(2a - x_2) \\ &= M \left(\frac{2x_2}{a} - 3 \right); \end{aligned}$$

$$M_{x_0 II} \Big|_{x_2=0} = -3M; \quad M_{x_0 II} \Big|_{x_2=2a} = M;$$

$$\tau_{\max I} = \frac{M}{W_{x_0}}.$$

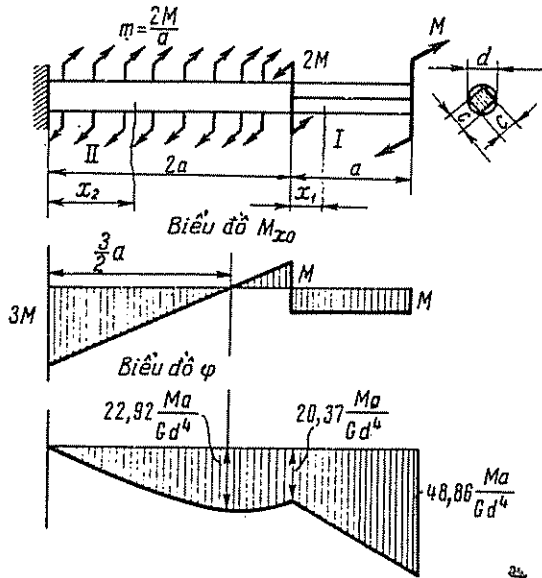
Đối với đoạn thanh có mặt cắt hình vuông cạnh c : $W_{x_0} \approx 0,208c^3$. Vì $c = \frac{d}{\sqrt{2}}$ nên $W_{x_0} = 0,208d^3(2\sqrt{2}) \approx 0,0736d^3$. Do đó

$$\tau_{\max I} = \frac{M}{0,0736d^3} \approx 13,6 \frac{M}{d^3};$$

$$\tau_{\max II} = \frac{3M}{W_p} = \frac{3M}{\pi d^3} \cdot 16 = 15,3 \frac{M}{d^3}.$$

Mặt cắt ở ngàm bên trái không xoay cho nên góc xoắn được tính từ mút trái của thanh trở đi.

Đối với mặt cắt bất kỳ của đoạn II



$$\varphi_{II_{x_2}} = \frac{M}{GI_p} \int_0^{x_2} \left(\frac{2x_2}{a} - 3 \right) dx_2 =$$

$$= \frac{M}{GI_p} \left(\frac{x_2^2}{a} - 3x_2 \right)$$

$$\varphi_{II_{x_2=0}} = 0$$

$$\varphi_{II_{x_2=2a}} = \frac{M}{GI_p} (4a - 6a) =$$

$$= -\frac{2Ma}{GI_p} = -\frac{2Ma}{G\pi d^4} \cdot 32 \approx$$

$$\approx -20,37 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Hình 11

Tìm cực trị của góc φ_{II} .

$$\frac{d\varphi_{II_{x_2}}}{dx_2} = \frac{M}{GI_p} \left(2 \frac{x_2}{a} - 3 \right) = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2} a$$

$$\varphi_{II_{x_2 = \frac{3}{2} a}} = \frac{M}{GI_p} \left(\frac{9a}{4} - \frac{9a}{2} \right) = -\frac{9}{4} \frac{Ma}{GI_p} =$$

$$= -\frac{9}{4} \frac{Ma}{G\pi d^4} \cdot 32 \approx -22,92 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Đối với mặt cắt bất kỳ trong đoạn I.

$$\varphi_{I_{x_1}} = \varphi_{II_{x_2=2a}} - \frac{Mx_1}{GI_p}; \varphi_{I_{x_1=0}} = \varphi_{II_{x_2=2a}}; \varphi_{I_{x_1=a}} = -\frac{2Ma}{GI_p} - \frac{Ma}{GI_{x_0}}$$

$$\text{Vì } I_{x_0} \approx 0,1404c^4 = 0,1404 \frac{d^4}{4} \approx 0,0351d^4 \text{ và } \frac{1}{I_{x_0}} \approx \frac{1}{0,0351d^4} \approx \frac{28,49}{d^4}$$

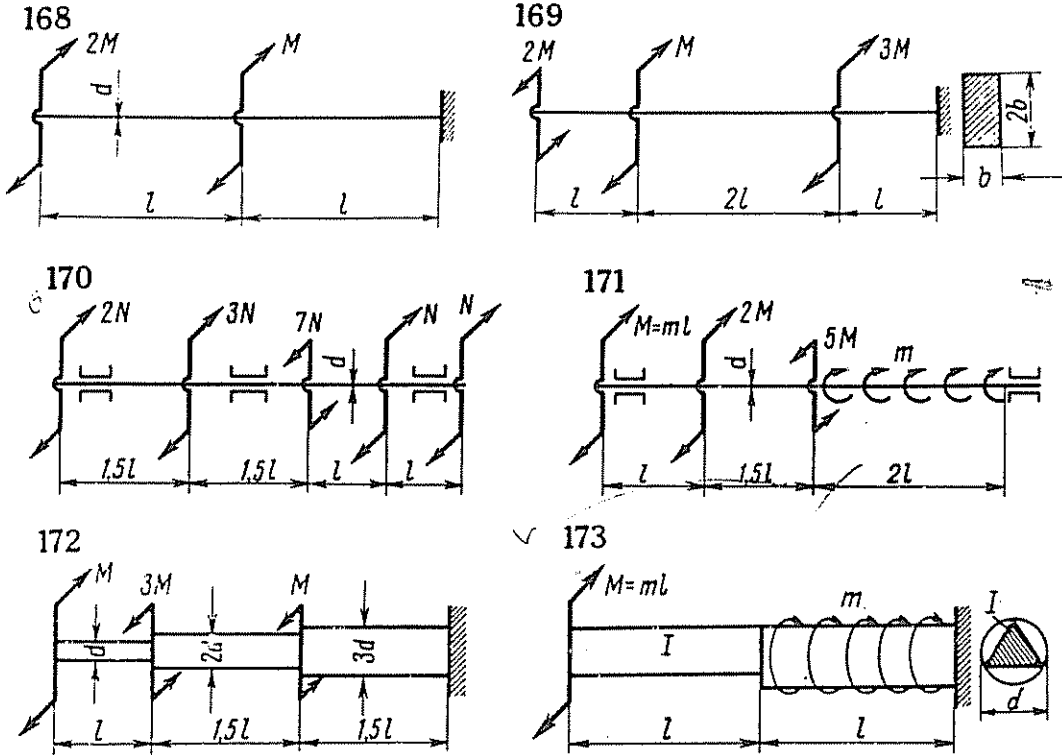
$$\text{nên } \varphi_{I_{x_1=a}} = -(20,37 + 28,49) \frac{Ma}{Gd^4} = -48,86 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong thanh khi xoắn được tính theo công thức (87).

$$U = U_I + U_{II} = \frac{M^2 a}{2GI_{x_0}} + \frac{M^2}{2GI_{x_0}} \int_0^{2a} \left(\frac{2x_2}{a} - 3 \right)^2 dx_2.$$

$$= \frac{M^2 a}{Gd^4} \left[14,25 + 5,1 \left(\frac{32}{3} - 24 + 18 \right) \right] \approx 38 \frac{M^2 a}{Gd^4}$$

Bài tập 168 — 173: Vẽ biểu đồ của momen xoắn M_{xo} , góc xoắn φ và xác định ứng suất tiếp lớn nhất τ_{max} , thế năng biến dạng đàn hồi U' . Riêng bài tập 170 tính trong hệ SI.



§17. Độ bền và độ cứng

Đối với thanh có mặt cắt không đổi khi chịu xoắn kích thước mặt cắt được chọn theo công thức:

$$W_{xo} \geq \frac{\max M_{xo}}{[\tau]} \quad (88)$$

Trong đó $\max M_{xo}$ — momen xoắn có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

Nếu bổ sung thêm điều kiện góc xoắn lớn nhất φ_{max} không vượt quá góc xoắn cho phép $[\varphi]$ thì mặt cắt được chọn sẽ còn phải kiểm tra về độ cứng theo biểu thức:

$$I_{xo} \geq \frac{\max M_{xo} l_{\varphi}}{G[\varphi]} \quad (89)$$

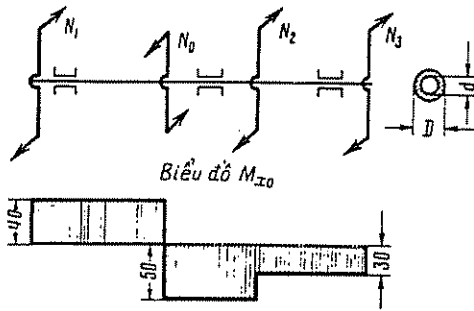
trong đó l_{φ} — độ dài đoạn thanh mà người ta cho biết góc xoắn cho phép.

Khi góc xoắn cho phép cho theo độ trên mét $[\varphi^{\circ}]$ thì trong công thức (89) ta phải đổi nó thành radian theo $[\varphi] = [\varphi^{\circ}] \frac{\pi}{180}$ và l_{φ} tính bằng 100cm.

Nếu tính cho trục truyền công suất có mặt cắt không đổi thì trong các công thức (88), (89) $\max M_{xo}$ được tính từ một trong các công thức (81), trong đó

lấy N_p là công suất lớn nhất trong biểu đồ công suất. Đối với thanh mặt cắt tròn đặc và mặt cắt vành khuyên $W_{x_0} = W_p$ và $I_{x_0} = I_p$.

Thí dụ 20. Cho trục chịu xoắn như hình 42. Biết $N_1 = 40$ mã lực, $N_2 = 20$ mã lực, $N_3 = 30$ mã lực, $n = 1000$ vòng/ph; $\alpha = \frac{d}{D} = 0,6$



Hình 42

$$[\tau] = 450 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}; [\varphi^\circ] = 2^\circ/\text{m};$$

$$G = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}. \text{Xác định } D \text{ và } d.$$

Bài giải: Theo biểu đồ công suất (h. 42) công suất tính $N_p = 50$ mã lực. Vì momen quán tính độc cực chống xoắn của mặt cắt vành khuyên

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \text{ trong đó } \alpha = \frac{d}{D},$$

do đó nếu chú ý đến (81a), công thức tính (88) có dạng:

$$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \geq \frac{71620}{n[\tau]} N_p$$

Từ đó:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{71620 N_p}{n[\tau] (1 - \alpha^4)}} \approx 71,4 \sqrt[3]{\frac{50}{10^3 \cdot 450 \cdot 0,87}} \approx 3,64 \text{cm}$$

Vì góc xoắn cho phép $[\varphi]$ cho theo $\frac{\text{độ}}{\text{m}}$, nên công thức (89) có dạng:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \geq \frac{71620 N_p \cdot 100 \cdot 180}{nG[\varphi^\circ]\pi}$$

Rút ra:

$$D = \sqrt[4]{\frac{71620 \cdot 100 \cdot 180 \cdot 32 N_p}{\pi^2 nG[\varphi^\circ] (1 - \alpha^4)}} \approx 253,4 \sqrt[4]{\frac{N_p}{nG[\varphi^\circ] (1 - \alpha^4)}} =$$

$$= 253,4 \sqrt[4]{\frac{50}{10^3 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 0,87}} \approx 3,49 \text{cm}$$

Ta lấy $D = 3,64 \text{cm}$, $d = 0,6 \cdot 3,64 \approx 2,18 \text{cm}$

Thí dụ 21. Cho trục chịu xoắn như hình 43. Biết $d = 4 \text{cm}$, $\omega = 80 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{MN/m}^2; [\tau] = 60 \text{MN/m}^2; [\varphi] = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

Tính công suất N_p (kW).

Bài giải: Theo điều kiện bền (88) và chú ý đến (81b) ta có công suất tính

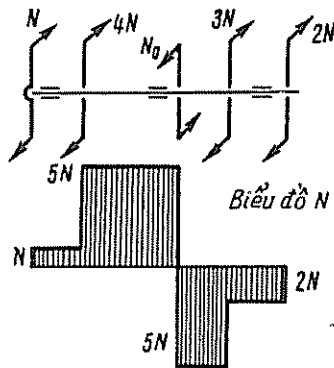
$$N_p \leq W_p [\tau] \omega = \frac{\pi d^3 [\tau] \omega}{16} = \frac{\pi (4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 60 \cdot 10^6 \cdot 80}{16} \approx 60300 \text{W} = 60,3 \text{kW}.$$

Theo điều kiện cứng (89) và chú ý đến (81b) ta có:

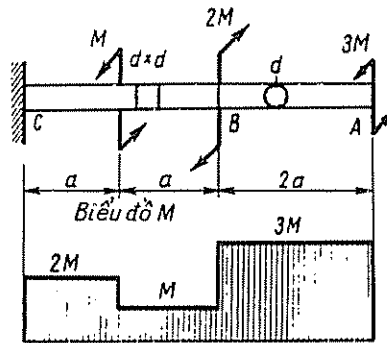
$$N_p = \frac{G[\varphi]I_p\omega}{I_p} = \frac{G[\varphi]ad^4\omega}{32I_p} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \pi (4 \cdot 10^{-2})^4 80}{32} \approx 32200 \text{ W} = 32,2 \text{ kW}.$$

Ta lấy $N_p = 32,2 \text{ kW}$.

Vi từ biểu đồ công suất ở h. 43 $N_p = 5N = \frac{1}{2} N_o$ nên $N_o \leq 2N_p = 2 \cdot 32,2 = 64,4 \text{ kW}$.



Hình 43



Hình 44

Thí dụ 22. Cho thanh chịu xoắn như hình 44. Biết $d = 4 \text{ cm}$, $a = 40 \text{ cm}$
 $G = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$, $\varphi_{BC} = 1^\circ$. Xác định τ_{\max} , φ_{AC} .

Bài giải. Ta vẽ biểu đồ momen xoắn như hình 44. Góc xoay của mặt cắt B đối với mặt cắt C được xác định từ biểu thức.

$$\varphi_{BC} = 1 \frac{\pi}{180} = \frac{Ma}{GI_{x_0}} + \frac{2Ma}{GI_{x_0}} = \frac{3Ma}{GI_{x_0}}$$

Rút ra:

$$M = \frac{\pi GI_{x_0}}{3 \cdot 180a}$$

Vi $I_{x_0} \approx 0,1404d^4$; $W_{x_0} \approx 0,208d^3$; $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ tức $W_{x_0} \approx W_p$ nên

đoạn thanh trong đó $M_{x_0} = 3M$ là đoạn nguy hiểm. Vi vậy

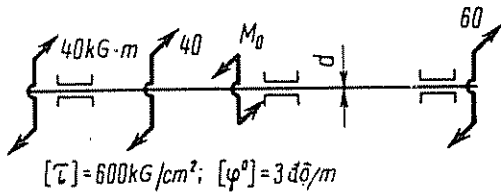
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{3M}{W_p} = \frac{3\pi G \cdot 0,1404d^4 \cdot 16}{3 \cdot 180 \cdot \pi d^3} = \frac{G \cdot 0,1404d \cdot 16}{180a} \\ &= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1404 \cdot 4 \cdot 16}{180 \cdot 40} \approx 1000 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Góc xoay của mặt cắt A đối với mặt cắt C tính theo công thức:

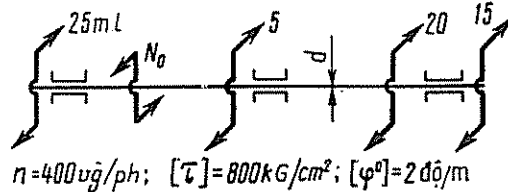
$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} + \varphi_{AB} = 1^\circ + \frac{3M \cdot 2a \cdot 180}{GI_{p\pi}} = 1^\circ + \frac{2I_{x_0}}{I_p} \approx 1^\circ + 2,86^\circ \approx 3,86^\circ$$

Bài tập 174 — 177. Xác định các kích thước cần thiết của mặt cắt ngang thanh theo điều kiện về độ bền và độ cứng. Trong tất cả các bài toán ở mục này và các mục sau, trừ các bài toán giải trong hệ đơn vị SI, giá trị của G đã được ghi trên hình vẽ, các bài đều lấy $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

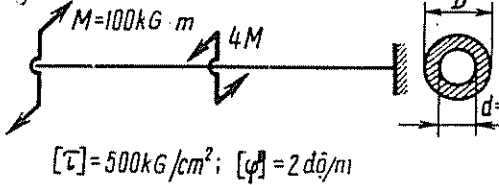
✓ 174



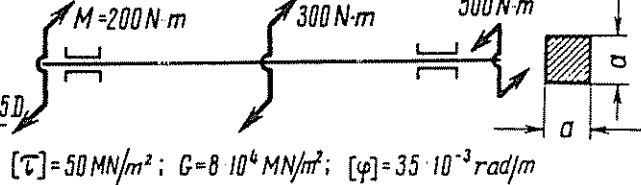
175



176

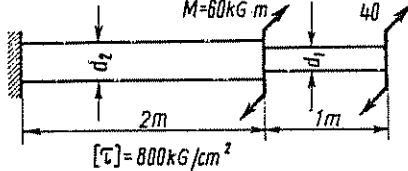


177

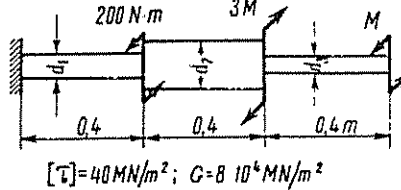


Bài tập 178 — 183. Tính các kích thước của mặt cắt ngang thanh góc xoắn toàn phần. Các giá trị độ dài thanh cho trong các bài toán ở đây và cả những bài toán ở các mục sau đều lấy đơn vị mét.

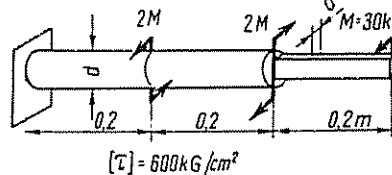
✓ 178



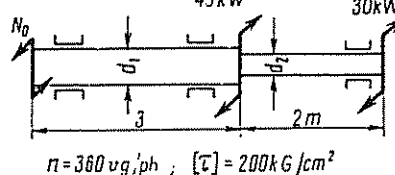
179



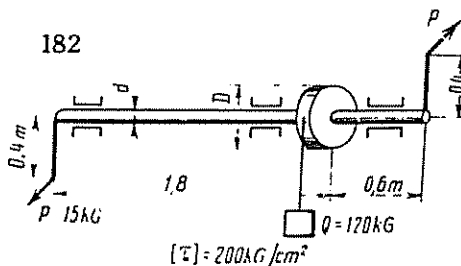
180



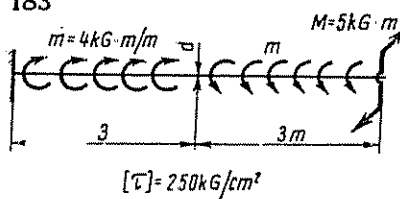
181



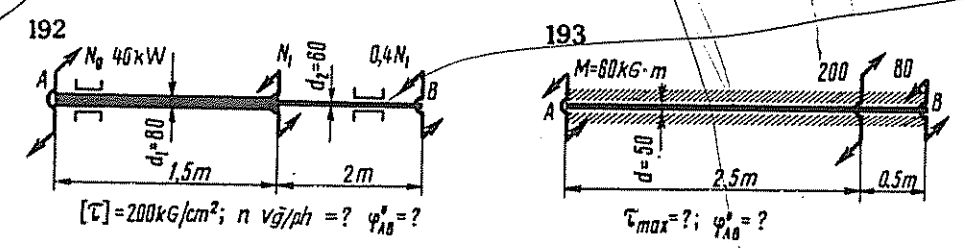
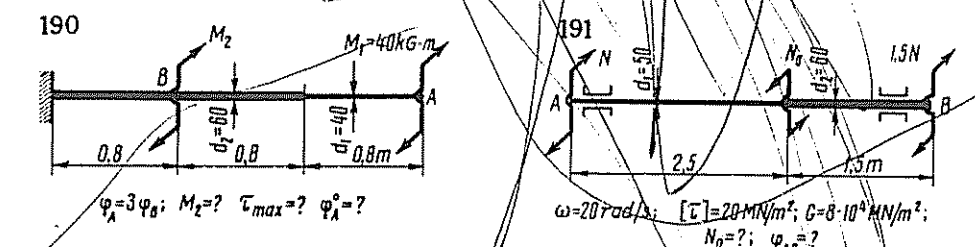
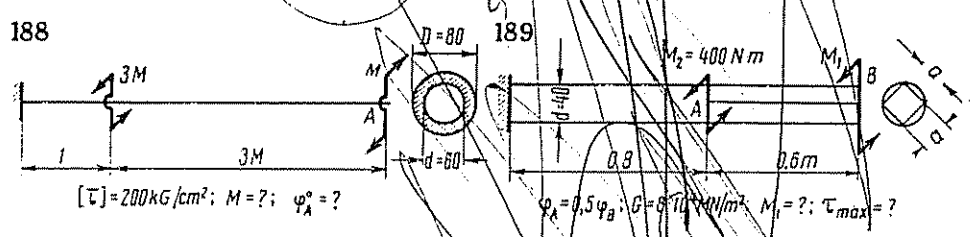
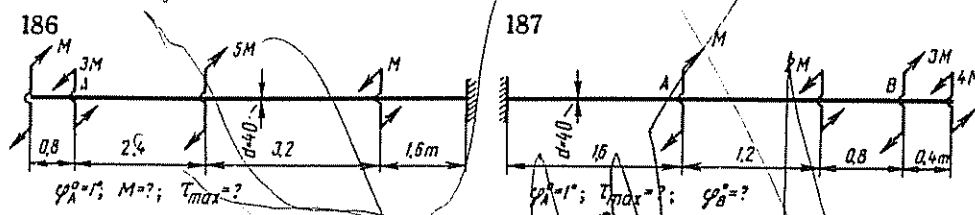
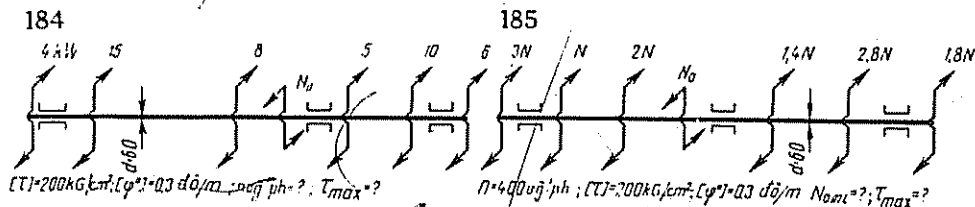
182



183

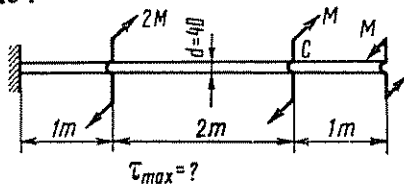


Bài tập 184 — 201. Tính các đại lượng ghi trên hình theo các điều kiện đã cho. Trong bài 193 thanh AB quay với tốc độ đều trong môi trường có momen cản phân bố đều trên chiều dài thanh.

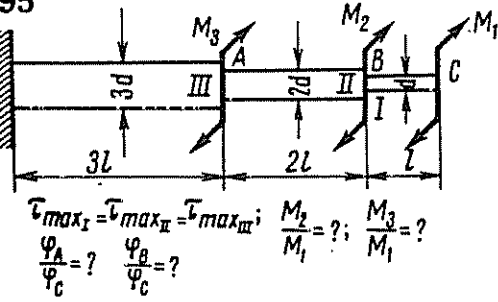


- Ở bài 194, điểm C nằm trên bề mặt bị dịch chuyển đi một đoạn 0,5mm.
- Ở bài 197 vật nặng Q dịch chuyển 2cm.
- Ở bài 198 các thanh AB và CD đều tuyệt đối cứng.
- Ở bài 200 độ bền của thanh đồng đều.
- Ở bài 201 điểm A nằm trên mặt cắt nghiêng.

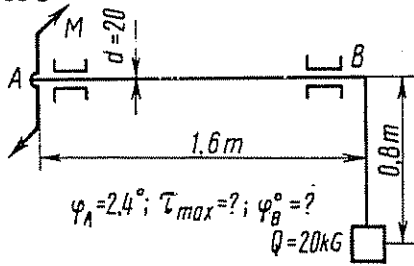
194



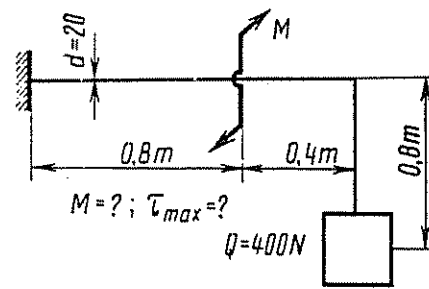
195



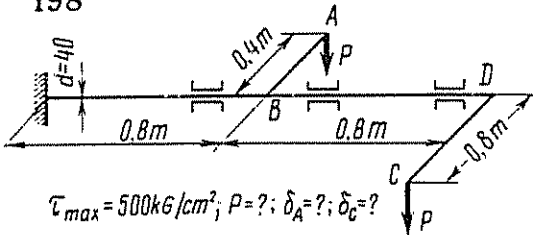
196



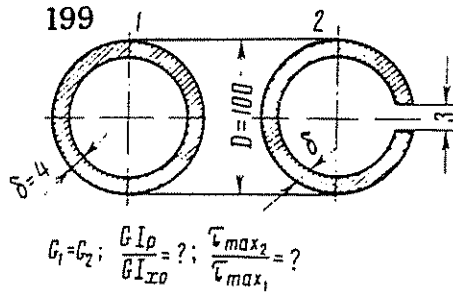
197



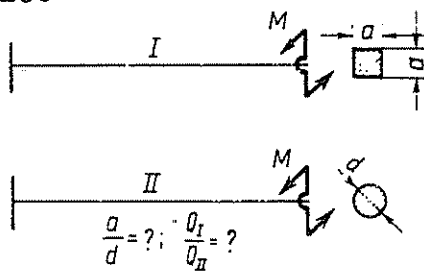
198



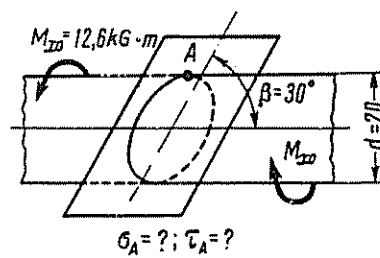
199



200



201



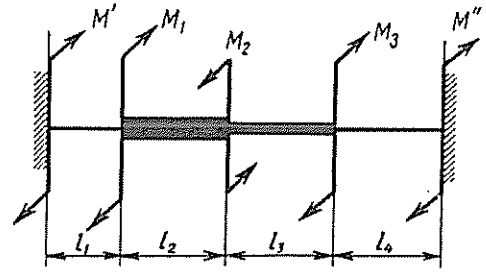
§18. Bài toán siêu tĩnh.

Bài toán siêu tĩnh về xoắn cũng như bài toán siêu tĩnh về kéo và nén, các phản lực liên kết và nội lực không thể xác định được bằng các phương trình tĩnh học. Để giải hệ như thế, người ta bổ sung vào các điều kiện tĩnh định những điều

kiện chấp của chuyển vị được thiết lập trên cơ sở không cắt rời các thanh cấu tạo nên hệ. Những điều kiện chấp chuyển vị đó chính là quan hệ hình học giữa chuyển vị của các thanh.

Nếu các liên kết bổ sung là tuyệt đối cứng thì biến dạng của chúng bằng không, còn nếu là đàn hồi thì chuyển vị của chúng được xác định bằng biến dạng tìm theo định luật Húc.

Nếu tất cả các thanh của hệ siêu tĩnh chỉ chịu xoắn, chuyển vị đàn hồi được xác định bằng góc xoắn. Nếu trong hệ chỉ có một số thanh chịu xoắn, còn các thanh khác chịu kéo hoặc nén thì đối với các thanh chịu xoắn chuyển vị được xác định bằng góc xoắn, các thanh kia xác định bằng biến dạng dọc.



Hình 45

Từng hệ siêu tĩnh khác nhau, có các điều kiện tĩnh định và điều kiện chấp chuyển vị khác nhau. Song, đối với một vài dạng hệ những điều kiện này căn bản như nhau và có thể được viết thành những phương trình dưới dạng cơ bản như nhau. Ví dụ, hệ được cấu tạo bởi một số thanh thẳng, hai đầu ngàm chặt và chỉ chịu các ngẫu lực gây xoắn (h. 45), điều kiện tĩnh định là tổng đại số momen của tất cả các ngẫu lực đã cho và ngẫu lực phản lực bằng không. Điều kiện chấp chuyển vị là tổng đại số các góc xoắn trên tất cả các đoạn thanh, bao gồm cả mặt cắt ở các đầu mút không xoay, tổng này cũng phải bằng không.

Nếu một trong những đầu ngàm của thanh là đàn hồi thì góc xoay của mút ngàm không bằng không và tỉ lệ với độ lớn của momen phản lực. Nếu cả hai đầu ngàm đều là đàn hồi thì góc xoắn toàn phần phải bằng hiệu góc xoay của hai mặt cắt ngàm.

Thí dụ 23: Cho kết cấu chịu lực như hình 46. Biết M, d, l, G . Xác định τ_{\max}, φ_A .

Giải. Trên các đoạn I, II, III, IV, momen quán tính độc cực của mặt cắt xoắn là:

$$I_{\rho I} = I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_{\rho II} = I_{\rho III} = 16I_{\rho}; \quad I_{\rho IV} = 81I_{\rho}.$$

$$\text{Còn góc xoắn } \varphi_I = \frac{M'2l}{GI_{\rho}}; \quad \varphi_{II} = \frac{(M' + M)2l}{16GI_{\rho}};$$

$$\varphi_{III} = \frac{(M' + M - 4M)l}{16GI_{\rho}}; \quad \varphi_{IV} = \frac{(M' + M - 4M)l}{81GI_{\rho}}$$

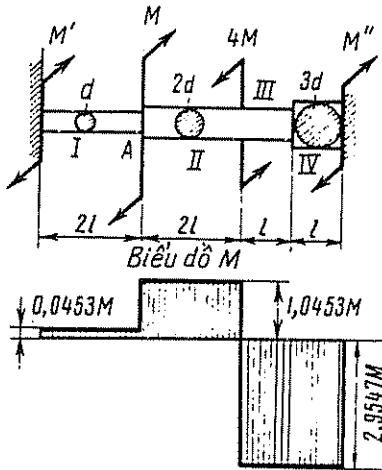
Theo điều kiện góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt đầu mút bằng không ta có:

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} = \frac{l}{GI_{\rho}} \left[2M' + 2(M' + M) \frac{1}{16} + (M' - 3M) \frac{1}{16} + (M' - 3M) \frac{1}{81} \right] = 0$$

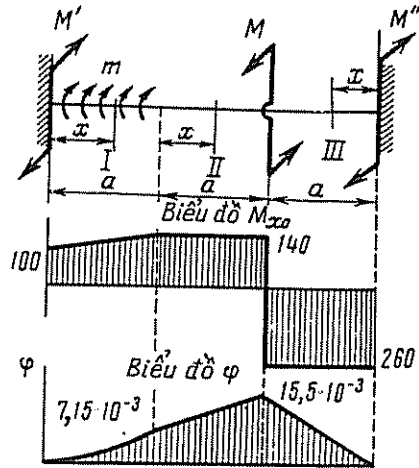
$$\text{Rút ra } M' = \frac{129}{2851} M \approx 0,0453M.$$

Từ điều kiện tĩnh định $M'' = 3M - M' = 2,9547M$

Theo các trị số này ta vẽ được biểu đồ momen xoắn như trên hình 46.



Hình 46



Hình 47

Vi $M_{xoIII}/M_{xoI} = 2,9547/0,0453 \approx 6,5$ còn $W_{\varphi III}/W_{\varphi I} = \pi(2d)^3/\pi d^3 = 8$, nên ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra ở mặt cắt có đường kính $2d$ (đoạn III).

Giá trị ứng suất tiếp tìm theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{xoIII}}{W_{\varphi III}} = \frac{2,9547M}{\pi d^3} \cdot 2 \approx 1,88 \frac{M}{d^3}$$

Góc xoay tính theo độ của mặt cắt A xác định theo biểu thức sau:

$$\varphi_A = \frac{M_{xoI} 2l}{GI_{\varphi}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0,0453M \cdot 2l \cdot 180 \cdot 32}{G\pi d^4 \pi} \approx 52,2 \frac{M}{Gd^4}$$

Thí dụ 24. Cho kết cấu chịu lực như hình 47. Biết $m = 80N.m/m$, $M = 400N.m$, $a = 0,5m$; $[\tau] = 40MN/m^2$, $G = 8 \cdot 10^4 MN/m^2$.

Xác định d và vẽ biểu đồ φ .

Bài giải: Điều kiện tĩnh định: $M' + ma - M + M'' = 0$

Điều kiện chuyển vị: $\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0$.

Vi độ cứng của mặt cắt thanh không đổi nên phương trình chuyển vị được viết dưới dạng sau:

$$M'a + m \int_0^a x dx + (M' + ma)a + (M' + ma - M)a = 0$$

Rút ra:

$$3M'a = Ma - 2ma^2 - m \frac{a^2}{2}$$

$$\text{và } M' = \frac{1}{3}(M - 2,5ma) = \frac{1}{3}(400 - 2,5 \cdot 80 \cdot 0,5) = 100\text{N.m}$$

Thay M' vào phương trình tĩnh định ta được :

$$M'' = \frac{1}{3}(2M - 0,5ma) = \frac{1}{3}(800 - 0,5 \cdot 80 \cdot 0,5) \approx 260\text{N.m.}$$

Ta vẽ biểu đồ momen xoắn (h. 47). Từ biểu đồ xác định $\max M_{x_0} = 260\text{N.m}$

Theo công thức $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{\max M_{x_0}}{[\tau]}$, rút ra

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \frac{\max M_{x_0}}{[\tau]}} \approx 1,72 \sqrt[3]{\frac{\max M_{x_0}}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{260}{400 \cdot 10^6}} \approx 3,2 \cdot 10^{-2}\text{m} = 3,2\text{cm.}$$

Ta tìm góc xoắn :

$$\varphi_{Ix} = \frac{1}{GI_\rho} \int_0^x (M' + mx)dx = \frac{M'x + \frac{mx^2}{2}}{GI_\rho}$$

$$\varphi_{Ix=0} = 0; \varphi_{Ix=a} = \frac{M'a + (ma^2/2)}{GI_\rho} = \frac{100 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} \approx 0,00715.$$

$$\varphi_{IIx} = \varphi_{Ix=a} + \frac{(M' + ma)}{GI_\rho} x; \varphi_{IIx=0} = \varphi_{Ix=a};$$

$$\begin{aligned} \varphi_{IIx=a} &= \varphi_{Ix=a} + \frac{M'a + ma^2}{GI_\rho} = 0,00715 + \frac{100 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 3,2^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,00715 + 0,00835 = 0,0155. \end{aligned}$$

$$\varphi_{IIIx} = \frac{M''x}{GI_\rho}; \varphi_{IIIx=0} = 0$$

$$\varphi_{IIIx=a} = \frac{M''a}{GI_\rho} = \frac{26 \cdot 10^2 \cdot 50}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 3,2^4} \approx 0,0155.$$

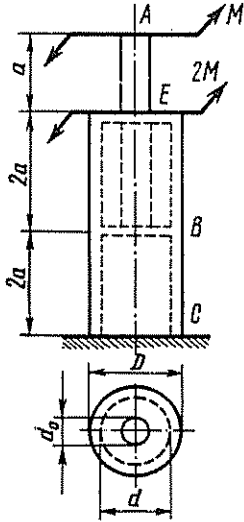
Theo các giá trị này ta vẽ được biểu đồ góc xoắn như trên hình 47.

Thí dụ 25. Có một ống chiều dài $4a$, đường kính ngoài là D , đường kính trong d , đầu mút C phía dưới bị ngàm chặt (h. 48). Ở nửa trên của ống, người ta lồng vào một thanh tròn có chiều dài $2a$, đường kính $d_0 = \frac{D}{2} = \frac{d}{1,6}$. Mút B phía dưới của thanh gắn chặt với ống, mút E phía trên của ống cũng gắn chặt với thanh. Tại mút A của thanh tác dụng ngẫu lực M và tại mặt cắt E của ống tác dụng ngẫu lực $2M$.

Tim $\tau_{\max I}$ trong thanh và $\tau_{\max II}$ trong ống và φ_{AC} nếu biết giá trị G của vật liệu thanh và ống.

Bài giải: Trên đoạn AE của thanh, momen xoắn $M_{x_0,AE} = M$. Vì ở C momen phản lực $M_c = 3M$ nên momen xoắn trên đoạn ống BC là $M_{x_0,BC} = 3M$

Hệ siêu tĩnh được cấu tạo bởi thanh và ống trên đoạn BE chịu tác dụng của momen $3M$. Theo điều kiện tĩnh định $M_I + M_{II} = 3M$, trong đó M_I là momen truyền qua thanh, M_{II} là momen truyền qua ống.



Hình 48

Theo điều kiện chấp chuyển vị, các góc xoắn φ_I của thanh và φ_{II} của ống trên đoạn BE là bằng nhau, tức $M_I 2a / GI_{\rho I} = M_{II} 2a / GI_{\rho II}$. Rút ra $M_{II} = M_I \frac{I_{\rho II}}{I_{\rho I}}$. Thay giá trị này vào điều kiện tĩnh định ta có:

$$M_I [1 + (I_{\rho II} / I_{\rho I})] = 3M.$$

$$\text{hoặc } M_I = \frac{3M}{1 + (I_{\rho II} / I_{\rho I})}; \quad M_{II} = \frac{3M}{1 + (I_{\rho I} / I_{\rho II})}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } I_{\rho I} &= \frac{\pi d_0^4}{32}, \text{ còn } I_{\rho II} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = \\ &= \frac{16\pi d_0^4}{32} (1 - 0,8^4) \approx 9,45 I_{\rho I} \end{aligned}$$

$$\text{nên } M_I = 3M / (1 + 9,45) \approx 0,287M \text{ và } M_{II} \approx 2,713M.$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\text{— đối với đoạn thanh } AE: \tau_{\max I} = \frac{M}{W_{\rho I}} = \frac{16M}{\pi d_0^3} \approx 5,09M / d_0^3$$

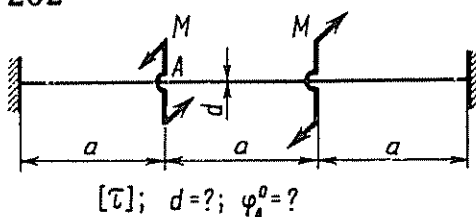
$$\begin{aligned} \text{— đối với đoạn ống } BC: \tau_{\max II} &= \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)} = \frac{3M}{\frac{8\pi d_0^3}{16} \cdot 0,58} \approx \\ &\approx 0,636 \tau_{\max I} = 3,24 \frac{M}{d_0^3} \end{aligned}$$

Góc xoay của mặt cắt A đối với mặt cắt C được xác định như sau:

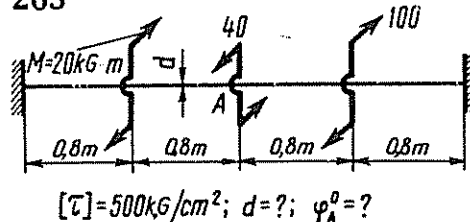
$$\begin{aligned} \varphi_{AC} = \varphi_{AE} + \varphi_{EB} + \varphi_{BC} &= \frac{Ma}{GI_{\rho I}} + 0,287 \frac{M2a}{GI_{\rho I}} + \frac{3M2a}{G \cdot 9,45 I_{\rho I}} = \\ &= 2,21 \frac{Ma}{GI_{\rho I}} \approx 22,5 \frac{Ma}{Gd_0^4} \end{aligned}$$

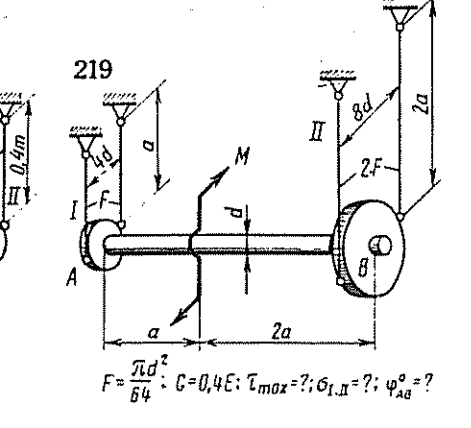
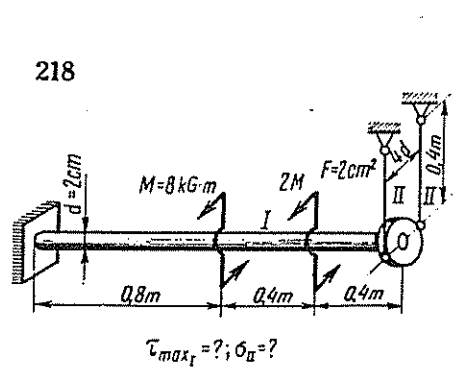
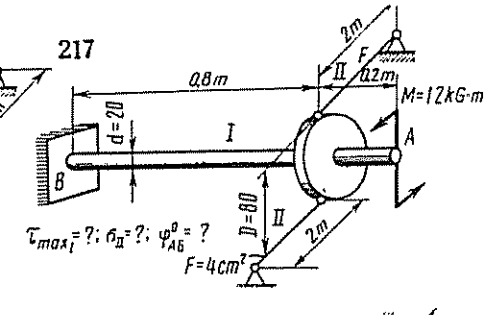
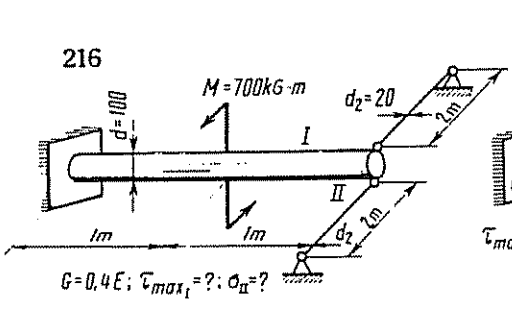
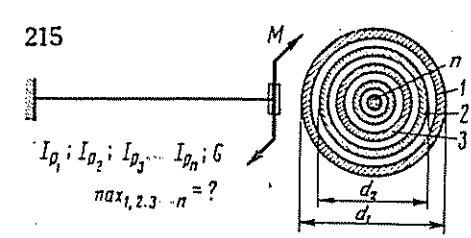
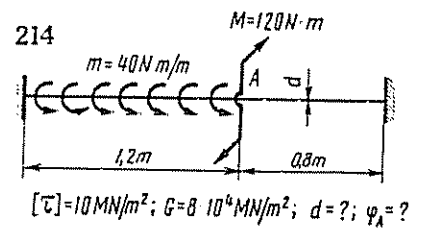
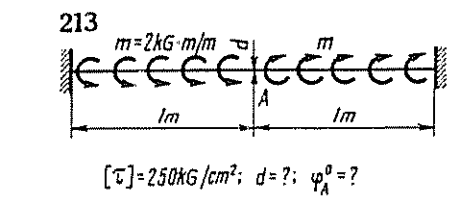
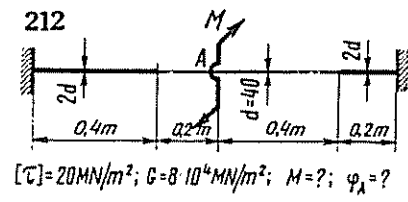
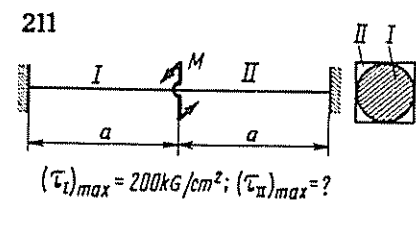
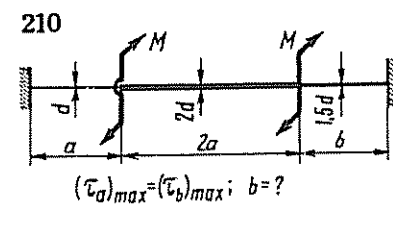
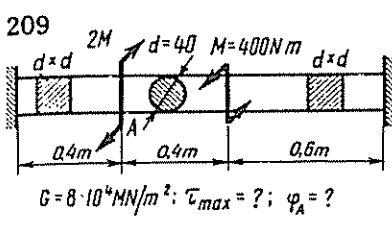
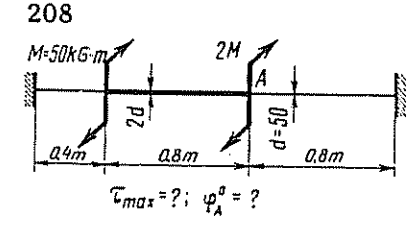
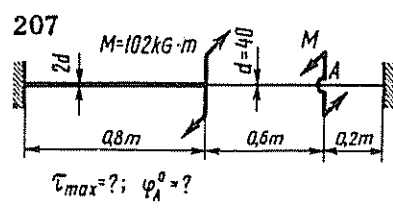
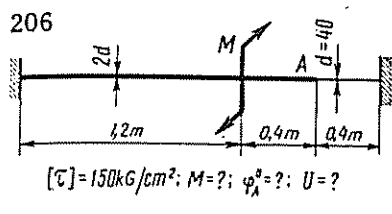
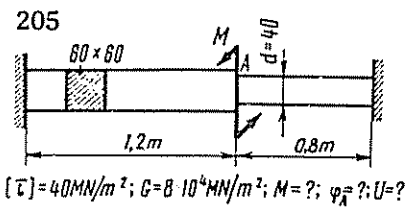
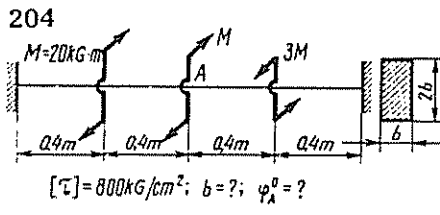
Bài tập 202 — 221. Xác định các đại lượng theo điều kiện ghi trên hình vẽ. Trong các bài tập 216 — 221 lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$. Trong bài 215 các ống tròn được lồng đồng tâm với nhau, giữa chúng có khe hở và chỉ liên kết chặt ở hai đầu.

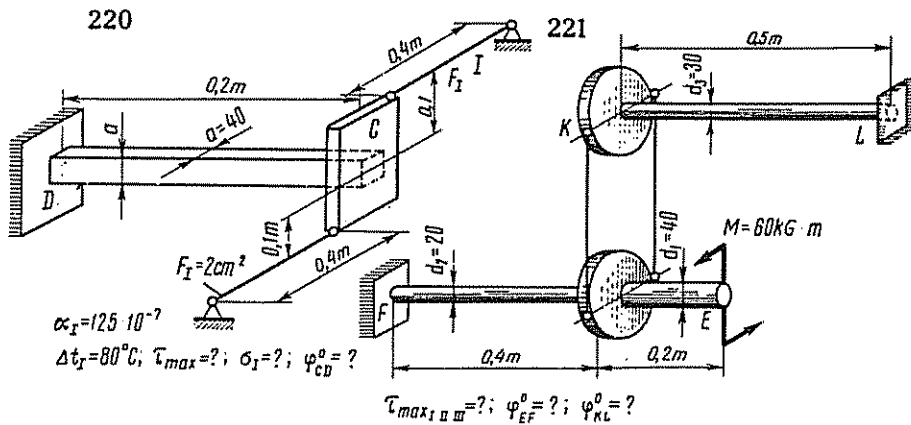
202



203





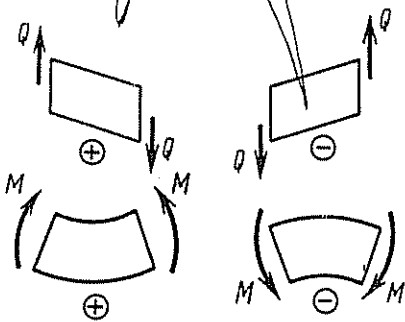


VIII - UỐN NGANG PHẪNG

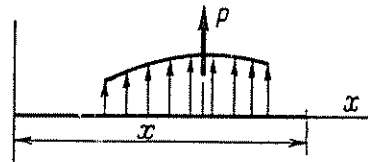
§ 19. Lực cắt và mômen uốn.

Lực cắt và mômen uốn xác định bằng phương pháp mặt cắt. Giá trị lực cắt Q_x tại mặt cắt có tọa độ x bằng tổng đại số hình chiếu lên một trong những trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt của tất cả những ngoại lực (lực tập trung và lực phân bố) tác dụng vào phần dầm ở về một bên của mặt cắt. Giá trị mômen uốn M_x tại một mặt cắt bằng tổng đại số mômen (đối với một trong những trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt), của tất cả những ngoại lực tác dụng vào phần dầm ở một bên mặt cắt. Lực cắt Q và mômen uốn M có giá trị dương hoặc âm tùy theo chiều của chúng ở hình 49.

Nếu đoạn tải trọng phân bố kết thúc trước mặt cắt đang xét (hình 50) thì ta có thể thay bằng một lực tập trung có giá trị bằng diện tích của biểu đồ tải trọng phân bố và đặt tại mặt cắt đi qua trọng tâm của biểu đồ này. Đối với tải trọng biến đổi theo quy luật bậc nhất, diện tích và vị trí trọng tâm của phần tải trọng cắt ra xác định theo các công thức hình học quen thuộc.



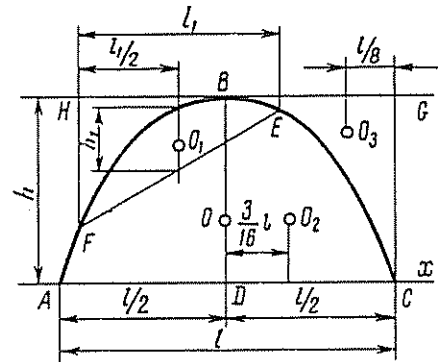
Hình 49



Hình 50

Nếu tải trọng biến đổi theo quy luật parabol bậc hai ABC (hình 51) thì tốt nhất ta nên sử dụng những quan hệ sau đây rút ra từ hình học giải tích. Diện

tích hình parabol $ABC = \frac{2}{3} lh$, trọng tâm của hình nằm trên đường thẳng đứng BD , diện tích mảnh parabol $FBE = \frac{2}{3} l_1 h_1$, trọng tâm O_1 của hình này cách đường thẳng đứng FH là $l_1/2$; diện tích nửa parabol ABD và $DBC = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} h = \frac{1}{3} lh$; trọng tâm O_2 của hình này cách đường thẳng đứng BD là $\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{16} l$; diện tích hình tam giác vuông góc CBG có cạnh huyền là đoạn parabol BC ,



Hình 51

là $\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} h = \frac{1}{6} lh$, trọng tâm O_3 của hình này cách đường thẳng đứng CG là $\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{8} l$.

Khi tính nội lực ở một mặt cắt, nên xét phần dầm có ít tải trọng tác dụng và trước hết nên vẽ biểu đồ Q , sau đó vẽ biểu đồ M .

Khi tính các giá trị của Q và M theo các quy tắc về dấu đã quy định thì đối với một dầm có tải trọng và liên kết đối xứng, biểu đồ lực cắt sẽ đối xứng ngược (phản đối xứng), còn biểu đồ momen uốn sẽ đối xứng (hình 52,a). Đối với dầm đối xứng ngược thì ngược lại biểu đồ lực cắt sẽ đối xứng và biểu đồ momen uốn sẽ phản đối xứng (hình 52,b).

Trên biểu đồ lực Q , tại vị trí tương ứng với mặt cắt có đặt lực tập trung, có bước nhảy mà độ lớn bằng giá trị của lực tập trung (hình 52,a và hình 52,b).

Trên biểu đồ momen uốn M , tại vị trí tương ứng với mặt cắt có đặt ngẫu lực, có bước nhảy mà độ lớn bằng giá trị của ngẫu lực (hình 53).

Đối với những dầm không có ngẫu lực hơn phân bố tác dụng, khi vẽ biểu đồ Q và M , cũng như khi kiểm tra các biểu đồ đó, cần sử dụng các quan hệ vi phân (90) và (91) giữa M , Q và q , và hệ quả của các quan hệ này.

$$Q = dM/dx \quad (90)$$

$$q = dQ/dx = d^2M/dx^2, \quad (91)$$

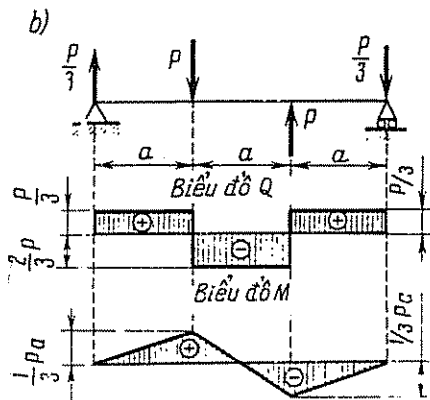
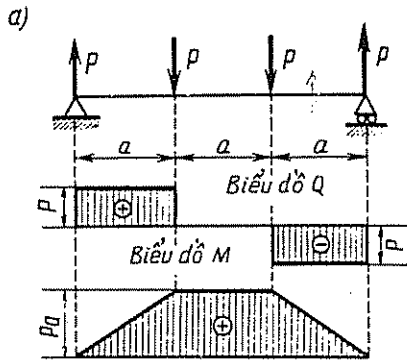
trong đó q là mật độ của tải trọng phân bố.

Những hệ quả chủ yếu của các quan hệ (90) và (91):

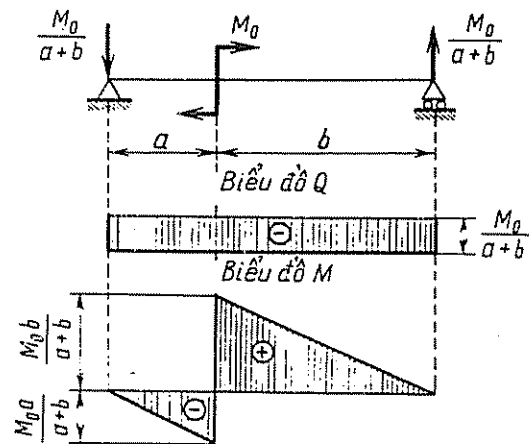
1. Giá trị lực cắt bằng tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ momen uốn tại mặt cắt đang xét và trục x (trục dầm), và cường độ tải trọng phân bố bằng tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ lực cắt và trục x .

2. Nếu tải trọng phân bố biến đổi theo một hàm đại số trên một đoạn dầm nào đó thì cũng trên đoạn ấy lực cắt biến đổi theo hàm cao hơn một bậc so với hàm của tải trọng phân bố, và momen uốn biến đổi theo hàm cao hơn một bậc so với hàm của lực cắt.

3. Ở mặt cắt mà lực cắt có giá trị bằng không thì momen uốn có giá trị cực trị, ở mặt cắt mà lực cắt có bước nhảy đổi dấu thì biểu đồ momen uốn thay đổi độ dốc.



Hình 52



Hình 53

4. Ở mặt cắt mà lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu thì biểu đồ momen uốn bị gãy.

5. Nếu trên toàn chiều dài dầm hoặc chỉ trên một đoạn, biểu đồ lực cắt đối xứng ngược thì trên chiều dài đó, biểu đồ momen uốn đối xứng, và ngược lại.

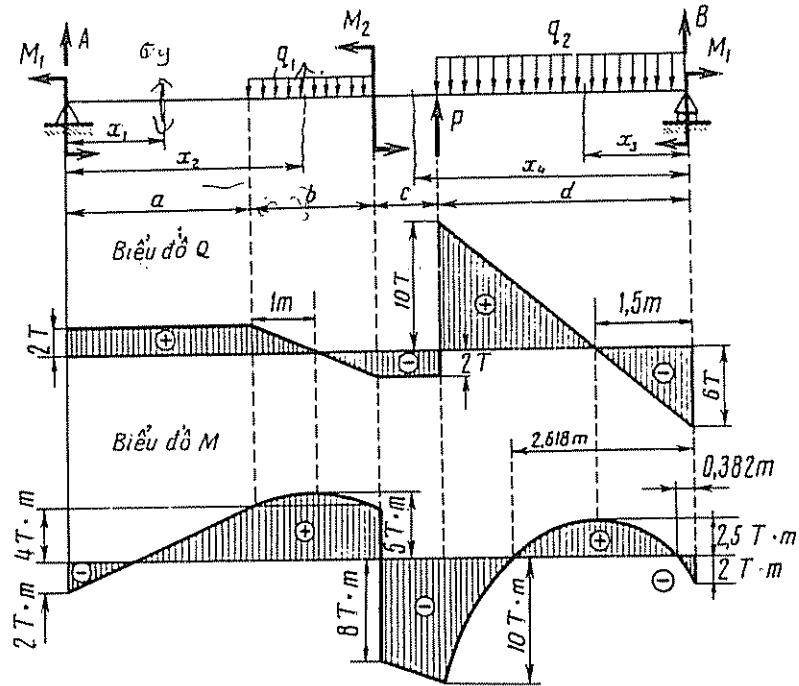
6. Trên các đoạn dầm, độ biến đổi giá trị momen uốn giữa hai mặt cắt nào đó bằng diện tích biểu đồ lực cắt bao hàm giữa hai mặt cắt ấy.

7. Nếu lấy chiều trục x từ phải sang trái thì ta có $Q = -\frac{dM}{dx}$.

8. Phía lồi của biểu đồ momen uốn dạng cong đón mũi của vector tải trọng phân bố.

Nên chú ý rằng ở mặt cắt trùng với trục đối xứng của dầm, lực cắt (lực đối xứng ngược) bằng không, còn ở mặt cắt trùng với trục đối xứng ngược của dầm, momen uốn (momen đối xứng) bằng không. Nếu ở chỗ có trục đối xứng của dầm, có lực tập trung tác dụng thì ở mặt cắt bên phải và mặt cắt bên trái trục đối xứng, lực cắt có giá trị lực tập trung.

Thí dụ 26: Cho $M_1 = 2Tm$, $M_2 = 12Tm$, $q_1 = 2T/m$, $q_2 = 4T/m$, $P = 12T$, $a = 3m$, $b = 2m$, $c = 1m$, $d = 4m$ (hình 54). Vẽ biểu đồ Q và M .



Hình 54

Bài giải: Từ các điều kiện tĩnh học: tổng momen đối với gối phải và gối trái bằng không, ta tính được phản lực A và B của các gối:

$$A(a + b + c + d) - q_1 b \left(\frac{b}{2} + c + d \right) - M_2 + Pd - q_2 d \frac{d}{2} = 0.$$

$$A \cdot 10 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 12 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0; A = 2T;$$

$$B(d + c + b + a) - q_2 d \left(\frac{d}{2} + c + b + a \right) + P(c + b + a) + M^2 - q_1 b \left(\frac{b}{2} + a \right) = 0.$$

$$B \cdot 10 - 4 \cdot 4 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 0; B = 6T.$$

Để đơn giản biểu thức của Q và M , đối với các đoạn dài bằng a và b , ta xét các tải trọng ở bên trái mặt cắt; còn đối với các đoạn dài bằng c và d , ta xét các tải trọng ở bên phải mặt cắt.

$$0 \leq x_1 \leq a;$$

$$Q_{x_1} = A = 2T; M_{x_1} = -M_1 + Ax_1 = -2 + 2x_1;$$

$$M_{x_1} = 0 = -2Tm; M_{x_1=a=3} = -2 + 2 \cdot 3 = 4Tm.$$

$$a \leq x_2 \leq a + b.$$

$$Q_{x_2} = A - q_1(x_2 - a) = 2 - 2(x_2 - 3); Q_{x_2=a=3} = 2T$$

$$Q_{x_2=a+b=5} = 2 - 2 \cdot 2 = -2T.$$

$$M_{x_2} = -M_1 + Ax_2 - q_1 \frac{(x_2 - a)^2}{2} = -2 + 2x_2 - (x_2 - 3)^2$$

$$M_{x_2=a=3} = -2 + 6 = 4Tm; M_{x_2=a+b=5} = -2 + 2 \cdot 5 - 2^2 = 4Tm.$$

Vi $Q_{x_2} = -2x_2 + 8 = 0$ khi $x_2 = 4\text{m}$, do đó $\max M_{x_2=4} = -2 + 2 \cdot 4 - 1 = 5\text{Tm}$.

$$0 \leq x_3 \leq d.$$

$$Q_{x_3} = -B + q_2 x_3 = -6 + 4x_3; \quad Q_{x_3=0} = -6\text{T}.$$

$$Q_{x_3=d=4} = -6 + 4 \cdot 4 = 10\text{T}.$$

$$M_{x_3} = -M_1 + Bx_3 - q_2 \frac{x_3^2}{2} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2.$$

$$M_{x_3=0} = -2\text{Tm}; \quad M_{x_3=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -10\text{Tm}.$$

Vi $Q_{x_3} = -6 + 4x_3 = 0$ khi $x_3 = \frac{3}{2}\text{m}$, do đó $\max M_{x_3=3/2} = -2 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 2,5\text{Tm}$.

$$d \leq x_4 \leq d + c.$$

$$Q_{x_4} = -B + q_2 d - P = -6 + 4 \cdot 4 - 12 = -2\text{T};$$

$$M_{x_4} = -M_1 + Bx_4 - q_2 d(x_4 - d/2) + P(x_4 - d) = -2 + 6x_4 - 16(x_4 - 2) + 12(x_4 - 4);$$

$$M_{x_4=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = -10\text{Tm}.$$

$$M_{x_4=d+c=5} = -2 + 6 \cdot 5 - 16 \cdot 3 + 12 \cdot 1 = -8\text{Tm}.$$

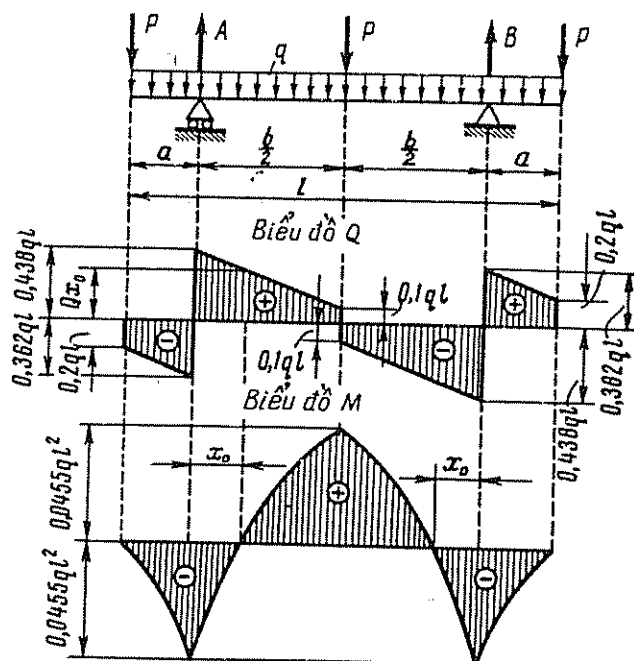
Ta xác định mặt cắt ở đó $M_{x_3} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2 = 0$.

$$x_3^2 - 3x_3 + 1 = 0; \quad x_3 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \approx 1,5 \pm 1,118;$$

$$x_{3_1} = 2,618\text{m}; \quad x_{3_2} = 0,382\text{m}.$$

Dựa vào những kết quả ở trên, ta vẽ được biểu đồ Q và M ở hình 54.

Thí dụ 27. Cho $q, l, P = 0,2ql$ (hình 55).



Hình 55

Xác định chiều dài hợp lý nhất của công xon a và vẽ biểu đồ Q và M.

Bài giải: Chiều dài hợp lý nhất của công xon của dầm là chiều dài làm cho momen uốn cực đại của dầm có giá trị bé nhất. Chiều dài hợp lý nhất của công xon xác định từ điều kiện momen uốn ở mặt cắt gối (M_g) và momen uốn cực đại trong nhịp giữa hai gối (M_{\max}) có giá trị tuyệt đối bằng nhau. Vì dầm đối xứng đối với mặt cắt ở giữa dầm, nên M_{\max} cũng ở giữa dầm, và momen uốn M_g ở mặt cắt hai gối bằng nhau.

Điều kiện để xác định chiều dài hợp lý nhất của công xon là $|M_g| = |M_{\max}|$. Ta tìm những momen này. Phản lực ở các gối

$$A = B = \frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}$$

$$M_g = -Pa - \frac{qa^2}{2}; M_{\max} = -P\frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} + A\frac{l-2a}{2} = -\frac{Pl}{2} - \frac{ql^2}{8} + \left(\frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}\right)\frac{l-2a}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}$$

Từ điều kiện $|M_g| = |M_{\max}|$

$$Pa + \frac{qa^2}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{qla}{2}$$

hay:

$$\frac{a^2}{l^2} + \left(\frac{5P}{ql} + 1\right)\frac{a}{l} - \frac{1}{4}\left(\frac{2P}{ql} + 1\right) = 0.$$

Từ đó rút ra:

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{5P}{ql} + 1\right) + \sqrt{\left(\frac{5P}{ql} + 1\right)^2 + \frac{2P}{ql} + 1} \right]$$

Ta bỏ dấu trừ trước dấu căn vì tỉ số a/l không thể có giá trị âm. Ta vẽ biểu đồ Q và M. Vì $P/ql = 0,2$ nên $a = \frac{\sqrt{5,4} - 2}{2}l \approx 0,162l$, $b = l - 2a \approx l(1 -$

$$- 0,324) = 0,676l \text{ và } A = B = \frac{3}{2}0,2ql + \frac{ql}{2} = 0,8ql.$$

Vì trên suốt chiều dài dầm có tải trọng phân bố đều tác dụng, do đó biểu đồ Q của các đoạn đều bậc nhất, và biểu đồ M là đường parabol. Vì dầm đối xứng nên biểu đồ Q đối xứng ngược, còn biểu đồ M đối xứng. Ở đầu trái của dầm $Q = -P = -0,2ql$.

Ở đầu phải của công xon bên trái

$$Q = -P - qa \approx -(0,2 + 0,162)ql = -0,362ql.$$

Vi có phản lực A , biểu đồ Q ở gối có bước nhảy. Do đó ở đầu trái của nhịp giữa hai gối

$$Q = -0,362ql + 0,8ql = 0,438ql.$$

Ở bên trái mặt cắt giữa dầm

$$Q = -0,2ql + 0,8ql - 0,5ql = 0,1ql.$$

Với các giá trị đã tính được ở trên, ta vẽ được biểu đồ Q trên hình 55.

Ở đầu trái của dầm momen uốn $M = 0$. Ở mặt cắt gối $M_g \approx -0,2ql \cdot 0,162l - \frac{q}{2}(0,162l)^2 = -0,0455ql^2$.

Ở giữa dầm

$$M_{\max} = |M_g| = 0,0455ql^2.$$

Tọa độ x_0 của mặt cắt có $M = 0$ xác định như sau. Xét các tam giác đồng dạng ở biểu đồ Q

$$\text{hay} \quad \frac{Q_{x_0} - 0,1ql}{0,438ql - 0,1ql} = \frac{(b/2) - x_0}{b/2},$$
$$\frac{Q_{x_0} - 0,1ql}{0,338ql} = \frac{0,338l - x_0}{0,338l}$$

Từ đó rút ra

$$Q_{x_0} = (0,438l - x_0)q.$$

Sự thay đổi giá trị của biểu đồ M từ mặt cắt gối đến mặt cắt có tọa độ x_0 bằng diện tích hình thang có chiều cao x_0 của biểu đồ Q , tức là:

$$\frac{0,438ql - Q_{x_0}}{2} x_0 = 0,0455ql^2,$$

hay

$$(0,438l + 0,438l - x_0)x_0 = 0,091l^2,$$

hay

$$x_0^2 - 0,876lx_0 + 0,091l^2 = 0.$$

và

$$x_0 = l(0,438 \pm \sqrt{0,438^2 - 0,091}) = l(0,438 \pm \sqrt{0,101})$$

Vi x_0 không thể lớn hơn $b/2 = 0,338l$, do đó ta chỉ giữ nghiệm $x_0 = l(0,438 - \sqrt{0,101}) \approx 0,122l$.

Dựa vào các giá trị tìm được, ta vẽ được biểu đồ M trên hình 55.

Thí dụ 28. Cho P , a (hình 56, a)

Vẽ biểu đồ Q và M .

Bài giải. Vì ở mặt cắt B chỗ khớp treo, momen uốn bằng không, dầm cho trước có thể phân thành hai dầm (hình 56, b): dầm đơn giản AB ở bên trái và công xon BC ở bên phải. Đầu B của dầm AB tựa vào đầu tự do của công xon. Có thể xét riêng biệt hai dầm (hình 56, c). Ở dầm AB các phản lực gối $A = B = P$. Ảnh hưởng của dầm AB vào công xon là lực tập trung $B = P$ do gối B tác dụng vào đầu tự do.

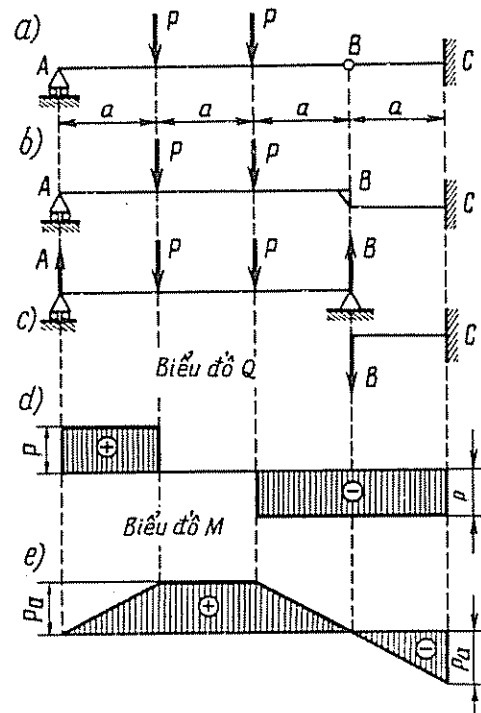
Sau đây ta tính riêng từng dầm. Trên đoạn trái của dầm AB , $Q = A = P$. Trên đoạn giữa $Q = 0$ và đoạn phải $Q = -P$. Trên công xon $Q = -P$. Biểu đồ vẽ trên hình 56, d.

Trên những đoạn dầm mà $Q = \text{const}$, momen uốn biến đổi theo quy luật bậc nhất và trên đoạn có $Q = 0$, $M = \text{const}$. Sự biến đổi của M trên các đoạn có thể tính dễ dàng theo diện tích của biểu đồ Q . Biểu đồ momen uốn vẽ ở hình 56, e.

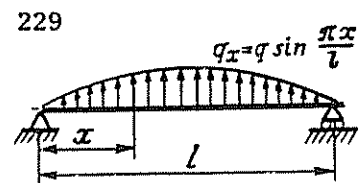
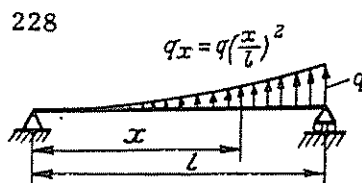
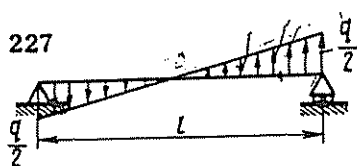
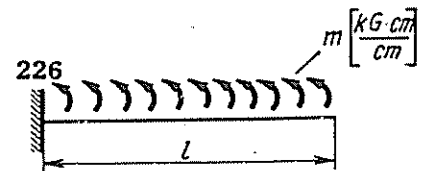
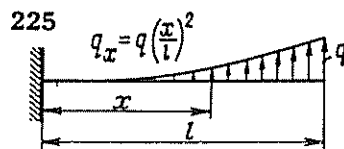
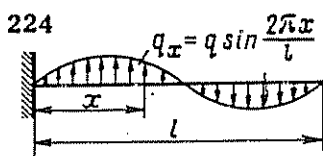
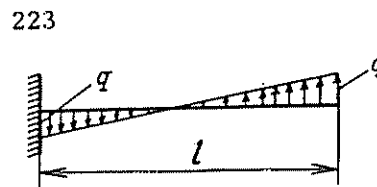
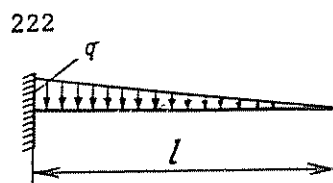
Bài tập 222 — 275. Vẽ biểu đồ lực cắt Q và momen uốn M .

Trong các bài 251, 253, 255, 256 và 260, các biểu đồ Q và M vẽ với chiều dài a hợp lý nhất của công xon.

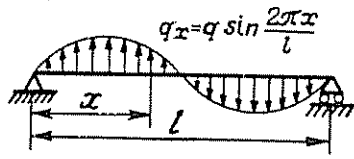
Trong bài 252, vẽ biểu đồ M mà không cần tính phản lực gối và lực cắt Q .



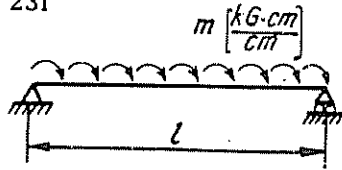
Hình 56



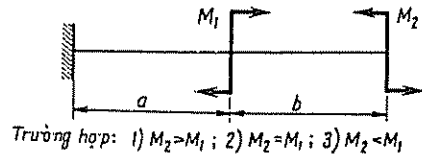
230



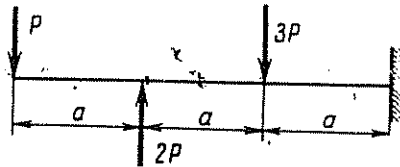
231



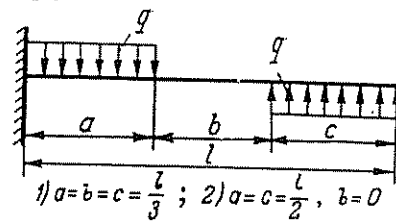
232



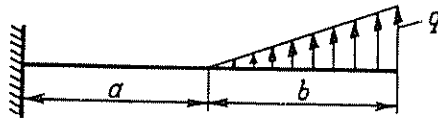
233



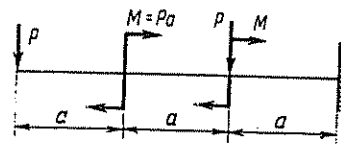
234



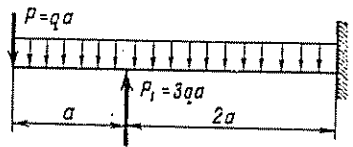
235



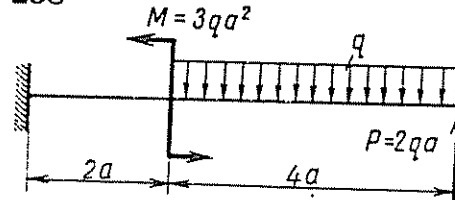
236



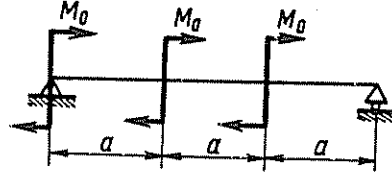
237



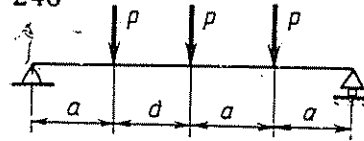
238



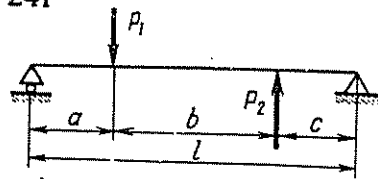
239



240

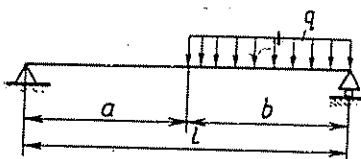


241



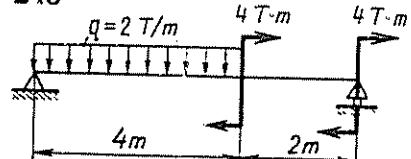
- 1) $P_1 = P_2 = P$, $a = b = c = \frac{l}{3}$
 2) $P_1 = 2P_2$, $a = c$, $b = 2a$

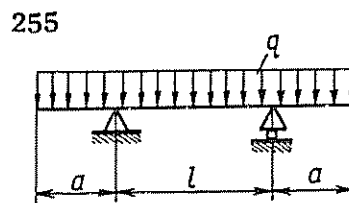
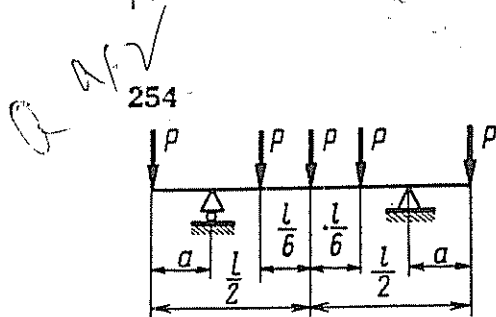
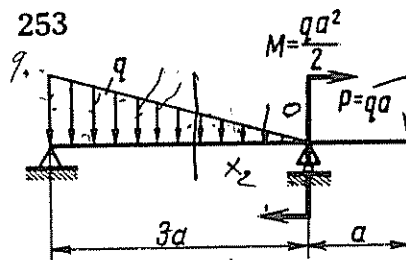
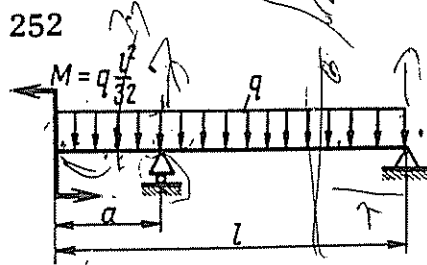
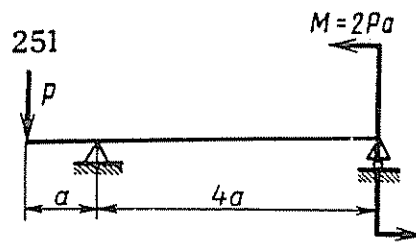
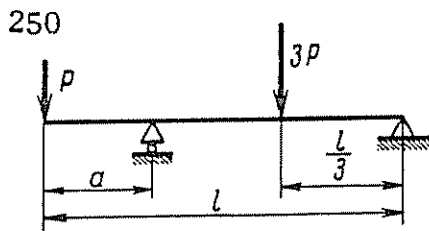
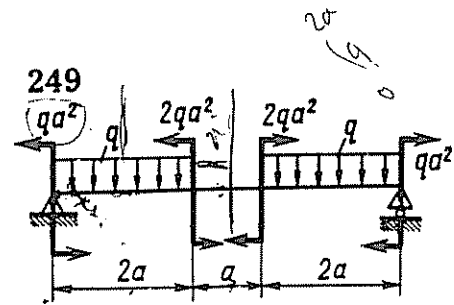
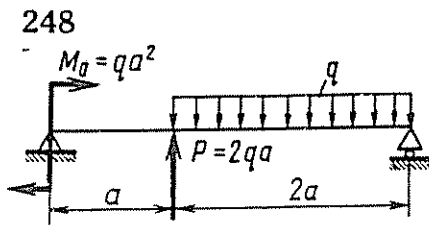
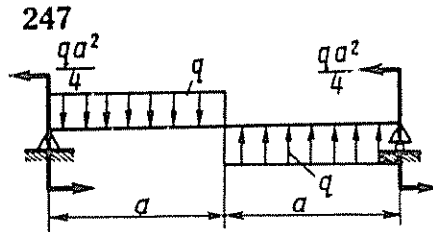
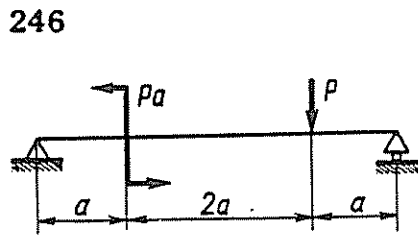
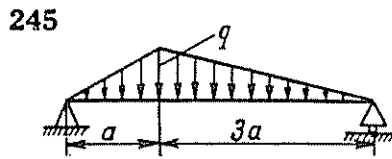
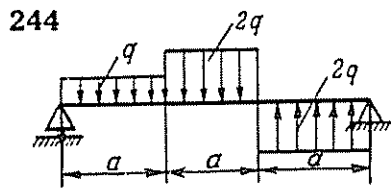
242



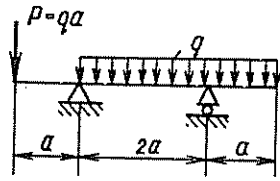
- 1) $a = b = \frac{l}{2}$; 2) $a = \frac{l}{4}$; $b = \frac{3}{4}l$;
 3) $a = \frac{3}{4}l$, $b = \frac{l}{4}$

243

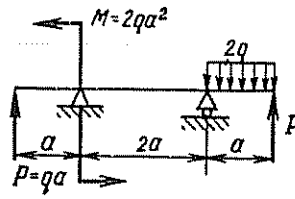




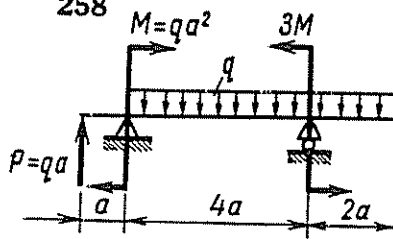
256



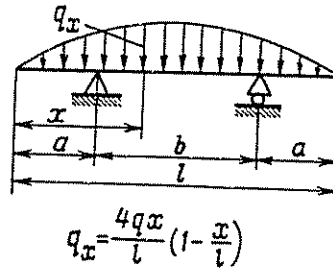
257



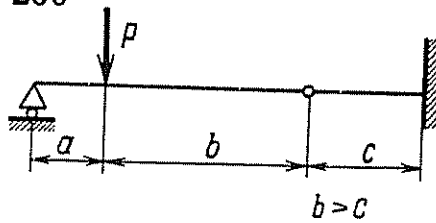
258



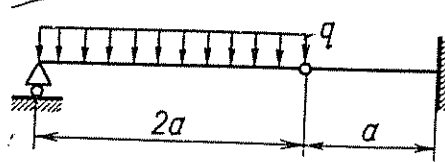
259



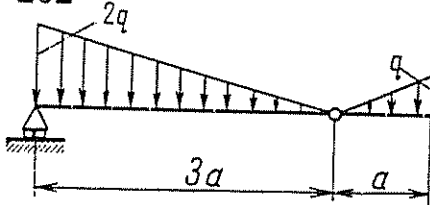
260



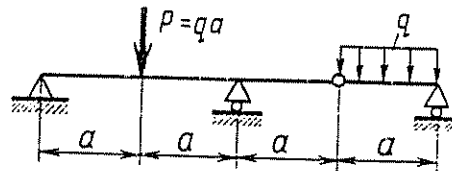
261



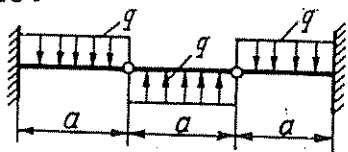
262



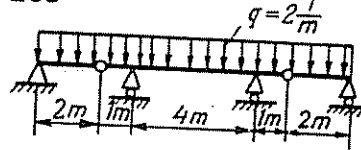
263



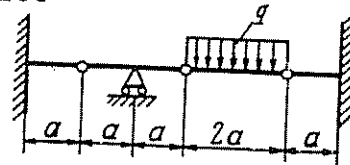
264



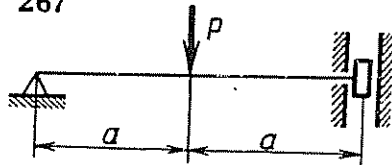
265



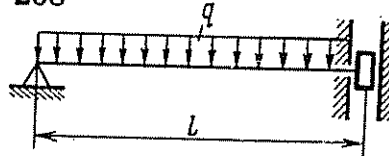
266



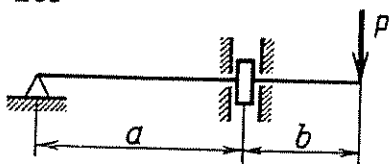
267



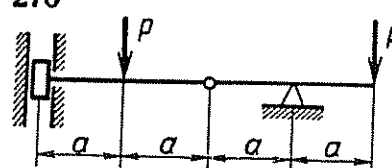
268



269

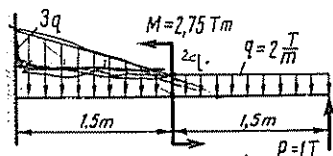


270

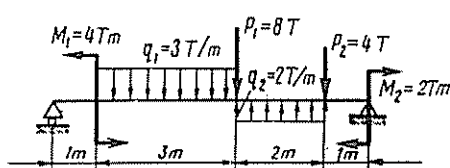


Handwritten notes: $\int_0^x q dx$, $\int_0^x 2qx dx$, $\int_0^x 3qx dx$

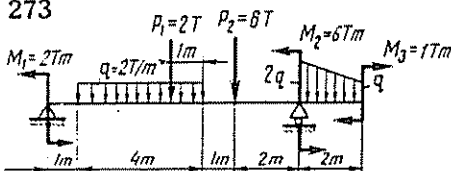
271



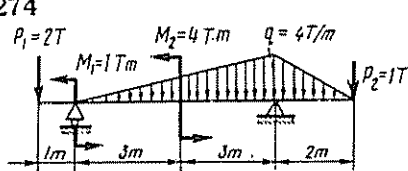
272



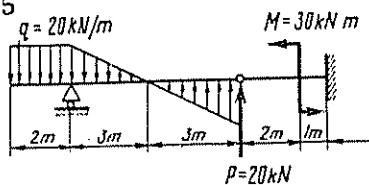
273



274

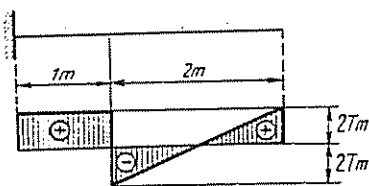


275

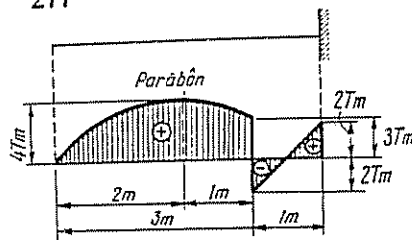


Bài tập 276 — 285. Vẽ biểu đồ lực cắt Q và xác định các tải trọng tác dụng vào dầm theo biểu đồ momen uốn M cho trước.

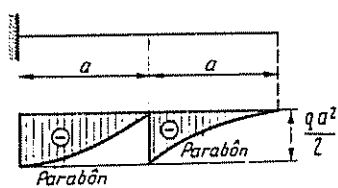
276



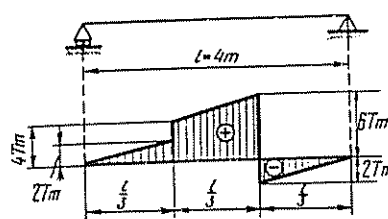
277



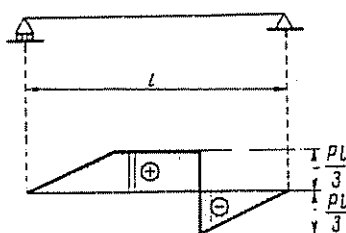
278



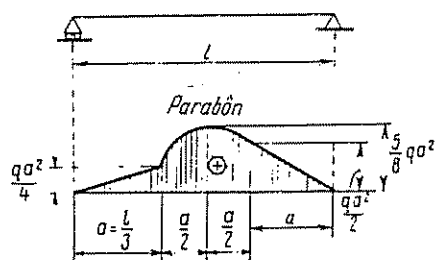
279



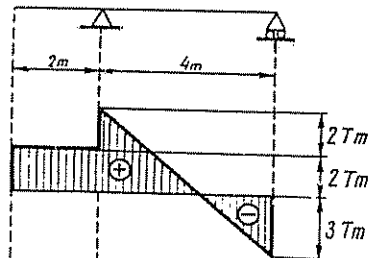
280



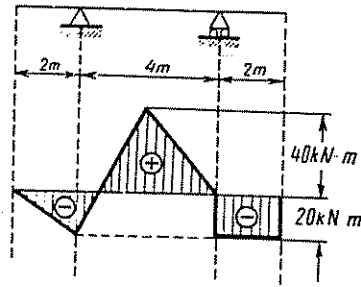
281



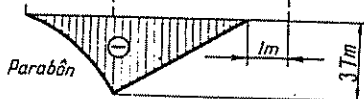
282



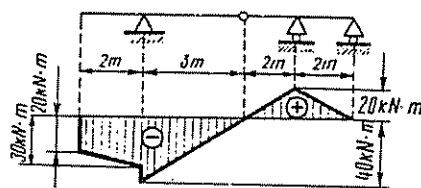
283



284



285



§ 20. Ứng suất pháp và chọn mặt cắt ngang dầm.

Ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang dầm bị uốn tính theo công thức:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (92)$$

trong đó M — momen uốn tại mặt cắt đang xét, y — tọa độ của điểm đang xét tính từ đường trung hòa, I — momen quán tính của mặt cắt đối với đường trung hòa.

Trên mặt cắt ngang, ứng suất pháp kéo lớn nhất và nén lớn nhất ở những điểm xa đường trung hòa nhất, và tính theo công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{My_1}{I} \quad (93)$$

$$\sigma_{\min} = - \frac{My_2}{I} \quad (94)$$

trong đó y_1 và y_2 là khoảng cách từ đường trung hòa đến các thớ bị kéo và bị nén xa nhất.

Đối với những dầm làm bằng vật liệu có độ bền kéo bằng độ bền nén, tức là $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, thì kích thước cần thiết của mặt cắt ngang dầm bị uốn tính theo ứng suất pháp phát sinh tại điểm xa đường trung hòa nhất. Khi đó công thức tính toán để chọn mặt cắt có dạng:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (95)$$

trong đó $W = I/|y_{\max}|$ — momen chống uốn của mặt cắt ngang dầm đối với đường trung hòa, $|y_{\max}|$ — khoảng cách từ thớ xa nhất đến đường trung hòa, M_{\max} — giá trị tuyệt đối lớn nhất của momen uốn; $[\sigma]$ — ứng suất cho phép về uốn của vật liệu.

Đẳng thức (95) không được dùng khi sai lệch quá $\pm 5\%$. Chỉ khi chọn mặt cắt thép định hình mới cho phép sai hơn thế nhưng phải thiên về phía tăng mức an toàn độ bền.

Đối với dầm làm bằng vật liệu chịu kéo và nén khác nhau, công thức chọn mặt cắt trong phép tính về uốn có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1 y_1}{I} \leq [\sigma_k] \quad (96)$$

$$|\sigma_{\min}| = \left| \frac{M_2 y_2}{I} \right| \leq [\sigma_n] \quad (97)$$

trong đó M_1 và M_2 — giá trị tuyệt đối lớn nhất của momen uốn tại mặt cắt nguy hiểm đối với thờ kéo và thờ nén, $[\sigma_k]$ và $[\sigma_n]$ — ứng suất cho phép của vật liệu dầm tương ứng với kéo và nén.

Các công thức (96) và (97) có thể viết thành:

$$W_1 = M_1 / [\sigma_k]; \quad W_2 = M_2 / [\sigma_n]$$

trong đó $W_1 = I / y_1$ và $W_2 = I / y_2$ là momen chống uốn của mặt cắt tương ứng với việc tính ứng suất của thờ kéo và thờ nén.

Điều kiện để dầm có độ bền đều tại các thờ bên của mặt cắt nguy hiểm là nếu dầm làm bằng vật liệu chịu kéo và nén giống nhau thì mặt cắt ngang dầm đối xứng qua đường trung hòa, còn nếu dầm làm bằng vật liệu chịu kéo và nén khác nhau thì mặt cắt ngang không đối xứng qua đường trung hòa. Khi đó, hợp lý nhất là tạo được độ bền đều giữa thờ kéo và thờ nén, tức là làm thỏa mãn đồng thời cả hai đẳng thức (96) và (97).

Ta xét tỉ số sau đây.

$$\frac{M_1}{W_1} : \frac{M_2}{W_2} = [\sigma_k] : [\sigma_n]$$

Nếu momen uốn M_1 và M_2 ở các mặt cắt nguy hiểm có giá trị tuyệt đối lớn nhất bằng nhau, thì tỉ số trên có dạng:

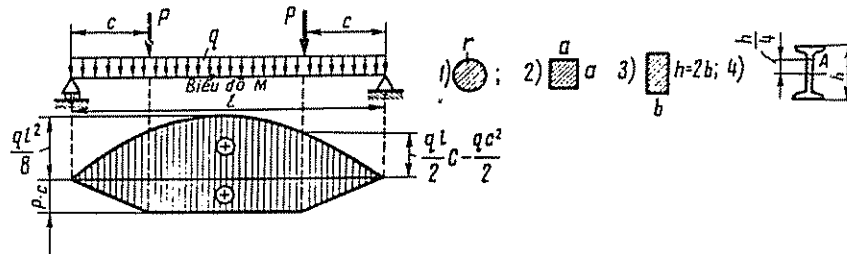
$$\frac{[\sigma_n]}{[\sigma_k]} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{y_2}{y_1} \quad (98)$$

Đồng thời với điều kiện về độ bền của dầm, ta cần phải thỏa mãn điều kiện tiết kiệm. Vì độ bền của mặt cắt ngang dầm được xác định theo momen chống uốn W ; còn trọng lượng lại tỉ lệ với diện tích F của mặt cắt, do đó mức độ tiết kiệm có thể đánh giá bằng tỉ số $\xi = W / F^{3/2}$; tỉ số này gọi là *momen chống uốn riêng* của mặt cắt. Tỉ số này càng lớn thì mặt cắt sử dụng càng tiết kiệm.

Thí dụ 29: Cho $q = 11 \text{ kG/cm}$, $P = 1\text{T}$, $l = 4\text{m}$, $c = 1\text{m}$, $[\sigma_n] = 1600 \text{ kG/cm}^2$ (hình 57).

Trong hệ SI $q = 10,8 \text{ kN/m}^2$, $P = 9,8 \text{ kN}$, $l = 4\text{m}$, $c = 1\text{m}$, $[\sigma_n] = 157 \text{ MN/m}^2$.

Tính kích thước cần thiết của mặt cắt hình tròn, hình vuông, hình chữ nhật và hình chữ I cân, tỉ số trọng lượng dầm làm bằng các mặt cắt trên, ứng suất pháp tại điểm A của một mặt cắt ở chỗ đặt lực P đối với dầm chữ I.



Hình 57

Bài giải. Vì dầm đối xứng qua mặt cắt giữa dầm nên momen uốn cực đại cũng ở mặt cắt này. Đối với tải trọng phân bố đều, biểu đồ M là đường parabol với $M_{\max q} = ql^2/8$, còn đối với các lực tập trung, biểu đồ M có hình thang với

$$M_{\max P} = PC. \text{ Do đó } M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + PC = \frac{1,1 \cdot 4^2}{8} + 1 \cdot 1 = 3,2 \text{ Tm. Trong hệ SI}$$

$$M_{\max} = \frac{10,8 \cdot 4^2}{8} + 9,8 \cdot 1 = 31,4 \text{ kNm.}$$

Theo công thức lĩnh toán (95) momen chống uốn cần thiết của mặt cắt phải có giá trị:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma_u]} = \frac{3,2 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} = 200 \text{ cm}^3$$

Trong hệ SI:

$$W = \frac{31,4}{157 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

1. Đối với mặt cắt hình tròn $W_1 = \pi d^3/32 = 200 \text{ cm}^3$;

$$d = \sqrt[3]{6400/\pi} = 12,68 \text{ cm}, F = \pi d^2/4 = 126,8 \text{ cm}^2.$$

2. Đối với mặt cắt hình vuông $W_2 = a^3/6 = 200 \text{ cm}^3$

$$a = \sqrt[3]{200 \cdot 6} = 10,63 \text{ cm}, F = a^2 \approx 113 \text{ cm}^2.$$

3. Đối với mặt cắt hình chữ nhật $W_3 = bh^2/6 = h^3/12 = 200 \text{ cm}^3$, $h = \sqrt[3]{2400} = 13,39 \text{ cm}$, $F = bh \leq h^2/2 = 89,6 \text{ cm}^2$.

4. Đối với mặt cắt hình chữ I số 20a $W = 184 \text{ cm}^3$, số 20a $W = 203 \text{ cm}^3$

$$\text{Kiểm tra mặt cắt số 20, ta có } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma_u]}{[\sigma_u]} \cdot 100 = \frac{\frac{M_{\max}}{W_{\text{số 20}}} - \frac{M_{\max}}{W}}{\frac{M_{\max}}{W}} \cdot 100 =$$

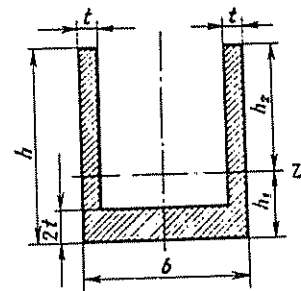
$$= \frac{W - W_{\text{số 20}}}{W_{\text{số 20}}} \cdot 100 = \frac{200 - 184}{184} \cdot 100 = 8,7\% \text{ (vượt ứng suất).}$$

Vì độ quá tải lớn hơn 5%, không dùng được mặt cắt chữ I số 20.

$$\begin{aligned} \text{Kiểm tra mặt cắt số 20a, ta có } & \frac{\sigma_{\max} - [\sigma_u]}{[\sigma_u]} \cdot 100 = \frac{W - W_{\text{số 20a}}}{W_{\text{số 20a}}} = \\ = & \frac{200 - 203}{203} \cdot 100 = -1,5\% \text{ (thiếu ứng suất)} \end{aligned}$$

Do đó ta lấy dầm số 20a với diện tích $F_4 = 28,9 \text{ cm}^2$ momen quán tính đối với đường trung hòa $I = 2030 \text{ cm}^4$ và chiều cao $h = 20 \text{ cm}$. Vì trọng lượng của dầm tỉ lệ với diện tích mặt cắt ngang, do đó tỉ số trọng lượng các dầm bằng tỉ số diện tích mặt cắt ngang. Lấy diện tích mặt cắt hình tròn bằng đơn vị quy ước, ta có $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : 0,89 : 0,71 : 0,23$.

Như vậy, thí dụ như dầm mặt cắt hình chữ I, mặc dầu có phần mặt cắt thừa chưa làm việc hết khoảng 1,5%, thì đã nhẹ hơn dầm mặt cắt hình tròn gần 4,4 lần.



Hình 58

Momen uốn tại mặt cắt ở dưới lực P :

$$\begin{aligned} M &= \frac{ql}{2} c - \frac{qc^2}{2} + Pc = \\ &= \frac{1,1 \cdot 4 \cdot 1}{2} - \frac{1,1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{5,3}{2} \text{ Tm} \end{aligned}$$

Trong hệ SI.

$$M = \frac{10,8 \cdot 4 \cdot 1}{2} - \frac{10,8 \cdot 1}{2} + 9,8 \cdot 1 = 26 \text{ kNm.}$$

Tại điểm A của mặt cắt này với $y = h/4 = 5 \text{ cm}$, ứng suất pháp là ứng suất nén (vì dầm cong xuống phía dưới), và tính theo công thức (92):

$$\sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{-5,3 \cdot 10^5 \cdot 5}{2 \cdot 2030} \approx -653 \text{ kG/cm}^2$$

Trong hệ SI.

$$\sigma_A = \frac{26 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-1}}{2030 \cdot 10^{-8}} = -64 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = -64 \text{ MN/m}^2$$

Thí dụ 30. Một dầm mặt cắt hình chữ U làm bằng vật liệu có $[\sigma_n] = 3[\sigma_k]$. Biết các kích thước $b = 20 \text{ cm}$ và $t = 1 \text{ cm}$, tính chiều cao hợp lý h của mặt cắt.

Bài giải: Giả sử trục z là đường trung hòa và khoảng cách đến các thớ biên là h_1 và h_2 . Theo điều kiện sử dụng hợp lý vật liệu (98) tức là điều kiện độ bền ở các thớ biên bằng nhau.

$$h_1/h_2 = [\sigma_k]/[\sigma_n] = 1/3. \text{ Vì } h_1 + h_2 = h, \text{ nên } h_1 = h/4 \text{ và } h_2 = 3h/4.$$

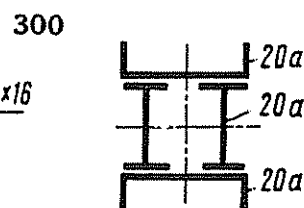
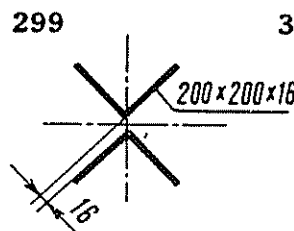
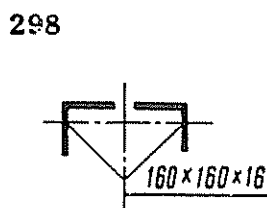
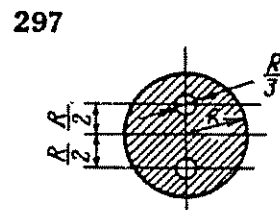
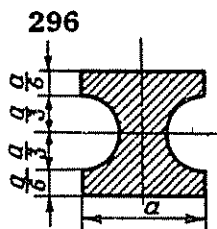
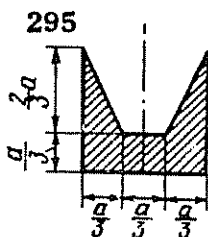
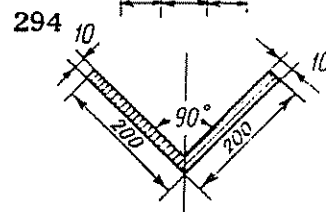
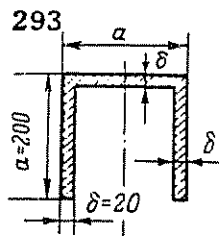
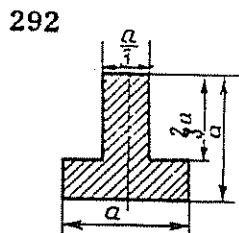
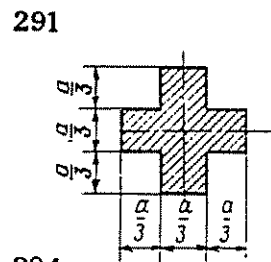
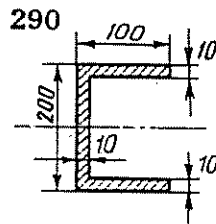
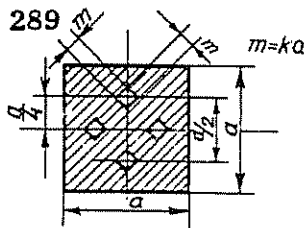
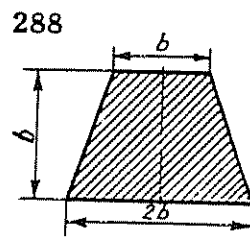
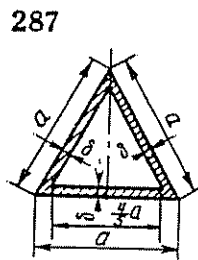
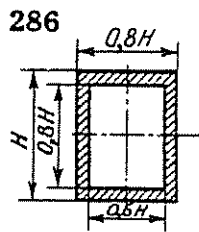
Đường trung hòa đi qua trọng tâm mặt cắt do đó momen tĩnh của mặt cắt đối với đường trung hòa bằng không, tức là:

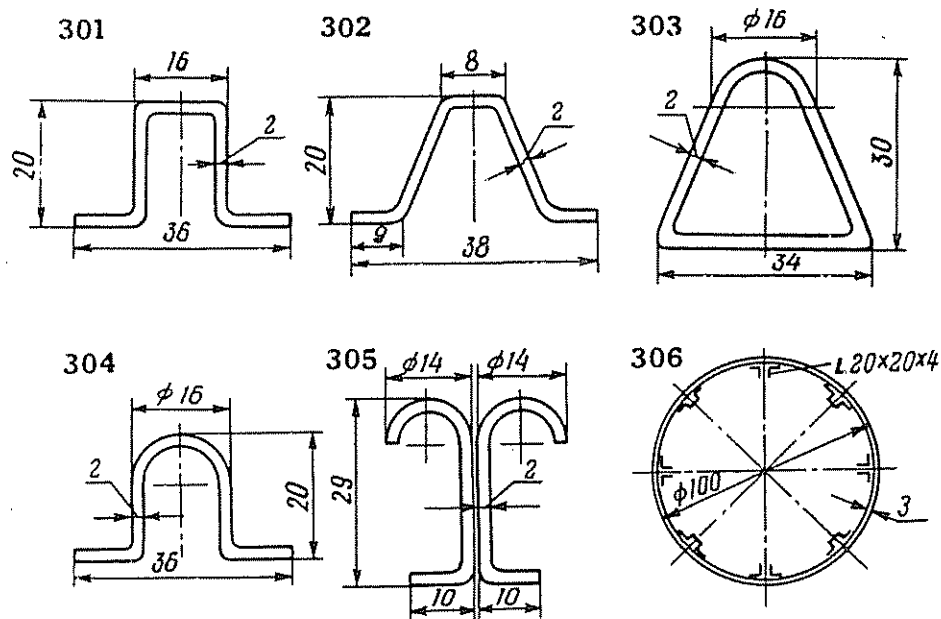
$$S_z = -(b-2l)2l \left(\frac{h}{4} - l \right) + 2ht \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{4} \right) = -36 \left(\frac{h}{4} - 1 \right) + \frac{h^2}{2} = 0$$

Từ đó rút ra $h^2 - 18h + 72 = 0$ và $h = 9 \pm \sqrt{9} = 9 \pm 3$.

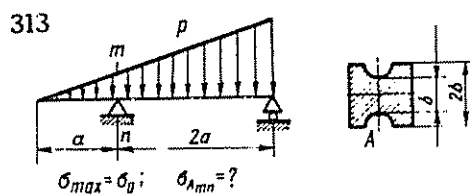
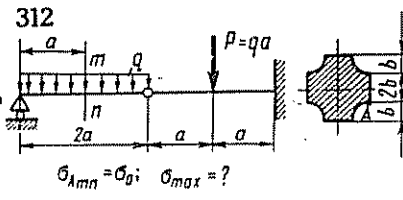
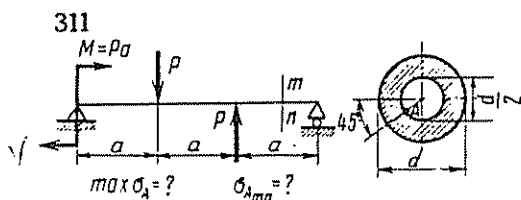
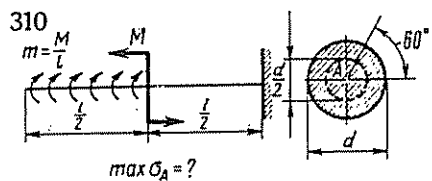
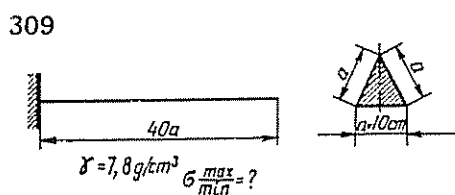
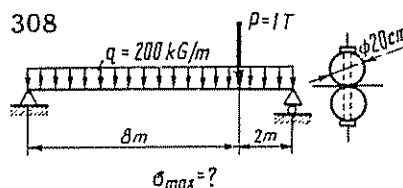
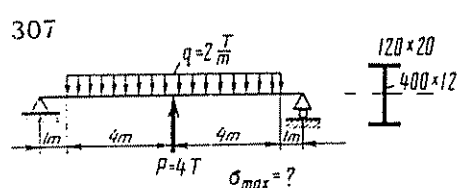
Do đó chiều cao h của mặt cắt có thể hoặc bằng 12cm hoặc 6cm.

Bài tập 286 – 306. Tính momen chống uốn W_x (z là trục trung tâm nằm ngang) của các mặt cắt dầm.





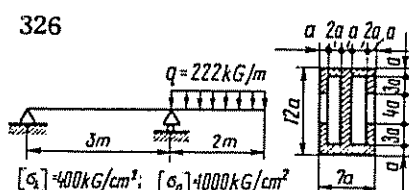
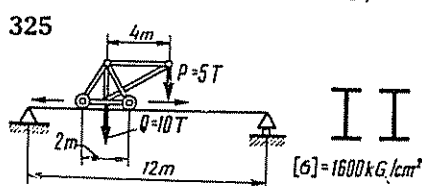
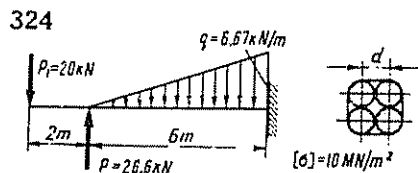
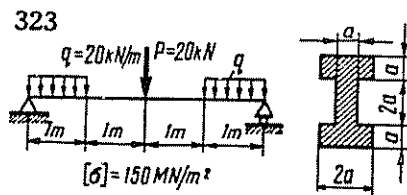
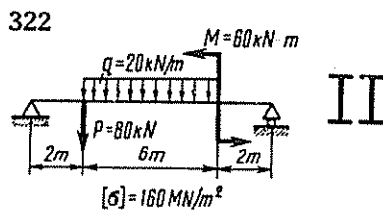
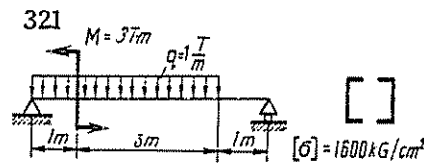
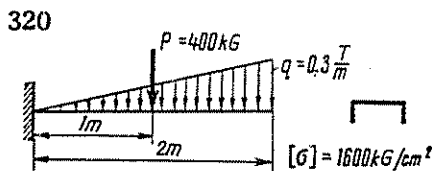
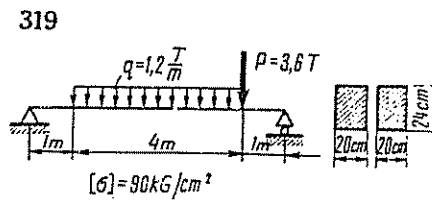
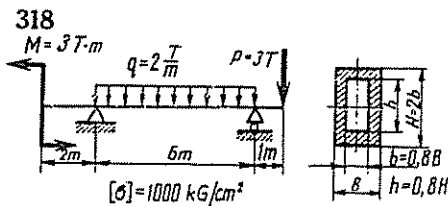
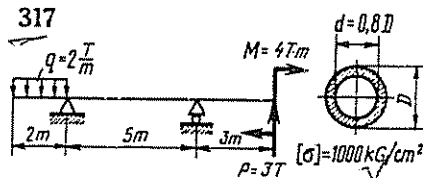
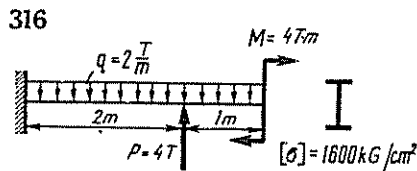
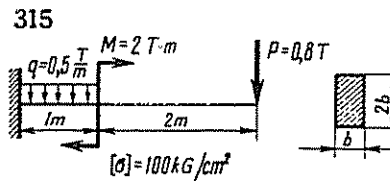
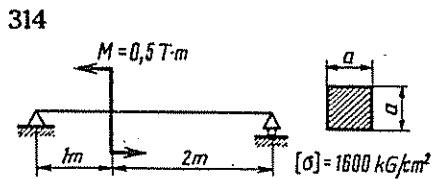
Bài tập 307 – 313. Tính ứng suất pháp ở các mặt cắt của dầm tại các điểm ghi ở hình vẽ.

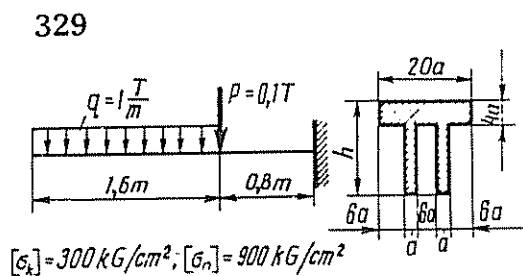
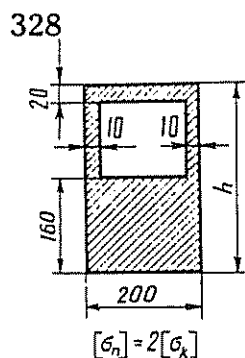
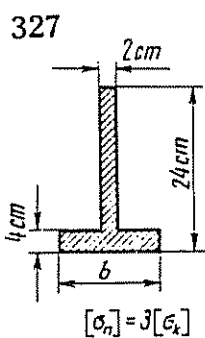


Ký hiệu σ_{\max} — ứng suất pháp lớn nhất và bé nhất tại mặt cắt nguy hiểm;
 σ_{\min}

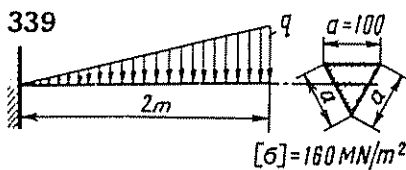
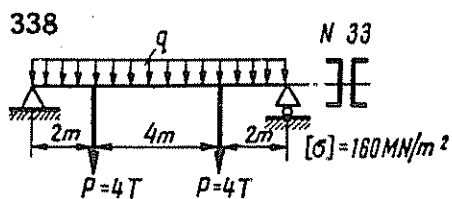
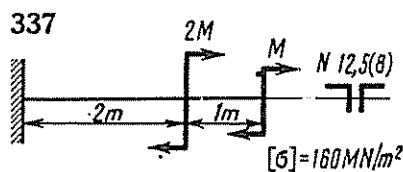
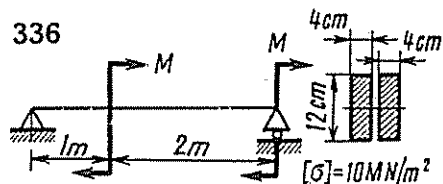
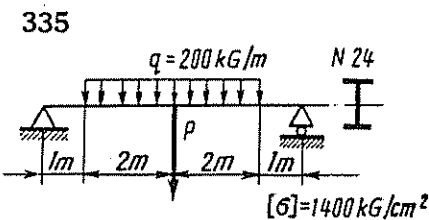
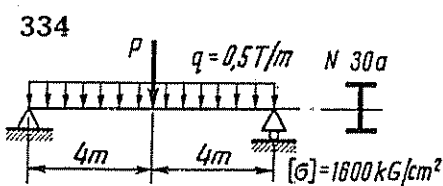
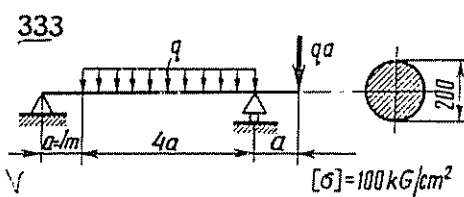
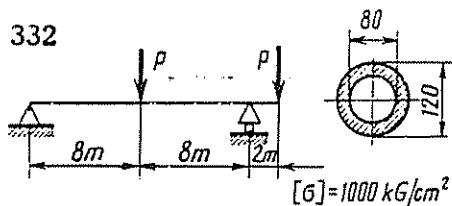
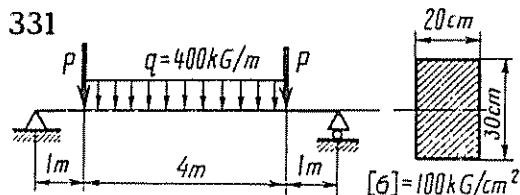
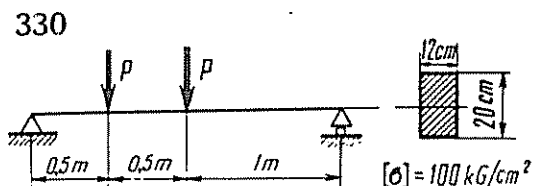
$\max \sigma_A$ — ứng suất pháp tại điểm A của mặt cắt nguy hiểm, $\sigma_{A\min}$ — ứng suất pháp tại điểm A của mặt cắt mn; γ — trọng lượng riêng của vật liệu làm dầm.

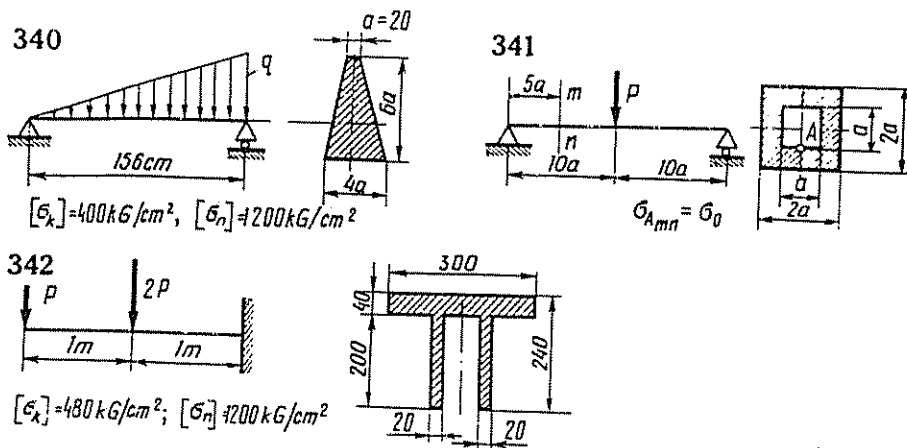
Bài tập 314 — 329. Chọn kích thước cần thiết của mặt cắt ngang dầm. Trong bài 319 phải xác định số lượng dầm mặt cắt hình chữ nhật có kích thước cho trước và được xếp song song. Ở bài 325 chọn mặt cắt dầm chữ I đối với vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động. Trong các bài 327 — 328 tính kích thước b và h từ điều kiện độ bền đều của thớ kéo và thớ nén.





Bài tập 330 — 342. Tính giá trị tải trọng cho phép tác dụng vào dầm có kích thước cho trước.





§ 21. Ứng suất tiếp, tâm uốn và kiểm tra độ bền của dầm theo ứng suất tiếp

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang hình chữ nhật của dầm (hình 59), giá trị ứng suất tiếp tính theo công thức D. I. Giurapxki:

$$\tau = \frac{QS}{bI} \quad (99)$$

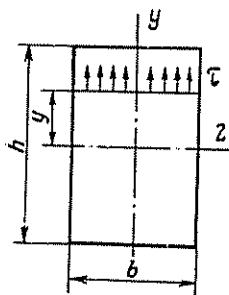
trong đó Q — lực cắt tại mặt cắt, $S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ — momen tĩnh đối với trục trung hòa z của phần mặt cắt nằm về một phía của đường có tọa độ y , là đường mà ta đang tính ứng suất tiếp; b — bề rộng mặt cắt và $I = bh^3/12$ — momen quán tính của mặt cắt đối với trục z .

Ứng suất tiếp cực đại ở tại đường trung hòa. Ứng suất này có giá trị.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (100)$$

trong đó $F = bh$ — diện tích mặt cắt ngang của dầm.

Đối với dầm mặt cắt ngang không phải là hình chữ nhật công thức (99) có thể dùng để tính gần đúng thành phần vuông góc với đường trung hòa của ứng suất tiếp, trong công thức này b là bề rộng của mặt cắt ở chỗ tính ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp tổng hợp ở các điểm trên chu tuyến của mặt cắt hướng theo đường tiếp xúc với chu tuyến, còn ở các điểm khác thì nghiêng so với mặt phẳng tải trọng.



Hình 59

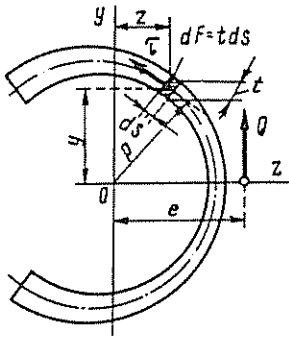
Tìm cho đúng ứng suất tiếp của những dầm có hình dạng mặt cắt bất kỳ là rất phức tạp. Dựa trên cơ sở một số giả thuyết tự chọn về hướng của ứng suất tiếp bên trong mặt cắt mà xác định chúng một cách gần đúng.

Đối với những dầm có mặt cắt ngang là mặt cắt thành mỏng (hình 60), ứng suất tiếp hướng theo tiếp tuyến của đường trung bình của mặt cắt và phân bố đều trên bề dày (l). Công thức tính ứng suất tiếp trong trường hợp này có dạng:

$$\tau = \frac{QS}{tI}, \quad (101)$$

trong đó S là momen tĩnh đối với đường trung hòa z của phần mặt cắt ở về một phía của đường vẽ vuông góc với đường trung bình tại điểm đang xét.

Nếu mặt cắt của dầm không đối xứng qua trục chính trung tâm y (trục này vuông góc với đường trung hòa z) thì trên mặt cắt sẽ phát sinh momen xoắn. Để triệt tiêu momen xoắn, lực cắt không được đặt ở trọng tâm mà đặt ở điểm có tên là tâm uốn.



Hình 60

Việc xác định vị trí tâm uốn của mặt cắt có dạng bất kỳ là một việc khó khăn. Đối với mặt cắt đối xứng qua đường trung hòa z (hình 60) tâm uốn nằm trên trục z , và cách trọng tâm một đoạn

$$e = \frac{1}{I} \int \frac{S}{t} \rho dF \quad (102)$$

trong đó ρ — cánh tay đòn của lực tiếp xúc phân tử τdF đối với trọng tâm mặt cắt, F — diện tích toàn bộ mặt cắt.

Nếu bề dày t của thành mặt cắt không đổi, thì biểu thức (102) được đơn giản hơn:

$$e = \frac{1}{I_s} \int S^2 \rho dS \quad (103)$$

Ở đây I_s — momen quán tính của đường trung bình toàn mặt cắt đối với trục z ; S^2 — momen tĩnh đối với trục z của cung S' đường trung bình ở về một phía của đường vẽ vuông góc với đường trung bình tại điểm đang xét, tích phân tính trên cung S .

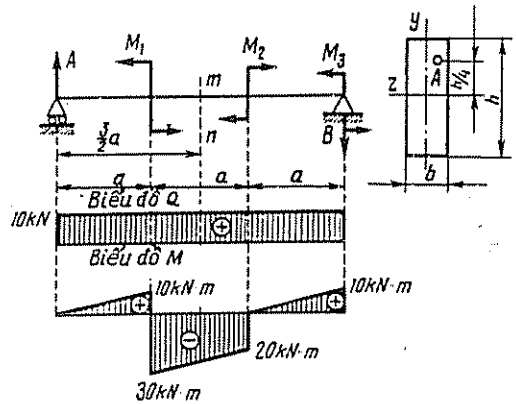
Nếu mặt cắt gồm nhiều phần có chiều dày t khác nhau nhưng là hằng số ở mỗi phần, e có thể tính bằng cách cộng các biểu thức (102) tính đối với từng phần.

Độ bền của dầm về mặt ứng suất tiếp được kiểm tra tại điểm có ứng suất tiếp cực đại của mặt cắt ngang, ở đây lực cắt có giá trị tuyệt đối cực đại Q_{max} .

Việc kiểm tra cần phải thực hiện đối với dầm ngắn, dầm có thành mỏng và cao, dầm làm bằng vật liệu chịu cắt (trượt) kém, và dầm có nhiều tải trọng lớn tác dụng ở gần gối. Công thức kiểm tra có dạng:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_0}{b_0 I} \leq [\tau] \quad (104)$$

trong đó S_0 — momen tĩnh đối với đường trung hòa của phần mặt cắt nằm ở về một phía của đường tác dụng của τ_{max} ; b_0 — bề rộng của mặt cắt ở chỗ τ_{max} tác dụng.



Hình 61

Đối với đại bộ phận các mặt cắt τ_{\max} tác dụng ở đường trung hòa.

Ứng suất tiếp cho phép $[\tau]$ thường lấy bằng 0,5 – 0,7 của $[\sigma]$. Thí dụ đối với thép CT.OC và CT.2 $[\tau] = 900 \text{ kG/cm}^2$; đối với thép CT.3 $[\tau] = 1000 \text{ kG/cm}^2$; đối với gỗ thông $[\tau] = 20 \text{ kG/cm}^2$.

Thí dụ 31: Cho $M_1 = 40 \text{ kNm}$, $M_2 = 20 \text{ kNm}$, $M_3 = 10 \text{ kNm}$, $a = 1\text{m}$, $b = 4\text{cm}$, $h = 12\text{cm}$ (hình 61).

Tính σ_A và τ_A ở mặt cắt mn.

Bài giải. Phản lực gối $A = B = \frac{M_1 - M_2 + M_3}{3a} = \frac{40 - 20 + 10}{3} = 10 \text{ kN}$.

Biểu đồ Q và M vẽ ở hình 61. Ở mặt cắt mn

$$M = -\frac{30 + 20}{2} = -25 \text{ kNm}; \quad Q = 10 \text{ kN}.$$

Vi điểm A ở vùng bị kéo của mặt cắt, nên theo công thức (92)

$$\sigma_A = \frac{|M|y}{I}$$

Đối với mặt cắt hình chữ nhật $I = bh^3/12 = 4 \cdot 12^3/12 = 576 \text{ cm}^4$. Tại điểm A, $y = h/4 = 3\text{cm}$. Do đó

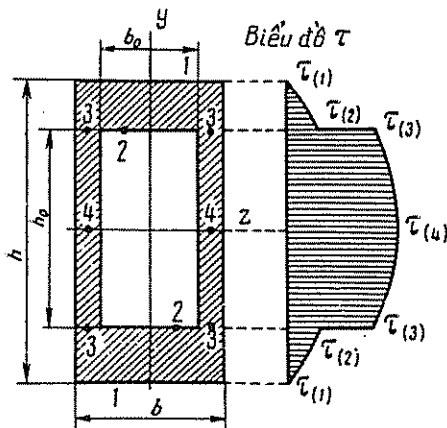
$$\sigma_A = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0,03}{576 \cdot 10^{-8}} \approx 130 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 130 \text{ MN/m}^2.$$

Theo công thức (99)

$$\begin{aligned} \tau_A &= \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q}{h^3b} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right) = \frac{9}{8} \cdot \frac{Q}{bh} = \\ &= \frac{9}{8} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{0,04 \cdot 0,12} = 2,34 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 2,34 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

Thí dụ 32. Cho $Q = 8T$; $h = 12\text{cm}$, $h_o = 8\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, $b_o = 4\text{cm}$ (hình 62).

Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp quy ước, vuông góc với đường trung hòa (theo công thức Giurapxki).



Hình 62

Bài giải. Bằng công thức (99) ta tính giá trị ứng suất tiếp tại điểm 1 trên thớ biên mặt cắt, điểm 2 trên thớ biên bản lề, điểm 3 xa đường trung hòa nhất trên bản lề, và điểm 4 trên đường trung hòa (hình 62). Momen quán tính đối với đường trung hòa z của mặt cắt

$$\begin{aligned} I &= \frac{bh^3}{12} - \frac{b_o h_o^3}{12} = \\ &= \frac{1}{12} (6 \cdot 12^3 - 4 \cdot 8^3) = \frac{2080}{3} \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Đối với điểm 1, $S_1 = 0$, do đó $\tau_1 = 0$.

Đối với điểm 2, $S_2 = b \frac{h - h_0}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{h - h_0}{4} \right) = 6 \cdot 2(6 - 1) = 60 \text{ cm}^3$

Do đó:

$$\tau_2 = \frac{QS_2}{bI} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 3}{6 \cdot 2080} \approx 115,4 \text{ kG/cm}^2.$$

Vì bề rộng của mặt cắt ở điểm 3 bằng $b - b_0$, nên

$$\tau_3 = \frac{QS_2}{(b - b_0)I} = \tau_2 \frac{b}{b - b_0} = 115,4 \cdot \frac{6}{2} = 346,2 \text{ kG/cm}^2$$

Đối với điểm 4.

$$S_4 = S_2 + (b - b_0) \frac{h_0}{2} \cdot \frac{h_0}{4} = 60 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 76 \text{ cm}^3$$

và

$$\tau_4 = \frac{QS_4}{(b - b_0)I} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 76 \cdot 3}{2 \cdot 2080} \approx 438,5 \text{ kG/cm}^2$$

Dựa vào các kết quả trên, ta vẽ được biểu đồ τ trên hình 62.

Thí dụ 33. Cho một mặt cắt thành mỏng có dạng một phần của hình vành khăn tròn với góc ở tâm là 2α , bán kính đường trung bình r và bề dày không đổi t (hình 63).

Xác định vị trí tâm uốn.

Bài giải: Trên hình vẽ ta có phần tử cung của đường trung bình $ds = r d\varphi$; diện tích phần tử hình vành khăn: $dF = t ds = r t d\varphi$; tọa độ trọng tâm của phần tử đối với hệ trục trung tâm yOz :

$$y = r \sin \varphi; \quad z = r \cos \varphi - a,$$

trong đó a là khoảng cách giữa trục y và trục y' đi qua tâm chính khúc O' của mặt cắt.

Bây giờ ta xác định vị trí trọng tâm O trên trục z . Vì trục y là trục trung tâm, nên momen tĩnh của hình đối với trục y bằng không, tức là:

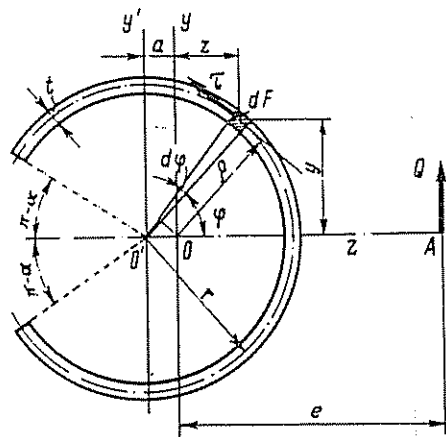
$$S_y = \int_F z dF = 2rt \int_0^\alpha (r \cos \varphi - a) d\varphi = 2rt(r \sin \alpha - a\alpha) = 0$$

Từ đó rút ra: $a = r \sin \alpha / \alpha.$

Cánh tay đòn ρ của nội lực tiếp xúc τds đối với trọng tâm của mặt cắt có giá trị:

$$\rho = r - a \cos \varphi = r \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \varphi \right)$$

Momen quán tính cung đường trung bình của mặt cắt đối với đường trung hòa z



Hình 63

$$I^s = \int_S y^2 ds = 2r^3 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{r^3}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Momen tĩnh S^s đối với trục z của đoạn cung đường trung bình ở về một phía của phần tử có tọa độ φ bằng:

$$S^s = \int_{S'} y ds = r^2 \int_\varphi^\alpha \sin \varphi d\varphi = r^2 (\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Theo công thức (103) khoảng cách e từ trọng tâm mặt cắt đến tâm uốn A bằng:

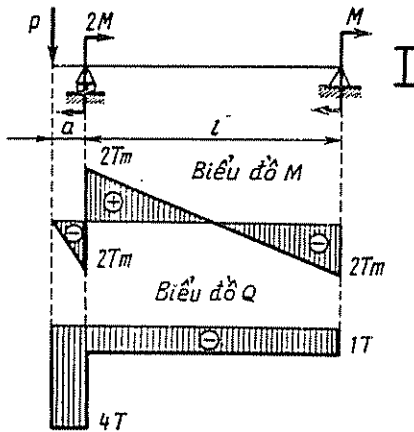
$$e = \frac{1}{I^s} \int_S S^s \rho ds = \frac{2}{r^2(2 - \sin 2\alpha)} 2r^4 \int_0^\alpha \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \varphi\right) (\cos \varphi - \cos \alpha) d\varphi,$$

hay

$$e = \frac{2r}{2\alpha - \sin 2\alpha} \left(\sin \alpha - 2\alpha \cos \alpha + \frac{1}{\alpha} \sin^2 \alpha \cos \alpha \right)$$

Khoảng cách từ tâm chính khúc O' của mặt cắt đến tâm uốn A

$$\begin{aligned} a + e &= \frac{r}{\alpha} \sin \alpha + \frac{2r}{2\alpha - \sin 2\alpha} \times \\ &\times \left(\sin \alpha - 2\alpha \cos \alpha + \frac{1}{\alpha} \sin^2 \alpha \cos \alpha \right) = \\ &= r \frac{4(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \end{aligned}$$



Hình 64

Thí dụ 34. Cho $P = 4T$, $M = 2Tm$, $a = 0.5m$; $l = 4m$, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $[\tau] = 1000 \text{ kG/cm}^2$ (Hình 64). Xác định số hiệu mặt cắt hình chữ I.

Bài giải. Trên hình 64, ta thấy biểu đồ M có thể vẽ một cách dễ dàng không cần tính toán. Trên đoạn hẫng $Q = \text{const} = -4T$. Trong nhịp giữa hai gối $Q = \text{const} < 0$. Trên biểu đồ M , ta có $\Delta M = 2Tm = -Q \cdot 2$. Do đó $Q = -1T$.

Biểu đồ Q vẽ trên hình 64.

Như vậy $M_{\max} = 2Tm$, $|Q|_{\max} = 4T$.

Từ công thức tính toán $W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} = 125 \text{ cm}^3$

Trong bảng thép hình, đối với mặt cắt thép chữ I số 16, $W = 109 \text{ cm}^3$, đối với thép chữ I số 18, $W = 143 \text{ cm}^3$.

Ta kiểm tra đối với số 16:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \left(\frac{125}{109} - 1 \right) 100 \approx 15\% \text{ (vượt ứng suất)}$$

Kiểm tra đối với số 18:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \left(\frac{125}{143} - 1 \right) 100 \approx -12,5\% \text{ (thiếu ứng suất)}$$

Ta chọn thép chữ I số 18; đối với hình này

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2 \cdot 10^5}{143} \approx 1400 \text{ kG/cm}^2$$

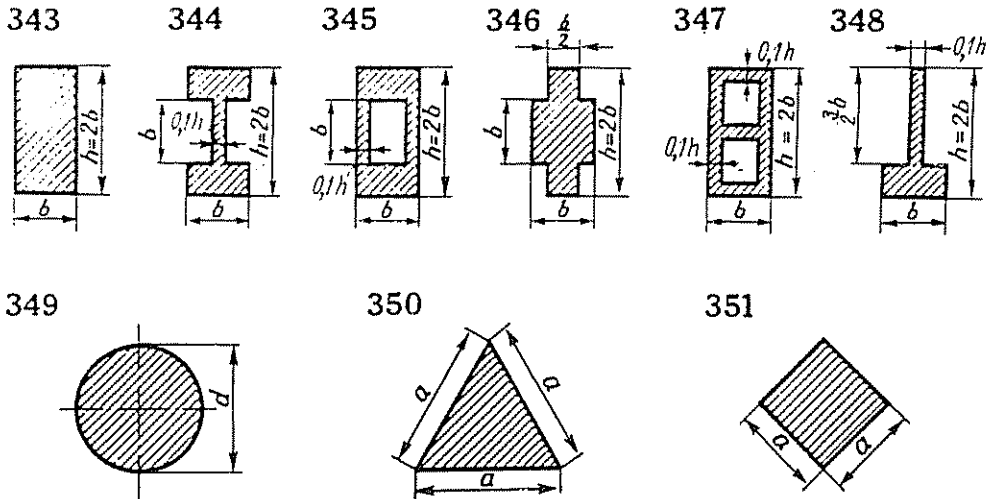
Theo bảng thép hình, $S = 81,4 \text{ cm}^3$; $I = 1290 \text{ cm}^4$; $d = 0,51 \text{ cm}$

Do đó

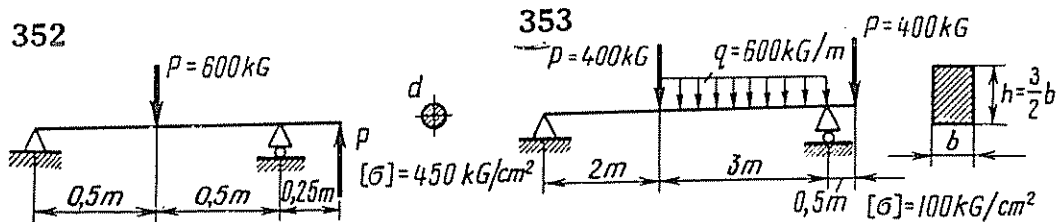
$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S}{dl} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 81,4}{0,51 \cdot 1290} \approx 495 \text{ kG/cm}^2 < [\tau]$$

Như vậy mặt cắt thép chữ I số 18 thỏa mãn về độ bền tĩnh theo ứng suất pháp và cả ứng suất tiếp.

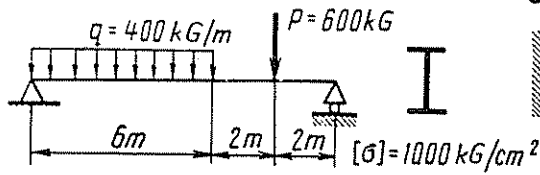
Bài tập 343 — 351. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp τ vuông góc với đường trung hòa (nằm ngang) trên các mặt cắt ngang của dầm, tính theo giá trị lớn nhất $\tau_{\max} = \tau_0$.



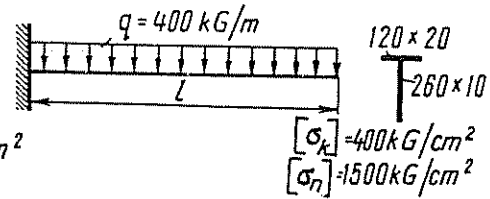
Bài tập 352 — 357. Tính ứng suất tiếp lớn nhất τ_{\max} trên các dầm. Trước khi đó, nếu cần thiết, phải tính kích thước hoặc tải trọng cho phép theo ứng suất pháp cho phép đã cho.



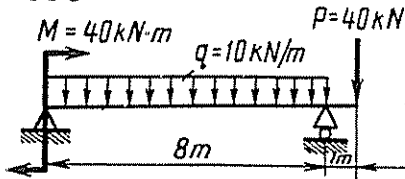
354



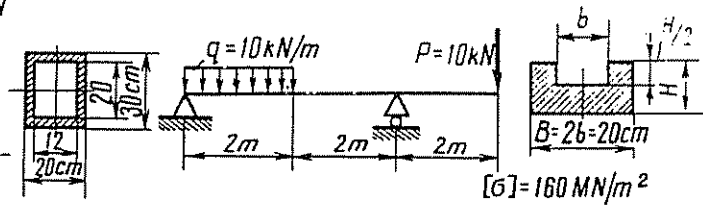
355



356

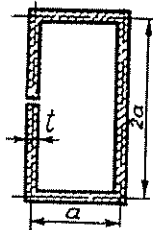


357

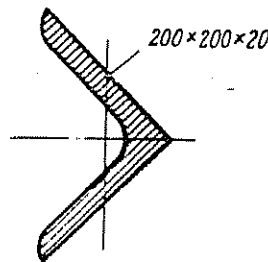


Bài tập 358 — 363. Tính khoảng cách l từ tâm uốn đến trọng tâm mặt cắt (giả thiết thành mặt cắt là mỏng).

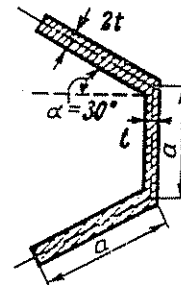
358



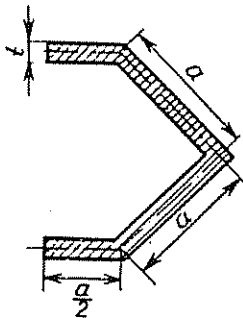
359



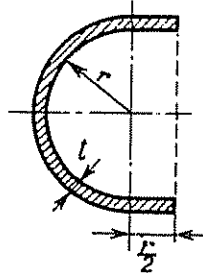
360



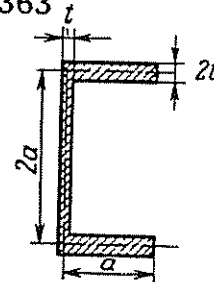
361



362

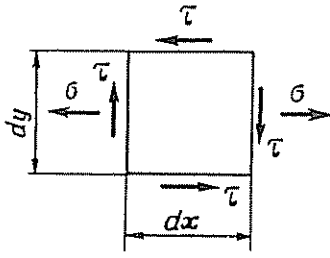


363

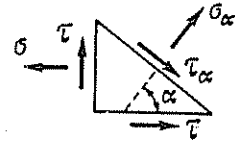


§ 22. Ứng suất chính và việc kiểm tra toàn bộ độ bền của dầm

Trên mặt cắt ngang dầm, tại một điểm bất kỳ cách đường trung hòa z một khoảng cách y , ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ tính theo các công thức (92) và (99). Trên hình 65, ta thấy phân tử lấy ra ở lân cận điểm đang xét bằng các mặt cắt ngang cách nhau dx , và các mặt cắt dọc song song với lớp trung hòa cách nhau dy , ở trong trạng thái ứng suất phẳng. Ứng suất pháp σ_α và ứng suất tiếp τ_α trên mặt xiên góc đi qua điểm này (hình 66) có giá trị:



Hình 65



Hình 66

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Khi:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2\tau/\sigma \quad (106)$$

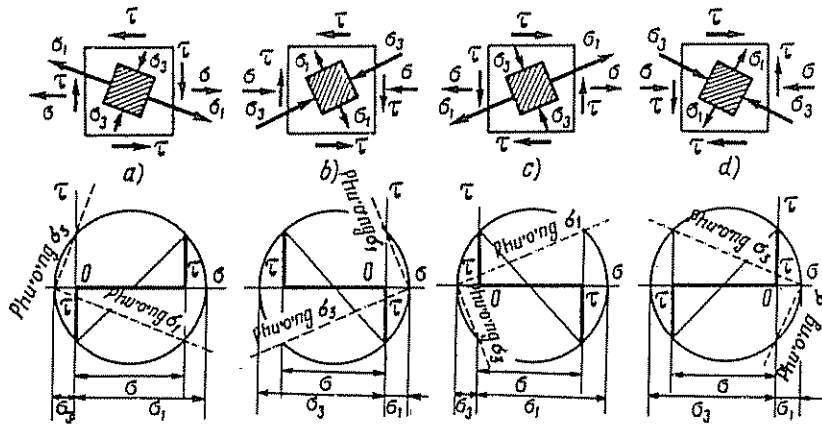
ta được hai mặt chính tại điểm đang xét. Hai mặt này vuông góc với nhau.

Ứng suất chính σ_1 và σ_3 tính theo biểu thức:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \quad (107)$$

Ứng suất tiếp cực trị tính theo công thức:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (108)$$



Hình 67

Trên hình 67 là cách xác định bằng đồ thị giá trị và phương của các ứng suất chính đối với bốn trường hợp khác nhau về trạng thái ứng suất của phân tố của dầm. Nếu tại một mặt cắt ngang nào có momen uốn và lực cắt cùng cực đại hoặc gần bằng giá trị cực đại, thì ở mặt cắt ấy phải kiểm tra độ bền của dầm theo các ứng suất chính.

Việc kiểm tra độ bền theo các ứng suất chính chỉ thực hiện đối với dầm có mặt cắt thành mỏng được mở rộng đột ngột ở gần các thớ biên, và kiểm tra ở những điểm chuyển tiếp từ bề rộng bé sang bề rộng lớn. Nếu dầm làm bằng vật liệu dẻo, kiểm tra theo lý thuyết độ bền thứ ba với công thức:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (109)$$

Nếu dầm làm bằng vật liệu giòn, kiểm tra theo lý thuyết độ bền thứ nhất với công thức:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}) \leq [\sigma_k] \quad (110)$$

Thí dụ 35 dưới đây trình bày việc tính toán toàn bộ về độ bền của một dầm tĩnh định.

Thí dụ 35. Cho $P = 4T$; $q = 3T/m$, $a = 0,8m$, $l = 4m$, $[\sigma] = 1600kG/cm^2$ $[\tau] = 1000kG/cm^2$ (hình 68). Xác định số hiệu thép mặt cắt hình chữ I.

Bài giải. 1. Tính phản lực gối.

$$A = \frac{P(a+l) + \frac{q}{2}l^2}{l} = \frac{4 \cdot 4,8 + 3 \cdot 8}{4} = 10,8T$$

$$B = \frac{\frac{q}{2}l^2 - Pa}{l} = \frac{3 \cdot 8 - 4 \cdot 0,8}{4} = 5,2T.$$

2. Vẽ biểu đồ Q và M .

Trên phần bệ $0 \leq x_1 \leq a$:

$$Q_{x_1} = -P = -4T, \quad M_{x_1} = -Px_1 = -4x_1, \quad M_{x_1=0} = 0.$$

$$M_{x_1=a} = -4 \cdot 0,8 = -3,2 \text{ Tm.}$$

Trong nhịp giữa các gối $0 \leq x_2 \leq l$:

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -5,2 + 3x_2; \quad Q_{x_2=0} = -5,2T$$

$$Q_{x_2=1} = -5,2 + 3 \cdot 4 = 6,8T.$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - \frac{q}{2}x_2^2 = 5,2x_2 - \frac{3}{2}x_2^2; \quad M_{x_2=0} = 0$$

$$M_{x_2=1} = 5,2 \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 16 = 3,2 \text{ Tm.}$$

Vi $Q_{x_2} = -5,2 + 3x_2 = 0$, khi $x_2 = 5,2/3 \approx 1,73 \text{ m}$.

do đó: $M_{\max} = 5,2 \cdot 1,73 - 3 \cdot \frac{1,73^2}{2} \approx 4,5 \text{ T.m.}$

$$M_{x_2} = 5,2x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 = 0 \text{ khi } x_2 = \frac{5,2 \cdot 2}{3} = 3,47 \text{ m}$$

Dựa vào các số liệu tính được, ta vẽ được biểu đồ Q và M trên hình 68.

3. Chọn mặt cắt thép hình chữ I.

Vì $M_{\max} = 4,5 \text{ Tm}$, nên:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^2} \approx 281 \text{ cm}^3$$

Theo bảng thép hình, đối với thép hình chữ I số 22a, $W = 254 \text{ cm}^3$.

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{W - W_{\text{số 22a}}}{W_{\text{số 22a}}} 100 = \frac{281 - 254}{254} 100 = 10,6\% > 5\% \text{ (vượt ứng suất)}.$$

Đối với thép hình chữ I số 24, $W = 289 \text{ cm}^3$.

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{W - W_{\text{số 24}}}{W_{\text{số 24}}} 100 = \frac{281 - 289}{289} 100 \approx -2,77\% \text{ (thiếu ứng suất)}.$$

Ta chọn thép mặt cắt chữ I số 24. Đối với mặt cắt này, $W = 289 \text{ cm}^3$, $I = 3460 \text{ cm}^4$, $S_o = 163 \text{ cm}^3$, $h = 24 \text{ cm}$, $b = 11,5 \text{ cm}$, $t = 0,95 \text{ cm}$, $d = b_o = 0,56 \text{ cm}$, $h_o = h - 2t = 22,1 \text{ cm}$ (hình 69). Như vậy ở thớ biên của mặt cắt nguy hiểm có ứng pháp lớn nhất.

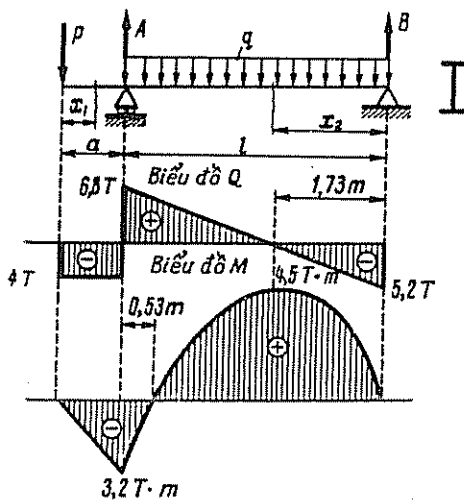
$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W = 4,5 \cdot 10^5/289 \approx 1560 \text{ kg/cm}^2$$

4. Kiểm tra mặt cắt theo ứng suất tiếp.

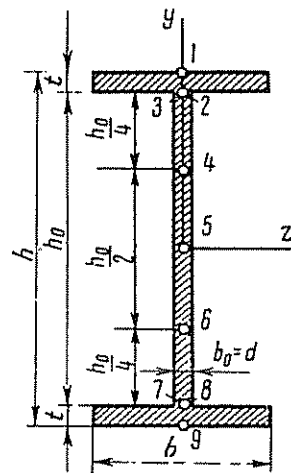
Vì $Q_{\max} = 6,8 \text{ T}$, do đó:

$$\tau_{\max} = Q_{\max} S_o / (b_o I) = 6,8 \cdot 10^3 \cdot 163 / (0,56 \cdot 3460) \approx 570 \text{ kg/cm}^2 < [\tau]$$

5. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp (σ), ứng suất tiếp (τ), ứng suất chính ($\sigma_{1,3}$) và ứng suất tiếp cực trị (τ_{\max}) ở mặt cắt nguy hiểm và xác định chiều của những ứng suất này.



Hình 68



Hình 69

Về ứng suất chính mặt cắt bất lợi là mặt cắt ở bên phải gối trái. ở đó $M = -3,2 \text{ T.m}$ và $Q = 6,8 \text{ T}$.

Ứng suất pháp ở một điểm bất kỳ cách đường trung hòa khoảng cách y :

$$\sigma = -My/I = 3,2 \cdot 10^5 / 3460 \approx 92,5y. \quad (a)$$

Momen tĩnh của diện tích bản cánh đối với đường trung hòa.

$$S_c = bt \frac{h-l}{2} = 11,5 \cdot 0,95 \frac{24 - 0,95}{2} \approx 126 \text{ cm}^3$$

Momen tĩnh của phần diện tích bản bụng ở về một phía của đường có tọa độ y :

$$S_b = \frac{b_0}{2} \left(\frac{h_0^2}{4} - y^2 \right) = \frac{0,56}{2} \left(\frac{22,1^2}{4} - y^2 \right) = 0,28(122 - y^2)$$

Momen tĩnh của phần diện tích mặt cắt ở về một phía của đường có tung độ y .

$$S = S_c + S_b = 126 + 0,28(122 - y^2) \approx 160 - 0,28y^2.$$

Ứng suất tiếp ở các điểm trên bản cánh theo công thức (99) bằng:

$$\tau = Q \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) / (2I) \quad (b)$$

trên bản bụng bằng

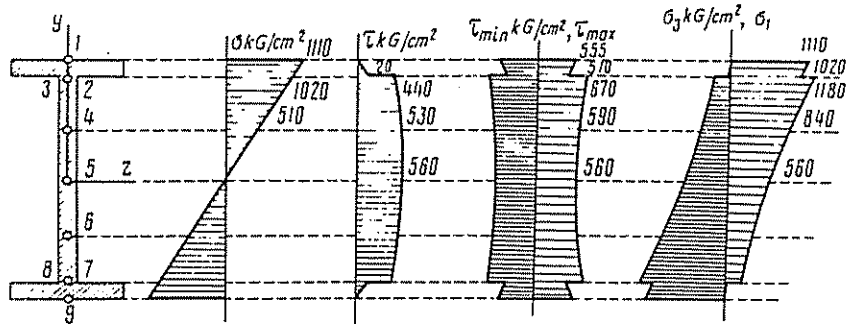
$$\tau = QS / (b_0 I). \quad (c)$$

Theo các công thức (a), (b), (c), (108), (107), (106) ta tính được giá trị của σ , τ , τ_{\max} , $\sigma_{1,3}$, $\lg 2\alpha$, α_1 , α_2 theo tung độ y ở chín điểm của mặt cắt. Các giá trị tính được ghi ở bảng dưới đây.

Bảng

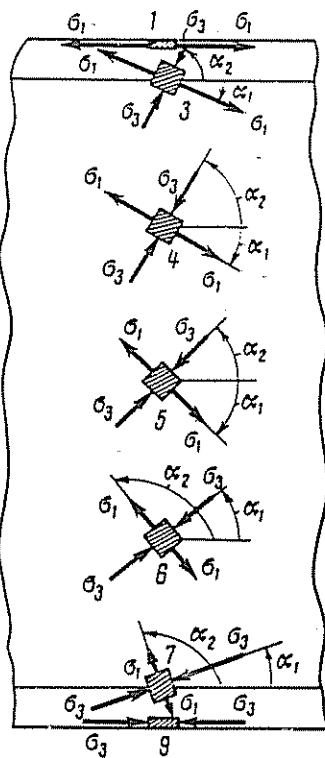
Số thứ tự các điểm	y , cm	σ	τ	τ_{\max} min	σ_1	σ_3	$\lg 2\alpha$	α_1	α_2
		kG/cm ²							
1	12,00	1110	0	± 555	1110	0	0,00	0°0'	90°0'
2	11,05	1020	20	± 510	1020	0	- 0,0392	- 1°7'	88°53'
3	11,05	1020	440	± 670	1180	- 160	- 0,863	- 20°24'	69°36'
4	5,52	510	530	± 590	840	- 340	- 2,080	- 32°10'	57°50'
5	0,00	0	560	± 560	560	- 560	∞	45°0'	45°0'
6	- 5,52	- 510	530	± 590	340	- 840	2,08	32°10'	122°16'
7	- 11,05	- 1020	440	± 670	160	- 1180	0,863	20°24'	110,24'
8	- 11,05	- 1020	20	± 510	0	- 1020	0,0392	1°7'	91°7'
9	- 12,00	- 1110	0	± 555	0	- 1110	0,00	0°0'	90°0'

Các biểu đồ ứng suất vẽ ở hình 70. Phương ứng suất chính ở các điểm trên mặt cắt vẽ ở hình 71.

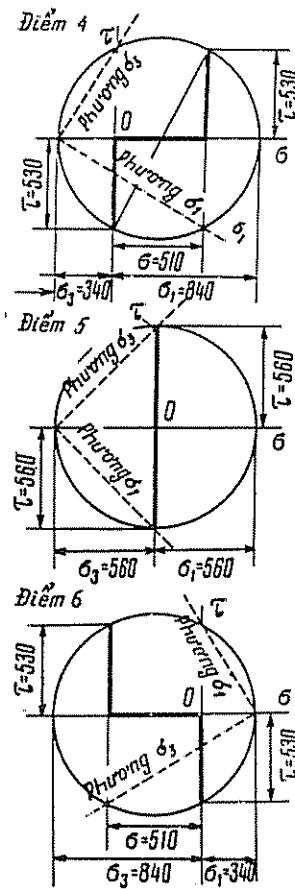


Hình 70

Trên hình 72 trình bày cách xác định giá trị và phương của các ứng suất chính σ_1 và σ_3 tại các điểm 4, 5 và 6 bằng phương pháp đồ thị.



Hình 71



Hình 72

6. Kiểm tra độ bền của dầm theo các ứng suất chính.

Điểm nguy hiểm nhất trên mặt cắt bất lợi là điểm 3. Ở điểm này $\sigma_1 = 1180 \text{ kG/cm}^2$ và $\sigma_3 = -160 \text{ kG/cm}^2$. Ta kiểm tra độ bền tại điểm theo công thức của lý thuyết về độ bền thứ ba:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

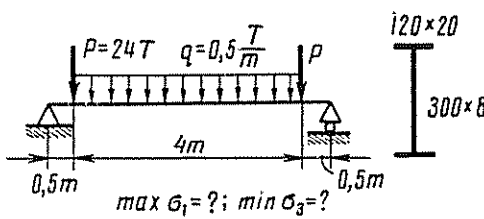
Vì $1180 + 160 = 1340 < 1600$, do đó mặt cắt đã chọn cũng bảo đảm về độ bền linh theo các ứng suất chính.

Bài tập 364 — 367. Xác định bằng giải tích và bằng đồ thị giá trị và phương của các ứng suất chính lớn nhất σ_1 và nhỏ nhất σ_3 tại các mặt cắt chỉ trên hình vẽ.

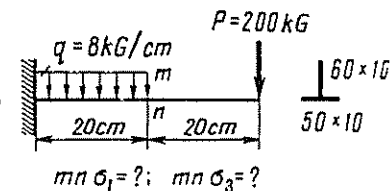
Ký hiệu: $\max \sigma_1$ và $\min \sigma_3$ — ứng suất chính lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt bất lợi nhất của dầm và tại điểm có sự thay đổi bề rộng đột ngột, $m\sigma_1$ và $m\sigma_3$ — các ứng suất chính cũng tại điểm đó, nhưng tại mặt cắt mn.

Ở bài toán 366 mặt phẳng tải trọng chứa đường nối tâm uốn của các mặt cắt ngang.

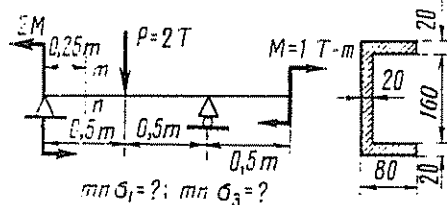
364



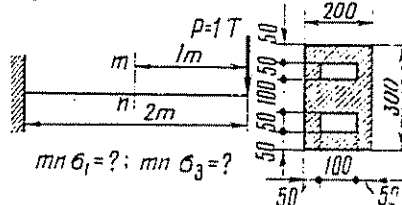
365



366



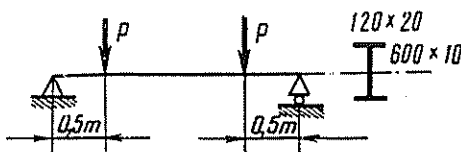
367



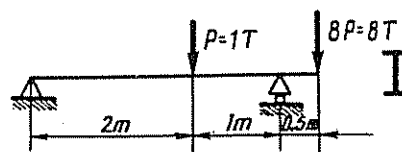
Bài tập 368 — 373. Chọn mặt cắt dầm và tiến hành kiểm tra đầy đủ độ bền của dầm.

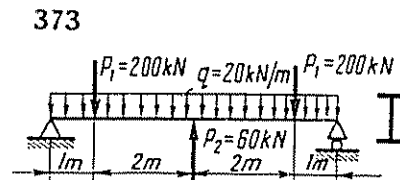
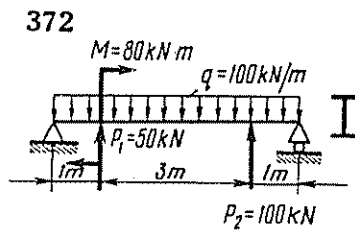
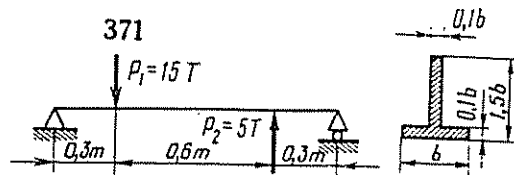
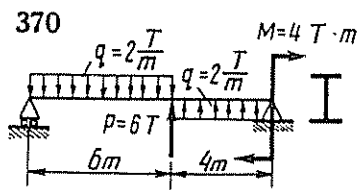
Lấy $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $[\tau] = 1000 \text{ kG/cm}^2$ và lý thuyết bền thứ ba để kiểm tra độ bền theo các ứng suất chính. Trong các bài 372 và 373 lấy $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$; $[\tau] = 100 \text{ MN/m}^2$. Trong bài 368, xác định tải trọng cho phép, sau đó kiểm tra độ bền đầy đủ của dầm.

✓ 368



369





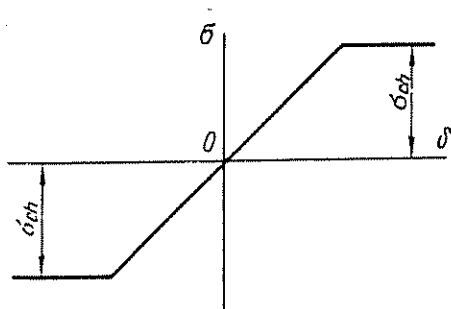
6988326519

§ 23. Cơ sở tính dầm theo năng lực chịu tải.

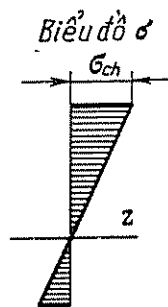
Sự khác nhau trong tính toán về độ bền theo phương pháp ứng suất cho phép và phương pháp năng lực chịu tải đối với vật liệu dẻo là ở chỗ coi trạng thái biến dạng nguy hiểm của dầm thuộc các giai đoạn khác nhau.

Khi tính theo năng lực chịu tải, thường người ta chỉ đề ý ứng suất pháp và không xét đến sự tải bền của vật liệu do biến dạng dẻo. Những hiệu đồ kéo hoặc nén lý tưởng (hình 73) được lấy làm cơ sở tính toán.

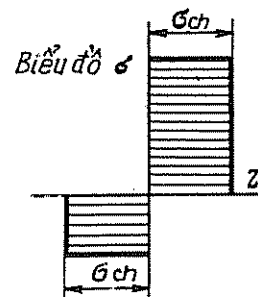
Khi tính theo ứng suất cho phép, người ta coi trạng thái nguy hiểm của dầm là trạng thái tương ứng với nó, ứng suất pháp lớn nhất ở thớ biên của dầm đạt đến giới hạn chảy của vật liệu σ_{ch} (hình 74).



Hình 73



Hình 74



Hình 75

Theo biểu đồ σ (xem hình 74) momen uốn ở trạng thái nguy hiểm của dầm bằng:

$$M_{ch} = \sigma_{ch} W \quad (111)$$

Đưa hệ số an toàn vào, ta được công thức tính momen uốn cho phép.

$$M_{max} = [\sigma] W \quad (112)$$

Khi tính theo năng lực chịu tải người ta coi trạng thái nguy hiểm của dầm là trạng thái ứng với nó, ở tất cả các điểm của mặt cắt nguy hiểm, ứng suất pháp đều đạt đến giới hạn chảy của vật liệu (hình 75). Theo biểu đồ σ (xem hình 75) trạng thái này tương ứng với giá trị của momen uốn.

$$M_{ch} = 2\sigma_{ch}S, \quad (113)$$

trong đó S là momen tĩnh của một nửa diện tích mặt cắt ngang dầm đối với đường trung hòa z .

Vì không thể tăng thêm momen uốn ở mặt cắt này nữa, do đó ta nói rằng ở mặt cắt phát sinh «khớp dẻo» và dầm trở thành hệ biến dạng hình học.

Đưa hệ số an toàn vào, ta được công thức tính toán để xác định momen uốn cho phép.

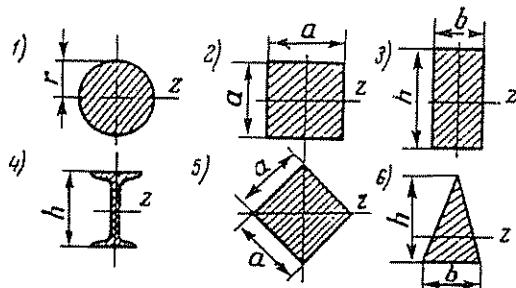
$$M'_{max} = 2[\sigma]S. \quad (114)$$

So sánh các công thức (112) và (114), ta thấy rằng nếu lấy hệ số an toàn như nhau thì momen uốn cho phép M'_{max} tính theo năng lực chịu tải lớn hơn momen uốn cho phép M_{max} tính theo ứng suất cho phép η lần, trong đó:

$$\eta = M'_{max}/M_{max} = 2S/W. \quad (115)$$

Đại lượng η chỉ phụ thuộc vào đặc điểm hình học của mặt cắt ngang dầm

Thí dụ 36. Cho các mặt cắt vẽ trên hình 76. Xác định giá trị của η .



Hình 76

Bài giải.

1. $W = \pi r^3/4, S = (2/3)r^3, \eta = 4r^3 \cdot 4/(3\pi r^3) = 16/(3\pi) \approx 1,697.$

2. $W = a^3/6, S = a^3/8, \eta = 3/2 = 1,5.$

3. $W = b \cdot h^2/6, S = bh^2/8, \eta = 1,5.$

4. Vì $W = 2I/h$, nên $\eta = 2S/W = (S/I) \cdot h$

Theo bảng thép hình, thí dụ đối với mặt cắt thép chữ I số 20a.

$I = 2030\text{cm}^4, S = 114\text{cm}^3, h = 20\text{cm}, \eta = 114 \cdot 20/2030 \approx 1,12.$

5. $W = \frac{a^4 \cdot 2}{12a\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}, S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

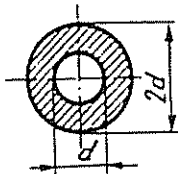
$$\eta = \frac{\sqrt{2} a^3 \cdot 6 \sqrt{2}}{6a^3} = 2$$

$$6. W = \frac{bh^3}{36} \cdot \frac{3}{2h} = \frac{bh^2}{24} \cdot S = \frac{bh}{24} \left(\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} \frac{h}{\sqrt{2}} \right) = \frac{bh^2}{12} (2 - \sqrt{2})$$

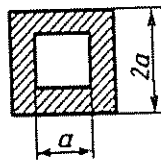
$$\eta = \frac{bh^2 (2 - \sqrt{2}) 24}{6bh^2} \approx 2,344$$

Bài tập 374 — 379. Tính tỉ số $\eta = M'_{\max}/M_{\max}$ giữa các momen uốn cực đại M'_{\max} và M_{\max} , tính theo năng lực chịu tải và theo ứng suất cho phép đối với các dạng mặt cắt ngang dầm dưới đây:

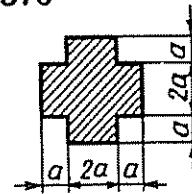
374



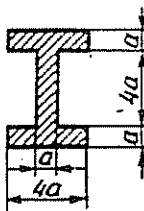
375



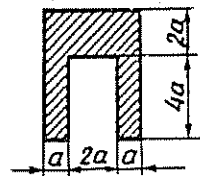
376



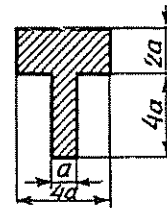
377



378

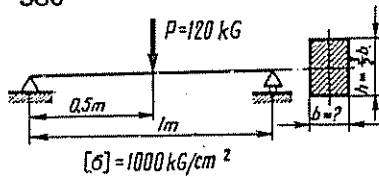


379

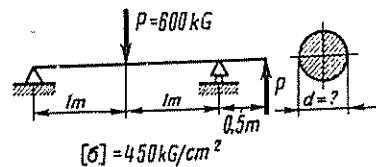


Bài tập 380 — 385. Tính kích thước cần thiết của dầm hoặc tải trọng cho phép theo phương pháp ứng suất cho phép và theo phương pháp năng lực chịu tải.

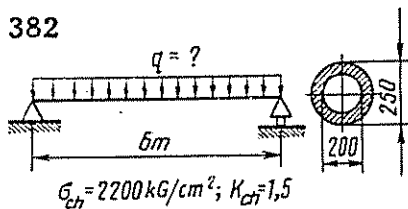
380



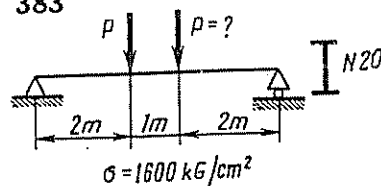
381



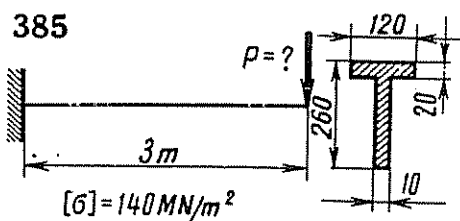
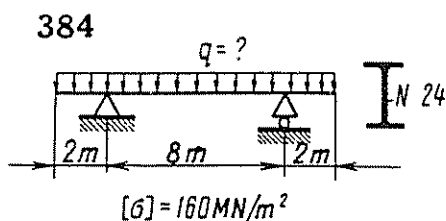
382



383



Ký hiệu: $b, d, h, P_{\max}, q_{\max}$ — kích thước cần thiết của mặt cắt ngang dầm và tải trọng cho phép tính theo phương pháp ứng suất cho phép, $b', d', h', P'_{\max}, q'_{\max}$ — như trên, tính theo phương pháp năng lực chịu tải.



§ 24. Chuyển vị của dầm bị uốn

Chuyển vị của mặt cắt dầm được đặc trưng bằng hai đại lượng:

1. Chuyển vị dài của trọng tâm mặt cắt ngang theo phương vuông góc với trục hình học x của dầm, gọi là *độ võng* (f_x).

2. Chuyển vị góc của mặt cắt ngang chung quanh trục trung hòa z gọi là *góc quay của mặt cắt* (θ_x).

Độ võng f_x là dương nếu chiều của nó trùng với chiều dương của trục y vuông góc với trục hình học x của dầm. Góc quay θ_x là dương nếu chiều quay của mặt cắt dầm chung quanh đường trung hòa z ngược chiều kim đồng hồ.

Độ võng và góc quay cực đại (f_{\max} , θ_{\max}) và cực tiểu (f_{\min} , θ_{\min}) tính theo giá trị tuyệt đối của chúng.

Vì lực cắt chỉ có ảnh hưởng rõ rệt đối với biến dạng khi dầm ngắn, do đó người ta chỉ tính f và θ theo momen uốn. Độ võng và góc quay có thể tính bằng phương pháp thông số ban đầu, phương pháp đồ thị, phương pháp đồ toán và các phương pháp khác.

Phương pháp thông số ban đầu. Những thông số ban đầu là độ võng f_0 và góc quay θ_0 của mặt cắt ngang dầm, mà trọng tâm nằm ở gốc tọa độ. Hợp lý hơn cả là lấy trọng tâm của mặt cắt ngang ở đầu bên trái dầm làm gốc tọa độ.

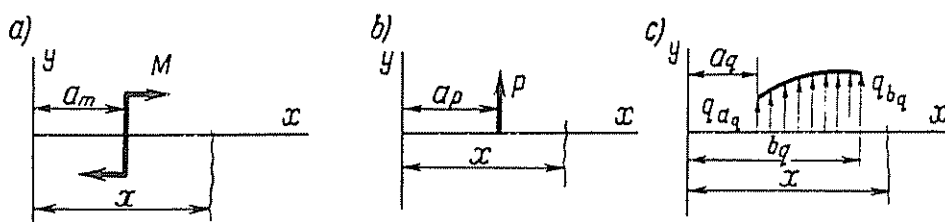
Phương trình xác định f_x và θ_x ở mặt cắt bất kỳ của dầm cách gốc tọa độ một khoảng x (trong trường hợp cường độ tải trọng phân bố q_x là hàm lũy thừa) có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
 EIf_x = EIf_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x - a_m)^2}{2!} + \sum P \frac{(x - a_p)^3}{3!} + \\
 + \sum q_{aq} \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \sum q_{bq} \frac{(x - b_q)^4}{4!} + \sum q'_{aq} \frac{(x - a_q)^5}{5!} - \\
 - \sum q'_{bq} \frac{(x - b_q)^5}{5!} + \dots \quad (116)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EI\theta_x = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x - a_m)}{1!} + \sum P \frac{(x - a_p)^2}{2!} + \sum q_{aq} \frac{(x - a_q)^3}{3!} - \\
 - \sum q_{bq} \frac{(x - b_q)^3}{3!} + \sum q'_{aq} \frac{(x - a_q)^4}{4!} - \sum q'_{bq} \frac{(x - b_q)^4}{4!} + \dots \quad (117)
 \end{aligned}$$

trong đó E — modun đàn hồi vật liệu làm dầm; I — momen quán tính mặt cắt ngang dầm đối với trục trung hòa z ; M — momen của ngẫu lực ngoại lực; a_m —

khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt cắt đặt ngẫu lực (hình 77, a); P — lực ngang tập trung (trong đó có cả phản lực); a_p — khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt cắt đặt lực P (hình 77, b), q_{a_q} , q'_{a_q} — giá trị của lực phân bố q_x và đạo hàm của nó theo x tại $x = a_q$, tức là tại mặt cắt ngang bắt đầu có lực phân bố tác dụng (hình 77, c); q_{b_q} , q'_{b_q} — giá trị của lực phân bố q_x và đạo hàm của nó theo x tại $x = b_q$, tức là tại mặt cắt ngang kết thúc đoạn lực phân bố, mặt cắt này ở trước mặt cắt đang xét (hình 77, c).



Hình 77

Nếu gốc tọa độ đặt tại trọng tâm của mặt cắt đầu bên phải của dầm và trục x hướng từ phải sang trái thì tương ứng với chiều của các tải trọng vẽ trên hình 77, trong các công thức (116) và (117) ở các số hạng phản ánh ảnh hưởng của momen của ngoại lực sẽ lấy dấu âm; chiều quay của mặt cắt dầm tính theo công thức (117) sẽ ngược lại với chiều quy định trước đây. Ta có thể chỉ nhớ công thức (116), vì lấy đạo hàm (116) ta được công thức (117).

Có thể xác định được hai thông số ban đầu f_0 và θ_0 theo các điều kiện liên kết đầu dầm như sau:

1. Ở đầu ngàm, độ võng và góc quay của mặt cắt bằng không.
2. Ở gối khớp, độ võng bằng không.

Đối với những dầm đối xứng, ta chỉ cần xét một nửa dầm sau đó sử dụng các đặc điểm của tính đối xứng, tức là góc quay của mặt cắt trùng với trục đối xứng của dầm thì bằng không, hoặc độ võng của mặt cắt trùng với trục đối xứng ngược của dầm thì bằng không.

Cách viết phương trình độ võng và góc quay hợp lý nhất là chỉ viết một phương trình (116) và một phương trình (117) của đoạn cuối cùng của dầm, trong đó theo trình tự viết tất cả các tải trọng tác dụng kể từ gốc tọa độ. Sau đó để viết các phương trình f_x và θ_x của một đoạn bất kỳ, chỉ cần giữ lại những số hạng tương ứng với những tải trọng ở trước đoạn đó.

Thí dụ 37. Cho q , a , $P = 4qa$, $M = qa^2$, E , I (hình 78)

Xác định f_x , θ_x .

Bài giải. Từ điều kiện tĩnh học $\Sigma M_B = 0$

$$- qa \frac{5}{2} a + A \cdot 2a - 4qa \cdot a + qa^2 = 0; \quad A = \frac{11}{4} qa$$

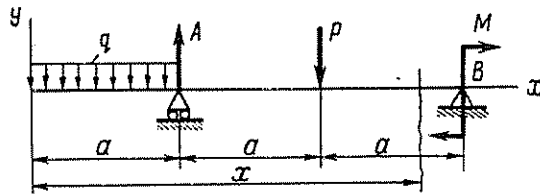
Theo phương trình (116), đối với đoạn cuối cùng bên phải

$$EI f_x = \underbrace{EI f_0 + EI \theta_0 x - \frac{qx^4}{4!}}_I + \underbrace{\frac{11}{4} qa \frac{(x-a)^3}{3!}}_{II} + \underbrace{q \frac{(x-a)^4}{4!} - 4qa \frac{(x-2a)^3}{3!}}_{III}$$

Đối với đoạn I : $0 \leq x \leq a$.

Đối với đoạn II : $a \leq x \leq 2a$

Đối với đoạn III: $2a \leq x \leq 3a$



Hình 78

Theo các điều kiện liên kết của dầm :

ở gối trái $EI f_a = EI f_0 + EI \theta_0 a - qa^4/24 = 0$.

ở gối phải $EI f_{3a} = EI f_0 + EI \theta_0 3a + \frac{88}{24} qa^4 - \frac{2}{3} qa^4 - \frac{81}{24} qa^4 + \frac{16}{24} qa^4 = 0$,

tức là:

$$\left. \begin{aligned} EI f_0 + EI \theta_0 a - qa^4/24 &= 0, \\ EI f_0 + EI \theta_0 3a + \frac{7}{24} qa^4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

hay

$$2EI \theta_0 a + \frac{8}{24} qa^4 = 0, \quad \theta_0 = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}$$

Thế vào phương trình trên, ta được:

$$EI f_0 - \frac{1}{6} qa^4 - \frac{1}{24} qa^4 = 0.$$

do đó

$$f_0 = \frac{5}{24} \cdot \frac{qa^4}{EI}$$

Phương trình xác định f_x và θ_x tại mặt cắt bất kỳ của một đoạn bất kỳ có dạng:

$$EI f_x = \frac{5}{24} qa^4 - \frac{1}{6} qa^3 x - \frac{1}{24} qx^4 + \frac{11}{24} qa(x-a)^3 + \frac{1}{24} q(x-a)^4 - \frac{2}{3} qa(x-2a)^3;$$

$0 \leq x \leq a$ $a \leq x \leq 2a$ $2a \leq x \leq 3a$

$$EI\theta_x = -\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qx^3 + \frac{11}{8} qa(x-a)^2 + \frac{1}{6} q(x-a)^3$$

$$0 \leq x \leq a \quad a \leq x \leq 2a$$

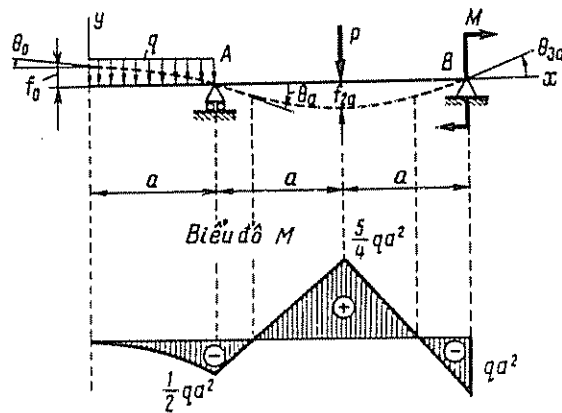
$$-2qa(x-2a)^2$$

$$2a \leq x \leq 3a$$

Thí dụ, góc quay của mặt cắt trên gối trái

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} qa^3 - \frac{1}{6} qa^3 \right) = -\frac{qa^3}{3EI}$$

góc quay của mặt cắt trên gối phải



Hình 79

$$\theta_{3a} = \frac{qa^3}{EI} \left(-\frac{1}{6} - \frac{27}{6} + \frac{44}{8} + \frac{8}{6} - 2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{qa^3}{EI}$$

độ võng ở chỗ đặt lực tập trung

$$f_{2a} = \frac{qa^4}{EI} \left(\frac{5}{24} - \frac{2}{6} - \frac{16}{24} + \frac{11}{24} + \frac{1}{24} \right) = -\frac{7}{24} \cdot \frac{qa^4}{EI}$$

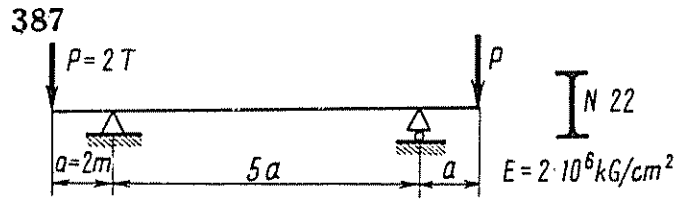
Trên hình 79 vẽ dạng gần đúng đường đàn hồi của dầm (nét chấm) cùng với độ võng và góc quay của các mặt cắt đã tính. Chú ý rằng ở những mặt cắt có momen uốn bằng không, trên đường đàn hồi có điểm uốn. Trên những đoạn dầm có momen uốn dương, đường đàn hồi lồi về phía dưới; có momen uốn âm, đường đàn hồi lõm về phía trên (xem hình 79).

Bài tập 386 — 387. Trong bài 386, xác định độ võng f và góc quay θ của mặt cắt dầm bằng phương pháp tích phân phương trình vi phân của đường đàn hồi:

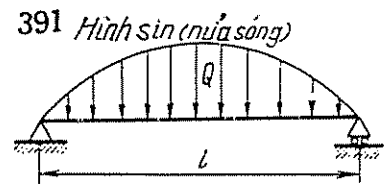
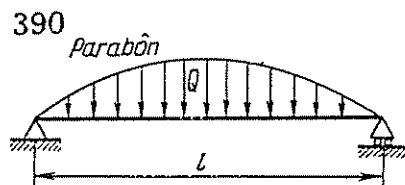
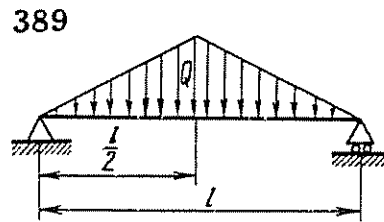
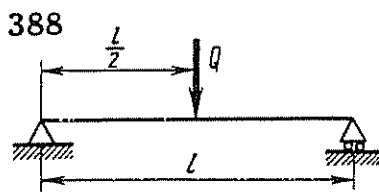
1. Ở bài 222 — 226 tính độ võng và góc quay của đầu tự do;
2. Ở bài 228, 229, 231 tính độ võng ở giữa nhịp và góc quay ở các gối;
3. Ở bài 227 và 230 tính độ võng lớn nhất về giá trị tuyệt đối và góc quay ở các gối.

Ta coi như đã biết tải trọng, chiều dài và độ cứng chống uốn của dầm.

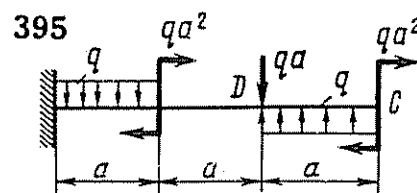
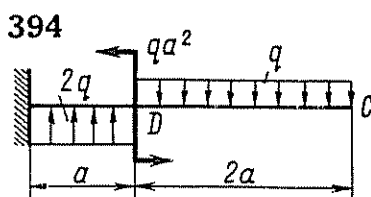
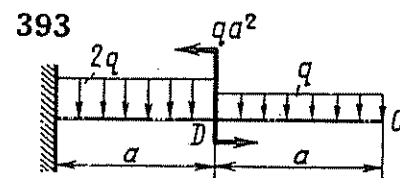
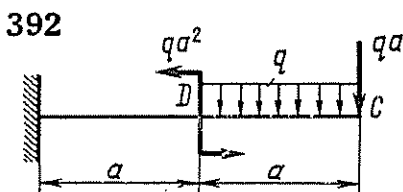
Trong bài 387, xét xem độ võng ở giữa nhịp dầm tính bằng phương trình gần đúng của đường đàn hồi và độ võng tính đúng bằng phương trình cung tròn sai bao nhiêu phần trăm và sai thừa hay thiếu.



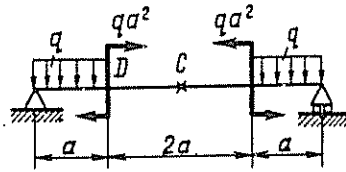
Bài tập 388 — 391. Tính xem momen uốn cực đại và độ võng của dầm vẽ trên các hình 388 — 391 lớn hơn bao nhiêu phần trăm so với dầm tương tự cũng chịu tải trọng Q , nhưng phân bố đều trên toàn nhịp.



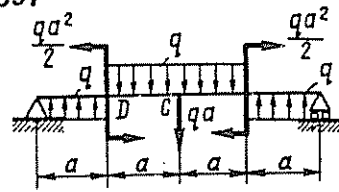
Bài tập 392 — 409. Tính độ võng f_c của mặt cắt C và góc quay θ_D của mặt cắt D . Các đại lượng q , a , E và I coi như đã biết.



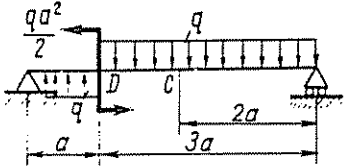
396



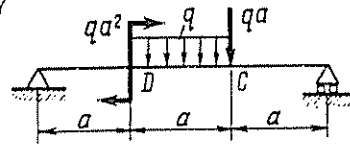
397



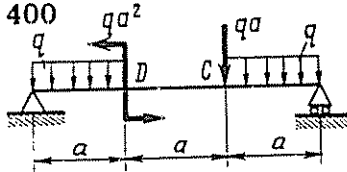
398



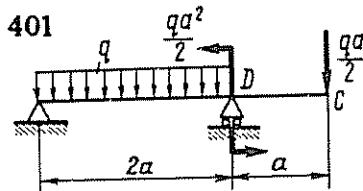
399



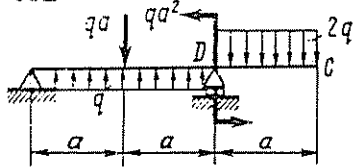
400



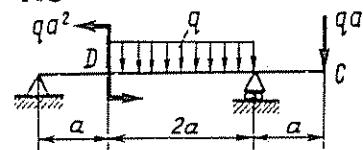
401



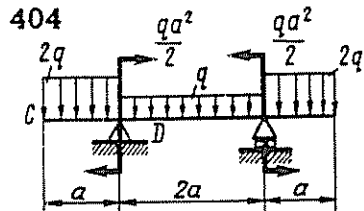
402



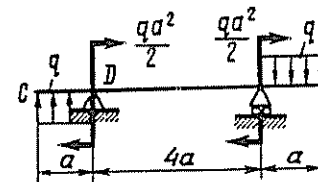
403



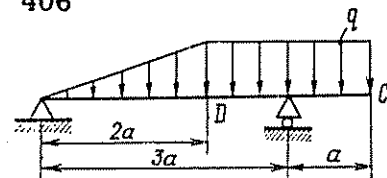
404



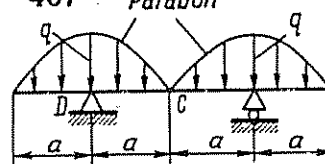
405



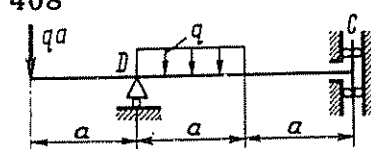
406



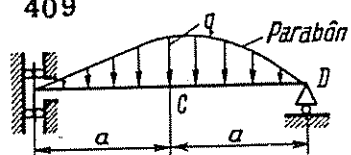
407 Parabôn



408



409



Phương pháp đồ toán. Ta vẽ biểu đồ momen uốn của dầm đã cho. Biểu đồ này được coi là tải trọng phân bố giả tạo của dầm giả tạo. Góc quay θ_x của mặt cắt nào đó của dầm đã cho sẽ là tỉ số của các lực cắt Q_{gtx} của dầm giả tạo tại mặt cắt ấy với độ cứng chống uốn của dầm đã cho, tức là:

$$\theta_x = \frac{Q_{gtx}}{EI} \quad (118)$$

Độ võng f_x của mặt cắt nào đó của dầm đã cho là tỉ số của momen uốn M_{gtx} của dầm giả tạo tại mặt cắt ấy với độ cứng chống uốn của dầm, tức là:

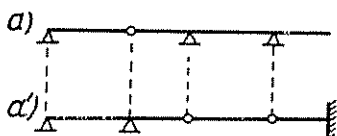
$$f_x = \frac{M_{gtx}}{EI} \quad (119)$$

Đối với dầm đơn giản, cũng nên chú ý đến các công thức sau đây của góc quay của đường đàn hồi ở các gối A và B :

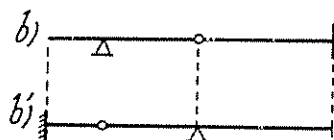
$$|\theta_A| = \frac{|A'|}{EI}; |\theta_B| = \frac{|B'|}{EI} \quad (120)$$

$$\theta_A = \pm \frac{A'}{EI}; \theta_B = \pm \frac{B'}{EI} \quad (121)$$

Ở đây A' và B' là phản lực giả tạo ở gối. Trong công thức (121) lấy dấu cộng hoặc dấu trừ tùy theo phương của phản lực giả tạo.



Hình 80



Hình 81

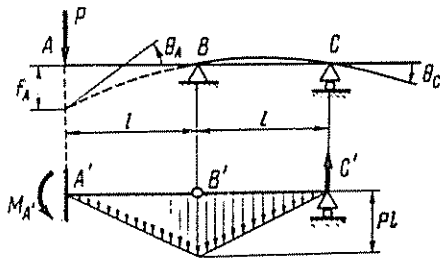
Theo các công thức (118) và (119), những điều kiện biến dạng ở gối và ở biên của dầm đã cho phải chuyển thành những điều kiện của M_{gt} và Q_{gt} của dầm giả tạo.

Để có dầm giả tạo tương ứng với dầm đã cho, phải thỏa mãn các quy tắc sau đây:

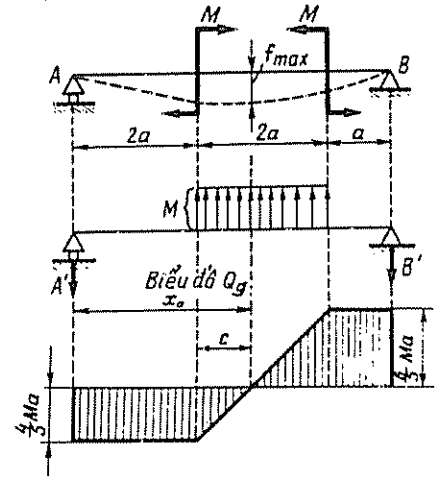
1. gối khớp ở đầu dầm cho trước vẫn là gối khớp ở đầu dầm giả tạo;
2. gối khớp không phải ở đầu dầm cho trước chuyển thành khớp quay của dầm giả tạo;
3. đầu ngàm của dầm cho trước trở thành đầu tự do của dầm giả tạo;
4. đầu tự do của dầm cho trước trở thành đầu ngàm của dầm giả tạo;
5. khớp quay của dầm cho trước chuyển thành gối khớp của dầm giả tạo.

Trên hình 80 và hình 81 là thí dụ áp dụng các quy tắc vẽ dầm giả tạo: a và b là dầm cho trước, a' và b' dầm giả tạo tương ứng.

Phương pháp đồ toàn dùng thuận tiện khi cần xác định chuyển vị của từng mặt cắt xác định của dầm, nếu như diện tích và trọng tâm của biểu đồ momen uốn của dầm cho trước tính được dễ dàng. Đề cho dấu của độ võng và góc quay phù hợp với các quy ước đã có. Tải trọng giả tạo hướng từ dưới lên trên khi biểu đồ momen uốn của dầm cho trước có dấu



Hình 82



Hình 83

ương, và hướng từ trên xuống dưới khi biểu đồ momen uốn của dầm cho trước có dấu âm.

Thi đạ 38. Cho P, l, E, I (hình 82)

Tính θ_C, θ_A, f_A .

Bài giải. Biểu đồ momen uốn của dầm cho trước ABC là hình tam giác âm có chiều cao bằng Pl tại mặt cắt B .

Ta lấy biểu đồ này làm tải trọng giả tạo của dầm giả tạo $A'B'C'$. Từ tổng momen đối với khớp B' của các lực ở bên phải của khớp bằng không, ta tìm được phản lực

$$C' = \frac{1}{l} Pl \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{Pl^2}{6}$$

Do đó:

$$Q_{gtC'} = -C' = -\frac{Pl^2}{6}$$

Vi

$$Q_{gtA'} = -\frac{Pl^2}{6} + Pl \cdot l = \frac{5}{6} Pl^2$$

và

$$M_{gtA'} = \frac{Pl^2}{6} 2l - Pl^2 l = -\frac{2}{3} Pl^3$$

do đó:

$$\theta_C = \frac{Q_{gtC'}}{EI} = -\frac{Pl^2}{6EI}, \quad \theta_A = \frac{Q_{gtA'}}{EI} = \frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

$$f_A = \frac{M_{gtA'}}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

Thí dụ 39. Cho M, a, E, I (hình 83).

Tính f_{\max} .

Bài giải. Dầm giả tạo là dầm đơn giản có tải trọng giả tạo phân bố đều cường độ bằng M tác dụng trên đoạn thứ hai. Từ tổng momen của những lực đối với các gối A' và B' bằng không, ta xác định được các phản lực $B' = \frac{6}{5} Ma$ và $A' = \frac{4}{5} Ma$.

Biểu đồ Q_{gt} vẽ trên hình 83. Ở mặt cắt đó có $Q_{gt} = 0, M_{gt} = M_{gt\max}$.

Vì $|Q_{gt}| = A' - Mc = \frac{4}{5} Ma - Mc = 0$, do đó $c = \frac{4}{5} a$.

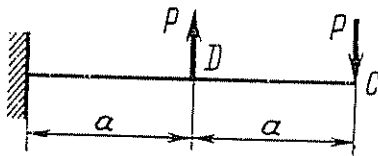
Vậy $x_0 = 2a + c = \frac{14}{5} a$. Ta tìm được $M_{gt\max}$:

$$M_{gt\max} = -A'x_0 + M \frac{C^2}{2} = -\frac{4}{5} Ma \frac{14}{5} a + \frac{M}{2} \cdot \frac{16}{25} a^2 = -\frac{48}{25} Ma^2$$

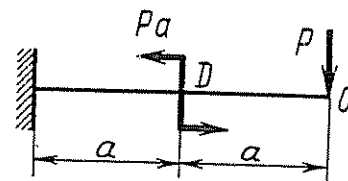
$$\text{Độ võng cực đại } f_{\max} = \frac{M_{gt\max}}{EI} = -\frac{48}{25} \frac{Ma^2}{EI}$$

Bài tập 410 – 421. Tính độ võng f_c của mặt cắt C và góc quay θ_D của mặt cắt D của dầm. P, q, M, a, E, I ở mục này cũng như ở những mục sau đều coi như đã biết.

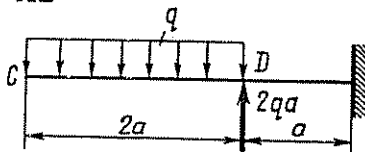
410



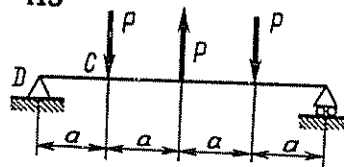
411



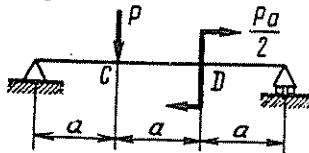
412



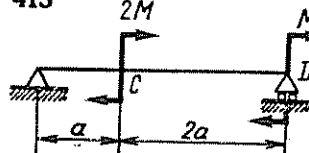
413



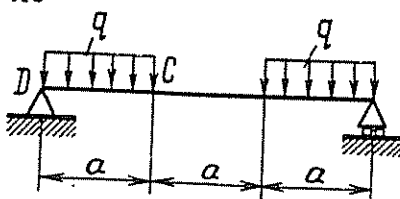
414



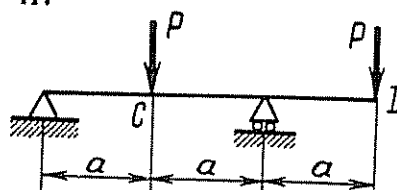
415



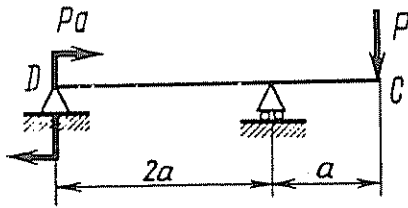
416



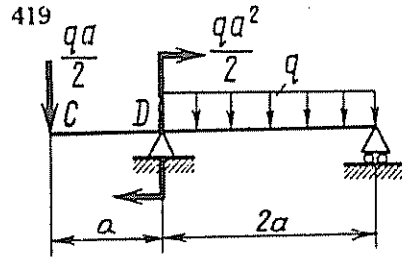
417



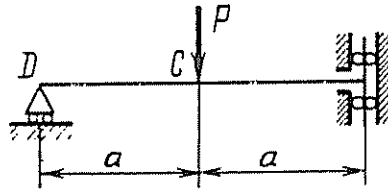
418



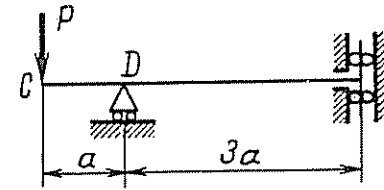
419



420

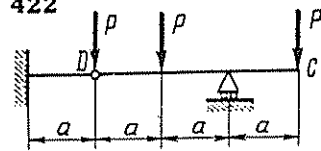


421

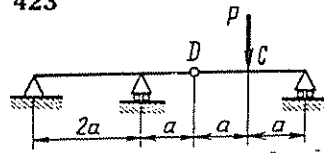


Bài tập 422 — 425. Tính độ võng f_C của mặt cắt C và góc quay θ_{D_1} , θ_{D_2} của các mặt cắt ở bên trái và bên phải khớp D của dầm.

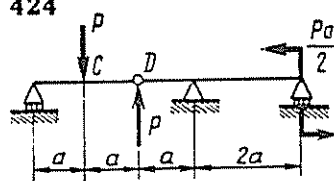
422



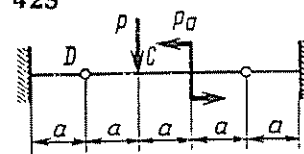
423



424

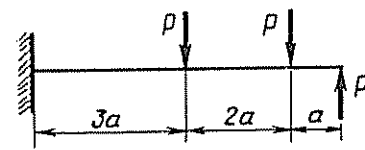


425

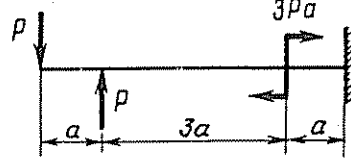


Bài tập 426 — 433. Tính độ võng cực đại $|f|_{\max}$ và góc quay cực đại $|\theta|_{\max}$ về giá trị tuyệt đối của dầm. Mô tả dạng đường cong đàn hồi.

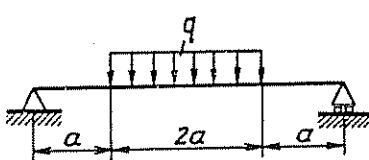
426



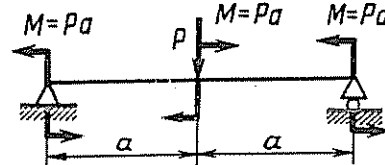
427



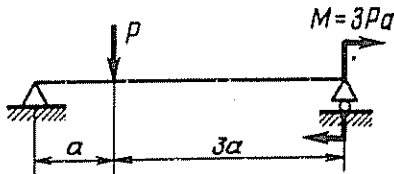
428



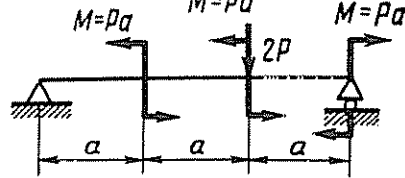
429



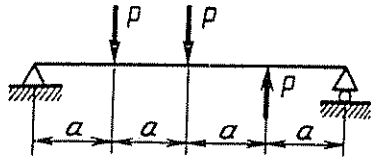
430



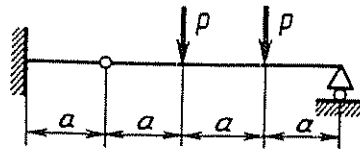
431



432

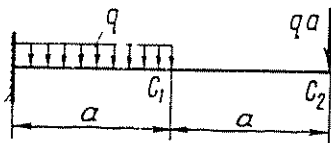


433

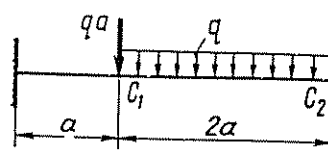


Bài tập 434 — 443. Tính độ võng f , f_1 , f_2 của các mặt cắt C , C_1 , C_2 của dầm bằng cách sử dụng giá trị độ võng và góc quay của các dầm đơn giản cho sẵn ở bảng (xem hình 90).

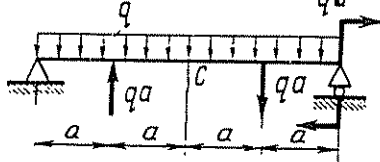
434



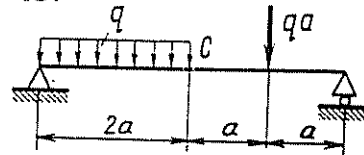
435



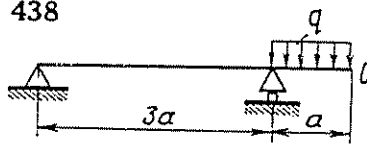
436



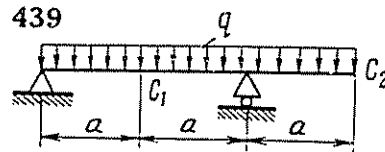
437



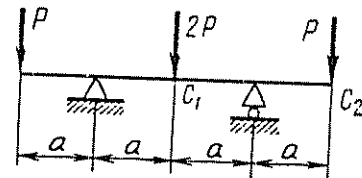
438



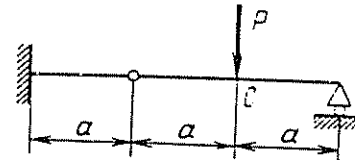
439



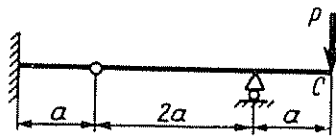
440



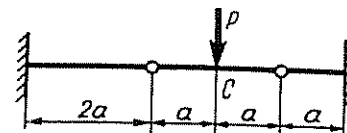
441



442

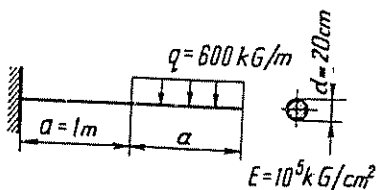


443

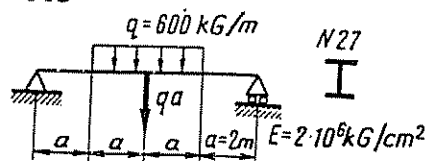


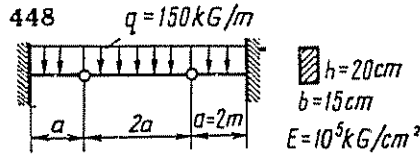
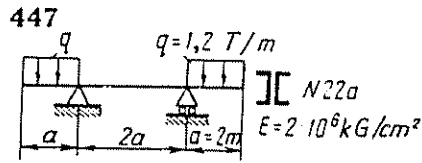
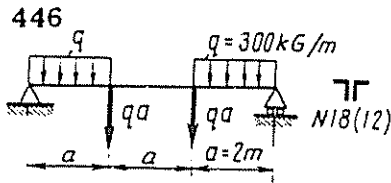
Bài tập 444 — 448. Tính độ võng lớn nhất về giá trị tuyệt đối $|f|_{\max}$ của dầm bằng một phương pháp tùy chọn.

444



445



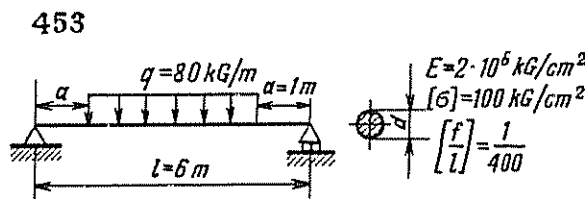
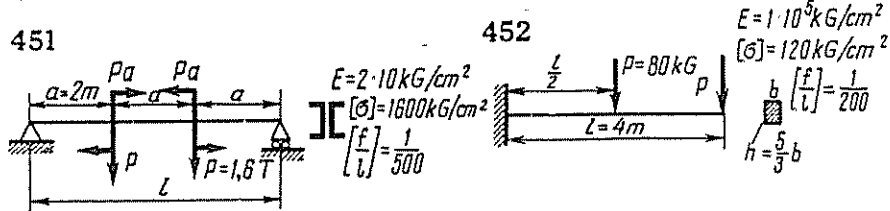
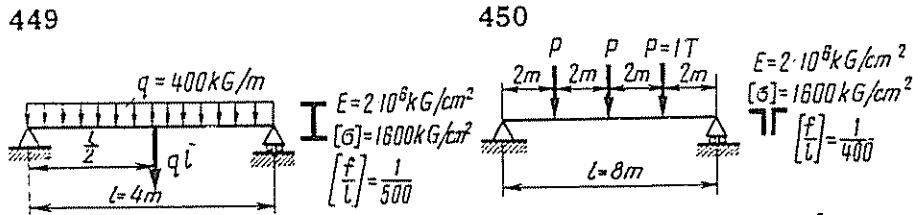


Bài tập 449 — 453. Chọn kích thước mặt cắt ngang dầm thỏa mãn các điều kiện về độ bền và độ cứng.

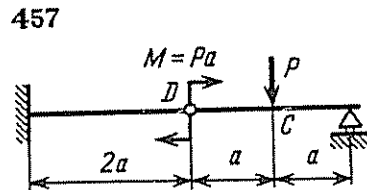
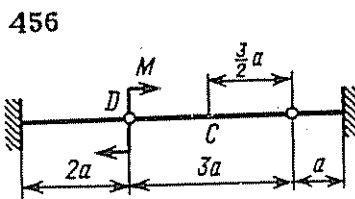
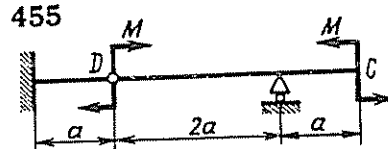
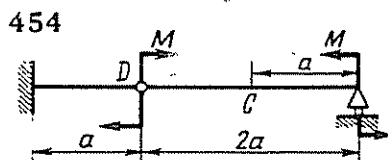
Trong một số trường hợp, bên cạnh điều kiện về độ bền còn có thêm điều kiện về độ cứng. Điều kiện này biểu thị bằng tỉ số của giá trị tuyệt đối của độ võng cực đại $|f|_{\max}$ với chiều dài l của nhịp dầm không vượt quá một giá trị cho trước $1/n$, tức là:

$$\frac{|f|_{\max}}{l} \leq \frac{1}{n} \quad (122)$$

Tùy theo mục đích và vật liệu chế tạo dầm, giá trị cho phép $1/n$ có thể khác nhau, thí dụ đối với dầm thép người ta lấy $1/n = 1/200 \div 1/1000$.

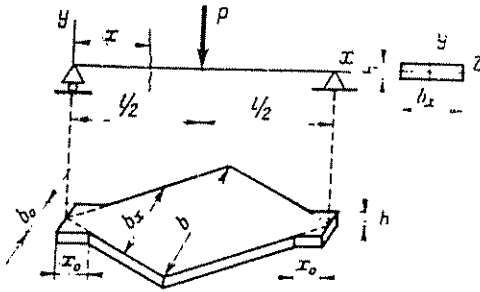


Bài tập 454 — 457. Tính tỉ số của độ võng của mặt cắt C trong trường hợp ngẫu lực M đặt ở bên trái hoặc bên phải khớp D.



§ 25. Dầm có mặt cắt thay đổi.

Nếu kích thước mặt cắt ngang dầm biến đổi trơn tru và không đáng kể thì có thể tính ứng suất bằng công thức đã lập đối với dầm mặt cắt không đổi. Dầm hợp lý nhất là dầm có độ bền đều, tức là dầm ở các thớ biên của mọi mặt cắt ngang có ứng suất pháp bằng nhau.



Hình 84

Cấu tạo dầm có độ bền đều. Khi dầm bị uốn thuần túy thì dầm có độ bền đều là dầm có mặt cắt không đổi.

Trong trường hợp tổng quát, mặt cắt ngang của dầm có độ bền đều biến đổi theo phương trình:

$$W_x = \frac{|M_x|}{[\sigma]} \quad (123)$$

trong đó M_x là momen uốn ở mặt cắt bất kỳ, W_x là momen chống uốn của mặt cắt đó.

Nếu ở mặt cắt ngang nào đó, momen uốn bằng không hoặc rất bé, nhưng lực cắt lại không bằng không hoặc có giá trị lớn thì dạng mặt cắt của dầm có độ bền đều phải tính theo điều kiện bền của ứng suất tiếp (104). Dưới đây trình bày vài thí dụ cấu tạo dầm có độ bền đều.

Thí dụ 40. Cho $P, l, h = \text{const}$, $[\sigma], [\tau]$ (hình 84) Tính b_x .

Bài giải. Momen uốn ở mặt cắt bất kỳ

$$M_x = Px/2.$$

Momen chống uốn của mặt cắt này.

$$W_x = b_x h^2 / 6.$$

Theo phương trình (123)

$$b_x h^2 / 6 = \frac{Px}{2[\sigma]}$$

Từ đó rút ra:

$$b_x = \frac{3Px}{h^2[\sigma]}, \quad b_{x=0} = 0; \quad b_{x=l/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl}{h^2[\sigma]}$$

Vi ở những mặt cắt trên gối, $M = 0$, $Q = P/2$, do đó không thể cho mặt cắt ở đó bằng không. Bề rộng b_0 của mặt cắt phải xác định từ điều kiện về độ bền theo ứng suất tiếp:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{b_0 h} \leq [\tau]$$

Từ đó:

$$b_0 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{h[\tau]}$$

Dạng dầm có độ bền đều vẽ trên hình 84. Chiều dài x_0 đoạn đầu dầm có

bề rộng không đổi b_0 tính từ điều kiện:

$$b_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{h[\tau]} = \frac{3Px_0}{h^2[\sigma]}, \text{ từ đó}$$

$$x_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{[\sigma]}{[\tau]}$$

Vì $[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]$, do đó
 $x_0 \approx (0,5 \div 0,42)h$.

Thí dụ 41. Cho $P, l, [\sigma], [\tau]$
 (hình 85).

Tính d_x .

Bài giải. $M_x = -Px; W_x = \pi d_x^3/32$.

Theo phương trình (118) $\pi d_x^3/32 = Px/[\sigma]$. Do đó

$$d_x = 2 \sqrt[3]{4Px/(\pi[\sigma])}$$

$$d_{x=0} = 0, d_{x=l} = 2 \sqrt[3]{4Pl/(\pi[\sigma])}$$

Vì khi $x=0$ $M=0$, còn $Q=-P$, do đó ta phải điều chỉnh dạng của dầm có độ bền đều từ điều kiện bền theo ứng suất tiếp.

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|Q|}{F} = \frac{4P}{3\pi d_0^2/4} \leq [\tau]$$

Từ đó:

$$d_0 \geq 4 \sqrt{P/3\pi[\tau]}$$

Dạng cấu tạo dầm có độ bền đều vẽ trên hình 85, a.

Chiều dài x_0 đầu dầm có đường kính d_0 không đổi tính từ điều kiện

$$d_0 = 4 \sqrt{P/(3\pi[\tau])} = 2 \sqrt[3]{4Px_0/(\pi[\sigma])},$$

Từ đó

$$x_0 = \frac{d_0}{6} \cdot \frac{[\sigma]}{[\tau]} \approx (0,33 \div 0,26)d_0$$

Nếu dầm độ bền đều có dạng phức tạp, người ta thường chế tạo dầm hình bậc ngoại tiếp với dầm độ bền đều. Khi đã tính được d_0 và d , ta lấy những đường kính có giá trị bất kỳ trong khoảng này, thí dụ:

$$d_0 < d_1 < d_2 < d_3 < d.$$

Sau đó, ta tính

$$W_0 = \pi d_0^3/32; W_1 = \pi d_1^3/32; W_2 = \pi d_2^3/32; W_3 = \pi d_3^3/32 \text{ và } M_0 = W_0[\sigma]; M_1 = W_1[\sigma]; M_2 = W_2[\sigma]; M_3 = W_3[\sigma].$$

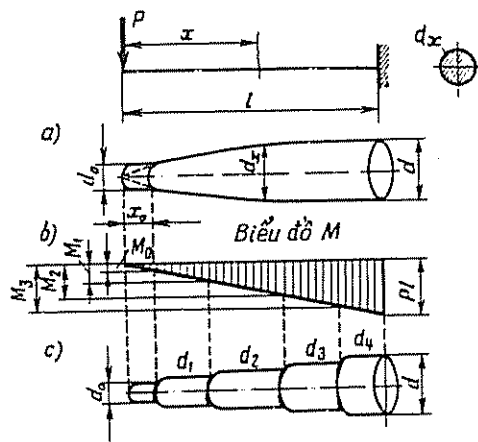
Như vậy các đường kính d_0, d_1, d_2, d_3 đảm bảo về độ bền ở các mặt cắt tương ứng. Ráp các giá trị M_0, M_1, M_2, M_3 vào biểu đồ momen uốn (hình 85, b), ta xác định được chiều dài từng bậc của dầm (hình 85, c).

Tính chuyển vị của dầm mặt cắt thay đổi. Chuyển vị của dầm mặt cắt thay đổi có thể tính bằng phương pháp giải tích và phương pháp đồ toán.

Trong phương pháp giải tích ở mỗi đoạn dầm ta lập được một phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$Ey'' = \frac{M_x}{I_x} \quad (124)$$

trong đó I_x là momen quán tính của mặt cắt đối với đường trung hòa.



Hình 85

Tích phân hai lần ta tìm được hàm góc quay θ_x và độ võng f_x :

$$E\theta_x = Ey' = \int \frac{M_x}{I_x} dx + C_1 \quad (125)$$

và

$$Ef_x = Ey = \int \left[\int \frac{M_x}{I_x} dx \right] dx + C_1x + C_2 \quad (126)$$

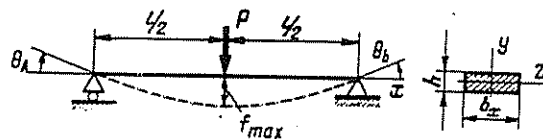
Các hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định bằng các điều kiện liên kết của dầm. Khi dầm có nhiều đoạn, ngoài những điều kiện liên kết còn phải sử dụng điều kiện góc quay bằng nhau và độ võng bằng nhau ở hai bên của chỗ ranh giới các đoạn. Khi chia đoạn, không những phải chia theo tải trọng mà còn phải chia theo quy luật biến đổi mặt cắt ngang.

Ngoài phương trình (124) ta cũng có thể sử dụng phương trình có dạng sau đây:

$$EI_0 y'' = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_{td}, \quad (127)$$

trong đó I_0 — momen quán tính mặt cắt quy ước không thay đổi của dầm; $M_{td} = M_x \frac{I_0}{I_x}$ — momen uốn tính đổi.

Thí dụ 42. Cho $P, l, h = \text{const}$ (dầm độ bền đều mặt cắt hình chữ nhật có chiều cao h không đổi và bề rộng b_x thay đổi, xem thí dụ 39), E (hình 86).



Hình 86

Tính θ_{\max}, f_{\max} .

Bài giải: Tương tự như ở thí dụ 40 $M_x = Px/2$ và $I_x = b_x h^3/12 = Phx/4[\sigma]$

Do đó phương trình (124) có dạng: $Ey'' = M_x/I_x = 2[\sigma]/h$ hoặc $(Eh/2[\sigma])y'' = 1$

Tích phân hai lần phương trình này, ta được:

$$(Eh/2[\sigma])y' = x + C_1$$

$$(Eh/2[\sigma])y = x^2/2 + C_1x + C_2$$

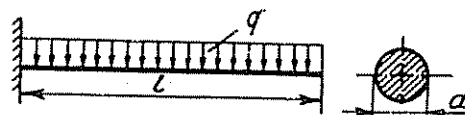
Vì khi $x = 0, y = 0$ và khi $x = l/2, y' = 0$, do đó $C_2 = 0, C_1 = -l/2$. Do đó $\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = (y')_{x=0} = 2C_1[\sigma]/Eh = -l[\sigma]/Eh$ và $f_{\max} = (y)_{x=l/2} = -l^2[\sigma]/4Eh$.

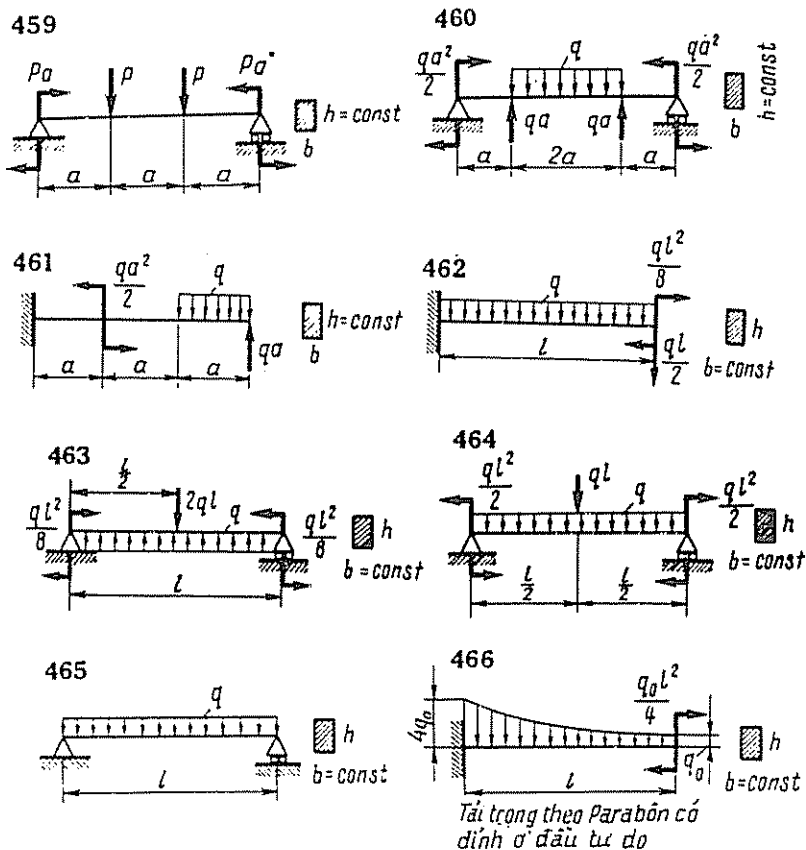
Ở thí dụ 40, ta đã biết $[\sigma] = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pl}{h^2b}$, do đó

$$\theta_{\max} = -\frac{3}{2} \frac{Pl^2}{Eh^3b} \quad \text{và} \quad f_{\max} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{Pl^3}{Eh^3b}$$

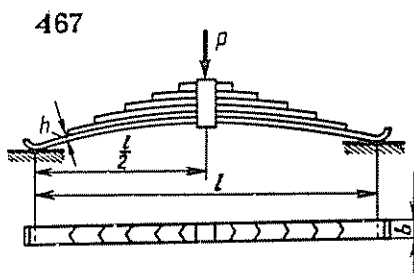
Bài tập 458 — 466. Xác định dạng của dầm độ bền đều và tính độ võng có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

458

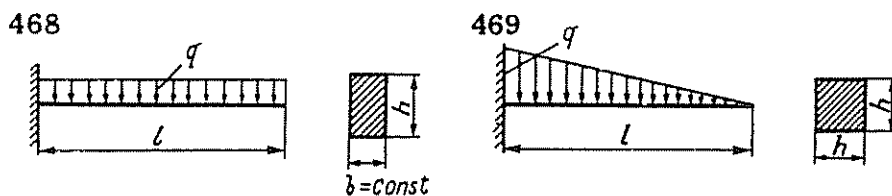




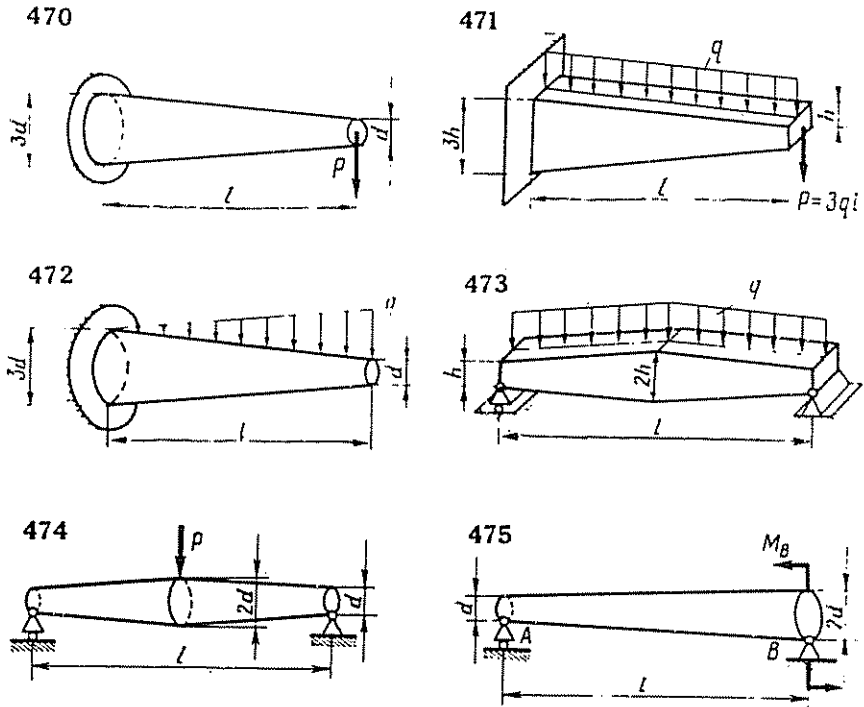
Bài tập 467. Cho $l=1\text{m}$, $b=60\text{mm}$, $h=5\text{mm}$, $n=10$ bản, $[\sigma]=1600\text{kG/cm}^2$.
 $E=2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$. Tính P_{max} , $|f|_{\text{max}}$. Không xét ma sát giữa các bản lò xo.



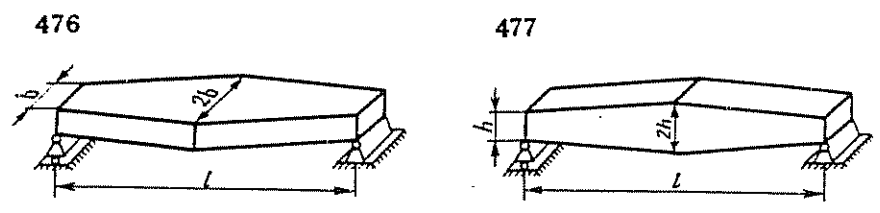
Bài tập 468 — 469. Xác định dạng của dầm độ bền đều, ảnh hưởng của ứng suất tiếp đến dạng dầm, độ võng của đầu tự do, góc quay đầu dầm (giải thích kết quả thu được). $q, l, h_{\text{max}}, E, I_{\text{max}}$ coi như đã biết.



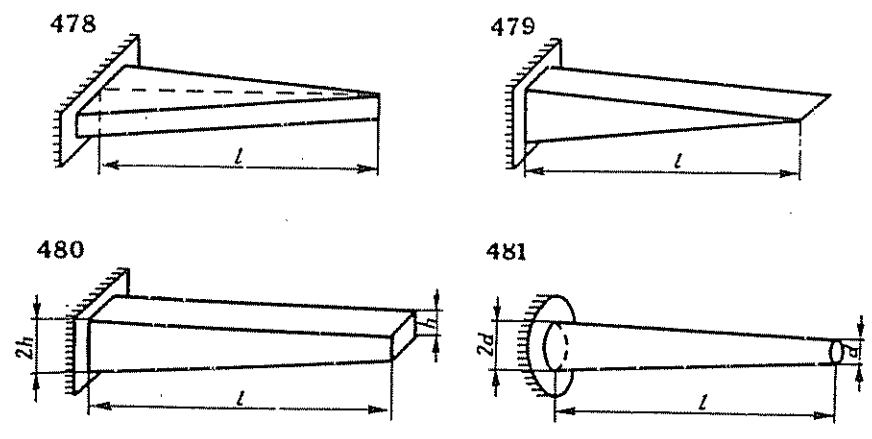
Bài tập 470 — 475. Tính xem ứng suất pháp lớn nhất ở tại mặt cắt nào và σ_{\max} , $|f|_{\max}$ và $|\theta|_{\max}$ lớn hơn bao nhiêu lần so với dầm tương tự nhưng mặt cắt không đổi (lớn nhất).



Bài tập 476 — 477. Xác định ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} do trọng lượng bản thân của dầm và vị trí mặt cắt nguy hiểm M_{\max} và W_{\max} coi như đã biết.



Bài tập 478 — 481. Xác định độ võng ở đầu tự do do trọng lượng bản thân. Trọng lượng Q của dầm, l , E và I_{\max} coi như đã hết.



Dùng phương pháp đồ toán để xác định biến dạng của dầm mặt cắt thay đổi, người ta lấy tải trọng giả tạo tác dụng vào dầm giả tạo không phải là momen uốn thực M_x , mà momen uốn tính đổi:

$$M_{td} = M_x \frac{I_0}{I_x} \quad (128)$$

tương ứng với phương trình (127)

Góc quay và độ võng của mặt cắt bất kỳ được xác định theo các công thức:

$$\theta_x = \frac{Q_{gtx}}{EI_0} \quad (129)$$

và

$$f_x = \frac{M_{gtx}}{EI_0} \quad (130)$$

trong đó Q_{gtx} và M_{gtx} — lực cắt giả tạo và momen uốn giả tạo tác dụng vào dầm giả tạo, EI_0 — độ cứng chống uốn của mặt cắt không đổi quy ước của dầm cho trước.

Đối với dầm độ bền đều có chiều cao mặt cắt không đổi, nếu lấy I_0 là momen quán tính của mặt cắt ngang ở đó có M_{max} , thì momen uốn tính đổi $M_{td} = M_{max} = const.$

Thí dụ 43. Cho $P, a, M = 2Pa, E, I$ (hình 87).

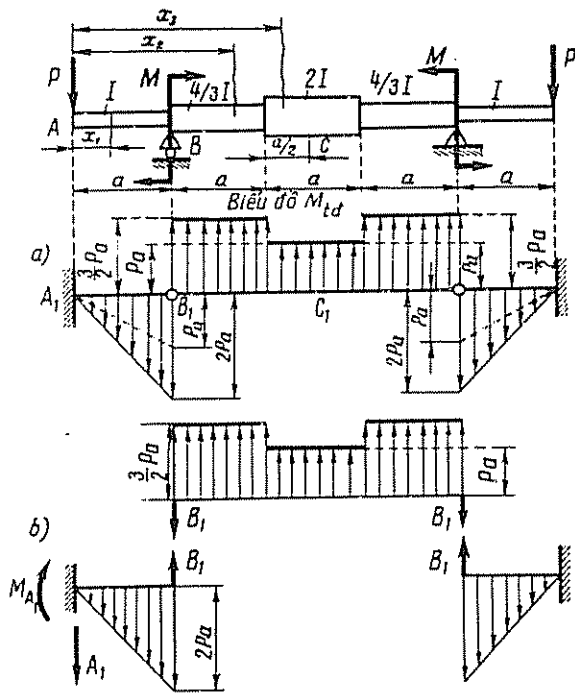
Xác định $\theta_A, \theta_B, f_A, f_C$.

Bài giải. Momen uốn của các đoạn dầm cho trước có giá trị sau đây: $M_{x_1} = -Px_1, M_{x_2} = M_{x_3} = Pa$. Lấy $I_0 = 2I$, ta tính được momen uốn tính đổi của các đoạn:

$$M_{td_1} = M_{x_1} \frac{2I}{I} = -2Px_1$$

$$M_{td_2} = M_{x_2} \frac{2I}{4I/3} = \frac{3}{2} Pa$$

$$M_{td_3} = M_{x_3} = Pa.$$



Hình 87

Lấy biểu đồ momen uốn tính đổi làm tải trọng giả tạo của dầm giả tạo hình 87,a). Phân dầm giả tạo thành hai dầm cơ bản (công xon) và một dầm góc (hình 87,b). Vì

$$B_1 = \frac{3}{2} Pa \cdot a + Pa \frac{a}{2} = 2Pa^2, Q_{gtA_1} = -2Pa^2 + 2Pa \frac{a}{2} = -Pa^2$$

$$Q_{gtB_1} = -B_1 = -2Pa^2; M_{gtA_1} = 2Pa^2a - Pa^2 \frac{2}{3} a = \frac{4}{3} Pa^3;$$

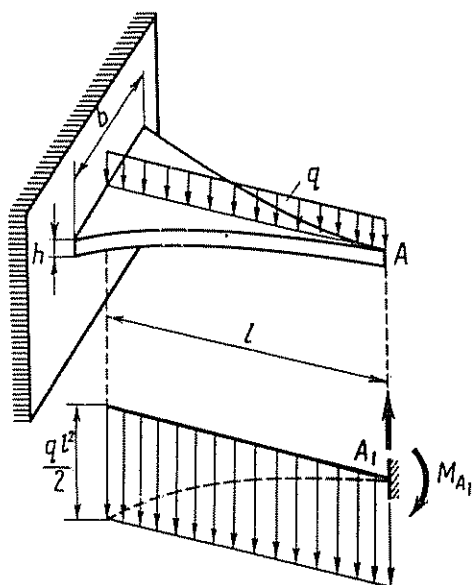
$$M_{gtC_1} = -2Pa^2 \frac{3}{2} a + \frac{3}{2} Pa^2 a + \frac{1}{2} Pa^2 \cdot \frac{1}{4} a = -\frac{11}{8} Pa^3;$$

Do đó:

$$\theta_A = Q_{gtA_1}/2EI = -Pa^2/2EI; \theta_B = Q_{gtB_1}/2EI = -Pa^2/EI$$

$$f_A = M_{gtA_1}/2EI = 2Pa^3/3EI;$$

$$f_C = M_{gtC_1}/EI = -11Pa^3/16EI.$$



Hình 88

Thí dụ 44. Cho $q, l, E, h = \text{const}$; dầm có độ bền đều, có mặt cắt hình chữ nhật, bề cao h không đổi và bề rộng b_x biến đổi (Hình 88).

Xác định θ_A, f_A .

Bài giải: Lấy $I_0 = bh^3/12$, khi đó $M_{\text{td}} = M_{\text{max}} = -ql^2/2$

$$Q_{gtA_1} = -ql^2/2 = -ql^3/2.$$

$$M_{gtA_1} = (-ql^2/2) \cdot (l \cdot l/2) = -ql^4/4.$$

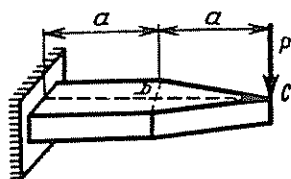
Các vị chuyển cần tìm bằng:

$$\theta_A = \frac{Q_{gtA_1}}{EI_0} = -\frac{ql^3}{2EI_0}$$

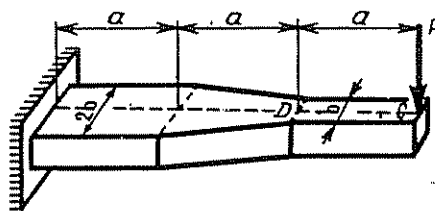
$$f_A = \frac{M_{gtA_1}}{EI_0} = -\frac{ql^4}{4EI_0}$$

Bài tập 482 — 485. Xác định độ võng f_C của mặt cắt C và góc quay θ_D của mặt cắt D . P, a, E, I_{max} coi như đã biết.

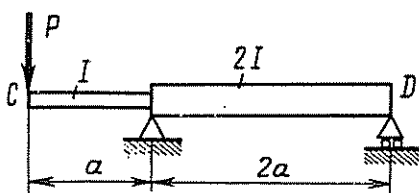
482



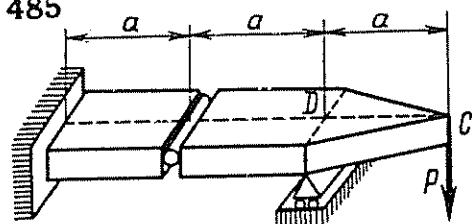
483



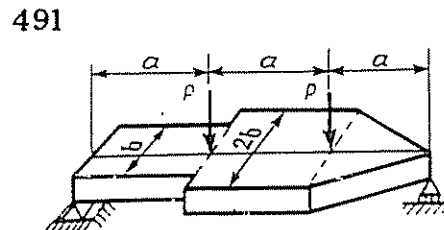
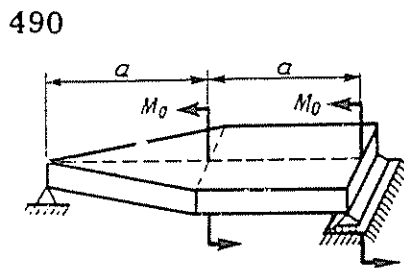
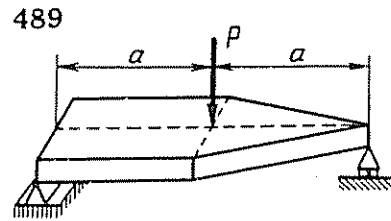
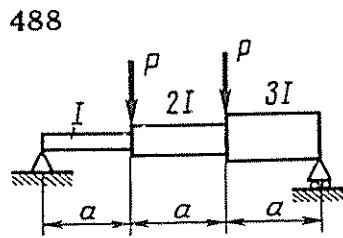
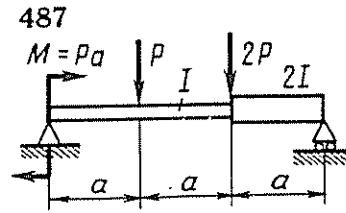
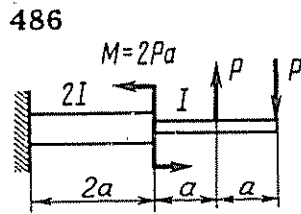
484



485



Bài tập 486 — 491. Xác định độ võng và góc quay lớn nhất về giá trị tuyệt đối của dầm. P, M, a, E và I_{\max} coi như đã biết.



§ 26. Dầm siêu tĩnh.

Dầm siêu tĩnh là dầm không thể xác định được tất cả các thành phần phản lực ở những chỗ liên kết bằng các điều kiện tĩnh học. Bậc siêu tĩnh của dầm bằng số ẩn số thừa mà các điều kiện tĩnh học không xác định được.

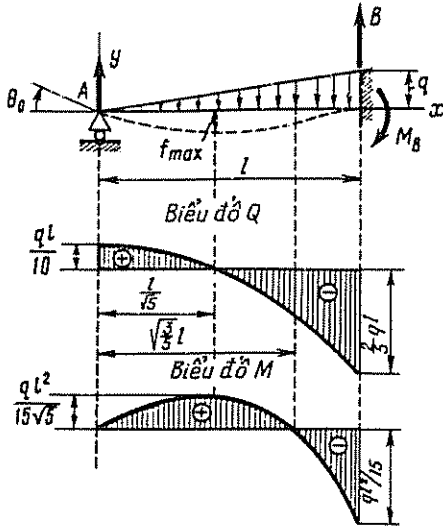
Phương pháp giải dầm siêu tĩnh.

Phương pháp thông số ban đầu. Đối với một dầm siêu tĩnh cho trước, lập các tích phân tổng quát của các phương trình vi phân của đường đàn hồi theo các thông số ban đầu. Các thông số ban đầu và các thành phần phản lực được xác định bằng các điều kiện liên kết và các điều kiện tĩnh học.

Thí dụ 45. Cho q, l, E, I (hình 89)

Xác định $A, B, M_B, f_x, \theta_x, Q_x, M_x$.

Bài giải. Vì ở gối trái $f_0 = 0$, do đó theo các phương trình (116) và (117) hàm độ võng và hàm góc quay viết được như sau:



Hình 89

$$EI f_x = EI \theta_0 x + A \frac{x^3}{6} - \frac{q x^5}{l \cdot 120};$$

$$EI \theta_x = EI \theta_0 + A \frac{x^2}{2} - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^4}{24}.$$

Theo điều kiện liên kết của dầm $f_{x=l} = 0$ và $\theta_{x=l} = 0$, tức là:

$$EI f_{x=l} = EI \theta_0 l + A \frac{l^3}{6} - \frac{q l^4}{120} = 0;$$

$$EI \theta_{x=l} = EI \theta_0 + A \frac{l^2}{2} - \frac{q l^3}{24} = 0.$$

Từ đó rút ra:

$$A \frac{l^2}{3} = \frac{q l^3}{30}, A = \frac{q l}{10} \text{ và } \theta_0 = \\ = \frac{1}{EI} \left(\frac{q l^3}{24} - \frac{q l^3}{20} \right) = - \frac{q l^3}{120 EI}.$$

Như vậy ta có:

$$EI f_x = \frac{q l^3}{120} x + \frac{q l}{60} x^3 - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^5}{120}$$

và

$$EI \theta_x = - \frac{q l^3}{120} + \frac{q l}{20} x^2 - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^4}{24}$$

Cho $\theta_x = 0$, từ phương trình $x^4 - \frac{6l^2}{5} x^2 + \frac{l^4}{5} = 0$

ta tìm được $x = l/\sqrt{5} \approx 0,447l$, ở đó độ võng đạt đến giá trị cực đại: $f_{\max} =$

$$f_{x=l/\sqrt{5}} = - \frac{2}{375} \cdot \frac{q l^4}{EI}$$

Hàm của lực cắt và momen uốn:

$$Q_x = \frac{q l}{10} - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^2}{2}$$

và

$$M_x = \frac{q l}{10} x - \frac{q}{l} \cdot \frac{x^3}{6}$$

Cho $M_x = 0$, ta tìm được $x = l\sqrt{3/5} \approx 0,775l$, ở đó đường đàn hồi có điểm uốn. Cho $Q_x = 0$, ta tìm được $x = l/\sqrt{5} \approx 0,447l$, ở đó momen uốn đạt giá trị cực đại:

$$M_{\max} = M_{x=l/\sqrt{5}} = q l^2 / (15\sqrt{5});$$

$$Q_{x=0} = q l / 10 = A;$$

$$Q_{x=l} = -\frac{2}{5}ql = -B;$$

$$M_{x=0} = 0;$$

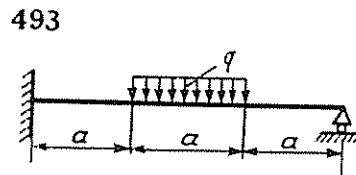
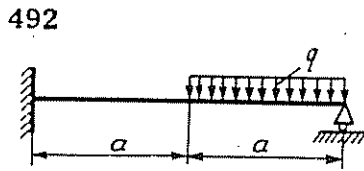
$$M_{x=l} = -ql^2/15 = M_B.$$

Với các số liệu trên, ta vẽ được biểu đồ Q và M và đường đàn hồi của dầm.

Bài tập 492 — 495. Giải dầm siêu tĩnh.

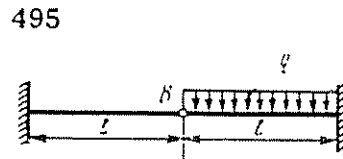
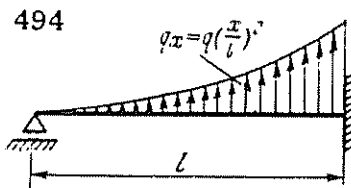
Trong bài 492 và 493 vẽ biểu đồ lực cắt Q và biểu đồ momen uốn M ; trong bài 494 tính góc quay của mặt cắt ở gối, trong bài 495 tính độ võng f_B của mặt cắt B .

Phương pháp so sánh chuyển vị. Theo phương pháp này người ta bỏ bớt các liên kết của dầm siêu tĩnh cho trước để được dầm tĩnh định, không biến dạng hình học. Dầm này gọi là dầm cơ bản.

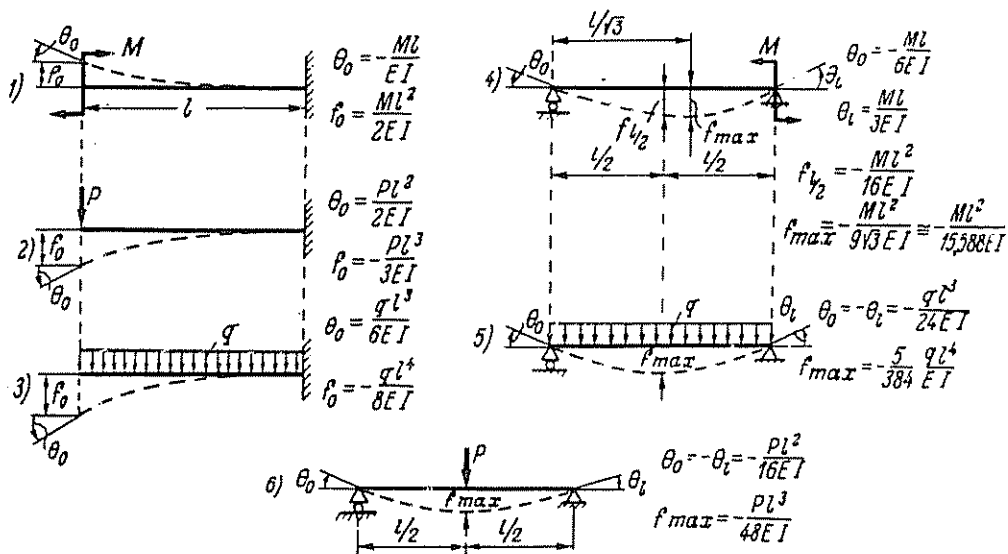


$$A = \frac{11qa}{24}$$

$$\theta_0 = \frac{67a^3}{18EI}$$



Trước hết người ta chỉ đặt vào dầm cơ bản những tải trọng cho trước và tính chuyển vị tương ứng với ẩn số thừa bỏ đi ở mặt cắt đã giảm liên kết (nếu bỏ lực thừa thì tính độ võng, bỏ momen thừa thì tính góc quay). Sau đó cũng trên dầm cơ bản ấy, người ta chỉ đặt các ẩn số thừa làm tải trọng và tính chuyển vị ở



Hình 90

các mặt cắt đã giảm liên kết như ở trên. Giá trị của ẩn số thừa xác định từ điều kiện: tổng chuyển vị của dầm cơ bản do tải trọng cho trước tác dụng và do ẩn số thừa tác dụng ở mặt cắt đã giảm liên kết bằng chuyển vị cũng của mặt cắt ấy của dầm siêu tĩnh.

Phương pháp này dùng thuận tiện trong những trường hợp mà người ta có thể tính được các chuyển vị cần thiết của dầm cơ bản dưới tác dụng của tải trọng cho trước và tác dụng của ẩn số thừa bằng cách tra bảng. Dù sao cũng nên nhớ giá trị chuyển vị của một vài dầm đơn giản nhất (hình 90).

Thí dụ 46. Cho M, l, E, I (hình 91).

Xác định $A, B, M_B, \theta_A, f_{1/2}$. Vẽ biểu đồ M và Q .

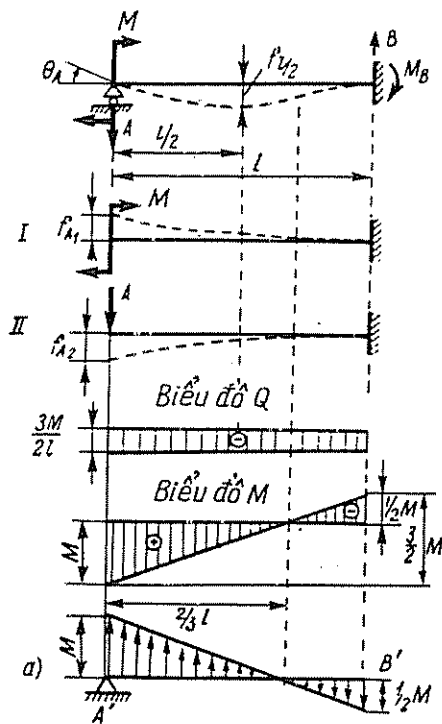
Bài giải. Ta chọn ẩn số thừa là phản lực A ở gối dầm. Dầm cơ bản I là một công xon chịu tác dụng của tải trọng cho trước là ngẫu lực có momen bằng M . Chuyển vị (độ võng) của dầm cơ bản ở chỗ bỏ liên kết tra trên hình 90 bằng $f_{A_1} = Ml^2/2EI$.

Cũng dầm này (II) dưới tác dụng của ẩn số thừa là phản lực A đặt ở mặt cắt bỏ liên kết có chuyển vị bằng $f_{A_2} = -Al^3/3EI$ (xem dầm 2 hình 90).

Vì tại gối A của dầm siêu tĩnh cho trước, $f_A = 0$, do đó so sánh chuyển vị của dầm I và dầm II với dầm cho trước ta có $f_A = f_{A_1} + f_{A_2} = 0$ hay $Ml^2/2EI - Al^3/3EI = 0$. Từ đó: $A = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$

Vì ở mặt cắt bất kỳ nào của dầm cho trước cũng có lực cắt $Q = A$, do đó biểu đồ lực cắt là một hình chữ nhật có chiều cao $\frac{3}{2} \cdot \frac{M}{l}$. Phản lực ở ngàm $B = -A$.

Biểu đồ momen uốn vẽ bằng cách cộng hai biểu đồ momen uốn của dầm cơ bản, biểu đồ thứ nhất do tải trọng cho trước, biểu đồ thứ hai do ẩn số thừa. Biểu đồ thứ nhất là hình chữ nhật dương có chiều cao M . Biểu đồ thứ hai là hình



Hình 91

tam giác âm có giá trị bằng không ở đầu tự do và bằng $\frac{3}{2} M$ ở ngàm. Cộng hai biểu đồ này ta được biểu đồ momen uốn của dầm cho trước. Momen phản lực ở ngàm $M_B = -\frac{3}{2} M + M = -\frac{M}{2}$.

Để tính chuyển vị của dầm, ta dùng phương pháp đồ toán. Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo vẽ ở hình vẽ 91,a.

Vi:

$$Q_{gtA_1} = \frac{M}{2} \cdot \frac{l}{6} - \frac{Ml}{3} = -\frac{Ml}{4}$$

$$M_{gt \frac{l}{2}} = -\frac{Ml}{12} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{9} \right) + \frac{M}{4} \cdot \frac{l}{12} \cdot \frac{l}{18} = -\frac{Ml^2}{32}$$

do đó:

$$\theta_A = Q_{gtA_1}/EI = -Ml/4EI$$

và

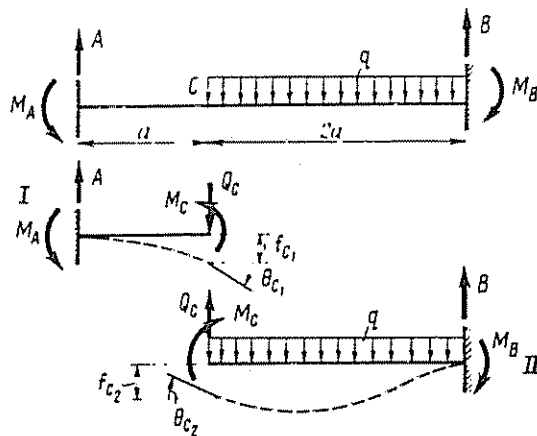
$$f_{l/2} = M_{gt(l/2)}/EI = -Ml^2/32EI.$$

Dầm giả tạo chỉ tựa lên gối ở đầu bên trái và cân bằng dưới tác dụng của tải trọng, như vậy momen của tải trọng giả tạo đối với đầu trái của dầm giả tạo phải bằng không.

Ngoài những thành phần phản lực ở chỗ các liên kết, còn có thể chọn làm ẩn số thừa nội lực Q và M ở các mặt cắt ngang nào mà việc tính có thể đưa về việc các dạng dầm có sẵn trong bảng tính.

Thí dụ 47. Cho q, a (hình 92)

Xác định A, B, M_A, M_B .



Hình 92

Bài giải. Ta bỏ các liên kết của dầm bậc hai siêu tĩnh cho trước này bằng cách tách thành hai dầm I và II ở chỗ mặt cắt ngang C và lấy lực cắt Q_c và momen uốn M_c ở mặt cắt này làm ẩn số thừa.

Điều kiện so sánh chuyển vị của hai dầm I và II trở thành hệ hai phương trình sau đây:

$$\theta_{c1} = \theta_{c2}$$

$$f_{c1} = f_{c2}$$

Theo dầm 1 và 2 vẽ ở hình 90, ta có đối với dầm I:

$$\theta_{c1} = \frac{M_c a}{EI} - \frac{Q_c a^2}{2EI}$$

và

$$f_{c1} = \frac{M_c a^2}{2EI} - \frac{Q_c a^3}{3EI}$$

Theo dầm 1, 2 và 3 vẽ ở hình 90, đối với dầm II ta có:

$$\theta_{c2} = -\frac{M_c 2a}{EI} - \frac{Q_c (2a)^2}{2EI} + \frac{q(2a)^3}{6EI}$$

và

$$f_{c2} = \frac{M_c (2a)^2}{2EI} + \frac{Q_c (2a)^3}{3EI} - \frac{q(2a)^4}{8EI}$$

Thế các kết quả trên vào các phương trình so sánh chuyển vị, ta được:

$$\left. \begin{aligned} 3M_c + 1,5 Q_c a &= \frac{4}{3} qa^2, \\ 1,5M_c + 3Q_c a &= 2qa^2. \end{aligned} \right\}$$

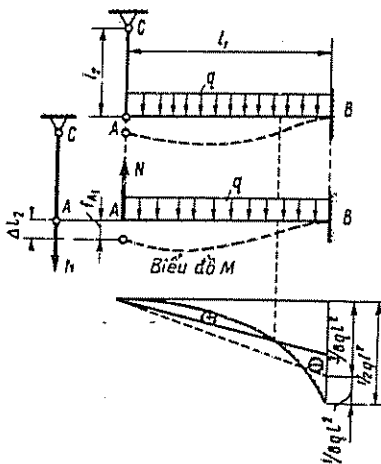
Từ đó rút ra $Q_c = \frac{16}{27} qa$, $M_c = \frac{4}{27} qa^2$. Các phản lực ở đầu A: $A =$

$= Q_c = \frac{16}{27} qa$, $M_A = Q_c a - M_c = \frac{4}{9} qa^2$. Các phản lực ở đầu B: $B = 2qa - Q_c =$

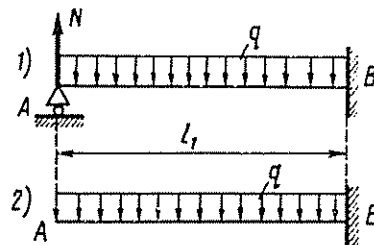
$\frac{38}{27} qa$, $M_B = Q_c 2a - M_c - 2qa^2 = \frac{3}{2} qa^2$.

Phương pháp so sánh chuyển vị còn có thể áp dụng để tính hệ hỗn hợp dầm thanh (tức là hệ gồm có dầm và thanh đàn hồi liên kết khớp với nhau) và hệ khung (tức là hệ thanh có tiếp điểm cứng, góc giữa các thanh không bị biến đổi).

Khi tính hệ khung thường người ta không xét đến biến dạng kéo hay nén của các bộ phận.



Hình 93



Hình 94

Thí dụ 48. Cho một côngxon AB chịu tải trọng phân bố đều với các dữ kiện q, l, E_1, I_1 và thanh đàn hồi AC với các dữ kiện l_2, E_2, F_2 (hình 93).

Xác định lực dọc N trong thanh.

Bài giải. Ta tách hệ hỗn hợp dầm, thanh cho trước tại khớp A thành dầm AB và thanh đàn hồi AC . Dầm chịu tải trọng phân bố đều q và lực chưa biết N . Thanh chỉ bị kéo bởi lực N . Áp dụng điều kiện so sánh chuyển vị ở đầu A của dầm và thanh ta có:

$$|f_{A1}| = \Delta l_2$$

Theo dầm tính sẵn 2 và 3 ở hình 90

$$|f_{A1}| = ql_1^4/(8E_1I_1) - (Nl_1^3/3E_1I_1).$$

Theo định luật Húc

$$\Delta l_2 = Nl_2/E_2F_2.$$

Thay f_{A1} và Δl_2 vào điều kiện so sánh chuyển vị, ta được:

$$(ql_1^4/8E_1I_1) - (Nl_1^3/3E_1I_1) = Nl_2/E_2F_2.$$

Từ đó rút ra:

$$N = \frac{3}{8} ql_1 \frac{1}{1 + 3 \frac{l_2}{l_1^3} \cdot \frac{E_1I_1}{E_2F_2}}$$

Ta tính các trường hợp đặc biệt (hình 94):

1. $E_2F_2 = \infty$; $N = 3ql_1/8$,

2. $E_2F_2 = 0$; $N = 0$.

Như vậy, tùy theo độ cứng của thanh đàn hồi nội lực N có thể biến thiên trong giới hạn $0 \leq N \leq \frac{3}{8} ql_1$, và momen uốn M_B ở ngàm của dầm trong giới hạn:

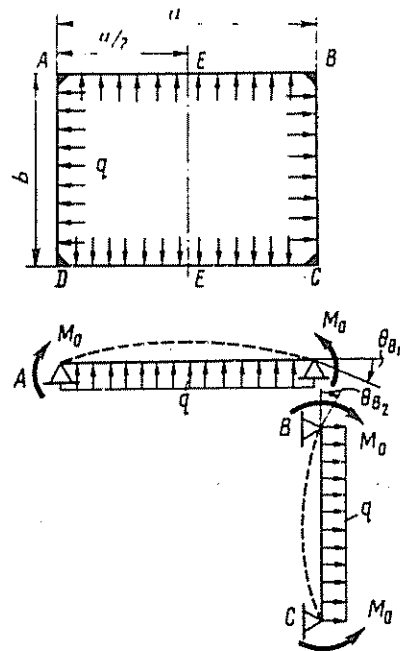
$$ql_1^2/8 \leq M_B \leq ql_1^2/2.$$

Trên hình 93 vẽ biểu đồ momen uốn của dầm ứng với giá trị M_B lấy tùy ý trong khoảng biến đổi của nó.

Thí dụ 49. Cho một khung chữ nhật có cạnh là a và b , độ cứng chống uốn của mặt cắt EI , chịu áp lực phân bố đều q phân bố ở phía trong và vuông góc với thành khung (hình 95).

Xác định sự biến đổi khoảng cách δ giữa các mặt cắt ở giữa khung $E - E$.

Bài giải. Tách khung thành các dầm thẳng bằng các mặt cắt ở tiếp điểm. Vì khung đối xứng, do đó chỉ cần xét hai dầm AB và BC . Do không tính đến biến dạng kéo các thanh của khung, nên có thể coi các dầm tựa trên gối ở hai đầu, chịu tải trọng phân bố đều q và momen chưa biết M_0 đặt vào mặt cắt ở gối, do tiếp điểm cứng gây ra. Vì góc khung vẫn giữ vuông góc, nên điều kiện so sánh chuyển vị có thể viết thành:



Hình 95

$$\theta_{B1} = \theta_{B2}$$

Theo các dầm 4 và 5 tính sẵn ở hình 90:

$$\theta_{B1} = \frac{qa^3}{24EI} - \frac{M_0 a}{2EI} \quad \text{và} \quad \theta_{B2} = \frac{M_0 b}{2EI} - \frac{qb^3}{24EI}$$

Theo điều kiện so sánh chuyển vị

$$\frac{qa^3}{12} + \frac{qb^3}{12} = M_0(a + b)$$

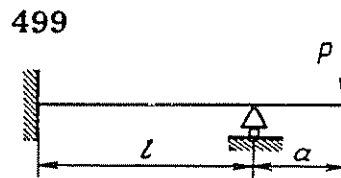
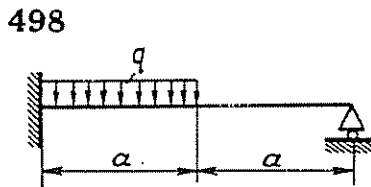
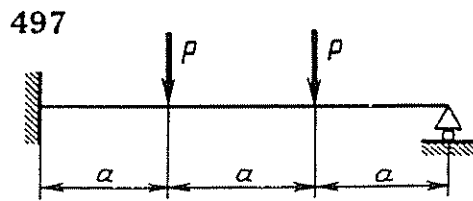
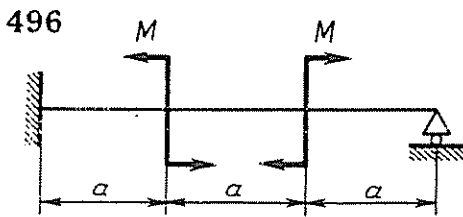
Từ đó, rút ra:

$$M_0 = \frac{q}{12} (a^2 - ab + b^2).$$

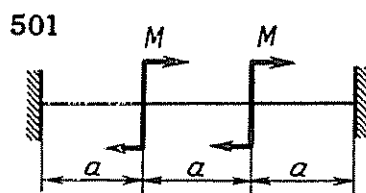
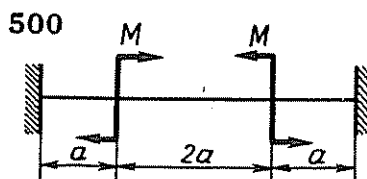
Cũng theo các dầm tính sẵn ở trên, ta tính được sự biến đổi khoảng cách trung điểm của hai cạnh:

$$\delta = \frac{2}{EI} \left(\frac{5}{384} qa^4 - \frac{M_0 a^2}{16} \right) = \frac{qa^2}{192EI} (a^2 + 4ab - 4b^2)$$

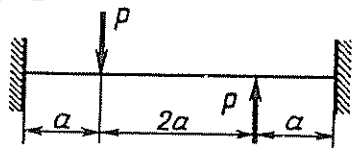
Bài tập 496 – 499. Giải dầm siêu tĩnh và vẽ biểu đồ M và Q .



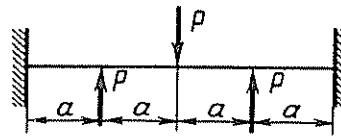
Bài tập 500 – 505. Giải dầm siêu tĩnh và tính giá trị tải trọng cho phép. Đối với các dầm đều lấy chiều dài bằng 3m, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$. Trong các bài 500, 501, mặt cắt dầm hình tròn ($d = 10 \text{ cm}$); trong các bài 502, 503 mặt cắt dầm hình vành khăn ($D = 12 \text{ cm}$, $d = 8 \text{ cm}$); trong các bài 504, 505 mặt cắt dầm hình vuông ($10 \times 10 \text{ cm}$).



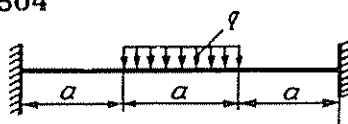
502



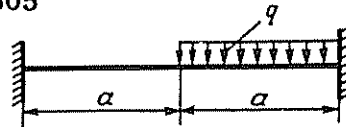
503



504

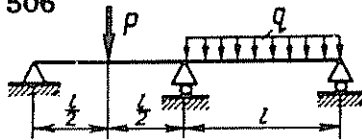


505

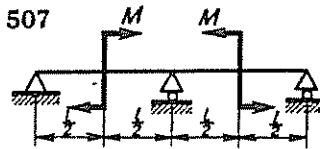


Bài tập 506 – 509. Chọn số hiệu mặt cắt hình chữ I của dầm. Cho $P = 2T$, $q = 2T/m$, $M = 3Tm$, $l = 2m$. $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$.

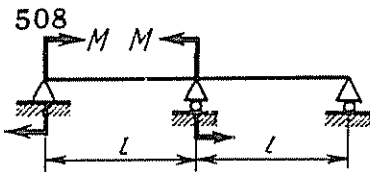
506



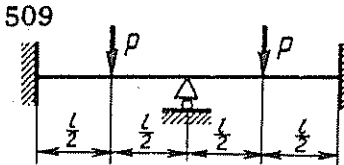
507



508

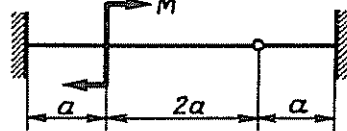


509

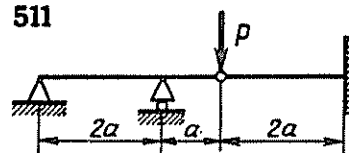


Bài tập 510 – 513. Tính momen uốn lớn nhất M_{\max}

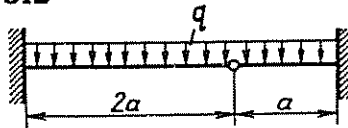
510



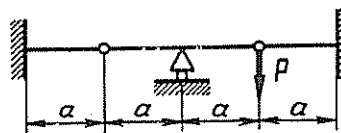
511



512

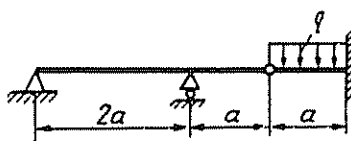


513

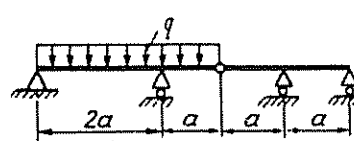


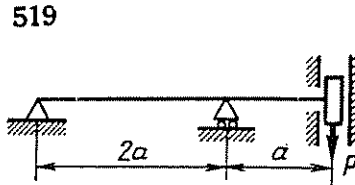
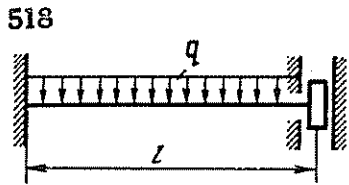
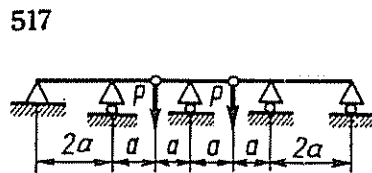
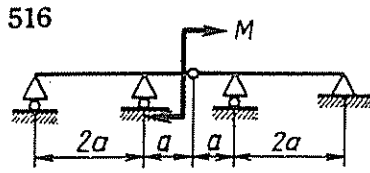
Bài tập 514 – 519. Tính độ hạ thấp y của khớp hoặc ngàm trượt.

514

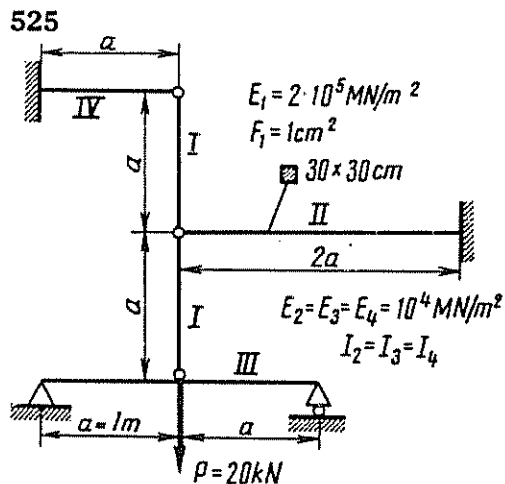
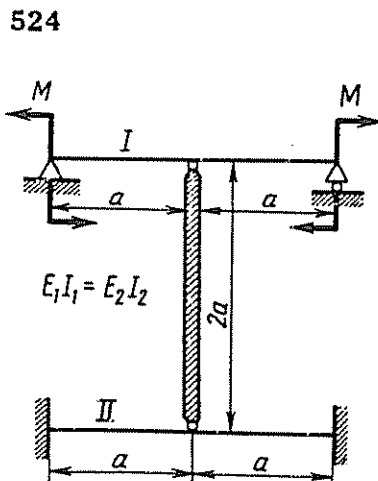
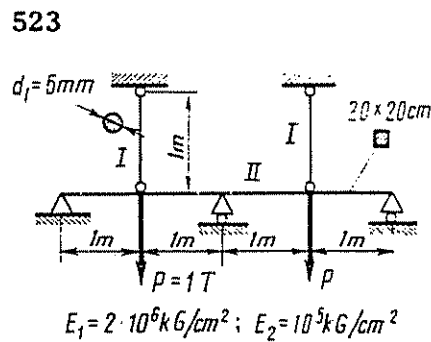
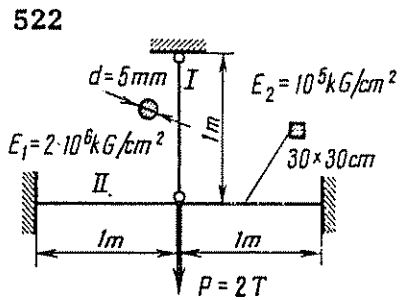
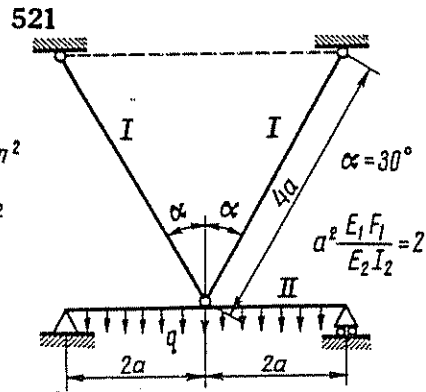
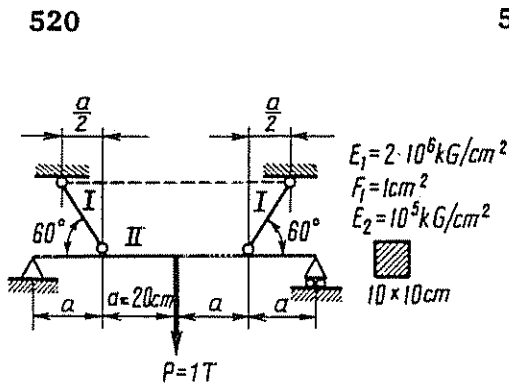


515





Bài tập 520 — 525. Tính lực dọc N trong các thanh treo.

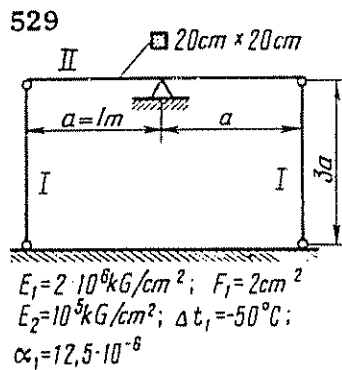
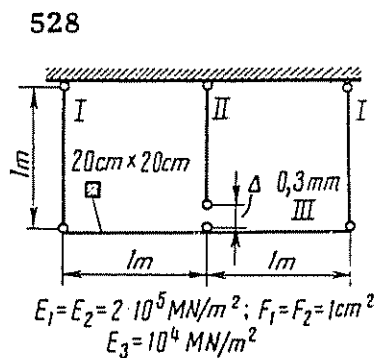
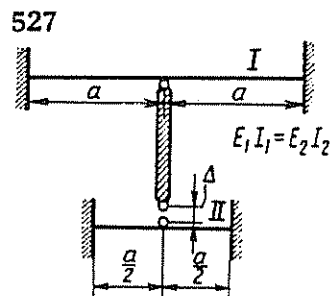
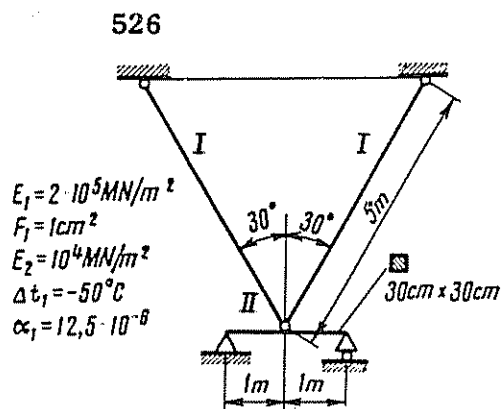


Bài tập 526 — 529. Tính ở trong các bộ phận của hệ hỗn hợp dầm — thanh:

1. Ứng suất do nhiệt độ (bài tập 526 và 529),

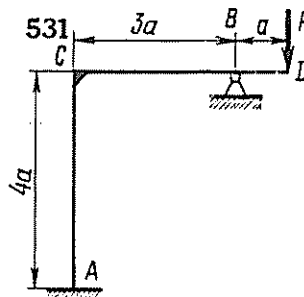
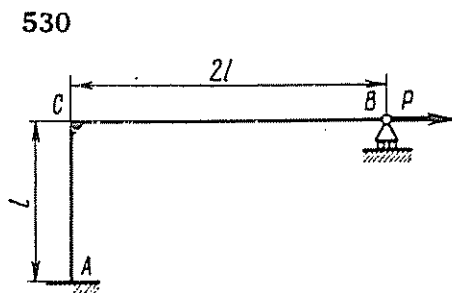
2. Ứng suất do lắp ráp (bài tập 527 và 528).

Trong bài 527 tính nội lực trong thanh treo.

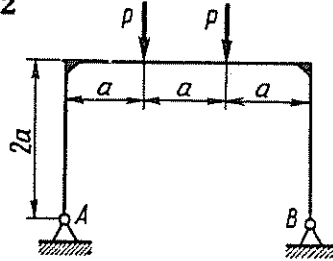


Bài tập 530 — 537. Giải hệ khung siêu tĩnh và tính giá trị momen uốn cực đại M_{\max} . Không xét biến dạng kéo và nén các thanh. Coi độ cứng chống uốn mặt cắt các thanh của khung đều bằng nhau.

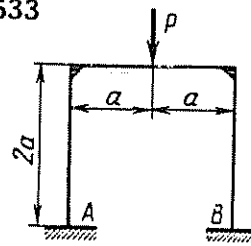
Trong bài 534, 535 có xét đến biến dạng kéo hoặc nén các thanh.



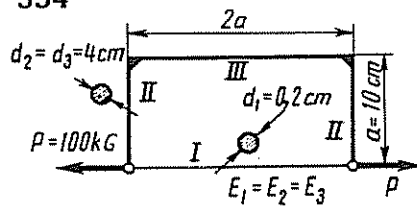
532



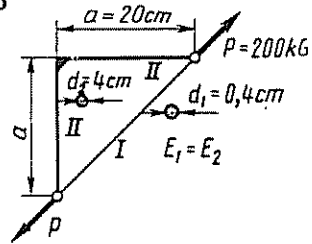
533



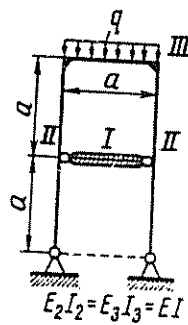
534



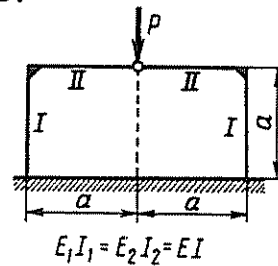
535



536

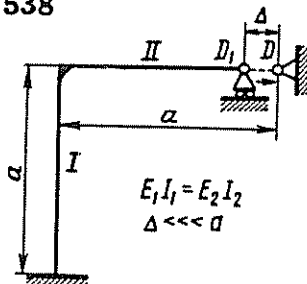


537

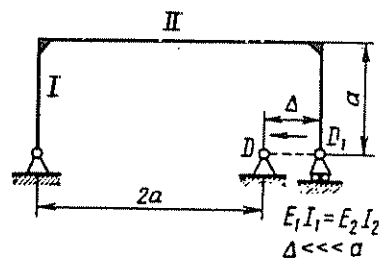


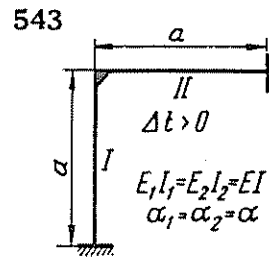
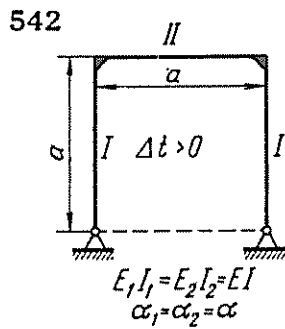
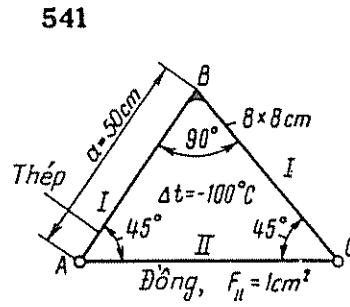
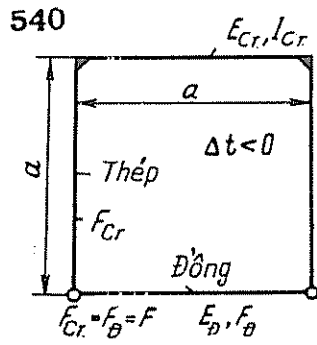
Bài tập 538 — 543. Tính phản lực gối và nội lực N trên các thanh kéo của hệ khung phát sinh khi lắp ráp (538 — 539) hoặc do nhiệt độ thay đổi (540 — 543). Lấy $E_s = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $E_d = 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $\alpha_s = 12 \cdot 10^{-6}$; $\alpha_d = 16 \cdot 10^{-6}$.

538

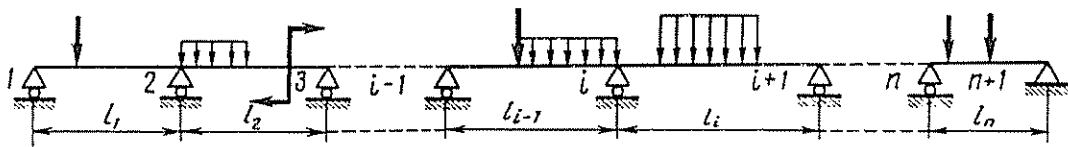


539

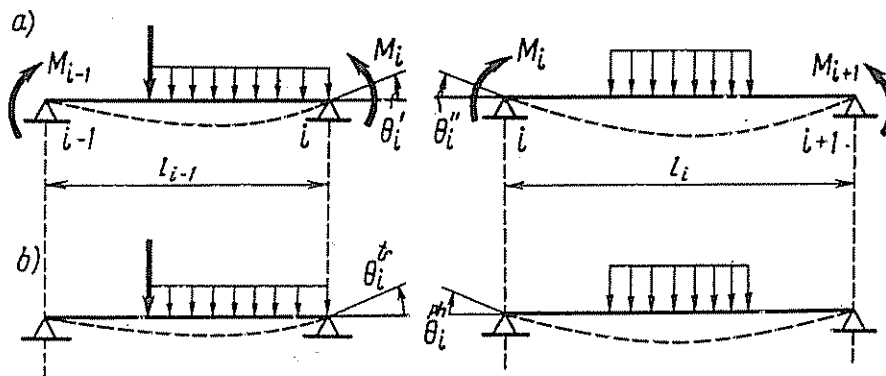




Phương pháp phương trình ba momen. Phương pháp này thuận tiện để tính dầm liên tục nhiều nhịp tức là dầm liền không có khớp vượt qua nhiều nhịp. Giả dụ tính dầm liên tục n nhịp, mặt cắt có độ cứng EI không đổi, các gối đều cùng cao độ. Bậc siêu tĩnh của dầm bằng $n - 1$. Nếu chọn dầm cơ bản bằng cách cắt



Hình 96



Hình 97

bởi những mặt cắt ở gối, ta được n dầm đơn giản. Khi đó ẩn số thừa là những momen uốn ở các mặt cắt ở gối.

Đối với hai mặt cắt thuộc hai dầm lân cận có chiều dài nhịp là l_{i-1} và l_i , ta lập được điều kiện tiếp xúc trơn tru của hai đường đàn hồi, tức là sự bằng nhau giữa góc quay của hai đầu dầm ở tại gối thứ i ($\theta_i^r = \theta_i^h$). Cuối cùng ta được hệ $n - 1$ phương trình ba momen có dạng chính tắc như sau:

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2M_i(l_{i-1} + l_i) + M_{i+1}l_i = -6EI(\theta_i^r + \theta_i^h). \quad (131)$$

Ở đây, M_{i-1} , M_i và M_{i+1} là ba momen chưa biết ở các mặt cắt trên gối $i - 1$, i và $i + 1$; θ_i^r và θ_i^h là góc quay mặt cắt trên gối thứ i của dầm ở bên trái và bên phải gối ấy, và chỉ đo tải trọng gây ra (hình 97, b).

Giá trị θ_i^r và θ_i^h có thể tính bằng một phương pháp thích hợp hoặc nếu có thể, tra ở hình vẽ.

Thay các số 2, 3, 4 ... n vào chỉ số i của phương trình (131) ta được hệ $n - 1$ phương trình, giải hệ phương trình này ta được các momen uốn thừa chưa biết tại các mặt cắt ở trên gối của dầm liên tục.

Trong thực tế khi sử dụng phương pháp phương trình ba momen, ta nên chú ý như sau:

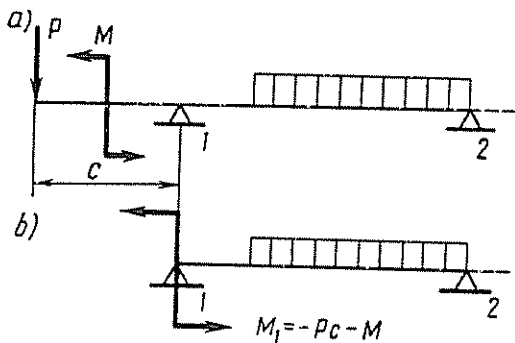
1. Các góc quay θ_i^r và θ_i^h đưa vào phương trình có dấu dương khi mặt cắt của dầm đơn giản quay theo chiều vẽ trên hình 97, b.

2. Nếu dầm liên tục có đầu hẫng (hình 98, a) thì không coi đầu hẫng như một nhịp, mà thay bằng một ngẫu lực có momen bằng momen của các tải trọng đặt vào đầu hẫng đối với gối đầu dầm và với dấu tương ứng (hình 98, b). Hợp lý nhất là đưa momen này vào vế bên trái của phương trình ba momen.

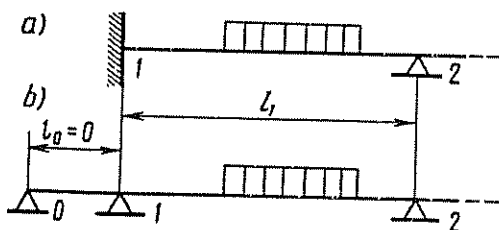
3. Nếu đầu dầm liên tục là ngàm (hình 99, a) thì góc quay ở đấy bằng không ($\theta_1 = 0$). Điều kiện này có thể biểu thị cụ thể bằng một phương trình ba momen, bằng cách thay đầu ngàm bằng một nhịp giả tạo dài $l_0 = 0$ (hình 99, b). Xét hai mặt cắt cạnh nhau của nhịp l_0 và

l_1 , theo phương trình ba momen, điều kiện $\theta_1 = 0$ có dạng:

$$2M_1l_1 + M_2l_1 = -6EI\theta_1^h \quad (132)$$



Hình 98



Hình 99

4. Nếu có ngẫu lực tập trung đặt ở mặt cắt ở trên gối trung gian của dầm liên tục (hình 100, a) thì nên gộp nó cùng với tải trọng tác dụng vào các dầm đơn giản.

Có thể gộp vào nhịp bên trái (hình 100, b) hoặc nhịp bên phải (hình 100, c) hoặc một phần vào nhịp bên trái, một phần vào nhịp bên phải chia theo một tỉ lệ tùy ý (hình 100, d). Tốt nhất nên gộp vào một nhịp nếu nhịp này có ít tải trọng.

Sau khi đã tìm được momen uốn ở các mặt cắt trên gối của dầm liên tục bằng các phương trình ba momen, ta tính riêng biệt từng dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng đặt trực tiếp lên nhịp và các momen đặt ở đầu. Thí dụ, phản lực của gối thứ i của dầm liên tục bằng tổng các phản lực ở gối thứ i của hai dầm đơn giản lân cận. Phản lực của mỗi dầm này lại tính bằng các điều kiện tĩnh học. Công thức tổng quát tính phản lực gối thứ i có dạng sau đây:

$$A_i = A_i^0 + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}, \quad (133)$$

trong đó A_i^0 — tổng phản lực ở gối thứ i của hai dầm lân cận, do tải trọng đặt lên

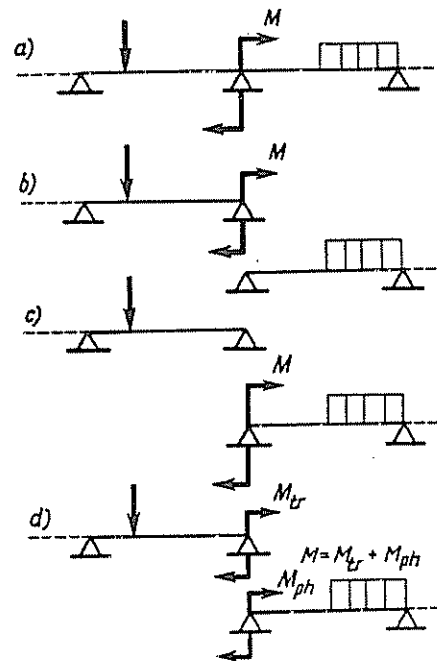
nhịp; $\frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}}$ — phản lực ở gối thứ i của dầm bên trái do các momen M_{i-1}

và M_i ; $\frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}$ — phản lực ở gối thứ i của dầm bên phải do các momen M_{i+1} và M_i .

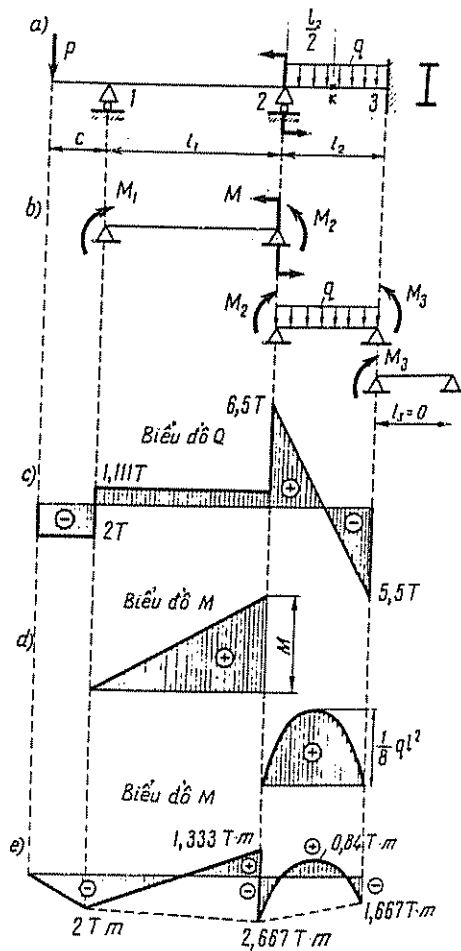
Khi xác định phản lực ở ngàm, ta không cần xét đến nhịp giả tạo có chiều dài bằng không.

Khi xác định phản lực của gối ở tiếp giáp đầu hẫng, cần cộng thêm vào kết quả giá trị của các ngoại lực tác dụng vào phần hẫng.

Biểu đồ lực cắt và momen uốn của dầm liên tục có thể dựng được bằng cách vẽ riêng biệt cho từng nhịp, coi như dầm đơn giản chịu các lực cho trước và momen ở gối. Cũng có thể dựng bằng phương pháp cộng biểu đồ do momen ở gối



Hình 100



Hình 101

sinh ra với biểu đồ do tải trọng sinh ra đối với mỗi nhịp.

Góc quay và độ võng tại mặt cắt bất kỳ của dầm liên tục tính lối nhất bằng cách xét riêng từng nhịp như một dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng học trước và momen ở gối. Khi đó ta có thể áp dụng bất kỳ phương pháp tính dầm tĩnh định nào đã có.

Thí dụ 50. Cho $P = 2T$, $M = 4T.m$, $q = 6T/m$, $c = 1m$, $l_1 = 3m$, $l_2 = 2m$. $[\sigma] = 1600kG/cm^2$; $E = 2 \cdot 10^6 kG/cm^2$ (h. 101, a)

Xác định số hiệu dầm thép có mặt cắt chữ I và f_k .

Bài giải. Phân dầm cho trước thành hai dầm đơn giản có nhịp bằng l_1 và l_2 (hình 101, b). Ta đặt vào mặt cắt gối trái của dầm có nhịp l_1 ngẫu lực M_1 do lực P tác dụng vào đầu hống gây ra, đặt vào mặt cắt gối phải ngẫu lực M và momen uốn ần M_2 . Còn trên dầm có nhịp l_2 ngoài tải trọng phân bố đều q ta đặt vào mặt cắt gối trái momen uốn ần M_2 và gối phải momen uốn ần M_3 . Thay cho đầu ngàm ta đặt thêm nhịp giả tạo có nhịp $l_3 = 0$.

Đối với dầm siêu tĩnh hai nhịp đã cho, có thêm nhịp giả tạo, hai phương trình ba momen có dạng như sau:

$$\left. \begin{aligned} M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 &= -6EI(\theta_1^r + \theta_1^{ph}), \\ M_2 l_2 + 2M_3 l_2 &= -6EI\theta_2^r. \end{aligned} \right\}$$

Vì $M_1 = -Pc = -2 \cdot 1 = -2Tm$, và từ các kết quả đã tính sẵn của các dầm 4 và 5 trên hình 90, có chú ý thêm quy ước về dấu, ta có:

$$EI\theta_1^r = Ml_1/3 = 4 \cdot 3/3 = 4Tm^2.$$

$$EI\theta_2^{ph} = EI\theta_2^r = ql_2^3/24 = 6 \cdot 2^3/24 = 2Tm^2.$$

Các phương trình ba momen ở trên trở thành:

$$\left. \begin{aligned} 10M_2 + 2M_3 &= -30, \\ M_2 + 2M_3 &= -6. \end{aligned} \right\}$$

Từ đó rút ra:

$$M_2 = -8/3 \approx -2,667Tm; \quad M_3 = -5/3 \approx -1,667Tm.$$

Sử dụng công thức (133), ta tính được các phản lực A_1 , A_2 và A_3 ở các chỗ tựa:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^o + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = P + \frac{M}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = 2 + \frac{4}{3} + \frac{-\frac{8}{3} + 2}{3} = \\ &= 28/9 \approx 3,111T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= A_2^0 + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = -\frac{M}{l} + \frac{ql_2}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = \\
&= -\frac{4}{3} + 6 + \frac{1}{3} \left(-2 + \frac{8}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{97}{18} \approx 5,389 \text{ T}; \\
A_3 &= A_3^0 + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = \frac{ql_2}{2} + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = 6 + \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{3} + \frac{5}{3} \right) = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ T}.
\end{aligned}$$

Bằng tổng hình chiếu lên phương thẳng đứng ta kiểm tra các kết quả vừa tìm được ở trên:

$$A_1 + A_2 + A_3 - P - ql_2 = 0; \quad \frac{1}{18} (56 + 97 + 99) - 2 - 12 = 0.$$

Ta vẽ biểu đồ lực cắt trên hình 101c. Biểu đồ mômen uốn vẽ bằng cách cộng biểu đồ. Biểu đồ mômen do tải trọng đặt trong nhịp gây nên đối với dầm bên trái là hình tam giác, còn đối với dầm bên phải là hình parabol (hình 101, d).

Do các mômen M_1 , M_2 và M_3 biểu đồ là một đường gãy khúc và vẽ bằng nét chấm trên hình 101e. Biểu đồ mômen uốn hình tam giác do lực P tác dụng vào đầu hẫng được vẽ ghép vào hình này. Sau đó ta đặt vào đường nét chấm tung độ của các biểu đồ dầm đơn giản. Chú ý đến dấu của biểu đồ do mômen và biểu đồ do tải trọng ta được biểu đồ mômen uốn tổng hợp.

Ta tìm tọa độ x trên dầm bên phải ở đó có $M_{\max P}$

$$x = Q/q = 117/(18,6) \approx 1,08 \text{ m}.$$

$$\text{Vì } \Delta M = \frac{Qx}{2} = \frac{117}{18} \cdot \frac{1,08}{2} = 3,51 \text{ Tm, do đó}$$

$$M_{\max P} = 3,51 - 8/3 = 0,84 \text{ Tm}.$$

Trên biểu đồ ta thấy:

$$M_{\max} = 8/3 \text{ Tm}.$$

Theo công thức tính toán

$$W = M_{\max}/[\sigma] = 8 \cdot 10^5 / (3 \cdot 16 \cdot 10^2) = 167 \text{ cm}^3.$$

Theo bảng thép hình, đối với mặt cắt chữ I số 18a

$$W = 159 \text{ cm}^3 \text{ và } \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{167 - 159}{159} 100\% = 4,8\%$$

(vượt ứng suất ít hơn 5%, do đó có thể chấp nhận).

Chọn mặt cắt chữ I số 18a, ta có:

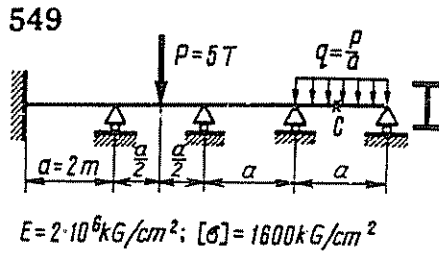
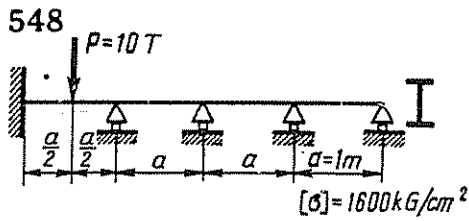
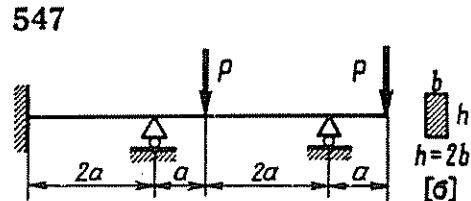
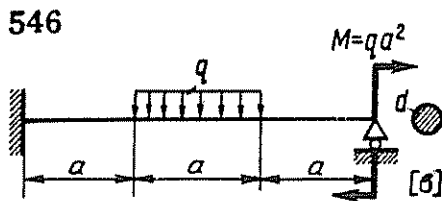
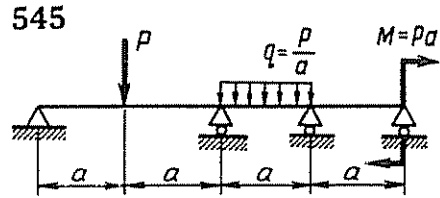
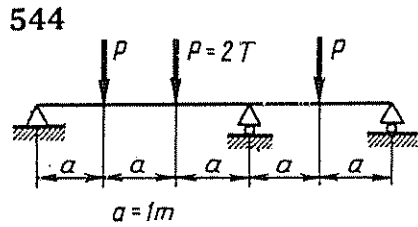
$$\sigma_{\max} = M_{\max}/W = 8 \cdot 10^5 / (3 \cdot 159) = 1677 \text{ kG/cm}^2;$$

$$I = 1430 \text{ cm}^4.$$

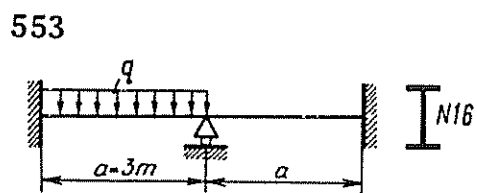
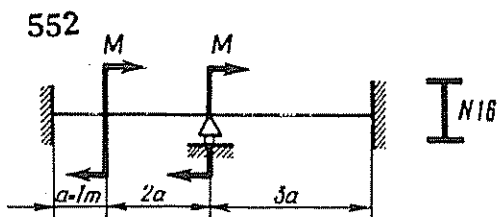
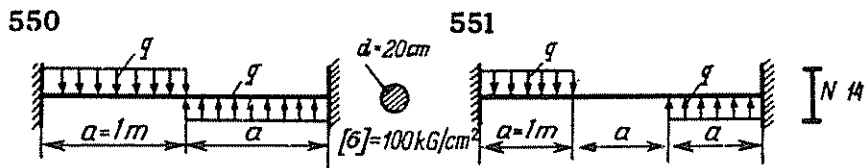
Để tính độ võng f_k , ta dùng phương pháp cộng tác dụng và dùng kết quả những độ võng tính sẵn của dầm 5 và 4 hình 90.

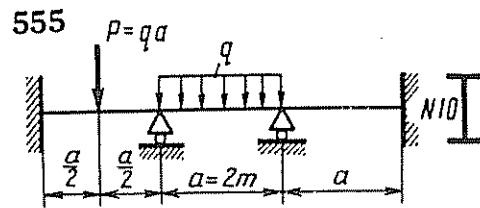
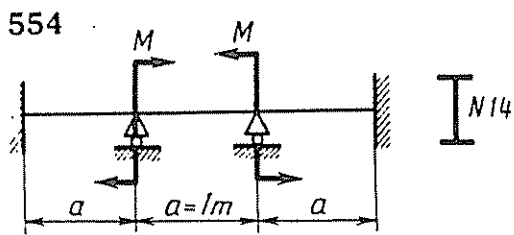
$$\begin{aligned}
f_k &= -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql_2^4}{EI} - \frac{M_2 l_2^2}{16EI} - \frac{M_3 l_2^2}{16EI} = \\
&= \frac{10^9}{16 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1,43 \cdot 10^3} \left(-\frac{5}{24} \cdot 6 \cdot 16 + \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{5}{3} \cdot 4 \right) \approx 0,058 \text{ cm} = 0,58 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Bài tập 544 — 549. Giải dầm siêu tĩnh (bài tập 544, 545), chọn kích thước mặt cắt ngang cần thiết của dầm (bài tập 546 — 549). Ở bài 549 tính thêm độ võng của mặt cắt C.

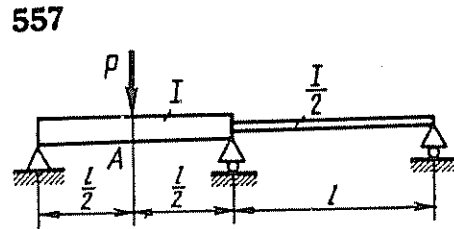
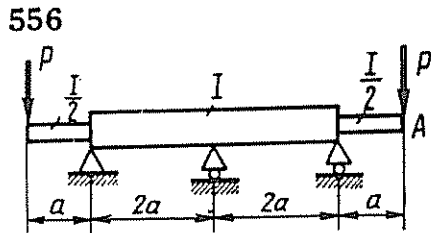


Bài tập 550 — 555. Tính giá trị tải trọng cho phép tác dụng vào dầm. Trong bài 551 — 553 lấy $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$. Trong bài 554 và 555 lấy $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$.

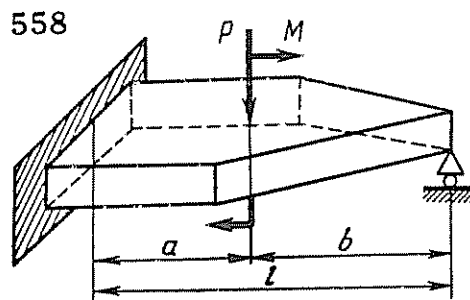




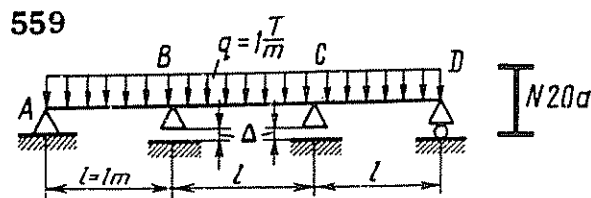
Bài tập 556 — 557. Tính độ võng ở mặt A của dầm hình bậc.



Bài tập 558. Tính giá trị M , a , b để cho dầm mặt cắt thay đổi là dầm độ bền đều.

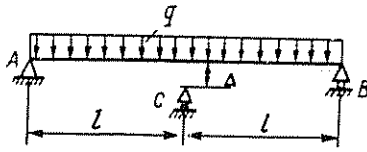


Bài tập 559. Tính momen uốn cực đại của dầm nếu các gối ở trong lún một đoạn $\Delta = 1 \text{ mm}$ ($E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$).

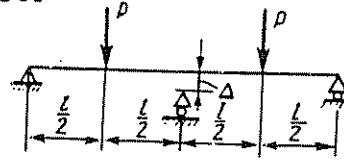


Bài tập 560 — 561. Tính độ hở Δ để cho ứng suất pháp cực đại của dầm có độ cứng EI có giá trị bé nhất.

560



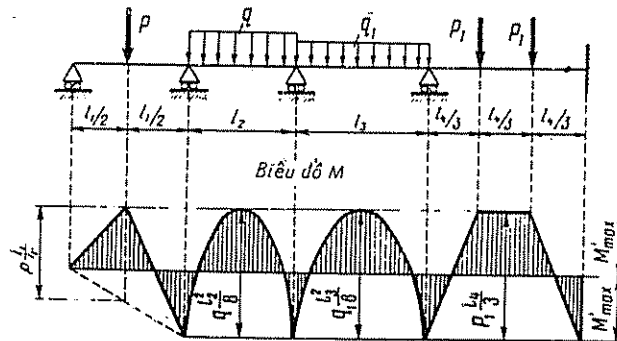
561



Cơ sở tính dầm siêu tĩnh theo phương pháp năng lượng chịu tải. Ta coi vật liệu chế tạo dầm siêu tĩnh là vật liệu dẻo có biểu đồ kéo, nén lý tưởng. Vì một nhịp dầm hết năng lượng chịu tải khi trên dầm phát sinh ba khớp dẻo (một khớp trong nhịp và hai khớp ở gối) do đó ta có thể xét riêng biệt các nhịp một cách độc lập. Để tính dầm, tốt nhất nên dùng phương pháp san bằng momen uốn

Nếu dầm có mặt cắt không đổi, thì giá trị momen uốn cho phép cũng không đổi và tính theo công thức (114): $M'_{max} = 2[\sigma]S$. trong đó S là momen tĩnh của nửa diện tích mặt cắt ngang đối với trục trung tâm của hình.

Ta vẽ biểu đồ momen uốn cuối cùng của dầm (biểu đồ san bằng) để cho ở mỗi nhịp tung độ ở gối cũng như ở trong nhịp đều bằng M'_{max} . Sau đó dựa vào hình vẽ ta lập được quan hệ M_{max} với tải trọng ở mỗi nhịp, từ đó tìm được tải trọng cho phép lớn nhất ở mỗi nhịp.



Hình 102

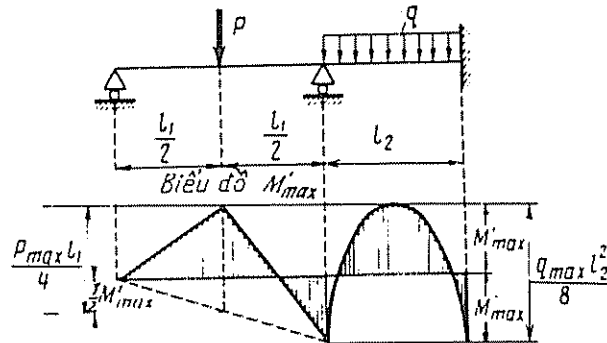
Nếu đầu dầm là gối khớp thì khi nhịp ngoài cùng ở trạng thái biến dạng hình học chỉ cần thành hình hai khớp dẻo (một khớp ở trong nhịp và một khớp ở gối phía trong). Khi đó momen uốn ở đầu dầm bằng không còn ở trong nhịp và ở trên gối phía trong, momen uốn bằng M'_{max} .

Trên hình 102 trình bày cách vẽ biểu đồ momen uốn san bằng của dầm liên tục. Đối với dầm hình bậc có cho trước các giá trị S thì biểu đồ momen uốn san bằng được vẽ ở mỗi đoạn theo giá trị M'_{max} tương ứng. Sau đó việc tính toán vẫn thực hiện như đối với dầm mặt cắt không đổi.

Nếu cho trước tải trọng và cần chọn kích thước mặt cắt ngang thì tại mỗi một nhịp, ở các mặt cắt sẽ phát sinh khớp dẻo, ta viết momen uốn cho phép

M'_{max} theo tải trọng cho trước, từ đó chọn giá trị lớn nhất để tính S ($S = M'_{max}/2[\sigma]$) và kích thước mặt cắt ngang.

Trong trường hợp tính dầm mặt cắt thay đổi thì cũng tính tương tự như trên nhưng tương ứng với từng nhịp.



Hình 103

Thí dụ 51. Cho S , l_1 , l_2 . $[\sigma]$ (hình 103).

Tính P'_{max} , q'_{max} .

Bài giải. Ta vẽ biểu đồ momen uốn cho phép san bằng $M'_{max} = 2[\sigma]S$.

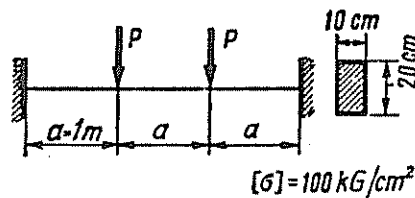
Trên biểu đồ ta có $\frac{P'_{max} l_1}{4} = \frac{3}{2} M'_{max} = 3[\sigma]S$ và $q'_{max} l_2^2 / 8 = 2M'_{max} = 4[\sigma]S$,

do đó ta tính được tải trọng cho phép cực đại ở các nhịp:

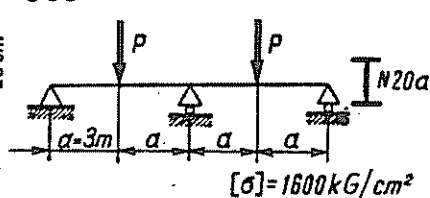
$$P'_{max} = 12[\sigma]S/l_1, \quad q'_{max} = 32[\sigma]S/l_2^2.$$

Bài tập 562 — 567. Tính giá trị lực cho phép đặt vào dầm và hệ trên hình vẽ. Trong các bài 564 — 567 coi như đã biết $[\sigma]$, a , W và $\eta = 2S/W$.

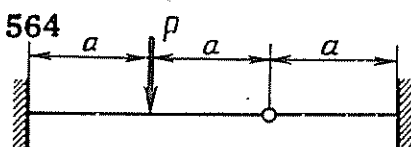
562



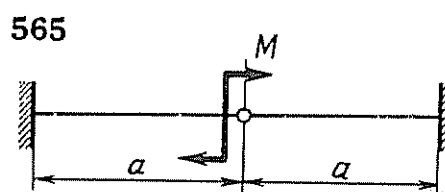
563



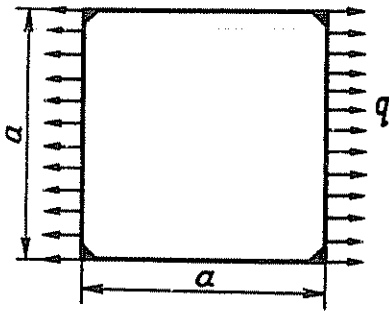
564



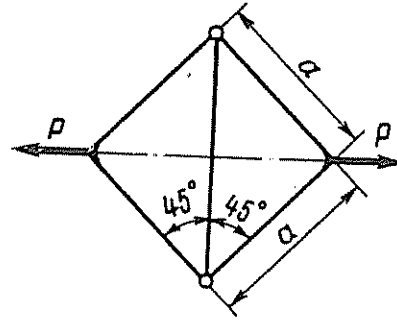
565



566

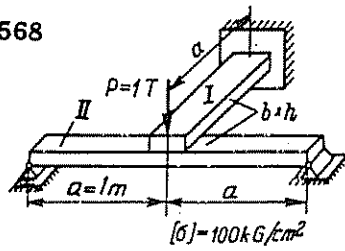


567

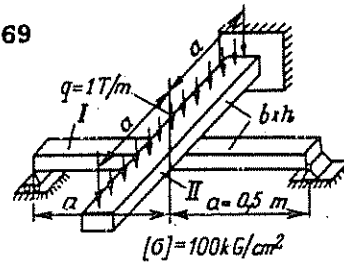


Bài tập 568 — 571. Tính kích thước mặt cắt ngang của dầm và hệ trên hình vẽ. Mặt cắt ngang của dầm là hình chữ nhật ($b = 2h$), còn vật liệu làm dầm và thanh treo như nhau.

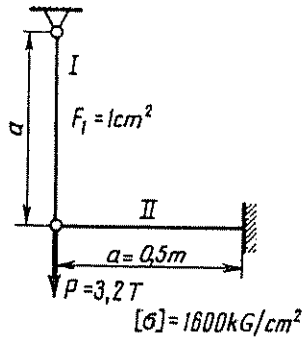
568



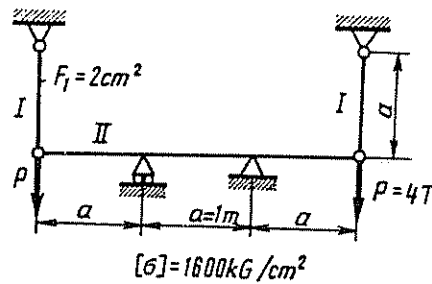
569



570

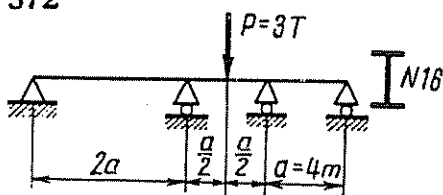


571

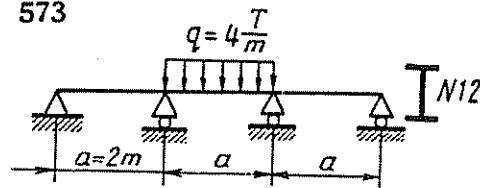


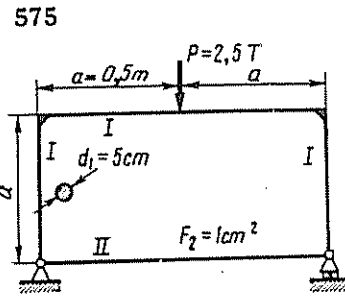
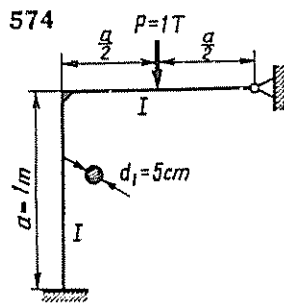
Bài tập 572 — 575. Tính hệ số an toàn n_{ch} (theo tải trọng) của dầm và hệ. Giới hạn chảy của vật liệu $\sigma_{ch} = 2400 \text{ kg/cm}^2$.

572



573





§ 27. Thế năng biến dạng đàn hồi trong biến dạng uốn

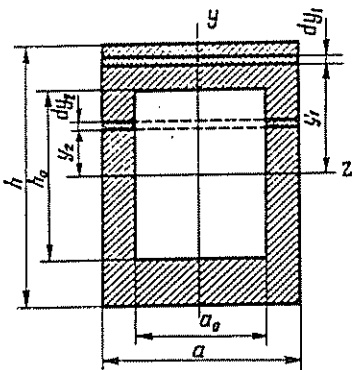
Lượng thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy vào dầm bị uốn ngang phẳng tính theo công thức

$$U = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum k \int \frac{Q^2 dx}{2GF} \quad (134)$$

trong đó

$$k = F \int_F \left(\frac{S}{bI} \right)^2 dF \quad (135)$$

là hệ số không có thứ nguyên đặc trưng cho tính chất phân bố không đều của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang và phụ thuộc hình dạng mặt cắt.



Hình 104

Bài giải. Diện tích mặt cắt đã cho: $F = ah - a_0 h_0$. Momen quán tính của mặt cắt đối với trục z:

$$I = \frac{1}{12} (ah^3 - a_0 h_0^3).$$

Đối với bản dế:

$$S_1 = \frac{a}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right); dF_1 = a dy_1; b = a$$

Đối với bản bụng:

$$S_2 = \frac{ah^2 - a_0 h_0^2}{8} - \frac{a - a_0}{2} y_2^2; dF_2 = (a - a_0) dy_2; b = a - a_0.$$

Hệ số k:

$$k = \frac{2F}{I^2} \left[\int_{F_1} \left(\frac{S_1}{a} \right)^2 dF_1 + \int_{F_2} \left(\frac{S_2}{a - a_0} \right)^2 dF_2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F}{2I^2} \left\{ a \int_{h_0/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)^2 \cdot dy_1 + (a - a_0) \int_0^{h/2} \left[\frac{ah^2 - a_0h_0^2}{4(a - a_0)} - y_2^2 \right] dy_2 \right\} = \\
&= \frac{F}{2I^2} \left\{ a \left[\frac{h^4}{16} \left(\frac{h}{2} - \frac{h_0}{2} \right) - \frac{h^2}{2} \left(\frac{h^3}{3 \cdot 8} - \frac{h_0^3}{3 \cdot 8} \right) + \frac{h^5 - h_0^5}{5 \cdot 32} \right] + \right. \\
&\quad \left. + (a - a_0) \left[\frac{ah^2 - a_0h_0^2}{16(a - a_0)} \cdot \frac{h_0}{2} - \frac{ah^2 - a_0h_0^2}{2(a - a_0)} \cdot \frac{h_0^3}{3 \cdot 8} + \frac{h_0^5}{5 \cdot 32} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Sau khi thay giá trị của F và I vào, và sau phép biến đổi, ta được:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \frac{a_0h_0}{ah}}{\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \left(1 - \frac{a_0h_0^3}{ah^3}\right)^2} \times \\
&\times \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[1 - \frac{1}{8} \left(15 \frac{h_0}{h} - 30 \frac{h_0^3}{h^3} + 7 \frac{h_0^5}{h^5} + 8 \frac{a_0}{a} \cdot \frac{h_0^5}{h^5} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Những trường hợp đặc biệt:

1. $a_0 = 0, k = 6/5$
2. $a = h$ và $a_0 = h_0,$

$$k = \frac{6}{5} \frac{1 + \frac{a_0}{a}}{\left(1 + \frac{a_0^4}{a^4}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{a_0}{a} \left(15 - 30 \frac{a_0^2}{a^2} + 7 \frac{a_0^4}{a^4} + 8 \frac{a_0^5}{a^5} \right) \right] \right\}$$

Thí dụ, nếu $a_0 = a/2$ thì $k = 387/250 = 1,548$.

3. Mặt cắt dầm thép chữ I số 20.

Theo bảng thép hình $a = b = 10\text{cm}, h = 20\text{cm}, a - a_0 = d = 0,52\text{cm}, a_0 = 9,48\text{cm}, h_0 = h - 2t = 20 - 2 \cdot 0,84 = 18,32\text{cm}.$

Vì $a_0/a = 0,948; h_0/h = 0,916;$
 $a_0h_0/ah + 0,868; h_0^2/h^3 \approx 0,769; a_0h_0^3/ah^3 = 0,729$
 $h_0^5/h^5 = 0,645$ và $a_0h_0^5/ah^5 \approx 0,611.$

Do đó:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - 0,868}{(1 - 0,948)(1 - 0,729)^2} \times \\
&\times \left\{ 1 - 0,948 \left[1 - \frac{1}{8} (15 \cdot 0,916 - 30 \cdot 0,769 + 7 \cdot 0,645 + 8 \cdot 0,611) \right] \right\} \approx 2,51
\end{aligned}$$

Đối với mặt cắt thép cán chữ I hệ số k có thể tính gần đúng theo công thức:

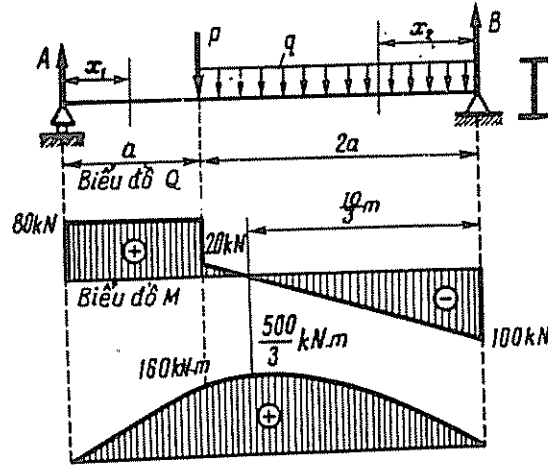
$$k = \frac{1 - (a_0h_0/ah)}{1 - (a_0/a)} = F/F_c$$

trong đó F — diện tích mặt cắt; F_c — diện tích bản bụng cao bằng h , tức là $F_c = hd$.

Dùng công thức này đối với mặt cắt chữ I số 20, ta tìm được $F = 26,8\text{cm}^2;$
 $F_c = 20 \cdot 0,52 = 10,4\text{cm}^2; k = 26,8/10,4 \approx 2,58.$

Thí dụ 53. Cho $P = 60\text{kN}$; $q = 30\text{kN/m}$; $a = 2\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{MN/m}^2$; $G = 8 \cdot 10^4\text{MN/m}^2$; $[\sigma] = 160\text{MN/m}^2$ (hình 105).

Chọn số hiệu mặt cắt dầm thép chữ I và tính U .



Hình 105

Bài giải: Từ điều kiện tĩnh học, ta tính được các phản lực gối:

$$A = (2P + 2qa)/3 = 80\text{kN}$$

$$B = P + 2qa - A = 100\text{kN}.$$

Ta lập các phương trình Q và M

$$Q_{x_1} = A = 80\text{ kN}; M_{x_1} = Ax_1 = 80x_1; M_{x=0} = 0, M_{x=a} = 160\text{ kNm}$$

$$Q_{x_2} = -B + qx_2 = -100 + 30x_2; Q_{x=0} = -100\text{ kN}.$$

$$Q_{x_2=2a} = -100 + 30 \cdot 4 = 20\text{ kN}.$$

$$M_{x_2} = Bx_2 - qx_2^2/2 = 100x_2 - 30x_2^2/2; M_{x_2=0} = 0.$$

$$M_{x_2=2a} = 100 \cdot 4 - (30 \cdot 16/2) = 160\text{ kNm}.$$

Ta tính M_{\max} . Từ điều kiện $Q_{x_2} = -100 + 30x_2 = 0$, $x_2 = 10/3\text{m}$. Do đó:

$$M_{\max} = 100 \cdot \frac{10}{3} - \frac{30}{2} \cdot \frac{10^2}{9} = \frac{500}{3}\text{ kNm}.$$

Theo công thức tính toán.

$$W = M_{\max}/[\sigma] = 500 \cdot 10^3 / (3 \cdot 160 \cdot 10^6) = 1042 \cdot 10^{-6}\text{m}^3 = 1042\text{cm}^3.$$

Tra bảng thép hình, ta chọn được hình chữ I số 45 với các đặc trưng sau

đây:

$$W = 1220\text{ cm}^3; I = 27450\text{ cm}^4; F = 83,0\text{ cm}^2, h = 45\text{ cm}$$

$$d = 0,86\text{ cm và } k = F/F_0 = 83/(45 \cdot 0,86) \approx 2,14.$$

Thể năng biến dạng đàn hồi của dầm bằng tổng thể năng do momen uốn (U_M) và thể năng do lực cắt (U_Q).

Theo công thức (134)

$$U_M = \sum \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^a M_{x_1}^2 dx_1 + \int_0^{2a} M_{x_2}^2 dx_2 \right) =$$

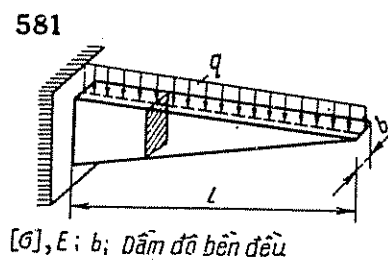
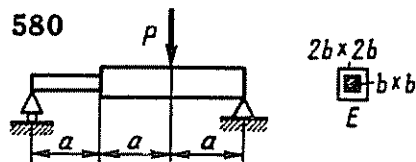
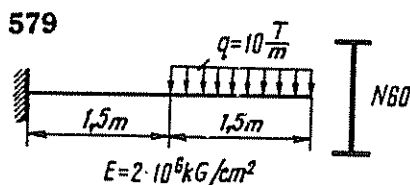
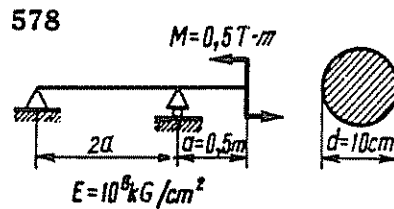
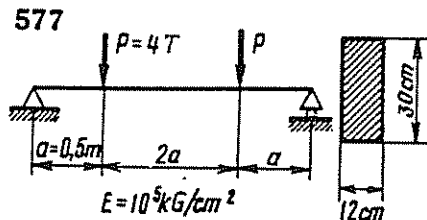
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2EI} \left[64 \int_0^a x_1^2 dx_1 + \frac{1}{4} \int_0^{2a} (20x_2 - 3x_2^2) dx_2 \right] 10^8 = \\
&= \frac{10^8}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 27450 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{64}{3} \cdot 8 + \frac{800}{3} \cdot 8 - 120 \cdot 16 + \frac{72}{5} \cdot 32 \right) \approx 769,4j; \\
U_Q &= \sum k \int \frac{Q^2 dx}{2GF} = \frac{k}{2GF} \left(Q_{x_1}^2 a + \int_0^{2a} Q_{x_2}^2 dx_2 \right) = \\
&= \frac{k \cdot 10^8}{2GF} \left[64a + \int_0^{2a} (-10 + 3x_2)^2 dx_2 \right] = \frac{k \cdot 10^8}{2GF} (64a + 200a - 120a^2 + 24a^3) = \\
&= \frac{2,14 \cdot 10^8}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 83,0 \cdot 10^{-4}} (128 + 400 - 480 + 192) \approx 38,7j; \\
U &= U_M + U_Q = 769,4 + 38,7 = 808,1J.
\end{aligned}$$

Vi đối với những dầm thông thường thế năng do lực cắt rất bé so với thế năng do momen uốn, do đó thường có thể bỏ qua.

Trong ví dụ này $\frac{U_Q}{U_M} 100 = \frac{38,7}{769,4} 100 \approx 5\%$.

Đối với dầm ngắn, thế năng do lực cắt có giá trị khá lớn do đó không bỏ qua được.

Bài tập 576 — 581. Tính thế năng biến dạng đàn hồi U do momen uốn. Đối với bài 576, dầm vẽ ở bài 222 — 231. Đối với các dầm này coi như đã biết tải trọng, chiều dài l và độ cứng chống uốn EI .



Bài tập 582. Xác định xem liên kết của dầm chịu lực tập trung đặt giữa nhịp ảnh hưởng đến thế năng do momen uốn như thế nào khi:

- a) dầm tựa trên hai gối khớp.
- b) dầm một đầu ngàm, một đầu tựa trên gối;
- c) dầm hai đầu ngàm.

Bài tập 583. Tính xem thế năng biến dạng đàn hồi do momen uốn của dầm mặt cắt hình chữ nhật tựa trên hai gối và chịu lực P đặt tại giữa nhịp biến đổi thế nào nếu thay đổi dầm này bằng dầm có độ bền đều và chiều cao không đổi.

Bài tập 584. Tính hệ số hình dạng k của mặt cắt:

- 1) Hình chữ nhật, 2) hình tròn, 3) hình tam giác đều, 4) hình vành khăn
- 5) hình vuông rỗng, 6) hình chữ I số 60. Trong ví dụ trên, ta đã chứng minh hệ số k đối với mặt cắt hình chữ I có thể lấy bằng tỉ số diện tích mặt cắt với diện tích bản bụng có chiều cao bằng chiều cao mặt cắt.

Bài tập 585. Tính thế năng do lực cắt của các dầm trong bài tập 577, 578, và 579. Tính ảnh hưởng theo phần trăm của lực cắt đối với thế năng biến dạng đàn hồi của dầm.

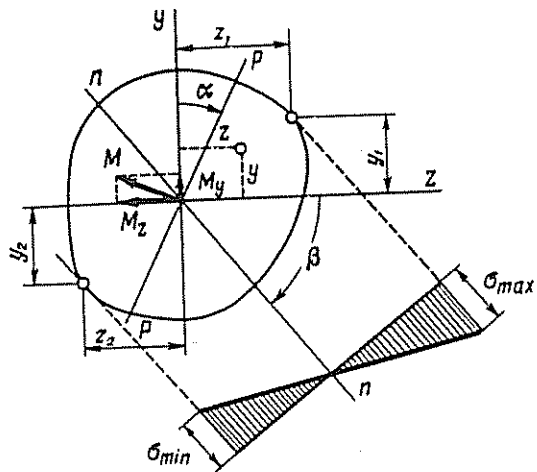
IX — SỨC CHỊU PHỨC TẠP CỦA DẦM THẲNG CÓ ĐỘ CỨNG LỚN

§ 28. Uốn xiên.

Khi dầm bị uốn xiên (sự kết hợp của hai uốn ngang phẳng), ứng suất pháp σ tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ y và z (hình 106) tính theo công thức:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y z}{I_y} = \\ &= M \left(\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} \right) \quad (136) \end{aligned}$$

trong đó I_y và I_x — momen quán tính chính trung tâm mặt cắt ngang dầm; M_y và M_x — momen uốn đối với trục y và z , thành phần của momen uốn tổng hợp $M = \sqrt{M_y^2 + M_x^2}$, tác dụng trong mặt phẳng xp xiên góc α đối với mặt phẳng quán tính chính xy của dầm.



Hình 106

Ở đây cũng như về sau ta coi M_y và M_x là dương nếu những momen này tạo ra ứng suất kéo ở những điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt cắt.

Phương trình đường trung hòa nn có dạng như sau:

$$y = - \frac{I_x M_y}{I_y M_x} z = - \frac{I_x}{I_y} z \operatorname{tg} \alpha = - z \operatorname{tg} \beta \quad (137)$$

trong đó:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z M_y}{I_y M_z} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg}\alpha \quad (138)$$

là tang của góc xiên giữa đường trung hòa nn với trục z .

Đường trung hòa nn bao giờ cũng xiên góc β với trục z theo chiều mà đường tải trọng pp (vết của mặt phẳng tải trọng trên mặt cắt ngang) xiên góc α đối với trục y .

Ứng suất pháp cực đại và cực tiểu tính theo công thức (136), trong đó các tọa độ được thay bằng tọa độ các điểm tiếp xúc với chu tuyến mặt cắt của những đường thẳng song song với đường trung hòa (y_1, z_1 và y_2, z_2).

Nếu ứng suất pháp cực đại và cực tiểu phát sinh ở điểm xa nhất đối với cả hai trục chính trung tâm của mặt cắt thì:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \quad (139)$$

và

$$\sigma_{\min} = - \left(\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \right), \quad (140)$$

trong đó W_y và W_z là momen chống uốn của mặt cắt đối với trục y và trục z .

Trong uốn xiên, người ta chọn kích thước mặt cắt ngang theo ứng suất pháp bằng cách thử dần. Đầu tiên có thể chọn thử bằng cách tính uốn phẳng do thành phần momen uốn đôi hồi kích thước lớn. Đối với những mặt cắt nội tiếp trong hình chữ nhật, đầu tiên có thể tính theo công thức

$$W_z \geq \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}, \quad (141)$$

trong đó $c = W_z/W_y$.

Đối với hình chữ nhật có chiều cao h và bề rộng b thì $c = h/b$, đối với thép cán hình chữ I có thể lấy $c = 8$ và hình chữ U $c = 6$.

Độ võng f và góc quay θ của mặt cắt nào đó của dầm bị uốn xiên bằng tổng hình học độ võng và góc quay do các thành phần momen uốn tác dụng trong các mặt phẳng quán tính chính của dầm, tức là:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad \text{và} \quad \theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}$$

trong đó f_y và f_z — độ võng theo phương trục y và trục z ; θ_y và θ_z — góc quay của mặt cắt chung quanh trục y và trục z .

Góc quay tổng hợp của mặt cắt là góc mà mặt cắt quay cùng quanh đường trung hòa, còn độ võng tổng hợp thì nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường trung hòa.

Nếu dầm bị uốn xiên do hai hệ ngoại lực khác nhau nằm trong hai mặt quán tính chính thì vị trí của đường trung hòa trên mặt cắt ngang phải tính theo công thức:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}$$

và vị trí độ võng xác định theo công thức $tg\beta' = f_z/f_y$, vì góc β' giữa phương của độ võng tổng hợp với trục y khác góc β giữa đường trung hòa với trục z . Khi đó đường đàn hồi của dầm là đường cong không gian.

Trong trường hợp tải trọng tác dụng vào dầm nằm trên nhiều mặt phẳng đi qua trục hình học của dầm thì sau khi chiếu các tải trọng lên các mặt phẳng quán tính chính, ta lại trở về trường hợp trên.

Thí dụ 54. Cho P, q, l, b, h, E, α (hình 70).

Xác định vị trí đường trung hòa; $\sigma_{\max}; f_{\max}; \sigma_{\min}; f_{\min}$.

Bài giải. Ta phân lực P và tải trọng phân bố đều q thành những thành phần trên các trục chính trung tâm y và z của mặt cắt ngang:

$$P_y = P \cos \alpha; \quad q_y = q \cos \alpha;$$

$$P_z = P \sin \alpha; \quad q_z = q \sin \alpha.$$

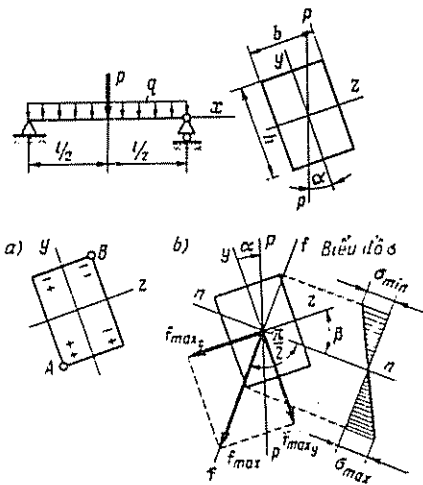
Các thành phần momen uốn cực đại tại mặt cắt giữa nhịp:

$$M_{z_{\max}} = \frac{P_y l}{4} + \frac{q_y l^2}{8} =$$

$$= \frac{l}{4} \left(P + \frac{ql}{2} \right) \cos \alpha;$$

$$M_{y_{\max}} = \frac{P_z l}{4} + \frac{q_z l^2}{8} =$$

$$= \frac{l}{4} \left(P + \frac{ql}{2} \right) \sin \alpha.$$



Hình 107

Do momen uốn M_y nằm trong mặt phẳng quán tính chính zx của dầm những thớ ở bên trái trục y bị kéo, những thớ ở bên phải bị nén (hình 107,a). Do momen uốn M_z nằm trong mặt phẳng quán tính chính yx , những thớ ở dưới trục z bị kéo, những thớ ở trên bị nén. Do đó, tại điểm A của mặt cắt giữa nhịp có ứng suất kéo lớn nhất σ_{\max} , còn tại điểm B có ứng suất nén lớn nhất σ_{\min} . Những ứng suất này bằng:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \left(\frac{M_{z_{\max}}}{W_z} + \frac{M_{y_{\max}}}{W_y} \right) = \pm \frac{3l}{2bh} \left(P + \frac{ql}{2} \right) \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right)$$

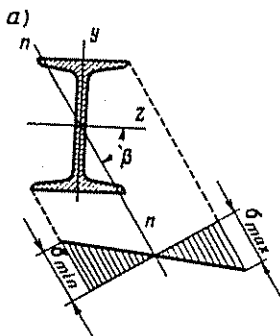
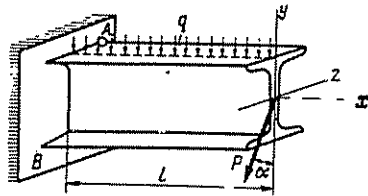
Vị trí đường trung hòa nn xác định từ phương trình.

$$tg\beta = \frac{I_z}{I_y} tg\alpha = \frac{h^2}{b^2} tg\alpha$$

Ta thấy tỉ số h/b càng lớn thì góc β càng lớn hơn góc α .

Thí dụ, nếu đường tải trọng px trùng với một đường chéo của mặt cắt ngang, thì $tg\alpha = b/h$ và $tg\beta = h/b$, tức là đường trung hòa trùng với đường chéo

thứ hai. Ở đây trên hình 107, b $h > b$, do đó $\beta > \alpha$. Trên hình này cũng có vẽ biểu đồ ứng suất σ .



Hình 108

Theo các dầm tính sẵn 5 và 6 của hình 90, ta đo được độ võng do M_y .

$$f_{z\max} = \frac{5q_z l^4}{384EI_y} + \frac{P_z l^3}{48EI_y} =$$

$$= \frac{l^3}{4Ehb^3} \left(\frac{5}{8} ql + P \right) \sin\alpha;$$

độ võng do M_x .

$$f_{y\max} = \frac{5}{384} \frac{q_y l^4}{EI_x} + \frac{P_y l^3}{48EI_x} =$$

$$= \frac{l^3}{4Eh^3b} \left(\frac{5}{8} ql + P \right) \cos\alpha.$$

Độ võng tổng hợp ở giữa nhịp:

$$f_{\max} = \sqrt{f_{z\max}^2 + f_{y\max}^2}$$

$$= \frac{(5ql/8) + P}{4Ehb} l^3 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{b^4} + \frac{\cos^2\alpha}{h^4}}.$$

Phương của độ võng vẽ trên hình 107, b.

Thí dụ 55. Cho $P = 240 \text{ kG}$; $q = 400 \text{ kG/m}$, $l = 2 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$ (hình 108). Xác định số hiệu mặt cắt dầm thép hình chữ I, vị trí đường trung hòa, f_{\max} ?

Bài giải. Momen uốn cực đại ở ngàm

$$M_{y\max} = Pl \sin\alpha = 240 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 240 \text{ kGm}.$$

$$M_{z\max} = \frac{ql^2}{2} + Pl \cos\alpha = \frac{400 \cdot 4}{2} + 240 \cdot 2 \cdot 0,866 = 1216 \text{ kGm}$$

Thứ lần thứ nhất, ta lấy $c = 8$.

Theo công thức (141).

$$W_z = \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]} = \frac{1216 + 8 \cdot 240}{1600} 100 = 196 \text{ cm}^3$$

Ta chọn mặt cắt dầm thép chữ I số 20 có giá trị momen chống uốn nhỏ hơn và gần nhất.

$$W_z = 184 \text{ cm}^3, W_y = 23,1 \text{ cm}^3.$$

Tại điểm A và B ở mặt cắt ngàm ta có $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, do đó

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y} = \frac{121600}{184} + \frac{24000}{23,1} \approx 1700 \text{ kG/cm}^2$$

Vi

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{1700 - 1600}{1600} 100 \approx 6,2\% > 5\%$$

do đó ta lấy mặt cắt số 20a với $W_z = 203\text{cm}^3$, $W_y = 28,2\text{cm}^3$ khi đó:

$$\sigma_{\max} = \frac{121600}{203} + \frac{24000}{28,2} = 1450 \text{ kg/cm}^2$$

Ứng suất nhỏ hơn

$$\frac{1600 - 1450}{1600} 100 \approx 9,4\%$$

Đối với mặt cắt số 20a, $I_y = 155\text{cm}^4$, $I_z = 2030\text{cm}^4$, do đó ở mặt cắt ngàm
 $\text{tg}\beta = (I_z M_{y\max}) / (I_y M_{z\max}) = 2030 \cdot 240 / (155 \cdot 1216) \approx 2,58$. và $\beta = 68^\circ 50'$.

Trên hình 108,a có vẽ đường trung hòa nn và biểu đồ ứng suất pháp σ của mặt cắt ngàm.

Độ võng cực đại của công xon là ở đầu tự do. Theo dầm tinh sẵn 2 và 3 của hình 90

$$f_{y\max} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{ql^4}{8} + \frac{Pl^3 \cos\alpha}{3} \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 2030} \left(\frac{4 \cdot 16 \cdot 10^8}{8} + \frac{240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,866}{3} \right) \approx 0,33\text{cm};$$

$$f_{z\max} = Pl^3 \sin\alpha / 3EI_y = 240 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 0,5 / (3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 155) \approx 1,03\text{cm}.$$

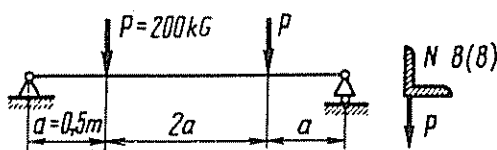
Độ võng tổng hợp cực đại

$$f = \sqrt{f_{y\max}^2 + f_{z\max}^2} = \sqrt{0,33^2 + 1,03^2} \approx 1,08\text{cm}.$$

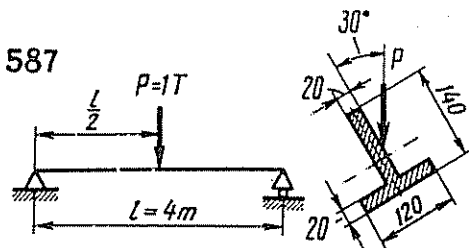
Độ võng này xiên góc β' đối với trục y và $\text{tg}\beta' = f_{z\max} / f_{y\max} = 1,03 / 0,33 \approx 3,12$, tức là: $\beta' = 72^\circ 14'$.

Bài tập 586 — 595. Tính giá trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất pháp và vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm. Ngoài ra, trong bài 587 tìm chuyển vị thẳng đứng f_d và nằm ngang f_n của mặt cắt ở chỗ đặt lực với $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$; trong bài 593 tính giá trị và phương của độ võng f ở chỗ đặt lực P_1 , với $E = 10^4 \text{ MN/m}^2$.

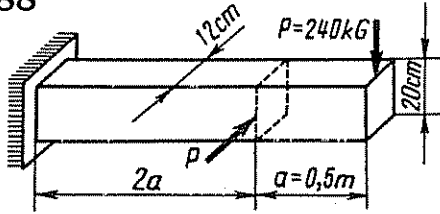
586



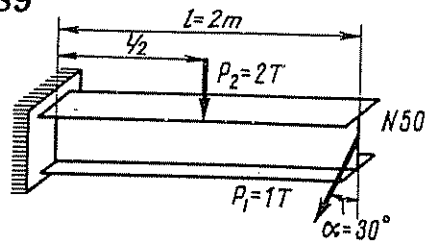
587



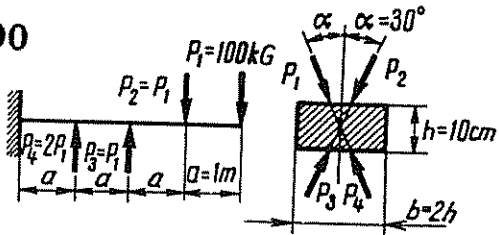
588



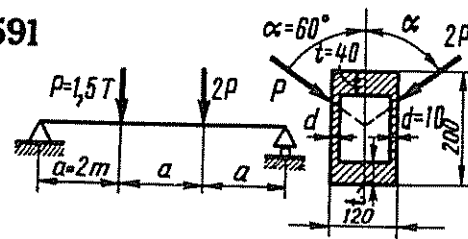
589



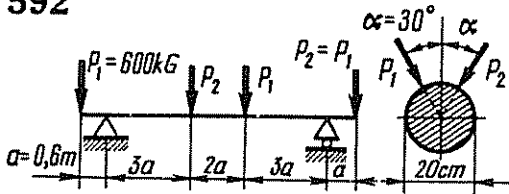
590



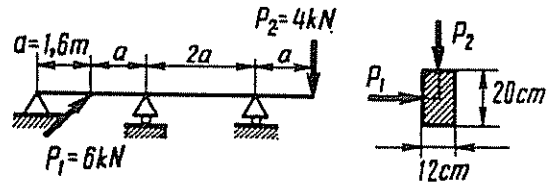
591



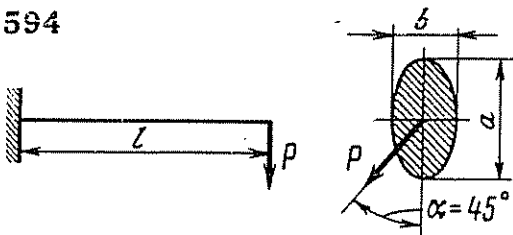
592



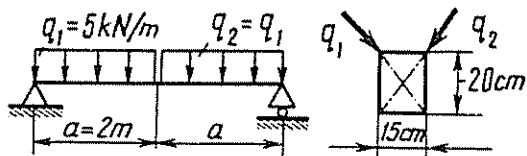
593



594



595

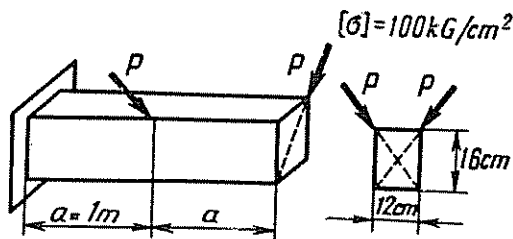


Bài tập 596 — 601. Tính giá trị lực P cho phép và vị trí đường trung hòa ở mặt cắt nguy hiểm của dầm. Ngoài ra tính giá trị và phương của độ võng:

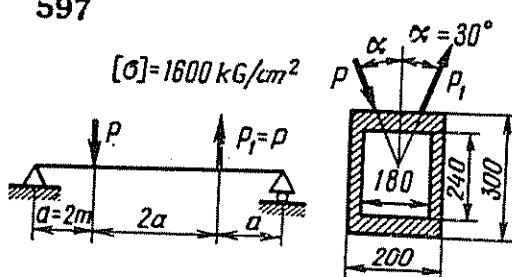
— Ở đầu tự do với $E = 10^5 \text{kG/cm}^2$ (bài 596)

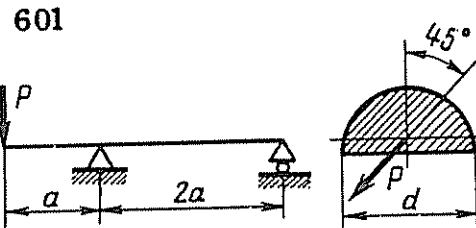
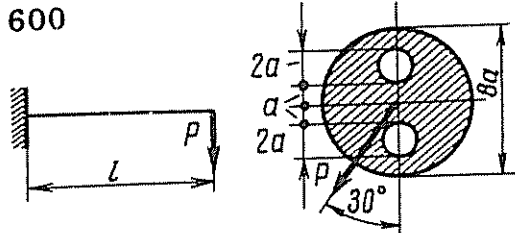
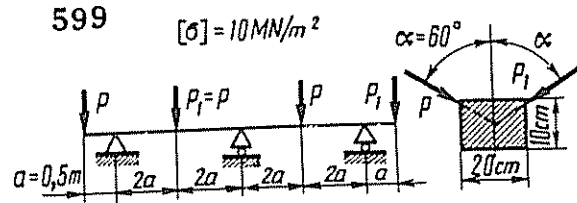
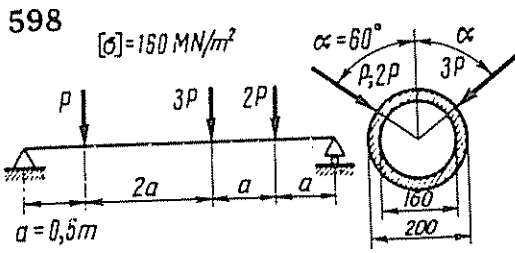
— Ở giữa nhịp bên trái với $E = 10^4 \text{MN/m}^2$ (bài 599)

596

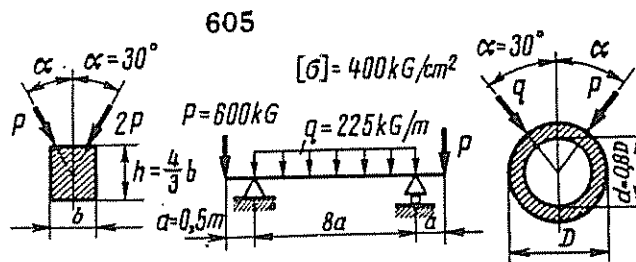
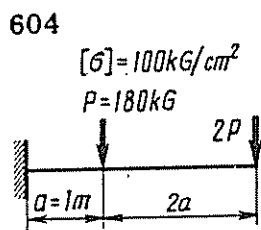
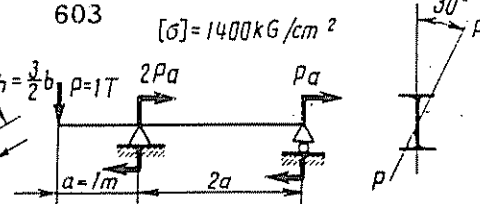
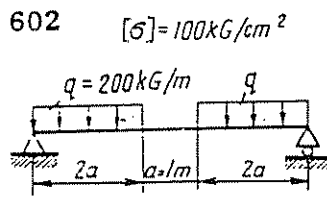


597



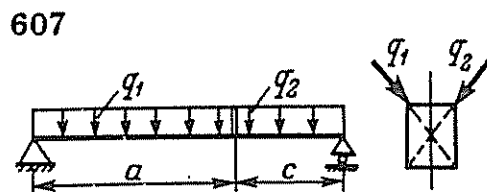
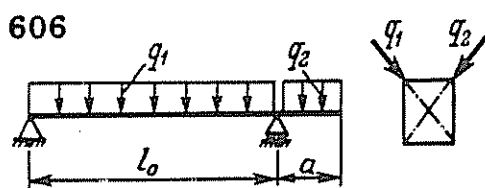


Bài tập 602 — 605. Xác định kích thước mặt cắt ngang và vị trí đường trung hòa ở mặt cắt nguy hiểm của dầm. Ngoài ra ở bài tập 604, tính giá trị và phương độ võng của đầu tự do; $E = 10^5 \text{ kg/cm}^2$.



Bài tập 606. Chứng minh rằng khi $a \leq l_0/2$ và $q_2 \leq q_1$ thì σ_{\max} không phụ thuộc a và q_2 .

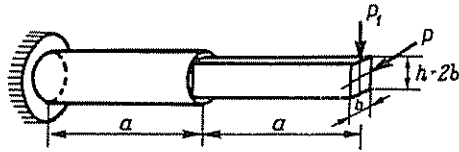
Bài tập 607. Chứng minh rằng khi $c \leq a$ và $q_2 \leq q_1$ thì σ_{\max} không phụ thuộc q_2 .



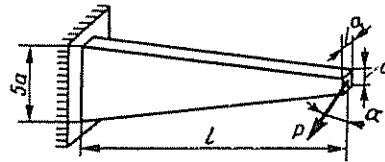
Bài tập 608: Cho $P_1 = 1,63 P$, E , a , $h = 2b$. Tính giá trị và phương của f_{\max} .

Bài tập 609. Cho P , l , a , $\alpha = \arctg 0,5$. Tính σ_{\max} .

608



609

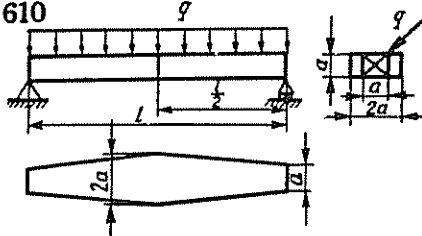


$\alpha = \arctg 0,5$

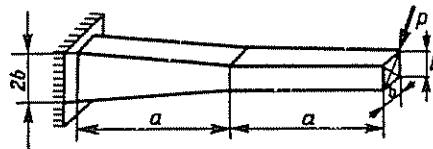
Bài tập 610. Cho q , l , a . Tính σ_{\max} .

Bài tập 611. Cho P , a , b , E . Xác định f_{\max} và góc giữa đường độ võng và đường tải trọng.

610

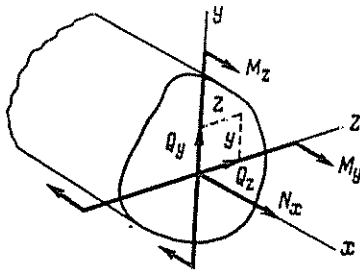


611



§ 29. Kéo (nén) và uốn đồng thời.

Trong trường hợp tổng quát của biến dạng kéo (nén) và uốn đồng thời, trên mặt cắt ngang bất kỳ của thanh hình lăng trụ nội lực có thể thu gọn thành lực dọc N_x hướng theo trục hình học x của thanh, momen uốn M_y và M_z trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm xz và xy , và lực cắt Q_y và Q_z hướng theo các trục y và z (hình 109).



Hình 109

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang thanh xác định bằng phương trình mặt phẳng không qua gốc tọa độ sau đây :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y, \\ &= \frac{N_x}{F} \left(1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2} \right) \end{aligned} \quad (142)$$

trong đó F — diện tích mặt cắt ngang;

I_y , I_z — momen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang;

i_y , i_z — bán kính quán tính chính;

y , z — tọa độ của điểm tính ứng suất.

Phương trình đường trung hòa có dạng:

$$1 + \frac{M_y z}{N_x i_y^2} + \frac{M_z y}{N_x i_z^2} = 0. \quad (143)$$

Ứng suất pháp có giá trị cực đại và cực tiểu tại những điểm tiếp xúc của chu tuyến mặt cắt với các đường thẳng song song với đường trung hòa.

Ứng suất tiếp tổng hợp có thể tính gần đúng bằng lồng hình học của các ứng suất tiếp do Q_y và Q_z . Ứng suất này thường rất bé, do đó có thể không xét đến trong tính toán thực tế.

Kích thước mặt cắt ngang tính theo ứng suất pháp bằng cách thử dần. Lần thử nhất có thể chỉ tính uốn phẳng do thành phần momen uốn có yêu cầu kích thước lớn nhất. Mặt cắt được chọn cuối cùng phải kiểm tra với cả thành phần momen uốn thứ hai và lực dọc. Với mặt cắt đã chọn ứng suất không được vượt quá 5%.

Thí dụ 56. Cho $q = 200\text{kG/m}$. $P_0 = 24\text{T}$; $P_1 = 16\text{T}$; $P_2 = 400\text{kG}$; $b = 12\text{cm}$, $h = 16\text{cm}$, $l = 2\text{m}$. (hình 110).

Tính σ_{\max} , σ_{\min} và xác định vị trí đường trung hòa.

Bài giải. Mặt cắt nguy hiểm ở đầu ngàm. Tại đó $N_x = -P_0 - P_1 = -24 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^3 = -40 \cdot 10^3 \text{kG}$;

$$\begin{aligned} M_y &= P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{l}{2} = 16 \cdot 10^3 \cdot 6 + 4 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = \\ &= 136 \cdot 10^3 \text{kGcm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= -P_1 \frac{h}{2} - \frac{ql^2}{2} = -16 \cdot 10^3 \cdot 8 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^4}{2} = \\ &= -168 \cdot 10^3 \text{kGcm}. \end{aligned}$$

Dấu của ứng suất tại các điểm trên mặt cắt nguy hiểm do N_x , M_y và M_z vẽ trên hình 110a.

Do đó:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z} = -\frac{40 \cdot 10^3}{12 \cdot 16} \pm \frac{136 \cdot 10^3 \cdot 6}{16 \cdot 12^2} \pm \frac{168 \cdot 10^3 \cdot 6}{12 \cdot 16^2},$$

$$\sigma_{\max/\min} \approx \begin{cases} 475 \text{kG/cm}^2 \\ -891 \text{kG/cm}^2 \end{cases}$$

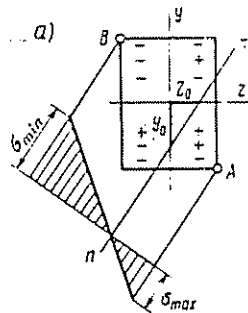
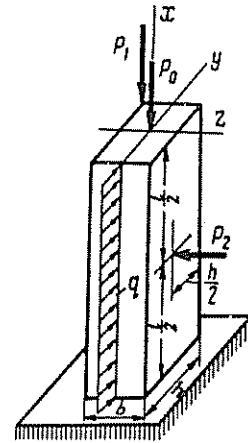
Trong công thức (143), ta đã lấy $N_x > 0$ và M_y , M_z ở góc phần tư thứ nhất nên lấy $\sigma > 0$. Trong bài toán này

$$N_x < 0, \quad M_y > 0, \quad M_z < 0$$

và

$$i_y^2 = b^2/12 = 12 \text{cm}^2;$$

$$i_z^2 = h^2/12 \approx 21,3 \text{cm}^2$$



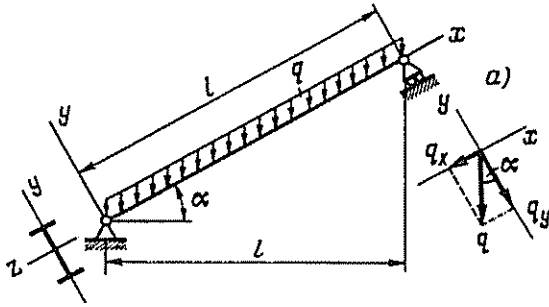
Hình 110

Do đó các đoạn chắn trên trục z và trục y bởi đường trung hòa có giá trị bằng:

$$z_o = -N_x i_y^2 / M_y = (40 \cdot 10^3 / 136 \cdot 10^3) 12 \approx 3,53 \text{ cm.}$$

$$y_o = -N_x i_z^2 / M_z = (-40 \cdot 10^3 / 168 \cdot 10^3) 21,3 \approx -5,07 \text{ cm.}$$

Trên hình 110,a đường trung hòa được vẽ đi qua đầu các đoạn chắn và từ đường trung hòa đó vẽ được biểu đồ ứng suất pháp.



Hình 111

Thí dụ 57. Cho $q = 6 \text{ kN/m}$; $L = 6 \text{ m}$; $\alpha = 30^\circ$; $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$ (hình 111). Chọn số hiệu mặt cắt dầm thép chữ I.

Bài giải. Hình chiếu của tải trọng q lên trục x và trục y (hình 111,a).

$$q_x = q \sin \alpha; \quad q_y = q \cos \alpha$$

Thành phần q_x phân bố đều trên chiều dài l tạo ra biến dạng nén. Thành phần q_y làm dầm bị uốn ngang. Momen uốn cực đại ở mặt cắt giữa nhịp dầm

$$M_{\max} = q_y l^2 / 8 = q L^2 / (8 \cos \alpha).$$

Ta lấy giá trị này để thử chọn mặt cắt lần thử nhất. Khi đó

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{q L^2}{8 [\sigma] \cos \alpha} = \frac{6000 \cdot 36}{8 \cdot 140 \cdot 10^7 \cdot 0,866} = 2,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 223 \text{ cm}^3$$

Mặt cắt chữ I số 22 có momen chống uốn lớn hơn và gần nhất với giá trị này: $W_x = 232 \text{ cm}^3$; $F = 30,6 \text{ cm}^2$.

Ở mặt cắt có M_{\max} tác dụng lực nén dọc bằng:

$$N_{x=l/2} = -\frac{q_x l}{2} = -\frac{q L}{2} \lg \alpha$$

Ta kiểm tra mặt cắt đã chọn ở trên khi có xét thêm lực dọc:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{|N_x|}{F} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6000 \cdot 6}{2 \cdot 30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} + \frac{6000 \cdot 36}{8 \cdot 232 \cdot 10^{-6} \cdot 0,866} = \\ &= 137,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,8 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

Ứng suất nhỏ hơn

$$\frac{[\sigma] - |\sigma_{\max}|}{[\sigma]} 100 = \frac{2,2}{140} 100 \approx 1,6\%$$

Thực ra ứng suất lớn nhất ở tại mặt cắt bên trái mặt cắt giữa nhịp một đoạn khá bé do đó ảnh hưởng không đáng kể. Thật vậy, đối với một mặt cắt bất kỳ ta có:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{W} \left(\frac{q l x}{2} \cos \alpha - \frac{q x^2}{2} \cos \alpha \right) + \frac{q(l-x)}{F} \sin \alpha.$$

$$\text{Vi} \quad \frac{d|\sigma|_{\max}}{dx} = \frac{q l}{2W} \cos \alpha - \frac{q x}{W} \cos \alpha - \frac{q}{F} \sin \alpha = 0,$$

nên mặt cắt nguy hiểm ở cách gối trái một đoạn bằng:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{W}{F} \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 \cdot 2}{2 \sqrt{3}} - \frac{232 \cdot 10^{-6}}{30,6 \cdot 10^{-4} \sqrt{3}} = 3,420 \text{ m},$$

tức là mặt cắt giữa nhịp là 1,4cm.

Ở mặt cắt này ($x = 3,420 \text{ m}$)

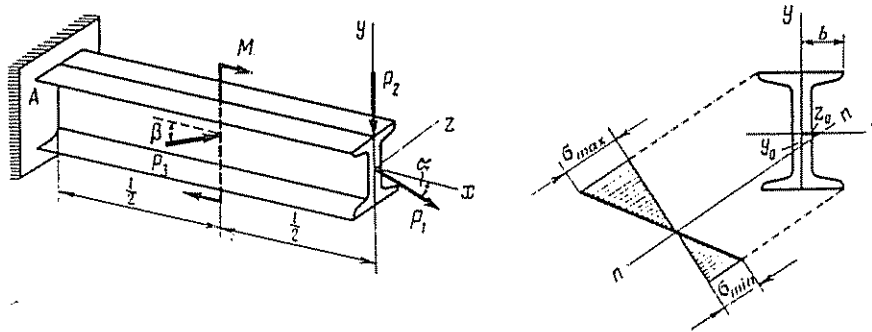
$$|\sigma|_{\max} = \frac{1}{232 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{6000 \cdot 6}{2} \cdot 3,420 - \frac{6000}{2} \cdot 3,420^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{6000 \cdot 3,508}{30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 2} =$$

$$= 137,85 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 137,85 \text{ MN/m}^2$$

tức là lớn hơn ứng suất ở mặt cắt giữa nhịp gần 0,05%.

Thí dụ 58. Cho $P_1 = 4\text{T}$ (trong mặt phẳng xy), $P_2 = 1\text{T}$; $P_3 = 0,8\text{T}$; $M = 2\text{Tm}$, $l = 2\text{m}$; $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$ (hình 112).

Chọn mặt cắt chữ U. Tính y_0 , z_0 .



Hình 112

Bài giải. Ở mặt cắt nguy hiểm (ngâm)

$$N_x = P_1 \cos \alpha + P_3 \cos \beta = 4 \cdot 0,966 + 0,8 \cdot 0,866 \approx 4,557 \text{ T};$$

$$M_y = -P_3 l / 2 \sin \beta = -0,8 \cdot 0,5 \cdot 100 = -40 \text{ Tcm}.$$

$$M_z = P_1 l \sin \alpha + P_2 l + M = 4 \cdot 200 \cdot 0,259 + 1 \cdot 200 + 200 = 607,2 \text{ Tcm}$$

Thứ lần thứ nhất ta chọn mặt cắt theo momen uốn M_z :

$$W_z = M_z / [\sigma] = 607,2 \cdot 10^3 / 16 \cdot 10^3 \approx 380 \text{ cm}^3.$$

Mặt cắt thép chữ U số 22 có momen chống uốn lớn hơn và gần nhất với giá trị này: $W_z = 192 \text{ cm}^3$. Với mặt cắt ghép hai thép chữ U $W_z = 384 \text{ cm}^3$.

Ta chú ý là ngoài momen uốn M_z trên dầm còn có momen uốn M_y cũng khá lớn và lực dọc N_x , do đó để đảm bảo về độ bền ta chọn mặt cắt thép chữ U số 24 với $W_z = 242 \text{ cm}^3$. Khi đó:

$$W_z = 2 \cdot 242 = 484 \text{ cm}^3; \quad F = 2F' = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 2I_y' = 2 \cdot 387,2 = 774,4 \text{ cm}^4, \quad W_y = I_y / b = 774,4 / 9,0 = 86,0 \text{ cm}^3.$$

Ta kiểm tra độ bền của mặt cắt thép chữ U số 24 tại điểm A ở ngâm là điểm có ứng suất lớn nhất:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{4557}{61,2} + \frac{40 \cdot 10^3}{86,0} + \frac{607,2 \cdot 10^3}{484} \approx 1794 \text{ kG/cm}^2$$

Vì ứng suất lớn quá

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100 = \frac{194}{16} = 12,1\%$$

do đó mặt cắt thép chữ U số 24 là không đảm bảo.

Trong lần thử thứ hai ta chọn mặt cắt thép chữ U số 24a với $W_z = 265\text{cm}^3$.
 Khi đó:

$$W_z = 2 \cdot 265 = 530\text{cm}^3, \quad F = 2 \cdot 32,9 = 65,8\text{cm}^2.$$

$$I_y = 2I_y' = 2 \cdot 488,5 = 977\text{cm}^4, \quad W_y = 977/9,6 = 102,8\text{cm}^3.$$

Ứng suất lớn nhất tại điểm A của mặt cắt này:

$$\sigma_{\max} = \frac{4557}{65,8} + \frac{40 \cdot 10^3}{102,8} + \frac{607,2 \cdot 10^3}{530} \approx 1604\text{kG/cm}^2$$

Ứng suất lớn quá $4/1600 = 0,25\%$, điều này có thể cho phép, do đó ta chọn mặt cắt số 24a.

Bây giờ ta xác định vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm. Đối với mặt cắt số 24a, ta có $i_z = 9,84\text{cm}$, $i_z^2 = 9,84^2 \approx 96,8\text{cm}^2$; $i_y^2 = I_y/F = 977/65,8 = 14,8\text{cm}^2$.

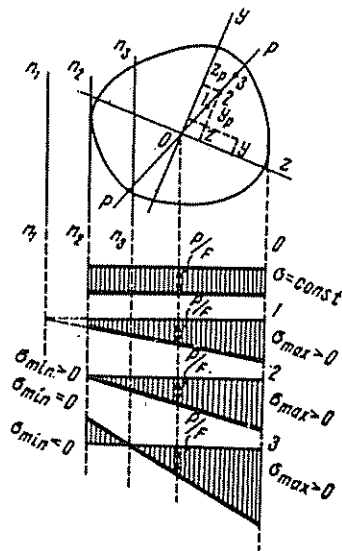
Theo công thức (143) các đoạn chắn của đường trung hòa trên trục y và trục z bằng:

$$y_0 = - \frac{4,557}{607,2} 96,8 \approx - 0,73\text{cm}$$

$$z_0 = - \frac{4,557}{-40} 14,8 \approx 1,69\text{cm}$$

Trên hình 112 ta thấy sau khi nối đầu các đoạn chắn bằng một đường thẳng, ta được đường trung hòa nn . từ đó ta vẽ được biểu đồ ứng suất pháp.

Tải trọng đặt lệch tâm. Trong trường hợp tổng quát của tải trọng lệch tâm, thanh hình lăng trụ đồng thời bị kéo hoặc nén và uốn xiên thuần túy. Nội lực trên mặt cắt ngang thanh thu gọn thành lực dọc $N_x = P$ và momen uốn $M_y = Pz_P$, $M_z = Py_P$ trong hai mặt phẳng quán tính chính trung tâm xz và xy của thanh. Ở đây lực kéo (hay nén) P không đặt đúng trọng tâm mặt cắt đầu thanh mà đặt tại điểm có tọa độ y_P và z_P (hình 113).



Hình 113

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang thanh xác định bằng một phương trình mặt phẳng không qua gốc tọa độ:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N_x}{F} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} = \\ &= \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z z_P}{i_y^2} + \frac{y y_P}{i_z^2} \right) \end{aligned} \quad (144)$$

trong đó F — diện tích mặt cắt ngang, I_y và I_z — momen quán tính chính trung tâm, i_y và i_z — bán kính quán tính chính, y và z — tọa độ điểm bất kỳ trên mặt cắt.

Phương trình đường trung hòa nn có dạng:

$$1 + \frac{zz_P}{i_y^2} + \frac{yy_P}{i_z^2} = 0 \text{ hay } \frac{z}{-i_y^2/z_P} + \frac{y}{-i_z^2/y_P} = 1, \quad (145)$$

trong đó:

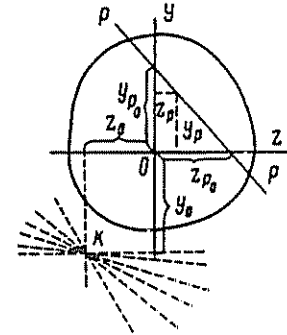
$$-i_y^2/z_P; -i_z^2/y_P \quad (146)$$

là những đoạn chắn của đường trung hòa trên các trục quán tính chính z và y của mặt cắt ngang.

Tại các điểm trên đường song song với đường trung hòa và đi qua trọng tâm mặt cắt, ứng suất pháp $\sigma = P/F$. Ứng suất pháp cực đại và cực tiểu phát sinh tại các điểm tiếp xúc của chu tuyến mặt cắt với các đường song song với đường trung hòa. Đối với các mặt cắt đối xứng, có những điểm xa nhất đối với cả hai trục quán tính chính trung tâm, thì ứng suất cực đại phát sinh ở những điểm này. Do đó, đối với các mặt cắt ấy

$$|\sigma|_{\max} = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_x} + \frac{z_P}{W_y} \right) \quad (147)$$

Nếu điểm đặt lực di chuyển theo đường thẳng pp đi qua trọng tâm O của mặt cắt thì đường trung hòa tịnh tiến (không quay) đến gần hoặc ra xa trọng tâm tùy theo điểm đặt lực di chuyển ra xa hoặc đến gần trọng tâm. Trên hình 113 vẽ vị trí các đường trung hòa (n_1n_1 , n_2n_2 và n_3n_3 ; n_0n_0 đi ra xa vô cùng) và biểu đồ σ tương ứng khi lực kéo P đặt tại các điểm 0, 1, 2, 3 trên đường thẳng pp .



Hình 114

Nếu điểm đặt lực di chuyển trên đường thẳng pp (hình 114) không đi qua trọng tâm mặt cắt thì đường trung hòa quay chung quanh một điểm cố định K có tọa độ:

$$y_0 = -i_z^2/y_{P_0}; z_0 = -i_y^2/z_{P_0}.$$

Ngược lại nếu đường trung hòa quay chung quanh một điểm cố định có tọa độ y_0 và z_0 thì điểm đặt lực di chuyển trên đường thẳng pp không qua trọng tâm mặt cắt và có phương trình như sau.

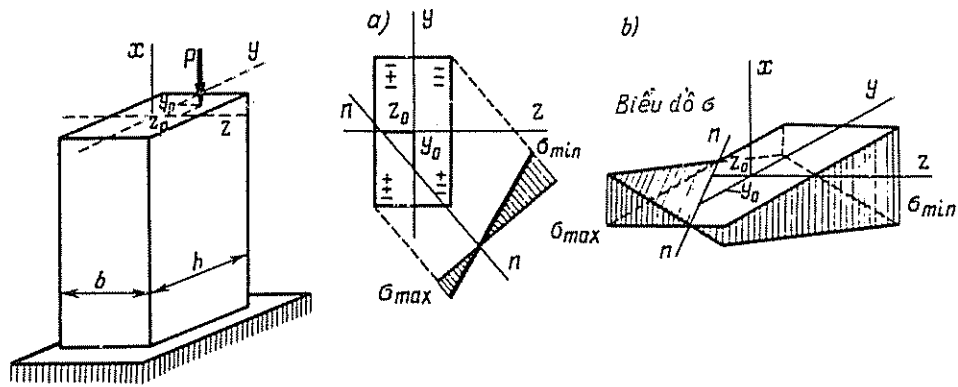
$$\frac{y_P}{-i_z^2/y_0} + \frac{z_P}{-i_y^2/z_0} = 1.$$

Nếu điểm đặt lực nằm trên một trong các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt thì thanh đồng thời bị kéo hoặc nén dọc trục và uốn phẳng thuần túy. Trong trường hợp đó các công thức trên vẫn đúng, nhưng cần cho $z_P = 0$ (nếu điểm đặt lực nằm trên trục y), hoặc $y_P = 0$ (nếu điểm đặt lực nằm trên trục z).

Để bảo đảm độ bền cho những thanh làm bằng vật liệu giòn chịu kéo đứt kém, ta cần phải đặt lực lệch tâm thế nào để trên mặt cắt ngang không có ứng suất kéo.

Phần mặt phẳng của mặt cắt ngang có chứa trọng tâm và giới hạn bởi một chu tuyến kín để khi đặt lực vào trong đó ứng suất tại mọi điểm của mặt cắt chỉ có một dấu, gọi là *lõi của mặt cắt*. Chu tuyến của lõi là quỹ tích những điểm đặt lực lệch tâm, tương ứng với các điểm này, đường trung hòa tiếp xúc với chu tuyến mặt cắt và không cắt mặt cắt ở chỗ nào.

Thí dụ 59. Cho $P = 6,4 T$; $b = 4 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$, $y_p = 2 \text{ cm}$, $z_p = 1 \text{ cm}$ (hình 115).



Hình 115

Tính σ_{\max} , σ_{\min} , y_0 , z_0 .

Bài giải. Trên mặt cắt ngang có các nội lực

$$N_x = -P = -6,4 T; M_y = -Pz_p = -6,4 \cdot 1 = -6,4 \text{ Tcm.}$$

$$M_z = -Py_p = -6,4 \cdot 2 = -12,8 \text{ Tcm.}$$

Vì ở góc phần tư thứ nhất các nội lực đều gây ra ứng suất nén, do đó σ_{\min} ở góc trên bên phải mặt cắt, còn σ_{\max} ở góc dưới bên trái (hình 115.a).

Khi đó

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

Với

$$F = bh = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2; W_y = hb^2/6 = 8 \cdot 16/6 = 64/3 \text{ cm}^3$$

$$W_z = bh^2/6 = 4 \cdot 64/6 = 128/3 \text{ cm}^3, \text{ ta được:}$$

$$\sigma_{\max/\min} = - (6,4 \cdot 10^3/32) \pm (6,4 \cdot 10^3 \cdot 3/64) \pm (12,8 \cdot 10^3 \cdot 3/128)$$

hay

$$\sigma_{\max} = 400 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = -800 \text{ kG/cm}^2.$$

Theo công thức (146) ta xác định được các đoạn chắn của đường trung hòa nn trên các trục quán tính chính trung tâm y và z của mặt cắt:

$$y_0 = -i_z^2/y_p = -h^2/12y_p = -64/(12 \cdot 2) = -8/3 \approx -2,67 \text{ cm}$$

$$z_0 = -i_y^2/z_p = -b^2/12z_p = -16/(12 \cdot 1) = -4/3 \approx -1,33 \text{ cm.}$$

Vị trí đường trung hòa và biểu đồ ứng suất pháp σ vẽ trên hình 115 a, b.

Thí dụ 60. Cho một mặt cắt bất kỳ có hai trục đối xứng, nội tiếp trong hình chữ nhật ABCD có cạnh $b < h$ (hình 116) bán kính quán tính chính trung

tâm $i_y < i_z$ và vị trí trọng tâm xác định bởi tọa độ z_0 .
 Vẽ lõi mặt cắt.

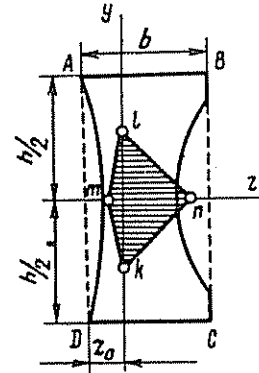
Bài giải. Nếu đường trung hòa tiếp xúc với cạnh bé AB và CD của hình chữ nhật thì các điểm đặt lực tương ứng (điểm k và l trên chu tuyến lõi) phải nằm trên trục y và có tọa độ

$$y_1 = \mp 2i_z^2/h.$$

Nếu đường trung hòa tiếp xúc với cạnh lớn BC và DA của hình chữ nhật thì những điểm đặt lực lệch tâm tương ứng (điểm m và n trên chu tuyến lõi) phải nằm trên trục z và có hoành độ:

$$z_1' = -i_y^2/(b - z_0); z_1'' = i_y^2/z_0.$$

Vi đường trung hòa từ vị trí nằm ngang chuyển sang vị trí thẳng đứng (và ngược lại) bằng cách quay chung quanh một điểm cố định là đỉnh của chữ nhật, do đó tương ứng với sự quay này điểm đặt lực di động trên các đoạn thẳng. Trên cơ sở lập luận này, nối các điểm k, m, l, n bằng những đoạn thẳng, ta được lõi của mặt cắt (trên hình 116 lõi được vạch chéo).



Hình 116

Những trường hợp đặc biệt:

a) Mặt cắt chữ nhật có cạnh b và h (hình 117). Đối với hình chữ nhật

$$i_z^2 = h^2/12, i_y^2 = b^2/12, z_0 = b/2.$$

Do đó

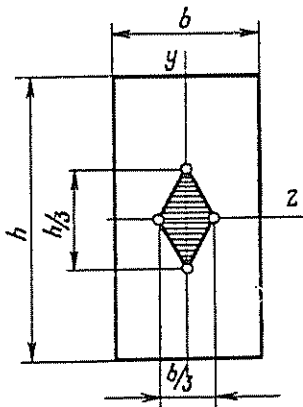
$$y_1 = \mp h/6; z_1 = \mp b/6$$

b) Mặt cắt thép hình chữ I (số 20a, hình 118). Theo bảng thép hình, đối với mặt cắt chữ I số 20a, ta có $i_z = 8,37\text{cm}; i_y = 2,32\text{cm}, h = 20\text{cm}; b = 11\text{cm}$
 $z_0 = b/2$. Do đó

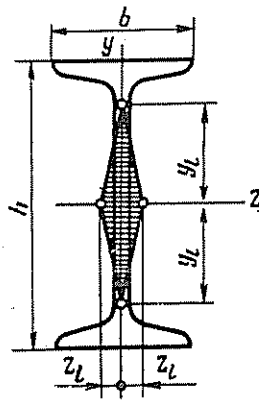
$$y_1 = \mp 2 \cdot 8,37^2/20 \approx \mp 7,01\text{cm}; z_1 = \mp 2 \cdot 2,32^2/11 \approx \mp 0,979\text{cm};$$

c) Mặt cắt hình chữ U (số 22a, hình 119). Theo bảng thép hình, đối với mặt cắt chữ U số 22a, ta có $i_z = 8,99\text{cm}; i_y = 2,55\text{cm}, h = 22\text{cm}, b = 8,7\text{cm}, z_0 = 2,46\text{cm}$.
 Do đó $y_1 = \mp 2 \cdot 8,99^2/22 \approx \mp 7,35\text{cm}, z_1' = -2,55^2/(8,7 - 2,46) \approx -1,04\text{cm}.$

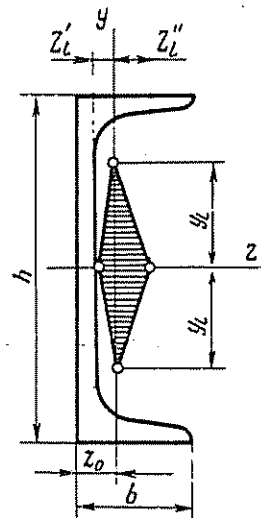
$$z_1'' = 2,55^2/2,46 \approx 2,64\text{cm}.$$



Hình 117

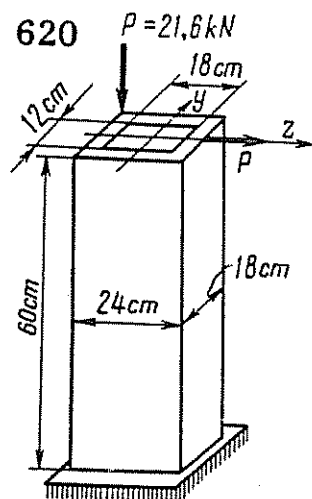
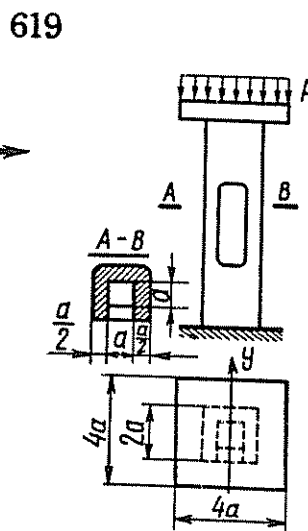
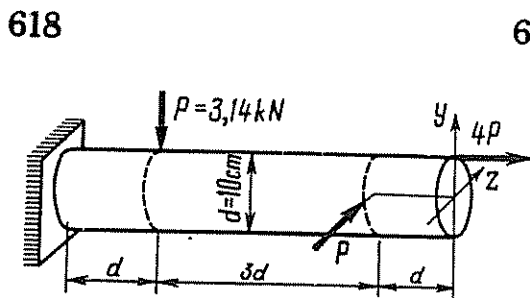
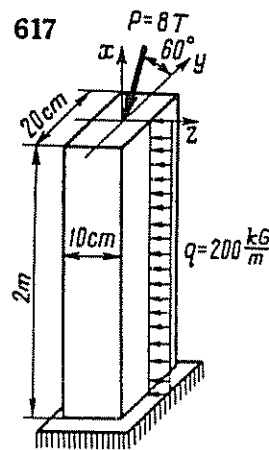
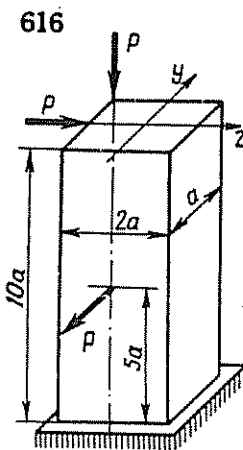
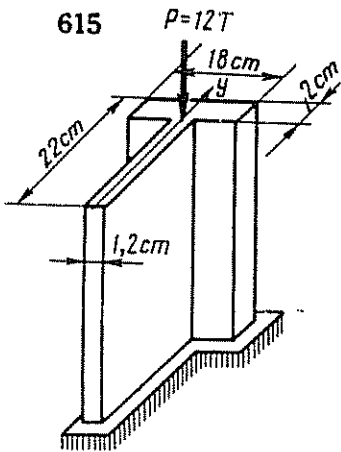
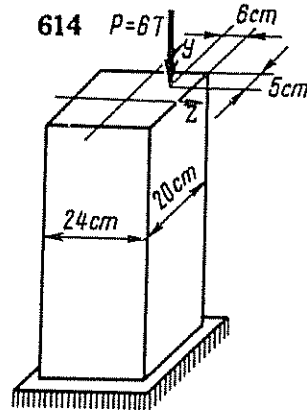
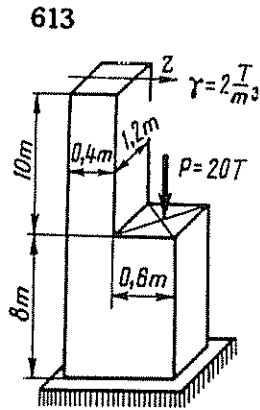
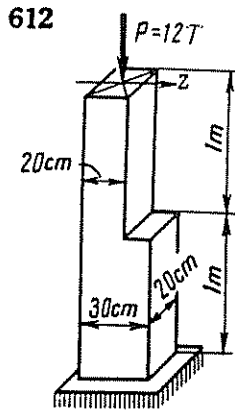


Hình 118



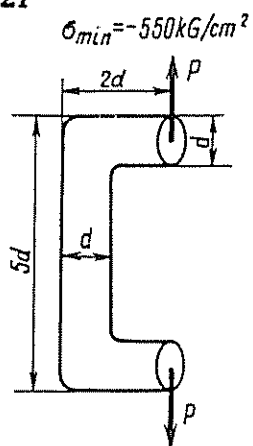
Hình 119

Bài tập 612 – 620. Tính ứng suất pháp cực đại σ_{\max} và cực tiểu σ_{\min} và vị trí đường trung hòa ở mặt cắt nguy hiểm của các thanh thẳng:

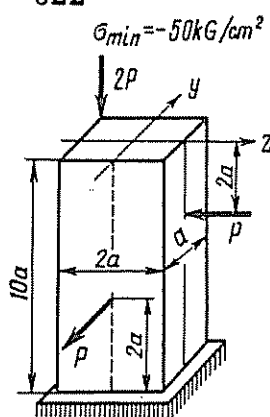


Bài tập 621 – 623. Tính ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} và xác định vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của thanh.

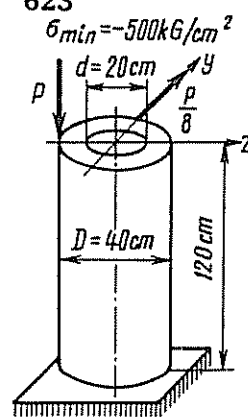
621



622

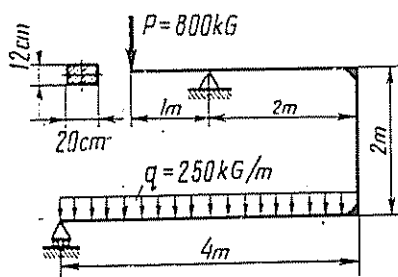


623

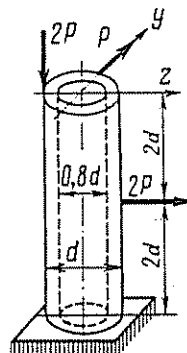


Bài tập 624 — 629. Tính ứng suất pháp cực đại σ_{max} và ứng suất pháp cực tiểu σ_{min} tại mặt cắt nguy hiểm của thanh hoặc bộ phận của hệ chịu lực phức tạp.

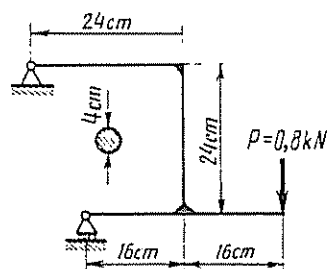
624



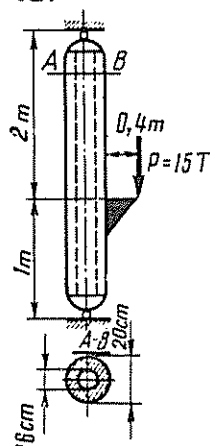
625



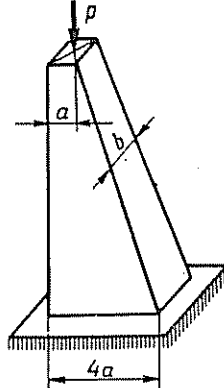
626



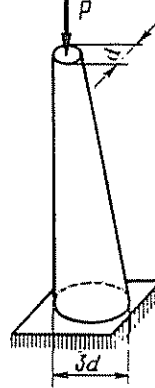
627



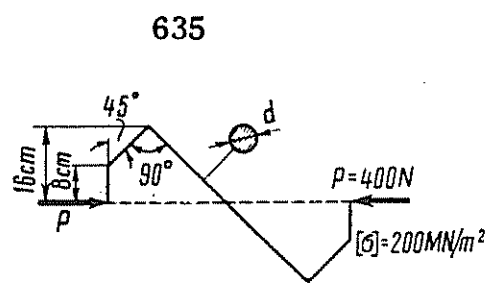
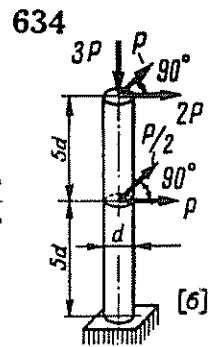
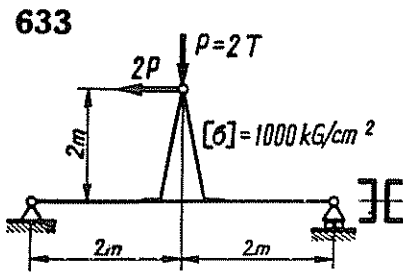
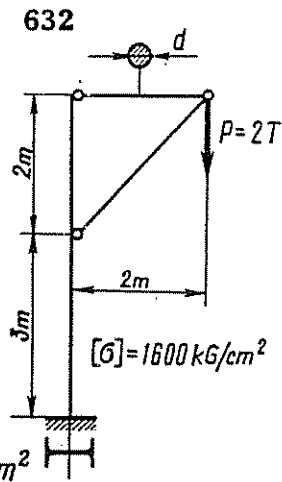
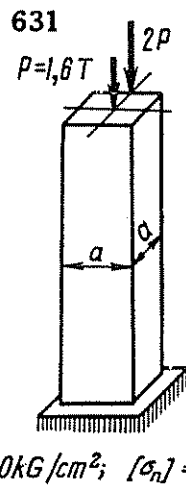
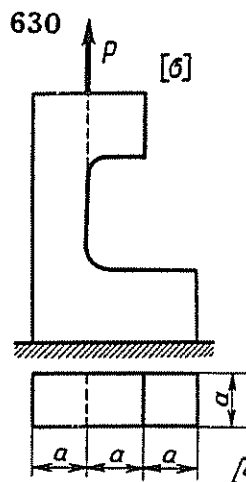
628



629



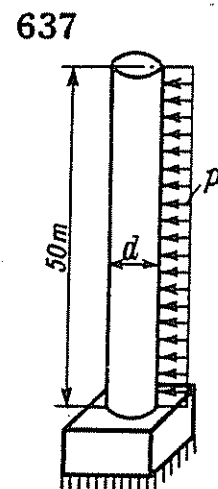
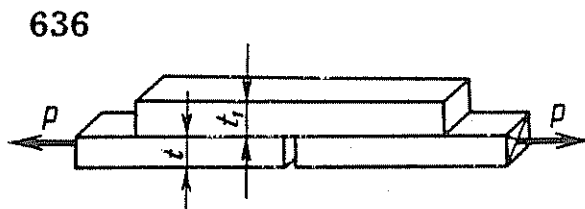
Bài tập 630 — 635. Tính kích thước cần thiết của mặt cắt ngang thanh, dầm hoặc bộ phận của hệ.



Bài tập 636. Xác định kích thước t_1 để cho ứng suất pháp cực đại ở tấm cơ bản và tấm nối ghép bằng nhau.

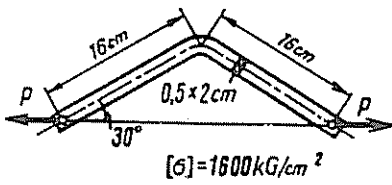
Bài tập 637. Cột có trọng lượng đơn vị thể tích $\gamma = 2,5T/m^3$ và áp suất trên mặt cắt xuyên tâm $p = 90kg/cm^2$.

Tính đường kính d của mặt cắt ngang để cột không có ứng suất kéo.

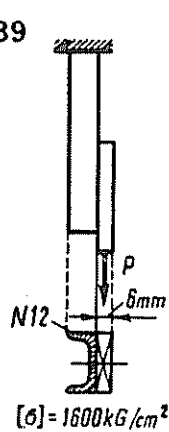


Bài tập 638 — 647. Tính tải trọng an toàn lớn nhất P .

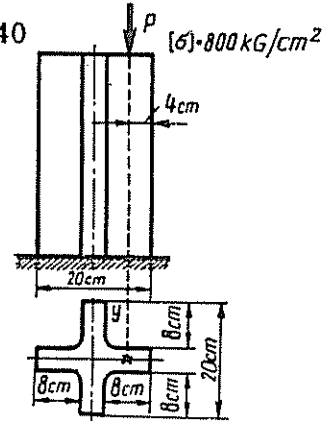
638



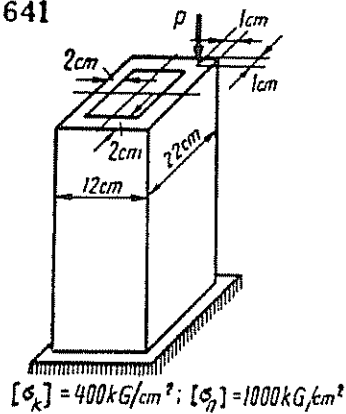
639



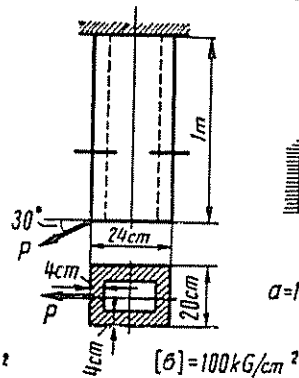
640



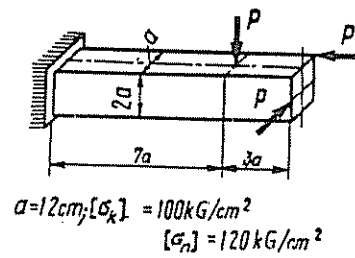
641



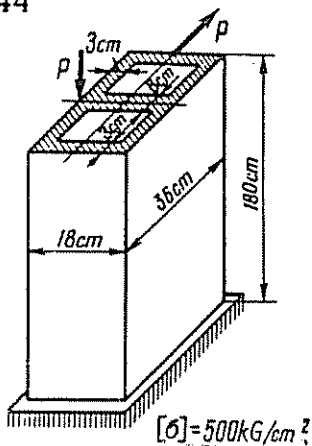
642



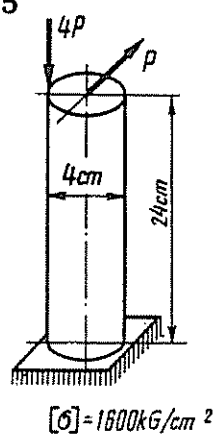
643



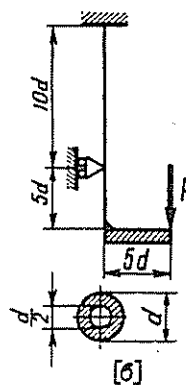
644



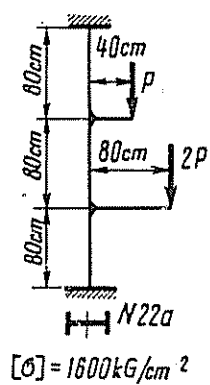
645



646

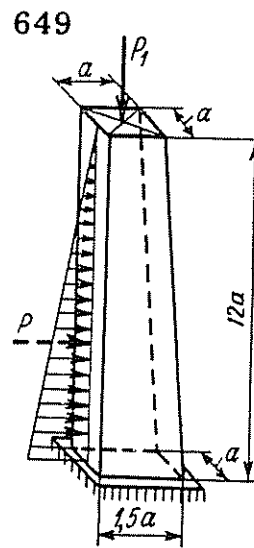
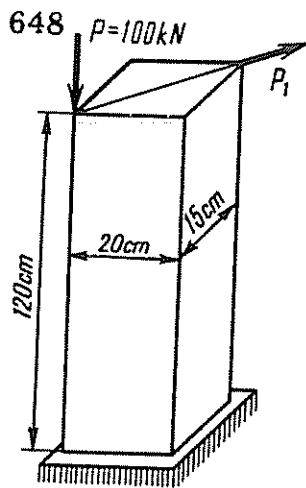


647

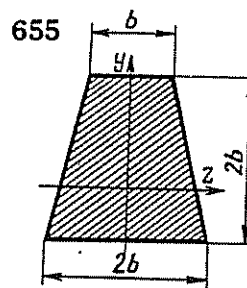
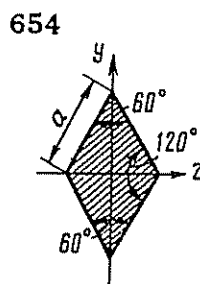
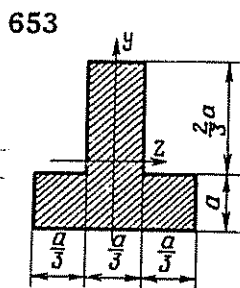
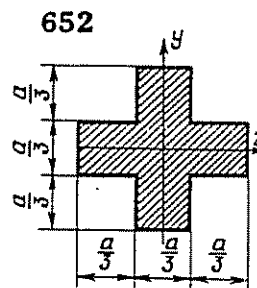
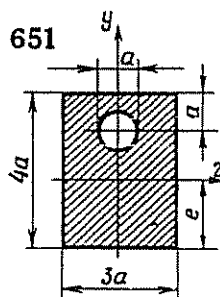
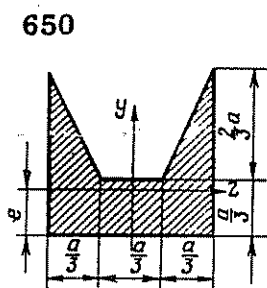


Bài tập 648. Tính giá trị lực P_1 để ở mặt cắt thấp nhất của thanh không có ứng suất kéo.

Bài tập 649. Tính giá trị lực P_1 và σ_{\min} từ điều kiện ứng suất σ_{\max} của thanh bằng không.



Bài tập 650 – 655. Vẽ lõi của mặt cắt.



§ 30. Kéo (nén) và xoắn đồng thời.

Nếu do tác dụng của ngoại lực trên mặt cắt ngang thanh phát sinh lực dọc N_x và momen xoắn M_{x_0} , ta nói thanh bị kéo (nén) và xoắn đồng thời. Trục x là trục hình học của thanh, còn trục y và trục z là những trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang.

Tại điểm nguy hiểm (y, z) của mặt cắt đang xét có ứng suất pháp do lực dọc N_x

$$\sigma = N_x / F,$$

trong đó F là diện tích mặt cắt ngang, và ứng suất tiếp do momen xoắn M_{x_0} ,

$$\tau = M_{x_0}/W_{x_0}$$

trong đó W_{x_0} là momen chống xoắn của mặt cắt.

Ứng suất chính tại điểm này tính theo công thức (107):

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

Dựa vào các lý thuyết về độ bền, ta tính độ bền của thanh.

Đối với vật liệu dẻo, ta dùng lý thuyết thứ ba hoặc thứ tư theo các công thức sau đây:

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (148)$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (149)$$

Đối với vật liệu có độ bền kéo và nén khác nhau, $[\sigma_k]/[\sigma_n] = \nu$ ta dùng lý thuyết thứ năm theo công thức:

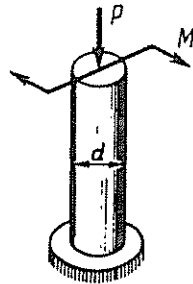
$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_k] \quad (150)$$

Nếu mặt cắt ngang thanh là hình tròn đường kính d thì:

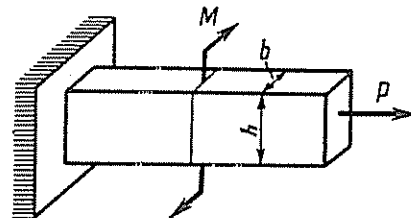
$$F = \pi d^2/4 \text{ và } W_{x_0} = W_{\rho} = \pi d^3/16.$$

Thí dụ 61. Cho $P = 2T$, $M = 4T\text{cm}$, $d = 4\text{cm}$, $[\sigma_k] = 350\text{kG/cm}^2$, $[\sigma_n] = 1400\text{kG/cm}^2$ (hình 120). Tính xem thanh có đủ độ bền không?

Bài giải. Lực dọc $N_x = -P = -2 \cdot 10^3\text{kG}$; momen xoắn $M_{x_0} = M = 4 \cdot 10^3\text{kGcm}$.



Hình 120



Hình 121

Ứng suất pháp tại các điểm của mặt cắt ngang

$$\sigma = N_x/F = -2 \cdot 10^3 \cdot 4/(\pi \cdot 4^2) \approx -159\text{kG/cm}^2.$$

Ứng suất tiếp cực đại trên chu tuyến mặt cắt

$$\tau_{\max} = M_{x_0}/W_{\rho} = 4 \cdot 10^3 \cdot 16/(\pi \cdot 4^3) \approx 318\text{kG/cm}^2.$$

Do:

$$\nu = [\sigma_k]/[\sigma_n] = 350/1400 = 0,25$$

nên ứng suất tương đương theo công thức (150) có giá trị bằng

$$\sigma_{tdV} = -\frac{1-0,25}{2}159 + \frac{1+0,25}{2}\sqrt{159^2 + 4 \cdot 318^2} \approx 350\text{kG/cm}^2 = [\sigma_k]$$

Như vậy, thanh đủ độ bền.

Thí dụ 62. Cho $P = 160\text{kN}$; $M = 4\text{kNm}$; $h = 8\text{cm}$; $b = 4\text{cm}$; $\sigma_{ch} = 360\text{MN/m}^2$ (hình 121).

Xác định hệ số an toàn n_{ch} .

Bài giải. Vì $N_x = P = 16 \cdot 10^4\text{N}$; $M_{x_0} = M = 4 \cdot 10^3\text{Nm}$ và $h/b = 8/4 = 2$, nên tại các điểm trên mặt cắt ngang $\sigma = N_x/F = 16 \cdot 10^4/(0,04 \cdot 0,08) = 50 \cdot 10^6\text{N/m}^2 = 50\text{MN/m}^2$, và ứng suất tiếp lớn nhất do xoắn tại trung điểm cạnh dài của mặt cắt hình chữ nhật trên đoạn thanh bên trái

$$\tau_{\max} = M_{x_0}/W_{x_0} = M_{x_0}/\beta b^3 = 4 \cdot 10^3 \cdot 10^6/(0,493 \cdot 64) \approx 127 \cdot 10^6\text{N/m}^2 = 127\text{MN/m}^2.$$

Tại điểm nguy hiểm của thanh ứng suất tương đương tính theo lý thuyết thứ ba (công thức 148) có giá trị:

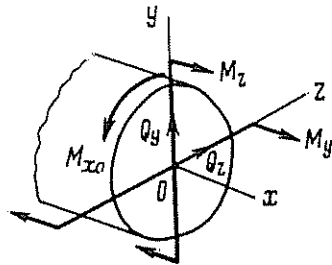
$$\sigma_{tdIII} = \sqrt{50^2 + 4 \cdot 127^2} \approx 259\text{MN/m}^2.$$

$$\text{Hệ số an toàn } n_{ch} = \sigma_{ch}/\sigma_{tdIII} = 360/259 \approx 1,39.$$

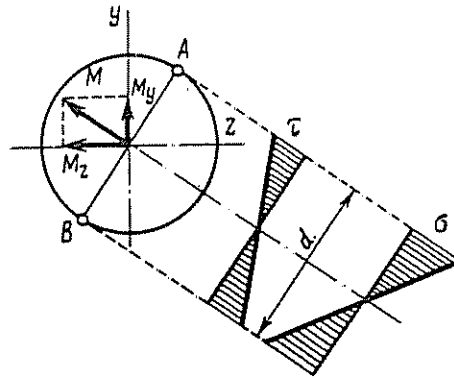
§ 31. Xoắn và uốn đồng thời.

Khi bị xoắn và uốn đồng thời, nội lực trên mặt cắt ngang thanh gồm có năm thành phần: momen xoắn $M_x = M_{x_0}$ tác dụng quanh trục hình học của thanh, momen uốn của M_y và M_z đối với các trục quán tính chính trung tâm y và z của mặt cắt, và lực cắt Q_z , Q_y hướng theo các trục đó.

Nếu mặt cắt thanh hình tròn, đường kính d , thì ứng suất tiếp do Q_y và Q_z có giá trị rất bé; khi tính toán thường không xét đến. Ứng suất tiếp do momen xoắn đạt giá trị cực đại



Hình 122



Hình 123

$$\tau_{\max} = M_{x_0}/W_\rho = 16M_{x_0}/\pi d^3$$

tại tất cả các điểm trên chu tuyến (hình 123). Ứng suất pháp cực đại do momen uốn M_y và M_z ở tại điểm A và B trên chu tuyến, đó là hai điểm đầu đường kính vuông góc với vector momen uốn tổng hợp $M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$.

$$\sigma = \pm M/W = \pm 32M/\pi d^3.$$

Tại các điểm nguy hiểm A và B, ứng suất chính σ_1 và σ_3 tính theo công thức (107) và điều kiện về độ bền viết theo các đẳng thức (148), (149) và (150). So sánh

giá trị của σ và τ , đồng thời chú ý rằng $W_\rho = 2W$, công thức tính toán độ bền thanh tròn bị xoắn và uốn đồng thời có dạng:

$$W \geq M_{td}/[\sigma] \quad (151)$$

trong đó M_{td} là momen uốn tương đương (tính toán).

Theo lý thuyết thứ ba:

$$M_{tdIII} = \sqrt{M^2 + M_{x_0}^2} \quad (152)$$

Theo lý thuyết thứ tư

$$M_{tdIV} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{x_0}^2} \quad (153)$$

Theo lý thuyết thứ năm:

$$M_{tdV} = \frac{1-\nu}{2} M + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{M^2 + M_{x_0}^2} \quad (154)$$

trong đó:

$$\nu = [\sigma_k]/[\sigma_n]$$

Nếu thanh mặt cắt không tròn bị xoắn và uốn đồng thời thì điểm nguy hiểm cũng ở trên chu tuyến mặt cắt: Tuy nhiên, vì điểm có ứng suất tiếp lớn nhất do xoắn có thể không trùng với điểm có ứng suất pháp lớn nhất do uốn, cho nên điểm nguy hiểm có thể là điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, hoặc điểm có ứng suất pháp lớn nhất, hoặc một điểm trung gian nào đó trên chu tuyến. Điểm nguy hiểm (y, z) là điểm mà ứng suất tương đương ở đây theo một lý thuyết về độ bền đã chọn, có giá trị lớn nhất.

Để viết ứng suất tương đương, σ và τ phải tính theo các công thức sau đây:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad \text{và} \quad \tau = \gamma \frac{M_{x_0}}{W_{x_0}}$$

trong đó γ là hệ số phụ thuộc vào hình dạng, kích thước mặt cắt và tọa độ (y, z) của điểm đang xét trên chu tuyến.

Để việc tính toán chính xác hơn có thể xét thêm cả ứng suất tiếp do uốn τ_{Q_y}, τ_{Q_z} . Khi đó ứng suất tiếp toàn phần phải tính theo tổng hình học của τ, τ_{Q_y} và τ_{Q_z} .

Thí dụ 63. Cho đường kính các bánh đai $D' = 20\text{cm}$, $D'' = 60\text{cm}$, trọng lượng bánh đai $P_0 = 200\text{kG}$; $P_1' = 400\text{kG}$, lực căng đai chuyên $P_1 = 800\text{kG}$; $P_2 = 400\text{kG}$; $P_1'' = 1000\text{kG}$, $P_2'' = 600\text{kG}$, chiều dài trục $l = 2\text{m}$, góc nghiêng của đai chuyên ở bánh thứ hai đối với trục z : $\alpha = 45^\circ$, ứng suất cho phép của vật liệu trục $[\sigma] = 1000\text{kG/cm}^2$ (hình 124).

Tính đường kính d của trục.

Bài giải. Đưa lực căng đai chuyên ở các bánh đai về tâm mặt cắt trục, ta tìm được momen đối với trục x ở mặt cắt đặt bánh thứ nhất và bánh thứ hai:

$$M_x' = (P_1' - P_2') D'/2 = 400 \cdot 10 = 4 \cdot 10^3 \text{kGcm.}$$

$$M_x'' = (P_1'' - P_2'') D''/2 = 400 \cdot 30 = 12 \cdot 10^3 \text{kGcm.}$$

Chiếu các lực tác dụng trên mặt phẳng của mỗi bánh đai xuống trục y và trục z , ta được lực ngang theo phương của các trục này:

$$P_y' = (P_1' + P_2') + P_0 = 1200 + 200 = 1400\text{kG,}$$

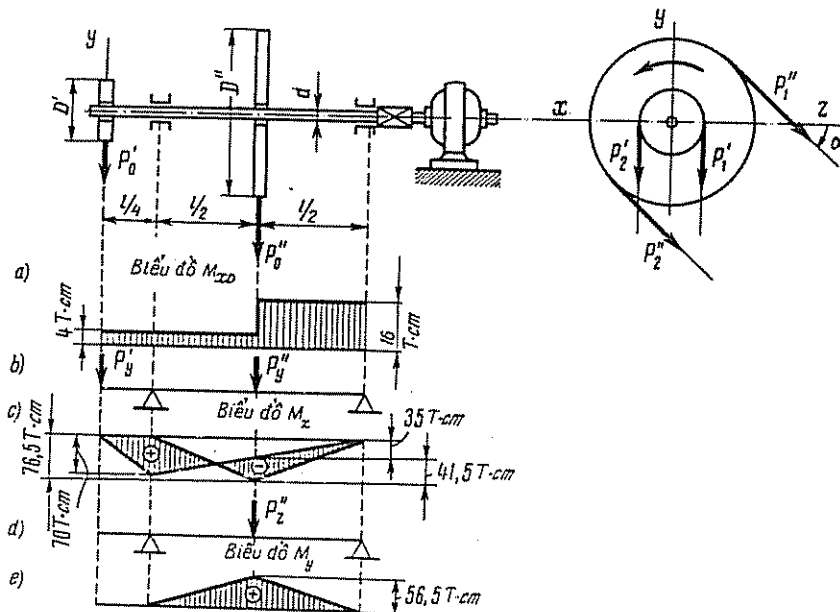
$$P_z = 0;$$

$$P_y'' = (P_1'' + P_2'') \cos 45^\circ + P_0'' \approx 1600 \cdot 0,707 + 400 \approx 1530 \text{ kG},$$

$$P_z'' = (P_1'' + P_2'') \sin 45^\circ \approx 1600 \cdot 0,707 = 1130 \text{ kG}.$$

Do các momen M_x' và M_x'' trục có biến dạng xoắn. Biểu đồ momen xoắn M_{x_0} vẽ trên hình 124, a. Các lực P_y' và P_y'' làm trục bị uốn trong mặt phẳng xy theo sơ đồ dầm có đầu hẫng (hình 124, b). Bằng phương pháp cộng tác dụng, ta vẽ được biểu đồ momen uốn M_z chung quanh trục z (hình 124, c). Lực P_z'' uốn trục trong mặt phẳng xz theo sơ đồ vẽ trên hình 124, d. Biểu đồ momen uốn M_y chung quanh trục y vẽ trên hình 124, e.

Mặt cắt nguy hiểm của trục là mặt cắt có gấn bánh đai thứ hai. Tính độ



Hình 124

bền theo lý thuyết thứ ba ta được momen uốn tương đương theo công thức (152)

$$M_{\text{tđ}} = \sqrt{M^2 + M_{x_0}^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_{x_0}^2} = \sqrt{56,5^2 + 41,5^2 + 16^2} \approx 71,9 \text{ T.cm}.$$

Theo công thức tính toán (151) $W = \pi d^3 / 32 \approx 0,1 d^3 > M_{\text{tđ}} / [\sigma] = 71900 / 1000$.

Đường kính trục:

$$d \geq \sqrt[3]{719} \approx 8,96 \text{ cm}.$$

Thí dụ 64. Cho $P, a, h = 2b, [\sigma]$ (hình 125). Tính b và h .

Bài giải. Biểu đồ momen uốn M_u và biểu đồ momen xoắn M_{x_0} vẽ trên hình 125, a, b.

Tại điểm A trên mặt cắt nguy hiểm ở ngàm (hình 125, c)

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{36Pa}{bh^2} = 9 \frac{Pa}{b^3}$$

$$\tau = \gamma \frac{M_{x_0}}{W_{x_0}} = 0,795 \frac{2Pa}{0,493b^3} \approx 3,23 \frac{Pa}{b^3}$$

Theo lý thuyết thứ ba về độ bền:

$$\sigma_{\text{tối}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{Pa}{b^3} \sqrt{81 + 4 \cdot 10,4} \approx 11,07 \frac{Pa}{b^3} \leq [\sigma]$$

từ đó rút ra:

$$b \geq \sqrt[3]{11,07Pa/[\sigma]} \approx 2,23 \sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$$

Tại điểm B trên mặt cắt nguy hiểm, do momen uốn $\sigma = 0$, do momen xoắn

$$\tau_{\text{max}} = M_{x0}/W_{x0} = 2Pa/0,493b^3.$$

Theo lý thuyết thứ ba:

$$\tau_{\text{max}} = 2Pa/0,493b^3 \leq [\sigma]/2,$$

từ đó rút ra:

$$b \geq \sqrt[3]{8,11Pa/[\sigma]} \approx 2,09 \sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$$

So sánh ta thấy điểm A là điểm nguy hiểm hơn, do đó ta lấy:

$$b \approx 2,23 \sqrt[3]{Pa/[\sigma]} \text{ và } h \approx 4,16 \sqrt[3]{Pa/[\sigma]}.$$

Với các kích thước vừa nhận được, ta kiểm tra độ bền tại điểm B, có xét đến ứng suất tiếp do uốn. Ở mặt cắt nguy hiểm lực cắt $Q = 4P$, do đó tại điểm B có ứng suất tiếp:

$$\tau_Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = 3 \frac{P}{b^2}.$$

Ứng suất tiếp tổng hợp tại điểm B

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_Q + \tau_{\text{max}} = \frac{3P}{b^2} + \frac{2Pa}{0,493b^3} = \\ &= \frac{Pa}{b^3} \left(4,06 + 3 \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

Theo lý thuyết thứ ba, ta phải thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$\tau = \frac{Pa}{b^3} \left(4,06 + 3 \frac{b}{a} \right) \leq \frac{[\sigma]}{2}$$

do đó

$$Palb^3 \leq [\sigma]/2(4,06 + 3b/a).$$

Khi tính ở điểm A, ta có:

$$Pa/b^3 \leq [\sigma]/11,07.$$

Như vậy, ta nhận được kích thước lớn khi tính độ bền tại điểm B. Trường hợp này sẽ xảy ra khi

$$[\sigma]/2(4,06 + 3b/a) \leq [\sigma]/11,07$$

hay

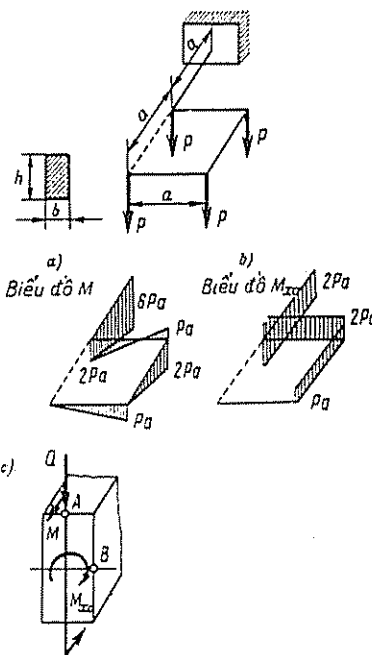
$$4,06 + 3b/a > 5,54$$

hay

$$b/a > 1,48/3 \approx 0,493$$

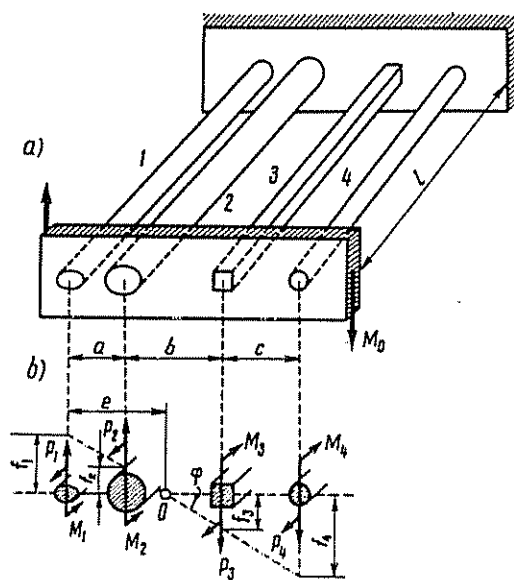
Kết quả trên cho biết điểm B sẽ chỉ nguy hiểm hơn điểm A khi chiều dài các đoạn thanh quá bé:

$$a < b/0,493 \approx 2b.$$



Hình 125

Thí dụ 65. Bốn thanh hình lăng trụ dài l , trục hình học đều nằm trên một mặt phẳng, một đầu ngàm, một đầu cùng gắn vào một tấm tuyệt đối cứng (hình 126, a). Tính góc quay của tấm khi có momen M_0 tác dụng trong mặt phẳng của nó. Biết khoảng cách giữa các trục thanh a, b, c ; độ cứng chống xoắn các thanh C_1, C_2, C_3, C_4 và độ cứng chống uốn B_1, B_2, B_3, B_4 .



Hình 126

Coi tấm luôn luôn giữ vị trí thẳng đứng và đường thẳng nằm ngang nối trọng tâm các mặt cắt đầu thanh trùng với một trục quán tính chính trung tâm mỗi thanh.

Bài giải. Vì được coi như cứng tuyệt đối, nên tấm quay trong mặt phẳng của nó chung quanh một điểm O nào đó một góc φ (hình 126, b). Góc này cũng là góc xoắn của mỗi thanh, tức là:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi \quad (a)$$

Vì:

$$\varphi_1 = M_{x_{01}}/C_1; \varphi_2 = M_{x_{02}}/C_2; \varphi_3 = M_{x_{03}}/C_3; \varphi_4 = M_{x_{04}}/C_4 \quad (b)$$

trong đó $M_{x_{0i}}$ là momen xoắn của mỗi thanh (độ cứng $C_i = G_i I_{x_{0i}}/l$), do đó (a) có dạng:

$$M_{x_{01}}/C_1 = M_{x_{02}}/C_2 = M_{x_{03}}/C_3 = M_{x_{04}}/C_4 = \varphi \quad (c)$$

Chú ý đến tính chất của các tỉ lệ thức, ta có:

$$M_{x_{01}} + M_{x_{02}} + M_{x_{03}} + M_{x_{04}} = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\varphi. \quad (d)$$

Độ võng đầu các thanh phải nằm trong mặt phẳng của tấm cứng và bằng (hình 126, b).

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= e\varphi = \frac{1}{B_1} \left(P_1 - \frac{3}{2l} M_1 \right) \\ f_2 &= (e - a)\varphi = \frac{1}{B_2} \left(P_2 - \frac{3}{2l} M_2 \right) \\ f_3 &= (a + b - e)\varphi = \frac{1}{B_3} \left(P_3 - \frac{3}{2l} M_3 \right) \\ f_4 &= (a + b + c - e)\varphi = \frac{1}{B_4} \left(P_4 - \frac{3}{2l} M_4 \right) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

trong đó P_1, P_2, P_3, P_4 và M_1, M_2, M_3, M_4 là lực và momen do tải cứng tác dụng vào đầu các thanh. Độ cứng chống uốn các thanh $B_i = 3E_i I_i / l^3$.

Vì tải giữ vị trí thẳng đứng, nên góc quay đầu các thanh do uốn bằng không, tức là:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{B_1} \left(\frac{3}{2l} P_1 - \frac{3}{l^2} M_1 \right) = 0 \\ \theta_2 &= \frac{1}{B_2} \left(\frac{3}{2l} P_2 - \frac{3}{l^2} M_2 \right) = 0 \\ \theta_3 &= \frac{1}{B_3} \left(\frac{3}{2l} P_3 - \frac{3}{l^2} M_3 \right) = 0 \\ \theta_4 &= \frac{1}{B_4} \left(\frac{3}{2l} P_4 - \frac{3}{l^2} M_4 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Từ đó rút ra:

$$M_1 = P_1 l / 2; \quad M_2 = P_2 l / 2; \quad M_3 = P_3 l / 2; \quad M_4 = P_4 l / 2. \quad (h)$$

Thay các giá trị này vào (e) và giải theo P_1 ta được:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 4 B_1 e \varphi; \\ P_2 &= 4 B_2 (e - a) \varphi; \\ P_3 &= 4 B_3 (a + b - e) \varphi; \\ P_4 &= 4 B_4 (a + b + c - e) \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad (k)$$

hay $B_1 e \varphi + B_2 (e - a) \varphi = B_3 (a + b - e) \varphi + B_4 (a + b + c - e) \varphi \quad (l)$

ta được:

$$e = \frac{B_2 a + B_3 (a + b) + B_4 (a + b + c)}{B_1 + B_2 + B_3 + B_4} \quad (m)$$

Viết phương trình tổng momen đối với điểm O :

$$M_{x_{o1}} + M_{x_{o2}} + M_{x_{o3}} + M_{x_{o4}} + P_1 e + P_2 (e - a) + P_3 (a + b - e) + P_4 (a + b + c - e) = M_o \quad (n)$$

So sánh (d) và (m), phương trình trên viết thành:

$$\varphi (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + 4\varphi B_1 e^2 + 4\varphi B_2 (e - a)^2 + 4\varphi B_3 (a + b - e)^2 + 4\varphi B_4 (a + b + c - e)^2 = M_0 \quad (o)$$

Từ đó rút ra:

$$\varphi = \frac{M_0}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + 4[B_1 e^2 + B_2 (e - a)^2 + B_3 (a + b - e)^2 + B_4 (a + b + c - e)^2]}$$

Biết e và φ , ta tính được $M_{x_{oi}}$ theo (c), P_i theo (i) và M_i theo (h).

Ở mỗi đầu thanh momen uốn là lớn nhất:

$$\max M_i = P_i l / 2.$$

Độ bền của mỗi thanh tính theo xoắn và uốn đồng thời.

Trường hợp đặc biệt. Tất cả các thanh đều có mặt cắt tròn và có:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d; a = b = c = d; l = 10d.$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E; G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G = 2E/5.$$

Khi đó $I = I_\rho / 2$; $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = GI_\rho / l$.

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B = \frac{3EI}{l^3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{GI_\rho}{l^3}$$

Thay vào các công thức (o) (m), (c) và (i), ta tìm được:

$$e = 3d/2.$$

$$\varphi = \frac{M_0}{4 \frac{GI_\rho}{l} + 15 \frac{GI_\rho}{l^3} d^2 \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \right)} = \frac{M_0 l}{GI_\rho} \cdot \frac{1}{4 + 75 \frac{d^2}{l^2}} = \frac{4}{19} \cdot \frac{M_0 l}{GI_\rho}$$

$$M_{x_{o1}} = M_{x_{o2}} = M_{x_{o3}} = M_{x_{o4}} = \frac{4}{19} M_0;$$

$$P_1 = P_4 = \frac{4}{19} \cdot \frac{M_0 l}{GI_\rho} \cdot 4 \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{GI_\rho}{l^3} \cdot \frac{3}{2} d = \frac{90}{19} \frac{M_0 d}{l^2} = \frac{9}{19} \cdot \frac{M_0}{l};$$

$$P_2 = P_3 = \frac{3}{19} \cdot \frac{M_0}{l}.$$

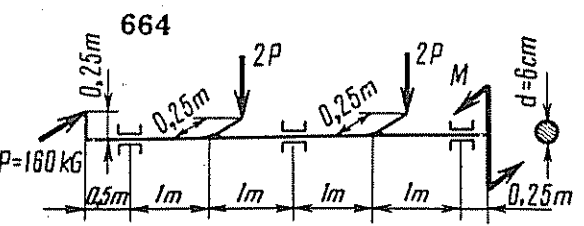
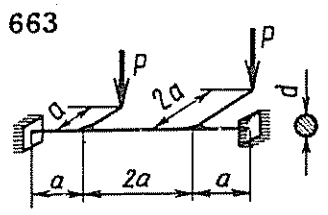
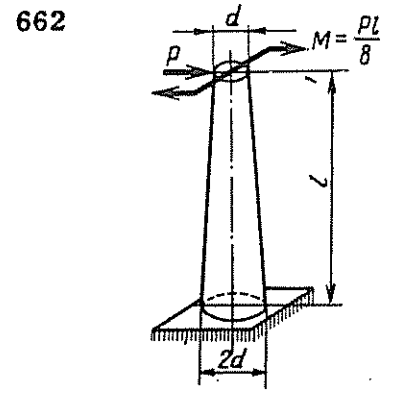
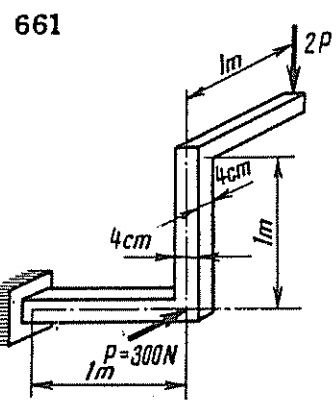
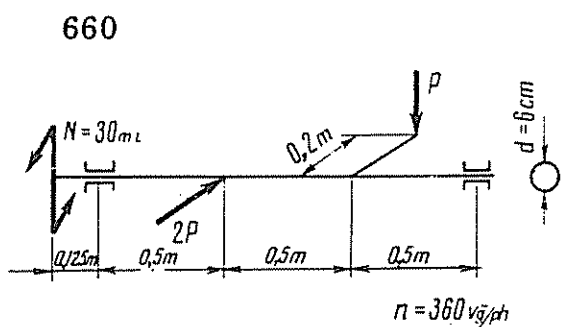
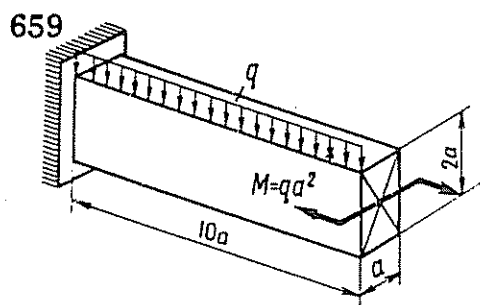
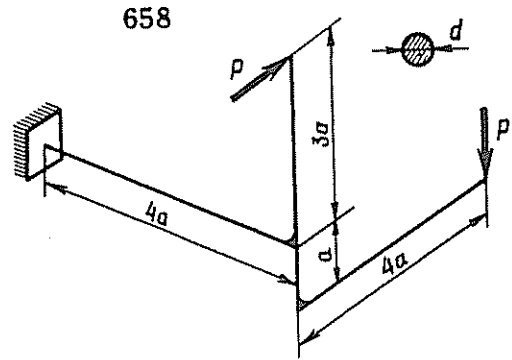
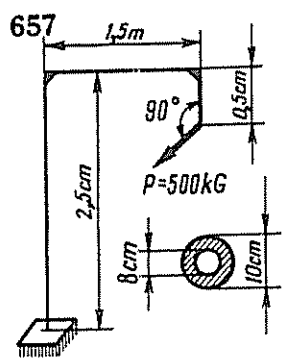
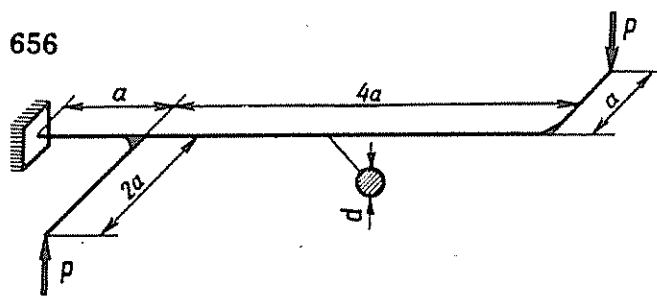
Momen uốn lớn nhất trên các thanh:

$$\max M_1 = \max M_4 = \frac{9}{38} M_0, \max M_2 = \max M_3 = \frac{3}{38} M_0.$$

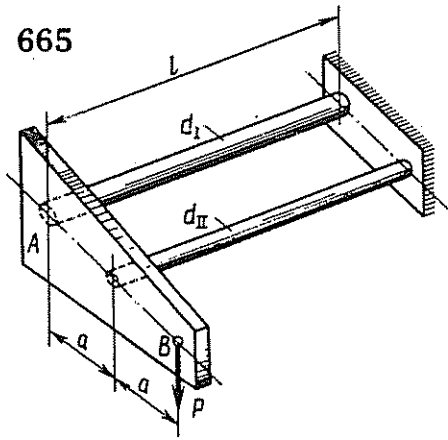
Việc kiểm tra độ bền phải tính đối với thanh 1 và 4:

$$\frac{M_0}{38W} \sqrt{81 + 64} \approx 0,317 \frac{M_0}{W} \leq [\sigma]$$

Bài tập 656 – 664. Vẽ biểu đồ momen xoắn M_{x_o} , biểu đồ momen uốn M_u và tính ứng suất tương đương theo lý thuyết thứ ba về độ bền.



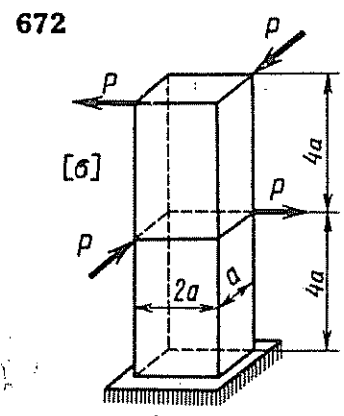
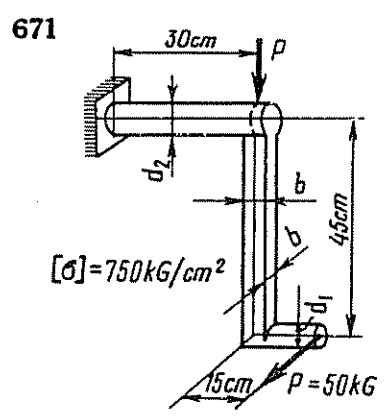
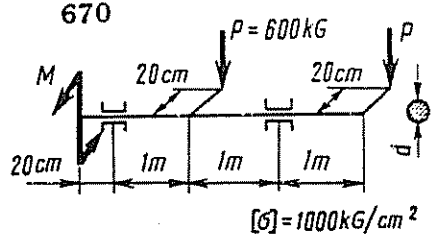
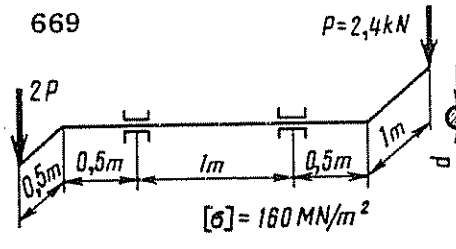
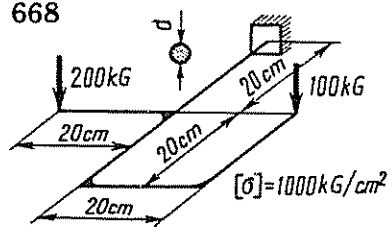
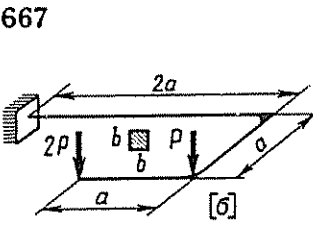
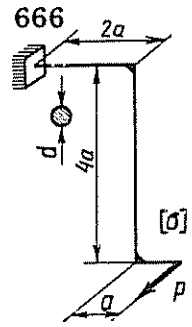
Bài tập 665. $P = 60 \text{ kG}$, $d_1 = 2 \text{ cm}$, $d_2 = 1 \text{ cm}$, $a = 8 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$; $E = 5G/2 = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; tấm AB tuyệt đối cứng và luôn luôn giữ vị trí thẳng đứng. Tính ứng suất chính cực đại và cực tiểu $\sigma_{\max/\min}$

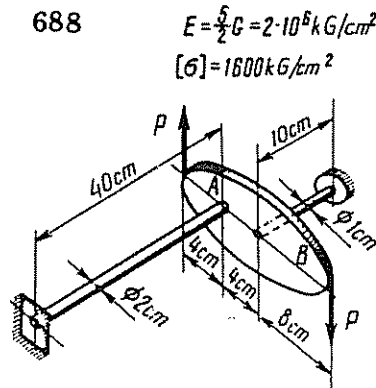
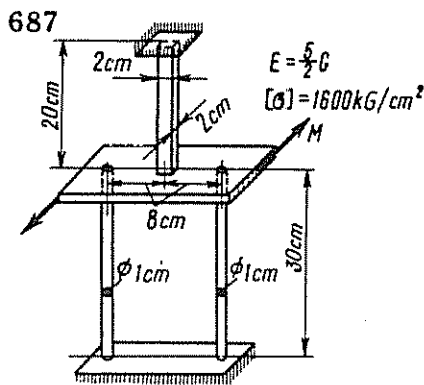
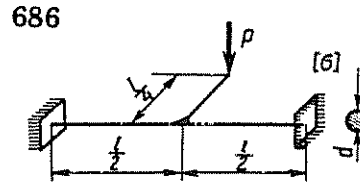
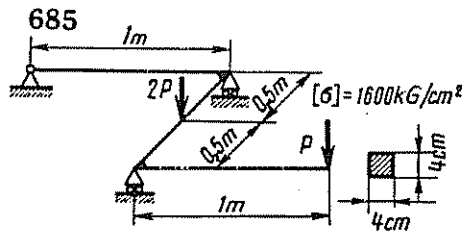
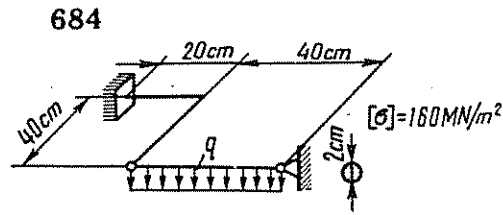
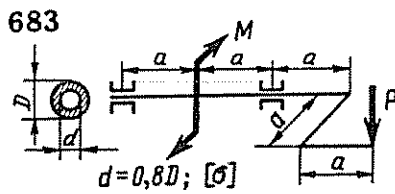


thanh II và chuyển vị thẳng đứng δ_p tại điểm đặt lực P .

Bài tập 666 – 680. Tính kích thước mặt cắt ngang các thanh theo lý thuyết thứ ba về độ bền.

Bài tập 681 – 688. Vẽ biểu đồ momen xoắn, biểu đồ momen uốn và tính tải trọng cho phép theo lý thuyết thứ ba về độ bền. Trong bài 688 tấm AB cứng tuyệt đối và chỉ chuyển vị thẳng đứng.





§ 32. Sức chịu phức tạp trong trường hợp tổng quát.

Trong trường hợp tổng quát khi hệ lực không gian tác dụng trên thanh lăng trụ, nội lực trên mặt cắt ngang có sáu thành phần: lực dọc trục N_x , momen xoắn M_{xo} , lực cắt Q_y, Q_z và momen uốn M_y, M_z (hình 127). Nếu trục x là trục hình học của thanh và trục y và trục z là những trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, trọng tâm trùng với tâm uốn, thì Q_y và M_z tạo ra biến dạng uốn phẳng trong mặt phẳng xy , Q_z và M_y tạo ra biến dạng uốn phẳng trong mặt phẳng xz . Như vậy thanh đồng thời bị kéo hoặc nén, xoắn và uốn ngang phẳng ở hai mặt chính.

Tại một điểm bất kỳ (y, z) trên mặt cắt ngang ứng suất pháp tính theo công thức (142) và ứng suất tiếp tổng hợp tính bằng tổng hình học của các ứng suất tiếp do xoắn và uốn.

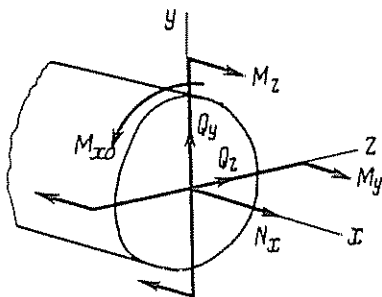
Phương trình đường trung hòa xác định theo biểu thức (143).

Vì thường ta không thể xác định ngay được vị trí điểm nguy hiểm nhất, do đó cần phải so sánh mức độ nguy hiểm của nhiều điểm trên chu tuyến mặt cắt. Điểm nguy hiểm nhất là điểm trên chu tuyến mặt cắt có ứng suất tương đương tính theo lý thuyết độ bền đã chọn, có giá trị lớn nhất. So sánh ứng suất này với ứng suất cho phép, ta có thể tính được hoặc kích thước mặt cắt ngang thanh, hoặc kiểm tra độ bền của thanh khi đã có kích thước mặt cắt.

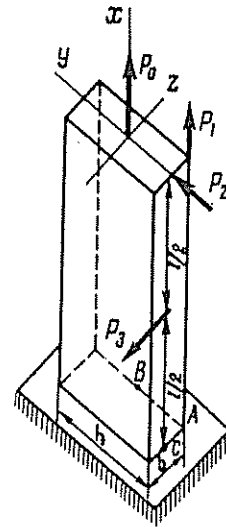
Thí dụ 66. Cho $P_0 = 40T$; $P_1 = 8T$; $P_2 = 4T$; $P_3 = 2T$; $l = 1m$, $h = 24cm$; $b = 8cm$; $[\sigma] = 1400kG/cm^2$ (hình 128).

Kiểm tra độ bền của cột.

Bài giải. Tại mặt cắt nguy hiểm ở chân cột nội lực có các giá trị sau đây:



Hình 127



Hình 128

$$N_x = P_0 + P_1 = 40 + 8 = 48T;$$

$$M_z = P_1 \frac{h}{2} + P_2 l = 8 \cdot 12 + 4 \cdot 100 = 496 \text{ Tcm.}$$

$$M_y = P_1 \frac{b}{2} + P_3 \frac{l}{2} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 50 = 132 \text{ Tcm.}$$

$$M_{x_0} = P_3 \frac{h}{2} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ Tcm.}$$

$$Q_y = P_2 = 4T.$$

$$Q_z = P_3 = 2T.$$

Trên hình 129 vẽ biểu đồ ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương ứng với các nội lực đã tính được ở trên. Tại điểm A ở góc mặt cắt chân cột (hình 128) ứng suất pháp có giá trị lớn nhất:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = 250 + 646 + 516 = 1412 \text{ kG/cm}^2.$$

Tại điểm B ở giữa cạnh dài bên phải mặt cắt ứng suất pháp và ứng suất tiếp có giá trị sau đây:

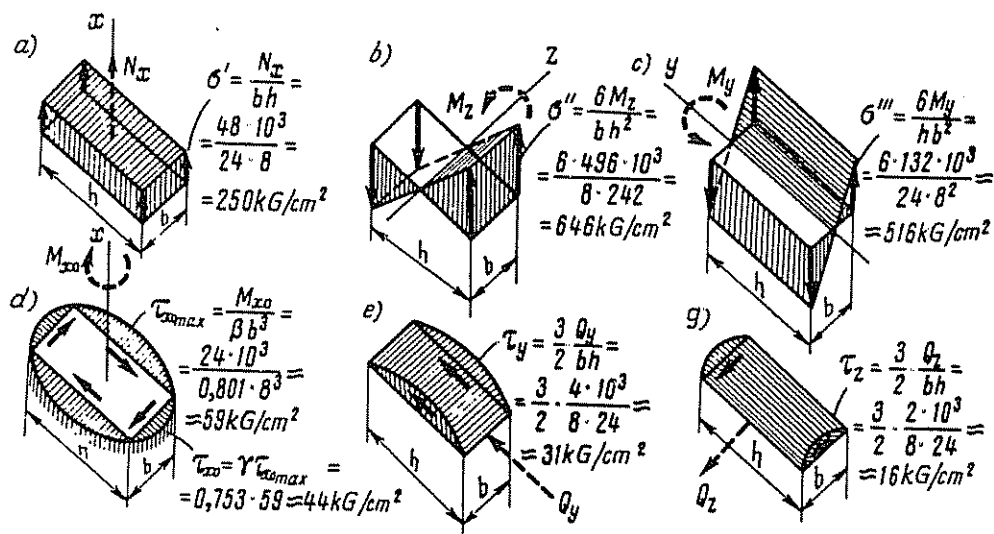
$$\sigma = \sigma' + \sigma''' = 250 + 516 = 766 \text{ kG/cm}^2.$$

$$\tau = \tau_{x\max} - \tau_y = 59 - 31 = 28 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất tương đương theo lý thuyết độ bền thứ ba:

$$\sigma_{tdB} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{766^2 + 4 \cdot 28^2} \approx 768 \text{ kG/cm}^2.$$

Tại điểm C ở giữa cạnh ngắn mặt cắt chân cột



Hình 129

ứng suất pháp và ứng suất tiếp có giá trị sau đây:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = 250 + 646 = 896 \text{ kG/cm}^2$$

$$\tau = \tau_{xo} + \tau_z = 44 + 16 = 60 \text{ kG/cm}^2$$

Ứng suất tương đương theo lý thuyết độ bền thứ ba:

$$\sigma_{tđc} = \sqrt{896^2 + 4 \cdot 60^2} \approx 904 \text{ kG/cm}^2$$

So sánh ứng suất tương đương ở các điểm A, B, C ta thấy điểm nguy hiểm nhất là điểm A.

Vì $\sigma_A \approx 1412 \text{ kG/cm}^2$ lớn hơn $[\sigma]$ chưa đến 1%, do đó thanh coi như đủ độ bền.

Thí dụ 67: Cho $P_1 = 200 \text{ kG}$; $P_2 = 100 \text{ kG}$; $P_3 = 240 \text{ kG}$; $l_1 = 30 \text{ cm}$; $l_2 = 40 \text{ cm}$; $l_3 = 60 \text{ cm}$; $l_4 = 80 \text{ cm}$; $[\sigma] = 1000 \text{ kG/cm}^2$ (hình 130). Tính a , h , b , d , d_o .

Bài giải. 1. Ta tính các thành phần của phản lực ở ngàm theo sáu điều kiện tĩnh học (hình 131).

$$\Sigma X = A_x - P_1 = 0; A_x = P_1 = 200 \text{ kG};$$

$$\Sigma Y = A_y - P_2 = 0; A_y = P_2 = 100 \text{ kG};$$

$$\Sigma Z = -A_z + P_3 = 0; A_z = P_3 = 240 \text{ kG};$$

$$\Sigma M_x = M_{Ax} - P_3 l_3 = 0; M_{Ax} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0,6 = 144 \text{ kGm.}$$

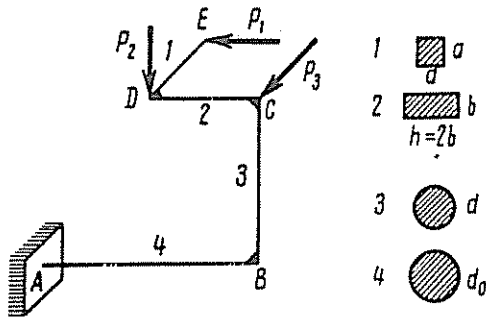
$$\Sigma M_y = M_{Ay} + P_1 l_1 - P_3 l_4 = 0;$$

$$M_{Ay} = P_3 l_4 - P_1 l_1 = 240 \cdot 0,8 - 200 \cdot 0,3 = 132 \text{ kGm.}$$

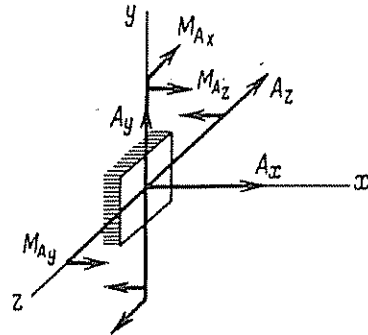
$$\Sigma M_z = M_{Az} - P_1 l_3 + P_2 (l_4 - l_2) = 0;$$

$$M_{Az} = P_1 l_3 - P_2(l_4 - l_2) = 200 \cdot 0,6 - 100(0,8 - 0,4) = 80 \text{ kGm.}$$

2. Tính lực dọc N , mômen xoắn M_{xo} và các momen uốn M_x, M_y, M_z ,



Hình 130



Hình 131

Đoạn 1. ($z = 0$ tại E, $z = l_1$ tại D). Uốn trong mặt phẳng xz :

$$M_y = P_1 z; M_{yz=0} = 0; M_{yz=l_1} = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kGm.}$$

Đoạn 2. ($x = 0$ tại D, $x = l_2$ tại C). Kéo và uốn trong mặt phẳng xz và xy :

$$N = P_1 = 200 \text{ kG}; M_y = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kGm.}$$

$$M_z = P_2 x; M_{zx=0} = 0, M_{zx=l_2} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0,4 = 40 \text{ kGm.}$$

Đoạn 3. ($y = 0$ tại C, $y = l_3$ tại B). Nén, xoắn và uốn trong mặt phẳng yz và xy .

$$N = -P_2 = -100 \text{ kG}; M_{xo} = P_1 l_1 = 200 \cdot 0,3 = 60 \text{ kGm}; M_x = P_3 y;$$

$$M_{xy=0} = 0, M_{xy=l_3} = P_3 l_3 = 240 \cdot 0,6 = 144 \text{ kGm}; M_z = P_2 l_2 + P_1 y.$$

$$M_{zy=0} = P_2 l_2 = 100 \cdot 0,4 = 40 \text{ kGm}; M_{zy=l_3} = P_2 l_2 + P_1 l_3 =$$

$$= 100 \cdot 0,4 + 200 \cdot 0,6 = 160 \text{ kGm.}$$

Đoạn 4. ($x = 0$ tại A, $x = l_4$ tại B). Nén, xoắn và uốn trong các mặt phẳng xz và xy :

$$N = -A_x = -200 \text{ kG}; M_{xo} = M_{Ax} = 144 \text{ kGm.}$$

$$M_y = M_{Ay} - A_z x; M_{yx=0} = M_{Ay} = 132 \text{ kGm.}$$

$$N_{yx=l_4} = M_{Ay} - A_z l_4 = 132 - 240 \cdot 0,8 = -60 \text{ kGm.}$$

$$M_z = M_{Az} + A_y x; M_{zx=0} = M_{Az} = 80 \text{ kGm.}$$

$$M_{zx=l_4} = M_{Az} + A_y l_4 = 80 + 100 \cdot 0,8 = 160 \text{ kGm.}$$

3. Vẽ biểu đồ N, M_{xo}, M_x, M_y và M_z trên các đoạn.

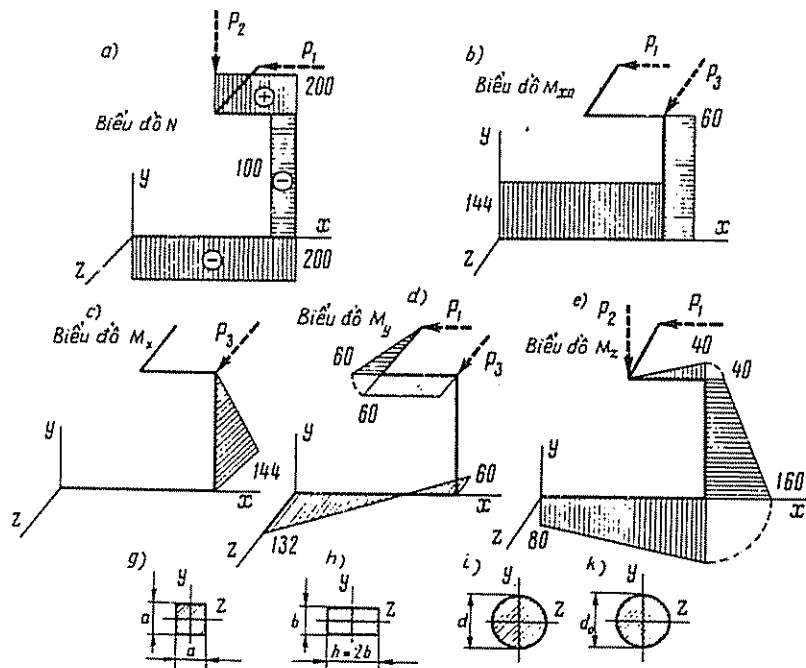
Với các giá trị của N, M_{xo}, M_x, M_y và M_z đã tính được trên các đoạn của hệ, trên hình 132, a, b, c, d, e vẽ biểu đồ theo các giá trị đó.

4. Chọn mặt cắt ngang ở mỗi đoạn.

Đoạn 1. Mặt cắt nguy hiểm ở tại D (hình 132g, và hình 130), $M_y = 60 \text{ kGm}$.

Tính theo uốn ngang phẳng ta chọn được mặt cắt:

$$W_y = a^3/6 \geq M_y/[\sigma]; a = \sqrt[3]{6M_y/[\sigma]} = \sqrt[3]{6 \cdot 6 \cdot 10^3/10^3} \approx 3,3 \text{ cm}$$



Hình 132

Đoạn 2. Mặt cắt nguy hiểm ở tại C (hình 132, h và hình 130). $N = 200\text{kG}$
 $M_y = 60\text{kGm}$; $M_z = 40\text{kGm}$.

Tính theo uốn xiên ta chọn được mặt cắt:

$$W_y = bh^2/6 = h^3/12; W_z = hb^2/6 = h^3/24; c = W_y/W_z = 2.$$

$$W_y \geq (M_y + cM_z)/[\sigma]$$

$$h^3/12 \geq (6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 4 \cdot 10^3)/10^3 = 14; h \geq \sqrt[3]{12 \cdot 14} \approx 5,52\text{cm}.$$

Lấy $h = 5,6\text{cm}$, $b = h/2 = 2,8\text{cm}$, ta kiểm tra mặt cắt có xét cả lực dọc:

$$F = bh = 2,8 \cdot 5,6 \approx 15,7\text{cm}^2.$$

$$W_y = h^3/12 \approx 14,6\text{cm}^3, W_z = h^3/24 \approx 7,3\text{cm}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{200}{15,7} + \frac{6 \cdot 10^3}{14,6} + \frac{4 \cdot 10^3}{7,3} = 972 \text{ kG/cm}^2$$

Ứng suất thừa ra:

$$\frac{[\sigma] - \sigma_{\max}}{[\sigma]} 100 = \frac{28 \cdot 100}{10^3} = 2,8\%$$

Đoạn 3. Mặt cắt nguy hiểm ở tại B (hình 132i và hình 130). $N = 100\text{kG}$;
 $M_{xo} = 60\text{kGm}$; $M_x = 144\text{kGm}$; $M_z = 160\text{kGm}$.

Tính xoắn và uốn đồng thời ta sẽ chọn được mặt cắt. Momen uốn tương đương tính theo lý thuyết độ bền thứ ba

$$M_{tdIII} = \sqrt{M_{x_0}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 144^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kG m};$$

$$W \approx 0,1d^3 \geq \frac{M_{tdIII}}{[\sigma]} = \frac{223 \cdot 10^2}{10^3}; d \geq \sqrt[3]{223} \approx 6,1 \text{ cm}$$

Ta kiểm tra mặt cắt có xét cả lực dọc:

$$W = \pi d^3/32 = \pi 6,1^3/32 \approx 22,3 \text{ cm}^3, W_\rho = 2W = 44,6 \text{ cm}^3.$$

$$F = \pi d^2/4 = \pi 6,1^2/4 \approx 29,2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Momen uốn } M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 160^2} \approx 215 \text{ kG m.}$$

$$\text{Ứng suất pháp } \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{100}{29,2} + \frac{215 \cdot 10^2}{22,3} \approx 967 \text{ kG/cm}^2$$

$$\text{Ứng suất tiếp } \tau = M_{x_0}/W_\rho = 60 \cdot 10^2/44,6 \approx 135 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất tương đương tính theo lý thuyết độ bền thứ ba:

$$\sigma_{tdIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{967^2 + 4 \cdot 135^2} \approx 1004 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất vượt quá 0,4%, điều này hoàn toàn có thể cho phép.

Đoạn 4. Mặt cắt nguy hiểm ở tại điểm B (hình 132, k và hình 130)
 $N = 200 \text{ kG}; M_{x_0} = 144 \text{ kGm}, M_y = 60 \text{ kGm}; M_z = 160 \text{ kGm}.$

Tính xoắn và uốn đồng thời, ta chọn được đường kính mặt cắt. Momen tương đương tính theo lý thuyết độ bền thứ ba:

$$M_{tdIII} = \sqrt{M_{x_0}^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{144^2 + 60^2 + 160^2} \approx 223 \text{ kG m.}$$

Dựa vào kết quả tính đoạn 3, ta lấy $d_0 = 6,1 \text{ cm}$ và kiểm tra mặt cắt có xét cả lực dọc:

$$W = 22,3 \text{ cm}^3; W_\rho = 44,6 \text{ cm}^3; F = 29,2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Momen uốn } M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{60^2 + 160^2} \approx 171 \text{ kGm.}$$

$$\text{Ứng suất pháp } \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W} = \frac{200}{29,2} + \frac{171 \cdot 10^2}{22,3} \approx 774 \text{ kG/cm}^2.$$

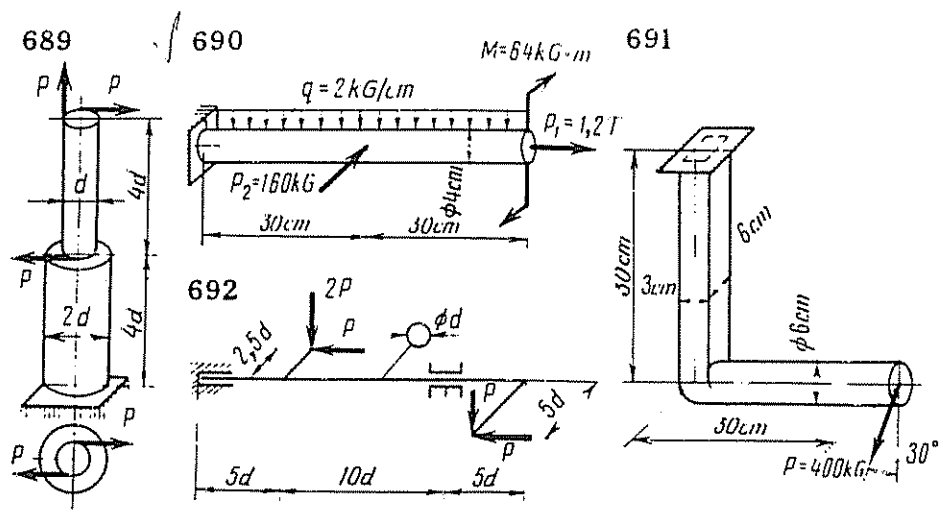
$$\text{Ứng suất tiếp } \tau = M_{x_0}/W_\rho = 144 \cdot 10^2/44,6 \approx 323 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất tương đương theo lý thuyết độ bền thứ ba:

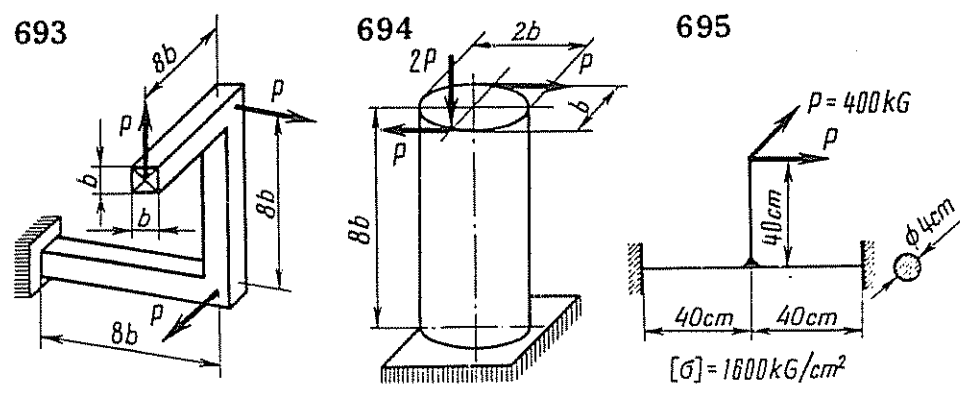
$$\sigma_{tdIII} = \sqrt{774^2 + 4 \cdot 323^2} \approx 1008 \text{ kG/cm}^2.$$

Vì ứng suất vượt chưa quá 1%, do đó có thể lấy $d_0 = 6,1 \text{ cm}.$

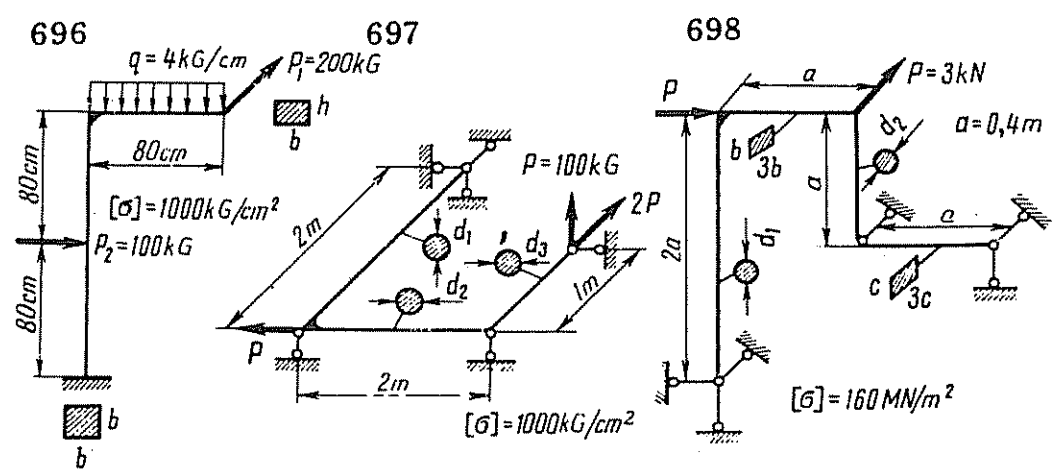
Bài tập 689 — 692. Tính ứng suất tương đương theo lý thuyết độ bền thứ ba:



Bài tập 693 — 695. Kiểm tra độ bền của thanh theo lý thuyết độ bền thứ ba.

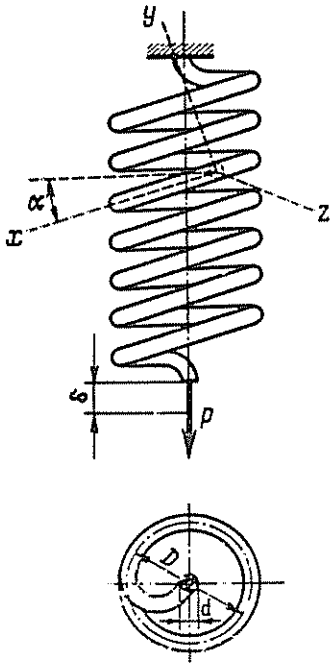


Bài tập 696 — 698. Dùng lý thuyết độ bền thứ ba, tính kích thước cần thiết của mặt cắt ngang thanh.



§ 33. Lò xo xoắn hình trụ chịu kéo hoặc nén

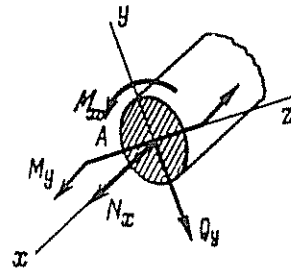
Một thanh hình lăng trụ được quấn thành hình trụ tròn gọi là lò xo xoắn hình trụ (hình 133). Ta xét một lò xo xoắn từ thanh mặt cắt tròn đường kính d .



Hình 133

Đường kính trung bình của hình trụ là D , số vòng quấn n . Bước của lò xo xác định bằng góc nghiêng α giữa mặt phẳng sợi lò xo xz với mặt phẳng nằm ngang. Trục x tiếp xúc với đường trung bình của lò xo và trục y vuông góc với mặt phẳng xz .

Nếu hai đầu thanh được đưa về tâm của vòng lò xo và chịu lực



Hình 134

kéo P dọc theo trục lò xo thì trên mặt cắt ngang thanh các nội lực gồm có lực kéo không đổi $N_x = P \sin \alpha$, lực cắt ngang $Q_y = P \cos \alpha$, momen xoắn $M_{x_0} = PR \cos \alpha$ và momen uốn $M_y = PR \sin \alpha$ (hình 134).

Điểm nguy hiểm trên mặt cắt là điểm A ở phía trong của lò xo. Tại điểm này:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{W} = \frac{16PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4D}\right) \sin \alpha \quad (155)$$

và

$$\tau = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_{x_0}}{W_\rho} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \cos \alpha \quad (156)$$

Theo lý thuyết độ bền thứ ba, điều kiện tính toán có dạng sau đây:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{16PD}{\pi d^3} \sqrt{\left(1 + \frac{d}{4D}\right)^2 \sin^2 \alpha + \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2 \cos^2 \alpha} \leq [\sigma] \quad (157)$$

Nếu bước lò xo bé ($\alpha < 14^\circ$) và $D/d > 10$, thì có thể chỉ tính xoắn theo công thức:

$$8PD/\pi d^3 \leq [\tau] \quad (158)$$

Khi sợi lò xo có độ cong lớn ($D/d < 10$) thì ảnh hưởng của độ cong và của các yếu tố lực được xét bằng hệ số:

$$K = \frac{(D/d) - 0,25}{(D/d) - 1} + \frac{0,615}{D/d} \quad (159)$$

hệ số này được đưa vào điều kiện độ bền:

$$K \cdot 8PD/\pi d^3 \leq [\tau] \quad (160)$$

Biểu thức tổng quát để tính chuyển vị dọc của đầu tự do của lò xo có dạng sau đây:

$$\delta = \frac{8PD^3n}{d^4 \cos \alpha} \left[2 \left(1 + \frac{d^2}{4D^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{E} + \left(1 + \frac{d^2}{2D^2} \right) \frac{\cos^2 \alpha}{G} \right] \quad (161)$$

trong đó E và G là các modun đàn hồi của vật liệu làm lò xo.

Đối với lò xo bước ngắn, chuyển vị có thể chỉ tính theo biểu dạng xoắn cũng đủ bảo đảm chính xác

$$\delta = 8PD^3n/Gd^4 \quad (162)$$

Thí dụ 68. Cho $D = 80\text{mm}$, $d = 20\text{mm}$; $\alpha = 15^\circ$; $n = 10$ vòng, $E = 2 \cdot 10^6 \text{kG/cm}^2$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{kG/cm}^2$, $[\sigma] = 6000 \text{kG/cm}^2$ (hình 135).

Tính P và δ .

Bài giải. Vì $\alpha > 14^\circ$, do đó ta dùng công thức (157), và được giá trị của lực cho phép

$$P \leq \frac{\pi 2^3 \cdot 6000}{16 \cdot 8\sqrt{[1 + (2/4 \cdot 8)]^2 0,067 + [1 + (2/2 \cdot 8)]^2 0,933}} \approx 1050 \text{kG}.$$

Chuyển vị dọc δ của đầu tự do tính theo công thức (161). Thay vào công thức này các giá trị bằng số, ta được:

$$\delta = \frac{8 \cdot 1050 \cdot 8^3 \cdot 10}{24 \cdot 0,966} \left[2 \left(1 + \frac{2^2}{4 \cdot 8^2} \right) \frac{0,067}{2 \cdot 10^6} + \left(1 + \frac{2^2}{2 \cdot 8^2} \right) \frac{0,933}{8 \cdot 10^5} \right] \approx 3,54 \text{cm}$$

Nếu tính theo công thức gần đúng (162) thì:

$$\delta = (8 \cdot 1050 \cdot 8^3 \cdot 10) / (8 \cdot 10^5 \cdot 24) \approx 3,36 \text{cm}.$$

Giá trị này bé hơn giá trị đúng khoảng 5%.

Thí dụ 69. Hai lò xo xoắn hình trụ bước ngắn đặt đồng trục với nhau (hình 136). Lực dọc trục $P = 430 \text{kG}$ nén hai lò xo. Lò xo 1 ở ngoài có $D_1 = 160 \text{mm}$, $d_1 = 16 \text{mm}$, $n_1 = 8$ vòng. Lò xo 2 ở trong có $D_2 = 80 \text{mm}$, $d_2 = 12 \text{mm}$, $n_2 = 12$ vòng. Modun đàn hồi trượt của vật liệu lò xo $G = 8 \cdot 10^5 \text{kG/cm}^2$.

Tính độ lún δ của lò xo và các ứng suất tiếp lớn nhất τ_{\max_1} , τ_{\max_2} .

Bài giải. Nếu đặt các lực tác dụng vào lò xo là P_1 và P_2 , thì ta có điều kiện cân bằng $P_1 + P_2 = P$. Điều kiện chấp chuyển vị là: độ lún δ_1 của lò xo thứ nhất bằng độ lún δ_2 của lò xo thứ hai, tức là:

$$\delta_1 = \delta_2.$$

Vì lò xo bước ngắn, để tính độ lún ta dùng công thức (162). Do đó đẳng thức trên có dạng:

$$\frac{8P_1 D_1^3 n_1}{G d_1^4} = \frac{8P_2 D_2^3 n_2}{G d_2^4}$$

Từ đó rút ra:

$$P_2 = \frac{D_1^3 n_1 d_2^4}{D_2^3 n_2 d_1^4} P_1 = \frac{16^3 \cdot 8 \cdot 1,2^4}{8^3 \cdot 12 \cdot 1,6^4} P_1 = \frac{27}{16} P_1$$

Do đó,

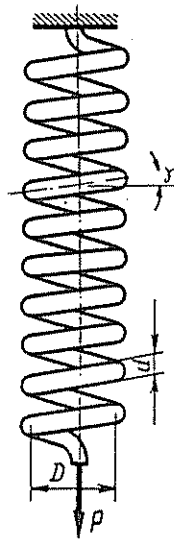
$$P_1 = \frac{16}{43} P = 160 \text{ kG}; P_2 = \frac{27}{43} P = 270 \text{ kG}$$

Độ lún của các lò xo

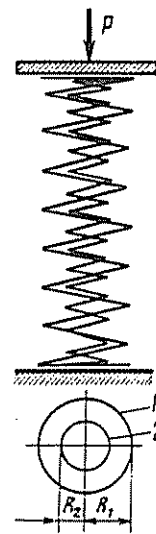
$$\delta = 8P_1 D_1^3 n_1 / Gd_1^4 = 8P_2 D_2^3 n_2 / Gd_2^4 = (8 \cdot 160 \cdot 16^3 \cdot 8) / (8 \cdot 10^5 \cdot 1,6^4) = 8 \text{ cm.}$$

Vi lò xo ngoài bước ngắn và có $D_1/d_1 = 10$, do đó theo công thức (158) ta có:

$$\tau_{\max 1} = \frac{8 \cdot 160 \cdot 16}{\pi \cdot 1,6^3} \approx 1590 \text{ kG/cm}^2.$$



Hình 135



Hình 136

Lò xo trong bước ngắn, nhưng có $D_2/d_2 = 8/1,2 \approx 6,67 < 10$ do đó $\tau_{\max 2}$ tính theo công thức (160).

$$\text{Với hệ số hiệu chỉnh } K = \frac{6,67 - 0,25}{6,67 - 1} + \frac{0,615}{6,67} \approx 1,224$$

ta được:

$$\tau_{\max 2} = 1,224 \frac{8 \cdot 270 \cdot 8}{\pi \cdot 1,2^3} \approx 3900 \text{ kG/cm}^2$$

Bài tập 699. Một lò xo được nén cho đến khi các vòng sát vào nhau. Tính giá trị lực P cần thiết và ứng suất phát sinh τ_{\max} , biết $D = 50 \text{ mm}$, bước của các vòng $t = 15 \text{ mm}$, $n = 10$, cạnh của mặt cắt sợi lò xo hình vuông $a = 5 \text{ mm}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$.

Bài tập 700. Hai lò xo được nén bằng cùng một lực P (lò xo thứ nhất mặt cắt tròn, lò xo thứ hai mặt cắt hình vuông cạnh bằng a).

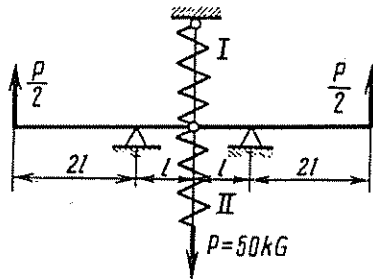
Tính tỉ số $\tau_{\max 1}/\tau_{\max 2}$ và δ_1/δ_2 , biết rằng:

$$D_1 = D_2; n_1 = n_2; \pi d_1^2/4 = a^2; G_1 = G_2.$$

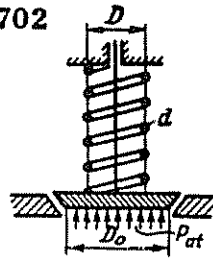
Bài tập 701. Cho $D_1 = D_2 = 200\text{mm}$, $d_1 = 2d_2 = 20\text{mm}$, $n_1 = 8$; $n_2 = 5$; $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

Tính $\max \tau_1$, $\max \tau_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

701



702

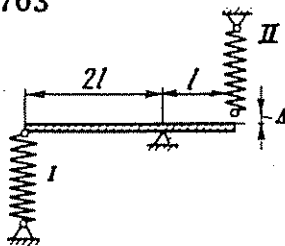


Bài tập 702. Một van an toàn phải giữ áp suất hơi nước $p = 5\text{atm}$. Tính τ_{\max} , n và δ_0 của lò xo, biết $D_0 = 80\text{mm}$, $D = 60\text{mm}$, $d = 10\text{mm}$, $l = 18\text{mm}$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$; độ lún của lò xo để cho các vòng chạm nhau là 40mm . Giả thiết khi van mở cao nhất (áp suất tăng trong quá trình van bị mở) phải còn 20mm dự trữ.

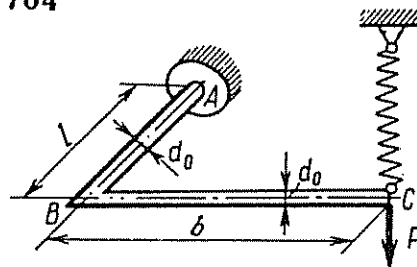
Bài tập 703. Tính ứng suất lắp ráp ở lò xo, biết $\Delta = 5\text{mm}$, $D_1 = 60\text{mm}$; $d_1 = 10\text{mm}$; $n_1 = 10$; $D_2 = 50\text{mm}$; $d_2 = 8\text{mm}$; $n_2 = 8$; $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

Bài tập 704. Tính lực cho phép P đặt vào hệ gồm thanh ABC ($l = 500\text{mm}$, $b = 750\text{mm}$, $d = 30\text{mm}$; $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$) và lò xo ($D = 50\text{mm}$; $d = 10\text{mm}$; $n = 10$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; $[\tau] = 4000 \text{ kG/cm}^2$) theo thuyết bền thứ ba.

703



704

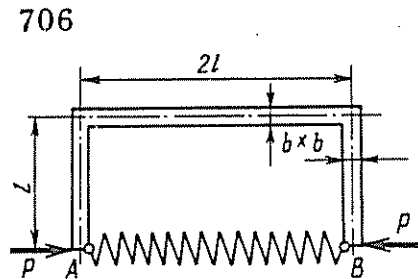
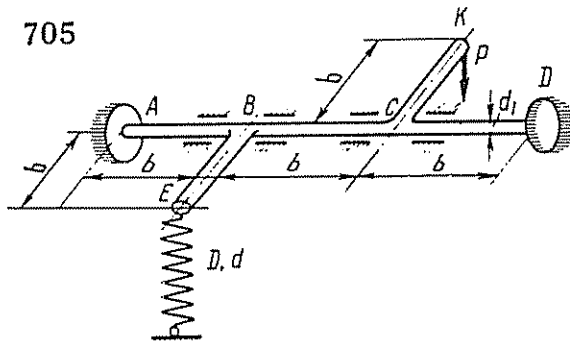


Bài tập 705. Cho $D = 50\text{mm}$, $d = 10\text{mm}$, $n = 2$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$; $d_1 = 50\text{mm}$; $b = 500\text{mm}$; $P = 100\text{kG}$.

Thanh BE cứng. Tính xem lò xo đã làm giảm ứng suất ở trục AD được bao nhiêu phần trăm?

Bài tập 706. Cho $P = 1,6\text{kN}$, $D = 60\text{mm}$, $d = 12\text{mm}$, $n = 15$;
 $G = 8 \cdot 10^4\text{MN/m}^2$; $l = 500\text{mm}$; $b = 50\text{mm}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{MN/m}^2$.

Tính lực cần nén trước lò xo để sau khi đặt lò xo vào khung, ứng suất của khung giảm đi hai lần.



Bài tập 707. Cho $P = 105\text{kG}$; $D = 100\text{mm}$; $t = 182\text{mm}$; $[\sigma] = 4800\text{kG/cm}^2$;
 $E = 2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$; $G = 8 \cdot 10^5\text{kG/cm}^2$; độ lún cho phép
 $[\delta] = 10\text{cm}$.

Tính d và n . Sử dụng thuyết bền thứ tư.

Bài tập 708. Cho $D = 100\text{mm}$; $a = 10\text{cm}$, $t = 182\text{mm}$
 $[\sigma] = 4800\text{kG/cm}^2$ (a là cạnh hình vuông mặt cắt lò xo).

Tính P bằng cách sử dụng thuyết bền thứ ba:

Bài tập 709. Tính lực dọc P trong các lò xo sau khi lắp ráp biết rằng $\Delta = 60\text{mm}$, lò xo thứ nhất có bước dài,
 $D_1 = 100\text{mm}$; $d_1 = 10\text{mm}$; $n_1 = 4$; $t = 182\text{mm}$; lò xo thứ hai bước ngắn
 $D_2 = 80\text{mm}$; $d_2 = 8\text{mm}$; $n = 6$; $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$; $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^5\text{kG/cm}^2$

709



X — UỐN DỌC

§ 34. Lực tới hạn và ứng suất tới hạn

Khi nén dọc trục thanh lăng trụ trong giới hạn đàn hồi, trị số của lực tới hạn được xác định theo công thức Ole:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l_d^2} \quad (163)$$

trong đó E — môđun đàn hồi dọc của vật liệu thanh;

I — momen quán tính nhỏ nhất của diện tích nguyên của mặt cắt ngang thanh;

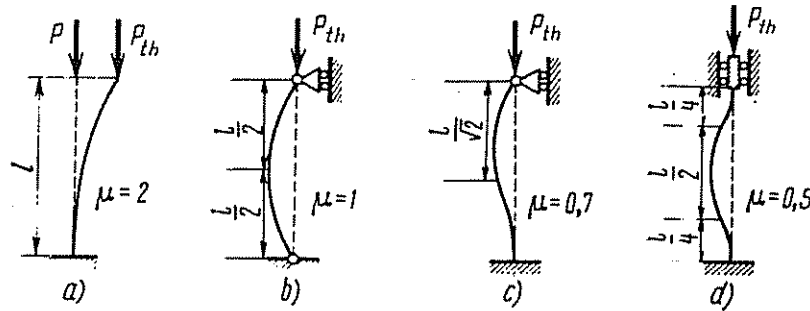
$l_d = \mu l$ — chiều dài tính đổi (tự do) của thanh (với chiều dài đó thanh có liên kết khớp ở hai đầu ổn định tương đương với thanh có các liên kết đã cho);

l — chiều dài thực của thanh ;

μ — hệ số chiều dài, phụ thuộc vào phương pháp liên kết và cách đặt tải của thanh.

Trên hình 137 giới thiệu các trường hợp đơn giản của thanh chịu nén và giá trị của hệ số μ tương ứng.

Ứng suất tới hạn được xác định theo công thức.



Hình 137

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (164)$$

trong đó $\lambda = \frac{l_{td}}{i}$ — độ mảnh của thanh (đại lượng đặc trưng cho xu hướng uốn dọc của thanh).

$i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ — bán kính quán tính nhỏ nhất của diện tích F của mặt cắt ngang thanh.

Vì ứng suất tới hạn σ_{th} không được vượt quá giới hạn tỷ lệ σ_{tl} của vật liệu thanh, nên có thể áp dụng công thức (163) và (164) khi độ mảnh λ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}} \quad (165)$$

Thí dụ, với thép CT.3 $\lambda \geq 100$; với thép CT.5 $\lambda \geq 85$ với gang $\lambda \geq 80$; với gỗ $\lambda \geq 70$ v.v...

Nếu uốn dọc chỉ xuất hiện khi thanh làm việc ngoài giới hạn tỷ lệ của vật liệu thì ứng suất tới hạn tính theo công thức thực nghiệm của Iaxinxky:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda + c\lambda^2; \quad (166)$$

trong đó a, b, c — hệ số thí nghiệm phụ thuộc vào vật liệu và có thứ nguyên của ứng suất.

Với thép CT.3: $a = 3100 \text{ kG/cm}^2$; $b = 11,4 \text{ kG/cm}^2$; $c = 0$;

Với thép CT.5: $a = 4640 \text{ kG/cm}^2$; $b = 36,17 \text{ kG/cm}^2$; $c = 0$;

Với gang : $a = 7760 \text{ kG/cm}^2$; $b = 120 \text{ kG/cm}^2$; $c = 0,53 \text{ kG/cm}^2$;

Với gỗ : $a = 293 \text{ kG/cm}^2$; $b = 1,94 \text{ kG/cm}^2$; $c = 0$.

Có thể áp dụng công thức (166) nếu σ_{th} nhỏ hơn σ_{ch} cho vật liệu dẻo và nhỏ hơn σ_b cho vật liệu giòn.

Thí dụ 70. Cho vật liệu thanh là đura;

$$E = 0,71 \cdot 10^5 \text{MN/m}^2; \sigma_{tl} = 180 \text{MN/m}^2; l = 1,2 \text{m};$$

$$D = 4 \text{cm}; d = 3 \text{cm (hình 138)}.$$

Xác định P_{th}, σ_{th} .

Bài giải. Mômen quán tính của mặt cắt hình vành khăn

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (256 - 81) = \\ = \frac{175}{64} \pi \text{cm}^4.$$

Diện tích mặt cắt ngang thanh

$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (16 - 9) = \frac{7\pi}{4} \text{cm}^2.$$

Bán kính quán tính của mặt cắt

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{175\pi \cdot 4}{64 \cdot 7\pi}} = \frac{5}{4} \text{cm}.$$

Với cách liên kết ở hai đầu thanh như đã cho, hệ số chiều dài $\mu = 0,7$.

Vi độ mảnh của thanh

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 120 \cdot 4}{5} = 67,2 \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}} \approx 3,14 \sqrt{\frac{0,71 \cdot 10^5}{180}} \approx 62,$$

nên có thể xác định lực tới hạn theo công thức Ole:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0,71 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 175\pi \cdot 10^{-8}}{64(0,7 \cdot 1,2)^2} = 85,3 \cdot 10^3 \text{N} = 85,3 \text{kN}.$$

Ứng suất tới hạn

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{85,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^4}{7\pi} = 155 \cdot 10^6 \text{N/m}^2 = 155 \text{MN/m}^2$$

Thí dụ 71. Cho thanh gang, $l = 1,6 \text{m}$, $a = 6 \text{cm}$, $t = 1 \text{cm}$ (hình 139).

Xác định P_{th}, σ_{th} .

Bài giải. Momen quán tính của mặt cắt chữ thập

$$I = \frac{ta^3}{12} + \frac{(a-t)t^3}{12} = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + \frac{5 \cdot 1}{12} = \frac{221}{12} \text{cm}^4.$$

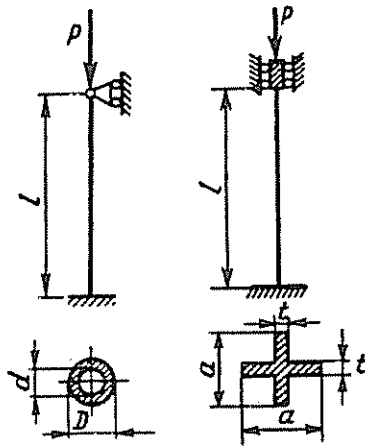
Diện tích mặt cắt ngang thanh

$$F = at + (a-t)t = 6 + 5 = 11 \text{cm}^2.$$

Bán kính quán tính của mặt cắt

$$i = \sqrt{\frac{221}{12 \cdot 11}} \approx 1,294 \text{cm}.$$

Với cách liên kết ở hai đầu thanh như đã cho $\mu = 0,5$.



Hình 138

Hình 139

Vì độ mảnh của thanh $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{160}{2 \cdot 1,294} \approx 61,8 < 80$ nên có thể tính

ứng suất tới hạn theo công thức thực nghiệm

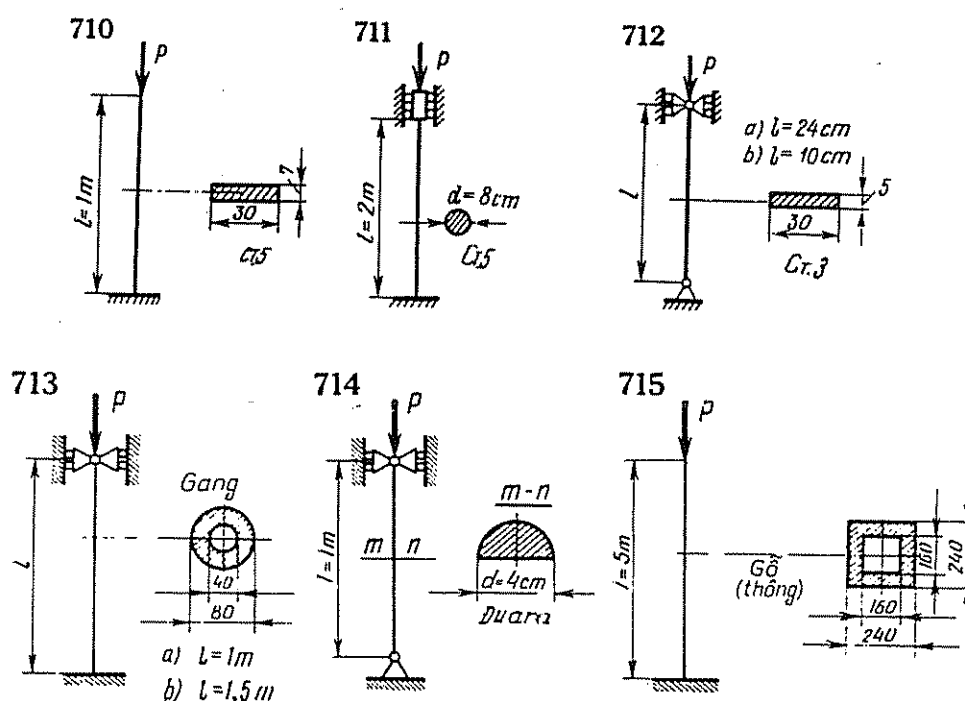
$$\sigma_{th} = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2 = 7760 - 120 \cdot 61,8 + 0,53 \cdot 61,8^2 \approx 2370 \text{ kg/cm}^2.$$

Lực tới hạn

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 2370 \cdot 11 = 26100 \text{ kg}.$$

Bài tập 710 — 715. Xác định trị số lực tới hạn P_{th} và ứng suất tới hạn σ_{th} cho các thanh nén.

Giá trị của modun đàn hồi dọc E và giới hạn tỷ lệ σ_{tl} của các loại vật liệu lấy tròn theo bảng sau



Vật liệu	Thép CT. 3	Thép CT. 5	Gang	Đura	Gỗ (thông)
$E(\text{kg/cm}^2)$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^6$	$0,7 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^5$
$\sigma_{tl}(\text{kg/cm}^2)$	2000	2400	1800	1700	200

§ 35. Tính ổn định thanh chịu nén

Khi tính toán thanh nén, ngoài điều kiện bền còn cần phải đảm bảo cả điều kiện ổn định.

$$P \leq \frac{P_{th}}{[n_{\text{ổđ}}]} \quad (167)$$

hay
$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_{\text{đd}}] \quad (167')$$

trong đó P_{th} — lực tới hạn phụ thuộc vào độ mảnh và được xác định theo công thức Ole (163) hay công thức Iaxinxky (166), tức là theo biểu thức $P_{\text{th}} = \sigma_{\text{th}} F = (a - b\lambda + c\lambda^2)F$:

$[\sigma_{\text{đd}}]$ — ứng suất cho phép về ổn định;

$[n_{\text{đd}}]$ — hệ số an toàn cho phép về ổn định. Hệ số này luôn luôn lớn hơn hệ số an toàn cơ bản về độ bền một chút, vì khi tính toán về ổn định của thanh nén đúng tâm có xét thêm đến tình trạng không thể tránh được trong thực tế (sự lệch tâm của lực nén, độ cong ban đầu và vật liệu không đồng nhất của thanh) góp phần gây ra uốn dọc.

Độ cong và độ lệch tâm ban đầu, nếu lớn thì được tính riêng biệt, nếu nhỏ không tính được thì tùy thuộc vào độ mảnh của thanh mà dùng đến hệ số an toàn bổ sung, tức là làm tăng hệ số an toàn về ổn định.

Đối với thép lấy $[n_{\text{đd}}] = 1,8 \div 3$, với gang $[n_{\text{đd}}] = 5 \div 5,5$, với gỗ $[n_{\text{đd}}] = 2,8 \div 3,2$.

Tỷ số $\frac{[\sigma_{\text{đd}}]}{[\sigma_n]} = \varphi$ được gọi là *hệ số giảm ứng suất cho phép khi uốn dọc* hay *hệ số uốn dọc*.

Sự phụ thuộc của φ vào λ đối với các loại vật liệu khác nhau cho dưới dạng đường cong tiêu chuẩn hoặc dưới dạng bảng (phụ lục 3).

Tính toán về ổn định có thể tiến hành theo hai phương án (hai cách):

1. Khi đã cho trước hệ số an toàn về ổn định $[n_{\text{đd}}]$
2. Sử dụng bảng hệ số giảm $\varphi(\lambda)$.

Cách thứ nhất thiếu chính xác, vì phụ thuộc vào độ mảnh của thanh nên hệ số an toàn về ổn định không thể cho đúng trước được. Cách này sử dụng khi tính toán kiểm tra sơ bộ hay khi thiếu bảng và đồ thị $\varphi(\lambda)$ (ví dụ trong trường hợp vật liệu mới, hoặc thanh có độ mảnh vượt ra ngoài đồ thị hay bảng).

Cách thứ hai được sử dụng ở khắp mọi chỗ, là phương pháp cơ bản để tính toán thanh về mặt ổn định. Trong trường hợp này tính toán xuất phát từ phương trình

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma_n], \quad (167'')$$

và chỉ sử dụng bảng hệ số φ , không cần áp dụng cả công thức Ole lẫn công thức thực nghiệm Iaxinxky.

Xác định lực cho phép

Nếu đối với thanh đang xét đã biết chiều dài L , phương pháp liên kết các đầu (μ), hình dạng, kích thước mặt cắt ngang (F , I , i) và vật liệu (E , $[\sigma_n]$) thì việc xác định lực nén cho phép $[P]$ được tiến hành theo một trong các phương pháp sau đây.

Phương pháp thứ nhất (khi đã cho $[n_{\delta d}]$): 1. Xác định độ mảnh của thanh $\lambda = \frac{\mu l}{i}$; 2. Xác định lực tới hạn $P_{th}(P_{th} = \sigma_{th}F)$ theo công thức O'le (163), hay công thức Iaxinxky (166), nếu điều kiện (165) không được thỏa mãn; 3. Tính lực cho phép theo công thức (167) $[P_{\delta d}] = \frac{P_{th}}{[n_{\delta d}]}$.

Nếu không cho $[n_{\delta d}]$ thì có thể chọn gần đúng tùy theo vật liệu thanh, công dụng của và trị số của nó độ mảnh λ .

Phương pháp thứ hai (có bảng $\varphi(\lambda)$): 1. Xác định $\lambda = \frac{\mu l}{i}$; 2. Theo đường cong tiêu chuẩn hay bảng xác $\varphi(\lambda)$ định hệ số uốn dọc φ ; 3. Tính lực nén cho phép $[P] = [\sigma_{\delta d}]F = \varphi[\sigma_n]F$.

Kiểm tra ổn định của thanh

Tiến hành theo hai cách tương tự như trên (tức là tương tự như xác định lực cho phép) xuất phát từ các phương trình (167') và (167'').

Chọn mặt cắt ngang

Nếu đối với thanh tính toán đã cho trước lực nén P , chiều dài l ; phương pháp liên kết ở các đầu (μ), vật liệu ($E, [\sigma_n]$) và dạng mặt cắt thì điều kiện ổn định (167'') là không xác định vì thiếu kích thước mặt cắt để tìm λ và do vậy thiếu φ . Cũng không thể (khi cho hệ số an toàn $[n_{\delta d}]$) sử dụng được phương trình (167) vì không biết cần phải xác định P_{th} theo công thức (163) hay (166). Việc chọn mặt cắt tiến hành theo cách chọn thử và sau đó kiểm tra (bằng một trong ba cách).

Cách thứ nhất (với $[n_{\delta d}]$ đã cho) rất ít khi dùng vì thiếu chính xác do việc định trước giá trị của $[n_{\delta d}]$ không liên quan đến giá trị của λ (chưa biết), rất không đáng tin cậy. Trong trường hợp này tính toán được bắt đầu từ việc giả định phù hợp với công thức O'le (163).

Trước hết tìm momen quán tính I , sau đó đến F, i, λ . Nếu λ lớn hơn λ_0 thì tính toán đã hoàn thành, còn nếu nhỏ hơn λ_0 thì chuyển sang dùng công thức Iaxinxky (166).

Cách thứ hai có sử dụng bảng và đồ thị $\varphi(\lambda)$, tiến hành theo trình tự như sau:

1. Cho hệ số $\varphi = 0,6 - 0,8$;
2. Tính $[\sigma_{\delta d}]$, $F = \frac{P}{[\sigma_{\delta d}]}$, chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu thép hình (nếu thanh làm bằng thép cán);
3. Tìm I, i và λ ;
4. Tính giá trị mới φ_1 . Nếu φ_1 khác nhiều với φ thì trong lần thử thứ hai lấy $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_1)$ và tính lại;

Người ta coi mặt cắt chọn là thỏa mãn nếu σ và $[\sigma_{\delta d}]$ khác nhau không lớn hơn 5%.

Đối với thép định hình sự thiếu ứng suất có thể lớn hơn 5%.

Cách thứ ba (hỗn hợp). Tính thử lần đầu ta quy ước tính theo công thức Oie và tự cho hệ số $n_{\delta d}$, còn lần chọn sau cùng ta dựa trên cơ sở điều kiện ổn định (167").

Theo cách tính này trình tự tính toán như sau:

1. Cho hệ số $n_{\delta d}$ tương ứng với vật liệu thanh (với thép $n_{\delta d} \approx 2$, với gang $n_{\delta d} \approx 5$, với gỗ $n_{\delta d} \approx 3$);
2. Theo công thức (163) tìm momen quán tính nhỏ nhất của mặt cắt ngang;
3. Chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu mặt cắt (với thép định hình), xác định F, i, λ ;
4. Xác định hệ số φ và $[\sigma_{\delta d}]$;
5. Thành lập điều kiện ổn định (167").
6. Nếu điều kiện (167") không thỏa mãn thì tiếp tục chọn bằng cách hoặc là thay đổi hệ số φ (xem cách tính thứ hai), hoặc là thay đổi kích thước mặt cắt (số hiệu mặt cắt đối với thép cán).

Khi tính toán thực tế về ổn định không cần phải lấy thanh có độ mảnh vượt quá độ mảnh lớn nhất có trong quy phạm đối với hệ số φ . Song nếu cần phải xác định lực cho phép hay chọn mặt cắt với độ mảnh của thanh lớn hơn độ mảnh có trong quy phạm thì khi tính toán cần sử dụng công thức Oie, đồng thời lựa chọn hệ số an toàn về ổn định.

Thi dụ 72. Cho vật liệu thanh là gỗ thông (dọc thớ), $[\sigma] = 100 \text{ kG/cm}^2$, $l = 2 \text{ m}$, $\mu = 1$, $d = 10 \text{ cm}$ (hình 140a).

Xác định lực P .

Bài giải. Với mặt cắt tròn

$$i = \frac{d}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ cm.}$$

Độ mảnh của thanh

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{200}{2,5} = 80.$$

Với gỗ khi $\lambda = 80$, theo bảng có $\varphi = 0,48$

Vì $[\sigma_{\delta d}] = \varphi[\sigma] = 0,48 \cdot 100 = 48 \text{ kG/cm}^2$ nên lực

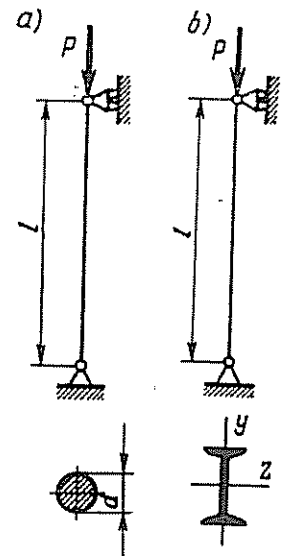
cho phép

$$P = [\sigma_{\delta d}] F = 48 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 3770 \text{ kG.}$$

Ta tính xem cột sẽ làm việc với hệ số an toàn nào.

Vì $\lambda = 80 > 70$, nên theo công thức (164)

$$\sigma_{th} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^5}{80^2} \approx 156 \text{ kG/cm}^2 \text{ và } n_{\delta d} = \frac{\sigma_{th}}{[\sigma_{\delta d}]} = \frac{156}{48} = 3,25$$



Hình 140

Thí dụ 73. Cho cột làm bằng thép chữ I, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, $P = 40\text{T}$, $l = 2\text{m}$ (hình 140b).

Xác định số hiệu thép.

Bài giải. Cho $\varphi = 0,6$

Khi đó $[\sigma_{\delta\delta}] = \varphi[\sigma] = 0,6 \cdot 1600 = 960 \text{ kG/cm}^2$

và
$$F = \frac{P}{[\sigma_{\delta\delta}]} = \frac{40 \cdot 10^3}{960} \approx 41,7 \text{ cm}^2.$$

Với loại thép chữ I số 27 gần nhất có $F = 40,2 \text{ cm}^2$ và $i_y = 2,54 \text{ cm}$.

Độ mảnh của cột
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 200}{2,54} = 78,7.$$

Theo bảng, đối với thép CT3: $\lambda = 70$; $\varphi = 0,81$; $\lambda = 80$; $\varphi = 0,75$, vì thế đối với $\lambda = 78,7$ thì $\varphi_1 = 0,75 + 0,006 \cdot 1,3 = 0,758$.

Ta lấy

$$\varphi_2 = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} = \frac{0,6 + 0,758}{2} = 0,679.$$

Khi đó

$$[\sigma_{\delta\delta}] = 0,679 \cdot 1600 = 1086 \text{ kG/cm}^2 \text{ và } F = \frac{40 \cdot 10^3}{1086} \approx 36,8 \text{ cm}^2.$$

Với loại thép chữ I số 24 gần nhất có $F = 34,8 \text{ cm}^2$ và $i_y = 2,37 \text{ cm}$.

Độ mảnh của cột
$$\lambda = \frac{200}{2,37} \approx 84,5.$$

Theo bảng đối với thép CT3: $\lambda = 80$, $\varphi = 0,75$, $\lambda = 90$; $\varphi = 0,69$. Với $\lambda = 84,5$ thì $\varphi_3 = 0,69 + 0,006 \cdot 5,5 = 0,723$.

Ứng suất cho phép

$$[\sigma_{\delta\delta}] = 0,723 \cdot 1600 = 1157 \text{ kG/cm}^2$$

Ứng suất thực tế trong cột

$$\sigma = \frac{40 \cdot 10^3}{34,8} \approx 1150 \text{ kG/cm}^2$$

Ứng suất ít hơn:

$$\frac{\sigma - [\sigma_{\delta\delta}]}{[\sigma_{\delta\delta}]} \cdot 100\% = \frac{7 \cdot 100}{1157} \approx 0,8\%$$

Hệ số an toàn về ổn định của cột:

Vì $\lambda = 84,5 < 100$ nên theo công thức (166)

$$\sigma_{\text{th}} = 3100 - 11,4 \cdot 84,5 = 2137 \text{ kG/cm}^2$$

$$n_{\delta\delta} = \frac{2137}{1150} \approx 1,86$$

Thí dụ 74. Cho cột ghép bằng 2 thép chữ U với bản nối bằng cách hàn, $P = 35\text{T}$, $l = 6\text{m}$, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$ (hình 141).

Hãy xác định số hiệu thép U, B và l_0 .

Bài giải. Khi tăng khoảng cách a giữa các thanh chữ U, momen quán tính I của mặt cắt cột đối với trục y vuông góc với mặt phẳng cột tăng lên. Còn momen quán tính I của mặt cắt cột đối với trục z không thay đổi và bằng $I_z = 2I_z'$, trong đó I_z' là momen quán tính của mặt cắt một nhánh của cột đối với trục trung tâm z' của thép chữ U, trục này trùng với trục z . Vì vậy cần phải lấy I_z làm momen quán tính nhỏ nhất của mặt cắt ngang cột.

Cho $n_{\text{đd}} = 2$. Từ công thức Ole

$$I_z = \frac{Pl^2 n_{\text{đd}}}{2\pi^2 E} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 36 \cdot 10^4 \cdot 2}{2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 630 \text{ cm}^4$$

Theo bảng thép cán có thép chữ U gần nhất số 14a

$$I_z = 545 \text{ cm}^4, i_z = 5,66 \text{ cm}, F = 17 \text{ cm}^2$$

Độ mảnh của cột

$$\lambda = \frac{l}{i_z} = \frac{600}{5,66} = 106$$

Theo bảng với thép CT.3: $\lambda = 100, \varphi = 0,6, \lambda = 110, \varphi = 0,52$.

Với $\lambda = 106$

$$\varphi = 0,52 + 0,008 \cdot 4 = 0,552$$

Ứng suất cho phép

$$[\sigma_{\text{đd}}] = 0,552 \cdot 1600 = 883 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất làm việc

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 17} \approx 1029 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất vượt quá

$$\frac{1029 - 883}{883} \cdot 100\% = 16,5\% > 5\%, \text{ điều này không cho phép}$$

Ta chọn thép chữ U số 16 có $I_z = 747 \text{ cm}^4, i_z = 6,42 \text{ cm}$
 $F = 18,1 \text{ cm}^2, I_y = 63,3 \text{ cm}^4, i_y = 1,87 \text{ cm}, b = 6,4 \text{ cm}, t = 0,84 \text{ cm}, z_0 = 1,80 \text{ cm}.$

Độ mảnh của cột

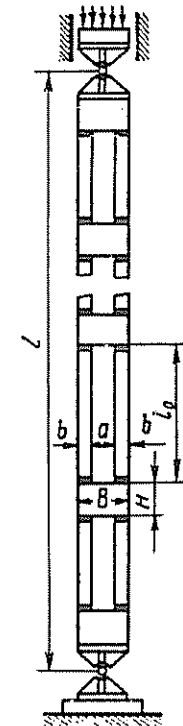
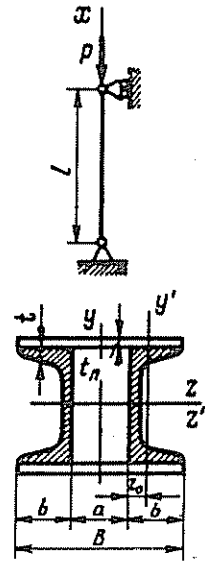
$$\lambda = \frac{600}{6,42} \approx 93,5$$

Theo bảng với thép CT.3: $\lambda = 90, \varphi = 0,69, \lambda = 100, \varphi = 0,60$.

Với $\lambda = 93,5$

$$\varphi = 0,60 + 0,009 \cdot 6,5 = 0,658.$$

Ứng suất cho phép



Hình 141

$$[\sigma_{\text{đd}}] = 0,658 \cdot 1600 \approx 1051 \text{ kG/cm}^2.$$

Ứng suất làm việc

$$\sigma = \frac{P}{2F} = \frac{35 \cdot 10^3}{2 \cdot 18,1} \approx 967 \text{ kG/cm}^2$$

Ứng suất thiếu

$$\frac{1051 - 967}{1051} \cdot 100\% = 7,99\%$$

Ta dừng lại ở các thép chữ U số 16

Vì $\lambda = 93,5 < 100$ nên

$$\sigma_{\text{th}} = 3100 - 11,4 \cdot 93,5 \approx 2034 \text{ kG/cm}^2$$

và cột làm việc với hệ số an toàn

$$n_{\text{đd}} = \frac{2034}{967} \approx 2,1.$$

Khoảng cách hợp lý a giữa các nhánh được thiết lập từ điều kiện ổn định đều của cột trong các mặt phẳng quán tính chính xy và xz .

Vì các nhánh của cột được liên kết không tuyệt đối cứng nên có thể lấy $I_y = (1,15 \div 1,2) I_z$.

Ta lấy $I_y = 1,15 I_z$. Khi đó

$$1,15 I_z = I_y + \left(z_0 + \frac{a}{2} \right)^2 F.$$

$$a = 2 \left(\sqrt{\frac{1,15 I_z - I_y}{F}} - z_0 \right) = 2 \left(\sqrt{\frac{1,15 \cdot 747 - 63,3}{18,1}} - 1,80 \right) = 9,66 \approx 10 \text{ cm}$$

và chiều dài phải tìm của bản

$$B = a + 2b = 10 + 2 \cdot 6,4 = 22,8 \text{ cm}.$$

Để bảo đảm ổn định của từng nhánh riêng trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất của nó xz' theo lý thuyết các bản nối cần phải cách nhau l_r để độ mảnh của toàn cột bằng độ mảnh của đoạn nhánh giữa các bản giằng, tức là để

$$\frac{l}{i_z} = \frac{l_r}{i_y}$$

Từ điều kiện đó ta có chiều dài lý thuyết của đoạn nhánh

$$l_r = \frac{l}{i_z} i_y = \lambda i_y = 93,5 \cdot 1,87 = 175 \text{ cm}.$$

Thực tế trước đây người ta lấy $l_0 = \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} \right) l_r$.

Theo tiêu chuẩn mới (xem Tiêu chuẩn và quy phạm xây dựng, chương 3, phần B, tập 2, ban hành năm 1962 ở Liên Xô) độ mảnh của các nhánh riêng λ_n trong đoạn giữa các bản giằng không lớn hơn 40, tức là $l_0 \leq 40 i_y$. Trong trường hợp này

$$l_0 = 40 \cdot 1,87 = 74,8 \text{ cm}.$$

Ta lấy $l_0 = 75\text{cm}$. Khi đó chiều dài cột l được chia thành 6 đoạn bằng nhau bởi các bản giằng, còn lại 24cm để liên kết.

Theo yêu cầu cấu tạo có thể lấy

$$H = (0,6 \div 0,8)B, l_0 = H = (3 \div 4)H \text{ và } l_b = (0,8 \div 1)l$$

Với trường hợp này ta có:

$$H = 0,8B = 0,8 \cdot 22,8 = 18\text{cm và}$$

$$l_b \approx l = 0,8\text{cm}$$

Thường người ta kiểm tra cột có bản giằng theo độ mảnh tính toán

$$\lambda_t = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

cho cột ghép bằng hai thép chữ U hay hai thép chữ I;

$$\lambda_t = \sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_{n1}^2 + \lambda_{n2}^2}$$

cho cột ghép từ bốn thép góc, trong đó λ_c — độ mảnh của cột đối với trục vuông góc với mặt phẳng các bản; $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}$ — độ mảnh của các nhánh đối với trục trung tâm của mỗi nhánh và vuông góc với mặt phẳng các bản.

Ta thực hiện việc kiểm tra này.

Đối với toàn cột

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F} + \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1,87^2 + (1,8 + 5)^2} \approx 7,05\text{cm}$$

$$\lambda_c = \frac{600}{7,05} = 85,1.$$

Đối với nhánh

$$\lambda_n = \frac{l_0}{i_y} = \frac{75}{1,87} = 40.$$

$$\text{Vi vậy } \lambda_t = \sqrt{85,1^2 + 40^2} \approx 94,1.$$

Theo bảng, đối với thép CT.3, $\lambda = 94,1$; sau khi nội suy ta có

$$\varphi = 0,60 + 0,009 \cdot 4,1 = 0,637.$$

Ứng suất cho phép

$$[\sigma_{\text{đ}}] = 0,637 \cdot 1600 = 1019\text{ kG/cm}^2.$$

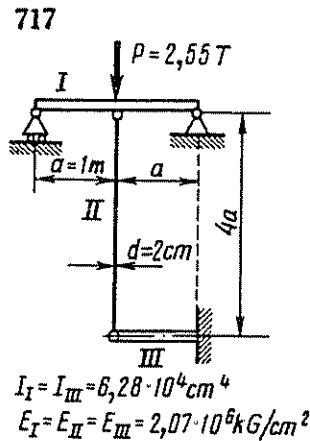
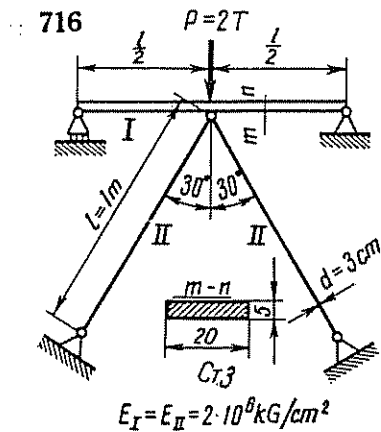
Ứng suất thiếu

$$\frac{1019 - 967}{1019} \cdot 100\% = 5,1\%$$

Vậy cột ổn định đối với trục chính vuông góc với mặt phẳng bản giằng.

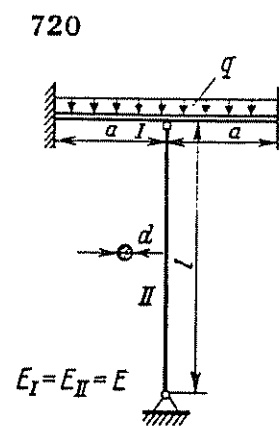
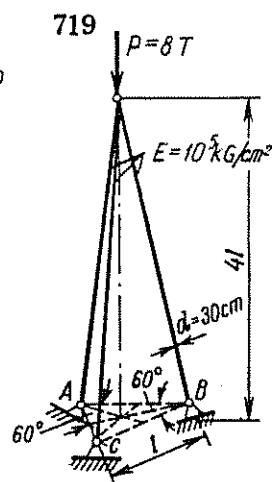
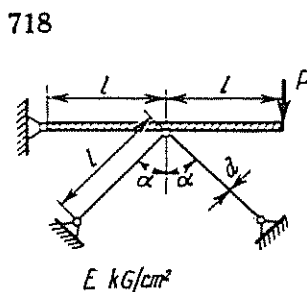
Có thể nói rằng khi thỏa mãn điều kiện $I_y = 1,2I_x$ và $\lambda_n = 40$ thì λ_t và λ luôn luôn rất gần nhau.

Bài tập 716 — 717. Xác định hệ số an toàn về ổn định $n_{\text{đ}}$ cho các thanh chịu nén trong các hệ.



Bài tập 718 — 720. Xác định xem các hệ mất ổn định với chiều dài l là bao nhiêu?

Coi như với tải trọng và kích thước mặt cắt ngang đã cho biến dạng xảy ra trong giới hạn tỷ lệ. Trong bài 720 không tính biến dạng của thanh nén II khi giải hệ nén siêu tĩnh.



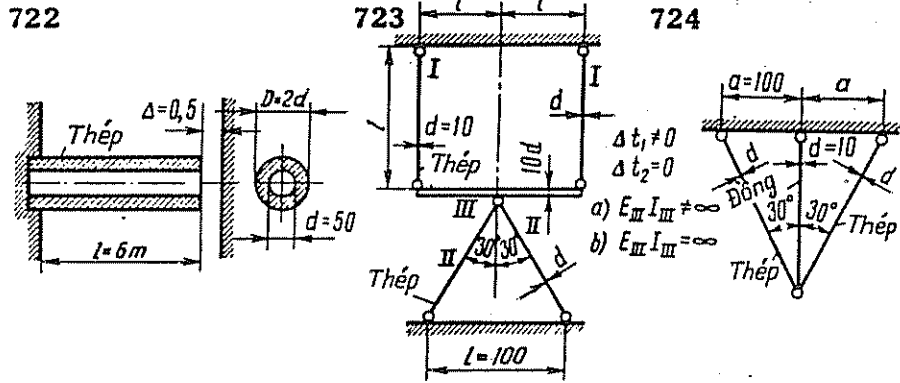
Bài tập 721. Xác định chiều dài l để cột chịu nén bằng thép CT.3, mặt cắt tròn đường kính d với các liên kết khớp ở đầu mất ổn định.

Lấy: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{11} = 1900 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{ch} = 2400 \text{ kg/cm}^2$.

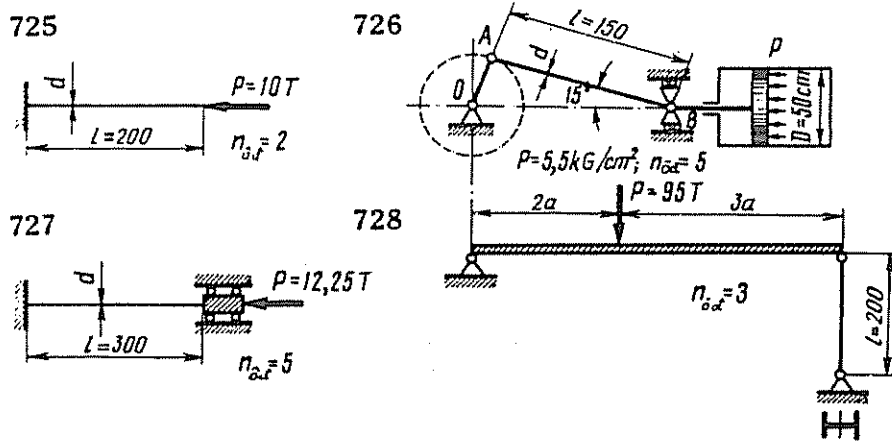
a) $d = 1\text{ cm}$, $P = 1T$. b) $d = 1\text{ cm}$, $P = 1,8T$.

Bài tập 722 — 724. Xác định xem các thanh nén của hệ sẽ mất ổn định khi tăng nhiệt độ ($\Delta t^\circ\text{C}$) lên bao nhiêu?

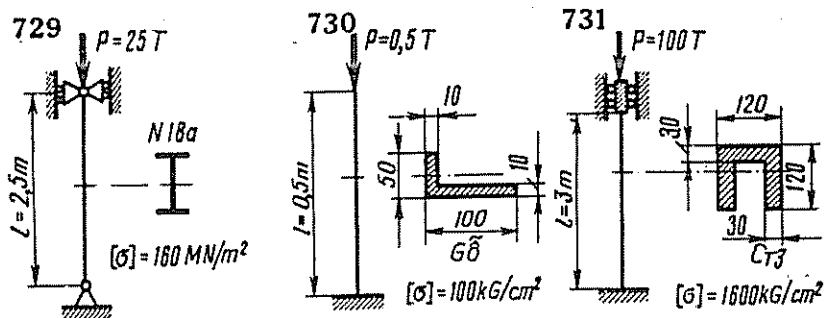
Lấy: Thép $E = 2 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_{11} = 2000 \text{kg/cm}^2$. Đồng: $E = 1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\alpha = 16,5 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_{11} = 1000 \text{kg/cm}^2$.

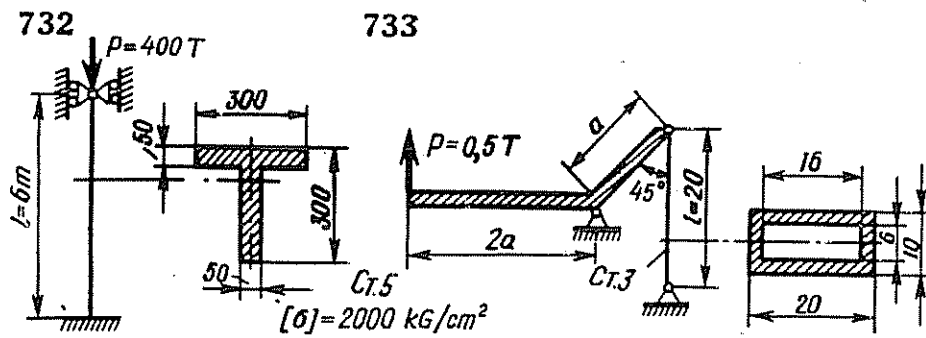


Bài tập 725 — 728. Chọn mặt cắt ngang của các thanh nén trong các hệ theo hệ số an toàn $n_{\sigma d}$ về ổn định đã cho. Tất cả các thanh nén đều bằng thép CT. 3 và có $E = 2 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\sigma_{11} = 2000 \text{kg/cm}^2$. Trong bài 726 xem vị trí đã vẽ của thanh truyền là nguy hiểm nhất.

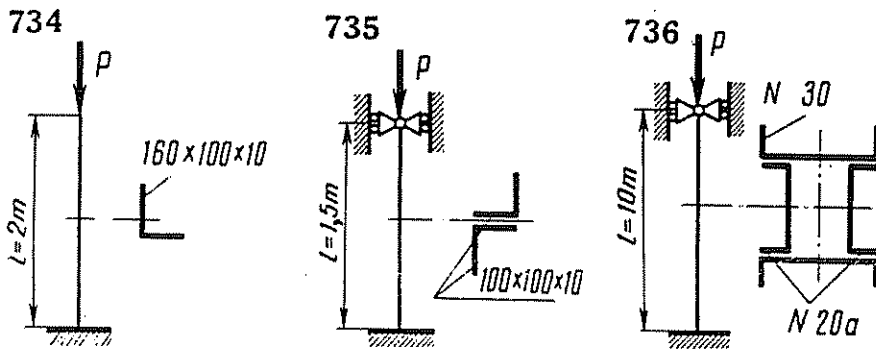


Bài tập 729 — 733. Kiểm tra ổn định các thanh nén và xác định ứng suất của chúng vượt hay thiếu bao nhiêu phần trăm. Ở đây và cả những bài sau trong tính toán không tính biến dạng xoắn có thể xảy ra của thanh nén.

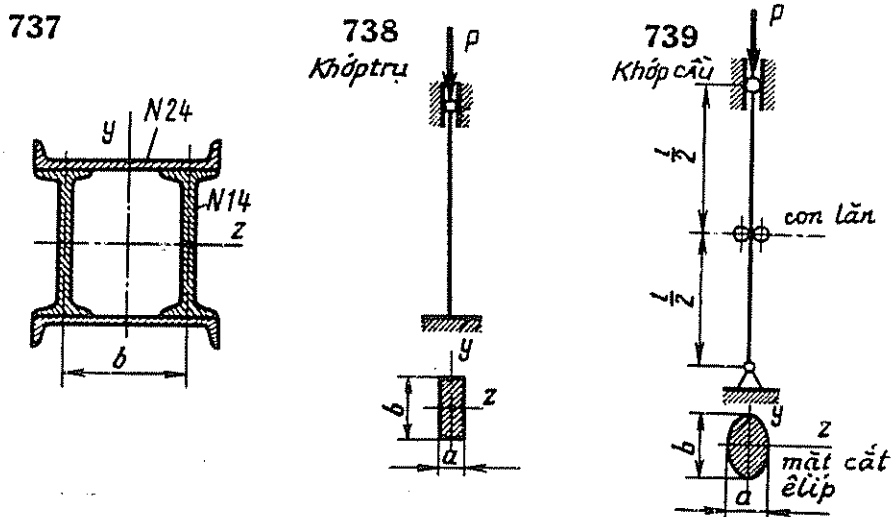




Bài tập 734 — 736. Xác định sức chịu tải của các cột. Vật liệu cột là thép CT.3 có $[\sigma] = 1600 \text{kg/cm}^2$.

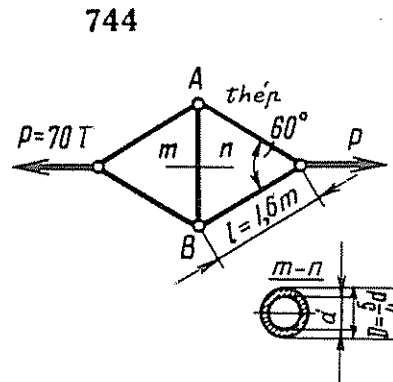
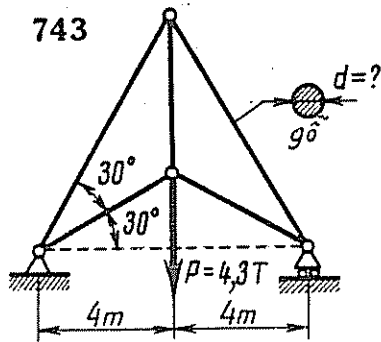
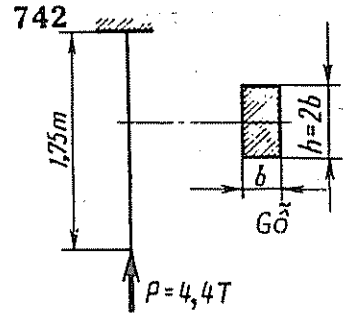
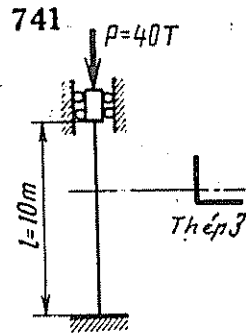
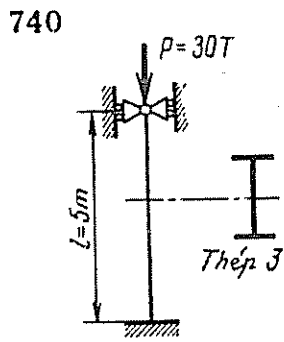


Bài tập 737 — 739. Xác định kích thước b của mặt cắt cột theo điều kiện ổn định đều đối với trục z và y của chúng.



Bài tập 740 — 744. Chọn kích thước mặt cắt ngang của cột và các thanh nén của hệ.

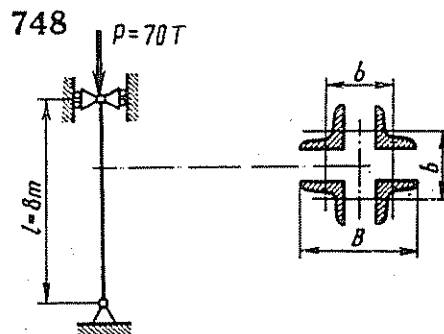
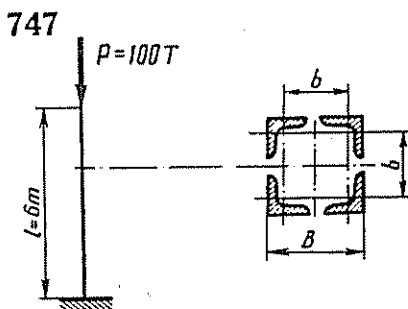
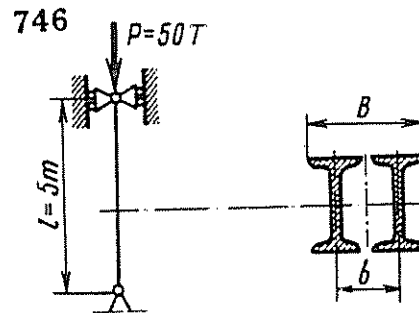
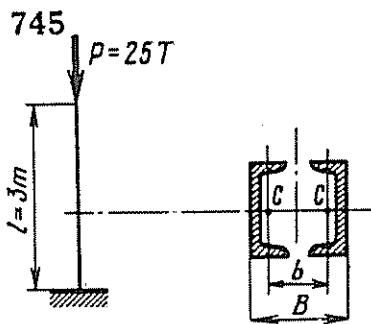
Lấy: với thép CT.3 $[\sigma] = 1600 \text{kg/cm}^2$, với gỗ $[\sigma] = 100 \text{kg/cm}^2$.



Bài tập 745 — 748. Với các cột ghép hãy xác định:

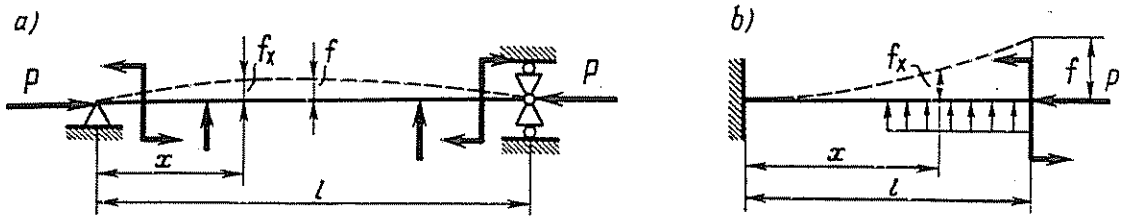
1. Số hiệu mặt cắt của nhánh cột;
2. Bề rộng mặt cắt cột B;
3. Khoảng cách l_0 giữa các bản giằng.

Đối với vật liệu của nhánh cột lấy $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$.



§ 36. Uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

Người ta tính gần đúng các thanh cân bằng dưới tác dụng của các momen, các lực dọc và ngang xuất phát từ việc xem đường đàn hồi của thanh gần với hình sin. Đối với dầm có đầu khớp (hình 142a) về cơ bản được xét ở mục này, hình sin như đã nêu được mô tả bằng phương trình sau:



Hình 142

$$f_x = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (168)$$

Tính như vậy (cả trong bài giải của các bài toán về sau cũng tính thế) kết quả thu được sẽ chính xác hơn đối với thanh có đầu khớp chịu tải trọng ngang theo một phương và đối xứng đối với điểm giữa của thanh. Với những thanh như thế đường đàn hồi do uốn ngang không có điểm uốn, tức là độ cong có một dấu và vì vậy có thể là nửa sóng hình sin (168). Trong trường hợp này điểm giữa chiều dài thanh có độ võng lớn nhất.

$$f = \frac{f_v}{1 - \frac{P}{P_{ole}}} \quad (168a)$$

Momen uốn lớn nhất

$$M_{max} = M_u + Pf = M_u + \frac{Pf_v}{1 - \frac{P}{P_{ole}}} \quad (169)$$

Ứng suất nén lớn nhất

$$\max|\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{M_{max}}{W} = \frac{P}{F} + \frac{M_u}{W} + \frac{Pf_v}{W \left(1 - \frac{P}{P_{ole}}\right)} \quad (170)$$

trong đó P — lực nén dọc trục. $P_{ole} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ — lực Ole, lực này tính với độ

mảnh bất kỳ của thanh theo momen quán tính chính trung tâm I của diện tích mặt cắt ngang F đối với trục vuông góc với mặt phẳng tác dụng của tải trọng ngang; W — Momen chống uốn của mặt cắt ngang đối với trục đã nêu; f_v và M_u — độ võng và momen uốn ở giữa chiều dài l do tải trọng ngang sinh ra.

Từ công thức (170) ta nhận thấy rằng ở đây không áp dụng được nguyên lý độc lập tác dụng của các lực và ứng suất tăng khi ngoại lực tăng, ứng suất

tăng nhanh hơn đáng kể so với ngoại lực. Điều đó đòi hỏi phải chuyển từ kiểm tra độ bền theo ứng suất cho phép sang tính toán theo tải trọng cho phép.

Ta xem như hệ dầm được xét làm việc với hệ số an toàn n , nếu khi tăng tất cả các ngoại lực lên n lần để dầm đạt tới trạng thái nguy hiểm, tức trạng thái mà đối với vật liệu dẻo, mọi điểm cùng đồng thời đạt đến ứng suất pháp lớn nhất (về giá trị tuyệt đối) là giới hạn chảy σ_{ch} , tức là

$$\max|\sigma| = \frac{(nP)}{F} + \frac{(nM_u)}{W} + \frac{(nP)(nf_v)}{W \left(1 - \frac{nP}{P_{\sigma le}}\right)} = \sigma_{ch} \quad (171)$$

Khi cân bằng n với hệ số an toàn cho phép về độ bền ta được công thức tính toán độ bền

$$\max|\sigma| = \frac{[n]P}{F} + \frac{[n]M_u}{W} + \frac{[n]P[n]f_v}{W \left(1 - \frac{[n]P}{P_{\sigma le}}\right)} = \sigma_{ch} \quad (171a)$$

Ta lấy hệ số an toàn về độ bền $[n]$ khi tính theo phương pháp tải trọng cho phép tương ứng với hệ số an toàn quy định đối với ứng suất cho phép theo giới hạn chảy, tức là

$$[n] = n_{ch},$$

trong đó
$$n_{ch} = \frac{\sigma_{ch}}{[\sigma]}$$

Khi đó từ công thức (171, a) ta thu được công thức tính toán có dạng như sau

$$\frac{P}{F} + \frac{M_u}{W} + \frac{[n]Pf_v}{W \left(1 - \frac{[n]P}{P_{\sigma le}}\right)} \leq [\sigma] \quad (171b)$$

Với sai số hơi lớn, các công thức (168 — 171) có thể áp dụng cho cả tải trọng ngang không đối xứng, nếu sự không đối xứng ấy còn khác xa với trường hợp phân đối xứng.

Tính toán uốn dọc và uốn ngang đồng thời cho các thanh có dạng liên kết gối khác được suy ra bằng cách tương tự, song phương trình (168) trong từng trường hợp riêng cần phải thay đổi. Thí dụ đối với dầm một đầu ngàm (hình 142b) đường đàn hồi được mô tả gần đúng bằng hàm số

$$f = f_{max} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

Tuy nhiên các công thức tính toán (169—171) vẫn còn hiệu lực nếu tính đến giá trị của lực O_{le} thay đổi phụ thuộc vào dạng liên kết của thanh theo công thức (168).

Nếu tải trọng ngang tác dụng trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất của thanh thì còn phải kiểm tra ổn định trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất.

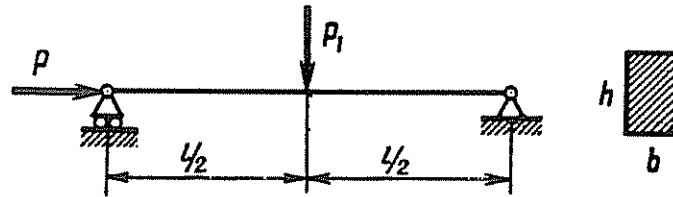
Thí dụ 75. Cho $P = 800\text{kG}$; $P_1 = 100\text{kG}$; $l = 2\text{m}$, $b = 2\text{cm}$; $h = 4\text{cm}$; $E = 2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$; $\sigma_{ch} = 2400\text{kG/cm}^2$ (hình 143).

Xác định f , σ_{\max} , n , $n_{\text{òd}}$.

Bài giải. Vì $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 64}{12} = \frac{32}{3} \text{ cm}^4$

nên độ võng ở giữa dầm do lực P_1 sinh ra

$$f_v = \frac{P_1 l^3}{48EI} = \frac{100 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32} = \frac{25}{32} = 0,781 \text{ cm.}$$



Hình 143

Lực Ole

$$P_{\text{ole}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 32}{4 \cdot 10^4 \cdot 3} = \frac{16}{3} 10^3 \text{ kG}$$

Tỷ số

$$\frac{P}{P_{\text{ole}}} = \frac{800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3} = \frac{3}{20} \text{ và } 1 - \frac{P}{P_{\text{ole}}} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

Theo công thức (168) độ võng phải tìm

$$f = \frac{25}{32} \cdot \frac{20}{17} = 0,919 \text{ cm}$$

Như vậy f_v so với f là $\frac{17}{20} \cdot 100\% = 85\%$

Vi

$$M_u = \frac{P_1 l}{4} = \frac{100 \cdot 200}{4} = 5 \cdot 10^3 \text{ kG.cm}$$

$$M_{\max} = 5 \cdot 10^3 + 800 \cdot 0,919 = 5735 \text{ kGcm,}$$

$$F = bh = 8 \text{ cm}^2.$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot 16}{6} = \frac{16}{3} \text{ cm}^3,$$

nên theo công thức (170).

$$\sigma_{\max} = \frac{800}{8} + \frac{5735}{16} \cdot 3 = 1175 \text{ kG/cm}^2.$$

Không tính uốn do lực dọc

$$\sigma'_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M_u}{W} = 100 + \frac{5 \cdot 10^3}{16} \cdot 3 = 1038 \text{ kG/cm}^2$$

nó so với σ_{\max} là $\frac{1038}{1175} \cdot 100\% = 88\%$.

Dầm làm việc với hệ số an toàn n (đối với giới hạn chảy), hệ số này xác định từ công thức (171)

$$\frac{n \cdot 800}{8} + \frac{n \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 3}{16} + \frac{n \cdot 800 \cdot 3 \cdot n \cdot 0,781}{16 \left(1 - \frac{n \cdot 800 \cdot 3}{16 \cdot 10^3}\right)} = 2400$$

từ đó

$$\frac{n^2 - 35,9n + 61,6}{1 - 0,15n} = 0.$$

Giải phương trình này được hai giá trị của n : $n_1 = 1,85$ và $n_2 = 34,05$. Giá trị $n_2 = 34,05$ không thể là nghiệm của bài toán vì ngay khi $n = 6,67$ ($P_{nh} = nP = 5320\text{kG}$), $\max |\sigma| = \infty$, bởi vì nhị thức $1 - \frac{nP}{P_{ole}} = (1 - 0,15)$ trở thành không-

Ta kiểm tra ổn định của dầm trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất. Vì

$$i_y^2 = \frac{b^2}{16} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ cm}^2 \text{ và } \lambda = \frac{\mu l}{i} = 200 \sqrt{3}, \text{ nên theo công thức (164)}$$

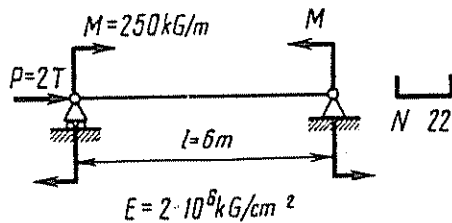
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} = 167 \text{ kG/cm}^2,$$

Ứng suất nén do lực P , $\sigma = \frac{800}{8} = 100 \text{ kG/cm}^2$. Hệ số an toàn về ổn định của dầm

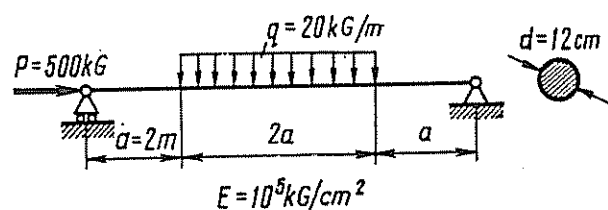
$$n_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma} = \frac{167}{100} = 1,67.$$

Bài tập 749 — 751. Xác định độ võng lớn nhất f và ứng suất nén lớn nhất $\max |\sigma_n|$ cho các dầm.

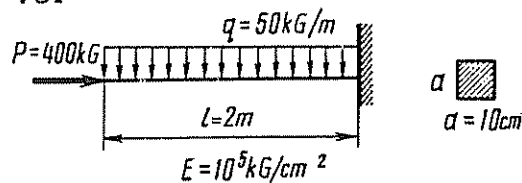
749



750

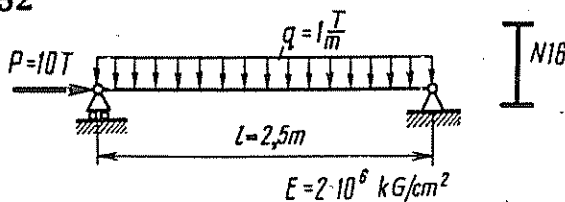


751

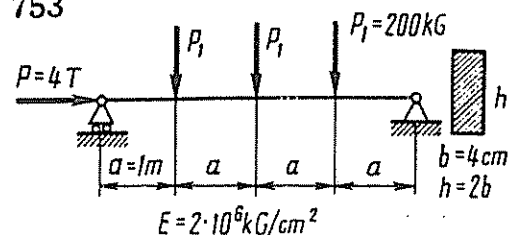


Bài tập 752 — 753. Xác định f , $\max |\sigma_n|$ hệ số an toàn về độ bền n và hệ số an toàn về ổn định $n_{\text{ổđ}}$ của các dầm.

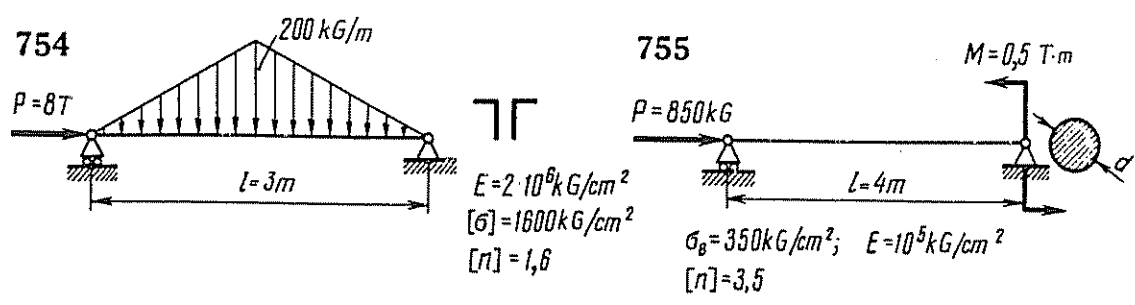
752



753



Bài tập 754 — 755. Chọn các kích thước của mặt cắt ngang dầm.



XI — THANH CÔNG PHẪNG

§ 37. Lực dọc, lực cắt và momen uốn

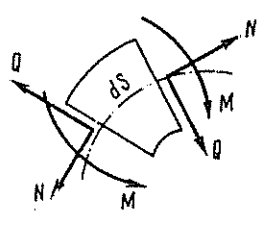
Thanh cong là thanh khi trục hình học của nó là đường cong.

Ta sẽ xét các thanh cong có: trục hình học là đường cong phẳng; mặt phẳng của độ cong là mặt phẳng đối xứng; các lực tác dụng nằm trong mặt phẳng đối xứng, vật liệu tuân theo định luật Húc; độ cứng đủ lớn để áp dụng được nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.

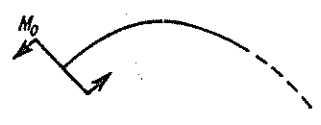
Nội lực trên mặt cắt ngang của thanh cong được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Nội lực gồm lực dọc N , lực cắt Q và momen uốn M . Ta xem là dương khi lực dọc N là lực kéo, lực cắt Q có hướng trùng với hướng của lực kéo N khi quay N 90° theo chiều kim đồng hồ momen uốn M làm tăng độ cong của thanh (hình 144).

Trên biểu đồ các giá trị dương của N , Q và M quy ước đặt vuông góc với trục hình học của thanh và đi khỏi tâm cong của nó, còn các giá trị âm hướng tới tâm cong. Với các thanh gồm các đoạn cong và thẳng thì biểu đồ dương và âm trên đoạn thẳng đặt về phía của trục hình học cũng như trên các đoạn cong.

Ngoài sự phụ thuộc vào dạng của thanh cong, các giá trị của N , Q và M trên mặt cắt ngang xác định bởi các tọa độ x , y và góc $\beta = \arctg \left(\frac{dy}{dx} \right)$ được thiết lập cũng bằng phương pháp ấy.



Hình 144



Hình 145

Ta xét trường hợp các tải trọng khác nhau đặt về một phía của mặt cắt

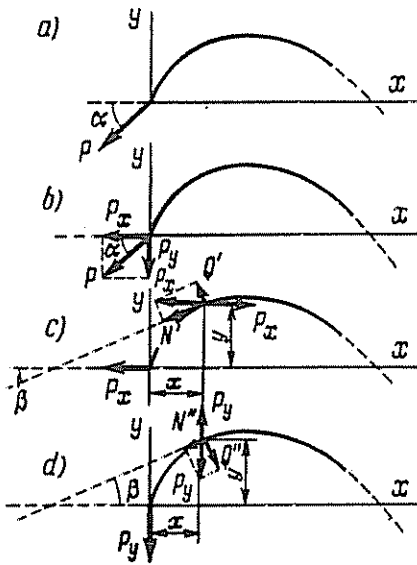
1. Ngẫu lực tập trung (hình 145).

$$N = 0; Q = 0; M = M_0.$$

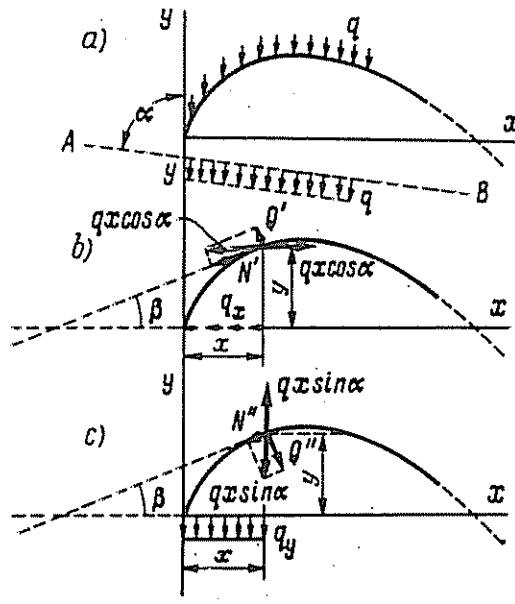
2. Lực tập trung (hình 146a)

Thành phần của lực P theo các trục x và y (hình 146b).

$$P_x = P \cos \alpha; P_y = P \sin \alpha$$



Hình 146



Hình 147

Do thành phần P_x (hình 146c):

$$N' = P \cos \alpha \cos \beta, \quad Q' = P \cos \alpha \sin \beta, \quad M' = -P y \cos \alpha$$

Do thành phần P_y (hình 146d):

$$N'' = P \sin \alpha \sin \beta; \quad Q'' = -P \sin \alpha \cos \beta; \quad M'' = P x \sin \alpha$$

Nội lực tổng hợp do lực P sinh ra:

$$N = P (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = P \cos (\alpha - \beta);$$

$$Q = P (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = -P \sin (\alpha - \beta);$$

$$M = P (x \sin \alpha - y \cos \alpha).$$

3. Tải trọng phân bố đều theo đường thẳng AB và vuông góc với nó (hình 147a).

Các thành phần tải trọng q theo các trục x và y (tương tự như trường hợp trước):

$$q_x = q \cos \alpha; \quad q_y = q \sin \alpha$$

Do thành phần q_x (hình 147b):

$$N' = q x \cos \alpha \cos \beta; \quad Q' = q x \cos \alpha \sin \beta; \quad M' = -q x y \cos \alpha.$$

Do thành phần q_y (hình 147c):

$$N'' = q x \sin \alpha \sin \beta; \quad Q'' = -q x \sin \alpha \cos \beta; \quad M'' = q \frac{x^2}{2} \sin \alpha$$

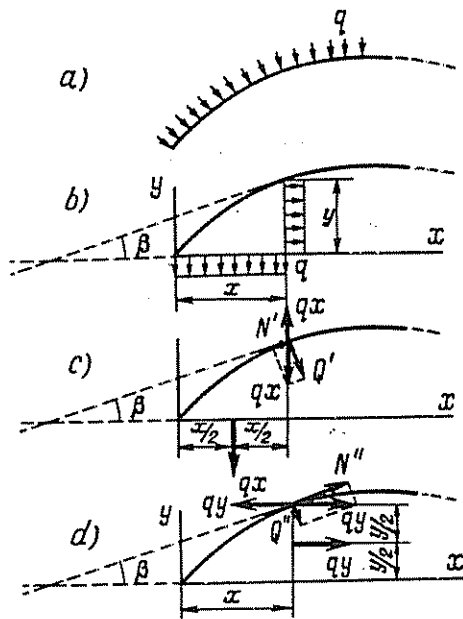
Nội lực tổng hợp do tải trọng q sinh ra:

$$N = q x (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = q x \cos (\alpha - \beta);$$

$$Q = q x (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = -q x \sin (\alpha - \beta);$$

$$M = q x \left(\frac{x}{2} \sin \alpha - y \cos \alpha \right).$$

4. Tải trọng ngang phân bố đều theo trục hình học của thanh (hình 148a).



Hình 148

Do tác dụng của hình chiếu phần tải trọng bị cắt lên trục y (hình 148b, c):

$$N' = qx \sin \beta ; Q' = -qx \cos \beta ; M' = q \frac{x^2}{2} .$$

Do tác dụng của hình chiếu phần tải trọng bị cắt lên trục x (hình 148d):

$$N'' = -qy \cos \beta ; Q'' = -qy \sin \beta ;$$

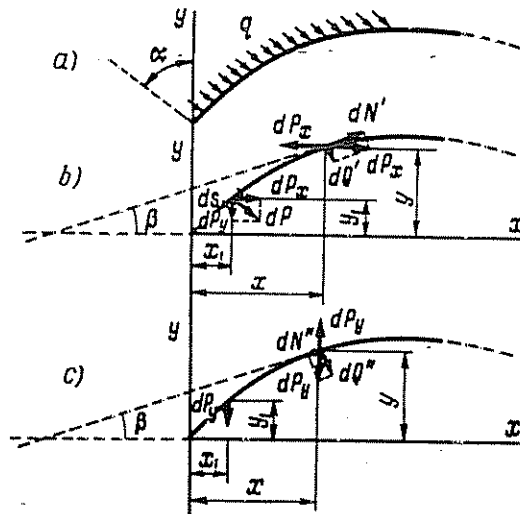
$$M'' = q \frac{y^2}{2} .$$

Do tác dụng đồng thời của q_x và q_y :

$$N = q(x \sin \beta - y \cos \beta) ; Q = -q(x \cos \beta + y \sin \beta) ;$$

$$M = \frac{q}{2} (x^2 + y^2)$$

5. Tải trọng song song phân bố đều theo trục hình học của thanh (hình 149a).



Hình 149

Lực phân tử ở mặt cắt có tọa độ $x_1 y_1$ tác dụng lên phân tử ds trên trục hình học của thanh (hình 149b)

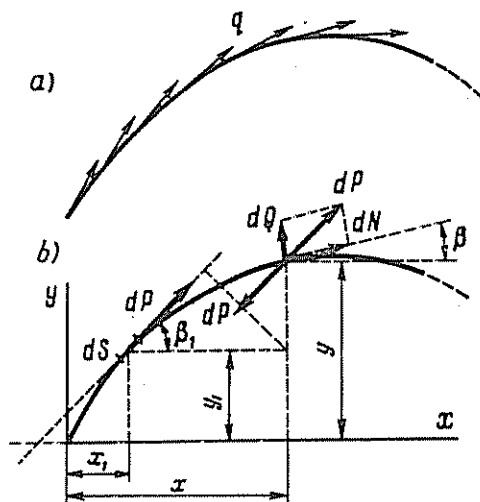
$$dP = q ds$$

Hình chiếu của lực dP lên các trục x và y :

$$dP_x = dP \sin \alpha = q ds \sin \alpha ; dP_y = dP \cos \alpha = q ds \cos \alpha .$$

Nội lực phân tử ở mặt cắt có tọa độ x, y và góc β do lực dP_x (hình 149b):

$$dN' = -dP_x \cos \beta = -q \sin \alpha \cos \beta ds ;$$



Hình 150

$$dQ' = -dP_x \sin \beta = -q \sin \alpha \sin \beta ds;$$

$$dM' = dP_x (y - y_1) = q (y - y_1) \sin \alpha ds.$$

Nội lực phân tử cũng ở chính mặt cắt ấy do lực dP_y (hình 149c)

$$dN'' = dP_y \sin \beta = q \cos \alpha \sin \beta ds;$$

$$dQ'' = -dP_y \cos \beta = -q \cos \alpha \cos \beta ds;$$

$$dM'' = dP_y (x - x_1) = q (x - x_1) \cos \alpha ds.$$

Nội lực phân tử ở mặt cắt xét do tác dụng đồng thời của lực dP_x và dP_y .

$$dN = -q (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) ds = -q \sin (\alpha - \beta) ds;$$

$$dQ = -q (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) ds = -q \cos (\alpha - \beta) ds;$$

$$dM = q [(y - y_1) \sin \alpha + (x - x_1) \cos \alpha] ds.$$

Nội lực tổng hợp ở mặt cắt đang xét cắt cung s của trục thanh :

$$N = -q \sin (\alpha - \beta) \int_0^s ds = -q s \sin (\alpha - \beta);$$

$$Q = -q \cos (\alpha - \beta) \int_0^s ds = -q s \cos (\alpha - \beta);$$

$$\begin{aligned} M &= q \left[\sin \alpha \left(y \int_0^s ds - \int_0^s y_1 ds \right) + \cos \alpha \left(x \int_0^s ds - \int_0^s x_1 ds \right) \right] = \\ &= q [\sin \alpha (ys - S_x) + \cos \alpha (xs - S_y)] = \\ &= qs [(y - y_c) \sin \alpha + (x - x_c) \cos \alpha], \end{aligned}$$

trong đó $S_x = \int_0^s y_1 ds$ và $S_y = \int_0^s x_1 ds$ — momen tĩnh của cung s đối với trục x và y ;

$$y_c = \frac{S_x}{s} \quad \text{và} \quad x_c = \frac{S_y}{s} \quad \text{— tọa độ trọng tâm của cung } s.$$

6. Tải trọng phân bố đều theo trục thanh và liếp tuyến với nó (hình 150a).
 Lực phân bố ở mặt cắt ngang có tọa độ x_1y_1 và góc β_1 (hình 150 b) tác dụng theo phương liếp tuyến với trục thanh lên phân tử cong ds :

$$dP = qds.$$

Nội lực phân bố ở mặt cắt ngang có tọa độ x, y và góc β do tác dụng của lực dP (hình 150 b):

$$\begin{aligned} dN &= -dP \cos(\beta_1 - \beta) = -q \cos(\beta_1 - \beta) ds; \\ dQ &= dP \sin(\beta_1 - \beta) = q \sin(\beta_1 - \beta) ds; \\ dM &= -dP[(x - x_1) \sin\beta_1 - (y - y_1) \cos\beta_1] = \\ &= q[(y - y_1) \cos\beta_1 - (x - x_1) \sin\beta_1] ds. \end{aligned}$$

Nội lực toàn phần ở mặt cắt xét cắt cung s của trục thanh:

$$\begin{aligned} N &= -q \int_0^s \cos(\beta_1 - \beta) ds; \quad Q = q \int_0^s \sin(\beta_1 - \beta) ds; \\ M &= q \left[\int_0^s (y - y_1) \cos\beta_1 ds - \int_0^s (x - x_1) \sin\beta_1 ds \right]. \end{aligned}$$

Thí dụ 76. Cho P, ρ (hình 151 a).

Hãy vẽ các biểu đồ N, Q và M .

Bài giải. Ta xác định N, Q và M trên các đoạn thanh (hình 151 b)

Cho đoạn thứ nhất: $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} N_{\varphi_1} &= P \cos\varphi_1; \quad Q_{\varphi_1} = P \sin\varphi_1; \quad M_{\varphi_1} = P\rho(1 - \cos\varphi_1); \\ N_{\varphi_1=0} &= P; \quad N_{\varphi_1=\pi/4} = 0,707P; \quad N_{\varphi_1=\pi/2} = 0; \\ Q_{\varphi_1=0} &= 0; \quad Q_{\varphi_1=\pi/4} = 0,707P; \quad Q_{\varphi_1=\pi/2} = P; \\ M_{\varphi_1=0} &= 0; \quad M_{\varphi_1=\pi/4} = 0,293P\rho; \quad M_{\varphi_1=\pi/2} = P\rho. \end{aligned}$$

Cho đoạn thứ hai $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$;

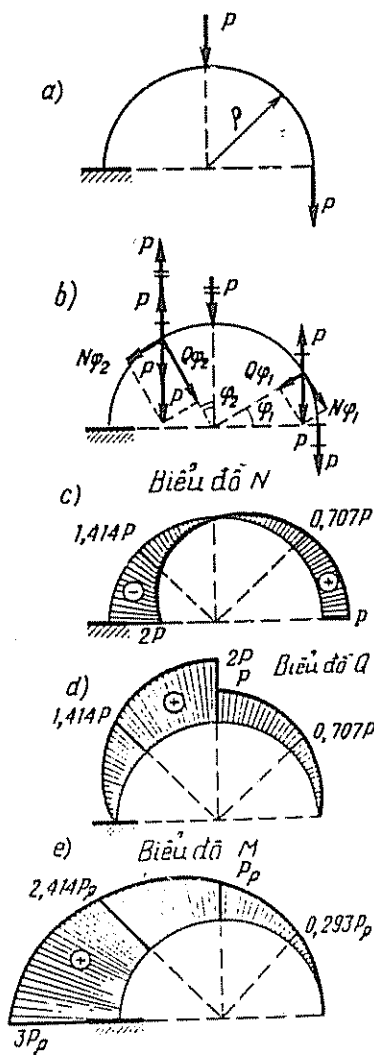
$$\begin{aligned} N_{\varphi_2} &= -2P \sin\varphi_2; \quad Q_{\varphi_2} = 2P \cos\varphi_2; \quad M_{\varphi_2} = P\rho(1 + 2\sin\varphi_2); \\ N_{\varphi_2=0} &= 0; \quad N_{\varphi_2=\pi/4} = -1,414P; \quad N_{\varphi_2=\pi/2} = -2P; \\ Q_{\varphi_2=0} &= 2P; \quad Q_{\varphi_2=\pi/4} = 1,414P; \quad Q_{\varphi_2=\pi/2} = 0; \\ M_{\varphi_2=0} &= P\rho; \quad M_{\varphi_2=\pi/4} \approx 2,414P\rho; \quad M_{\varphi_2=\pi/2} = 3P\rho. \end{aligned}$$

Các biểu đồ N, Q và M vẽ trên hình 151, c, d, e.

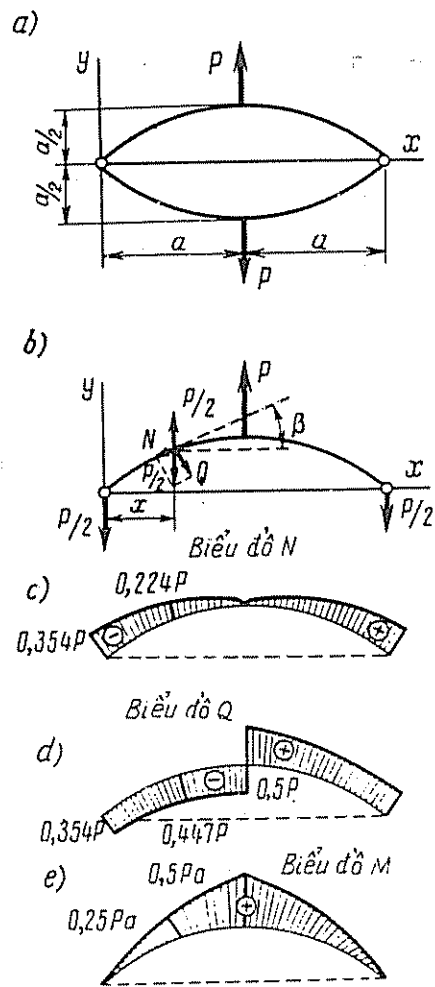
Thí dụ 77. Cho P, a , phương trình đường trục của nhánh trên và dưới là parabol $y = \pm x \left(1 - \frac{x}{2a}\right)$, (hình 152 a).

Vẽ các biểu đồ N, Q và M .

Bài giải. Vì hệ đối xứng đối với hai trục vuông góc với nhau nên ta chỉ xét một nửa của một nhánh (hình 152 b). Ở mặt cắt bất kỳ cách đầu trái một khoảng x :



Hình 151



Hình 152

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{a} ; \\ \sin \beta &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{a-x}{\sqrt{2a^2-2ax+x^2}} ; \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{a}{\sqrt{2a^2-2ax+x^2}} \end{aligned}$$

Vi vậy:

$$\begin{aligned} N &= \frac{P}{2} \sin \beta = \frac{P(a-x)}{2\sqrt{2a^2-2ax+x^2}} ; \\ Q &= -\frac{P}{2} \cos \beta = -\frac{Pa}{2\sqrt{2a^2-2ax+x^2}} ; \end{aligned}$$

$$M = \frac{P}{2} x;$$

$$N_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{4} P \approx 0,354P; N_{x=a/2} = \frac{\sqrt{5}}{10} P \approx 0,224P; N_{x=a} = 0;$$

$$Q_{x=0} = -\frac{\sqrt{2}}{4} P \approx -0,354P; Q_{x=a/2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} P \approx -0,447P; Q_{x=a} = -0,5P;$$

$$M_{x=0} = 0; M_{x=a/2} = 0,25Pa; M_{x=a} = 0,5Pa.$$

Các biểu đồ N , Q , M vẽ trên hình 152 c, d, e.

Thí dụ 78. Cho q , a , b , vòng uốn theo đường elip $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$ và bị cắt ở gốc tọa độ (hình 153 a). Xác định N , Q và M .

Bài giải. Vì thanh đối xứng đối với trục x nên ta chỉ xét nửa trên của nó.

Khi sử dụng nguyên lý cộng tác dụng, nội lực do các hình chiếu của tải trọng q_x và q_y (hình 153 b) trên mặt cắt ngang có tọa độ x , y và góc β (hình 153 c, d):

$$N = qy \cos \beta - qx \sin \beta; Q = qx \cos \beta + qy \sin \beta;$$

$$M = -\frac{q}{2} (x^2 + y^2).$$

Vi

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

nên

$$\sin \beta = \frac{a-x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

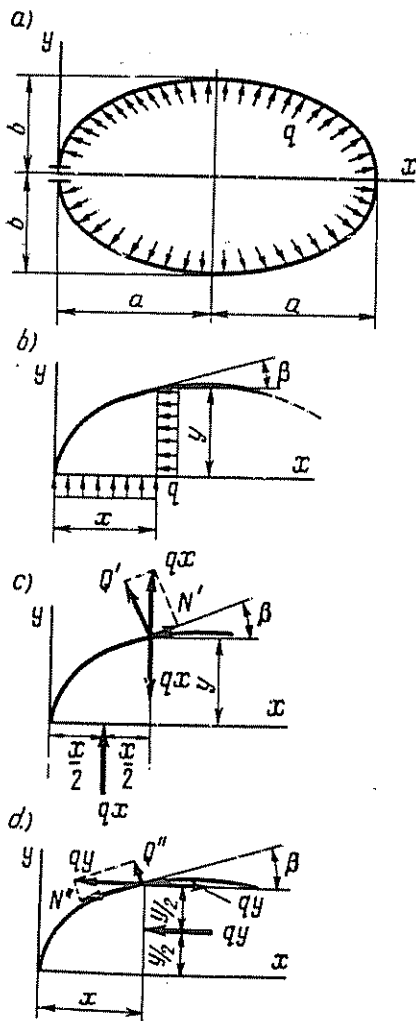
$$\cos \beta = \frac{\frac{a}{b} \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

$$\text{và } N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

$$Q = -\frac{q \left[\frac{a}{b} x + \frac{b}{a} (a-x) \right] \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}};$$

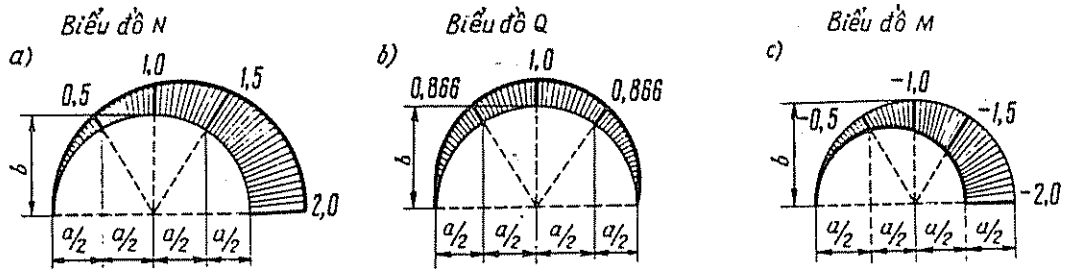
$$M = -\frac{q}{2} \left[\frac{b^2}{a^2} (2ax-x^2) + x^2 \right].$$

Thí dụ, nếu $a = b$ thì $N = qx$; $Q = -q \sqrt{2ax-x^2}$; $M = -qax$. Các biểu đồ N , Q , M vẽ trên hình 154 a, b, c.

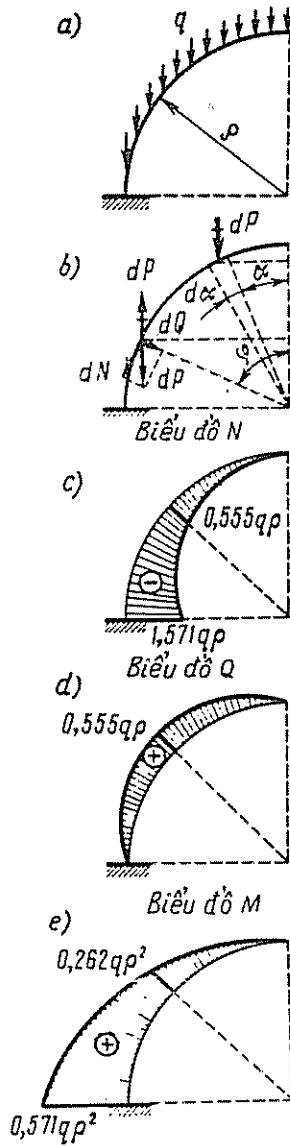


Hình 153

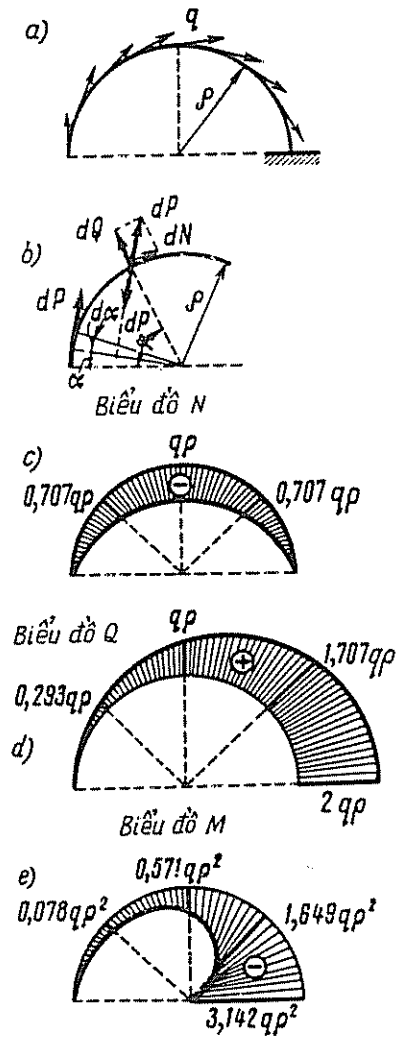
Thi dụ 79. Cho q, ρ , tải trọng thẳng đứng có cường độ q phân bố đều theo cung một phần tư đường tròn bán kính ρ (hình 155 a).



Hình 154



Hình 155



Hình 156

Vẽ các biểu đồ N , Q và M .

Bài giải. Nội lực trên mặt cắt ngang hợp với phương thẳng đứng một góc φ do lực nguyên tố $dP = qds = q\rho d\alpha$ (hình 155 b) sinh ra là:

$$dN = -dP \sin \varphi = q\rho \sin \varphi \cdot d\varphi;$$

$$dQ = dP \cos \varphi = q\rho \cos \varphi d\varphi;$$

$$dM = dP\rho(\sin \varphi - \sin \alpha) = q \cdot \rho^2(\sin \varphi - \sin \alpha)d\alpha.$$

Nội lực do tải trọng tác dụng trên phần bị cắt của thanh

$$N = -q\rho \sin \varphi \int_0^\varphi d\alpha = -q\rho \varphi \sin \varphi;$$

$$Q = q\rho \cos \varphi \int_0^\varphi d\alpha = q\rho \varphi \cos \varphi;$$

$$M = q\rho^2 \int_0^\varphi (\sin \varphi - \sin \alpha)d\alpha = q\rho^2(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1);$$

$$N_{\varphi=0} = 0; N_{\varphi=\pi/4} \approx -q\rho \frac{\pi}{4} 0,707 \approx -0,555q\rho;$$

$$N_{\varphi=\pi/2} = -q\rho \frac{\pi}{2} \approx -1,571q\rho;$$

$$Q_{\varphi=0} = 0; Q_{\varphi=\pi/4} \approx 0,555q\rho; Q_{\varphi=\pi/2} = 0;$$

$$M_{\varphi=0} = 0; M_{\varphi=\pi/4} \approx q\rho^2 \left(\frac{\pi}{4} 0,707 + 0,707 - 1 \right) \approx 0,262q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\pi/2} = q\rho^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,571q\rho^2.$$

Các biểu đồ N , Q và M vẽ trên hình 155 c, d, e.

Thí dụ 80. Cho q , ρ , tải trọng có cường độ q phân bố đều theo cung nửa đường tròn bán kính ρ và có phương tiếp tuyến với trục thanh (hình 156 a).

Vẽ các biểu đồ N , Q và M .

Bài giải. Lực phân tố ở mặt cắt hợp với phương nằm ngang một góc α

$$dP = qds = q\rho \cdot d\alpha.$$

Nội lực phân tố ở mặt cắt ngang thanh hợp với phương nằm ngang một góc φ do lực dP (hình 156 b) sinh ra:

$$dN = -dP \cos(\varphi - \alpha) = -q\rho \cos(\varphi - \alpha)d\alpha;$$

$$dQ = dP \sin(\varphi - \alpha) = q\rho \sin(\varphi - \alpha)d\alpha;$$

$$dM = -dP[\rho - \rho \cos(\varphi - \alpha)] = -q\rho^2[1 - \cos(\varphi - \alpha)]d\alpha.$$

Nội lực toàn phần do tải trọng tác dụng ở phần bị cắt của thanh

$$N = -q\rho \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha)d\alpha = -q\rho \sin \varphi;$$

$$Q = q\rho \int_0^\varphi \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = q\rho(1 - \cos\varphi);$$

$$M = -q\rho^2 \left[\int_0^\varphi d\alpha - \int_0^\varphi \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = q\rho^2(\sin\varphi - \varphi);$$

$$N_{\varphi=0} = 0; N_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -0,707q\rho; N_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -q\rho; N_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} \approx 0,707q\rho;$$

$$N_{\varphi=\pi} = 0;$$

$$Q_{\varphi=0} = 0; Q_{\varphi=\frac{\pi}{4}} \approx 0,293q\rho; Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho; Q_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} \approx 1,707q\rho;$$

$$Q_{\varphi=\pi} = 2q\rho$$

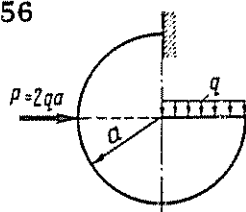
$$M_{\varphi=0} = 0; M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -0,078q\rho^2; M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \approx -0,571q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{3}{4}\pi} = -1,649q\rho^2; M_{\varphi=\pi} = -3,142q\rho^2.$$

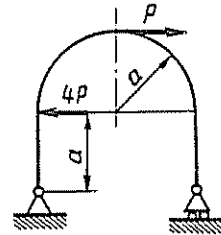
Các biểu đồ N , Q và M vẽ trên hình 156 c, d, e.

Bài tập 756 — 765. Vẽ các biểu đồ lực dọc N , lực cắt Q và momen uốn M .

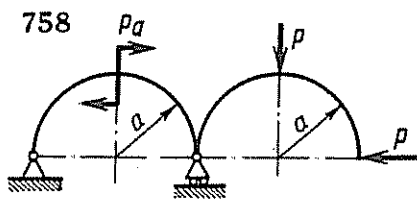
756



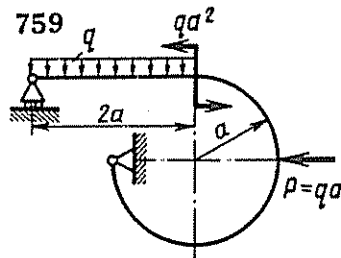
757



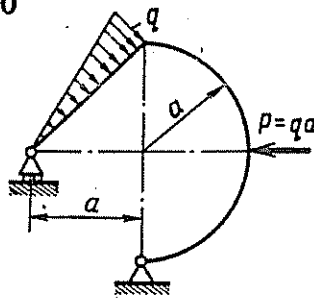
758



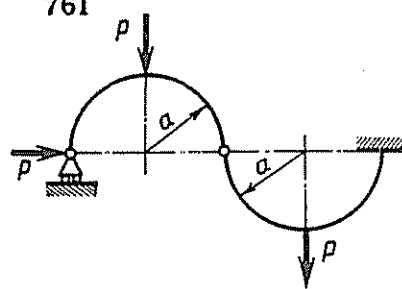
759

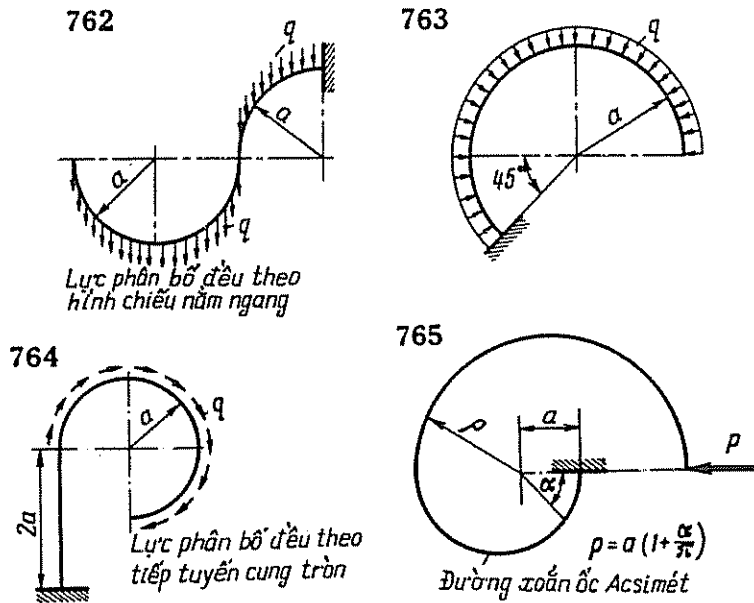


760



761





§ 38. Ứng suất

Ta xác định các ứng suất pháp σ_N , σ_M do lực dọc N và momen uốn M , ứng suất tiếp τ do lực cắt Q sinh ra ở các điểm của mặt cắt ngang thanh.

Ứng suất σ_N phân bố đều trên diện tích mặt cắt ngang F , còn ứng suất σ_M phân bố theo luật hyperbôn và được tính theo các công thức sau:

$$\sigma_N = \frac{N}{F}, \quad (172)$$

$$\sigma_M = \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r + y}, \quad (173)$$

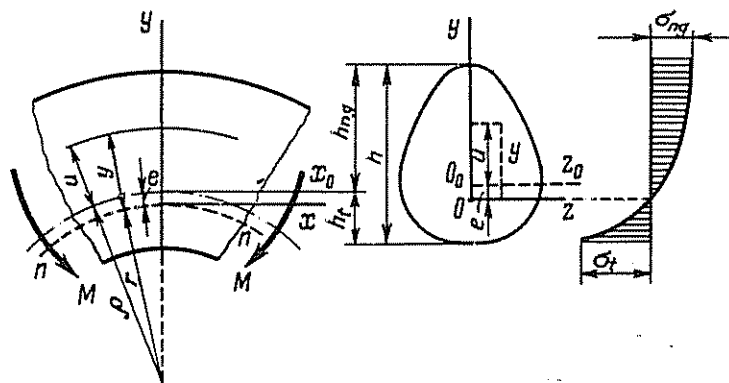
trong đó: S -- momen tĩnh của diện tích F đối với trục trung hòa z không đi qua trọng tâm mặt cắt O_0 ;

r -- bán kính cong của đường trung hòa nn ;

y -- tọa độ của điểm tính ứng suất đối với trục z (hình 157).

Đường trung hòa nn cách trục thanh về phía tâm cong của nó đoạn $e = \rho - r$, trong đó ρ -- bán kính cong của trục thanh.

Bán kính cong của đường trung hòa đối với mỗi dạng mặt cắt ngang tính theo biểu thức



Hình 157

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{(\rho + u)}} \quad (174)$$

trong đó u — tọa độ của điểm xét đối với trục trung tâm z_0 (hình 157).

Đối với mặt cắt chữ nhật

$$r = \frac{h}{\ln \frac{r_n}{r_t}}$$

đối với mặt cắt tròn

$$r = \frac{1}{2} \left[\rho + \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \right],$$

còn với mặt cắt hình thang

$$r = \frac{F}{\left(b_n + r_n \frac{b_t - b_n}{h}\right) \ln \frac{r_n}{r_t} - (b_t - b_n)}$$

trong đó r_n , r_t , b_n và b_t — bán kính cong và bề rộng tương ứng với thờ ngoài và thờ trong của mặt cắt.

Đối với các dạng khác của mặt cắt ngang giá trị r cho trong các sổ tay và trong giáo trình sức bền vật liệu.

Với các thanh độ cong không lớn lắm $\left(\frac{h}{2} > 2\right)$

có thể tìm e theo công thức gần đúng

$$e \approx \frac{i^2}{\rho} \quad (175)$$

trong đó $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$ — bán kính quán tính của mặt cắt ngang thanh đối với trục trung hòa z_0 .

Công thức (175) cho kết quả gần với lời giải chính xác nhất khi thanh có mặt cắt ngang đối xứng đối với trục z_0 .

$$\text{Vì } S = Fe \approx \frac{l}{\rho}, \quad y = u + e = u \left(1 + \frac{i^2}{\rho u}\right)$$

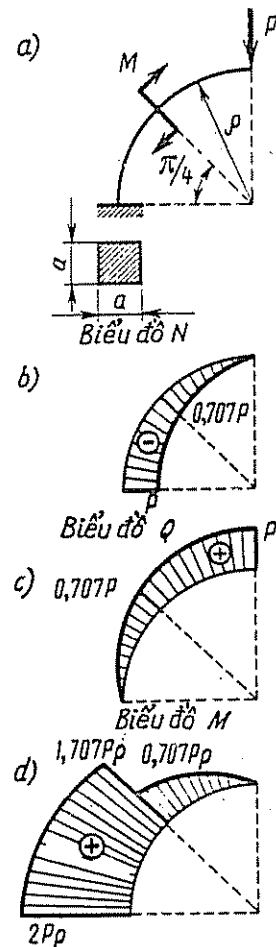
$$\text{và } r + y = \rho + u = \rho \left(1 + \frac{u}{\rho}\right),$$

trong đó u — khoảng cách từ điểm xét của mặt cắt đến trục trung hòa z_0 nên công thức (173) được viết lại như sau:

$$\sigma_M = \frac{Mu}{I} \cdot \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}} = \frac{Mu}{I} \alpha \quad (176)$$

ở đây

$$\alpha = \frac{1 + \frac{i^2}{\rho u}}{1 + \frac{u}{\rho}} \quad (177)$$



Hình 158

là hàm số của tọa độ u , nó đặc trưng cho quy luật phi tuyến của sự phân bố σ_M trên mặt cắt và phụ thuộc vào dạng cong ban đầu và cuối của thanh. Nếu $\frac{h}{\rho} \ll \frac{1}{10}$ thì α xấp xỉ đơn vị và có thể tính σ_M theo công thức đối với dầm thẳng

$$\sigma = \frac{Mu}{I}.$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất ở các thớ ngoài cùng của dầm khi $u = h_n$ và $u = -h_t$.

Các ứng suất này bằng:

$$\sigma_i = \pm \frac{M}{W_n} \alpha_n \quad (178)$$

trong đó W — momen chống uốn tương đương của mặt cắt, khi tính ứng suất ở thớ ngoài $W_n = \frac{I}{h_n}$ và ở thớ trong $W_t = \frac{I}{h_t}$, còn

$$\alpha_n = \alpha_t = \pm h_n = \frac{1 \pm \frac{i^2}{\rho h_n}}{1 \pm \frac{i}{\rho}} \quad (179)$$

Giá trị của hệ số α_n đối với một vài dạng mặt cắt cho trong bảng của phụ lục 4.

Ứng suất pháp tổng hợp ở điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang của thanh cong xác định theo công thức

$$\sigma = \frac{N}{F} + \left(\frac{Mu}{I} \right) \alpha, \quad (180)$$

trong đó nội lực N có mang dấu. Đa số các trường hợp σ_N không lớn so với σ_M .

Ứng suất tiếp τ xác định theo lực cắt Q , có giá trị thứ yếu và trong tính toán thường bỏ qua.

Có thể tính gần đúng τ theo công thức (99) như đối với thanh thẳng

$$\tau = \frac{QS'}{bI}.$$

Thí dụ 81. Cho $P = 1T$; $\rho = 50$ cm; $M = P\rho$; $a = 10$ cm (hình 158a).

Xác định $\max \sigma_n$, $\min \sigma_t$, τ_{\max} , e .

Bài giải. Theo các biểu đồ N , Q và M (hình 158 b, c, d) ứng suất pháp lớn nhất ở mặt cắt đã cho của thanh, ở đó $N = -P = -1T$ và $M = 2P\rho = 2.1.50 = 100T$ cm, còn ứng suất tiếp lớn nhất ở mặt cắt tại đầu tự do của thanh, ở đó $Q = P = 1T$.

Đối với mặt cắt hình vuông

$$W_n = W_t = W = \frac{a^3}{6} = \frac{10^3}{6} \text{ cm}^3;$$

$$F = a^2 = 10^2 \text{ cm}^2.$$

$$\alpha_n = \frac{1 \pm \frac{a}{6\rho}}{1 \pm \frac{a}{2\rho}} = \frac{1 \pm \frac{10}{6 \cdot 50}}{1 \pm \frac{10}{2 \cdot 50}} \approx \begin{cases} 0,939 \\ 1,074. \end{cases}$$

Vi vậy

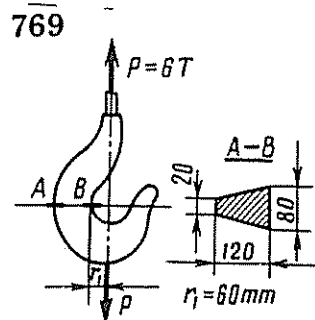
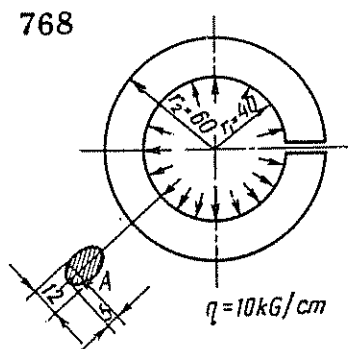
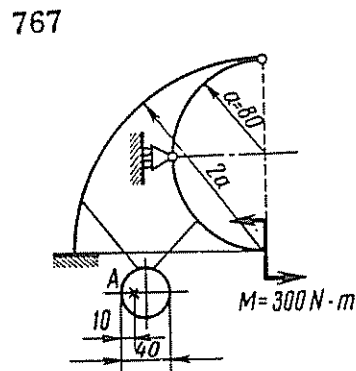
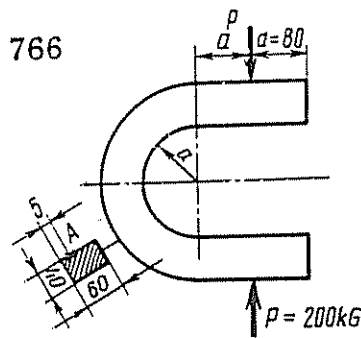
$$\max \sigma_n = \frac{M}{W} \alpha_n + \frac{N}{F} = \frac{10^5 \cdot 6}{10^3} \cdot 0,939 - \frac{10^3}{10^2} \approx 563 - 10 = 553 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\begin{aligned} \min \sigma_t &= \frac{M}{W} \alpha_t + \frac{N}{F} = -\frac{10^5 \cdot 6}{10^3} \cdot 1,074 - \frac{10^3}{10^2} \approx -644 - 10 = \\ &= -654 \text{ kG/cm}^2; \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10^3}{10^2} = 15 \text{ kG/cm}^2;$$

$$e = \frac{i^2}{\rho} = \frac{a^2}{12\rho} = \frac{10^2}{12 \cdot 50} = \frac{1}{6} \approx 0,167 \text{ cm} = 1,67 \text{ mm}.$$

Bài tập 766 – 769. Xác định ứng suất kéo lớn nhất σ_{\max} , ứng suất nén lớn nhất σ_{\min} và ứng suất pháp σ_A tại điểm A đã cho trên mặt cắt nguy hiểm.



§ 39. Tính toán độ bền

Để xác định giá trị của tải trọng an toàn tác dụng lên thanh cong hay để kiểm tra độ bền của thanh ta sử dụng công thức

$$\max [\sigma_t] = \left| \frac{M}{W_t} \alpha_t + \frac{N}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (181)$$

Chọn kích thước cần thiết của mặt cắt ngang bằng cách chọn sau đó kiểm tra. Lần chọn thứ nhất có thể xem như thanh thẳng và tính theo bất đẳng thức

$$\frac{\max |M|}{W_t} \leq [\sigma] \quad (182)$$

Kiểm tra độ bền của mặt cắt, có tính tới độ cong của thanh và lực dọc theo công thức (181). Ứng suất vượt tải không được lớn hơn 5%.

Nếu vật liệu thanh có độ bền kéo và nén khác nhau thì ở mặt cắt nguy hiểm cả thớ trong và thớ ngoài đều phải thỏa mãn điều kiện bền tương ứng với các ứng suất cho phép $[\sigma_k]$ và $[\sigma_n]$.

Thí dụ 82. Cho $[\sigma] = 4000 \text{ kG/cm}^2$, $a = 20 \text{ cm}$; $d = 1 \text{ cm}$; phương trình trục thanh $y = -a \sin \frac{\pi}{a} x$ (hình 159). Hãy xác định lực P .

Bài giải. Mặt cắt ở đỉnh của hình sin là mặt cắt nguy hiểm ở đó $M = Pa = 20P \text{ kGcm}$, $N = -P \text{ kG}$ và bán kính cong của trục thanh

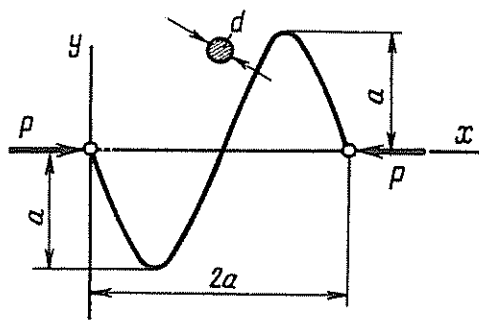
$$\rho_{x=\frac{a}{2}} = \left(\frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} \right)_{x=\frac{a}{2}} = \left(\frac{[1 + \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x]^{3/2}}{\frac{\pi^2}{a} \sin \frac{\pi}{a} x} \right)_{x=\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{a}{\pi^2} \approx 0,1a = 2 \text{ cm}.$$

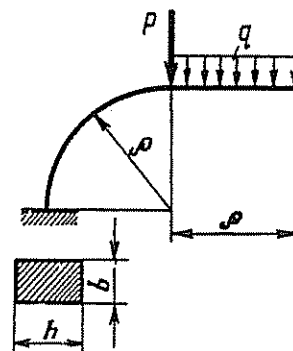
Đối với mặt cắt tròn đường kính d

$$W_n = W_t = W \approx 0,1d^3 = 0,1 \text{ cm}^3; F = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \text{ cm}^2;$$

$$\alpha_t = \frac{1 - \frac{d}{8\varphi}}{1 - \frac{d}{2\rho}} = \frac{1 - \frac{1}{8 \cdot 2}}{1 - \frac{1}{2 \cdot 2}} = 1,25.$$



Hình 159



Hình 160

Theo điều kiện bền (181):

$$\max |\sigma_t| = \frac{M}{W} \alpha_t - \frac{N}{F} = \frac{20P}{0,1} \cdot 1,25 + \frac{P}{0,785} \approx 250P \leq 4000.$$

Lực cho phép

$$P \leq \frac{4000}{250} = 16 \text{ kG.}$$

Thí dụ 83. Cho $P = 6\text{kN}$; $q = 12\text{kN/m}$; $\rho = 16 \cdot 10^{-2}\text{m}$; $b = \frac{3}{4}h$; $[\sigma] = 200\text{MN/m}^2$ (hình 160).

Xác định h và b của mặt cắt ngang thanh.

Bài giải. Ở mặt cắt nguy hiểm (tại ngàm) của thanh:

$$M = P\rho + \frac{3}{2}q\rho^2 = 6 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-2} + \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 16^2 \cdot 10^{-4} = 1421\text{Nm};$$

$$N = -P - q\rho = -6 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 10^{-2} = 7920\text{N.}$$

Các kích thước chọn của mặt cắt thanh xác định theo tính toán như đối với thanh thẳng.

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{8} > \frac{M}{[\sigma]} = \frac{1421}{200 \cdot 10^6} \approx 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7,1 \text{ cm}^3,$$

từ đó

$$h > \sqrt[3]{7,1 \cdot 8} \approx 3,84\text{cm.}$$

Khi tính đến độ cong của thanh và có cả lực dọc ở mặt cắt nguy hiểm ta ấy $h = 4\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$. Với các kích thước này

$$W = \frac{3 \cdot 16}{6} = 8\text{cm}^3; F = 3 \cdot 4 = 12\text{cm}^2,$$

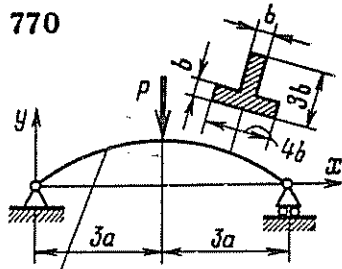
$$\alpha_t = \frac{1 - \frac{h}{6\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}} = \frac{1 - \frac{4}{6 \cdot 16}}{1 - \frac{4}{2 \cdot 16}} \approx 1,095.$$

Theo công thức (181) ứng suất tính toán ở thớ trong của thanh

$$\max |\sigma_t| = \left| \frac{M}{W} \alpha_t + \frac{N}{F} \right| = \frac{1421}{8 \cdot 10^{-6}} \cdot 1,095 + \frac{7920}{12 \cdot 10^{-4}} \approx 201,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 201,1 \text{ MN/m}^2.$$

Vi ứng suất vượt tải là 0,55% nên có thể xem sự lựa chọn mặt cắt như trên là được.

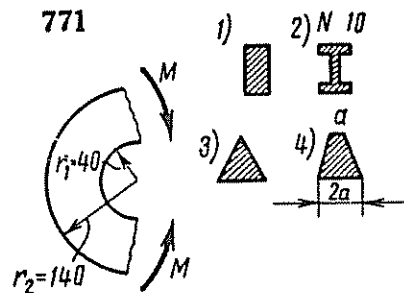
Bài tập 770 – 771. Xác định giá trị các tải trọng cho phép của P và M .



$$y = \frac{x}{9a}(6a - x)$$

$$a = 60\text{cm}; b = 20\text{cm}$$

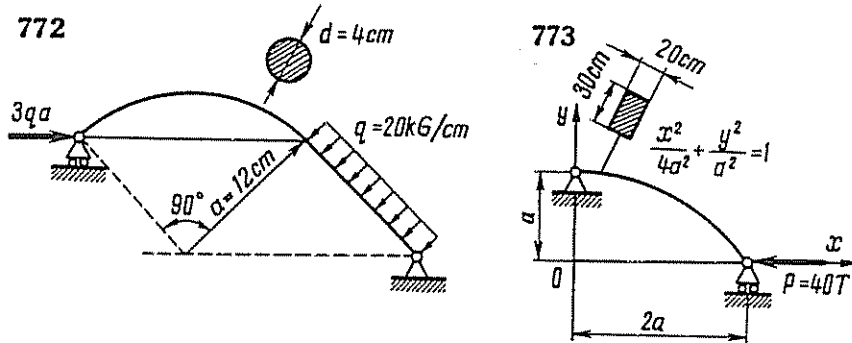
$$[\sigma_t] = 500\text{kG/cm}^2; [\sigma_n] = 1200\text{kG/cm}^2$$



$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 12,0\text{cm}^2$$

$$[\sigma] = 1000\text{kG/cm}^2$$

Bài tập 772 — 773. Kiểm tra độ bền của thanh cong. Biết ứng suất pháp cho phép $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$.



XII — TÍNH HỆ ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

§ 40. Xác định chuyển vị đàn hồi suy rộng

PHƯƠNG PHÁP LỰC SUY RỘNG GIẢ BẰNG KHÔNG

Biểu thức xác định thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong vật thể hay hệ dưới tác dụng tĩnh của các lực có thể là hàm thuần nhất, bậc hai của lực suy rộng P_i , hoặc chuyển vị suy rộng δ_i , nếu giữa P_i và δ_i tồn tại sự phụ thuộc tuyến tính.

Lực suy rộng P_i là những lực tác dụng động bất kỳ (lực, momen, nhóm lực, nhóm momen và v.v...), chúng được tách ra một cách thuận tiện để tính toán năng lượng.

Chuyển vị suy rộng δ_i là đại lượng xác định chuyển vị mà trên chuyển vị đó các lực suy rộng sinh ra công (thí dụ, lực tập trung tương ứng với chuyển vị dài, momen tương ứng với chuyển vị góc, v.v...).

Có thể xác định chuyển vị đàn hồi suy rộng δ trong vật thể hay trong hệ do ảnh hưởng của lực suy rộng theo công thức Castilianô:

$$\delta = \left(\frac{\partial U_g}{\partial P_g} \right) P_g = 0, \quad (183)$$

trong đó P_g — lực suy rộng giả tương ứng với chuyển vị suy rộng phải tìm. Lực này đặt vào vật thể hay hệ ở chỗ xác định chuyển vị; U_g — thế năng biến dạng đàn hồi của vật thể hay hệ được biểu thị bởi hàm thuần nhất bậc hai do tất cả các lực suy rộng có thật P_i và các lực suy rộng giả P_g gây nên.

Nếu ở chỗ xác định chuyển vị suy rộng có lực suy rộng P đã cho tương ứng với chuyển vị phải tìm thì việc đặt P_g không còn ý nghĩa và khi đó

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (184)$$

Nếu $\left(\frac{\partial U_g}{\partial P_g} \right) P_g = 0 > 0$ (hay $\frac{\partial U}{\partial P} > 0$) thì chiều của chuyển vị suy rộng δ trùng với chiều của P_g (hay P).

Nếu $\left(\frac{\partial U_g}{\partial P_g}\right)_{P_g=0} < 0$ (hay $\frac{\partial U}{\partial P} < 0$) thì chiều của chuyển vị suy rộng ở ngược với chiều của P_g (hay P).

Chuyển vị dài tìm được theo công thức Castilianô là hình chiếu của chuyển vị điểm đặt lực tương ứng lên đường tác dụng của nó.

PHƯƠNG PHÁP LỰC SUY RỘNG GIẢ BẰNG ĐƠN VỊ

Trong trường hợp chung hệ đàn hồi gồm các thanh thẳng chịu tác dụng của các lực có chuyển vị suy rộng xác định theo công thức Macxuen — Mo:

$$\delta = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} dx + \sum \int \frac{M_z\bar{M}_z}{EI_z} dx + \sum \int \frac{M_y\bar{M}_y}{EI_y} dx + \\ + \sum \int \frac{M_{x_0}\bar{M}_{x_0}}{GI_{x_0}} dx + \sum k_y \int \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF} dx + \sum k_z \int \frac{Q_z\bar{Q}_z}{GF} dx, \quad (185)$$

trong đó N , M_x , M_y , M_{x_0} , Q_y và Q_z — nội lực tương ứng ở mặt cắt ngang bất kỳ của mỗi đoạn trong hệ do tác dụng của tất cả các lực suy rộng lên hệ;

\bar{N} , \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_{x_0} , \bar{Q}_y , và \bar{Q}_z — cũng là nội lực như vậy nhưng do tác dụng lên hệ chỉ một lực suy rộng giả bằng đơn vị không thứ nguyên và tương ứng với chuyển vị phải tìm;

E và G — môđun đàn hồi dọc và trượt của vật liệu trong đoạn thanh;

F — diện tích mặt cắt ngang ở chỗ xác định nội lực;

I_x và I_y — momen quán tính chính trung tâm của diện tích F ;

I_{x_0} — momen quán tính khi xoắn của diện tích F ;

k_y và k_z — hệ số hình dạng mặt cắt đặc trưng cho sự phân bố không đều của ứng suất tiếp khi uốn;

dx — phần tử trên trục đoạn thanh.

Tích phân lấy theo chiều dài của mỗi đoạn, còn tổng được lấy theo tất cả các đoạn.

Đối với hệ phẳng có các thanh nối khớp chịu các lực đặt ở nút

$$\delta = \sum \frac{N\bar{N}}{EF} l, \quad (186)$$

trong đó l — chiều dài đoạn.

Đối với hệ chỉ gồm các đoạn chịu xoắn

$$\delta = \sum \int \frac{M_{x_0}\bar{M}_{x_0}}{GI_{x_0}} dx. \quad (187)$$

Đối với hệ khung kiểu dầm có các nội lực N và Q ảnh hưởng ít đến biến dạng

$$\delta = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx. \quad (188)$$

Đối với hệ gồm các thanh có độ cong nhỏ

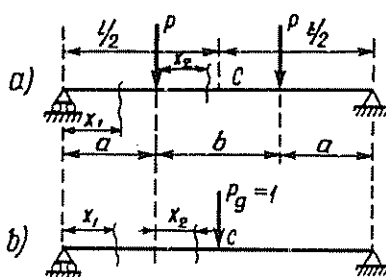
$$\delta = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds, \quad (189)$$

trong đó ds — phần bố trên trục đoạn cong.

Khi tính toán chính xác hơn

$$\delta = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds. \quad (190)$$

Thí dụ 84. Cho P, a, l, E, I (hình 161 a). Xác định đường tên của độ võng f .



Hình 161

Bài giải. Ta xác định độ võng lớn nhất f ở giữa dầm theo công thức (188), công thức này có thể viết như sau:

$$f = \frac{1}{EI} \sum \int M\bar{M} dx$$

Momen uốn ở các mặt cắt ngang bất kỳ của dầm:

Do tác dụng của lực P đã cho

$$M_a = Px_1; \quad M_b = Pa;$$

do tác dụng của lực giả bằng đơn vị $P_g = 1$ (hình 161b)

$$\bar{M}_a = \frac{x_1}{2}; \quad \bar{M}_b = \frac{a + x_2}{2}.$$

Giá trị của độ võng phải tìm

$$f = 2 \frac{P}{2EI} \left[\int_0^a x_1^2 dx + a \int_0^{\frac{1}{2} - a} (a + x_2) dx_2 \right] = \frac{Pa^3}{24EI} \left(3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right).$$

Ta xác định ảnh hưởng của lực cắt đến độ võng

$$f_Q = \frac{k}{GF} \sum \int Q\bar{Q} dx.$$

Vì trên các đoạn dầm lực cắt do tải trọng giả đã cho tương ứng bằng

$$Q_a = P; Q_b = 0; \bar{Q}_a = \frac{1}{2}; \bar{Q}_b = \frac{1}{2},$$

nên

$$f_Q = 2k \frac{Pa}{2GF} = k \frac{Pa}{GF} \text{ và } \frac{f_Q}{f} = 24k \frac{EI}{GFa^2 \left(3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right)} =$$

$$= 24k \frac{E}{G} \frac{i^2}{a^2 \left(3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right)},$$

trong đó

$$i^2 = \frac{I}{F}.$$

Ta nhận thấy rằng đối với vật liệu đẳng hướng tỷ số $\frac{E}{G}$ nằm trong giới hạn $2 \leq \frac{E}{G} \leq 3$, tỷ số $\frac{f_Q}{f}$ sẽ có giá trị biên như sau:

$$\frac{f_Q}{f} = (48 \div 72) \frac{ki^2}{a^2 \left(3 \frac{l^2}{a^2} - 4 \right)}$$

Nếu $a \rightarrow 0$ thì $\frac{f_Q}{f} \rightarrow (16 \div 24)k \frac{i^2}{l^2},$

nếu $a = \frac{l}{2}$ thì $\frac{f_Q}{f} = (24 \div 36)k \frac{i^2}{l^2} = 1,5 \left(\frac{f_Q}{f} \right)_{a \rightarrow 0}$

Trường hợp thứ hai $\left(a = \frac{l}{2} \right)$ lực cắt gây ra cho độ võng ảnh hưởng lớn nhất, ta xét dầm có mặt cắt hình chữ nhật và hình tròn.

Vi hình chữ nhật chiều cao h và hình tròn đường kính tương ứng có $i^2 = \frac{h^2}{12}$ và $i^2 = \frac{d^2}{16}$, $k = \frac{6}{5}$ và $k = \frac{32}{27}$ nên đối với dầm mặt cắt hình chữ nhật

$$\frac{f_Q}{f} = (2,4 \div 3,6) \frac{h^2}{l^2}$$

và mặt cắt hình tròn

$$\frac{f_Q}{f} = \left(\frac{16}{9} \div \frac{8}{3} \right) \frac{d^2}{l^2} \approx (1,778 \div 2,667) \frac{d^2}{l^2}$$

Từ đó rõ ràng rằng f_Q có thể bằng 5% của f và lớn hơn khi

$$l \leq \left(\sqrt{\frac{2,4}{0,05}} \div \sqrt{\frac{3,6}{0,05}} \right) h \approx (7 \div 8)h$$

và

$$l \leq \left(\sqrt{\frac{16}{9 \cdot 0,05}} + \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 0,04}} \right) d \approx (6 + 7)d$$

tức là đối với dầm không quá ngắn.

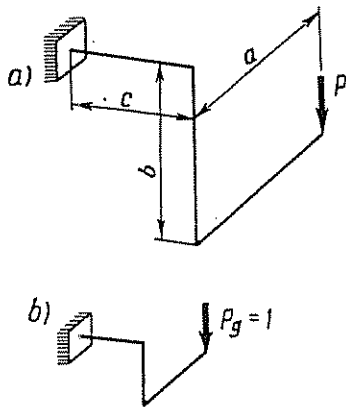
Thí dụ dầm chữ I số 20a bằng thép cán thì $\frac{E}{G} = 2,5$; $i = 8,37\text{cm}$; $k = 2,78$ và

$$\frac{f_0}{f} = 24 \cdot 2,78 \cdot 2,5 \frac{8,37^2}{2l^2} = \frac{5840}{l^2}.$$

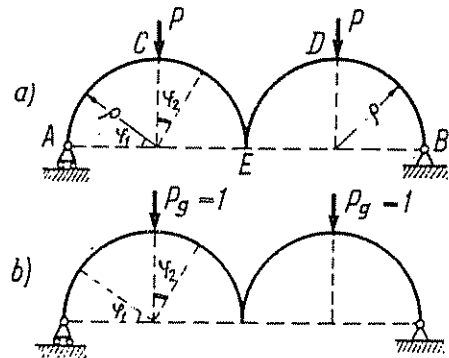
Vậy f_0 là 5% của f khi

$$l = \sqrt{\frac{5840}{0,05}} \approx 341\text{cm} \approx 17h.$$

Thí dụ 85. Cho: $P, a, b, c, F, I, I_{x_0}, E, G$ (hình 162a) xác định chuyển vị thẳng đứng δ của điểm đặt lực P khi có tính tất cả các hình thức biến dạng của thanh.



Hình 162



Hình 163

Bài giải. Ta xác định chuyển vị phải tìm δ theo công thức (185).

Chỉ có đoạn b chịu kéo. Lực dọc do lực P và $P_g = 1$ gây ra (hình 162b): $N = P$; $\bar{N} = 1$.

Tất cả các đoạn của thanh đều chịu uốn. Momen uốn và lực cắt ở mặt cắt ngang bất kỳ của các đoạn thanh do tác dụng của lực P và $P_g = 1$ tương ứng là:

$$M_a = Px; \bar{M}_a = x; M_b = Pa; \bar{M}_b = a; M_c = Px; \bar{M}_c = x;$$

$$Q_a = P; \bar{Q}_a = 1; Q_b = 0; \bar{Q}_b = 0; Q_c = P; \bar{Q}_c = 1.$$

Chỉ có đoạn c chịu xoắn. Momen xoắn do tác dụng của lực P và $P_g = 1$ là $M_{x_0} = Pa$; $\bar{M}_{x_0} = a$.

Thay các nội lực tìm được vào công thức (185) ta được giá trị của chuyển vị phải tìm như sau:

$$\delta = \frac{Pb}{EF} + \frac{P}{EI} \left(\int_0^a x^2 dx + a^2b + \int_0^c x^2 dx \right) + \frac{kP}{GF} (a+c) + \frac{Pa^2c}{GI_{x_0}} =$$

$$= P \left\{ \frac{1}{E} \left[\frac{b}{F} + \frac{1}{I} \left(\frac{a^3}{3} + a^2b + \frac{c^3}{3} \right) \right] + \frac{1}{G} \left[\frac{k}{F} (a+c) + \frac{a^2c}{I_{x_0}} \right] \right\}.$$

Thí dụ 86. Cho P, ρ, E, I , thanh cong có độ cong nhỏ (hình 163a).

Xác định chuyển vị thẳng đứng δ_c của mặt cắt C .

Bài giải. Để không làm mất dạng đối xứng của hệ đối với trục thẳng đứng đi qua điểm E ta đặt $P_g = 1$ ở các mặt cắt C và D (hình 163b) và chỉ xét một nửa hệ.

Momen uốn ở các mặt cắt ngang bất kỳ xác định bởi góc φ_1 và φ_2 có giá trị như sau:

— do lực P :

$$M_I = -P\rho(1 - \cos\varphi_1); \quad M_{II} = -P\rho;$$

— do lực $P_g = 1$.

$$M_I = -\rho(1 - \cos\varphi_1); \quad M_{II} = -\rho.$$

Theo công thức (189) ta có chuyển vị phải tìm:

$$\delta_c = \delta_v = \frac{P}{EI} \left(\int_0^{\pi/2} M_I \bar{M}_I d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M_{II} \bar{M}_{II} d\varphi_2 \right) =$$

$$= \frac{P\rho^3}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi_1)^2 d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} d\varphi_2 \right] =$$

$$= \left(\frac{5}{4} \pi - 2 \right) \frac{P\rho^3}{EI} \approx 1,927 \frac{P\rho^3}{EI}.$$

Thí dụ 87. Cho q là cường độ của tải trọng phân bố đều theo phương nằm ngang, $\rho, P = 2q\rho, E, I$ (hình 164a).

Xác định chuyển vị δ của gối di động.

Bài giải: Từ điều kiện tĩnh học của hệ đã cho ta có:

$$B_x = 4q\rho; \quad A_y = 4q\rho; \quad B_y = 2q\rho.$$

Momen uốn trên các đoạn của hệ do lực đã cho sinh ra là:

$$M_I = P_x = 2q\rho x; \quad M_{II} = -P\rho(1 + \sin\varphi) - A_y\rho(1 - \cos\varphi) +$$

$$+ \frac{q\rho^2}{2} (1 - \cos\varphi)^2 = \frac{q\rho^2}{2} (\cos^2\varphi + 6\cos\varphi - 4\sin\varphi - 11);$$

$$M_{III} = B_x x = 4q\rho x.$$

Từ điều kiện tĩnh học cho hệ bổ sung (hình 164b) ta có:

$$B'_x = 1; \quad A'_y = \frac{1}{2}; \quad B'_y = \frac{1}{2}.$$

Momen uốn trên các đoạn của hệ hỗ sung:

$$\begin{aligned} \bar{M}_I = x; \quad \bar{M}_{II} &= -\rho(1 + \sin\varphi) - \frac{1}{2}\rho(1 - \cos\varphi) = \\ &= \frac{\rho}{2}(\cos\varphi - 2\sin\varphi - 3); \quad \bar{M}_{III} = x. \end{aligned}$$

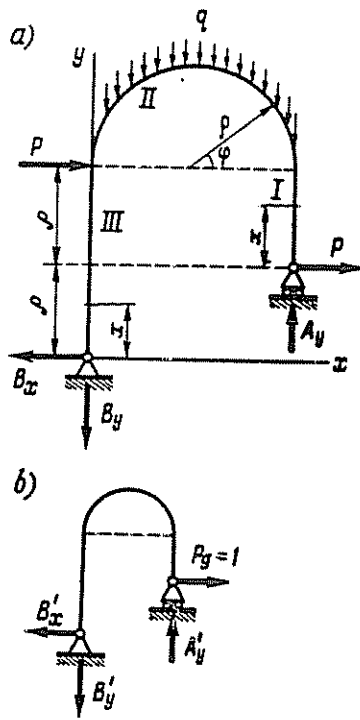
Theo công thức (189) chuyển vị δ thu được bằng:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left[2q\rho \int_0^\rho x^2 dx + \frac{q\rho^4}{4} \int_0^\pi (\cos^2\varphi + 6\cos\varphi - 4\sin\varphi - 11)(\cos\varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2\sin\varphi - 3) d\varphi + 4q\rho \int_0^{2\rho} x^2 dx \right] = \frac{q\rho^4}{EI} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\pi + 64 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{3} + 4\pi + 33\pi \right) + \frac{32}{3} \right] = \frac{q\rho^4}{EI} \left(27 + \frac{77}{8}\pi \right) \approx 57,24 \frac{q\rho^4}{EI}. \end{aligned}$$

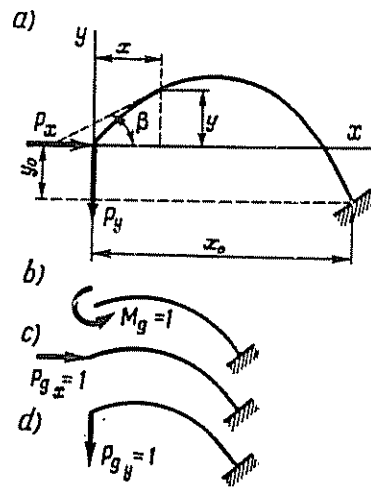
Thí dụ 88. Cho P_x , P_y , s — chiều dài trục, thanh cong theo đường cong bất kỳ, E , I (hình 165a).

Xác định góc xoay θ , chuyển vị ngang δ_x và chuyển vị đứng δ_y của các mặt cắt đặt lực P_x và P_y .

Bài giải. Ở mặt cắt ngang bất kỳ có tọa độ trọng tâm x , y



Hình 164



Hình 165

và góc nghiêng của tiếp tuyến với trục x là β , momen uốn và lực dọc có giá trị như sau:

do tác dụng của các lực cho P_x và P_y (hình 165 a):

$$M = P_x y + P_y x; N = -P_x \cos\beta + P_y \sin\beta;$$

do tác dụng của $M_g = 1$ (hình 165 b), $\bar{M} = 1; \bar{N} = 0;$

do tác dụng của $P_{gx} = 1$ (hình 165 c), $\bar{M} = y; \bar{N} = -\cos\beta;$

do tác dụng của $P_{gy} = 1$ (hình 165 d), $\bar{M} = x; \bar{N} = \sin\beta.$

Theo công thức (189) ta có:

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(P_x \int_0^s y ds + P_y \int_0^s x ds \right) = \frac{1}{EI} (P_x S_x + P_y S_y),$$

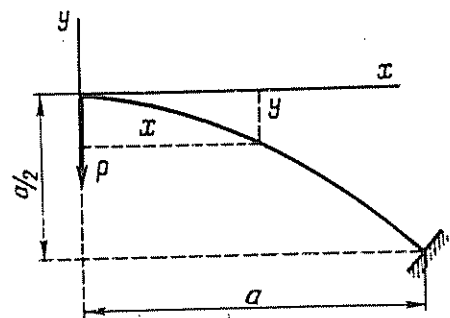
trong đó $S_x = \int_0^s y ds$ và $S_y = \int_0^s x ds$ — momen tĩnh của cung s đối với trục x và y ;

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{1}{EI} \left(P_x \int_0^s y^2 ds + P_y \int_0^s xy ds \right) + \frac{1}{EF} \left(P_x \int_0^s \cos^2 \beta ds - P_y \int_0^s \sin \beta \cos \beta ds \right) = \\ &= \frac{1}{EI} (P_x I_x + P_y I_{xy}) + \frac{1}{EF} \left(P_x \int_0^s \cos^2 \beta ds - \frac{1}{2} P_y \int_0^s \sin 2\beta ds \right), \end{aligned}$$

trong đó $I_x = \int_0^s y^2 ds$ và $I_{xy} = \int_0^s xy ds$ — momen quán tính và momen quán tính ly tâm của cung s đối với trục x và hệ trục xy ;

$$\begin{aligned} \delta_y &= \frac{1}{EI} \left(P_x \int_0^s yx ds + P_y \int_0^s x^2 ds \right) + \\ &+ \frac{1}{EF} \left(-P_x \int_0^s \cos \beta \sin \beta ds + \right. \\ &\left. + P_y \int_0^s \sin^2 \beta ds \right) = \frac{1}{EI} (P_x I_{xy} + P_y I_y) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{EF} \left(-\frac{P_x}{2} \int_0^s \sin 2\beta ds + P_y \int_0^s \sin^2 \beta ds \right),$$



Hình 166

trong đó $I_y = \int_0^s x^2 ds$ – momen quán tính trục của cung s đối với trục y .

Ta xét thanh có độ cong nhỏ, trục thanh cong theo parabol $y = \frac{-x^2}{2a}$;
 $P_x = 0$; $P_y = P$ (hình 166).

Vì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a} \text{ và } ds = \frac{dx}{a} \sqrt{a^2 + x^2},$$

nên

$$S_y = \frac{1}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \left| \frac{1}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} \right|_0^a = \frac{a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1);$$

$$I_{xy} = -\frac{1}{2a^2} \int_0^a x^3 \sqrt{a^2 + x^2} dx = -\frac{1}{2a^2} \left| \frac{1}{5} \sqrt{(a^2 + x^2)^5} - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{3} \sqrt{(a^2 + x^2)^3} \right|_0^a = \frac{a^3}{15} (\sqrt{2} + 1).$$

$$I_y = \frac{1}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \left| \frac{x}{4} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a}{8} [x \sqrt{a^2 + x^2} + \right. \\ \left. + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})] \right|_0^a = \frac{a^3}{8} \left(3\sqrt{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right).$$

Thay các giá trị tìm được vào công thức θ , δ_x , δ_y ta được:

$$\theta = \frac{PS_y}{EI} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \cdot \frac{Pa^2}{EI} \approx 0,609 \frac{Pa^2}{EI};$$

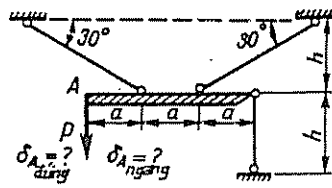
$$\delta_x = \frac{EI_{xy}}{EI} = -\frac{\sqrt{2} + 1}{15} \cdot \frac{Pa^3}{EI} \approx -0,161 \frac{Pa^3}{EI};$$

$$\delta_y = \frac{PI_y}{EI} = \frac{1}{8} \left(3\sqrt{2} + \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) \frac{Pa^3}{EI} \approx 0,432 \frac{Pa^3}{EI}.$$

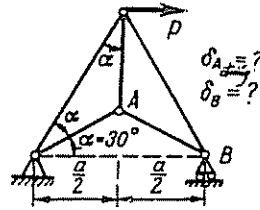
Bài tập 774 – 787. Xác định các chuyển vị suy rộng ghi trong hình vẽ.

Trong tất cả các bài tập ở đây và về sau khi tính chuyển vị suy rộng ta xem như đã biết độ cứng của mặt cắt thanh. Nếu không có chỉ dẫn thêm thì giả định modun đàn hồi của vật liệu và các đặc trưng hình học của các thanh trong hệ và của các đoạn trong thanh bằng nhau. Trong bài tập 782, 783 khi tính độ võng có xét đến lực cắt.

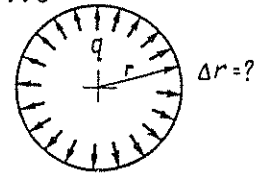
774



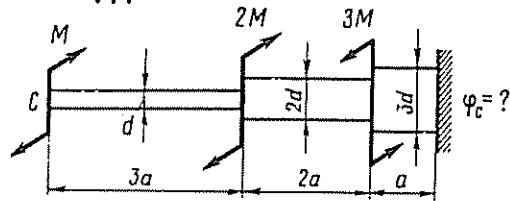
775



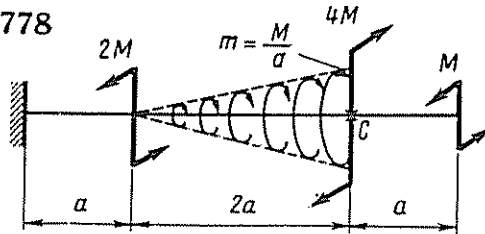
776



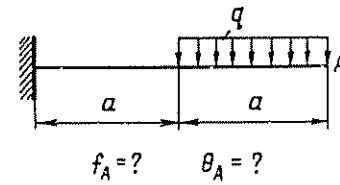
777



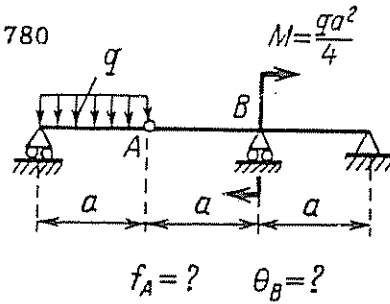
778



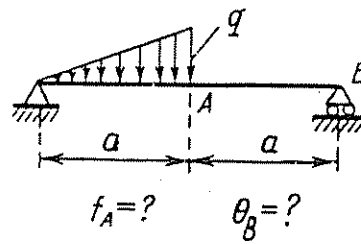
779



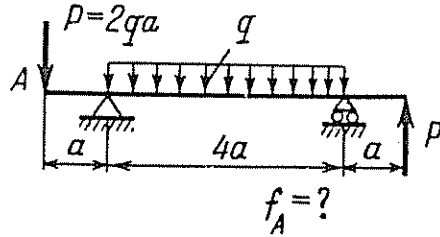
780



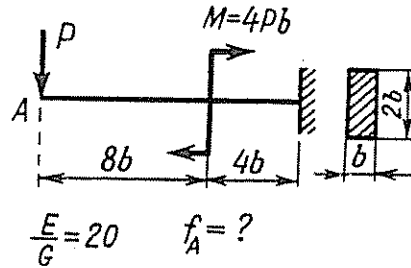
781



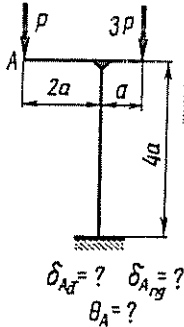
782



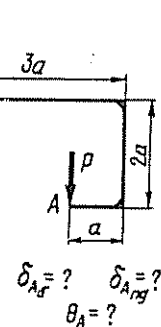
783



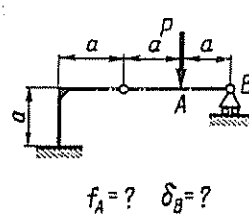
784



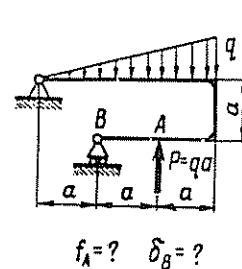
785



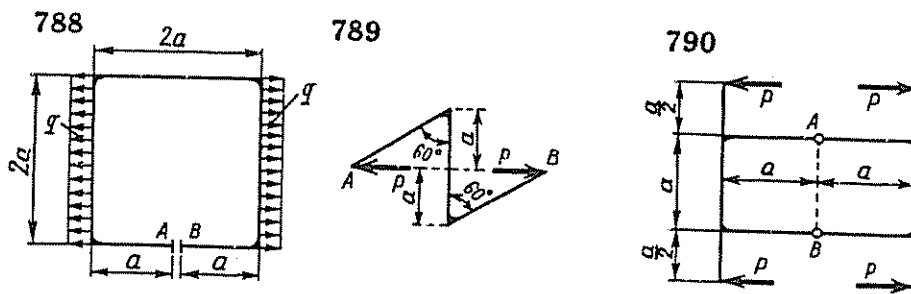
786



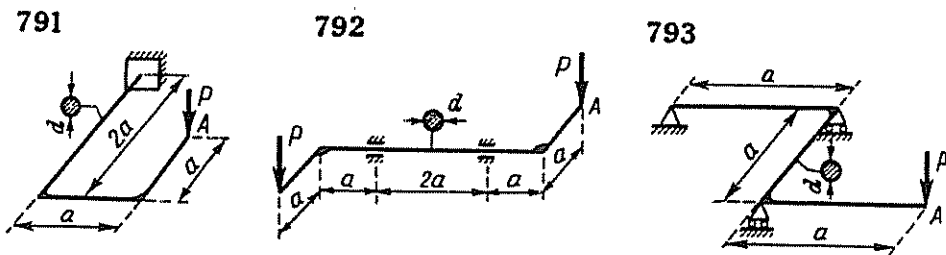
787



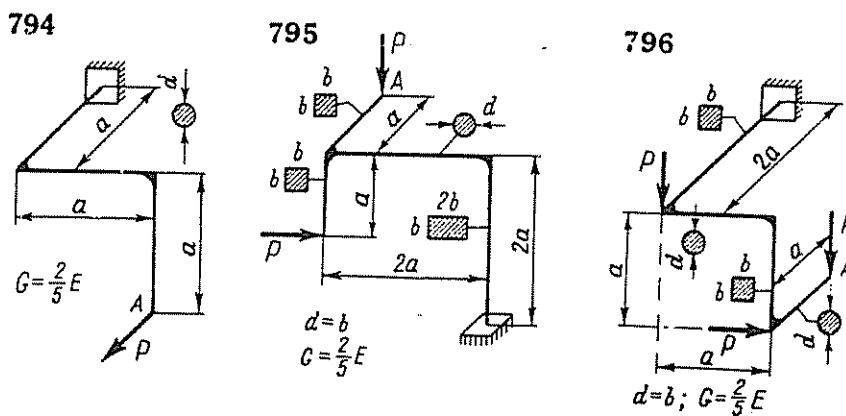
Bài tập 788 — 790. Xác định sự thay đổi khoảng cách δ_{AB} giữa các mặt cắt A và B .



Bài tập 791—793. Xác định chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt A .

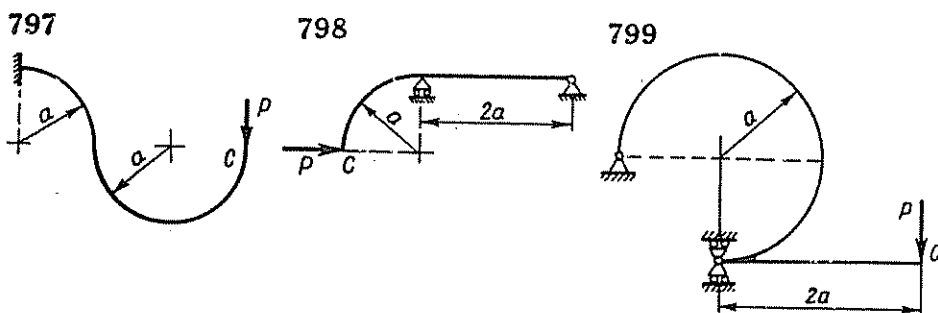


Bài tập 794 — 796. Xác định chuyển vị dài δ của mặt cắt A theo phương của lực P đặt tại mặt cắt đó.

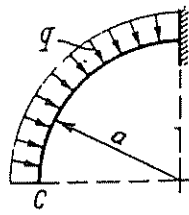


Bài tập 797 — 805. Xác định chuyển vị thẳng đứng δ_a , chuyển vị nằm ngang δ_n và góc xoay θ của mặt cắt C .

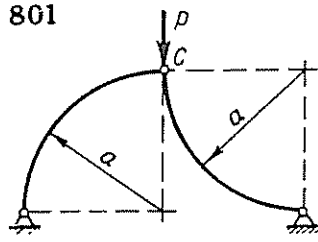
Trong bài tập 801 xác định góc xoay của mặt cắt bên trái khớp.



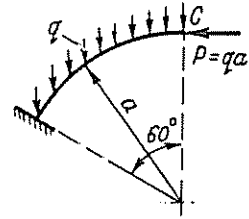
800



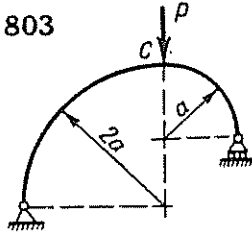
801



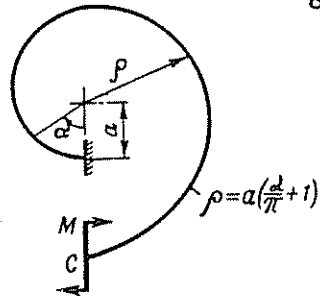
802



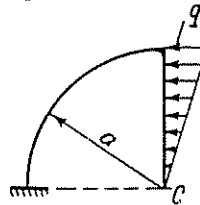
803



804

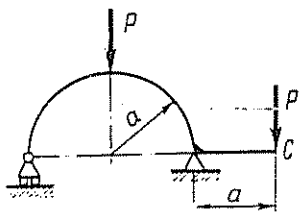


805

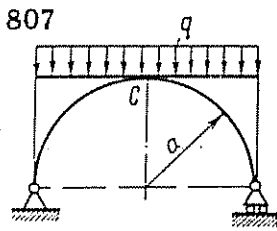


Bài tập 806 — 811. Xác định chuyển vị δ của gối di động và chuyển vị thẳng đứng δ_a của mặt cắt C .
 Trong bài 811 chỉ xác định δ .

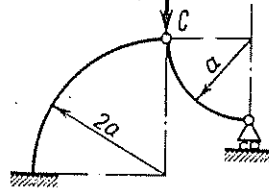
806



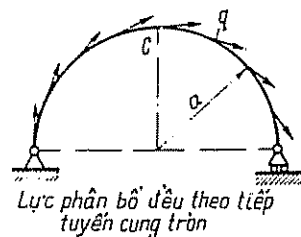
807



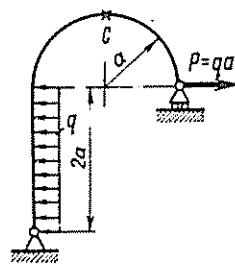
808



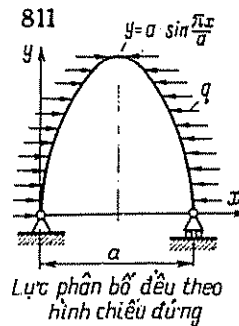
809



810

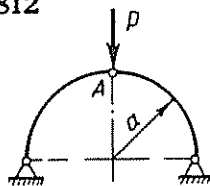


811

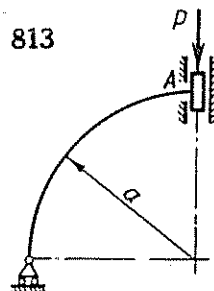


Bài tập 812 — 816. Xác định chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt A .

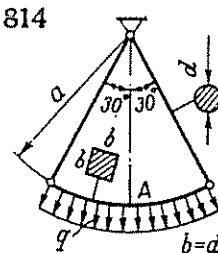
812

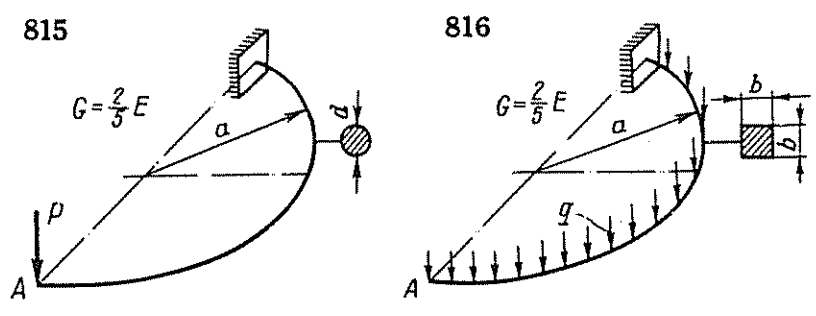


813

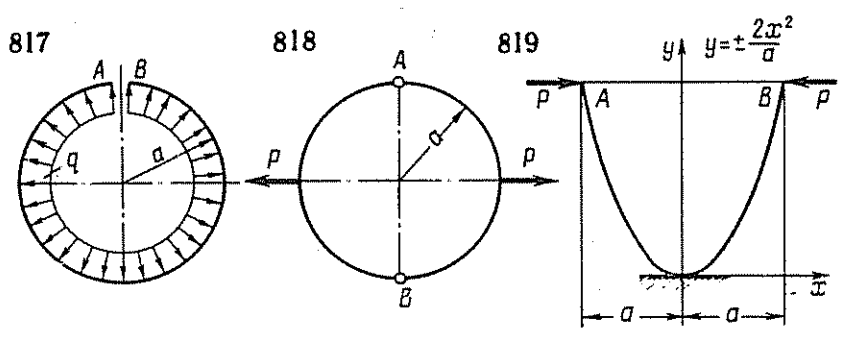


814

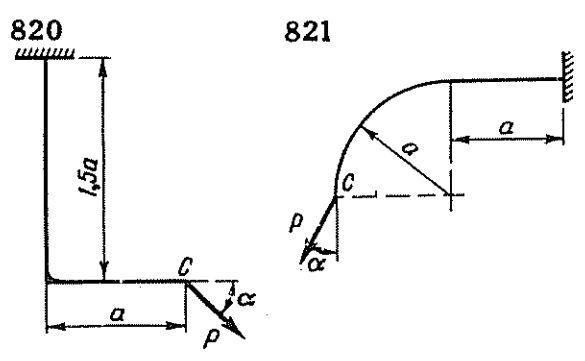




Bài tập 817 — 819. Xác định lượng biến đổi khoảng cách δ_{AB} giữa các mặt cắt A và B.



Bài tập 820 — 821. Xác định góc α khi mặt cắt C chỉ chuyển dịch theo phương thẳng đứng.



PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ -- QUY TẮC VÊRÉSAGHIN.

Nếu độ cứng của mặt cắt ngang thanh trong đoạn không đổi thì mỗi tích phân của công thức Macxuen-Mo (185) có thể tính bằng tích giữa diện tích ω của biểu đồ nội lực do các lực đã cho (hình 167) với tọa độ ξ của biểu đồ nội lực

do lực suy rộng giả bằng đơn vị (nhất thiết phải là đường thẳng) tương ứng với trọng tâm của biểu đồ thứ nhất.

Trong thực tế quy tắc Verésaghin được áp dụng để xác định chuyển vị dài và chuyển vị góc của hệ khung kiểu dầm do tác dụng của momen uốn. Công thức xác định chuyển vị có dạng:

$$\delta = \sum \frac{\omega \bar{\xi}}{EI}, \quad (191)$$

trong đó tổng tính cho tất cả các đoạn của thanh.

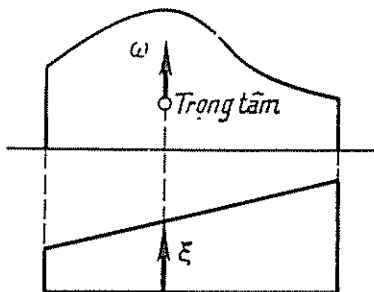
Có thể phân biệt các đoạn không chỉ theo tải trọng mà cả theo dấu của biểu đồ M hay \bar{M} và theo sự không thay đổi của mặt cắt ngang. Đối với biểu đồ M và \bar{M} cùng dấu, tích $\omega \bar{\xi} > 0$, còn đối với biểu đồ khác dấu $\omega \bar{\xi} < 0$.

Trên đoạn, vị trí các biểu đồ M và \bar{M} đối với đường chuẩn có thể bất kỳ, nhưng khi cùng dấu chúng ở về một phía của đường chuẩn.

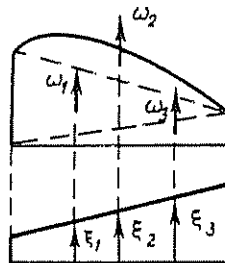
Có thể phân biểu đồ M phức tạp thành nhiều phần, xác định các diện tích $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ (hình 168) và trọng tâm các hình đó. Đo các tung độ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ dưới trọng tâm mỗi phần. Khi đó

$$\omega \bar{\xi} = \omega_1 \bar{\xi}_1 + \omega_2 \bar{\xi}_2 + \omega_3 \bar{\xi}_3 + \dots$$

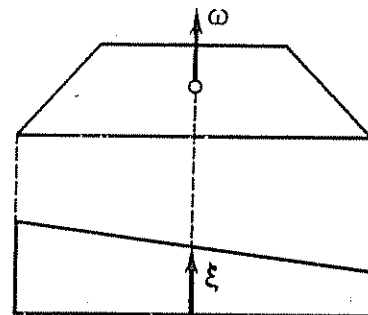
Trong trường hợp khi trên đoạn nào đó của thanh biểu đồ \bar{M} là đường thẳng (hình 169), có thể nhân diện tích ω của biểu đồ M với tọa độ tương ứng $\bar{\xi}$ của biểu đồ \bar{M} .



Hình 167



Hình 168



Hình 169

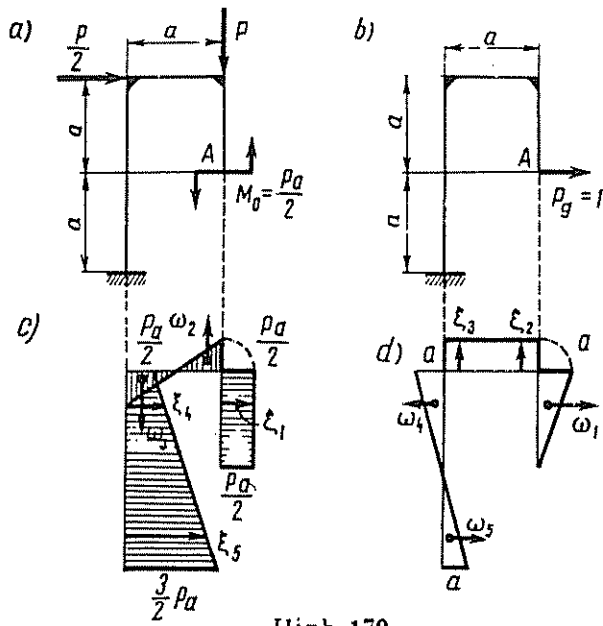
Nếu trên chiều dài đoạn thanh mặt cắt ngang thay đổi thì tính diện tích ω phải là của biểu đồ momen uốn tính đối chứ không phải momen uốn thật.

$$M_{td} = M \frac{I_0}{I},$$

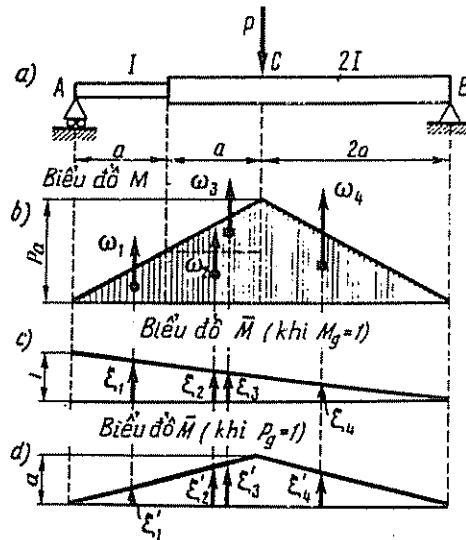
trong đó I_0 — momen quán tính của mặt cắt không đổi quy ước của đoạn; I — momen quán tính của mặt cắt thay đổi.

Thi dụ 89. Cho P, a, E, I (hình 170 a).

Xác định chuyển vị nằm ngang δ_A của mặt cắt A .



Hình 170



Hình 171

Bài giải. Các biểu đồ momen uốn vẽ trên hình 170c, d, biểu đồ có gạch gạch là do các lực đã cho, còn biểu đồ không gạch gạch là do lực giả $P_g = 1$ đặt ở mặt cắt A hướng sang phải theo phương nằm ngang (hình 170b). Vì $\omega_1 =$

$$= \frac{a^2}{2}; \xi_1 = \frac{Pa}{2}; \omega_2 = \frac{Pa^2}{8}; \xi_2 = a; \omega_3 = \frac{Pa^2}{8}; \xi_3 = a; \omega_4 = \frac{a^2}{2}; \xi_4 = \frac{2}{3}Pa; \omega_5 = \frac{a^2}{2}; \xi_5 = \frac{4}{3}Pa; \text{ nên khi chú ý đến quy tắc dấu theo công thức}$$

(191) chuyển vị phải tìm là :

$$\delta_A = \frac{1}{EI} (\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 - \omega_3 \xi_3 + \omega_4 \xi_4 - \omega_5 \xi_5) = \frac{7}{12} \frac{Pa^3}{EI}$$

Thí dụ 90. Cho P, a, E, I (hình 171 a).

Xác định θ_A và f_C .

Bài giải. Biểu đồ M do các lực đã cho vẽ trên hình 171 b.

Trên hình 171 c là biểu đồ \bar{M} do momen giả $M_g = 1$ đặt tại mặt cắt A theo chiều kim đồng hồ, còn trên hình 171 d là biểu đồ \bar{M} do lực giả $P_g = 1$ đặt ở mặt cắt C theo phương thẳng đứng và chiều đi xuống.

Vì

$$\omega_1 = \frac{Pa^2}{4}; \xi_1 = \frac{5}{6}; \xi'_1 = \frac{a}{3}, \omega_2 = \frac{Pa^2}{2}; \xi_2 = \frac{5}{8}; \xi'_2 = \frac{3}{4}a$$

$$\omega_3 = \frac{Pa^2}{4}, \xi_3 = \frac{7}{12}, \xi'_3 = \frac{5}{6}a, \omega_4 = Pa^2, \xi_4 = \frac{1}{3}, \xi'_4 = \frac{2}{3}a.$$

nên (nếu tính đến sự khác nhau của momen quán tính ở các mặt cắt trên đoạn) theo công thức (191) chuyển vị phải tìm là:

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left[\omega_1 \xi_1 + \frac{1}{2} \left(\omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \omega_4 \xi_4 \right) \right] =$$

$$= \frac{29}{48} \frac{Pa^2}{EI};$$

$$f_C = \frac{1}{EI} \left[\omega_1 \xi_1 + \frac{1}{2} \left(\omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \omega_4 \xi_4 \right) \right] =$$

$$= \frac{17}{24} \frac{Pa^3}{EI}.$$

Thí dụ 91. Cho $l, E, [\sigma]$, dầm có độ bền đều với chiều cao h không đổi (hình 172a).

Xác định θ_A và f_A .

Bài giải. Theo điều kiện cấu tạo của dầm có độ bền đều

$$W_x = \frac{I_x}{h} = \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Ở mặt cắt nguy hiểm

$$W = \frac{2I}{h} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Nếu quy về dầm có mặt cắt nguy hiểm không thay đổi thì $I_0 = I$ và momen uốn tính đổi

$$M_{td} = M_x \frac{I_0}{I_x} = M_{\max} = \text{const.}$$

Biểu đồ momen tính đổi (hình 172b) là hình chữ nhật có chiều cao

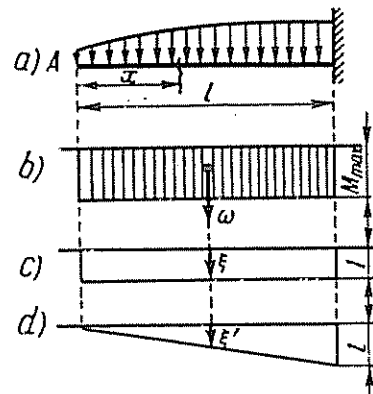
$$M_{\max} = \frac{2I[\sigma]}{h}.$$

Trên hình 172c, d vẽ các biểu đồ M do $M_g = 1$ và $P_g = 1$ đặt ở mặt cắt A, $M_g = 1$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ, $P_g = 1$ hướng thẳng đứng xuống dưới.

Vì $\omega = M_{\max} l = \frac{2I[\sigma]}{h} l$; $\xi = 1$ và $\xi' = \frac{l}{2}$ nên các chuyển vị phải tìm:

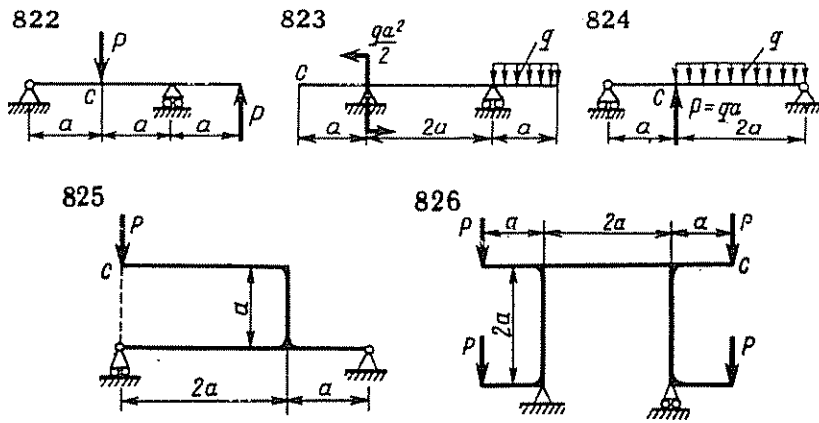
$$\theta_A = \frac{\omega \xi}{EI} = \frac{M_{\max} l}{EI} = \frac{2[\sigma]l}{Eh};$$

$$f_A = \frac{\omega \xi'}{EI} = \frac{M_{\max} l^2}{2EI} = \frac{[\sigma]l^2}{Eh}.$$

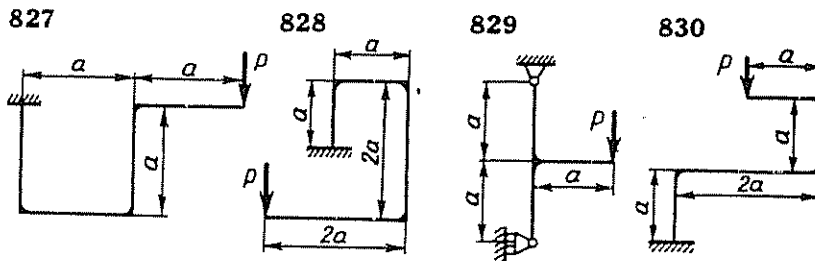


Hình 172

Bài tập 822 — 826. Xác định độ võng f và góc xoay θ của mặt cắt C.

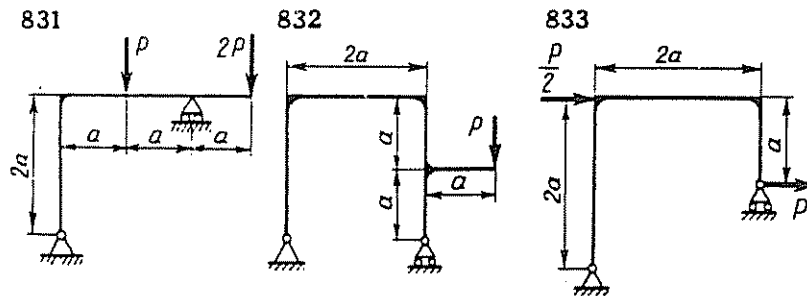


Bài tập 827 — 830. Xác định chuyển vị đứng δ_d và chuyển vị ngang δ_n của mặt cắt đặt lực P .



Bài tập 831 — 833.

Xác định chuyển vị δ của gối khớp di động.



§ 41. Giải hệ siêu tĩnh

NGUYÊN LÝ CÔNG CỤ TIÊU.

Có thể giải hệ đàn hồi siêu tĩnh theo nguyên lý công cụ tiêu. Theo nguyên lý này các ẩn lực suy rộng thừa có giá trị sao cho với giá trị đó lực suy rộng tác dụng lên hệ thực hiện một công cụ tiêu.

Cách giải bài toán được tiến hành theo sơ đồ chung như sau:

Đưa hệ siêu tĩnh về hệ tĩnh định bất biến hình và gọi hệ mới này là hệ cơ bản.

Đề hệ đã cho tương đương với hệ cơ bản, trên hệ cơ bản phải đặt tất cả các lực tác dụng P_i và tất cả các ẩn lực suy rộng thừa X_i .

Xác định thế năng biến dạng đàn hồi của hệ cơ bản như là một hàm bậc hai của P_i và X_i .

Vi chuyển vị suy rộng tương ứng với các ẩn lực suy rộng thừa bằng không nên ta có phương trình:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (192)$$

Tất cả các ẩn lực suy rộng thừa X_i được xác định từ phương trình này.

Các phương trình (192) là hàm số của các ẩn lực suy rộng thừa và là điều kiện thế năng biến dạng đàn hồi cực tiểu

Đối với hệ thanh phương trình của nguyên lý công cực tiểu có thể biểu thị theo công thức Macxuen-Mo.

Nếu hệ gồm các thanh thẳng chịu kéo, nén, uốn phẳng và xoắn thì mỗi phương trình (192) được viết như sau:

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} dx + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \sum k \int \frac{Q\bar{Q}}{GF} dx + \sum \int \frac{M_{x_0}\bar{M}_{x_0}}{GI_{x_0}} dx = 0 \quad (193)$$

trong đó N, M, Q và M_{x_0} — nội lực tương ứng ở mặt cắt ngang bất kỳ của mỗi đoạn trên hệ cơ bản do tất cả các lực đã cho P_i và tất cả các ẩn lực suy rộng thừa X_i ;

$\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$ và \bar{M}_{x_0} — cũng là nội lực như vậy trên hệ cơ bản nhưng chỉ do một $X_i = 1$ trong các ẩn lực suy rộng thừa.

Vì vậy để giải bài toán siêu tĩnh bậc n cần phải xét hệ ở $(n + 1)$ trạng thái: trong đó một trạng thái cơ bản tương đương có tác dụng của tất cả các lực P_i, X_i và n trạng thái bổ sung, mỗi trạng thái chỉ có một lực $X_i = 1$ tác dụng.

Với hệ thanh nối khớp phẳng chịu các lực đặt ở nút, phương trình (193) có thể rút gọn như sau:

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} dx = 0 \quad (194)$$

Với hệ khung kiểu dầm phẳng trong đó lực dọc N và lực cắt Q nhỏ có thể dùng phương trình rút gọn:

$$\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = 0. \quad (195)$$

Với hệ gồm các thanh chỉ chịu xoắn:

$$\sum \int \frac{M_{x_0}\bar{M}_{x_0}}{GI_{x_0}} dx = 0. \quad (196)$$

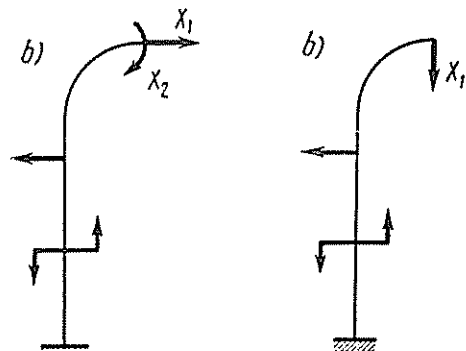
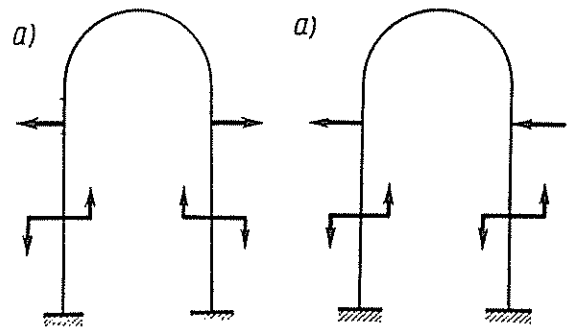
Với hệ thanh siêu tĩnh phẳng có độ cong nhỏ:

$$\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = 0. \quad (197)$$

Khi tính toán chính xác hơn ta dùng phương trình có xét đến lực dọc

$$\sum \int \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds = 0. \quad (198)$$

Giải hệ siêu tĩnh cần phải tiến hành sao cho hệ cơ bản thu được đơn giản và tính toán thuận lợi nhất.

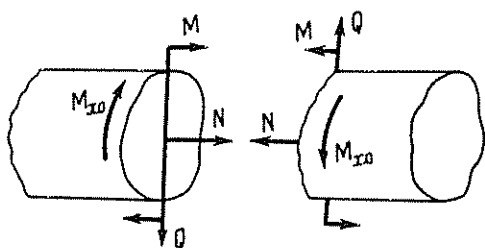


Hình 173.

Hình 174

Về mặt hình học, hệ đối xứng đối với một trục và tải trọng đối xứng (hình 173a) hay phản đối xứng (hình 174a) cắt hệ theo mặt phẳng đối xứng là hợp lý. Nó làm giảm số ẩn lực suy rộng thừa phải tìm và cho phép chỉ phải xét một phần bị cắt của hệ (hình 173b và 174b).

Trên mặt cắt trùng với mặt phẳng đối xứng, khi tải trọng đối xứng trục thì các nội lực phản đối xứng Q và M_{x_0} bằng không, còn khi tải trọng phản đối xứng thì các nội lực đối xứng N và M bằng không (hình 175).



Hình 175

Đối với hệ thanh thẳng có thể tính các tích phân trong phương trình (193) bằng cách nhân biểu đồ momen.

Khi giải hệ siêu tĩnh ta có thể xác định chuyển vị suy rộng của mặt cắt nào đó bằng cách xét hệ đã cho hoặc hệ cơ bản tương đương bất kỳ. Hợp lý nhất là chọn hệ sao cho việc xác định nội lực do lực suy rộng giả bằng đơn vị sinh ra đơn giản nhất.

Thí dụ 92. Cho $P = 8T$, $a = 1m$; $\beta_1 = 30^\circ$; $\beta_2 = 60^\circ$; $E_I = E_{II} = E_{III} = E = 2 \cdot 10^6 kG/cm^2$; $F_I = F_{II} = F_{III} = 2cm^2$ (hình 176.a). Xác định σ_I , σ_{II} , σ_{III} và δ_A .

Bài giải. Vì các thanh của hệ đã cho có độ cứng mặt cắt như nhau và chỉ chịu kéo với nội lực không đổi trên suốt chiều dài nên để giải hệ siêu tĩnh ta sử dụng công thức rút gọn (194)

$$\sum N \bar{N} l = 0. \quad (a)$$

Hệ cơ bản chọn như trên hình 176b. Từ điều kiện tĩnh học đối với hệ này ta có:

$$N_I = \frac{P - X}{2 \cos \beta_1} = \frac{P - X}{\sqrt{3}}; \quad N_{II} = \frac{X}{2 \cos \beta_2} = X; \quad N_{III} = X.$$

Từ điều kiện tĩnh học đối với hệ bổ sung (hình 176c) ta thu được:

$$\bar{N}_I = -\frac{1}{2 \cos \beta_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \bar{N}_{II} = \frac{1}{2 \cos \beta_2} = 1; \quad \bar{N}_{III} = 1.$$

Ta nhận thấy $L_I = \frac{a}{\sin \beta_1} = 2m$, $l_{II} = \frac{a}{\sin \beta_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} m$,

$l_{III} = a(\cot \beta_1 - \cot \beta_2) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} m$, để xác định các ẩn lực thừa, phương trình (a) có dạng:

$$\begin{aligned} 2N_I \bar{N}_I l_I + 2N_{II} \bar{N}_{II} l_{II} + N_{III} \bar{N}_{III} l_{III} &= -2 \frac{P - X}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 + 2X \frac{2}{\sqrt{3}} + X \frac{2}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2}{3} [-2P + (2 + 3\sqrt{3})X] = 0, \end{aligned}$$

Từ đó

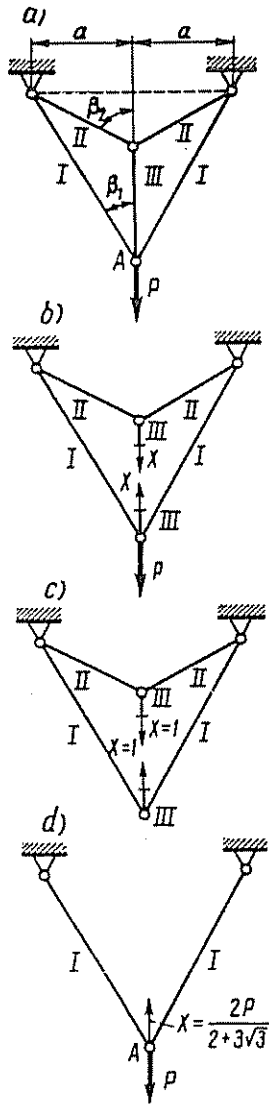
$$X = N_{III} = N_{II} = \frac{2P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0,278P$$

và

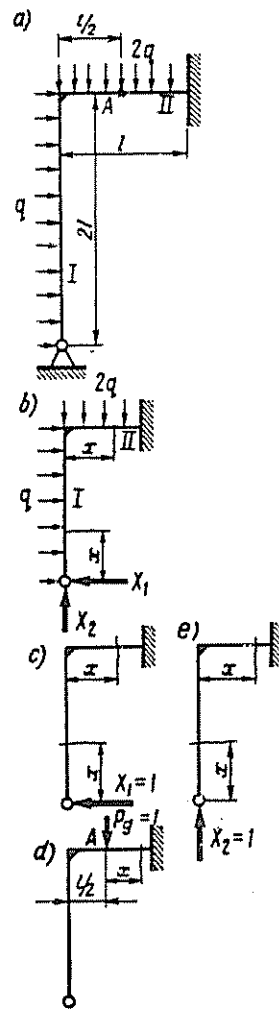
$$N_I = \frac{P - \frac{2P}{2 + 3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{3P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0,417 \cdot P$$

Ứng suất pháp trên các mặt cắt ngang thanh của hệ:

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{X}{F} \approx \frac{0,278 \cdot 8 \cdot 10^3}{2} = 1112 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$



Hình 176



Hình 177

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{0,417 \cdot 8 \cdot 10^3}{2} = 1668 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Để xác định chuyển vị thẳng đứng δ_A của nút A ta dùng hệ tĩnh định trên hình 176d.

Vi ở hệ này $N_1 = \frac{3P}{2 + 3\sqrt{3}}$, còn do lực giả $P_g = 1$ đặt ở nút A theo hướng thẳng đứng xuống dưới

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{2\cos\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ nên chuyển vị phải tìm}$$

$$\delta_A = \frac{2}{EF} N_1 \bar{N}_1 l = \frac{2}{EF} \cdot \frac{3P}{2 + 3\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0,417 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 1,732} \approx 0,19 \text{cm.}$$

Thí dụ 93. Cho q, l, E, I (hình 177a). Xác định f_A .

Bài giải. Vì độ cứng mặt cắt ngang của các đoạn thẳng đứng và nằm ngang của nửa khung như nhau nên để giải hệ siêu tĩnh ta dùng phương trình rút gọn (195)

$$\sum \int M \cdot \bar{M} dx = 0. \quad (b)$$

Momen uốn M_I và M_{II} trong các đoạn của hệ cơ bản tương đương (hình 177b) và \bar{M}_I, \bar{M}_{II} trong các đoạn của hệ bổ sung (hình 177c, d) tương ứng bằng

$$M_I = X_1 x - \frac{qx^2}{2}, \quad M_{II} = X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2;$$

$$\bar{M}_I = x, \quad \bar{M}_{II} = 2l,$$

$$\bar{M}_I = 0, \quad \bar{M}_{II} = x.$$

Ta viết hai phương trình (b):

$$\int_0^{2l} \left(X_1 x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx + 2l \int_0^l (X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2) dx = 0,$$

$$\int_0^l (X_1 2l + X_2 x - 2ql^2 - qx^2) x dx = 0.$$

Sau khi lấy tích phân các phương trình này có dạng:

$$\left. \begin{aligned} 20X_1 + 3X_2 - 20ql &= 0, \\ 12X_1 + 4X_2 - 15ql &= 0. \end{aligned} \right\}$$

từ đó

$$X_1 = \frac{35}{44} ql; \quad X_2 = \frac{15}{11} ql$$

Để xác định độ võng f_A của mặt cắt A ta tìm M cho hệ cơ bản tương đương và \bar{M} cho hệ bổ sung (hình 177e) ở mặt cắt nằm bên phải mặt cắt A với khoảng cách x :

$$M = X_1 2l + X_2 \left(\frac{l}{2} + x \right) - 2ql^2 - q \left(\frac{l}{2} + x \right)^2 =$$

$$= - \frac{q}{44} (44x^2 - 16lx - l^2),$$

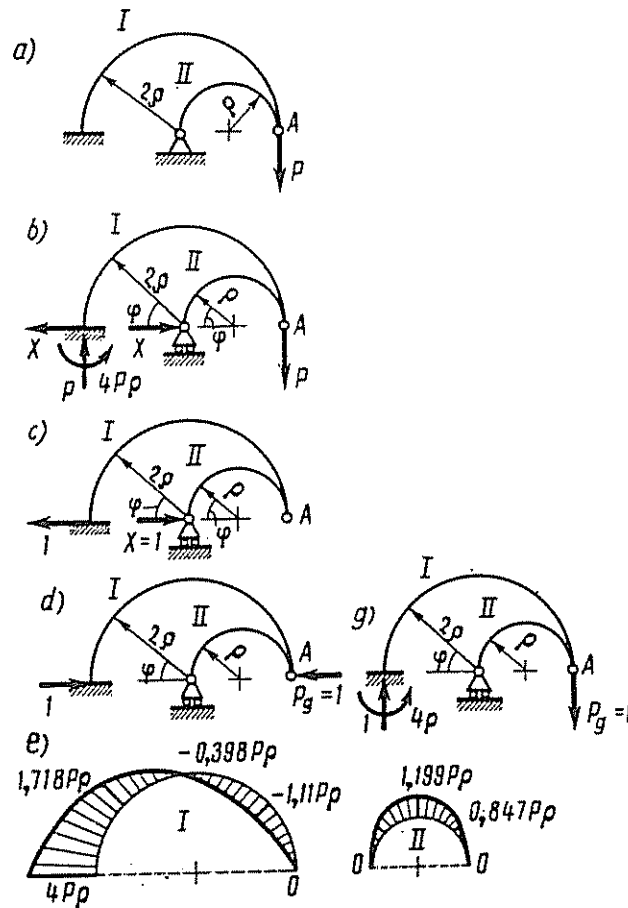
$$\bar{M} = -x.$$

Theo công thức (188) ta có độ võng f phải tìm

$$f_A = - \frac{q}{44EI} \int_0^{l/2} (44x^2 - 16lx - l^2)x dx = - \frac{5ql^4}{2112EI}.$$

Thí dụ 94. Cho $P, \rho, E, I_{II} = 2I_I$, thanh có độ cong nhỏ (hình 178a).

Hãy xác định chuyển vị ngang δ_x , chuyển vị đứng δ_y của khớp A và vẽ biểu đồ momen uốn.



Hình 178

Bài giải. Vì các thanh có độ cong nhỏ và môđun đàn hồi dọc của vật liệu thanh như nhau nên để giải hệ siêu tĩnh ta sử dụng công thức rút gọn (197)

$$\sum \frac{1}{EI} \int M \bar{M} ds = 0 \quad (c)$$

Ta lấy phản lực ngang X của gối khớp làm ẩn lực thừa. Dùng các phương trình tĩnh học, khi trên hệ có khớp treo A ta tính được các phản lực ở ngàm của hệ cơ bản tương đương (hình 178b) theo lực đã cho P và ẩn lực thừa X . Trên hệ bổ sung (hình 178c) có lực $X = 1$ nên ở ngàm chỉ xuất hiện phản lực nằm ngang.

Momen uốn trên các đoạn I và II của hệ cơ bản và hệ bổ sung thu được tương ứng bằng:

$$M_I = 4P\rho - 2P\rho(1 - \cos\varphi) - X2\rho\sin\varphi = 2P\rho(1 + \cos\varphi) - 2X\rho\sin\varphi;$$

$$M_{II} = X\rho\sin\varphi; \bar{M}_I = -2\rho\sin\varphi \text{ và } \bar{M}_{II} = \rho\sin\varphi.$$

Vì các phần tử trục thanh có giá trị:

$$ds_I = 2\rho d\varphi; ds_{II} = \rho d\varphi; I_{II} = 2I_I,$$

nên phương trình (c) có dạng:

$$8 \int_0^\pi X \sin\varphi - P(1 + \cos\varphi) \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{1}{2} X \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = 0.$$

Sau khi tính tích phân ta được:

$$\frac{17}{4} \pi X - 16P = 0,$$

Từ đó

$$X = \frac{64}{17\pi} P \approx 1,198P$$

Để xác định chuyển vị ngang δ_x và chuyển vị đứng δ_y của khớp A ta dùng các hệ bổ sung trên hình 178d và 178e.

Vì trên đoạn II của các hệ này không có nội lực nên ta chỉ xét đoạn I. Các momen uốn trong đoạn: do lực đã cho

$$M_I = 2P\rho(1 + \cos\varphi) - 2X\rho\sin\varphi = 2P\rho \left(1 + \cos\varphi - \frac{64}{17\pi} \sin\varphi \right), \text{ do lực ngang } P_g = 1;$$

$$\bar{M}_I = 2\rho\sin\varphi$$

và do lực đứng $P_g = 1$:

$$\bar{M}_I = 4\rho - 2\rho(1 - \cos\varphi) = 2\rho(1 + \cos\varphi).$$

Vậy chuyển vị phải tìm:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{2\rho}{EI_I} \int_0^\pi M_I \bar{M}_I d\varphi = \frac{8P\rho^3}{EI_I} \int_0^\pi \left(1 + \cos\varphi - \frac{64}{17\pi} \sin\varphi \right) \sin\varphi d\varphi = \\ &= \frac{16}{17} \cdot \frac{P\rho^3}{EI_I} \approx 0,941 \frac{P\rho^3}{EI_I}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_y &= \frac{2\rho}{EI_I} \int_0^\pi M_I \bar{M}_I d\varphi = \frac{8P\rho^3}{EI_I} \int_0^\pi \left(1 + \cos\varphi - \frac{64}{17\pi} \sin\varphi \right) \times \\ &\times (1 + \cos\varphi) d\varphi = 8 \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{128}{17\pi} \right) \frac{P\rho^3}{EI_I} \approx 18,5 \frac{P\rho^3}{EI_I}. \end{aligned}$$

Các biểu đồ momen uốn M_I và M_{II} vẽ trên hình 178g

Với hệ siêu tĩnh bậc một, phương trình chính tắc của phương pháp lực có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0,$$

vậy ảnh lực thừa suy rộng có giá trị

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad (200)$$

Nếu hệ siêu tĩnh bậc một được xét là hệ khung phẳng kiểu dầm hay hệ gồm các thanh cong có độ cong nhỏ, trong đó vai trò của lực dọc và lực cắt nhỏ thì

$$\delta_{1P} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds, \quad \delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} ds$$

$$X_1 = -\frac{\sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds}{\sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} ds}, \quad (201)$$

trong đó ds — phân tử dài của đoạn trục.

Thí dụ 95. Cho P, q, a (hình 179a).

Giải hệ siêu tĩnh, nếu khi tính biến dạng các đoạn chỉ xét momen uốn.

Bài giải. Ta chọn phân lực gối di động làm ảnh lực thừa X_1 . Vì chỉ trên đoạn chiều dài $2a$, $M\bar{M} \neq 0$ và $\bar{M}^2 \neq 0$ và trên đoạn này của hệ cơ bản (hình 179b) và hệ

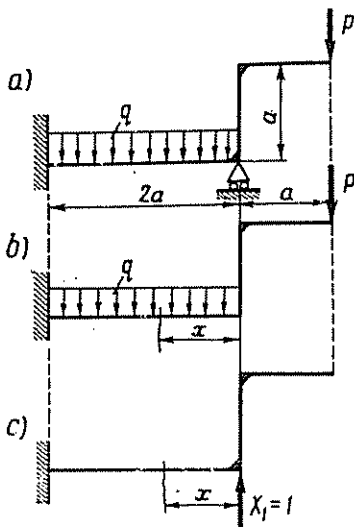
bổ sung (hình 179c) $M = -P(a+x) - \frac{qx^2}{2}$, $\bar{M} = x$, nên theo công thức (201)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\int_0^{2a} M\bar{M}dx}{\int_0^{2a} \bar{M}^2dx} = \frac{\int_0^{2a} \left[P(a+x) + \frac{qx^2}{2} \right] xdx}{\int_0^{2a} x^2dx} = \\ &= \frac{\frac{14}{3}Pa^3 + 2qa^4}{\frac{8}{3}a^3} = \frac{1}{4}(7P + 3qa). \end{aligned}$$

Thí dụ 96. Cho q, a, E, I (hình 180a). Hãy vẽ biểu đồ momen uốn.

Bài giải. Để giải hệ siêu tĩnh ta cắt khung bằng mặt cắt giữa thanh ngang (hình 180b).

Hệ cơ bản được vẽ trên hình 180c, còn hệ bổ sung cùng với biểu đồ momen uốn do $X_1 = 1, X_2 = 1$ và $X_3 = 1$ vẽ trên hình 180d, e, g.



Hình 179

Vì biểu đồ \bar{M} do $X_1 = 1$ và $X_3 = 1$ là các biểu đồ đối xứng, còn biểu đồ \bar{M} do $X_2 = 1$ phản đối xứng, nên các hệ số phụ $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$, $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ và phương trình chính tắc của phương pháp lực có dạng :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ta tìm các hệ số δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} và $\delta_{13} = \delta_{31}$ bằng phương pháp nhân biểu đồ :

$$EI\delta_{11} = 2 \cdot 3a \cdot \frac{3}{2} a \cdot \frac{2}{3} 3a = 18a^3$$

$$EI\delta_{22} = 2 \left(a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot 3a \cdot a \right) = \frac{20}{3} a^3;$$

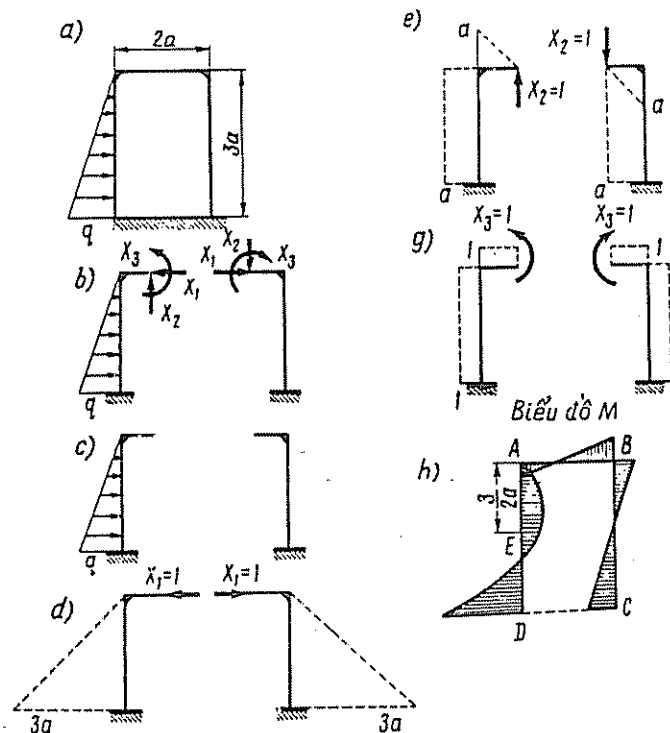
$$EI\delta_{33} = 2 (1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 3a \cdot 1) = 8a;$$

$$EI\delta_{13} = EI\delta_{31} = 2 \cdot 1 \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a = 9a^2$$

Ta xác định các số hạng tự do theo tích phân Mo.

$$EI\delta_{1P} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} x dx = - \frac{27}{10} qa^4;$$

$$EI\delta_{2P} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} a dx = - \frac{9}{8} qa^4;$$



Hình 180

$$EI\delta_{3P} = - \int_0^{3a} \frac{qx^3}{18a} dx = - \frac{9}{8} qa^3$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình chính tắc và biến đổi ta có:

$$\left. \begin{aligned} 20aX_1 + 10X_3 &= 3qa^2, \\ 160X_2 &= 27qa, \\ 72aX_1 + 64X_3 &= 9qa^2. \end{aligned} \right\}$$

Từ đó

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3qa^2 & 10 \\ 9qa^2 & 64 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20a & 10 \\ 72a & 64 \end{vmatrix}} = \frac{192 - 90}{1280 - 720} qa \approx 0,1821qa;$$

$$X_2 = \frac{27}{160} qa \approx 0,1688qa;$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 20a & 3qa^2 \\ 72a & 9qa^2 \end{vmatrix}}{560a} = \frac{180 - 216}{560} qa^2 \approx -0,0643qa^2.$$

Dùng phương pháp cộng ta được biểu đồ momen uốn M trên tất cả các đoạn khung (hình 180h):

Ở mặt cắt A $M = 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 = 0,1045qa^2;$

Ở mặt cắt B $M = -0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 \cdot 1 = -0,2331qa^2;$

Ở mặt cắt C $M = 0,1821qa \cdot 3a - 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 = 0,3132qa^2.$

Ở mặt cắt D $M = 0,1821qa \cdot 3a + 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 -$
 $-\frac{q}{18a} 27a^3 = -0,8492qa^2;$

Ở mặt cắt E $M = 0,1821qa \cdot 1,5a + 0,1688qa \cdot a - 0,0643qa^2 -$
 $-\frac{q}{18a} \cdot \frac{27}{8} a^3 = 0,1902qa^2.$

Thí dụ 97. Cho $a, b, c, d, E, G, [\sigma], \alpha, \Delta t^\circ > 0$ (hình 181a). Hãy viết điều kiện bền của hệ trên đoạn c .

Bài giải. Hệ cơ bản cùng với sự thay đổi hình dạng của nó khi tăng nhiệt độ lên Δt° vẽ trên hình 181b, còn hệ bổ sung trên hình 181c.

Vi

$$\delta_{1t} = -\alpha b \Delta t, \text{ còn } \delta_{11} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left(\int_0^a x^2 dx + a^2 b + \int_0^c x^2 dx \right) +$$

$$+ \frac{a^2 c}{GI_\rho} = \frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left(\frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{c^3}{3} \right) + \frac{a^2 c}{GI_\rho} \text{ nên}$$

$$X_1 = - \frac{\delta_{1t}}{\delta_{11}} = - \frac{\alpha b \Delta t}{\frac{b}{EF} + \frac{1}{EI} \left(\frac{a^3}{3} + a^2 b + \frac{c^3}{3} \right) + \frac{a^2 c}{GI_\rho}},$$

trong đó

$$F = \frac{\pi d^2}{4}, I = \frac{\pi d^4}{64}, I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Ở mặt cắt nguy hiểm của đoạn, momen uốn
 $M = X_1 c$, momen xoắn $M_{x_0} = X_1 a$.

Điều kiện bền

$$\frac{\sqrt{M^2 + (\eta M_{x_0})^2}}{W} = \frac{X_1 \sqrt{c^2 + (\eta a)^2}}{W} \leq [\sigma]$$

trong đó $W = \frac{\pi d^3}{32}$, $\eta = 1$ theo lý thuyết bền thứ ba hay $\eta = \sqrt{0,75}$ theo lý thuyết bền thứ tư.

Thí dụ 98. Cho $P, \rho, E_I, I_I, E_{II}, F_{II}$, thanh cong có độ cong nhỏ (hình 182a). Hãy xác định chuyển vị δ của gối di động.

Bài giải. Ta giải hệ bằng cách cắt các thanh I và II ở gối di động (hình 182b). Hệ cơ bản và hệ bổ sung là các hệ vẽ trên hình 182c và d.

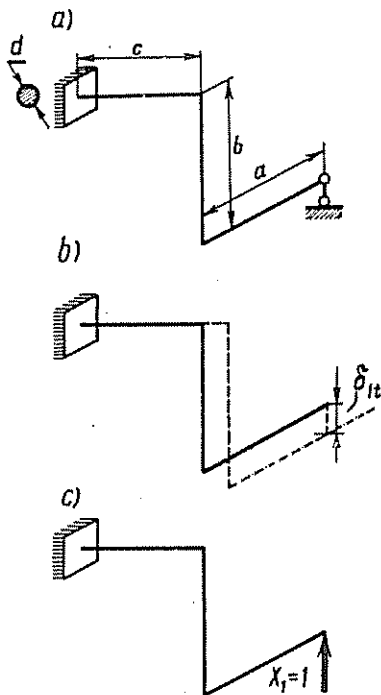
vì

$$\delta_{1P} = -\frac{2}{E_I I_I} \int_0^{\pi/2} \frac{P}{2} \rho (1 - \cos \varphi) \times$$

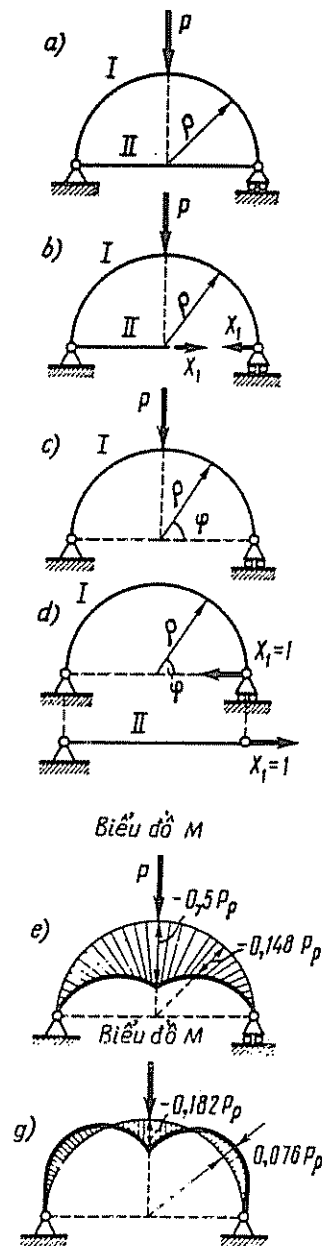
$$\times \rho \cdot \sin \varphi \cdot \rho d\varphi = -\frac{P \rho^3}{2 E_I I_I};$$

$$\delta_{11} = -\frac{2}{E_I I_I} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\varphi +$$

$$+ \frac{2\rho}{E_{II} F_{II}} = \frac{\pi \rho^3}{2 E_I I_I} + \frac{2\rho}{E_{II} F_{II}},$$



Hình 181



Hình 182

nên

$$X_1 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho^3}{2E_1I_1} \cdot \frac{1}{\frac{\pi\rho^3}{2E_1I_1} + \frac{2\rho}{E_{II}F_{II}}} =$$

$$= \frac{P}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{E_1I_1}{\rho^2 E_{II}F_{II}}}$$

Chuyển vị phải tìm δ được xác định như độ dãn dài tuyệt đối của thanh kéo II, tức là

$$\delta = \frac{X_1 2\rho}{E_{II}F_{II}} = \frac{2P\rho}{\pi E_{II}F_{II}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \frac{E_1I_1}{\rho^2 E_{II}F_{II}}}$$

Nếu không có thanh kéo II (tức là $E_{II}F_{II} = 0$) thì

$$X_1 = 0 \text{ và } \delta = \frac{P\rho^3}{2E_1I_1}.$$

Nếu cả hai gối đều cố định tức là $E_{II}F_{II} = \infty$) thì

$$X_1 = \frac{P}{\pi} \text{ và } \delta = 0.$$

Với trường hợp thứ nhất ($E_{II}F_{II} = 0$) momen uốn ở mặt cắt bất kỳ

$$M = -\frac{P}{2}\rho(1 - \cos\varphi).$$

Biểu đồ M như trên hình 182e.

Với trường hợp thứ hai ($E_{II}F_{II} = \infty$) momen uốn ở mặt cắt bất kỳ

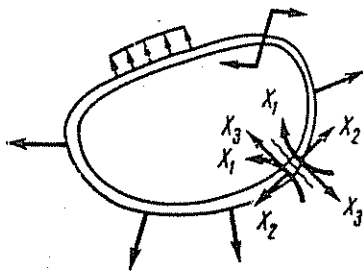
$$M = P\rho \left(\frac{\sin\varphi}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{2} \right).$$

Biểu đồ momen như trên hình 182g.

§ 42. Tính vành mỏng phẳng

Hệ thanh đàn hồi phẳng khép kín có chiều dài các đoạn lớn hơn đáng kể so với kích thước mặt cắt ngang được xem là vành mỏng phẳng.

Đó là hệ siêu tĩnh bậc ba. Ấn lực thừa là momen uốn X_1 , lực dọc X_2 và lực cắt X_3 , tức là các nội lực ở mặt cắt ngang bất kỳ của vành (hình 183). Vì vậy hệ cứng khép kín là hệ siêu tĩnh trong.



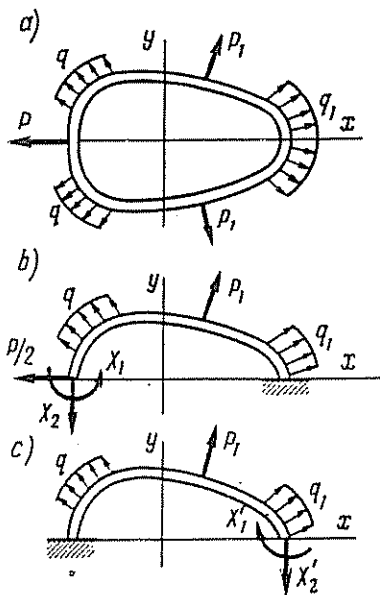
Hình 183

Có thể giải vành siêu tĩnh hoặc là theo nguyên lý công cực tiểu, hoặc là (thuận tiện hơn) theo phương trình chính tắc của phương pháp lực. Với vành mỏng khi lập phương trình để giải hệ siêu tĩnh chỉ tính biến dạng do momen uốn.

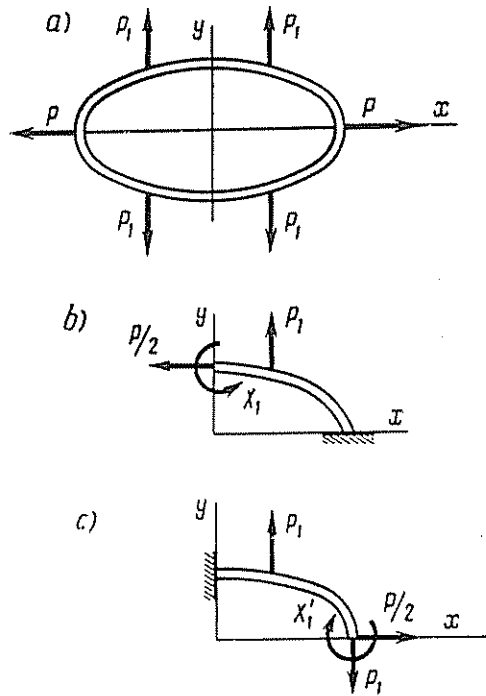
Nếu vành đối xứng và chịu tải trọng đối xứng đối với một trục (hình 184a) thì ở mặt cắt ngang trùng với trục đối xứng lực cắt bằng không. Vậy ở mặt cắt này ấn lực thừa chỉ có

momen uốn (X_1 hay X'_1) và lực dọc (X_2 hay X'_2). Đồng thời có thể chỉ xét một nửa đối xứng của vành (hình 184a, b).

Nếu vành đối xứng và tải trọng đối xứng với hai trục (hình 185a) thì ở các mặt cắt qua trục đối xứng lực cắt bằng không, còn có thể xác định lực dọc từ điều kiện tĩnh học xem như tổng hình chiếu của các lực và nội lực đặt ở một nửa vành lên trục đối xứng tương ứng. Trong trường hợp này ẩn lực thừa chỉ còn momen uốn (X_1 hoặc X'_1). Luôn luôn có thể chỉ xét một phần tư vành nằm giữa hai trục đối xứng (hình 185b hay c).



Hình 184



Hình 185

Nếu vành có nhiều hơn hai trục đối xứng thì có thể xét một phần vành nằm giữa các mặt cắt trùng với các trục đối xứng kề bên nhau.

Ở các mặt cắt ngang này lực cắt bằng không, lực dọc tìm được từ điều kiện tĩnh học, còn momen uốn là ẩn lực thừa.

Thí dụ 99. Cho q, ρ, E, I , vành mỏng và đối xứng đối với các trục x và y hình 186a).

Hãy xác định đoạn dịch gần δ của các điểm giữa ở các đoạn thẳng của vành.

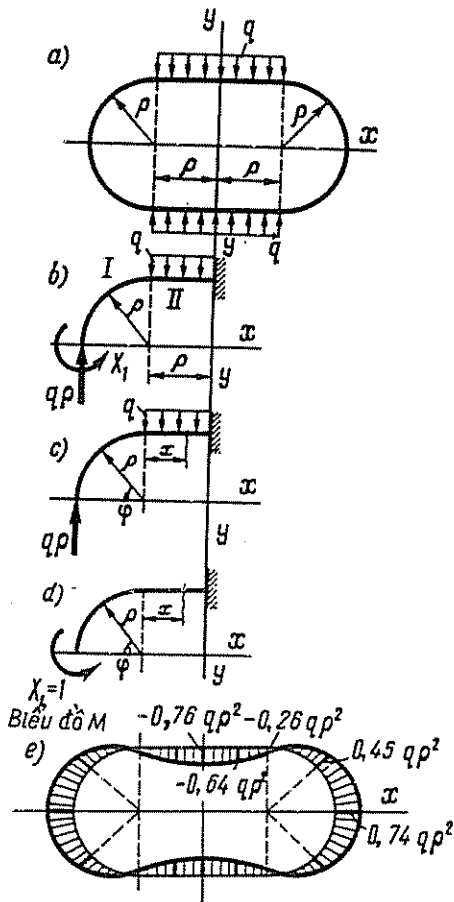
Bài giải. Ta xét một phần tư vành (hình 186b) ở mặt cắt trùng với trục x lực cắt bằng không, lực dọc bằng $q\rho$, còn momen uốn X_1 là ẩn lực suy rộng thừa.

Momen uốn ở mặt cắt hất kỳ của đoạn I và II của hệ cơ bản (hình 186c) và hệ bổ sung (hình 186d):

$$M_I = -q\rho^2(1 - \cos\varphi),$$

$$M_{II} = -q\rho(\rho + x) + \frac{qx^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } EI\delta_{IV} &= \int_0^s M_I \bar{M}_I ds + \int_0^{\rho} M_{II} \bar{M}_{II} dx = -q\rho^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi) d\varphi - \\ & - q \int_0^{\rho} \left[\rho(\rho + x) - \frac{x^2}{2} \right] dx = -q\rho^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$



Hình 186

$$\begin{aligned} M_{I\varphi=\pi/2} &\approx -0,26q\rho^2; & M_{IIx=0} &\approx -0,26q\rho^2; \\ M_{IIx=\rho/2} &\approx -0,64q\rho^2; & M_{IIx=\rho} &\approx -0,76q\rho^2; \end{aligned}$$

Biểu đồ momen uốn vẽ trên hình 186c.

Để xác định đoạn dịch gần của điểm giữa các đoạn thẳng của vành, ta đặt ở mặt cắt tác dụng $q\rho$ lực giả $P_g = 1$ hướng thẳng đứng lên trên. Do lực này momen uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ I và II của đoạn một phần tư vành bằng:

$$\bar{M}_I = -\rho(1 - \cos\varphi) \text{ và } \bar{M}_{II} = -(\rho + x).$$

Vậy chuyển vị phải tìm

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= \int_0^s \bar{M}_I^2 ds + \int_0^{\rho} \bar{M}_{II}^2 dx = \\ &= \rho \int_0^{\pi/2} d\varphi + \int_0^{\rho} dx = \rho \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right), \end{aligned}$$

nên momen uốn X_1 có giá trị

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = q\rho^2 \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} \approx 0,74q\rho^2$$

Sau khi giải ta có:

$$\begin{aligned} M_I &= -q\rho^2 \left[1 - \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} - \cos\varphi \right] \approx \\ &\approx -q\rho^2(0,26 - \cos\varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{II} &= -q \left[\rho^2 + \rho x - \frac{x^2}{2} - \right. \\ &\left. - \frac{3\pi + 2}{3(\pi + 2)} \rho^2 \right] \approx -q(0,26\rho^2 + \rho x - 0,5x^2), \end{aligned}$$

vi thế

$$M_{I\varphi=0} \approx 0,74q\rho^2; \quad M_{I\varphi=\pi/4} \approx 0,45q\rho^2;$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \left(\int_0^s M_1 \bar{M}_1 ds + \int_0^{\rho} M_{11} \bar{M}_{11} dx \right) = \\ &= \frac{2q\rho^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (0,26 - \cos\varphi)(1 - \cos\varphi) d\varphi + \frac{2q}{EI} \int_0^{\rho} (0,26\rho^2 + \rho x - 0,5x^2) \times \\ &\quad \times (\rho + x) dx \approx 1,72 \frac{q\rho^4}{EI}. \end{aligned}$$

Thí dụ 100. Cho P, α (trong đó $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$), ρ, E, I, F (hình 187a). Xác định $\Delta_{\rho\rho}, \Delta_{\rho\theta}$ là sự thay đổi các bán kính vành theo đường tác dụng của lực và điểm ở giữa các lực.

Bài giải. Ta xét phần vành tách ra bởi các mặt cắt ngang qua điểm giữa các lực (hình 187b).

Lực cắt ở các mặt cắt ngang bằng không, còn lực dọc N_0 được xác định từ tổng hình chiếu của các lực và nội lực lên trục thẳng đứng $N_0 = \frac{P}{2\sin\alpha}$.

Momen uốn và lực dọc ở mặt cắt bất kỳ của hệ cơ bản (hình 187c) và hệ bổ sung (hình 187d) tương ứng bằng.

$$M = \frac{P\rho}{2\sin\alpha} (1 - \cos\varphi); \quad N = \frac{P\cos\varphi}{2\sin\alpha}; \quad \bar{M} = 1; \quad \bar{N} = 0.$$

Vì

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= \frac{\rho}{EI} \int_0^{\alpha} M \bar{M} d\varphi = - \frac{P\rho^2}{2EI\sin\alpha} \int_0^{\alpha} (1 - \cos\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{P\rho^2}{2EI} \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1 \right), \\ \delta_{11} &= \frac{\rho}{EI} \int_0^{\alpha} \bar{M}^2 d\varphi = \rho \frac{\alpha}{EI}, \end{aligned}$$

nên momen

$$X_1 = - \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

Momen uốn ở mặt cắt bất kỳ của vành

$$M = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \right).$$

Để xác định $\Delta_{\rho\rho}$ ta đặt lực $P_g = 1$ cùng với lực P .

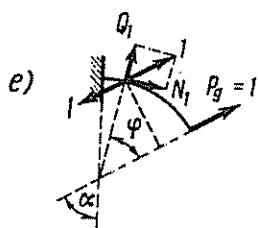
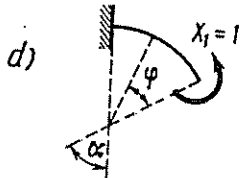
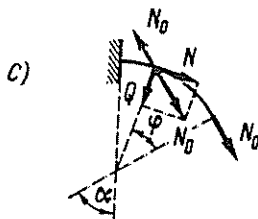
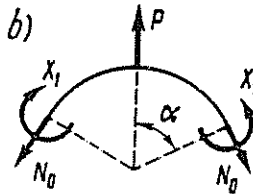
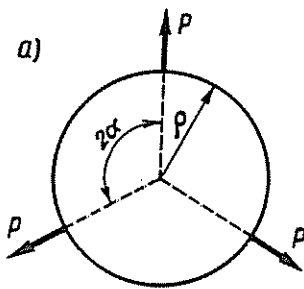
Khi đó

$$\bar{M} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \right), \quad \bar{N} = \frac{\cos\varphi}{2\sin\alpha}$$

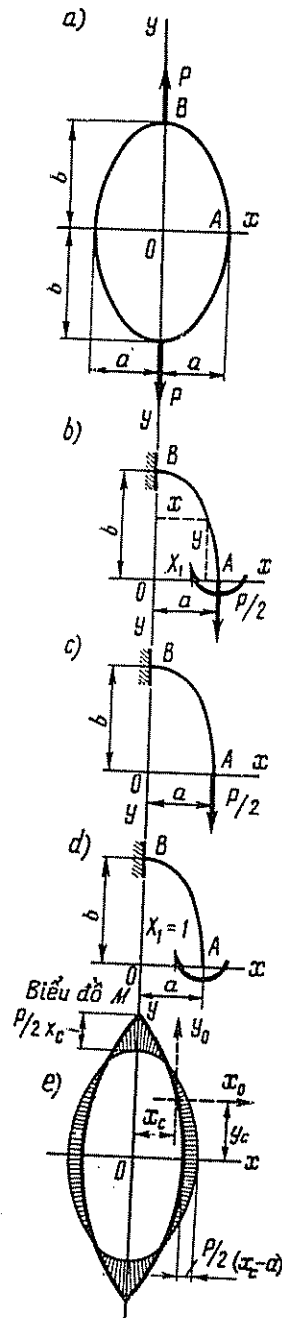
$$\begin{aligned} \text{và } \Delta_{PP} &= \frac{2\rho}{EI} \int_0^\alpha M\bar{M}d\varphi + \frac{2\rho}{EF} \int_0^\alpha N\bar{N}d\varphi = \\ &= \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \right)^2 d\varphi + \frac{P\rho}{2EF\sin^2\alpha} \int_0^\alpha \cos^2\varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Cuối cùng

$$\Delta_{PP} = \frac{P\rho^3}{2EI} \left(\frac{\cotg\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{P\rho}{4EF} \left(\cotg\alpha + \frac{\alpha}{\sin^2\alpha} \right).$$



Hình 187



Hình 188

Để xác định $\Delta\rho_0$, ta đặt lực hướng tâm $P_g = 1$ ở mặt cắt hợp với đường thẳng đứng một góc α (hình 187e). Khi đó

$$\bar{M} = -\rho \sin\alpha, \quad \bar{N} = \sin\varphi$$

và

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI} \int_0^\alpha \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{\alpha} \right) \sin\varphi \cdot d\varphi + \frac{P\rho}{2EF\sin\varphi} \int_0^\alpha \cos\varphi \sin\varphi d\varphi$$

Cuối cùng

$$\Delta\rho_0 = \frac{P\rho^3}{2EI} \left[\frac{\sin\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} (\cos\alpha - 1) \right] + \frac{P\rho}{4EF} \sin\alpha.$$

Thí dụ 101. Cho P, a, b, E, I vành mỏng và đối xứng đối với các trục x và y (hình 188a).

Hãy xác định Δa và Δb .

Bài giải. Ta xét một phần tư vành (hình 188b).

Mặt cắt trùng với trục x lực cắt bằng không, còn lực dọc bằng $\frac{P}{2}$

Momen uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ có tọa độ trọng tâm x và y của hệ cơ bản (hình 188c) và của hệ bổ sung (hình 188d) tương ứng bằng:

$$M = \frac{P}{2}(a - x) \text{ và } \bar{M} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } EI\delta_{1P} &= \int_0^s M\bar{M}ds = \frac{P}{2} \int_0^s (a - x)ds = \frac{P}{2} \left(a \int_0^s ds - \int_0^s xds \right) = \\ &= \frac{P}{2}(as - S_y) = \frac{P}{2}s \left(a - \frac{S_y}{s} \right) = \frac{P}{2}s(a - x_c), \end{aligned}$$

trong đó s — chiều dài cung trên trục của một phần tư vành;

$$S_y = \int_0^s xds \text{ — momen tĩnh của cung } s \text{ đối với trục } y;$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} \text{ — hoành độ trọng tâm cung } s, \text{ còn}$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s, \text{ nên momen uốn ở mặt cắt } A:$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2}(x_c - a)$$

Momen uốn ở mặt cắt bất kỳ của vành

$$M = \frac{P}{2}(a - x) + \frac{P}{2}(x_c - a) = \frac{P}{2}(x_c - x);$$

$$M_{x=a} = \frac{P}{2}(x_c - a), \text{ nếu } a > x_c \text{ thì } M_{x=a} < 0$$

$$M_{x=x_c} = 0; M_{x=0} = \frac{P}{2} x_c > 0.$$

Trên hình 188e vẽ biểu đồ mômen uốn cho trường hợp $a - x_c < x_c$.

Để xác định sự thay đổi kích thước a ở mặt cắt A của một phần tử vành ta đặt lực nằm ngang $P_g = 1$ hướng vào tâm O .

Do lực giả co $\bar{M} = y$. vậy

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x)y ds = \frac{P}{2EI} \left(x_c \int_0^s y ds - \int_0^s xy ds \right) = \\ &= \frac{P}{2EI} (x_c S_x - I_{xy}) = - \frac{P}{2EI} I_{x_0 y_0} \end{aligned}$$

trong đó $S_x = \int_0^s y ds$ — momen tĩnh của cung s đối với trục x ;

$I_{xy} = \int_0^s xy ds$ — momen quán tính ly tâm của cung s đối với các trục x, y ;

$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - x_c S_x = I_{xy} - x_c y_c s$ — momen quán tính trung tâm của cung s đối với trục $x_0 y_0$ đi qua trọng tâm vành và song song với các trục xy (hình 188e).

Để xác định sự thay đổi kích thước b , ở mặt cắt B của phần tử vành ta đặt lực thẳng đứng hướng xuống dưới $P_g = 1$.

Do lực này $\bar{M} = a - x$. Vậy

$$\begin{aligned} \Delta b &= \frac{P}{2EI} \int_0^s (x_c - x)(a - x) ds = \frac{P}{2EI} \left(ax_c \int_0^s ds - a \int_0^s x ds - \right. \\ &\quad \left. - x_c \int_0^s x ds + \int_0^s x^2 ds \right) = \frac{P}{2EI} (ax_c s - a S_y - x_c S_y + I_y) = \\ &= \frac{P}{2EI} (I_y - x_c S_y) = \frac{P}{2EI} I_{y_0} \end{aligned}$$

trong đó $I_y = \int_0^s x^2 ds$ — momen quán tính trục của cung s đối với trục y ;

$I_{y_0} = I_y - x_c S_y = I_y - x_c^2 s$ — momen quán tính trục của cung s đối với trục y_0 .

Trường hợp đặc biệt.

A. Khung vương chịu kéo theo đường chéo (hình 189a). Vì (hình 189b) $x_c = y_c = \frac{a}{2}$ nên,

$$M = \frac{P}{2} \left(\frac{a}{2} - x \right); M_{x=0} = \frac{Pa}{4}; M_{x=a} = -\frac{Pa}{4}$$

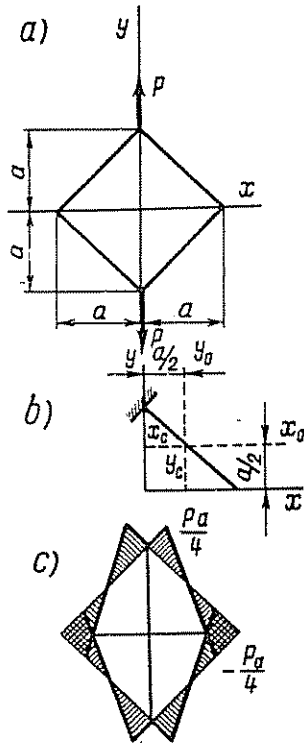
Biểu đồ momen uốn vẽ trên hình 189c. Ở các trục trung tâm x_0y_0 :

$$x_0 = -y_0, ds = dx_0 \sqrt{2} = dy_0 \sqrt{2},$$

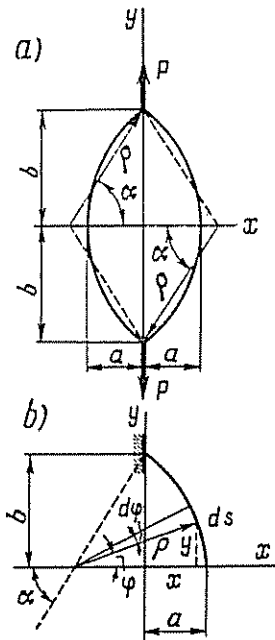
ví thế

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \sqrt{2} \int_{-a/2}^{a/2} x_0^2 dx_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \text{ và}$$

$$I_{x_0y_0} = -\sqrt{2} \int_{-a/2}^{a/2} x_0^2 dx_0 = -\frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$



Hình 189



Hình 190

Theo công thức của thí dụ 109 độ co ngắn theo phương nằm ngang và độ dãn dài theo phương thẳng đứng của nửa đường chéo khung có trị số bằng nhau và bằng

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} \cdot \frac{Pa}{EI}.$$

B. Vành gồm hai cung tròn bán kính ρ , góc ở tâm là 2α (hình 190a).

Vi (hình 190b)

$$ds = \rho d\phi, s = \rho\alpha, a = \rho(1 - \cos\alpha), b = \rho \sin\alpha,$$

$x = \rho(\cos\varphi - \cos\alpha)$ và $y = \rho\sin\varphi$, nên

$$S_y = \int_0^s x ds = \rho^2 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha) d\varphi = \rho^2(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{\rho}{\alpha} (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

$$S_x = \int_0^s y ds = \rho^2 \int_0^\alpha \sin\varphi d\varphi = \rho^2(1 - \cos\alpha);$$

$$I_{xy} = \int_0^s xy ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha) \sin\varphi d\varphi = \frac{\rho^3}{2} (1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha);$$

$$I_y = \int_0^s x^2 ds = \rho^3 \int_0^\alpha (\cos\varphi - \cos\alpha)^2 d\varphi = \frac{\rho^3}{4} (2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha - 3\sin 2\alpha);$$

Theo công thức của thí dụ 101

$$X_1 = \frac{P}{2} (x_c - a) = \frac{P\rho}{2\alpha} (\sin\alpha - \alpha),$$

$$M = \frac{P}{2} (x_c - x) = \frac{P\rho}{2} \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\varphi \right),$$

$$\Delta a = \frac{P}{2EI} (x_c S_x - I_{xy}) = \frac{P\rho^3}{2EI} \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\Delta b = \frac{P}{2EI} (I_y - x_c S_y) = \frac{P\rho^3}{2EI} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right),$$

Thí dụ 102. Cho a, b, E, I, q — áp lực trong tác dụng lên thành của vành đối xứng đối với các trục x và y (hình 191a). Xác định Δa và Δb .

Bài giải. Ta xét một phần tư vành (hình 191b). Ở mặt cắt trùng với trục x lực cắt bằng không, còn lực dọc bằng qa .

Momen uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ có tọa độ trọng tâm x và y của hệ cơ bản (hình 191c) và hệ bổ sung (hình 191d) tương ứng bằng:

$$M = qa(a - x) - \frac{q}{2} (a - x)^2 - \frac{q}{2} y^2 = \frac{q}{2} [a^2 - (x^2 + y^2)] = \frac{q}{2} (a^2 - \rho^2),$$

trong đó $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — khoảng cách từ mặt cắt xét tới gốc tọa độ và $\bar{M} = 1$.

$$\text{Vì } EI\delta_{1P} = \int_0^s M\bar{M} ds = \frac{q}{2} \int_0^s (a^2 - \rho^2) ds = \frac{q}{2} \left(a \int_0^s ds - \int_0^s \rho^2 ds \right) = \frac{q}{2} (as - I\rho)$$

trong đó s — chiều dài cung trên trục của một phần tư vành,

$I_\rho = \int_0^s \rho^2 ds$ — momen quán tính cực của cung s đối với gốc tọa độ,

còn trị số $EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}^2 ds = \int_0^s ds = s$, nên mo-

men uốn ở mặt cắt A

$$\Delta_1 = - \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - a^2 \right).$$

Momen uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ của vành

$$M = \frac{q}{2} (a^2 - \rho^2) + \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - a^2 \right) =$$

$$= \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - \rho^2 \right);$$

$$M_{\rho=a} = \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - a^2 \right); M_{\rho=b} =$$

$$= \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - b^2 \right).$$

Nếu ρ tăng liên tục từ a đến $b > a$ thì $M_{\rho=a} > 0$:

$$M_{\rho=b} < 0 \text{ và } M_{\rho=\sqrt{\frac{I_\rho}{s}}} = 0.$$

Biểu đồ momen uốn cho trường hợp $b > a$ vẽ trên hình 191e.

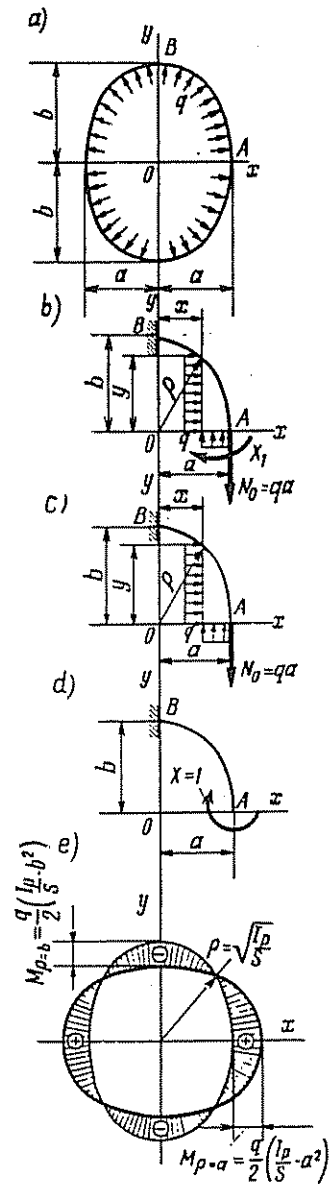
Để xác định sự thay đổi kích thước a ở mặt cắt A của một phần tư vành ta đặt lực ngang $P_g = 1$ hướng vào tâm O .

Do lực giả này $\bar{M} = y$. Vậy

$$\Delta a = \frac{q}{2EI} \int_0^s \left(\frac{I_\rho}{s} - \rho^2 \right) y ds =$$

$$= \frac{q}{2EI} \left(\frac{I_\rho}{s} \int_0^s dy s - \int_0^s \rho^2 y ds \right) = \frac{q}{2EI} \times$$

$$\times \left(\frac{S_x}{s} I_\rho - \int_0^s \rho^2 y ds \right) = \frac{q}{2EI} (y_c I_\rho - I_x),$$



Hình 191

trong đó $S_x = \int_0^s y ds$ — mômen tĩnh của cung s đối với trục x ; $y_c = \frac{S_x}{s}$ — tung độ trọng tâm cung s và

$$I_x = \int_0^s \rho^2 y ds.$$

Để xác định sự thay đổi kích thước b ở mặt cắt A của một phần tử vành ta đặt lực thẳng đứng $P_q = 1$ hướng xuống dưới.

Do lực giả này $\bar{M} = a - x$. Vậy

$$\begin{aligned} \Delta b &= \frac{q}{2EI} \int_0^s \left(\frac{I_\rho}{s} - \rho^2 \right) (a - x) ds = \frac{q}{2EI} \left(\frac{I_\rho}{s} a \int_0^s ds - a \int_0^s \rho^2 ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{I_\rho}{s} \int_0^s x ds + \int_0^s \rho^2 x ds \right) = \frac{q}{2EI} \left(\frac{I_\rho}{s} as - aI_\rho - \frac{I_\rho}{s} S_y + I_y \right) = \\ &= \frac{q}{2EI} (I_y - x_c I_\rho), \end{aligned}$$

trong đó $I_y = \int_0^s \rho^2 x ds$, $S_y = \int_0^s x ds$ — momen tĩnh của cung s đối với trục y ;

$x_c = \frac{S_y}{s}$ — hoành độ trọng tâm cung s .

Trường hợp đặc biệt. Vành gồm hai nửa đường tròn bán kính a và hai đoạn thẳng dài $2a$ (hình 192a).

Vi (hình 192b) $s = \frac{2 + \pi}{2} a$; $x_1 = a$; $y_1 = y$; $ds_1 = dy$; $x_2 = a \cos \varphi$;

$y_2 = a(1 + \sin \varphi)$, $ds_2 = a d\varphi$; $\rho_1^2 = a^2 + y^2$; $\rho_2^2 = 2a^2(1 + \sin \varphi)$,

nên

$$S_x = \int_0^a y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2 ds_2 = \int_0^a y dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \varphi) d\varphi = \frac{3 + \pi}{2} a^2;$$

$$S_y = \int_0^a x_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x_2 ds_2 = a \int_0^a dy + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2;$$

$$x_c = \frac{S_y}{s} = \frac{4a}{2 + \pi}; \quad y_c = \frac{S_x}{s} = \frac{3 + \pi}{2 + \pi} a;$$

$$I_x = \int_0^a y_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} y_2^2 ds_2 = \int_0^a y^2 dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{28 + 9\pi}{12} a^3;$$

$$I_y = \int_0^a x_1^2 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} x_2^2 ds_2 = a^2 \int_0^a dy + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{4 + \pi}{4} a^3;$$

$$I_\rho = I_x + I_y = \frac{10 + 3\pi}{3} a^3;$$

$$I_x = \int_0^a \rho_1^2 y_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} \rho_2^2 y_2 ds_2 = \int_0^a (a^2 + y^2) y dy + 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi)^2 d\varphi = \\ = \frac{19 + 6\pi}{4} a^4;$$

$$I_y = \int_0^a \rho_1^2 x_1 ds_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}a} \rho_2^2 x_2 ds_2 = a \int_0^a (a^2 + y^2) dy + 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin\varphi) \cos\varphi d\varphi = \\ = \frac{13}{3} a^4.$$

Đối với đoạn thẳng.

$$M_1 = \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - \rho_1^2 \right) = \frac{qa^2}{2} \left(\frac{14 + 3\pi}{6 + 3\pi} - \frac{y^2}{a^2} \right) \approx \frac{qa^2}{2} \left(1,519 - \frac{y^2}{a^2} \right);$$

$$M_{1y=0} = \frac{14 + 3\pi}{6(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,759 qa^2;$$

$$M_{1y=a} = \frac{4}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,259 qa^2.$$

Đối với đoạn cong

$$M_2 = \frac{q}{2} \left(\frac{I_\rho}{s} - \rho^2 \right) = qa^2 \left(\frac{4}{6 + 3\pi} - \sin\varphi \right) \approx qa^2 (0,259 - \sin\varphi);$$

$$M_{2\varphi=0} = \frac{4}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx 0,259 qa^2;$$

$$M_{2\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{2 + 3\pi}{3(2 + \pi)} qa^2 \approx -0,741 qa^2$$

Biểu đồ momen uốn cho một phần tư vành vẽ trên hình 192c

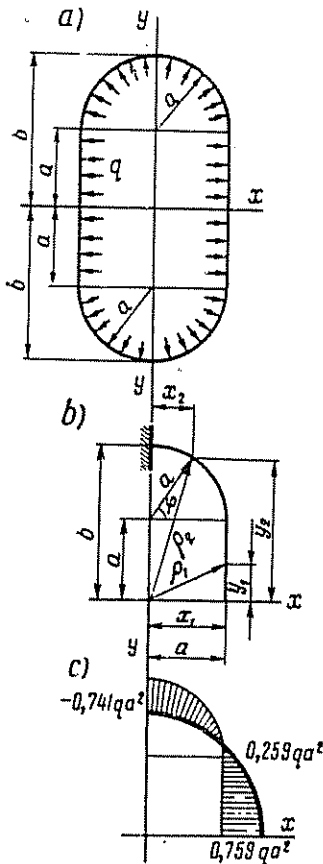
Sự thay đổi kích thước a

$$\Delta a = \frac{q}{2EI} (y_c I_\rho - I_x) = \frac{6 - 17\pi - 6\pi^2}{24(2 + \pi)} \cdot \frac{qa^4}{EI} \approx -0,864 \frac{qa^4}{EI}$$

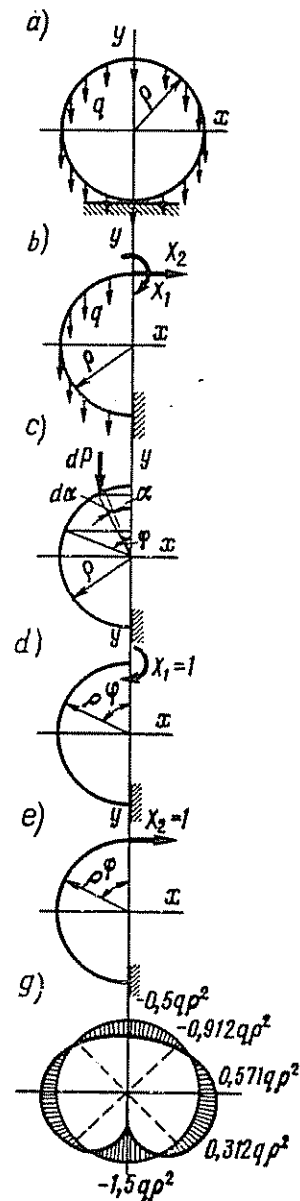
Sự thay đổi kích thước b

$$\Delta b = \frac{q}{2EI} (I_y - x_c I_\rho) = \frac{\pi - 14}{12(2 + \pi)} \cdot \frac{qa^4}{EI} \approx -0,160 \frac{qa^4}{EI}$$

Thí dụ 103. Cho q, ρ, E, I , vành mỏng chịu tải trọng đối xứng với trục y (hình 193a).



Hình 192



Hình 193

Xác định sự thay đổi chiều dài δ của đường kính thẳng đứng.

Bài giải. Ta xét một nửa vành (hình 193b). Ở mặt cắt trùng với trục y lực cắt bằng không, còn momen uốn X_1 và lực dọc X_2 là ẩn lực suy rộng thừa.

Phương trình chính tắc của phương pháp lực có dạng

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ta tìm momen uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ, xác định bằng góc φ , do tải trọng đã cho q (hình 193c) sinh ra.

Vì lực tác dụng lên phần tử cung ds của trục vành $dp = qds = q\rho d\alpha$, nên do lực này momen uốn ở mặt cắt có góc định vị φ

$$dM = dp\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) = q\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)d\alpha.$$

Momen uốn ở mặt cắt do tất cả các lực tác dụng trên cung có góc ở tâm φ thu được bằng

$$M = q\rho^2 \int_0^\varphi (\sin\varphi - \sin\alpha)d\alpha = q\rho^2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1).$$

Đối với các hệ bổ sung (hình 193d, e) momen uốn ở mặt cắt này có giá trị $\bar{M}_1 = 1$; $\bar{M}_2 = \rho(1 - \cos\varphi)$. Vì

$$EI\delta_{1P} = \int_0^s M\bar{M}_1 ds = q\rho^3 \int_0^\pi (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)d\varphi = 0;$$

$$EI\delta_{2P} = \int_0^s M\bar{M}_2 ds = q\rho^4 \int_0^\pi (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)(1 - \cos\varphi)d\varphi = -\frac{\pi}{4} q\rho^4;$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^s \bar{M}_1^2 ds = \rho \int_0^\pi d\varphi = \pi\rho;$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^s \bar{M}_2^2 ds = \rho^3 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2} \rho^3 \text{ và}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^s \bar{M}_1\bar{M}_2 ds = \rho^2 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)d\varphi = \pi\rho^2,$$

nên phương trình chính tắc của phương pháp lực được viết lại như sau:

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \rho X_2 &= 0, \\ X_1 + \frac{3}{2}\rho X_2 &= \frac{q\rho^2}{4}, \end{aligned} \right\}$$

từ đó

$$X_1 = -\frac{q\rho^2}{2} \text{ và } X_2 = \frac{q\rho}{2}.$$

Momen uốn ở mặt cắt bất kỳ của vành

$$\begin{aligned} M &= q\rho^2(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1) - \frac{q\rho^2}{2} + \frac{q\rho^2}{2}(1 - \cos\varphi) = \\ &= q\rho^2\left(\varphi \sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi - 1\right). \end{aligned}$$

Vi thế

$$M_{\varphi=0} = -0,5q\rho^2; \quad M_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = q\rho^2\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx -0,0912q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = q\rho^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0,571q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\frac{3\pi}{4}} = q\rho^2\left(\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 0,312q\rho^2;$$

$$M_{\varphi=\pi} = -1,5q\rho^2.$$

Biểu đồ momen uốn vẽ trên hình 193g.

Để xác định giá trị thay đổi chiều dài của đường kính thẳng đứng ta đặt lực thẳng đứng $P_g = 1$ hướng xuống dưới ở mặt cắt trùng với trục y của hệ cơ bản (hình 193b). Momen uốn ở mặt cắt bất kỳ do lực P_g sinh ra $\bar{M} = \rho \sin\varphi$.

Vậy chuyển vị phải tìm

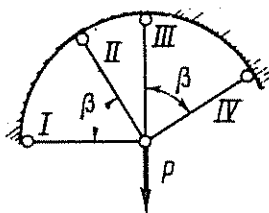
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \int_0^s M\bar{M}ds = \frac{q\rho^4}{EI} \int_0^\pi \left(\varphi \sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi - 1\right) \sin\varphi d\varphi = \\ &= \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \frac{q\rho^4}{EI} \approx 0,467 \frac{q\rho^4}{EI}. \end{aligned}$$

Bài tập 834 – 835. Xác định lực dọc N trong các thanh có đánh số thứ tự của hệ.

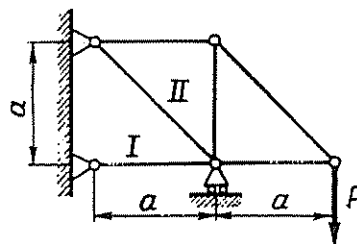
Độ cứng EF của tất cả các thanh như nhau.

Ở các bài tập này và các bài siêu tĩnh về sau sử dụng (tùy ý) nguyên lý công cực tiểu hay phương pháp lực.

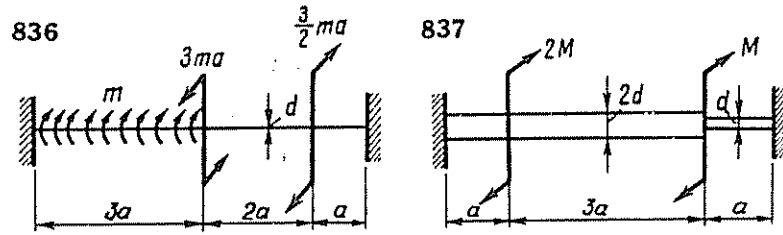
834



835

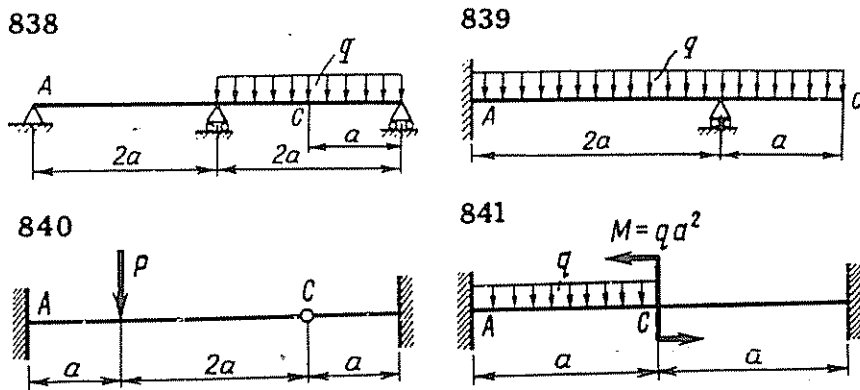


Bài tập 836 — 837. Xác định momen phản lực ở các đầu ngàm của thanh.



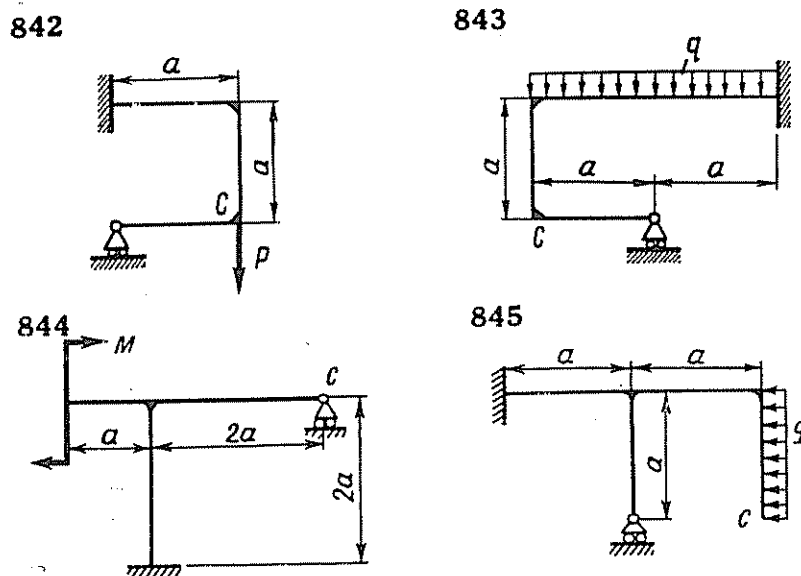
Bài tập 838 — 841. Xác định phản lực ở các liên kết tại mặt cắt A và chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt C.

Trong bài 841 xác định cả momen phản lực M_A ở mặt cắt A. Xem như đã biết độ cứng EI .



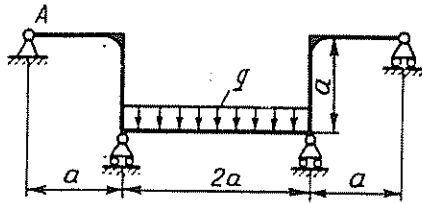
Bài tập 842 — 845. Xác định phản lực ở gối khớp của hệ và chuyển vị dài của mặt cắt C.

Trong các bài 842 — 843 δ_d — chuyển vị thẳng đứng, còn trong các bài 844 — 845 δ_n — chuyển vị ngang.

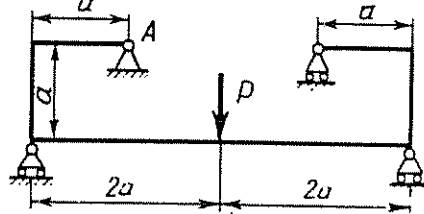


Bài tập 846 — 847. Xác định các phản lực của gối A và chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt trên trục đối xứng của hệ.

846

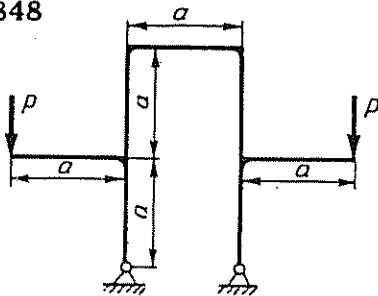


847

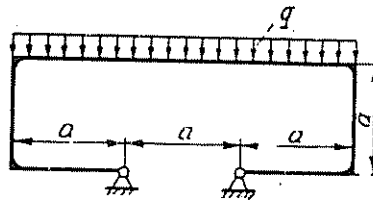


Bài tập 848 — 851. Xác định phản lực ngang của các gối trong hệ.

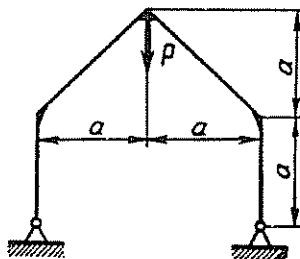
848



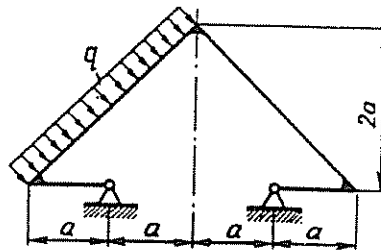
849



850

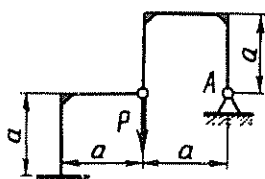


851

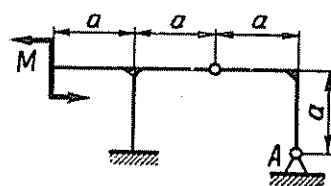


Bài tập 852 — 857. Xác định các thành phần phản lực của gối A trong hệ

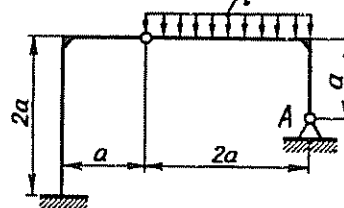
852

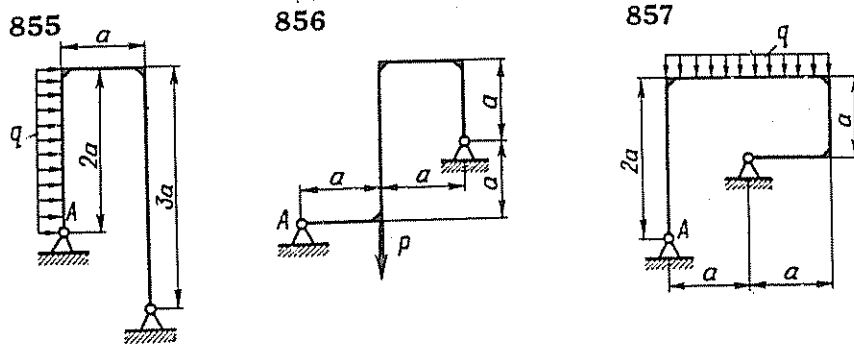


853

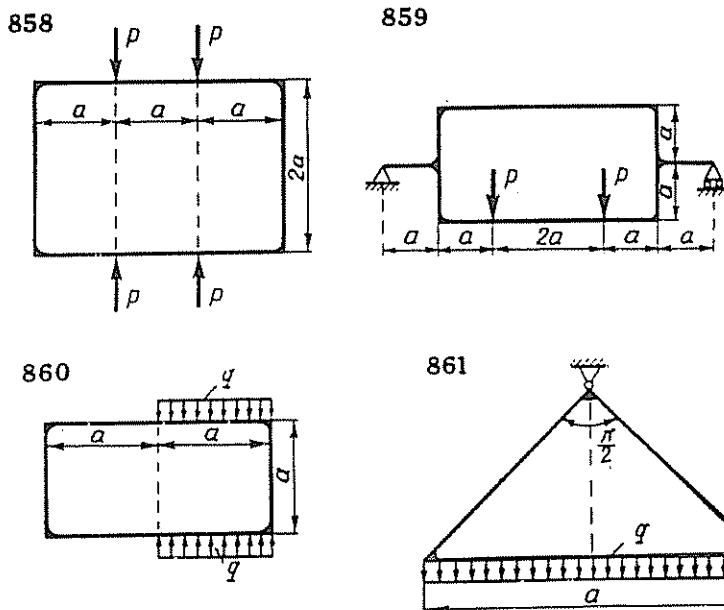


854

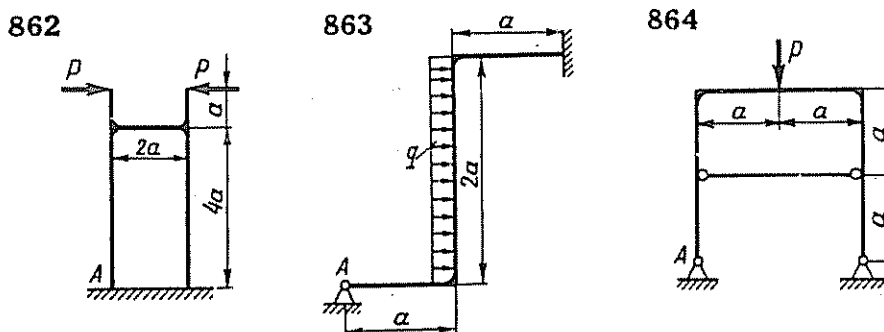




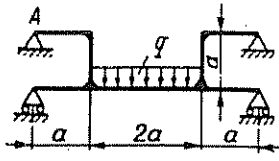
Bài tập 858 — 861. Xác định momen uốn lớn nhất về giá trị tuyệt đối trong hệ khung.



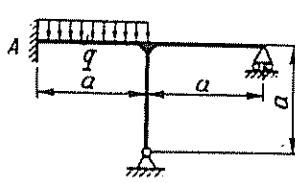
Bài tập 862 — 870. Xác định các thành phần phản lực ở mặt cắt A của hệ. Trong các bài 868 ÷ 870 cho mặt cắt trên tất cả các đoạn của hệ là hình tròn, vật liệu giống nhau, $G = 0,4E$, xác định chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt C.



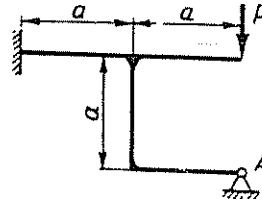
865



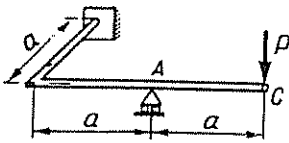
866



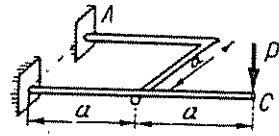
867



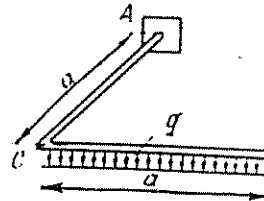
868



869



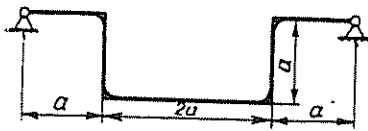
870



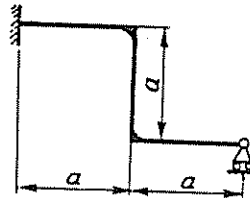
Bài tập 871 — 875. Xác định ứng suất pháp lớn nhất xuất hiện trong các thanh của hệ khi tăng nhiệt độ lên $\Delta t^\circ\text{C}$.

Chỉ tính biến dạng uốn. Mặt cắt đối xứng với chiều cao h , tất cả các thanh của mỗi hệ có E và α như nhau.

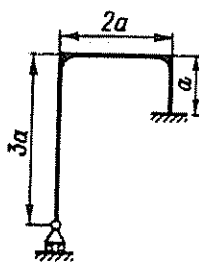
871



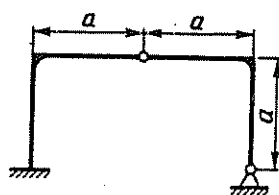
872



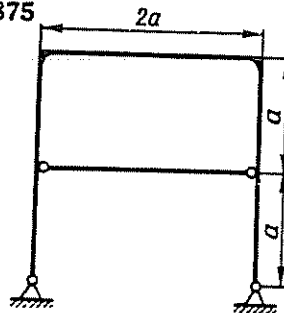
873



874



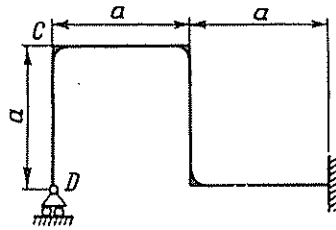
875



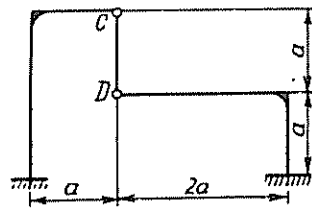
Bài tập 876 — 879. Xác định ứng suất lắp ráp lớn nhất trong hệ nếu chiều dài thanh CD lớn hơn so với chiều dài thiết kế là Δ .

Chỉ tính biến dạng uốn. Mặt cắt đối xứng với chiều cao h , vật liệu có E đã cho và ở tất cả các thanh của mỗi hệ đều như nhau.

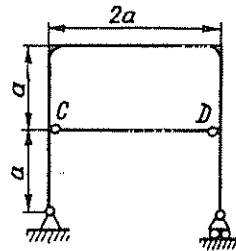
876



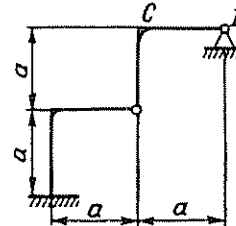
878



877

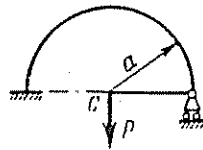


879

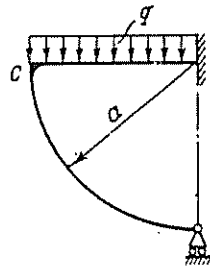


Bài tập 880 — 884. Xác định phần lực ở gối khớp bên phải và chuyển vị thẳng đứng δ của mặt cắt C trong các hệ*.
 Trong bài 882 tải trọng q phân bố đều theo đường nằm ngang.

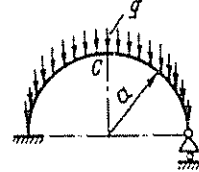
880



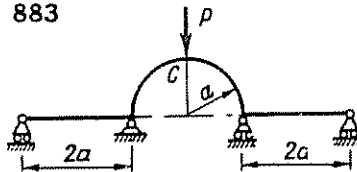
881



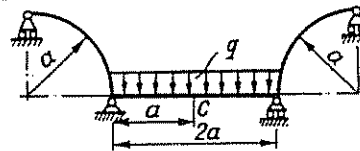
882



883

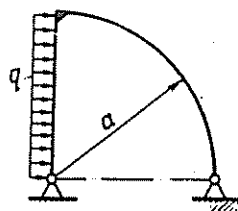


884

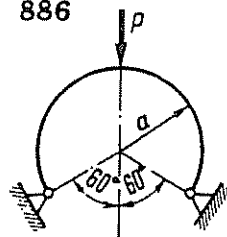


Bài tập 885 — 889. Xác định các thành phần phần lực trong các liên kết ở đầu trái của hệ.

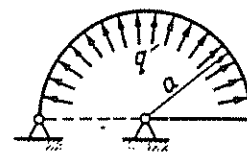
885



886

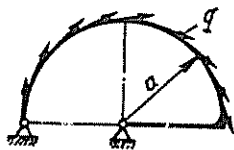


887

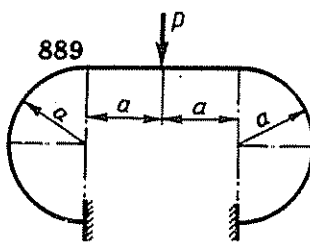


* Trong các bài 880 — 915 chỉ tính biến dạng do momen uốn và coi độ cứng EI của tất cả các thanh trong hệ như nhau.

888

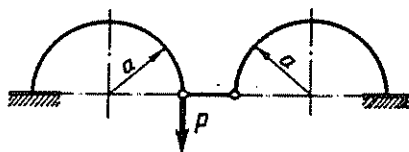


889

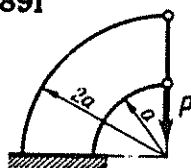


Bài tập 890 — 895. Xác định chuyển vị đứng của mặt cắt tại đó lực P tác dụng lên hệ.

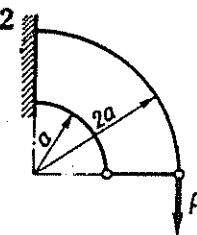
890



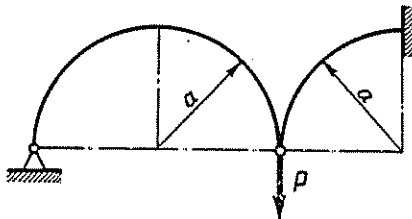
891



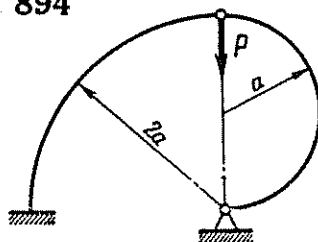
892



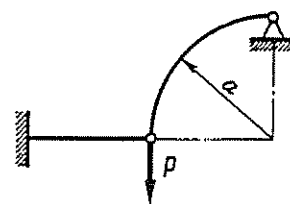
893



894

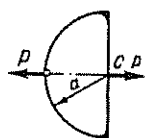


895

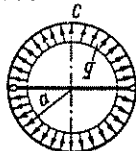


Bài tập 896 — 899. Xác định momen uốn ở mặt cắt C của hệ.

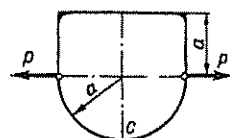
896



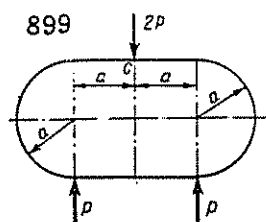
897



898



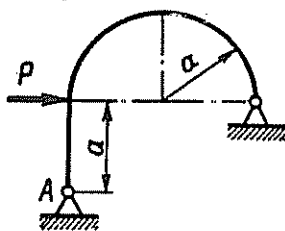
899



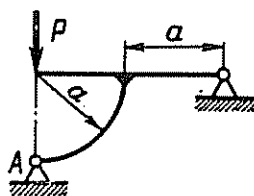
Bài tập 900 — 906. Xác định các thành phần phản lực ở liên kết tại mặt cắt A của hệ.

Trong bài 902 tải trọng q phân bố đều theo đường nằm ngang.

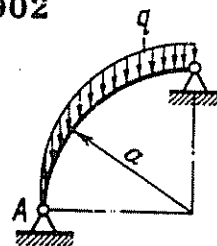
900

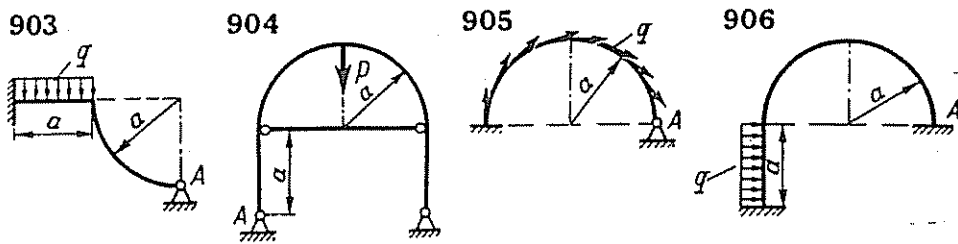


901

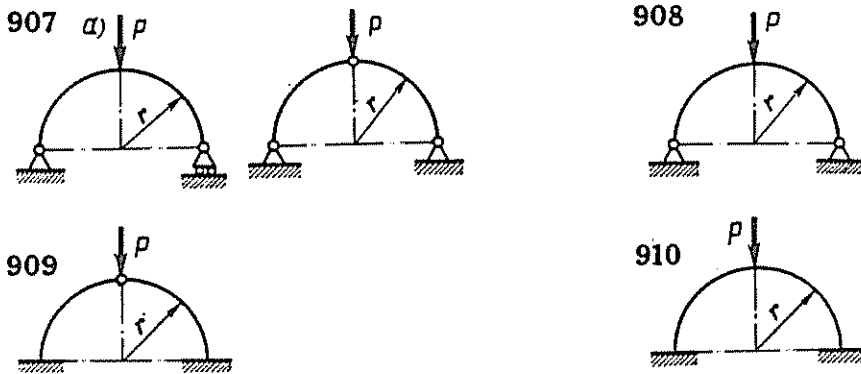


902

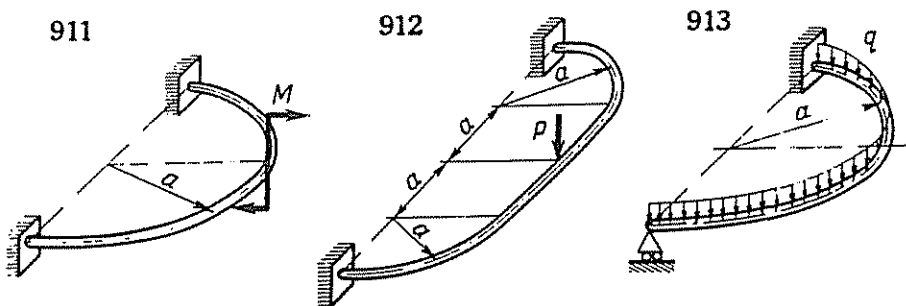




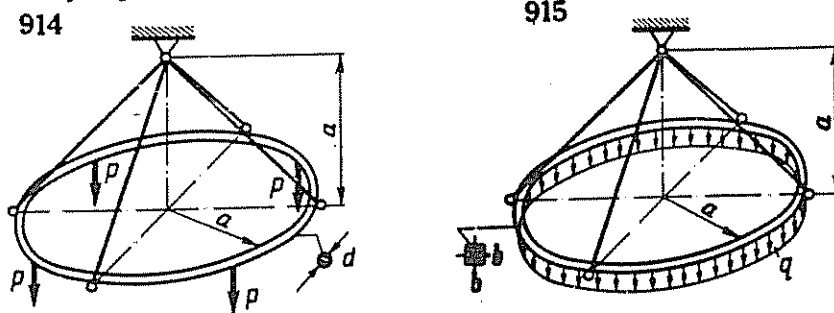
Bài tập 907 — 910. Xác định xem trong các hệ đã nêu momen uốn lớn nhất về giá trị tuyệt đối nhỏ hơn bao nhiêu lần so với thanh cong tĩnh định (hình của bài 907a).



Bài tập 911 — 913. Xác định momen phản lực ở ngàm và chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt ở giữa thanh cong. Mặt cắt ngang thanh hình tròn; $G = 0,4E$.



Bài tập 914 — 915. Xác định kích thước cần thiết của mặt cắt ngang vành tròn. Ứng suất pháp cho phép của vật liệu vành là $[\sigma]$.



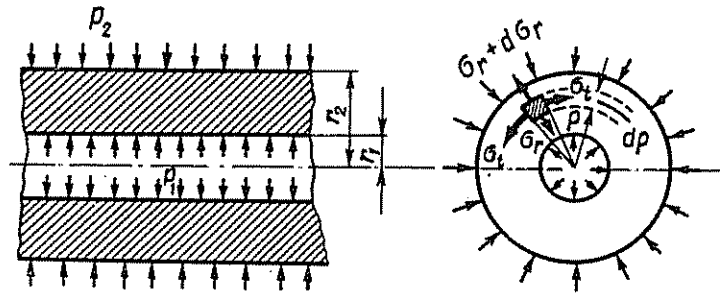
XIII - TÍNH ỐNG DÀY

§ 43. Ống hình trụ

Đối với ống không đáy dài vô hạn chịu tác dụng của áp lực hướng tâm phân bố đều ở bên trong p_1 và ở bên ngoài p_2 (hình 194) ứng suất pháp vòng (tiếp tuyến) σ_t và hướng tâm σ_r tại điểm bất kỳ của thành ống có khoảng cách ρ đến tâm được xác định theo công thức:

$$\sigma_t = \frac{p_1 r_1^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2 \left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (202)$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2}\right) - p_2 r_2^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right)}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (203)$$



Hình 194

Ứng suất $\sigma_r < 0$ với các giá trị bất kỳ của p_1 và p_2 , còn σ_t có thể lớn hơn hay bé hơn không tùy thuộc vào tương quan của p_1 và p_2 .

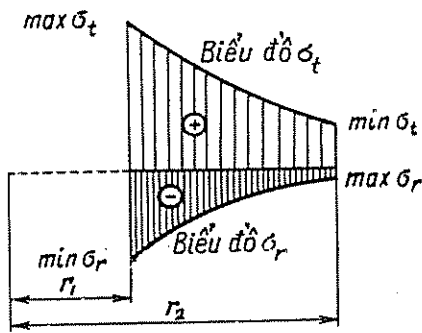
Nếu $p_1 > \frac{p_2}{2} \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1\right)$ thì $\sigma_t > 0$. Trong trường hợp này các biểu đồ σ_r và σ_t theo chiều dày thành ống có dạng như trên hình 195. Các giá trị lớn nhất và bé nhất của ứng suất:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_r_{\rho=r_2} = -p_2, \\ \min \sigma_r &= \sigma_r_{\rho=r_1} = -p_1, \\ \max \sigma_t &= \sigma_t_{\rho=r_1} = \frac{p_1(r_1^2 + r_2^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \min \sigma_t &= \sigma_t_{\rho=r_2} = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

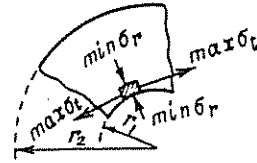
Nếu $p_1 = \frac{p_2}{2} \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1\right)$ thì $\min \sigma_t = 0$

Ở các điểm nguy hiểm tại mặt trong ống (hình 196) phương trình tính toán theo lý thuyết bền thứ 5 (lý thuyết bền của M₀) có dạng

$$\max \sigma_t - \nu \min \sigma_r \leq [\sigma_k]$$



Hình 195



Hình 196

từ đó

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_k] + (1 - \nu)p_1}{[\sigma_k] - (1 + \nu)p_1 + 2p_2}} \quad (205)$$

trong đó

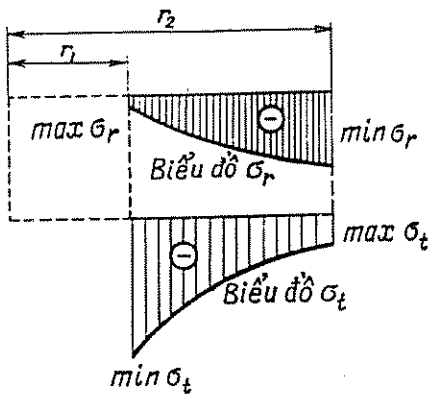
$$\nu = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]}$$

Đối với vật liệu có độ bền kéo và độ bền nén như nhau $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$ và $\nu = 1$ phương trình tính toán (205) có dạng như sau:

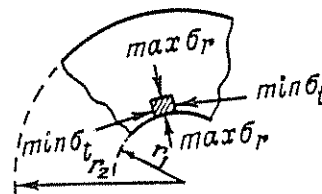
$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p_1 + 2p_2}} \quad (206)$$

Nếu $p_1 < \frac{2p_2}{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}}$ thì $\sigma_t < 0$. Trong trường hợp đó biểu đồ σ_t và σ_r có

dạng như trên hình 197.



Hình 197



Hình 198

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất thu được bằng:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_r &= \sigma_{r \rho=r_1} = -p_1, \\ \min \sigma_r &= \sigma_{r \rho=r_2} = -p_2, \\ \max \sigma_t &= \sigma_{t \rho=r_2} = \frac{2p_1 r_1^2 - p_2(r_2^2 + r_1^2)}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \min \sigma_t &= \sigma_{t \rho=r_1} = \frac{p_1(r_2^2 + r_1^2) - 2p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Nếu
$$p_1 = \frac{2p_2}{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}} \text{ thì } \max \sigma_t = 0.$$

Ở các điểm nguy hiểm tại mặt trong ống (hình 198) phương trình tính toán theo thuyết bền thứ năm viết được như sau:

từ đó
$$-v \min \sigma_t = [\sigma_k]$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_n] - p_1}{[\sigma_n] + p_1 - 2p_2}} \quad (208)$$

Khi tỷ số áp lực trong phạm vi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} + 1 \right) < \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right)$$

theo chiều dày thành ống σ_t có dấu khác nhau. Nếu $p_1 = p_2 = p$ thì $\sigma_t = \sigma_r = -p$.

Chuyển vị hướng tâm δ của điểm bất kỳ trên thành ống được xác định theo công thức

$$\delta = \frac{\rho}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) = \frac{\rho}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left\{ p_1 r_1^2 \left[1 + \frac{r_2^2}{\rho^2} - \mu \left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2} \right) \right] - p_2 r_2^2 \left[1 + \frac{r_1^2}{\rho^2} - \mu \left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2} \right) \right] \right\}, \quad (209)$$

trong đó E và μ — modun đàn hồi dọc và hệ số Poaxông của vật liệu ống.

Sự thay đổi bán kính trong của ống

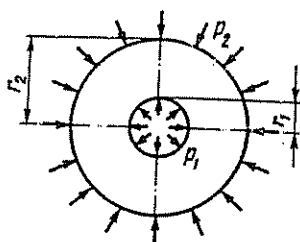
$$\Delta r_1 = \delta_{\rho=r_1} = \frac{r_1}{E} \left[p_1 \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \mu \right) - 2p_2 \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (210)$$

Sự thay đổi bán kính ngoài của ống

$$\Delta r_2 = \delta_{\rho=r_2} = \frac{r_2}{E} \left[2p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - p_2 \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right) \right]. \quad (211)$$

Nếu chỉ có áp lực trong p_1 tác dụng lên ống thì trong các công thức (202 — 211) thay $p_2 = 0$. Các biểu đồ σ_t và σ_r tương tự như các biểu đồ trên hình 195 nhưng với $p_2 = 0$.

Nếu chỉ có áp lực p_2 tác dụng lên ống thì trong các công thức (202 — 211) thay $p_1 = 0$. Các biểu đồ σ_t và σ_r tương tự như các biểu đồ trên hình 197 nhưng với $p_1 = 0$.



Hình 199

Thí dụ 104. Cho $p_2 = 1 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$, $r_1 = 4\text{cm}$, $r_2 =$

$$= 8\text{cm}, [\sigma_k] = 30 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}, [\sigma_n] = 120 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$E = 1,2 \cdot 10^5 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$\mu = 0,24 \text{ (hình 199).}$$

Xác định p_1 , Δr_1 và Δr_2 , khi xem $p_1 > p_2$.

Bài giải. Theo công thức (205)

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{[\sigma_k] + (1 - \nu)p_1}{[\sigma_k] - (1 + \nu)p_1 + 2p_2}}$$

Vi $\nu = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]} = 0,25$ và $\frac{r_2}{r_1} = 2$ nên khi thay số và bình phương cả hai vế của đẳng thức ta có:

$$4 = \frac{30 + 0,75p_1}{30 - 1,25p_1 + 2}$$

từ đó
$$p_1 = \frac{98}{5,75} \approx 17 \text{ MN/m}^2.$$

Theo công thức (210)

$$\Delta r_1 = \frac{4}{1,2 \cdot 10^5} \left[17 \left(\frac{64 + 16}{64 - 16} + 0,24 \right) - 2 \frac{64}{64 - 16} \right] \approx 0,99 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0,01 \text{ mm}.$$

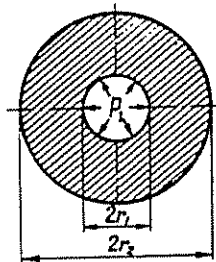
Theo công thức (211)

$$\Delta r_2 = \frac{8}{1,2 \cdot 10^5} \left[2 \cdot 17 \cdot \frac{16}{64 - 16} - \left(\frac{64 + 16}{64 - 16} - 0,24 \right) \right] \approx 0,66 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \approx 0,007 \text{ mm}$$

Bài tập 916 – 918. Xác định các đại lượng nêu trong điều kiện của bài toán.

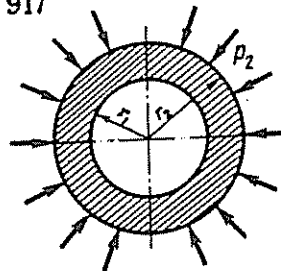
Trong các bài 916, 917, 918a dùng thuyết bền thứ ba, còn trong bài 918b dùng thuyết bền thứ năm.

916



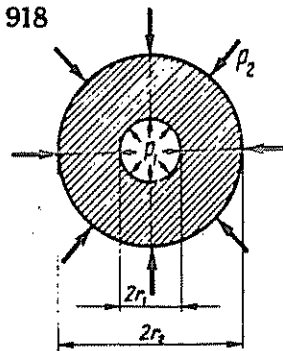
$p_1 = 2000 \text{ kg/cm}^2$
 $r_1 = 10 \text{ cm}$
 $[\sigma] = 8000 \text{ kg/cm}^2$
 $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $\mu = 0,3$
 $r_2 = ?$
 $\Delta r_1 = ?$

917



$r_1 = 10 \text{ cm}$
 $r_2 = 15 \text{ cm}$
 $[\sigma] = 400 \text{ MN/m}^2$
 $\mu = 0,3$
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$
 $p_2 = ?$
 $\Delta r_2 = ?$

918

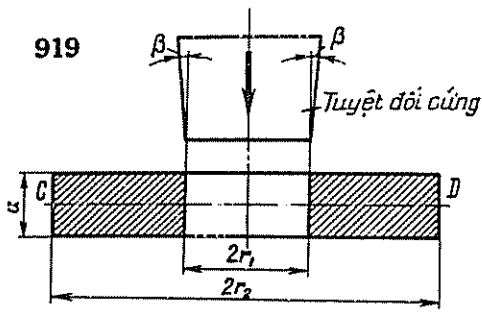


a)

$p_1 = 2000 \text{ kg/cm}^2$
 $p_2 = 500 \text{ kg/cm}^2$
 $r_1 = 10 \text{ cm}$
 $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $\mu = 0,3$
 $[\sigma] = 6000 \text{ kg/cm}^2$
 $r_2 = ?$
 $\Delta r_1 = ? \quad \Delta r_2 = ?$

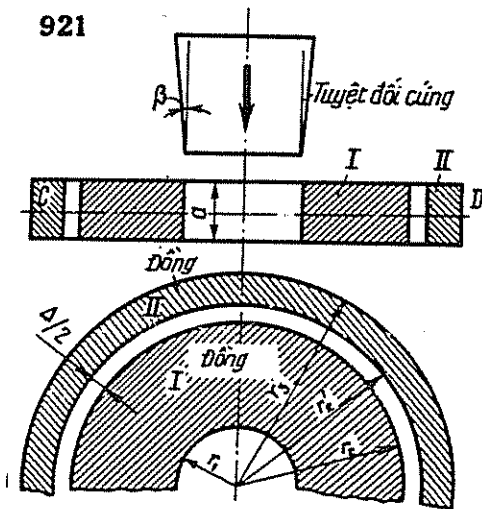
b)

$p_1 \gg p_2$
 $p_2 = 1,5 \text{ MN/m}^2$
 $r_1 = 5 \text{ cm}; r_2 = 10 \text{ cm}$
 $[\sigma_k] = 30 \text{ MN/m}^2$
 $[\sigma_n] = 120 \text{ MN/m}^2$
 $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$
 $\mu = 0,25$
 $p_1 = ?$



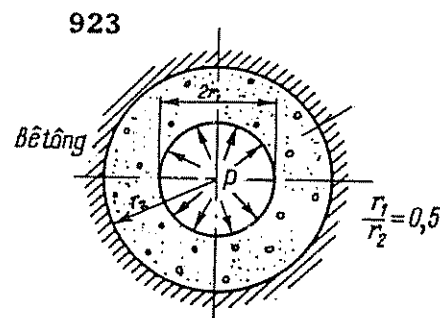
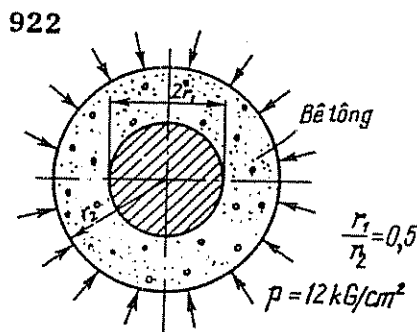
Bài tập 919. Chày đập hình nón tuyệt đối cứng với góc nghiêng β không lớn được đóng vào vành có chiều dày a . Xác định áp lực p_0 xuất hiện giữa chày và vành ở mặt cắt CD giữa vành khi chày đóng vào hết toàn bộ chiều cao a sau đó tìm ứng suất lớn nhất ở mặt cắt CD của vành.

Bài tập 920. Xác định xem với góc nghiêng nào của chày ở bài 919 thì ở mặt cắt giữa vành có độ tăng bán kính mặt ngoài $\Delta r_2 = 0,2\text{mm}$, nếu $r_1 = 10\text{cm}$, $r_2 = 30\text{cm}$, $E = 10^6\text{kG/cm}^2$, $\mu = 0,34$, $a = 5\text{cm}$.



Bài tập 921. Xác định xem với góc nghiêng β nào của chày hình nón khi chày được đóng vào lỗ trong với chiều sâu a làm thay đổi độ hở giữa các ống I và II và tạo nên áp lực trong hồ $p = 100\text{kG/cm}^2$. Tính cho mặt cắt giữa CD , và lấy $r_1 = 10\text{cm}$; $r_2 = 30\text{cm}$; $r_3 = 40\text{cm}$, $E = 10^6\text{kG/cm}^2$, $\mu = 0,34$, $c = 5\text{cm}$, $\Delta = 0,4\text{mm}$.

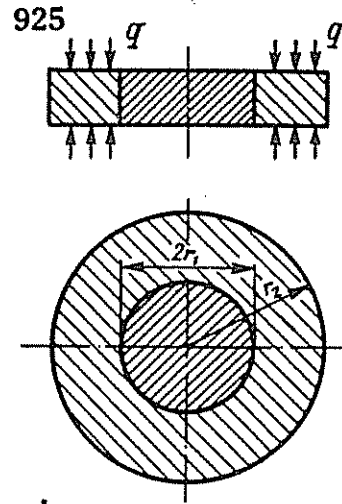
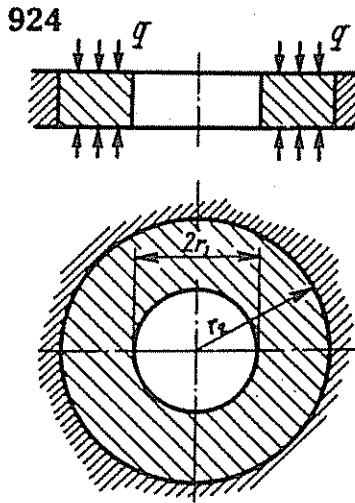
Bài tập 922. Xác định áp lực p_0 giữa ống bê tông và lõi tuyệt đối cứng và kiểm tra độ bền của ống theo lý thuyết bền thứ năm. Lấy $E_{bt} = 2 \cdot 10^5\text{kG/cm}^2$, $\mu_{bt} = 0,16$, $[\sigma_n]_{bt} = 20\text{kG/cm}^2$, $[\sigma_k]_{bt} = 4\text{kG/cm}^2$.



Bài tập 923. Xác định giá trị áp lực trong lớn nhất p có thể đặt vào ống bê tông, ống được bọc trong vỏ tuyệt đối cứng và có áp lực bên là p_0 , nếu $E_{bt} = 2 \cdot 10^5\text{kG/cm}^2$; $\mu_{bt} = 0,16$; $[\sigma_n]_{bt} = 50\text{kG/cm}^2$; $[\sigma_k]_{bt} = 5\text{kG/cm}^2$.

Bài tập 924. Xác định áp lực biên p_0 giữa vành và vỏ tuyệt đối cứng, nếu biết các giá trị q , r_1 , r_2 và μ . Xem như modul đàn hồi của vật liệu vành có giá trị nhỏ.

Bài tập 925. Xác định áp lực p_0 giữa vành và lõi cứng tuyệt đối, nếu biết q , r_1 , r_2 và μ .



§ 44. Ống hình trụ nhiều lớp

Khi áp lực trong cao người ta dùng các ống tò hợp bằng cách ép hay lắp ráp nóng hai hay nhiều ống hình trụ lại với nhau. Độ bền của mối ghép các ống và sự xuất hiện ứng suất ban đầu ở thành ống làm cho đường kính trong của ống ngoài nhỏ hơn đường kính ngoài của ống liền nó một độ dôi Δ (hình 200). Khi chiều dài như nhau áp lực tiếp xúc ở mặt trụ nối ghép phân bố đều trên bề mặt và có giá trị

$$p_0 = \frac{\Delta/2r_2}{\frac{1}{E_1} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \mu_2 \right)}, \quad (212)$$

trong đó E_1 , E_2 , μ_1 và μ_2 — modun đàn hồi dọc và hệ số Poatxông của vật liệu ống trong và ống ngoài.

Nếu các ống chế tạo bằng cùng một vật liệu thì

$$E_1 = E_2 = E, \mu_1 = \mu_2$$

và

$$p_0 = \frac{\Delta \cdot E}{4r_2^3} \cdot \frac{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{(r_3^2 - r_1^2)} \quad (213)$$

Ở thành của các ống ghép ứng suất ban đầu do áp lực p_0 xác định theo công thức (202) và (203). Khi đó ta coi p_0 là áp lực ngoài (áp lực trong bằng không đối với ống trong bán kính r_1 và r_2 , còn p_0 là áp lực trong (áp lực ngoài bằng không) đối với ống ngoài bán kính r_2 và r_3 .

Các biểu đồ mẫu σ_t và σ_r do áp lực p_0 ở các ống ghép vẽ trên hình 201 bằng đường đứt nét ab và cd .

Do tác dụng của áp lực làm việc ở trong p_1 lớn và áp lực ngoài không lớn lên ống tổ hợp nên các ứng suất σ_t và σ_r xác định theo công thức (202) và (203) như ống nguyên khối bán kính r_1 và r_3 . Biểu đồ mẫu của các ứng suất này vẽ trên hình 201 bằng đường nét liền mảnh ef .

Ứng suất tổng hợp trong ống nhiều lớp tìm theo phương pháp cộng ứng suất biểu thị bằng biểu đồ ab , cd và ef . Biểu đồ mẫu của ứng suất tổng hợp σ_t và σ_r vẽ trên hình 201 có đường gạch gạch.

Nếu ống tổ hợp chế tạo bằng vật liệu có độ bền kéo và nén như nhau thì theo lý thuyết bền thứ ba quan hệ có lợi nhất giữa các bán kính và độ dôi theo công thức

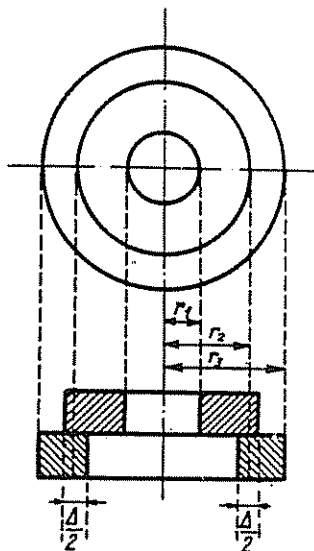
$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}; \quad (214)$$

$$\Delta = \frac{2r_2}{E} (p_1 - p_2). \quad (215)$$

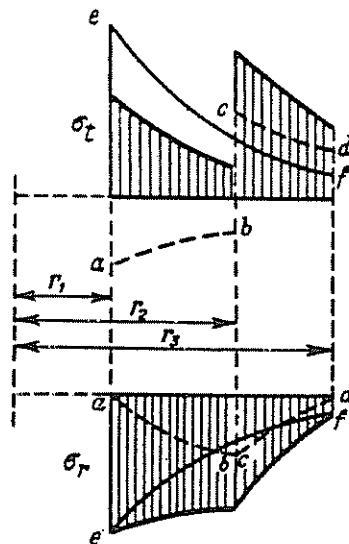
Áp lực dư lớn nhất ở trong

$$\max (p_1 - p_2) = \frac{r_3 - r_1}{r_3} [\sigma]. \quad (216)$$

Phương pháp tính toán ở trên được dùng cả đối với ống tổ hợp ba hoặc nhiều ống.



Hình 200



Hình 201

Đối với cặp ống thứ nhất áp lực tiếp xúc giữa chúng xác định theo độ dôi và theo ứng suất ban đầu trong các ống này. Áp lực tiếp xúc mới trên mặt xác

định theo độ dôi thứ hai giữa khối gồm hai ống đầu (như một ống với các kích thước chung) và ống thứ ba và theo ứng suất ban đầu ở khối gồm hai ống đầu và ống thứ ba.

Ứng suất ban đầu tổng hợp trong khối ghép ba ống thu được bằng phương pháp cộng các ứng suất ban đầu tìm được ở lần lắp thứ nhất và thứ hai. Ứng suất do áp lực làm việc trong khối ghép ba ống xác định như một ống nguyên với các kích thước chung. Tổng đại số các ứng suất tìm được cho giá trị để kiểm tra độ bền.

Khi thêm ống thứ tư và những ống tiếp theo cần phải tìm áp lực tiếp xúc mới và ứng suất ban đầu bổ sung.

Khi lắp các ống rỗng thành ống liền không có lỗ áp lực tiếp xúc xác định theo công thức (212) hay (213) với điều kiện $r_1 = 0$.

Thí dụ 105. Cho $p_1 = 2000 \text{ kG/cm}^2$; $p_2 = 0$; $r_1 = 8 \text{ cm}$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$; $[\sigma] = 3000 \text{ kG/cm}^2$ (hình 202, a).

Chọn ống hai lớp với các kích thước hợp lý và kiểm tra độ bền của nó theo lý thuyết bền thứ ba.

Bài giải. Ta xác định bán kính ngoài của ống lồng hợp theo công thức (216)

$$r_3 = [\sigma]r_1 / ([\sigma] - p_1) = 3000 \cdot 8 / (3000 - 2000) = 24 \text{ cm.}$$

Tìm bán kính mặt ghép các ống theo công thức (214):

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3} = \sqrt{8 \cdot 24} = 8\sqrt{3} \approx 13,856 \text{ cm.}$$

Để tính toán đơn giản ta lấy $r_2 = 14 \text{ cm}$. Theo công thức (215) ta có độ dôi cần thiết

$$\Delta = \frac{2r_2}{E} p_1 = \frac{2 \cdot 14}{2 \cdot 10^6} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0,028 \text{ cm,}$$

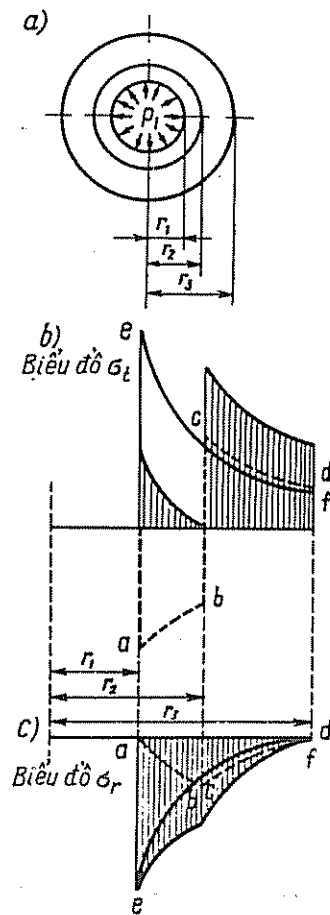
còn theo công thức (213) ta tìm được giá trị của áp lực tiếp xúc

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\Delta E}{4r_2} \cdot \frac{[1 - (r_2/r_3)^2][1 - (r_1/r_2)^2]}{1 - (r_1/r_3)^2} = \\ &= \frac{0,028 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 14} \cdot \frac{[1 - (7/12)^2][1 - (4/7)^2]}{1 - (1/3)^2} \approx 500 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

Ta xác định ứng suất ban đầu do áp lực tiếp xúc p_0 .

Ở thành của ống trong:

Theo công thức (207) với $p_1 = 0$; $p_2 = p_0$



Hình 202

$$\max \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_2} = -p_o \frac{1 + (r_1/r_2)^2}{1 - (r_1/r_2)^2} = -500 \frac{1 + (4/7)^2}{1 - (4/7)^2} \approx -985 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\min \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_1} = -2p_o \frac{1}{1 - (r_1/r_2)^2} = -10^3 \frac{1}{1 - (4/7)^2} \approx -1485 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_1} = 0;$$

$$\min \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_2} = -p_o = -500 \text{ kG/cm}^2.$$

Các biểu đồ σ_t và σ_r vẽ trên hình 202b, c bằng đường nét đứt ab.

Ở thành của ống ngoài:

Theo công thức (204) với $p_1 = p_o$ và $p_2 = 0$, xem như $r_1 = r_2$, $r_2 = r_3$.

$$\max \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_2} = p_o \frac{1 + (r_2/r_3)^2}{1 - (r_2/r_3)^2} = 500 \frac{1 + (7/12)^2}{1 - (7/12)^2} \approx 1016 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\min \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_3} = 2p_o \frac{1}{(r_3/r_2)^2 - 1} = 10^3 \frac{1}{(12/7)^2 - 1} \approx 516 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_3} = 0;$$

$$\min \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_2} = -p_o = -500 \text{ kG/cm}^2.$$

Các biểu đồ σ_t và σ_r vẽ trên hình 202b, c bằng đường nét đứt cd.

Ta xác định ứng suất ở thành khối gồm hai ống (như một ống nguyên) do tác dụng của áp lực trong p_1 .

Theo công thức (204) với $p_1 = 2000 \text{ kG/cm}^2$, $p_2 = 0$ và xem như $r_1 = r_1$, $r_2 = r_3$:

$$\max \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_1} = p_1 \frac{1 + (r_1/r_3)^2}{1 - (r_1/r_3)^2} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + (1/3)^2}{1 - (1/3)^2} = 2500 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\min \sigma_t = \sigma_{t\rho=r_3} = 2p_1 \frac{1}{(r_3/r_1)^2 - 1} = 2 \cdot 2 \cdot 10^3 \frac{1}{3^2 - 1} = 500 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\max \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_3} = 0;$$

$$\min \sigma_r = \sigma_{r\rho=r_1} = -p_1 = -2000 \text{ kG/cm}^2$$

Theo công thức (202), (203) với $p_1 = 2000 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$, $p_2 = 0$ và xem như $r_1 = r_1$, $r_2 = r_3$, đối với điểm ở bề mặt nối ghép:

$$\sigma_{t\rho=r_2} = p_1 \frac{1 + (r_3/r_2)^2}{(r_3/r_1)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 + (12/7)^2}{3^2 - 1} \approx 985 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{r\rho=r_2} = p_1 \frac{1 - (r_3/r_2)^2}{(r_3/r_1)^2 - 1} = 2 \cdot 10^3 \frac{1 - (12/7)^2}{3^2 - 1} \approx -485 \text{ kG/cm}^2;$$

Các biểu đồ σ_t và σ_r cho trên hình 202 b, c bằng đường nét liền ef.

Ta tìm ứng suất tổng hợp ở thành ống trong:

$$\sigma_{t\rho=r_1} = -1485 + 2500 = 1015 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\sigma_{t\rho=r_2} = -985 + 985 = 0;$$

$$\sigma_{r\rho=r_1} = -2000 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

và ở thành ống ngoài:

$$\sigma_{t_{\rho=r_2}} = 1016 + 985 = 2001 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{t_{\rho=r_3}} = 516 + 500 = 1016 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_2}} = -500 - 485 = -985 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{r_{\rho=r_3}} = 0.$$

Các biểu đồ σ_t và σ_r của ứng suất tổng hợp vẽ trên hình 202b, c có gạch gạch.

Ứng suất tương đương theo lý thuyết bền thứ ba như sau:

Ở các điểm tại mặt trong của ống trong

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_{t_{\rho=r_1}} - \sigma_{r_{\rho=r_1}} = 1015 + 2000 = 3015 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2};$$

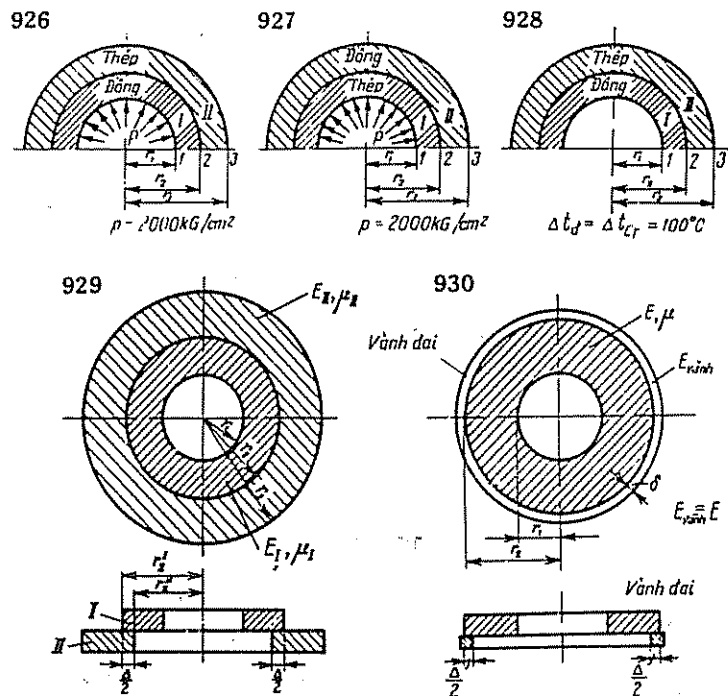
ở các điểm tại mặt trong của ống ngoài

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_{t_{\rho=r_2}} - \sigma_{r_{\rho=r_2}} = 2001 + 985 = 2986 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Sự sai lệch không đáng kể với độ bền đều của vật liệu ở điểm nguy hiểm của các ống là do quy tròn kích thước r_2 .

Điều kiện bền $\sigma_{tdIII} = [\sigma]$ xem như được đảm bảo vì ứng suất vượt tải là 0,5%.

Bài tập 926 — 930. Xác định ứng suất pháp hướng tâm σ_r , ứng suất pháp tiếp tuyến σ_t và áp lực biên p_0 của ống tổ hợp do tác dụng của áp lực trong p_1 (bài 926, 927), đốt nóng $\Delta t^\circ\text{C}$ (bài 928) và lắp ép với độ dôi Δ (bài 929, 930).



Trong các bài 926 -- 928 lấy $E_1 = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$; $\mu_1 = 0,3$; $\alpha_1 = 12,5 \cdot 10^{-6}$;
 $E_a = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$; $\mu_a = 0,34$; $\alpha_a = 16,5 \cdot 10^{-6}$; $r_1 = 10\text{cm}$; $r_2 = 20\text{cm}$; $r_3 = 40\text{cm}$.

Trong bài 929, 930 chỉ xác định p_0 .

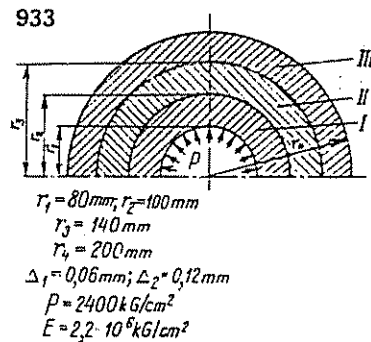
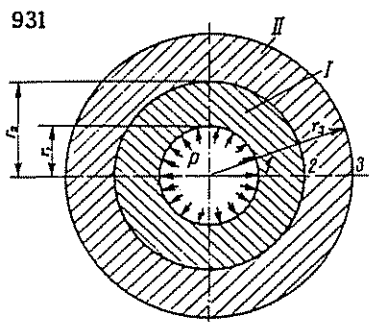
Bài tập 931. Đối với ống hai lớp xác định:

1. Ứng suất do lắp ép với độ dôi $\Delta = 0,4\text{mm}$;
2. Ứng suất do áp lực trong $p_0 = 2000 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$;
3. Ứng suất tổng cộng;
4. Ứng suất tính toán theo lý thuyết bền thứ ba của ống tổ hợp giảm bao nhiêu phần trăm so với ống liền cùng kích thước.

Lấy $r_1 = 10\text{cm}$, $r_2 = 25\text{cm}$; $r_3 = 50\text{cm}$.

Bài tập 932. Thiết kế ống hai lớp với kích thước hợp lý khi dùng lý thuyết bền thứ ba. Coi như đã cho $r_1 = 10\text{cm}$; $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$;

$$\mu = 0,3; [\sigma] = 4000 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}; p = 3000 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$



Bài tập 933. Đối với ống ba lớp xác định:

1. Ứng suất do lắp ép Δ_1 , Δ_2 ;
2. Ứng suất do áp lực trong p ;
3. Ứng suất tính toán theo lý thuyết bền thứ ba;
4. Ứng suất tính toán trong ống tổ hợp giảm bao nhiêu phần trăm so với ống liền cùng kích thước?

XIV — TÁC DỤNG ĐỘNG CỦA LỰC

§ 45. Tính vật (hệ) chuyển động có xét lực quán tính

Tác dụng động của lực được đặc trưng bởi sự tồn tại gia tốc trong các bộ phận của vật thể (hệ) đang xét. Đặc điểm của biến dạng và sự phá hủy vật thể thay đổi phụ thuộc vào dạng gia tốc xuất hiện. Sự có mặt của gia tốc liên quan đến

sự xuất hiện lực quán tính, lực này có hướng ngược với hướng của gia-tốc. Giá trị của lực quán tính nguyên tố dP_{qt} được xác định bằng tích của khối lượng dm của thể tích nguyên tố dV của vật với gia tốc a của nó, tức là:

$$dP_{qt} = dm \cdot a = \frac{\gamma}{g} a \cdot dV,$$

trong đó γ là trọng lượng riêng của vật liệu; g là gia tốc trọng trường.

Trên hình 203 a chỉ ra một chuyển động tịnh tiến không đều, trên hình 203 b — chuyển động quay không đều của vật thể.

Nếu khi chuyển động, các bộ phận của vật có gia tốc không đổi thì ta không quan sát được đặc điểm gì ở trạng thái vật liệu của vật thể. Trong trường hợp này có thể xác định ứng suất và biến dạng như với tải trọng tĩnh gồm ngoại lực và lực quán tính.

Nếu vật thể (hệ) chuyển động đủ cứng để chịu vật nặng nào đó tác dụng thì theo chuyển động đã cho ta tìm được gia tốc các bộ phận của vật và tải trọng, từ gia tốc này xác định được lực quán tính. Kết hợp lực quán tính với trọng lượng vật nặng, trọng lượng bản thân vật và tất cả các lực ngoài tác dụng lên nó ta xét vật như ở trạng thái tĩnh và tính theo qui tắc đã thiết lập cho cách đặt tải tĩnh.

Nếu trọng lượng của vật nặng mang trên vật lớn so với trọng lượng bản thân của nó và lực quán tính của vật nhỏ so với lực quán tính của vật nặng thì khi tính độ bền và độ cứng của vật có thể bỏ qua ảnh hưởng do trọng lượng bản thân nó.

Trong trường hợp này khi phương gia tốc a của chuyển động đã cho trùng với đường tác dụng của gia tốc trọng trường g thì hình thức biến dạng do lực quán tính tương ứng với hình thức biến dạng do trọng lượng bản thân vật và vật nặng mà vật mang theo. Nếu ngoài vật nặng trên vật không có thêm tải trọng nào khác thì lực động suy rộng P_d , ứng suất động p_d (pháp tuyến σ_d hay tiếp tuyến τ_d) và chuyển vị động δ_d (có xét lực quán tính) xác định một cách thuận tiện qua các đại lượng tương ứng P , p và δ do tải trọng tĩnh (không có lực quán tính) và hệ số động.

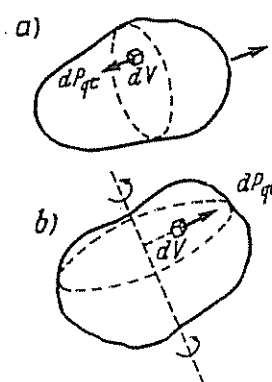
$$k_d = 1 + \frac{a}{g} \quad (217)$$

theo công thức

$$\left. \begin{aligned} P_d &= k_d P \\ p_d &= k_d p \\ \delta_d &= k_d \delta \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Trong trường hợp phương gia tốc a của chuyển động đã cho không trùng với đường tác dụng của gia tốc trọng trường g thì hình thức biến dạng của vật do lực quán tính sẽ không phù hợp với hình thức biến dạng do trọng lượng bản thân và trọng lượng vật nặng mà vật mang theo. Khi tính vật cần tính ứng suất và biến dạng do từng hình thức biến dạng như khi các tải trọng đó tác dụng tĩnh.

Thí dụ 106: Trên thanh lẳng trụ chiều dài l treo hai vật trọng lượng Q_1 và Q_2 , thanh chuyển động nhanh dần đều hướng thẳng đứng lên trên và đi được



Hình 203

đoạn đường S sau t giây đầu tiên (hình 204).

Xác định diện tích cần thiết F của mặt cắt ngang thanh và độ dẫn động của nó, nếu biết trọng lượng riêng của vật liệu thanh γ , modun đàn hồi dọc E và ứng suất kéo cho phép $[\sigma]$.

Bài giải: Lực dọc tĩnh lớn nhất ở mặt cắt trên cùng của thanh

$$\max N = Q_1 + Q_2 + \gamma Fl.$$

Ứng suất pháp tĩnh lớn nhất

$$\max \sigma = \frac{\max N}{F} = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l.$$

Vi gia tốc của chuyển động đã cho $a = \frac{2S}{t^2}$ hướng thẳng đứng lên trên nên hệ số động

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}.$$

Ứng suất động lớn nhất

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma = k_d \left(\frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \right).$$

Theo điều kiện bền

$$\max \sigma_d = k_d \max \sigma \leq [\sigma],$$

hay

$$\max \sigma = \frac{Q_1 + Q_2}{F} + \gamma l \leq \frac{[\sigma]}{k_d}.$$

Từ đó diện tích cần thiết của mặt cắt ngang thanh

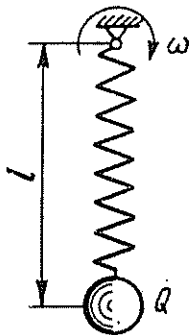
$$F \geq \frac{Q_1 + Q_2}{([\sigma]/k_d) - \gamma l}.$$

Độ dẫn của thanh có diện tích F khi các lực tác dụng tĩnh

$$\Delta l = \left(Q_1 + \frac{2}{3} Q_2 + \frac{1}{2} \gamma F l \right) \frac{l}{EF}.$$

Độ dẫn động của thanh $\Delta l_d = k_d \Delta l$.

Thí dụ 107: Lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn chiều dài $l = 30\text{cm}$, bán kính vòng xoắn ốc $R = 2\text{cm}$, bán kính mặt cắt dây $r = 0,2\text{cm}$, số vòng $n_0 = 10$, treo vật nặng $Q = 1\text{kG}$ và quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh khớp cố định với vận tốc góc $n = 200\text{vg/ph}$ (hình 205).



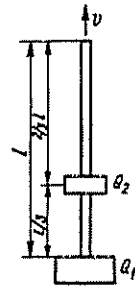
Hình 205

Xác định ứng suất tiếp động lớn nhất $\max \tau_d$ ở mặt cắt dây của lò xo và chuyển vị lớn nhất Δl của vật Q nếu modun đàn hồi trượt của vật liệu $G = 8 \cdot 10^5 \text{kG/cm}^2$ và trọng lượng lò xo rất nhỏ so với trọng lượng Q của vật.

Bài giải: Ở vị trí thấp nhất của vật Q lò xo chịu tác dụng của lực kéo động lớn nhất $P_d = k_d Q$. Vì lò xo có độ cứng nhỏ nên khi xác định lực ly tâm sẽ tính được lực kéo

dọc trục lò xo. Vì vậy hệ số động $k_d = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{\omega^2}{g} \times$

$\times (l + \Delta l)$, trong đó vận tốc góc:



Hình 204

$$\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 200/30 = 21 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$\omega^2/g = 21^2/981 \approx 0,45 \frac{1}{\text{s}}.$$

$$\Delta l = 4P_d R^3 n_o / Gr^4 = P_d \left(\frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} \right) = P_d / 4 \text{cm}.$$

Vi vậy:

$$P_d = Q \left[1 + \frac{\omega^2}{g} \left(l + \frac{4P_d R^3 n_o}{Gr^4} \right) \right] = Q[1 + 0,45(30 + 0,25P_d)] \approx Q(14,5 + 0,11P_d),$$

từ đó

$$P_d = \frac{14,5Q}{1 - 0,11Q} \approx 17,1 \text{kG}.$$

Ứng suất tiếp động lớn nhất ở mặt cắt dây của lò xo

$$\max \tau_d = \frac{2P_d R}{\pi r^3} = \frac{2 \cdot 17,1 \cdot 2}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{-3}} \approx 2720 \text{kG/cm}^2.$$

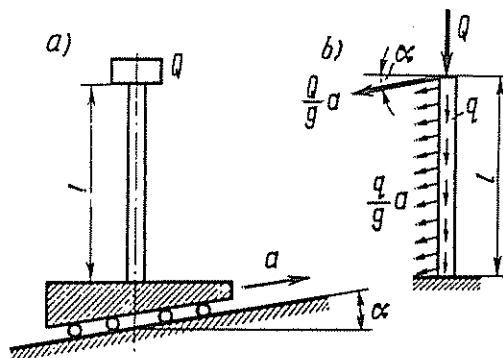
Chuyển vị động lớn nhất của tải trọng

$$\Delta l = \frac{1}{4} P_d = \frac{17,1}{4} \approx 4,3 \text{cm}.$$

Thí dụ 108: Ở đầu trên của thanh lăng trụ chiều dài l mang vật trọng lượng Q , đầu dưới của thanh ngàm vào chi tiết cứng tuyệt đối, chi tiết này chuyển động trên đường nghiêng với mặt nằm ngang một góc α với gia tốc không đổi a (hình 206a).

Xác định ứng suất pháp động lớn nhất và nhỏ nhất ở mặt cắt nguy hiểm của thanh, nếu biết diện tích mặt cắt F , momen chống uốn W và trọng lượng của một đơn vị chiều dài q .

Bài giải: Khi hệ chuyển động thanh chịu tác dụng của trọng lượng vật Q , trọng lượng bản thân q hướng thẳng đứng xuống dưới, lực quán tính tập trung Qa/g và lực quán tính phân bố đều qa/g có phương hợp với trục hình học góc $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ và ngược với chiều chuyển động (hình 206b).



Hình 206

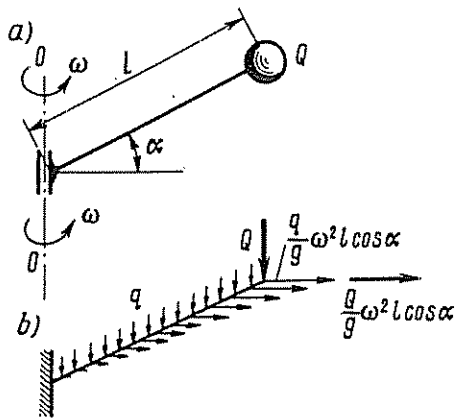
Ứng suất pháp ở mặt cắt nguy hiểm tại ngàm: do các trọng lực Q và q gây ra nên dọc trục $\sigma' = -(Q + ql)/F$; do thành phần lực quán tính dọc trục hình học của thanh gây ra nên dọc trục $\sigma'' = -[(Q + ql)asina]/gF$; do thành phần lực quán tính vuông góc với trục hình học của thanh gây ra uốn

$$\sigma''' = \pm \frac{\left(Ql + \frac{1}{2}ql^2 \right) a \cos \alpha}{gW}.$$

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất pháp động ở mặt cắt nguy hiểm của thanh

$$\max_{\min} \sigma = \pm \frac{\left(Q + \frac{1}{2}ql\right)al\cos\alpha}{gW} - \left(\frac{Q + ql}{F}\right)\left(1 + \frac{a}{g}\sin\alpha\right).$$

Thí dụ 109: Trên đầu tự do của thanh chiều dài l nghiêng với trục nằm ngang góc α có gắn vật trọng lượng Q , thanh quay quanh trục thẳng đứng OO' với vận tốc góc không đổi W (hình 207a).



Hình 207

Xác định ứng suất pháp động lớn nhất ở mặt cắt nguy hiểm của thanh, nếu biết trọng lượng đơn vị chiều dài thanh q , diện tích mặt cắt ngang F và momen chống uốn của mặt cắt W .

Bài giải: Khi có tính đến lực ly tâm, sơ đồ tính vẽ trên hình (207b). Ở mặt cắt nguy hiểm tại ngàm của thanh chịu tác dụng

1. Momen uốn do trọng lượng bản thân q của thanh:

$$M_1 = \frac{ql^2}{2} \cos\alpha,$$

do trọng lượng vật nặng Q

$$M_2 = Ql\cos\alpha,$$

do lực ly tâm tập trung $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos\alpha$

$$M_3 = \frac{Q\omega^2}{2g} l^2 \sin 2\alpha,$$

do lực ly tâm phân bố theo luật hình tam giác với cường độ lớn nhất $\frac{q}{g} \omega^2 l \cos\alpha$

$$M_4 = \frac{q\omega^2}{6g} l^3 \sin 2\alpha.$$

2. Nội lực nén do trọng lượng bản thân q

$$N_1 = -ql\sin\alpha,$$

do trọng lượng vật nặng Q

$$N_2 = -Q\sin\alpha.$$

3. Nội lực kéo do lực ly tâm tập trung $\frac{Q}{g} \omega^2 l \cos\alpha$

$$N_3 = \frac{Q\omega^2}{g} l \cos^2\alpha,$$

do lực ly tâm phân bố theo luật tam giác với cường độ lớn nhất $\frac{q}{g} \omega^2 l \cos\alpha$

$$N_4 = \frac{q\omega^2}{2g} l^2 \cos^2\alpha.$$

Momen uốn tổng hợp

$$M_d = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \left(Q + \frac{1}{2} ql\right) l \cos \alpha + \left(Q + \frac{1}{3} ql\right) \times \frac{\omega^2 l^2}{2g} \sin 2\alpha.$$

Lực dọc tổng hợp

$$N_d = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \left(Q + \frac{1}{2} ql\right) \frac{\omega^2 l}{g} \cos^2 \alpha - (Q + ql) \sin \alpha.$$

Ứng suất pháp động lớn nhất ở mặt cắt nguy hiểm của thanh

$$\begin{aligned} \max \sigma_d &= \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W} = \frac{1}{F} \left[\left(Q + \frac{1}{2} ql\right) \frac{\omega^2 l}{g} \cos^2 \alpha - (Q + ql) \sin \alpha \right] + \\ &+ \frac{1}{W} \left[\left(Q + \frac{1}{3} ql\right) \frac{\omega^2 l^2}{2g} \sin 2\alpha + \left(Q + \frac{ql}{2}\right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

Thí dụ 110: Hệ trên hình 208a quay xung quanh trục thẳng đứng OO với vận tốc góc không đổi ω .

Xác định vận tốc góc cho phép n vg/ph của hệ,

nếu $m = 1\text{kg}$; $\rho = 10\text{cm}$; $d = 1\text{cm}$; $[\sigma] = 160 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$.

Bỏ qua trọng lượng bản thân hệ và ảnh hưởng của sự thay đổi khoảng cách giữa các vật m đến giá trị của lực ly tâm.

Bài giải: Khi có xét đến lực ly tâm sơ đồ tính có thể vẽ như trên hình 208b. Ở mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có tác dụng của nội lực dọc trục kéo $N_d = m\omega^2 \rho$ và momen uốn

$$M_d = mg\rho + m\omega^2 \rho^2 = m\rho(g + 2\omega^2 \rho).$$

Ứng suất kéo động lớn nhất ở thớ trong của mặt cắt ngàm

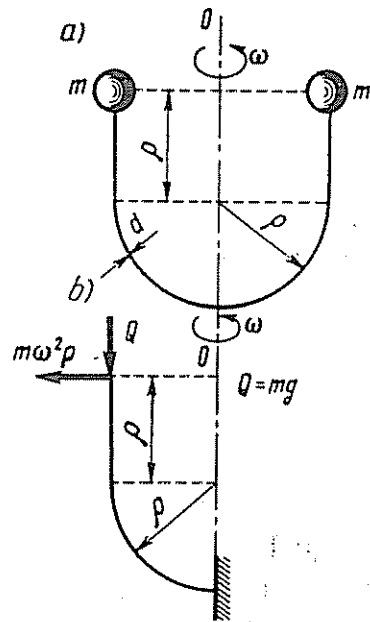
$$\begin{aligned} \max \sigma_d &= \frac{N_d}{F} + \frac{M_d}{W} \alpha = \\ &= \frac{m\omega^2 \rho}{F} + \frac{m\rho(g + 2\omega^2 \rho)}{W} \alpha. \end{aligned}$$

Vì khi $\frac{d}{\rho} = \frac{1}{10}$ hệ số $\alpha = \frac{1 - d/8\rho}{1 - d/2\rho} \approx 1$ nên điều kiện bền ở mặt cắt nguy hiểm:

$$\max \sigma_d = m\omega^2 \rho \left(\frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W} \right) + \frac{m\rho g}{W} \leq [\sigma],$$

từ đó

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \leq \sqrt{\frac{[\sigma] - \frac{m\rho g}{W}}{m\rho \left(\frac{1}{F} + \frac{2\rho}{W} \right)}} \approx$$

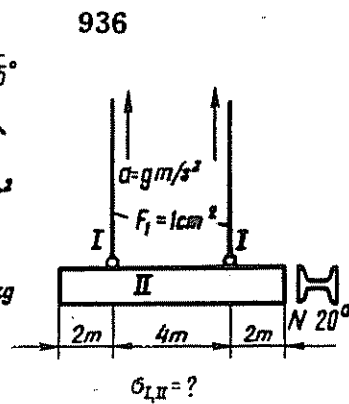
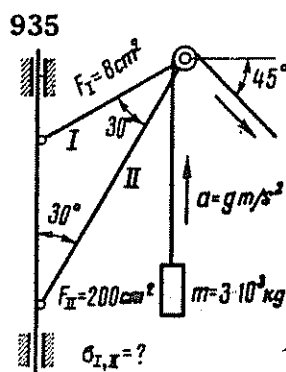
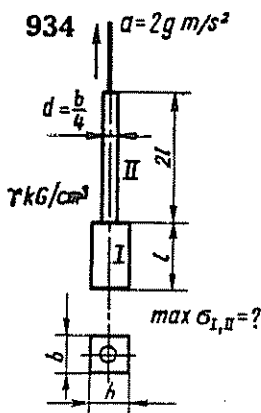


Hình 208

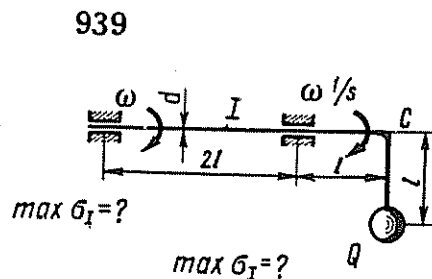
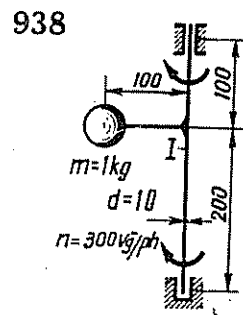
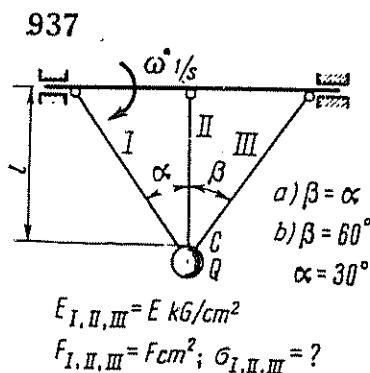
$$\approx \sqrt{\frac{160 \cdot 10^6 - \frac{1 \cdot 0,1 \cdot 9,81}{0,1 \cdot 10^{-6}}}{1 \cdot 0,1 \left(\frac{1}{0,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 0,1}{0,1 \cdot 10^{-6}} \right)}} \approx \sqrt{750}$$

$$n \approx \frac{30}{\pi} \sqrt{750} \approx 270 \text{ Vg/ph.}$$

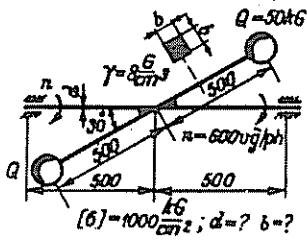
Bài tập 934 — 936: Xác định ứng suất pháp ở các mặt cắt ngang đã chỉ dẫn của thanh trong hệ do tác dụng đồng thời của trọng lực và lực quán tính. Trên hình vẽ hướng chuyển động chỉ bằng mũi tên với dấu hiệu a.



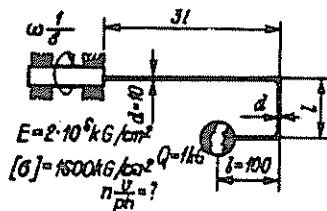
Bài tập 937 — 950: Xác định các đại lượng đã chỉ dẫn trong điều kiện của bài toán do tác dụng của lực quán tính khi hệ quay. Trên các hình vẽ, trục quay của hệ chỉ dẫn bằng mũi tên vòng với dấu hiệu ω hay n . Đối với trục quay nếu không cho kích thước mặt cắt ngang và E thì xem như nó cứng tuyệt đối. Các bộ phận cứng tuyệt đối của hệ ngoài trục quay, đều vẽ bằng hai nét. Ở tất cả các bài, trừ bài 942, xem như hệ quay đều. Khi xác định lực quán tính không kể đến biến dạng các bộ phận của hệ. Trong các bài 937, 938 ngoài lực quán tính, còn tính cả trọng lực.



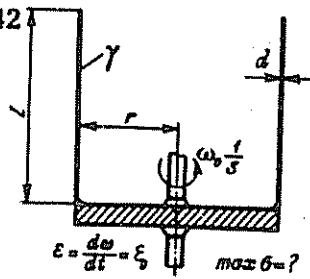
940



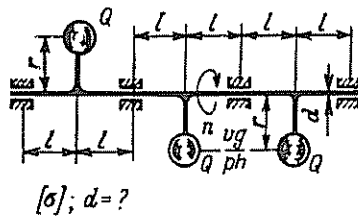
941



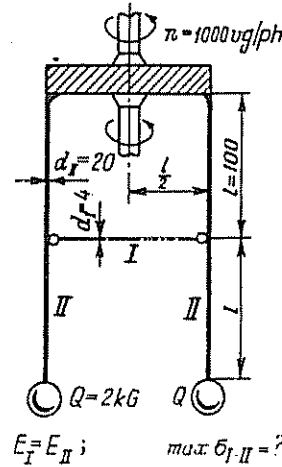
942



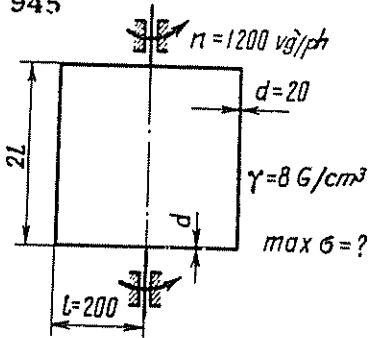
943



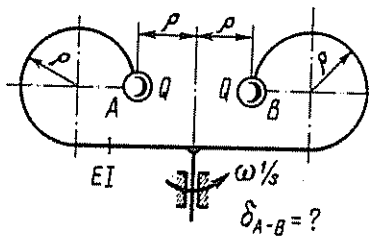
944



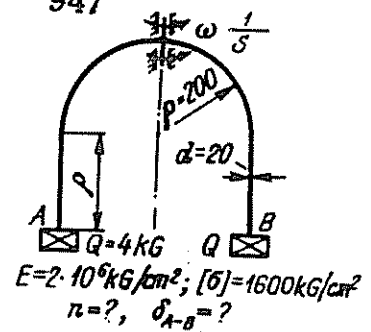
945



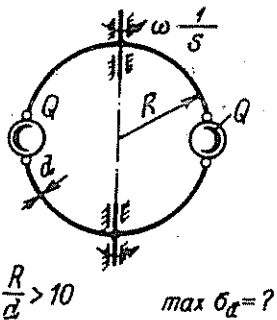
946



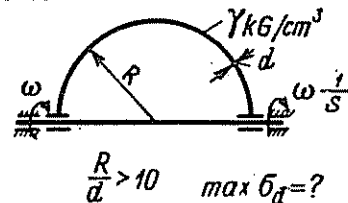
947



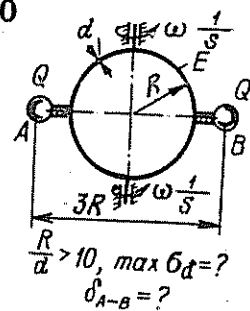
948



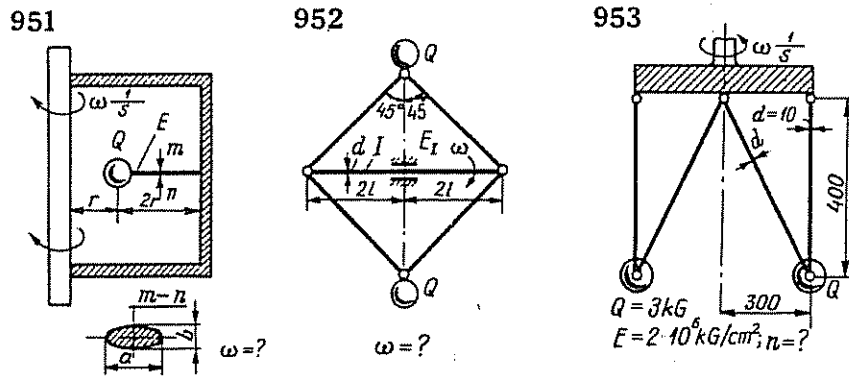
949



950



Bài tập 951 — 953 : Xác định vận tốc góc $\omega \frac{1}{s}$ (hay n vg/ph) của trục quay khi các thanh nền của hệ mất ổn định. Xem như ứng suất tới hạn không vượt quá giới hạn tỷ lệ của vật liệu.



§ 46. Dao động đàn hồi:

Sự lệch tuần hoàn của hệ đàn hồi khỏi vị trí cân bằng ổn định được gọi là *dao động đàn hồi*. Nếu hệ lệch khỏi vị trí cân bằng do tác dụng một lần của xung lực thì dao động xuất hiện được gọi là *dao động tự do* hay *dao động riêng*. Nếu hệ chịu tác dụng của lực suy rộng thay đổi tuần hoàn theo thời gian (lực nhiễu loạn) thì gọi dao động thu được là *dao động cưỡng bức*.

Dao động tự do có lực cản là dao động tắt dần, tức là dao động với biên độ giảm theo thời gian. Nếu tần số của dao động riêng bằng lần số của lực kích thích thì xảy ra cộng hưởng là hiện tượng tăng nhanh và liên tục của biên độ theo thời gian. Vì sự tăng biên độ dao động quan hệ với sự tăng ứng suất nên cộng hưởng có thể làm hệ bị phá hoại rất nhanh.

Hệ đàn hồi bất kỳ có vô số bậc tự do, vì số tọa độ độc lập xác định vị trí trong không gian phân bố trong các bộ phận của hệ lớn vô cùng. Nếu hoàn toàn không tính khối lượng bản thân hệ hoặc tính gần đúng bằng cách qui đổi nó về một hay vài điểm thì có thể xét hệ một cách thuận lợi như hệ có một hay vài bậc tự do. Khi không kể đến khối lượng bản thân, có thể xem hệ đàn hồi là một bậc tự do nếu hệ mang một tải trọng mà vị trí của nó trong không gian được xác định chỉ bằng một tọa độ. Khi có xét khối lượng bản thân có thể xem hệ là một bậc tự do nếu với mức độ gần đúng đủ có thể đưa khối lượng bản thân hệ về điểm đặt tải trọng.

Trong tất cả mọi trường hợp khối lượng dao động được coi như không đổi, và hệ đàn hồi là tuyến tính có lực suy rộng P ở thời điểm bất kỳ tỷ lệ với chuyển vị suy rộng tương ứng δ , tức là :

$$P = C\delta \quad (219)$$

trong đó C là độ cứng của hệ, tức là lực suy rộng gây ra chuyển vị suy rộng bằng đơn vị.

Hình thức biến dạng của hệ khi dao động được lấy như tải trọng tĩnh của hệ tương ứng với lực suy rộng đặt ở điểm treo tải trọng và tác dụng theo phương dao động.

Dao động tự do của hệ đàn hồi khi không xét khối lượng bản thân. Vì đối với hệ biến dạng tuyến tính, chuyển vị suy rộng của điểm đặt tải trọng khi tác dụng tĩnh cũng chính là điểm đặt lực suy rộng P tương ứng được xác định một cách dễ dàng bằng phương pháp bất kỳ trong các phương pháp đã biết, nên ta tìm được độ cứng C của hệ từ biểu thức.

$$C = P/\delta \quad (220)$$

Độ cứng của hệ gồm các bộ phận đàn hồi ghép song song, nối tiếp và hỗn hợp được xác định một cách thuận lợi khi dùng các cách ghép đã biết sau đây.

Nếu trong hệ đàn hồi gồm các bộ phận có độ cứng C_i ghép song song (hình 209a, b) thì độ cứng của hệ

$$C = \sum C_i \quad (221)$$

Nếu trong hệ đàn hồi gồm các bộ phận có độ cứng C_i ghép nối tiếp (hình 209c) thì độ cứng của hệ.

$$C = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}} \quad (222)$$

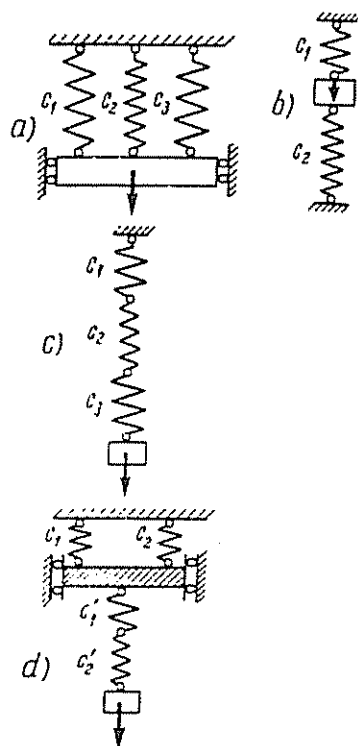
Nếu trong hệ các bộ phận đàn hồi mắc hỗn hợp (hình 209d), trong đó các phần có độ cứng C_i ghép song song, các phần có độ cứng C'_i ghép nối tiếp, thì độ cứng của hệ

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\sum C_i} + \sum \frac{1}{C'_i}} \quad (223)$$

Đối với hệ không kể khối lượng bản thân người ta xác định tần số vòng của dao động tự do ω (số dao động trong thời gian 2π giây), tần số dao động N (số dao động trong một giây) và chu kỳ dao động T theo các công thức sau:

a) Khi vật chuyển động tịnh tiến qua lại

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{C/m} = \sqrt{g/\delta} \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{C/m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/\delta} \\ T &= 2\pi \sqrt{m/C} = 2\pi \sqrt{\delta/g} \end{aligned} \right\} \quad (224)$$



Hình 209

trong đó $m = Q/g$ là khối lượng của vật có trọng lượng Q ; trong hệ MKG khối lượng được đo bằng kGs^2/cm (trong hệ SI m là khối lượng vật nặng xác định bằng cách cân, tức là so sánh với khối lượng mẫu 1kg; trọng lượng Q tính bằng Niuton, $Q = mg$); δ là chuyển vị dài của điểm treo vật khi lực Q tác dụng tĩnh theo phương dao động, chuyển vị này được tính bằng cm (m); $C = Q/\delta$ là độ cứng của hệ kG/cm (N/m hay kN/m);

b) Khi vật chuyển động quay qua lại

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{C/I_m} \\ N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{C/I_m} \\ T &= 2\pi \sqrt{I_m/C} \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

trong đó $I_m = \int_m \rho^2 dm = \frac{\gamma}{g} \int_V \rho^2 dV$ là momen quán tính của vật đối với trục

quay của nó và có đơn vị kGcm^2 (trong hệ «SI» $I_m = \int_m \rho^2 dm = \rho_0 \int_V \rho^2 dV$ tính

bằng kgm^2); γ — trọng lượng riêng của vật (kG/cm^3), ρ_0 là mật độ (khối lượng của đơn vị thể tích), ρ_0 tính bằng kg/m^3 (trong hệ «SI»); ρ là khoảng cách từ thể tích dV đến trục quay cm(m); $C = M/\varphi$ là độ cứng của hệ kGcm (Nm); M là momen tác dụng tĩnh ở mặt cắt treo vật theo chiều dao động kGcm (Nm); φ là chuyển vị góc của mặt cắt có momen M tác dụng tĩnh, rad.

Thí dụ 111: Cho $Q = 16\text{kG}$; $a = 2\text{cm}$; $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$; $T = 0,1\text{s}$ (hình 210). Xác định l .

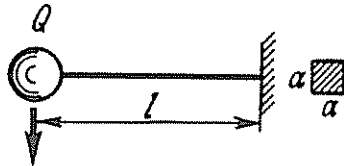
Bài giải: Vì chu kỳ dao động $T = 2\pi \sqrt{\delta/g}$ nên $\delta = T^2 g / 4\pi^2$.

Mặt khác do tác dụng tĩnh của lực Q độ võng ở đầu tự do dầm

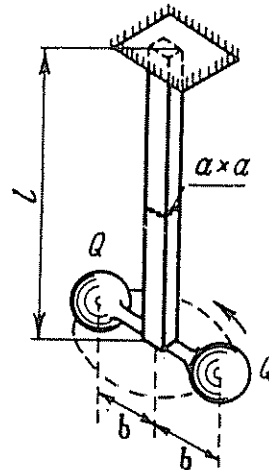
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{Ql^3}{3EI}. \text{ Vì vậy } \frac{Ql^3}{3EI} = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \text{ và } l = \sqrt[3]{\frac{T^2 g \cdot 3EI}{4\pi^2 Q}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{0,1^2 \cdot 981 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2^4}{4 \cdot \pi^2 \cdot 16 \cdot 12}} = 50\text{cm}. \end{aligned}$$

Thí dụ 112: Cho $m = 20\text{kg}$; $b = 8\text{cm}$; $l = 40\text{cm}$; $N = 20$ dao động/s; $G = 7 \cdot 10^4 \text{MN/m}^2$ (hình 211). Xác định a .

Bài giải: Vì $N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C/I_m}$ và $I_m = 2mb^2$, nên $C = 4\pi^2 N^2 I_m = 8\pi^2 N^2 mb^2$.



Hình 210



Hình 211

Mặt khác, độ cứng của thanh khi xoắn

$$C = GI_{x_0}l \approx G \cdot 0,14a^3/l,$$

trong đó $I_{x_0} = 0,14a^4$ là momen quán tính khi xoắn của mặt cắt hình vuông cạnh a . Vì vậy $0,14a^4G/l = 8\pi^2N^2mb^2$ và

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{8\pi^2N^2mb^2l/0,14G} = \\ &= \sqrt{8 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 64 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^{-2} / 0,14 \cdot 8 \cdot 10^{11}} = \\ &= 1,95 \cdot 10^{-2} = 1,95\text{cm}. \end{aligned}$$

Thí dụ 113: Cho Q, a, l, E, I (hình 212)

Xác định ω, N, T .

Bài giải: Vì góc xoay của vật Q xung quanh tâm khớp của gối trái $\varphi = Ml/3EI$, nên độ cứng của dầm

$$C = M/\varphi = 3EI/l.$$

Momen quán tính của khối lượng vật đối với trục quay của nó

$$I_m = \frac{Q}{g} a^2.$$

Theo công thức (225) tần số vòng của dao động

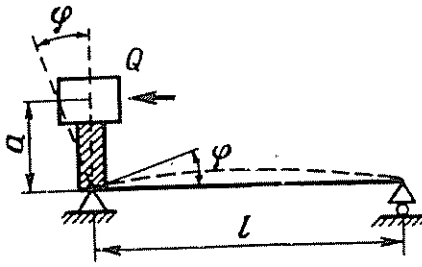
$$\omega = \sqrt{C/I_m} = \frac{1}{a} \sqrt{3EIg/Ql}$$

tần số dao động

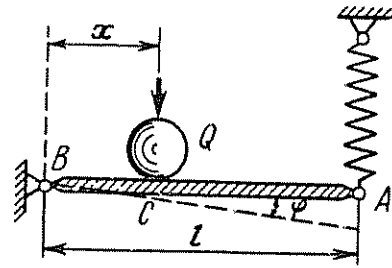
$$N = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3EIg}{Ql}}$$

chu kỳ dao động

$$T = 1/N = 2\pi a \sqrt{Ql/3EIg}.$$



Hình 212



Hình 213

Thí dụ 114: Cho Q, l , đối với lò xo D, d, n (n là số vòng), G . Thanh AB tuyệt đối cứng và không có trọng lượng (hình 213).

Xác định tần số vòng ω là hàm số của vị trí vật Q , tức là của khoảng cách x .
Bài giải: Lực kéo lò xo $P = Qx/l$.

Chuyển vị đứng của điểm A :

$$\delta_A = 8PD^3n/Gd^4 = (8QD^3n/Gd^4) \cdot (x/l)$$

Chuyển vị đứng của điểm C :

$$\delta_C = \delta_A x/l = (8QD^3n/Gd^3)(x^2/l^2).$$

Tần số dao động

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_C}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gd}{2QDn}}$$

Có thể giải bài toán này bằng cách khác, không từ chuyển động tịnh tiến mà từ chuyển động quay của vật Q . Khi đó chuyển vị góc của vật $\varphi = \delta_A/l$;
 momen hồi phục $M = Pl$;

độ cứng của hệ $C = M/\varphi = Pl^2/\delta_A$;

momen quán tính của khối lượng vật đối với trục quay

$$I_m = \frac{Q}{g} x^2,$$

tần số dao động:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{l}{x} \sqrt{\frac{Pg}{Q\delta_A}} = \frac{ld^2}{2Dx} \sqrt{\frac{Gg}{2QDn}}$$

Thí dụ 115: Cho: đối với thanh $l_1, d_1, G_1, l_2, d_2, G_2$, đối với bánh tròn γ, D, h (hình 214).

Xác định tần số dao động ω của bánh tròn.

Bài giải: Độ cứng của thanh khi xoắn

$$C_1 = G_1 I_{\rho_1} / l_1 = G_1 \pi d_1^4 / 32 l_1;$$

$$C_2 = G_2 I_{\rho_2} / l_2 = G_2 \pi d_2^4 / 32 l_2.$$

Vì các thanh ghép song song nên theo công thức (221) độ cứng của hệ dao động

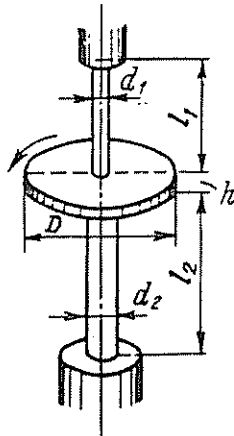
$$C = C_1 + C_2 = \frac{\pi}{32} \left(\frac{G_1 d_1^4}{l_1} + \frac{G_2 d_2^4}{l_2} \right).$$

Momen quán tính của khối lượng bánh hình trụ đối với trục quay của nó

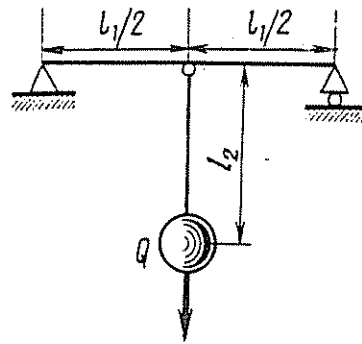
$$\begin{aligned} I_m &= \frac{\gamma}{g} \int_V \rho^2 dV = \frac{\gamma}{g} \int_0^{D/2} \rho^2 2\pi \rho h d\rho = \\ &= 2\pi \frac{\gamma}{g} h \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} \frac{\gamma h D^4}{g}. \end{aligned}$$

Theo công thức (225) tần số dao động của bánh:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I_m}} = \frac{1}{D^2} \sqrt{\frac{(G_1 d_1^4/l_1) + (G_2 d_2^4/l_2)}{(\gamma/g)h}}.$$



Hình 214



Hình 215

Thí dụ 116: Cho: đối với dầm l_1 , E_1 , I_1 , đối với thanh E_2 , l_2 , F_2 , Q (hình 215).

Xác định T .

Bài giải: Độ cứng của dầm hai gối tựa với lực uốn ở giữa $C_1 = 48E_1I_1/l_1^3$
Độ cứng của thanh khi kéo $C_2 = E_2F_2/l_2$.

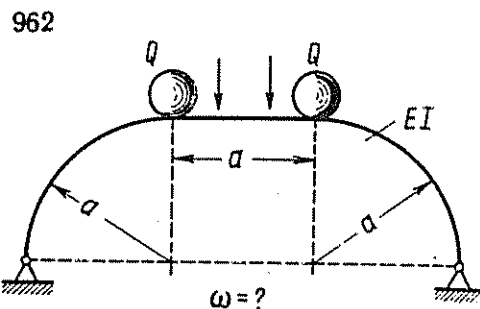
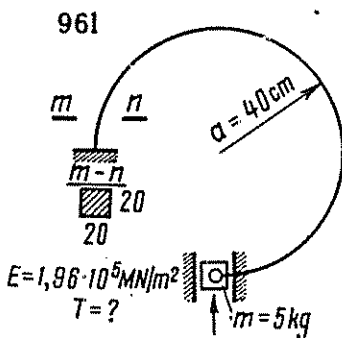
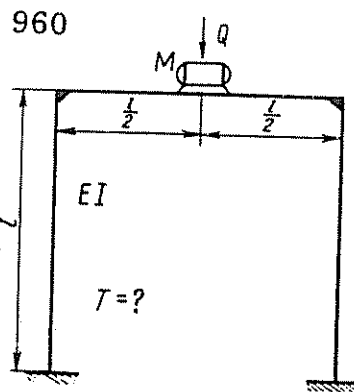
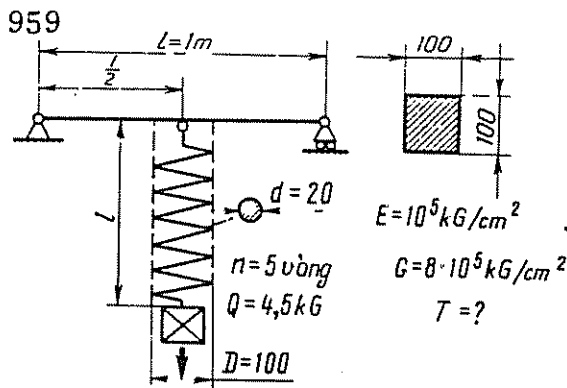
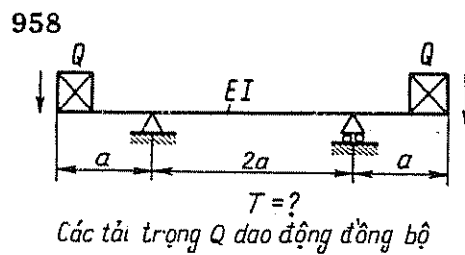
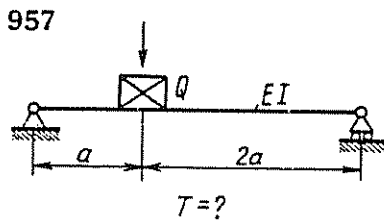
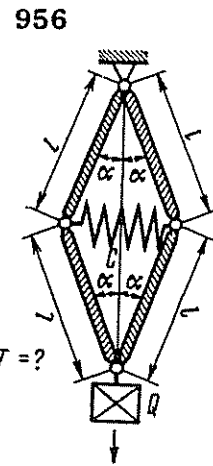
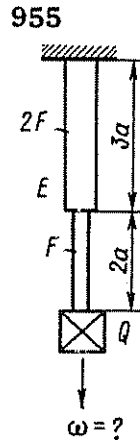
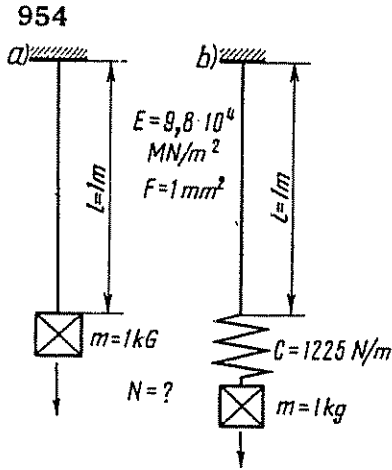
Vì dầm và thanh ghép nối tiếp nên theo công thức (222) độ cứng của hệ dao động

$$C = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)} = \frac{1}{(l_1^3/48E_1I_1) + (l_2/E_2F_2)}.$$

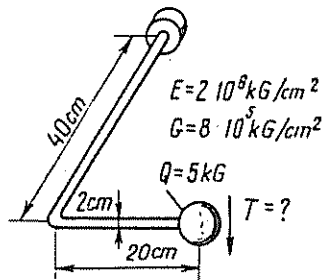
Theo công thức (224) chu kỳ dao động của hệ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{g} \left(\frac{l_1^3}{48E_1I_1} + \frac{l_2}{E_2F_2} \right)}$$

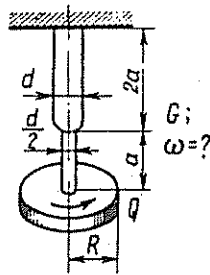
Bài tập 954 — 965: Xác định các đại lượng chỉ dẫn trong điều kiện bài toán cho các hệ dao động. Trên hình vẽ mũi tên gần vật chỉ phương dao động.



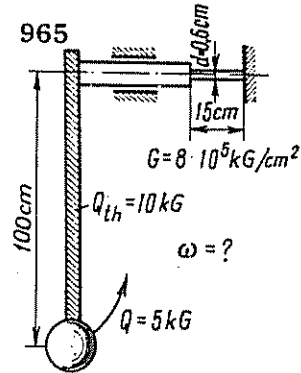
963



964



965



Dao động tự do của hệ đàn hồi có xét đến trọng lượng bản thân. Khi hệ đàn hồi dao động tự do có thể tính gần đúng khối lượng bản thân phân bố m_0 bằng cách đưa nó về điểm treo vật và cộng với khối lượng m của vật. Khối lượng tính đổi m_{td} là khối lượng tập trung ở điểm treo vật mà động năng của khối lượng đó bằng động năng của khối lượng hệ m_0 . Giá trị của khối lượng tính đổi tỷ lệ với giá trị của khối lượng thực và được xác định theo công thức:

$$m_{td} = k_m m_0 \quad (226)$$

Hệ số tính đổi khối lượng k_m phụ thuộc vào qui luật thay đổi vận tốc chuyển động của các bộ phận của khối lượng m_0 . k_m được thiết lập từ điều kiện cân bằng động năng của m_{td} và m_0 và dẫn tới biểu thức:

$$k_m = \frac{1}{m_0} \int_V \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dm_0, \quad (227)$$

trong đó δ và δ_x là chuyển vị suy rộng của điểm treo vật và điểm bất kỳ của hệ khi trên hệ chịu tác dụng tĩnh của lực suy rộng tương ứng với dạng biến dạng của hệ khi dao động và lực suy rộng ấy đặt tại điểm treo vật có phương theo phương dao động.

Đối với các thanh thẳng có mặt cắt ngang không đổi, có thể xác định hệ số tính đổi khối lượng theo công thức:

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx, \quad (228)$$

trong đó dx là phân tử chiều dài thanh; l là chiều dài thanh.

Tần số vòng ω , tần số N và chu kỳ T của dao động tự do của hệ đàn hồi có xét đến trọng lượng bản thân xác định theo các công thức sau:

a) Khi chuyển động tịnh tiến qua lại

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_o}} = \sqrt{\frac{g}{\delta} \frac{1}{1 + k_m Q_o/Q}} = \\
 &= \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m m_o/m}}, \\
 N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m + k_m m_o}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \frac{1}{1 + k_m Q_o/Q}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m m_o/m}}, \\
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_o}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g} (1 + k_m Q_o/Q)} = \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g} (1 + k_m m_o/m)},
 \end{aligned}
 \tag{229}$$

trong đó $Q = mg$ và $Q_o = m_o g$ là trọng lượng vật và trọng lượng hệ, δ là chuyển vị dài của điểm treo vật khi lực Q tác dụng tĩnh lên hệ theo phương dao động;

b) Khi chuyển động quay qua lại

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sqrt{C/(I_m + k_m I_{m_o})}, \\
 N &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{C/(I_m + k_m I_{m_o})}, \\
 T &= 2\pi \sqrt{(I_m + k_m I_{m_o})/C},
 \end{aligned}
 \tag{230}$$

trong đó I_m và I_{m_o} là mômen quán tính của khối lượng vật nặng và khối lượng hệ m_o đối với trục quay.

Ta xét các thí dụ có tính khối lượng bản thân của thanh lăng trụ với các dạng dao động tự do đơn giản.

Thí dụ 117: Hệ dao động dọc trục. Cho Q, γ, F, a, b, E (trong hệ SI cho khối lượng m của vật bằng kg, mật độ thanh ρ (kg/m^3), F, a, b, E) (hình 216a).

Xác định T .

Bài giải: Khi vật Q tác dụng tĩnh tỷ số các chuyển vị dài (dãn dài hay co ngắn) của mặt cắt bất kỳ (xác định bằng các tọa độ x_1 và x_2) và của mặt cắt treo vật tương ứng bằng $\delta x_1/\delta = x_1/a$ và $\delta x_2/\delta = x_2/b$.

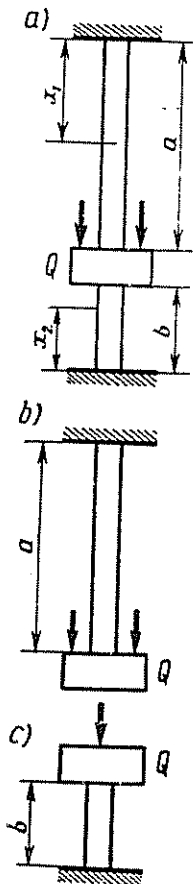
Theo biểu thức (228) hệ số thu gọn khối lượng

$$k_m = \frac{1}{a} \int_0^a (x_1/a)^2 dx_1 = \frac{1}{b} \int_0^b (x_2/b)^2 dx_2 = \frac{1}{3}.$$

Vì các đoạn thanh ghép song song nên theo công thức

$$(221) \text{ độ cứng của hệ } C = EF/a + EF/b = \frac{EF}{ab} (a + b).$$

Khối lượng bản thân thanh $m_o = \frac{\gamma F}{g} (a + b)$, khối lượng vật $m = Q/g$ (trong hệ SI, $m_o = \rho F(a + b)$).



Hình 216

Theo công thức (229) chu kỳ dao động tự do của hệ trong hệ SI:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + k_m m_0}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{EFg} \cdot \frac{ab}{a+b} \left(1 + \frac{\gamma F}{3} \cdot \frac{a+b}{m}\right)}$$

Trường hợp đặc biệt (xét trong hệ kỹ thuật).

Nếu vật Q được treo ở thanh chiều dài a và không có thanh chiều dài b (hình 216b) thì khi giả thiết $EF/b = 0$ ta có $C = EF/a$;

$$m_0 = \frac{\gamma F}{g} a \text{ và } T = 2\pi \sqrt{\frac{Qa}{EFg} \left(1 + \frac{\gamma Fa}{3Q}\right)}$$

Nếu vật Q tựa lên thanh chiều dài b , và không có thanh chiều dài a (hình 216c) thì $EF/a = 0$;

$$C = EF/b; m_0 = \frac{\gamma F}{g} b \text{ và } T = 2\pi \sqrt{\frac{Qb}{EFg} \left(1 + \frac{\gamma Fb}{3Q}\right)}$$

Thí dụ 118: Dao động ngang. Cho Q, γ, F, l, E, I , (hình 217).

Xác định T .

Bài giải: Khi vật Q tác dụng tĩnh, chuyển vị dài (độ võng) của mặt cắt bất kỳ có khoảng cách x đến ngàm trái được xác định bằng phương pháp thông số ban đầu

$$\delta_x = \frac{1}{EI} \left(M_0 \frac{x^2}{2} - \frac{Q}{2} \frac{x^3}{6} \right)$$

Từ điều kiện đối xứng của dầm ta có

$$\left(\frac{d\delta_x}{dx} \right)_{x=l/2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_0 l}{2} - \frac{Ql^2}{16} \right) = 0$$

và

$$M_0 = Ql/8.$$

Vì vậy

$$\delta_x = \frac{Ql^3}{48EI} \left(3 \frac{x^2}{l^3} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right); \delta = \delta_{x=l/2} = \frac{Ql^3}{192EI}$$

và

$$\frac{\delta_x}{\delta} = 4 \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Theo công thức (228) hệ số tính đổi khối lượng dầm

$$k_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{32}{l} \int_0^{l/2} \left(3 \frac{x^2}{l^2} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{13}{35}$$

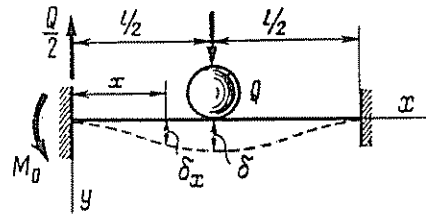
Trọng lượng dầm $Q = \gamma Fl$.

Chu kỳ dao động tự do của dầm tìm được từ biểu thức (229):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta}{g} \left(1 + k_m \frac{Q_0}{Q}\right)} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{Ql^3}{3EIg} \left(1 + \frac{13}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}\right)}$$

Thí dụ 119: Dao động xoắn. Cho Q, D, γ, d, a, b, G (hình 218a).

Xác định T .



Hình 217

Bài giải: Khi momen quay tác dụng tĩnh ở mặt cắt treo đĩa, tỷ số giữa các chuyển vị góc (góc quay) của mặt cắt bất kỳ (xác định bằng các tọa độ x_1 và x_2) với mặt cắt treo đĩa tương ứng bằng:

$$\delta_{x_1}/\delta = \varphi_{x_1}/\varphi = x_1/a \text{ và } \delta_{x_2}/\delta = \varphi_{x_2}/\varphi = x_2/b.$$

Theo công thức (228) hệ số thu gọn khối lượng thanh

$$k_m = \frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 dx_1 = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 dx_2 = \frac{1}{3}.$$

Vì các đoạn thanh ghép song song nên theo công thức (221) độ cứng của hệ

$$C = \frac{GI_\rho}{a} + \frac{GI_\rho}{b} = GI_\rho \frac{a+b}{ab} = G \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{a+b}{ab}$$

Momen quán tính của khối lượng thanh hình trụ đối với trục hình học của nó $I_{m_0} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{gd^4(a+b)}$. Momen quán tính của khối lượng đĩa hình trụ có trọng lượng Q , bán kính D : $I_m = \frac{QD^2}{8g}$:

Theo công thức (230) chu kỳ dao động tự do của hệ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_m + k_m I_{m_0}}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_m ab}{GI_\rho(a+b)} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m}\right)} = 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{\frac{Q}{\pi Gg} \cdot \frac{ab}{a+b} \left(1 + \frac{\pi d^4 \gamma}{12Q} \cdot \frac{a+b}{D^2}\right)}.$$

Trường hợp đặc biệt.

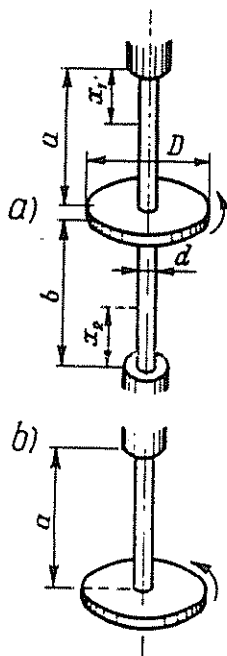
Nếu $GI_\rho/b = 0$ (hình 218b) thì $C = GI_\rho/a$,

$$I_{m_0} = \pi d^4 \gamma a / 32g$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_m a}{GI_\rho} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{I_{m_0}}{I_m}\right)} =$$

$$= 4\pi \frac{D}{d^2} \sqrt{Qa/\pi Gg \left(1 + \frac{\pi d^4 \gamma a}{12QD^2}\right)}.$$

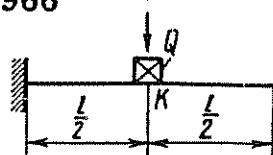
Bài tập 966 – 970: Xác định hệ số tính đổi khối lượng k_m của dầm khi đưa khối lượng về mặt cắt K .



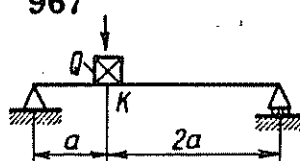
Hình 218

và

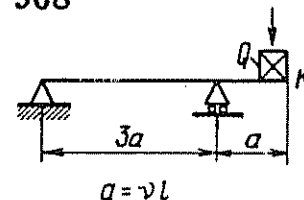
966

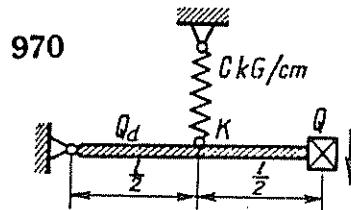
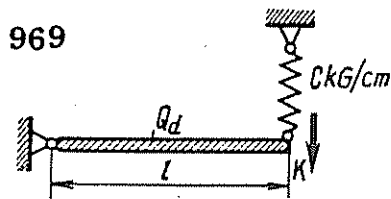


967

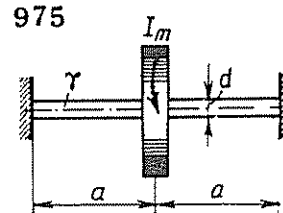
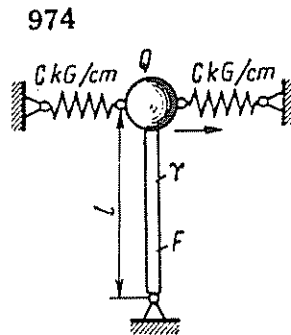
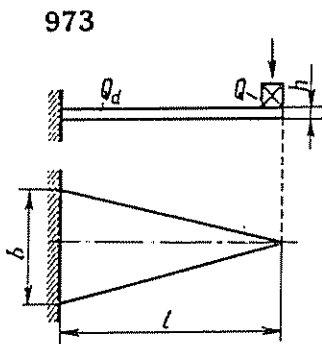
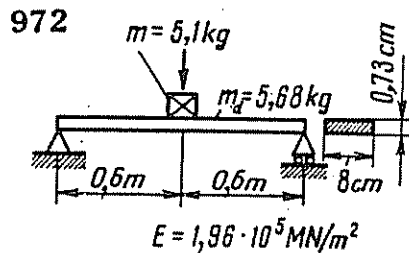
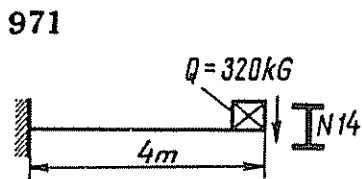


968





Bài tập 971 — 975: Xác định chu kỳ dao động tự do T của hệ.



Dao động cưỡng bức không tính đến lực cản. Nếu dao động cưỡng bức của hệ có một bậc tự do được gây ra do đặt vào vật lực suy rộng kích thích điều hòa

$$P = P_0 \sin \omega_0 t \quad (231)$$

trong đó P_0 là giá trị lớn nhất của lực kích thích P ; ω_0 là tần số của lực P ; t là thời gian, thì biên độ của dao động cưỡng bức A được xác định theo công thức

$$A = \frac{\delta_0}{1 - (\omega_0^2/\omega^2)} = \beta \delta_0 \quad (232)$$

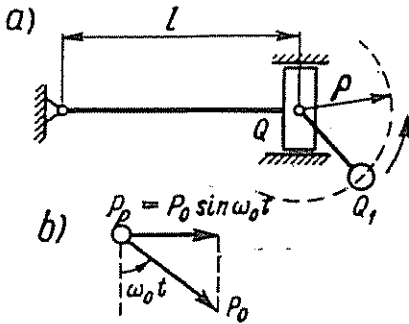
Trong công thức (232) δ_0 là chuyển vị suy rộng của điểm treo vật do tác dụng tĩnh của lực P_0 ; ω là tần số vòng của dao động riêng của hệ;

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega_0^2/\omega^2)} \text{ là hệ số tăng dao động} \quad (233)$$

Nếu $\omega_0 \gg \omega$ thì $A \rightarrow 0$ và trong thực tế vật đặt trên hệ đàn hồi sẽ cố định. Nếu $\omega_0 \ll \omega$ thì $A \rightarrow \delta_0$ và vật dao động với biên độ bằng chuyển vị của nó do tác dụng tĩnh của lực P_0 . Nếu ω_0 dần tới ω thì biên độ A tăng nhanh. Khi $\omega_0 = \omega$ xuất hiện cộng hưởng và $A = \infty$. Trong thực tế vì có lực cản nên A không đến vô cùng nhưng có thể đạt đến giá trị rất lớn.

Trong vùng cộng hưởng (khi $0,7 \leq \omega_0/\omega \leq 1,3$) lực kích thích không lớn có thể gây ra trong các bộ phận của hệ dao động biến dạng lớn và do đó ứng suất lớn. Nếu tần số của lực kích thích tăng nhanh qua vùng cộng hưởng thì biên độ không kịp đạt đến giá trị cực đại của nó.

Thí dụ 120: Tải trọng $Q_1 = 2\text{kG}$ được treo vào vật $Q = 100\text{kG}$ gắn ở đầu thanh lăng trụ chiều dài $l = 1\text{m}$ và diện tích mặt cắt ngang $F = 1\text{cm}^2$. Vật Q_1 quay trên tay đòn $\rho = 8\text{cm}$ với vận tốc góc $n = 2400\text{ vg/ph}$ (hình 219a). Môđun đàn hồi dọc $E = 2 \cdot 10^6\text{ kG/cm}^2$.



Hình 219

Hãy xác định biên độ dao động cưỡng bức của vật khi không tính khối lượng thanh và lực cản.

Bài giải: Vì chuyển vị dài (độ dãn) của điểm treo vật dưới tác dụng tĩnh của lực Q theo phương dao động $\delta = \frac{Ql}{EF} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0,005\text{cm}$ nên theo công thức (224)

lần số góc của dao động dọc tự do

$$\omega = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{981 \cdot 2 \cdot 10^2} \approx 443\text{ 1/s.}$$

Khi vật không cân bằng Q_1 quay xuất hiện lực ly tâm $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$, thành phần lực ly tâm theo phương dao động là lực kích thích điều hòa (hình 219b) $P = P_0 \sin \omega_0 t$ gây ra dao động cưỡng bức.

Vận tốc góc của Q_1 là tần số vòng của dao động cưỡng bức và bằng

$$\omega_0 = \pi n / 30 = \pi \cdot 2400 / 30 \approx 251\text{ 1/s}$$

Lực kích thích có giá trị lớn nhất

$$P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho = \frac{2 \cdot 251^2 \cdot 8}{981} \approx 1030\text{kG,}$$

Độ dãn của thanh do lực P_0 tác dụng tĩnh theo phương dao động

$$\delta_0 = \frac{P_0 l}{EF} = \frac{1030 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} \approx 0,052\text{cm}$$

Theo công thức (233) ta có hệ số tăng dao động

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega_0^2/\omega^2)} = \frac{1}{1 - (251^2/443^2)} \approx 1,47,$$

nên biên độ dao động cưỡng bức của hệ

$$A = \beta \delta_0 = 1,47 \cdot 0,052 \approx 0,08\text{cm.}$$

Bài tập 121: Động cơ điện khối lượng $m = 96\text{kg}$ đặt ở giữa thanh ngang của khung như trên hình 220a. Phần không cân bằng của động cơ là tải trọng tập trung có khối lượng $m_1 = 4\text{kg}$ quay với tay đòn $\rho = 4\text{cm}$, vận tốc góc $n = 1500$ vg/ph quanh trục động cơ.

Xác định biên độ dao động cưỡng bức của khung nếu $l = 1\text{m}$, momen quán tính của mặt cắt ngang thanh ngang và các thanh đứng $I = 400\text{cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{MN/m}^2$. Không tính trọng lượng bản thân khung.

Bài giải: Trọng lượng động cơ điện và phần không cân bằng của nó

$$Q = mg = 940\text{N};$$

$$Q_1 = m_1g = 39,2\text{N}.$$

Từ công thức (200) ở phương trình chính tắc của phương pháp lực ta tìm được phản lực ngang ở các gối của khung do lực Q tác dụng tĩnh

$$X_1 = -\delta_{1p}/\delta_{11}. \text{ Vì } EI \delta_{1p} = -2 \int_0^l \frac{Q}{2} l x_2 dx_2 = -\frac{Ql^3}{2},$$

$$EI \delta_{11} = 2 \int_0^l x_1^2 dx_1 + 2l^2 = \frac{8}{3} l^3,$$

nên

$$X_1 = \frac{Ql^3 \cdot 3}{2 \cdot 8l^3} = \frac{3}{16} Q = \frac{3}{16} 940 = 176\text{N}.$$

Ta xác định độ võng ở điểm đặt tải trọng Q do tác dụng tĩnh của nó theo phương pháp tải trọng giả bằng đơn vị

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \int_0^l \left(-Xl + \frac{Q}{2} x_2 \right) \frac{x_2^2}{2} dx_2 = \frac{7}{96} \frac{Ql^2}{EI} = \frac{7 \cdot 940 \cdot 1^3}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 0,857 \cdot 10^{-4} \text{m} = 0,857 \cdot 10^{-2} \text{cm}. \end{aligned}$$

Tần số dao động tự do của khung

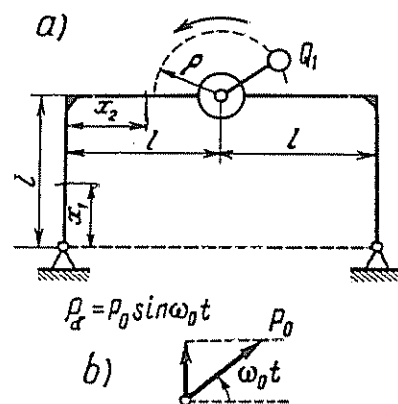
$$\omega = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9,81/0,857 \cdot 10^{-4}} = 335 \frac{1}{\text{s}}.$$

Khi quay trọng lượng không cân bằng Q_1 làm xuất hiện lực ly tâm $P_0 = m_1 \omega_0^2 \rho$, thành phần của lực này theo phương dao động (hình 220b) là lực kích thích điều hòa $P = P_0 \sin \omega_0 t$ gây ra dao động cưỡng bức với tần số vòng

$$\omega_0 = \pi n/30 = \pi \cdot 1500/30 = 157 \frac{1}{\text{s}}.$$

Giá trị lớn nhất của lực kích thích

$$P_0 = 4 \cdot 157^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 3940\text{N}.$$



Hình 220

Độ võng ở giữa thanh ngang do tác dụng tĩnh của P_0 :

$$\delta_0 = \frac{7}{96} \frac{P_0 l^3}{EI} = \frac{7 \cdot 3940 \cdot 1}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-8}} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{m.}$$

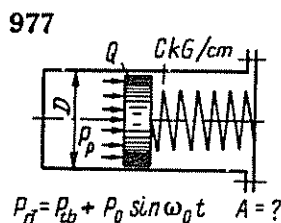
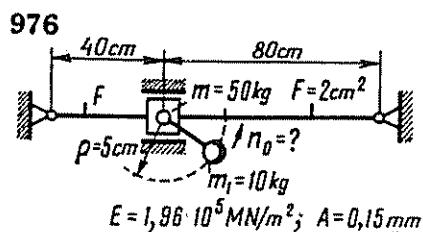
Vì hệ số tăng dao động

$$\beta = \frac{1}{1 - (\omega_0^2/\omega^2)} = \frac{1}{1 - (157^2/335^2)} \approx 1,28$$

nên biên độ dao động cưỡng bức của hệ

$$A = \beta \delta_0 = 1,28 \cdot 3,7 \cdot 10^{-4} = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{m} = 0,047 \text{cm.}$$

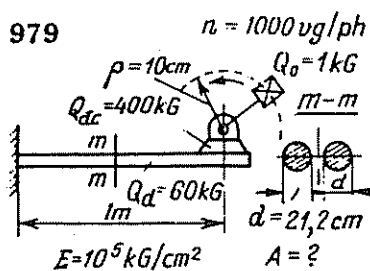
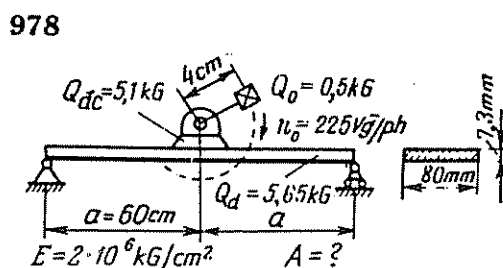
Bài tập 976: Xác định vận tốc góc n_0 của động cơ (có thể chuyển dịch trong các tấm dẫn hướng) khi đặt trên trục của nó trọng lượng Q_1 lệch tâm, nếu biết biên độ dao động cưỡng bức A của động cơ, trọng lượng Q bao gồm trọng lượng động cơ và Q_1 . Không tính khối lượng thanh.



Bài tập 977: Xác định biên độ dao động A của pittông máy hơi nước chuyển động không ma sát trong xi lanh đường kính D , nếu áp suất trên pittông thay đổi theo qui luật

$$P = P_{tb} + P_0 \sin \omega_0 t.$$

Bài tập 978 — 980: Xác định biên độ dao động cưỡng bức A của hệ. Trong các bài 978, 979 có tính khối lượng dầm.

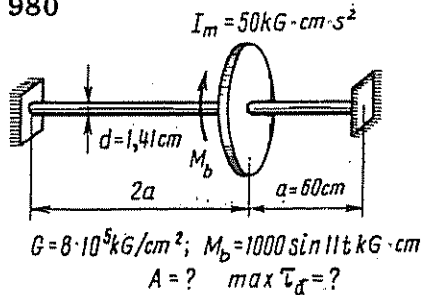


Bài tập 981: Điểm treo lò xo xoắn ốc dao động điều hòa theo phương trình

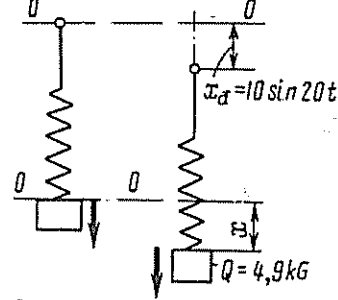
$$x_0 = 10 \sin 20t.$$

Xác định biên độ dao động cưỡng bức A của vật và ứng suất động max τ_a , nếu đường kính vòng lò xo $D = 10 \text{cm}$, đường kính dây lò xo $d = 1 \text{cm}$, số vòng $n = 25$ và $G = 8 \cdot 10^5 \text{kG/cm}^2$.

980



981



Xác định ứng suất và tính độ bền. Chuyển vị suy rộng động δ_d của điểm nào đó trên hệ tại thời điểm bất kỳ t của dao động là tổng của chuyển vị suy rộng không đổi δ tương ứng với hình thức biến dạng của hệ khi dao động do tác dụng tĩnh của tải trọng Q và trọng lượng bản thân hệ với chuyển vị suy rộng thay đổi gây ra do lực kích thích $P = P_0 \sin \omega_0 t$, tức là

$$\delta_d = \delta + \beta \delta_0 \sin \omega_0 t \quad (234)$$

Đối với hệ tuyến tính cả ứng suất động suy rộng p_d (σ_d hoặc τ_d) ở các điểm trong các bộ phận của hệ cũng được xác định tương tự.

$$p_d = p + \beta p_0 \sin \omega_0 t, \quad (235)$$

trong đó p là ứng suất suy rộng (σ hay τ) tương ứng với hình thức biến dạng khi dao động do tác dụng tĩnh của Q và trọng lượng bản thân hệ, còn p_0 là ứng suất suy rộng do tác dụng tĩnh của lực kích thích lớn nhất P_0 .

Giá trị cực trị của ứng suất ở thời điểm hệ lệch nhiều nhất khỏi vị trí cân bằng tĩnh thu được bằng

$$\begin{aligned} \max P_d &= p + \beta p_0 \\ \min & \end{aligned} \quad (236)$$

Vì khi dao động giá trị của ứng suất biến đổi theo chu kỳ (hình 221) nên trong trường hợp tác dụng lâu dài ta tính độ bền của hệ dao động theo phương pháp tính với tải trọng tuần hoàn. Khi quá trình dao động ngắn và biên độ của ứng suất biến đổi $(\max p_d - \min p_d)/2$ không lớn, có thể tính độ bền theo ứng suất lớn nhất như với tải trọng không đổi. Vì chuyển vị suy rộng động lớn nhất

$$\max \delta_d = \delta + \beta \delta_0 = \delta [1 + (\beta \delta_0 / \delta)] = \delta k_d, \quad (237)$$

trong đó

$$k_d = 1 + (\beta \delta_0 / \delta) = 1 + A / \delta \quad (238)$$

là hệ số động khi dao động, nên ứng suất suy rộng động lớn nhất:

$$\max p_d = p k_d. \quad (239)$$

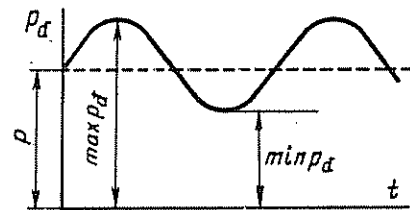
Có thể viết điều kiện bền như sau

$$\max p_d = p k_d \leq [p], \quad (240)$$

hay

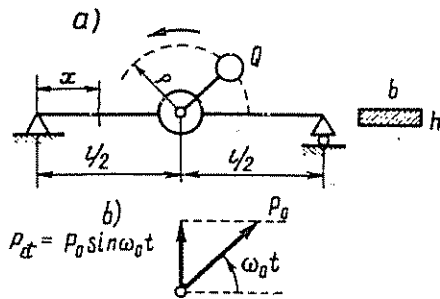
$$p \leq [p] / k_d, \quad (241)$$

trong đó $[p]$ là ứng suất suy rộng cho phép ($[\sigma]$ hay $[\tau]$).



Hình 221

Thí dụ 122: Động cơ điện $Q = 20\text{kG}$ đặt ở giữa dầm mặt cắt chữ nhật $F = bh = 12 \times 1\text{cm}^2$, chiều dài $l = 1\text{m}$. Phần quay không cân bằng của động cơ là khối lượng tập trung $Q_0 = 1\text{kG}$ gắn trên trục động cơ với khoảng cách $\rho = 4\text{cm}$ (hình 222a).



Hình 222

Xác định vận tốc góc n vg/ph của trục động cơ khi ứng suất pháp lớn nhất trong dầm đạt đến $\max \sigma_d = 2.000\text{kG/cm}^2$. Trọng lượng riêng của vật liệu dầm $\gamma = 8\text{G/cm}^3$, môđun đàn hồi dọc $E = 2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$.

Bài giải: Trọng lượng bản thân dầm $Q_0 = \gamma Fl = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 1 \cdot 10^2 = 9,6\text{kG}$.

Momen quán tính của mặt cắt ngang dầm đối với trục trung hòa và momen chống uốn tương ứng:

$$I = bh^3/12 = 12 \cdot 1/12 = 1\text{cm}^4; \quad W = bh^2/6 = 12 \cdot 1/6 = 2\text{cm}^3.$$

Khi lực tập trung Q và lực phân bố Q_0 tác dụng tĩnh trên dầm, ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} và độ võng lớn nhất δ_{\max} có giá trị:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Ql/4 + Q_0 l/8}{W} = \frac{l}{4W} \left(Q + \frac{Q_0}{2} \right) = \\ &= \frac{100}{4 \cdot 2} \left(20 + \frac{9,6}{2} \right) = 310\text{kG/cm}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \frac{Ql^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{Q_0 l^3}{EI} = \frac{l^3}{48EI} \left(Q + \frac{5}{8} Q_0 \right) = \\ &= \frac{10}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} \left(20 + \frac{5 \cdot 9,6}{8} \right) \approx 0,27\text{cm}. \end{aligned}$$

Vì theo công thức (238) hệ số động

$$k_d = 1 + (A/\delta_{\max}) = \max \sigma_d / \delta_{\max} = 2.000/310 \approx 6,45$$

nên biên độ dao động cho phép

$$A = [(\max \sigma_d / \delta_{\max}) - 1] \delta_{\max} = 5,45 \cdot 0,27 = 1,47\text{cm}.$$

Khi lực tập trung Q tác dụng tĩnh trên dầm độ võng δ_x ở mặt cắt bất kỳ có khoảng cách x đến gối trái và độ võng δ ở giữa dầm tương ứng bằng

$$\delta_x = \frac{Ql^3}{48EI} \left(3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right) \quad \text{và} \quad \delta = \frac{Ql^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{5}{24}\text{cm}.$$

Vì vậy $\delta_x/\delta = 3xl/l - 4x^3/l^3$ và hệ số tính đổi khối lượng dầm theo công thức (228) bằng:

$$k_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left(3 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35}$$

Ta tìm được tần số dao động tự do của dầm từ biểu thức (229)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta} \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 24}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{9 \cdot 6}{20}}} \approx 61,81 \text{ s.}$$

Trọng lượng phần quay không cân bằng Q_1 gây ra lực ly tâm $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$. Thành phần thẳng đứng của P_0 (hình 222b) $P = P_0 \sin \omega_0 t$ là lực kích thích điều hòa gây ra dao động cưỡng bức của dầm. Ở đây $\omega_0 = \pi n/30$ là tần số vòng của lực kích thích, còn P_0 là giá trị lớn nhất của lực ấy.

Độ võng lớn nhất của dầm dưới tác dụng tĩnh của lực P_0 :

$$\delta_0 = \frac{P_0 l^3}{48EI} = \frac{Q_1 l^3 \rho}{48EIg} \omega_0^2 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 4}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 981} \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981} \text{ cm.}$$

Từ công thức (232) ta có:

$$1,47 = \frac{\omega_0^2}{24 \cdot 981 [1 - (\omega_0^2/61,8^2)]} = \frac{61,8^2}{24 \cdot 981} \cdot \frac{\omega_0^2}{61,8^2 - \omega_0^2} \approx 0,162 \frac{\omega_0^2}{61,8^2 - \omega_0^2}$$

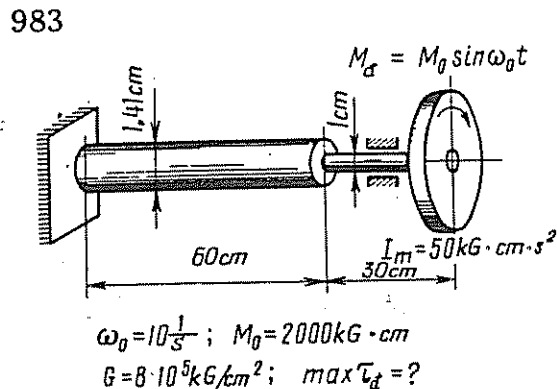
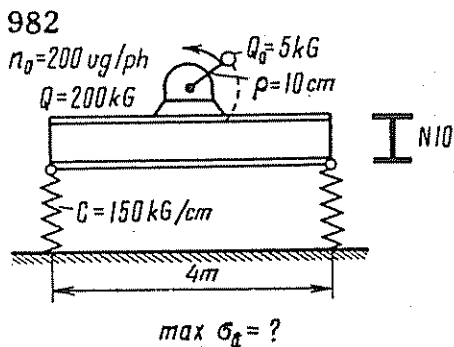
từ đó

$$\omega_0^2 = 61,8^2 \cdot 1,47/1,63 \text{ và } \omega_0 = 61,8 \sqrt{1,47/1,63} \approx 58,6 \frac{1}{\text{s}}$$

Do vậy vận tốc góc của trục động cơ

$$n = \frac{30}{\pi} \omega_0 = 30 \cdot 58,6/\pi \approx 560 \text{ vg/ph.}$$

Bài tập 982 — 983: Xác định ứng suất động lớn nhất trong hệ dao động cưỡng bức. Trọng lượng Q_0 bao gồm trong trọng lượng Q .



§ 47. Va chạm

Hiện tượng va chạm xuất hiện khi có sự thay đổi đột ngột vận tốc chuyển động của các vật, hệ hay các phần của chúng khi chạm nhau. Ở đây chỉ muốn nói đến trường hợp đơn giản của va chạm giữa vật chuyển động (vật va chạm) với vật hay hệ cố định (vật bị va chạm) với các giả thiết như sau:

1. vật va chạm tuyệt đối cứng;
2. vật bị va chạm có một bậc tự do và chuyển vị suy rộng của nó tỷ lệ với lực suy rộng tương ứng khi tác dụng tĩnh và động;

3. va chạm không đàn hồi, trong quá trình va chạm vật va chạm và vật bị va chạm không tách rời nhau, nhưng biến dạng chung của vật bị va chạm là biến dạng đàn hồi;

4. hình thức biến dạng của vật bị va chạm giống như khi lực suy rộng tương ứng tác dụng tĩnh tại chỗ va chạm và theo phương va chạm.

5. vận tốc của vật va chạm nhỏ so với vận tốc lan truyền sóng va chạm, còn thời gian va chạm lớn hơn đáng kể thời gian lan truyền sóng này trên toàn bộ thể tích vật bị va chạm.

Với các giả thiết đã nêu có thể tính gần đúng lực động suy rộng P_d , ứng suất động suy rộng p_d và chuyển vị động suy rộng δ_d theo công thức

$$\left. \begin{aligned} P_d &= k_d P \\ p_d &= k_d p \\ \delta_d &= k_d \delta \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

Ở đây P , p và δ tính với tác dụng tĩnh lên vật bị va chạm của lực suy rộng đặt ở điểm va chạm theo phương va chạm, còn k_d là hệ số động không thứ nguyên và lớn hơn đơn vị.

Nếu vật va chạm có trọng lượng Q khi gặp vật bị va chạm trọng lượng Q_0 cùng chuyển động theo hướng của trọng lực với vận tốc v_0 và làm cho các bộ phận của vật bị va chạm chuyển dịch tịnh tiến thì hệ số dao động

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} \end{aligned} \quad (243)$$

trong đó $\delta = Q/C$ là chuyển vị dài của điểm va chạm khi tải trọng Q tác dụng tĩnh theo phương va chạm; C là độ cứng của vật bị va chạm với hình thức biến dạng đã cho của nó; k_m là hệ số tính đổi khối lượng của vật bị va chạm về điểm va chạm (xác định như khi dao động); $T = Qv_0^2/2g$ là động năng của vật Q tại thời điểm va chạm; $U = Q \cdot \delta/2$ là thế năng biến dạng đàn hồi của vật bị va chạm khi vật Q tác dụng tĩnh. Trong hệ SI động năng $T = mv^2/2$ còn tỷ số Q_0/Q được thay bằng tỷ số m_0/m .

Từ công thức (243) rõ ràng là độ cứng C của vật bị va chạm càng lớn thì giá trị của hệ số động k_d càng lớn. Khi đặt đột ngột vật $Q (v_0 = 0)$,

$$k_d = 2. \quad (244)$$

Khi không tính khối lượng của vật bị va chạm ($Q_0 \ll Q$)

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + (v_0^2/g\delta)} = 1 + \sqrt{1 + (v_0^2 C/Qg)} = 1 + \sqrt{1 + (T/U)}. \quad (245)$$

Nếu không tính khối lượng vật bị va chạm thì hệ số động tăng lên so với giá trị chung của nó [công thức (243)], do đó làm tăng an toàn về độ bền.

Nếu $v_0^2/g\delta = v_0^2 C/Qg = \frac{T}{U} \geq 10$ thì với sai số đến 5% có thể tính hệ số động theo công thức:

$$k_d = 1 + \sqrt{v_0^2/g\delta} = 1 + \sqrt{v_0^2 C/Qg} = 1 + \sqrt{T/U} \quad (246)$$

Nếu $v_0^2/g\delta \geq 110$ thì với sai số đến 10% có thể lấy

$$k_d = \sqrt{v_0^2/g\delta} = \sqrt{v_0^2 C/Qg} = \sqrt{T/U} \quad (247)$$

Cần chú ý rằng, dùng các công thức (246) và (247) không làm tăng an toàn về độ bền.

Trong trường hợp này, khi trọng lượng bản thân của vật bị va chạm rất lớn ($Q_0 \rightarrow \infty$) thì $k_d \rightarrow 2$.

Khi va chạm ngang cần phải thay biểu thức (243) bằng công thức:

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} = \sqrt{\frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m Q_0/Q}} \quad (248)$$

Trong trường hợp đó khi bỏ qua khối lượng vật bị va chạm sẽ làm tăng an toàn về độ bền, mặc dù k_d xác định theo công thức (242).

Nếu trọng lượng bản thân vật bị va chạm nhỏ, nhưng trên nó còn đặt vật có trọng lượng Q_1 tại chỗ va chạm với vật Q thì trong các công thức (242) hay (248) cần phải thay giá trị $k_m Q_0$ bằng Q_1 .

Khi tính hệ va chạm gồm các bộ phận ghép song song, nối tiếp hay hỗn hợp có thể xác định độ cứng C của hệ tương ứng theo các công thức (221), (222), (223). Nếu vật va chạm chuyển động quay làm vật bị va chạm biến dạng xác định bằng chuyển vị góc thì có thể dùng các công thức đã nêu ở trên nhưng cần thay vận tốc v_0 bằng vận tốc góc ω_0 , còn khối lượng Q/g và Q_0/g bằng momen quán tính I_m và I_{m_0} đối với trục quay của chúng.

Tính độ bền khi va chạm theo các công thức thiết lập cho tải trọng tĩnh và có thể viết điều kiện bền như sau:

$$\max p_d = k_d p_{\max} \leq [p_d], \quad (249)$$

trong đó $\max p_d$ là ứng suất tính toán suy rộng động lớn nhất, p_{\max} là ứng suất suy rộng lớn nhất khi vật Q tác dụng tĩnh, còn $[p_d]$ là ứng suất động suy rộng cho phép tương ứng.

Trong tính toán thực tế cần xét đến khi chịu tải trọng va chạm vật thể có khuynh hướng bị phá hoại dòn, nó phụ thuộc rất nhiều vào trạng thái và cấu trúc vật liệu của vật, vận tốc tải, nhiệt độ và ứng suất tập trung. Trong các bài toán đang xét, ta giả thiết rằng các nhân tố ảnh hưởng đến độ bền khi va chạm đều được tính trong ứng suất cho phép đã cho.

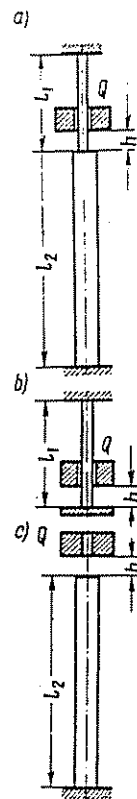
Thí dụ 123: Cho $m = 10\text{kg}$; $h = 4\text{cm}$; $l_1 = 20\text{cm}$; $F_1 = 2\text{cm}^2$; $l_2 = 40\text{cm}$; $F_2 = 4\text{cm}^2$; $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5 \text{MN/m}^2$ (hình 223a). Không tính trọng lượng bản thân thanh.

Xác định σ_{d1} , σ_{d2} và δ_d .

Bài giải: Ta xác định trọng lượng vật va chạm

$$Q = mg = 10 \cdot 9,81 = 98,1\text{N}.$$

Vì các thanh có độ cứng $C_1 = EF_1/l_1$ và $C_2 = EF_2/l_2$ ghép song song nên theo công thức (221) độ cứng của hệ.



Hình 223

$$C = C_1 + C_2 = EF_1/l_1 + EF_2/l_2 = E(F_1/l_1 + F_2/l_2) = \\ = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-4}/0,20 + 4 \cdot 10^{-4}/0,40) = 4 \cdot 10^8 \text{N/m.}$$

Đến thời điểm va chạm, vận tốc rơi tự do của vật Q ở độ cao h là $v_0 = \sqrt{2gh}$, do đó

$$v_0^2 C / Qg = 2hC/Q = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^8 / 98,1 = 32,6 \cdot 10^4.$$

Giá trị này lớn đến mức hoàn toàn cho phép xác định hệ số động theo công thức (247):

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{32,6 \cdot 10^4} = 571.$$

Vì khi Q tác dụng tĩnh, chuyển vị của điểm đặt nó $\delta = Q/C = N_1/C_1 = N_2/C_2$, nên lực dọc trên các mặt cắt ngang thanh

$$N_1 = \frac{Q}{C} C_1 = \frac{Q}{1 + C_2/C_1} \quad \text{và} \quad N_2 = \frac{Q}{C} C_2 = \frac{Q}{1 + C_1/C_2}$$

Ứng suất pháp động ở các mặt cắt ngang thanh có giá trị:

$$\sigma_{d1} = \frac{N_1}{F_1} k_d = k_d \frac{Q}{F_1 \left(1 + \frac{F_2 l_1}{F_1 l_2}\right)} \\ = 571 \frac{98,1}{2 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,20}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,40}\right)} = 140 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 140 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2};$$

$$\sigma_{d2} = \frac{N_2}{F_2} k_d = k_d \frac{Q}{F_2 \left(1 + \frac{F_1 l_2}{F_2 l_1}\right)} = \\ = 571 \frac{98,1}{4 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,40}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,20}\right)} = 70 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 70 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}.$$

Chuyển vị động của điểm va chạm

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{10 \cdot 9,81}{4 \cdot 10^8} \cdot 571 \approx 1,4 \cdot 10^{-4} \text{m} = 0,014 \text{cm.}$$

Trường hợp đặc biệt:

$$1. \text{ Nếu } C_2 = 0 \text{ (hình 223b) thì } C = C_1 = \frac{EF_1}{l_1} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{0,20} \cdot 0,02 \cdot 10^{-2} \\ \approx 2 \cdot 10^8 \text{N/m,}$$

$$k_d = \sqrt{2hC_1/Q} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^8 / 98,1} \approx 4 \cdot 10^2;$$

$$\sigma_{d1} = \frac{Q}{F_1} k_d = \frac{98,1}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 200 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 200 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$\sigma_d = \frac{Q}{C} k_d = \frac{98,1}{2 \cdot 10^8} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{m} \approx 0,02 \text{cm.}$$

2. Nếu $C_1 = 0$ (hình 223c) thì

$$C = C_2 = EF_2/l_2 = 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4} / 0,40 = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m},$$

$$k_a = 4 \cdot 10^2,$$

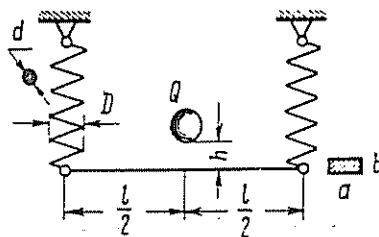
$$\sigma_{a2} = \frac{Q}{F_2} k_a = \frac{10 \cdot 9,81}{4} \cdot 4 \cdot 10^2 \approx 2 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 200 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$$

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

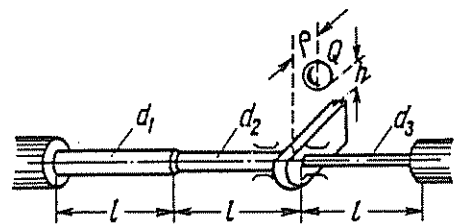
Thí dụ 124: Cho $Q = 4\text{kG}$; $h = 4\text{cm}$; đối với lò xo bước ngắn $D = 2\text{cm}$; $d = 0,4\text{cm}$; $n = 4$ vòng; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$; đối với dầm $l = 40\text{cm}$; $a = 3\text{cm}$; $b = 1\text{cm}$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ (hình 224). Không kể trọng lượng lò xo và dầm.

Xác định $\max \tau_a$ trong lò xo, $\max \sigma_a$ trong dầm và chuyển vị δ_d của điểm va chạm.

Bài giải: Vì các lò xo có độ cứng $C_1 = Gd^4/8D^3n$ được ghép song song với nhau, còn dầm có độ cứng $C_2 = 48EI/l^3$ được ghép nối tiếp với chúng, nên theo công thức (223) độ cứng của hệ giống như hệ ghép hỗn hợp.



Hình 224



Hình 225

$$C = \frac{1}{(1/2C_1) + (1/C_2)} = \frac{1}{(4D^3n/Gd^4) + (l^3/48EI)} =$$

$$= \frac{1}{(4 \cdot 8 \cdot 4/8 \cdot 10^5 \cdot 256 \cdot 10^{-4}) + (64 \cdot 10^3 \cdot 12/48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 1)} \approx 112 \text{ kG/cm}$$

Theo công thức (245) hệ số động

$$k_a = 1 + \sqrt{1 + 2hC/Q} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4 \cdot 112/4} \approx 16.$$

Vì $D/d = 2/0,4 = 5$, nên hệ số tăng ứng suất trong lò xo khi có tính đến độ cong của vòng dây:

$$k = \frac{D/d - 0,25}{D/d - 1} + \frac{0,615}{D/d} = \frac{4,75}{4} + \frac{0,615}{5} \approx 1,31.$$

Ứng suất động lớn nhất trong lò xo và dầm:

$$\max \tau_a = k \frac{4QD}{\pi d^3} k_a \approx 1,31 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 2}{3,14 \cdot 64 \cdot 10^{-3}} \cdot 16 \approx 3340 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

$$\max \sigma_a = \frac{Ql}{4W} k_a = \frac{4 \cdot 40 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 1} \cdot 16 \approx 1280 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Chuyển vị động của điểm va chạm

$$\delta_d = \frac{Q}{C} k_a = \frac{4}{112} \cdot 16 \approx 0,57 \text{ cm}.$$

Nếu giả sử không có lò xo thì $C = C_2 = 48EI/l_3 = 375 \text{ kG/cm}$,

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + (2hC/Q)} = 1 + \sqrt{1 + (2 \cdot 4 \cdot 375/4)} \approx 28,4;$$

$$\sigma_{\max} = (4 \cdot 40 \cdot 6/4 \cdot 3 \cdot 1) \cdot 28,4 \approx 2270 \text{ kG/cm}^2.$$

Thí dụ 125: Cho $Q = 20 \text{ kG}$; $h = 2 \text{ cm}$; $\rho = 4 \text{ cm}$; $l_1 = l_2 = l_3 = l = 20 \text{ cm}$; $d_1 = 1,4 \text{ cm}$; $d_2 = 1,2 \text{ cm}$; $d_3 = 1 \text{ cm}$; $G = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$ (hình 225). Không kể trọng lượng bản thân thanh hình bậc.

Xác định chuyển vị động δ_d của điểm đặt vật Q và các ứng suất tiếp động lớn nhất $\max \tau_{d1,2,3}$ trên các đoạn thanh.

Bài giải: Các độ cứng xoắn của thanh hình bậc tương ứng bằng:

$$C_1 = GI_{\rho_1}/l; \quad C_2 = GI_{\rho_2}/l; \quad C_3 = GI_{\rho_3}/l.$$

Hai đoạn đầu của thanh ghép nối tiếp và độ cứng chung của chúng

$$C_0 = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}.$$

Vì ở mặt cắt đặt ngẫu lực đoạn thứ ba được ghép song song với hai đoạn đầu, nên độ cứng chung của toàn thanh cũng như độ cứng của hệ gồm các phần ghép song song.

$$\begin{aligned} C = C_0 + C_3 &= \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)} + C_3 = \frac{1}{(l/GI_{\rho_1}) + (l/GI_{\rho_2})} + \frac{GI_{\rho_3}}{l} = \\ &= \frac{G}{l} \left[\frac{1}{1/I_{\rho_1} + 1/I_{\rho_2}} + I_{\rho_3} \right] \approx 0,1 \frac{G}{l} \left[\frac{1}{(1/d_1^4) + (1/d_2^4)} + d_3^4 \right] = \\ &= 0,1 \frac{2,8 \cdot 10^5}{20} \left[\frac{1}{(1/1,4^4) + (1/1,2^4)} + 1 \right] \approx 3290 \text{ kG/cm}. \end{aligned}$$

Tại thời điểm va chạm, động năng của vật va chạm $T = Qv_0^2/2g = Qh \text{ kGcm}$

Góc quay tĩnh của mặt cắt đặt ngẫu lực với momen $M = Q\rho$,

$$\varphi = \frac{M}{C} = \frac{Q\rho}{C} = \frac{20 \cdot 4}{3290} = \frac{8}{329} \text{ rad.}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi khi xoắn tĩnh của thanh $U = M\varphi/2 = Q^2\rho^2/2C$

$$\text{Vi tỷ số } \frac{T}{U} = \frac{Qh}{Q^2\rho^2} 2C = \frac{2hC}{Q\rho^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3290}{20 \cdot 16} \approx 41,1 \text{ không lớn hơn } 110$$

nên theo công thức (246) hệ số động

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}} = 1 + \sqrt{42,1} \approx 7,5.$$

Góc quay động của mặt cắt đặt momen ngoại lực do vật rơi sinh ra $\varphi_d = \varphi k_d = 8 \cdot 7,5/329 \approx 0,182 \text{ rad}$.

Chuyển vị dài động của vật Q :

$$\delta_d = \rho\varphi_d = 0,182 \cdot 4 = 0,73 \text{ cm}.$$

Momen phản lực ở ngàm phải của thanh khi có tác dụng tĩnh của ngẫu lực ngoài với momen $M = Q\rho$:

$$M_{ph} = \varphi C_3 = \varphi G I_{\rho_3} / l = (8/329) (2,8 \cdot 10^5 \cdot 0,1/20) \approx 34 \text{ kGcm.}$$

Momen phản lực ở ngàm trái

$$M_{tr} = M - M_{ph} = 20 \cdot 4 - 34 = 46 \text{ kGcm.}$$

Ứng suất tiếp động lớn nhất trên các đoạn thanh:

$$\max \tau_{d1} = \frac{M_{tr}}{W_{\rho_1}} k_d \approx \frac{46}{0,2 \cdot 1,4^3} 7,5 \approx 628 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d2} = \frac{M_{tr}}{W_{\rho_2}} k_d \approx \frac{46}{0,2 \cdot 1,2^3} 7,5 \approx 986 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\max \tau_{d3} = \frac{M_{ph}}{W_{\rho_3}} k_d \approx \frac{34}{0,2 \cdot 1} 7,5 \approx 1230 \text{ kG/cm}^2;$$

Thí dụ 126: Cho $m = 1 \text{ kg}$, $v_0 = 4 \text{ m/s}$; $m_1 = 20 \text{ kg}$; $d = 2 \text{ cm}$; $l = 0,4 \text{ m}$; $E = \frac{5}{2}$; $G = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ (hình 126). Va chạm ngang. Bỏ qua trọng lượng bản thân thanh.

Xác định $\max \sigma_d$, $\max \tau_{d2}$ và δ_d .

Bài giải: Ta xác định trọng lượng tương ứng với khối lượng m :

$$Q = mg = 9,81 \text{ N.}$$

Vì hệ bị va chạm bởi khối lượng m chuyển động ngang nên cần phải xác định hệ số động theo công thức (248)* và thay giá trị $k_m m_0$ bằng m_1 , tức là

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \frac{1}{1 + m_1/m}}$$

Vì chuyển vị ngang của điểm va chạm do xoắn

thanh đứng khi lực Q tác dụng tĩnh theo hướng va chạm $\delta_0 \approx \varphi l = \frac{Ml}{GI_{\rho}} l =$

$= \frac{Ql^3}{GI_{\rho}}$, nên có thể xét hệ bị va chạm như hệ ghép nối liền giữa thanh uốn nằm

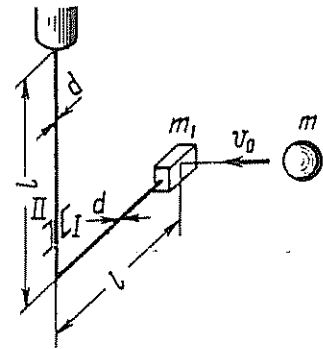
ngang có độ cứng $C_1 = 3EI/l^3$ với thanh xoắn thẳng đứng có độ cứng $C_2 = GI_{\rho}/l^3$

Theo công thức (222) độ cứng của toàn hệ:

$$C = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2} = \frac{1}{l^3/3EI + l^3/GI_{\rho}} =$$

$$= \frac{1}{l^3/3 \cdot \frac{5}{2} G \cdot \frac{1}{2} I_{\rho} + l^3/GI_{\rho}} \approx \frac{GI_{\rho}}{1,27l^3} \approx \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot 0,02^4}{1,27 \cdot 0,4^3} \approx 16 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Hệ số động



Hình 226

* Vì bài toán giải theo hệ SI nên trong công thức (248) tỷ số $k_m Q_0/Q$ được thay bằng $k_m m_0/m$.

$$k_d = \sqrt{\frac{16 \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 1}{1 \cdot 9,81}} \cdot \frac{1}{1 + 20/1} \approx 11,2$$

Khi lực Q tác dụng tĩnh theo hướng va chạm, ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} trong thanh ngang, ứng suất tiếp động lớn nhất τ_{\max} trong thanh đứng và chuyển vị dài δ của điểm va chạm có giá trị:

$$\sigma_{\max} = Ql/W \approx 9,81 \cdot 0,4/0,1 \cdot 0,02^3 \approx 5 \cdot 10^6 \text{N/m}^2 = 5 \text{MN/m}^2;$$

$$\tau_{\max} = Ql/W_\rho \approx 9,81 \cdot 0,4/0,2 \cdot 0,02^3 \approx 2,5 \cdot 10^6 \text{N/m}^2 = 2,5 \text{MN/m}^2$$

và

$$\delta = Q/C = 9,81/16 \cdot 10^3 \approx 0,613 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,0613 \text{ cm}$$

Các giá trị động phải tìm bằng:

$$\max \sigma_d = k_d \sigma_{\max} = 11,2 \cdot 5 = 56 \text{MN/m}^2;$$

$$\max \tau_d = k_d \tau_{\max} = 11,2 \cdot 2,5 = 28 \text{MN/m}^2;$$

$$\delta_d = k_d \delta = 11,2 \cdot 0,0613 \approx 0,69 \text{ cm}.$$

Nếu trên hệ không có khối lượng m_1 thì

$$k_d = \sqrt{v_0^2 C/Qg} = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 10^3 / 9,81 \cdot 9,81} \approx 51,6;$$

$$\max \sigma_d = 51,6 \cdot 5 = 258 \text{MN/m}^2;$$

$$\max \tau_d = 51,6 \cdot 2,5 = 129 \text{MN/m}^2;$$

$$\delta_d = 51,6 \cdot 0,0613 \approx 3,16 \text{ cm}.$$

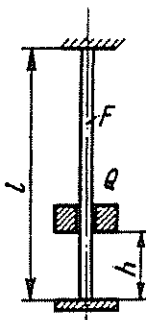
Thí dụ 127: Va chạm dọc trục. Cho $Q = 8 \text{ kG}$; $\gamma = 8 \text{ G/cm}^3$; $l = 2 \text{ m}$; $F = 4 \text{ cm}^2$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$;

$[\sigma_d] = 1.000 \text{ kG/cm}^2$ (hình 227)

Xác định h cho hai trường hợp: có xét và không xét khối lượng thanh.

Bài giải: Vì khi vật Q tác dụng tĩnh $\sigma = Q/F = 8/4 = 2 \text{ kG/cm}^2$, nên theo công thức (249) hệ số động $k_d = [\sigma_d]/\sigma = 1.000/2 = 500$.

Mặt khác vì vận tốc chuyển động của vật Q ở thời điểm va chạm $v_0 = \sqrt{2gh}$, độ cứng của thanh khí kéo $C = EF/l$, trọng lượng bản thân thanh $Q_0 = \gamma Fl$ và hệ số tính đổi khối lượng thanh về điểm va chạm $k_m = 1/3$ (xem thí dụ 117) nên theo công thức (243) ta có:



Hình 227

$$\begin{aligned} k_d &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEF}{Ql} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{Q_0}{Q}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{8 \cdot 2 \cdot 10^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{6,4}{8}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 10^4}{3,8} h}. \end{aligned}$$

Vi vậy

$$500 = 1 + \sqrt{1 + (3 \cdot 10^4 / 3,8) h}, \text{ từ đó}$$

$$h = (499^2 - 1) 3,8 / 3 \cdot 10^4 \approx 31,5 \text{ cm}.$$

Khi không xét khối lượng thanh:

$$k_a = 500 = \sqrt{v_0^2 C / Qg} = \sqrt{2hEF / Ql} = \sqrt{2h \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4 / 8 \cdot 2 \cdot 10^2} = 10^2 \sqrt{h}.$$

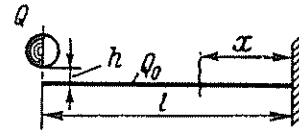
Vậy $h = 25\text{cm}$. Điều đó có nghĩa do không tính đến trọng lượng bản thân thanh, nên chiều cao rơi an toàn của vật bị hạ thấp đến

$$\frac{31,5 - 25}{31,5} 100 \approx 21\%$$

Thi dụ 128: Va chạm ngang. Cho $h = 5\text{cm}$; $l = 1\text{m}$; $I = 2000\text{cm}^4$; $W = 200\text{cm}^3$, $Q_0 = 25\text{kG}$; $E = 2 \cdot 10^6\text{kG/cm}^2$; $[\sigma_a] = 1200\text{kG/cm}^2$ (hình 228).

Xác định Q cho hai trường hợp: có tính và không tính khối lượng dầm.

Bài giải: Khi vật Q tác dụng tĩnh, độ võng ở đầu tự do của dầm $\delta = Ql^3 / 3EI$; độ võng ở mặt cắt bất kỳ của dầm có khoảng cách x đến ngàm tìm theo công thức của phương pháp thông số ban đầu



Hình 228

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Qlx^2}{2} - \frac{Qx^3}{6} \right) = \\ &= \frac{Ql}{3EI} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) \end{aligned}$$

Vì vậy hệ số tính đến khối lượng dầm ở điểm va chạm

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{33}{140}.$$

Hệ số động theo công thức (243):

$$\begin{aligned} k_a &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h3EI}{Ql^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_0}{Q}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{Q \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_0}{Q}}} \approx \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^4}{Q + 6}}. \end{aligned}$$

Mặt khác vì khi vật Q tác dụng tĩnh, ứng suất pháp lớn nhất trong dầm bằng

$$\sigma_{\max} = Ql / W = Q \cdot 100 / 200 = Q / 2 \text{ kG/cm}^2,$$

nên theo công thức (249) hệ số động

$$k_a = [\sigma_a] / \sigma_{\max} = 1200 \cdot 2 / Q = 2400 / Q.$$

Vậy

$$2400 / Q = 1 + \sqrt{1 + 12 \cdot 10^4 / (Q + 6)}$$

hay
từ đó

$$13Q^2 - 6 \cdot 10^2 \cdot Q - 36 \cdot 10^2 = 0,$$

$$Q = \frac{1}{13} (3 \cdot 10^2 \pm \sqrt{9 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^2}) = \frac{3 \pm 3,7}{13} 10^2$$

Chỉ có một nghiệm thỏa mãn bài toán

$$Q = 6,7 \cdot 10^2 / 13 \approx 52 \text{ kG.}$$

Khi không tính khối lượng dầm

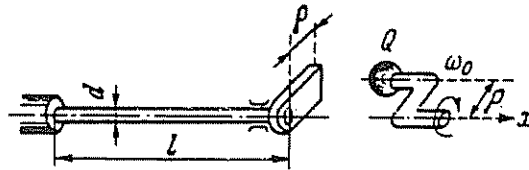
$$2400/Q = \sqrt{2h \cdot 3EI/Ql^3}$$

$$\text{Vi vậy } Q = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot l^3}{2h \cdot 3EI} = \frac{24^2 \cdot 10^4 \cdot 10^6}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3} = 48 \text{ kG}$$

Như vậy, nếu không tính đến khối lượng dầm thì trọng lượng an toàn của vật va chạm giảm $\frac{52 - 48}{52} 100 \approx 8\%$.

Thí dụ 129: Va chạm xoắn. Vật $Q = 3 \text{ kg}$ quay trên tay đòn $\rho = 8 \text{ cm}$ xung quanh trục nằm ngang x với vận tốc góc không đổi ω_0 và va chạm vào phần chia ra của thanh hình trụ dài $l = 40 \text{ cm}$, đường kính $d = 6 \text{ cm}$ (bình 229).

Xác định vận tốc quay cho phép $n \text{ vng/ph}$ của vật Q nếu trọng lượng riêng của vật liệu thanh $\gamma = 8 \text{ G/cm}^3$, môđun trượt $G = 3 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$ và ứng suất tiếp cho phép $[\tau_d] = 400 \text{ kG/cm}^2$.



Hình 229

Bài giải: Khi vật Q tác dụng tĩnh, ứng suất tiếp lớn nhất xuất hiện trên thanh:

$$\tau_{\max} = Q\rho/W\rho \approx Q\rho/0,2d^3 = 3 \cdot 8/0,2 \cdot 6^3 = 5/9 \text{ kG/cm}^2.$$

Hệ số động

$$k_d = [\tau_d]/\tau_{\max} = 400 \cdot 9/5 = 720.$$

Vi momen quán tính của vật Q quay quanh trục $I_m = \frac{Q}{g} \rho^2 = \frac{3 \cdot 64}{981} \approx$

$\approx 0,2 \text{ kGcms}^2$, momen quán tính của khối lượng thanh $I_{m_0} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{g} d^4 l \approx 0,1 \times$
 $\times \frac{8 \cdot 10^{-3}}{981} 6^4 \cdot 40 \approx 0,042 \text{ kGcms}^2$, hệ số tính đổi khối lượng thanh (xem thí dụ 119)

$k_m = 1/3$, động năng của vật chuyển động quay

$$T = I_m \omega_0^2 / 2 = 0,1 \omega_0^2 \text{ kGcm}$$

và thế năng biến dạng đàn hồi xoắn của thanh khi vật tác dụng tĩnh

$$U = Q^2 \rho^2 l / 2GI\rho \approx 9 \cdot 64 \cdot 40 / 2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 6^4 = 1/9 \cdot 10^3 \text{ kGcm,}$$

nên theo công thức (243) hệ số động:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \cdot \frac{1}{1 + k_m I_{m0} / I_m}}$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{0,1 \omega_0^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{1 + 0,042/3 \cdot 0,2}} \approx 1 + \sqrt{1 + 841 \omega_0^2}.$$

Khi cho các hệ số động bằng nhau ta được

$$719 = \sqrt{1 + 841 \omega_0^2},$$

từ đó

$$\omega_0 = \pi n / 30 \approx \sqrt{719^2 / 841} \approx 25 \text{ và } n = \frac{30}{\pi} 25 \approx 240 \frac{\text{vg}}{\text{ph}}.$$

Nếu không kể khối lượng thanh

$$k_d = 720 \sqrt{T/U} = 30 \omega_0.$$

Vi vậy

$$\omega_0 = \pi n / 30 = 720 / 30 = 24 \text{ và } n = 30 \cdot 24 / \pi = 230 \frac{\text{vg}}{\text{ph}}.$$

Như vậy nếu không tính đến khối lượng thanh thì vận tốc quay cho phép

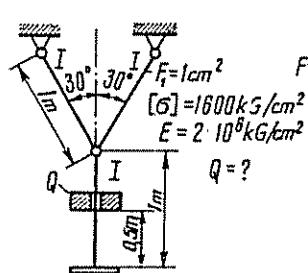
của vật va chạm giảm xuống $\frac{240 - 230}{240} \cdot 100 \approx 4\%$.

Bài tập 984 — 1003: Xác định các đại lượng chỉ dẫn trong điều kiện bài toán đối với các hệ đàn hồi chịu va chạm. Không tính khối lượng bản thân các bộ phận của hệ. Hệ số động xác định theo công thức gần đúng

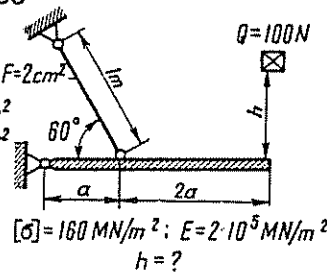
$$k_d = \sqrt{v_0^2 / (g \delta)}.$$

Trong các hệ khung và dầm cong chỉ tính biến dạng uốn.

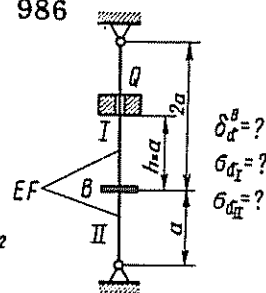
984



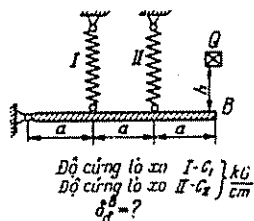
985



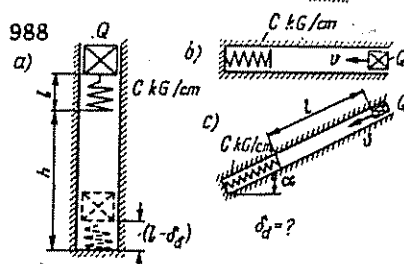
986



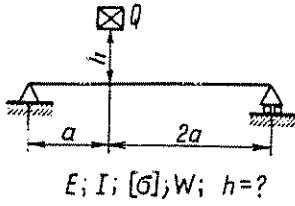
987



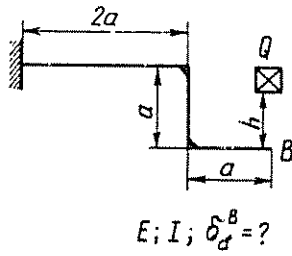
988



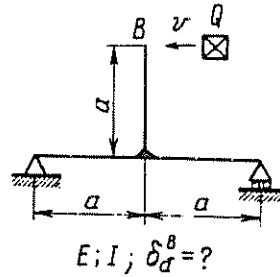
989



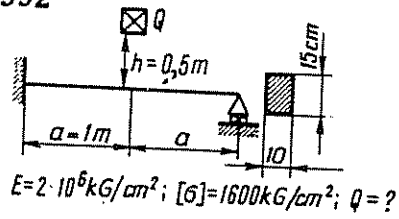
990



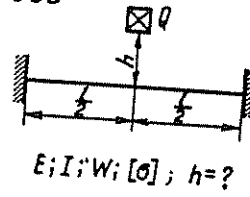
991



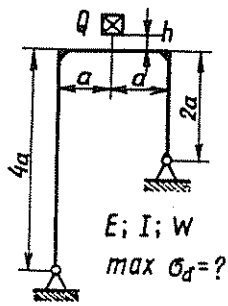
992



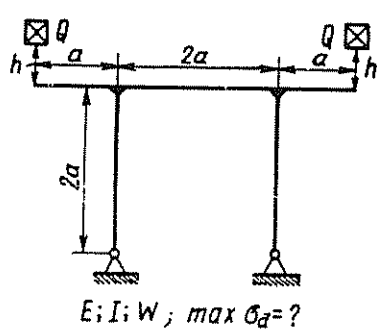
993



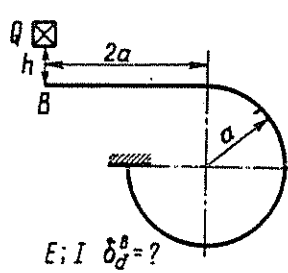
994



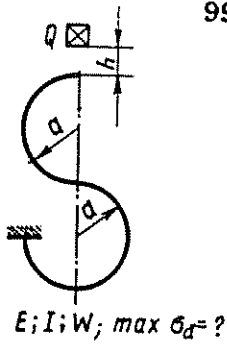
995



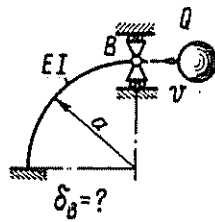
996



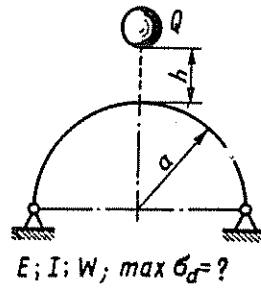
997



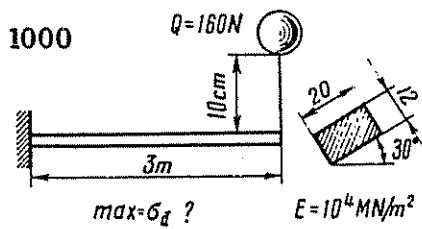
998



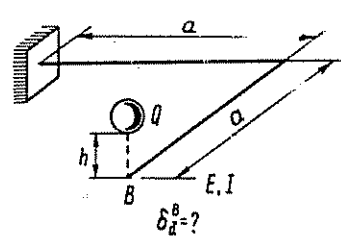
999

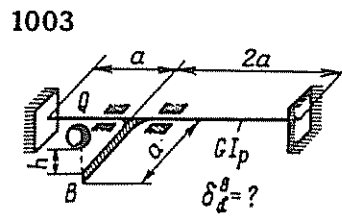
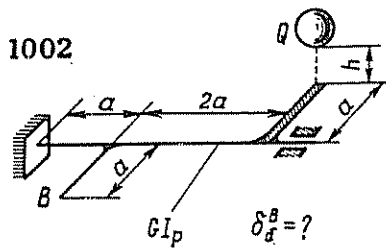


1000

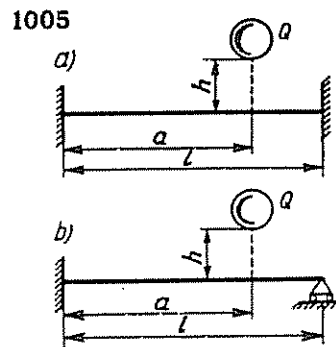
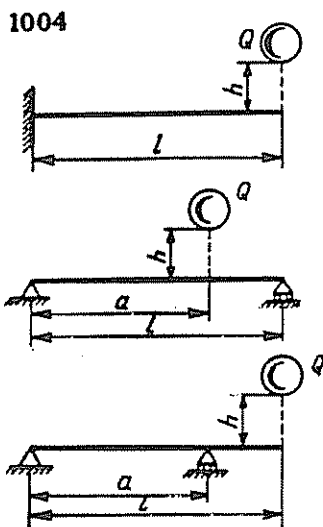


1001





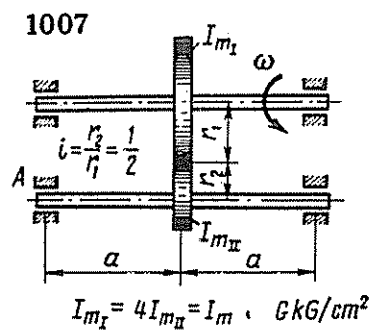
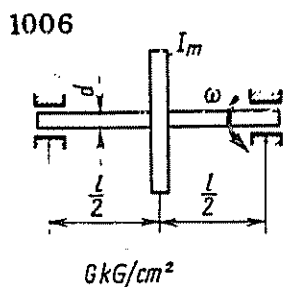
Bài tập 1004 : Chứng minh rằng đối với các dầm dẽ cho khi không tính khối lượng dầm, ứng suất động lớn nhất không phụ thuộc vào phương pháp liên kết và giá trị của a . Coi $h \gg \delta$.



Bài tập 1005 a, b : Xác định a để $\max \sigma_a$ có giá trị lớn nhất. Không tính khối lượng dầm và coi như $h \gg \delta$.

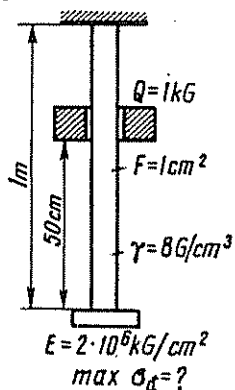
Bài tập 1006 : Xác định $\max \tau_a$ trong trục khi trục mang bánh đà có momen quán tính của khối lượng là I_m đang quay với vận tốc góc ω thì bị kẹp chặt đột ngột đầu trục: a) trong một ổ trục; b) trong hai ổ trục đồng thời.

Bài tập 1007 : Xác định $\max \tau_a$ trong trục của hệ truyền động khi hãm đột ngột đầu trục trong ổ trục A.

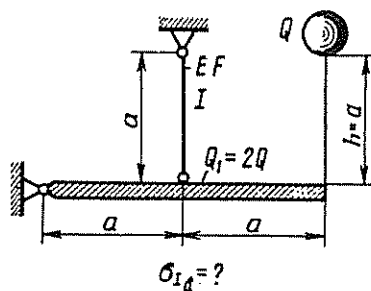


Bài tập 1008 — 1011 : Xác định các đại lượng cho trong điều kiện của bài toán đối với hệ chịu va chạm. Tính trọng lượng bản thân của những bộ phận có chỉ dẫn. Trong tính toán ta chú ý đến những nhận xét ở các bài 984 — 1003.

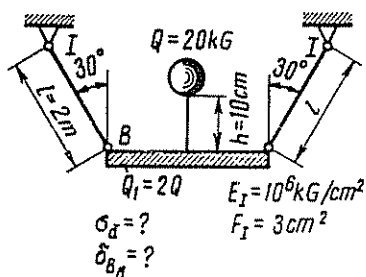
1008



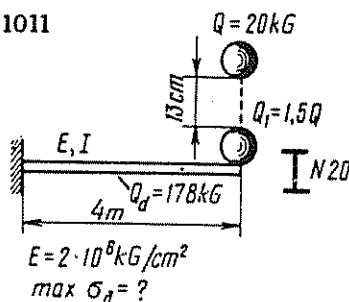
1009



1010



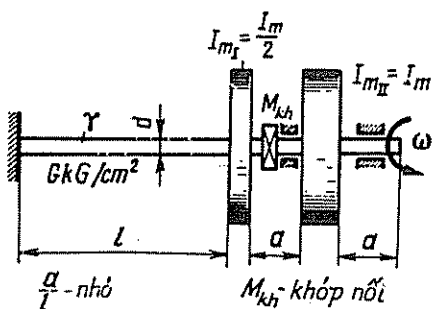
1011



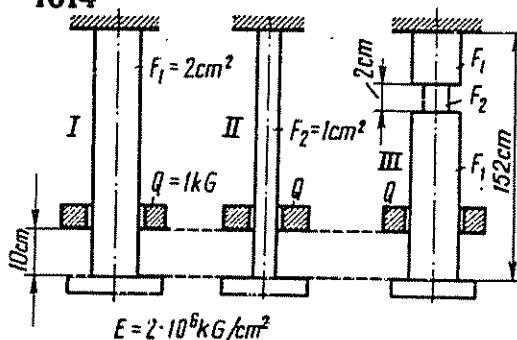
Bài tập 1012 : Giải bài 993 khi có xét khối lượng dầm. Biết trọng lượng dầm là Q_0 .

Bài tập 1013 : Xác định max τ trong trục do va chạm xoắn khi mắc vào khớp nối M_{kh} . Khớp nối để ghép phần trục bên phải quay với phần bên trái cố định.

1013



1014



Bài tập 1014: Xác định và so sánh $\sigma_{dI}, \sigma_{dII}, \sigma_{dIII}$ trong các thanh I, II, III khi va chạm bởi cùng một tải trọng Q rơi từ cùng một độ cao như nhau $h = 10\text{cm}$.

XV – ỨNG SUẤT THAY ĐỔI:

Những ứng suất được xét trong chương này là ứng suất biến đổi tuần hoàn theo thời gian. Tập hợp các giá trị liên tiếp của ứng suất biến đổi sau một chu kỳ được gọi là *chu trình ứng suất*.

Khi ứng suất biến đổi tác dụng nhiều lần lên vật thể, ở chỗ ứng suất tập trung lớn nhất có thể xuất hiện và phát triển vết nứt làm vật thể bị phá hủy dần. Quá trình xuất hiện và phát triển vết nứt trong vật liệu của vật thể do tác dụng của ứng suất biến đổi được gọi là hiện tượng *mỏi của vật liệu*. Độ bền của vật liệu khi ứng suất biến đổi gọi là *độ bền mỏi của vật liệu*.

Giá trị lớn nhất của ứng suất biến đổi tuần hoàn mà vật liệu có thể chịu đựng được trong thời gian không hạn định được gọi là *giới hạn bền mỏi của vật liệu*. Thường người ta xác định giới hạn mỏi qui ước (hữu hạn) trên cơ sở một số hữu hạn chu trình của ứng suất biến đổi, đối với kim loại đen ($5 - 10$). 10^6 chu trình, đối với kim loại màu ($50 - 100$). 10^6 chu trình và v.v...

Hệ số không đối xứng là một đặc trưng của chu trình và xác định theo tỷ số đại số

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (250)$$

trong đó p_{\max} (σ_{\max} hay τ_{\max}) và p_{\min} (σ_{\min} hay τ_{\min}) là ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất của chu trình.

Đại lượng

$$p_{tb} = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}, \quad (251)$$

được gọi là *ứng suất trung bình của chu trình*, còn

$$p_{bd} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad (252)$$

là *ứng suất biên độ của chu trình*.

Giới hạn mỏi

$$p_r = p'_{\max} = p'_{tb} + p'_{bd} \quad (253)$$

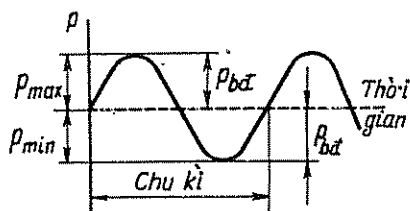
trong đó p'_{\max} , p'_{tb} và p'_{bd} là ứng suất lớn nhất, ứng suất trung bình và ứng suất biên độ khi vật liệu làm việc ở giới hạn mỏi.

Với chu trình đối xứng (hình 230)

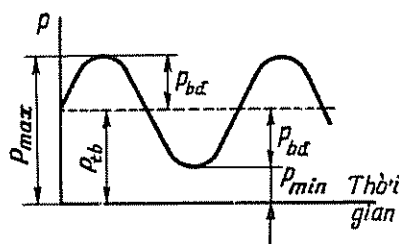
$$p_{\max} = -p_{\min}; p_{tb} = 0; r = -1; p_r = p_{-1}.$$

Với chu trình không đối xứng dương và không đổi dấu (hình 231)

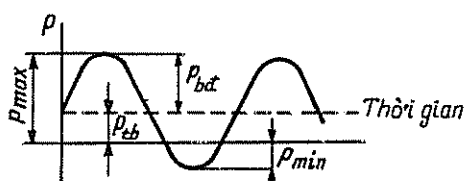
$$p_{\max} > 0; p_{\min} > 0; 0 < r < 1$$



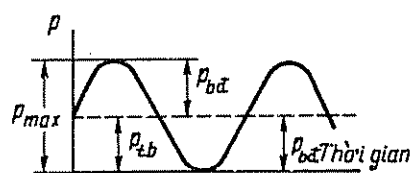
Hình 230



Hình 231



Hình 232



Hình 233

Với chu trình không đối xứng và đổi dấu (hình 232)

$$p_{\max} > 0; p_{\min} < 0; -1 < r < 0.$$

Với chu trình mạch động dương (hình 233)

$$p_{\max} > 0; p_{\min} = 0; p_{tb} = p_{bđ} = p_{\max}/2; r = 0; p_r = p_o.$$

§ 48. Những yếu tố cơ bản ảnh hưởng đến độ bền mỏi của vật liệu* :

Đặc điểm của chu trình và hình thức biến dạng. Khi chu trình đối xứng, giới hạn bền mỏi của vật liệu (với các điều kiện như nhau) có giá trị thấp nhất. Giới hạn bền mỏi khi chu trình đối xứng p_{-1} (σ_{-1} hay τ_{-1}) được xác định theo đường cong (hình 234) vẽ trên cơ sở các số liệu thí nghiệm. Muốn vậy ta kẻ tiếp tuyến với đoạn cong nằm ngang ở bên phải. Tung độ của giao điểm giữa tiếp tuyến và trục tung là giới hạn bền mỏi qui ước.

Người ta đã thiết lập những quan hệ gần đúng sau đây giữa giới hạn bền mỏi cho chu trình đối xứng trong trường hợp uốn (σ_{-1}), kéo — nén dọc trục (σ_{-1k}), xoắn (τ_{-1}) với giới hạn bền σ_b :

$$\text{đối với thép } \sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,6) \sigma_b; \sigma_{-1k} \approx (0,7 \div 0,8) \sigma_{-1};$$

$$\tau_{-1} \approx (0,4 \div 0,7) \sigma_{-1};$$

$$\text{đối với gang } \sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,5) \sigma_b;$$

$$\tau_{-1} \approx (0,7 \div 0,9) \sigma_{-1};$$

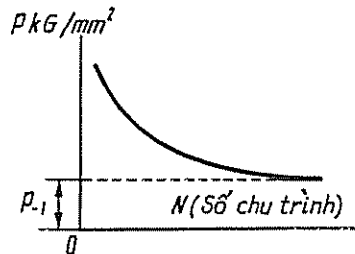
$$\text{đối với kim loại màu } \sigma_{-1} \approx (0,25 \div 0,5) \sigma_b.$$

Với chu trình không đối xứng có thể xác định giới hạn bền mỏi theo đường cong thực nghiệm của các biến độ giới hạn vẽ trên hệ tọa độ $p_{tb} - p_{bđ}$ (hình 235). Trên hình vẽ, p_b là giới hạn bền của vật liệu với hình thức biến dạng đã cho của vật thể. Đối với đặc trưng đã cho $r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$ của chu trình người ta thiết lập đại

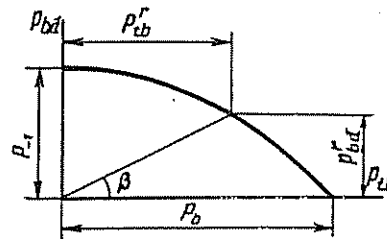
* Chỉ dẫn ra những yếu tố cần thiết để giải các bài tập trong sách này.

lượng $\operatorname{tg}\beta = \frac{p_{bd}}{p_{tb}} = \frac{1-r}{1+r}$ và góc β . Từ gốc tọa độ dựng đường thẳng hợp với trục p_{tb} góc β . Cộng các tọa độ (p'_{tb} và p'_{bd}) của giao điểm giữa đường thẳng và đường cong ta được giới hạn bền mỗi.

$$p_r = p'_{tb} + p'_{bd}$$



Hình 234



Hình 235

Thí dụ 130: Cho thép số 40 trong trạng thái bình thường. Kết quả ghi trong sổ theo dõi thí nghiệm độ bền mỗi khi uốn với chu trình đối xứng

σ (MN/m²) 300; 290; 280; 270; 260; 250; 240; 235; 230; 230

$N \frac{1}{10^6}$ 0,52; 0,71; 1,21; 2,32; 3,44; 4,82; 5,85; 5,81; 10; 10

(hai mẫu cuối cùng không bị phá hoại).

Xác định σ_{-1} .

Bài giải: Theo các số liệu thí nghiệm ta vẽ đường cong mỗi trong hệ tọa độ σ (MN/m²) — $N/10^6$ (N là số chu trình) (hình 236). Kẻ tiếp tuyến với phần bên phải đường cong, trên trục tung độ ta được giá trị của giới hạn bền mỗi qui ước:

$$\sigma_{-1} \approx 232 \text{ MN/m}^2.$$

Thí dụ 131: Cho vật liệu là thép CT-3; các giá trị thí nghiệm $\sigma_b = 38,8 \text{ kG/mm}^2$, $\sigma_{-1} = 18,5 \text{ kG/mm}^2$ và biên độ giới hạn của chu trình σ'_{bd} với ứng suất trung bình đã cho σ'_{tb} :

σ'_{tb} (kG/mm ²)	10	20	30
σ'_{bd} (kG/mm ²)	17,5	14	8,5

Xác định $\sigma_{0,25}$.

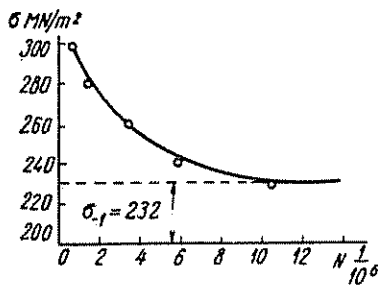
Bài giải: Theo số liệu thí nghiệm ta vẽ đường cong biên độ giới hạn trong hệ tọa độ $\sigma_{tb} - \sigma_{bd}$ (hình 237). Vì cần phải xác định giới hạn bền mỗi khi hệ số bất đối xứng của chu trình $r = 0,25$ nên $\operatorname{tg}\beta = (1 - 0,25)/(1 + 0,25) = 0,6$ và $\beta \approx 31^\circ$.

Từ gốc tọa độ ta vẽ đường thẳng hợp với trục σ_{tb} góc $\beta = 31^\circ$. Các tọa độ của giao điểm giữa đường thẳng này với đường cong biên độ giới hạn:

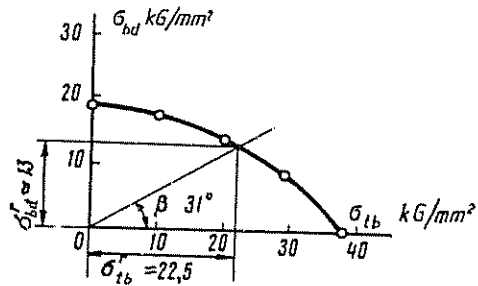
$$\sigma_{tb}^{0,25} \approx 22,5 \text{ kG/mm}^2 \text{ và } \sigma_{bd}^{0,25} \approx 13 \text{ kG/mm}^2.$$

Giới hạn bền mỗi phải tìm

$$\sigma_{0,25} = \sigma_{tb}^{0,25} + \sigma_{bd}^{0,25} \approx 22,5 + 13 = 35,5 \text{ kG/mm}^2.$$



Hình 236



Hình 237

Ứng suất tập trung: Sự tăng cục bộ của ứng suất ở gần chỗ mặt cắt thay đổi đột ngột (tức là thay đổi cục bộ hình dạng vật thể do lỗ, rãnh, góc lượn v.v...) được gọi là ứng suất tập trung. Tỷ số giữa ứng suất cục bộ lớn nhất p_m (σ_m hoặc τ_m) với ứng suất p (σ hay τ) ở mặt cắt có ứng suất tập trung (nhưng không xét đến hiện tượng tập trung ứng suất) tính với tải trọng tĩnh khi giả thiết vật liệu đồng nhất lý tưởng, đẳng hướng và đàn hồi được gọi là *hệ số tập trung ứng suất lý thuyết*.

$$\alpha = \frac{p_m}{p}; \left(\alpha_\sigma = \frac{\sigma_m}{\sigma} \text{ và } \alpha_\tau = \frac{\tau_m}{\tau} \right). \quad (254)$$

Hệ số $\alpha > 1$ phản ánh ảnh hưởng về mặt hình học của sự tập trung ứng suất đến giá trị ứng suất cục bộ lớn nhất.

Với ứng suất biến đổi người ta đưa ra *hệ số tập trung ứng suất hiệu dụng*:

$$\alpha_{hd} = \frac{p_{-1}}{p_{-1}^{II}}; \left(\alpha_{hd}^\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1}^{II}} \text{ và } \alpha_{hd}^\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1}^{II}} \right) \quad (255)$$

hệ số này là tỷ số giữa giới hạn bền mỏi của chu trình đối xứng với mẫu trơn p_{-1} và giới hạn bền mỏi của mẫu cùng kích thước nhưng có tập trung ứng suất p_{-1}^{II} . Hệ số α_{hd} phản ánh ảnh hưởng đến độ bền mỏi không những về mặt hình học sự tập trung ứng suất mà cả vật liệu mẫu.

Tỷ số

$$q = \frac{\alpha_{hd} - 1}{\alpha - 1} \quad (256)$$

được gọi là *hệ số nhạy của vật liệu* đối với sự tập trung ứng suất. q thay đổi trong giới hạn $0 \leq q \leq 1$. Đối với gang $q = 0$; đối với thép xây dựng $q = 0,6 \div 0,8$ (trong đó giá trị nhỏ tương ứng với thép có độ bền trung bình, còn giá trị lớn tương ứng với thép có độ bền cao); đối với thép $\sigma_b \geq 130 \text{ kg/mm}^2$, $q \approx 1$.

(Trong phụ lục 5, trên hình 1 vẽ đồ thị giá trị gần đúng q đối với thép, phụ thuộc vào σ_b và α_σ , và không xét đến ảnh hưởng của kích thước vật thể).

Vì q còn phụ thuộc vào hình dạng và kích thước vật thể nên trong tính toán thực tế sử dụng giá trị α_{hd} với mẫu thử thực đảm bảo hơn.

Hệ số tỷ lệ. Ảnh hưởng của kích thước tuyệt đối của vật thể đến giới hạn bền mỏi được gọi là hệ số tỷ lệ. Giới hạn bền mỏi giảm theo sự tăng kích thước tuyệt đối của vật thể được đánh giá bằng hệ số tỷ lệ $\epsilon_{II} < 1$ là tỷ số giữa

giới hạn bền mỗi của mẫu có đường kính D cho trước so với giới hạn bền mỗi của mẫu tiêu chuẩn đường kính d :

$$\alpha_{11} = \frac{(p-1)D}{(p-1)d} \quad (257)$$

(Trong phụ lục 5 trên hình 2 vẽ đồ thị giá trị ϵ_{11} phụ thuộc vào D đối với thép cacbon và thép hợp kim khi bề mặt mẫu được gia công khác nhau. Có thể dùng đồ thị này để xác định gần đúng ϵ_{11} khi uốn, cũng như khi xoắn).

Nếu hệ số tập trung hiệu dụng lấy theo đồ thị có xét đến hệ số tỷ lệ thì không cần điều chỉnh theo kích thước vật thể.

Trạng thái bề mặt: Ảnh hưởng của trạng thái bề mặt vật thể đến giới hạn bền được tính bằng hệ số *nhay bề mặt* $\epsilon_{bm} < 1$, ϵ_{bm} là tỷ số giới hạn bền mỗi của mẫu có trạng thái bề mặt đã cho ($p-1$) với giới hạn bền mỗi của mẫu như vậy nhưng có bề mặt được đánh bóng $p-1$:

$$\epsilon_{bm} = \frac{(p-1)}{p-1} \quad (258)$$

(Trong phụ lục 5, trên hình 3 chỉ ra sự phụ thuộc của ϵ_{bm} vào σ_b cho các trạng thái bề mặt khác nhau của mẫu).

Ảnh hưởng sự tăng bền của việc làm biến cứng nguội bề mặt, tôi mặt, thấm carbon, thấm nitơ và các yếu tố công nghệ khác được đánh giá bằng hệ số β , lấy trong các sách tra cứu, ở đó đưa ra bằng thừa số với hệ số ϵ_{bm} .

§ 49. Tính độ bền trong trạng thái ứng suất tuyến tính và trượt thuần túy (xoắn):

Giả thiết rằng với sự thay đổi của tải trọng, đặc điểm của trạng thái ứng suất ở điểm xét của vật thể không thay đổi và chu trình biến đổi ứng suất vẫn đồng dạng ($r = \text{const.}$)

Với chu trình đối xứng của ứng suất biến đổi hệ số an toàn về độ bền được qui định theo trị số giới hạn bền mỗi của chi tiết. Có thể xét ảnh hưởng của các yếu tố cơ bản (tập trung ứng suất, hệ số tỷ lệ, trạng thái bề mặt) đến độ bền mỗi của chi tiết bằng một hệ số chung

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{11}\beta\epsilon_{bm}}{\alpha_{hd}} \quad (259)$$

Vì vậy có thể tính hệ số an toàn về độ bền khi chi tiết làm việc với hệ số đó trong chu trình đối xứng theo biểu thức:

$$n = \frac{\epsilon p-1}{p_{\max}} \quad (260)$$

trong đó p_{\max} là ứng suất (định mức) lớn nhất trong chi tiết.

Điều kiện bền có dạng:

$$p_{\max} \leq [p-1] \quad (261)$$

còn giá trị của ứng suất cho phép

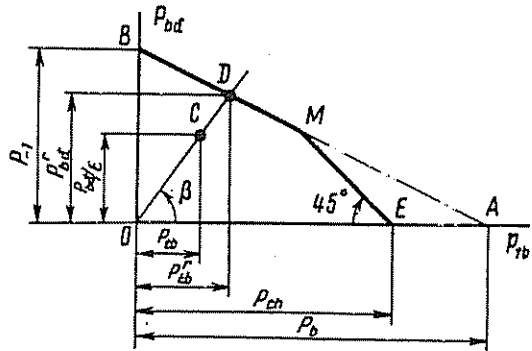
$$[p-1] = \frac{\epsilon p-1}{[n]} \quad (262)$$

trong đó $[n]$ là hệ số an toàn cho phép.

Trong chu trình không đối xứng của sự biến đổi ứng suất có hệ số bất đối xứng đã cho r (hay $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-r}{1+r}$), có thể tính hệ số an toàn về độ bền mỗi bằng cách dùng biểu đồ rút gọn biên độ giới hạn vẽ theo giới hạn bền mỗi p_{-1} với chu trình đối xứng và giới hạn bền p_b khi kéo tĩnh (hình 238).

Nếu chu trình làm việc được đặc trưng bằng điểm C trên biểu đồ này, còn chu trình giới hạn đồng dạng với nó đặc trưng bằng điểm D , thì bằng đồ thị hệ số an toàn về độ bền được biểu thị bởi tỷ số $n = OD/OC$ hay bằng giải tích

$$n = \frac{p_{-1}}{\frac{p_{-1}}{p_b} p_{tb} + \frac{p_{bd}}{\varepsilon}} \quad (263)$$



Hình 238

Khi ứng suất biến đổi với biên độ không lớn có thể thấy rằng trạng thái giới hạn của vật liệu dẻo sẽ được xác định không theo độ mỗi mà theo độ chảy (đoạn EM) và khi đó hệ số an toàn về độ bền được xác định theo giới hạn chảy

$$n_{ch} = \frac{p_{ch}}{p_{max}} = \frac{p_{ch}}{p_{tb} + p_{bd}} \quad (264)$$

Khi kiểm tra bền cần phải so sánh giá trị của hệ số an toàn về độ bền tính theo công thức (263) và (264) và lấy giá trị nhỏ hơn. Hệ số an toàn chọn không được bé hơn hệ số an toàn cho phép. Từ công thức (263) khi cho $n = [n]$; $p_{tb} = [p_{tb}]$ và $p_{bd} = [p_{bd}]$ ta được giá trị ứng suất cho phép của chu trình không đối xứng

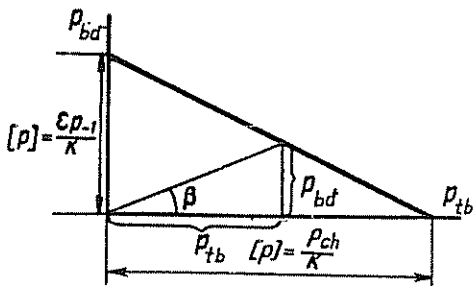
$$[p_r] = \frac{2[p_{-1}][p]}{(1-r)[p] + (1+r)[p_{-1}] \frac{p_{ch}}{p_b}} \quad (265)$$

trong đó $[p]$ ($[\sigma]$ hay $[\tau]$) là ứng suất cho phép khi tải trọng tĩnh.

Điều kiện bền có dạng:

$$p_{max} = p_{tb} + p_{bd} \leq [p_r] \quad (266)$$

Để rút gọn hơn nữa tính toán nhưng lại nâng cao an toàn độ bền có thể dùng biểu đồ ứng suất cho phép đã được nắn thẳng của Zóderberg (hình 239). Theo biểu đồ này ta có hệ số an toàn về độ bền



Hình 239

$$n = \frac{p_{-1}}{\frac{p_{-1}}{p_r} p_{tb} + \frac{p_{bd}}{\varepsilon}} \quad (267)$$

còn giá trị của ứng suất cho phép

$$[p_r] = \frac{2[p][p_{-1}]}{(1-r)[p] + (1+r)[p_{-1}]} \quad (268)$$

Thí dụ 132: Thanh có mặt cắt tròn

đường kính $d = 40\text{mm}$, bề mặt được mài nhẵn và làm bằng thép CT.4 có $\sigma_b = 480\text{MN/m}^2$, $\sigma_{-1} = 200\text{MN/m}^2$.

Xác định hệ số an toàn độ bền n khi thanh làm việc trong điều kiện uốn biến đổi theo chu trình đối xứng với $M_{\max} = -M_{\min} = 640\text{Nm}$.

Bài giải: Ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất của chu trình

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = M_{\max}/W \approx 640/(0,1 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6}) = 10^8\text{N/m}^2 = 100\text{MN/m}^2.$$

Từ đồ thị ở hình 2 của phụ lục 5 đối với thanh mặt cắt tròn đường kính $d = 40\text{mm}$ bằng thép cacbon với bề mặt mài nhẵn có hệ số tỷ lệ $\epsilon_{11} = 0,86$.

Theo công thức (260) hệ số an toàn về độ bền

$$n = \epsilon_{11} \cdot \sigma_{-1} / \sigma_{\max} \approx 0,86 \cdot 200 / 100 \approx 1,7.$$

Thí dụ 133: Thanh hình bậc, mặt cắt tròn đường kính $D = 80\text{mm}$ và $d = 40\text{mm}$ (hình 240), làm bằng thép 40X có $\sigma_b = 1000\text{MN/m}^2$ và $\sigma_{-1k} = 250\text{MN/m}^2$. Ở góc lượn $\rho/d = 0,2$. Bề mặt thanh được đánh bóng cẩn thận.

Xác định giá trị lớn nhất của lực dọc trục biến đổi P_{\max} theo chu trình đối xứng để đảm bảo hệ số an toàn về độ bền $[n] = 1,8$.

Bài giải: Từ đồ thị hình 4 của phụ lục 5 $\rho/d = 0,2$ đối với thép $\sigma_b = 1000\text{MN/m}^2$ bằng cách nội suy tuyến tính ta có hệ số hiệu dụng của ứng suất tập trung $\alpha_{hd} = 1,7$. Khi đánh bóng cẩn thận $\epsilon_{bm} = 1$.

Ứng suất cho phép $[\sigma_{-1k}] = \sigma_{-1k} / ([n] \cdot \alpha_{hd}) = 250 / (1,8 \cdot 1,7) \approx 82\text{MN/m}^2$.

Diện tích bé nhất của mặt cắt thanh $F = \pi d^2 / 4 = \pi \cdot 4 = 12,6\text{cm}^2$.

Lực dọc trục biến đổi lớn nhất

$$P_{\max} = [\sigma_{-1k}]F = 82 \cdot 10^6 \cdot 12,6 \cdot 10^{-4} = 103000\text{N} = 103\text{kN}.$$

Thí dụ 134: Trục mặt cắt tròn đường kính $d = 50\text{mm}$ bằng thép cacbon có $\sigma_b = 60\text{kG/mm}^2$ và bề mặt được đánh bóng cẩn thận, trên trục có lỗ tròn đường kính $a = 10\text{mm}$ xuyên ngang qua. Trục chịu xoắn biến đổi theo chu trình đối xứng với $\max M_{xo} = -\min M_{xo} = 90\text{kGm}$ (hình 241)

Xác định hệ số an toàn về độ bền của trục.

Bài giải: Ta lấy gần đúng $\sigma_{-1} = 0,4\sigma_b$ và $\tau_{-1} = 0,5\sigma_{-1} = 0,2 \cdot 60 = 12\text{kG/mm}^2$.

Từ đồ thị trên hình 5 của phụ lục 5 đối với thép có $\sigma_b = 60\text{kG/mm}^2$ hệ số hiệu dụng của ứng suất tập trung tính theo kích thước tuyệt đối trục $\alpha_{hd} = 1,77$.

Momen chống xoắn của mặt cắt tròn có lỗ khoét khi tỷ số $a/d = 0,2$ theo số liệu tra cứu là:

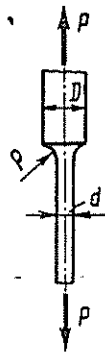
$$W_{xo} = (\pi d^3 / 16) \cdot 0,84 \approx 20,6\text{cm}^3.$$

Khi tác dụng $\max M_{xo} = 90\text{kGm}$

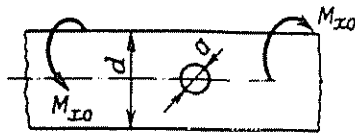
$$\tau_{\max} = \max M_{xo} / W_{xo} = 90 \cdot 10^2 / 20,6 \approx 437 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Hệ số an toàn độ bền phải tìm

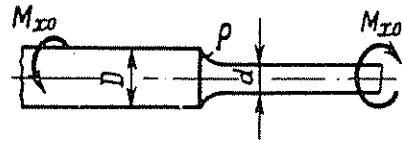
$$n = \tau_{-1} / (\alpha_{hd} \tau_{\max}) = 12 \cdot 10^2 / (1,77 \cdot 437) \approx 1,55.$$



Hình 240



Hình 241



Hình 242

Thí dụ 135: Xác định ứng suất cho phép khi uốn thay đổi và đặc trưng của chu trình $r = -0,6$, nếu chi tiết làm bằng thép hợp kim xây dựng có $\sigma_b = 100\text{kG/mm}^2$ và $\sigma_{ch} = 80\text{kG/mm}^2$ với hệ số an toàn bền $[n] = 2$. Chi tiết có mặt cắt tròn đường kính $d = 40\text{mm}$, mặt cắt thay đổi đột ngột, tại đó hệ số tập trung ứng suất lý thuyết $\alpha_\sigma = 1,6$. Hệ số tăng bền do làm cứng nguội bề mặt $\beta = 1,4$.

Bài giải: Ta lấy $\sigma_{-1} = 0,4 \cdot \sigma_b = 0,4 \cdot 100 = 40\text{kG/cm}^2$. Cho hệ số nhạy của vật liệu $q = 0,8$ và tính hệ số tập trung ứng suất hiệu dụng theo công thức (256)

$$\alpha_{hd} = 1 + q(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,8(1,6 - 1) = 1,48$$

Ta tìm hệ số tỷ lệ ϵ_{11} theo đường cong của thép cacbon với ứng suất tập trung vừa phải theo đồ thị trên hình 2 phụ lục 5, tức là $\epsilon_{11} \approx 0,65$.

Ứng suất cho phép khi tải trọng không đổi

$$[\sigma] = \sigma_{ch}/[n] = 80/2 = 40\text{kG/mm}^2.$$

Theo công thức (259) hệ số ảnh hưởng của các yếu tố khác đến độ bền mỗi khi chu trình đối xứng

$$\epsilon = \epsilon_{11} \beta \cdot \epsilon_{bm}/\alpha_{hd} = 0,65 \cdot 1,4 \cdot 1/1,48 \approx 0,615$$

Theo công thức (262) ứng suất cho phép khi chu trình đối xứng

$$[\sigma_{-1}] = \epsilon \sigma_{-1}/[n] \approx 0,615 \cdot 40/2 = 12,3\text{kG/mm}^2.$$

Theo công thức (265) ứng suất cho phép khi chu trình không đối xứng với hệ số bất đối xứng $r = -0,6$.

$$\begin{aligned} [\sigma_{-0,6}] &= \frac{2[\sigma][\sigma_{-1}]}{(1-r)[\sigma] + (1+r)[\sigma_{-1}] \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{bd}}} = \\ &= \frac{2 \cdot 40 \cdot 12,3}{(1+0,6)40 + (1-0,6)12,3 \cdot 0,8} \approx 14,5\text{kG/mm}^2. \end{aligned}$$

Thí dụ 136: Kiểm tra độ bền của trục bậc mặt cắt tròn đường kính $D = 60\text{mm}$ và $d = 30\text{mm}$ (hình 242) bằng thép cacbon 45 có $\sigma_b = 70\text{kG/mm}^2$; $\tau_{ch} = 22\text{kG/mm}^2$; $\tau_{-1} = 16\text{kG/mm}^2$ với hệ số an toàn độ bền $[n] = 1,6$. Ở góc lượn $\rho/d = 0,1$ và hệ số tăng bền do thời hạt $\beta = 1,1$. Trục chịu xoắn biến đổi với $\max M_{x_0} = 48\text{kGm}$; $\min M_{x_0} = -24\text{kGm}$.

Bài giải: Ứng suất tiếp cho phép khi xoắn không đổi

$$[\tau] = \tau_{ch}/[n] = 22/1,6 \approx 13,8\text{kG/mm}^2.$$

Từ đồ thị hình 6 phụ lục 5 bằng cách nội suy tuyến tính khi $\rho/d = 0,1$ đối với thép có $\sigma_b = 70\text{kG/mm}^2$, hệ số tập trung hiệu dụng $\alpha_{hd}^T \approx 1,28$.

Hệ số ảnh hưởng đến độ bền mỗi của tất cả các yếu tố

$$\epsilon = \beta/\alpha_{hd}^T \approx 1,1/1,28 \approx 0,86.$$

Ứng suất cho phép khi chu trình đối xứng

$$[\tau_{-1}] = \varepsilon \tau_{-1} / [n] \approx 0,86 \cdot 16 / 1,6 = 8,6 \text{ kG/mm}^2.$$

Đặc trưng của chu trình đã cho

$$r = \frac{\min M_{x_0}}{\max M_{x_0}} = -\frac{24}{48} = -0,5.$$

Theo công thức (286) khi $r = -0,5$ thì ứng suất cho phép

$$[\tau_{-0,5}] = \frac{2[\tau][\tau_{-1}]}{(1-r)[\tau] + (1+r)[\tau_{-1}]} \approx \frac{2 \cdot 13,8 \cdot 8,6}{(1+0,5)13,8 + (1+0,5)8,6} \approx 9,5 \text{ kG/mm}^2 \approx 950 \text{ kG/cm}^2.$$

Do tác dụng của $\max M_{x_0}$ ứng suất lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_{x_0}}{W_\rho} = \frac{48 \cdot 10^2}{3,14 \cdot 3^3 / 16} \approx 906 \text{ kG/cm}^2.$$

Như vậy trực đảm bảo độ bền.

§ 50. Tính độ bền trong trạng thái ứng suất phức tạp

Ta chỉ xét trạng thái ứng suất phẳng chỉ dẫn trên hình 243 đối với vật liệu dẻo.

Điều kiện bền tương ứng với các lý thuyết bền thứ ba hay thứ tư viết theo công thức ellip như sau

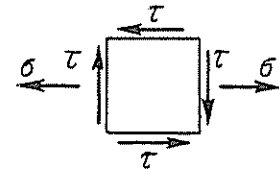
$$\frac{\sigma_{\max}^2}{[\sigma_r]^2} + \frac{\tau_{\max}^2}{[\tau_r]^2} \leq 1 \quad (269)$$

Ở đây $\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + \sigma_{bd}$; $\tau_{\max} = \tau_{tb} + \tau_{bd}$. $[\sigma_r]$ và $[\tau_r]$ là ứng suất pháp và ứng suất tiếp cho phép được thành lập theo công thức (265) hay (268) tương ứng với đặc trưng của chu trình biến đổi ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

Hệ số an toàn độ bền chung n khi các ứng suất biến đổi σ và τ tác dụng đồng thời xác định từ biểu thức

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (270)$$

trong đó n_σ và n_τ là hệ số an toàn riêng về độ bền do tác dụng lên chi tiết tương ứng chỉ có σ biến đổi và chỉ có τ biến đổi. Những hệ số này được tính theo công thức (263) hoặc (267).



Hình 243

Thí dụ 137: Trục thép (CT.5) chịu tác dụng đồng bộ và tuần hoàn của momen uốn biến đổi $M_{\max} = 400 \text{ Nm}$, $M_{\min} = -160 \text{ Nm}$ và momen xoắn biến đổi $\max M_{x_0} = 640 \text{ Nm}$, $\min M_{x_0} = 320 \text{ Nm}$. Trục bậc có các đường kính $D = 50 \text{ mm}$ và $d = 40 \text{ mm}$; bán kính góc lượn $\rho = 0,25 \text{ cm}$. Đối với thép CT.5: $\sigma_b = 540 \text{ MN/m}^2$; $\sigma_{ch} = 280 \text{ MN/m}^2$; $\tau_b = 350 \text{ MN/m}^2$; $\tau_{ch} = 180 \text{ MN/m}^2$; $\sigma_{-1} = 240 \text{ MN/m}^2$; $\tau_{-1} = 140 \text{ MN/m}^2$.

Xác định hệ số an toàn độ bền n của trục.

Bài giải: Bằng cách nội suy tuyến tính từ đồ thị hình 6 và hình 7 phụ lục 5 ta xác định được hệ số tập trung ứng suất khi $\rho/d = 0,25/4 = 0,0625$ và $\sigma_b = 540 \text{ MN/m}^2$ là $\alpha_{hd_\sigma} \approx 1,81$ và $\alpha_{hd_\tau} \approx 1,42$.

Vì trong trường hợp đã cho $D/d = 5/4 = 1,25 < 2$ nên cần phải hiệu chỉnh α_{hd}^σ và α_{hd}^τ .

Từ đồ thị hình 8 phụ lục 5 ta có hệ số hiệu chỉnh $\xi_\sigma = 0,83$ và $\xi_\tau = 0,79$.

Giá trị cuối cùng của α_{hd}^σ và α_{hd}^τ xác định theo công thức cho trên hình 8 phụ lục 5:

$$\alpha_{hd}^\sigma = 1 + \xi_\sigma (\alpha_{hd}^\sigma - 1) \approx 1 + 0,83(1,81 - 1) \approx 1,67,$$

$$\alpha_{hd}^\tau = 1 + \xi_\tau (\alpha_{hd}^\tau - 1) \approx 1 + 0,79(1,42 - 1) \approx 1,33.$$

Theo đường cong 3 của đồ thị trên hình 3 phụ lục 5 đối với $\sigma_b = 540\text{MN/m}^2$ ta xác định được hệ số nhạy bề mặt $\epsilon_{bm} = 0,88$.

Hệ số ảnh hưởng chung đến độ bền mỏi của tất cả các yếu tố thu được bằng:

$$\epsilon_\sigma = \epsilon_{bm}/\alpha_{hd}^\sigma = 0,88/1,67 \approx 0,53 \text{ và}$$

$$\epsilon_\tau = \epsilon_{bm}/\alpha_{hd}^\tau = 0,88/1,33 \approx 0,66.$$

Ứng suất pháp và ứng suất tiếp lớn nhất và nhỏ nhất khi uốn và xoắn biến đổi có giá trị

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{M_{\max}}{\pi d^3/32} = \frac{400}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 64 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 64 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\min}}{W} = -\frac{160}{6,28 \cdot 10^{-6}} = -25,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -25,5 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_{xo}}{W_\rho} = \frac{\max M_{xo}}{\pi d^3/16} = \frac{640}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 51 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2},$$

$$\tau_{\min} = \frac{\min M_{xo}}{W_\rho} = \frac{320}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 25,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 25,5 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}.$$

Ứng suất trung bình và biên độ của chu trình ứng suất pháp và ứng suất tiếp thu được bằng

$$\sigma_{tb} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 = (64 - 25,5)/2 \approx 19\text{MN/m}^2$$

$$\sigma_{bd} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = (64 + 25,5)/2 \approx 44,7\text{MN/m}^2.$$

$$\tau_{tb} = (\tau_{\max} + \tau_{\min})/2 = (51 + 25,5)/2 \approx 38,2\text{MN/m}^2,$$

$$\tau_{bd} = (\tau_{\max} - \tau_{\min})/2 = (51 - 25,5)/2 \approx 12,7\text{MN/m}^2.$$

Theo công thức (263) ta có hệ số an toàn độ bền về ứng suất pháp và tiếp:

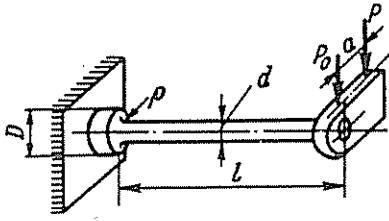
$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b} \sigma_{tb} + \frac{\sigma_{bd}}{\epsilon_\sigma}} = \frac{240}{\frac{240}{540} 19 + \frac{44,7}{0,53}} \approx 2,59,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_{-1}}{\tau_b} \tau_{tb} + \frac{\tau_{bd}}{\epsilon_\tau}} = \frac{140}{\frac{140}{350} 38,2 + \frac{12,7}{0,66}} \approx 4,06.$$

Ta xác định hệ số an toàn chung của độ bền theo công thức (270):

$$n = n_\sigma \cdot n_\tau / \sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2} = 2,59 \cdot 4,06 / \sqrt{2,59^2 + 4,06^2} \approx 2,18.$$

Thí dụ 138: Chi tiết vẽ trên hình 244 chế tạo từ thép CT.6 có $\sigma_b = 60\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{ch} = 32\text{kG/mm}^2$; $\tau_{ch} = 22\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{-1} = 25\text{kG/mm}^2$; $\tau_{-1} = 15\text{kG/mm}^2$; $D = 80\text{mm}$;



Hình 244

$\sigma_b = 60 \text{ kG/mm}^2$ ta xác định được hệ số tập trung ứng suất hiệu dụng ở góc lượn: $\alpha_{hd}^{\sigma} \approx 2,07$; $\alpha_{hd}^{\tau} \approx 1,56$

$d = 40 \text{ mm}$; $\rho = 0,2 \text{ cm}$; $l = 40 \text{ cm}$; $a = 10 \text{ cm}$;
 $P_0 = \text{const} = 16 \text{ kG}$; P biến đổi từ P_{\max} đến $P_{\min} = -P_{\max}$ theo chu trình đối xứng.

Xác định giá trị cho phép P_{\max} , nếu định trước hệ số an toàn độ bền của chi tiết $[n] = 2$. Biết bề mặt chi tiết được tiện thô.

Bài giải: Từ các đồ thị hình 6 7 và phụ lục 5 với $\rho/d = 0,2/4 = 0,05$; $D/d = 2$, đối với

Theo đường cong 4 hình 3 phụ lục 5 với $\sigma_b = 60 \text{ kG/mm}^2$ hệ số nhạy bề mặt $\epsilon_{bm} \approx 0,8$.

Hệ số ảnh hưởng đến độ bền mỗi chủng của tất cả các nhân tố:

$$\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{bm} / \alpha_{hd}^{\sigma} = 0,8 / 2,07 \approx 0,386 \text{ và } \epsilon_{\tau} = 0,8 / 1,56 \approx 0,512.$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất ở góc lượn do uốn biến đổi theo chu trình đối xứng có giá trị:

$$\sigma_{\max} = \frac{(P_0 + P_{\max})l}{W} \approx \frac{(16 + P_{\max})40}{0,1 \cdot 64} = 100 + 62,5 P_{\max} \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{(P_0 - P_{\min})l}{W} \approx \frac{(16 - P_{\min})40}{0,1 \cdot 64} = 100 - 62,5 P_{\min} \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất và nhỏ nhất ở góc lượn do xoắn biến đổi theo chu trình đối xứng có giá trị:

$$\tau_{\max} = (P_{\max} / W_{\rho}) a \approx (P_{\max} / 0,2 \cdot 64) 10 = 0,732 P_{\max} \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

$$\tau_{\min} = (-P_{\max} / W_{\rho}) a \approx -0,732 P_{\max} \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Ứng suất trung bình và biên độ của chu trình ứng suất pháp và ứng suất tiếp thu được bằng:

$$\sigma_{tb} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2 = 100 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\sigma_{bd} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 = 62,5 P_{\max} \text{ kG/cm}^2;$$

$$\tau_{tb} = 0; \tau_{bd} = 0,732 P_{\max} \text{ kG/cm}^2.$$

Theo công thức (267) ta có hệ số an toàn độ bền đối với ứng suất pháp và tiếp:

$$n_{\sigma} = \frac{25}{\frac{25}{32} \cdot 1 + \frac{0,625}{0,386} P_{\max}} = \frac{25}{0,732 + 1,62 P_{\max}},$$

$$n_{\tau} = \epsilon_{\tau} \tau_{-1} / \tau_{bd} = 0,512 \cdot 15 / 0,732 P_{\max} \approx 10,5 / P_{\max}.$$

Vi hệ số an toàn chung của độ bền theo công thức (270):

$$n = 2 = \frac{n_{\sigma} n_{\tau} \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}{1} = 25 \cdot 10,5 / P_{\max} (0,732 + 1,62 P_{\max}) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{25^2 / (0,732 + 1,62 P_{\max})^2 + 10,5^2 / P_{\max}^2}}{25 \cdot 10,5} = \frac{\sqrt{25^2 P_{\max}^2 + 10,5^2 (0,732 + 1,62 P_{\max})^2}}{25^2 P_{\max}^2 + 10,5^2 (0,732 + 1,62 P_{\max})^2}$$

nên

$$P_{\max}^2 + 0,885 P_{\max} - 58,1 = 0.$$

Từ đó lực cho phép lớn nhất

$$P_{\max} \approx -0,442 \pm \sqrt{0,442^2 + 58,1} \approx -0,442 \pm 7,63 \text{ kG}.$$

Vi chỉ có một nghiệm của phương trình thỏa mãn bài toán nên $P_{\max} \approx 7,2 \text{ kG}$

Bài tập 1015. Dùng giới hạn dưới của sự phụ thuộc thực nghiệm, xác định giá trị gần đúng của giới hạn bền mỗi khi xoắn thay đổi theo chu trình đối xứng các mẫu thép có sự tập trung ứng suất nếu $\sigma_b = 960 \text{ MN/m}^2$; $\alpha_{\tau} = 1,6$; $q = 0,9$.

Bài tập 1016. Thanh bậc bằng thép có mặt cắt tròn đường kính $d = 36 \text{ mm}$ và $D = 72 \text{ mm}$ chịu kéo — nén thay đổi với $P_{\max} = -P_{\min} = 5 \text{ T}$.

Xác định bán kính cho phép nhỏ nhất của góc lượn ρ cần thiết để có hệ số an toàn độ bền $[n] = 2$ nếu biết $\sigma_b = 40 \text{ kG/mm}^2$, $\sigma_{-1P} = 12 \text{ kG/mm}^2$.

Bài tập 1017. Thanh bậc có mặt cắt tròn đường kính $D = 60 \text{ mm}$, $d_1 = 30 \text{ mm}$ và $d_2 = 32 \text{ mm}$ làm bằng thép 20X, có $\sigma_b = 80 \text{ kG/mm}^2$ và $\sigma_{-1P} = 24 \text{ kG/mm}^2$.

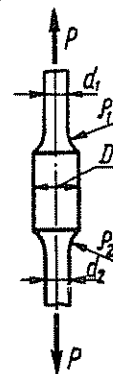
Tại các góc lượn $\frac{\rho_1}{d_1} = 0,3$ và $\frac{\rho_2}{d_2} = 0,1$. Bề mặt

thanh bảo nhẵn cẩn thận. Xác định hệ số an toàn độ bền n , khi thanh làm việc trong nước với lực dọc trục thay đổi $P_{\max} = -P_{\min} = 3 \text{ T}$ theo chu trình đối xứng.

1016

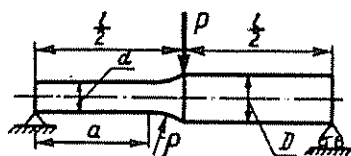


1017

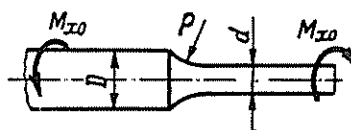


Bài tập 1018. Xác định lực uốn lớn nhất P_{\max} , khi trục bậc bằng thép quay và có thể làm việc theo sơ đồ trên hình vẽ, với hệ số an toàn độ bền $[n] = 1,8$. Cho $\sigma_b = 1200 \text{ MN/m}^2$; $\sigma_{-1} = 360 \text{ MN/m}^2$; $D = 70 \text{ mm}$; $d = 50 \text{ mm}$; $\rho/d = 0,15$; $l = 60 \text{ cm}$; $a = 40 \text{ cm}$. Bề mặt trục đã được bảo nhẵn.

1018



1019



Bài tập 1019. Trục bạc có $D = 60\text{mm}$; $d = 50\text{mm}$; $\rho/d = 0,05$, làm việc trong nước khi xoắn dôi dẫu theo chu trình đối xứng với hệ số an toàn $[n] = 1,5$. Bề mặt trục đã mài nhẵn. Xác định xem trục bằng thép CT.5 có $\sigma_b = 52\text{kG/mm}^2$, $\tau_{-1} = 14\text{kG/mm}^2$ và trục bằng thép 40X có $\sigma_b = 100\text{kG/mm}^2$, $\tau_{-1} = 22\text{kG/mm}^2$ trục nào bền hơn?

Bài tập 1020. Cho thép 30XM, những giá trị thực nghiệm $\sigma_b = 90\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{-1k} = 36\text{kG/mm}^2$; và biên độ giới hạn σ'_{bd} khi cho ứng suất trung bình σ'_{tb}

σ'_{tb} kG/mm ²	20	40	60
σ'_{bd} kG/mm ²	32	26	16

Xác định $\sigma_{\pm 0,6}$.

Bài tập 1021. Xác định $\sigma_{-0,5}$ đối với thép có đường cong biên độ giới hạn (trong chu trình đang xét $\sigma_{tb} > 0$) viết được gần đúng theo phương trình

$$\sigma'_{bd} = 20[1 - (\sigma'_{tb}/40)^2].$$

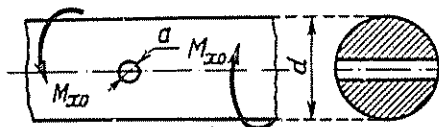
Bài tập 1022. Xác định hệ số an toàn độ bền khi chi tiết kim loại làm việc trong điều kiện ứng suất kéo nén thay đổi, nếu $\sigma_b = 90\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{ch} = 70\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{-1k} = 30\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{max} = 16\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{min} = -6\text{kG/mm}^2$; $\alpha_{bd} = 1,5$; $\varepsilon_{tl} = 0,7$; $\varepsilon_{bm} = 0,9$; $\beta = 1,3$.

Bài tập 1023. Chi tiết bằng thép phải làm việc trong điều kiện uốn dôi dẫu với biên độ ứng suất $\sigma_{bd} = 200\text{MN/m}^2$, khi hệ số an toàn độ bền $[n] = 2$. Hệ số không đối xứng r của chu trình phải như thế nào? nếu $\sigma_b = 1100\text{MN/m}^2$; $\sigma_{ch} = 900\text{MN/m}^2$; $\sigma_{-1} = 480\text{MN/m}^2$; $\alpha_\sigma = 1,2$; $q = 0,9$; $\varepsilon_{tl} = 0,8$; $\varepsilon_{bm} = 1$; $\beta = 1,4$.

Bài tập 1024. Xác định giá trị nhỏ nhất của ứng suất cho phép đối với chi tiết bằng thép chịu kéo — nén thay đổi với hệ số không đối xứng của chu trình $r = -0,4$, hệ số an toàn độ bền $[n] = 1,4$. Thép cacbon, có $\sigma_b = 50\text{kG/mm}^2$ và $\sigma_{ch} = 24\text{kG/mm}^2$. Mặt cắt của chi tiết tròn đường kính $d = 30\text{mm}$ và có tập trung ứng suất với $\alpha_\sigma = 2$. Hệ số tăng độ bền do bề mặt gia công nguội $\beta = 1,2$.

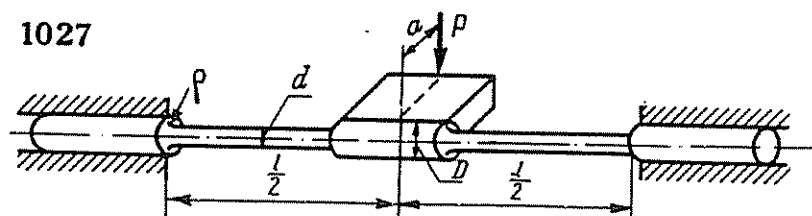
Bài tập 1025*. Trục bằng thép, mặt cắt tròn đường kính $d = 40\text{mm}$ có lỗ tròn cắt ngang, đường kính lỗ $a = 6\text{mm}$ và làm việc trong chu trình mạch động ($r = 0$) với hệ số an toàn độ bền $[n] = 1,8$ — Xác định trị số momen xoắn thay đổi lớn nhất $\max M_{xo}$ nếu trục làm bằng thép 30XFCA, có $\sigma_b = 110\text{kG/mm}^2$; $\tau_{ch} = 51\text{kG/mm}^2$ và $\tau_{-1} = 23\text{kG/mm}^2$.

1025



Bài tập 1026*. Xác định hệ số an toàn độ bền n , khi chi tiết chịu kéo và xoắn thay đổi, nếu chi tiết làm bằng thép 45; $\sigma_b = 60\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{ch} = 32\text{kG/mm}^2$; $\sigma_{-1k} = 20\text{kG/mm}^2$; $\tau_{ch} = 22\text{kG/mm}^2$; $\tau_{-1} = 16\text{kG/mm}^2$; $\alpha_{hd} = 1,7$; $\alpha_{hd}^{\tau} = 1,4$; $\epsilon_{11} = 0,7$; $\epsilon_{bm} = 1$; $\beta = 1$; $\sigma_{max} = 1000\text{kG/cm}^2$; $\sigma_{min} = 200\text{kG/cm}^2$; $\tau_{max} = 400\text{kG/cm}^2$; $\tau_{min} = -100\text{kG/cm}^2$.

Bài tập 1027*. Thanh hình trụ bằng thép, mặt cắt tròn, đường kính $d = 30\text{mm}$ được ngâm ở các đầu. Trên phần nhô ra của thanh tác dụng một lực P thay đổi theo chu trình đối xứng. Xác định trị số lực lớn nhất P_{max} , nếu biết mác của thép là 40XH; có $\sigma_b = 900\text{MN/m}^2$; $\sigma_{-1} = 400\text{MN/m}^2$; $\tau_{-1} = 240\text{MN/m}^2$. Đường kính phần giữa của thanh $D = 60\text{mm}$; $\rho/d = 0,1$; $l = 32\text{cm}$; $a = 10\text{cm}$; $\beta = 1,2$; $[n] = 1,6$



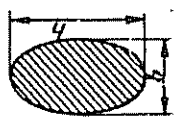
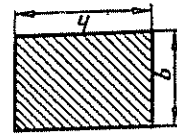
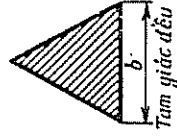
Bài tập 1028*. Trục bậc bằng thép mặt cắt tròn, đường kính $D = 60\text{mm}$, $d = 50\text{mm}$ và bán kính góc lượn chuyển tiếp $\rho = 5\text{mm}$ chịu tác động của uốn và xoắn thay đổi.

Xác định xem, nếu ở tiết diện chuyển tiếp nguy hiểm do uốn $M_{max} = 3\text{kNm}$; $M_{min} = 1,5\text{kNm}$; do xoắn $\max M_{xo} = 2\text{kNm}$; $\min M_{xo} = -0,5\text{kNm}$, trục sẽ làm việc với hệ số an toàn bằng bao nhiêu? Trục làm bằng thép 40XH, có $\sigma_b = 900\text{MN/m}^2$; $\sigma_{ch} = 750\text{MN/m}^2$; $\sigma_{-1} = 400\text{MN/m}^2$; $\tau_{ch} = 390\text{MN/m}^2$; $\tau_{-1} = 240\text{MN/m}^2$. Ảnh hưởng sự tăng độ bền của các yếu tố công nghệ được đánh giá bằng hệ số $\beta = 1,3$.

* Khi giải các bài tập có dấu sao, sử dụng đồ thị thẳng Zöderberg.

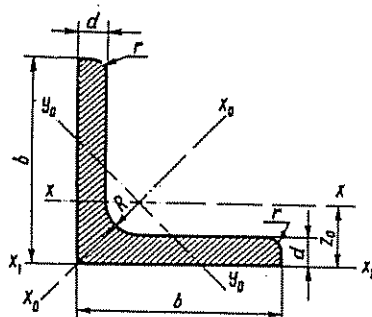
PHỤ LỤC

PHỤ LỤC 1. Các số liệu về xoắn của mặt cắt không tròn

Hình dạng mặt cắt	« Mômen quán tính » xoắn của mặt cắt I_{x_0}, cm^4	Mômen chống xoắn W_{x_0}, cm^3	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max} = M_{x_0}/W_{x_0}$	Ghi chú																								
	$I_{x_0} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{m^3}{m^2+1} \cdot b^4 = \frac{16F^4}{\pi^3 b h (b^2 + h^2)}$	$W_{x_0} = \frac{\pi b^3}{16} m = \frac{\pi b^2 h}{16}$	ở đầu bán trục nhỏ $\tau_{\max} = M_{x_0}/W_{x_0}$ ở đầu bán trục lớn $\tau = \tau_{\max}/m$	$h/b = m > 1$ F - diện tích mặt cắt																								
	$I_{x_0} = \alpha b^4$	$W_{x_0} = \beta \cdot b^3$	Giữa các cạnh dài $\tau_{\max} = M_{x_0}/W_{x_0}$ Giữa các cạnh ngắn $\tau = \gamma \tau_{\max}$ ở các góc ứng suất tiếp bằng không.	Giá trị của hệ số α, β và γ .																								
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>$m = h/b$</th> <th>α</th> <th>β</th> <th>γ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,0</td> <td>0,140</td> <td>0,208</td> <td>1,0</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>0,294</td> <td>0,316</td> <td>0,859</td> </tr> <tr> <td>2,0</td> <td>0,457</td> <td>0,493</td> <td>0,795</td> </tr> <tr> <td>3,0</td> <td>0,790</td> <td>0,801</td> <td>0,753</td> </tr> <tr> <td>4,0</td> <td>1,123</td> <td>1,127</td> <td>0,745</td> </tr> </tbody> </table>	$m = h/b$	α	β	γ	1,0	0,140	0,208	1,0	1,5	0,294	0,316	0,859	2,0	0,457	0,493	0,795	3,0	0,790	0,801	0,753	4,0	1,123	1,127	0,745
$m = h/b$	α	β	γ																									
1,0	0,140	0,208	1,0																									
1,5	0,294	0,316	0,859																									
2,0	0,457	0,493	0,795																									
3,0	0,790	0,801	0,753																									
4,0	1,123	1,127	0,745																									
Tam giác đều 	$I_{x_0} = b^4/46,19 \approx 0,02165b^4$	$W_{x_0} = 0,05b^3$	$\tau_{\max} = 20M_{x_0}/b^3$ (ở giữa cạnh) ở các góc ứng suất tiếp bằng không.																									

PHỤ LỤC 2

Quy cách thép cán
thép góc đều cạnh ГОСТ 8509-57



Bảng 1

Số hiệu thép hình N°	Kích thước mm				Diện tích mặt cắt F cm ²	Trọng lượng 1 m dài (kG)	Các trị số đối với trục							Z _o , cm
	b	d	R	r			x - x		x _o - x _o		y _o - y _o		x ₁ - x ₁	
							I _x cm ⁴	i _x cm	I _{x_omax} cm ⁴	i _{x_omax} cm	I _{y_omin} cm ⁴	i _{y_omin} cm		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13

Tiếp bảng 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27

Tiếp bảng 1

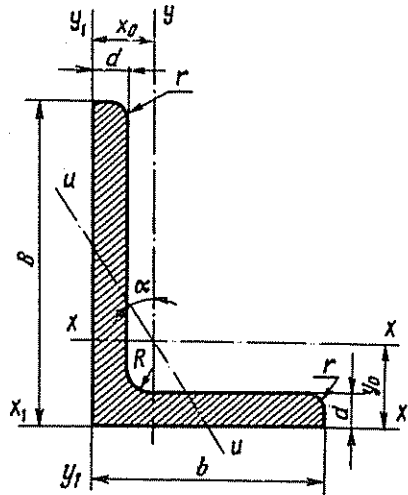
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	71,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90

Tiếp bảng 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22			106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	94,0	7003	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,80	15753	7,31

Bảng 2

Thép góc không đều cạnh ГОСТ 8510—57



Số hiệu thép hình №	Kích thước mm					Diện tích mặt cắt F cm ²	Trọng lượng 1m dài (KG)	Các trị số đối với trục											
	B	b	d	R	r			$x - x_1$		$y - y_1$		$x_1 - x_1$	Khoảng cách trọng tâm y_0 , cm	$y_1 - y_1$		Khoảng cách trọng tâm x_0 , cm	$u - u$		Góc nghiêng
								I_x , cm ⁴	i_x , cm	I_y , cm ⁴	i_y , cm			I_{x_1} cm ⁴	I_{y_1} min, cm ⁴		I_{u_1} min, cm ⁴	i_{u_1} min, cm	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,5	
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,16	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,5	
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,5	
4,2/5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,5	
			4			2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,5	
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,5	
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,5	

Tiếp bảng 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5/3,2	50	32	$\frac{3}{4}$	5,5	1,8	24,2 3,17	1,90 2,49	6,17 7,98	1,60 1,59	1,99 2,56	0,91 0,90	12,4 16,6	1,60 1,65	3,26 4,42	0,72 0,76	1,18 1,52	0,70 0,69	0,403 0,401
5,6/3,6	56	36	$\frac{3,5}{4}$ $\frac{5}{5}$	6,0	2,0	3,16 3,58 4,11	2,48 2,81 3,16	10,1 11,4 13,8	1,79 1,78 1,77	3,30 3,70 4,18	1,02 1,02 1,01	20,3 23,2 29,2	1,80 1,82 1,86	5,43 6,25 7,91	0,82 0,84 0,88	1,95 2,19 2,66	0,79 0,78 0,78	0,407 0,406 0,404
6,3/4,0	63	40	$\frac{4}{5}$ $\frac{6}{6}$ $\frac{8}{8}$	7,0	2,3	4,04 4,98 5,90 7,68	3,17 3,91 4,63 6,03	16,3 19,9 23,3 29,6	2,01 2,00 1,99 1,96	5,16 6,26 7,28 9,15	1,13 1,12 1,11 1,09	33,0 41,4 49,9 66,9	2,03 2,08 2,12 2,20	8,51 10,8 13,1 17,9	0,91 0,95 0,99 1,07	3,07 3,73 4,36 5,58	0,87 0,86 0,86 0,85	0,397 0,396 0,393 0,386
7/4,5	70	45	$\frac{4,5}{5}$	7,5	2,5	5,07 5,59	3,98 4,39	25,3 27,8	2,23 2,23	8,25 9,05	1,28 1,27	51 56,7	2,25 2,28	13,6 15,2	1,03 1,05	4,88 5,34	0,98 0,98	0,407 0,406
7,5/5	75	50	$\frac{5}{6}$ $\frac{8}{8}$	8	2,7	6,11 7,25 9,47	4,79 5,69 7,43	31,8 40,9 52,4	2,39 2,38 2,35	12,5 14,6 18,5	1,43 1,42 1,10	69,7 83,9 112	2,39 2,44 2,52	20,8 25,2 34,2	1,17 1,21 1,29	7,24 8,48 10,9	1,09 1,08 1,07	0,436 0,435 0,430
8/5	80	50	$\frac{5}{6}$	8	2,7	6,36 7,55	4,99 5,92	41,6 49,0	2,56 2,55	12,7 14,8	1,41 1,40	84,6 102	2,6 2,65	20,8 25,2	1,13 1,17	7,58 8,88	1,09 1,08	0,387 0,386

Tiếp bảng 2

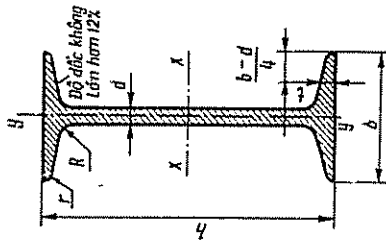
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
9,5/6	90	56	$\frac{5,5}{6}$ $\frac{6}{8}$	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
						11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	$\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{10}{10}$	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
						12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
						15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,50	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	$\frac{6,5}{7}$ $\frac{7}{8}$	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
						12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
						13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5/8	125	80	$\frac{7}{8}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{12}{12}$	11	3,7	14,1	11,0	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
						16,0	12,5	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,81	48,8	1,75	0,406
						19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
						23,4	28,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	$\frac{8}{8}$ $\frac{10}{10}$	12	4	18,0	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
						22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409

Tiếp bảng 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
			9			22,9	18,0	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10			25,3	19,8	607	5,13	204	2,81	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
16/10	160	100	12	13	4,3	30,0	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,09	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11			34,9	27,4	1449	6,45	446	3,53	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14	14	4,7	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
			12			48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	601	3,54	0,410
			16			63,6	49,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
25/16	250	160	18	18	6	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	806	2,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

Thép chữ I ГОСТ 8239-56

Bảng 3



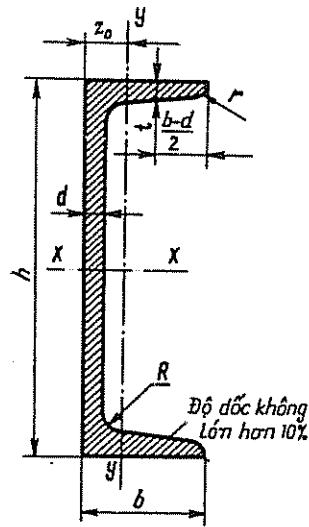
Số hiệu thép hình №	Trọng lượng 1m dài (kg)		Kích thước mm						Diện tích mặt cắt F, cm^2	Các trị số đối với trục					
			b	d	r	R	t	$x - x$			$y - y$				
	1	2						I_x, cm^4		W_x, cm^3	i_x, cm	S_x, cm^3	I_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm
10	3	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12	100	9,46	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
14	120	11,5	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
16	140	13,7	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
18	160	15,9	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18a	180	18,4	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,1	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	180	19,9	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20a	200	21,0	100	5,2	8,1	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	200	22,7	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22a	220	24,0	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	220	25,8	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	206	31,3	2,50
24a	240	27,3	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	29,4	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63

Bảng 3 tiếp theo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	507	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15,0	6,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16,0	7,0	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17,0	7,0	97,8	39290	1570	20,0	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18,0	7,0	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20,0	8,0	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22,0	9,0	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24,0	10,0	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24,0	10,0	202	162700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70b	184	700	210	17,5	28,2	24,0	10,0	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

Thép chữ U ГОСТ 8240-56

Bảng 4



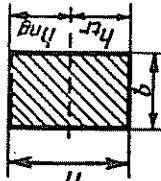
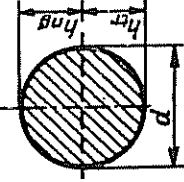
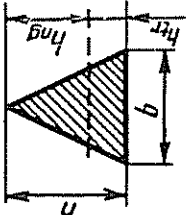
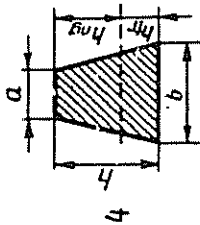
Số hiệu thép hình №	Trọng lượng 1m dài (kg)	Kích thước mm						Diện tích mặt cắt cm ²	Các trị số đối với trục									Z ₀ cm
		h	b	d	t	R	r		x - x				y - y					
									I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	S _x cm ³	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm			
5	4,34	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16		
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24		
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31		
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3,0	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44		
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54		
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3,0	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67		
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3,0	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87		
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	51,1	63,3	13,8	1,87	1,80		
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00		
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94		
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13		
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07		
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28		
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21		
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4,0	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46		
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42		
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67		
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47		
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52		
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59		
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68		
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75		

PHỤ LỤC 3

Hệ số uốn dọc

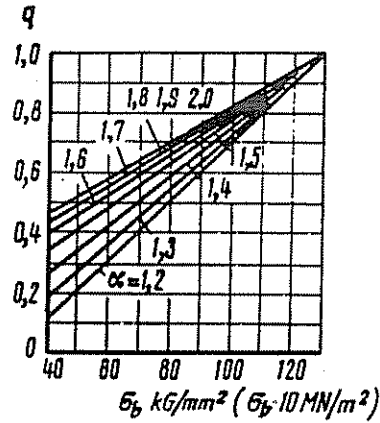
Độ mảnh λ	Trị số φ						
	Thép	CT4 CT2	CT3 CT0	CT5	Thép hợp kim	Gang	Gỗ
0	1,00			1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99			0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96			0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94			0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92			0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89			0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86			0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81			0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75			0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69			0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60			0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52			0,43	0,35	—	0,25
120	0,45			0,36	0,30	—	0,22
130	0,40			0,33	0,26	—	0,18
140	0,36			0,29	0,23	—	0,16
150	0,32			0,26	0,21	—	0,14
160	0,29			0,24	0,19	—	0,12
170	0,26			0,21	0,17	—	0,11
180	0,23			0,19	0,15	—	0,10
190	0,21			0,17	0,14	—	0,09
200	0,19			0,16	0,13	—	0,08

Các biểu thức xác định momen chống uốn của diện tích khi tính ứng suất ở thớ trong W_{tr} và ngoài W_{ng} , giá trị gần đúng của chuyển vị e của trục trung hòa và hệ số α_{tr} và α_{ng} trong công thức ứng suất pháp của thanh cong cho một số dạng mặt cắt ngang

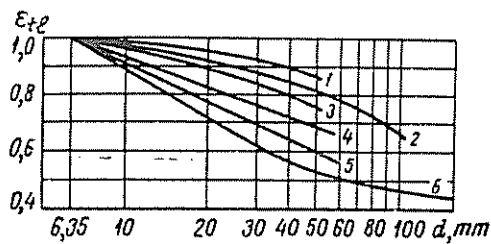
Tiết diện	W_{ng} , W_{tr}	e	α_{ng}	α_{tr}
1 	$\frac{bh^2}{6}, \frac{bh^2}{6}$	$\frac{h^2}{12\rho}$	$\frac{1 + \frac{h}{6\rho}}{1 + \frac{h}{2\rho}}$	$\frac{1 - \frac{h}{6\rho}}{1 - \frac{h}{2\rho}}$
2 	$\frac{\pi d^3}{32}, \frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{d^2}{16\rho}$	$\frac{1 + \frac{d}{8\rho}}{1 + \frac{d}{2\rho}}$	$\frac{1 - \frac{d}{8\rho}}{1 - \frac{d}{2\rho}}$
3 	$\frac{bh^2}{24}, \frac{bh^2}{12}$	$\frac{h^2}{18\rho}$	$\frac{1 + \frac{h}{12\rho}}{1 + \frac{2h}{3\rho}}$	$\frac{1 - \frac{h}{6\rho}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{\rho}}$
4  $\frac{a}{b} = n$	$\frac{n^2 + 4n + 1}{2n + 2} \cdot \frac{bh^2}{12}, \frac{bh^2}{12}$ $\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 4n + 1} \cdot \frac{bh^2}{2n + 1}, \frac{12}{bh^2}$	$\frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)^2} \cdot \frac{h^2}{18\rho}$	$1 + \frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)(n + 2)} \cdot \frac{h}{6\rho}$ $1 + \frac{n + 2}{n + 1} \cdot \frac{h}{3\rho}$	$1 - \frac{n^2 + 4n + 1}{(n + 1)(2n + 1)} \cdot \frac{h}{6\rho}$ $1 - \frac{2n + 1}{n + 1} \cdot \frac{h}{3\rho}$

PHỤ LỤC 5

Những số liệu tra cứu để tính độ bền mỏi

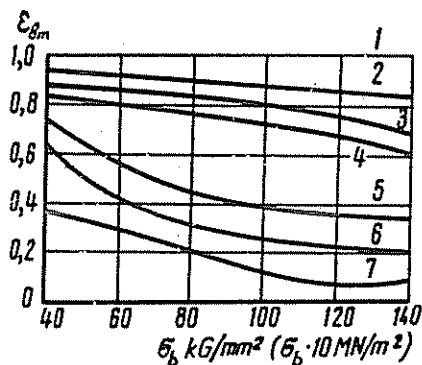


Hình 1 – Đồ thị hệ số nhạy với ứng suất tập trung của thép



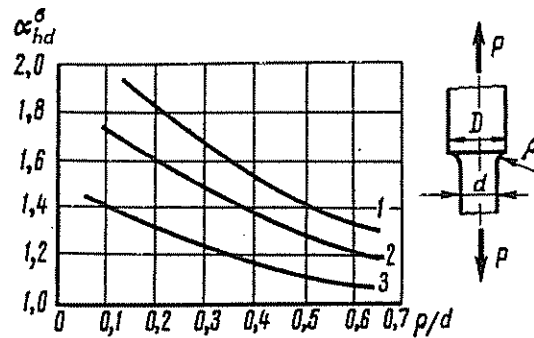
Hình 2 – Đồ thị của hệ số tỷ lệ khi uốn:

1. Thép cacbon, đánh bóng nhẵn; 2. Thép cacbon, mài nhẵn; 3. Thép hợp kim, đánh bóng nhẵn; 4. Thép hợp kim mài nhẵn; 5. Thép hợp kim với ứng suất tập trung vừa phải ($\alpha_{hd}^{\sigma} < 2$); 6. Thép xây dựng ($\sigma_b < 65 \text{kg/mm}^2$ hoặc $\sigma_b < 650 \text{MN/m}^2$); trục với các chi tiết chịu ép được chế tạo từ thép ép; khi $d < 60 \text{mm}$ – Thép hợp kim với ứng suất tập trung lớn.



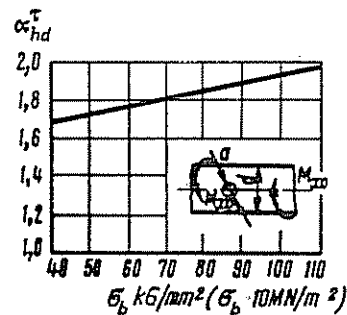
Hình 3 – Đồ thị độ nhạy bề mặt đối với thép

1. Đánh bóng cẩn thận; 2. Đánh bóng thô; 3. Mài mỏng hoặc tiện mỏng; 4. Mài thô hoặc tiện thô; 5. Thí nghiệm trong nước ngọt khi có ứng suất tập trung; 6. Thí nghiệm trong nước ngọt khi không có ứng suất tập trung; 7. Thí nghiệm trong nước biển khi không có ứng suất tập trung.



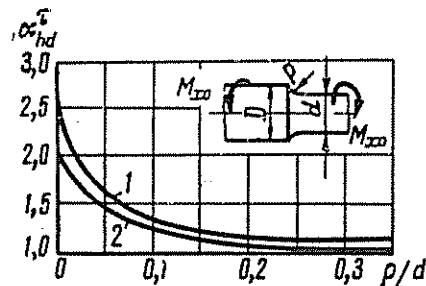
Hình 4 - Đồ thị của những hệ số hiệu dụng ứng suất tập trung đối với những trục bậc khi kéo (nén) với tỷ số $D/d = 2$; khi $d = 30 \div 50\text{mm}$

1. Đối với thép có $\sigma_b = 120\text{kG/mm}^2$ (1200MN/m^2)
2. Đối với thép có $\sigma_b = 80\text{kG/mm}^2$ (800MN/m^2)
3. Đối với thép có $\sigma_b = 40\text{kG/mm}^2$ (400MN/m^2)



Hình 5 - Đồ thị hệ số hiệu dụng của ứng suất tập trung của trục có lỗ ngang khi xoắn:

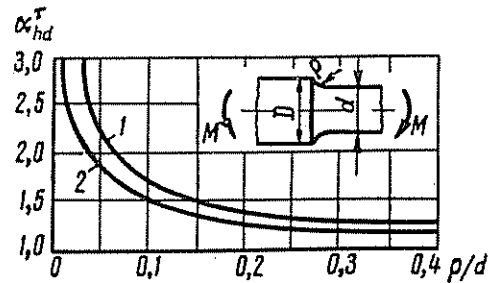
$$a/d = 0,05 \div 0,25; \tau = M_{xo}/W_{xo} \text{ khi } d = 30 \div 50\text{mm}$$



Hình 6 - Đồ thị hệ số hiệu dụng của ứng suất tập trung đối với những trục bậc khi xoắn với tỷ số

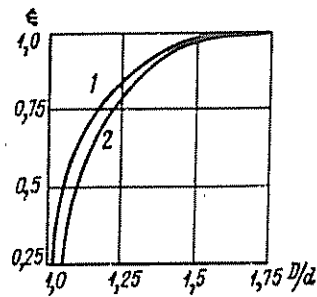
$D/d = 2$; khi $d = 30 \div 50\text{mm}$

1. Đối với thép có $\sigma_b = 120\text{kG/mm}^2$ (1200MN/m^2)
2. Đối với thép có $\sigma_b = 50\text{kG/mm}^2$ (500MN/m^2)



Hình 7 - Đồ thị hệ số hiệu dụng của ứng suất tập trung của những trục bậc khi uốn với tỷ số $D/d = 2$, và $d = 30 \div 50\text{mm}$.

1. đối với thép có $\sigma_b = 120\text{kG/mm}^2$ (1200MN/m^2)
2. đối với thép có $\sigma_b = 50\text{kG/mm}^2$ (500MN/m^2)



Hình 8 - Đồ thị của những hệ số điều chỉnh với tỷ số $D/d < 2$ cho hình 6 và 7 (1. uốn; 2. xoắn).

Nếu $D/d < 2$, thì α_{hd} được xác định theo công thức $\alpha_{hd} = 1 + \xi(\alpha_{hd_0} - 1)$, trong đó α_{hd_0} - là hệ số tìm từ đồ thị của hình 6 hoặc 7.

PHỤ LỤC 6

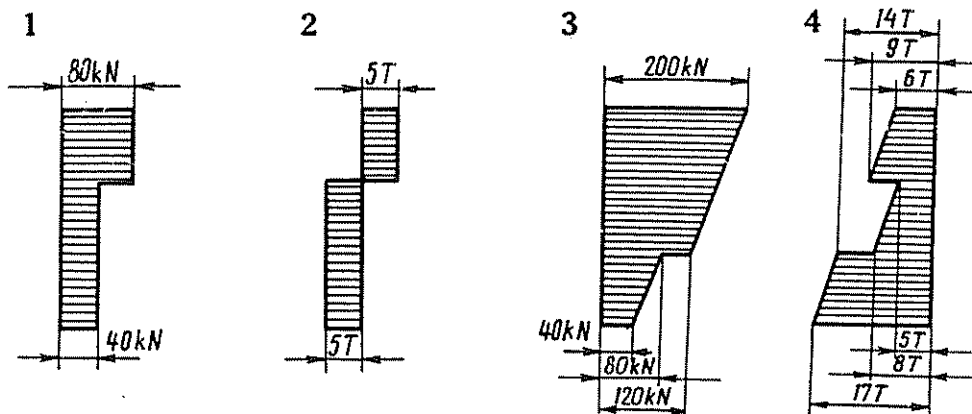
**Những đơn vị đo thường gặp trong sách
hệ đơn vị quốc tế (SI)**

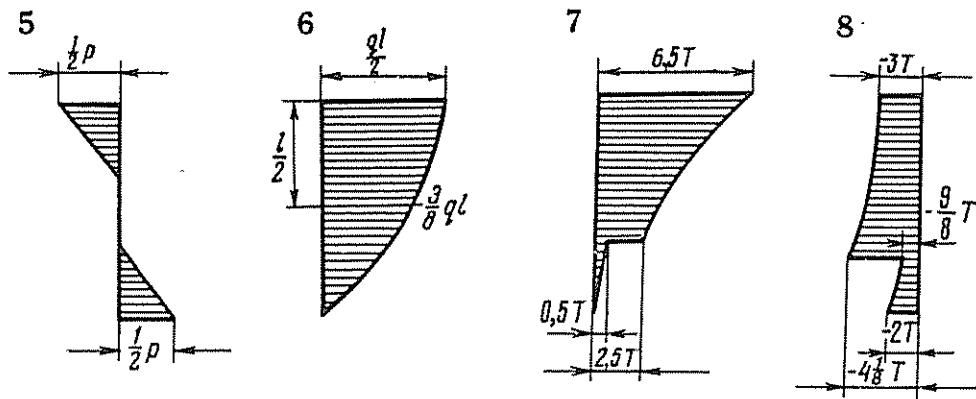
- m, kg, s – đơn vị chiều dài, khối lượng, thời gian, (là những đơn vị cơ bản).
mét, kilôgam, giây.
- cm, mm – đơn vị đo chiều dài, centimét, milimét.
- N – đơn vị lực là Niuton: $1N \approx 1/9,81kG \approx 0,102kG$.
- kN, MN, daN – đơn vị bội số lực – ki lô niuton, mega niuton đêca niuton (daN):
 $1kN = 10^3N$, $1MN = 10^6N$, $1daN = 10N = 1,02kG$.
- N/m^2 – đơn vị ứng suất và áp suất: $1N/m^2 \approx 1,02 \cdot 10^{-5}kG/cm^2$.
- MN/m^2 – đơn vị bội số của ứng suất và áp suất.
 $1MN/m^2 = 10^6N/m^2 = 10daN/cm^2 \approx 10,2kG/cm^2$.
- daN/cm^2 , daN/mm^2 – đơn vị ứng suất và áp suất ngoài hệ
 $1daN/cm^2 = 10^5N/m^2 = 1bar \approx 1,02kG/cm^2$.
 $1daN/mm^2 = 10^7N/m^2 \approx 102kG/cm^2 \approx 1,02kG/mm^2$.
- jun – đơn vị công – jun: $1jun = 1/9,81kGm \approx 0,102kGm$.
- W, kW – đơn vị công suất – Oát, kilôoát.
 $1kW \approx 102kG \cdot m/s \approx 1,36$ mã lực.

Hệ đơn vị kỹ thuật (MKS)

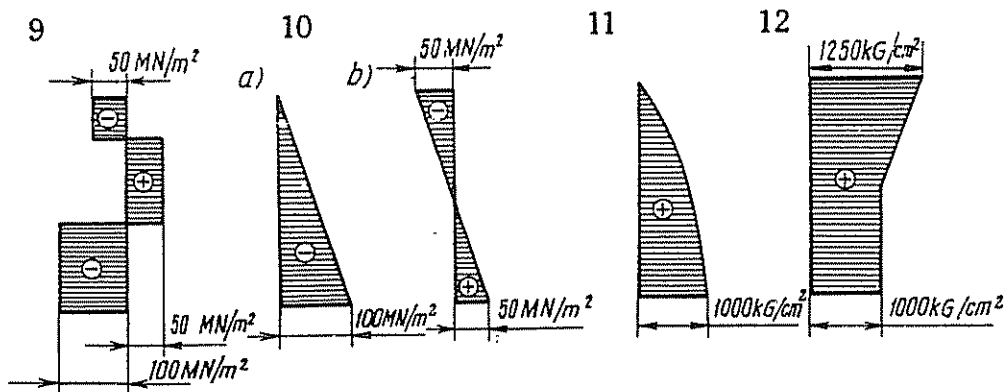
- m, kG, s – mét, kilôgam lực, giây: $1kG \approx 9,81N \approx 0,981daN$.
- T – tấn-lực: $1T = 10^3kG \approx 9,81 \cdot 10^3N = 9,81kN$.
- kG/cm^2 – đơn vị ứng suất và áp suất: $1kG/cm^2 \approx 9,81 \cdot 10^4N/m^2 = 0,981MN/m^2 = 0,981daN/cm^2$.
- bar – đơn vị áp suất ngoài hệ
 $1bar = 10^5N/m^2 = 1daN/cm^2 \approx 1,02kG/cm^2$
- kGm – đơn vị công: $1kGm \approx 9,81jun$.
- $m \cdot l$ – đơn vị công suất ngoài hệ – mã lực:
 1 mã lực $= 75kG \cdot m/s \approx 0,736kW$

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP





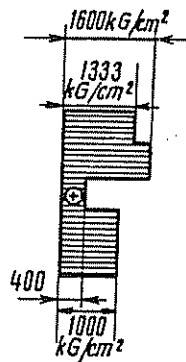
9. — 0,15mm; 2,75 jun. 10. a) 0,5mm; 3,33 jun; b) 0; 0,833 jun. 11. 1mm; 120kG . cm
 12. ~ 0 531mm; ~ 56,8kG . cm. 13. 0,833mm; ~ 76 7kG . cm. 14. ~ 1,067mm; ~ 282,7kG . cm
 15. ~ 0,87mm; ~ 4,35jun. 16. ~ 1,36mm; ~ 27,2 jun. 17. $\frac{4\mu}{E} \frac{P}{\pi d^2}$ 18. $\frac{Ea}{\rho} \Delta b$.
 19. 0,09mm²; 0,003mm.



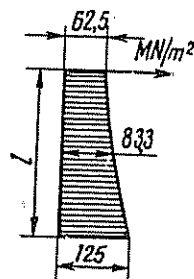
13



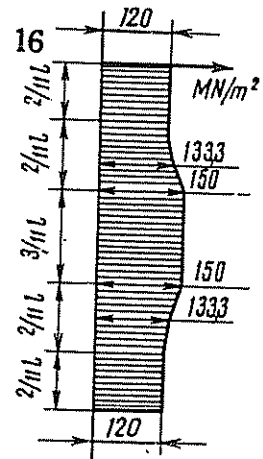
14



15

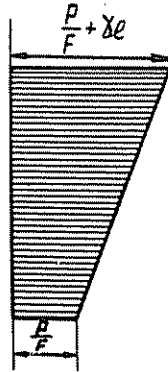


16

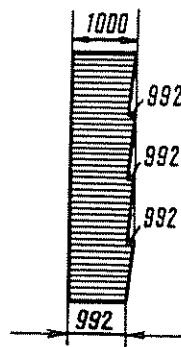


20. $\frac{4}{3} \cdot \frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{P}{\pi d^2}$. 21. $3 \frac{1-2\mu}{E} Pl$. 22. $2 \cdot \frac{1-2\mu}{E} Pl$. 23. $\frac{2}{3} \cdot \frac{(1-2\mu)}{E} Pl$.
 24. 3750kG. 25. $\delta_y = \frac{Pa}{8EF} (1+3\sqrt{3})$; $\delta_x = \frac{Pa}{8EF} (3-\sqrt{3})$; $\sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{P}{F}$;
 $\sigma_{II} = P/2F$. 26. $\delta_y \sim 1,36 \text{ mm}$; $\delta_x \approx 0,53 \text{ mm}$; ~ 140 ; $\sim 470 \text{ kG/cm}^2$. 27. $(2P + \sqrt{2} qa) a/EF$;
 $(P + \sqrt{2} qa) / \sqrt{2} F$; $P/(\sqrt{2} F)$. 28. $\frac{Pa}{EF \cos^2 \beta} (\sin^2 \beta + 2)$; $\frac{P}{F} \cdot \lg \beta$; $P/(F \cos \beta)$. 29. $\delta_x =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{Pa}{EF}$; $\delta_y = \frac{Pa}{2EF} (2 + \sqrt{2})$; $P/\sqrt{2} F$; P/F . 30. $\delta_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{Pa}{EF_1}$; $\delta_y = 3Pa/EF_1$;
 P/F_1 ; $\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{F_1}$. 31. $(2P + qa)a/(4EF)$; $(2P + qa)/4F$. 32. $\delta_x = \delta_y = Pa/EF$; P/F .
 33. $Pa/E_2 F_2$; $P/2F_2$. 34. $10Pa/E_1 F_1$; $2P/F_1$; $4P/F_1$. 35. $\delta_x \approx 5,4 \text{ mm}$; $\delta_y \approx 1,8 \text{ mm}$; ~ 900 ;
 ~ 1800 ; $\sim 1200 \text{ kG/cm}^2$. 36. $8,5 \text{ mm}$; 1000 ; 500 kG/cm^2 . 37. $3,9 \text{ mm}$; 30 ; 150 MN/m^2 . 38. $\delta_y =$
 $= 0,7 \text{ mm}$; $\delta_x = 0,35 \text{ mm}$; 80 ; 40 ; 20 MN/m^2 . 39. $\delta_y = 2,125 \text{ mm}$; $\delta_x = 0,08 \text{ mm}$; 100 ; 150 ;
 75 MN/m^2 . 40. $\sim 5,6 \text{ mm}$; ~ 142 ; 164 MN/m^2 . 41. $P/(\sqrt{3} [\sigma])$; $P/(2\sqrt{3} [\sigma])$; $P/2[\sigma]$. 42. $P/[\sigma]$.
 43. $3P/(2[\sigma])$; $P/[\sigma]$. 44. $7qa/2[\sigma]$; $7\sqrt{2} qa/4[\sigma]$. 45. 5 cm^2 . 46. $\sim 5,33 \text{ cm}^2$. 47. $4,9 \text{ cm}^2$; 8 cm^2 .
 48. $F_1 = F_2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{P}{[\sigma]}$; $F_3 = \frac{7}{4} \cdot \frac{P}{[\sigma]}$; 49. 9 kN . 50. 64 kN . 51. $176,5 \text{ kG}$. 52. $2,07 \text{ m}$.
 53. 894 kG/cm^2 . 54. $d = \sqrt{\frac{P}{\pi([\sigma] - \gamma l)}}$; $\Delta a = \frac{l}{4E} \left(\frac{2P}{F} + \gamma l \right)$. 55. $\Delta a = \frac{a}{E} \times$
 $\left[\frac{P}{F} + \gamma \left(l - \frac{a}{2} \right) \right]$. 56. 3 m^2 ; 617 m^2 ; $\sim 0,4 \text{ cm}$. 57. 2500 cm^2 ; 2620 cm^2 ; $19,6 \text{ T}$. 58. 600 ;

55



56



- 800; -800 kG/cm^2 . 59. -277 ; 300 ; 262 kG/cm^2 . 60. 130 ; -20 ; -120 ; 5 kG/cm^2 . 61. $\max \sigma_1 =$
 $= \frac{22}{7} \gamma a$; $\min \sigma_{III} = -\frac{31}{14} \gamma a$. 62. ~ 1040 ; $\sim 1560 \text{ kG/cm}^2$. 63. ~ 1164 ; $\sim 875 \text{ kG/cm}^2$.
 64. ~ 61 ; $\sim 87 \text{ kG/cm}^2$. 65. $\sim 70,7$; $\sim 141,4 \text{ MN/m}^2$. 66. 120 MN/m^2 . 67. ~ 10 ; $\sim 7,1 \text{ MN/m}^2$.
 68. 25 ; 1000 kG/cm^2 . 69. ~ 390 ; $\sim 312 \text{ kG/cm}^2$; 70. ~ 903 ; ~ 903 ; $\sim 452 \text{ kG/cm}^2$.
 71. $\sim 33 \text{ mm}$. 72. $\sim 35,7 \text{ cm}$. 73. $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{[\sigma]}$. 74. ~ 739 ; $\sim 261 \text{ kG/cm}^2$. 75. 300 ;

200kG/cm². 76. ~ 1091; ~ 545kG/cm². 77. $\frac{\Delta E}{5a} \sin\beta$; $\frac{2\Delta E}{5a} \sin\beta$. 78. ~ 16,4; ~ 15,4; ~ 16,4MN/m². 79. 20; 40; 60MN/m². 80. ~ 764; ~ 917; ~ 1070kG/cm². 81. ~ 87; ~ 302kG/cm². 82. ~ 172; ~ 98; 1000kG/cm². 83. ~ 596; ~ 43kG/cm². 84. 35MN/m². 85. ~ 513; ~ 726; 1025kG/cm². 86. ~ 6; 10,4; ~ 10,4MN/m². 87. ~ 106MN/m². 88. 800; 600; 1400kG/cm²; 120; 200; 160kG/cm². 89. 800; 450kG/cm²; 144; 192kG/cm². 90. 500; 1500kG/cm²; 576; 192kG/cm². 91. 400; 450; 550kG/cm²; 288; 432; 144kG/cm². 92. 50; 37,5; 75; 62,5MN/m²; 48; 36; 12; 6MN/m². 93. 130; 10; 50MN/m²; 16; 32; 16MN/m². 94. ~ 19,1T; 27,5T; ~ 671; 322; 168kG/cm². 95. $P = P' \approx 11,3T$; $\sigma_{II} \approx 147kG/cm^2$; $\sigma_{III} = \sigma_{III'} \approx 93kG/cm^2$. 96. ~ 9,06T; ~ 11,53T; ~ 220; ~ 294; 280kG/cm². 97. ~ 7,14T; ~ 8,74T; ~ 93; 93; 54kG/cm². 98. 5,2T; 6,4T; 72kG/cm². 99. ~ 63kN; ~ 82kN. 100. 2,05T; 2,8T; ~ 300; 225kG/cm². 101. ~ 28,3kN; 32kN; ~ 16,3; ~ 8,1; ~ 5,1MN/m². 102. 1000kG/cm²; $q = 100kG/cm$. 103. $\sigma_I = \frac{2E}{D} \delta t g \alpha$; $\frac{2E}{(D + b_1)} \delta t g \alpha$; $q \approx \frac{4\alpha \delta t g \alpha}{D^2} (b_1 E_1 + b_2 E_2)$. 104 a) 217; 290kG/cm²; 17,4kG/cm²; b) 369°. 105. 60kG/cm². 106. $E\left(\alpha \Delta t - \frac{\Delta}{D}\right)$. 107. $\sigma_I = \sigma_{III} = 1333kG/cm^2$.

Bài tập số	τ_1	τ_2	τ_3	σ_α và τ_α trên các diện tích song song với trục 1, 2, 3, kG/cm ²						P_0	σ_0	τ_0
	kG/cm ²			a) trục 1		b) trục 2		c) trục 3		kG/cm ²		
				σ_α	τ_α	σ_α	τ_α	σ_α	τ_α			
108	0	± 600	± 600	0	0	300	520	900	520	694	400	566
109	± 600	± 600	0	- 300	+ 520	- 900	520	0	0	694	- 400	566
110	± 200	± 600	± 400	300	173	300	520	1000	346	730	533	500
111	± 500	± 750	± 250	- 250	+ 433	- 625	649	375	216	645	- 167	624
112	± 100	± 300	± 200	- 450	87	- 450	260	- 100	173	416	- 333	249
113	± 400	± 400	0	600	346	200	346	800	0	654	533	377
114	0	± 700	± 500	-1000	0	- 750	433	- 250	433	817	- 667	471
115	± 100	± 500	± 200	350	87	350	260	700	173	529	467	249
116	± 400	± 300	± 300	0	346	- 250	606	650	260	589	133	573
117	± 200	± 500	± 300	- 300	173	- 350	433	250	260	432	- 133	411
118	± 100	± 300	± 200	- 850	87	- 850	260	- 500	173	775	- 733	249
119	± 450	± 450	0	375	390	- 75	390	600	0	519	300	424

Bài tập số	τ_1	τ_2	τ_3	σ_a và τ_a trên các diện tích song song với trục 1, 2, 3, MN/m ²						P_0	σ_0	τ_0
	MN/m ²			a) trục 1		b) trục 2		c) trục 3		MN/m ²		
				σ_a	τ_a	σ_a	τ_a	σ_a	τ_a			
120	0	± 50	± 50	- 80	0	- 55	43,3	- 5	43,3	66,5	-46,7	47,1
121	0	0	0	50	0	50	0	50	0	50	50	0
122	0	0	0	- 70	0	- 70	0	- 70	0	70	-70	0

Bài tập số	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	$\Delta V/V$	U_0	$U_{\text{đd}}$	U_n
	%				kGcm/cm ³		
108'	0,060	- 0,018	- 0,018	0,024	0,36	0,312	0,018
109'	0,018	0,018	- 0,06	- 0,024	0,36	0,312	0,048
110'	0,054	0,002	- 0,024	0,032	0,328	0,243	0,085
111'	0,04	0,0075	- 0,0575	- 0,010	0,388	0,379	0,009
112'	0,015	- 0,011	- 0,024	- 0,020	0,094	0,061	0,033
113'	0,028	0,028	- 0,024	0,032	0,224	0,139	0,085
114'	0,03	- 0,035	- 0,035	- 0,04	0,350	0,217	0,133
115'	0,031	0,005	- 0,008	0,028	0,126	0,061	0,065
116'	0,046	0,007	- 0,045	0,008	0,326	0,321	0,005
117'	0,032	- 0,007	- 0,033	- 0,008	0,170	0,165	0,005
118'	0,007	- 0,019	- 0,032	- 0,044	0,222	0,061	0,161
119'	0,0255	0,0255	- 0,033	0,018	0,202	0,175	0,025

Bài tập số	ε_1	ε_2	ε_3	$\Delta V/V$	U_o	U_o^{hd}	U_o^{lt}
	%				J/m ³		
120'	0,034	- 0,031	- 0,031	- 0,028	$28,2 \cdot 10^3$	$21,7 \cdot 10^3$	$6,5 \cdot 10^3$
211'	0,01	0,01	0,01	0,03	$7,5 \cdot 10^3$	0	$7,5 \cdot 10^3$
122'	- 0,014	- 0,014	- 0,014	- 0,042	$14,7 \cdot 10^3$	0	$14,7 \cdot 10^3$

Bài tập số	σ_{tdI}	σ_{tdII}	σ_{tdIII}	σ_{tdIV}	σ_{tdV}
	kG/cm ²				
108''	1200	1200	1200	1200	1200
109''	—	360	1200	1200	600
110''	1200	1080	1200	1060	1200
111''	500	800	1500	1320	1000
112''	—	300	600	530	300
113''	800	560	800	800	800
114''	—	600	1000	1000	500
115''	800	620	600	530	700
116''	800	920	1400	1230	1100
117''	400	640	1000	870	700
118''	—	140	600	530	100
119''	600	510	900	900	750

Bài tập số	σ_{IdI}	σ_{IdII}	σ_{IdIII}	σ_{IdIV}	σ_{IdV}
	MN/m ²				
120''	20	68	100	100	60
121''	50	20	0	0	25
122''	-	-	0	0	0

123. a) $6,6 \cdot 10^{-5} \text{mm}^2/\text{kG}$; $1,51 \cdot 10^4 \text{kG}/\text{mm}^2$.

b) $9,6 \cdot 10^{-5} \text{mm}^2/\text{kG}$; $1,04 \cdot 10^4 \text{kG}/\text{mm}^2$.

c) $14,7 \cdot 10^{-5} \text{mm}^2/\text{kG}$; $0,685 \cdot 10^4 \text{kG}/\text{mm}^2$.

124. 0 ; $-\mu p$; $-p$; $-\frac{1-\mu^2}{E} pa$; $\frac{\mu(1+\mu)}{E} pb$. 125. 0 ; $-\frac{4\mu_2 p E_1 F_1}{(E_2 ab + 4E_1 F_1)}$; $-p$;
 $\frac{(1-2\mu)p(4\mu_2 E_1 F_1 + E_2 ab + 4E_1 F_1)}{E_2(E_2 ab + 4E_1 F_1)}$. 126. $\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu p}{(1-\mu) + \frac{d}{d_1 - d} \cdot \frac{E}{E_1}}$;

$\sigma_3 = -p$. 127. $\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{\mu p}{1-\mu}$; $\sigma_3 = -p$; $\Delta a = \frac{(\mu + 2\mu^2 - 1)pa}{E(1-\mu)}$;

$U = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)p^2}{2E(1-\mu)}$. 128. $\sigma_1 = \sigma_2 = 1000 \text{kG}/\text{cm}^2$; $\sigma_3 = 0$; $\tau_1 = \tau_2 = 500 \text{kG}/\text{cm}^2$; $\tau_3 =$

$= 0$; $\Delta D = 0,35 \text{mm}$. 129. $2,5 \text{mm}$. 130. $\frac{pD}{2[\sigma] \cos \alpha}$; $\frac{pD^2 t g \alpha}{8[\sigma]}$. 131. 15mm ; $11,1 \text{cm}^2$.

132. $\sigma_1^c = \sigma_2^c = 75 \text{kG}/\text{cm}^2$; $\sigma_3^c = 0$ (đối với mặt trong $\sigma_3^c = -0,3 \text{kG}/\text{cm}^2$); $\sigma_1^{tr} = 100 \text{kG}/\text{cm}^2$;
 $\sigma_2^{tr} = 83 \text{kG}/\text{cm}^2$. $\sigma_3^{tr} = 0$ (đối với mặt trong $\sigma_3^{tr} = -0,2 \text{kG}/\text{cm}^2$); $\sigma_8 = 67 \text{kG}/\text{cm}^2$.

133. $\frac{\gamma y t g \alpha}{2\delta \cos \alpha} \left(h - \frac{2}{3} y \right)$; $\frac{\gamma y (h-y) t g \alpha}{\delta \cos \alpha}$; $\frac{\gamma y (h-y) t g \alpha}{\delta \cos \alpha}$ khi $0 \leq y \leq \frac{3}{4} h$. 134. $69,3$;

$40 \text{MN}/\text{m}^2$. 135. 0 ; $\pm 80 \text{MN}/\text{m}^2$. 136. 50 ; 70 ; $20 \text{MN}/\text{m}^2$; $0,625 \cdot 10^{-3}$; $0,785 \cdot 10^{-3}$; $0,25 \cdot 10^{-3}$;

137. 20 ; 100 ; 80 ; $84,9 \text{MN}/\text{m}^2$; $0,25 \cdot 10^3$; $1,25 \cdot 10^{-3}$; 10^{-3} . $1,061 \cdot 10^{-3}$. 138. 500 ; 0 ;

$-500 \text{kG}/\text{cm}^2$; $0,625 \cdot 10^{-3}$; $0,27 \cdot 10^{-3}$. 139. a) $12,5 \text{kG} \cdot \text{cm}$; b) $0,86 \text{kG} \cdot \text{cm}$. 140. $\sigma_1 =$

$= -\sigma_3 = 2M_{x0}/(\pi D_1^2 \delta)$; $\sigma_2 = 0$; $[M_{x0}] \approx 157 \text{kGm}$; $[M_{x0}]_{ch} \approx 236 \text{kGm}$. 141. $d_0 \approx 1,59 \text{cm}$;

$d \approx 1,35 \text{cm}$; $\delta \approx 0,74 \text{cm}$; $b \approx 1,35 \text{cm}$. 142. $d \approx 2,8 \text{cm}$; $a = 3 \text{cm}$; $h = 6 \text{cm}$; $b = 3,75 \text{cm}$;

$c = 1 \text{cm}$; $f = 1,25 \text{cm}$; $k = 1,25 \text{cm}$. 143. $d = 4 \text{cm}$; $d_1 = 5,6 \text{cm}$; $d_2 \approx 6,9 \text{cm}$; $t_1 \approx 2 \text{cm}$; $t_2 \approx 1,4 \text{cm}$.

144. $d \approx 3,1 \text{cm}$; $d_1 \approx 4,37 \text{cm}$; $a \approx 1,06 \text{cm}$; $d_2 \approx 4,88 \text{cm}$; 145. $b \approx 4,87 \text{cm}$; $a \approx 5,97 \text{cm}$;

$\delta = 1,99 \text{cm}$; $h \approx 7,97 \text{cm}$; $c \approx 2,66 \text{cm}$; $l \approx 2,99 \text{cm}$; 146. $a \approx 3,16 \text{cm}$; $d \approx 1,06 \text{cm}$; $c \approx 1,19 \text{cm}$;

$b \approx 9,46 \text{cm}$; $l \approx 11,56 \text{cm}$. 147. $a \approx 3,16 \text{cm}$; $c \approx 1,06 \text{cm}$; $b_1 \approx 3,87 \text{cm}$; $b \approx 5 \text{cm}$; $d \approx 0,87 \text{cm}$.

148. $d \approx 3,57 \text{cm}$; $\delta \approx 2,1 \text{cm}$; $b \approx 21,4 \text{cm}$; $l \approx 13,1 \text{cm}$. 149. $d \approx 3,25 \text{cm}$; $\delta_1 \approx 1,92 \text{cm}$; $\delta_2 \approx$

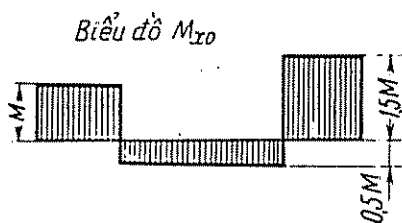
$\approx 1,44 \text{cm}$; $b \approx 9,75 \text{cm}$. 150. $z_c = 1,5a$; $y_c = 4a$; 151. $z_c = 2a$; $y_c = 3,9a$; 152. $z_c = 2a$;

$y_c = 3,71a$. 153. $z_c = 0,5a$; $y_c = \frac{(\pi - \alpha - \frac{2}{3} \sin \alpha) a}{\pi - \alpha}$. 154. $z_c = 0,5a$; $y_c = 0,6b$. 155. $z_c =$

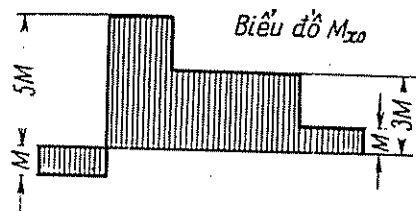
$= 17,79 \text{cm}$; $y_c = 11,88 \text{cm}$. 156. $\frac{4}{15} b^4$. 157. $\frac{7}{96} a^4$; $\frac{5}{96} a^4$; 158. $I_z = I_y = 7869 \text{cm}^4$;

$I_{xy} = 0$. 159. $11,9a^4$; $12,4a^4$; 160. $5,407a^4$; $5,382a^4$. 161. $0,726R^4$; $0,678R^4$. 162. $5,25a^4$; $1,57a^4$. 163. 5791cm^4 ; 11591cm^4 .

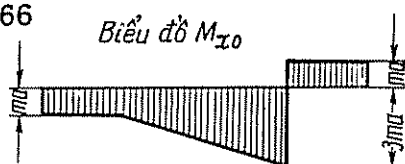
164



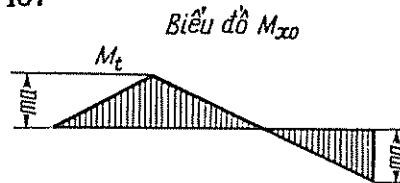
165



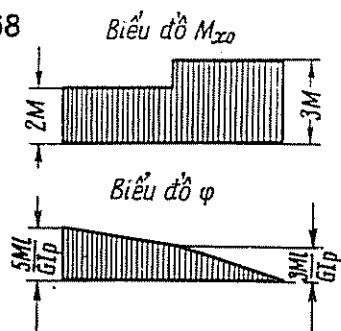
166



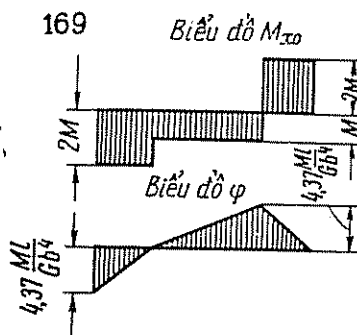
167



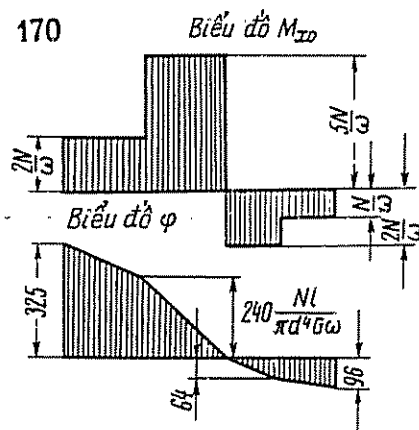
168



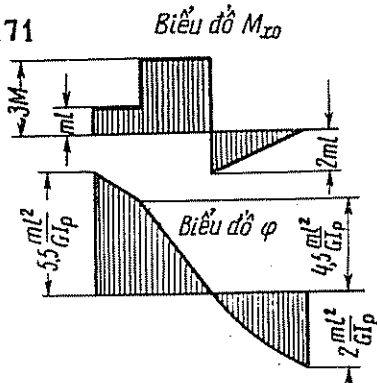
169



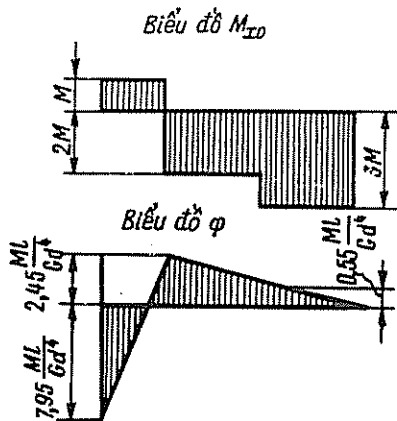
170



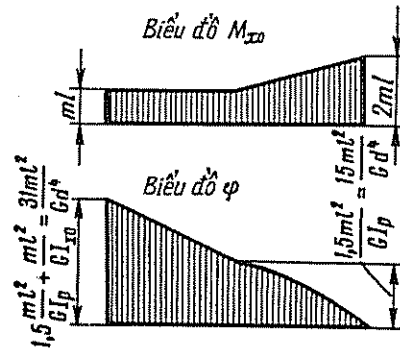
171



172



173



168. $48M/\pi d^3$; $208M^2l/G\pi d^4$. 169. $4,06M/b^3$; $11M^2l/Gb^4$. 170. $80V/\pi\omega d_3 N/m^2$; $1552N^2l/\pi\omega^2 Gd^4$ jun. 171. $15,3ml/d^3$; $262m^2l^3/Gd^4$. 172. $16M/\pi d^3$; $7,85M^2l/Gd^4$. 173. $10ml/d^3$; $18,85m^2l^3/Gd^4$. 174. $\sim 4,07cm$. 175. $\sim 4cm$. 176. $D \approx 6,84cm$; $d \approx 3,42cm$. 177. $\sim 3,64cm$. 178. $d_1 \approx 2,94cm$; $d_2 \approx 4cm$; $\varphi = 9,2^\circ$. 179. $d_1 = d_3 \approx 2,94cm$; $d_2 \approx 3,72cm$; $\varphi \approx 1,05 \cdot 10^{-2} rad$. 180. $a \approx 2,88cm$; $d \approx 2,94cm$; $\varphi \approx 0,41^\circ$. 181. $d_1 \approx 8cm$; $d_2 \approx 5,9cm$; $\varphi \approx 2,06^\circ$. 182. $d \approx 2,5cm$; $\varphi \approx 0,98^\circ$. 183. $d \approx 2,5cm$; $\varphi \approx 6,7'$. 184. $490Vg/ph$; $126kG/cm^2$. 185. ~ 5 mã lực; $127kG/cm^2$. 186. $\sim 4,48kGm$; $\sim 105kG/cm^2$. 187. $\sim 354kG/cm^2$; $2,38^\circ$. 188. $\sim 70kG \cdot m$; $\sim 0,18^\circ$. 189. $\sim 363N \cdot m$; $\sim 77,2MN/m^2$; $\sim 3 \cdot 10^{-2} rad$. 190. $81,25kG \cdot m$; $\sim 318kG/cm^2$; $\sim 1,64^\circ$. 191. $\sim 24,6kW$; $1,41 \cdot 10^{-2} rad$. 192. $\sim 194Vg/ph$; $\sim 1,18^\circ$. 193. $\sim 448kG/cm^2$; $\sim 2^\circ$. 194. $400kG/cm^2$. 195. 7; 19; 1/3; 2/3. 196. $\sim 35kG/cm^2$; $\sim 2^\circ$. 197. $\sim 51,3N \cdot m$; $\sim 27,5MN/m^2$. 198. $78,5kG$; 5mm (hướng lên); 30mm (hướng xuống). 199. ~ 425 ; ~ 123 . 200. $\sim 0,98$;

$$\sim 1,22. 201. \sim 693kG/cm^2; \sim 400kG/cm^2. 202. d = \sqrt[3]{\frac{32M}{3\pi[\tau]}}; \varphi_A = \frac{180a[\tau]}{\pi \cdot G} \sqrt[3]{\frac{3\pi[\tau]}{32M}}$$

203. $\sim 3,94cm$; $\sim 0,48^\circ$. 204. $\sim 1,97cm$; 0. 205. $\sim 2,17kN \cdot m$; $\sim 1,48 \cdot 10^{-2} rad$; $\sim 16,1jun$. 206. $\sim 126kGm$; $\sim 0,215^\circ$; $\sim 23,5kGcm$. 207. $\sim 573kG/cm^2$; $\sim 0,41^\circ$. 208. $\sim 780kG/cm^2$. $\sim 1,19^\circ$. 209. $\sim 33,3MN/m^2$; $\sim 6,2 \cdot 10^{-3} rad$. 210. $b \approx 1,28a$. 211. $270kG/cm^2$. 212. $\sim 390N \cdot m$; $\sim 2,81 \cdot 10^{-3} rad$. 213. $\sim 12,7mm$; ~ 0 . 214. $\sim 3,17cm$; $\sim 5,8 \cdot 10^{-3} rad$. 215. $\tau_{max} =$

$$M \frac{d_i}{2 \sum_{i=1}^n I_{\rho_i}}. 216. \sim 306; \sim 318kG/cm^2. 217. \sim 750kG/cm^2; \sim 37kG/cm^2; \sim 1,14^\circ. 218.$$

$$\sim 1000kG/cm^2; \sim 100kG/cm^2; 219. \tau_{max} \approx 0,052 \frac{M}{\pi d^3}; \sigma_1 \approx 3,3M/\pi d^3; \sigma_{11} \approx 0,45 \frac{M}{\pi d^3};$$

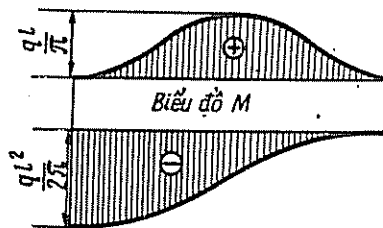
$$\varphi_{AB} \approx 0,57 \frac{Ma}{G\pi d^4}. 220. \sim 402kG/cm^2; \sim 134kG/cm^2; \sim 0,213^\circ. 221. \sim 468; \sim 742$$

$$\sim 883kG/cm^2; \sim 2,5^\circ; \sim 2,13^\circ.$$

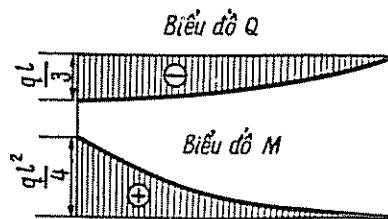
Những bài tập có dấu sao (*) trả lời tiếp ở biểu đồ Q và M

Bài tập số	Q_{max}	M_{max}	Bài tập số	Q_{max}	M_{max}	Bài tập số	Q_{max}	M_{max}
223	$ql/4$	$ql^2/6$	248	qa	qa^2	262*	$2qa$	$1,167qa^2$
224*	ql/π	$ql^2/2\pi$	249	$2qa$	qa^2	263	$3qa/4$	$qa^2/2$
225*	$ql/3$	$ql^2/4$	250	$2P$	$Pl/3$	264	$qa/2$	$qa^2/8$
227*	$ql/12$	$ql^2/(12\sqrt{3})$	252	$0,462ql$	$0,0535ql^2$	265	$4T$	$3T.m$
228*	$ql/4$	$\sqrt[3]{2} ql^2/32$		(khi $a = 0,21l$)		266	qa	qa^2
229*	ql/π	ql^2/π^2	253	qa	$\frac{3}{2} qa^2$	267	P	Pa
230*	$ql/2\pi$	$ql^2/4\pi^2$	254	$\frac{3}{2} P$	$Pl/6$	268	ql	$ql^2/2$
242	$\frac{qb(l+a)}{2l}$	$qb^2(l+a)^2/8l^2$	255	$ql/2$	$ql^2/16$	269*	P	Pa
				(Khi $a = \frac{\sqrt{2}}{4} l$)		270*	P	Pa
343	$4T$	$4Tm$	256	$\frac{5}{4} qa$	qa^2			
244	$3qa/2$	$17qa^2/16$	258	$2,25qa$	$3,531qa^2$			
245	$\frac{7}{6} qa$	$\frac{5\sqrt{5}}{9} qa^2$	259*	$0,21ql$	$0,0128ql^2$			
247	$\frac{3}{4} qa$	$qa^2/4$		(khi $a = 0,275l$)				

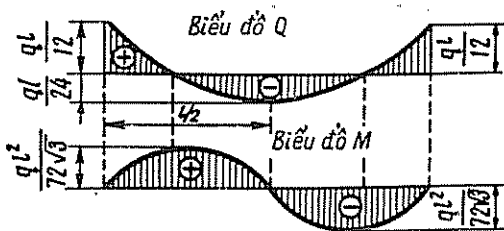
224 Biểu đồ Q



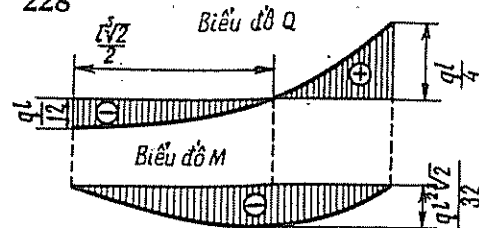
225

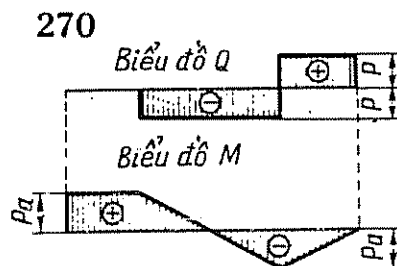
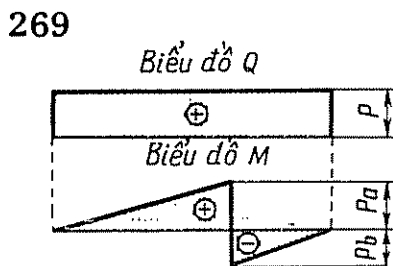
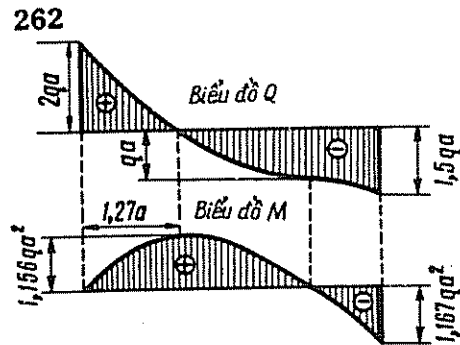
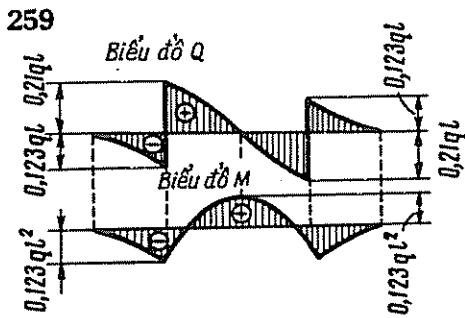
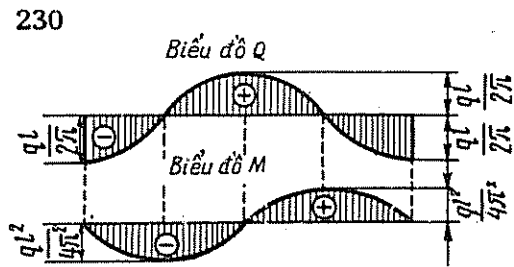
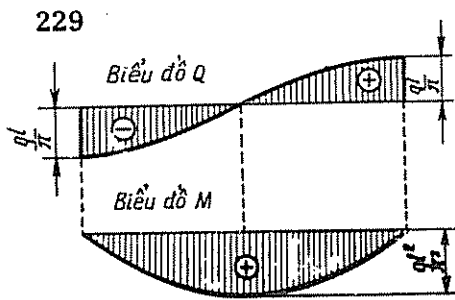


227

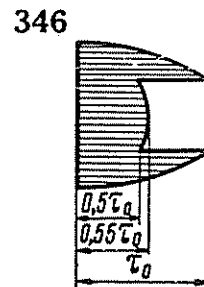
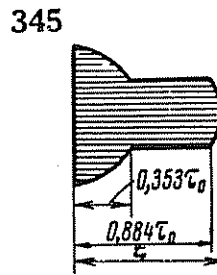
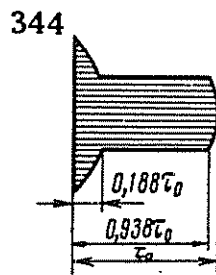
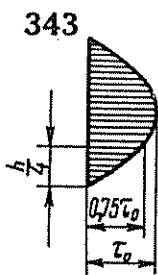


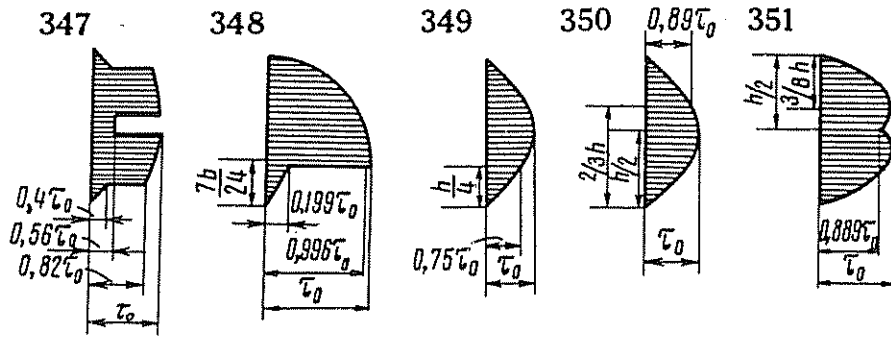
228





286. $0,082H^3$. 287. $0,0183a^3$. 288. $\frac{13}{60} b^3$. 289. $\frac{a^3}{6} (1 - 1,5k^2 - 4k^4)$. 290. 229cm^3 .
 291. $0,0597a^3$. 292. $0,0706a^3$. 293. $359,3\text{cm}^3$. 294. 79cm^3 . 295. $0,0425a^3$. 296. $0,147a^3$.
 297. $0,74R^3$. 298. 205cm^3 . 299. $\sim 737\text{cm}^3$. 300. $\sim 663\text{cm}^3$. 301. $0,560\text{cm}^3$. 302. $0,470\text{cm}^3$.
 303. $1,865\text{cm}^3$. 304. $0,780\text{cm}^3$. 305. $1,478\text{cm}^3$. 306. 2770cm^3 . 307. 1196kG/cm^2 . 308.
 $91,7\text{kG/cm}^2$. 309. 865; -432kG/cm^2 . 310. $\frac{4\sqrt{3}M}{\pi d^3}$. 311. $\sim 3,83Pa/d^3$; 0. 312. $12\sigma_0$. 313.
 $\sim 0,0894\sigma_0$. 314. $a = 5\text{cm}$. 315. $b = 19\text{cm}$. 316. $N^\circ 24a$. 317. $D = 29,3\text{cm}$. 318. $b = 13,4\text{cm}$.
 319. $n = 4$ dầm. 320. $N^\circ 33$. 321. $N^\circ 14a$. 322. $N^\circ 45$. 323. $a = 3,42\text{cm}$. 324. 16cm . 325.
 $N^\circ 50$. 326. $a = 1\text{cm}$. 327. $b = 20\text{cm}$. 328. $h_1 = 177,7\text{cm}$; $h_2 = 38,3\text{cm}$. 329. $a = 1\text{cm}$. 330.
 $P = 1067\text{kG}$. 331. $P = 1400\text{kG}$. 332. $P = 453\text{kG}$. 333. $q = 330\text{kG/m}$. 334. $P \approx 2,14\text{T}$. 335.
 $P \approx 2,16\text{T}$. 336. $M = 1,92\text{kN.m}$. 337. $M \approx 3,44\text{kN.m}$. 338. $q = 9,36\text{kNm}$. 339. $q = 3,75\text{kN/m}$.
 340. $q = 38,4\text{kG/cm}$. 341. $P = a^2\sigma_0$. 342. $P = 1\text{T}$.





352. $d = 8\text{cm}$; $\tau_{\max} = 16\text{kG/cm}^2$. 353. $h = 24,2\text{cm}$; $\tau_{\max} = 5,6\text{kG/cm}^2$. 354. $N^{\circ}27a$; $\tau_{\max} = 125\text{kG/cm}^2$. 355. $l = 3\text{m}$; $\tau_{\max} = 60,5\text{kG/cm}^2$. 356. $2,79\text{MN/m}^2$. 357. $H \approx 8,0\text{cm}$; $\tau_{\max} = 1,82\text{MN/m}^2$. 358. $1,2a$. 359. $\sim 6,65\text{cm}$. 360. $\sim 1,034a$. 361. $\sim 0,702a$. 362. $-0,5827r$. 363. $-0,762a$. 364. 1745 ; -417kG/cm^2 ; $\alpha = 26^{\circ}$. 365*. $11,3$; $-120,3\text{kG/cm}^2$. 366*. 370; -5kG/cm^2 . 367*. 26 ; $-0,4\text{kG/cm}^2$. 368. $P = 49\text{T}$. 369. $N^{\circ}24$. 370. $N^{\circ}40$. 371. $b = 15,7\text{cm}$. 372. $N^{\circ}55$. 373. $N^{\circ}50$. 374. $1,59$. 375. $1,4$. 376. 3 ; $377. 1,28$. 378. $1,70$. 379. 2 . 380. $b = 20\text{mm}$; $b' = 17,5\text{mm}$. 381. $d = 10\text{cm}$; $d' = 8,4\text{cm}$. 382. $q = 2,93\text{T/m}$; $q' = 4,16\text{T/m}$. 383. $P = 1,47\text{T}$; $P' = 1,66\text{T}$. 384. $q = 10,7\text{kN/m}$; $q' = 12,2\text{kN/m}$. 385. $P = 8,05\text{kN}$; $P' = 11,56\text{kN}$. 386.

Bài tập số	(222)	(223)	(224)	(225)	(226)
f	$-ql^4/30EI$	$\frac{7}{120} \frac{ql^4}{EI}$	$-0,057ql^4/EI$	$\frac{13}{180} \frac{ql^4}{EI}$	$ml^3/3EI$
θ	$-ql^3/24EI$	$ql^3/12EI$	$-ql^3/4\pi EI$	$ql^3/10EI$	$ml^2/2EI$
Bài tập số	(227)	(228)	(229)	(230)	(231)
f	$\sim 0,000204ql^4/EI$	$\sim 0,00386ql^4/EI$	$ql^4/\pi^4 EI$	$-ql^4/16\pi^4 EI$	0
θ_{tr}	$-ql^3/720EI$	$ql^3/90EI$	$+ql^3/\pi^3 EI$	$ql^3/8\pi EI$	0
θ_{pb}	$ql^3/720EI$	$-ql^3/72EI$	$-ql^3/\pi^3 EI$		

387. Nhỏ hơn 0,05%. 388. 100%; 60%. 389. 33%; 28%. 390. 25%; 22%. 391. 27,3% 23,8%
 Trong trả lời của bài tập 392 - 443 đưa đến những hệ số bằng số khi Ma^2/EI , Pa^3/EI hoặc qa^4/EI đối với uốn và khi Ma/EI , Pa^2/EI hoặc qa^3/EI đối với góc quay. 392. $-23/8$; $-3/2$. 393. $-19/24$; $-1/3$. 394. $-25/4$; $-5/3$. 395. $-16/3$; $-5/3$. 396. $-59/24$; $-3/2$. 397. -2 ; $-13/12$. 398. -2 ; $-17/16$. 399. $-85/72$; $-65/72$. 400. $-5/8$; $-7/36$. 401. $1/6$; $1/3$. 402. $-1/3$; $-1/12$. 403. $-7/9$; $2/9$. 404. $-5/12$; $1/6$. 405. $19/24$; $-2/3$. 406. $19/90$; $101/360$. 407. $1/72$; $1/15$. 408. $25/24$; $7/6$. 409. $-62/45$; $187/120$. 410. $-11/6$; -1 . 411. $-7/6$;

* ứng suất tìm được trên thành ở chỗ chiều rộng mặt cắt thay đổi đột ngột (ghi chú cho bài tập 365*, 366*, 367*).

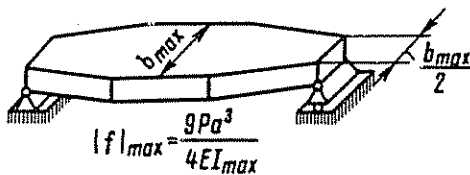
- 1/2. 412. - 7; 2. 413. - 5/12; - 1/2. 414. - 11/36; 1/9. 415. 0; - 1/3. 416. - 11/24; - 7/12.
 417. 1/12 - 11/12. 418. - 2/3; 1/3. 419. 1/6; - 1/3. 420. - 4/3; - 3/2. 421. - 10/3; 3;
 422. - 7/12; - 1/2; 1/4. 423. - 5/12; - 7/12; 0. 424. 1/6; 7/12; - 3/4. 425. - 17/18; - 1/2;
 - 7/9. 426. 45/8; 2. 427. 3; 2. 428. 19/8; 11/6. 429. 2/9; 2/3. 430. 9/4; 27/8. 431. 65/162;
 5/9. 432. 131/90; 5/4. 433. 733/648; 10/9. 434. - 23/24; - 71/24. 435. - 2; - 11. 436. - 7/3.
 437. - 31/12. 438. - 5/8. 439. - 1/12; - 1/8. 440. 1/6; - 5/6. 441. - 1/4. 442. - 13/12.
 443. - 11/12. 444. 1,31cm. 445. 3,55cm. 446. 1,35cm. 447. 1,29cm. 448. 1,6cm. 449. N^o 22.
 450. N^o 22 (16). 451. N^o 27. 452. 12 × 20cm². 453. 20cm. 454. 4/3. 455. 19/18. 456. 114/7.
 457. 4,4.

458



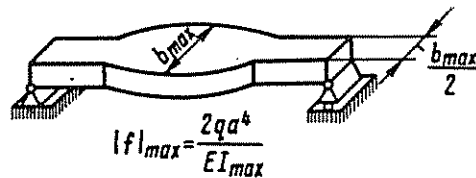
$$d = d_{\max} \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{1}{3}}; |f|_{\max} = \frac{3ql^4}{8EI_{\max}}$$

459



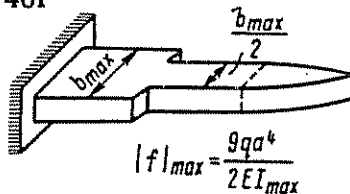
$$|f|_{\max} = \frac{9Pa^3}{4EI_{\max}}$$

460



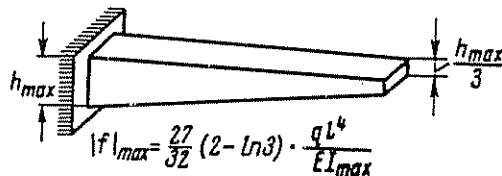
$$|f|_{\max} = \frac{2qa^4}{EI_{\max}}$$

461



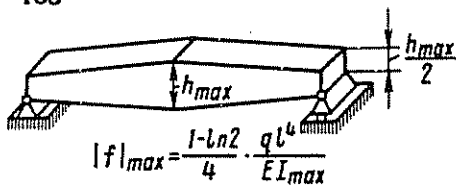
$$|f|_{\max} = \frac{9qa^4}{2EI_{\max}}$$

462



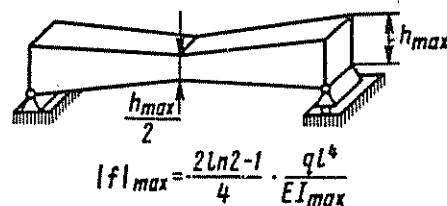
$$|f|_{\max} = \frac{27}{32} (2 - \ln 3) \cdot \frac{ql^4}{EI_{\max}}$$

463



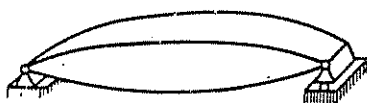
$$|f|_{\max} = \frac{1 - \ln 2}{4} \cdot \frac{ql^4}{EI_{\max}}$$

464



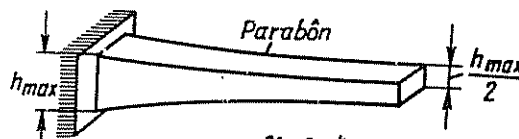
$$|f|_{\max} = \frac{2 \ln 2 - 1}{4} \cdot \frac{ql^4}{EI_{\max}}$$

465



$$h = \frac{2h_{\max}}{l} \sqrt{l x - x^2}; |f|_{\max} = \frac{\pi - 2}{64} \cdot \frac{ql^4}{EI_{\max}}$$

466



$$|f|_{\max} = \frac{2 \ln 2}{EI_{\max}} \cdot \frac{ql^4}{2}$$

611. $f_{\max} \approx 17,8Pa^3/Eb^4$; $\sim 15^\circ 42'$. Trong trả lời của bài tập 612 - 620 vị trí trục trung hòa được xác định bằng y_0 và z_0 là giao điểm của trục trung hòa với trục quán tính chính của tiết diện. 612. 0; -40 kG/cm²; $y_0 = \infty$; $Z_0 = 15$ cm; 613. -3,51; -4,63kG/cm²; ∞ ; -363cm. 614. 25; -50kG/cm²; -6,67cm; -8cm. 615. 65; -286kG/cm²; -12,5cm. ∞ . 616. $26,5P/a^2$; $-27,5P/a^2$; $a/54$; $-a/27$. 617. 1285; -1355; kG/cm²; 0,29cm; 1,47cm; 618. 17,6; -14,4MN/m² - 0,834cm; 0,625cm. 619. -4,83P; -7,37P; 6,2a; ∞ . 620. 9,3; -11,3MN/m²; -4,67cm; -1,43cm. 621. 650kG/cm²; $z_0 = -d/24$. 622. 44,7kG/cm²; $y_0 = a/6$; $z_0 = a/15$. 623. 300kG/cm²; $y_0 = 8,3$ cm; $z_0 = 7,8$ cm. 624. 85,8; -80,8; kG/cm². 625. $79,3P/d^2$; $-93,5P/d^2$; 626. 58,4; -63,6MN/m². 627. 1122; -1034kG/cm². 628. $P/3ab$ khi $a_x = 3a$; $-4P/3ab$ khi $a_x = \frac{3}{2}a$. 629. $P/\pi d^2$ khi $d_x = 2d$; $-125P/27d^2$ khi $d_x = 1,2d$. 630. $a \geq 2\sqrt{P/[\sigma]}$. 631. $a = 4$ cm. 632. N^o 22a; $d \approx 1,26$ cm. 633. N^o 27. 634. $d \approx 17\sqrt{P/[\sigma]}$. 635. $d \approx 1,5$ cm. 636. $t_1 \approx 4,65l$. 637. $d = 3$ cm. 638. 64kG. 639. 9040kG. 640. 2780kG. 641. 19550kG. 642. 4180kG. 643. 360kG. 644. 6000kG. 645. 368kG. 646. $\pi d^2[\sigma]/176$. 647. 4590kG. 648. $8,68kN \leq P \leq 12,15kN$. 649. $P_1 = 8P$; $\sigma_{\min} = -32P/3a^2$. Trong trả lời ở những bài tập 650 - 655 đã cho tọa độ các điểm góc của chu vi lõi mặt cắt trong trục quán tính chính trung tâm YZ (tính bằng cm). 650. Hình tứ giác; 0,160a; 0; -0,072a; 0; $\pm 0,166a$; 651. Hình tứ giác; 0,697a; 0; -0,650a; 0; 0; $\pm 0,532a$. 652. Hình bát giác; 0; $\pm 0,107a$; $\pm 0,107a$; 0; $\pm 0,08a$; $\pm 0,08a$. 653. Hình lục giác; 0,226a; 0; -0,131a; 0; 0; $\pm 0,107a$; 0,086a; $\pm 0,113a$. 654. Hình chữ nhật; $a\sqrt{3}/12$; $\pm 12a$; $-a\sqrt{3}/12$; $\pm 12a$; 655. Hình tứ giác; $\frac{13}{36}b$; 0; $-\frac{13}{126}b$; $\frac{13}{45}b$; $\pm \frac{15}{56}b$; 0; 656. $51Pa/d^3$. 657. 2180kG/cm². 658. $91,6Pa/d^3$. 659. $78q/a$. 660. 1000kG/cm². 661. 107MN/m². 662. $\approx 4,9Pl/\pi d^3$ khi $x \approx 0,448l$ từ đầu tự do. 663. $19,4Pa/d^3$. 664. $\sim 1040kG/cm^2$. 665. $\sigma_{\max I} = 827kG/cm^2$; $\sigma_{\min I} = -223kG/cm^2$; $\sigma_{\max II} = 1755kG/cm^2$; $\sigma_{\min II} = -35kG/cm^2$; $\delta_p = 0,53$ mm; 666. $d \geq 3,7\sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$. 667. $b = 3,35\sqrt{Pa/[\sigma]}$. 668. $d \approx 40$ mm. 669. $d \approx 60$ mm. 670. $d \approx 85$ mm. 671. $d_1 \approx 22$ mm; $b \approx 22$ mm; $d_2 \approx 36$ mm. 672. $a = 3\sqrt{2P/[\sigma]}$. 673. $d \geq 2,46\sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$. 674. $d \approx 50$ mm. 675. $d \approx 38$ mm; $b \approx 22$ mm. 676. $d_1 \approx 51,5$ mm; $d_2 \approx 64$ mm. 677. $d \approx 70$ mm. 678. $d \geq 1,84\sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$. 679. $d \approx 24,2$ mm. 680. $d \approx 80$ mm. 681. $P \leq [\sigma]d^3/51a$. 682. $q \leq 0,082[\sigma]b^3/a^2$. 683. $M \leq 0,026[\sigma]D^3$. 684. $q \leq 1,4kN/m$. 685. $P \leq 100kG$. 686. $P \leq 0,556[\sigma]d^3/l$. 687. $M \approx 117kG \cdot cm$. 688. $P \approx 6,4kG$. 689. $\sigma_{III} = 47,4P/d^2$. 690. $\sigma_{III} = 1240kG/cm^2$. 691. $\sigma_{III} = 1510kG/cm^2$. 692. $\sigma_{III} = 89P/d^2$. 693. $96P/b^2 \leq [\sigma]$. 694. $8,14P/b^2 \leq [\sigma]$. 695. $1570kG/cm^2 < 1600kG/cm^2$. 696. $b = 12$ cm; $h = 8,3$ cm. 697. $d_1 \approx 8,5$ cm. $d_2 = 8,5$ cm; $d_3 = 6,1$ cm. 698. $d_1 = 6$ cm; $b = 3,63$ cm; $d_2 = 5,71$ cm; $e = 2,72$ cm. 699. 715N; $\tau_{\max} = 685MN/m^2$. 700. $\max \tau_1/\max \tau_2 = 0,74$; $\delta_1/\delta_2 = 0,88$. 701. $\max \tau_1 = 955kG/cm^2$; $\max \tau_2 = 2550kG/cm^2$; $\delta = 26$ cm. 702. $\tau_{\max} = 4760kG/cm^2$, $n = 15$, $\delta_0 = 8,1$ cm. 703. $\max \tau_1 = 128kG/cm^2$; $\max \tau_2 = 417kG/cm^2$. 704. $P \approx 800kG$. 705. 10%. 706. $P_0 = 902N$. 707. $d = 1$ cm; $n = 10$. 708. $P = 109kG$. 709. $P = 50kG$. 710. 43kG; 20,5kG/cm². 711. 132,5T; 2630kG/cm². 712. a) 1070kG; 713kG/cm²; b) 3460kG; 2310kG/cm². 713. a) 171T; 4530kG/cm². b) 124T, 3300kG/cm². 714. 1210kG; 192kG/cm². 715. 5,47T; 17,1kG/cm². 716. 7,4. 717. 2. 718. $\frac{F}{2} \sqrt{\frac{\pi E \cos \alpha}{P}}$. 719. 9,5m. 720. $\frac{F}{2} \sqrt{\frac{\pi E}{qa}}$. 721. a) 31,9cm; b) 17,8cm. 722. 82°. 723. a) 37,5°; b) 10,1°. 724. 63°. 725. $d = 13,5$ cm. 726. $d = 6$ cm. 727. $d = 6$ cm. 728. N^o 22a; 729. ứng suất vượt tải 33%. 730. ứng suất vượt tải 2,4%. 731. ứng suất thiếu 24%. 732. ứng suất thiếu 4,8%. 733. ứng suất thiếu 14%. 734. 9,1T. 735. 51,6T. 736. 177,6T. 737. $b \approx 11,3$ cm. 738. $b = 2,86a$. 739. $b = 2a$. 740. N^o 30. 741. N^o 20(16). 742. $b = 10$ cm. 743. 20cm. 744. $d = 8$ cm; 745. N^o 14; $B = 14$ cm; $l_0 = 40$ cm. 746. N^o 16; $B = 22$ cm; $l_0 = 70$ cm. 747. N^o 10 (10); $B = 39$ cm; $l_0 = 60$ cm (một trong những phương án có thể có $\varphi = 0,81$). 748. N^o 10 (7); $B = 34$ cm; $l_0 = 60$ cm (một trong những phương án có thể có khi $\varphi = 0,81$). 749. 4,91cm; 1462kG/cm². 750. 10,96cm; 107,4kG/cm². 751. 1,3cm; 67,1kG/cm². 752. 0,303cm;

1240kG/cm²; 2,52; 1,84. 753. 229cm; 1275kG/cm²; 2,27; 1,78. 754. 80 × 50 × 6 (một trong những phương án có thể có). 755. $d = 16\text{cm}$.

Trong trả lời ở các bài tập 756 - 765 đã quy đổi các giá trị N_{\max} , Q_{\max} và M_{\max} .

756. $2P$; $2P$; $\frac{3}{2}Pa$. 757. P , $3P$, $3Pa$. 758. $P\sqrt{2}$; $P\sqrt{2}$; $2Pa$. 759. $qa\sqrt{2}$; $qa\sqrt{2}$; $2,414qa^2$.
 760. $qa|2$; $qa|2$; $qa^2|3$. 761. $\frac{3}{2}P$; $\frac{3}{2}P$; $2Pa$. 762. $2qa$; $3qa$; $\frac{9}{2}qa^2$. 763. $2qa$; qa ; $2qa^2$.
 764. qa ; $2qa$; $5,713qa^2$. 765. P ; P ; $\frac{5}{2}Pa$. 766. 127; - 206; 111kG/cm². 767. 105; - 87; - 48MN/m². 768. 1050; - 700; - 387kG/cm². 769. 805; - 403kG/cm². 770. $P = 208\text{T}$. 771. $M_1 = 123\text{kG.m}$; $M_2 = 303\text{kG.m}$; $M_3 = 128\text{kG.m}$; $M_4 = 134\text{kG.m}$. 772. $782 < 1600\text{kG/cm}^2$.
 773. $360 < 1600\text{kG/cm}^2$. 774. $17Ph|EF$; $1,73Ph|EF$. 775. $2,12Pa|EF$; $3,6Pa|EF$. 776. $qr^2|EF$.
 777. $34,4Ma/Gd^4$. 778. $\frac{28}{3} \cdot \frac{Ma}{GI_{xo}}$. 779. $\frac{41}{24} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$; $\frac{7}{6} \cdot \frac{Pa^2}{EI}$. 780. $qa^4|4EI$; $qa^3|12EI$.
 781. $qa^4|15EI$; $17qa^3|180EI$. 782. $\frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI}$; $-kqa^2/GF$. 783. $768 P/bE$.

Trong trả lời ở các bài 784 - 790; 797 - 819 và 822 - 833 đã cho các hệ số khi $Ma^2|EI$; $Pa^3|EI$ hoặc $qa^4|EI$ đối với chuyển vị dài và khi $Ma|EI$, $Pa^2|EI$ hoặc $qa^3|EI$ đối với chuyển vị góc.

784. $16 \left(\frac{1}{3} - \frac{I}{a^2F} \right)$; 8; 2. 785. $2 \left(\frac{8}{3} + \frac{I}{a^2F} \right)$; 1; 1; 786. $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{I}{2a^2F} \right)$; $\frac{1}{4}$.
 787. $2(11 + I/a^2F)$; $2(9,1 + I/a^2F)$.
 788. $4(3 + I/a^2F)$. 789. $2 + \frac{3I}{a^2F}$. 790. 1/2. 791. $103,7Pa^3/Ed^4$. 792. $85Pa^3/Ed^4$. 793. $39,1 Pa^3/Ed^4$.
 794. $\frac{80Pa^3}{Ed^4} (1 + d^2/63a^2)$. 795. $\frac{170Pa^3}{Eb^4} \left(1 + \frac{b^2}{170a^2} \right)$. 796. $\frac{56,9Pa^3}{Eb^4} \left(1 + \frac{b^2}{56,9a^2} \right)$. 797. 13,6; 1/2; 6,85. 798. 7/6; 1,45; 5/3. 799. 39; 19,1; 20,1. 800. 0,36; 1/2; 0,57. 801. 0,071; 0; 0,142. 802. 1/12; 0,010; 0,028. 803. 0,47; 0,85; 0,24. 804. 8; 37,4; 4π .
 805. 1/12; 0,0927; 0,0181. 806. 1/2; 1,225; 807. 2/3; 0,392. 808. 5,14; 3,14. 809. $3\pi/2$; 1/2. 810. 1,1; 1/2. 811. 0,312. 812. 0,071. 813. 0 355. 814. $0,0198 [1 + 3,57b^2/a^2]$. 815. 12,4. 816. $28/3$. 817. 3π . 818. 1/2. 819. 7,24. 820. 45° . 821. $48^\circ 15'$. 822. $5/12$; $\frac{1}{12}$. 823. 1/2; 1/2. 824. $2/9$; $2/9$. 825. $\frac{28}{3} + \frac{I}{a^2F}$; $\frac{44}{9}$. 826. $\frac{7}{3} + \frac{2I}{a^2F}$; 2,5. 827. $23/3$; 3. 828. 14; 8,5. 829. 0,5; 0. 830. 3; 1. 831. $5/6$. 832. $7/2$. 833. $32/3$. 834. 0; $\frac{P}{2} \sin\beta$; $\frac{P}{2} \cos\beta$. 835. $\sim - 0,739P$; $\sim 0,369P$. 836. ma . 837. $2,7M$. 838. $qa/8$; $\frac{7}{48} \frac{qa^4}{EI}$. 839. $\frac{7}{8} qa$; $\frac{5}{24} \cdot \frac{qa^4}{EI}$. 840. $6M|7a$; $Ma^2|21EI$. 841. $\frac{25}{16} qa$; $qa^4|48 EI$; $M_A = 23qa^2/48$. 842. $P/10$; $19Pa^3/60EI$. 843. $qa/3$; $\frac{16}{9} \times \frac{qa^4}{EI}$. 844. $\frac{3}{8} \cdot \frac{M}{a}$; $\frac{Ma^2}{2EI}$. 845. $3qa/4$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{qa^4}{EI}$. 846. $qa/7$; $\sim 0,137qa^4/EI$. 847. $3P/10$; $\frac{11}{15} \frac{Pa^3}{EI}$. 848. $\frac{15}{28} P$. 849. $\frac{45}{44} qa$. 850. $\sim 0,162P$. 851. $\frac{3}{2} qa$. 852. $A_y = 0$; $A_x = P/4$.
 853. $A_y = A_x = \frac{9M}{20a}$. 854. $A_y = \frac{32}{25} qa$; $A_x = 14qa|25$. 855. $A_y = \frac{125}{54} qa$; $A_x = \frac{91}{54} qa$.

856. $A_y = \frac{14P}{19}$; $A_x = 9P/38$. 857. $A_y = A_x = \frac{qa}{6}$. 858. $\frac{3}{5}Pa$. 859. $3Pa/4$. 860. $0,1642qa^2$.
 861. $0,0634qa^2$. 862. $A_y = 0$; $A_x = 3P/16$; $M_A = Pa/4$. 863. $A_y = \frac{2}{11}qa$; $A_x = \frac{57}{55}qa$. 864.
 $A_y = P/2$; $A_x = 3P/62$. 865. $A_y = \frac{40}{71}qa$; $A_x = 76/71qa$. 866. $A_y = \frac{11}{20}qa$; $A_x = qa/40$;
 $M_A = qa^2/10$. 867. $A_y = \frac{P}{8}$; $A_x = \frac{15}{16}P$. 868. $44P/23$; $\frac{68}{69} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$. 869. $\frac{10}{27}P$; $\frac{191}{81} \times$
 $\times \frac{Pa^3}{EI}$. 870. $\frac{19}{47}P$; $\sim 0,0722 Pa^3/EI$. 871. $0,75E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$. 872. $\frac{3}{11} E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$. 873.
 $0,3 E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$. 874. $0,6E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$. 875. $24/31E\alpha\Delta t \frac{h}{a}$. 876. $\frac{3}{11} \cdot \frac{\Delta Eh}{a^2}$. 877. $3\Delta Eh/16a^2$.
 878. $\Delta Eh/a^2$. 879. $3\Delta Eh/8a^2$. 880. $P/3$; $\frac{\pi+1}{3} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$. 881. $0,0372qa$; $0,1188qa^4/EI$. 882.
 $\frac{5}{6}qa$; $\frac{\pi}{24} \cdot \frac{qa^4}{EI}$. 883. $0,0638P$; $0,1052Pa^3/EI$. 884. $0,1867qa$; $0,115qa^4/EI$. 885. $R_y = qa/2$.
 $R_x = 0,590qa$. 886. $R_y = P/2$; $R_x = 0,786P$. 887. $R_y = 0$; $R_x = 4qa/\pi$. 888. $R_y = \pi qa$; $R_x =$
 $= 3qa$. 889. $R_y = P/2$; $R_x = 0,722P$; $M_R = 1,077Pa$. 890. $3,44Pa^3/EI$. 891. $\frac{2\pi}{9} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$; 892.
 $0,586Pa^3/EI$. 893. $0,25Pa^3/EI$. 894. $\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$. 895. $0,0994Pa^3/EI$. 896. $0,369Pa$. 897. $0,273$
 qa^2 . 898. $0,629Pa$. 899. $1,152Pa$; 900. $A_y = 0,216P$; $A_x = 0,433P$. 901. $A_y = 0,961P$; $A_x =$
 $0,774P$. 902. $A_y = \frac{3}{4}qa$; $A_x = qa/4$. 903. $A_y = 0,271qa$. $A_x = 0,277qa$. 904. $A_y = P/2$; $A_x =$
 $= 0,0522P$; $N = 0,437P$. 905. $A_y = 0,519qa$; $A_x = 0,339qa$. 906. $A_y = 0,214qa$. $A_x = 0,701qa$;
 $M_A = 0,569qa^2$.
 907. 2,414; 2,515. 908. 2,75; 9,40. 909. 2,48; 8,52; 910. 3,30; 15,26. 911. $M_i = M/2$;
 $M_{x_0} = M/9\pi$; $\delta = 0,298Ma^2/EI$. 912. $M_i = Pa/2$; $M_{x_0} = 0,565Pa$; $\delta = 0,625Pa^3/EI$. 913.
 $M_i = 2qa^2$; $M_{x_0} = 0,934qa^2$; $\delta = 1,435qa^4/EI$. 914. $d \approx 1,362\sqrt[3]{Pa/[\sigma]}$. 915. $b \approx 1,371\sqrt[3]{qa^2/[\sigma]}$.
 916. $r_2 = 17,3\text{cm}$; $\Delta r_1 = 0,23\text{mm}$. 917. $p_2 = 111\text{MN/m}^2$; $\Delta r_2 = -0,19\text{mm}$. 918. a) $r_2 =$
 $= 14,1\text{cm}$; $\Delta r_1 = 0,23\text{mm}$; $\Delta r_2 = 0,19\text{mm}$; b) $p_1 = 24\text{MN/m}^2$. 919 $p_0 = \frac{a\beta E(r_2^2 - r_1^2)}{2r_1[r_2^2 + r_1^2 + \mu(r_2^2 - r_1^2)]}$;
 $\max[\sigma_r] = p_0$; $\max\sigma_t = p_0 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$. 920. $\beta = \frac{\Delta}{ar_1r_2} \left[r_2^2 + r_1^2 + \mu(r_2^2 - r_1^2) \right] \approx 0,017\text{rad} \approx$
 $\approx 1^\circ$. 921. $\beta = 0,028 \approx 1,6^\circ$. 922. $p_0 = 17,4\text{kG/cm}^2$; $\sigma_{tdv} = 17,4\text{kG/cm}^2$. 923. $p = 8,6\text{kG/cm}^2$;
 $p_0 = 3,8\text{kG/cm}^2$. 924. $p_0 = \frac{\mu q}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu}$. 925. $p_0 = 0$.

Bài tập số	$\sigma_r(\text{kG/cm}^2)$			$\sigma_t(\text{kG/cm}^2)$				P_o (kG/cm^2)
	ống			ống				
	I	II		I	II			
	Các điểm			Các điểm				
	1	2	3	1	2	2	3	
926	- 2000	- 577	0	1800	371	962	385	577
927	- 2000	- 248	0	2670	920	413	165	248
928	0	- 173	0	- 460	- 290	290	115	173

929. $p_o = \frac{\Delta}{2r_2A} E_I E_{II} (1 - n_1^2) \times (1 - n_2^2)$, trong đó $n_1 = r_1/r_2$; $n_2 = r_2/r_3$; $A = (1 - n_1^2 n_2^2) \times (E_I + E_{II}) + (n_1^2 - n_2^2) (E_{II} - E_I) - (1 - n_1^2) (1 - n_2^2) \cdot (\mu_I E_{II} - \mu_{II} E_I)$. 930. $p_o = \frac{\Delta E}{2r_2 \left(\frac{r_2}{\delta} + \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right)}$.

Bài tập số	$\sigma_r(\text{kG/cm}^2)$			$\sigma_t(\text{kG/cm}^2)$				Ứng suất tính toán giảm
	ống			ống				
	I	II		I	II			
	Các điểm			Các điểm				
	1	2	3	1	2	2	3	
931	- 2000	- 825	0	917	- 309	1291	517	30%
932	- 3000	- 1500	0	1000	- 500	2500	1000	-

$r_2 = 20\text{cm}$; $r_3 = 40\text{cm}$; $\Delta = 0,6\text{mm}$.

933	ống	I		II		III	
	Các điểm	1	2	2	3	3	4
$\sigma_{I,III} \text{ kG/cm}^2$	ống đơn	5717	3650	3650	1860	1860	914
	ống ghép	3615	2304	3624	1852	3365	1654

934. $\max \sigma_I = 3\gamma l$; $\max \sigma_{II} = 66\gamma l$. 935. $\sigma_{I2} = 216\text{MN/m}^2$; $\sigma_{II} = 10,8\text{MN/m}^2$. 936. $\sigma_I = 182\text{kG/cm}^2$. $\sigma_{II} = 322\text{kG/cm}^2$. 937. a) $\sigma_I = \sigma_{III} = \sigma_{II} \cos^2 \alpha = \frac{Q \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F} \cdot \left(1 + \frac{\omega^2 l}{g} \right)$; b) $\sigma_{III} = \frac{\sigma_I}{\sqrt{3}} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma_{II}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{Q}{(3 + \sqrt{3})F} \left(1 + \frac{\omega^2 l}{g} \right). \quad 938. \sim 66,8 \text{ MN/m}^2. \quad 939. 32Q\omega^2 l^2 / g\pi d^3. \quad 940. d = \\
&= 14,3 \text{ cm}; \quad b = 12 \text{ cm}. \quad 941. 250 \text{ v/g/ph}. \quad 942. \frac{4\gamma r l^2}{g\pi d^3} \sqrt{\varepsilon_0^2 + \omega_0^4}. \quad 943. \sim 0,3 \sqrt{Q\pi^2 r l / g [\sigma]}. \quad 944. \\
&\max \sigma_I = 1420 \text{ kG/cm}^2; \quad \max \sigma_{II} = 2220 \text{ kG/cm}^2. \quad 945. \sim 1350 \text{ kG/cm}^2. \quad 946. \frac{Q\omega^2 \rho^4}{2gFI} (3\pi + 8). \\
&947. 195 \text{ v/g/ph}; \quad \sim 1,59 \text{ cm}. \quad 948. 16Q\omega^2 R^2 / (g\pi d^3). \quad 949. 4\gamma\omega^2 R^3 / gd. \quad 950. 4,9Q\omega^2 R^2 / (g\pi d^3); \\
&28,5Q\omega^2 R^4 / (gEd^4). \quad 951. \frac{\pi b}{32r} \sqrt{\frac{E\pi b g a}{Qr}}. \quad 952. \frac{\pi d^2}{32a} \sqrt{\frac{\pi E g}{2Qa}}. \quad 953. 672 \text{ v/g/ph}. \quad 954. \text{ a) } 50 \text{ 1/s}. \\
&\text{b) } 5,6 \text{ 1/s}. \quad 955. \sqrt{2gEF/7Qa}. \quad 956. 2\pi l g \alpha \sqrt{Q/Cg}. \quad 957. \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{Qa^3}{EIg}}. \quad 958. 4\pi \sqrt{Qa^3/(3EIg)}. \\
&959. 1/40 \text{ s}. \quad 960. \frac{\pi l}{2} \sqrt{\frac{Ql}{6EIg}}. \quad 961. 0, 106 \text{ s}. \quad 962. 1,17 \sqrt{EIg/Qa^3}. \quad 963. 0,075 \text{ s}. \quad 964. \frac{d^2}{12R} \times \\
&\times \sqrt{\frac{\pi G g}{2Qa}}. \quad 965. 2,82 \text{ 1/s}. \quad 966. 61/35. \quad 967. 41/70. \quad 968. 333/2240. \quad 969. 1/3. \quad 970. 4/3. \\
&971. 0,144 \text{ s}. \quad 972. 0,147 \text{ s}. \quad 973. 2\pi \sqrt{\frac{6Ql^3}{bh^3 E g} \left(1 + \frac{Q\sigma}{15Q} \right)}. \quad 974. \frac{2\pi}{\sqrt{g \left(\frac{2C}{Q + \gamma Fl/3} - \frac{1}{l} \right)}}. \\
&975. 2\pi \sqrt{\frac{I_{tb} a}{2GI\rho} \left(1 + \frac{2\gamma I\rho a}{3Img} \right)}. \quad 976. 2000 \text{ v/g/ph}. \quad 977. A = \frac{\rho_0 F q}{Cg - Q\omega_0^2}. \quad 978. 1,65 \text{ mm}. \quad 979. \\
&0,8 \text{ mm}. \quad 980. 0,54 \text{ rad}. \quad 981. 20 \text{ cm}; \quad 2160 \text{ kG/cm}^2. \quad 982. 550 \text{ kG/cm}^2. \quad 983. 510 \text{ kG/cm}^2. \quad 984. 2,1 \text{ kG}. \\
&985. 12,8 \text{ cm}. \quad 986. \sigma_{dI} = 0,5 \sigma_{dII} = \sqrt{QhE/(3Fa)}; \quad \delta_d^b = \sqrt{4Qha/3EF}. \quad 987. \sqrt{\frac{18Qh}{C_I + 4C_{II}}}. \quad 988. \\
&\text{a) } \frac{Q}{C} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch}{Q}} \right); \quad \text{b) } v \sqrt{Q/Cg}; \quad \text{c) } \frac{Q}{C} \sin \alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ch}{Q \sin \alpha}} \right). \quad 989. [\sigma]^2 W^2 a / (2QEI). \\
&990. \sqrt{20Qha^3/EI}. \quad 991. av \sqrt{Qa/(2gEI)}. \quad 992. 33,2 \text{ kG}. \quad 993. [\sigma]^2 W^2 i / (6QEI). \quad 994. \frac{5,2}{W} \times \\
&\times \sqrt{\frac{QhEI}{a}}. \quad 995. \frac{1,65}{W} \sqrt{\frac{QhEI}{a}}. \quad 996. 7,46 \sqrt{\frac{Qha^3}{EI}}. \quad 997. \frac{1}{W} \sqrt{\frac{1,6 QhEI}{\pi a}}. \quad 998. \\
&v \sqrt{\frac{0,0379Qa^3}{gEI}}. \quad 999. \frac{1,88}{W} \sqrt{\frac{QhEI}{a}}. \quad 1000. 9,3 \text{ MN/m}^2. \quad 1001. \sqrt{3,84Qha^3/EI}. \quad 1002. \sqrt{2Qha^3/3GI\rho}. \\
&1003. 2 \sqrt{Qha^3/3GI\rho}. \quad 1005. 1) a = l/2; \quad 2) a = (2 - \sqrt{2})l. \quad 1006. \text{ a) } \frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{I_{tb}G}{\pi l}}; \quad \text{b) } \frac{4\omega}{d} \times \\
&\times \sqrt{\frac{2I_{tb}G}{\pi l}}. \quad 1007. \frac{4\omega}{d} \sqrt{\frac{I_{tb}G}{\pi a}}. \quad 1008. 1260 \text{ kG/cm}^2. \quad 1009. \sqrt{6QE/5F}. \quad 1010. 337 \text{ kG/cm}^2; \\
&0,78 \text{ mm}. \quad 1011. 336 \text{ kG/cm}^2. \quad 1012. h = \frac{W^2 l [\sigma]^2}{6QEI} \left(1 + \frac{13}{35} \cdot \frac{Q_0}{Q} \right); \quad \text{chính xác hơn } h = \\
&= \frac{W^2 l [\sigma]^2}{6QEI} \left(1 + \frac{13}{35} \frac{Q_0}{Q} \right) \left(1 - \frac{Ql}{4W[\sigma]} \right). \quad 1013. \omega \sqrt{\frac{2I_{tb}G}{V \left(\frac{3}{2} + \frac{I_b}{3I_{tb}} \right)}}, \quad \text{trong đó } V = \\
&= \frac{\pi d^2}{4} l; \quad 1014. \sigma_{dI} = 366 \text{ kG/cm}^2. \quad \sigma_{dII} = 512 \text{ kG/cm}^2; \quad \sigma_{dIII} = 720 \text{ kG/cm}^2. \quad 1015. 1 \text{ MN/m}^2. \\
&1016. \sim 12 \text{ mm}. \quad 1017. \sim 1,74. \quad 1018. 6,25 \text{ kN}. \quad 1019. \text{ Trục bằng thép C.T5 bền hơn}. \quad 1020. \sigma - 0, \\
&\approx 43 \text{ kG/mm}^2; \quad \sigma_{0,6} \approx 80 \text{ kG/cm}^2. \quad 1021. \sim 26 \text{ kG/mm}^2. \quad 1022. \sim 1,38. \quad 1023. \sim - 0,5. \quad 1024. \sim \\
&7,88 \text{ kG/mm}^2. \quad 1025. \sim 118 \text{ kG.m}. \quad 1026. \sim 1,3. \quad 1027. \sim 9,2 \text{ kN}. \quad 1028. \sim 1,47.
\end{aligned}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bèzúkhốp. N. I. Cơ sở của lý thuyết đàn hồi; dẻo và từ biến. Mácôva «Nhà xuất bản đại học» 1967.
2. Bèliáp. N. M. Sức bền vật liệu «Nhà xuất bản khoa học» 1965.
3. Bèliáp. N. M. Tuyển tập các bài tập sức bền vật liệu. Mácôva «Nhà xuất bản khoa học» 1968.
4. Glúskốp. G. X. và V. A. Xínđéc. Giáo trình sức bền vật liệu. «Nhà xuất bản đại học» Mácôva, 1965.
5. Ivanốp N.I. Tuyển tập các bài tập sức bền vật liệu. Mácôva «Nhà xuất bản toán lý», 1958.
6. Izumốp. X. M, Kudrávsep. I. N, Olixốp. B. A. Tuyển tập các bài tập sức bền vật liệu. Mácôva «Nhà xuất bản xây dựng» 1940.
7. Íxôvit. G. M, Vinôcurốp. A. I, Minhin. L. X. Hướng dẫn để giải bài tập sức bền vật liệu «Nhà xuất bản đại học». 1970.
8. Pixarenkô G. X và những tác giả khác. Sức bền vật liệu «Nhà xuất bản quốc gia Ucraina» 1967.
9. Pônómárep. X. Đ, Bíderman. V. L, Likhápép. C. C. Tính toán độ bền trong chế tạo máy. Mácôva «Nhà xuất bản cơ khí» T. I 1956, T. II 1958, T. III 1959.
10. Rubínhin. M. V. Hướng dẫn thực hành sức bền vật liệu. «Nhà xuất bản nước Nga» 1963.
11. Xerenxen. X. V, Cogaép. V. P, Cozlop. L. A, Snheiderovit. R. M. Khả năng chịu lực và tính toán chi tiết máy. Mácôva «Nhà xuất bản cơ khí» 1963.
12. Umanxki. A. A, Aphanaxiep. A. M, Valmir. A. X. Tuyển tập các bài tập sức bền vật liệu. Mácôva «Nhà xuất bản khoa học» 1964.
13. Pheôđôxép. V. I. Sức bền vật liệu «Nhà xuất bản khoa học» 1970.
14. Pheôđôxép. V. I. Các bài tập và câu hỏi chọn lọc sức bền vật liệu. Mácôva «Nhà xuất bản khoa học» 1967.
15. Philônhenô Bôrôđít. M. M, Izumốp. X. M, Olixốp B. A và những tác giả khác. Giáo trình sức bền vật liệu — phần 1, Nhà xuất bản toán lý. 1961. Phần 2 — Nhà xuất bản quốc gia, 1966.

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	5
Chú thích chung về điều kiện của các bài tập.	6
I - Kéo và nén ✓	
§ 1. Lực dọc	7
§ 2. Ứng suất pháp, biến dạng tuyệt đối và thế năng biến dạng	9
§ 3. Biến dạng ngang và độ biến đổi thể tích	11
§ 4. Chuyển vị các điểm của hệ thanh liên kết khớp	12
§ 5. Độ bền và độ cứng	14
§ 6. Tính thanh có xét trọng lượng bản thân	18
§ 7. Hệ siêu tĩnh.	20
II - Trạng thái ứng suất và các lý thuyết bền ✓	
§ 8. Trạng thái ứng suất tuyến tính, phẳng và khối	30
§ 9. Các lý thuyết bền và ứng suất tương đương.	36
III - Bình chứa	
§ 10. Tính bình chứa mỏng	38
IV - Trượt	
§ 11. Ứng suất và biến dạng trượt	42
V - Tính liên kết đơn giản nhất của các bộ phận công trình	
§ 12. Khái niệm cơ bản và công thức tính toán	45
VI - Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang ✓	
§ 13. Diện tích và momen tĩnh của mặt cắt ngang	48
§ 11. Momen quán tính của mặt cắt	49
VII - Xoắn ✓	
§ 15. Momen xoắn	56
§ 16. Ứng suất tiếp, góc xoắn và thế năng biến dạng đàn hồi.	58
§ 17. Độ bền và độ cứng	61
§ 18. Bài toán siêu tĩnh	66
VIII - Uốn ngang phẳng ✓	
§ 19. Lực cắt và momen uốn	72
§ 20. Ứng suất pháp và chọn mặt cắt ngang dầm	84
§ 21. Ứng suất tiếp, tâm uốn và kiểm tra độ bền của dầm theo ứng suất tiếp	92
§ 22. Ứng suất chính và việc kiểm tra toàn bộ độ bền của dầm	98
§ 23. Cơ sở tính dầm theo năng lực chịu tải	105
§ 24. Chuyển vị của dầm bị uốn	108
§ 25. Dầm có mặt cắt thay đổi	120
§ 26. Dầm siêu tĩnh	127
§ 27. Thế năng biến dạng đàn hồi trong biến dạng uốn	149

IX – Sức chịu phức tạp của dầm thẳng có độ cong lớn

§ 28. Uốn xiên	153
§ 29. Kéo (nén) và uốn đồng thời	160
§ 30. Kéo (nén) và xoắn đồng thời	172
§ 31. Xoắn và uốn đồng thời	174
§ 32. Sức chịu phức tạp trong trường hợp tổng quát	184
§ 33. Lò xo xoắn hình trụ chịu kéo hoặc nén	191

X – Uốn dọc

§ 34. Lực tới hạn và ứng suất tới hạn	195
§ 35. Tính ổn định thanh chịu nén	198
§ 36. Uốn ngang và uốn dọc đồng thời	210

XI – Thanh cong phẳng

§ 37. Lực dọc, lực cắt và momen uốn	214
§ 38. Ứng suất	224
§ 39. Tính toán độ bền	227

XII – Tính hệ đàn hồi bằng phương pháp năng lượng

§ 40. Xác định chuyển vị đàn hồi suy rộng	230
§ 41. Giải hệ siêu tĩnh.	246
§ 42. Tính vành mỏng phẳng.	258

XIII – Tính ống dày

§ 43. Ống hình trụ	280
§ 44. Ống hình trụ nhiều lớp	285

XIV – Tác dụng động của lực

§ 45. Tính vật (hệ) chuyển động có xét lực quán tính	290
§ 46. Dao động đàn hồi	298
§ 47. Va chạm	315

XV – Ứng suất thay đổi

§ 48. Những yếu tố cơ bản ảnh hưởng tới độ bền mỏi của vật liệu	330
§ 49. Tính độ bền trong trạng thái ứng suất tuyến tính và trượt thuần túy (xoắn)	333
§ 50. Tính độ bền trong trạng thái ứng suất phức tạp.	337

PHỤ LỤC

TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

TÀI LIỆU THAM KHẢO

MỤC LỤC

BÀI TẬP SỨC BỀN VẬT LIỆU

Hiệu đính khoa học: Trương Quang Giáo
Biên tập xuất bản: Nguyễn Văn Mậu

Dịch theo bản tiếng Nga
Bản dịch của Nhà xuất bản Đại học
và Trung học chuyên nghiệp

Sắp chữ tại Nhà máy in sách Khoa học kỹ thuật Hà Nội
Số in 332. Số xuất bản 02/ĐH
In ở Liên Xô
Số lượng 12000 cuốn, khổ 17x26

CÙNG BẠN ĐỌC

Nhà xuất bản "MIR" chân thành cảm ơn bạn đọc góp ý kiến về nội dung, dịch thuật, trình bày của cuốn sách và đề xuất mọi yêu cầu khác.

ĐỊA CHỈ: NHÀ XUẤT BẢN "MIR"
I-Rigioxki pērêulóc, 2
Maxcova, 1-110, GSP, Liên Xô