

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA XÂY DỰNG DD & CN
BỘ MÔN KẾT CẤU CÔNG TRÌNH**

**GIÁO TRÌNH
CƠ HỌC KẾT CẤU I**



ĐÀ NẴNG 6 – 2007

CHƯƠNG MỞ ĐẦU

§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:

1. **Đối tượng nghiên cứu:** là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. **Bài toán kiểm tra:** Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. **Bài toán thiết kế:** Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

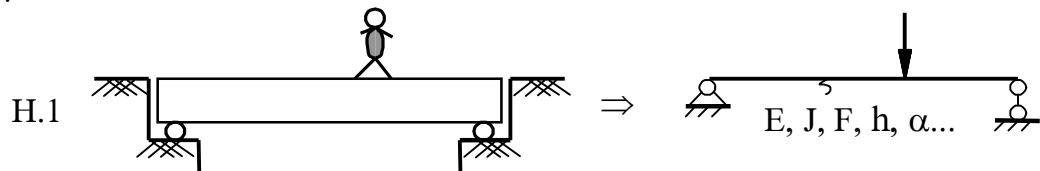
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

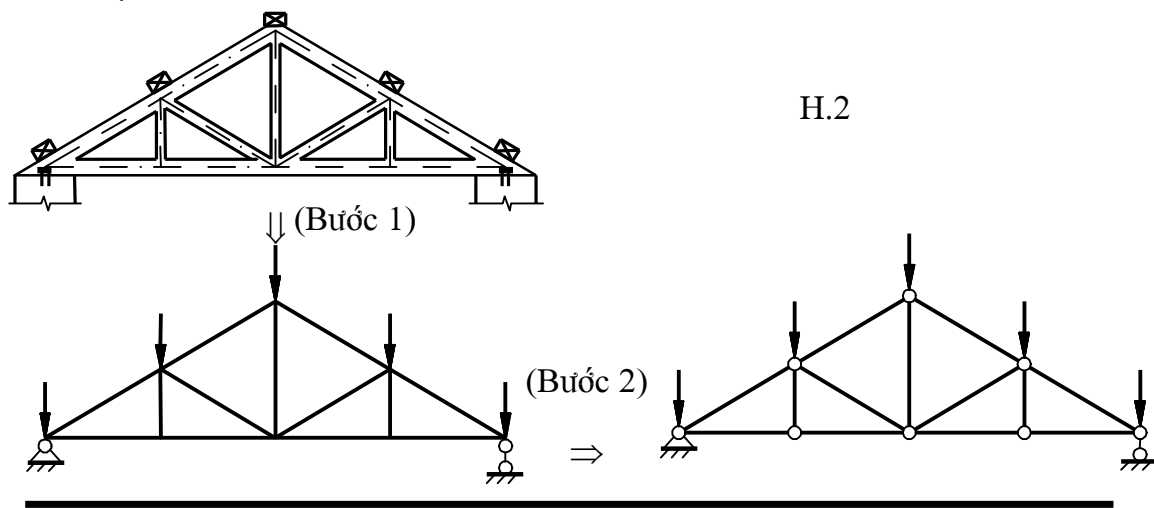
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

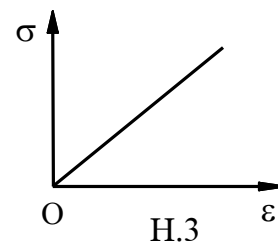


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).

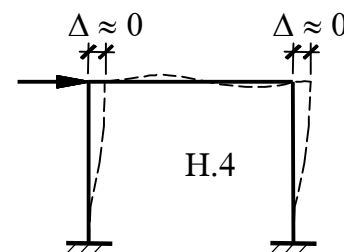


Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.

Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.



II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

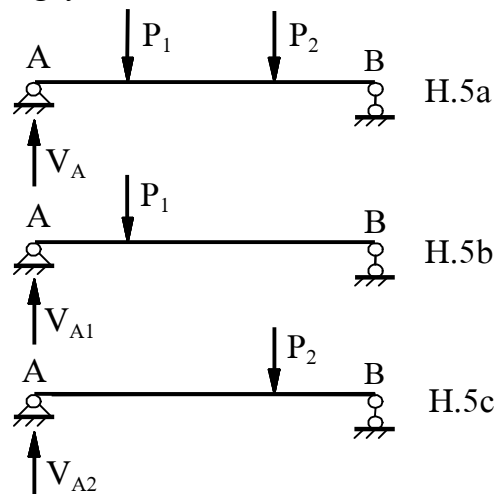
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1 , P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân $P_1, P_2, \dots, P_n$ đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi $\bar{S}_k$ là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

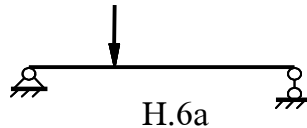
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

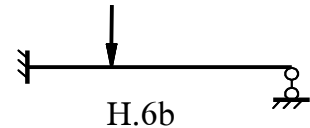
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

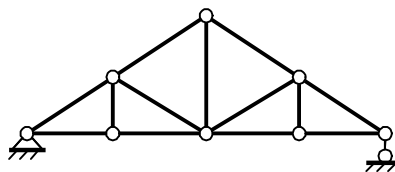
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



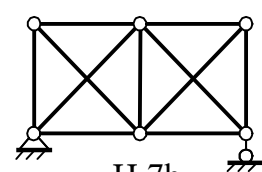
H.6a



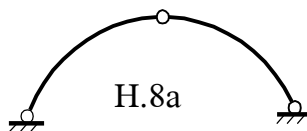
H.6b



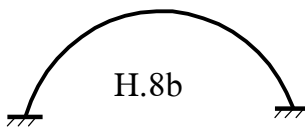
H.7a



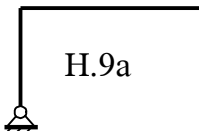
H.7b



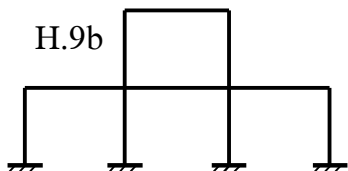
H.8a



H.8b

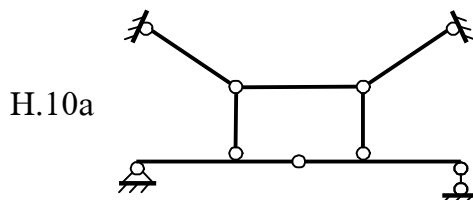


H.9a

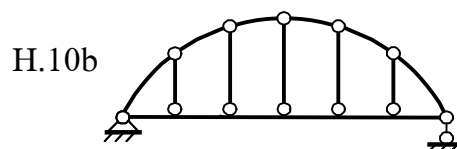


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

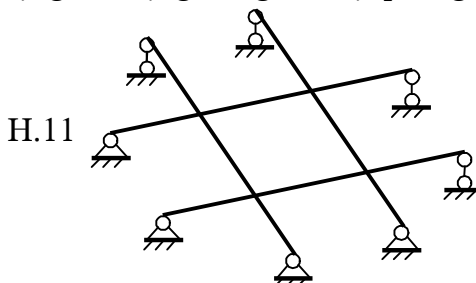


H.10b

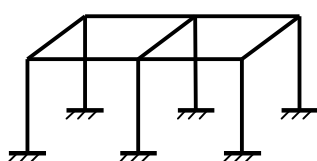
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

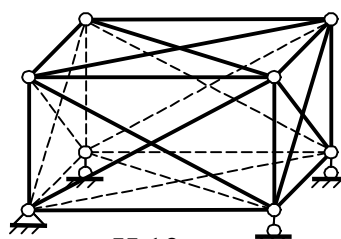
- Hệ dầm trực giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vỏ (H.15)



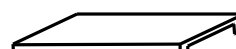
H.11



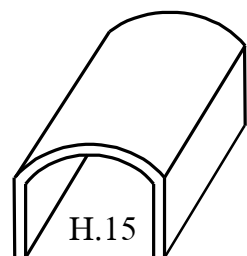
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

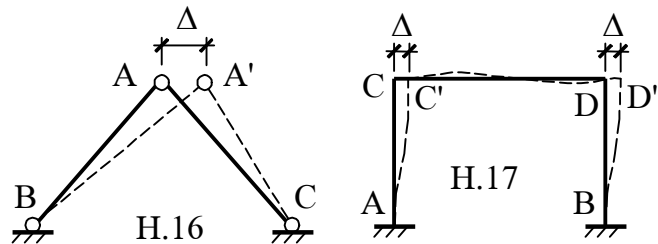
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. **Hệ tĩnh định:** là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. **Hệ siêu tĩnh:** là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

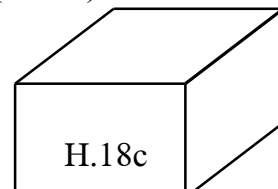
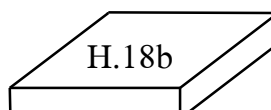
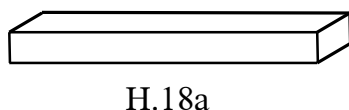
a. **Hệ xác định động:** là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. **Hệ siêu động:** là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

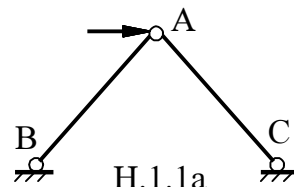
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

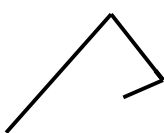
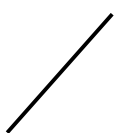
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

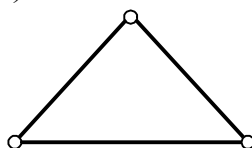
Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



H.1.1b



H.1.1c

* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

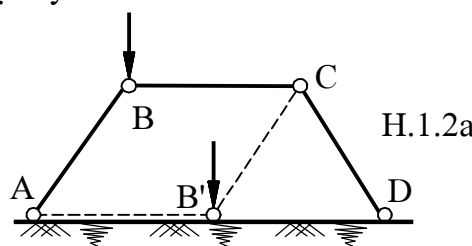
II. Hệ không bất biến hình:

1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

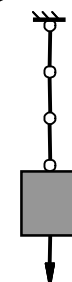
Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.



H.1.2a

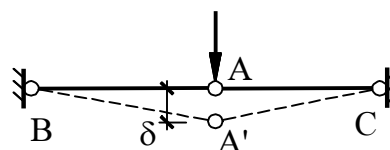


H.1.2b

2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



H.1.3a

trong hệ gần BHTT rất lớn.

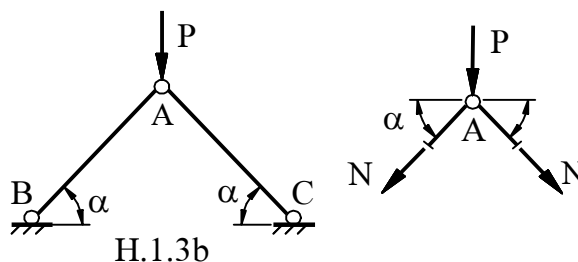
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

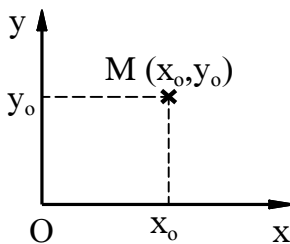
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha} \right) \rightarrow \infty.$$

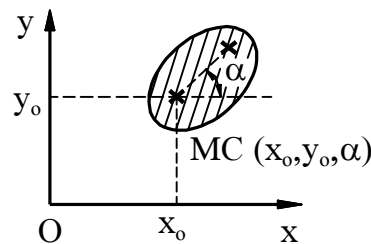


III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



H.1.4a



H.1.4b

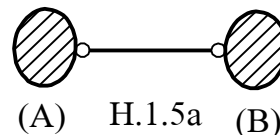
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

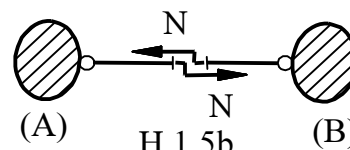
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

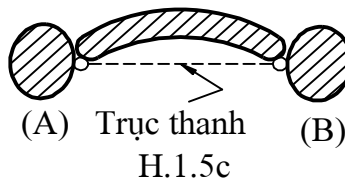
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



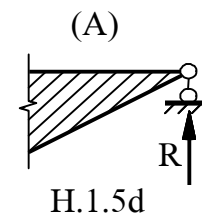
+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



H.1.5c



H.1.5d

* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

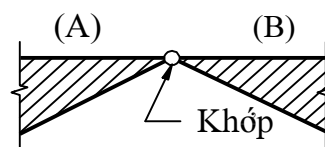
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

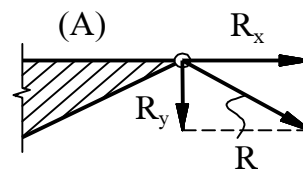
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

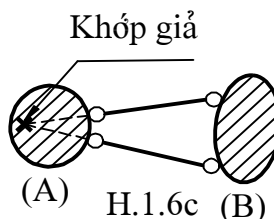


H.1.6a

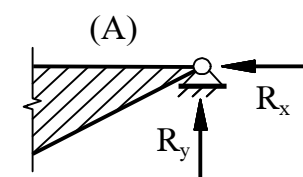


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

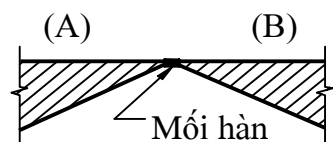
+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần ($M, \vec{R}_x, \vec{R}_y$) (H.1.7b)

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

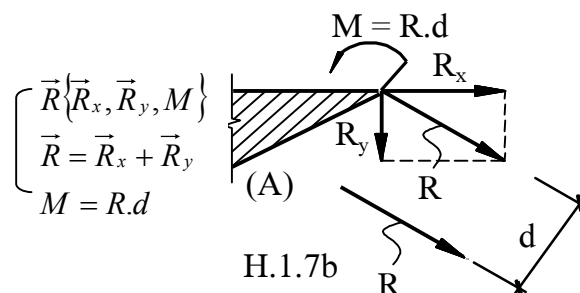
* *Chú ý:*

- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

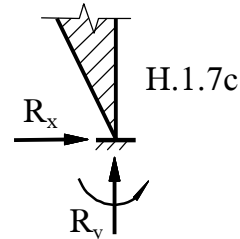
- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)



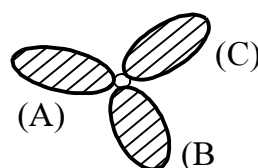
H.1.7a



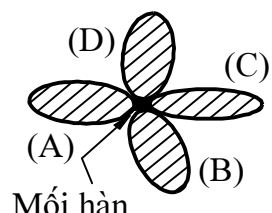
H.1.7b



H.1.7c



H.1.8a



H.1.8b

II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p .

* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

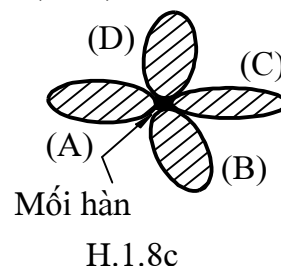
$$(1 - 1)$$

D : số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* Ví dụ: Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)

$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.



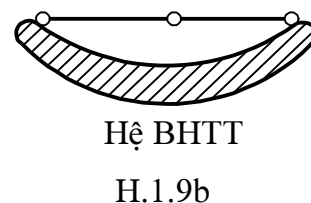
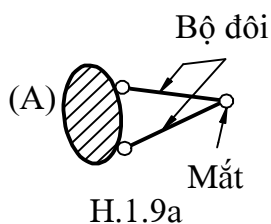
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

a. **Điều kiện cần:** để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

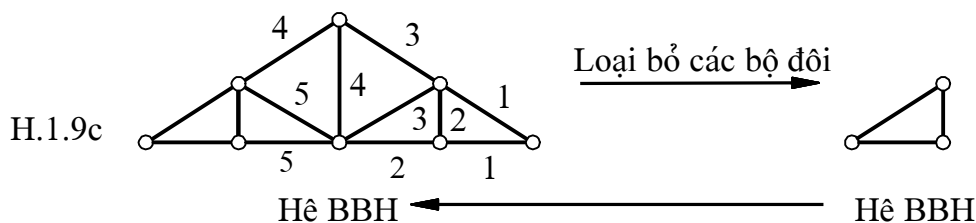
b. **Điều kiện đủ:** hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).

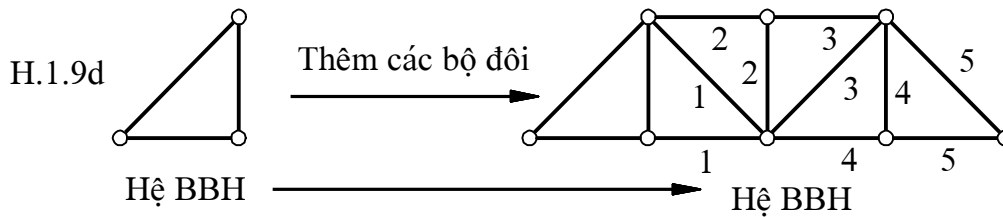


* **Tính chất của bộ đôi:** khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



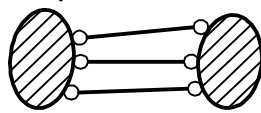
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



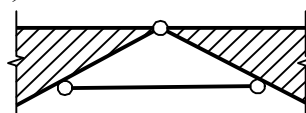
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

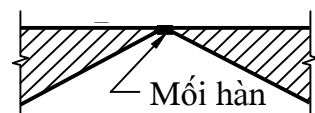
- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



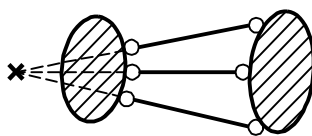
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

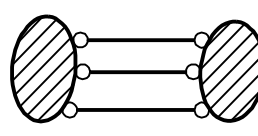
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



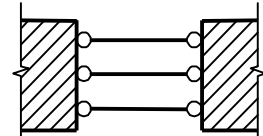
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e



(A) (BH) (B)

H.1.10f

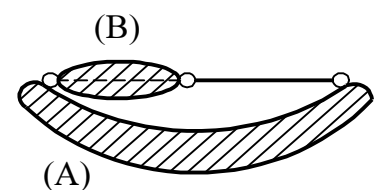
b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

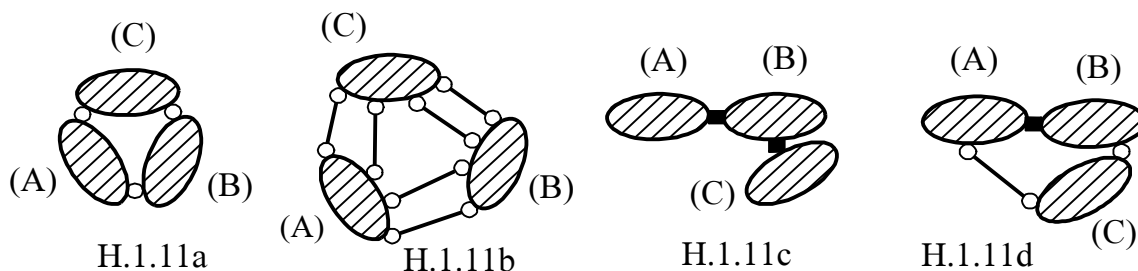
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



(A)

Hệ BHTT

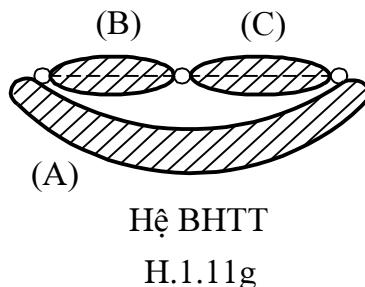
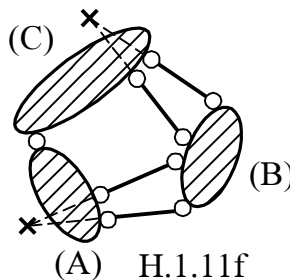
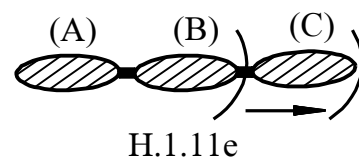
H.1.10g



2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



IV. Cách nối nhiều miếng cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

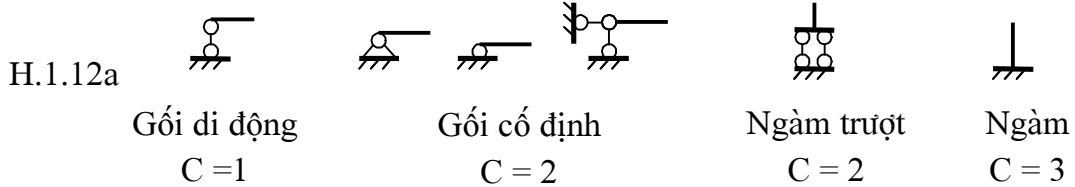
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



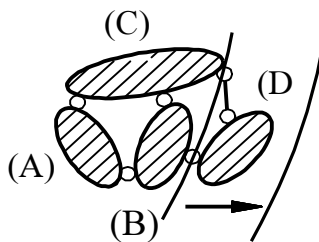
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

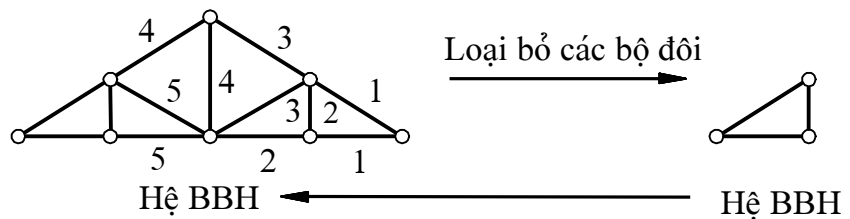
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



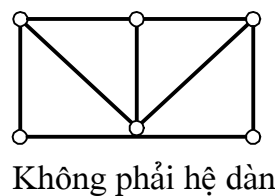
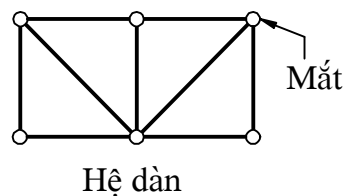
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



H.1.12d

* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = D - 2M + C \quad (1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

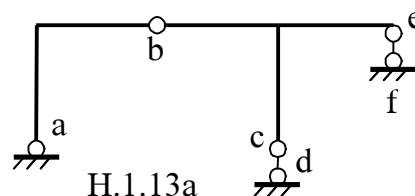
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

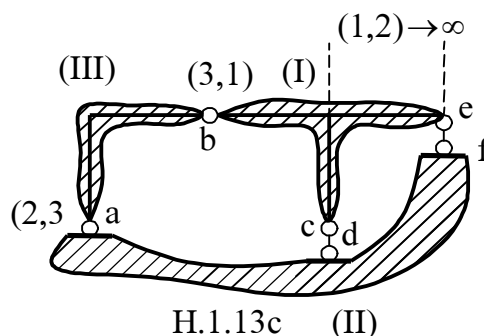
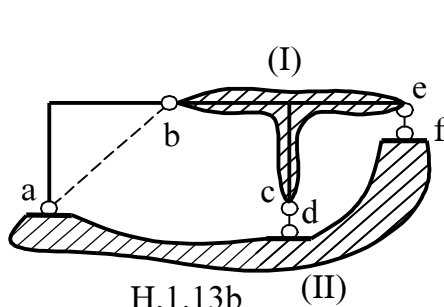
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

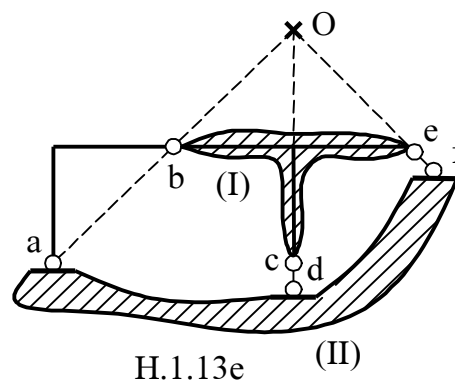
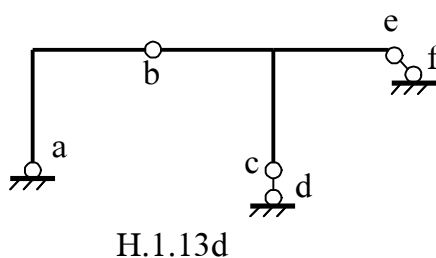
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



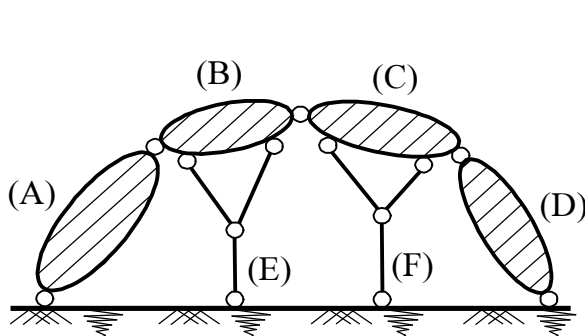
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

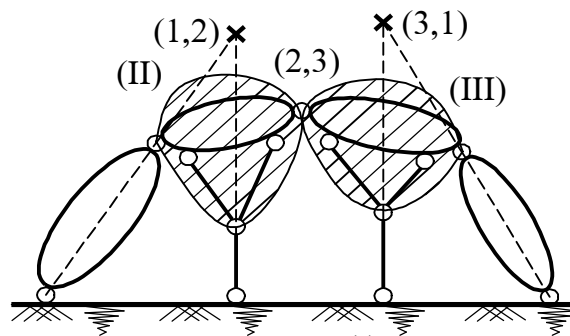
Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



H.1.13f



H.1.13g (I)

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6$, $T = 4$, $K = 3$, $C = 8$, $H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng

(A), (B), (C).

Vậy $D = 3$, $T = 2$, $K = 1$, $H = 0$, $C = 5$.

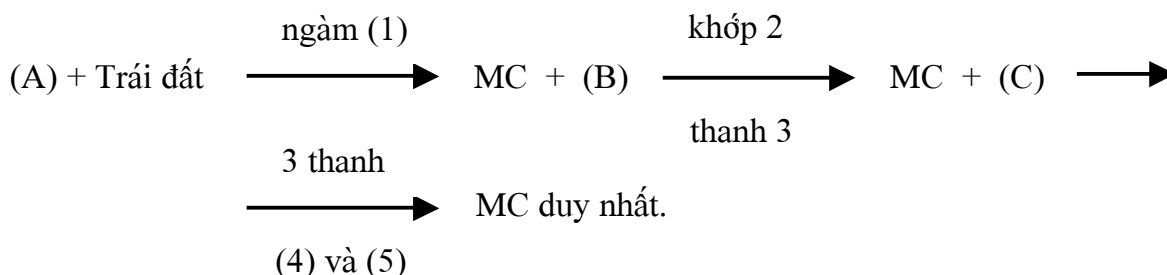
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

Vậy $D = 5$, $T = 0$, $K = 5$, $H = 0$,

$C = 5$. Thay vào (1 - 3)

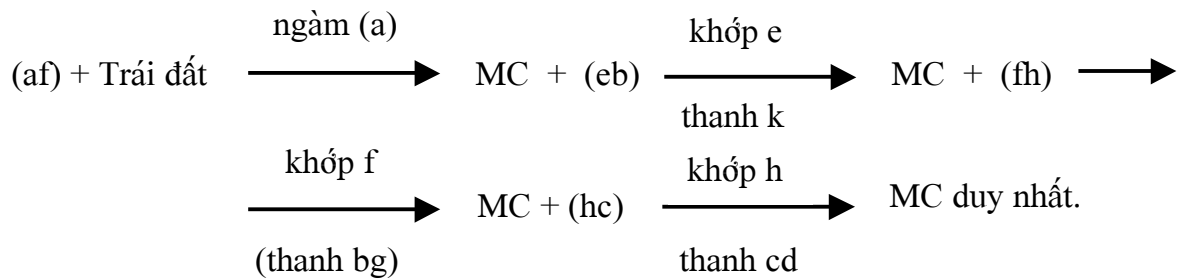
$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

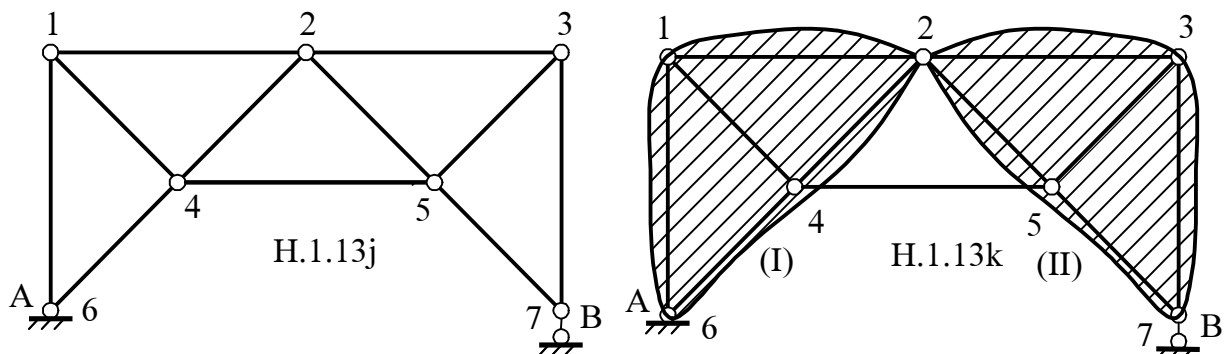
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nội đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

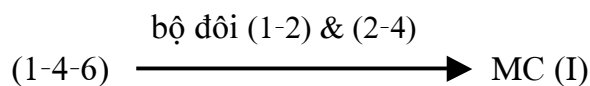
Vậy $D = 11$, $M = 7$, $C = 3$. Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

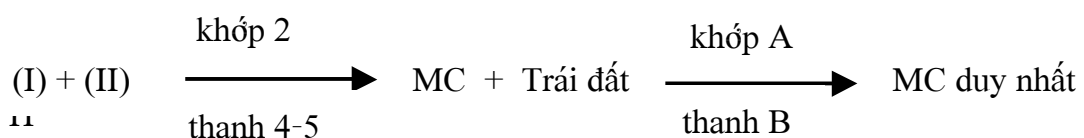
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

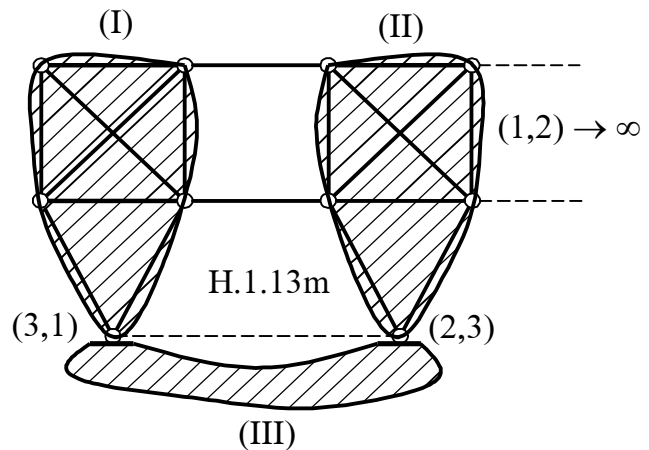
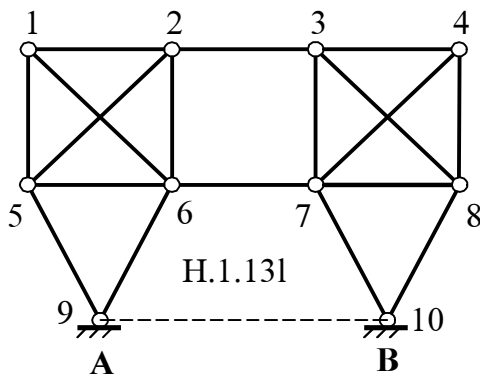
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18$, $M = 10$, $C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nổi ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG MỞ ĐẦU

§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:

1. **Đối tượng nghiên cứu:** là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. **Bài toán kiểm tra:** Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. **Bài toán thiết kế:** Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

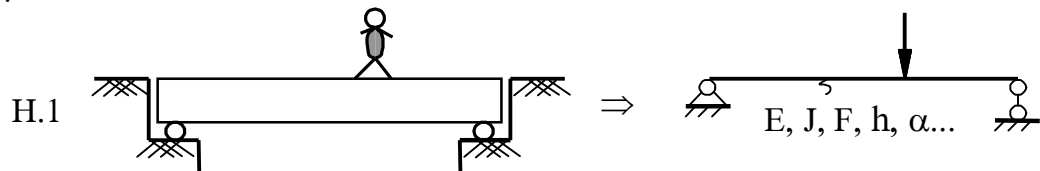
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

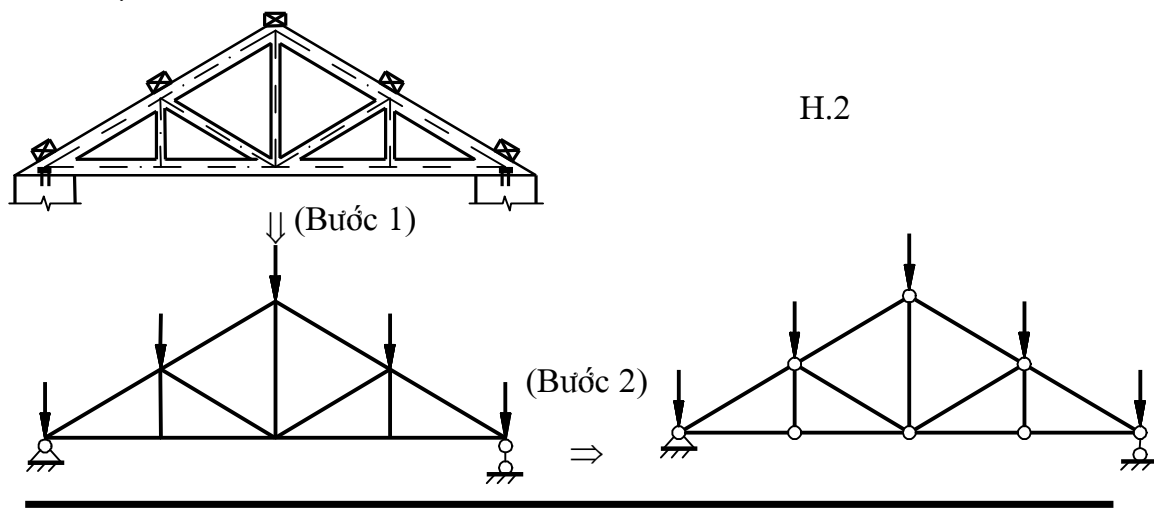
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

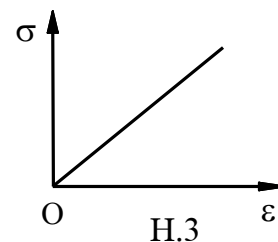


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).

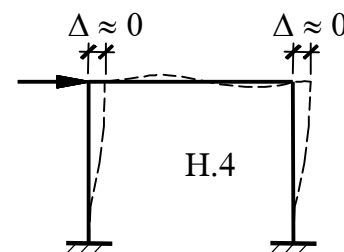


Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.

Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.



II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

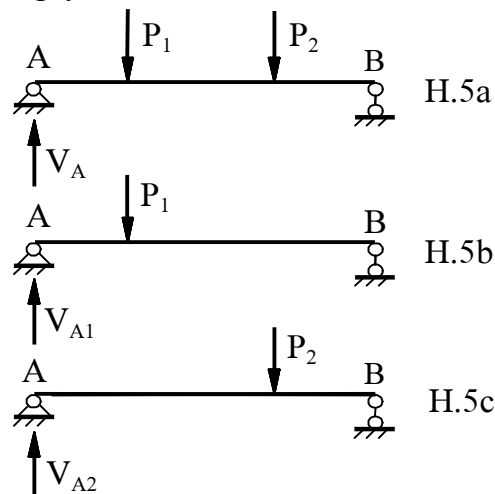
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1 , P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân $P_1, P_2, \dots, P_n$ đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi $\bar{S}_k$ là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

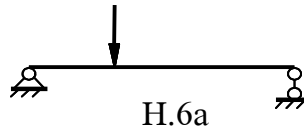
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

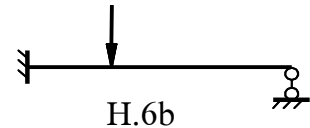
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

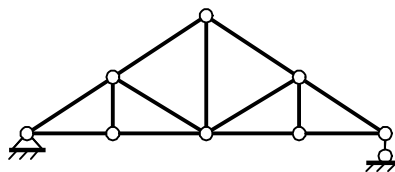
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



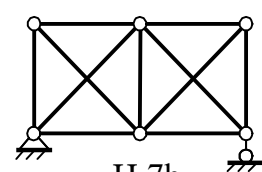
H.6a



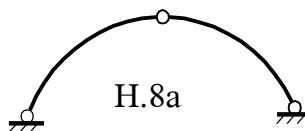
H.6b



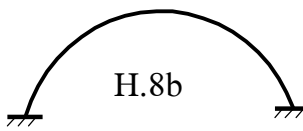
H.7a



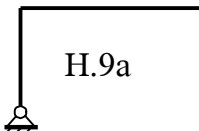
H.7b



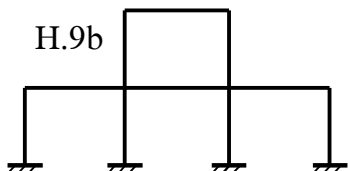
H.8a



H.8b

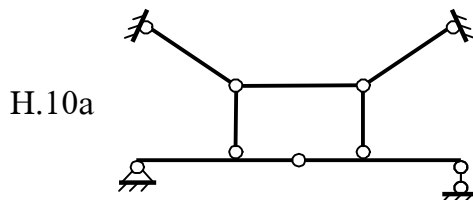


H.9a

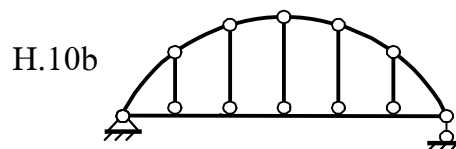


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

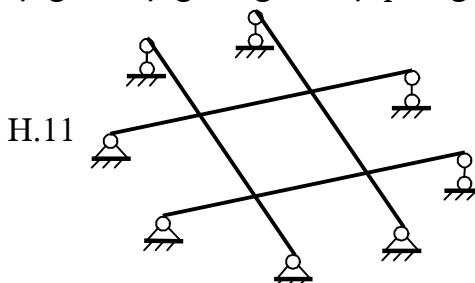


H.10b

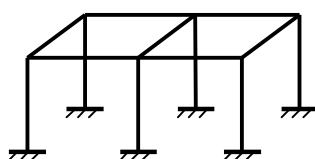
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

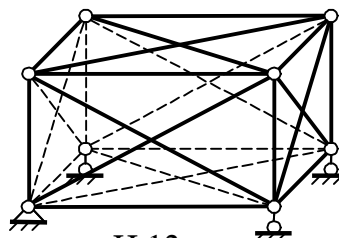
- Hệ dầm trực giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vòm (H.15)



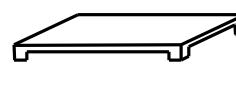
H.11



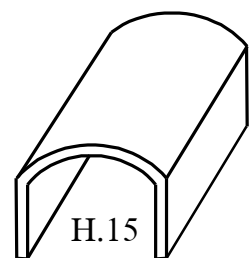
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

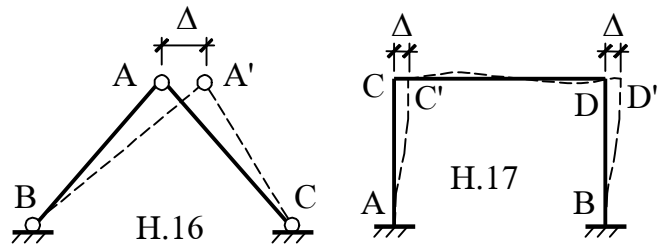
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. **Hệ tĩnh định:** là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. **Hệ siêu tĩnh:** là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

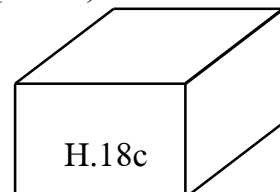
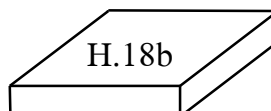
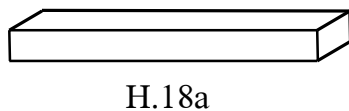
a. **Hệ xác định động:** là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. **Hệ siêu động:** là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

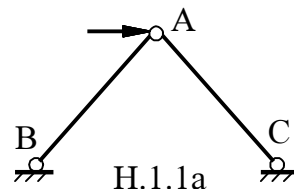
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

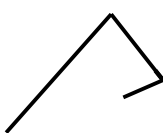
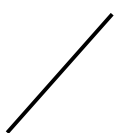
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

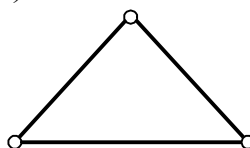
Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



H.1.1b



H.1.1c

* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

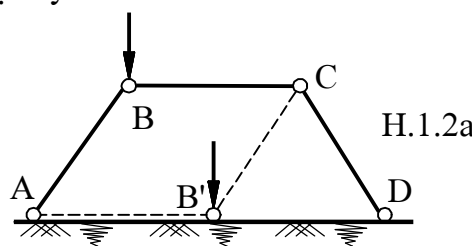
II. Hệ không bất biến hình:

1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

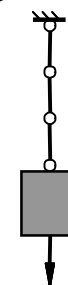
Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.



H.1.2a

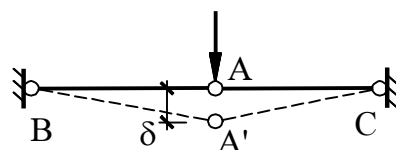


H.1.2b

2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



H.1.3a

trong hệ gần BHTT rất lớn.

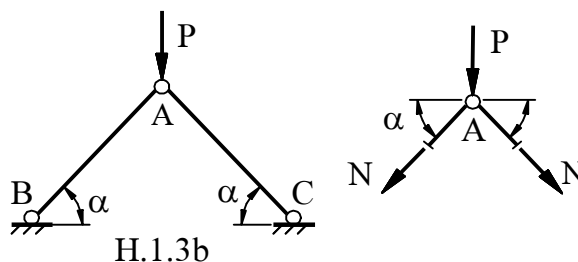
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}.$$

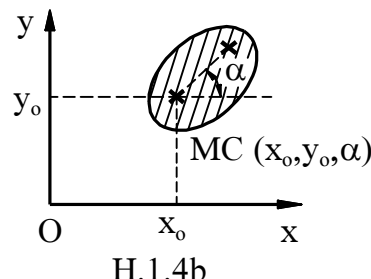
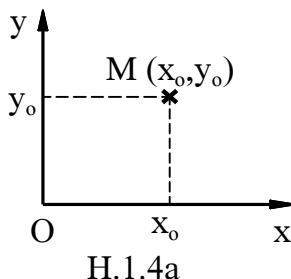
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha} \right) \rightarrow \infty.$$



III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



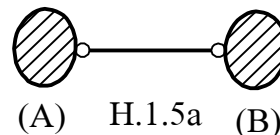
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

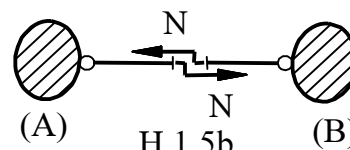
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

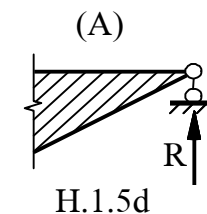
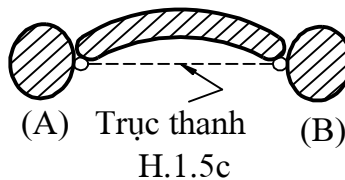
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

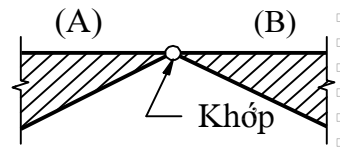
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

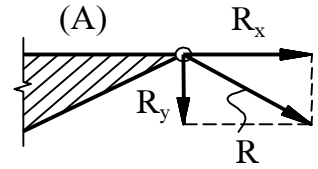
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

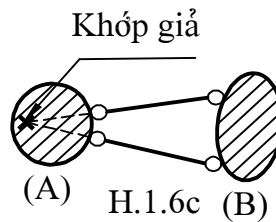


H.1.6a

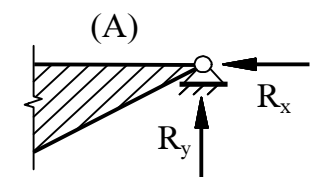


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần ($M, \vec{R}_x, \vec{R}_y$) (H.1.7b)

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

* *Chú ý:*

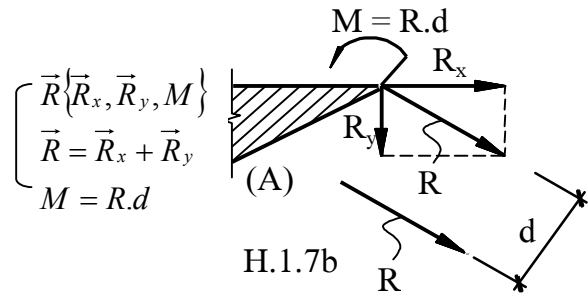
- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)

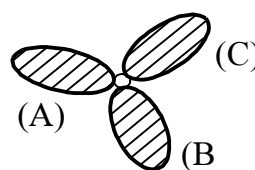
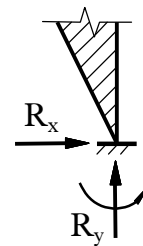
II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.



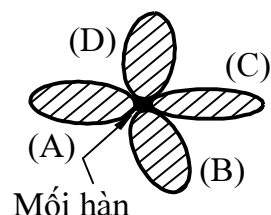
H.1.7a



H.1.7b



H.1.8a



H.1.8b

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p .

* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

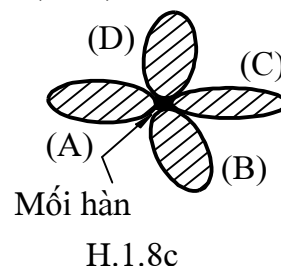
$$(1 - 1)$$

D : số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* Ví dụ: Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)

$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.



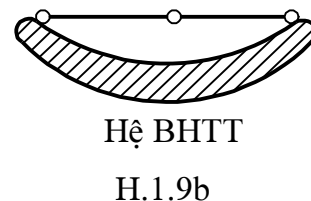
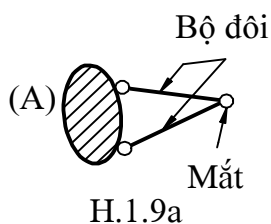
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

a. **Điều kiện cần:** để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

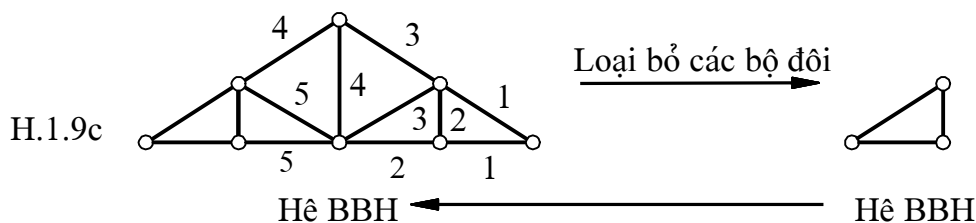
b. **Điều kiện đủ:** hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).

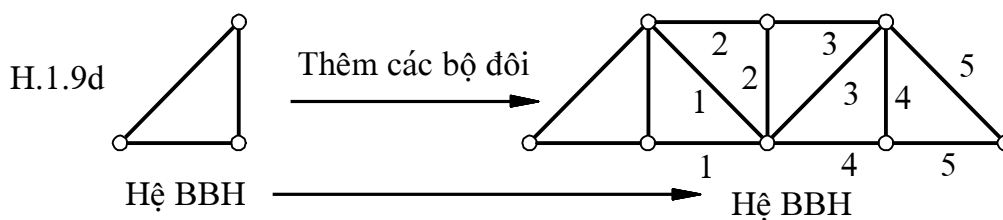


* **Tính chất của bộ đôi:** khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



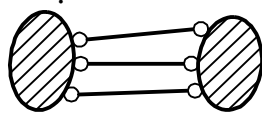
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



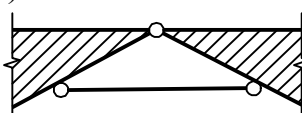
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

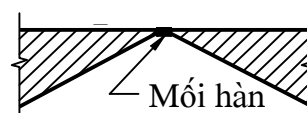
- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



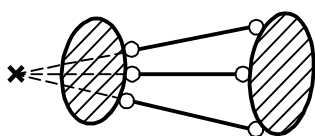
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

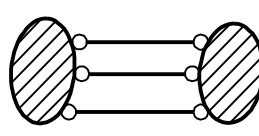
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



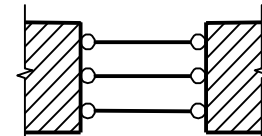
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e



(A) (BH) (B)

H.1.10f

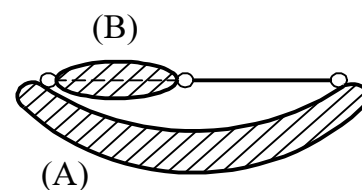
b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

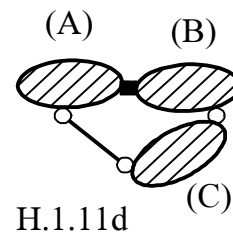
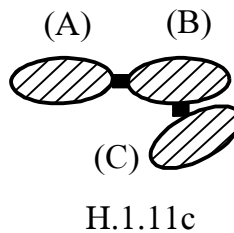
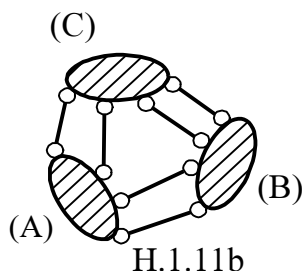
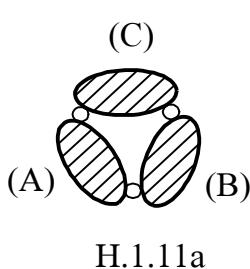
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



(A)

Hệ BHTT

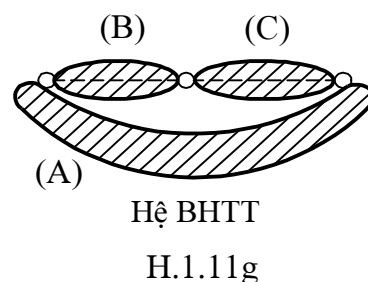
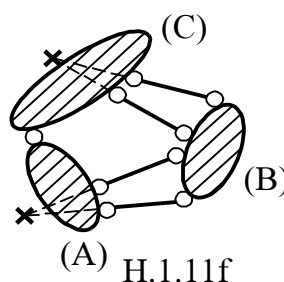
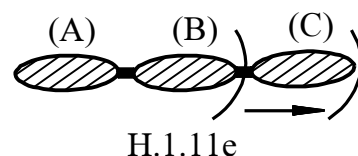
H.1.10g



2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



IV. Cách nối nhiều miếng

cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

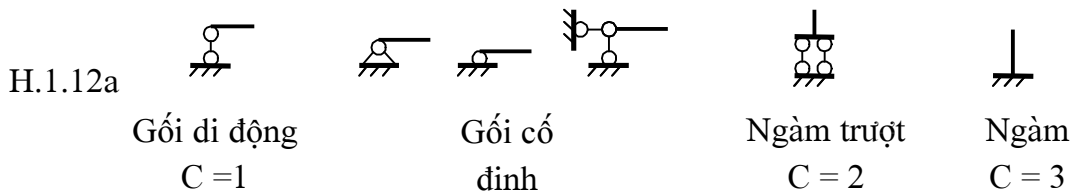
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



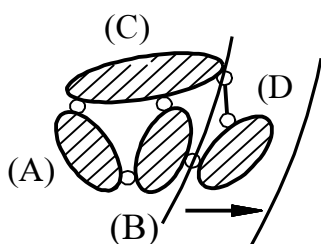
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

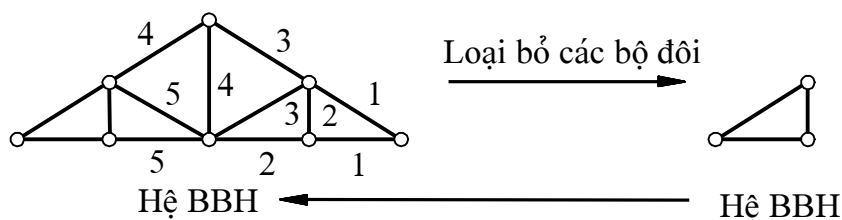
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



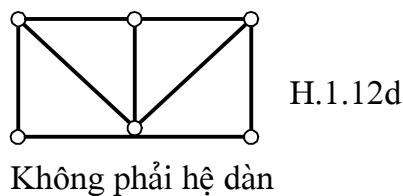
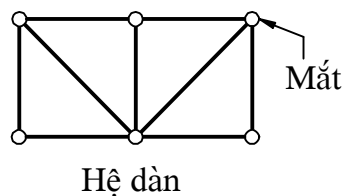
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$(1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

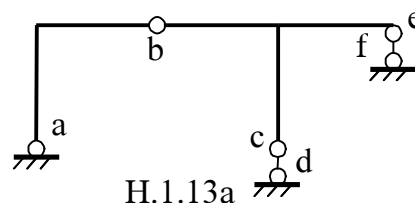
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

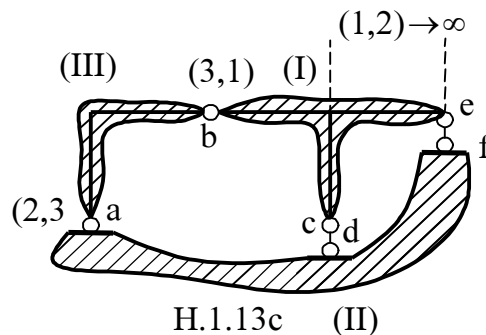
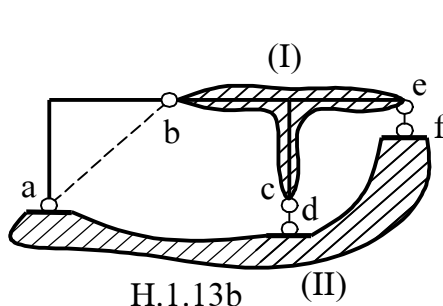
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

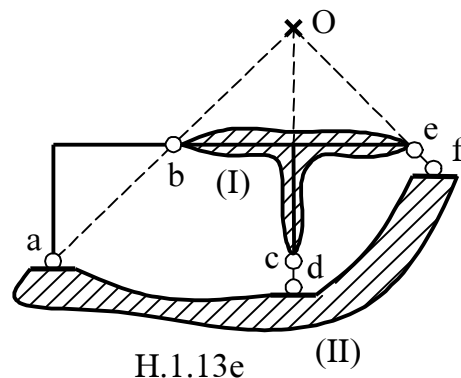
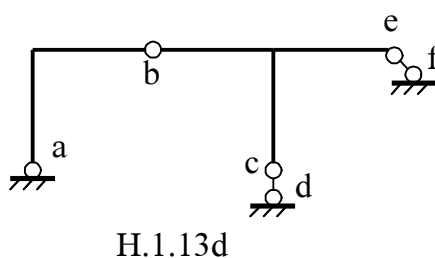
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



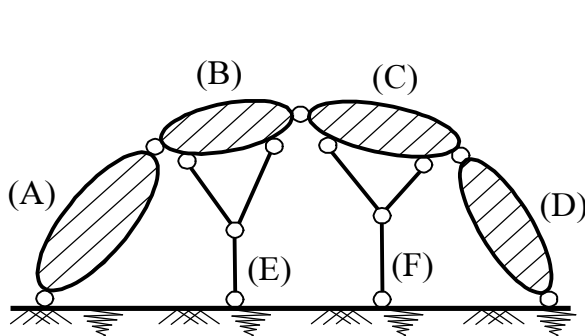
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

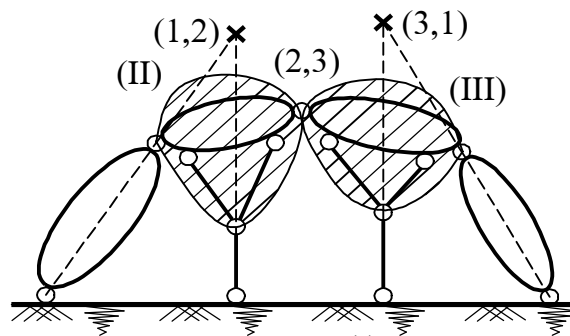
Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



H.1.13f



H.1.13g (I)

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6$, $T = 4$, $K = 3$, $C = 8$, $H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng

(A), (B), (C).

Vậy $D = 3$, $T = 2$, $K = 1$, $H = 0$, $C = 5$.

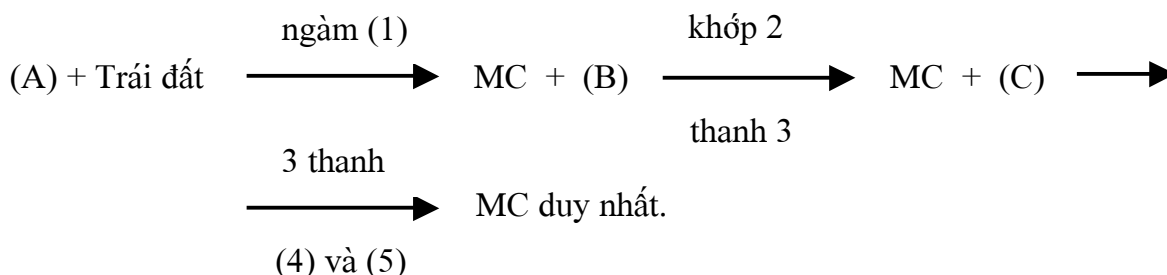
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

Vậy $D = 5$, $T = 0$, $K = 5$, $H = 0$,

$C = 5$. Thay vào (1 - 3)

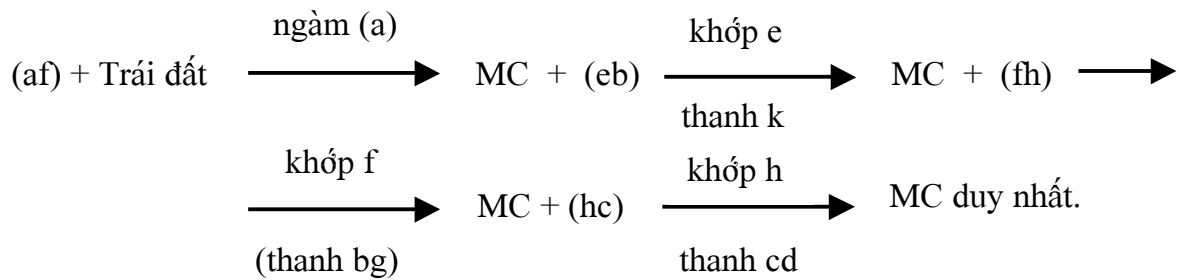
$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

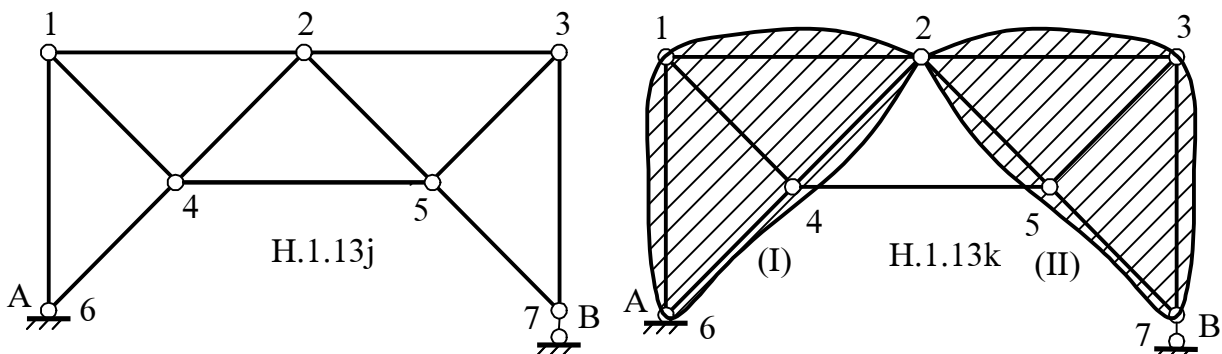
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nội đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

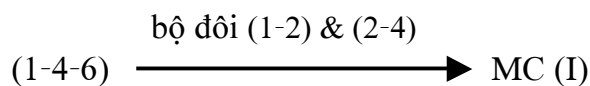
Vậy $D = 11$, $M = 7$, $C = 3$. Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

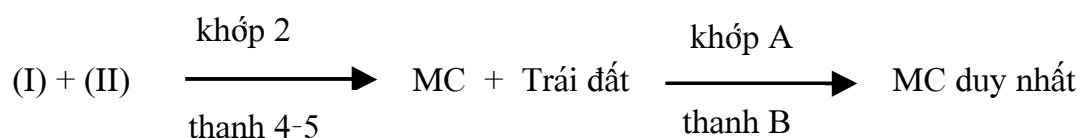
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



Hệ đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

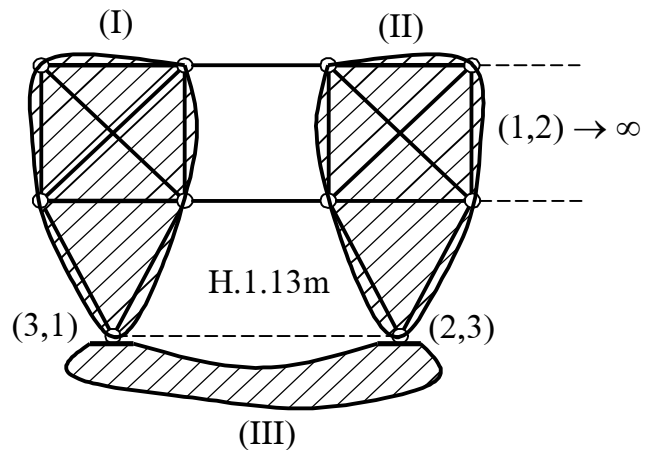
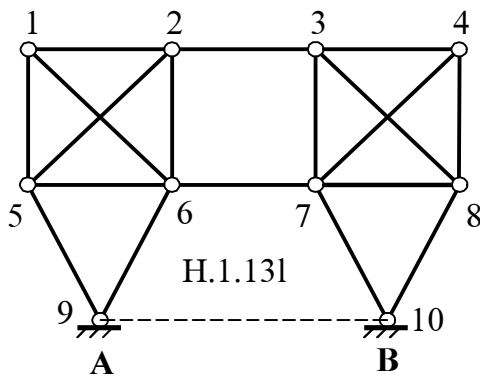
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18$, $M = 10$, $C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nổi ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG 2

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Nội lực:

1. Khái niệm: Nội lực là độ biến thiên lực liên kết của các phần tử bên trong cấu kiện khi cấu kiện chịu tác dụng của ngoại lực và các nguyên nhân khác.

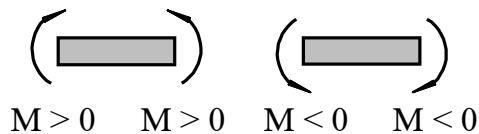
* *Chú ý:* Khái niệm về nội lực và phản lực là có thể đồng nhất với nhau nếu quan niệm tiết diện là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện. Vì vậy, sau này ta có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

2. Các thành phần nội lực: Môn Cơ học kết cấu chủ yếu xác định 3 thành phần nội lực:

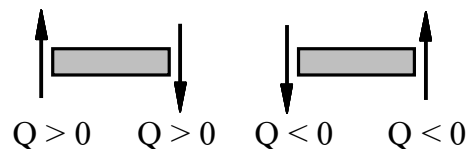
- Mômen uốn. Ký hiệu M .
- Lực cắt. Ký hiệu Q .
- Lực dọc. Ký hiệu N .

3. Quy ước dấu các thành phần nội lực:

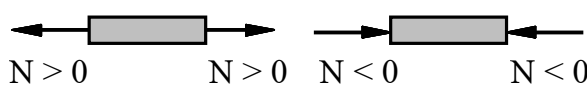
- Mômen uốn quy ước xem là dương khi nó làm căng thớ dưới và ngược lại (H.1a).
- Lực cắt quy ước xem là dương khi nó làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại (H.1b).
- Lực dọc quy ước xem là dương khi nó gây kéo và ngược lại (H.1c).



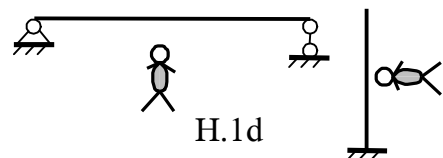
H.1a



H.1b



H.1c



H.1d

*

Chú ý:

- Cách quy ước dấu nội lực là giống môn Sức bền vật liệu.
- Quy ước chọn vị trí người đứng quan sát có hướng nhìn từ dưới lên đối với thanh ngang; từ phải sang trái đối với thanh đứng và thanh xiên khi xét dấu nội lực (H.1d).

4. Cách xác định nội lực (phản lực):

Nội lực (phản lực) được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Các bước tiến hành như sau:

* *Bước 1:* Thực hiện một mặt cắt qua tiết diện cần xác định nội lực (qua liên kết cần xác định phản lực). Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập. Giữ lại một phần bất kỳ.

* *Bước 2:* Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các thành phần nội lực (phản lực) tương ứng. Các thành phần này có chiều chưa biết, có thể giả thiết có chiều dương, và chúng cũng là các đại lượng cần tìm.

* *Bước 3:* Thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng các biểu thức giải tích. Xem bảng các điều kiện cân bằng.

Dạng điều kiện cân bằng	Dạng hệ lực		
	Hệ lực đồng quy tại O	Hệ lực song song	Hệ lực bất kỳ
Dạng I	$\sum X = 0; \sum Y = 0$. Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y		$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_A = 0$. Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y
Dạng II	$\sum X = 0; \sum M_A = 0$. Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với OA.	$\sum X = 0; \sum M_A = 0$. Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với phương các lực	$\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0$. Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với AB.
Dạng III	$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0$. Yêu cầu: A, B, O không được thẳng hàng	$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0$. Yêu cầu: A, B không được song song với phương các lực	$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0$. Yêu cầu: A, B, C không được thẳng hàng

Bảng 1. Bảng các điều kiện cân bằng.

* *Bước 4:* Giải hệ phương trình các điều kiện cân bằng sẽ xác định được các thành phần nội lực (phản lực). Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều của nội lực (phản lực) đúng chiều đã giả định và ngược lại.

* *Ví dụ:* Xác định các thành phần phản lực và nội lực tại tiết diện k (H.2a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P = -2(T) < 0.$$

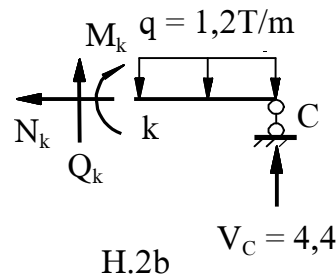
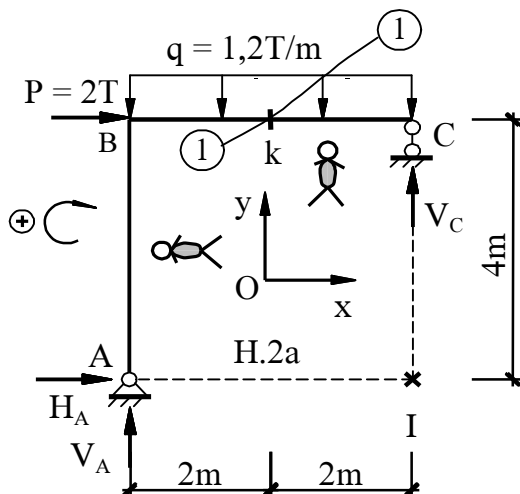
$$\sum M_I = 0 \Rightarrow 4.V_A + 4.P - 4.q.2 = 0.$$

$$\Rightarrow 4.V_A + 4.2 - 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_A = 0,4(T) > 0.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -4.V_C + 4.P + 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_C = 4,4(T) > 0$$

* Kiểm tra: $\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_C - 4.q = 0 \Leftrightarrow 0,4 + 4,4 - 4.1,2 = 0$ (đúng)



2. Xác định nội lực tại tiết diện k: $\{M_k, Q_k, N_k\}$

Thực hiện mặt cắt (1-1), giữ lại và xét cân bằng phần bên phải (H.2b).

$$\sum M_k = 0 \Rightarrow M_k + 2.q.1 - 2.V_C = 0$$

$$\Rightarrow M_k = 2.V_C - 2.q.1 = 2.4,4 - 2.1,2.1 = 6,4(T.m) > 0.$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_k - 2.q + V_C = 0$$

$$\Rightarrow Q_k = 2.q - V_C = 2.1,2 - 4,4 = -2(T) < 0.$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_k = 0(T)$$

II. Biểu đồ nội lực:

1. Khái niệm: Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực dọc theo chiều dài cấu kiện.

2. Các thành phần của biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: là hệ trục dùng để dựng các tung độ.
- Tung độ: tung độ của biểu đồ nội lực tại một vị trí nào đó là biểu thị cho nội lực tại tiết diện tương ứng.
- Đường biểu đồ: là đường nối các tung độ.

3. Các quy ước khi vẽ biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: thường chọn là đường trục thanh.
- Tung độ phải dựng vuông góc với đường chuẩn.
- Biểu đồ mômen: tung độ dương dựng về phía dưới, tung độ âm dựng lên trên đường chuẩn. Điều này có nghĩa là tung độ dựng về phía thõng căng.
- Biểu đồ lực cắt: tung độ dương dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.
- Biểu đồ lực dọc: tung độ dương thường dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.

- Ghi ký hiệu $\oplus$, $\ominus$ vào miền dương (âm) của biểu đồ lực cắt và lực dọc.

- Ghi tên và đơn vị trên các biểu đồ đã vẽ được.

4. Cách vẽ biểu đồ nội lực:

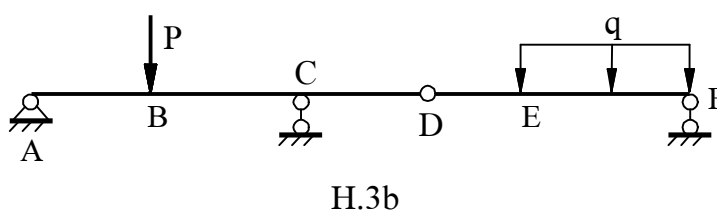
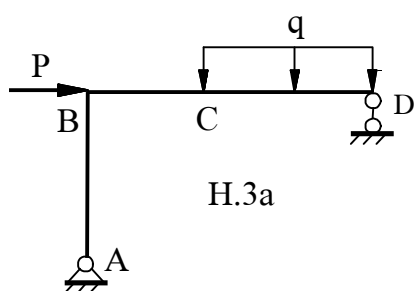
Theo môn Cơ học kết cấu, vẽ biểu đồ nội lực tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).

* *Bước 2:* Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng.

- Tiết diện đặc trưng: là những tiết diện chia hệ thành những đoạn thanh thẳng sao cho trên đoạn thanh đó hoặc là không chịu tải trọng hoặc là chỉ chịu tải trọng phân bố liên tục.

Như vậy, vị trí các tiết diện đặc trưng thường là: ở nút (nơi giao nhau các thanh), ở vị trí lực tập trung, ở hai đầu tải trọng phân bố, tại vị trí các gối tựa.... Ví dụ, với hệ cho trên hình (H.3a & H.3b), vị trí các tiết diện đặc trưng là nơi ghi ký hiệu bằng các chữ hoa A, B, C, E, F.



- Xác định nội lực: tiến hành theo nguyên tắc đã trình bày. Tuy nhiên, sau khi phân tích các điều kiện cân bằng, ta thấy có thể xác định như sau:

+ Mômen uốn tại tiết diện k (M_k): có giá trị được xác định bằng tổng mômen của tải trọng tác dụng lên phần hệ giữ lại lấy đối với trọng tâm tiết diện k.

+ Lực cắt tại tiết diện k (Q_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương vuông góc với tiếp tuyến trục thanh tại tiết diện k (phương của Q_k).

+ Lực dọc tại tiết diện k (N_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương tiếp tuyến với trục thanh tại tiết diện k (phương của N_k).

- Dấu của các đại lượng trong biểu thức xác định nội lực:

+ Tải trọng gây căng thò dưới tại tiết diện k sẽ cho M_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng tác dụng lên phần bên trái có chiều hướng lên hay phần bên phải có chiều hướng xuống sẽ cho Q_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng gây kéo tại tiết diện k sẽ cho N_k mang dấu dương và ngược lại.

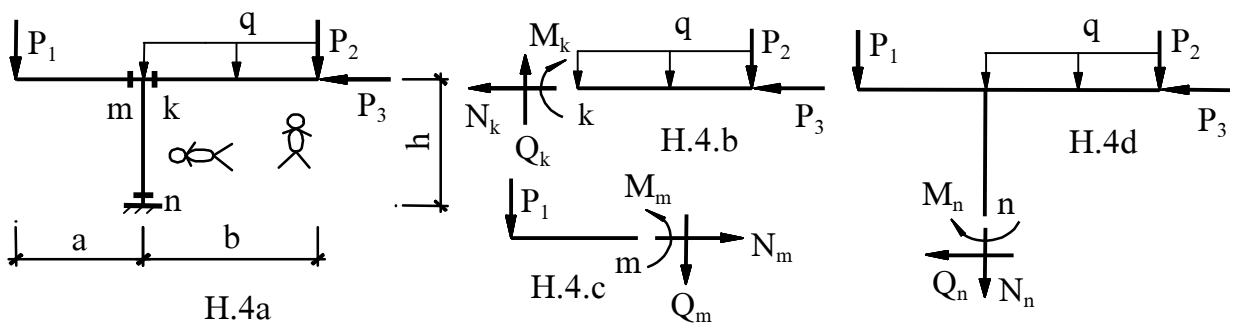
* *Bước 3:* Vẽ biểu đồ nội lực.

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ. Chi tiết sẽ được trình bày sau bước 4.

* *Bước 4:* Kiểm tra lại kết quả.

Giống môn học Sức bền vật liệu.

* *Ví dụ:* Xác định nội lực tại các tiết diện k, m, n của hệ cho trên hình (H.4a).



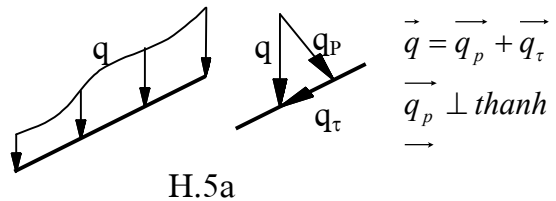
$$\begin{aligned} M_m &= -P_1 \cdot a \\ Q_m &= -P_1 \\ N_m &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} M_n &= P_1 \cdot a - P_2 \cdot b + P_3 \cdot h - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} \\ Q_n &= -P_3 \\ N_n &= -P_1 - P_2 - a \cdot b \end{aligned}$$

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ biểu đồ nội lực:

1. Mối liên hệ giữa nội lực và tải trọng:

$$q_p = -\frac{dQ}{ds}; q_\tau = \frac{dN}{ds}; Q = \frac{dM}{ds}$$

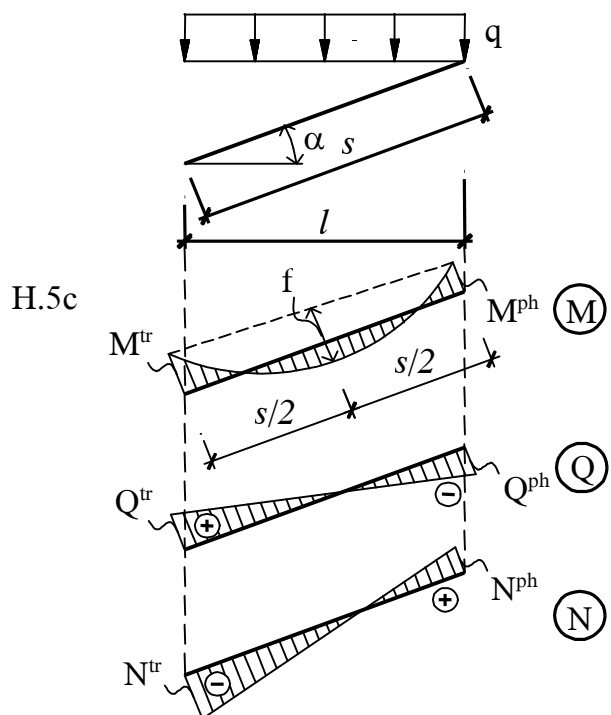
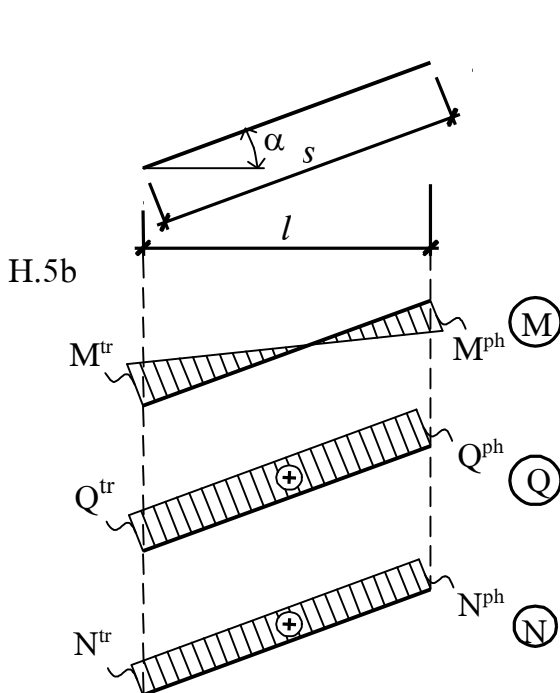
Mối liên hệ vi phân cho ta thấy tải trọng \$q\$ kém \$Q\$ & \$N\$ một bậc về mặt toán học; kém \$M\$ hai bậc về mặt toán học.



Mặc khác, với một hệ đã cho thì bậc của tải trọng trên mỗi đoạn thanh là hoàn toàn xác định, nghĩa là dạng đường biểu đồ \$(M)\$, \$(Q)\$, \$(N)\$ cũng hoàn toàn xác định.

2. Trường hợp trên đoạn thanh không chịu tải trọng tác dụng: (H.5b)

Tức là \$q = 0\$. Như vậy, \$(Q)\$ & \$(N)\$ trên đoạn này sẽ song song với đường chuẩn;



\$(M)\$ sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm.

Mối quan hệ nội lực ở 2 đầu đoạn thanh: $Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s}$; $N^{ph} = N^{tr}$

3. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải phân bố đều: (H.5c)

Tức là $q = \text{const}$. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm; (M) sẽ là đường parabol được vẽ qua ba điểm.

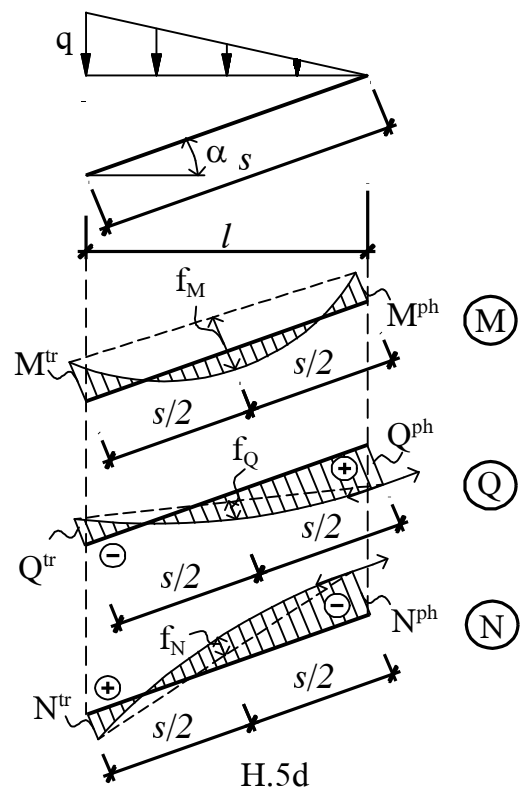
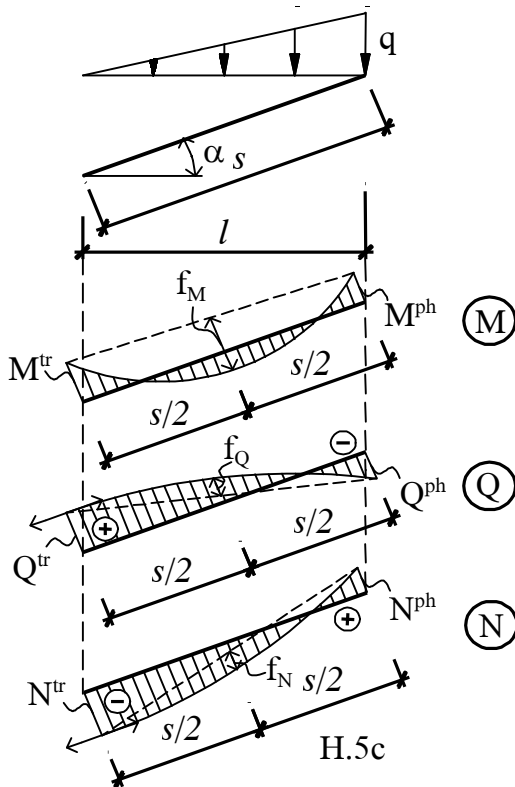
$f = \frac{q.l^2}{8}$ (gọi là tung độ treo); f treo vuông góc với đường chuẩn và theo chiều q .

Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha$$

4. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố hình tam giác: (H.5c & H.5d)

Tức là q có dạng bậc nhất. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường parabol được vẽ qua ba điểm; (M) sẽ là đường bậc ba, cho phép vẽ qua ba điểm.



- $f_M = \frac{q.l^2}{16}$; f_M treo vuông góc với đường chuẩn và treo theo chiều q .

- $f_Q = \frac{q.l}{8}.\cos\alpha$, f_Q treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

- $f_N = \frac{q.l}{8}.\sin\alpha$, f_N treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

* Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên phải (H.5c):

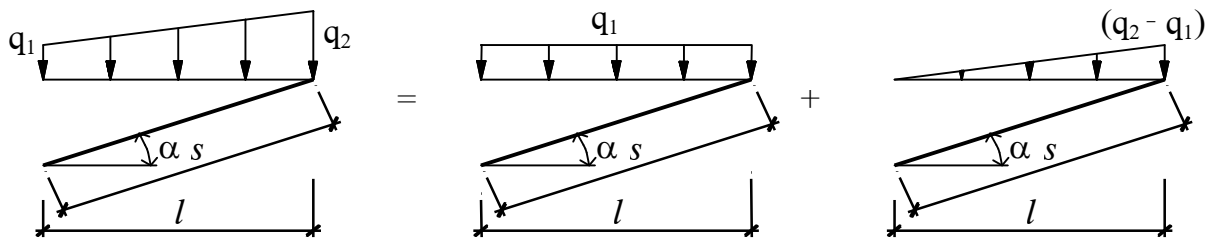
$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{6} q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{3} q.l.\cos\alpha;$$

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên trái (H.5d):

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{3} q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{6} q.l.\cos\alpha;$$

5. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố hình thang:

Dạng đường của các biểu đồ không thay đổi so với trường hợp tải phân bố hình tam giác. Có thể đưa về thành tổng của hai bài toán đã biết (H.5e).

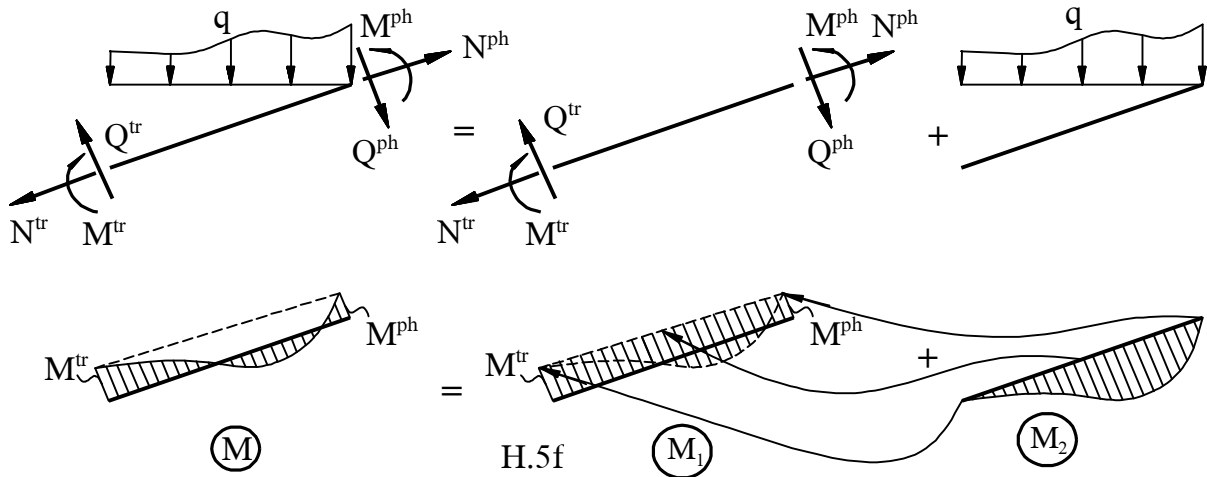


H.5e

6. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố quy luật bất kỳ:

Dùng cách treo biểu đồ (H.5f).

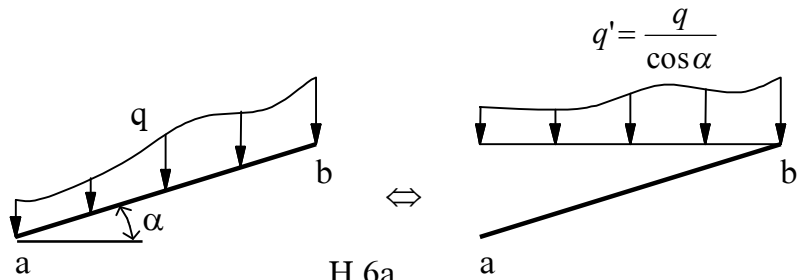
- Đối với (Q), (N), cách thực hiện tương tự.



H.5f

* Các chú ý:

- Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh, có thể đưa về theo phương ngang bằng cách chia tải trọng đó cho $\cos\alpha$ (H.6a).

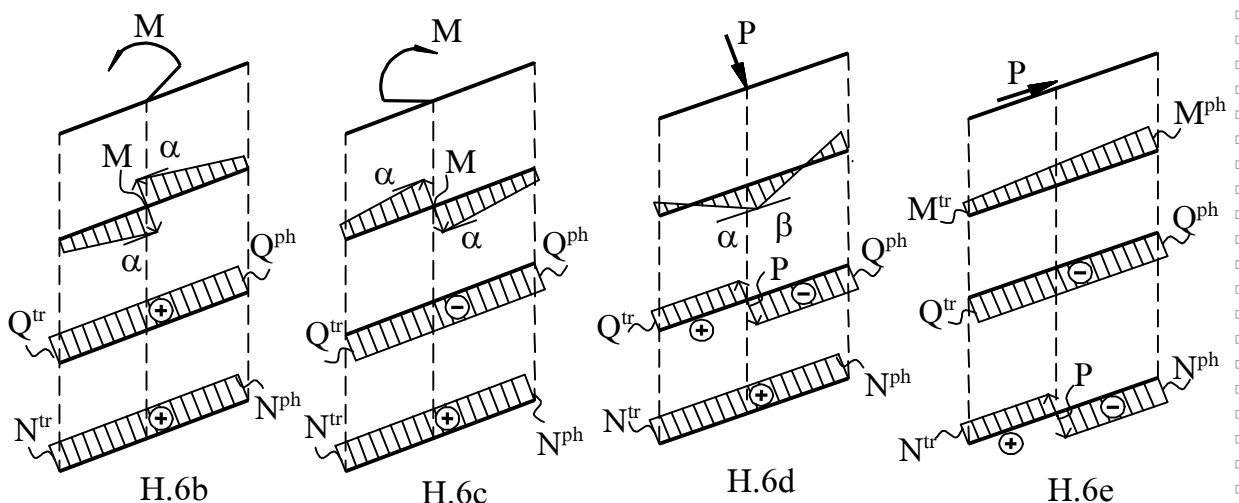


H.6a

- Tại vị trí chịu tải trọng tập trung, nội lực có sự thay đổi:

+ Mômen tập trung (H.6b & H.6c)

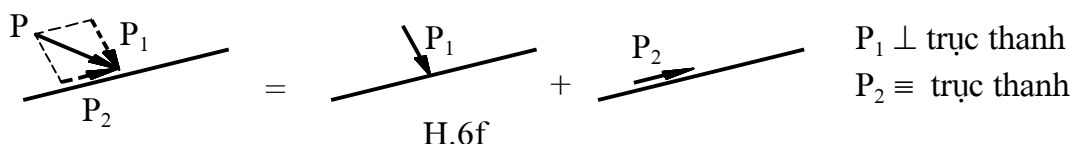
+ Lực tập trung có phương vuông góc với trục thanh (H.6d).



$$Q^{tr} = Q^{ph} = \operatorname{tg} \alpha; N^{tr} = N^{ph}$$

+ Lực tập trung có phương trùng trục thanh (H.6e).

+ Lực tập trung có phương bất kỳ: có thể đưa về tổng của hai bài toán (H.6f).



§ 2. DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

I. Dầm đơn giản:

1. Phân tích cấu tạo hệ:

a. **Định Nghĩa:** Dầm đơn giản là hệ gồm một thanh thẳng nối với trái đất bằng số liên kết tương đương với ba liên kết loại một để tạo thành hệ BBH.

b. Phân loại:

- Dầm đơn giản hai đầu khớp. (H.7a)
- Dầm đơn giản có đầu thừa. (H.7b)
- Dầm công xôn. (H.7c)



2. Xác định các thành phần phản lực:

Trong hệ dầm đơn giản, tồn tại ba thành phần phản lực. Cách xác định đã được trình bày trong phần xác định phản lực. Tuy nhiên, để tránh việc giải hệ phương trình toán học, nên thiết lập sao cho trong mỗi phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu hai ẩn còn lại đồng quy tại một điểm I, phương trình cần thiết lập là tổng mômen toàn hệ đối với điểm I bằng không. ($\sum M_I = 0$)

- Nếu hai ẩn còn lại song song nhau, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu toàn hệ lên phương vuông góc phương hai ẩn song song bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương hai ẩn song song)

- Nếu hai ẩn còn lại là một lực và một mômen, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu lên phương vuông góc của ẩn lực bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương ẩn lực)

* Minh họa:

1. Xác định phản lực của hệ cho trên

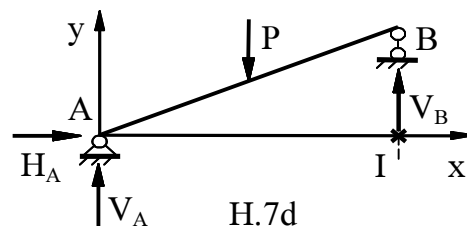
hình (H.7d):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, V_B\}$

$$- H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_1(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$$

$$- V_A: \sum M_I = 0 \Rightarrow f_2(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$$

$$- V_B: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B) = 0 \Rightarrow V_B.$$



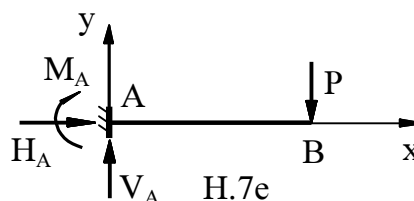
2. Xác định phản lực của hệ cho trên hình (H.7e):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, M_A\}$

$$- H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_4(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$$

$$- M_A: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_5(M_A) = 0 \Rightarrow M_A.$$

$$- V_A: \sum Y = 0 \Rightarrow f_6(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$$



3. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng: đã trình bày

- Dựng tung độ biểu đồ tại các tiết diện đặc trưng.

- Vẽ biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh theo các liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực.

4. Kiểm tra lại biểu đồ nội lực: đã trình bày.

CÁC VÍ DỤ VỀ DẦM ĐƠN GIẢN

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.8a)

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

$$- \sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$- \sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow 8.V_B - 6.30 - 10.4.2 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 32,5 (> 0)$$

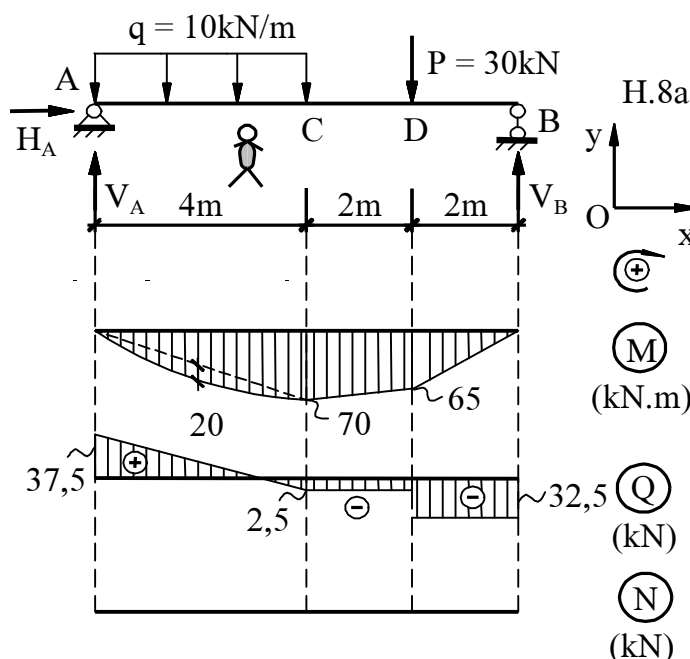
$$- \sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow 8.V_A - 2.30 - 10.4.6 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 37,5 (> 0)$$

* Kiểm tra: $\sum Y = 0$

$$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$$



$$\Leftrightarrow -4.10 - 30 + 37,5 + 32,5 = 0 \quad (\text{đúng})$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = +V_A = 37,5$; $N_A = H_A = 0$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B = -32,5$; $N_B = 0$.

Tại C: $M_C = V_A.4 - q.4.2 = 37,5.4 - 10.4.2 = 150 - 80 = 70$.

$$Q_C = V_A - q.4 = 37,5 - 10.4 = 2,5; N_C = 0.$$

Tại D: $M_D = +V_B.2 = 32,5.2 = 65$.

Tại D có lực tập trung nên biểu đồ (Q) có bước nhảy.

$$Q_{DC} = +V_A - q.4 = -2,5; Q_{DB} = -V_B = 32,5.$$

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{10.4^2}{8} = 20$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.9a)

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = 2,309.$$

1. Xác định các thành phần phản lực:

$$\{M_A, H_A, V_B\}$$

$$-\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$-\sum M_I = 0$$

$$\Rightarrow M_A + M - 2.P - q^{td}.2.1 = 0.$$

$$\Rightarrow M_A + 3,5 - 2.3 - 2,309.2.1 = 0.$$

$$\Rightarrow M_A = +7,118 (> 0)$$

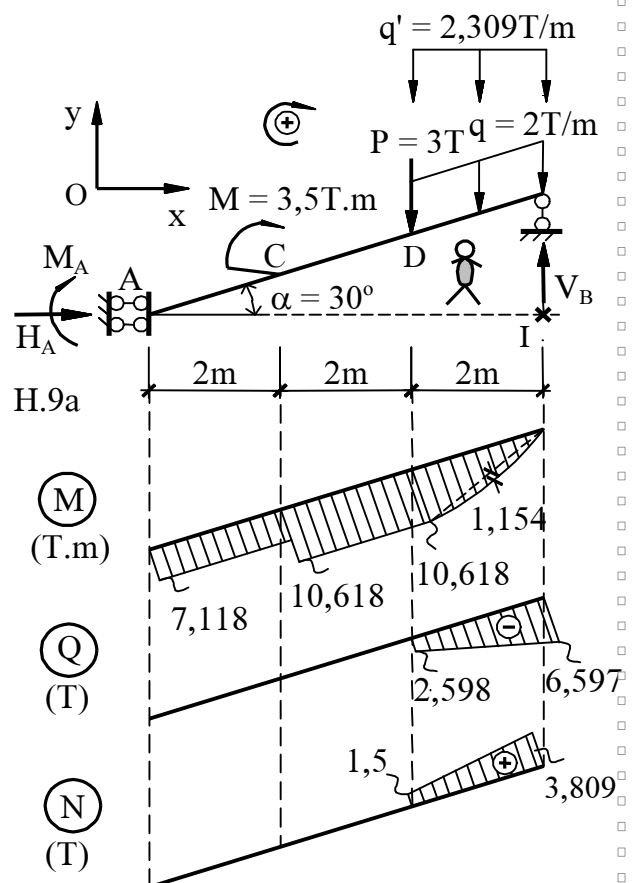
$$-\sum Y = 0 \Rightarrow V_B - P - q^{td}.2 = 0$$

$$\Rightarrow V_B - 3 - 2,309.2 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = +7,618 (> 0)$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

- Tại A: $M_A = 7,118$; $Q_A = 0$;
 $N_A = 0$.



- Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B \cdot \cos \alpha$

$$= -7,618 \cdot \cos 30^\circ = -6,597.$$

$$N_B = V_B \cdot \sin \alpha = 7,618 \cdot \sin 30^\circ = 3,809.$$

- Tại C: $M_{CA} = 7,118$; $M_{CD} = M_A + M = 7,118 + 3,5 = 10,618$.

$$Q_{CA} = Q_{CD} = 0, N_{CA} = N_{CD} = 0.$$

- Tại D: $M_D = M_A + M = 10,618$; $Q_{DC} = 0$; $Q_{DB} = -P \cdot \cos \alpha = -3 \cdot \cos 30^\circ = -2,598$.

$$N_{CD} = 0; N_{DB} = P \cdot \sin \alpha = 3 \cdot \sin 30^\circ = 1,5$$

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{2,309 \cdot 2^2}{8} = 1,154.$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.10

* Nhận xét rằng nếu ta giữ lại phần bên

phải khi xét cân bằng một phần hệ thì không cần quan tâm đến phản lực.

1. Xác định nội lực tại các tiết diện

đặc trưng:

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ$

$$Q_C = 2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) = 3,414;$$

$N_C = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

Tại B: $M_{BC} = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 2 =$

$$= -2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) \cdot 2 = -6,828;$$

$M_{BA} = M_{BC} + M = -3,828$;

$Q_B = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ = 3,414$;

$N_B = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

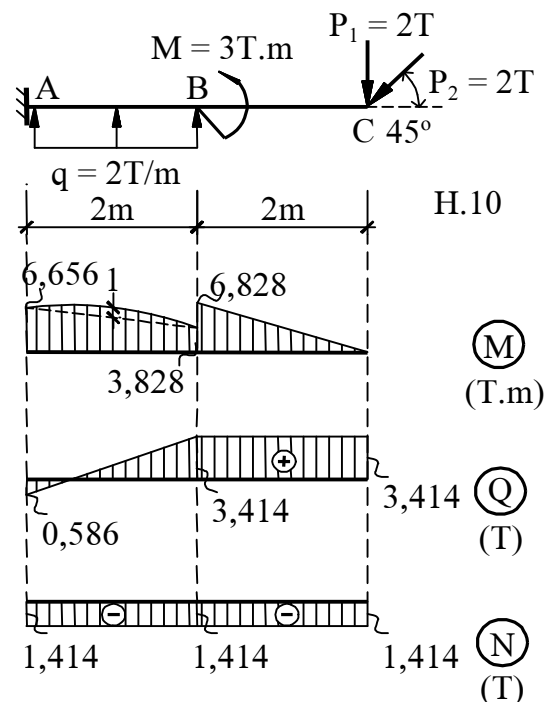
Tại A: $M_A = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + M +$
 $+ 2 \cdot q \cdot 1 = -(2 + 2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 =$
 $= -6,656$;

$Q_A = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot q = 2 + 2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot 2 = -0,586$; $N_A = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

2. Vẽ biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên đoạn AB có tải trọng q phân bố đều, có tung độ treo:



$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

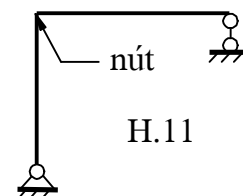
c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

II. Khung đơn giản:

1. Định nghĩa: Khung đơn giản là hệ gồm một thanh gãy khúc nối với trái đất bằng các liên kết tương đương ba liên kết loại một tạo thành hệ BBH.



2. Xác định các thành phần phản lực: Gồm ba thành phần và được xác định như trường hợp dầm đơn giản.

2. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

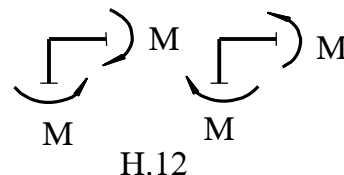
Tương tự trường hợp dầm đơn giản.

3. Kiểm tra lại các biểu đồ nội lực. (đã trình bày)

* *Chú ý:*

Nút khung có tính chất: tổng mômen ngoại lực và nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút khung bằng không (cân bằng mômen nút). Thường sử dụng tính chất này để kiểm tra sự cân bằng mômen nút cho kết quả tính toán.

Trường hợp đặc biệt: một nút có hai đầu thanh quy tụ và không chịu mômen ngoại lực, mômen nội lực tại hai đầu thanh đó bằng nhau về giá trị và cùng làm căng thớ bên trong hay bên ngoài.



CÁC VÍ DỤ VỀ KHUNG ĐƠN GIẢN

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.13a

1. Xác định các thành phần phản lực:

lực: $\{V_A, H_A, V_D\}$

$$-\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$-\sum M_I = 0 \Rightarrow 4.V_A - 4.q.2 - 6.P = 0$$

$$\Rightarrow 4.V_A - 4.2.2 - 6.3 = 0.$$

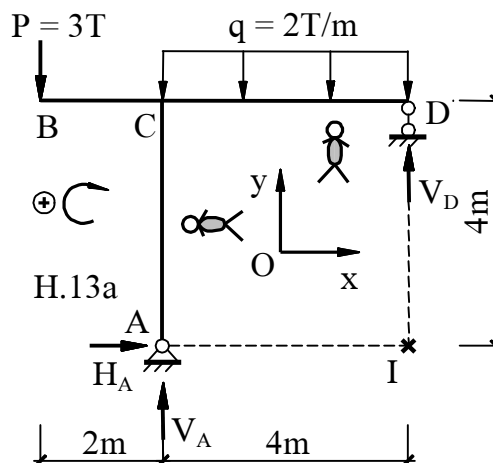
$$\Rightarrow V_A = 8,5 (> 0)$$

$$-\sum M_A = 0 \Rightarrow -4.V_D + 4.q.2 - 2.P = 0$$

$$\Rightarrow -4.V_D + 4.2.2 - 2.3 = 0.$$

$$\Rightarrow V_D = 2,5 (> 0)$$

* Kiểm tra: $\sum Y = 0$



$$\Leftrightarrow -q \cdot 4 - P + V_A + V_D = 0$$

$$\Leftrightarrow -2,4 - 3 + 8,5 + 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = -H_A = 0$; $N_A = -V_A = -8,5$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -P = -3$; $N_B = 0$.

Tại C: $M_{CA} = -3 \cdot H_A = 0$; $M_{CB} = -2 \cdot P = -6$; $M_{CD} = -2 \cdot P - 3 \cdot H_A = -6$;

$$Q_{CA} = -H_A = 0$$
; $Q_{CB} = -P = -3$; $Q_{CD} = -P + V_A = -3 + 8,5 = 5,5$.

$$N_{CA} = -V_A = -8,5$$
; $N_{CB} = 0$; $N_{CD} = -H_A = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút C (H.13b).

Tại D: $M_D = 0$, $Q_D = -V_D = -2,5$; $N_D = 0$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn CD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{2,4^2}{8} = 4$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

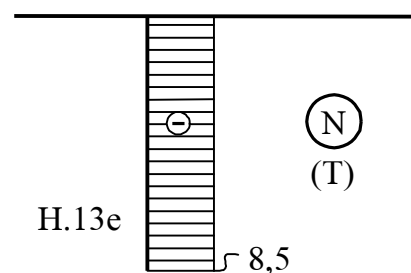
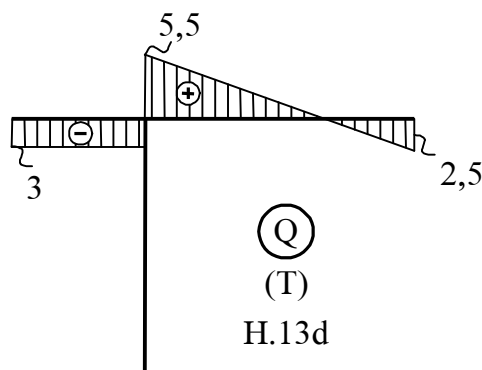
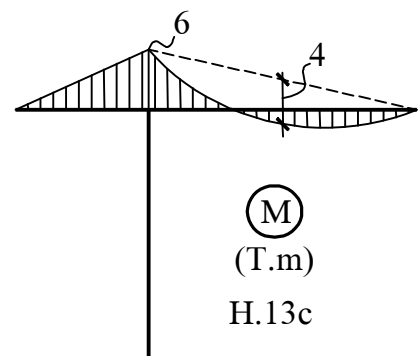
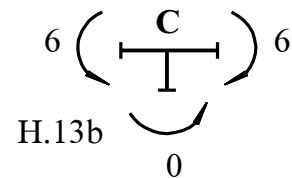
b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.14a.

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, V_C, H_B\}$

$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_B = -P$$

$$\Rightarrow H_B = -2 (< 0).$$

$$-\Sigma M_I = 0 \Rightarrow -8 \cdot V_C + 4 \cdot P +$$

$$+ 4 \cdot q \cdot 2 + \frac{4 \cdot q}{2} \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -8.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 + \\ &+ \frac{4.1,2}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0 \\ &\Rightarrow V_C = 3,8 (> 0) \\ &-\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 8.V_A + 4.P - \\ &4.q.6 - \frac{4.q}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] = 0 \\ &\Rightarrow 8.V_A + 4.2 - \\ &4.1,2.6 - \frac{4.1,2}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 \right] = 0. \\ &\Rightarrow V_A = 3,4 (> 0) \end{aligned}$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_C - 4.q - \frac{4.q}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3,4 + 3,8 - 4.1,2 - \frac{4.1,2}{2} = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 3,4$; $N_A = -P = -2$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -H_B = -(-2) = 2$; $N_B = 0$

Tại D: $M_{DA} = 4.V_A - 4.q.2 = 4.3,4 - 4.1,2.2 = 4$.

$M_{DB} = -4.H_B = -4.(-2) = 8$.

$M_{DE} = 4.V_A - 4.q.2 - 4.H_B = 4.3,4 - 4.1,2.2 - 4.(-2) = 12$

* Kiểm tra cân bằng mômen nút D: (tự kiểm tra)

$Q_{DA} = V_A - 4.q = 3,4 - 4.1,2 = -1,4$

$Q_{DB} = -H_B = -(-2) = 2$; $Q_{DE} = V_A - 4.q = -1,4$.

$N_{DA} = -P = -2$; $N_{DB} = 0$; $N_{DE} = -P - H_B = 0$.

Tại E: $M_{ED} = 0$; $M_{EC} = 0$; $Q_{ED} = -V_C = -3,8$; $Q_{EC} = 0$.

$N_{ED} = 0$; $N_{EC} = -V_C = -3,8$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

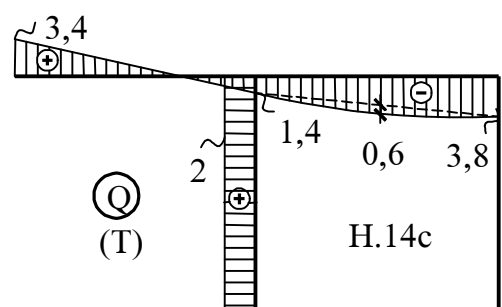
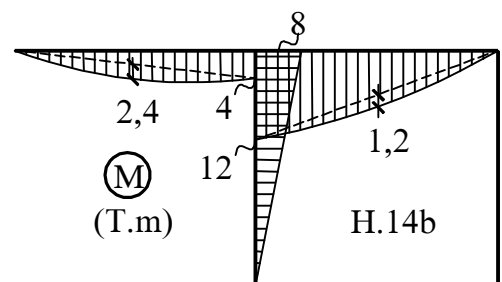
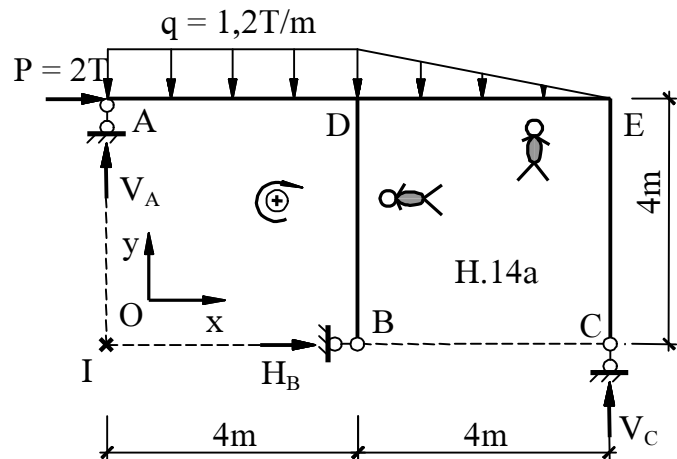
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.4^2}{8} = 2,4$$

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{16} = \frac{1,2.4^2}{16} = 1,2$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):



- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q \cdot l}{8} \cdot \cos \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 1 = 0,6$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q \cdot l}{8} \cdot \sin \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 0 = 0$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ:

Tự kiểm tra.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.15a

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{1,2}{\cos 30^\circ} = 1,346.$$

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$\Sigma M_I = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot q^{td} \cdot 4 + 2 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot 1,346 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_A = 2,922 (> 0)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot q^{td} \cdot 2 + 8 \cdot P = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot 1,346 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_C = 4,461 (> 0)$$

$$\text{* Kiểm tra: } \Sigma Y = 0 \Leftrightarrow -q^{td} \cdot 4 - P + V_A + V_C = 0$$

$$\Leftrightarrow -1,346 \cdot 4 - 2 + 2,922 + 4,461 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

$$\text{Tại A: } M_A = 0; Q_A = V_A \cdot \cos \alpha = 2,922 \cdot \cos 30^\circ = 2,530; N_A = -V_A \cdot \sin \alpha = -1,461.$$

$$\text{Tại B: } M_B = 2 \cdot V_C - 4 \cdot P = 2 \cdot 4,461 - 4 \cdot 2 = 0,922.$$

$$Q_{BA} = V_A \cdot \cos \alpha - 4 \cdot q^{td} \cdot \cos \alpha = -2,132; Q_{BC} = P - V_C = -2,461.$$

$$N_{BA} = -V_A \cdot \sin \alpha +$$

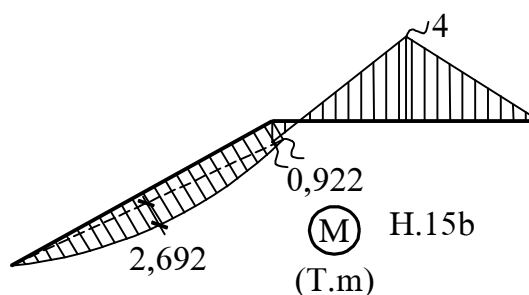
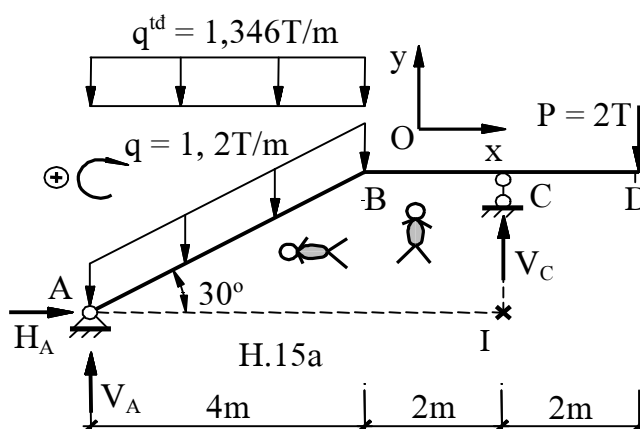
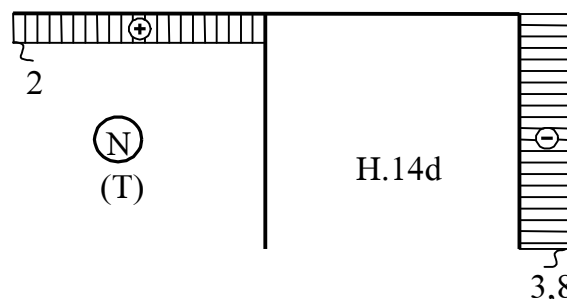
$$4 \cdot q^{td} \cdot \sin \alpha = 1,231; N_{BC} = 0.$$

$$\text{Tại C: } M_C = -2 \cdot P = -2 \cdot 2 = -4;$$

$$Q_{CB} = -V_C + P = -$$

$$2,461;$$

$$Q_{CD} = P = 2; N_C = 2.$$



Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = P = 2$; $N_D = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút B: Tự kiểm tra

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{1,346 \cdot 4^2}{8} = 2,692.$$

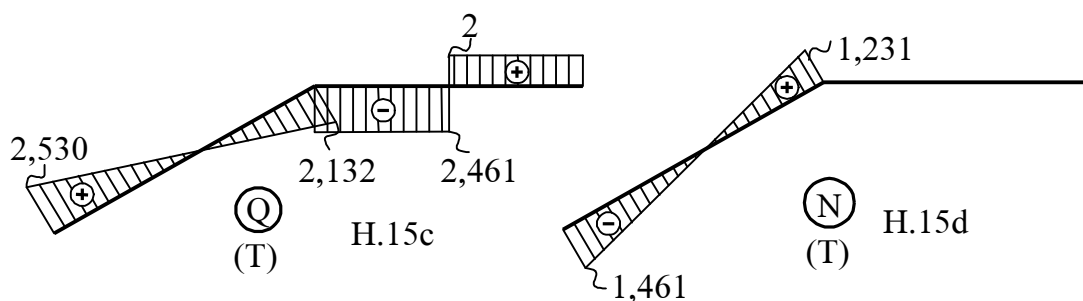
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

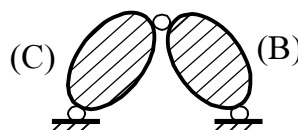


4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

§3. HỆ BA KHỚP.

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: Hệ ba khớp là hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và liên kết với trái đất bằng hai khớp (gối cố định) để tạo thành hệ BBH.



H.16

2. Tính chất của hệ ba khớp:

- Trong hệ luôn tồn tại thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng.

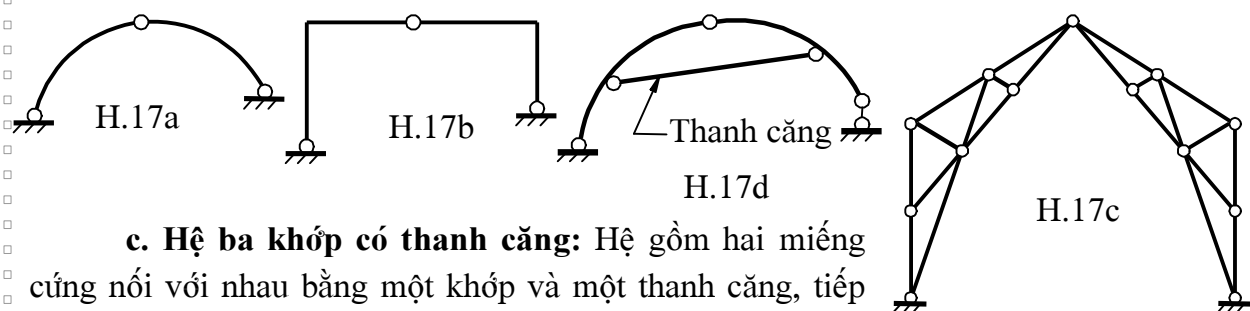
- Nội lực trong hệ ba khớp (mômen uốn và lực cắt) nói chung là nhỏ hơn trong hệ đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

3. Phân loại hệ ba khớp:

a. Vòm ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những thanh cong (H.17a). Trong vòm ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

b. Khung ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc (H.17b). Trong khung ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

c. Dàn ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những dàn phẳng tĩnh định (H.17c). Trong dàn ba khớp, các thanh chỉ tồn tại lực dọc.



c. Hệ ba khớp có thanh căng: Hệ gồm hai miềng cứng nối với nhau bằng một khớp và một thanh căng, tiếp đó nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động để tạo thành hệ BBH (H.17d). Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô ngang.

4. Ưu, nhược điểm của hệ ba khớp:

a. Ưu điểm:

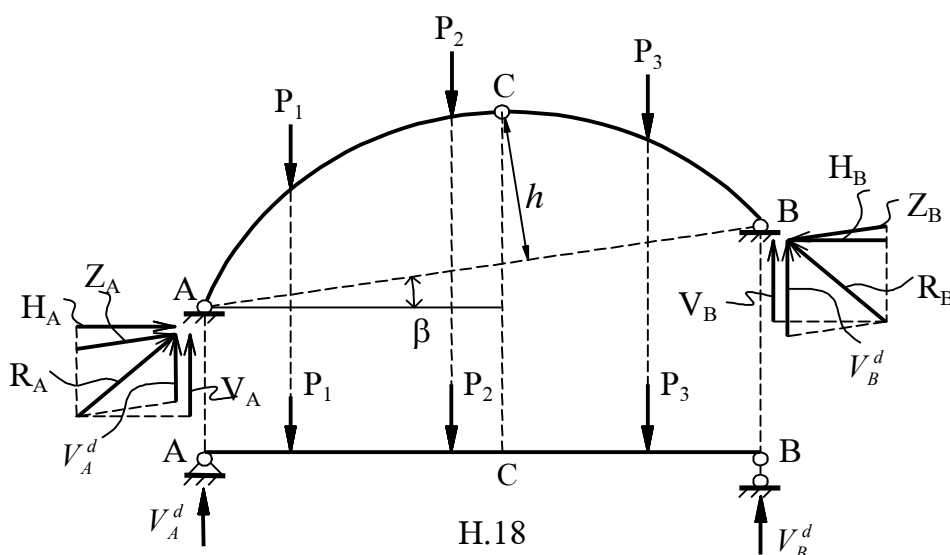
- Tiết kiệm vật liệu.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Hình dáng kiến trúc đẹp.

b. Nhược điểm:

- Khó thi công.
- Trong hệ luôn tồn tại thành phần lực xô ngang nên kết cấu móng phức tạp. Để khắc phục điều này, có thể sử dụng hệ ba khớp có thanh căng.

II. Xác định phản lực:

Xét hệ vòm ba khớp như trên hình vẽ (H.18). Gọi $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ là phản lực tại gối tựa A, B. $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ có phương bất kỳ, có thể phân tích chúng thành hai thành phần theo hai phương xác định.



1. Phân tích theo phương AB và phương thẳng đứng:

$$\vec{R}_A \left\{ \vec{Z}_A \text{ \& } \vec{V}_A^d \right\}; \quad \vec{R}_B \left\{ \vec{Z}_B \text{ \& } \vec{V}_B^d \right\}$$

a. Xác định $\vec{V}_A^d$ & $\vec{V}_B^d$:

- $-\Sigma M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$
- $-\Sigma M_A = 0 \Rightarrow f_2(V_B) = 0 \Rightarrow V_B.$

Trong trường hợp tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng, dễ thấy rằng các thành phần V_A^d, V_B^d giống như các phản lực trong dầm đơn giản tương ứng. Vì vậy các phản lực này gọi là phản lực dầm và được ký hiệu như ở trên.

b. Xác định $\vec{Z}_A, \vec{Z}_B$:

Cắt qua C, giữ lại phần bên trái và viết phương trình cân bằng mômen đối với C.

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -Z_A \cdot h + M_C^{tr} = 0 \Rightarrow Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h}.$$

Trong đó, M_C^{tr} là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên trái C, không kể Z_A . Trong biểu thức xác định M_C^{tr} , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ quanh C lấy dấu dương.

Tương tự, xét cân bằng mômen cho phần hệ bên phải C $\Rightarrow Z_A = \frac{M_C^{ph}}{h} \cdot M_C^{ph}$ là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên phải C, không kể Z_B . Trong biểu thức xác định M_C^{ph} , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay ngược chiều kim đồng hồ quanh C, lấy dấu dương.

- Các thành phần $\vec{Z}_A, \vec{Z}_B$ gọi là phản lực vòm.

2. Phân tích theo phương thẳng đứng và phương ngang:

$$\vec{R}_A \{ \vec{V}_A \text{ \& } \vec{H}_A \}; \vec{R}_B \{ \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$$

a. Xác định $\vec{H}_A, \vec{H}_B$:

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ. $H_A = Z_A \cdot \cos \beta$; $H_B = Z_B \cdot \cos \beta$.

- H_A, H_B gọi là các lực xô.

- Trong trường hợp tải trọng tác dụng theo phương đứng, dễ thấy $H_A = H_B = H$, nên $Z_A = Z_B = Z$.

b. Xác định $\vec{V}_A, \vec{V}_B$:

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ.

$$V_A = V_A^d + Z_A \cdot \sin \beta; V_B = V_B^d - Z_B \cdot \sin \beta.$$

$$\text{Hay } V_A = V_A^d + H_A \cdot \tan \beta; V_B = V_B^d - H_B \cdot \tan \beta.$$

3. Xác định các phản lực toàn phần $\vec{R}_A, \vec{R}_B$:

$$\vec{R}_A = \vec{V}_A + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A$$

$$\vec{R}_B = \vec{V}_B + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$$

$$\text{Về giá trị (độ lớn): } R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}$$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ nếu gối B cao hơn gối A và ngược lại.

- Có thể xác định được $\{ \vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$ thông qua giải hệ phương trình:

+ Viết phương trình cân bằng mômen toàn hệ đối với gối B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \text{ (a)}$$

+ Tách qua C, viết phương trình cân bằng mômen của nửa hệ bên trái đối với C:

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \quad (b)$$

Giải hệ phương trình (a), (b) sẽ được $\{V_A, H_A\}$

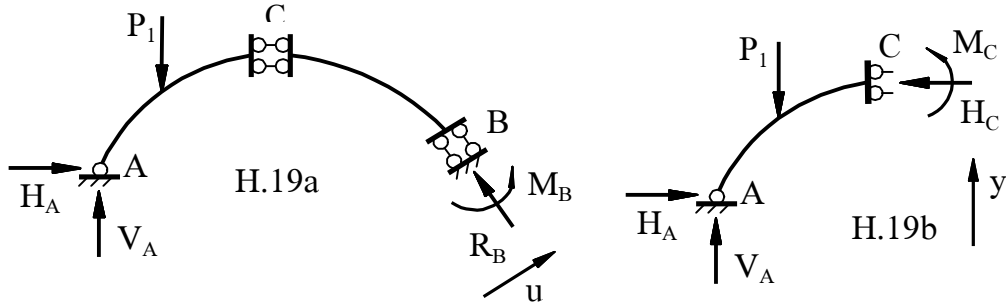
+ Tương tự

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B, H_B) = 0 \quad (c)$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow f_4(V_B, H_B) = 0 \quad (d)$$

Giải hệ phương trình (c), (d) sẽ được $\{V_B, H_B\}$

- Nếu hệ ba khớp sử dụng các khớp giả tạo, phân tích các phản lực xuất hiện tại các liên kết để viết phương trình cân bằng hợp lý. Xem ví dụ hệ trên hình (H.19).



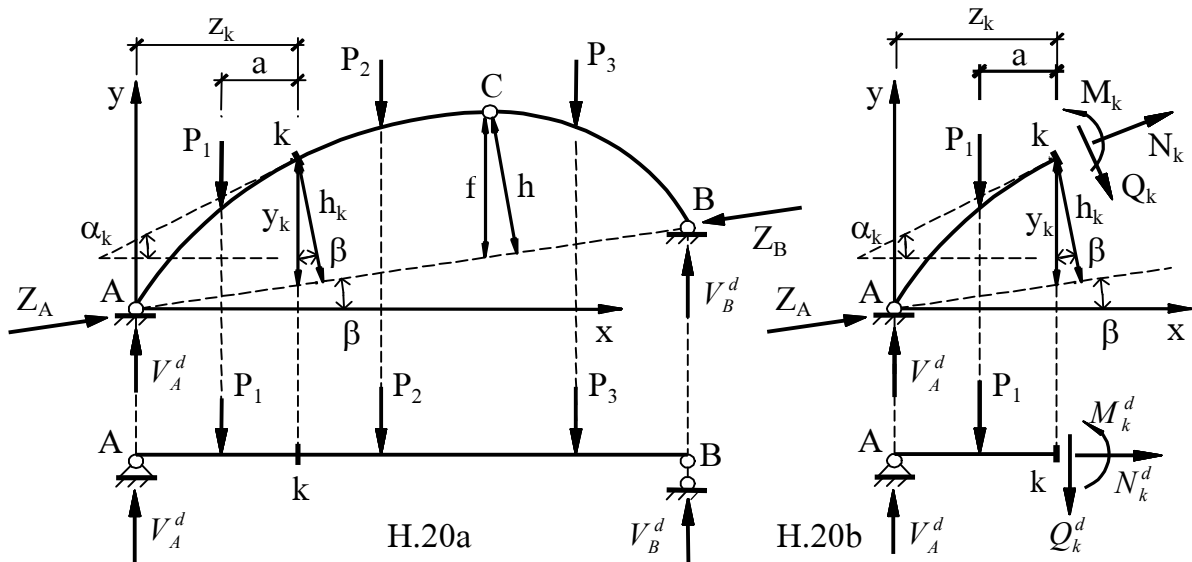
$$- \Sigma U = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \quad (1)$$

$$- \Sigma Y^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) xác định được (V_A, H_A) . Và để xác định (R_B, M_B) , phân tích phản lực để thiết lập cặp phương trình tương tự.

III. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng và vẽ biểu đồ nội lực:

Ở đây đi trình bày cho hệ vòm và khung ba khớp.



1. Biểu thức mômen uốn (M_k):

Giả sử cần xác định mômen uốn tại tiết diện k của vòm ba khớp chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng như trên hình vẽ. (H.20a)

Dùng mặt cắt qua k, giữ lại và xét cân bằng phần bên trái.

$$M_k = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a - Z_A \cdot h_k \quad (a)$$

Gọi M_k^d là mômen uốn tại tiết diện k trên dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

Dễ thấy

$$M_k^d = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a \quad (b)$$

$$\text{Ta biết: } Z_A = \frac{H_A}{\cos \beta} = \frac{H_B}{\cos \beta} = \frac{H}{\cos \beta}; \text{ mà } y_k = \frac{h_k}{\cos \beta}$$

$$\text{Suy ra } Z_A \cdot h_k = H \cdot y_k \quad (c)$$

Từ (a), (b), (c) suy ra:

$$M_k = M_k^d - H \cdot y_k.$$

Biểu thức chứng tỏ rằng mômen uốn trong vòm ba khớp nhỏ hơn mômen uốn trong dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng một lượng $H \cdot y_k$. Và nếu khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $M_k^d = H \cdot y_k$ thì mômen uốn tại mọi tiết diện đều bằng không. Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc nên tiết kiệm vật liệu.

2. Biểu thức lực cắt (Q_k):

Tương tự như trên nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương Q_k (phương vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot (\sin \alpha_k - \tan \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Trong đó

- Q_k^d : lực cắt tại tiết diện k trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.
- Q_k : lực cắt trong vòm tại tiết diện k.
- α : góc hợp bởi tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k với phương ngang.

3. Biểu thức lực dọc (N_k):

Tương tự như xác định lực cắt nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương N_k (phương của tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \tan \beta \cdot \sin \alpha_k)$$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ khi gối B cao hơn gối A và ngược lại.
- $\alpha_k > 0$ khi $y'(z_k) > 0$ và ngược lại.
- $y_k = y(z_k) - z_k \cdot \tan \beta$.
- Khi $\beta = 0$ (gối A & B cùng cao độ)

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^d - H \cdot y_k. \\ Q_k &= Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k. \\ N_k &= -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k. \end{aligned}$$

- Các biểu thức trên được thiết lập cho tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

- Đối với khung ba khớp: Tiến hành giống hệ dầm, khung đơn giản.

- Đối với vòm ba khớp: Sau khi chọn và xác định nội lực tại các tiết diện trên kết cấu. Các tiết diện thường chọn là các tiết diện đặc trưng và một số tiết diện trung gian để tăng tính chính xác. Biểu đồ nội lực được vẽ gần đúng bằng cách nối các tung độ liên tiếp bằng các đoạn thẳng.

Quá trình tính toán có thể lập thành bảng sau: (Bảng tham khảo)

Tiết diện	z_k	y_k	$\text{tg}\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d	Q_k^d	M_k	Q_k	N_k
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Bảng 2. Bảng phân tích nội lực trong vòm ba khớp.

* *Chú ý:* Có thể chọn đường chuẩn là đường nằm ngang khi vẽ biểu đồ nội lực.

* *Chú thích:* Đối với hệ dàn vòm ba khớp, cách tính được thực hiện như sau:

+ Xác định phản lực tại các gối tựa theo cách đã trình bày ở trên.

+ Nội lực trong các thanh dàn chỉ là lực dọc. Xem cách xác định trong bài hệ dàn.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ BA KHỚP.

* *Ví dụ 1:* Xác định nội lực tại tiết diện k của vòm ba khớp cho trên hình vẽ (H21)

Cho biết phương trình trục vòm

là parabol $y(z) = \frac{1}{5}(l - z).z; l = 10\text{m}$

1. Các số liệu suy ra từ đề bài:

- $z_k = 3\text{m}; y_k = y(3) = 4,2\text{m}; \beta = 0$.

- $\text{tg}\alpha_k = y'(3) = \frac{1}{5}(l - 2.z)|_{z=3} = 0,8$.

$\Rightarrow \sin\alpha_k =$

$$= \frac{\text{tg}\alpha_k}{\sqrt{1 + \text{tg}\alpha_k^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{1 + 0,8^2}} = 0,624$$

$\Rightarrow \cos\alpha_k =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}\alpha_k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,8^2}} = 0,780$$

2. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$

Do $\beta = 0$ và tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = Z_B = H_A = H_B.$$

a. Xác định V_A, H_A :

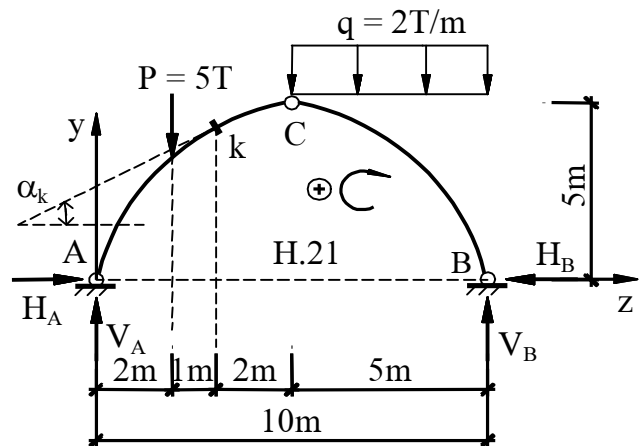
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10.V_A - 5.8 - 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow V_A = 6,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5.V_A - 5.H_A - 5.3 = 0 \Rightarrow 5.H_A = 5.6,5 - 5.3 \Rightarrow H_A = 3,5 (> 0).$$

b. Xác định V_B, H_B :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10.V_B + 5.2 + 5.2.7,5 = 0 \Rightarrow V_B = 8,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow -5.V_B + 5.H_B + 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow 5.H_B = 5.8,5 - 5.2.2,5.$$



$$\Rightarrow H_B = 3,5 (> 0).$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \Rightarrow 3,5 - 3,5 = 0$ (đúng)

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 5 \cdot q = 0 \Rightarrow 6,5 - 8,5 - 5 - 5 \cdot 2 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 6,5$; $V_B = V_B^d = 8,5$; $Z_A = Z_B = H_A = H_B = H = 3,5$.

3. Xác định nội lực tại các tiết k:

$$M_k = M_k = M_k^d - H \cdot y_k = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3,5 \cdot 4,2 = -0,2 \quad (M_k^d = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1).$$

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k = (6,5 - 5) \cdot 0,780 - 3,5 \cdot 0,624 = -1,014.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k = -(6,5 - 5) \cdot 0,624 - 3,5 \cdot 0,780 = -3,666.$$

* Ví dụ 2: Nội dung và hình vẽ giống ví dụ 1 nhưng P nghiêng 1 góc 45° (H.22a)

Các số liệu suy ra từ bài toán giống ví dụ trên.

1. Xác định các thành phần phản lực:

$$\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$$

Do $\beta = 0$ nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = H_A; Z_B = H_B$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow 10 \cdot V_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + \\ &+ P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0. \\ &\Rightarrow 10 \cdot V_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + \\ &+ 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot 2 \cdot 2,5 = 0 \\ &\Rightarrow V_A = 4,197 (> 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_C^r = 0 &\Rightarrow 5 \cdot V_A - 5 \cdot H_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - P \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0. \\ &\Rightarrow 5 \cdot 4,197 - 5 \cdot H_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0 \\ &\Rightarrow H_A = 0,802. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow -10 \cdot V_B + P \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot q \cdot 7,5 = 0. \\ &\Rightarrow 10 \cdot V_B + 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot 2 \cdot 7,5 = 0. \\ &\Rightarrow V_B = 9,338 (> 0). \end{aligned}$$

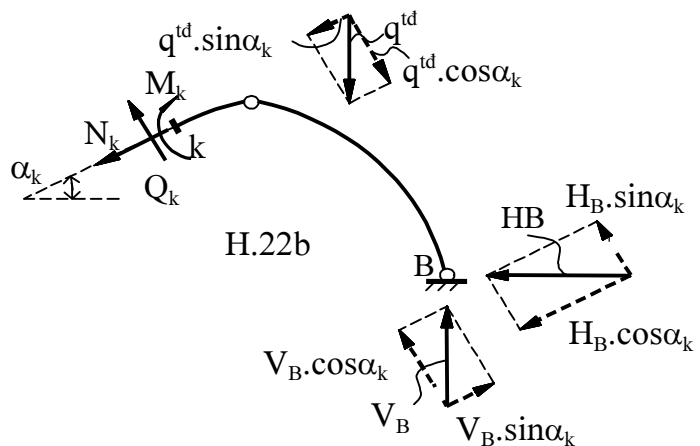
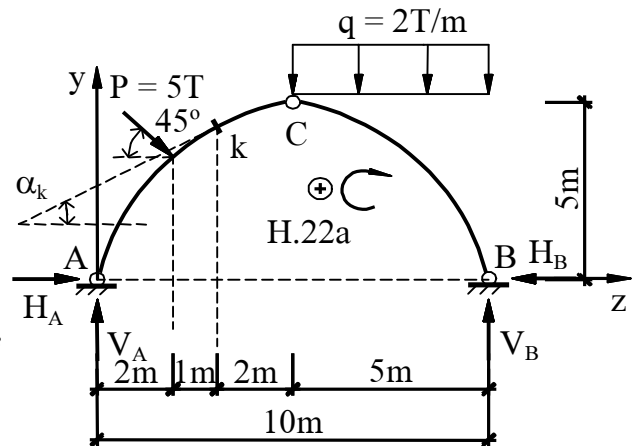
$$\begin{aligned} \Sigma M_C^{ph} = 0 &\Rightarrow \\ -5 \cdot V_B + 5 \cdot H_B + 5 \cdot q \cdot 2,5 &= 0. \\ \Rightarrow -5 \cdot 9,338 + 5 \cdot H_B + 5 \cdot 2 \cdot 2,5 &= 0 \\ \Rightarrow H_B &= 4,338. \end{aligned}$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_A - H_B + P \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\ \Rightarrow 0,802 - 4,338 - 5 \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\ \text{(đúng)} \end{aligned}$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Rightarrow V_A + V_B - P \cdot \sin 45^\circ - 5 \cdot q = 0.$$



$$\Rightarrow 4,197 + 9,338 - 5 \cdot \sin 45^\circ - 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 4,197$; $V_B = V_B^d = 9,338$; $Z_A = H_A = 0,802$; $Z_B = H_B = 3,338$.

2. Xác định nội lực tại tiết diện k:

Vì có tải trọng tác dụng không theo phương thẳng đứng nên không sử dụng các biểu thức thiết lập sẵn ở trên. Ở đây, cần phải đi thiết lập các phương trình cân bằng như trong trường hợp tổng quát xác định nội lực.

$$+ M_k = 7 \cdot V_B - 4,2 \cdot H_B - 5 \cdot q \cdot 4,5 = 7 \cdot 9,338 - 4,2 \cdot 4,338 - 5 \cdot 2 \cdot 4,5 = 2,146.$$

$$+ Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha_k + 5 \cdot q \cdot \cos \alpha_k - H_B \cdot \sin \alpha_k \\ = -9,338 \cdot 0,780 + 5 \cdot 2 \cdot 0,780 - 4,338 \cdot 0,624 = -2,190.$$

$$+ N_k = V_B \cdot \sin \alpha_k - 5 \cdot q \cdot \sin \alpha_k - H_B \cdot \cos \alpha_k = 9,338 \cdot 0,624 - 5 \cdot 2 \cdot 0,624 - 4,338 \cdot 0,78 = \\ = -3,797.$$

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ vòm ba khớp. Phương trình của trục vòm có dạng parabol $y(z) = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot z \cdot (l - z)$; cho $f = 4m$, $l = 10m$ (H.23a)

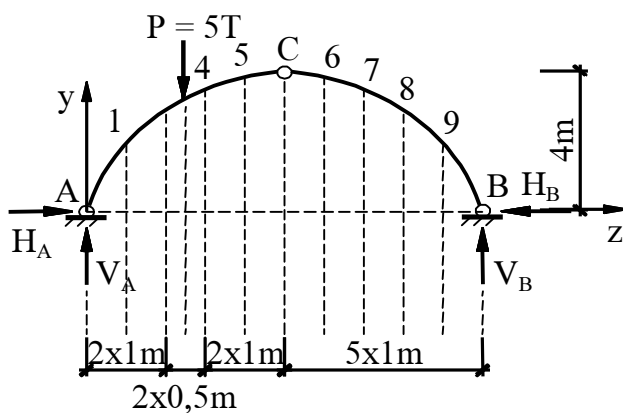
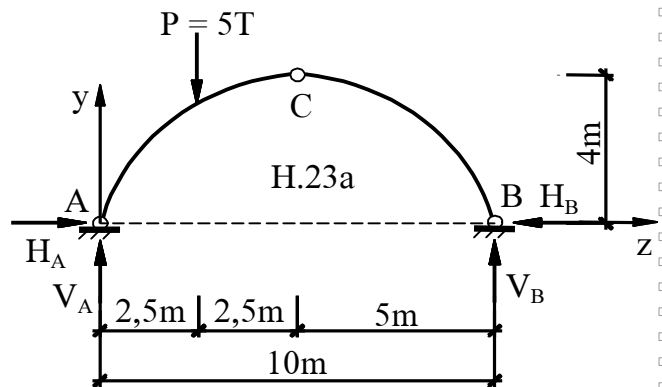
Nội lực trong hệ vòm ba khớp có hai gối A, B cùng cao độ và chịu tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng được xác định bằng biểu thức:

$$M_k = M_k^d - H \cdot y_k.$$

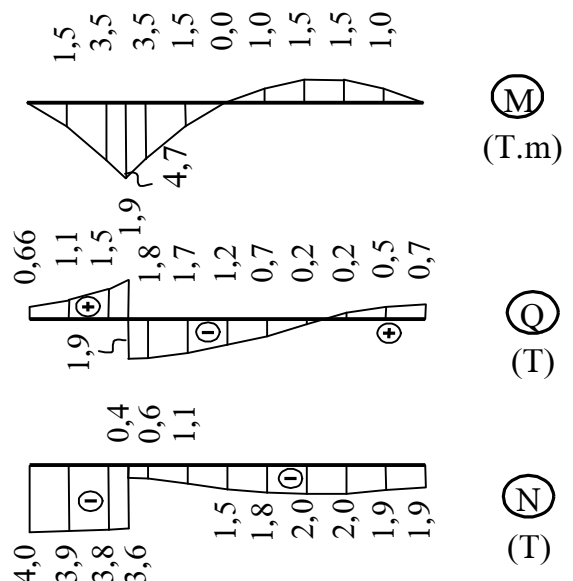
$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k.$$

Để vẽ biểu đồ nội lực, ta sẽ tính nội lực tại các tiết diện A, 1, 2, 3, 4, 5, C, 6, 7, 8, 9 và B. Kết quả tính toán thể hiện trong bảng tính (B.3). Các biểu đồ nội lực thể hiện trên hình vẽ (H.23b).



H.23b



Tiết diện	z_k (m)	y_k (m)	$\operatorname{tg}\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d (T.m)	Q_k^d (T)	M_k (T.m)	Q_k (T)	N_k (T)
A	0	0	1,60	0,848	0,529	0	3,75	0	0,66	-4,01
1	1,0	1,44	1,28	0,788	0,615	3,75	3,75	1,50	1,08	-3,92
2	2,0	2,56	0,96	0,721	0,692	7,50	3,75	3,50	1,47	-3,78
3 ^{tr}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	3,75	4,69	1,95	-3,56
3 ^{ph}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	-1,25	4,69	-1,95	-0,44
4	3,0	3,36	0,64	0,539	0,642	8,75	-1,25	3,50	-1,88	-0,65
5	4,0	3,84	0,32	0,305	0,952	7,50	-1,25	1,50	-1,68	-1,10
C	5,0	4,00	0	0	1,000	6,25	-1,25	0	-1,25	-1,56
6	6,0	3,84	-0,32	-0,305	0,952	5,00	-1,25	-1,00	-0,71	-1,87
7	7,0	3,36	-0,64	-0,539	0,842	3,75	-1,25	-1,50	-0,81	-2,00
8	8,0	2,56	-0,96	-0,721	0,692	2,50	-1,25	-1,50	-0,25	-2,00
9	9,0	1,44	-1,28	-0,788	0,615	1,25	-1,25	-1,00	0,46	-1,95
B	10	0	-1,60	-0,848	0,529	0	-1,25	0	0,67	-1,89

B3. Bảng minh họa tính toán

* Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.24a).

1. Xác định các thành phần

phản lực: $\{V_A, H_A, V_B, H_B\}$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.q.5 - 3.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.2.5 - 3.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_A + 5.V_A - 48,8 = 0 \text{ (a)}$$

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow -4.H_A + 2.V_A -$$

$$- 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 4.2.2 = 0.$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 16 = 0 \text{ (b)}$$

Từ (a), (b) giải ra $V_A = 9,955$; $H_A = 0,977$.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_B - 5.V_B + 11,2 = 0 \text{ (c)}$$

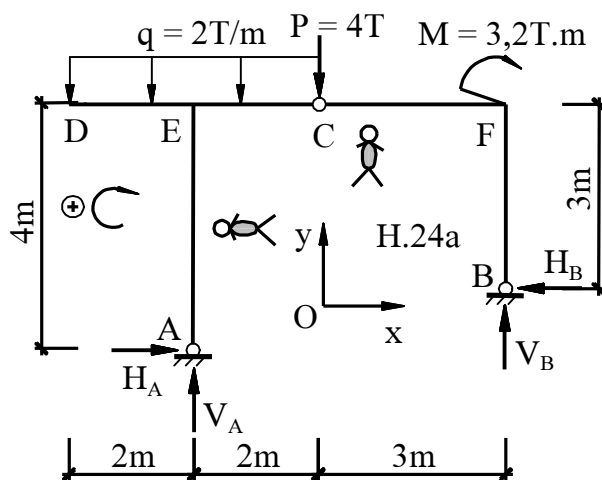
$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + M = 0$$

$$\Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + 3,2 = 0 \text{ (d)}$$

Từ (c), (d) giải ra $V_B = 2,044$; $H_B = 0,977$.

* Kiểm tra:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \text{ (đúng)}$$



$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 4.q = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = -H_A = -0,977$; $N_A = -V_A = -9,955$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = 0$; $N_D = 0$.

Tại E: $M_{ED} = -2.q.1 = -2.2.1 = -4$; $M_{EA} = -4.H_A = -4.0,977 = -3,911$.

$$M_{EC} = -2.q.1 - 4.H_A = -2.2.1 - 4.0,977 = -7,908.$$

$$Q_{ED} = -2.q = -2.2 = -4$$
; $Q_{EA} = -H_A = -0,977$;

$$Q_{EC} = -2.q + V_A = -2.2 + 9,955 = 5,955.$$

$$N_{ED} = 0$$
; $N_{EA} = -V_A = -9,955$; $N_{EC} = -H_A = -0,977$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_{CE} = V_A - 4.q = 9,955 - 2.4 = 1,955$; $Q_{CF} = -V_B = -2,044$.

$$N_C = -H_A = -0,977.$$

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = H_B = 0,977$; $N_B = -V_B = -2,044$.

Tại F: $M_{FB} = 3.H_B = 3.0,977 = 2,91$; $M_{FC} = -3.H_B - M = -3.0,977 - 3,2 = -6,11$.

$$Q_{FB} = H_B = 0,977$$
; $Q_{FC} = -V_B = -2,044$.

$$N_{FB} = -V_B = -2,044$$
; $N_{FC} = -H_B = -0,977$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

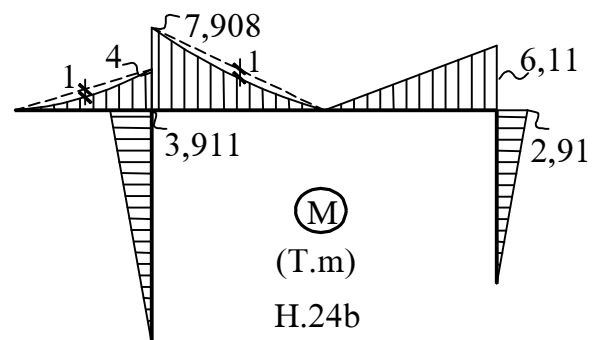
cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DE & EC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

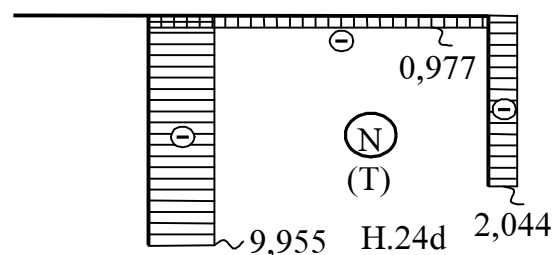
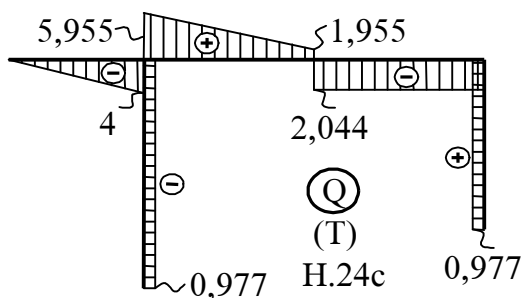
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.



b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Phân tích trường hợp hệ ba khớp có thanh cứng:

1. Trường hợp tải trọng không tác dụng lên thanh cứng: Trong thanh cứng chỉ xuất hiện lực dọc.

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A , V_B , H_A : Xác định như trong trường hợp dầm, khung đơn giản.

- Thành phần lực dọc N_{DE} : Dùng mặt cắt qua khớp C và thanh căng. Xét cân bằng mômen của một phần bất kỳ đối với khớp C.

$$\Sigma M_C^{tr} = 0 \text{ hay } \Sigma M_C^{ph} = 0$$

**Nhận xét:*

- V_A , V_B đóng vai trò như V_A^d , V_B^d .

- N_{ED} đóng vai trò như Z_A , Z_B .

- Hệ giống hệ ba khớp A^*CB^* .

b. Xác định nội lực:

Theo nguyên tắc chung xác định nội lực đã trình bày.

**Chú ý:* Nếu thanh căng là miếng cứng gãy khúc: Lực xuất hiện trong thanh căng là lực đi qua hai khớp ở hai đầu, ngược chiều nhau, bằng nhau về giá trị.

2. Trường hợp tải trọng tác dụng lên

thanh căng: Trong thanh căng xuất hiện cả ba thành phần nội lực M , Q , N .

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A , V_B , H_A : giống như trong dầm, khung đơn giản.

- Các thành phần tại khớp D, E: được xác định qua hai bước.

+ Bước 1: Tách riêng ED ra khỏi hệ và xét cân bằng nó.

Phân tích phản lực tại D và E theo hai phương: phương DE (Z_D , Z_E) và phương đứng (V_D , V_E).

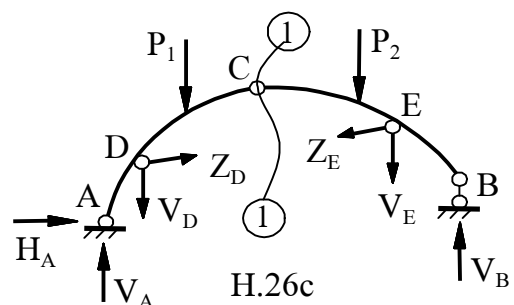
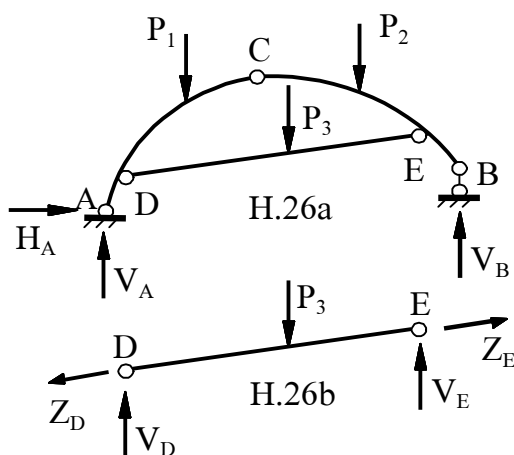
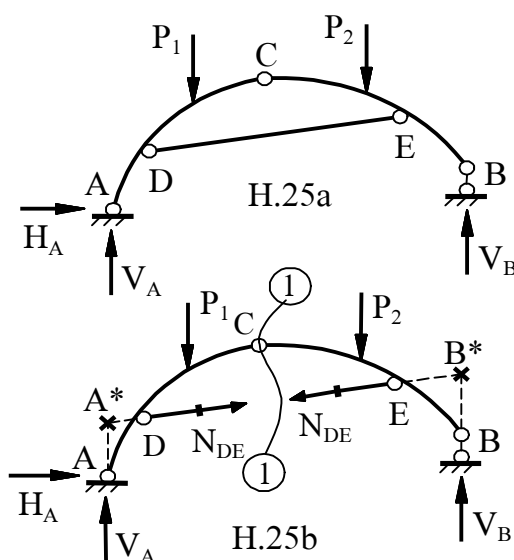
Viết các phương trình cân bằng mômen đối với D và E sẽ giải ra được V_D , V_E .

+ Bước 2: Xét cân bằng của phần hệ ABC (sau khi đã tách bỏ thanh DE).

Truyền phản lực tại D và E tại hai đầu thanh căng vào (có chiều ngược lại).

Thực hiện mặt cắt qua khớp C. Giữ lại và xét cân bằng từng phần của hệ.

$$\Sigma M_C^{tr} = 0 \Rightarrow Z_D \text{ và } \Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow Z_E.$$

b. Xác định & vẽ biểu đồ nội lực: Theo nguyên lý chung.

* Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (h.27a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

$$- \Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$- \Sigma M_B = 0 \Rightarrow 8.V_A - 3.4 - 2.4.6 = 0 \Rightarrow V_A = 7,5 (> 0)$$

$$- \Sigma M_A = 0$$

$$\Rightarrow -8.V_B + 3.4 + 2.4.2 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 3,5 (> 0).$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0$

$$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$$

$$\Leftrightarrow -2.4 - 3 + 7,5 + 3,5 = 0$$

(đúng)

* Xác định lực dọc trong

thanh DE: N_{DE}

$$\Sigma M_C^{ph} = 0$$

$$\Rightarrow 2.N_{DE} - 4.V_B = 0$$

$$\Rightarrow N_{DE} = 1,75$$

(> 0, gây kéo)

2. Xác định nội lực tại các

tiết diện đặc trưng:

Trong thanh DE chỉ tồn tại

lực dọc $N_{DE} = 1,75$.

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 7,5$; $N_A = 0$.

Tại F: $M_{FA} = 2.V_A - 2.q.1 = 11$; $M_{FD} = -2.N_{DE} = -3,5$.

$$M_{FC} = 2.V_A - 2.q.1 - 2.N_{ED} = 7,5.$$

$$Q_{FA} = V_A - 2.q = 7,5 - 2.2 = 3,5; N_{FA} = 0.$$

$$Q_{FD} = -N_{ED} = -1,75; N_{FD} = 0.$$

$$Q_{FC} = V_A - 2.q = 3,5; N_{FC} = -N_{DE} = -1,75.$$

Tại C: $M_C = 0$; $Q_{CF} = -V_B + P = -3,5 + 3 = -0,5$; $Q_{CG} = -V_B = -3,5$.

$$N_C = -N_{ED} = -1,75.$$

Tại G: $M_{GC} = 2.V_B - 2.N_{DE} = 3,5.2 - 1,75.2 = 3,5$; $M_{GE} = 2.N_{ED} = 3,5$.

$$M_{GB} = 2.V_B = 7.$$

$$Q_{GC} = -V_B = -3,5; N_{GC} = -N_{ED} = -1,75; Q_{GE} = N_{ED} = 1,75; N_{GE} = 0.$$

$$Q_{GB} - V_B = 3,5; N_{GB} = 0.$$

Tại D: $M_D = 0$; $Q_{DF} = -N_{ED} = -1,75$; $N_{DF} = 0$.

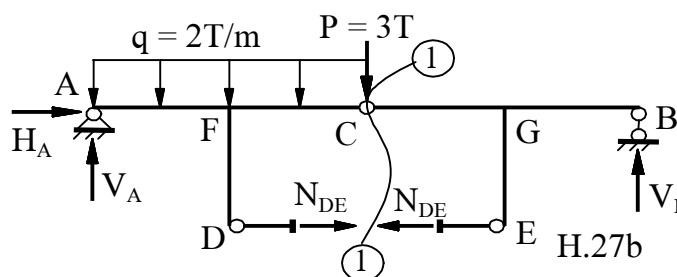
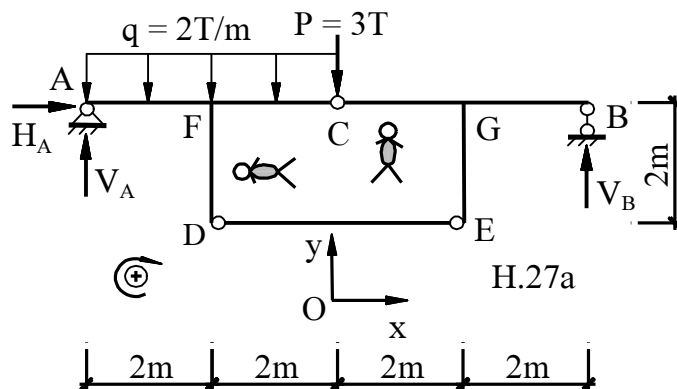
Tại E: $M_E = 0$; $Q_{EG} = N_{ED} = 1,75$; $N_{EG} = 0$;

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút F & G: dễ thấy thỏa mãn.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AF & FC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

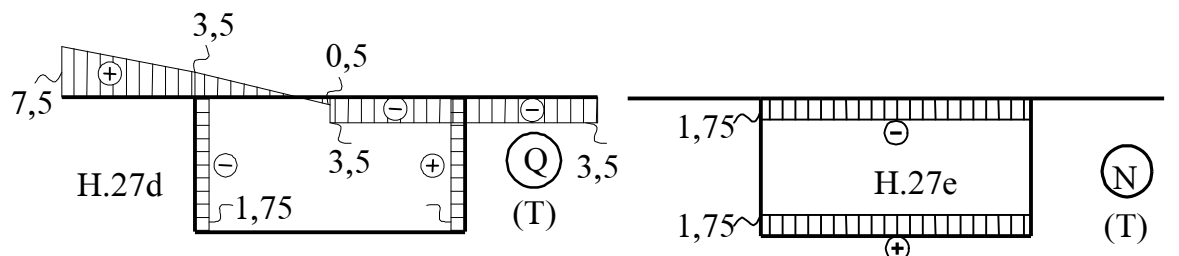


$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.28a)

1. Xác định các thành

phản phản lực:

- Dễ thấy $V_A = V_B = 6$; $H_A = 0$.

- Xác định các phản lực tại vị trí miêng cứng nối thanh cứng. Tách thanh cứng GH. Các thành phần phản lực gồm: (V_G , H_G , V_H , H_H).

+ Xét cân bằng thanh cứng

GH:

Dễ thấy $V_G = V_H = 6$.

+ Xét cân bằng phần hệ bên dưới:

Dùng mặt cắt 1 - 1, xét cân bằng phần bên trái:

$$\Sigma M_C^{tr} = 0 \Rightarrow 4.V_A -$$

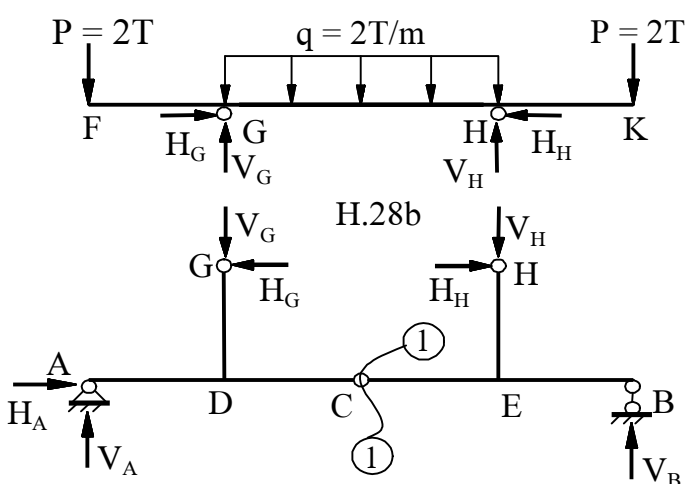
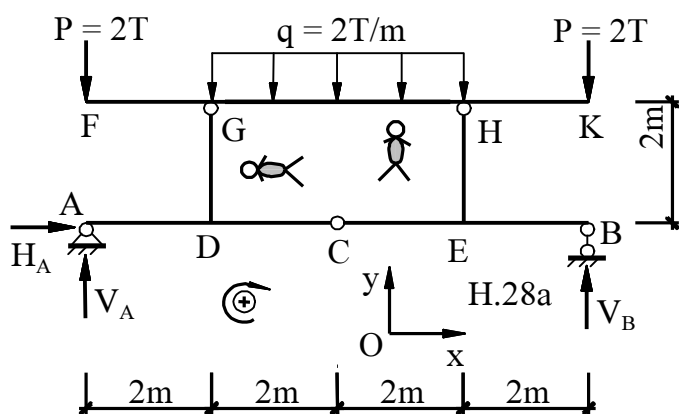
$$2.V_G - 2.H_G = 0 \Rightarrow H_G = 6.$$

Tương tự, xét cân bằng phần bên phải:

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow H_H =$$

6.

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:



Để thuận lợi cho việc xác định nội lực, ta tách riêng hệ ra làm hai phần độc lập như lúc xác định phản lực liên kết trong các thanh cứng.

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 6$; $N_A = 0$.

Tại F: $M_F = 0$; $Q_F - P = -2$; $N_F = 0$.

Tại G: $M_{GF} = -2.P = -2.2 = -3$; $M_{GH} = -2.P = -4$; $M_{GD} = 0$.

$Q_{GF} = -P = -2$; $Q_{GH} = V_G - P = 6 - 2 = 4$; $Q_{GD} = -H_D = -6$.

$N_{GF} = 0$; $N_{GH} = -H_G = -6$; $N_{GD} = -V_G = -6$.

Tại D: $M_{DA} = 2.V_A = 2.6 = 12$; $M_{DH} = 2.H_G = 2.6 = 12$; $M_{DC} = 2.V_A - 2.H_G = 0$.

$Q_{DA} = V_A = 6$; $Q_{DG} = -H_G = -6$; $Q_{DC} = V_A - V_G = 0$.

$N_{DA} = 0$; $N_{DG} = -V_G = -6$; $N_{DC} = H_G = 6$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = V_A - V_G = 0$; $N_C = H_G = 6$.

Tương tự cho các tiết diện còn lại.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn GH có q phân bố đều

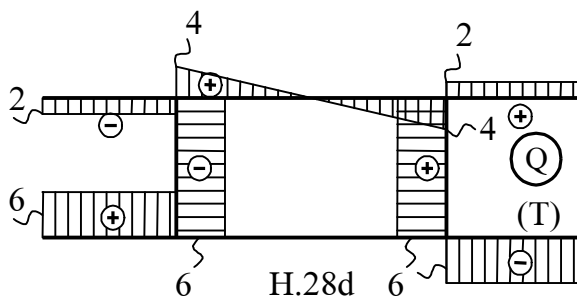
nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4$$

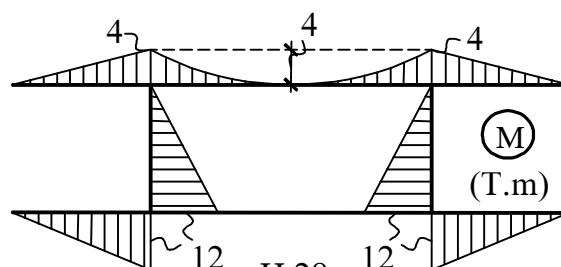
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

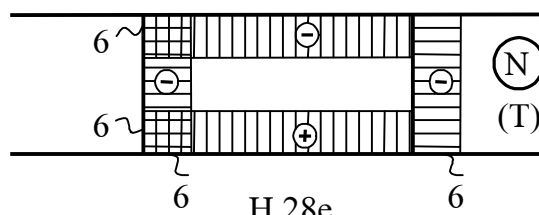
- Là những đoạn đường thẳng.



H.28d



H.28c



H.28e

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

IV. Trục hợp lý của vòm ba khớp:

1. Đặt vấn đề: Mômen uốn tại tiết diện k trong vòm ba khớp được xác định bằng biểu thức:

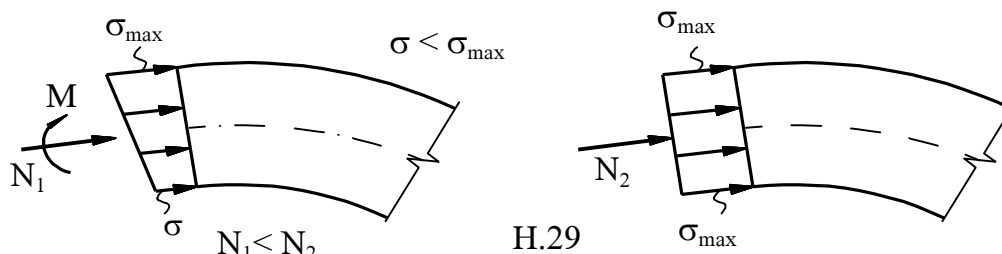
$$M_k(z) = M_k^d - H.y_k.$$

Nếu ta khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $H.y_k = M_k^d$ thì $M_k(z) = 0$. Và

$$Q_k(z) = 0 \text{ vì } Q_k(z) = \frac{dM_k(z)}{dz} = 0.$$

Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc N_k nên tiết kiệm vật liệu chế tạo vòm. Thật vậy, bằng cách so sánh sự phân bố ứng suất pháp trên tiết diện vòm trong hai trường hợp.

+ Trường hợp $M = 0$, ứng suất phân bố đều. Vật liệu tại mọi tiết diện được sử dụng như nhau nên phát huy hết khả năng làm việc của vật liệu. Nghĩa là tiết kiệm vật liệu.



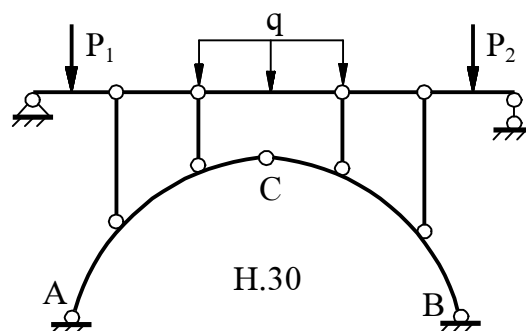
Ngoài ra, lực dọc trong vòm thường gây nén nên nếu chỉ có $N \neq 0$, ta có thể sử dụng những loại vật liệu chịu nén tốt nhưng rã tiền như bê tông, gạch, đá...

**Kết luận:* Trục hợp lý của vòm là trục được chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không.

2. Các dạng trục vòm hợp lý:

a. Trường hợp tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc vào hình dạng của vòm:

Khi mà sự thay đổi của trọng lượng bản thân và các tác dụng bên ngoài khi trục vòm thay đổi là không đáng kể. Ví dụ hệ trên hình H.30, các lực P_1 , P_2 , q truyền qua hệ thống các thanh đứng lên vòm là không thay đổi khi trục vòm thay đổi.



Như vậy, M_k^d sẽ không thay đổi. Suy ra:

$$y_k = \frac{M_k^d}{H} \quad (a)$$

b. Trường hợp tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng trục vòm:

Lúc này không thể sử dụng biểu thức (a) vì M_k^d phụ thuộc vào y_k . Do y_k thay đổi thì tải trọng thay đổi nên M_k^d sẽ thay đổi.

Lấy vi phân hai lần biểu thức (a)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H} \quad (b)$$

Giải phương trình (b) sẽ xác định được y_k nhưng nói chung là rất phức tạp.

c. Trường hợp tải trọng tác dụng vuông góc với trục vòm: Như các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng, chất khí.

Đi khảo sát cân bằng một đoạn vô cùng bé của trục vòm hợp lý.

Lấy tổng mômen đối với tâm O

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow N \cdot \rho - (N + dN) \cdot \rho = 0 \Rightarrow dN = 0$$

$\Rightarrow N = \text{const.}$

Lấy tổng hình chiếu lên phương U:

$$\sum U = 0 \Rightarrow N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - q \cdot ds = 0$$

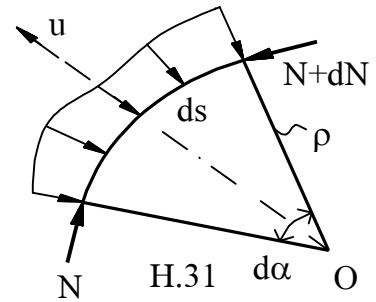
Do $d\alpha$ là VCB nên $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$

$$\Rightarrow N \cdot d\alpha - q \cdot ds = 0.$$

Mặt khác: $ds = \rho \cdot d\alpha$. Nên $\rho = \frac{N}{q}$.

Trường hợp $q = \text{const}$ (phân bố đều)

$$\Rightarrow \rho = \text{const (cung tròn)}$$



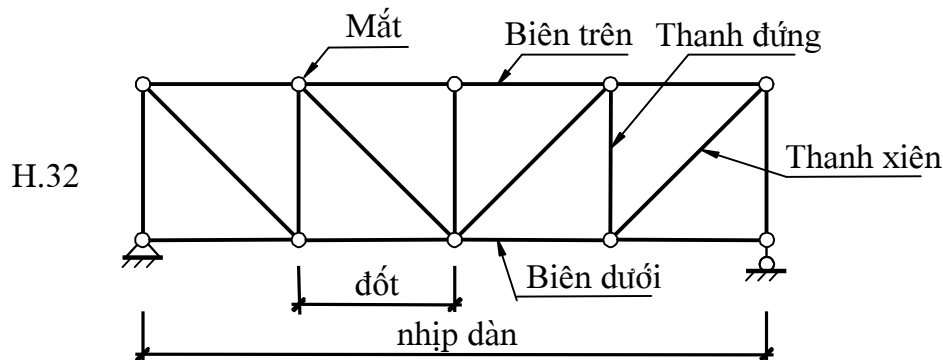
§ 4. HỆ DÀN

I. Phân tích hệ:

1. Định nghĩa: là hệ gồm các thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp lý tưởng ở hai đầu mỗi thanh để tạo thành hệ BBH.

2. Cấu tạo của dàn:

- Khoảng cách giữa hai gối tựa gọi là nhịp dàn.
- Các khớp của dàn gọi là các mắt dàn.
- Các thanh dàn nằm trên đường biên dàn gọi là các thanh biên (gồm biên trên và biên dưới).
- Các thanh dàn nằm bên trong biên gọi là các thanh bụng (gồm thanh đứng và thanh xiên).
- Khoảng cách giữa hai mắt dàn thuộc cùng một đường biên gọi là đốt.



2. Các giả thiết để tính dàn:

- Mắt dàn phải nằm tại giao điểm của trục các thanh dàn và là khớp lý tưởng (có thể xoay tự do, không ma sát).
- Bỏ qua trọng lượng bản thân của các thanh dàn.
- Tải trọng chỉ tác dụng lên mắt dàn.

Vậy các thanh dàn làm việc như các liên kết thanh, nghĩa là chỉ tồn tại lực dọc.

4. Đặc điểm của hệ dàn:

- Tiết kiệm vật liệu.
- Trọng lượng bản thân bé.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Khó thi công, lắp dựng.

II. Xác định nội lực trong các thanh dàn:

Có nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây chỉ trình bày phương pháp giải tích và phương pháp đồ giải.

1. Phương pháp giải tích:

a. Phương pháp tách mắt: Nội dung của phương pháp là đi khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn. Thực ra, đây là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt với hệ lực khảo sát là hệ lực đồng quy.

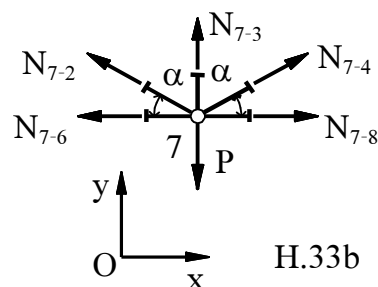
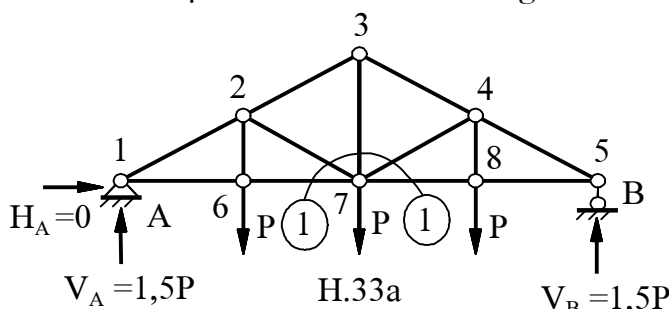
Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).
- Lần lượt tách các mắt ra khỏi dàn bằng các mặt cắt quanh mắt.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương (vẽ hướng ra ngoài mắt).
- Khảo sát sự cân bằng của từng mắt: Lực tác dụng lên mắt gồm ngoại lực tập trung (nếu có) và lực dọc trong các thanh dàn. Đây là hệ lực đồng quy nên thường sử dụng hai phương trình hình chiếu theo hai phương không song song.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

- Khảo sát cân bằng cho tất cả các mắt, sẽ được hệ thống các phương trình. Giải hệ phương trình sẽ xác định được các lực dọc cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì lực dọc gây kéo (đúng chiều đã giả định) và ngược lại.

* Minh họa: Tách và xét cân bằng mắt số 7 của hệ dàn trên hình (H.33a).



Hai phương trình cân bằng hình chiếu theo hai phương có thể thiết lập:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} + N_{7-4} \cdot \cos \alpha - N_{7-6} - N_{7-2} \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{7-3} + N_{7-2} \cdot \sin \alpha + N_{7-4} \cdot \sin \alpha - P = 0.$$

* Để tránh giải hệ phương trình toán học, ta đi thiết lập điều kiện cân bằng sao cho trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số. Cách tiến hành như sau:

- Tách mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai ẩn số chưa biết.
- Để tìm lực dọc trong thanh chưa biết thứ nhất, ta thiết lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chứa lực dọc chưa biết thứ hai.

* Minh họa: Trở lại ví dụ cho trên hình

(H.33a) ta có thể tách mắt theo thứ tự: 1 → 6

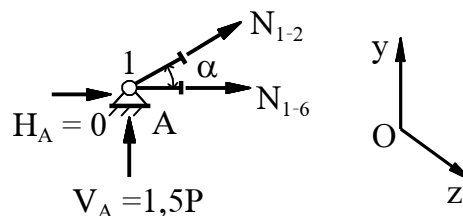
→ 2 → 3... Chấn hạn, tách mắt 1:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{1-2} \cdot \sin \alpha + 1,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-2} = -\frac{1,5}{\sin \alpha} (< 0, \text{ gây nén}).$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_{1-6} \cdot \sin \alpha - 1,5 \cdot P \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-6} = \frac{1,5 \cdot P \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} (> 0, \text{ gây kéo}).$$

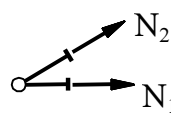


(Z ⊥ thanh 1-2) H.33c

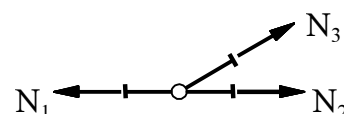
* Các hệ quả rút ra từ phương pháp tách mắt:

+ *Hệ quả 1*: Nếu một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng (bộ đôi) và không chịu tải trọng tác dụng thì lực dọc trong hai thanh đó bằng không (Cân bằng mắt trên hình H.34a, $N_1 = N_2 = 0$).

+ *Hệ quả 2*: Nếu một mắt có ba thanh, trong đó có hai thanh thẳng hàng và không chịu tải trọng tác dụng thì nội lực trong thanh không thẳng hàng bằng không; trong hai thanh thẳng hàng thì bằng nhau về giá trị và cùng gây kéo hay gây nén (Cân bằng mắt trên hình H.34b, $N_3 = 0$, $N_1 = N_2$).



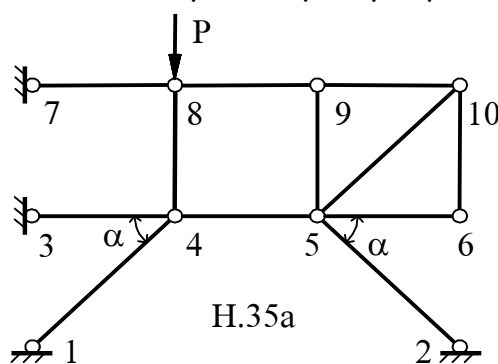
H.34a



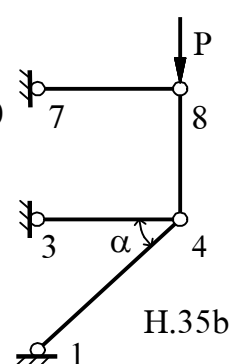
H.34b

* *Chú ý*: Khi tính dàn, nên sử dụng hai hệ quả trên để loại bỏ những thanh dàn không làm việc ngay từ đầu.

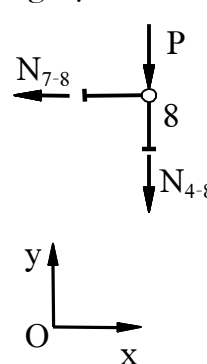
* *Ví dụ*: Xác định lực dọc của các thanh dàn trong hệ dàn trên hình (H.35a)



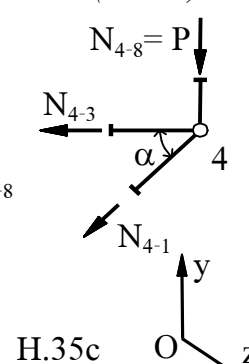
H.35a



H.35b



H.35c



Áp dụng hệ quả 1 & 2, loại bỏ các thanh dàn không làm việc: (6-5), (6-10), (10-9), (10-5), (9-8), (9-5), (5-4) & (5-2). Kết quả được hệ trên hình (H.35b)

- Tách mắt số 8:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-8} = -P \end{cases}$$

- Tách mắt số 4:

$$\begin{cases} \sum Y = 0 \Rightarrow -P - N_{4-1} \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}} (< 0) \\ \sum Z = 0 \Rightarrow N_{4-3} \sin 45^\circ - P \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-3} = P (> 0) \end{cases}$$

**Kết luận*: $N_{7-8} = N_{8-9} = N_{9-10} = N_{5-9} = N_{5-10} = N_{6-10} = N_{4-5} = N_{5-6} = N_{5-2} = 0$.

$$N_{7-8} = 0, N_{4-8} = -P, N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}}, N_{4-3} = P.$$

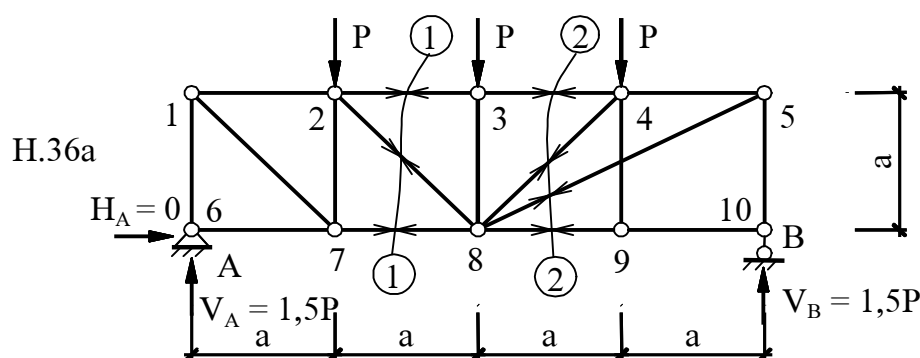
* *Ghi chú*: Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng, nhưng dễ mất sai lầm dặt dẹo.

b. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

Nội dung: Để xác định lực dọc trong các thanh dàn thuộc một mặt cắt - cắt dàn ra làm hai phần độc lập, trong đó số thành phần lực dọc chưa biết không lớn hơn ba.

Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần)
- Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh dàn cần xác định lực dọc. Yêu cầu: mặt cắt phải chia dàn ra làm hai phần độc lập. Giữ lại và xét cân bằng một phần bất kỳ.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương.
- Thiết lập các điều kiện cân bằng: Lúc này, ta có thể thiết lập ba phương trình cân bằng.
- Giải hệ thống ba phương trình, sẽ xác định được lực dọc cần tìm. Kết quả về dấu của nội lực, tương tự phương pháp tách mắt.



* Minh họa:

- Mặt cắt 1 - 1 trên hình (H.36a) là "mặt cắt đơn giản". Các thành phần lực dọc cần xác định thuộc mặt cắt là N_{2-3} , N_{2-8} , N_{7-8} .
- Mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a) cắt qua bốn thanh chưa biết lực dọc N_{3-4} , N_{8-4} , N_{8-5} , N_{8-9} , nên không phải là "mặt cắt đơn giản".

* Để tránh phải giải hệ thống phương trình, cần thiết lập sao cho trong phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại đồng quy tại một điểm, thì lấy tổng cân bằng mômen đối với điểm đồng quy đó.
- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại song song nhau, thì lấy tổng hình chiếu lên phương vuông góc với phương của hai thanh song song đó.

* Ví dụ 1: Xác định lực dọc trong thanh (2-3), (2-8) của hệ dàn trên hình (H.36a).

- Xác định N_{2-3} :

$$\sum M_8^{tr} = 0 \Rightarrow 2a.V_A - a.P + a.N_{2-3} = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -2.1,5.P + P = -2.P (< 0).$$

- Xác định N_{2-8} :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A - P - N_{2-8}.\cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{2-8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.P (> 0)$$

Nhận xét rằng, với mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a), có thể xác định N_{3-4} bằng cách viết phương trình cân bằng mômen với mắt 8.

* Ví dụ 2: Xác định lực dọc của các thanh dàn (1-3), (5-4), (3-6) trong hệ dàn trên hình (H.36b).

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot \frac{3.a}{2} - N_{1-6} \cdot \frac{3.a}{2} = 0 \quad (a)$$

- Với mặt cắt 2-2:

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow f_2(N_{1-6}, N_{2-7}) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot a - N_{1-6} \cdot 2a - P \cdot a = 0 \quad (b)$$

Giải hệ (a), (b), được $N_{1-6} = N_{2-7} = -P$ (gây nén)

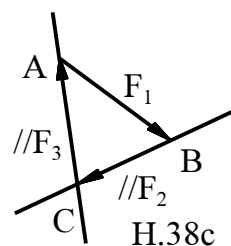
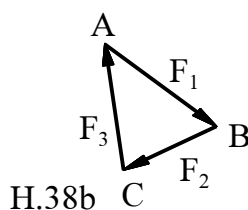
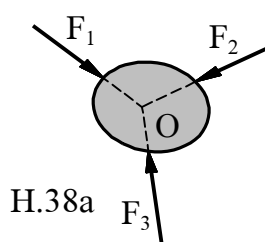
2. Phương pháp đồ giải:

Ý đồ của phương pháp: Thực hiện các phép vẽ hình học và dựa vào hình vẽ đó có thể xác định được nội lực trong các thanh dầm. Tất nhiên, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc vào mức độ chính xác và quy mô của hình vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế thiết kế.

a. Cơ sở của phương pháp:

Dựa trên nguyên lý của môn Cơ học lý thuyết: Điều kiện cân và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực đó phải khép kín.

Minh họa nguyên lý:



Xét một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ ba lực đồng quy $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ (H.38a). Tức là: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Ta đi vẽ đa giác lực của hệ lực này.

+ $\vec{F}_1$: được biểu diễn bằng véc tơ $\overline{AB}$ (có phương, chiều của lực $\vec{F}_1$ và có độ lớn biểu thị trị số của lực $\vec{F}_1$ theo một tỷ lệ xích tự chọn).

+ Tương tự, $\vec{F}_2$ được biểu diễn bằng véc tơ $\overline{BC}$.

Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì véc tơ $\overline{CA}$ chính là $\vec{F}_3$.

Tức là: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$. (H.38b)

Nhận xét 1: Nếu trong hệ ba lực này có 1 lực đã biết (chẳng hạn lực $\vec{F}_1$), hai lực còn lại mới chỉ biết phương ($\vec{F}_2, \vec{F}_3$), thì theo điều kiện khép kín của đa giác lực, ta hoàn toàn có thể xác định được chúng.

Thật vậy, dựng véc tơ $\overline{AB}$ tương trưng cho lực $\vec{F}_1$. Qua B kẻ đường thẳng song song với lực $\vec{F}_2$. Qua A kẻ đường thẳng song song với lực $\vec{F}_3$. Gọi C là giao điểm của hai đường này. Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì $\overline{BC}$ tương trưng cho lực $\vec{F}_2$, $\overline{CA}$ tương trưng cho lực $\vec{F}_3$ (H.38c).

Mở rộng: Với một hệ lực đồng quy và cân bằng trong đó có hai thành phần mới chỉ biết phương, thì hoàn toàn có thể xác định được chúng theo tính chất khép kín của đa giác lực.

Nhận xét 2: Khi tách mắt dàn, hệ lực tác dụng lên mắt là hệ lực đồng quy, cân bằng và nội lực trong các thanh dàn nếu chưa biết thì cũng có phương đã biết (phương của các thanh dàn chứa nó). Vậy, nếu tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai thành phần chưa biết thì có thể xác định được chúng.

Vận dụng nhận xét số 2 vào để xác định lực dọc của các thanh dàn trên hình vẽ (H.39a)

Tách từng mắt của dàn theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai lực dọc chưa biết. Vẽ đa giác lực sẽ xác định được chúng.

*. **Tách mắt A:**

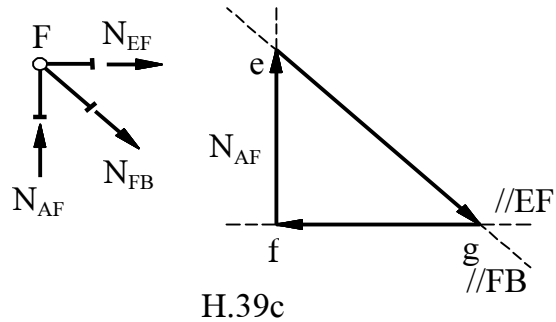
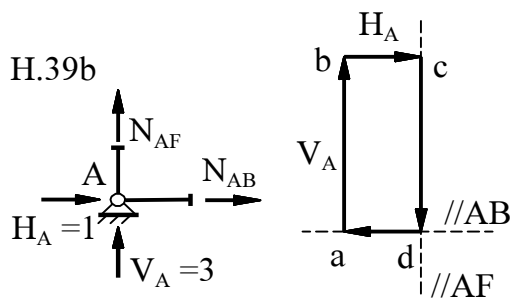
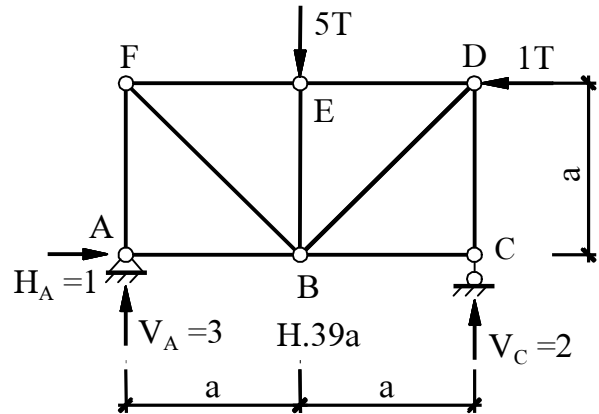
- Lực tác dụng lên mắt A:

+ $\vec{H}_A, \vec{V}_A$: đã biết

+ $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$: mới chỉ biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}\}$ theo tỷ lệ xích tự chọn (H.39b)

- Trị số và dấu của các lực cần xác định:



+ Đoạn c-d, d-a: biểu thị trị số của $\vec{N}_{AF}, \vec{N}_{AB}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: Đứng tại mắt A quan sát trên đa giác lực, các véc tơ $\vec{cd}, \vec{da}$ hướng vào mắt dàn nên $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$ là lực gây nén.

*. **Tách mắt F:**

- Lực tác dụng lên mắt F gồm:

+ Lực $\vec{N}_{AF}$: đã biết (tính ở trên).

+ Lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$: chỉ mới biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{N}_{FE}, \vec{N}_{AF}, \vec{N}_{FB}\}$. Xem hình vẽ (H.39c).

- Trị số và dấu của các lực:

+ Đoạn e-g, g-f: biểu thị trị số của lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: véc tơ $\vec{gf}$ hướng vào mắt F nên $\vec{N}_{FE}$ gây nén, véc tơ $\vec{eg}$ hướng ra khỏi mắt F nên $\vec{N}_{FB}$ gây kéo.

Tiến hành tương tự cho các mắt khác theo nguyên tắc trên, ta sẽ xác định được nội lực trên toàn dàn.

Nhận xét 3: Với mỗi mắt của dàn cần phải vẽ một đa giác lực. Các đa giác này lại rời rạc nhau nên có nhiều lực phải vẽ đến hai lần, gây tốn công sức và điều quan trọng là làm giảm độ chính xác (do mắc sai số cộng dồn). Để khắc phục nhược điểm này, người ta vẽ gộp các đa giác lực trên một hình vẽ. Hình vẽ này gọi là giản đồ nội lực hay còn gọi là giản đồ Maxwell - Crêmona.

b. Giản đồ Maxwell - Cremona:

Để vẽ giản đồ nội lực, cần thống nhất một số quy ước và tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định phản lực tại các gối tựa: Thường tiến hành theo phương pháp giải tích đã biết.

* *Bước 2:* Phân miền bên ngoài và bên trong dàn.

- Miền bên ngoài dàn: là những miền nằm bên ngoài chu vi dàn và được giới hạn bởi các ngoại lực. Miền bên ngoài dàn được đánh bằng các chữ cái a, b, c...thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

- Miền bên trong dàn: là những miền được giới hạn bằng các thanh dàn. Miền bên trong dàn được đánh bằng các chữ số liên tục 1, 2, 3...

- Cách đọc tên ngoại lực: tên của ngoại lực được đọc bằng hai chữ số biểu thị hai miền hai bên ngoại lực và đọc thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

Ví dụ: Lực V_A đọc là a-b.

- Cách đọc tên nội lực: tên của nội lực được đọc bằng hai chữ số biểu thị hai miền hai bên thanh. Muốn đọc nội lực trong một thanh, đứng tại mắt có chứa thanh đó và đọc tên của hai miền hai bên thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng.

Ví dụ: lực dọc trong thanh FB nếu đứng tại F đọc là 2-1; nếu đứng tại B đọc là 1-2.

Chú ý: - tên nội lực phụ thuộc vào vị trí đứng

- mỗi miền sau này chính là một đỉnh của đa giác lực trên giản đồ.

* *Bước 3:* Vẽ đa giác lực của ngoại lực theo tỷ lệ xích tự chọn. Khi vẽ, không dùng dấu véc tơ (mũi tên) để biểu diễn lực mà ghi trên đó hai chữ số tương ứng với cách đọc tên ngoại lực. Chỉ số đầu biểu thị góc, chỉ số sau biểu thị ngọn.

Chú ý: đa giác lực phải tự khép kín.

* *Bước 4:* Vẽ đa giác lực của nội lực.

Nguyên tắc chung: để xác định một đỉnh (của 1 miền) nào đó trên đa giác lực ta cần biết trước hai đỉnh (của hai miền lân cận) trên đa giác. Từ hai đỉnh đã biết, kẻ hai đường thẳng song song với hai thanh dàn giới hạn bởi miền đã biết và miền cần tìm. Giao điểm chính là đỉnh (của 1 miền) cần tìm.

Ví dụ: Xác định đỉnh 1 (miền 1) trên đa giác.

Hai miền lân cận đã biết trên đa giác là a, c. Qua a, kẻ đường song song với AB, qua c kẻ đường song song với AF. Giao điểm chính là 1.

* *Bước 5:* Xác định giá trị và chiều của nội lực trong các thanh dầm.

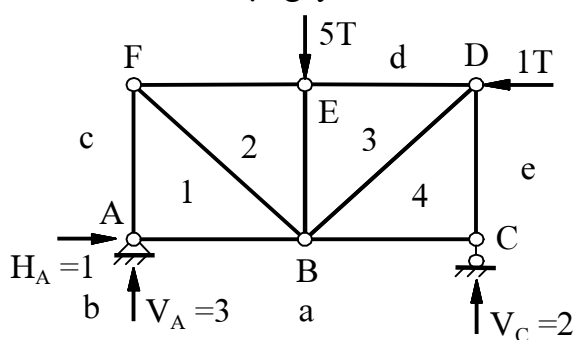
- Muốn xác định nội lực trong thanh i-k, ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn i-k tương ứng trên giản đồ theo tỷ lệ xích vừa vẽ.

- Muốn xác định dấu của nội lực trong thanh i-k, ta chỉ việc đứng tại mắt có chứa thanh i-k và đọc tên của nội lực trong thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng. Quan sát trên giản đồ, nếu nó có chiều hướng vào mắt là lực gây nén và ngược lại.

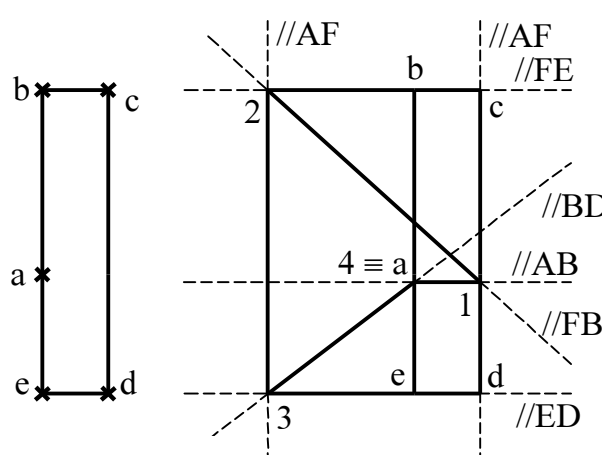
Ví dụ: lực dọc trong thanh FB.

+ Giá trị chính là đoạn 1-2 trên giản đồ.

+ Dấu: Nếu đứng tại F thì sẽ đọc là 2-1 và quan sát trên giản đồ thấy hướng ra xa mắt F nên là lực gây kéo.



H.39d

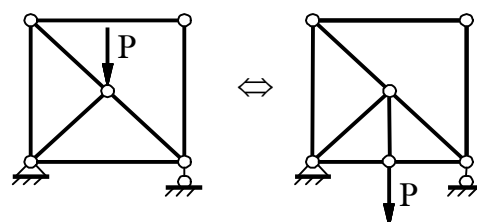


H.39e

Đa giác ngoại lực

**Chú ý:*

- Đối với những dầm mà không thể thực hiện tách mắt để vẽ (do có không đảm bảo việc tách mắt sao cho số ẩn không vượt quá 2), ta có thể sử dụng các phương pháp giải tích để xác định trước lực dọc trong một số các thanh dầm trước khi vẽ.



H.39f

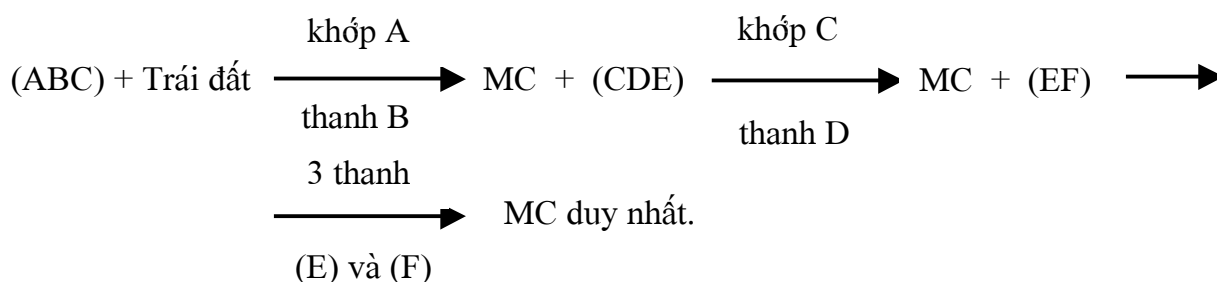
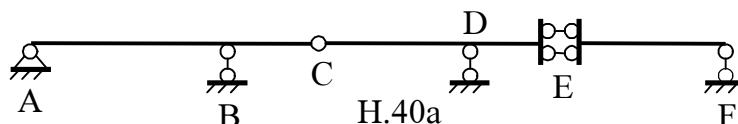
- Nếu ngoại lực nằm bên trong dầm, tìm cách đưa ra ngoài chu vi dầm trước khi thực hiện. Ví dụ hệ trên hình (H.39f).

§ 5. HỆ GHÉP

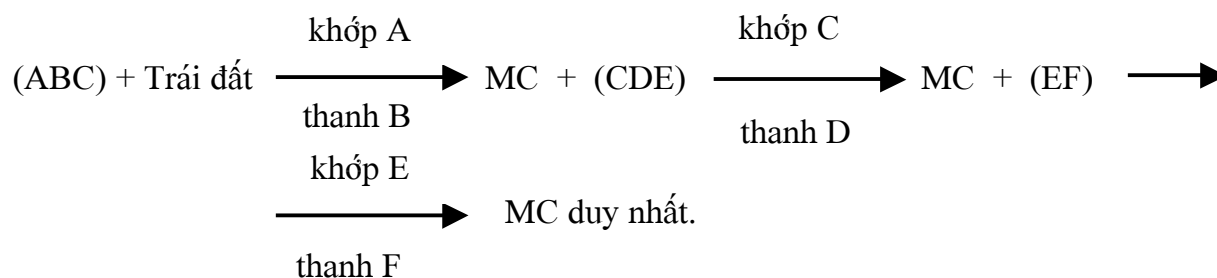
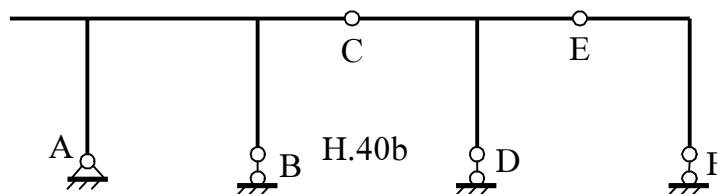
I. Phân tích hệ:

1. Định nghĩa: là hệ gồm nhiều hệ liên kết với nhau bằng các liên kết với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh rồi nối với trái đất bằng các gối tựa để tạo thành hệ BBH.

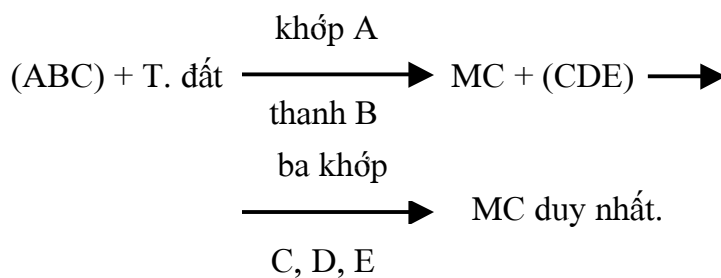
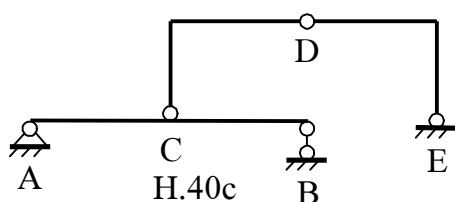
2. Ví dụ:



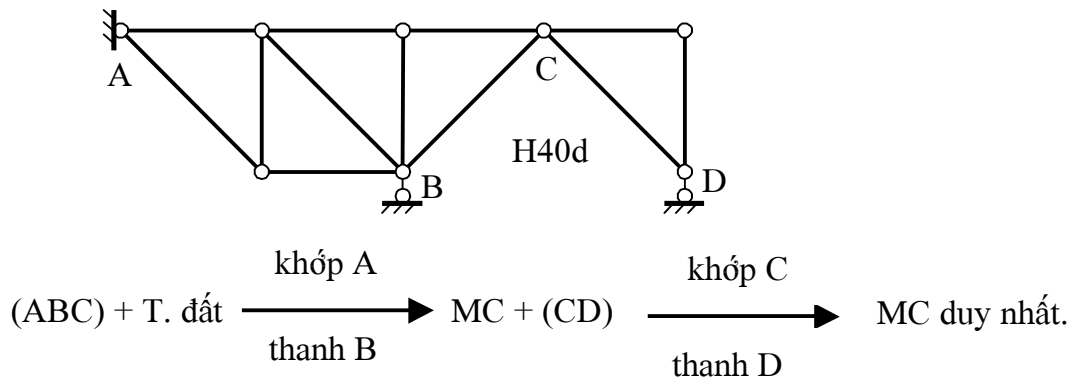
Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CDE, EF là những hệ dầm đơn giản.



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CDE, EF là những hệ khung đơn giản.



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC (dầm đơn giản), CDE (hệ ba khớp).



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CD là những hệ đàn.

* *Nhận xét:*

- Có thể xây dựng hệ ghép bằng cách phát triển miếng cứng.
- Theo chiều phát triển miếng cứng, ta loại bỏ miếng cứng trước thì hệ còn lại sẽ bị BH.

3. Cấu tạo của hệ ghép:

- Hệ chính: là hệ mà nếu loại bỏ những hệ lân cận nó vẫn BBH.

Ví dụ: Các hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.

- Hệ phụ: là hệ mà nếu loại bỏ các hệ lân cận thì nó bị BH.

Ví dụ: Các hệ trừ hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.

- * Hệ trung gian: là hệ phụ nhưng là hệ chính của hệ khác.

Ví dụ: Hệ CDE trong hệ trên hình (H.40a & H.40b).

II. Nguyên tắc làm việc của hệ ghép:

- Tải trọng tác dụng lên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính, không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này, do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không xuất hiện nội lực.

- Tải trọng tác dụng lên hệ phụ thì gây ra nội lực trong cả hệ phụ và hệ chính. Tải trọng sẽ truyền áp lực từ hệ phụ lên hệ chính thông qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

III. Tính toán hệ ghép:

Các bước tiến hành như sau:

- * *Bước 1:* Phân tích cấu tạo hệ, xác định hệ chính, hệ phụ, hệ trung gian.

- * *Bước 2*: Tách hệ ghép ra thành nhiều hệ tách biệt, sắp xếp theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Đối với hệ phụ, thay thế liên kết đối với hệ chính của nó bằng liên kết tương đương nối đất.

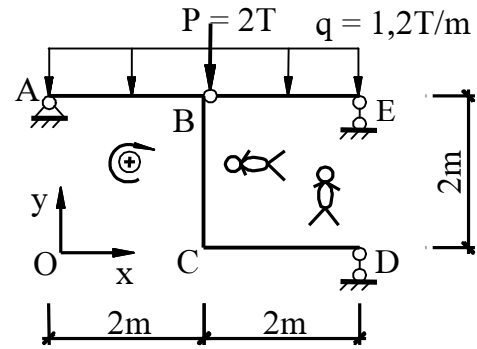
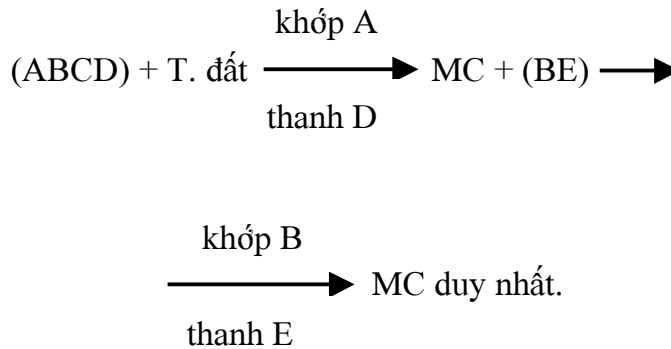
- * *Bước 3*: Giải lần lượt các hệ theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Khi tính hệ chính, phải truyền phản lực từ hệ phụ (của nó) vào. Truyền tại vị trí liên kết giữa hệ phụ với hệ chính, có giá trị bằng phản lực khi tính cho hệ phụ và có chiều ngược lại.

Sau khi giải cho tất cả các hệ thành phần, ghép các biểu đồ nội lực lại với nhau, sẽ được kết quả cần tìm.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ GHÉP

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.41a)

1. Phân tích hệ:



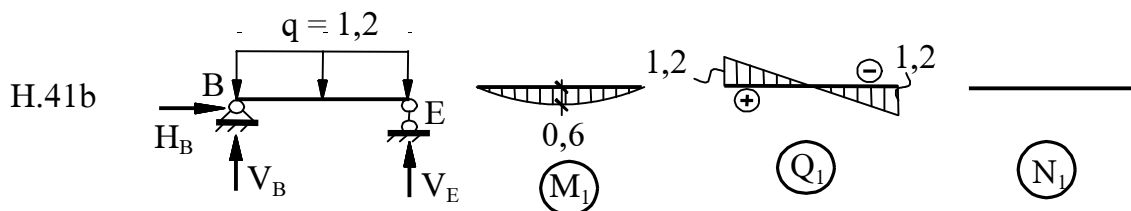
H.41a

Hệ đã cho là hệ ghép, hệ chính ABCD (hệ khung đơn giản) & hệ phụ BE (hệ dầm đơn giản).

2. Giải lần lượt các hệ đơn giản:

a. Hệ phụ BE (H.41b):

- Xác định phản lực $\{V_B, H_B, V_E\}$: Dễ thấy $H_B = 0$; $V_B = V_E = \frac{q \cdot 2}{2} = 1,2$.
- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:
 - Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = V_B = 1,2$; $N_B = 0$.
 - Tại E: $M_E = 0$; $Q_E = -V_E = -1,2$; $N_E = 0$.
- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_1), (Q_1), (N_1):
 - + Biểu đồ mômen: tung độ treo $f = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 2^2}{8} = 0,6$.
 - + Biểu đồ lực cắt: là đoạn đường thẳng.
 - + Biểu đồ lực dọc: là đoạn đường thẳng.



b. Hệ chính ABCD (H.41c):

- Xác định phản lực $\{V_A, H_A, V_D\}$:
 - $\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$.
 - $\sum M_D = 0 \Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot q \cdot 3 - 2 \cdot P - 2 \cdot V_B = 0$
 - $\Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot 1,2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1,2 \cdot 2 = 0$
 - $\Rightarrow V_A = 3,4 (>0)$.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4.V_D + 2.q.1 + 2.P + 2.V_B = 0.$$

$$\Rightarrow -4.V_D + 2.1,2.1 + 2.2 + 2.1,2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_D = 2,2 (>0)$$

Kiểm tra: Dễ thấy thỏa phương trình $\sum Y = 0$.

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc

trung:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 3,4$;

$$N_A = 0.$$

Tại B: $M_{BA} = 2.V_A - 2.q.1 = 2.3,4 - 1,2.2.1 = 4,4$.

$$M_{BC} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$$

$$Q_{BA} = V_A - 2.q = 3,4 - 2.1,2 = 1; N_{BA} = 0.$$

$$Q_{BC} = 0; N_{BC} = -V_D = -2,2.$$

Tại C: $M_{CB} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$; $Q_{CB} = 0$; $N_{CB} = -V_D = -2,2$.

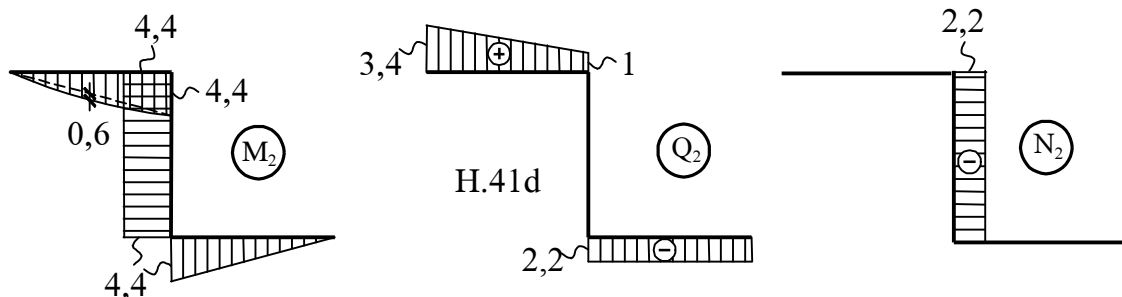
$$M_{CD} = 2.V_D = 2.2,2 = 4,4$$
; $Q_{CD} = -V_D = -2,2$; $N_{CD} = 0$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = -V_D = -2,2$; $N_D = 0$.

- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_2), (Q_2), (N_2) (H.41d):

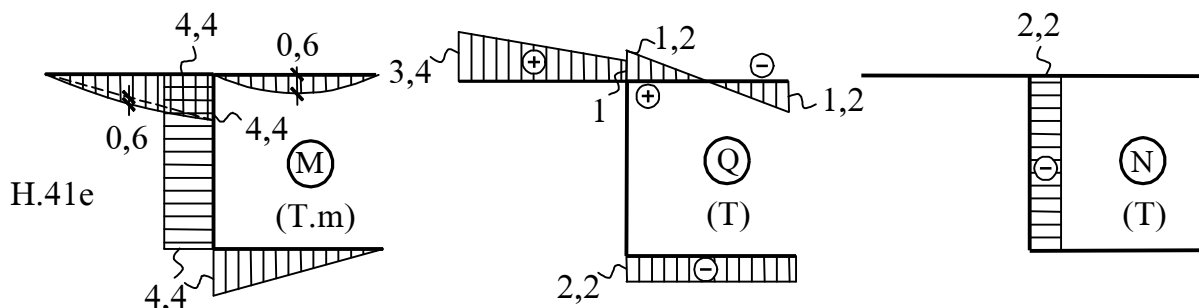
+ Biểu đồ mômen: Trên AB có tung độ treo $f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.2^2}{8} = 0,6$.

+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.



+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.

3. Vẽ gộp các biểu đồ nội lực (H.41e):



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.42a)

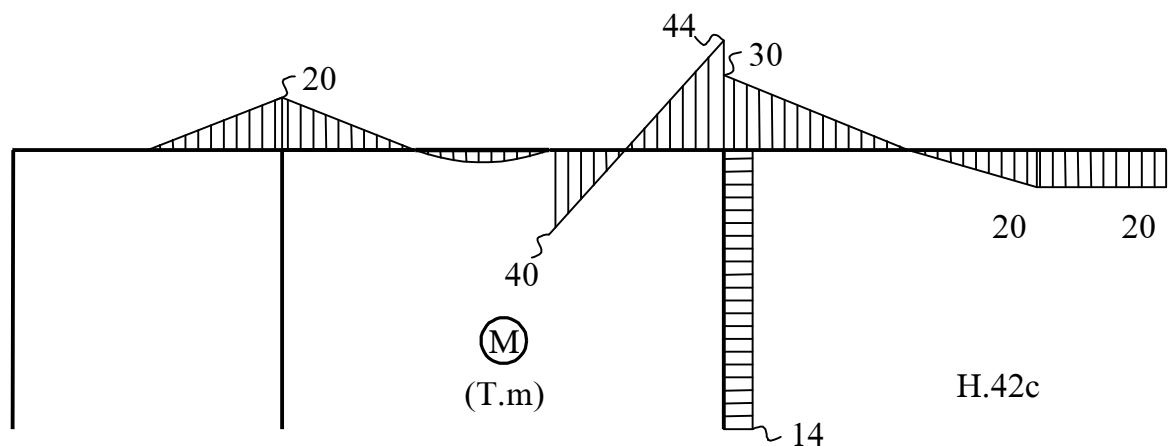
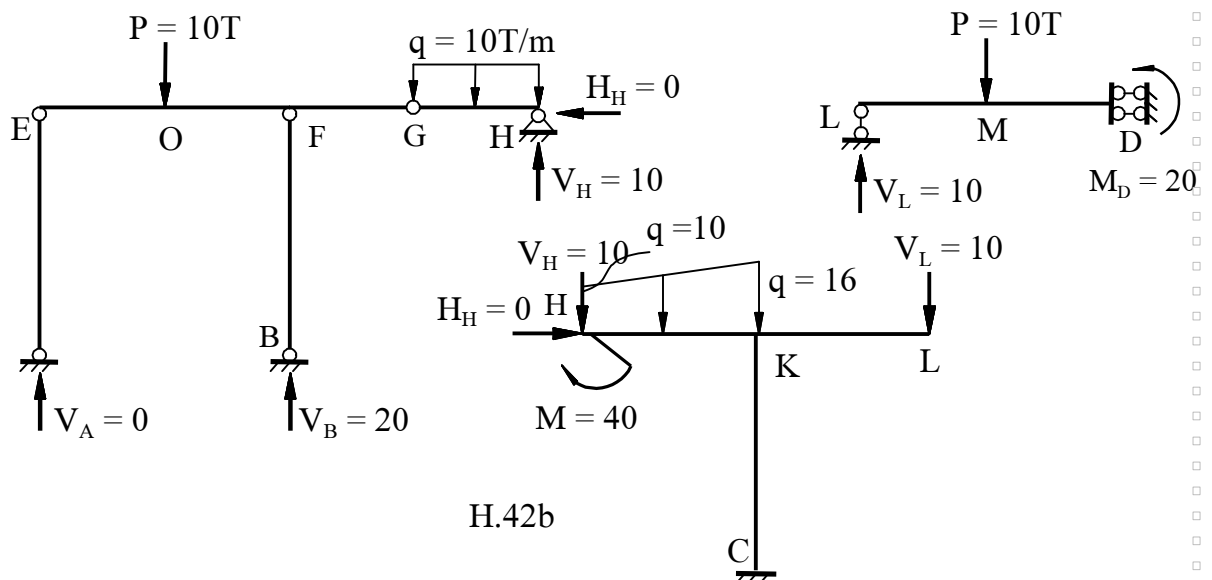
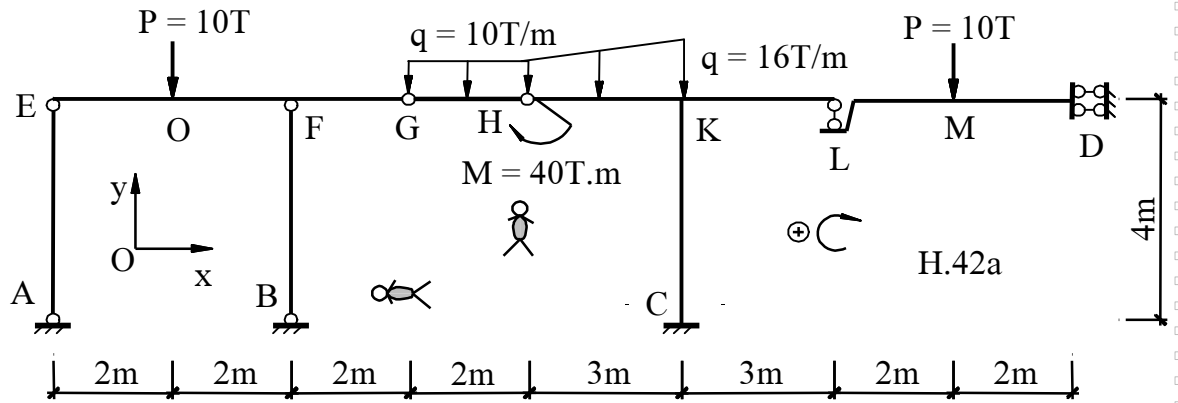
Hệ đã là hệ ghép của 3 hệ :

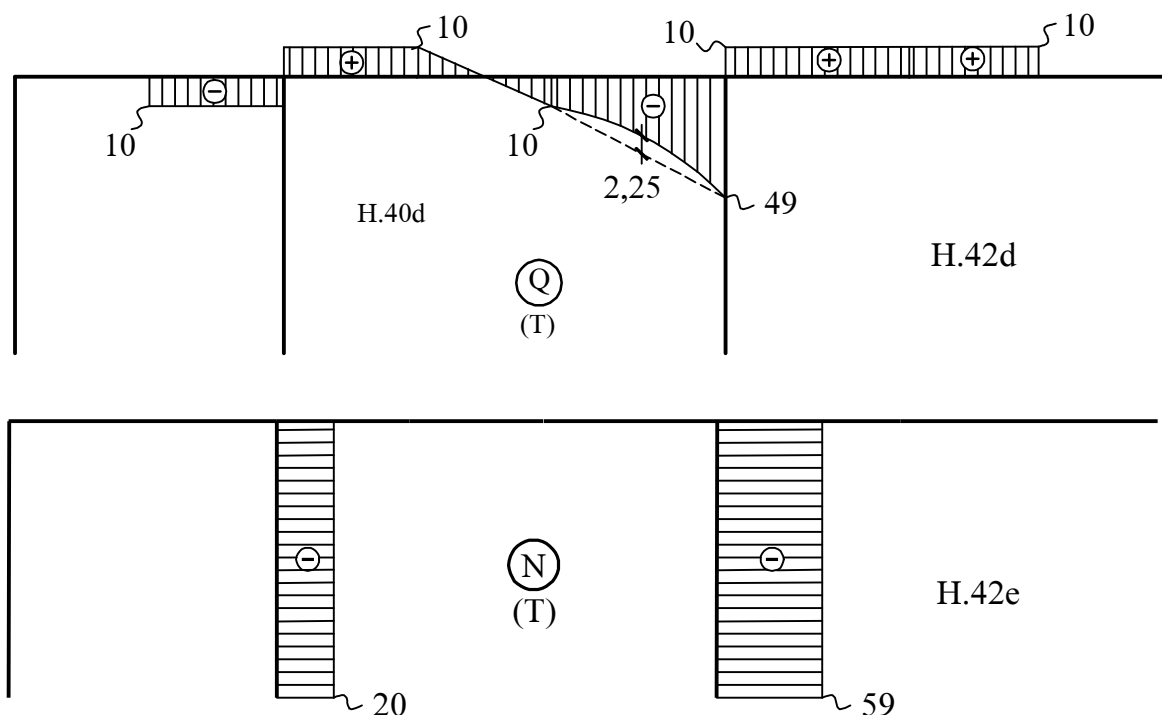
- Hệ 3 khớp ABEFGH, các khớp là H, G và khớp giả tạo bởi hai thanh AE & BF. Đây là hệ phụ.

- Hệ dầm LMD, là hệ phụ.
- Hệ khung CHKL, là hệ chính.

Quá trình tính toán trình bày trên hình (H.42b).

Kết quả biểu đồ nội lực trên toàn hệ trên hình (H.42c, d, e).





* Ví dụ 3: Xác định lực dọc trong thanh dầm (3-8), (1-7) của hệ dầm cho trên hình (H.43a)

Hệ dầm đã cho có thể xem như hệ ghép và phân tích thành hệ chính và phụ như trên hình vẽ.

- Dùng mặt cắt 1-1 tách mắt 3

$$\sum Y = 0$$

$$\Rightarrow -N_{3-8} \cdot \sin 45^\circ + V_3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{3-8} = 0,5 \cdot P \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} (> 0)$$

- Dùng mặt cắt "đơn giản"

2-2 trên hệ chính

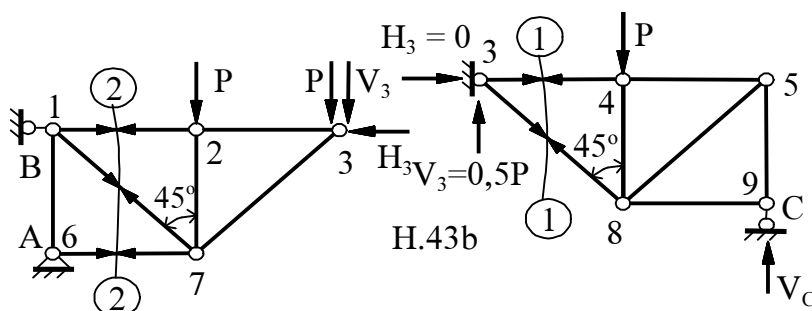
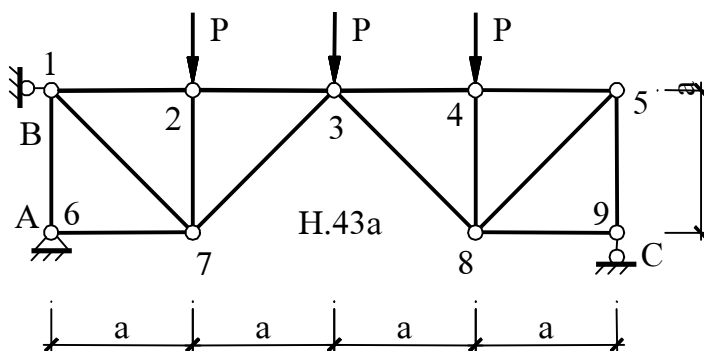
$$\sum Y^{\text{ph}} = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \cos 45^\circ - P - P -$$

$$- 0,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,5 \cdot P$$

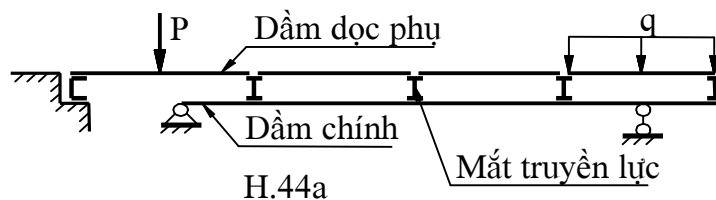
$$\Rightarrow N_{1-7} = \frac{5 \cdot P}{\sqrt{2}} (> 0)$$



§6. HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: là những hệ mà tải trọng không tác dụng trực tiếp lên kết cấu chịu lực chính mà phải thông qua một hệ thống truyền lực.



2. Đặc điểm của hệ có hệ thống truyền lực:

- Cố định được vị trí đặt lực.
- Giảm nhẹ trọng lượng của các kết cấu chịu lực chính.
- Bảo vệ các kết cấu chịu lực chính tránh bị hư hỏng trong quá trình chịu tải.

Chú ý: Các kết cấu hệ có hệ thống truyền lực thường gặp sàn nhà, mái nhà, kết cấu mặt cầu....

II. Tính hệ có hệ thống truyền lực:

- Phân dầm dọc phụ: làm việc như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại vị trí các mắt truyền lực.
- Phần kết cấu chịu lực chính: chịu áp lực từ dầm dọc phụ thông qua các mắt truyền lực.

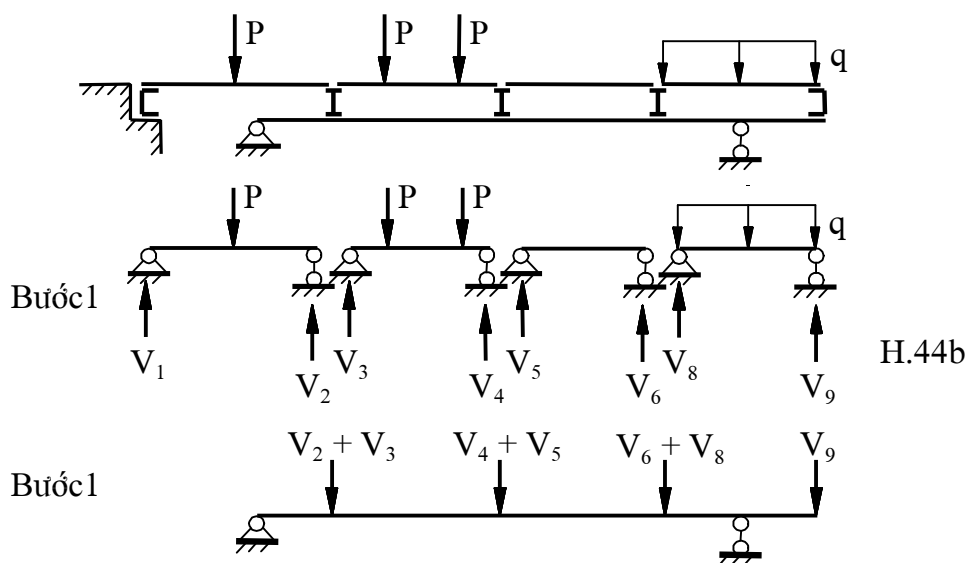
Các bước tính toán như sau:

* *Bước 1:* Xem các dầm dọc phụ như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại các mắt truyền lực và chịu tải trọng tương ứng. Hệ này đã biết cách tính.

* *Bước 2:* Tính kết cấu chịu lực chính.

- Truyền phản lực từ dầm dọc phụ vào (giống hệ ghép).
- Tính kết cấu chịu lực chính như những hệ thông thường đã biết.

Minh họa:

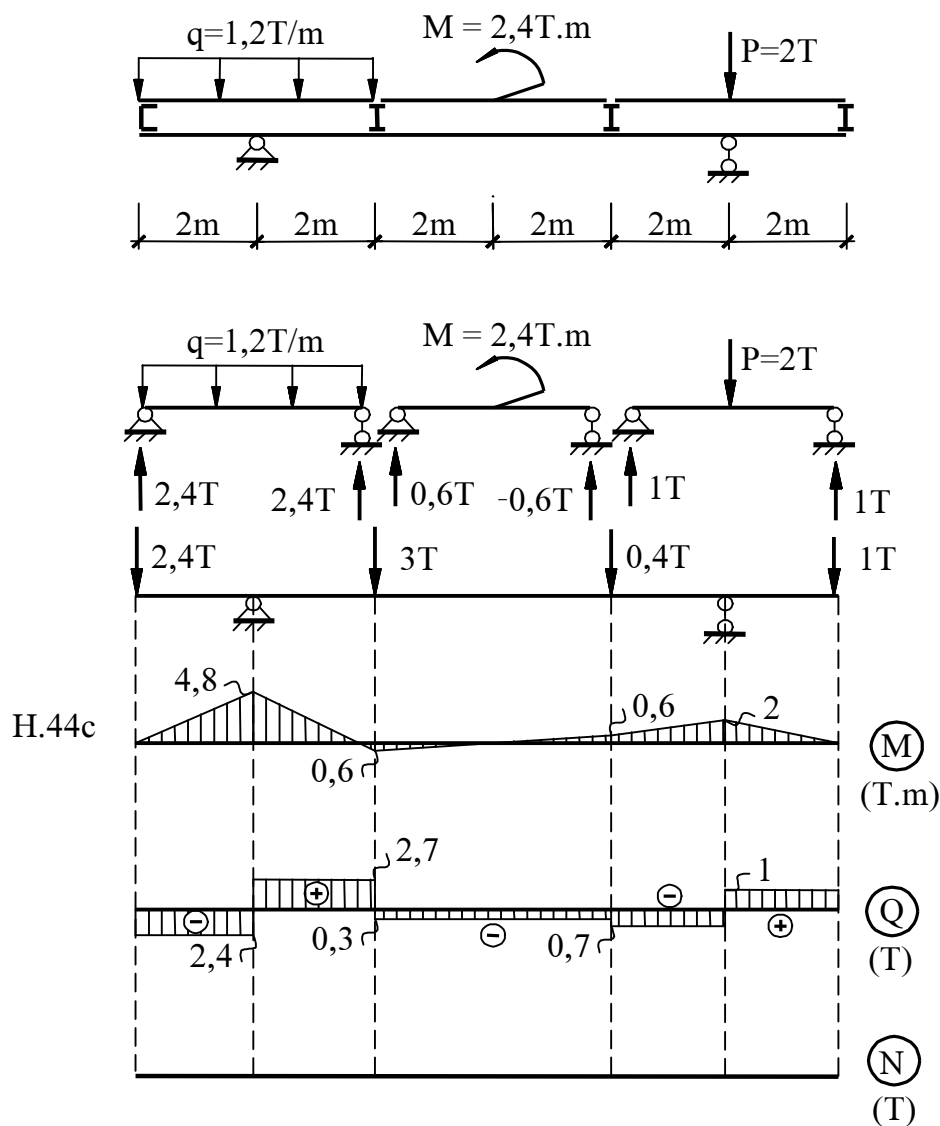


* *Nhận xét:* Do tải trọng truyền vào kết cấu chịu lực chính những lực tập trung, nên biểu đồ mômen trong kết cấu chịu lực chính có dạng đa giác còn biểu đồ lực cắt có dạng hình thang.

* *Ví dụ:* Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ có hệ thống truyền lực (H.44c).

1. Tính các dầm dọc phụ: là những dầm đơn giản, tính được dễ dàng. Ở đây chỉ xác định phản lực của nó.

2. Tính kết cấu chịu lực chính: là dầm đơn giản chịu tải trọng là áp lực từ các dầm dọc phụ truyền vào. Kết quả thể hiện trên hình vẽ.



CHƯƠNG 3

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TÍNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Tải trọng di động và nguyên tắc tính hệ chịu tải trọng di động:

1. Tải trọng di động: là tải trọng có vị trí thay đổi tác dụng lên công trình như tải trọng của đoàn xe, đoàn người di chuyển trên cầu...

Khi tải trọng di động trên hệ, đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) sẽ thay đổi. Do đó, khi nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động, ta phải giải quyết hai nhiệm vụ:

- Xác định vị trí bất lợi hay còn gọi là vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình là vị trí của tải trọng để sao cho ứng với vị trí đó, đại lượng nghiên cứu S có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

- Xác định trị số để tính hay còn gọi là giá trị để tính là trị số lớn nhất về trị tuyệt đối của đại lượng nghiên cứu S ứng với vị trí để tính của tải trọng di động.

2. Nguyên tắc chung để tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính:

- Giả thiết khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi và vị trí của chúng được xác định theo một tọa độ chạy z .

- Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu S theo vị trí của tải trọng di động (theo tọa độ z) bằng các nguyên tắc như đã biết trong phần hệ chịu tải trọng bất động. S là hàm số theo z $S(z)$.

- Tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các cực trị là giá trị để tính. Vị trí z_0 tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí để tính.

Hàm $S(z)$ thường là hàm nhiều đoạn và không liên tục về giá trị cũng như đạo hàm của nó nên việc tìm các cực trị khó khăn. Người ta sử dụng phương pháp đường ảnh hưởng để nghiên cứu.

II. Định nghĩa đường ảnh hưởng:

Đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của đại lượng S tại một vị trí xác định trên công trình theo vị trí của một lực tập trung bằng đơn vị, không thứ nguyên, có phương và chiều không đổi di động trên công trình gây ra. Ký hiệu đ.a.h. S

III. Các quy ước khi vẽ đường ảnh hưởng:

- Đường chuẩn thường chọn có phương vuông góc với lực $P = 1$ di động (hoặc trực các cấu kiện).

- Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.

- Các tung độ dương dựng theo chiều của tải trọng di động và ngược lại.

- Ghi các ký hiệu $(\oplus)$, $(\ominus)$ vào miền dương, âm của đ.a.h. S .

IV. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng:

Các bước tiến hành như sau:

**Bước 1:* Cho một lực $P = 1$ di động trên công trình. Vị trí của nó cách gốc hệ trục tọa độ chọn tùy ý một đoạn z .

**Bước 2:* Xác định biểu thức của đại lượng nghiên cứu S tương ứng với vị trí của lực P có tọa độ z bằng các phương pháp tính với tải trọng bất động đã quen biết, được $S(z)$. $S(z)$ gọi là phương trình đường ảnh hưởng.

**Bước 3:* Vẽ đồ thị của hàm số $S(z)$ sẽ được đ.a.h.S

**Ví dụ:* Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k (H.3.1a)

1. Xác định $M_k(z)$:**a. Xác định phản lực:**

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{z}{l}.$$

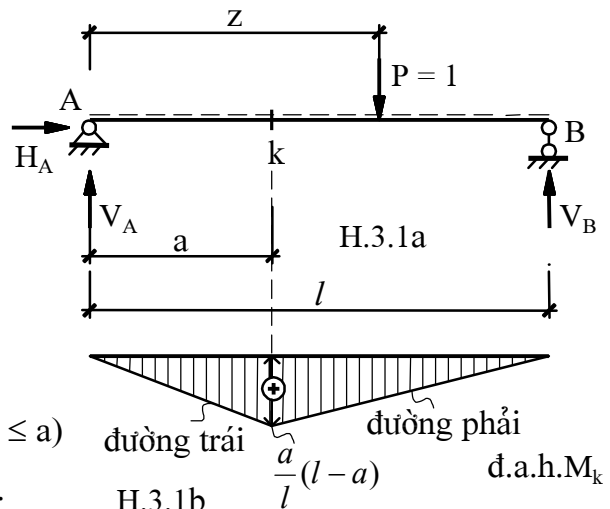
b. Xác định $M_k(z)$:

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a).$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = V_A \cdot z = \frac{(l - z)}{l} \cdot a.$$

**2. Vẽ đ.a.h. M_k :**

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = \frac{z}{l} \cdot (l - a) \text{ có dạng bậc nhất, được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = 0 \Rightarrow M_k(0) = 0.$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = \frac{(l - z)}{l} \cdot a \text{ có dạng bậc nhất được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

$$+ z = l \Rightarrow M_k(l) = 0.$$

Kết quả trên hình (H.3.1b)

IV. Ý nghĩa và thứ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng:**1. Ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S :**

Tung độ đường ảnh hưởng đại lượng S tại một tiết diện nào đó biểu thị giá trị của đại lượng S do lực $P = 1$ đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.

2. So sánh ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S với biểu đồ nội lực:

Trong chương 2, ta biết rằng: tung độ biểu đồ nội lực tại một tiết diện biểu thị giá trị của nội lực tại ngay tiết diện đó do các tải trọng có vị trí không đổi tác dụng trên toàn hệ gây ra.

Như vậy, biểu đồ nội lực cho thấy quy luật phân bố của nội lực trên tất cả các tiết diện của hệ; còn đường ảnh hưởng của đại lượng S cho thấy quy luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu S tại một vị trí xác định nào đó do lực tập trung $P = 1$ di động trên công trình gây ra.

3. Thử nguyên tung độ đường ảnh hưởng:

$$\text{Thử nguyên tung độ đường ảnh hưởng} = \frac{\text{Thử nguyên đại lượng } S}{\text{Thử nguyên lực } P}$$

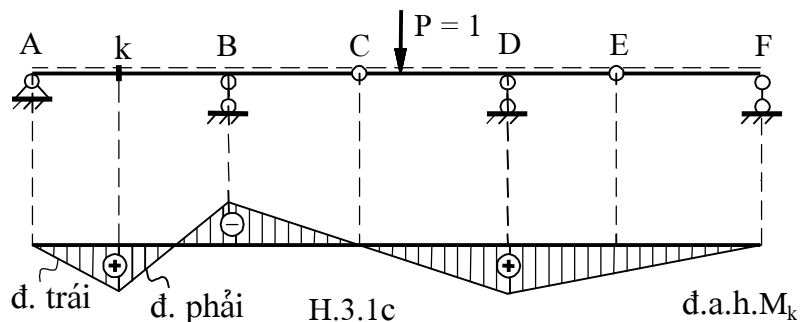
Vậy, nếu thử nguyên của lực là kN , của chiều dài là m thì tung độ đường ảnh hưởng phản lực có thử nguyên $\frac{kN}{kN}$ (tức là hữ số), mômen uốn là $\frac{kN.m}{kN} = m$.

V. Dạng đường ảnh hưởng:

Trong hệ tĩnh định, đường ảnh hưởng phản lực và nội lực là những đoạn thẳng tương ứng với mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng nghiên cứu S .

Nếu miếng cứng thành phần chứa đại lượng nghiên cứu S thì đường ảnh hưởng thuộc miếng cứng này gồm hai đoạn thẳng giới hạn tại vị trí tương ứng dưới tiết diện chứa đại lượng S . Lúc này, đoạn đường bên trái gọi là đường trái và đoạn còn lại gọi là đường phải.

Ví dụ cho trên H.3.1c, ABC là miếng cứng thành phần có chứa đại lượng S ; CDE, EF là miếng cứng thành phần không chứa đại lượng S



§2. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

I. Dầm công xôn:

1. Phân tích:

a. Khi đầu thừa bên phải: (H.3.2a)

- Xác định $M_k(z)$, $Q_k(z)$, $N_k(z)$:

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($b \leq z \leq l$):

$$M_k(z) = 0, Q_k(z) = 0, N_k(z) = 0.$$

+ Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($0 \leq z \leq b$):

$$M_k(z) = -P \cdot (b - z) = -(b - z)$$

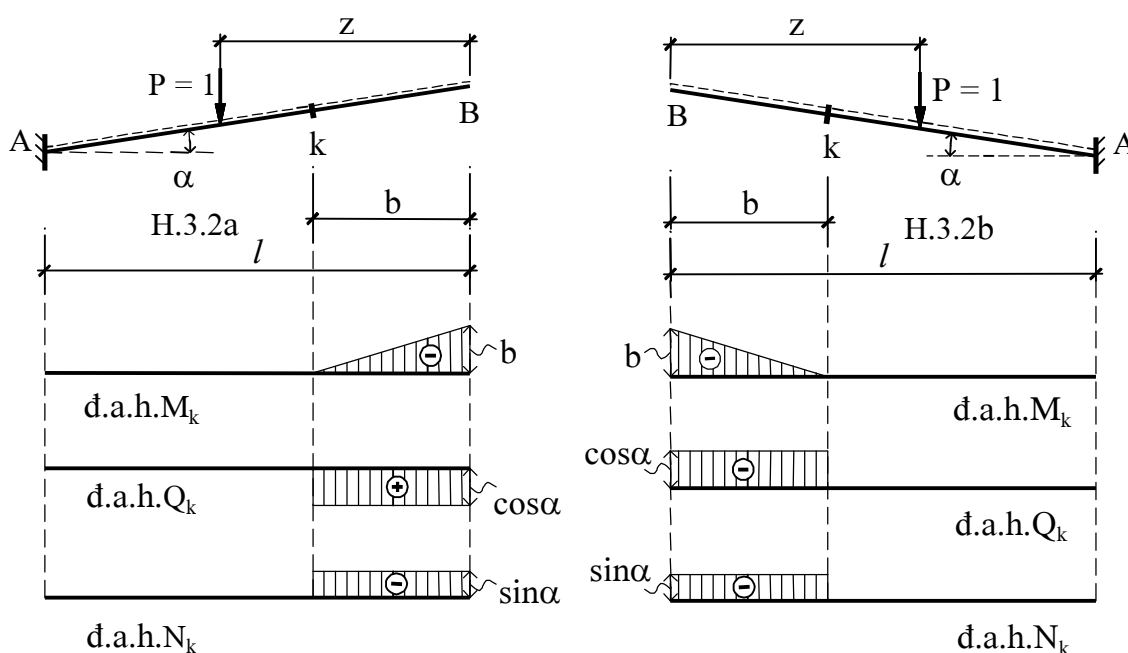
$$Q_k(z) = +P \cdot \cos \alpha = \cos \alpha.$$

$$N_k(z) = -P \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha.$$

- Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k , đ.a.h. N_k : Cho z biến thiên và vẽ. (H.3.2a)

b. Khi đầu thừa bên trái:

Tương tự, kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.3.2b)

**2. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng:****a. Đ.a.h. M_k :**

* Nhận xét: đ.a.h. M_k có dạng hình tam giác.

- Tại nút thừa $M_k = -b$ (b là khoảng cách từ nút thừa đến đến tiết diện k theo phương ngang).

- Tại tiết diện k : $M_k = 0$.

- Đ.a.h. M_k luôn mang dấu âm.

- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h. M_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Tại nút thừa dựng tung độ $y = -b$.

- Tại k dựng tung độ $y = 0$.

- Nối hai tung độ này bằng đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h. M_k trên đoạn từ nút thừa đến tiết diện k .

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h. M_k vẽ trùng đường chuẩn.

b. Đ.a.h. Q_k :

* *Nhận xét:* đ.a.h. Q_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải.
- Tung độ $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h. Q_k trùng với đường chuẩn.

* *Cách vẽ nhanh:*

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k , dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải; $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h. Q_k vẽ trùng đường chuẩn.

c. Đ.a.h. N_k :

* *Nhận xét:* đ.a.h. N_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = -\sin\alpha$.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h. N_k trùng với đường chuẩn.

* *Cách vẽ nhanh:*

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k , dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = -\sin\alpha$.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h. N_k vẽ trùng đường chuẩn.

**Chú ý:* α lấy > 0 khi đầu B cao

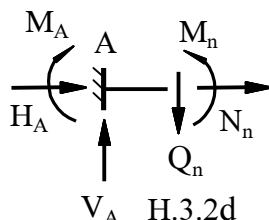
hơn đầu A và ngược lại.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k và đ.a.h phản lực gối tựa A của hệ cho trên H.3.2c

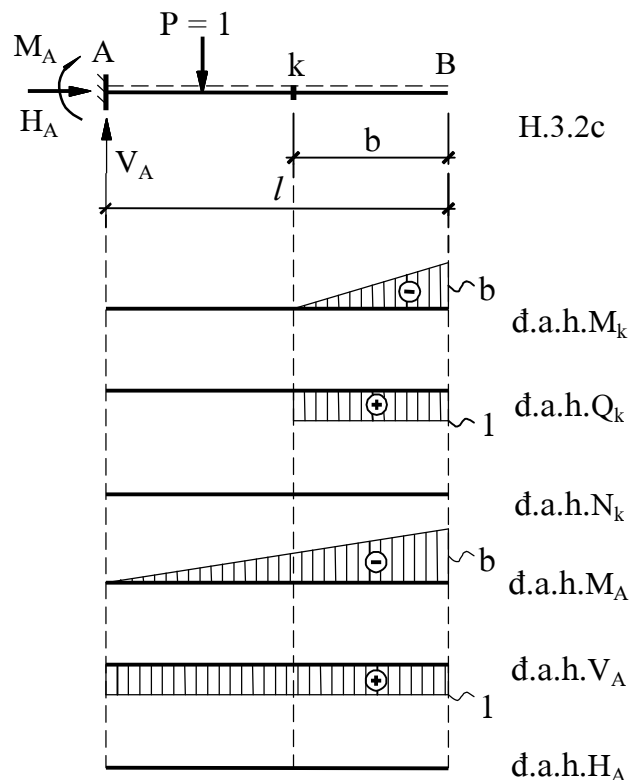
- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo cách vẽ nhanh.

- đ.a.h phản lực tại gối A được vẽ theo đ.a.h nội lực tiết diện tại ngàm:

$$\begin{aligned} + \text{đ.a.h. } V_A &\equiv \text{đ.a.h. } Q_n \\ + \text{đ.a.h. } M_A &\equiv \text{đ.a.h. } M_n \\ + \text{đ.a.h. } H_A &\equiv (-1)\text{đ.a.h. } N_n \end{aligned}$$



H.3.2d

**II. Đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản có đầu thừa: (H.3.3)****1. Đường ảnh hưởng phản lực:****a. Phân tích:**

- Xác định V_A, H_A, V_B :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0 \Rightarrow V_B = \frac{z}{l}.$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

- Vẽ đ.a.h phản lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Nhận xét:

- Đ.a.h. V_A , đ.a.h. V_B là một đoạn thẳng duy nhất, có tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng nghiên cứu, tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.
- Đ.a.h. H_A trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Đ.a.h. V_A , đ.a.h. V_B :
- + Dựng tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng vẽ đ.a.h.
- + Dựng tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.
- + Nối hai tung độ này bằng một đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h cần vẽ.
- Đ.a.h. H_A : vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đường ảnh hưởng nội lực:

a. Trường hợp tiết diện nằm bên trong nhịp:

a1. Phân tích:

- Xác định nội lực tại tiết diện k :
- + Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($-l_1 \leq z \leq a$):

$$M_k = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a).$$

$$Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha = -\frac{z}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = V_B \cdot \sin \alpha = \frac{z}{l} \cdot \sin \alpha.$$

- + Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l + l_2$):

$$M_k = V_A \cdot a = \frac{a \cdot (l - z)}{l}.$$

$$Q_k = V_A \cdot \cos \alpha = \frac{(l - z)}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = -V_A \cdot \sin \alpha = -\frac{(l - z)}{l} \cdot \sin \alpha.$$

- Vẽ đ.a.h nội lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

a2. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Đ.a.h. M_k :

- Nhận xét:

- + Đường trái và đường phải cắt nhau tại vị trí tương ứng dưới tiết diện k .

+ Nếu kéo dài đường phải đến gối tựa A, có tung độ $y = +a$ (a là khoảng cách từ k đến gối tựa A theo phương ngang)

+ Nếu kéo dài đường trái đến gối tựa B, có tung độ $y = +(l - a)$.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Đ.a.h. M_k không phụ thuộc góc α .

- Cách vẽ nhanh:

+ Dựng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại gối tựa A, dựng tung độ $y = +a$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, được đường phải.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải, xác định được phần thích dụng của đường phải và điểm chung của đường phải với đường trái.

+ Nối điểm chung vừa xác định với điểm không tại A, sẽ xác định được phần thích dụng của đường trái.

* Đ.a.h. Q_k :

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải song song nhau.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Tại vị trí tiết diện k, có bước nhảy bằng $\cos \alpha$.

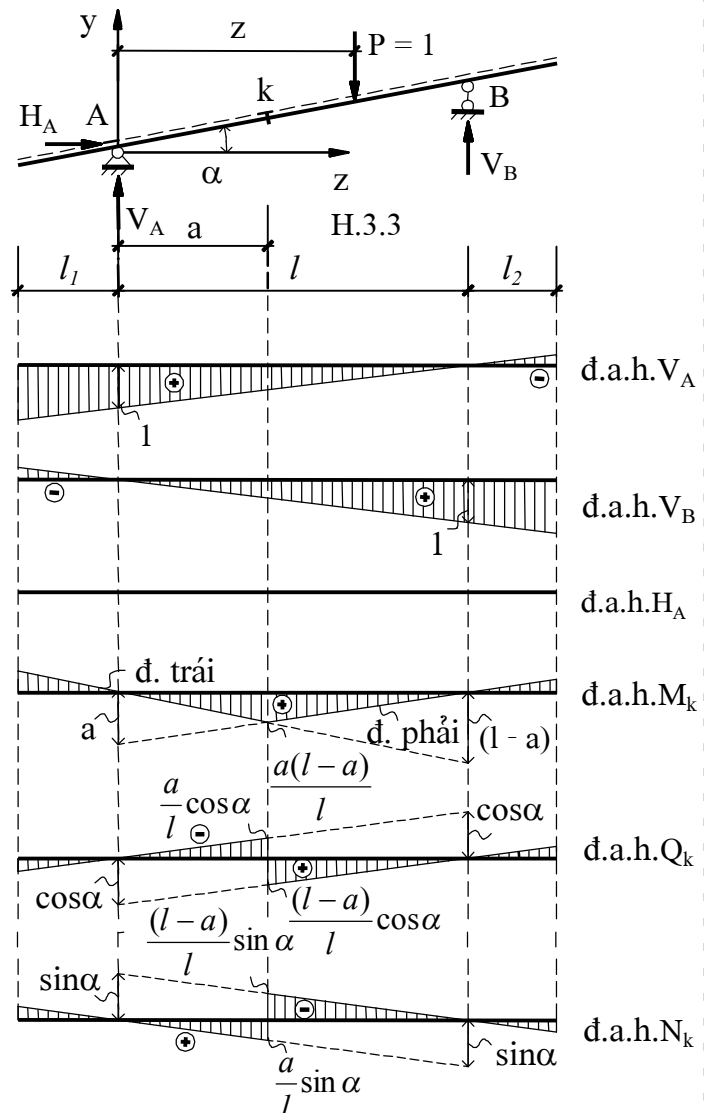
- Cách vẽ nhanh:

+ Dựng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dựng tung độ $y = +\cos \alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dựng tung độ $y = -\cos \alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phần thích dụng của chúng.



* *Đ.a.h.N_k*:

- *Nhận xét*:

+ Đường trái và đường phải song song nhau.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Tại vị trí tiết diện k , có bước nhảy bằng $\sin\alpha$.

- *Cách vẽ nhanh*:

+ Dựng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dựng tung độ $y = -\sin\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dựng tung độ $y = +\sin\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k , dựng đường thẳng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phần thích dụng của chúng.

Lưu ý rằng với những nhận xét trên, còn có những cách khác để vẽ nhanh đường phải, đường trái đường ảnh hưởng nội lực.

b. Trường hợp tiết diện thuộc đầu thừa: giống dầm công xôn.

* *Chú ý*: Góc α lấy > 0 khi gối tựa A cao hơn gối tựa B và ngược lại.

Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h mômen, lực cắt tại tiết diện k, m & A của hệ trên hình (H.3.4a).

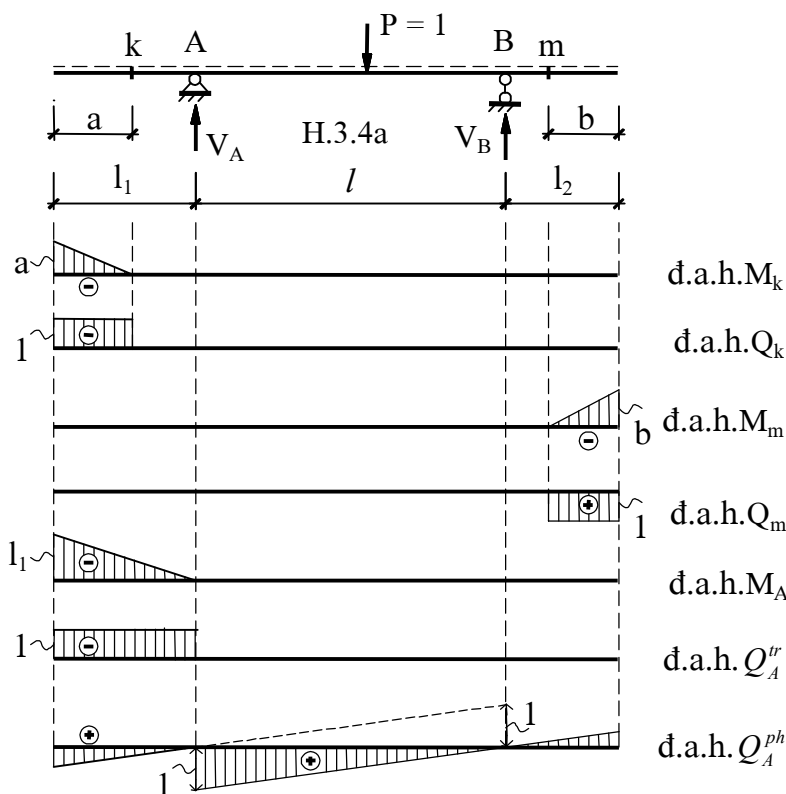
Tiết diện k & m thuộc đầu thừa nên vẽ theo đ.a.h trong dầm công xôn.

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.4b)

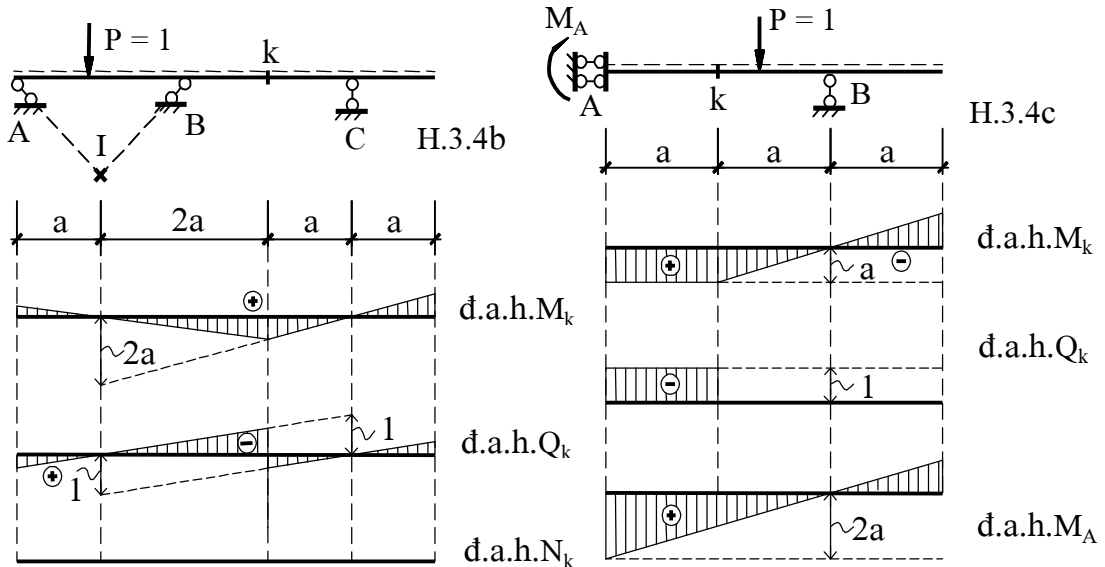
Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản nhịp 3a

Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn, lực cắt tại tiết diện k và mômen uốn phản lực gối tựa A của hệ trên hình (H.3.4c)

- Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản có gối trái ở xa vô cùng và gối B



- Đường ảnh hưởng mômen uốn của gối A có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện sát gối A.



III. Đường ảnh hưởng trong hệ khung đơn giản:

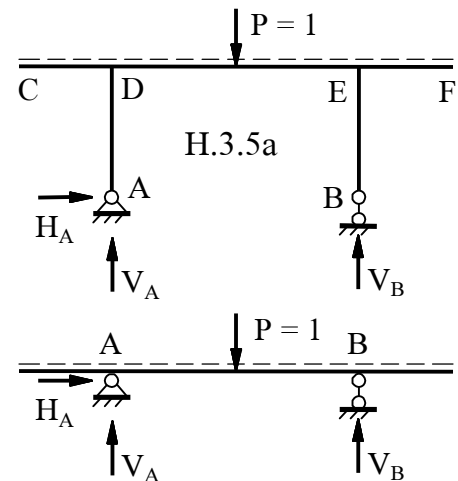
Xét một khung và dầm đơn giản tương ứng.

* Nhận xét:

- Đ.a.h phản lực và nội lực trong thanh CDEF vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản tương ứng.

- Đ.a.h nội lực trong thanh AD & BE vẽ dựa vào liên hệ giữa nội lực trong thanh đó với V_A , V_B .

- Nếu khung ở những dạng khác, tìm cách thiết lập phương trình đường ảnh hưởng hoặc quy về những hệ tương đương đã biết cách vẽ để vẽ.



Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5b)

- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện đầu thừa.

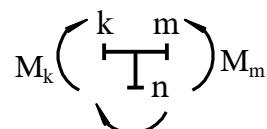
- đ.a.h nội lực tại tiết diện m vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản tương ứng.

- đ.a.h nội lực tại tiết diện n vẽ theo đ.a.h phản lực tại gối tựa A:

+ đ.a.h. $M_n \equiv (h) \cdot \text{đ.a.h.}H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $Q_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.}H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $N_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.}V_A$.



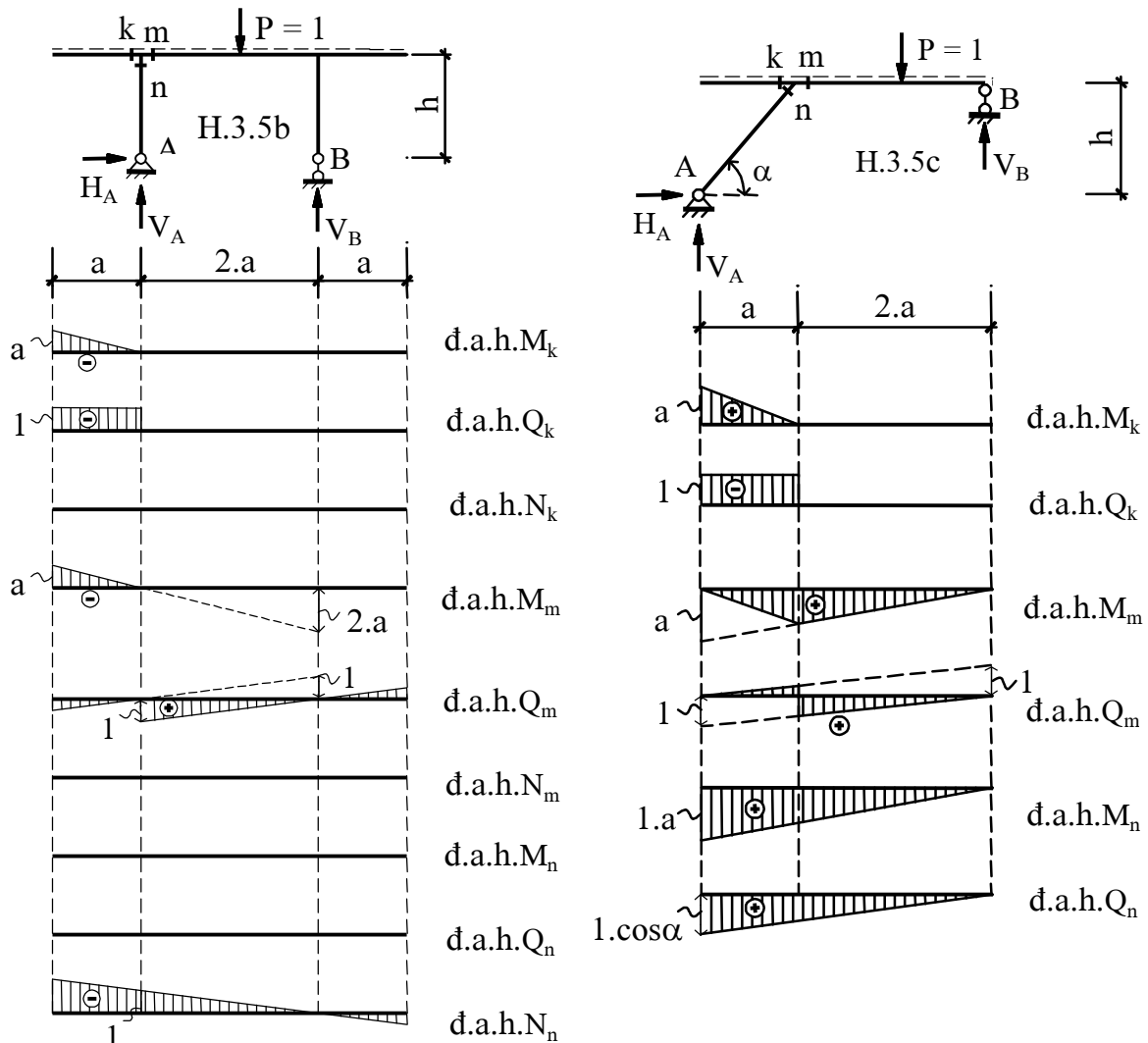
Chú ý: từ sự cân bằng mômen nút khung ta luôn có:

$$\text{đ.a.h.}M_n + \text{đ.a.h.}M_k \equiv \text{đ.a.h.}M_m$$

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5c)

- Tiết diện k thuộc đầu thừa.

- Tiết diện m vẽ theo đ.a.h tiết diện trong nhịp dầm đơn giản nhịp 3a.
- Tiết diện n vẽ theo đ.a.h. V_A (đ.a.h. $H_A \equiv$ đường chuẩn).



§3. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ BA KHỚP.

1. Đường ảnh hưởng phản lực: (H.3.6a)

1. Đường ảnh hưởng V_A^d, V_B^d : là đường ảnh hưởng phản lực trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp.

2. Đường ảnh hưởng của lực xô H:

Xuất phát từ biểu thức: $M_k(z) = M_k^d - H \cdot y_k$

$$\text{Cho } k \equiv C \Rightarrow M_C = 0 \Rightarrow M_C^d - H \cdot y_C = 0 \Rightarrow H = \frac{M_C^d}{y_C} = \frac{M_C^d}{f}.$$

$$\text{Hay } \text{đ.a.h. } H \equiv \frac{1}{f} \cdot \text{đ.a.h. } M_C^d.$$

3. Đường ảnh hưởng phản lực vòm Z:

Ta có $H = Z \cdot \cos \beta \Rightarrow Z = \frac{H}{\cos \beta}$.

Hay đ.a.h. $Z = \frac{1}{\cos \beta} \cdot \text{đ.a.h.} H$

4. Đường ảnh hưởng phản lực đứng V_A, V_B :

Ta có $V_A = V_A^d + H \cdot \tan \beta$;

$V_B = V_B^d - H \cdot \tan \beta$

Hay đ.a.h. $V_A \equiv \text{đ.a.h.} V_A^d + \tan \beta \cdot \text{đ.a.h.} H$.

$\text{đ.a.h.} V_B \equiv \text{đ.a.h.} V_B^d - \tan \beta \cdot \text{đ.a.h.} H$

II. Đường ảnh hưởng nội lực:

1. Đường ảnh hưởng mômen

uốn tại tiết diện k : (H.3.6b)

a. Phân tích:

Xuất phát từ biểu thức:

$M_k = M_k^d - H \cdot y_k$. Suy ra:

$\text{đ.a.h.} M_k \equiv \text{đ.a.h.} M_k^d - (\text{đ.a.h.} H) \cdot y_k$

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Nhận xét:

- Tại gối tựa, tung độ đường ảnh hưởng bằng không.

- Nếu biết được đường phải có thể vẽ được đường ảnh hưởng M_k .

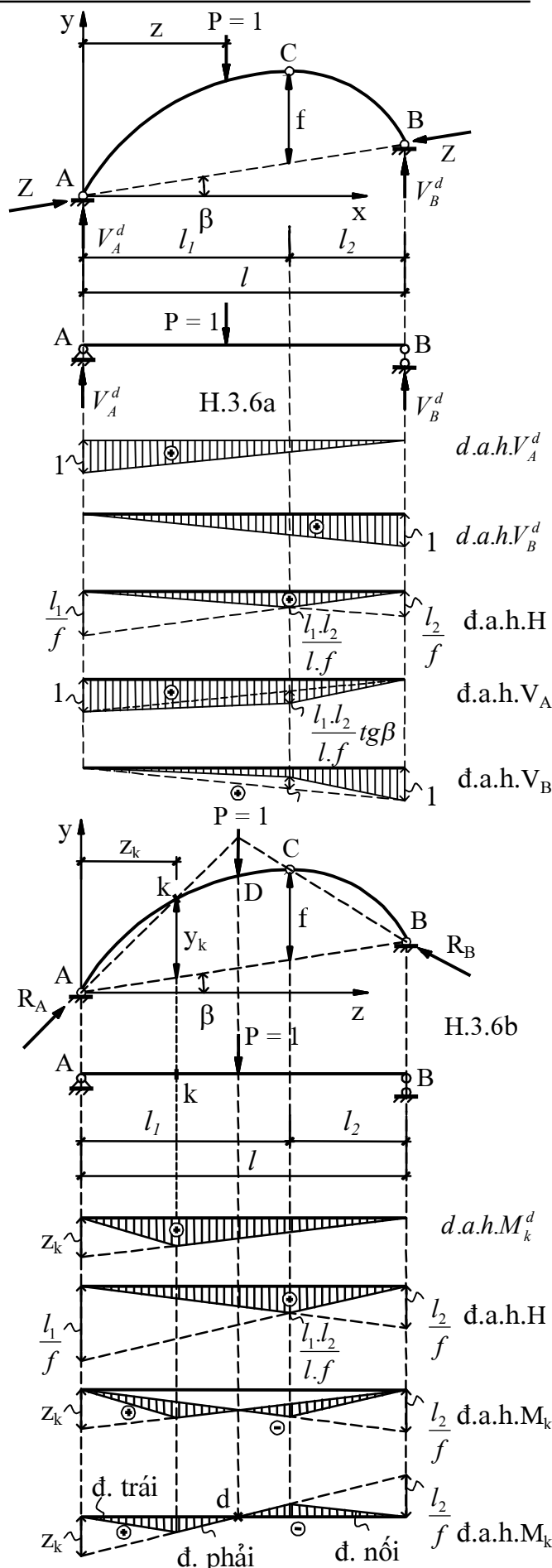
- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, đường phải có tung độ $y = z_k$ (z_k là khoảng cách từ k đến gối A theo phương ngang).

+ Tại B, đường phải có tung độ $y = -\frac{l_2}{f} \cdot y_k$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm ứng dưới điểm D (là giao điểm của A_k với BC).

* Cách vẽ nhanh:



- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.

- Sau khi xác định được phản thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kế tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ qua tung độ bằng không tại A và điểm chung với đường phải tại

k

2. Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện k: (H.3.6c)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng:

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k -$$

$$- H \cdot (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Ta suy ra

$$\text{đ.a.h. } Q_k \equiv \cos \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h. } Q_k^d) -$$

$$- m \cdot \text{đ.a.h. } H.$$

$$\text{Với } m = \sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k$$

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng Q_k :

* Nhận xét:

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.

- Đường trái và đường phải song song nhau.

- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .

- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, có tung độ $y =$

$$+ \cos \alpha_k.$$

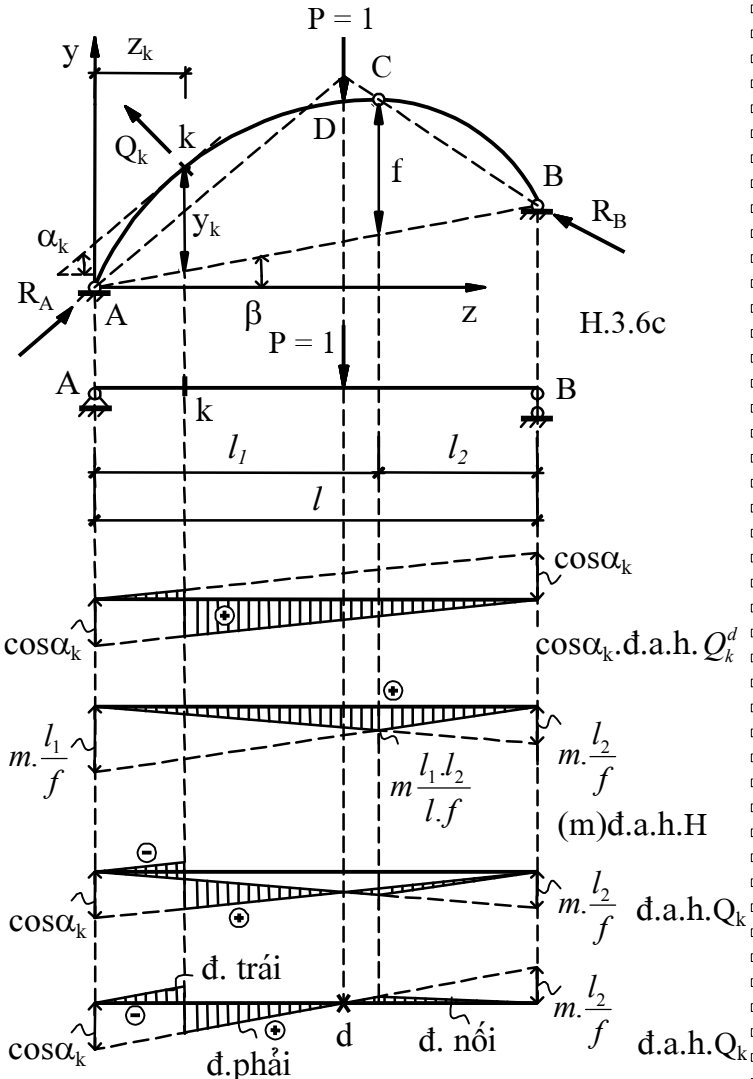
+ Tại B, có tung độ $y =$

$$- \frac{l_2}{f} \cdot m.$$

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và song song với tiếp tuyến trục vòm tại k).

* Cách vẽ nhanh:

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.



- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

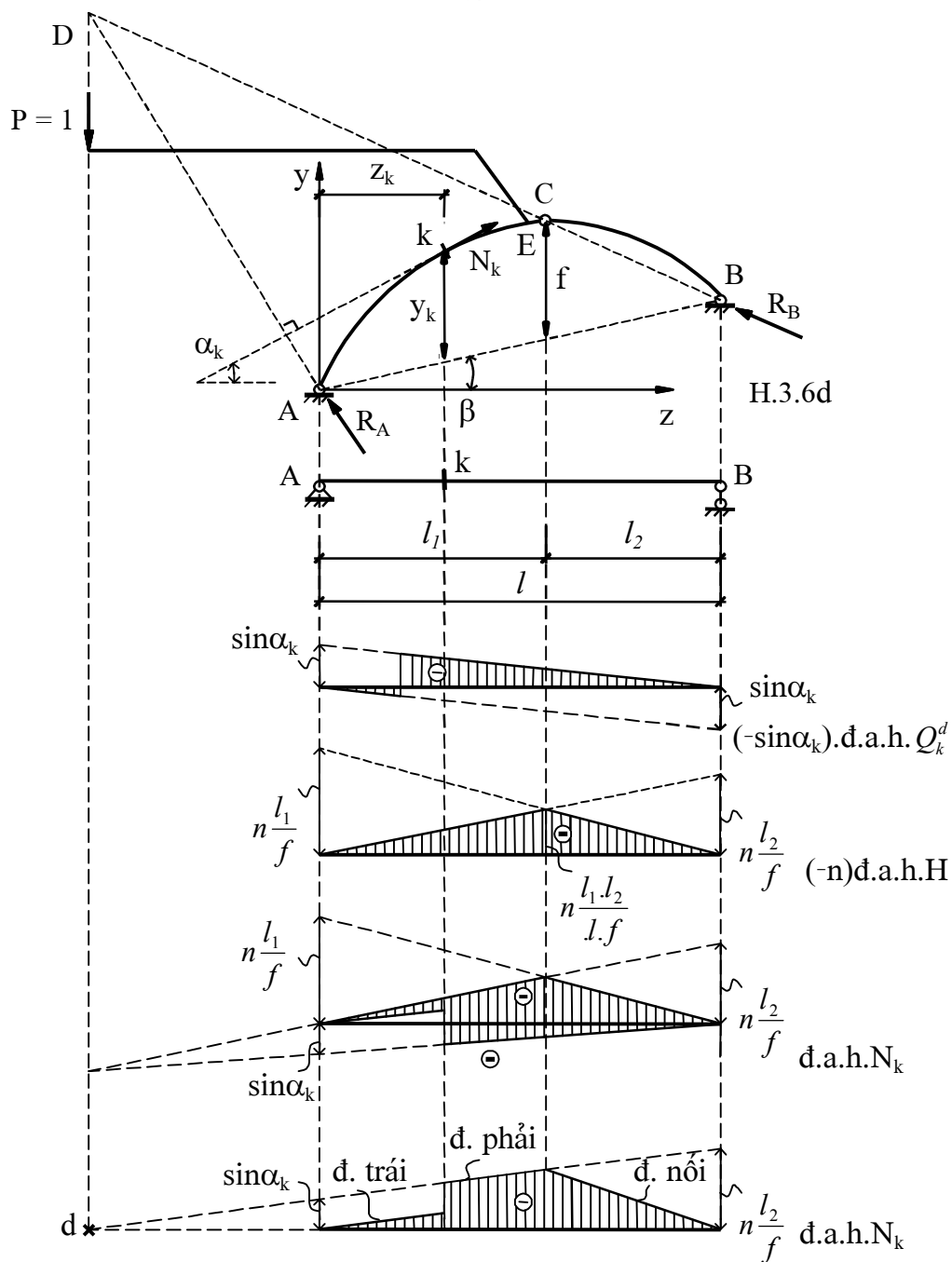
3. Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện k: (H.3.6d)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng: $N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k)$. Ta suy ra

$$\text{đ.a.h.} N_k = -\sin \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h.} Q_k^d) - n \cdot \text{đ.a.h.} H.$$

$$\text{Với } m = \cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k$$



b. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng N_k :* *Nhận xét:*

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.
- Đường trái và đường phải song song nhau.
- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .
- Đường phải đi qua ba điểm:
 - + Tại A, có tung độ $y = -\sin\alpha_k$.
 - + Tại B, có tung độ $y = -\frac{l_2}{f}.n$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại k).

* *Cách vẽ nhanh:*

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.
- Sau khi xác định được phân thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

* *Các chú ý:*

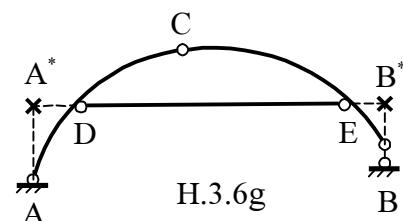
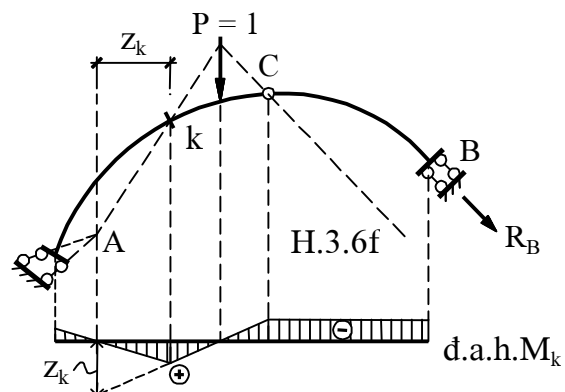
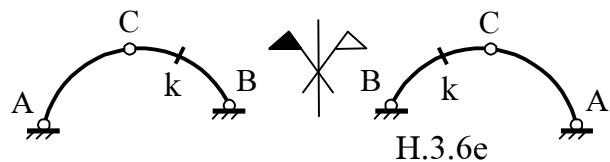
- Góc β lấy dấu dương khi gối B cao hơn gối A và ngược lại.

- Trường hợp đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc miếng cứng BC (H.3.6e): Nếu lấy đối xứng qua trục thẳng đứng sẽ trở lại bài toán ban đầu. Sau đó, suy ra kết quả trên hệ ban đầu bằng cách lấy đối xứng ngược trở lại. Tuy nhiên, với đường ảnh hưởng lực cắt cần nhân thêm với hệ số -1 (đổi chiều từ độ).

- Có thể mở rộng cho những hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp với các khớp có thể là khớp thực hay khớp giả tạo (H.3.6f).

- Trường hợp hệ ba khớp có thanh căng (H.3.6g):

+ Nếu đại lượng nghiên cứu nằm ngoài phạm vi thanh căng (AD, BE), vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản.



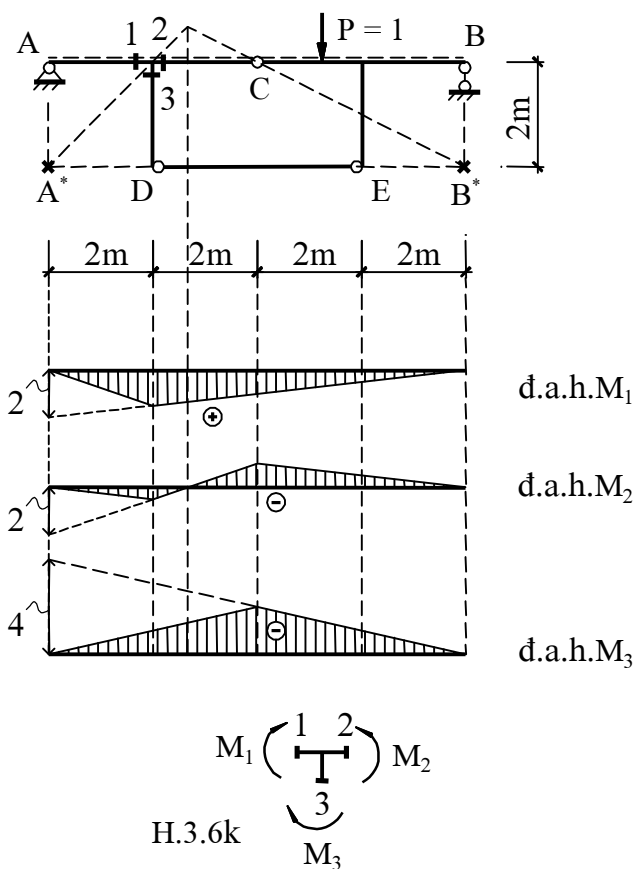
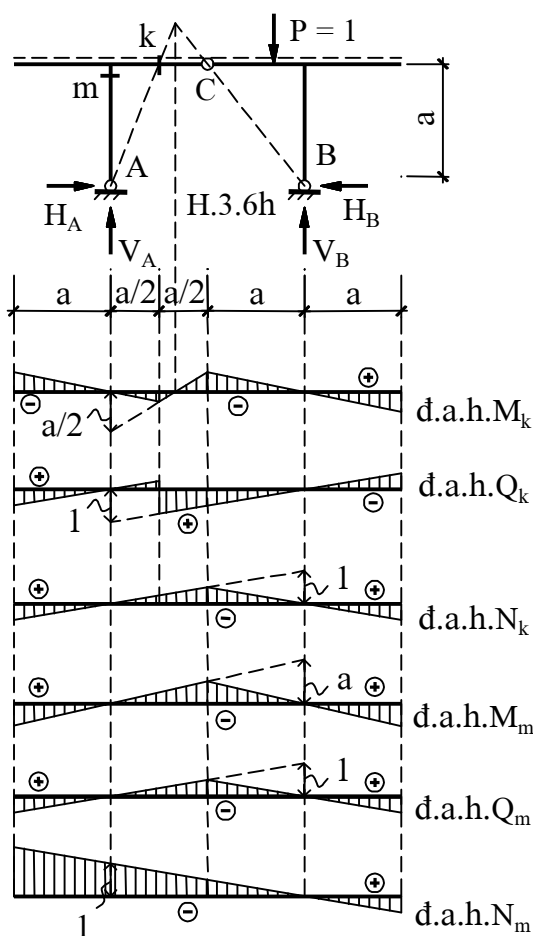
+ Nếu đại lượng nghiên cứu thuộc phạm vi thanh cứng (CEF), vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp A^*CB^* .

+ Nếu lực di động $P = 1$ di động trên thanh cứng, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng được vẽ qua hai tung độ tại hai đầu thanh cứng. Đó cũng chính là tung độ của đường ảnh hưởng khi P di động trên miềng cứng. Như vậy, trong trường hợp này, ta đi vẽ đường ảnh hưởng khi cho lực $P = 1$ di động trên miềng cứng, sau đó giữ lại hai tung độ tại hai đầu thanh cứng, rồi nối hai tung độ đó bằng 1 đoạn đường thẳng sẽ xác định được đường ảnh hưởng cần vẽ.

*Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k & m của hệ trên hình (H.3.6h)

- Tiết diện k được vẽ theo đ.a.h nội lực trong hệ 3 khớp

- Tiết diện m có thể được vẽ theo đ.a.h phản lực V_A & H_A



*Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6k)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên các miềng cứng.

- Các đ.a.h. M_1 , M_2 , M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

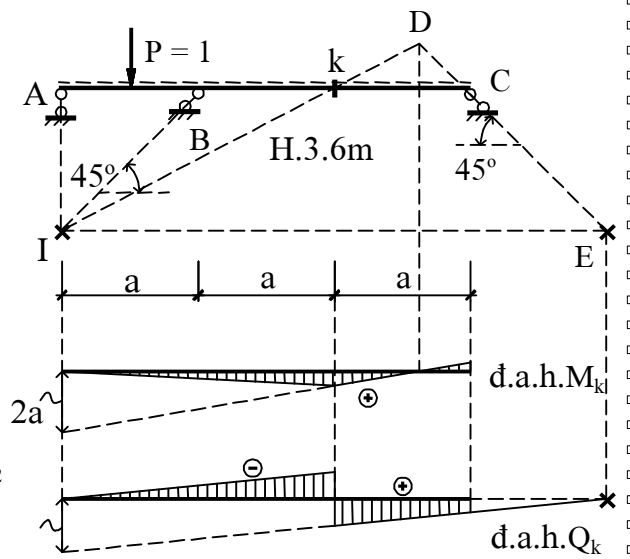
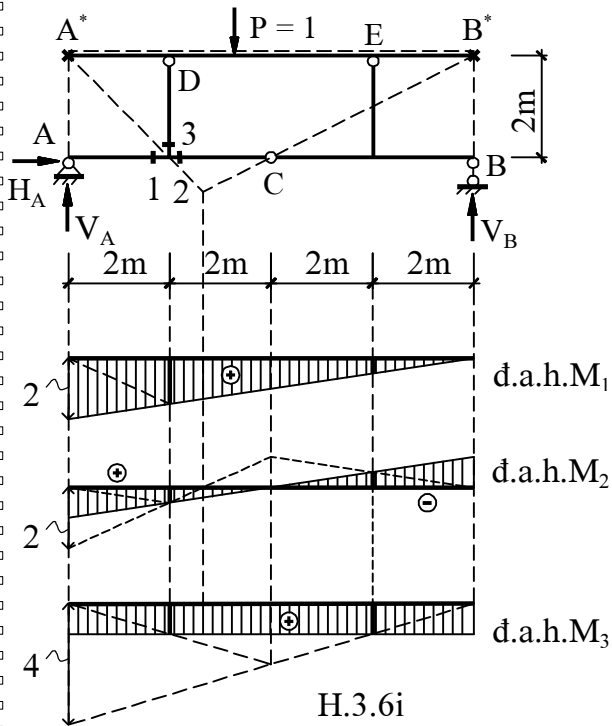
*Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6i)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên thanh cứng.

- Các đ.a.h. M_1 , M_2 , M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

*Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.6m)

- đ.a.h M_k , Q_k có thể được vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ 3 khớp: 1 khớp tại I và 2 khớp tại gối di động C.



§ 4. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DÀN

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm.

I. Đường ảnh hưởng phản lực:

Cách xác định và vẽ giống như trong hệ dầm đơn giản. Xem minh họa cho hệ dàn dầm trên hình (H.3.7a) & (H.3.7e).

II. Đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh dàn:

1. Phương pháp tách mắt:

* *Nội dung:* Tách mắt có chứa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực tập trung $P = 1$ di động trên dàn: đứng ngay tại mắt đang xét, di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt và di động trên các chốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7a).

Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 11, 4 - 9 & 2 - 12.

a. đ.a.h. N_{11-2} :

Tách mắt 11 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động:

- $P = 1$ đặt ngay tại mắt bị cắt

($z = 0$) (H.3.7b):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A - P = 0$$

Lúc này $V_A = 1$

Suy ra $N_{11-2} = P - V_A = 0$.

- Khi $P = 1$ di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt ($z = -d$ hoặc $d \leq z \leq 4d$) (H.3.7c):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A = 0$$

$$\Rightarrow N_{11-2} = -V_A.$$

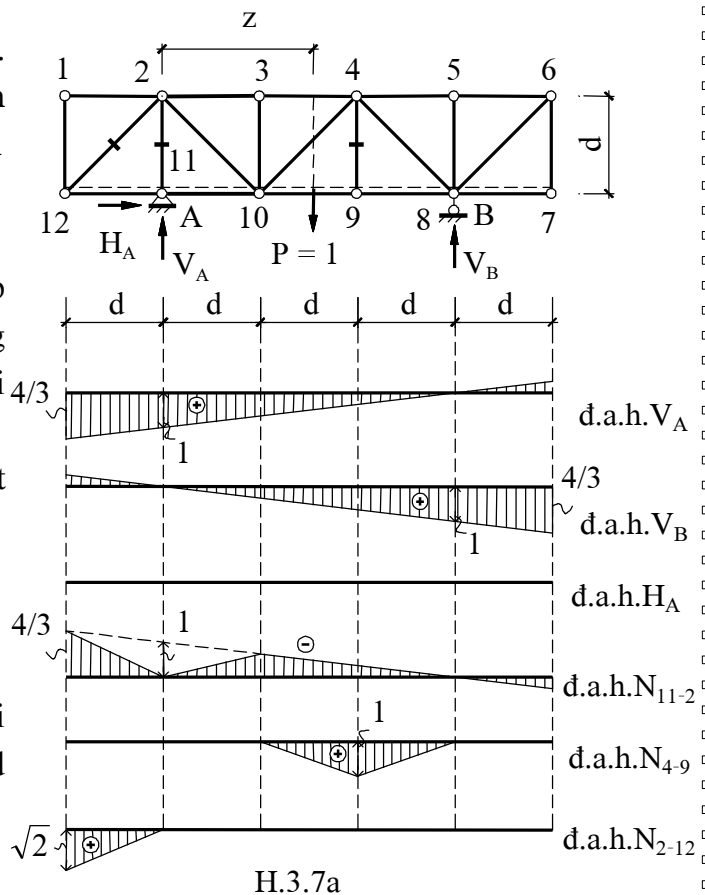
$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{11-2} \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h. } V_A.$$

- Khi $P = 1$ di động trên các chốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$): đường ảnh hưởng trên các chốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của chốt bị cắt.

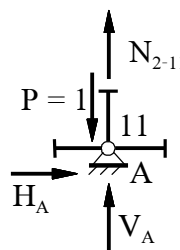
b. đ.a.h. N_{4-9} :

Tương tự, tách mắt 9:

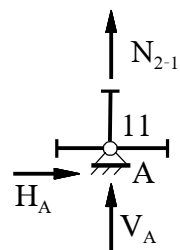
- $P = 1$ đặt ngay tại mắt 9 ($z = 2d$) (H.3.7d):



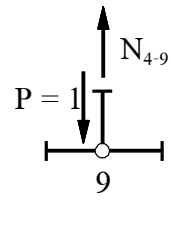
H.3.7a



H.3.7b



H.3.7c



H.3.7d

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} - P = 0 \Rightarrow N_{4-9} = P = 1.$$

- $P = 1$ di động ngoài phạm vi các đốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$ hoặc $3d \leq z \leq 4d$):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} = 0. \text{ (Hệ quả 2)}$$

Có nghĩa là đ.a.h. N_{4-9} trên đoạn này trùng với đường chuẩn.

- Khi $P = 1$ di động trên các đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 4d$): đường ảnh hưởng trên các đốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

c. đ.a.h. N_{2-12} :

Tương tự, dễ thấy khi $P = 1$ đặt tại mắt 12 thì $N_{2-12} = \sqrt{2}$; khi $P = 1$ di động bên ngoài đốt bị cắt thì $N_{2-12} = 0$.

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

* *Nội dung*: Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh cần vẽ đường ảnh hưởng và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động trên dàn: bên trái đốt bị cắt, bên phải đốt bị cắt và trên đốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7e). Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 3, 11 - 10 & 4-10.

a. đ.a.h. N_{2-3} :

Thực hiện mặt cắt (1 - 1) qua thanh 2 - 3 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{2-3} ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động:

- $P = 1$ di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h - P \cdot (2d - z) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{(2d - z)}{h}$$

Cho z biến thiên, vẽ được đ.a.h. N_{2-3} .

- $P = 1$ di động bên phải đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h = 0 \Rightarrow N_{2-3} = 0.$$

Như vậy, trên đoạn này, đ.a.h. N_{2-3} vẽ trùng với đường chuẩn.

- $P = 1$ di động trên đốt bị cắt ($d \leq z \leq 2d$): đường ảnh hưởng trên đốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

b. đ.a.h. N_{10-11} :

Thực hiện mặt cắt (2 - 2) qua thanh 11 - 10 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{10-11} ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động:

- $P = 1$ di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq 3d$):

$$\sum M_4^{ph} = 0 \Rightarrow N_{10-11} \cdot h - V_B \cdot 2d = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{V_B \cdot 2d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{10-11} \equiv \left(\frac{2d}{h} \right) \cdot \text{đ.a.h. } V_B$$

- $P = 1$ di động bên phải đốt bị cắt ($4d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_4'' = 0 \Rightarrow -N_{10-11} \cdot h + V_A \cdot d = 0$$

$$\Rightarrow N_{10-11} = \frac{V_A \cdot d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{10-11} \equiv \left(\frac{d}{h} \right) \cdot \text{đ.a.h. } V_A$$

- $P = 1$ di động trên dốt bị cắt
($3d \leq z \leq 4d$): đường ảnh hưởng trên dốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của dốt bị cắt.

c. đ.a.h. N_{4-10} :

Tương tự như trường hợp đ.a.h. N_{10-11} và phương trình đường cần thiết lập cho mỗi trường hợp của $P = 1$ di động lúc này là $\sum Y = 0$.

* Chú thích:

- Trong phương pháp mặt cắt đơn giản, điểm lấy mômen khi viết phương trình cân bằng gọi là tâm mômen. Đường trái và đường phải cắt nhau tại tâm mômen

- Trong trường hợp không thể dùng được phương pháp tách mắt hay mặt cắt đơn giản để vẽ, có thể sử dụng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan, rồi từ những mối liên hệ về nội lực suy ra đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Trong một số bài toán phức tạp, có thể vẽ đường ảnh hưởng bằng cách: Đặt $P = 1$ lần lượt trên các mắt và đi xác định tung độ đường ảnh hưởng cần vẽ tương ứng. Sau đó, nối các tung độ này bằng các đoạn đường thẳng trong phạm vi mỗi dốt sẽ được đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Khi sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản để vẽ đường ảnh hưởng lực dọc, có thể sử dụng cách vẽ đường ảnh hưởng của nội lực trong dầm đơn giản. Cách tiến hành như sau:

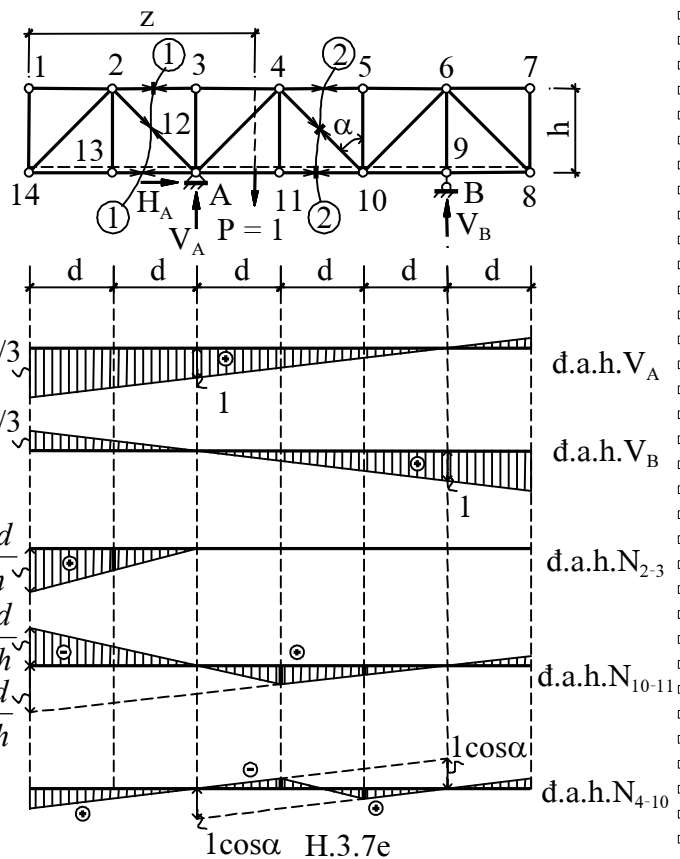
a. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt giao nhau tại tâm mômen I:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{M_{I'}}{r}$.

+ $M_{I'}$ là mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng tại I' (I' là vị trí tương ứng dưới tâm mômen I).

+ r là khoảng cách từ tâm mômen I đến phương của lực dọc N.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần hệ bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh I và ngược lại. Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h. N:



vẽ đ.a.h. M_T trong dầm đơn giản phụ trợ rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{r}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đốt bị cắt; trong phạm vi đốt bị cắt dùng đường nối.

b. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt song song nhau:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{Q}{\sin \gamma}$.

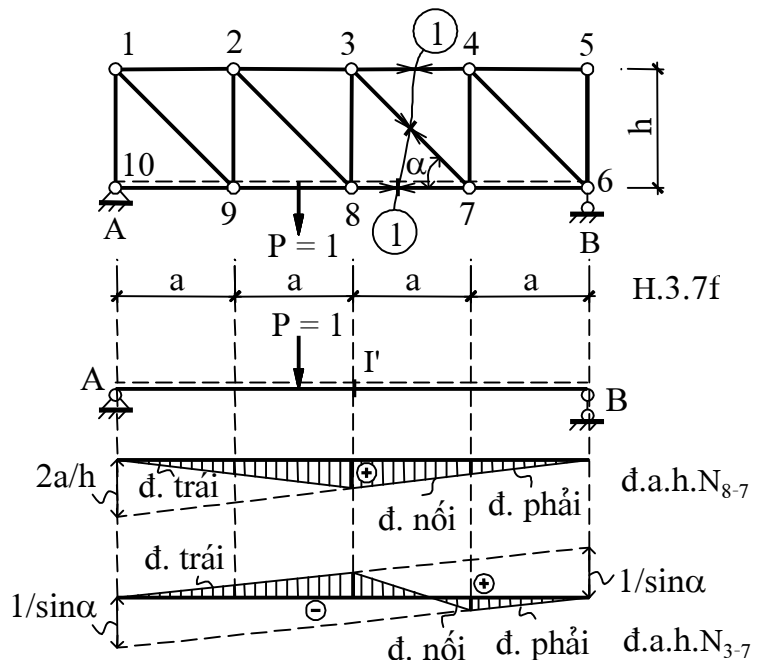
+ Q là lực cắt trong dầm đơn giản tương ứng cùng phương với hai thanh song song và lấy tại vị trí bất kỳ ứng dưới đốt bị cắt thuộc đường xe chạy.

+ γ là góc nghiêng của thanh cần vẽ đường ảnh hưởng so với phương của hai thanh song song.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần bên trái hướng xuống dưới so với hai thanh song song.

Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h.N: vẽ đ.a.h.Q trong dầm đơn giản phụ trợ (lấy tại tiết diện bất kỳ ứng dưới đốt bị cắt thuộc đường xe chạy) rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{\sin \lambda}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đốt bị cắt. Trong phạm vi đốt bị cắt dùng đường nối.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. N_{8-7} & đ.a.h. N_{3-7} (H.3.7f)



§ 5. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ GHÉP

I. Nguyên tắc chung:

- Phân tích cấu tạo hình học của hệ, xác định đâu là hệ phụ, hệ chính, hệ trung gian.

- Phân chia hệ thành những hệ đơn giản, hệ phụ tựa lên hệ chính.

II. Cách vẽ đường ảnh hưởng:

1. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ:

a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8a), vẽ đ.a.h. M_k .

- Khi P = 1 di động trên hệ phụ EF: có thể xem EF như dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được đ.a.h. M_k .

- Khi $P = 1$ di động trên các phần hệ còn lại: theo tính chất của hệ ghép (hệ chính không gây ra áp lực lên hệ phụ), nên đ.a.h. M_k vẽ trùng với đường chuẩn.

b. Quy tắc vẽ:

- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: ta xem hệ phụ như một hệ đơn giản làm việc độc lập và vẽ đường ảnh hưởng theo cách đã biết.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính và các hệ không liên quan: đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ chính hoặc hệ trung gian:

a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8b), vẽ đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính AB: lúc này, các hệ phụ không làm việc, có thể loại bỏ chúng, xem AB như dầm côngxôn và vẽ được đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ BCD: đường ảnh hưởng M_i là đoạn đường thẳng vẽ qua hai điểm: tung độ bằng không dưới gối tựa C và tung độ chung với hệ chính AB tại nút B.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ DE: tương tự như trên hệ BCD.

b. Quy tắc vẽ:

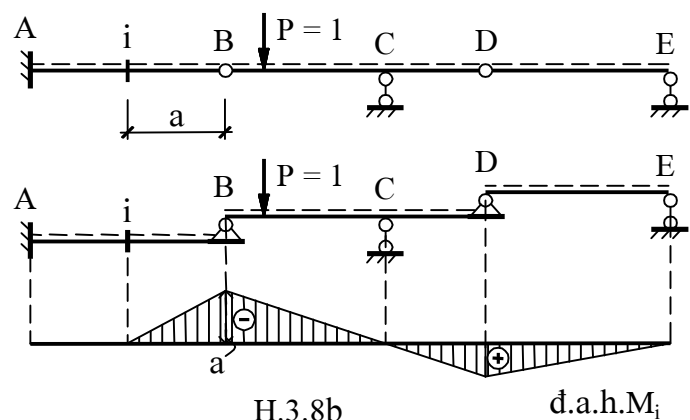
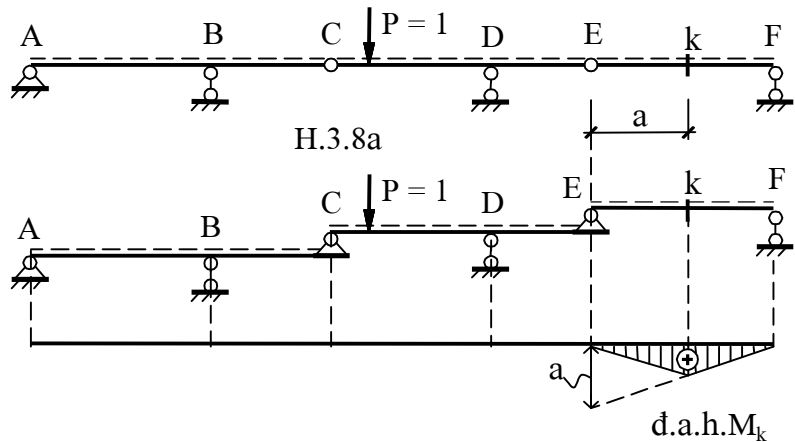
- Khi $P = 1$ di động trên hệ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: cô lập hệ đó và vẽ đường ảnh hưởng.

- Khi $P = 1$ di động trên những hệ kế tiếp:

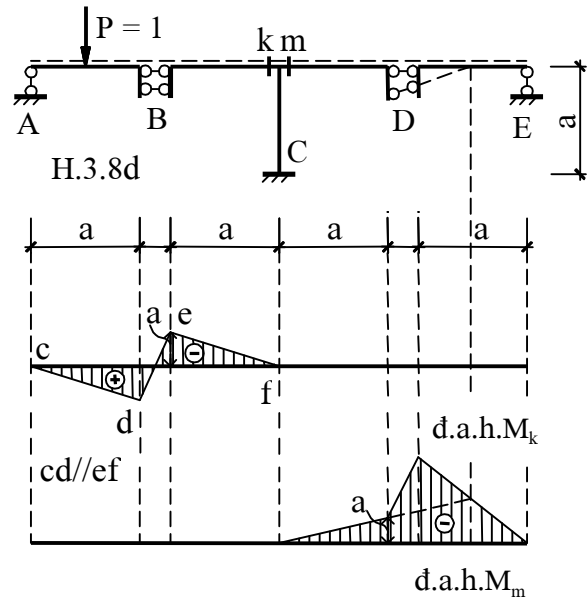
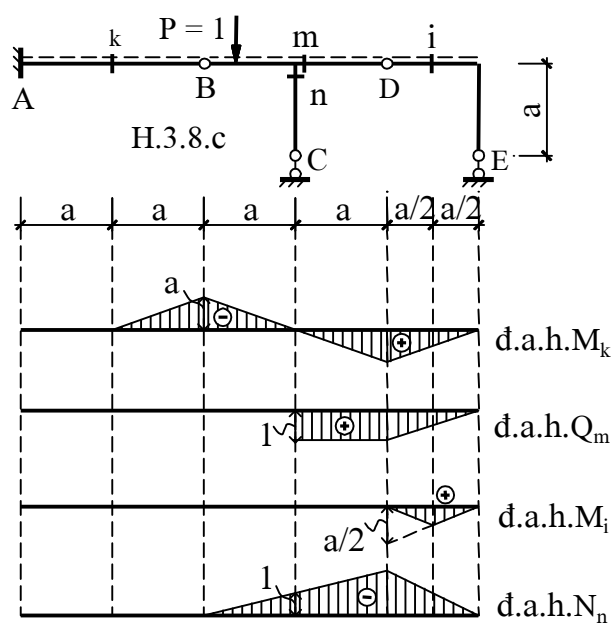
+ Nếu hệ kế tiếp là hệ chính so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng vẽ trùng với đường chuẩn.

+ Nếu hệ kế tiếp là hệ phụ so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng sẽ là đoạn thẳng kế tiếp và đi qua tung độ bằng không tại vị trí gối tựa nối đất thẳng đứng hoặc khớp đầu tiên thuộc một hệ chính khác.

Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_m , đ.a.h. M_p , đ.a.h. N_n (H.3.8c)

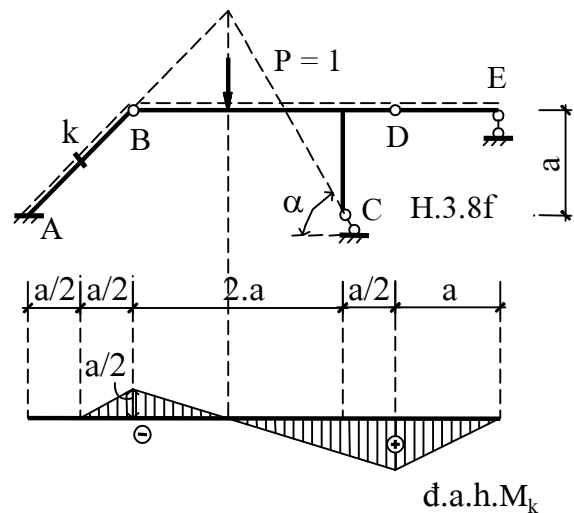
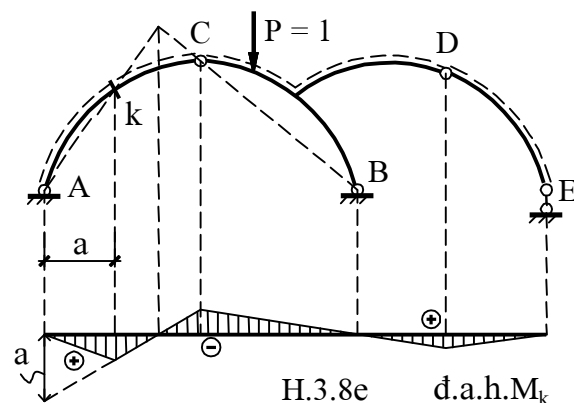


Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. M_m (H.3.8d)



Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8e)

Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8f)



§ 6. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

Ở đây chỉ quan tâm vẽ đường ảnh hưởng đại lượng S thuộc kết cấu chịu lực chính. Nguyên tắc vẽ là đi phân tích và so sánh sự làm việc của hệ không có hệ thống truyền lực với hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng $P = 1$ di động:

- Đường ảnh hưởng gồm các đoạn đường thẳng, mỗi đoạn tương ứng với từng dầm dọc phụ.

- Khi $P = 1$ đặt trên các mắt truyền lực gây ra ảnh hưởng như khi đứng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính

Các bước tiến hành như sau:

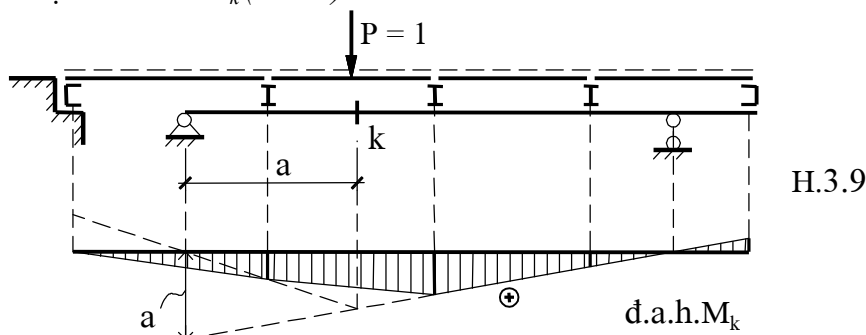
* *Bước 1:* Vẽ đ.a.h.S với giả thiết $P = 1$ di động trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính.

* *Bước 2:* Giữ lại các tung độ của đ.a.h.S vừa vẽ tại những vị trí dưới các mắt truyền lực. Các tung độ này cũng chính là các tung độ đ.a.h.S khi $P = 1$ di động trên hệ thống truyền lực.

* *Bước 3:* Lần lượt nối các tung độ vừa giữ lại ở trên trong phạm vi từng dốt bằng các đoạn thẳng, sẽ được đ.a.h.S cần vẽ.

* *Chú ý:* Khi $P = 1$ đặt tại mắt tựa trên trái đất, tung độ đ.a.h.S tại vị trí này bằng không.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.9)



§ 6. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG NGHIÊN CỨU ỨNG VỚI CÁC DẠNG TẢI TRỌNG KHÁC NHAU BẰNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA NÓ.

I. Tải trọng tập trung:

Giả sử trên công trình chịu các lực tập trung $P_1, P_2, \dots, P_n$ cùng phương tác dụng. Gọi $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các tung độ tương ứng dưới các tải trọng tập trung của đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S trên công trình do lực tập trung $P = 1$ cùng phương với các lực tập trung $P_1, P_2, \dots, P_n$ di động trên công trình gây ra (H.3.10a).

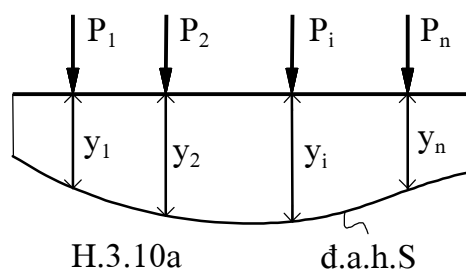
Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do các lực tập trung gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.

Theo ý nghĩa tung độ đường ảnh hưởng, giá trị của đại lượng S do riêng P_i gây ra:

$$S_i = P_i \cdot y_i.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, suy ra:

$$S = \sum S_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i$$



* *Chú thích:*

- $P_i > 0$ khi cùng chiều với $P = 1$ dùng để vẽ đ.a.h.S và ngược lại.

- Dấu của y_i lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

- Trường hợp đ.a.h.S có bước nhảy tại vị trí tương ứng lực P_i (H.3.10b) thì đại lượng S do riêng P_i gây ra sẽ có hai giá trị tương ứng với bên trái và bên phải tiết diện có bước nhảy:

$$S_i^{tr} = P_i \cdot y_i^{ph} \text{ và } S_i^{ph} = P_i \cdot y_i^{tr}$$

**Ví dụ:* Cho hệ có sơ đồ tính như trên hình vẽ (H.3.10c). Yêu cầu: Tính mômen và lực cắt tại tiết diện k theo hai cách:

- Sử dụng biểu đồ (M) và (Q) .

- Sử dụng đ.a.h. M_k và đ.a.h. Q_k .

a. Sử dụng biểu đồ nội lực:

Các biểu đồ (M) , (Q) được vẽ trên hình (H.3.10c). Từ đó, suy ra:

$$M_k = 11,2(\text{T.m}), Q_k^{tr} = 1,8(\text{T}),$$

$$Q_k^{ph} = -1,2(\text{T})$$

b. Sử dụng đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k :

- Các đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình

- Xác định M_k :

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{i=1}^3 P_i \cdot y_i = P_1 \cdot 1,2 + P_2 \cdot 2,4 + P_3 \cdot 0,8 = \\ &= 2 \cdot 1,2 + 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 0,8 = 11,2(\text{T.m}) \end{aligned}$$

- Xác định Q_k : Do đ.a.h. Q_k có bước nhảy tại vị trí lực tập trung P_2 nên Q_k do P_2 gây ra sẽ có 2 giá trị.

$$\begin{aligned} Q_k^{tr} &= P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot 0,6 + P_3 \cdot 0,2 = \\ &= 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 = 1,8(\text{T.m}) \end{aligned}$$

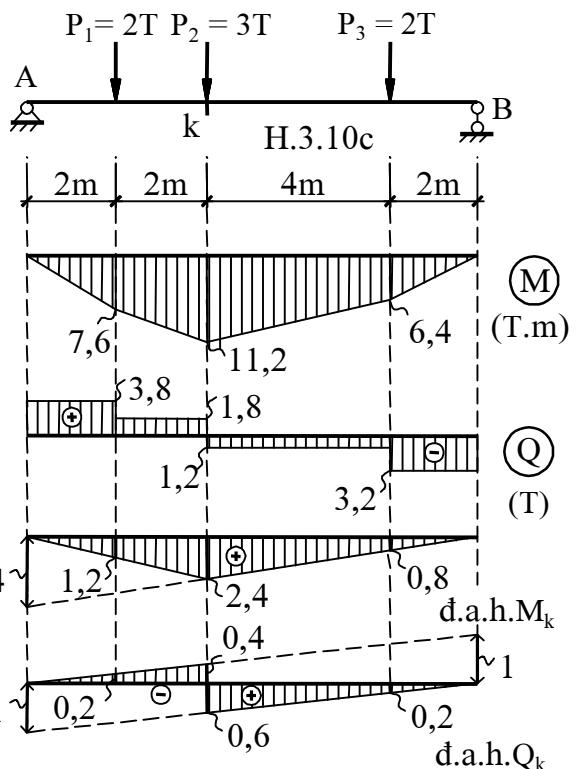
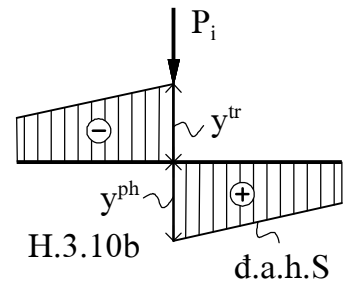
$$\begin{aligned} Q_k^{ph} &= P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot (-0,4) + P_3 \cdot 0,2 = \\ &= 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot (-0,4) + 2 \cdot 0,2 = -1,2(\text{T.m}) \end{aligned}$$

* *Nhận xét:* Kết quả của hai cách tính là như nhau.

II. Tải trọng phân bố:

Giả sử trên công trình chịu tải trọng phân bố có cường độ $q(z)$. Đường ảnh hưởng đại lượng S do $P = 1$ cùng phương với lực phân bố $q(z)$ di động trên công trình có phương trình $y = y(z)$ (H.3.10d).

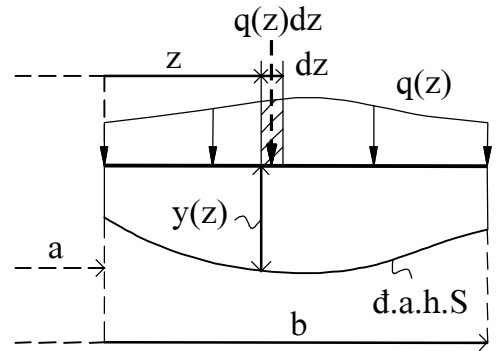
Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do $q(z)$ gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.



Xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng có chiều dài dz . Xem phân tố này như một lực tập trung với giá trị $q(z).dz$. Gọi y là tung độ đường ảnh hưởng tương ứng dưới phân tố tải trọng $q(z).dz$.

Suy ra: $dS = q(z).dz.y(z)$

Suy ra: $S_{a-b} = \int_a^b y(z).q(z).dz$



H.3.10d

Trường hợp tải trọng phân bố đều ($q = \text{const}$):

$$S_{a-b} = q.\omega_a^b$$

ω_a^b là diện tích phần biểu đồ đường ảnh hưởng bên dưới tải trọng phân bố đều trên đoạn $[a, b]$.

* *Chú thích:*

- q có giá trị dương khi nó cùng chiều với lực $P=1$ dùng để vẽ đ.a.h.S
- Dấu của ω_a^b lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

**Ví dụ:* Xác định M_k & Q_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10e)

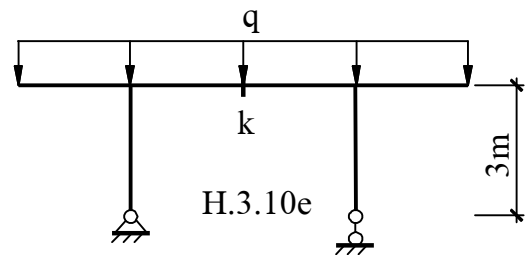
- Các đ.a.h. M_k & đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình vẽ.

- Xác định M_k

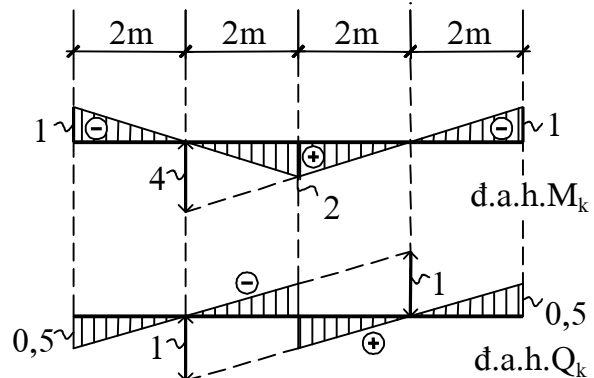
$$M_k = q.\varpi = q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) + q.\left(\frac{1.4}{2}\right) + q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) = 0$$

- Xác định Q_k :

$$Q_k = q.\left(\frac{0.5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0.5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{0.5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0.5.2}{2}\right) = 0$$



H.3.10e

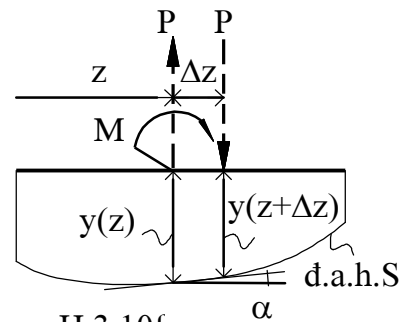


III. Mômen tập trung:

Giả sử trên công trình chịu tác dụng của mômen tập trung M và đại lượng nghiên cứu S có đường ảnh hưởng đã biết (H.3.10f).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do M gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.

Thay thế M bằng cặp ngẫu lực $P = \frac{M}{\Delta z} (\Delta z \rightarrow 0)$



H.3.10f

Theo công thức cho trường hợp tải tập trung, ta có:

$$S = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [P \cdot y(z + \Delta z) - P \cdot y(z)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} M \left[\frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} \right] = M \cdot y'(z)$$

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Trường hợp trên công trình có nhiều mômen tập trung: $M_1, M_2, \dots, M_n$.

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$$

* *Chú thích:*

- M lấy dấu dương khi có chiều thuận chiều kim đồng hồ.
- $\operatorname{tg} \alpha$ có dấu dương khi đường ảnh hưởng đồng biến khi qua điểm đặt M.

- Nếu đường ảnh hưởng có điểm gãy tương ứng tại điểm đặt mômen M (H.3.10g), đại lượng S sẽ có hai giá trị tương ứng bên trái và bên phải điểm gãy:

$$S^{\text{tr}} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{ph}}; \quad S^{\text{ph}} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{tr}}$$

* *Ví dụ:* Xác định M_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10h)

- Vẽ đ.a.h. M_k như trên hình.

- Xác định M_k :

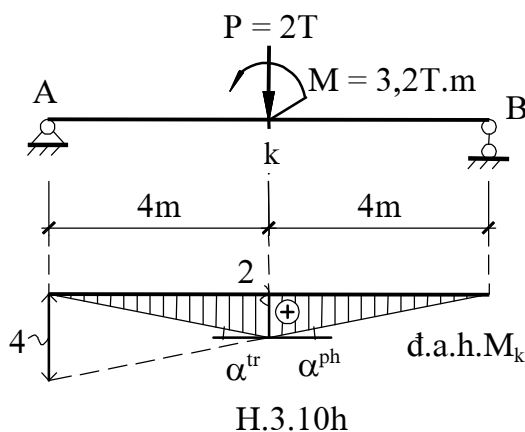
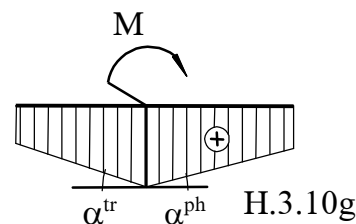
M_k do cả lực tập trung và mômen tập trung tác dụng. Tại M, đ.a.h. M_k bị gãy khúc nên M_k sẽ có hai giá trị:

$$M_k^{\text{tr}} = P \cdot y + M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{ph}} =$$

$$= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3,6(\text{T.m})$$

$$M_k^{\text{ph}} = P \cdot y + M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{tr}} =$$

$$= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0,4(\text{T.m})$$



§ 7. CÁCH DÙNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI CỦA ĐOÀN TẢI TRỌNG VÀ GIÁ TRỊ ĐỂ TÍNH.

Bản chất của bài toán là đi tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất trong số các cực đại (hay nhỏ nhất trong số các cực tiểu) là giá trị để tính. Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng là vị trí bất lợi nhất.

I. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một đầu:

Khi đó phương trình đường ảnh hưởng S và đạo hàm của nó là những hàm liên tục. Do vậy, hàm $S = f(z)$ biểu thị sự biến thiên của đại lượng S theo vị trí của tải trọng di động và đạo hàm của nó $S'(z)$ cũng sẽ liên tục. Đối với loại bài toán này, sau khi đã

xác định đại lượng S theo vị trí của tải trọng di động $S(z)$, việc xác định vị trí bất lợi chính là đi giải bài toán tìm cực trị của hàm số thông thường.

II. Tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác một dấu:

Ở đây chỉ trình bày cho trường hợp đường ảnh hưởng có dấu dương. Trường hợp đường ảnh hưởng có dấu âm, cách thực hiện tương tự.

Khi xác định vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động đối với đường ảnh hưởng đa giác, có thể dựa vào các tính chất sau:

* *Tính chất 1:* Vị trí bất lợi nhất chỉ có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng, trùng với một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng.

* *Tính chất 2:* Khi đã có một tải trọng tập trung tại một đỉnh lồi của đường ảnh hưởng của đại lượng S , muốn S đạt cực trị thì khi dời đoàn tải trọng sang trái một đoạn Δz và sang phải một đoạn Δz điều kiện sau phải thoả mãn:

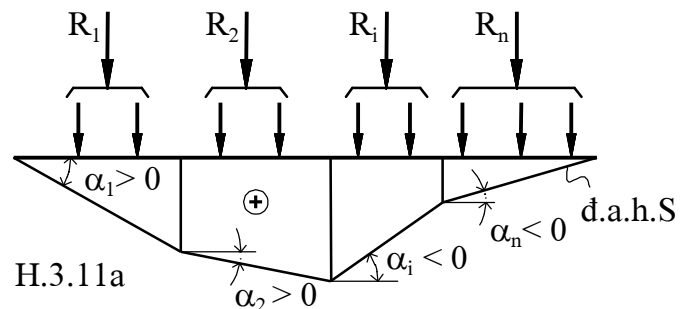
$$\text{Chuyển từ } \sum_{i=1}^n R_i \tan \alpha_i > 0 \quad \text{sang} \quad \sum_{i=1}^n R_i \tan \alpha_i = 0 \quad (*)$$

(khi $z = z_0 - \Delta z$) (khi $z = z_0 + \Delta z$)

Trong đó:

- R_i là hợp lực của các tải trọng ở đoạn thẳng thứ i của đường ảnh hưởng

- α_i là góc nghiêng của đoạn thẳng thứ i của đường ảnh hưởng; α_i lấy dấu dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.



Từ các phân tích trên, ta có trình tự xác định vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu như sau:

- Đặt một tải trọng tập trung vào đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng

- Dịch chuyển đoàn tải trọng sang trái một đoạn Δz và tính $\sum_{i=1}^n R_i \tan \alpha_i$; cũng làm tương tự như vậy khi dịch chuyển đoàn tải trọng sang phải một đoạn Δz .

- Kiểm tra điều kiện (*) sau hai lần dịch chuyển. Nếu không thoả mãn thì đây không phải là vị trí bất lợi nhất, nếu thoả mãn thì đây có khả năng là vị trí bất lợi nhất, cần phải tính giá trị của đại lượng S tại vị trí này. Cách tính đã trình bày trong mục xác định đại lượng S bằng đường ảnh hưởng của nó.

- Quá trình lặp lại như vậy cho tất cả tải trọng tập trung và các đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Giá trị lớn nhất trong số các đại lượng S tính được là giá trị để tính. Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng là vị trí bất lợi nhất.

* Ví dụ: Tìm giá trị để tính của đại lượng S có đ.a.h. S như trên hình (H.3.11c).
Sơ đồ tải di động cho trên hình (H.3.11b)

- Tính $\operatorname{tg}\alpha$ của các góc nghiêng:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{4}; \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}; \operatorname{tg}\alpha_3 = -\frac{4}{9}$$

1. Tính thử lần thứ nhất:

Chọn tải $P = 9,5(T)$ đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 4$ (H.3.11d)

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg}\alpha_i &= \\ &= 3,5 \operatorname{tg}\alpha_1 + 9,5 \operatorname{tg}\alpha_2 + (3 + 7) \operatorname{tg}\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg}\alpha_i &= 3,5 \operatorname{tg}\alpha_2 + (9,5 + 10) \operatorname{tg}\alpha_3 \\ &= 3,5 \cdot \frac{1}{4} + 19,5 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{70,125}{9} < 0 \end{aligned}$$

Như vậy, điều kiện (*) được thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính $S_{\max}$

$$S_{\max} = 3,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{20}{9} + 7 \cdot \frac{4}{9} = 58,278$$

2. Tính thử lần thứ 2:

Đặt tải trọng $P = 3(T)$ vào đỉnh có tung độ $y = 4$ (H.3.11e).

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg}\alpha_i &= 9,5 \operatorname{tg}\alpha_1 + 3 \operatorname{tg}\alpha_2 + 7 \operatorname{tg}\alpha_3 = \\ &= 9,5 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{42,875}{9} > 0 \end{aligned}$$

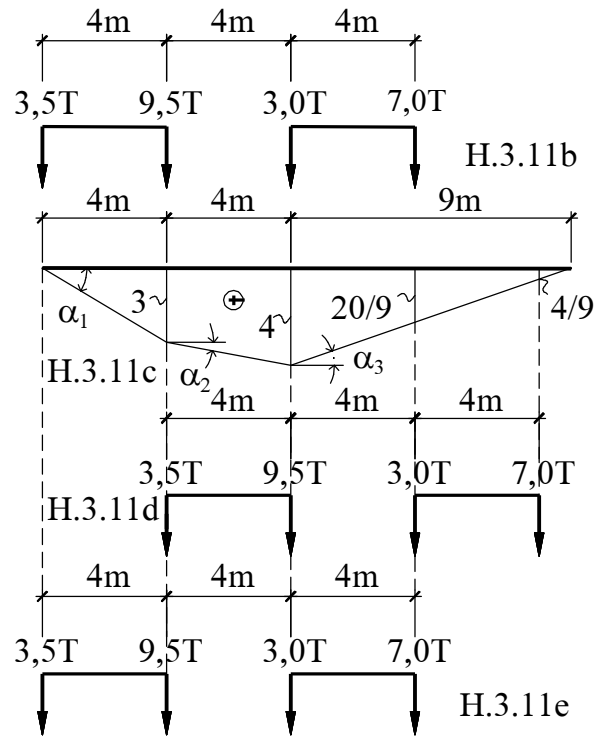
+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg}\alpha_i &= 3,5 \operatorname{tg}\alpha_1 + 9,5 \operatorname{tg}\alpha_2 + 10 \operatorname{tg}\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện (*), vị trí này không tồn tại $S_{\max}$

Về mặt nguyên tắc, do có 4 lực và 2 đỉnh lồi nên cần thử đặt tải 8 lần. Tuy nhiên, có thể dựa vào các nhận xét sau để loại bớt những lần thử không cần thiết:

- Trong 2 lần thử trên thì lực tập trung 3,5(T) & 9,5(T) cũng đã được đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 3$.



- Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trong sang bên trái hay bên phải so với 2 lần thử ở trên thì tải trọng sẽ vượt ra ngoài đường ảnh hưởng hoặc đi vào vùng tung độ bé nên ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Tóm lại vị trí bất lợi của đoàn tải trong là trên hình (H.3.11d) và giá trị để tính là $S_{\max} = 58,278$.

III. Tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng có dạng tam giác:

Giả sử đường ảnh hưởng tam giác cho như trên hình (H.3.11f). Như đã biết là vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi có một lực tập trung nào đó đặt tại đỉnh lồi. Gọi lực tập trung đặt tại đỉnh tam giác là P_{th} ; hợp lực của các lực bên trái và bên phải P_{th} là R_{tr} và R_{ph} . Lần lượt cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái và bên phải 1 đoạn Δz . Điều kiện (*) được viết lại:

$$\begin{aligned} & > & < \\ (R_{tr} + P_{th}).tg\alpha_1 + R_{ph}.tg\alpha_2 & > 0 \quad \text{và} \quad R_{tr}.tg\alpha_1 + (R_{ph} + P_{th}).tg\alpha_2 & = 0 \\ & = & < \end{aligned}$$

Từ hình vẽ thì $tg\alpha_1 = c/a$; $tg\alpha_2 = -c/b$.

Thay vào và biến đổi, ta được điều kiện cần và đủ để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng:

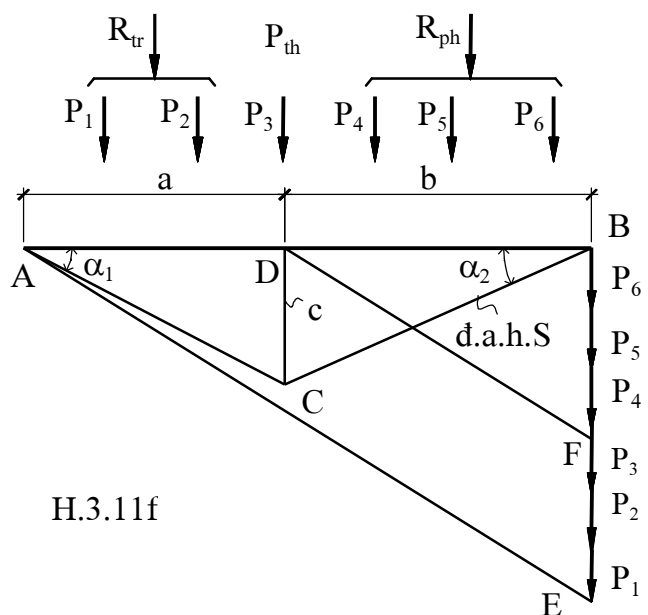
- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái thì thoả mãn điều kiện (i)
- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải thì thoả mãn điều kiện (ii)

$$\begin{aligned} & > & < \\ \frac{R_{tr} + P_{th}}{a} & > \frac{R_{ph}}{b} \quad (i); & \frac{R_{tr}}{a} & = \frac{R_{ph} + P_{th}}{b} \quad (ii) \\ & = & < \end{aligned}$$

* Có thể tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng bằng đồ giải như sau:

Tại điểm B trên hình (H.3.11f) lần lượt dựng các véc tơ biểu thị cho các lực $P_1, P_2 \dots P_6$ theo thứ tự từ B đến A trên một đường thẳng bất kỳ không trùng với đường chuẩn. Gọi E là mút cuối cùng. Nối AE và từ D kẻ đường thẳng song song với AE cắt BE tại F. Điểm F thuộc véc tơ biểu thị lực nào thì lực đó là P_{th} cần đặt ở đỉnh tam giác để có vị trí bất lợi.

Thật vậy, từ các quan hệ tỷ lệ của các đoạn bị chắn trên hình vẽ, ta dễ dàng thấy được điều kiện (i) và (ii).



H.3.11f

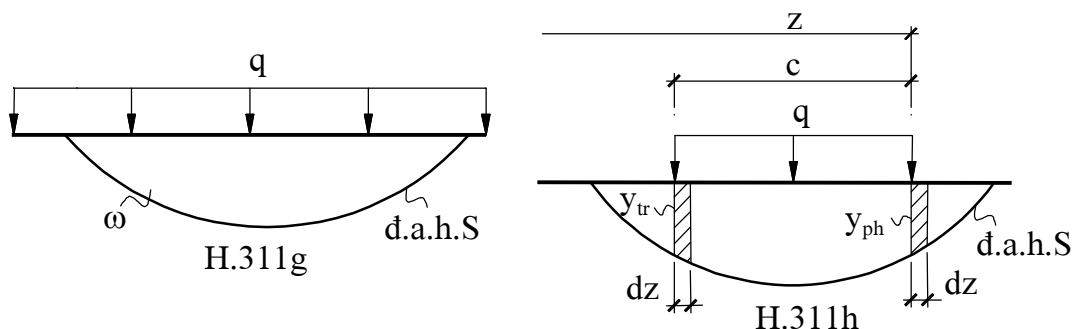
**Chú thích:*

- Cách thực hiện trên chỉ đúng khi tất cả các tải trọng thuộc phạm vi đường ảnh hưởng.
- Nếu chiều dài đoàn tải trọng vượt ra ngoài phạm vi đường ảnh hưởng thì cần phải tính thử nhiều lần với các lực P_{th} khác nhau. Lúc này có thể tồn tại nhiều P_{th} nên cũng có thể có nhiều S_{max} . Giá trị để tính là $\max S_{max}$.
- Khi sử dụng phương pháp đồ giải, nếu điểm F thuộc ranh giới của hai lực thì cả hai lực đó đều có thể là P_{th} .

IV. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ:

1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11g)

$S_{max} = q \cdot \omega$; ω là diện tích toàn bộ đường ảnh hưởng.



2. Chiều dài tải trọng bé hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11h)

Trong trường hợp này, vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.

Cm: Đại lượng S tương ứng với vị trí z của đoàn tải trọng:

$$S = q \cdot \omega_{z-c}$$

Để S đạt cực trị thì $\frac{dS}{dz} = q \cdot \frac{d\omega}{dz} = 0$, tức là $\frac{d\omega}{dz} = 0$.

Theo hình vẽ (H.3.11h) thì $d\omega = y^{ph} \cdot dz - y^{tr} \cdot dz = dz \cdot (y^{ph} - y^{tr})$

Để $d\omega = 0$ thì $y^{ph} = y^{tr}$ (đccm).

* *Chú ý:*

Nếu đường ảnh hưởng có 2 dấu thì phải đặt riêng cho từng phần có dấu dương hoặc dấu âm để tính S_{max} , S_{min} .

Ví dụ: Tìm M_{max} , M_{min} tại mặt cắt k của dầm có mút thừa trên hình (H.3.11i). Biết tải trọng di động phân bố đều có chiều dài $d = 1,6m$ và cường độ $q = 1,2(T/m)$.

Vẽ đ.a.h. M_k

a. Tìm M_{min} : cần đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu âm. Để thấy miền bên trái cho M_{min} và vị trí bất lợi nhất khi q ở sát mút thừa.

$$M_{min} = q \cdot \omega_o^{1,6} = 1,2 \cdot \left(-\frac{1,25 + 0,25}{2} \cdot 1,6 \right) = -1,44(T.m)$$

b. Tìm M_{max} :

Đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu dương. Cần xác định z để $y^{tr} = y^{ph}$

Từ các tam giác đồng dạng, ta có:

$$\frac{y^{tr}}{0,9375} = \frac{z}{1,5}; \frac{y^{ph}}{0,9375} = \frac{4-z-d}{2,5}$$

Thay $y^{tr} = y^{ph}$ vào, suy ra:

$$4z = 1,5(4 - d)$$

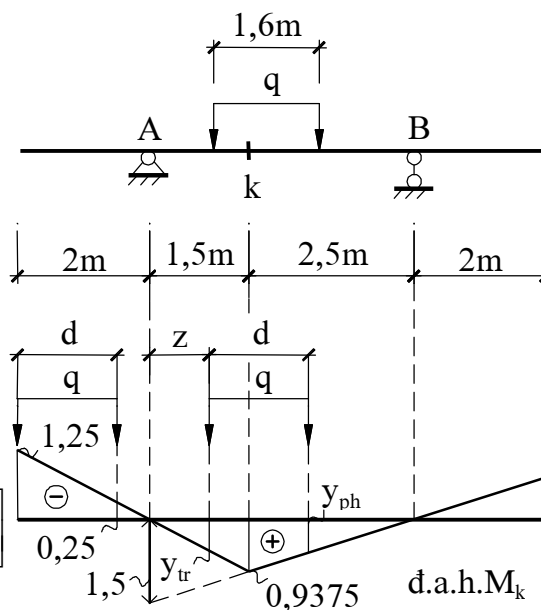
Giải ra $z = 0,9$. Suy ra:

$$y^{tr} = y^{ph} = 0,9375 \cdot \frac{z}{1,5} = 0,5625.$$

Từ đây tính được:

$$M_{\max} = q \cdot \omega_{0,9}^{2,5}$$

$$= 1,2 \cdot \left[\left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 0,6 + \left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 1 \right] \\ = 1,44 (\text{T.m})$$



H.3.11i

V. Khái niệm về tải trọng tương đương:

Khi thiết kế kết cấu chịu tải trọng di

động, ta thường lặp lại nhiều lần việc tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính của một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nào đó trên một số dạng đường ảnh hưởng có hình dạng giống nhau song chỉ khác về độ lớn. Để cho việc tính toán được thuận lợi người ta tìm cách thay thế các đoàn tải trọng tiêu chuẩn bằng tải trọng phân bố đều có chiều dài phủ kín đường ảnh hưởng, có cường độ q_{td} để sao cho đại lượng S do q_{td} gây ra đúng bằng giá trị để tính của đại lượng S do tải trọng tiêu chuẩn đặt ở vị trí bất lợi nhất. Tải trọng phân bố đều như vậy gọi là tải trọng tương đương.

Vậy tải trọng tương đương là tải trọng phân bố đều phủ kín chiều dài đặt tải của đường ảnh hưởng và sinh ra giá trị của đại lượng S chính là giá trị để tính của đại lượng S do đoàn tải trọng tiêu chuẩn được thay thế đặt ở vị trí bất lợi nhất gây ra.

Từ đây suy ra $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

Mặc khác, khi phân tích người ta nhận thấy, tải trọng tương đương chỉ phụ thuộc vào chiều dài, hình dạng của đường ảnh hưởng mà không phụ thuộc vào độ lớn tung độ đường ảnh hưởng.

Do vậy, với mỗi loại tải trọng tiêu chuẩn, với mỗi chiều dài và dạng đường ảnh hưởng, người ta đã tìm ra được một $S_{tính}$, tiếp đó tính được $q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega}$, và tập hợp sẵn

các q_{td} vào trong một bảng tra. Khi tính toán ta chỉ cần thực hiện:

- Căn cứ vào tải trọng và dạng đường ảnh hưởng đang xét, tìm bảng tải trọng tương đương tương ứng.
- Căn cứ vào chiều dài đường ảnh hưởng đang xét, tra tìm q_{td} .
- Tính $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

CHƯƠNG 4

XÁC ĐỊNH CUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH PHẪNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH.

§ 1. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN DẠNG & CHUYỂN VỊ.

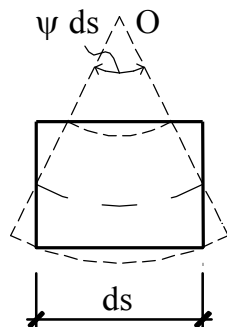
I. Biến dạng:

1. Khái niệm: Biến dạng là sự thay đổi hình dạng của phần tử dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

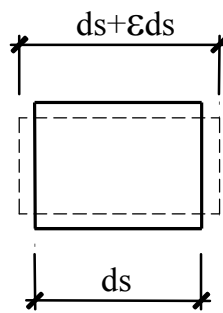
2. Các thành phần biến dạng:

Biến dạng của một phần tử thanh trong hệ thanh phẳng có chiều dài ds gồm 3 thành phần:

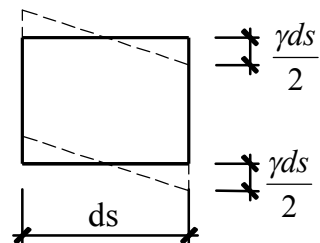
- Biến dạng góc xoay ψds : là góc xoay tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phần tử (H.4.1.a); ψ là góc xoay tỷ đối.
- Biến dạng dọc trục ϵds : là khoảng co dãn giữa 2 tiết diện ở hai đầu phần tử theo phương dọc trục thanh (H.4.1.b); ϵ là biến dạng dọc trục tỷ đối.
- Biến dạng trượt γds : là độ trượt tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phần tử (H.4.1.c); γ là góc trượt tỷ đối.



H.4.1.a



H.4.1.b



H.4.1.c

* *Chú ý:* Quy ước chiều dương của biến dạng tương ứng với chiều trên hình vẽ.

II. Chuyển vị:

1. Khái niệm: Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của tiết diện dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

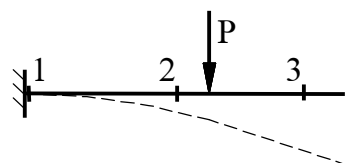
Khi hệ biến dạng, hầu hết các tiết diện đều có vị trí mới. Như vậy, có thể nói chuyển vị là hệ quả của sự biến dạng.

Tại 1 tiết diện của hệ có thể có 1 trong 3 khả năng sau:

- Có biến dạng nhưng không có chuyển vị. Ví dụ tiết diện 1 trên hình (H.4.2)

- Có biến dạng và chuyển vị. Ví dụ tiết diện 2 trên hình (H.4.2)

- Có chuyển vị nhưng không có biến dạng. Ví dụ tiết diện 3 trên hình (H.4.2)

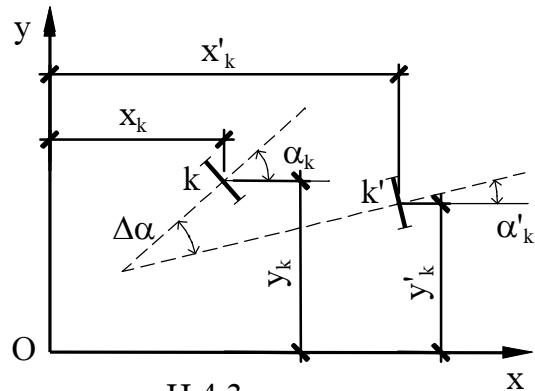


H.4.2

2. Các thành phần chuyển vị:

Tại một tiết diện bất kỳ có thể có 3 thành phần chuyển vị: 2 chuyển vị thẳng theo hai phương khác nhau và một chuyển vị góc xoay.

Thật vậy, trong hệ trục Oxy, xét 1 tiết diện k (H.4.3) được xác định bởi các tọa độ (x_k, y_k, α_k) . Sau khi hệ bị biến dạng, tiết diện k có vị trí mới là k' được xác định bởi các tọa độ (x'_k, y'_k, α'_k) .



H.4.3

Như vậy chuyển vị tại tiết diện k gồm ba thành phần:

- + Chuyển vị thẳng theo phương x : $\Delta x = x'_k - x_k$
- + Chuyển vị thẳng theo phương y : $\Delta y = y'_k - y_k$
- + Chuyển vị góc xoay: $\Delta \alpha = \alpha'_k - \alpha_k$

3. Ký hiệu chuyển vị:

Thường được ký hiệu bằng chữ Δ và kèm theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí và phương của chuyển vị; chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m gây ra.

Khi nguyên nhân m gây ra chuyển vị bằng đơn vị thì gọi là chuyển vị đơn vị. Khi đó Δ được thay bằng δ . δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra.

§ 2. CÔNG CỦA NGOẠI LỰC & BIỂU THỨC CÔNG.

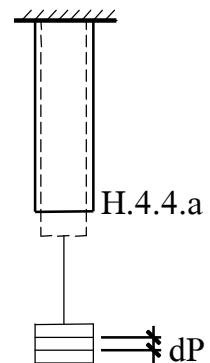
I. Nguyên lý bảo toàn năng lượng:

Xét 1 thanh chịu kéo đúng tâm như trên hình vẽ (H.4.4.a). Tăng dần tải trọng gây kéo bằng cách thêm dần các tải trọng vô cùng bé dP (để không gây ra lực quán tính). Quan sát ta nhận thấy:

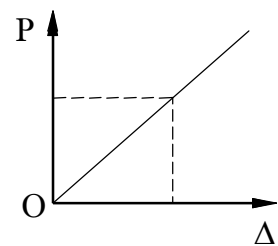
- Thanh bị kéo dãn ra, tức là thế năng của ngoại lực U_P giảm xuống. Và biến dạng trong hệ tăng lên, tức là thế năng biến dạng đàn hồi U trong thanh tăng lên.
- Quan hệ giữa lực tác dụng và biến dạng là tuyến tính, tức là tuân theo giả thiết 1 (H.4.4.b).

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, đồng thời bỏ qua ảnh hưởng của phần năng lượng do các hiện tượng từ, nhiệt, điện... thì $U_P = U$. Nghĩa là: *Thế năng của ngoại lực U_P chuyển hóa thành thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ nếu sự biến dạng không làm phá vỡ sự cân bằng của hệ.*

Mặc khác, năng lượng được đo bằng công:



H.4.4.a



H.4.4.b

+ $U_p = T$: công của ngoại lực được sinh ra trên chuyển vị của điểm đặt ngoại lực. Công $T > 0$ vì chuyển vị cùng chiều với điểm đặt lực P .

+ $U = A^*$: công của nội lực được sinh ra trên những biến dạng đàn hồi trong hệ. $A^* < 0$ vì nội lực có xu hướng ngăn cản biến dạng trong hệ.

$$\text{Từ } U_p = U. \text{ Suy ra } T = -A^* = U \quad (4 - 1)$$

Như vậy: về trị số, thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ bằng công T của ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công A^* của nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.

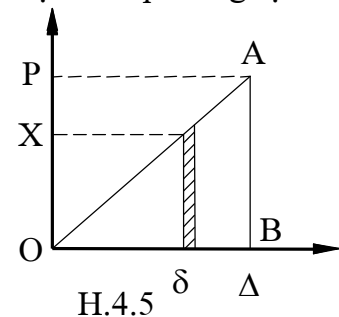
II. Công của ngoại lực (T):

Công là tích số của lực với trị số chuyển vị của điểm đặt lực theo phương lực tác dụng.

Như đã nói ở trên, quan hệ giữa lực tác dụng và chuyển vị là tuyến tính (H.4.5). Xét ở thời điểm lực tác dụng $P = X$ và chuyển vị $\Delta = \delta$, tăng thêm tải trọng tác dụng dP làm cho chuyển vị tăng thêm một lượng $d\delta$. Lực X sẽ sinh một công phân tố:

$$dT = X.d\delta$$

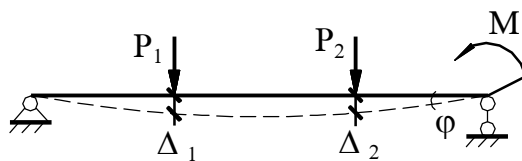
$$\text{Suy ra } T = \int_0^{\Delta} X.d\delta = \frac{1}{2}.P.\Delta \text{ (chính là diện tích tam giác OAB)}$$



Trong trường hợp có nhiều lực tác dụng $P_1, P_2, \dots, P_n$. Nếu gọi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ là chuyển vị cuối cùng tương ứng theo phương $P_1, P_2, \dots, P_n$ do các lực đó đồng thời tác dụng gây ra thì:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i.\Delta_i \quad (4 - 2)$$

Như vậy: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của các ngoại lực tập trung đồng thời tác dụng tĩnh bằng một nửa tổng các tích số của các ngoại lực với giá trị của chuyển vị cuối cùng tương ứng.



$$T = \frac{1}{2}(P_1.\Delta_1 + P_2.\Delta_2 + M.\varphi)$$

* Chú ý:

- Công tổng cộng không phụ thuộc vào thứ tự tác dụng của ngoại lực.
- Công của ngoại lực không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

§ 3. CÔNG CỦA NỘI LỰC - THỂ NĂNG CỦA HỆ THANH.

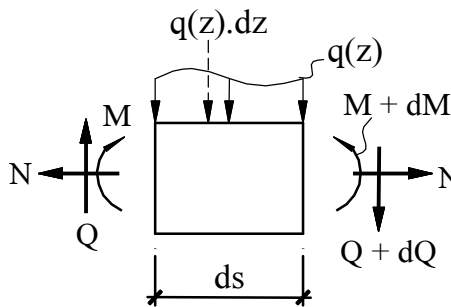
I. Công của nội lực (A^*): là công của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ.

Tách ra khỏi hệ một phân tố thanh có chiều dài ds (H.4.7.a). Lực tác dụng lên phân tố gồm:

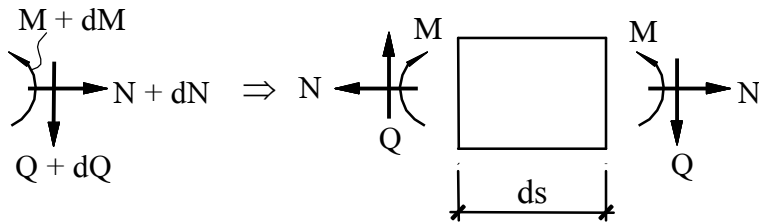
+ Ngoại lực: $q(z)$ được quy về thành lực tập trung $q(z).ds$

+ Nội lực: ở đầu trái là (M, Q, N) ; ở đầu phải là $(M + dM, Q + dQ, N + dN)$.

Giả thiết chiều dương của chúng như trên hình vẽ.



H.4.7.a



H.4.7.b

* Các nhận xét:

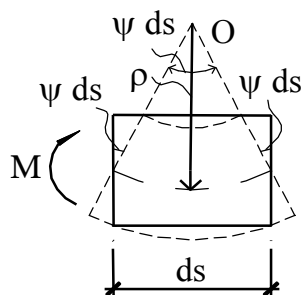
- Do xét cân bằng riêng cho phân tố nên có thể xem $M, Q, N, M + dM, Q + dQ, N + dN$ là các ngoại lực. Vì thế, có thể sử dụng biểu thức công của ngoại lực để xác định, sau đó suy ra công của nội lực theo mối quan hệ: $A^* = -T$

- Vì chỉ phân tích cho một phân tố thanh nên công được gọi là công phân tố. Khi đó ta thay $A^* = dA^*, T = dT$. Suy ra $dA^* = -dT$.

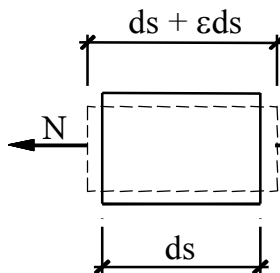
- Phân tố ds có chiều dài là rất bé nên cho phép bỏ qua các đại lượng vô cùng bé $q(z).ds, dM, dQ, dN$ khi tính công (H.4.7.b).

- Các lực M, Q, N sinh công trên những biến dạng độc lập nên cho phép tính công riêng rẽ do từng thành phần rồi cộng kết quả lại với nhau.

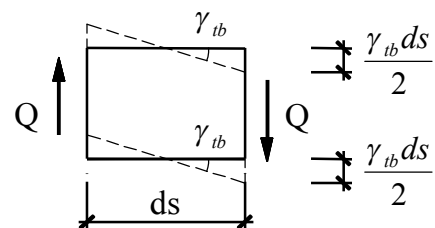
II. Xác định các thành phần biến dạng:



H.4.8.a



H.4.8.b



H.4.8.c

- Thành phần biến dạng góc xoay ψds (H.4.8.a):

Theo SBVL
$$\psi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.J}$$

- Thành phần biến dạng dọc trục εds (H.4.8.b):

Theo SBVL
$$\varepsilon = \frac{N}{E.F}$$

- Thành phần biến dạng trượt $\gamma_{tb} ds$ (H.4.8.c):

Theo SBVL
$$\gamma_{tb} = \nu \cdot \frac{Q}{G.F}$$

Với ν là hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số ν chỉ phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện: tiết diện hình chữ nhật ($\nu = 1,2$), tiết diện hình tròn ($\nu = 1,18$), tiết diện hình vành khăn ($\nu = 2$)...

III. Biểu thức công của nội lực:

- Do mômen M gây ra: $dT_M = \frac{1}{2} \left(M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} + M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} \right) = \frac{M \cdot \psi \cdot ds}{2} = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$

- Do lực dọc N gây ra: $dT_N = \frac{1}{2} \left(N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} \right) = \frac{N \cdot \varepsilon \cdot ds}{2} = \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}$

- Do lực cắt Q gây ra: $dT_Q = \frac{1}{2} \left(Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} + Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} \right) = \frac{Q \cdot \gamma_{tb} \cdot ds}{2} = \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$

Suy ra
$$dT = dT_M + dT_N + dT_Q = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$$

Suy ra
$$dA^* = -dT = - \left(\frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right)$$

$$A^* = \int dA^* = - \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right]$$

Ở đây dấu $\sum$ là lấy tổng trên các đoạn thanh sao cho các biểu thức dưới dấu tích phân là liên tục về mặt toán học.

IV. Thế năng của hệ thanh:

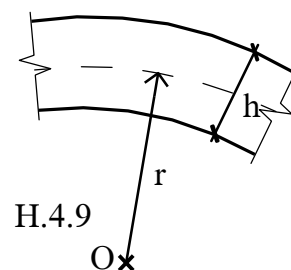
Từ biểu thức (4 - 1), suy ra biểu thức thế năng đàn hồi của hệ thanh:

$$U = -A^* = \sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \quad (4 - 3)$$

*Các chú ý:

- Thế năng của hệ luôn dương.

- Biểu thức thế năng (4 - 3) chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$) (H.4.9).



H.4.9

§ 4. VẬN DỤNG BIỂU THỨC THỂ NĂNG ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ.

I. Cách tích trực tiếp từ biểu thức thể năng:

Cách này chỉ áp dụng khi trên hệ chỉ có một lực tập trung và cần tìm chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực đó.

$$\text{Từ } U = T = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta. \text{ Suy ra } \Delta = \frac{2 \cdot U}{P}$$

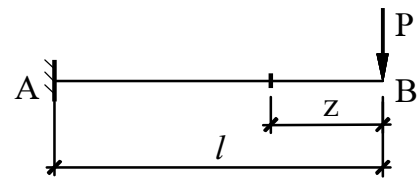
$$\text{Vậy } \Delta = \frac{2}{P} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right] \quad (4 - 4)$$

Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A. Cho biết $E \cdot J = \text{const}$. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt. (H.4.10)

Biểu thức mômen uốn dọc trục thanh:

$$M(z) = -P \cdot z$$

$$\text{Thay vào: } \Delta = \frac{2}{P} \cdot \int_0^l \frac{(-P \cdot z)^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot J} = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$



H.4.10

II. Cách xác định theo định lý Castigliano:

Phát biểu định lý: Đạo hàm riêng thể năng biến dạng đàn hồi theo lực P_k nào đó sẽ bằng chuyển vị tương ứng với phương và vị trí của lực P_k đó.

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Thay biểu thức (4 - 3) vào

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{\partial U}{\partial P_k} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right] \\ \Delta_k &= \left[\sum \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int \frac{N}{E \cdot F} \frac{\partial N}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int v \cdot \frac{Q}{G \cdot F} \frac{\partial Q}{\partial P_k} \cdot ds \right] \quad (4 - 5) \end{aligned}$$

Xét trở lại ví dụ trên

$$\Delta_k = \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds = \int_0^l \frac{(-P \cdot z)}{E \cdot J} \cdot (-z) dz = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J} > 0$$

* Chú ý:

- Nếu $\Delta_k > 0$ thì chuyển vị cùng chiều với P_k và ngược lại
- Nếu tải trọng tác dụng là phân bố có thể thay thế bằng nhiều lực tập trung để

tính.

- Trường hợp P_k là mômen tập trung thì chuyển vị tương ứng là góc xoay.
- Nếu cần tìm chuyển vị tại vị trí và theo phương bất kỳ thì có thể đặt thêm lực P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị. Sau khi xác định được Δ_k , cho $P_k = 0$ sẽ được kết quả cần tìm.

§ 5. CÔNG KHẢ DĨ CỦA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC - CÁC BIỂU THỨC CÔNG KHẢ DĨ

I. Công khả dĩ:

1. Định nghĩa: Công khả dĩ (còn gọi là công ảo) là công sinh ra bởi các lực trên những biến dạng và chuyển vị vô cùng bé do những nguyên nhân bất kỳ nào đó sinh ra.

Các chuyển vị và biến dạng vô cùng bé được gọi là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

2. So sánh công thực và công khả dĩ:

Công thực: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh công gây ra.

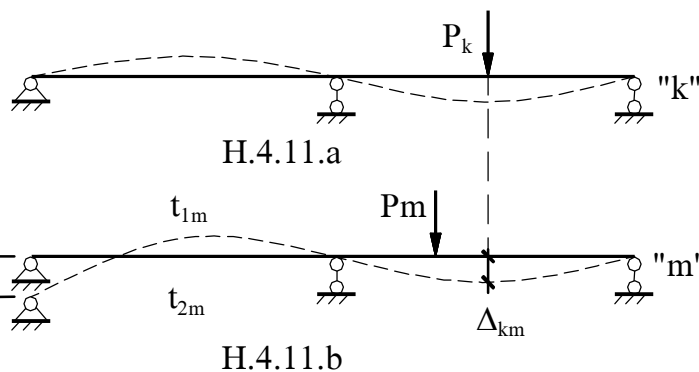
Công ảo: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng là bất kỳ và có thể là tải trọng hay biến thiên nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

Ví dụ minh họa:

Xét một hệ đàn hồi ở hai trạng thái:

- Trạng thái thứ nhất chịu lực P_k gọi là trạng thái "k" (H.4.11.a).

- Trạng thái thứ hai chịu các nguyên nhân bất kỳ gọi là trạng thái "m" (H.4.11.b).



Gọi Δ_{km} là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực P_k trên hệ ở trạng thái "m".

Theo định nghĩa thì tích số $P_k \cdot \Delta_{km}$ là công khả dĩ của lực P_k trên chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m". Ký hiệu: T_{km} .

$$\text{Vậy } T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

II. Công khả dĩ của ngoại lực (T_{km}):

Từ ví dụ minh họa ở trên, có thể định nghĩa công khả dĩ của ngoại lực như sau:

Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m" bằng tổng các tích số giữa các lực tác dụng ở trạng thái "k" với những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

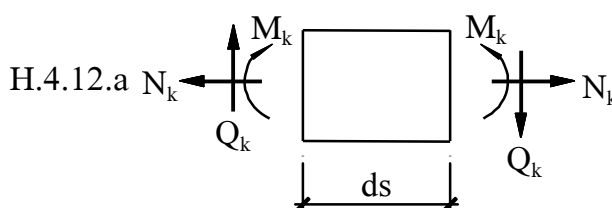
$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{ikm} \quad (4 - 6)$$

III. Công khả dĩ của nội lực

(A_{km}^*):

Tách riêng một phân tố thanh của hệ ở hai trạng thái "k", "m".

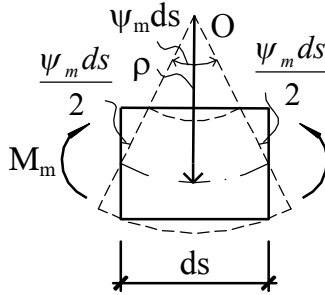
- Ở trạng thái "k": chỉ quan tâm



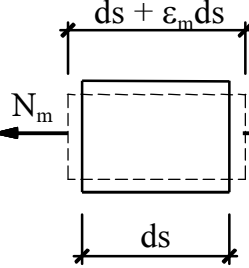
các thành phần M_k , N_k , Q_k ở hai đầu phân tố và xem là các ngoại lực như trong trường hợp công của nội lực (H.4.12.a).

- Ở trạng thái "m": Chỉ quan tâm các thành phần biến dạng như sau:

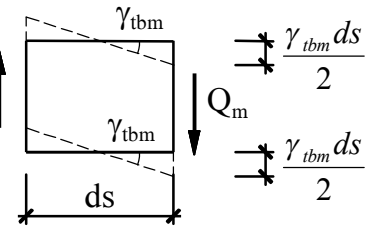
↪ Các thành phần biến dạng ψ_m , ε_m , γ_{tbm} do các nội lực M_m , N_m , Q_m gây ra.



H.4.12.b



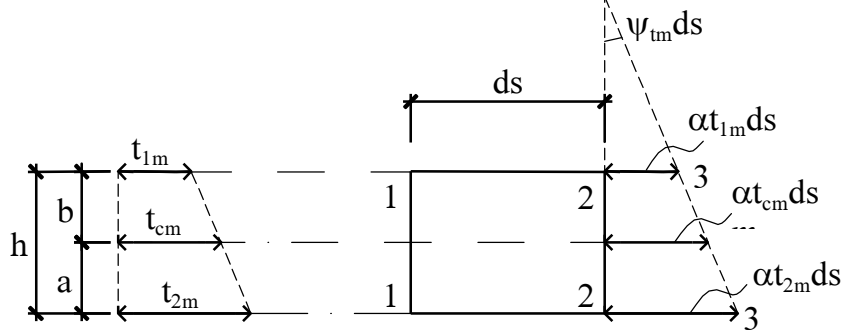
H.4.12.c



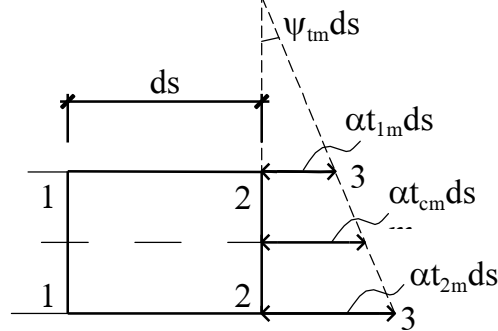
H.4.12.d

Tương tự trường hợp công của nội lực: $\psi_m = \frac{M_m}{E.J}$; $\varepsilon_m = \frac{N_m}{E.F}$; $\gamma_{mtb} = \nu \cdot \frac{Q_m}{G.F}$

↪ Các thành phần biến dạng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra (H.4.13.a&b)



H.4.13.a



H.4.13.b

Gọi t_{2m} , t_{1m} là sự biến thiên nhiệt độ của thớ dưới và thớ trên của phân tố. Cho rằng sự biến thiên nhiệt độ dọc theo chiều cao của phân tố tuân theo quy luật đường thẳng (bậc nhất). Biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh (H.4.13.a):

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} \cdot a + t_{2m} \cdot b}{a + b}$$

Nếu tiết diện là hình chữ nhật, tức là $a = b = \frac{h}{2}$ thì

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$

Giả sử $t_{2m} > t_{1m} > 0$ và tiết diện ở đầu 1-1 của phân tố là cố định. Gọi α là hệ số dẫn nở vì nhiệt. Lúc này phân tố sẽ có hai thành phần biến dạng (H.4.13.b):

+ Biến dạng dọc trục: $\varepsilon_{tm} \cdot ds = \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds$

+ Biến dạng góc xoay giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố:

$$\psi_{tm} \cdot ds = \frac{\alpha \cdot t_{2m} \cdot ds - \alpha \cdot t_{1m} \cdot ds}{h} = \frac{\alpha}{h} \cdot (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds$$

Vậy công khả dĩ của nội lực của một phân tố ds ở trạng thái "k" trên các biến dạng khả dĩ ở trạng thái "m":

$$dT_{km} = \frac{1}{2} M_k \psi_m ds + \frac{1}{2} M_k \psi_m ds + \frac{1}{2} N_k \varepsilon_m ds + \frac{1}{2} N_k \varepsilon_m ds + \frac{1}{2} Q_k \gamma_{ibm} ds + \frac{1}{2} Q_k \gamma_{ibm} ds + M_k \psi_{im} ds + N_k \varepsilon_{im} ds$$

$$\text{Hay } dT_{km} = \frac{1}{2} M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_{ibm} ds + M_k \psi_{im} ds + N_k \varepsilon_{im} ds$$

Thay tất cả các biến dạng đã tính được vào:

$$dT_{km} = \frac{1}{E.J} M_k M_m ds + \frac{1}{E.F} N_k N_m ds + \frac{\nu}{G.F} Q_k Q_m ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + N_k \alpha t_{cm} ds$$

$$\text{Suy ra } dA_{km}^* = -dT_{km} = -\left[\frac{1}{E.J} M_k M_m ds + \frac{1}{E.F} N_k N_m ds + \frac{\nu}{G.F} Q_k Q_m ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + N_k \alpha t_{cm} ds \right]$$

$$\text{Suy ra } A_{km}^* = \int dA_{km}^* = -\left[\sum \int \frac{M_k M_m}{E.J} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{E.F} ds + \sum \int \nu \frac{Q_k Q_m}{G.F} ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} N_k ds \right] \quad (4 - 7)$$

IV. Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833):

1. Nguyên lý công khả dĩ cho vật rắn: Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng bằng không

$$T_{km} = 0$$

2. Nguyên lý công khả dĩ cho hệ đàn hồi:

Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực T_{km} trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng và công khả dĩ của nội lực A_{km}^* trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không

$$T_{km} + A_{km}^* = 0$$

$$\text{Hay } \sum_i P_{ik} \Delta_{ikm} = \sum \int \frac{M_k M_m}{E.J} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{E.F} ds + \sum \int \nu \frac{Q_k Q_m}{G.F} ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} N_k ds \quad (4 - 8)$$

§ 6. CÁC ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỖ TRONG HỆ ĐÀN HỒI

I. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực (Định lý E.Betti 1872):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái:

- Trạng thái "m": chịu các lực tác dụng P_{im} ($i = 1 \dots n$)

- Trạng thái "k": chịu các lực tác dụng P_{jk} ($j = 1 \dots p$)

Theo biểu thức (4 - 8):

- Công khả dĩ của lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^n P_{im} \cdot \Delta_{imk} = \sum \int \frac{M_m \cdot M_k}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_m \cdot N_k}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_m \cdot Q_k}{G \cdot F} ds$$

- Công khả dĩ của hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$T_{km} = \sum_{j=1}^p P_{jk} \cdot \Delta_{jkm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds$$

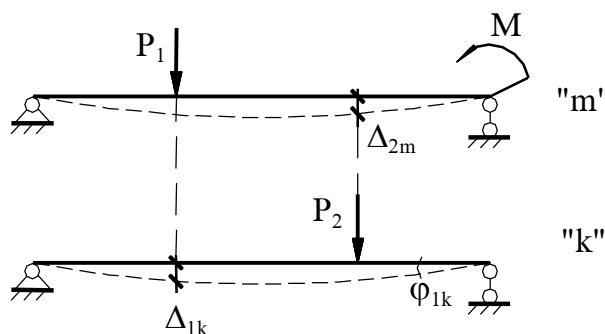
Suy ra $T_{km} = T_{mk}$ (4 - 9)

* *Phát biểu*: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" tương hỗ bằng công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k".

* *Chú ý*:

- Hai trạng thái "k", "m" phải xảy ra trên cùng một hệ.

- Chuyển vị ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với tải trọng ở trạng thái kia (H.4.14).



H.4.14

$$\sum_{i=1}^n P_{im} \cdot \Delta_{imk} = P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k}$$

$$\sum_{j=1}^p P_{jk} \cdot \Delta_{jkm} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$$

Theo định lý tương hỗ thì $P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$

II. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị (Định lý J. Maxwell 1864):

Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái

(H.4.15):

- Trạng thái "m" chỉ chịu một lực tập trung P_m .

- Trạng thái "k" chỉ chịu một lực tập trung P_k .

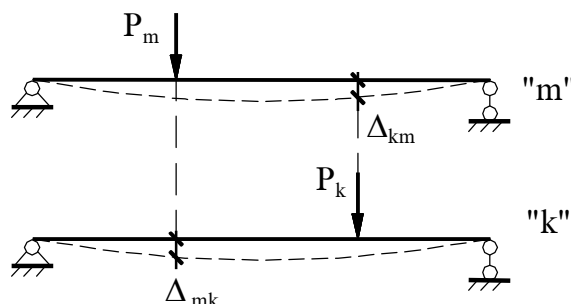
Theo định lý E. betti thì

$$P_m \cdot \Delta_{mk} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\Delta_{mk}}{P_k} = \frac{\Delta_{km}}{P_m} \quad (a)$$

Gọi $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}$. Đại lượng này chính là chuyển vị đơn vị tương ứng với phương

và vị trí P_k do $P_m = 1$ gây ra.



H.4.15

Tương tự cho $\delta_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k}$.

Từ (a) suy ra $\delta_{km} = \delta_{mk}$ (4 - 10)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực $P_k = 1$ gây ra.

III. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị (Định lý L. Rayleigh 1875):

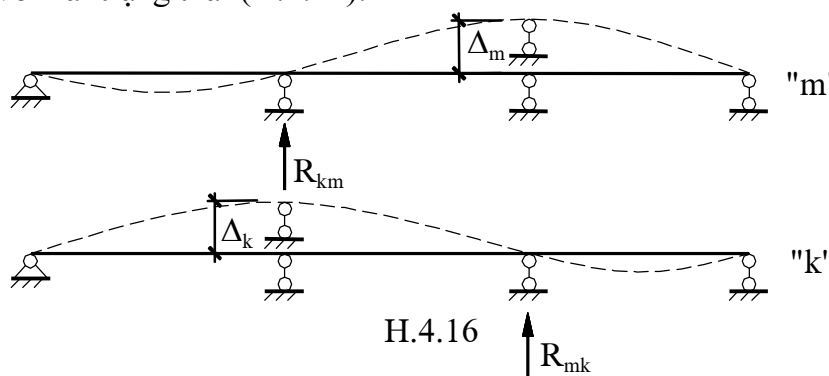
Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái (H.4.16):

- Trạng thái "m"

chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_m tại liên kết m.

- Trạng thái "k"

chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k.



H.4.16

Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do chuyển vị Δ_m gây ra và R_{mk} là phản lực tại liên kết m do chuyển vị Δ_k gây ra.

Theo định lý E.Betti thì $R_{km} \cdot \Delta_k = R_{mk} \cdot \Delta_m$

Suy ra $\frac{R_{km}}{\Delta_m} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$ (b)

Gọi $r_{km} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Tương tự cho $r_{mk} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$

Từ (b) suy ra $r_{km} = r_{mk}$ (4 - 11)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

IV. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị (Định lý A. A. Gvozdiev 1927):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính với hai trạng thái (H.4.17):

- Trạng thái "m" chỉ chịu lực P_m .

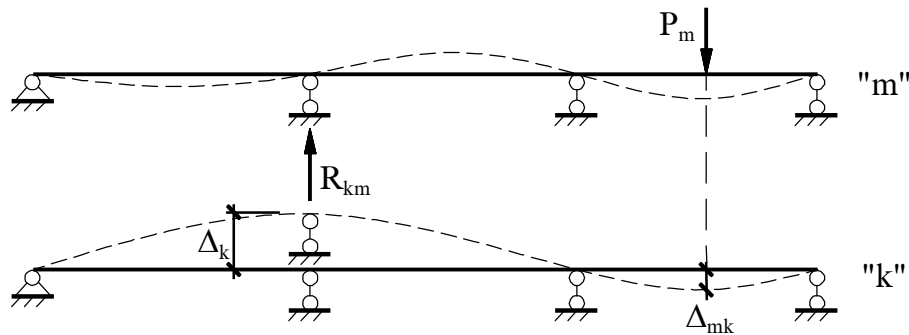
- Trạng thái "k" có một liên kết k của hệ chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_k .

Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do P_m gây ra (ở trạng thái "m") và Δ_{mk} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do Δ_k gây ra (ở trạng thái "k")

Theo định lý E.Betti thì $P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = 0$

Suy ra $\frac{R_{km}}{P_m} = -\frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$ (c)

Gọi $\dot{r}_{km} = \frac{R_{km}}{P_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do $P_m = 1$ gây ra.



H.4.17

$\dot{\delta}_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$. Đây chính là chuyển vị đơn vị tại vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị $\Delta_k = 1$ gây ra.

Theo (c) suy ra: $\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}$. (4 - 12)

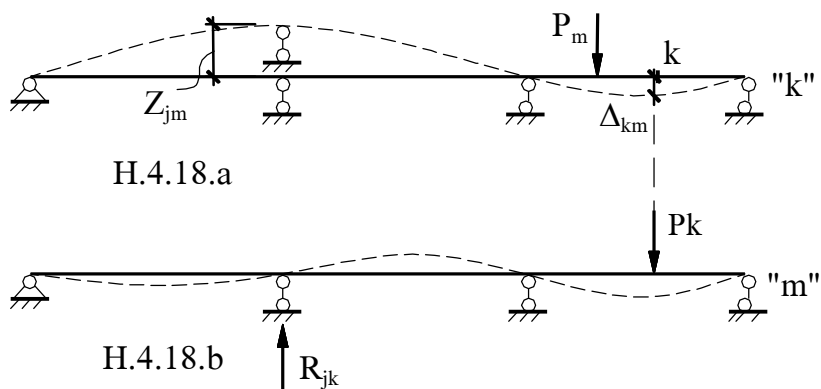
Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng phương và vị trí lực P_m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra nhưng trái dấu.

§ 7. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH

(Công thức Maxwell - Morh 1874)

I. Thiết lập công thức:

Xét một hệ thanh đàn hồi tuyến tính chịu tác dụng của các nguyên nhân: các tải trọng P_m , chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết Z_m , sự biến thiên nhiệt độ t_{2m} & t_{1m} . Các tiết diện trong hệ sẽ chuyển vị. Ví dụ hệ cho trên hình (H.4.18.a). Trạng thái này của hệ gọi là trạng thái "m".



H.4.18.a

H.4.18.b

Yêu cầu: tìm chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện k.

Cách tiến hành:

Tạo trạng thái khả dĩ "k" bằng cách trên hệ đã cho đặt lực P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị, chiều tùy ý chọn (H.4.18.b).

Áp dụng công thức công khả dĩ cho lực ở trạng thái "k" trên chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m":

$$P_k \cdot \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} \cdot Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int \nu \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k ds$$

Chia hai vế cho P_k và đồng thời ký hiệu: $\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k}$; $\bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k}$; $\bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}$; $\bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k}$

Nói cách khác $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{R}_{jk}$ chính là M_k, N_k, Q_k, R_k tương ứng do $P_k = 1$ xảy ra trên hệ ở trạng thái "k".

Thay vào ta được công thức tổng quát xác định chuyển vị trong hệ thanh dàn hồi:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int \nu \frac{\bar{Q}_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} \bar{N}_k ds \quad (4 - 13)$$

II. Các chú ý:

+ Công thức Morh chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$).

+ Khi tính hệ ở trạng thái "k" chỉ cần đặt lực $P_k = 1$.

+ Nếu cần tìm chuyển vị thẳng thì P_k là lực tập trung; nếu tìm chuyển vị góc xoay thì P_k là mômen tập trung.

+ Nếu kết quả $\Delta_{km} > 0$ thì chuyển vị là cùng chiều với lực P_k đã giả định và ngược lại.

+ Z_{jm} là chuyển vị tại liên kết j của hệ ở trạng thái "m".

+ $\bar{R}_{jk}$ là phản lực tại liên kết j tương ứng với chuyển vị Z_{jm} do lực $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

+ Tích $\bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm}$ lấy dấu dương khi $\bar{R}_{jk}$ và Z_{jm} cùng chiều nhau.

+ M_m, N_m, Q_m là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "m"

+ $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "k" do $P_k = 1$ gây ra.

+ Công thức Morh cũng áp dụng được cho hệ siêu tĩnh.

§ 8. VẬN DỤNG CÔNG THỨC MORH VÀO CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN VỊ

I. Hệ dầm và khung chịu tải trọng:

Trong hệ dầm và khung chịu, ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và trượt là rất nhỏ so với biến dạng uốn. Và trong tính toán thường cho phép bỏ qua ảnh hưởng của chúng. Lúc này công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds \quad (4 - 14)$$

*Ví dụ 1: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B. Cho biết độ cứng của thanh dầm $E \cdot J = \text{const}$.

1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.19.a)

$$M_m(z) = -P \cdot z \quad [0 \leq z \leq l]$$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k":
(H.4.19.b)

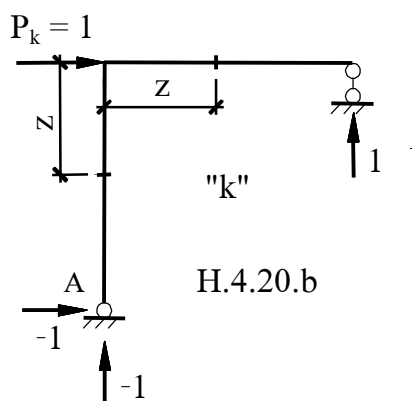
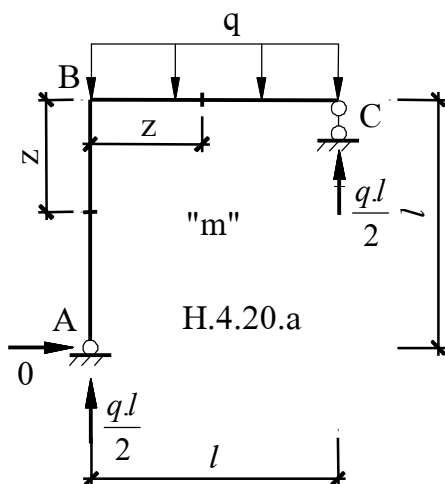
$$\bar{M}_k(z) = -P_k \cdot z = -z \quad [0 \leq z \leq l]$$

3. Xác định y_B :

$$\begin{aligned} y_B = \Delta_{km} &= \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \\ &= \int_0^l \frac{(-P \cdot z) \cdot (-z)}{E \cdot J} dz = \frac{P \cdot z^3}{3E \cdot J} \Big|_0^l = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot J} > 0 \end{aligned}$$

Kết luận: Chuyển vị cùng chiều P_k (hướng xuống).

*Ví dụ 2: Xác định chuyển vị nằm ngang tại B (H.4.20.a). Cho biết độ cứng của các thanh là như nhau và $E \cdot J = \text{const}$.



1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.20.a)

- Trong thanh BC: $M_m(z) = \frac{q \cdot l \cdot z}{2} - \frac{q \cdot z^2}{2} \quad [0 \leq z \leq l] \quad (\text{gốc tại B})$

- Trong thanh AB: $M_m(z) = 0$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k": (H.4.20.b)

- Trong thanh BC: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l] \quad (\text{gốc tại B})$

- Trong thanh AB: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l] \quad (\text{gốc tại B})$

3. Xác định x_B :

$$x_B = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \int_0^l \frac{(q \cdot l \cdot z - q \cdot z^2) \cdot 1 \cdot (l - z)}{2 \cdot E \cdot J} dz =$$

$$= \frac{q}{2 \cdot E \cdot J} \left[\frac{l \cdot z^2}{2} - \frac{2}{3} l \cdot z^3 + \frac{z^4}{4} \right]_0^l = \frac{q \cdot l^4}{24 E \cdot J} > 0$$

* *Kết luận:* Chuyển vị là cùng chiều với P_k (hướng sang phải)

II. Hệ dàn khớp chịu tải trọng:

Trong hệ dàn, các thanh chỉ tồn tại lực dọc. Nên công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds$$

Các đại lượng $\bar{N}_k$, N_m , $E \cdot F$ thường bằng const đối với từng thanh dàn. Suy ra:

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \int ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i \quad (4 - 15)$$

* *Ví dụ:* Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt dàn

số 5. Cho biết độ cứng trong các thanh dàn là như nhau và $E \cdot F = \text{const}$.

1. Trạng thái "m": (H.4.21.a).

Xác định N_{im} . Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

2. Trạng thái "k": (H.4.21.b)

Xác định $\bar{N}_{ik}$. Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

3. Xác định x_5 :

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$$

Kết quả tính toán dọc thể hiện trong **Bảng 4.1**

Diễn tả **Bảng 4.1**:

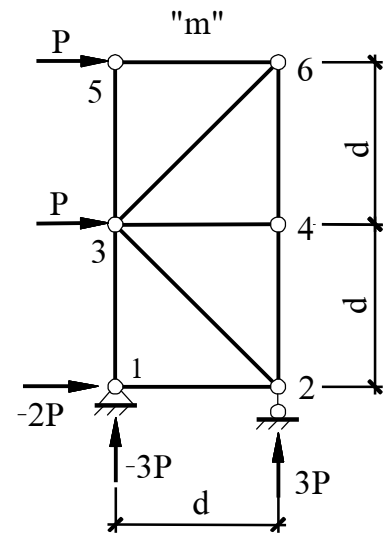
- + Cột (1) ghi các thanh dàn.
- + Cột (2) ghi chiều dài các thanh dàn.
- + Cột (3) ghi giá trị $\frac{1}{E \cdot F}$ (ở đây là như nhau cho các

thanh dàn)

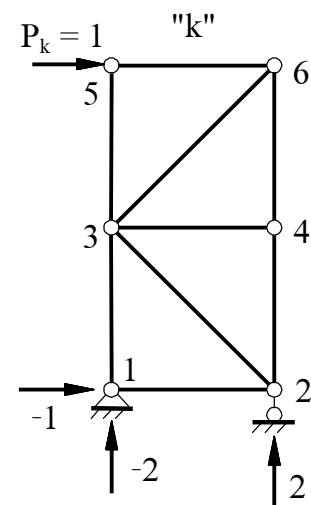
- + Cột (4) ghi lực dọc trong các thanh dàn N_{im} .
- + Cột (5) ghi lực dọc trong các thanh dàn $\bar{N}_{ik}$
- + Cột (6) ghi kết quả $\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$ cho từng thanh dàn.

Kết quả x_5 là tổng của các hàng trong cột (6):

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i = \frac{P \cdot d}{E \cdot F} (11 + 6\sqrt{2}) > 0$$



H.4.21.a



H.4.21.b

Thanh	l_i	$\frac{1}{E.F}$	N_{im}	$\bar{N}_{ik}$	$\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im} \cdot l_i}{E.F_i}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1 - 2	d	1/E.F	2P	1	2.P.d/E.F
1 - 3	d	1/E.F	3P	2	6.P.d/E.F
3 - 2	d. $\sqrt{2}$	1/E.F	$-2P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$4\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 2	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
3 - 4	d	1/E.F	0	0	0
3 - 6	d. $\sqrt{2}$	1/E.F	$P\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 3	d	1/E.F	0	0	0

Bảng 4.1 Bảng tính chuyển vị của hệ dàn

III. Hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa:

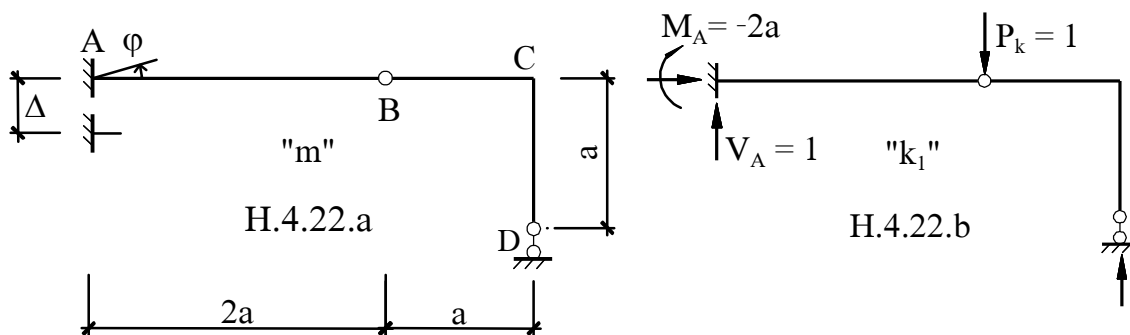
Nguyên nhân này không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên $N = M = Q = 0$.

Lúc này biểu thức (4 - 13) được viết lại:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} \quad (4 - 16)$$

Các đại lượng trong biểu thức đã được giả thích trong phần các chú ý của công thức Morh.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại B và góc xoay tại C.



1. Trạng thái "m": (H.4.22.a)

2. Trạng thái "k": (H.4.22.b) để xác định y_B và (H.4.22.c) để xác định φ_C .

3. Xác định y_B & φ_C :

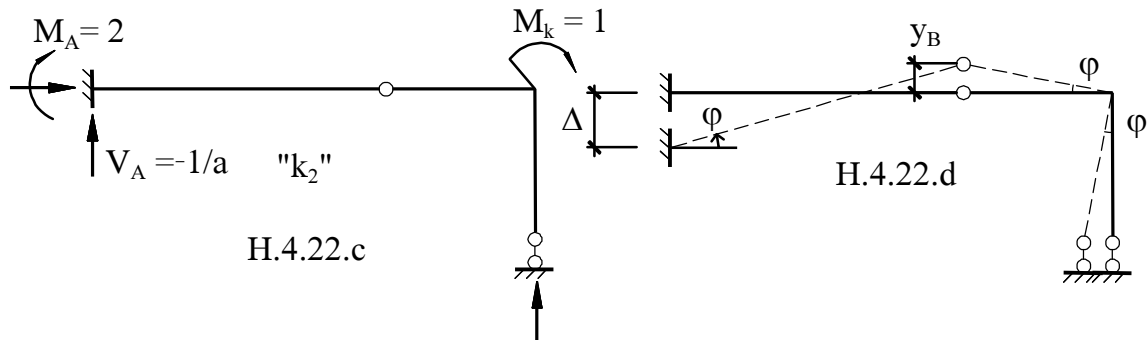
$$y_B = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[2a \cdot \varphi - 1 \cdot \Delta] = \Delta - 2a \cdot \varphi.$$

$$\varphi_C = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[-2 \cdot \varphi + \frac{1}{a} \cdot \Delta] = 2 \cdot \varphi - \frac{\Delta}{a}$$

* Nhận xét: Có thể xác định được chuyển vị bằng các điều kiện hình học (H.4.22.d).

$$y_B = \Delta - 2a \cdot \varphi$$

$$\varphi_C = -\frac{y_B}{\Delta} = 2.\varphi - \frac{\Delta}{a}$$



IV. Hệ tĩnh định chịu biến thiên nhiệt độ:

Nguyên nhân này cũng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \overline{M}_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} \overline{N}_k ds$$

Nếu α , h , t_{2m} , t_{1m} = const trên từng đoạn thanh thì

$$\Delta_{km} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\overline{N}_k) \quad (4 - 17)$$

Trong đó:

+ t_{2m} , t_{1m} và t_{cm} là biến thiên nhiệt độ thớ dưới, thớ trên và thớ giữa của thanh.

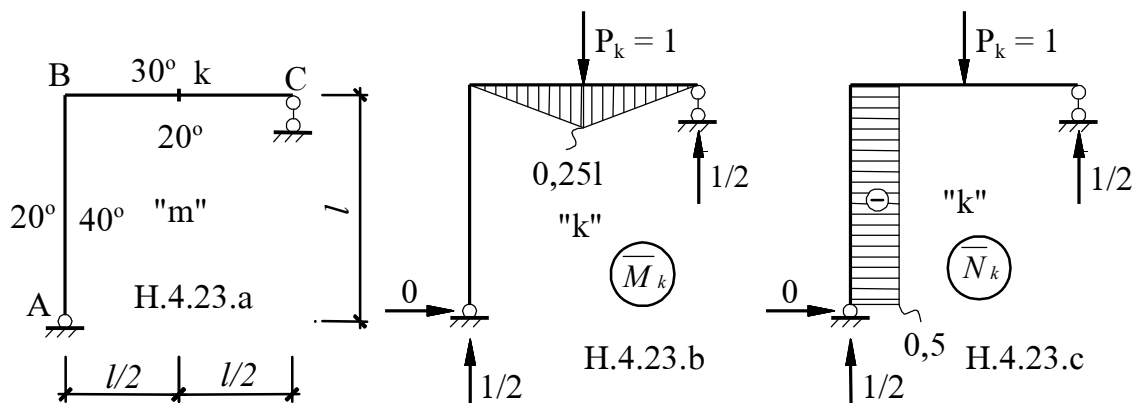
+ $\Omega(\overline{M}_k)$ là diện tích của biểu đồ $(\overline{M}_k)$ trên từng đoạn thanh.

+ $\Omega(\overline{N}_k)$ là diện tích của biểu đồ $(\overline{N}_k)$ trên từng đoạn thanh.

+ $\Omega(\overline{M}_k)$, $\Omega(\overline{N}_k)$ lấy dấu theo dấu của biểu đồ $(\overline{M}_k)$, $(\overline{N}_k)$.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ cho trên hình (H.4.23.a)

Cho biết $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $h_{AB} = 30 \text{ cm}$; $h_{BC} = 20 \text{ cm}$.



- Độ biến thiên nhiệt độ dọc trục các thanh:

$$t_{cAB} = \frac{40 + 20}{2} = 30^\circ \text{C}; t_{cBC} = \frac{30 + 20}{2} = 25^\circ \text{C}$$

- Trạng thái "m": (H.4.23.a) Các nội lực M_m , N_m , Q_m không tồn tại.

- Trạng thái "k": (H.4.23.b & c) Các biểu đồ $(\overline{M}_k)$ & $(\overline{N}_k)$ được vẽ trên (H.4.23.b & c).

- Xác định độ võng tại k :

$$y_k = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k)$$

$$= \frac{\alpha}{0,2} \cdot (20 - 30) \cdot \frac{0,25l \cdot l}{2} + \alpha \cdot 30 \cdot (-0,5l) = -6,25 \cdot \alpha \cdot l^2 - 1,5 \cdot \alpha \cdot l$$

V. Hệ dàn tĩnh định có chiều dài các thanh chế tạo không chính xác:

* *Nhận xét:* Có thể đưa nguyên nhân này về sự biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh. Thật vậy, để thay đổi chiều dài các thanh dàn một lượng Δ ta chỉ việc thay đổi t_c để sao cho $\Delta = \alpha \cdot l \cdot t_c$. Như vậy ta trở lại bài toán hệ chịu nguyên nhân là sự biến thiên là nhiệt độ với chú ý là $\overline{M}_k = 0$.

$$\Delta_{km} = \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k) = \sum \alpha_i \cdot t_{ci} \cdot \overline{N}_{ik} \cdot l_i = \sum \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i \quad (4 - 18)$$

$\Delta_i > 0$ khi thanh dài hơn so với yêu cầu (còn gọi là độ dôi) và ngược lại (còn gọi là độ hụt).

* *Ví dụ:* Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5 của hệ dàn trên hình (H.4.24.a)

Trạng thái "k" được tạo trên hình (H.4.24.b). Ở đây cần xác định $\overline{N}_{ik}$ trong hai thanh (4 - 2) & (4 - 6).

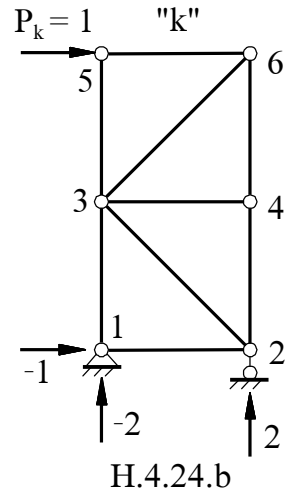
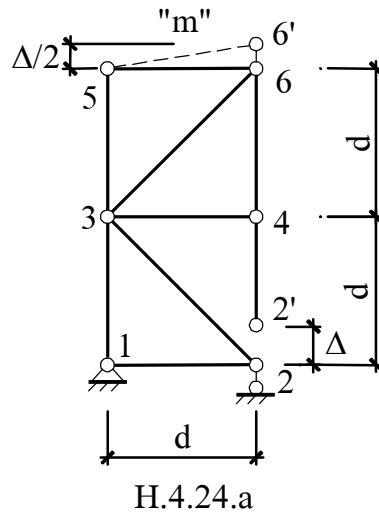
$$\overline{N}_{4-6} = -1, \quad \overline{N}_{4-2} = -1$$

Chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5.

$$X_5 = \Delta_{km} = \sum \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i =$$

$$= \overline{N}_{4-6} \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + \overline{N}_{4-2} \cdot (-\Delta) = -1 \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + (-1) \cdot (-\Delta) = \frac{\Delta}{2} > 0$$

Kết luận: Chuyển vị theo chiều P_k (hướng sang phải)



§ 9. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN TRONG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ BẰNG PHÉP "NHÂN BIỂU ĐỒ VÊRÊSAGHIN"

I. Thiết lập công thức:

Trong công thức Morh (4 - 13) nếu xét hệ chỉ gồm những thanh thẳng chịu nguyên nhân là tải trọng và $E, J, E, F, G, F = \text{const}$ trên từng đoạn thanh thì có thể được viết lại:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{E \cdot J} \int \overline{M}_k \cdot M_m dz + \sum \frac{1}{E \cdot F} \int \overline{N}_k \cdot N_m dz + \sum \frac{\nu}{G \cdot F} \int \overline{Q}_k \cdot Q_m dz \quad (4 - 19)$$

Lúc này, sau dấu tích phân nào cũng là tích của hai hàm số, phép " nhân biểu đồ" Vêrêxaghin cho phép thay thế việc tính tích phân của tích hai hàm số bằng cách thuận tiện hơn. Nội dung như sau:

Nếu một trong hai hàm số dưới dấu tích phân có bậc nhỏ hơn hay bằng một về mặt toán học (hàm còn lại có bậc bất kỳ) thì:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y \quad (4 - 20)$$

Trong đó Ω là diện tích của biểu đồ có bậc bất kỳ lấy trên đoạn $[z_1, z_2]$.

y là tung độ trên biểu đồ có bậc nhỏ hơn hay bằng một tại vị trí tương ứng với trọng tâm diện tích Ω .

Thật vậy, trong biểu thức tích phân (4-20), giả sử $A(z)$ có bậc bất kỳ, đồ thị của $A(z)$ được vẽ như trên hình (H.4.25.a); $B(z)$ có bậc nhỏ hơn hay bằng một, đồ thị của nó được vẽ trên hình (H.4.225.b). Kéo dài đồ thị $B(z)$ đến cắt trục z tại C , gọi hoành độ của điểm C là z_0 , góc của $B(z)$ so với trục z là α . Khi đó có thể biểu thị $B(z)$ như sau:

$$B(z) = (z - z_0).tg\alpha$$

Thay vào trong dấu tích phân:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} A(z).(z - z_0).tg\alpha dz$$

Thay $A(z)dz = d\Omega$ và đưa hằng số ra ngoài dấu tích phân

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0).d\Omega$$

$+ \int_{z_1}^{z_2} z.d\Omega$ chính là mômen tĩnh của diện tích Ω đối với trục tung, nó chính bằng

diện tích Ω nhân với khoảng cách z_G từ trọng tâm G của diện tích Ω đến trục tung.

$$+ \int_{z_1}^{z_2} z_0.d\Omega = z_0.\Omega$$

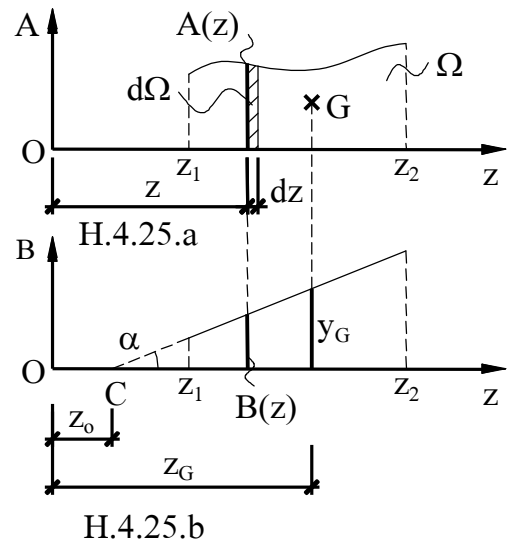
Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha.(z_G - z_0).\Omega$$

Mặt khác dễ thấy $(z_G - z_0).tg\alpha = y_G$: là tung độ của đồ thị $B(z)$ lấy tại vị trí tương ứng dưới trọng tâm diện tích Ω . Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y_G \quad (\text{đpcm})$$

Viết lại (4 - 20) theo "phép nhân biểu đồ"



$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k).(M_m) + (\overline{N}_k).(N_m) + (\overline{Q}_k).(Q_m)$$

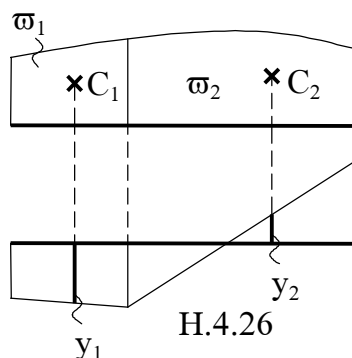
II. Các chú ý khi nhân biểu đồ:

- + Phép " nhân biểu đồ" chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng.
- + Tung độ y bắt buộc phải lấy trên biểu đồ có bậc ≤ 1 còn diện tích Ω được lấy trên biểu đồ có bậc bất kỳ.
- + Nếu Ω , y cùng dấu thì kết quả "nhân biểu đồ" có dấu dương và ngược lại.
- + Nếu đường biểu đồ của biểu đồ lấy tung độ bị gãy khúc thì chia thành nhiều đoạn không gãy khúc để nhân, sau đó cộng kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.26)

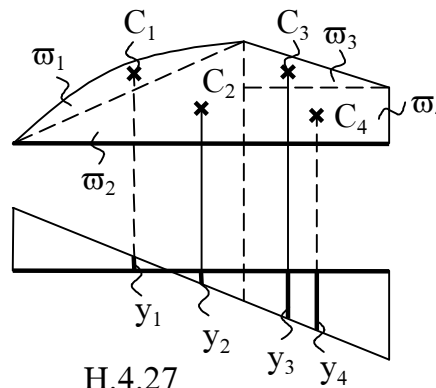
$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2)$$

- + Khi biểu đồ lấy diện tích Ω là phức tạp (việc xác định diện tích và vị trí của trọng tâm khó khăn) thì nên chia thành nhiều hình đơn giản để tính và sau đó cộng các kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.27)

$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2) + (-\omega_3.y_3) + (-\omega_4.y_4)$$



H.4.26



H.4.27

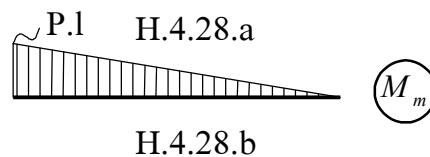
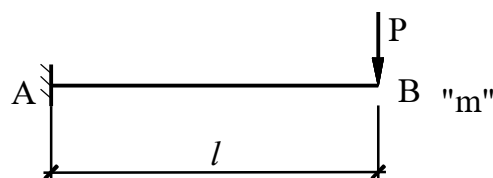
* Ví dụ 1: Xác định độ võng tại B (H.4.28.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.28.b)

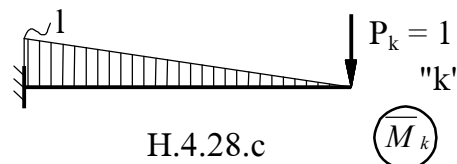
2. Trạng thái "k": Vẽ $(\overline{M}_k)$. Kết quả trên hình (H.4.28.c)

3. Xác định y_B :

$$\begin{aligned} y_B &= (\overline{M}_k).(M_m) = \\ &= \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l^3}{3} > 0 \end{aligned}$$



H.4.28.b



H.4.28.c

* Ví dụ 2: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B (H.4.29.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.29.b)

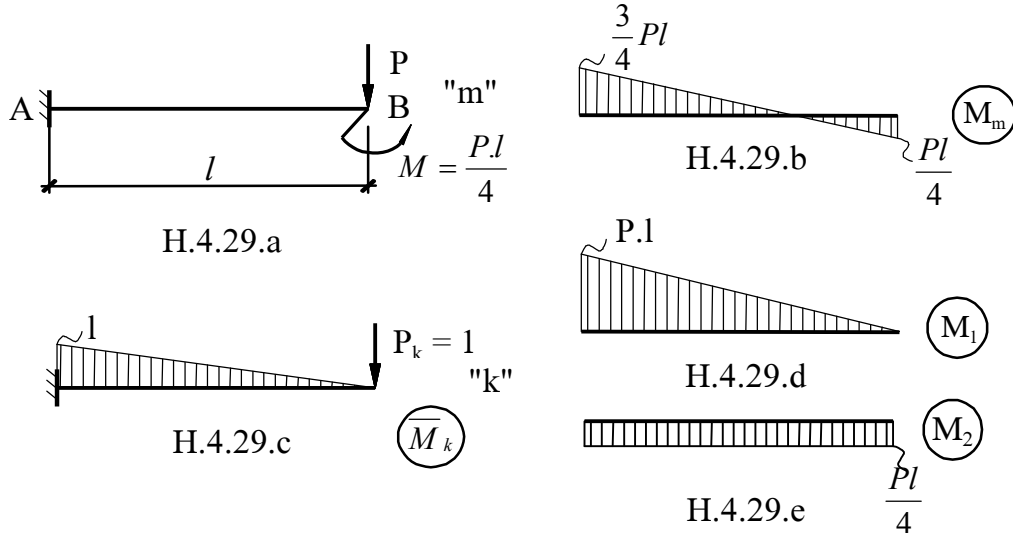
2. Trạng thái "k": Vẽ $(\bar{M}_k)$. Kết quả trên hình (H.4.29.c)

3. Xác định y_B :

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m)$$

Để dễ "nhân", ta phân tích (M_m) thành tổng của (M_1) với (M_2) như trên hình (H.4.29.d & H.4.29.e). Suy ra:

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m) = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot Pl - \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^2}{E.J} > 0$$



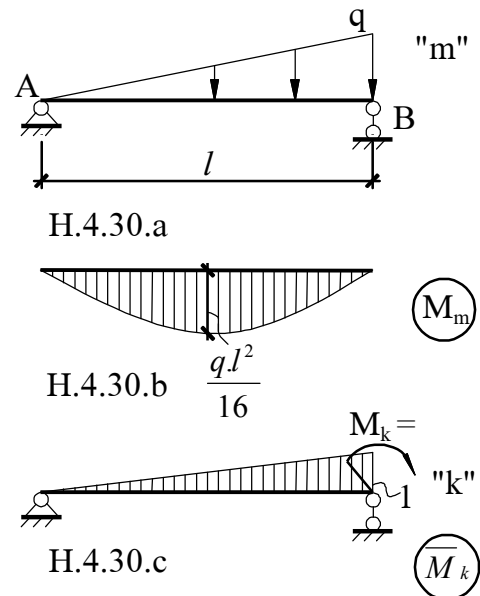
* Ví dụ 3: Xác định góc xoay tại B (H.4.30.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.30.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ $(\bar{M}_k)$. Kết quả trên hình (H.4.30.c)

3. Xác định ϕ_B :

$$\begin{aligned} \phi_B &= (\bar{M}_k).(M_m) = \\ &= -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot 1 = -\frac{ql^3}{45.E.J} < 0 \end{aligned}$$



* Ví dụ 4: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại k (H.4.31.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

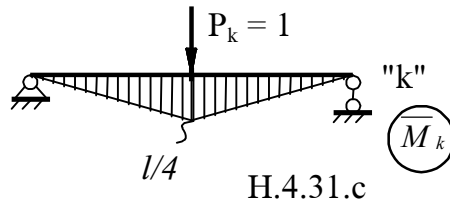
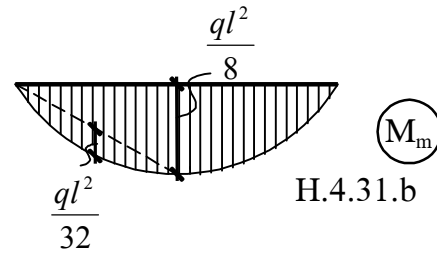
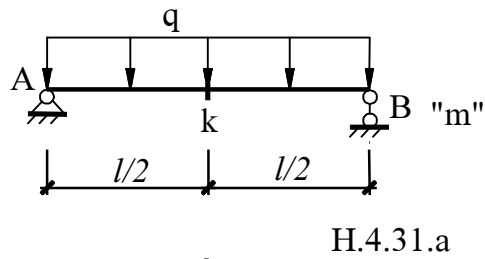
1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.31.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ $(\bar{M}_k)$. Kết quả trên hình (H.4.31.c)

3. Xác định y_k :

$$y_k = (\bar{M}_k).(M_m) =$$

$$= \frac{2}{E.J} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right] = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{E.J} > 0$$



§ 10. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI TIẾT DIỆN CỦA HỆ.

Khi hệ đàn hồi chịu tác dụng của các nguyên nhân ngoài thì các tiết diện trong hệ nói chung sẽ tồn tại chuyển vị. Bài toán chuyển vị của các tiết diện trong hệ ta đã giải quyết. Các chuyển vị này còn gọi là chuyển vị tuyệt đối.

Thế thì có một vấn đề đặt ra là giữa hai tiết diện của hệ chuyển vị so với nhau như thế nào?, bằng bao nhiêu?. Chuyển vị so với nhau giữa hai tiết diện theo một phương nào đó của hệ gọi là chuyển vị tương đối. Tương tự như chuyển vị tuyệt đối, chuyển vị tương đối cũng tồn tại chuyển vị thẳng và chuyển vị góc xoay tương đối.

Như vậy, nếu cần tìm chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện theo phương nào đó, ta chỉ cần tìm chuyển vị tuyệt đối theo phương đó cho từng tiết diện rồi lấy hiệu kết quả với nhau. Có nghĩa là trạng thái "k" cần tạo và tính hai lần. Qua phân tích ta dễ thấy thay vì vậy, có thể tạo trạng thái "k" một lần bằng cách đặt ngay một cặp lực $P_k = 1$ theo phương tìm chuyển vị, ngược chiều nhau ngay từ đầu. Và dĩ nhiên các quá trình xác định chuyển vị vẫn tiến hành như trường hợp tổng quát.

* Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện B & C theo phương nối liền hai điểm đó (H.4.32.a). Cho biết $E.J = \text{const}$ và như nhau cho tất cả các thanh. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

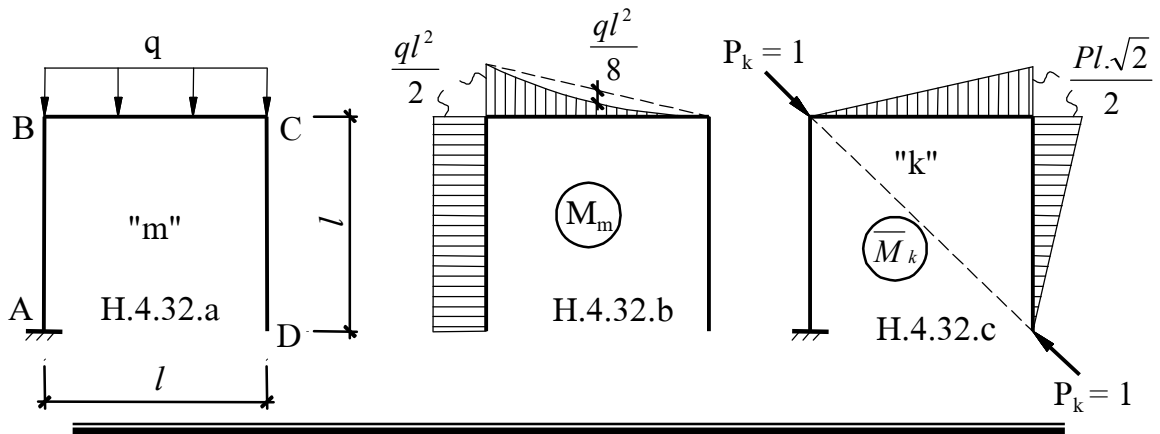
1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.32.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ $(\bar{M}_k)$. Kết quả trên hình (H.4.32.c)

3. Xác định Δ_{B-D} :

$$\Delta_{B-D} = (\bar{M}_k) \cdot (M_m) = -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{E.J} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{ql^3}{E.J} > 0$$

Chuyển vị thẳng hướng vào nhau.



**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA XÂY DỰNG DD & CN
BỘ MÔN KẾT CẤU CÔNG TRÌNH**

**GIÁO TRÌNH
CƠ HỌC KẾT CẤU II**



ĐÀ NẴNG 6 – 2007

CHƯƠNG 5: TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

§1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH - BẬC SIÊU TĨNH

I. Hệ siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, đó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

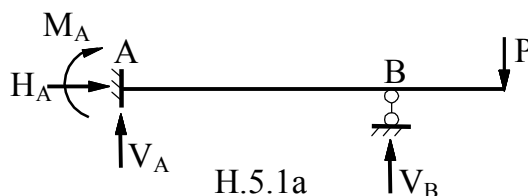
2. Ví dụ:

 Xét hệ trên hình (H.5.1a)

- Phần hệ BC là tĩnh định vì có thể xác định được ngay nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực V_A, H_A, M_A, V_B nhưng chỉ có 3 phương trình) nên cũng chưa thể xác định được nội lực.

Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.



II. Tính chất của hệ siêu tĩnh:

1. Tính chất 1:

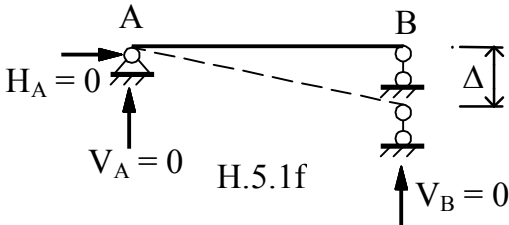
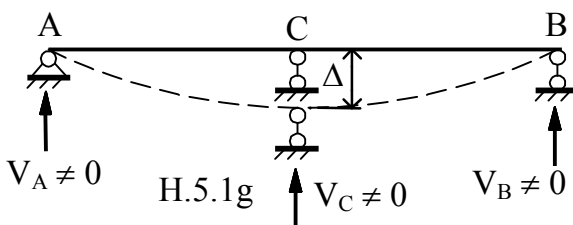
Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ có cùng kích thước và tải trọng tác dụng.

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
H.5.1b	H.5.1c
$ M _{\max} = \frac{ql^2}{8}, y_{\max} = y_C = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$ M _{\max} = \frac{ql^2}{12}, y_{\max} = y_C = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

2. Tính chất 2: Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân: biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo, lắp ráp không chính xác gây ra.

a. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
H.5.1d	H.5.1e

Các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện phản lực và nội lực.
b. Nguyên nhân chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:	
Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
	
Các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại gối B nên dầm chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B có xu hướng ngăn cản chuyển vị tại gối C làm cho dầm bị uốn cong do đó làm xuất hiện phản lực và nội lực

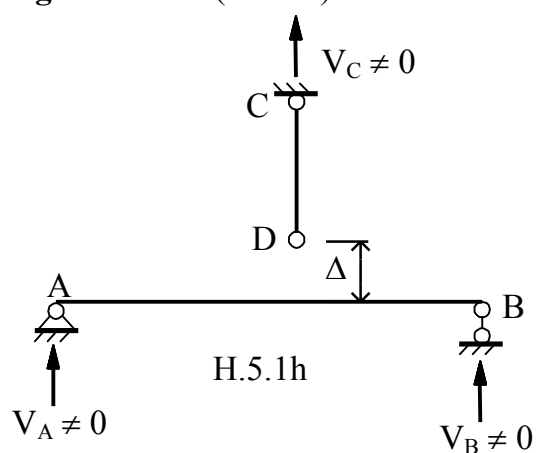
c. Nguyên nhân chế tạo, lắp ráp không chính xác:(H.5.1h)

Dầm tĩnh định AB nếu được ráp thêm thanh CD vào sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt 1 đoạn Δ thì khi ráp vào, nó sẽ bị kéo dẫn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ làm phát sinh phản lực và nội lực trong hệ.

3. Tính chất 3:

Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EJ, FF, GF...)

*Nhận xét: Hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.

**III. Bậc siêu tĩnh:**

1. Định nghĩa: Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu n

2. Cách xác định:

Có thể sử dụng các công thức liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và các liên kết giữa chúng trong phần cấu tạo hình học của hệ để xác định.

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D$$

(Cho hệ bất kỳ có nối đất)

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$$

(Cho hệ bất kỳ không nối đất)

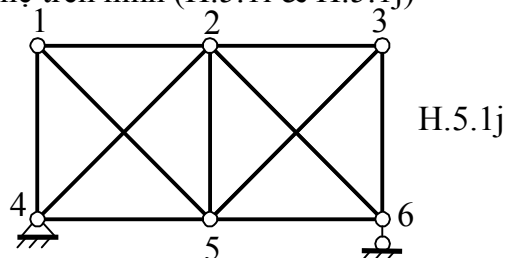
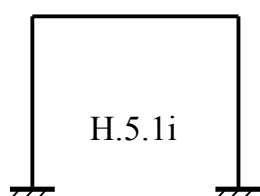
$$n = D - 2M + C$$

(Cho hệ dàn có nối đất)

$$n = D - 2M + 3$$

(Cho hệ dàn không nối đất)

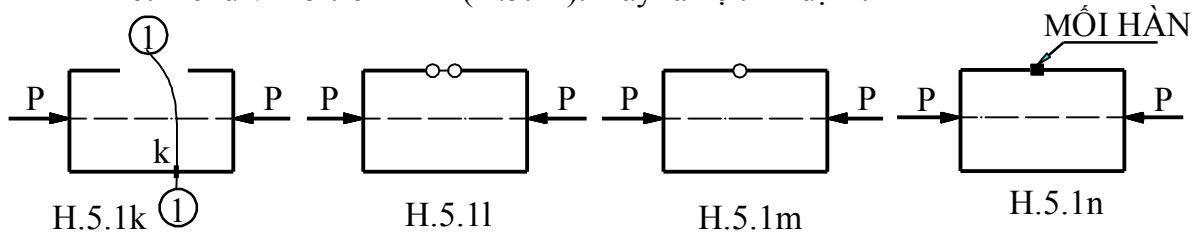
Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của hệ trên hình (H.5.1i & H.5.1j)



- Hệ trên hình (H.5.1i) có $n = 0 + 2.0 + 3.0 + 6 - 3.1 = 3$
- Hệ trên hình (H.5.1j) có $n = 11 - 2.6 + 3 = 2$.

Cách phân tích các chu vi kín của hệ:

Xét 1 chu vi hở trên hình (H.5.1k). Đây là hệ tĩnh định.

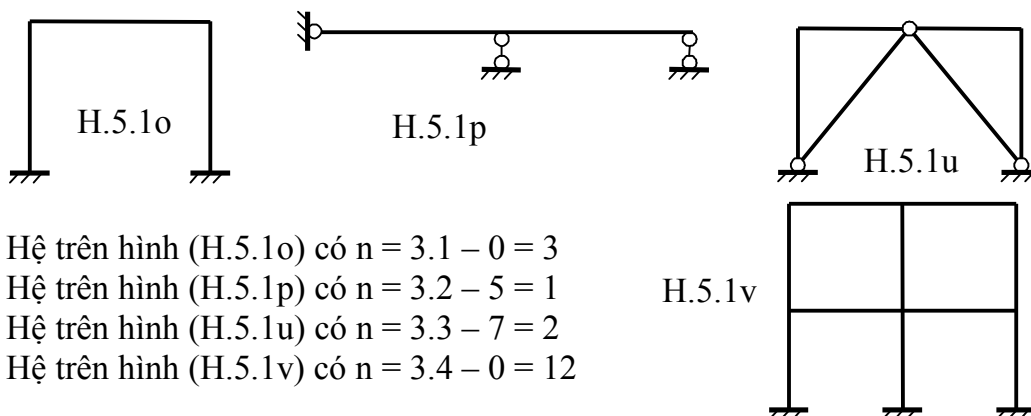


- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết thanh (H.5.1l) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 1 ($n = 1$).
- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết khớp (H.5.1m) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 2 ($n = 2$).
- Nếu nối chu vi đó bằng một liên kết hàn (H.5.1n) thì hệ thu được có bậc siêu tĩnh bằng 3 ($n = 3$). Hệ lúc này còn được gọi là chu vi kín.

Phân tích ngược lại ta thấy 1 chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng 3, nếu thêm vào 1 khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh sẽ giảm đi 1. Vậy nếu gọi V là số chu vi kín, K là số liên kết khớp đơn giản của hệ thì bậc siêu tĩnh của hệ được tính bằng công thức:

$$n = 3V - K \quad (5-1)$$

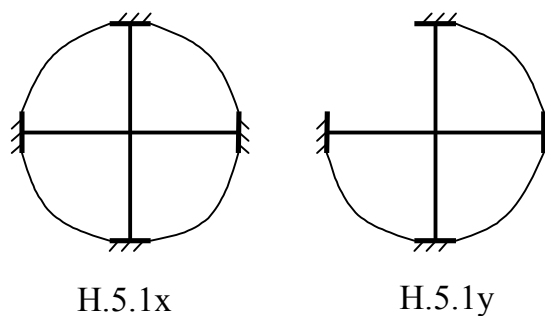
Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của các hệ cho trên hình vẽ bên dưới.



- Hệ trên hình (H.5.1o) có $n = 3.1 - 0 = 3$
- Hệ trên hình (H.5.1p) có $n = 3.2 - 5 = 1$
- Hệ trên hình (H.5.1u) có $n = 3.3 - 7 = 2$
- Hệ trên hình (H.5.1v) có $n = 3.4 - 0 = 12$

Chú ý: Cần quan niệm trái đất là 1 chu vi hở (miếng cứng tĩnh định) trong biểu thức (5 - 1)

Nếu quan niệm hệ gồm 4 chu vi kín như trên hình vẽ (H.5.1x) thì bậc siêu tĩnh của hệ $n = 12$. Đây là quan niệm sai vì trái đất tạo thành 1 chu vi kín. Quan niệm hệ gồm 3 chu vi kín như trên hình (H.5.1y) là quan niệm đúng. Và $n = 3.3 - 0 = 9$



S2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

I. Hệ cơ bản của phương pháp lực:

Hệ cơ bản của phương pháp lực là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách loại bỏ một số hay tất cả các liên kết thừa.

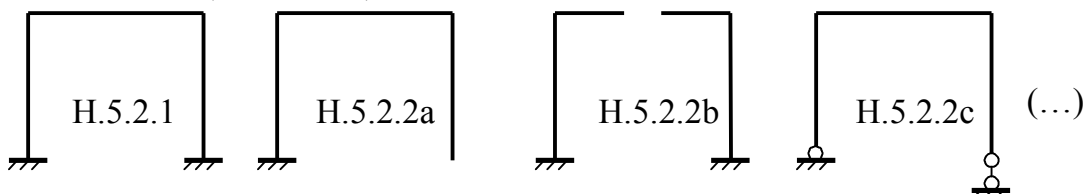
+ Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ tĩnh định. (thường sử dụng cách này)

+ Nếu loại bỏ một số các liên kết thừa thì hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản phải là hệ bất biến hình và nên thuận tiện cho việc tính toán.

Ví dụ: Lập hệ cơ bản phương pháp lực của hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.1)

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh $n = 3$. Với hệ cơ bản là tĩnh định có thể được tạo như trên các hình (H.5.2.2abc)



Nhận xét: Với một hệ siêu tĩnh đã cho, có thể có vô số hệ cơ bản được tạo ra.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực:

Khi tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính hệ cơ bản của nó. Tuy nhiên, hệ cơ bản và hệ ban đầu là có sự khác nhau. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu của nó ta cần so sánh và bổ sung thêm các điều kiện.

Ta đi so sánh hệ siêu tĩnh (H5.2.3) và hệ cơ bản của nó (H5.2.4)

Hệ siêu tĩnh	Hệ cơ bản
H.5.2.3	H.5.2.4
-Tại D tồn tại các phản lực $\{V_D, H_D, M_D\}$. -Tại D không tồn tại chuyển vị	-Tại D không tồn tại phản lực -Tại D nói chung là tồn tại chuyển vị $\{\Delta x_D, \Delta y_D, \Delta \varphi_D\}$

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

- + Đặt thêm vào D các lực (X_1, X_2, X_3) tương đương thay thế (H_D, V_D, M_D) .
- + Thiết lập điều kiện chuyển vị tại D do (X_1, X_2, X_3, P) gây ra bằng không:

$$\begin{cases} \Delta x_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta y_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta \varphi_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát: Cho hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng (P), biến thiên nhiệt độ (t), chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa (Z) và chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ n liên kết thừa. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm các lực ($X_1, X_2, \dots, X_n$) tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ, có chiều tùy ý. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số.

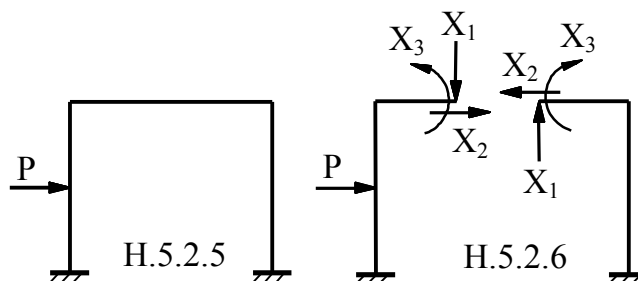
+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ do các nguyên nhân ($X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z$) = 0 (chính xác hơn là bằng như trên hệ siêu tĩnh ban đầu). Điều kiện này có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \\ \Delta X_2(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ \Delta X_n(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \quad (5-2)$$

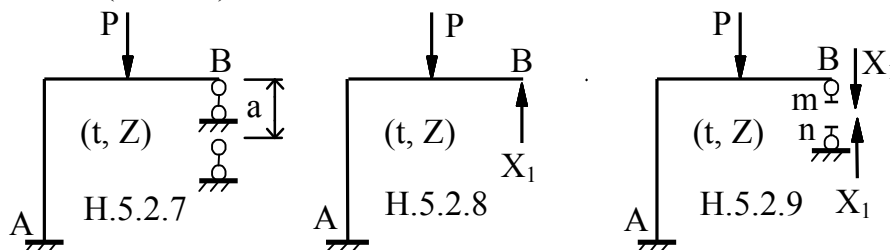
Hệ (5-2) gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực.

***Chú ý:**

- Nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng thì trên hệ cơ bản phải đặt vào những cặp lực trực đối nhau tại các liên kết bị loại bỏ và điều kiện chuyển vị chính là chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện 2 bên liên kết bị loại bỏ bằng không. Ví dụ hệ cơ bản (H.5.2.6) của hệ trên hình (H.5.2.5)



- Trường hợp liên kết trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức và khi tạo hệ cơ bản ta loại bỏ liên kết này. Ví dụ xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.7) và hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.2.8).



Lúc này chuyển vị tại B theo phương X_1 sẽ bằng chuyển vị cưỡng bức. Hệ phương trình cơ bản sẽ là:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = -a.$$

Lấy dấu âm trước a khi X_1 ngược chiều chuyển vị cưỡng bức.

- Cũng trong trường hợp chuyển vị cưỡng bức nhưng nếu tạo hệ cơ bản bằng cách bỏ liên kết này, ví dụ hệ cơ bản tạo trên hình (H.5.2.9).

Có thể xem đây là trường hợp loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng nên trên hệ cơ bản ta đặt thêm cặp X_1 . Dù rằng tại tiết diện bị cắt m, n có tồn tại chuyển vị do liên kết bị chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối của chúng theo phương X_1 vẫn bằng không nên hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = 0$$

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_k(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, khai triển:

$$\Delta X_k(X_1) + \Delta X_k(X_2) + \dots + \Delta X_k(X_n) + \Delta X_k(P) + \Delta X_k(t) + \Delta X_k(Z) = 0$$

Gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương X_k do riêng $X_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(X_m) = \delta_{km} \cdot X_m$$

Gọi Δ_{kp} , Δ_{kt} , Δ_{kZ} lần lượt là chuyển vị tương ứng vị trí và phương X_k do riêng P , t , Z gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(P) = \Delta_{kp}, \Delta X_k(t) = \Delta_{kt}, \Delta X_k(Z) = \Delta_{kZ}$$

Cho $m = \overline{1, n}$ và thay tất cả vào, ta được:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

Cho $k = \overline{1, n}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2Z} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nZ} = 0 \end{cases} \quad (5-3)$$

Hệ phương trình (5-3) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực với các ẩn số $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Trong đó:

δ_{kk} gọi là hệ số chính, $\delta_{kk} > 0$

δ_{km} ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $\delta_{km} = \delta_{mk}$

Δ_{kp} , Δ_{kt} , Δ_{kZ} là các số hạng tự do.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Như đã nói trong phần hệ phương trình chính tắc, ý nghĩa của các hệ số và các số hạng tự do là chuyển vị trên hệ cơ bản do các nguyên nhân tương ứng gây ra. Vậy việc xác định chúng là đi thực hiện bài toán tìm chuyển vị.

1. Hệ số chính và phụ: (δ_{km})

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu nguyên nhân $X_m = 1$. Xác định nội lực $\overline{M}_m, \overline{N}_m, \overline{Q}_m$

+ Tạo trạng thái "k": đặt lực $P_k = 1$ tương ứng phương và vị trí của lực X_k trên hệ cơ bản. Xác định nội lực $\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$. Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \cdot \frac{\overline{M}_m}{EJ} ds + \sum \int \overline{N}_k \cdot \frac{\overline{N}_m}{EF} ds + \sum \int v \overline{Q}_k \cdot \frac{\overline{Q}_m}{GF} ds \quad (5-4)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\delta_{km} = (\overline{M}_m)(\overline{M}_k) + (\overline{N}_m)(\overline{N}_k) + (\overline{Q}_m)(\overline{Q}_k) \quad (5-5)$$

2. Số hạng tự do:**a. Do tải trọng: (Δ_{kp})**

+ Trạng thái "m": Tính hệ cơ bản chịu tải trọng. Xác định nội lực: M_P^o, N_P^o, Q_P^o

+ Tạo trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km} .

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kP} = \sum \int \bar{M}_k \cdot \frac{M_P^o}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \cdot \frac{N_P^o}{EF} ds + \sum \int \bar{Q}_k \cdot \frac{Q_P^o}{GF} ds \quad (5-6)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kP} = (\bar{M}_m)(M_P^o) + (\bar{N}_m)(N_P^o) + (\bar{Q}_m)(Q_P^o) \quad (5-7)$$

b. Do biến thiên nhiệt độ (Δ_{kt}):

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này sẽ không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+ Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kt} = \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} \bar{N}_k ds \quad (5-8)$$

Trong trường hợp α , h , t_{2m} , t_{1m} , $t_{cm} = \text{const}$ trên từng đoạn thanh thì:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k) \quad (5-9)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

c. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{kz})

- Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

- Trạng thái "k": tương tự khi xác định δ_{km} , nhưng chỉ xác định $\bar{R}_{jk}$.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kz} = - \sum \bar{R}_{jk} \cdot Z_j \quad (5-10)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

**Chú ý*: Nếu lực X_k lấy bằng 1 thì có thể lấy X_k thay thế cho $P_k = 1$ khi tạo trạng thái "k" để xác định các hệ số.

V. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh:

a. Cách tính trực tiếp:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số X_k ($k = \overline{1, n}$), ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng lên hệ cơ bản cùng với các nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu. Giải hệ cơ bản chịu các nguyên nhân này sẽ tìm được các nội lực của hệ. Vì hệ cơ bản thường là hệ tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để tìm nội lực.

b. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

Xét 1 đại lượng nghiên cứu S nào đó (nội lực, phản lực, chuyển vị, biểu đồ nội lực...). Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta có thể thay thế việc xác định S trên hệ siêu tĩnh bằng cách xác định đại lượng S trên hệ cơ bản chịu nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu và các lực X_k đồng thời tác dụng.

$$S = S(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S(X_1) + S(X_2) + \dots + S(X_n) + S(P) + S(t) + S(Z)$$

Gọi $\bar{S}_k$ là đại lượng S do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$S(X_k) = \bar{S}_k \cdot X_k$$

Gọi S_p^o, S_t^o, S_z^o lần lượt là đại lượng S do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, thế thì:

$$S(P) = S_p^o, S(t) = S_t^o, S(Z) = S_z^o$$

Cho $k = \overline{1, n}$ thay tất cả vào ta được:

$$S = \overline{S}_1.X_1 + \overline{S}_2.X_2 + \dots + \overline{S}_n.X_n + S_p^o + S_t^o + S_z^o \quad (5-11)$$

Chú ý:

- Đại lượng S có thể được xác định ngay nếu có sẵn $\overline{S}_k, S_p^o, S_t^o, S_z^o$
- Nếu đại lượng S là phản lực hay nội lực và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_p^o, S_t^o, S_z^o sẽ không tồn tại.

Sau đây ta sẽ vận dụng biểu thức (5-11) để vẽ các biểu đồ nội lực.

a. Biểu đồ mômen uốn (M):

Đối với những hệ dầm và khung gồm những thanh thẳng, trong các bước tính toán trung gian, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị. Do đó, khi xác định các hệ số người ta không vẽ các biểu đồ (Q), (N) mà chỉ vẽ biểu đồ mômen (M). Trong những trường hợp này, biểu đồ mômen của hệ được vẽ theo biểu thức (5-11) là tiện lợi nhất. Thay đại lượng S bằng biểu đồ (M) ta được:

$$(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + \dots + (\overline{M}_n).X_n + (M_p^o) + (M_t^o) + (M_z^o) \quad (5-12)$$

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

Như phân tích trên, sẽ không thuận lợi nếu vẽ biểu đồ (Q) theo biểu thức (5-11). Sau đây sẽ trình bày cách vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ (M) đã vẽ. Để tiện lợi cho việc áp dụng, ta đi thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở 2 đầu 1 đoạn thanh thẳng ab tách ra từ hệ chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo 1 phương bất kỳ và có qui luật bất kỳ như trên hình vẽ (H.5.2.10)

Tải trọng tác dụng được mô tả trên (H.5.2.10). Trong đó q, M^{tr}, M^{ph} đã biết, $Q^{tr}, N^{tr}, Q^{ph}, N^{ph}$ chưa biết, giả thiết có chiều dương theo vị trí người quan sát nhìn sao cho tải trọng phân bố q hướng xuống.

Từ các điều kiện cân bằng mômen với điểm b và a, ta suy ra:

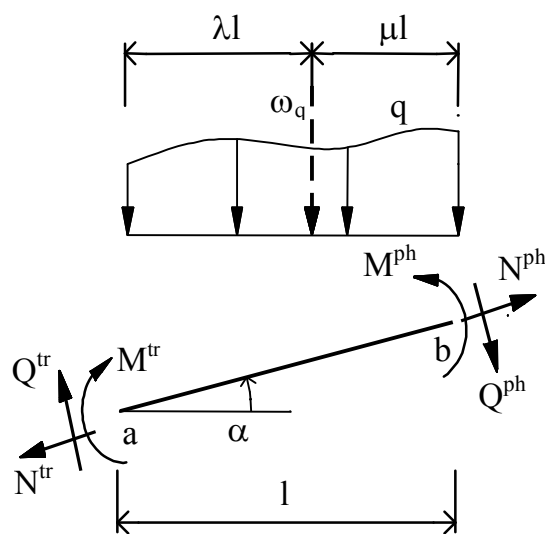
$$\begin{aligned} Q^{tr} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \mu \cdot \omega_q \cos \alpha \\ Q^{ph} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \lambda \cdot \omega_q \cos \alpha \end{aligned} \quad (5-13)$$

Trong đó:

ω_q : là hợp lực của tải phân bố q trên đoạn thanh ab.

$\lambda l, \mu l$: lần lượt là khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và phải của thanh ab theo phương nằm ngang.

Nếu tải trọng tác dụng lên thanh ab là phân bố đều:



H.5.2.10

$$q = \text{const thì } \omega_q = ql, \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Thay vào biểu thức (5-13)

$$\begin{aligned} Q^{tr} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \frac{1}{2} ql \cos \alpha \\ Q^{ph} &= \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \frac{1}{2} ql \cos \alpha \end{aligned} \quad (5-14)$$

Nếu trên đoạn thanh ab không chịu tải trọng: $q = 0$ thì $\omega_q = 0$. Thay vào biểu thức (5-13):

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha \quad (5-15)$$

Sau khi xác định được lực cắt từ hai đầu mỗi đoạn thanh cũng chính là tại các tiết diện đặc trưng, tiến hành vẽ biểu đồ lực cắt dựa vào dạng đường của nó như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

c. Biểu đồ lực dọc:

Cũng tương tự cho biểu đồ (Q), biểu đồ lực dọc (N) được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ lực cắt. Cách thực hiện như sau:

Tách và xét cân bằng hình chiếu cho mỗi nút của hệ sao cho tại mỗi nút có không quá 2 lực dọc chưa biết. Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng tác dụng lên nút còn có nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút bao gồm: mômen uốn (đã biết nhưng không cần quan tâm), lực cắt (đã biết, lấy trên biểu đồ lực cắt), lực dọc (chưa biết, giả thiết có chiều dương)

Ngoài ra, khi xác định lực dọc cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa lực dọc tại hai đầu thanh từ điều kiện của thanh được vẽ trên hình (H.5.2.10).

$$N^{ph} = N^{tr} + \omega_q \cdot \sin \alpha \quad (5-16)$$

Từ phương trình (5-16) cho thấy nếu trên đoạn thanh không chịu tải trọng hoặc tải trọng tác dụng vuông góc với trục thanh thì lực dọc tại 2 đầu sẽ bằng nhau và cùng gây kéo hoặc gây nén.

Sau khi xác định được lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn thanh, tiến hành vẽ biểu đồ lực dọc như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

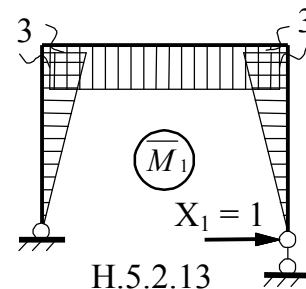
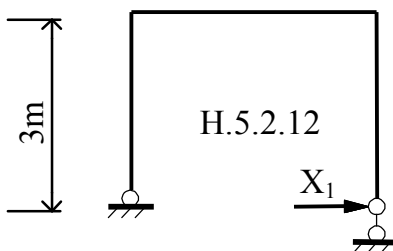
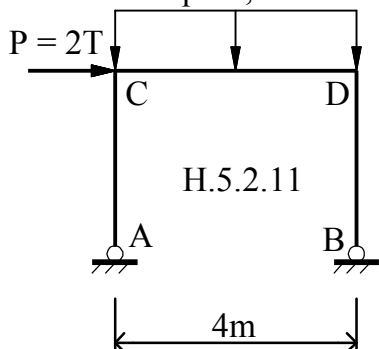
CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP LỰC

Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình (H.5.2.11). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là EJ, trong thanh ngang là 2EJ. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3.1 - 2 = 1$$

$$q = 1,2T/m$$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.12)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính

tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (M_p^o)$: (H.5.2.13 & 14)

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1).(\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3.4.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\bar{M}_1).(M_p^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{6.4}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4.2.4 \right] \cdot 3 = \frac{45,6}{EJ}$$

Thay vào phương trình chính tắc:

$$\frac{36}{EJ} \cdot X_1 + \frac{45,6}{EJ} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-45,6}{36} = -1,266 < 0$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1).X_1 + (M_p^o)$

$(\bar{M}_1).X_1$: lấy tung độ trên biểu đồ $(\bar{M}_1)$ nhân với giá trị $X_1 = -1,266$. Dấu "-" có nghĩa là ta phải đổi dấu của tung độ sau khi nhân vào. Kết quả trên hình vẽ (H5.2.15). Sau đó lấy tổng đại số các tung độ trên 2 biểu đồ $(\bar{M}_1).X_1$ và (M_p^o) sẽ được biểu đồ (M) . Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.16)

b. Lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ (M) - Trên đoạn AC: $q = 0$

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha = \frac{2,2 - 0}{3} \cdot 1 = 0,733$$

- Trên đoạn BD: $q = 0$

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha = \frac{3,8 - 0}{3} \cdot 1 = 1,266$$

- Trên đoạn CD: $q = \text{const}$

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \frac{1}{2} q l \cos \alpha = \frac{-3,8 - (2,2)}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,2.4 = 0,9$$

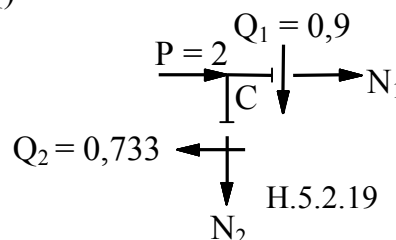
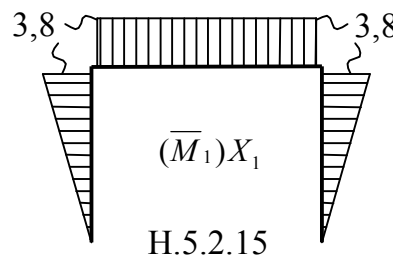
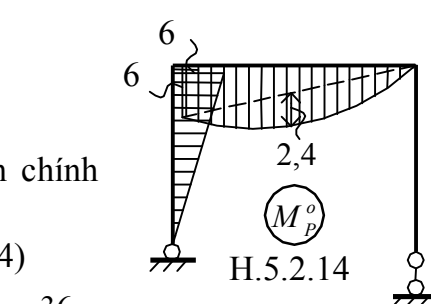
$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \frac{1}{2} q l \cos \alpha = \frac{-3,8 - (2,2)}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,2.4 = -3,9$$

Dựng các tung độ vừa tính và vẽ biểu đồ (Q) như trên hình vẽ (H5.2.17)c. Lực dọc: Suy ra từ các biểu đồ lực cắt: (Q)

- Tách nút C:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \rightarrow N_1 = Q_2 - P = -1,266 \\ \sum Y = 0 \rightarrow N_2 = -Q_1 = -0,9 \end{cases}$$

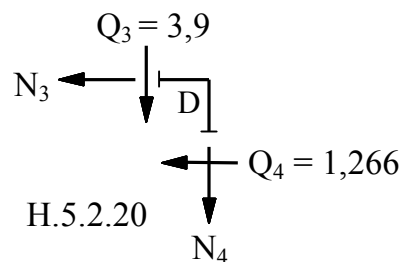
- Tách D:



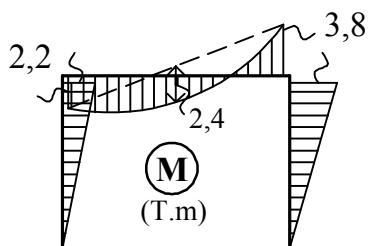
$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \rightarrow N_3 = -Q_4 = -1,266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_4 = -Q_3 = -3,9 \end{cases}$$

N_1 giống N_3 theo quan hệ lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn. Suy ra lực dọc tại A và C theo N_2 và N_4 .

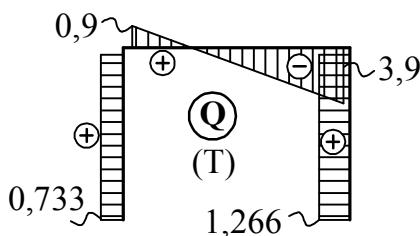
Kết quả biểu đồ (N) được vẽ trên hình vẽ (H5.2.18)



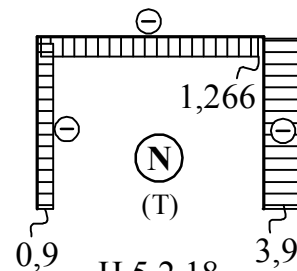
H.5.2.20



H.5.2.16

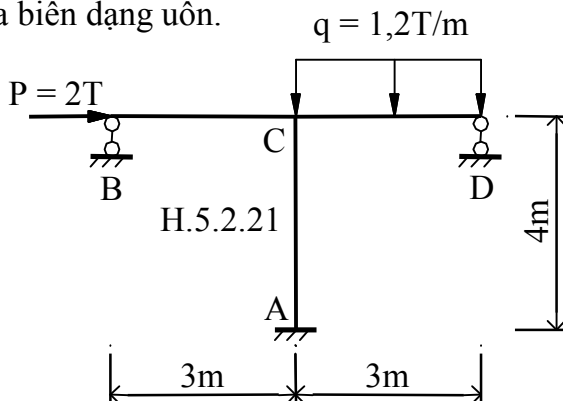


H.5.2.17

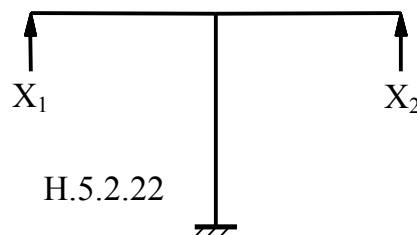


H.5.2.18

Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.5.2.21). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là $2EJ$, trong các thanh ngang là EJ . Chỉ xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.5.2.21



H.5.2.22

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

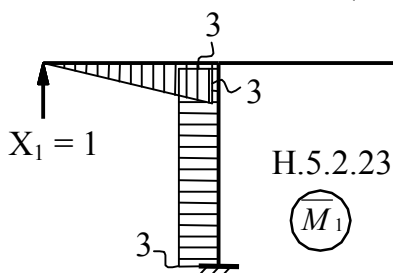
- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.22)

- Hệ phương trình chính tắc:

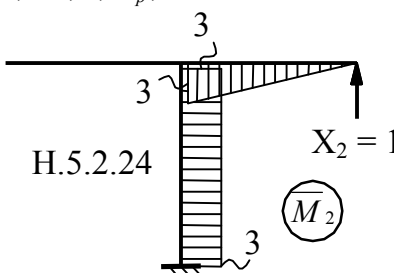
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

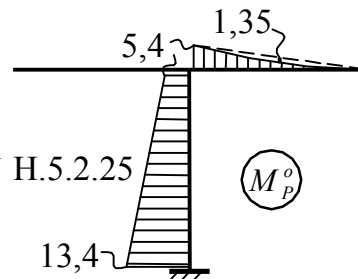
- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_p^o)$



H.5.2.23



H.5.2.24



H.5.2.25

- Xác định các hệ số:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3.4.3 = \frac{27}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{2EJ} \cdot 3.4.3 = -\frac{18}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \delta_{11} = \frac{27}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{13,4 + 5,4}{2} \cdot 4.3 = \frac{56,4}{EJ}$$

$$\Delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\Delta_{1P} - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5,4.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3.1.35 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{68,55}{EJ}$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc sau khi đã bỏ đi EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 27.X_1 - 18.X_2 + 56,4 = 0 \\ -18.X_1 + 27.X_2 - 68,55 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra được } \begin{cases} X_1 = -0,713 < 0 \\ X_2 = 2,063 > 0 \end{cases}$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1).X_1 + (\bar{M}_2).X_2 + (M_P^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.28)

b. Lực cắt: Suy ra từ biểu đồ (M)

- Trên đoạn BC: $q = 0$

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{-2,139 - 0}{3} \cdot 1 = -0,713$$

- Trên đoạn AC: $q = 0$

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{2,928 - (-5,072)}{4} \cdot 1 = 2$$

- Trên đoạn CD: $q = \text{const.}$

$$Q^{tr} = \frac{0 - 0,789}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,2.3.1 = 1,537$$

$$Q^{ph} = \frac{0 - 0,789}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,2.3.1 = -2,063$$

Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.29)

c. Lực dọc (N): Suy ra từ

biểu đồ (Q)

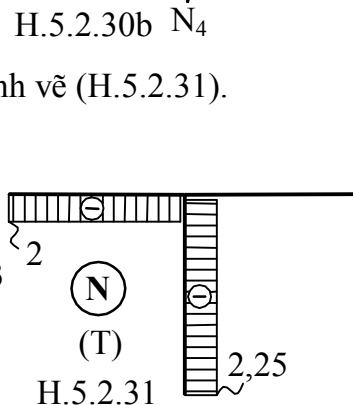
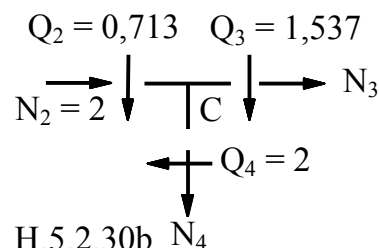
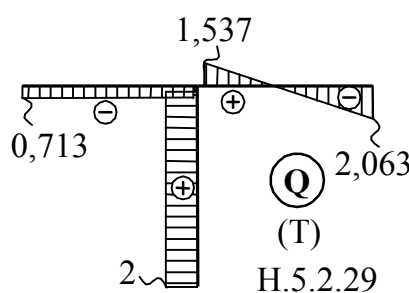
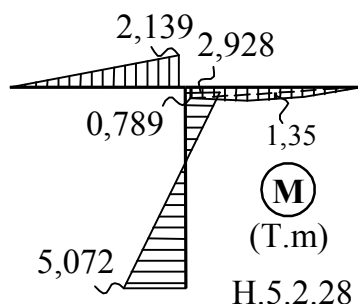
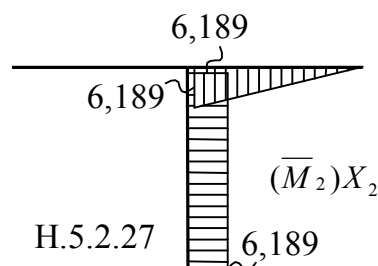
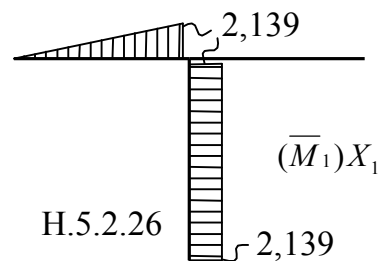
* Tách và xét cân bằng

B.

* Tách và xét cân bằng

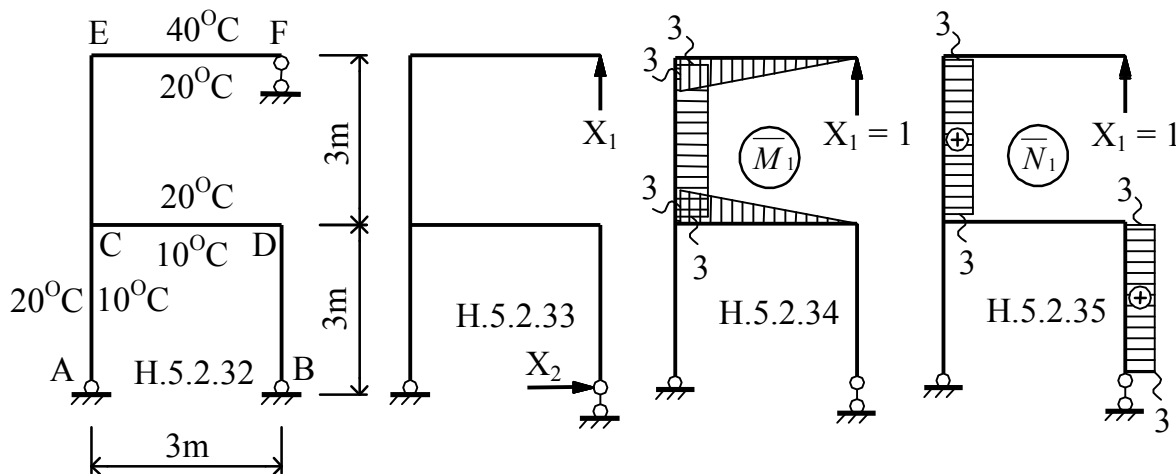
C.

Sau đó suy ra lực dọc tại các đầu thanh còn lại và vẽ được biểu đồ (N) như trên hình vẽ (H.5.2.31).



Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình vẽ (H.5.2.32).

Số liệu: $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \text{C}^{-1}$; thanh ngang có độ cứng $2EJ$, $h = 0,4\text{m}$; thanh đứng là EJ , $h = 0,3\text{m}$; $EJ = 1080\text{T.m}^2$



1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3K - V = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.33).

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

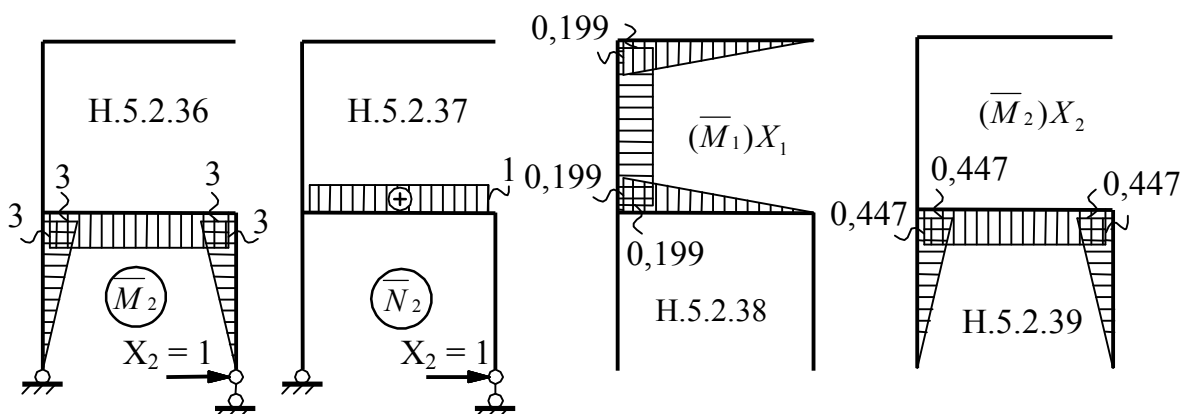
- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{N}_1), (\bar{M}_2), (\bar{N}_2)$

Kết quả thể hiện trên các hình vẽ (H.5.2.34 $\rightarrow$ H.2.2.37)

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 3 = -\frac{27}{4EJ} = \frac{-6,25}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \left[\frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{31,5}{EJ}$$



$$\Delta_{1t} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_1) + \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega(\bar{N}_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)\left(-\frac{3,3}{2}\right) + \frac{\alpha}{0,4}(20-40)\left(+\frac{3,3}{2}\right) = -112,5\alpha = -0,00135$$

$$\Delta_{2t} = \Sigma \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\bar{M}_2) + \Sigma \alpha t_c \cdot \Omega(\bar{N}_2)$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(3,3) + \frac{\alpha}{0,3}(10-20)\left(\frac{3,3}{2}\right) + \alpha \cdot \frac{10+20}{2} \cdot (1,3) = -330\alpha = -0,00396$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{36}{EJ} \cdot X_1 - \frac{6,25}{EJ} X_2 - 0,00135 = 0 \\ -\frac{6,25}{EJ} \cdot X_1 - \frac{31,5}{EJ} X_2 - 0,00396 = 0 \end{cases} \quad \text{Thay } EJ = 1080 \text{ vào, giải ra } \begin{cases} X_1 = 0,0663 \\ X_2 = 0,148 \end{cases}$$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (\bar{M}_2) \cdot X_2$

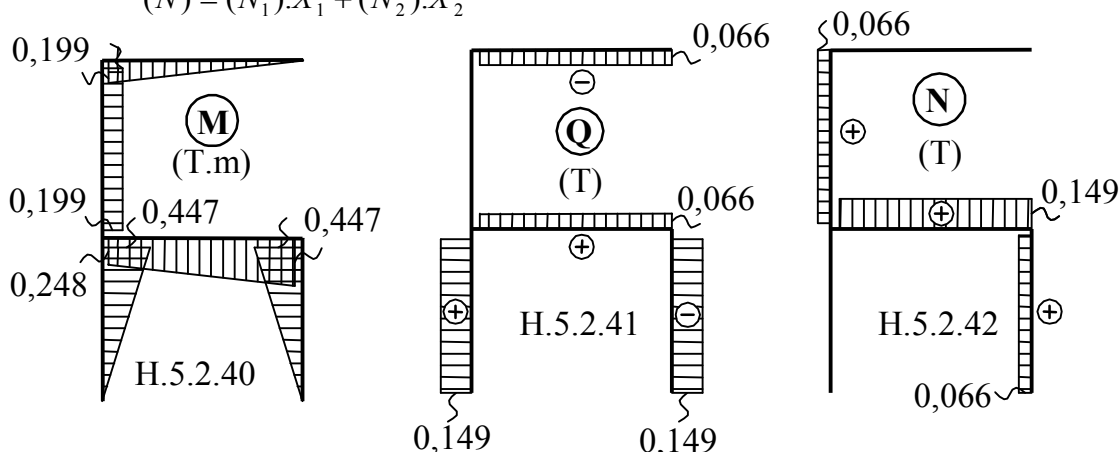
Ở đây $(M_p^o), (M_t^o), (M_z^o)$ không tồn tại

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.40)

b. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: tương tự ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.41 & H.5.2.42).

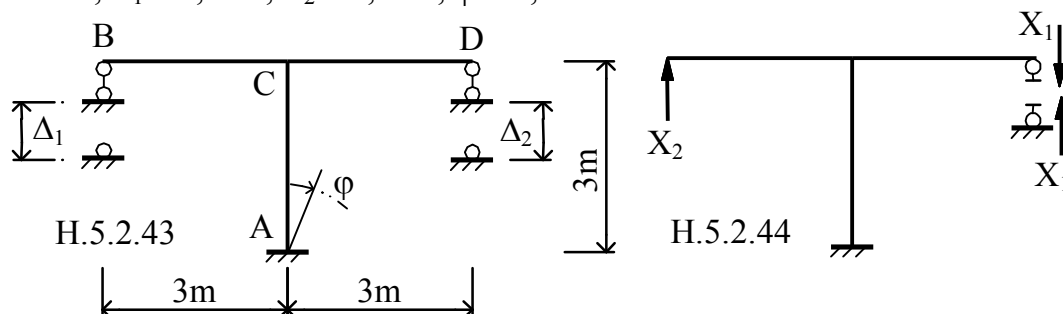
* *Chú ý:* Ở đây có thể vẽ ngay biểu đồ (N) bằng cách:

$$(N) = (\bar{N}_1) \cdot X_1 + (\bar{N}_2) \cdot X_2$$



Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.5.2.43).

Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là EJ, thanh đứng là 2EJ và EJ = 1080T.m², $\Delta_1 = 0,03\text{m}$, $\Delta_2 = 0,02\text{m}$, $\varphi = 0,005\text{radian}$



1. Bậc siêu tĩnh: $n = 3V - K = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

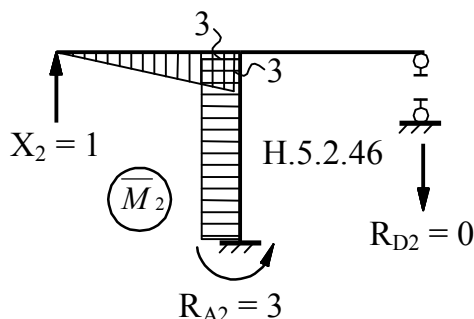
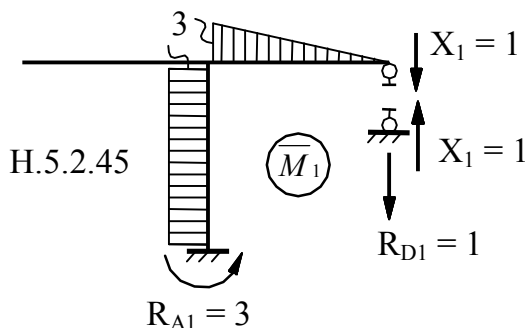
- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.44)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1Z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2Z} = -\Delta_1 = -0,03 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\bar{M}_1)(\bar{M}_2)$, xác định các $\bar{R}_{jk}$. Xem hình (H.5.2.45 & H.5.2.46).



$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{22,5}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{13,5}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{22,5}{EJ}$$

$$\Delta_{1Z} = -\sum \bar{R}_{j1} \cdot Z_j = -[\bar{R}_{A1} \cdot \varphi + \bar{R}_{D1} \cdot \Delta_2] = -[-3,0,005 + 1,0,02] = -0,005$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum \bar{R}_{j2} \cdot Z_j = -[\bar{R}_{A2} \cdot \varphi + \bar{R}_{D2} \cdot \Delta_2] = -[-3,0,05 + 0,0,02] = 0,015$$

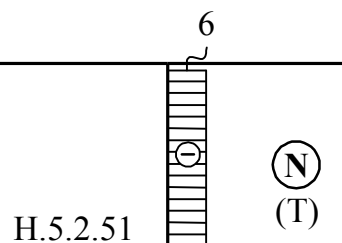
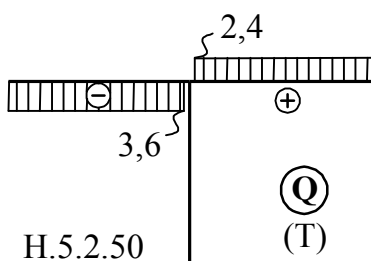
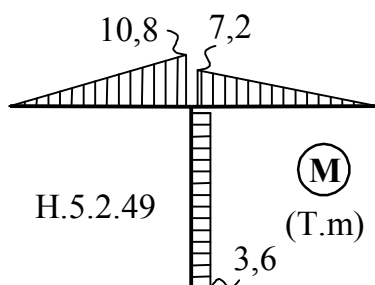
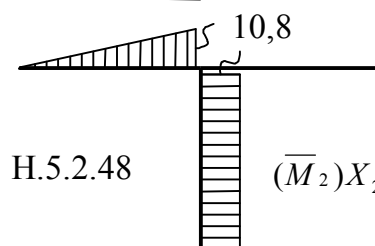
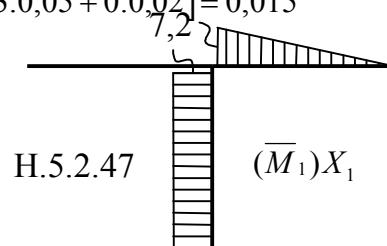
Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{22,5}{EJ} \cdot X_1 + \frac{13,5}{EJ} \cdot X_2 - 0,005 = 0 \\ \frac{13,5}{EJ} \cdot X_1 + \frac{22,5}{EJ} \cdot X_2 + 0,015 = -0,03 \end{cases}$$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

- Biểu đồ momen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (\bar{M}_2) \cdot X_2$

- Biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc (N): vẽ giống các ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.50 & H.5.2.51).



§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

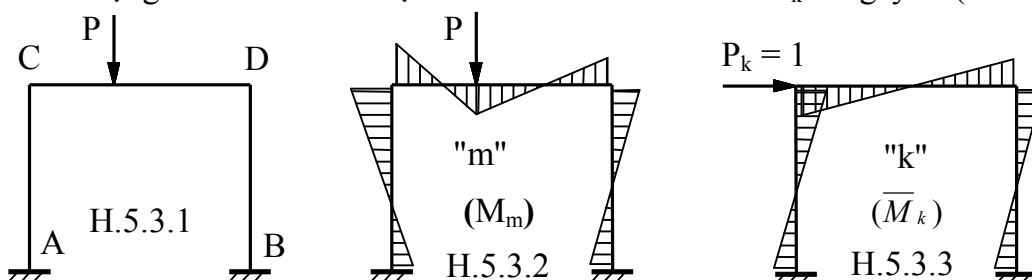
I. Nguyên tắc chung:

Công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh là công thức tổng quát áp dụng cho cả hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh. Trong công thức này, ta phải tính hệ với 2 trạng thái:

- Trạng thái "m": là trạng thái ban đầu của hệ.
- Trạng thái "k": được tạo ra bằng cách đặt lực $P_k = 1$ tương ứng với vị trí và phương chuyển vị ở trên sơ đồ tính ban đầu của hệ.

Chẳng hạn, để xác định chuyển vị ngang tại C của hệ trên hình H.5.3.1

- Ở trạng thái "m" ta tính hệ siêu tĩnh ban đầu (H.5.3.2)
- Ở trạng thái "k" ta tính hệ siêu tĩnh đó 1 lần nữa do $P_k = 1$ gây ra (H.5.3.3)



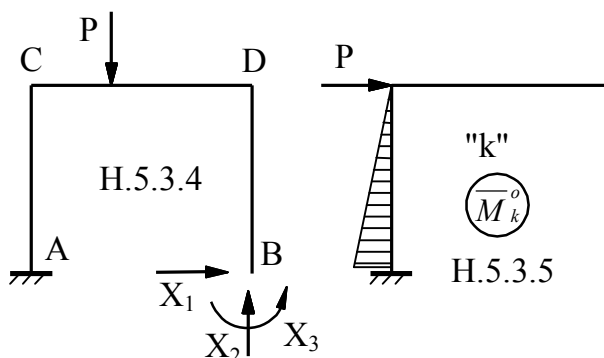
Sau khi tính giải nội lực, thực hiện công thức Morh hoặc nhân biểu đồ Vêrêxaghin sẽ được kết quả.

Nhận xét: Ta phải tính hệ siêu tĩnh 2 lần, khối lượng tính toán nặng nề.

II. Cách sử dụng hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta phân tích cho bài toán xác định chuyển vị của hệ trên hình (H.5.3.1). Giả sử chọn hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.3.4). (X_1 , X_2 , X_3) là nghiệm của hệ phương trình chính tắc.

Khi giải hệ trên hình (H.5.3.1) bằng hệ cơ bản trên hình (H.5.3.4) thì 2 hệ này là tương đương nhau. Nghĩa là nội lực, biến dạng và chuyển vị của 2 hệ là như nhau. Ta thử đi tìm chuyển vị trên hệ cơ bản. Để tìm chuyển vị trên hình (H.5.3.4), ở trạng thái "m" ta cũng cần phải giải tìm X_1 , X_2 , X_3 , nghĩa là tương đương với trạng thái "m" trên hình (H.5.3.2). Tuy nhiên ở trạng thái "k" được tạo ra trên (H.5.3.5) thì tính khá dễ dàng



vì là hệ tĩnh định. Lúc này, nội lực ở trạng thái "k" được ký hiệu: $\bar{M}_k^o$, $\bar{N}_k^o$, $\bar{Q}_k^o$

Vậy, khi tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, ta tạo trạng thái k trên hệ cơ bản thay vì trên hệ siêu tĩnh ban đầu. Biểu thức Maxwell-Morh trong trường hợp hệ chịu các nguyên nhân (P , t , Z):

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k^o M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k^o N_m}{EF} ds + \sum \int v \frac{\bar{Q}_k^o Q_m}{EJ} ds - \sum \bar{R}_{jk}^o Z_{jm} + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k^o ds + \sum \int \alpha t_{cm} \bar{N}_k^o ds \quad (5-17)$$

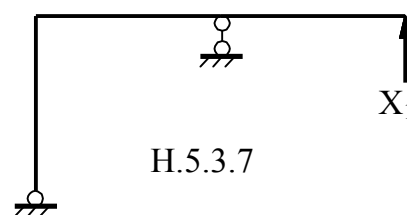
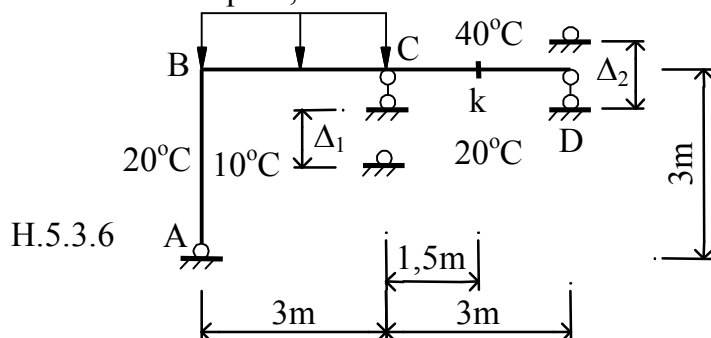
$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k^o)(\overline{M}_m) + (\overline{N}_k^o)(\overline{N}_m) + (\overline{Q}_k^o)(\overline{Q}_m)$$

$$+ \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k^o) + \Sigma \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k^o) \quad (5-18)$$

* *Chú ý:*

- Vì có nhiều cách tạo hệ cơ bản nên trạng thái "k" sẽ có nhiều sơ đồ tính, ta nên chọn hệ cơ bản để tạo sao cho việc tính toán và nhân biểu đồ được dễ dàng.

Cho $\alpha = 1,2.10^{-5} (^{\circ}\text{C}^{-1})$, độ cứng chống uốn trong thanh ngang là $2EJ$, trong thanh đứng là EJ ; chiều cao thanh ngang là $h = 0,4\text{m}$; thanh đứng là $h = 0,3\text{m}$; $EJ = 1080\text{T.m}^2$; $\Delta_1 = 0,02\text{m}$; $\Delta_2 = 0,03\text{m}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

$$q = 2,4 \text{ T/m}$$


- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.3.7)

- Hệ phương trình chính tắc:

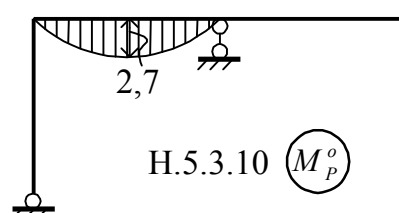
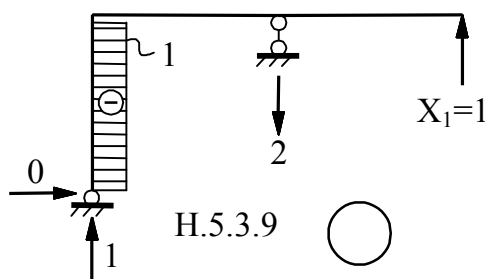
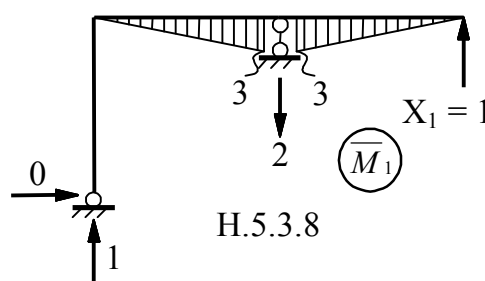
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0,03$$

-Vẽ $(\bar{M}_1), (\bar{N}_1), (M_p^o)$, xác định các $\bar{R}_{i1}$.

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 = \frac{9}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3.27 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{4,05}{EJ}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1r} &= \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_1) + \Sigma \alpha \cdot t_c \cdot \Omega(\bar{N}_1) \\ &= \frac{\alpha}{0,4} (10 - 20) \left(-\frac{3,3}{2}\right) + \frac{\alpha}{0,4} (20 - 40) \left(-\frac{3,3}{2}\right) \\ &= -112,5\alpha = -0,00135\end{aligned}$$



$$\Delta_{lt} = -\Sigma \bar{R}_{j1} \cdot Z_{jm} = -[\bar{R}_{c1} \cdot \Delta_1] = -[2.0,02] = -0,04$$

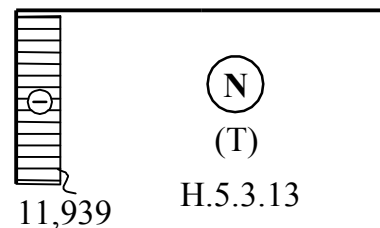
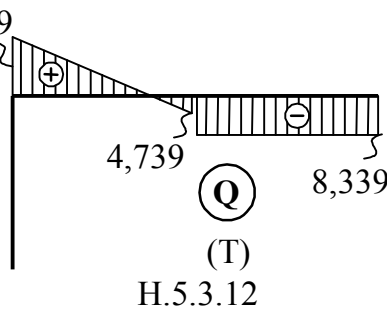
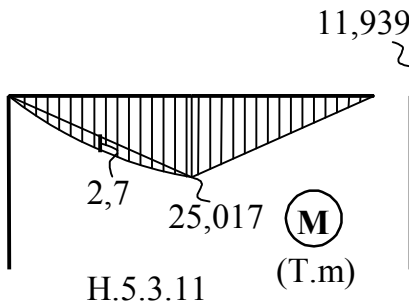
$$\text{Thay vào: } \frac{9X_1}{EJ} + \frac{4,05}{EJ} = -0,00324 - 0,04 = 0,03$$

Thay EJ và giải $X_1 = 8,339 > 0$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (M_p^o)$

Lực cắt và lực dọc: Tương tự các ví dụ trên. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.3.12 & H.5.3.13).

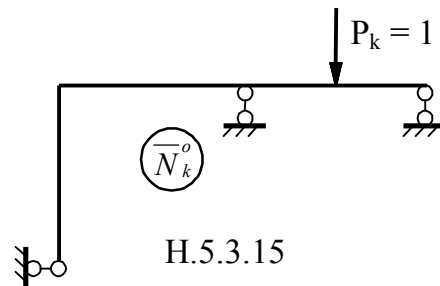
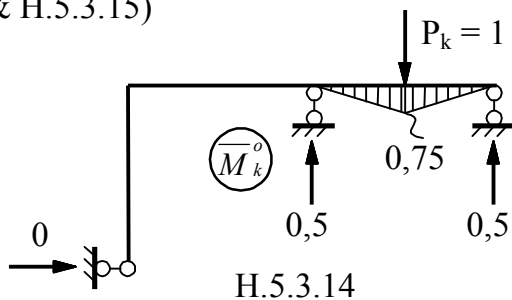


5. Xác định chuyển vị đứng tại k:

- Trạng thái "m": Biểu đồ mômen (M_m) đã vẽ ở trên.

- Trạng thái "k": vẽ $(\bar{M}_k^o), (\bar{N}_k^o)$ trên 1 hệ cơ bản chọn như trên hình (H.5.3.14

& H.5.3.15)



- Xác định chuyển vị đứng tại k:

$$\begin{aligned} y_k &= (\bar{M}_k^o)(M_m) - \Sigma \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega (\bar{M}_k^o) + \Sigma \alpha t_{cm} \Omega (\bar{N}_k^o) \\ &= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{0,75 \cdot 3}{2} \cdot \frac{25,017}{2} - [-0,5 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,03] + \frac{\alpha}{0,4} (20 - 40) \left(\frac{0,75 \cdot 3}{2} \right) \\ &= \frac{7,036}{EJ} - 0,005 - \frac{22,5\alpha}{0,4} = 0,839(mm) > 0 \end{aligned}$$

§4. KIỂM TRA KẾT QUẢ TÍNH TOÁN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Do phải thực hiện nhiều phép tính trung gian khi giải hệ siêu tĩnh nên dễ mắc phải những sai số lớn hoặc sai lầm trong kết quả cuối cùng. Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Để tránh những sai lầm ta cần kiểm tra kết quả.

I. Kiểm tra quá trình tính toán:

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị ($\bar{M}_k$) và biểu đồ (M_p^o):

- Sử dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng phần hệ tách ra để kiểm tra.

- Vẽ biểu đồ ($\bar{M}_s$) do các lực $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Kiểm tra mối quan hệ:

$$(\bar{M}_s) \equiv (\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_n) \quad (5-19)$$

2. Kiểm tra các hệ số: (δ_{km})

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots \delta_{kn} = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \quad (5-20)$$

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_s) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \delta_{km}$$

Chứng minh các điều kiện kiểm tra:

- Theo ý nghĩa của biểu đồ ($\bar{M}_s$) và các biểu đồ ($\bar{M}_k$) nên theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện (5-19) phải thỏa mãn.

- Thay (5-19) vào 2 điều kiện bên dưới và khai triển sẽ có 2 điều kiện (5-20).

3. Kiểm tra các số hạng tự do:

a. Kiểm tra: (Δ_{kp})

Biểu thức kiểm tra:

$$(\bar{M}_s)(M_p^o) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kp} \quad (5-21)$$

Thay (M_s) từ điều kiện (5-19) vào và triển khai ta được điều kiện (5-21).

b. Kiểm tra: (Δ_{kt})

Biểu thức kiểm tra:

$$\Sigma \alpha t_c \Omega(\bar{N}_s) + \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_s) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kt} \quad (5-22)$$

Trong đó $\Omega(\bar{M}_s)$, $\Omega(\bar{N}_s)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen và lực dọc do $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\Omega(\bar{M}_s) = \Omega(\bar{M}_1) + \Omega(\bar{M}_2) + \dots \Omega(\bar{M}_n)$$

$$\Omega(\bar{N}_s) = \Omega(\bar{N}_1) + \Omega(\bar{N}_2) + \dots \Omega(\bar{N}_n)$$

Thay vào ta sẽ chứng minh được điều kiện (5-23)

c. Kiểm tra: (Δ_{kZ})

Biểu thức kiểm tra: $-\Sigma \bar{R}_{js} \cdot Z_{jm} = \Sigma \Delta_{kZ} \quad (5-24)$

Trong đó $\bar{R}_{js}$ là phản lực tại liên kết j do $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Chứng minh tương tự các biểu thức trên.

4. Kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc:

Do việc làm tròn số khi tính toán giải hệ phương trình chính tắc nên khi thay thế ngược các lực X_k đã tìm được vào thì các phương trình thường khác không.

Người ta đánh giá sai số của mỗi phương trình dưới dạng sai số tương đối ε .

$$\varepsilon = \frac{A - B}{A} \cdot 100\% \leq [\varepsilon] \quad (5-25)$$

Trong đó: A, B là tập hợp các số liệu của mỗi phương trình cần kiểm tra dưới dạng A – B, $[\varepsilon]$ sai số tương đối cho phép.

II. Kiểm tra kết quả cuối cùng:

$$\begin{aligned} \text{Biểu thức kiểm tra: } (M)(\bar{M}_k) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kz} \\ (M)(\bar{M}_s) &= -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kz} \end{aligned} \quad (5-26)$$

Chứng minh điều kiện kiểm tra:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kz} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\bar{M}_k)(\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_k)(\bar{M}_2)X_2 + \dots (\bar{M}_k)(\bar{M}_n)X_n + (\bar{M}_k)(M_p^o) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kz}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{M}_k)(\bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \dots \bar{M}_nX_n + (M_p^o)) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kz}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{M}_k)(M) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kz}$$

$$(M)(\bar{M}_s) = -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kz} : \text{chứng minh tương tự.}$$

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen và kiểm tra lại kết quả tính của hệ trên H.5.4.1. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Vẽ biểu đồ mômen (M):

Bậc siêu tĩnh $n = 2$

Hệ cơ bản được tạo trên hình H.5.4.2.

Các hệ số được xác định:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{8a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot a = \frac{2a^3}{EJ}$$

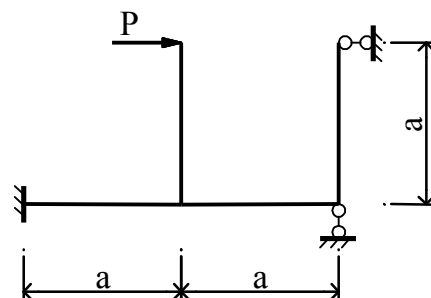
$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{1}{EJ} \cdot a \cdot 2a \cdot a = \frac{7a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\bar{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{a + 2a}{2} \cdot a \cdot Pa \right) = -\frac{1,5 \cdot Pa^3}{EJ}$$

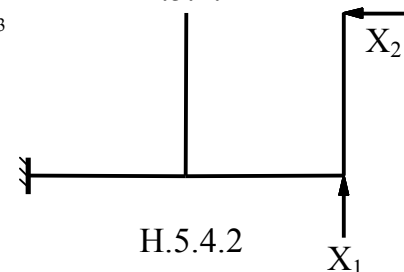
$$\Delta_{2p} = (\bar{M}_2)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ} a \cdot a \cdot Pa = -\frac{Pa^3}{EJ}$$

Hệ phương trình chính tắc sau khi đã quy đồng và bỏ $3EJ$ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 8a^3 X_1 + 6a^3 X_2 - 4,5Pa^3 = 0 \\ 6a^3 X_1 + 7a^3 X_2 - 3Pa^3 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra } \begin{cases} X_1 = 0,675P \\ X_2 = -0,15P \end{cases}$$



H.5.4.1



H.5.4.2

Vẽ biểu đồ mômen (M): $(M) = (\bar{M}_1).X_1 + (\bar{M}_2).X_2 + (M_p^o)$ Xem hình (H.5.4.6)

2. Kiểm tra kết quả:

- Kiểm tra biểu đồ: $(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) \equiv (\bar{M}_s)$:

thấy đúng

$(\bar{M}_s)$ vẽ trên hình (H.5.4.7)

- Kiểm tra các hệ số:

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \left[a + \frac{2}{3} \cdot 2a \right] = \frac{14a^3}{3EJ}$$

$$\text{Mặt khác: } \delta_{11} + \delta_{12} = \frac{8a^3}{3EJ} + \frac{2a^3}{EJ} = \frac{14a^3}{3EJ}$$

(đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$\begin{aligned} (\bar{M}_s)(\bar{M}_2) &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{(3a+a)}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \\ &= \frac{13a^3}{3EJ} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{2a^3}{EJ} + \frac{7a^3}{3EJ} = \frac{13a^3}{3EJ} \quad (\text{đúng})$$

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_s) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{2a}{6EJ} [2 \cdot 9a^2 + 2a^2 + 2 \cdot 3a^2] = \frac{a^3}{3EJ} + \frac{26a^3}{3EJ} = \frac{27a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$$

$$\text{Mặt khác: } \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{14a^3}{3EJ} + \frac{13a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ} \quad (\text{đúng})$$

- Kiểm tra số hạng tự do:

Nhân 2 biểu đồ:

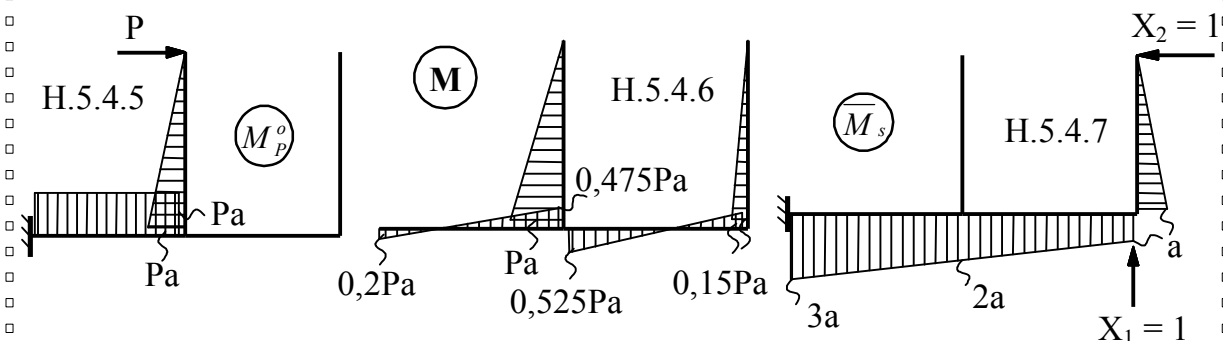
$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_p^o) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{(3a+2a)}{2} \cdot a \cdot Pa = -\frac{2,5 \cdot Pa^3}{EJ}$$

Mặt khác:

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{1,5Pa^3}{EJ} - \frac{Pa^3}{EJ} = -\frac{2,5Pa^3}{EJ} \quad (\text{đúng})$$

- Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Nhân 2 biểu đồ:



$$(\overline{M}_s)(M) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,15Pa + \frac{a}{6EJ} [2 \cdot 3a \cdot 0,2Pa - 2 \cdot 2a \cdot 0,475Pa - 3a \cdot 0,475Pa + 2a \cdot 0,2Pa] \\ + \frac{a}{6EJ} [2 \cdot 2a \cdot 0,525Pa - 2 \cdot a \cdot 0,15Pa - 2a \cdot 0,15Pa + a \cdot 0,525Pa] = 0$$

*Chú ý:

- Các biểu thức điều kiện kiểm tra vẫn đúng trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.
- Khối lượng tính toán kiểm tra còn nhiều.
- Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể loại trừ được khả năng xảy ra sai lầm.

§5. MỘT SỐ ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẬC CAO

I. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán:

- Chọn phương pháp tính cho số lượng ẩn số là ít nhất (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp và liên hợp...)
- Khi sử dụng phương pháp lực nên chọn hệ cơ bản để sao cho các ẩn X_k ít ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng.
- Dùng các biện pháp nhằm giảm bậc của hệ phương trình chính tắc. (sẽ trình bày ở dưới)

II. Các biện pháp làm giảm nhẹ khối lượng tính toán:

1. Các biện pháp giảm bậc của hệ phương trình chính tắc:

- Chọn phương pháp tính cho số ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên)
- Khi chọn hệ cơ bản của phương trình lực, ta chọn hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp thay vì chọn hệ cơ bản tĩnh định.
- Nên sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng

2. Các biện pháp đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc:

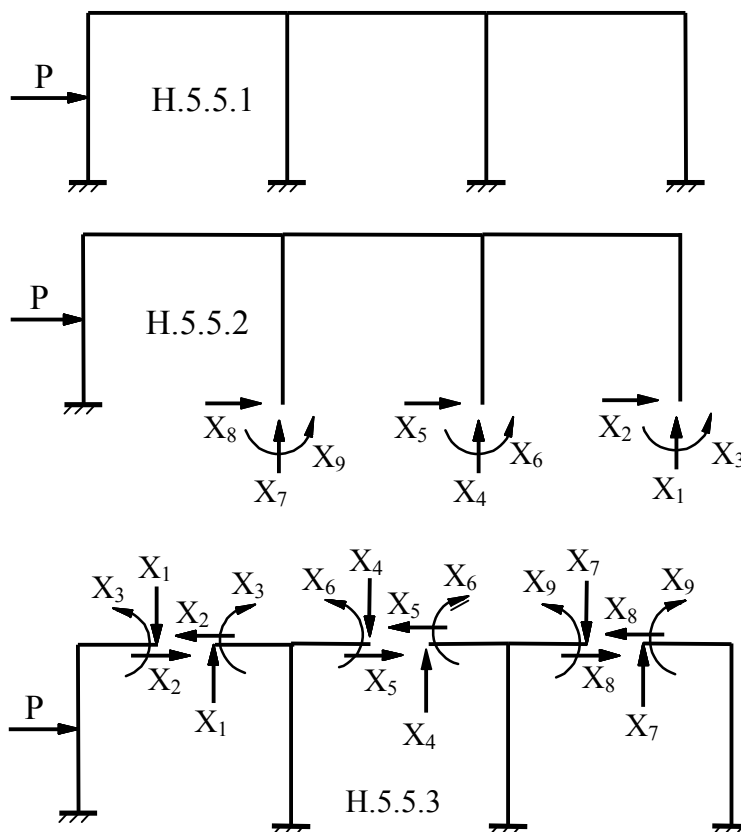
Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản khi chúng có nhiều hệ số phụ bằng không. Để đạt được mục đích này, ta có thể thực hiện các cách sau:

- Sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ đối xứng.
- Chọn hệ cơ bản hợp lý bằng cách chia hệ thành nhiều bộ phận độc lập. Vì lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ. Việc xác định các hệ số của phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không. Mặc khác, việc làm này còn làm giảm nhẹ khối lượng tính toán ở các khâu: xác định nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do, giải hệ phương trình chính tắc.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.5.1), ta nêu ra 2 cách để chọn hệ cơ bản so sánh:

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.2.2), nội lực trên hệ này nói chung sẽ phân khối trên toàn hệ. Do đó, việc xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức. Các hệ số phụ đều khác không.

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.5.3), các biểu đồ đơn vị chỉ phân bố trên 1 hoặc 2 bộ phận lân cận của hệ. Do đó, việc vẽ biểu đồ nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do sẽ đơn giản, có nhiều hệ số phụ bằng không.



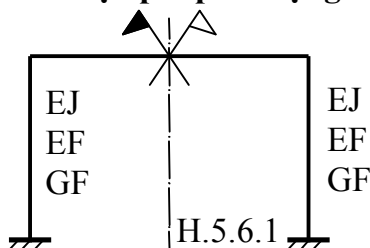
$$\delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{19} = \delta_{91} = \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{29} = \delta_{92} = \delta_{37} = \delta_{73} = \\ = \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{39} = \delta_{93} = 0$$

- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số (nghiên cứu ở phần sau).

S6. CÁCH VẬN DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ ĐỐI XỨNG

Hệ đối xứng là hệ có kích thước, hình dạng hình học, độ cứng và kiên kết đối xứng qua 1 trục (H.5.6.1)

I. Biện pháp sử dụng cặp ẩn số đối xứng và phản xứng:



Xét hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng tác dụng như trên hình (H.5.6.2). Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình (H.5.6.3). Có 2 loại ẩn số:

- Cặp ẩn số đối xứng X_4 và phản xứng X_3 .

- Cặp ẩn số chỉ có vị trí đối xứng X_1 và X_2 .

Để triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ, ta phân tích X_1, X_2 thành hai cặp: cặp đối xứng Y_1 và cặp phản ứng Y_2 như trên hình vẽ (H.5.6.4). Tức là:

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = X_1 \\ Y_1 + Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \\ Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

Các ẩn số lúc này là (Y_1, Y_2, X_3, X_4)

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}Y_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}Y_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$

Mặc khác, đối với hệ đối xứng có tính chất sau:

- Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng (phản ứng) thì biểu đồ mômen sẽ đối xứng (phản ứng). Suy ra: $(\bar{M}_1), (\bar{M}_4)$ sẽ đối xứng; $(\bar{M}_2), (\bar{M}_3)$ sẽ phản ứng.

- Kết quả nhân biểu đồ phản ứng với biểu đồ đối xứng sẽ bằng không. Suy ra:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{34} = 0$$

Thay vào, ta được:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases} \quad (a) \text{ (chứa cặp ẩn đối xứng)}$$

$$\begin{cases} \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad (b) \text{ (chứa cặp ẩn phản xứng)}$$

* **Kết luận:** Với hệ đối xứng có bậc siêu tĩnh bằng n , nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: 1 hệ gồm n_1 phương trình chứa ẩn đối xứng, 1 hệ gồm n_2 phương trình chứa ẩn phản xứng với $n_1 + n_2 = n$.

* **Các trường hợp đặc biệt:**

1. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng đối xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì lúc này (M_P) sẽ đối xứng. Suy ra $\Delta_{2P} = \Delta_{3P} = 0$. Thay vào hệ (b) thì được $Y_2 = X_3 = 0$

Vậy 1 hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các ẩn phản xứng = 0

2. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng phản xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì tương tự ta sẽ có được $Y_1 = X_4 = 0$

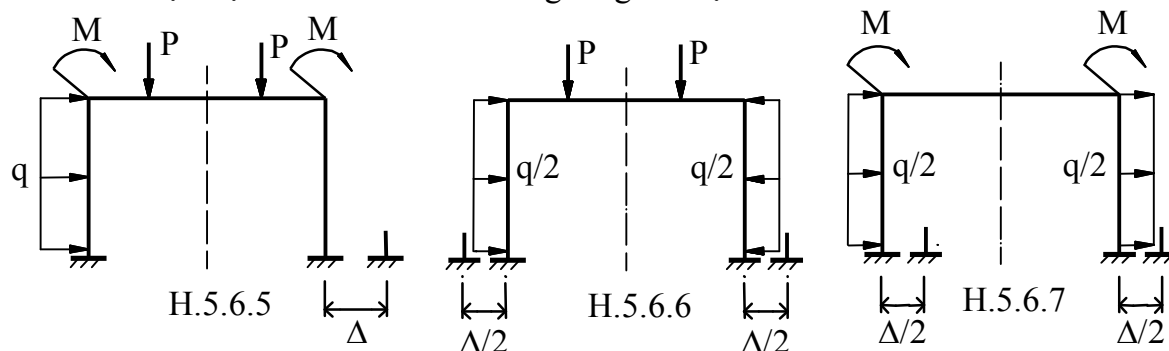
Vậy khi hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các ẩn đối xứng = 0

II. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính:

* **Các đặc điểm của hệ đối xứng:**

- Một hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bao giờ cũng có thể phân tích thành tổng của 2 hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng với hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng.

Ví dụ: Hệ trên hình H.5.6.5 bằng tổng hai hệ trên hình H.5.6.6 với H.5.6.7.



- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng thì chuyển vị, mômen uốn, lực dọc sẽ đối xứng, còn lực cắt có tính phản ứng.

- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản ứng thì chuyển vị, mômen, lực dọc sẽ phản xứng, còn lực cắt có tính đối ứng.

Như vậy với các đặc điểm này, nếu biết được kết quả của một nửa hệ đối xứng thì có thể suy ra kết quả trên toàn hệ. Ta đi tìm 1 nửa hệ tương đương.

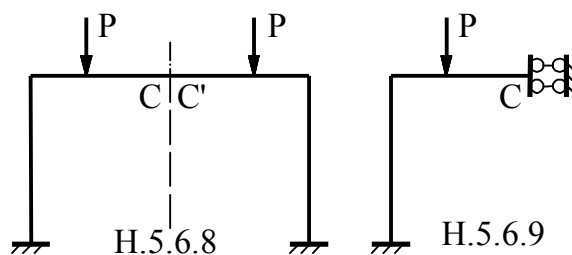
1. **Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng:**

a. **Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ :**

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.8). Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị

xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị thẳng theo phương trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 ngàm trượt.

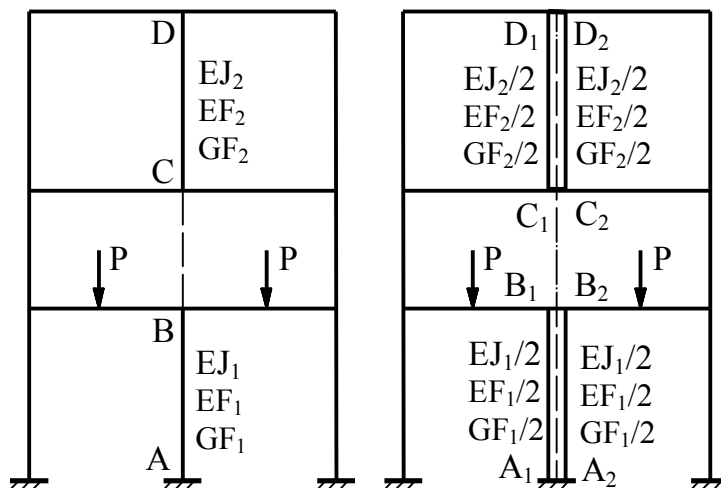
Vậy trên sơ đồ tính 1 nửa hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng như trên hình vẽ (H.5.6.9)



***Kết luận:** Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ, ta đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh song song và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh của hệ.

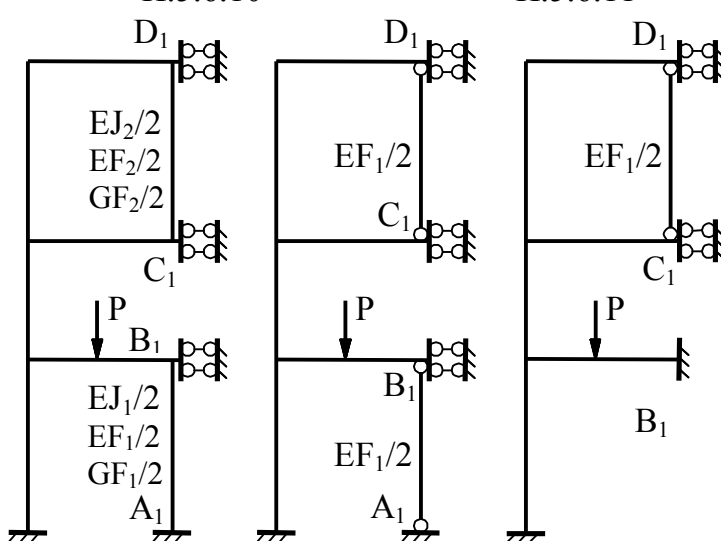
Xét hệ trên hình (H.5.6.10). Đưa về hệ tương đương đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ bằng cách thay thế mỗi thanh AB, CD bằng 2 thanh có độ cứng giảm đi một nửa, hai đầu A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 là vuông góc với trục đối xứng và có độ cứng bằng vô cùng (H.5.6.11). Đến đây ta trở lại trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh.



Một nửa hệ tương đương như trên hình

(H.5.6.12). Nhưng tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 không tồn tại chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng mà chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh. Nghĩa là, các thanh A_1B_1 , C_1D_1 làm việc như 1 liên kết thanh (liên kết loại 1) (H.5.6.13).

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ, ta cần đặt



thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song với

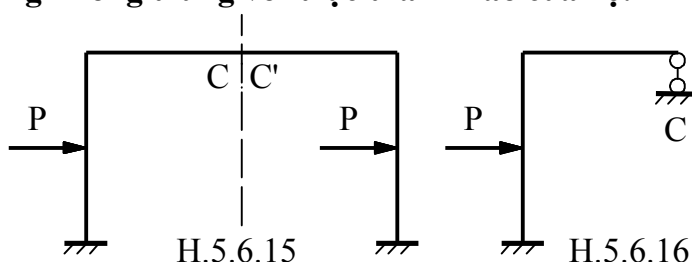
nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng đồng thời thay thế các thanh trùng với trục đối xứng bằng các liên kết thanh (liên kết loại 1) có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ. Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy gấp 2 lần so với khi giải 1 nửa hệ còn lực cắt và mômen lấy bằng không.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh trùng với trục đối xứng và các thanh này bị ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục thanh (một đầu nối đất), ta có thể thay thế các ngàm trượt bằng ngàm (H.5.6.14)

2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ:

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.15). Do chuyển vị của hệ là phản xứng nên tại C không thể có chuyển vị theo phương trục đối xứng. Tuy nhiên,



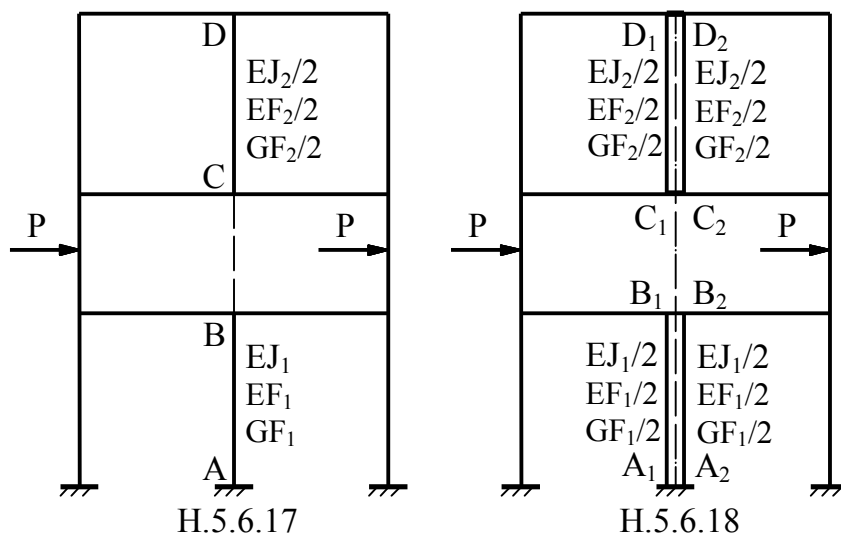
chuyển vị góc xoay và chuyển vị theo phương vuông góc với trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 gối di động. Vậy trên sơ đồ tính một phần 2 hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 gối di động có phương của trục đối xứng (H.5.6.16).

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ:

Cũng lý luận tương tự như trường hợp hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ở trên, ta đưa bài toán trở về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ.

Với hệ cho trên hình (H.5.6.17), hệ tương đương của nó ở trên hình (H.5.6.18) và hệ trên hình (H.5.6.19) là 1 nửa hệ tương đương.

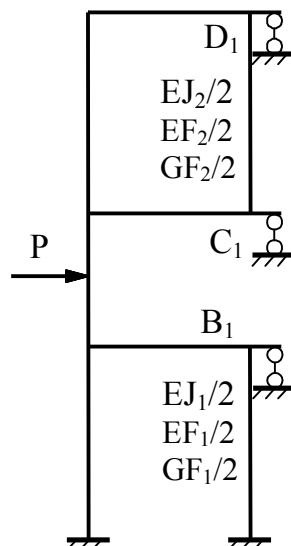


Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng và có trục đối xứng trùng với trục thanh nào đó của hệ, ta đưa về 1 nửa hệ

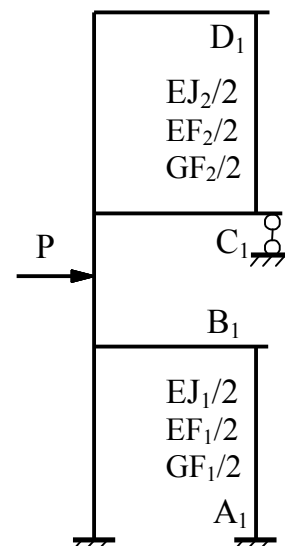
tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương trục đối xứng tại những tiết diện trục đối xứng bằng các thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi tính toán trên 1 phần 2 và suy ra kết quả trên toàn hệ.

Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với các thanh trùng với trục đối xứng, lực dọc lấy bằng không còn mômen và lực cắt lấy gấp 2 lần so với khi tính trên nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục thì ta có thể bỏ bớt 1 gối di động trong 2 gối ở hai đầu thanh (H.5.6.20).



H.5.6.19



H.5.6.20

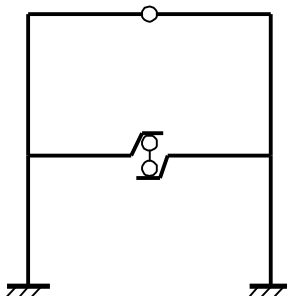
*** Chú thích:**

Trường hợp tiết diện trùng với trục đối xứng không phải là liên kết hàn, bằng cách phân tích sự làm việc tại các tiết diện này tương tự như ở trên ta có thể thay thế bằng các liên kết tương ứng khi tính trên 1 nửa hệ.

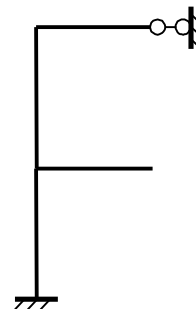
Chắn hạn, hệ trên hình (H.5.6.21)

+ Nếu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.22).

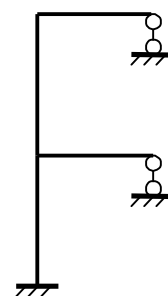
+ Nếu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.23).



H.5.6.21



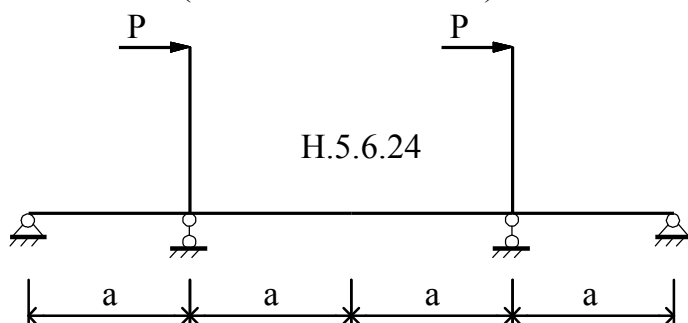
H.5.6.22



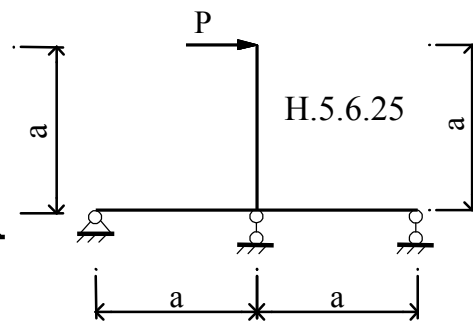
H.5.6.23

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.6.24). Cho độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

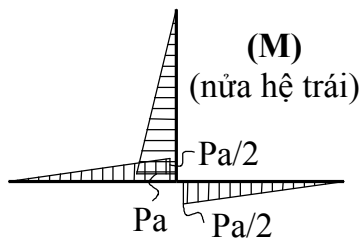
Hệ đã cho thuộc loại hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Một nửa hệ trái tương đương của hệ đã cho được tạo ra trên hình (H.5.6.25). Đây là hệ siêu tĩnh bậc 1. Tiến hành các bước giải sẽ vẽ được biểu đồ (M), (Q), (N). Sau đó suy ra kết quả của nửa hệ phải theo các đặc điểm của hệ đối xứng. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.6.26 → H.5.6.31)



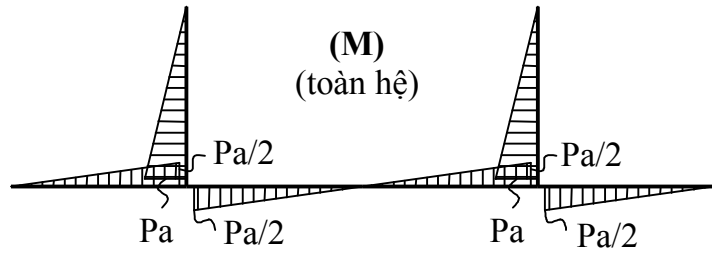
H.5.6.24



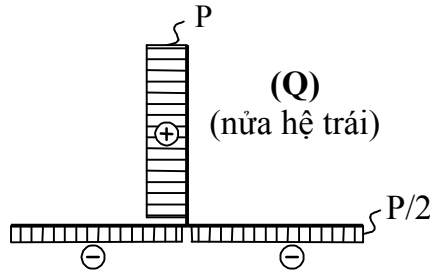
H.5.6.25



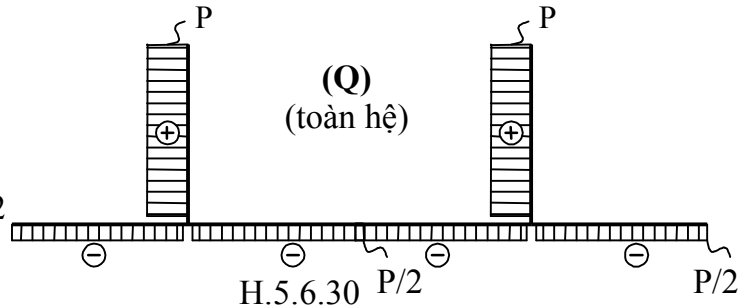
H.5.6.26



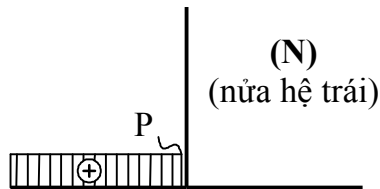
H.5.6.29



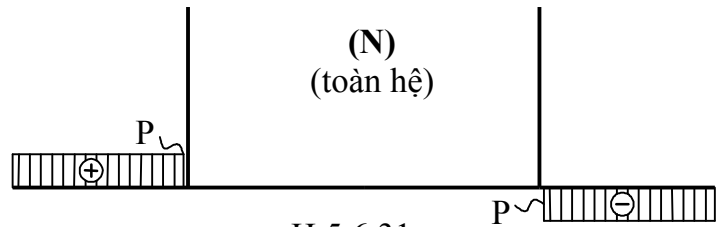
H.5.6.27



H.5.6.30



H.5.6.28



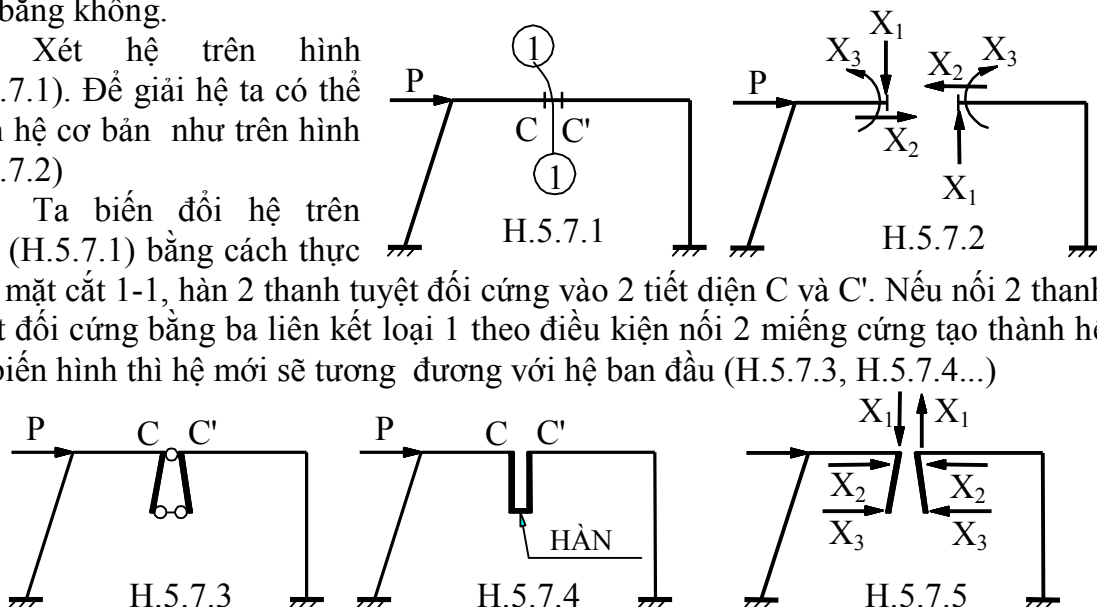
H.5.6.31

§7. SỬ DỤNG CÁC THANH TUYỆT ĐỐI CỨNG ĐỂ THAY ĐỔI VỊ TRÍ VÀ PHƯƠNG CÁC ẮN SỐ NHẪM ĐƠN GIẢN HOÁ CẤU TRÚC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Mục đích của biện pháp là sử dụng các thanh tuyệt đối cứng nhằm thay đổi vị trí và phương của các ắn số để sao cho hệ phương trình chính tắc có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ trên hình (H.5.7.1). Để giải hệ ta có thể chọn hệ cơ bản như trên hình (H.5.7.2)

Ta biến đổi hệ trên hình (H.5.7.1) bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1, hàn 2 thanh tuyệt đối cứng vào 2 tiết diện C và C'. Nếu nối 2 thanh tuyệt đối cứng bằng ba liên kết loại 1 theo điều kiện nối 2 miếng cứng tạo thành hệ bất biến hình thì hệ mới sẽ tương đương với hệ ban đầu (H.5.7.3, H.5.7.4...)



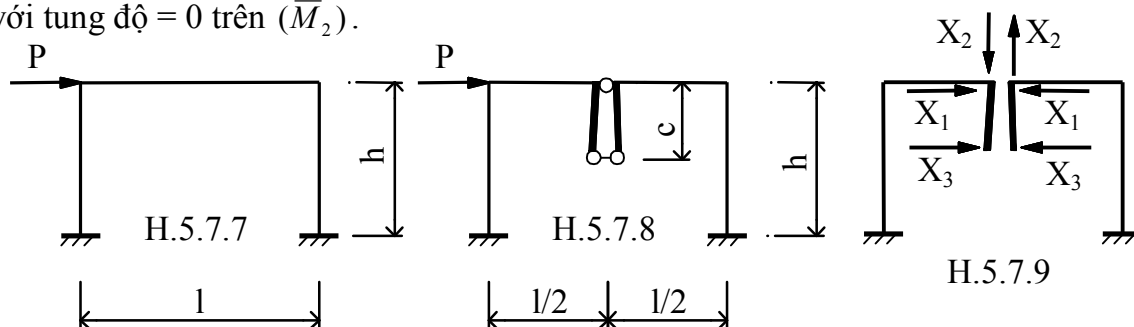
Nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa các thanh tuyệt đối cứng (H.5.7.5, H.5.7.6...) thì so với các hệ cơ bản trên hình (H.5.7.2), vị trí và phương của các ắn số đã thay đổi. Điều đó có nghĩa là các hệ số cũng thay đổi. Rõ ràng là có nhiều cách lập hệ tương đương nên cũng nhiều cách thay đổi vị trí và phương của các ắn số. Và ta thực hiện sao cho hệ phương trình chính tắc càng có nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

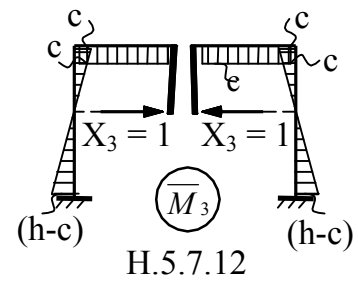
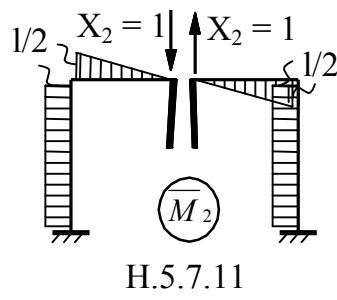
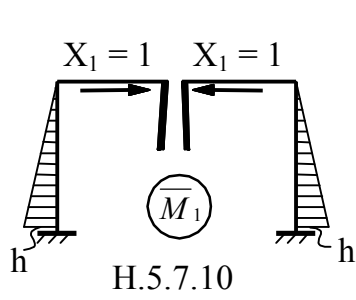
Ví dụ: Chọn hệ số cơ bản sao cho tất cả các hệ số phụ bằng không của khung trên hình (H.5.7.7). Cho độ cứng EJ là không đổi trên toàn hệ.

Hệ tương đương trên hình (H.5.7.8), hệ cơ bản tạo nên hình (H.5.7.9)

Các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (\bar{M}_3)$ vẽ trên hình (H.5.7.10 $\rightarrow$ H.5.7.12). $(\bar{M}_1), (\bar{M}_3)$ là đối xứng; $(\bar{M}_2)$ phản xứng nên $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Để $\delta_{13} = \delta_{31} = (\bar{M}_3)(M_1) = 0$ thì $c = \frac{2}{3}h$ vì khi đó trọng tâm lấy trên $(\bar{M}_1)$ ứng với tung độ $= 0$ trên $(\bar{M}_2)$.





§8. HỆ DÀN SIÊU TĨNH

I. Bậc siêu tĩnh:

$$n = D - 2M + 3 \quad (\text{Đối với hệ dàn không nối đất})$$

$$n = D - 2M + C \quad (\text{Đối với hệ dàn nối đất})$$

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

Như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

III. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Do trong hệ dàn chỉ tồn tại lực dọc nên các hệ số chỉ kể đến thành phần biến dạng dọc trục.

1. Các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EF} ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{EF_i} l_i$$

2. Các số hạng tự do:**a. Do tải trọng:**

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{N}_k N_p^o}{EF} ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip}^o}{EF_i} l_i$$

b. Do biến thiên nhiệt độ:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci} \Omega(\bar{N}_{ik}) = \sum_i \alpha t_{ci} \bar{N}_{ik} l_i$$

c. Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i$$

Δ_i : độ dôi của thanh dàn thứ i. Nếu là chế tạo ngắn hơn chiều dài (còn gọi là độ hụt) thì Δ_i lấy dấu âm.

d. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

$$\Delta_{kZ} = - \sum_{(j)} \bar{R}_{jk} Z_j$$

Trong các công thức trên:

$\bar{N}_{ik}, \bar{N}_{im}, N_{ip}^o$: lực dọc trong thanh dàn thứ i do $X_k = 1$ và $X_m = 1$, P gây ra trên hệ cơ bản.

EF_i, l_i : độ cứng và chiều dài thanh thứ i

α : hệ số dẫn nở vì nhiệt độ.

$\bar{R}_{jk}$: phản lực tại liên kết j do $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Z_j : chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j.

IV. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

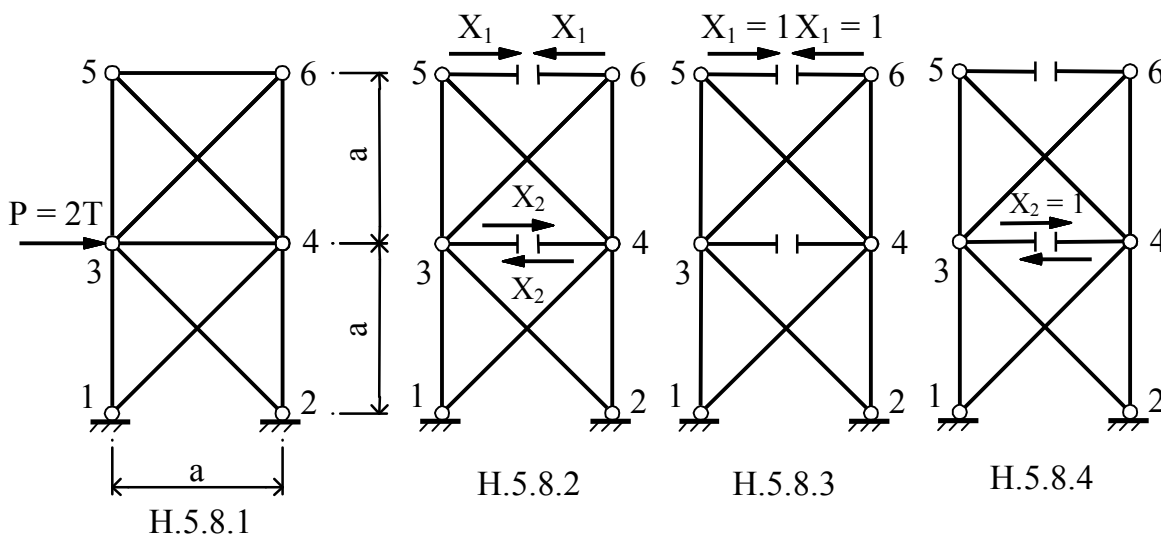
Lực dọc trong thanh dàn thứ i:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{ip}^o + N_{it}^o + N_{i\Delta}^o + N_{iZ}^o$$

Trong đó: $N_{ip}^o, N_{it}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o$ lần lượt là lực dọc trong thanh dàn thứ i do các nguyên nhân P, t, Δ , Z gây ra trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì $N_{pt}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o = 0$.

Ví dụ: Xác định lực dọc trong các thanh dàn trên hình (H.5.8.1) cho biết độ cứng trong các thanh dàn là $EF = \text{const}$.

1. Bậc siêu tĩnh: $n = D - 2M + C = 10 - 6.2 + 4 = 2$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.5.8.2). Ở đây ta xem các thanh 56, 34 là các liên kết thanh và cắt nó.

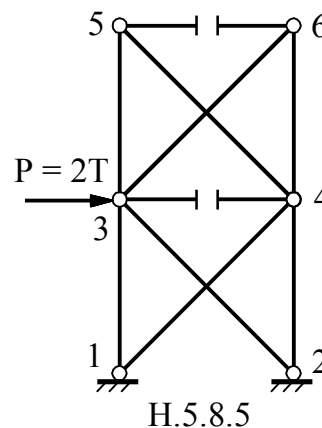
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{EF_i} I_i \quad k, m = \overline{1,2}$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip}^o}{EF_i} I_i \quad i : \text{thanh thứ } i.$$



Sơ đồ để xác định $\bar{N}_{i1}, \bar{N}_{i2}, N_{ip}^o$ được tạo trên các hình vẽ (H.5.8.3, H.5.8.4 & H.5.8.5)

Lực dọc được xác định theo các cách trong bài hệ dầm.

Kết quả tính toán được thể hiện trong bảng tính (B.5.8.1)

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} (5 + 8\sqrt{2})a.X_1 + (2 - 4\sqrt{2})a.X_2 + (1 - 2\sqrt{2})Pa = 0 \\ (2 - 4\sqrt{2})a.X_1 + (3 + 4\sqrt{2})a.X_2 + (1 + 2\sqrt{2})Pa = 0 \end{cases}$$

Ở đây do các thanh có độ cứng bằng EF nên ta không đưa vào trong tính toán cho gọn.

Giải phương trình:

$$\begin{cases} X_1 = 0,014P \\ X_2 = -0,436P \end{cases}$$

4. Xác định lực dọc trong các thanh dầm:

$$N_i = \bar{N}_{i1}X_1 + \bar{N}_{i2}X_2 + N_{ip}^o$$

Xem kết quả trong bảng tính (B.5.8.1)

Thanh	l_i	$\bar{N}_{i1}$	$\bar{N}_{i2}$	N_{ip}^o	$\bar{N}_{i1}\bar{N}_{i1}l_i$	$\bar{N}_{i1}\bar{N}_{i2}l_i$	$\bar{N}_{i2}\bar{N}_{i2}l_i$	$\bar{N}_{i1}N_{ip}^o l_i$	$\bar{N}_{i2}N_{ip}^o l_i$	N_i
5-6	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-4	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-3	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-4	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-3	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
3-4	a	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,436P
4-2	a	1	1	0	a	a	0	0	0	-0,422P
4-1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	0	0	0,636P
3-2	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2aP\sqrt{2}$	$2aP\sqrt{2}$	-0,777P
3-1	a	1	1	P	a	a	a	Pa	Pa	0,578P
Tổng					$(5+8\sqrt{2})a$	$(2-4\sqrt{2})a$	$(3+4\sqrt{2})a$	$(1-2\sqrt{2})Pa$	$(1+2\sqrt{2})Pa$	

B.8.1 Bảng tính lực dọc trong các thanh dầm

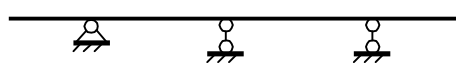
§9. DẦM LIÊN TỤC

I. phân tích hệ:

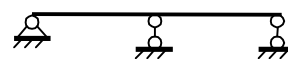
1. Khái niệm: Dầm liên tục là hệ gồm 1 thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành hệ bất biến hình.

2. Phân loại dầm liên tục:

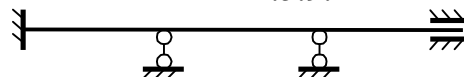
- Dầm liên tục hai đầu khớp (H.5.9.1)
- Dầm liên tục có đầu thừa (H.5.9.2)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (H.5.9.3)



H.5.9.2



H.5.9.1



H.5.9.3

3. Bậc siêu tĩnh:

Cách 1: $n = 3V - K$

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.4)

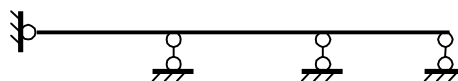
có $n = 3 \cdot 3 - 7 = 2$.

Cách 2: $n = C - 3$

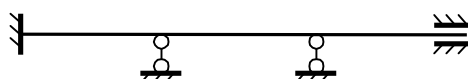
C là số liên kết nối đất tương đương quy về liên kết loại 1.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.5)

có $n = 7 - 3 = 4$.



H.5.9.4



H.5.9.5

Trường hợp cho phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và tải trọng chỉ tác dụng vuông góc với trục dầm thì gối cố định chỉ có hiệu quả như gối di động. Khi đó bậc siêu tĩnh được tính bằng biểu thức:

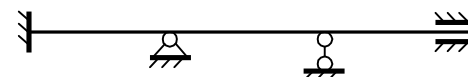
$$n = C_{tg} + N$$

C_{tg} : số gối tựa trung gian (không kể hai gối ngoài cùng), không cần phân biệt là gối cố định hay di động.

N : số liên kết ngàm, không cần phân biệt là ngàm trượt hay ngàm.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.6)

có $n = 2 + 2 = 4$.



H.5.9.6

II. Cách tính dầm liên tục bằng phương pháp phương trình ba mômen:

Bài toán dầm liên tục là một trường hợp của hệ siêu tĩnh nên ta có thể vận dụng phương pháp lực để tính toán. Tuy nhiên, để phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản ta đi cụ thể hoá hệ phương trình chính tắc của nó.

Xét một dầm liên tục hai đầu khớp gồm $(n + 1)$ nhịp, có độ cứng EJ không đổi trên từng nhịp, chịu tác dụng của các nguyên nhân tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (H.5.9.7).

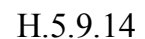
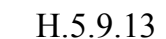
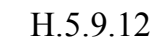
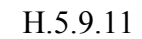
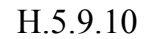
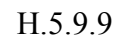
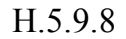
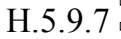
1. Hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay thế liên kết hàn bằng liên kết khớp (H.5.9.8)).

2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình i của hệ phương trình cơ bản

$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + \dots + \delta_{ii-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{ii+1}M_{i+1} + \dots + \delta_{in}M_n + \Delta_{iP} + \Delta_{iT} + \Delta_{iZ} = 0$$



Phương trình này biểu thị điều kiện góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i bằng không.

Ta biết $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, δ_{ki} ở đây là chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện hai bên gối tựa thứ k do riêng $M_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Mặt khác, M_i chỉ gây ra biến dạng trên nhịp i và (i + 1) (H.5.9.9). Điều đó có nghĩa là:

$$\delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i} \neq 0, \text{ còn } \delta_{ki} \text{ (k } \neq (i-1), i, (i+1)) = 0$$

Thay vào phương trình trên:

$$\delta_{i-1} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i+1} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0.$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Xác định các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{i(i-1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1 \cdot l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_i) = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1 \cdot l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

b. Xác định các số hạng tự do:

- Do tải trọng: (Δ_{iP})

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_p^o) = \frac{1}{EJ_i} \omega_i \cdot \frac{a_i}{l_i} \cdot 1 + \frac{1}{EJ_{i+1}} \omega_{i+1} \cdot \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot 1 = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}}$$

ω_i : diện tích của (M_p^o) trên nhịp thứ i, dấu của ω_i được lấy theo dấu của (M_p^o).

a_i, b_i : khoảng cách từ trọng tâm diện tích của biểu đồ (M_p^o) đến gối tựa trái và phải của nhịp i.

- Do biến thiên nhiệt độ: (Δ_{it})

Trên hệ cơ bản không tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{it} = \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \frac{1 \cdot l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2}$$

α : Hệ số dẫn nở vì nhiệt.

h_i : chiều cao thứ dầm ở nhịp thứ i.

- Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{iZ})

$$\Delta_{iZ} = -\Sigma R_{ji} Z_j = -\left[-\frac{1}{l_i} \cdot Z_{i-1} + \frac{1}{l_i} \cdot Z_i + \frac{1}{l_{i+1}} \cdot Z_i - \frac{1}{l_{i+1}} \cdot Z_{i+1} \right] = \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}$$

Trong đó: Z_i là độ lún của gối tựa thứ i, theo biểu thức thì Z_i lấy dấu dương khi chuyển vị đi xuống.

Thay tất cả các hệ số vào phương trình trên:

$$\begin{aligned} & \frac{l_i}{6EJ_i} M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} M_{i+1} + \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \\ & + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} = 0 \end{aligned}$$

Chọn 1 J_0 làm chuẩn (thường chọn J của nhiều nhịp có J giống nhau của dầm). Và đặt:

$\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$: gọi là chiều dài quy ước của nhịp i .

Thay vào phương trình:

$$\lambda_i \cdot M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6J_0 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} J_{i+1}} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] = 0$$

Trường hợp dầm có tiết không đổi trên toàn nhịp: $J_1 = J_2 = \dots J_n = J = \text{const}$. Lấy $J_0 = J$ và thay vào ta được:

$$l_i \cdot M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + 6EJ \left[\frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \right] + 6EJ \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] = 0$$

Cho $i = 1, \bar{n}$ ta được hệ phương trình chính tắc

Giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được $(M_1, M_2, \dots, M_n)$.

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

- **Với biểu đồ mô men (M):** mỗi nhịp của dầm ta đã biết được mômen uốn tại 2 gối tựa. Nối 2 tung độ này bằng 1 đoạn thẳng và treo biểu đồ (M_p^o) của nhịp tương ứng vào.

- **Với biểu đồ lực cắt (Q), lực dọc (N):** Vẽ như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.9.15)

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$$

2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản: (H.5.9.16 & H.5.9.17)

3. Viết các phương trình ba mômen cho các gối tựa trung gian.

$$i = 1: \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0 \left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2} \right] = 0$$

$$i = 2: \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0 \left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3} \right] = 0$$

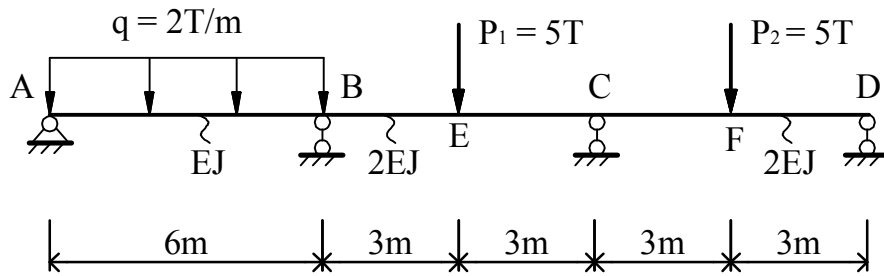
4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen: $M_0 = M_3 = 0$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i} \rightarrow \lambda_1 = 6m; \lambda_2 = 3m; \lambda_3 = 3m$

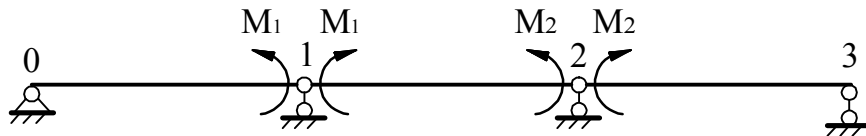
$$\omega_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot f = \frac{2}{3} \cdot 9.6 = 36; a_1 = b_1 = 3; \omega_2 = \frac{7.5.6}{2} = 22.5; a_2 = b_2 = 3$$

$$\omega_3 = \frac{7.5.6}{2} = 22.5; a_3 = b_3 = 3$$

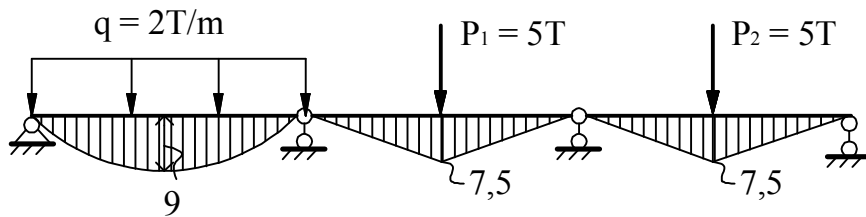
Thay vào phương trình ba mômen:



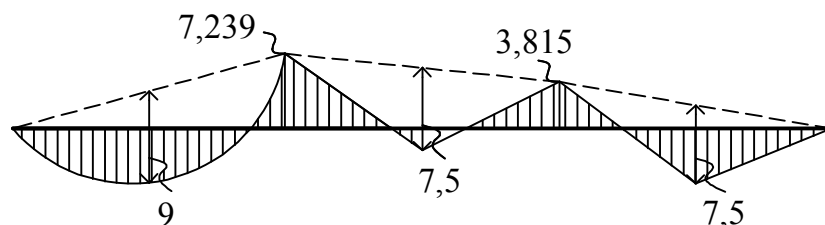
H.5.9.15



H.5.9.16



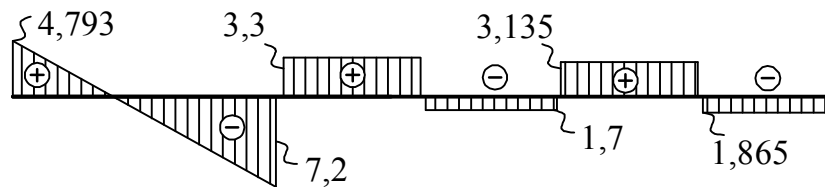
H.5.9.17

 M_P^o 

H.5.9.18

 M

(T.m)



H.5.9.19

 Q

(T)

H.5.9.20

 N

$$i = 1 \quad 6.0 + 18M_1 + 3M_2 + 6J \left[\frac{36.3}{6J} + \frac{22.5.3}{6.2J} \right] = 0$$

$$i = 2 \quad 3.M_1 + 12M_2 + 3.0 + 6J \left[\frac{22.5.3}{6.2J} + \frac{22.5.3}{6.2J} \right] = 0$$

$$\begin{cases} 6M_1 + M_2 = -47,25 \\ M_1 + 4M_2 = -22,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -7,239 < 0 \\ M_2 = -3,815 < 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: treo biểu đồ (H.5.9.18)

b. Biểu đồ lực cắt: suy ra từ biểu đồ mômen.

Trên đoạn AB: $Q^r = \frac{-7,239 - 0}{6} + \frac{1}{2} \cdot 2.6 = 4,793$

$$Q^{ph} = \frac{-7,239 - 0}{6} - \frac{1}{2} \cdot 2.6 = -7,2$$

Trên đoạn BE: $Q^r = Q^{ph} = \frac{1,972 - (-7,939)}{3} = 3,3$

Trên đoạn EC: $Q^r = Q^{ph} = \frac{-3,815 - 1,972}{3} = -1,7$

Trên đoạn CF: $Q^r = Q^{ph} = \frac{5,592 - (-3,815)}{3} = 3,135$

Trên đoạn FD: $Q^r = Q^{ph} = \frac{0 - 5,592}{3} = -1,864$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.9.19)

c. Biểu đồ lực dọc (N): trùng với đường chuẩn.

* **Các trường hợp khác của dầm liên tục:**

a. **Dầm liên tục có thừa:** (H5.9.21)

- Phần đầu thừa là tĩnh định nên có thể xác định và vẽ biểu đồ nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

- Thực hiện cắt bỏ đầu thừa, đưa tải trọng về thành các lực tập trung tại gối tựa biên (H.5.9.22). Có hai quan niệm về mômen gối tựa này:

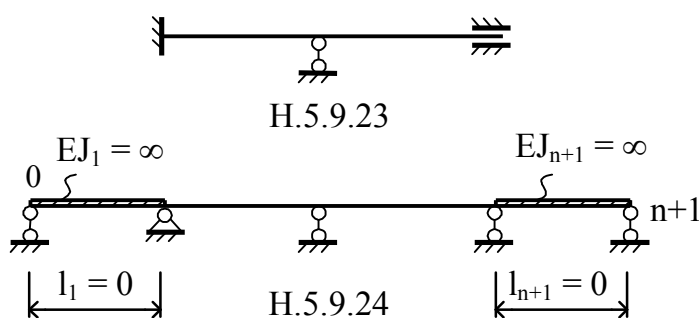
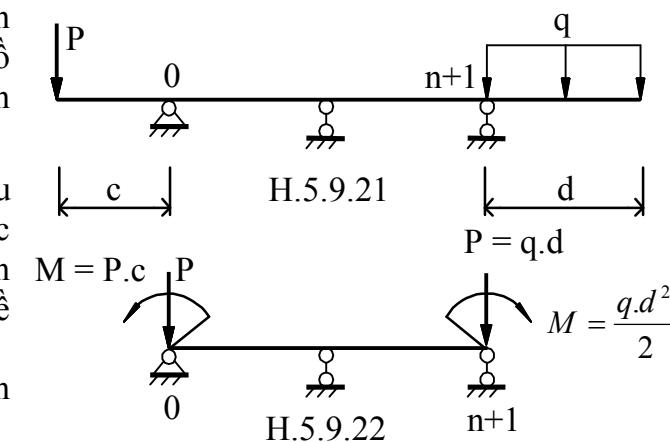
+ Xem là ngoại lực thì cần kể nó khi vẽ biểu đồ (M_p^o)

+ Xem là mômen tại các gối tựa trong phương trình 3 mômen, thì chúng là M_0 và M_{n+1} . Trong hệ trên hình (H.5.9.22) thì $M_0 = -P \cdot c$ và $M_{n+1} = -\frac{qd^2}{2}$.

Đến đây ta trở lại bài toán dầm liên tục 2 đầu khớp.

b. **Dầm liên tục có đầu ngàm:** (H.5.9.23)

Thay thế ngàm hoặc ngàm trượt bằng một nhịp có độ cứng $EJ = \infty$ có chiều dài tùy ý hoặc chiều dài bằng không và được liên kết với trái đất bằng số liên kết tương đương với ngàm hoặc ngàm trượt. (H.5.9.24)



Sau khi thực hiện như trên, ta đưa dầm về thành hai đầu khớp và trở lại bài toán đã biết.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen cuốn của hệ trên hình vẽ (H.5.9.25). Cho biết $EJ = 1080T.m^2$; $\varphi = 0,005$ radian; $\Delta_1 = 0,03m$; $\Delta_2 = 0,02m$; $h_{2EJ} = 0,4m$; $h_{EJ} = 0,3m$.

Đưa hệ về hệ tương đương 2 đầu khớp như trên hình vẽ (H.5.9.26)

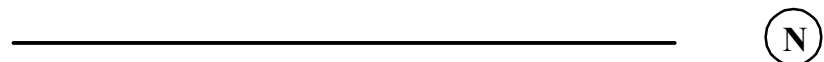
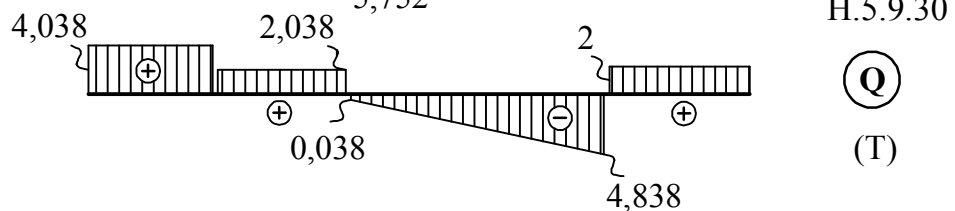
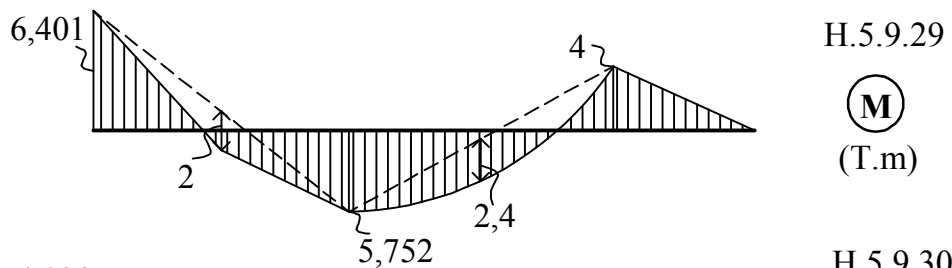
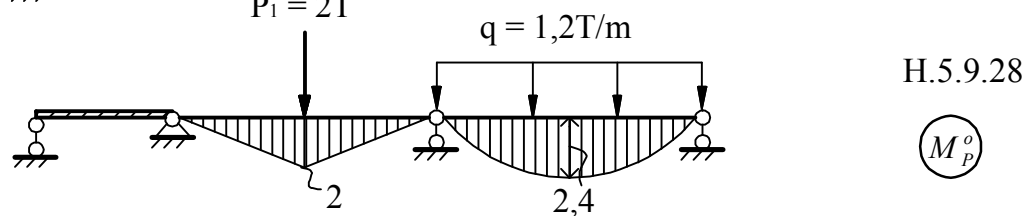
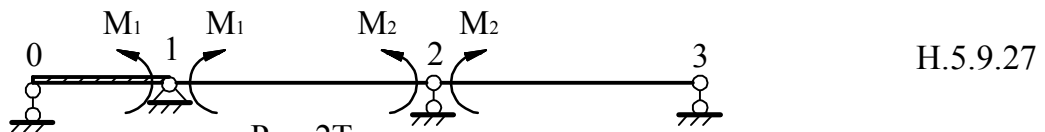
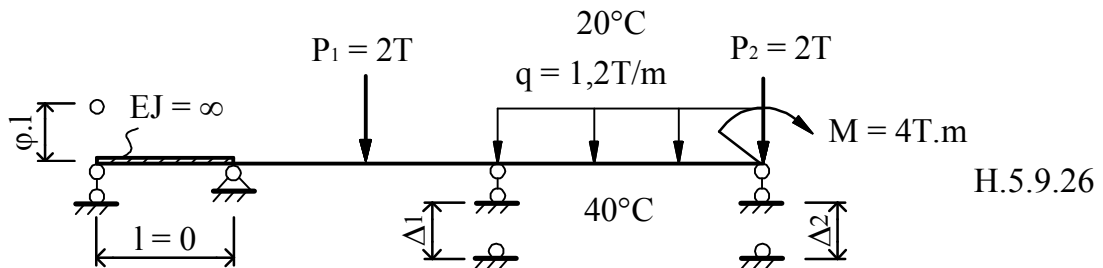
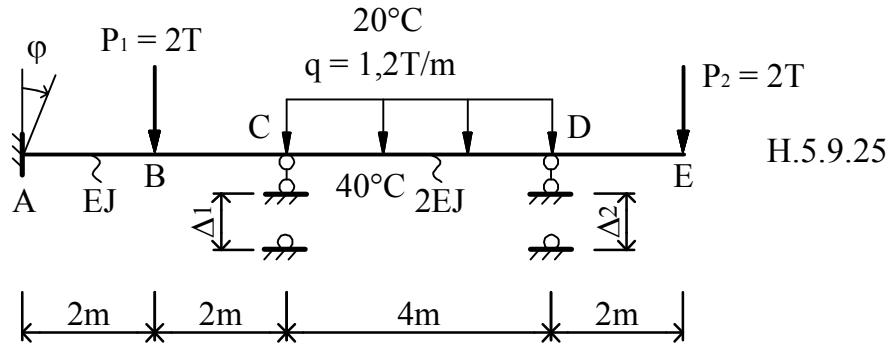
1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2 \quad (\text{tính trên hệ tương đương})$$

2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_p^o). Kết quả trên hình (H5.9.27& H5.9.28)

Ở đây ta xem $M = -P \cdot 2 = -4$ là mômen M_3 trong phương trình 3 mômen.

3. Viết phương trình 3 mômen cho các gối tựa trung gian:



$$i = 1 \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0 \left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2} \right] +$$

$$+ 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_1} (t_{21} - t_{11}) \cdot \frac{l_1}{2} + \frac{\alpha}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \cdot \frac{l_2}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_0 - Z_1}{l_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{l_2} \right] = 0$$

$$i = 2 \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0 \left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3} \right] +$$

$$+ 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \cdot \frac{l_2}{2} + \frac{\alpha}{h_3} (t_{23} - t_{13}) \cdot \frac{l_3}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_1 - Z_2}{l_2} + \frac{Z_3 - Z_2}{l_3} \right] = 0$$

Ở đầu bài cho biết $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}C^{-1})$; $h_{EJ} = 0,3m$; $h_{2EJ} = 0,4m$; $EJ = 1080T.m^2$

4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen:

$$M_0 = 0; M_3 = -4; t_{23} = 40^{\circ}C; t_{13} = 20^{\circ}C$$

$$Z_0 = -0,005l_1; Z_2 = 0,03; Z_0 = 0,02; Z_1 = 0$$

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 = 4; a_2 = b_2 = 2m; \omega_3 = \frac{2}{3} \cdot 4,2,4 = 6,4; a_3 = b_3 = 2m$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 2$$

Thay vào:

$$i = 1: \quad 0 \cdot 0 + 2(0 + 4)M_1 + 4M_2 + 6J \left[0 + \frac{4,2}{4J} \right] +$$

$$+ 6EJ[0 + 0] + 6EJ \left[\frac{-0,005 \cdot l_1 - 0}{l_1} + \frac{0,03 - 0}{4} \right] = 0$$

$$\rightarrow 8M_1 + 4M_2 = -12 - 0,015EJ = -28,2$$

$$i = 2: \quad 4M_1 + 2(4 + 2)M_2 + 2 \cdot (-4) + 6J \left[\frac{4,2}{4J} + \frac{6,4,2}{4,2J} \right] +$$

$$+ 6EJ \left[0 + \frac{\alpha}{0,4} (40 - 20) \frac{4}{2} \right] + 6EJ \left[\frac{0 - 0,03}{4} + \frac{0,02 - 0,03}{4} \right] = 0$$

$$\rightarrow 4M_1 + 12M_2 = 8 - 21,6 - 600EJ + 0,06EJ = 43,424$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -28,2 \\ 4M_1 + 12M_2 = 43,424 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -6,401 < 0 \\ M_2 = 5,752 > 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen (M): treo biểu đồ (H5.9.29)

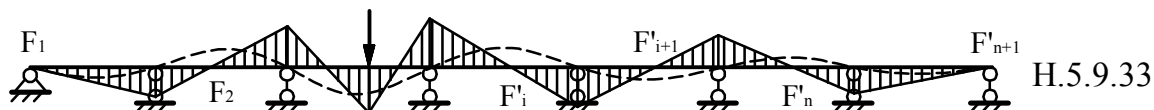
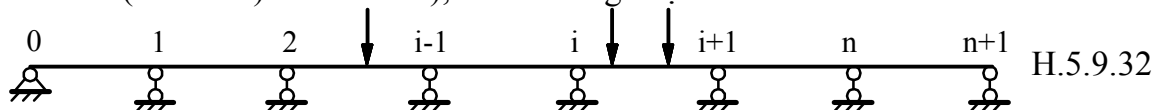
b. Biểu đồ lực cắt, lực dọc (H5.9.30 & H5.9.31)

III. Tính dầm liên tục bằng phương pháp tiêu cự mômen:

* **Mục đích:** Là đi vận dụng khéo léo phương pháp phương trình 3 mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp mà không phải giải hệ phương trình chính tắc. Nếu trường hợp tải trọng tác dụng lên nhiều nhịp thì có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về thành tổng của nhiều bài toán, mỗi bài toán tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp.

Ví dụ: Hệ trên hình (H.5.9.32) có thể phân tích thành hai trường hợp như trên hình (H.5.9.33 & H.5.9.34)

Với dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng lên một nhịp (Ví dụ dầm trên hình (H.5.9.33) & H.5.9.34), ta có những nhận xét sau:



a. Đường đàn hồi (đường đứt nét) lượn theo hình sóng trên những nhịp kế tiếp nhau.

b. Trên những nhịp không chịu tải trọng tác dụng thì mômen uốn tại hai gối tựa liên tiếp luôn trái dấu nhau, mômen uốn tại gối tựa gần nhịp chịu tải trọng hơn sẽ có giá trị tuyệt đối lớn hơn. Trên những nhịp này biểu đồ mômen uốn là đoạn thẳng cắt đường chuẩn tại 1 điểm gọi là *tiêu điểm mômen*.

+ Những tiêu điểm nằm bên trái nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm trái. Ký hiệu F_i .

+ Những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm phải. Ký hiệu F'_i .

Ở đây i là chỉ số nhịp thứ i .

c. Ta định nghĩa: tỷ số dương và lớn hơn đơn vị của 2 mômen uốn tại 2 gối tựa liên tiếp của nhịp không chịu tải trọng tác dụng là tỷ số tiêu cự mômen.

+ Đối với nhịp nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng:

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}} : \text{gọi là tỷ số tiêu cự trái.}$$

+ Đối với nhịp nằm bên phải của nhịp chịu tải trọng:

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} : \text{gọi là tỷ số tiêu cự phải}$$

Dễ thấy nếu biết được tỷ số tiêu cự mômen thì sẽ biết được vị trí của tiêu điểm mômen và ngược lại.

d. Ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen nếu biết được 2 yếu tố:

+ Mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng.

+ Các tỷ số tiêu cự mômen.

1. Xác định tỷ số tiêu cự :

a. Tỷ số tiêu cự trái: (k_i)

Xét 2 nhịp thứ i và $(i-1)$ nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng tác dụng. Viết phương trình 3 mômen cho gối $(i-1)$:

$$\lambda_{i-1} \cdot M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} + \lambda_i \cdot M_i = 0$$

($\Delta_{i-1P} = 0$ do trên các nhịp này không chịu tải trọng tác dụng)

Chia 2 vế của phương trình cho M_{i-1} ta được:

$$\lambda_{i-1} \cdot \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

Mặt khác: $k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}, k_{i-1} = -\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}}$

Thay vào, rút gọn ta được:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[2 + \frac{1}{k_{i-1}} \right] \quad (5-27)$$

Công thức (5-12) có tính truy hồi nghĩa là có thể xác định được k_i nếu biết được k_{i-1} .

+ Nếu gối tựa đầu tiên là khớp: (H.5.9.35)

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

+ Nếu gối tựa đầu tiên là ngàm: (H.5.9.36)

Đưa về hệ tương đương có gối tựa đầu tiên là khớp (H.5.9.37), ta có $k_0 = \infty$. Từ công thức (5-12) ta tính được:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{1}{k_0} \right] \\ &= 2 + \frac{0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 2 \end{aligned}$$

b. Tỷ số tiêu cự phải: (k'_i)

Tương tự, ta thiết lập được:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right] \quad (5-28)$$

Công thức truy hồi (5-13) được xác định theo chỉ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng:

+ Nếu gối tựa cuối cùng là khớp: $k'_{n+1} = \infty$

+ Nếu gối tựa cuối cùng là ngàm: $k'_{n+1} = 2$

2. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng tác dụng:

Giả sử tải trọng tác dụng lên nhịp thứ i , mômen cần xác định là M_{i-1} , M_i . Bằng cách phân tích phương trình 3 mômen cho 2 gối tựa thứ i và $(i-1)$ ta được kết quả:

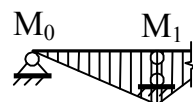
$$M_{i-1} = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_iJ_i} \cdot \frac{b_ik'_i - a_i}{k_ik'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{b_ik'_i - a_i}{k_ik'_i - 1} \quad (5-29)$$

$$M_i = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_iJ_i} \cdot \frac{a_ik_i - b_i}{k_ik'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{a_ik_i - b_i}{k_ik'_i - 1} \quad (5-30)$$

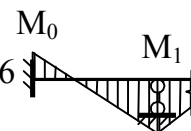
Chú ý:

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp đầu tiên và gối tựa đầu tiên là khớp:

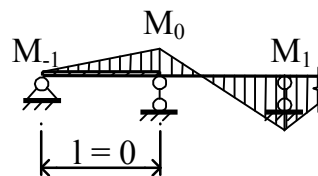
$$M_0 = 0; M_1 = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1k_1 - b_1}{k_1k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1\infty - b_1}{\infty k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1}{k'_1}$$



H.5.9.35



H.5.9.36



H.5.9.37

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp cuối cùng và gối tựa cuối cùng là khớp: ($k'_{n+1} = \infty$)

$$M_{n+1} = 0; M_n = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2} \cdot \frac{b_{n+1}k'_{n+1} - a_{n+1}}{k_{n+1}k'_{n+1} - 1} = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2} \cdot \frac{b_{n+1}}{k_{n+1}}$$

3. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên nhịp chịu tải trọng tác dụng: dựng tung độ của 2 gối tựa của nhịp và treo biểu đồ (M_p^o) vào.

- Bên trái của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_{i-1} = -\frac{M_i}{k_i}$$

- Những nhịp bên phải của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_i = -\frac{M_{i-1}}{k'_i}$$

b. Biểu đồ lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ mômen.

c. Biểu đồ lực dọc: Thường trùng với đường chuẩn.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.5.9.38)

1. Tạo hệ cơ bản đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_p^o), xác định các đại lượng:

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}lf = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{32}{3}$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$

$$\rightarrow \lambda_1 = 3m; \lambda_2 = 2m; \lambda_3 = \lambda_4 = 3m.$$

2. Xác định các tỷ số tiêu cự mômen:

a. Tỷ số tiêu cự trái:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right]$$

Thay $k_1 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k_2 = 2 + \frac{3}{2} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 5; k_3 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{5} \right] = 3,2; k_4 = 2 + \frac{3}{3} \left[2 - \frac{1}{3,2} \right] = 3,68$$

b. Tỷ số tiêu cự phải:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right]$$

Thay $k'_4 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k'_3 = 2 + \frac{3}{3} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 4; k'_2 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{4} \right] = 4,625; k'_1 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{4,625} \right] = 3,498$$

3. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2} \cdot \frac{b_2 k'_2 - a_2}{k_2 k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2 \cdot 3} \cdot \frac{2.4,625 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,311$$

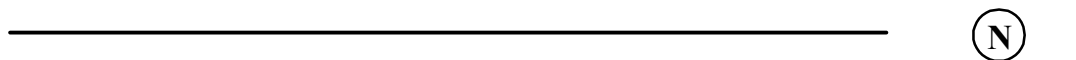
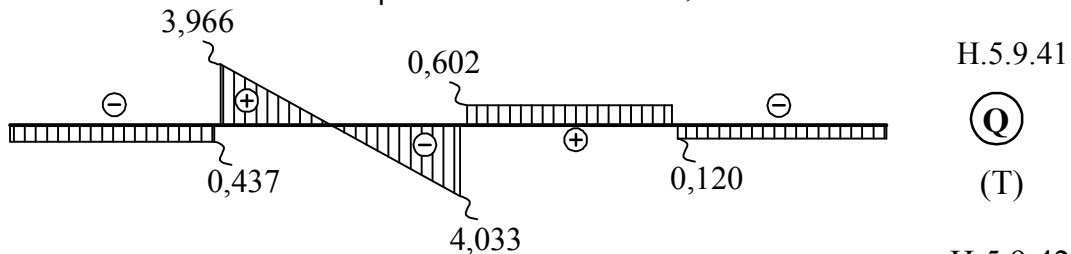
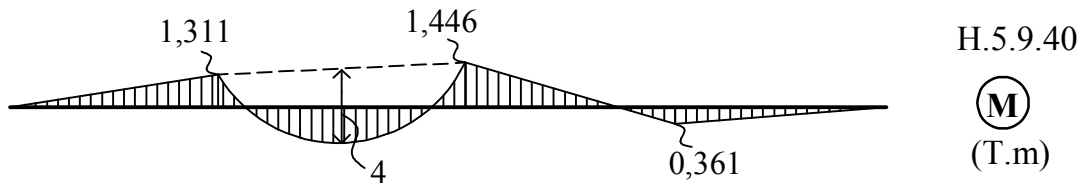
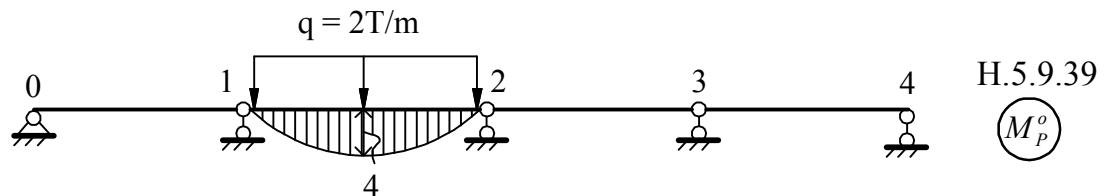
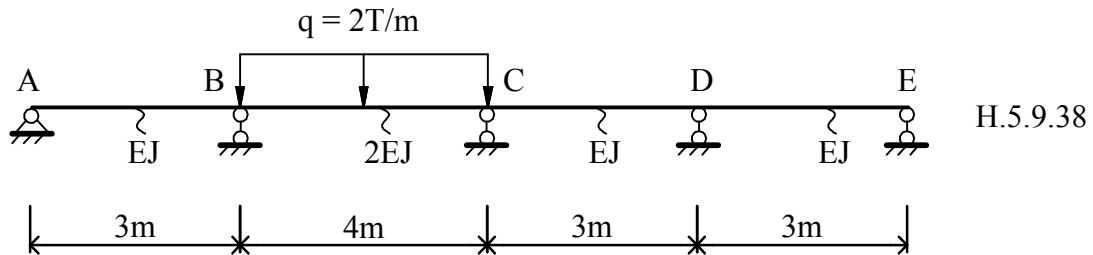
$$M_3 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2} \cdot \frac{a_2 k_2 - b_2}{k_2 k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2 \cdot 3} \cdot \frac{2.5 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,446$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: Kết quả trên hình (H.5.9.40)

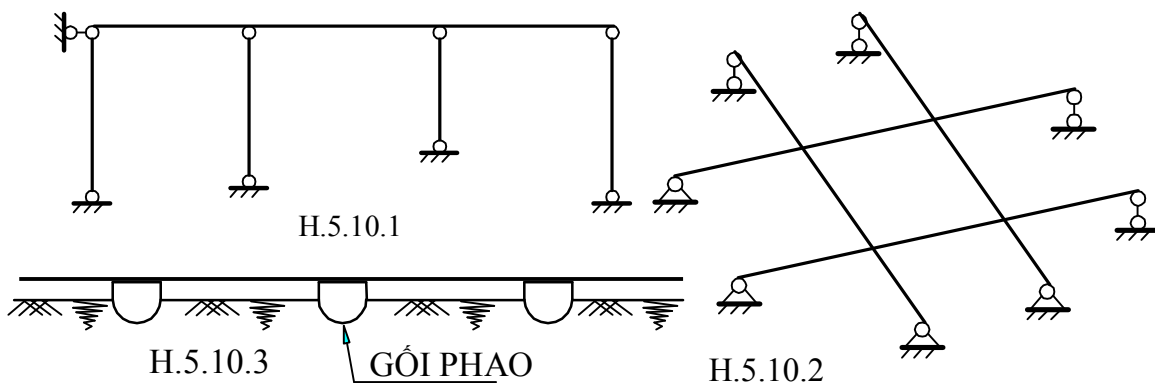
b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M). (H.5.9.41).

c. Biểu đồ lực dọc: Trùng với đường chuẩn.



§10. TÍNH DẦM LIÊN TỤC ĐẶT TRÊN CÁC GỐI TỰA ĐÀN HỒI

I. Khái niệm: là những dầm liên tục đặt trên các gối tựa có khả năng chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm như cột có chiều dài hữu hạn hệ dầm đỡ dầm đang xét (H.5.10.2), dầm trên các gối phao (H.5.10.3)...



Gọi k_i là hệ số đàn hồi của gối tựa thứ i . Về ý nghĩa, k_i là chuyển vị của gối tựa thứ i khi gối chịu lực dọc bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ i có tiết diện F_i , chiều cao d_i sẽ là $k_i = \frac{1 \cdot d_i}{EF_i}$. Vậy nếu phản lực tại gối tựa thứ i là R_i thì chuyển vị tại gối tựa này là $k_i R_i$. Ta biểu thị các gối tựa bằng các lò xo với hệ số k_i .

III. Phương trình năm mômen:

1. Hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta xét các nhịp thứ $(i-2)$, $(i-1)$, i , $(i+1)$, $(i+2)$ của một dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi như trên hình (H.5.10.4). Tương tự bài toán dầm liên tục, tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay hàn bằng khớp) (H.5.10.6)

2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{i1} M_1 + \delta_{i2} M_2 + \dots + \delta_{in} M_n + \Delta_{iP} = 0$$

Nhận xét rằng: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$; δ_{ki} là chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở 2 bên gối tựa thứ k do $M_i = 1$ gây ra. Với cách chọn hệ cơ bản như trên thì M_i chỉ gây ra biến dạng tại nhịp thứ $(i-1)$, i , $(i+1)$, $(i+2)$ (H.5.10.9) và chỉ gây ra chuyển vị góc xoay tại các gối tựa $(i-2)$, $(i-1)$, i , $(i+1)$, $(i+2)$. Điều này có ý nghĩa $\delta_{(i-2)i}, \delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i}, \delta_{(i+2)i} \neq 0$ còn các hệ số $\delta_{ki} (k \neq i-2, i-1, i, i+1) = 0$.

Vậy ta viết phương trình thứ i :

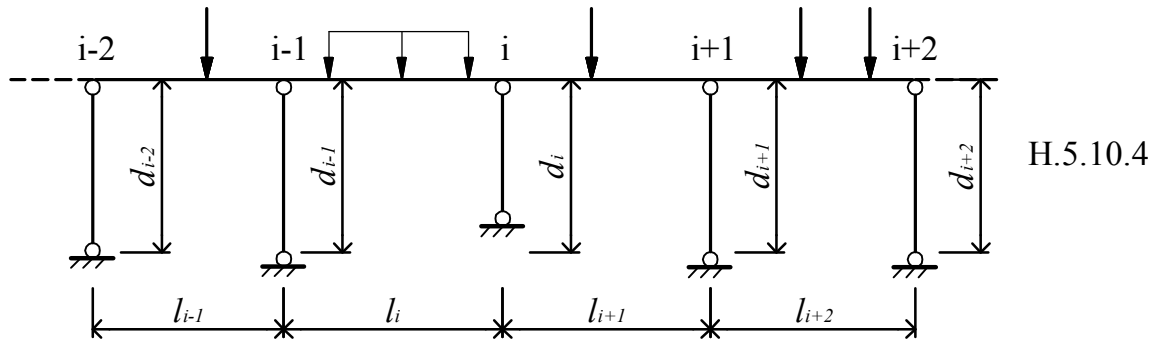
$$\delta_{i(i-2)} M_{i-2} + \delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \delta_{i(i+2)} M_{i+2} + \Delta_{iP} = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình năm mômen.

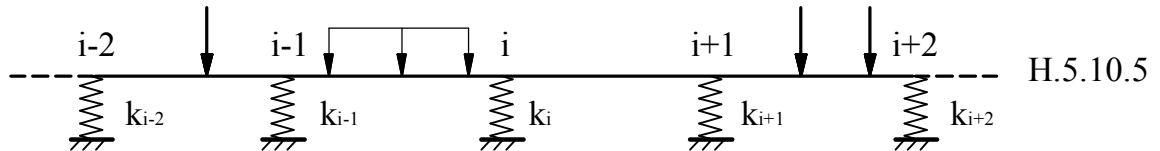
3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Các hệ số này ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn còn phải kể đến biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi.

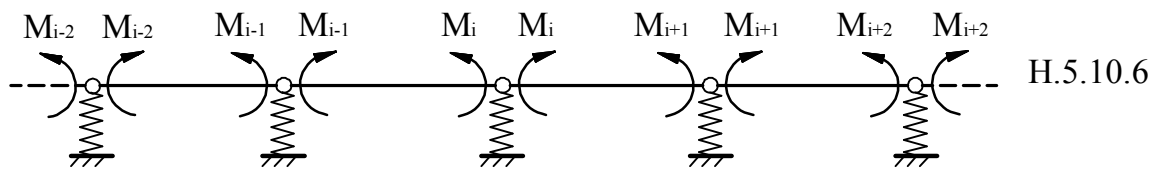
$$\delta_{ik} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_k) + \sum_m \bar{N}_{mi} \cdot \bar{N}_{mk} \cdot \frac{d_m}{EF_m}$$



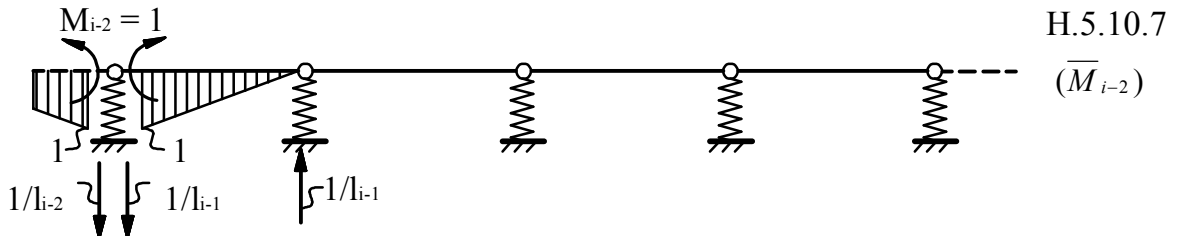
H.5.10.4



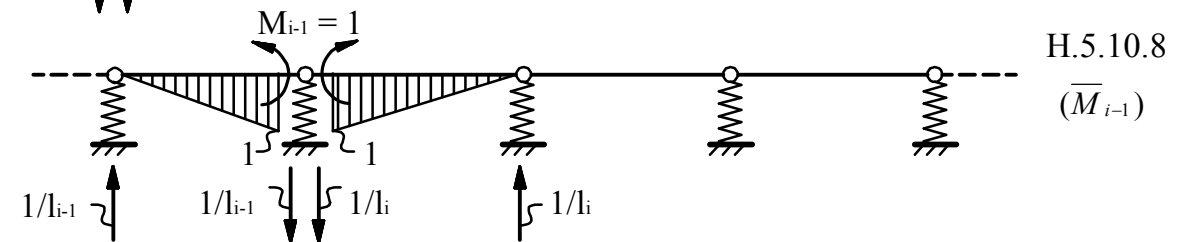
H.5.10.5



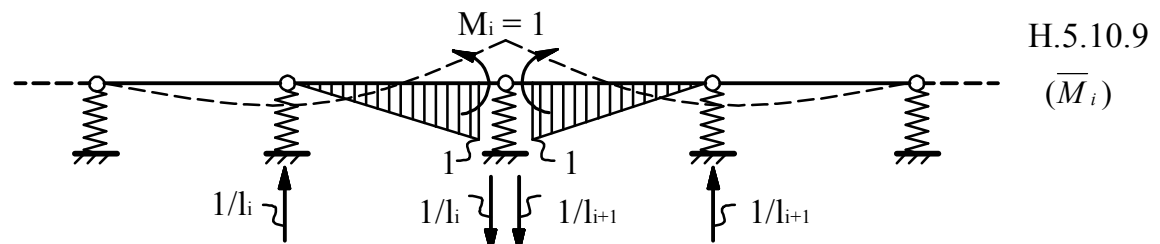
H.5.10.6



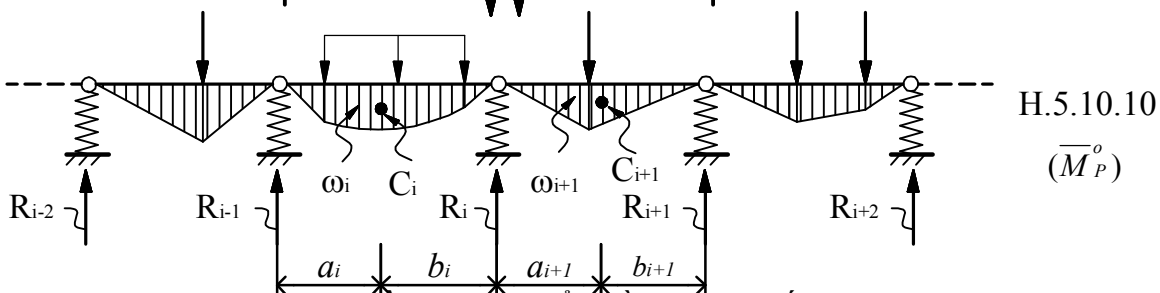
H.5.10.7



H.5.10.8



H.5.10.9

H.5.10.10
(\bar{M}_P^o)

Trong đó: $(\bar{M}_i)(\bar{M}_k)$ lần lượt là biểu đồ mômen uốn do $M_i = 1$, $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$\bar{N}_{mi}$, $\bar{N}_{mk}$ lần lượt là lực dọc (phản lực) trong gối tựa thứ m do $M_i = 1$ và $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + \left(-\frac{1}{l_{i-1}}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} = \frac{k_{i-1}}{l_{i-1}l_i}$$

$$\begin{aligned}\delta_{i(i-1)} &= \frac{l_i}{6EJ_i} + \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_i}{EF_i} \\ &= \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{k_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{k_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) \delta_{ii}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{ii} &= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \left(-\frac{1}{l_i}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 \cdot \frac{d_i}{EF_i} + \left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right) \cdot \frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}} \\ &= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 k_i + \left(\frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 k_{i+1}\end{aligned}$$

Thay chỉ số i trong hệ số $\delta_{i(i-1)}$ bằng (i-1) ta sẽ được $\delta_{i(i-1)}$.

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} + \frac{k_i}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)$$

Thay chỉ số i = (i + 2) trong hệ số $\delta_{i(i-2)}$ ta sẽ được $\delta_{i(i+2)}$

$$\delta_{i(i+2)} = \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}l_{i+2}}$$

Số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_P^o) + \sum_m \bar{N}_{mi} \cdot \bar{N}_{mP}^o \cdot \frac{d_m}{EF_m}$$

$(\bar{M}_P^o)$ là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản.

$(\bar{N}_m^P)$: lực dọc (phản lực) trong gối tựa m do P gây ra trên hệ cơ bản.

$$\begin{aligned}\Delta_{iP} &= \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \left(-\frac{1}{l_i}\right)\left(-R_{i-1}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \\ &+ \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-R_i\right) \cdot \frac{d_i}{EF_i} + \left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-R_{i+1}\right) \cdot \frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}} \\ \rightarrow \Delta_{iP} &= \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i} R_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) k_i R_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} R_{i+1}\end{aligned}$$

Các đại lượng ω_i , a_i , b_i có ý nghĩa như trong phần phương trình 3 mômen.

Thay các hệ số ta được phương trình 5 mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp dầm có độ cứng $EJ = \text{const}$, chiều dài các nhịp bằng nhau (bằng l), các gối tựa có hệ số đàn hồi là như nhau thì phương trình 5 mômen có dạng:

$$\begin{aligned}&\alpha M_{i-2} + (1 - 4\alpha) M_{i-1} + (4 + 6\alpha) M_i + (1 - 4\alpha) M_{i+1} + \\ &+ \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2} (\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l (R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0\end{aligned}$$

$$\text{Trong đó: } \alpha = \frac{6EJ}{l^2} k$$

Sau khi thiết lập và giải hệ thống phương trình 5 mômen, ta sẽ xác định và vẽ biểu đồ nội lực như đã trình bày trong phần dầm liên tục.

§11. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: là đường ảnh hưởng của các ẩn X_k , là các ẩn số thay thế cho các liên kết bị loại bỏ khi tạo hệ cơ bản.

1. Hệ cơ bản:

Tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa và thay thế bằng các ẩn số X_k như trong phần hệ cơ bản của phương pháp lực.

2. Hệ phương trình chính tắc:

Để vẽ đường ảnh hưởng ta giả thiết trên công trình chỉ có 1 lực $P = 1$ di động theo 1 tọa độ z . Lực này bằng đơn vị và duy nhất tác dụng nên số hạng tự do chỉ còn Δ_{kP} và được thay bằng δ_{kP} . Do đó, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2P} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nP} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ: (δ_{km}).

δ_{km} không phụ thuộc vào lực $P = 1$ di động và được xác định như hệ chịu tải trọng bất động: $\delta_{km} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_m)$.

b. Số hạng tự do: (δ_{kP})

δ_{kP} do $P = 1$ động gây ra nên sẽ thay đổi theo tọa độ chạy z của lực P di động. Khi xác định δ_{kP} ta nên chia nhiều trường hợp của lực $P = 1$ di động với mỗi trường hợp P di động trên một phần tử thuộc hệ. Với mỗi trường hợp ta vẽ được một "dạng" của (M_P^o).

$$\delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o)$$

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

Sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng. Trong phương trình này các ẩn X_k được biểu diễn qua các số hạng tự do (δ_{kP}) và hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} + \dots + \beta_{1n}\delta_{nP} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} + \dots + \beta_{2n}\delta_{nP} \\ \dots \\ X_n = \beta_{n1}\delta_{1P} + \beta_{n2}\delta_{2P} + \dots + \beta_{nn}\delta_{nP} \end{cases}$$

Trong đó β_{ik} là hệ số ảnh hưởng, được xác định theo công thức sau:

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

D là định thức của hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ik} là định thức được suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng thứ i cột thứ k (hoặc hàng k cột i)

Sau khi xác định được X_k (là hàm theo tọa độ chạy z của $P = 1$ di động), cho z biến thiên sẽ vẽ được đ.a.h. X_k .

II. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực, chuyển vị:

Sau khi tìm được các đường ảnh hưởng cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) theo biểu thức sau:

$$\text{đ.a.h.} S = \bar{S}_1 \cdot (\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{S}_2 \cdot (\text{đ.a.h.} X_2) + \dots + \bar{S}_n \cdot (\text{đ.a.h.} X_n) + \text{đ.a.h.} S^0 \quad (5-31)$$

Trong đó: $\bar{S}_k$ là giá trị của S do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

đ.a.h. X_k : là các ảnh hưởng cơ bản.

đ.a.h. S^0 : đường ảnh hưởng của S trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản chọn là tĩnh định thì đ.a.h. S^0 được vẽ như trong phần cơ học kết cấu I.

* *Chú ý*: Do phương trình đường ảnh hưởng $S(z)$ là hàm bậc cao theo z nên trong cách vẽ thực hành người ta sử dụng phương pháp điểm chia và lập thành bảng tính. Có thể tham khảo nội dung của bảng (B.5.11.1) bên dưới.

B.5.11.1 Bảng tính đ.a.h. S trong hệ siêu tĩnh

Điểm	z	đ.a.h. X_1	đ.a.h. X_2	...	đ.a.h. X_n	đ.a.h. S^0	đ.a.h. S
...	...	...	...	...	...		

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.5.11.1). Cho EJ trong các thanh bằng hằng số trên toàn hệ.

1. Vẽ đường ảnh hưởng cơ bản:

a. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

b. hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.5.11.2)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Hệ số chính và phụ δ_{km} :

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{2}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2EJ}$$

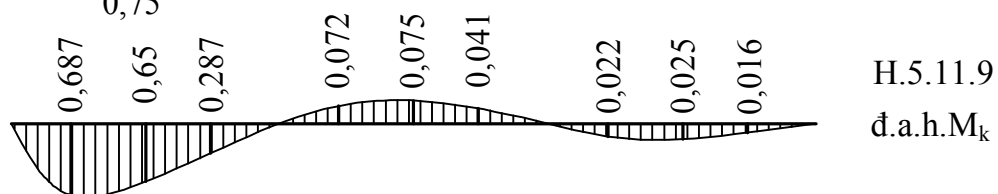
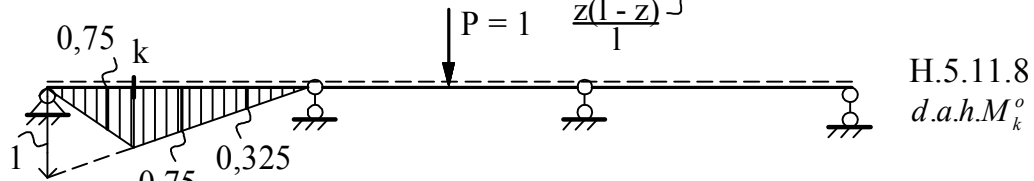
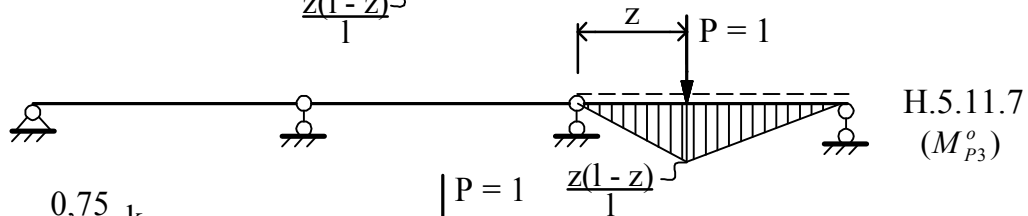
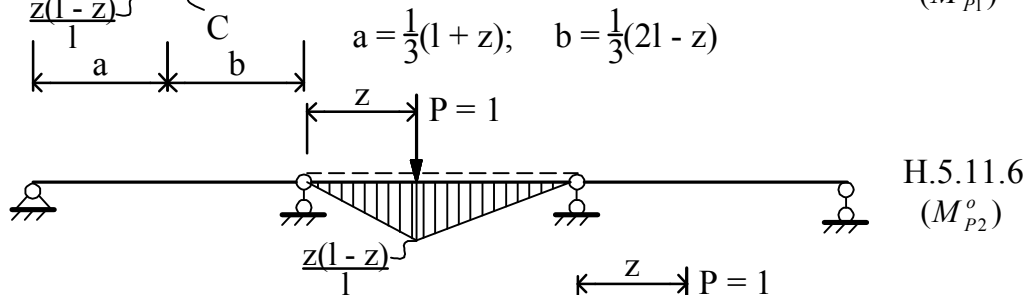
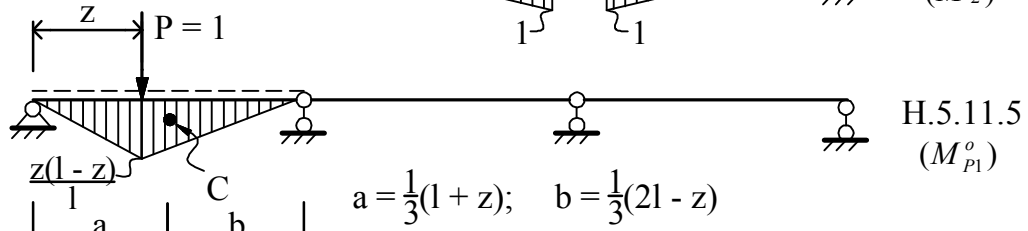
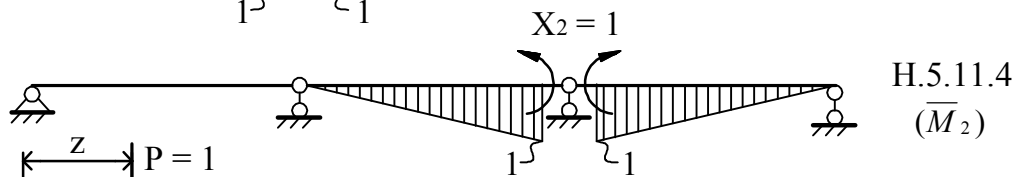
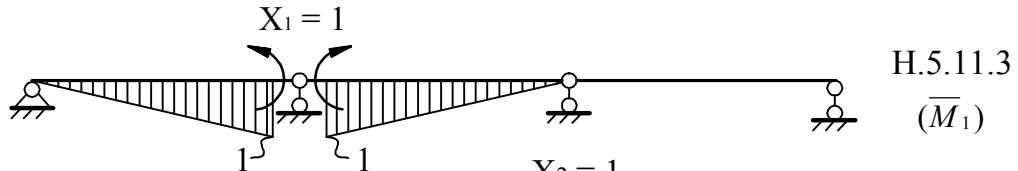
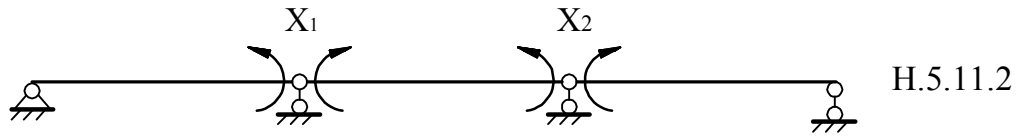
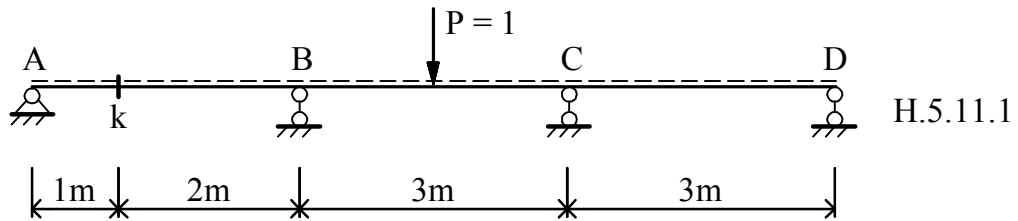
$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ} (= \delta_{11})$$

- Xác định số hạng tự do δ_{kP} :

Chia đường xe chạy ra làm ba đoạn (phần tử) AB, BC, CD. Ứng với mỗi phần tử ta chọn gốc tọa độ tại đầu trái. Ứng với mỗi phần tử, ta vẽ được (M_P^o) tương ứng (H.5.11.5 $\rightarrow$ H.5.11.7)

+ Khi $P = 1$ di động trên AB ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_{P1}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+z)}{3} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18}$$



$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_{p1}^o) = 0$$

+ Khi $P = 1$ di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_{p2}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(2.3-z)}{3} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M_{P2}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18}$$

+ Khi P = 1 di động trên CD ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_{P3}^o) = 0$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M_{P3}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

d. Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} \end{cases}$$

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{EJ} & \frac{1}{2EJ} \\ \frac{1}{2EJ} & \frac{2}{EJ} \end{vmatrix} = \frac{15}{4(EJ)^2}$$

$$\beta_{11} = (-1)^3 \cdot \frac{2}{EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

$$\beta_{12} = (-1)^4 \cdot \frac{1}{2EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{22} = (-1)^5 \cdot \frac{2}{EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

Thay vào phương trình:

+ Khi P = 1 di động trên AB ($z \in [0;3]$)

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} + \frac{2EJ}{15} \cdot 0 = -\frac{1}{33,75} \cdot z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} - \frac{8EJ}{15} \cdot 0 = \frac{1}{135} \cdot z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} + \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} \\ &= -\frac{1}{33,75} \cdot z(3-z)(6-z) + \frac{1}{135} \cdot z(9-z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} - \frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} \\ &= \frac{1}{135} \cdot z(3-z)(6-z) - \frac{1}{33,75} \cdot z(9-z^2) \end{aligned}$$

+ Khi P = 1 di động trên CD ($z \in [0;3]$)

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15} \cdot 0 + \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} = \frac{1}{135} \cdot z(3-z)(6-z)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15} \cdot 0 - \frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} = -\frac{1}{33,75} \cdot z(3-z)(6-z)$$

Cho z biến thiên trên từng đoạn ta có thể vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản.

2. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại k :

$$\text{đ.a.h. } M_k^o = \bar{M}_{k1}(\text{đ.a.h. } X_1) + \bar{M}_{k2}(\text{đ.a.h. } X_2) + \text{đ.a.h. } M_k^o$$

đ.a.h. M_k^o được vẽ trên hình (H.5.11.8)

$$\bar{M}_{k1} = \frac{1}{3}; \bar{M}_{k2} = 0$$

Ta lập bảng tính toán: Chia đường xe chạy ra làm 12 đoạn, mỗi đoạn dài 0,75m.

Phần tử	$z(m)$	đ.a.h. X_1	đ.a.h. X_2	$\bar{M}_{k1}$ đ.a.h. X_1	$\bar{M}_{k2}$ đ.a.h. X_2	đ.a.h. M_k^o	đ.a.h. M_k
AB	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,187	0,047	-0,063	0	0,75	0,687
	1,5	-0,3	0,075	-0,1	0	0,75	0,65
	2,25	-0,263	0,066	-0,088	0	0,375	0,287
	3	0	0	0	0	0	0
BC	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,216	-0,122	-0,072	0	0	0,072
	1,5	-0,225	-0,225	-0,075	0	0	-0,075
	2,25	-0,122	-0,216	-0,041	0	0	-0,041
	3	0	0	0	0	0	0
CD	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	0,066	-0,187	0,022	0	0	0,022
	1,5	0,075	-0,3	0,025	0	0	0,025
	2,25	0,047	-0,263	0,016	0	0	0,016
	3	0	0	0	0	0	0

Bảng 5.12. Bảng tính đ.a.h cơ bản và đ.a.h. M_k

§12. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Theo thời gian tác dụng lên công trình, tải trọng được chia thành 2 loại:

+ Tải trọng lâu dài: Nội lực do nó gây ra không đổi.

+ Tải trọng tạm thời: Nội lực do nó gây ra sẽ thay đổi.

Tải trọng tác dụng lên công trình gồm 2 loại trên nên nội lực sẽ thay đổi trong suốt quá trình tồn tại của công trình. Do đó, khi thiết kế cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất và nhỏ nhất của nội lực tại tất cả các tiết diện của hệ. Nếu biểu diễn nó lên trên một đồ thị sẽ được biểu đồ gọi là biểu đồ bao nội lực.

I. Định nghĩa biểu đồ bao nội lực:

Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất do tải trọng lâu dài và tải trọng tạm thời có thể có gây ra tại tiết diện tương ứng.

II. Cách thực hiện:

Để đơn giản, ta xem tải trọng tạm thời tác dụng đồng thời lên từng nhịp của hệ và tiến hành các bước sau:

Bước 1: Vẽ biểu đồ nội lực do tải trọng lâu dài tác dụng lên toàn hệ gây ra (S_{ld})

Bước 2: Lần lượt vẽ các biểu đồ nội lực do tải trọng tạm thời gây ra sao cho mỗi trường hợp tải trọng tạm thời chỉ tác dụng lên một nhịp của hệ (S_{tt})

Bước 3: Vẽ biểu đồ bao nội lực bằng cách xác định tung độ lớn nhất (nhỏ nhất) tại các tiết diện của hệ. Biểu thức xác định có thể được viết:

$$S_{\max}^k = S_{ld}^k + \Sigma S_{tt}^k(+)$$

$$S_{\min}^k = S_{ld}^k + \Sigma S_{tt}^k(-)$$

k: chỉ tiết diện xác định tung độ biểu đồ bao.

$\Sigma S_{tt}^k(+)$, $\Sigma S_{tt}^k(-)$: lấy tổng các trường hợp nội lực tại k do tải trọng tạm thời gây ra mang dấu dương hay âm.

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ.

§1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Các giả thiết của phương pháp chuyển vị:

- *Giả thiết 1:* Các nút của hệ được xem là tuyệt đối cứng. Do đó, khi biến dạng, các đầu thanh qui tụ vào mỗi nút sẽ có chuyển vị thẳng và góc xoay là như nhau.

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

- *Giả thiết 2:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt khi xét biến dạng của các cấu kiện bị uốn.

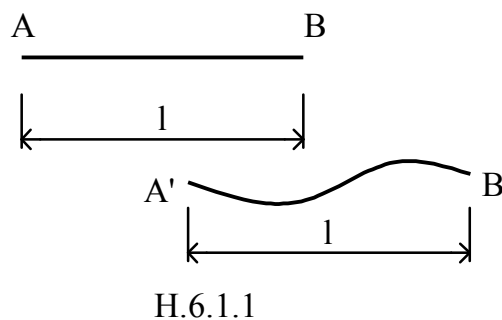
Giả thiết này không làm thay đổi số lượng ẩn số nhưng làm cho bảng tra nội lực các cấu kiện mẫu đơn giản hơn.

- *Giả thiết 3:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục khi xét biến dạng của các cấu kiện chịu uốn. (biến dạng dọc trục vì nhiệt độ không được phép bỏ qua)

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

Ngoài ra, còn tuân theo giả thiết vật liệu, tuân theo định luật Hook, biến dạng và chuyển vị là những đại lượng vô cùng bé.

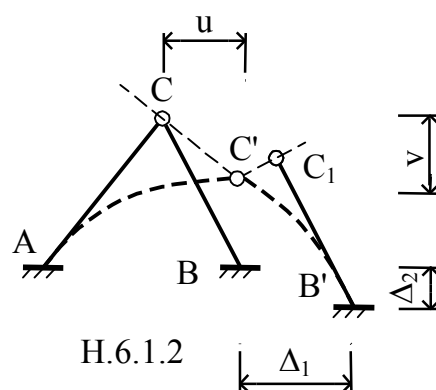
* **Kết luận:** Trước và sau khi biến dạng, khoảng cách giữa 2 nút ở hai đầu thanh theo phương ban đầu của thanh là không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ hoặc thanh có hai đầu khớp với độ cứng EF khác vô cùng (H.6.1.1).



II. Hệ xác định động và hệ siêu động:

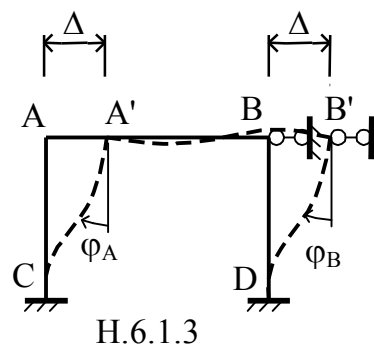
1. Hệ xác định động: là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, ta có thể xác định được các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học).

Xét hệ trên hình vẽ (H.6.1.2) khi B chịu chuyển vị cưỡng bức thì các đầu thanh quy tụ vào C chỉ tồn tại 2 thành phần chuyển vị thẳng (u , v). Ta có thể xác định được hai thành phần này chỉ bằng điều kiện động học (hình học). Vậy hệ đã cho là hệ xác định động.



2. Hệ siêu động: là những hệ khi chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức ta chưa thể xác định được tất cả các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học) mà phải sử dụng thêm điều kiện cân bằng.

Ví dụ: Khi liên kết thanh chuyển vị ngang Δ (H.6.1.3), bằng điều kiện động học có thể xác định được chuyển vị thẳng tại A và B (chuyển vị ngang bằng Δ , chuyển vị đứng bằng 0). Tuy nhiên, chưa



thể xác định được góc xoay (φ_A, φ_B). Vậy hệ là hệ siêu động.

*** Chú ý:**

- Khái niệm về hệ siêu động hay xác định động là phụ thuộc vào các giả thiết chấp nhận.

- Hệ siêu động (xác định động) có thể là hệ tĩnh định hay siêu tĩnh. Ta chỉ tập trung nghiên cứu hệ siêu động đồng thời là siêu tĩnh.

III. Bậc siêu động:

1. Khái niệm: Bậc siêu động của hệ siêu động chính là số lượng các chuyển vị độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất trong hệ.

$$n = n_1 + n_2 \quad (6-1)$$

n_1 : số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút, n_1 chính bằng số nút trong hệ.

n_2 : số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất.

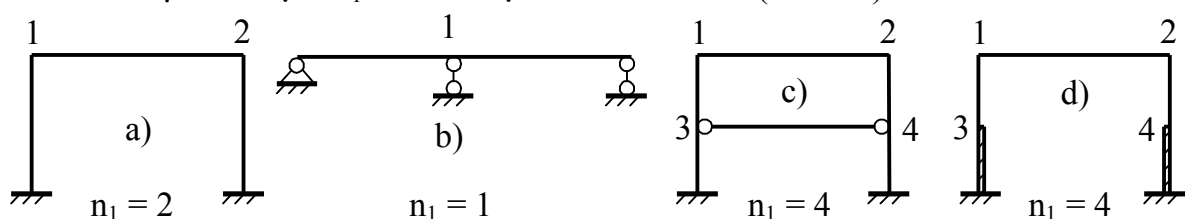
2. Cách xác định:

a. Xác định n_1 : Bằng cách tính số lượng nút trong hệ. Nút là nơi giao nhau giữa các phần tử và được nối bằng liên kết hàn. Trong đó, phần tử là một cấu kiện mẫu tức là có biểu đồ nội lực cho trước và được lập sẵn thành bảng.

Đối với môn Cơ học kết cấu, phần tử là 1 đoạn thanh thẳng thỏa mãn các điều kiện:

- Độ cứng không đổi.
- Được nối với các phần tử khác hoặc trái đất chỉ bằng liên kết ở 2 đầu.

Ví dụ: Xác định n_1 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.4).

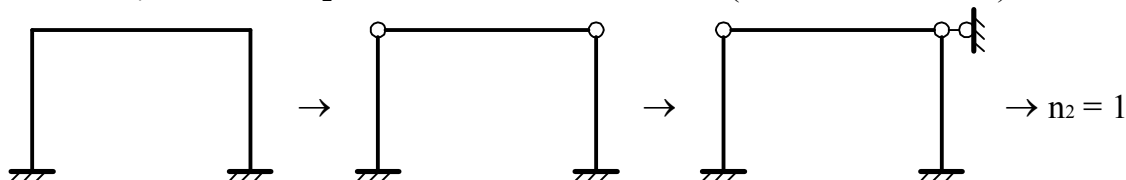


H.6.1.4

b. Xác định n_2 : Bằng cách tính số lượng các chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút và các khớp không nối đất. Để xác định, ta thay các nút, ngàm nối đất bằng các liên kết khớp để được 1 hệ mới.

Nếu hệ mới là bất biến hình thì $n_2 = 0$; nếu hệ mới là biến hình hay gần biến hình tức thời thì n_2 chính là số liên kết thanh vừa đủ thêm vào để hệ trở thành hệ bất biến hình.

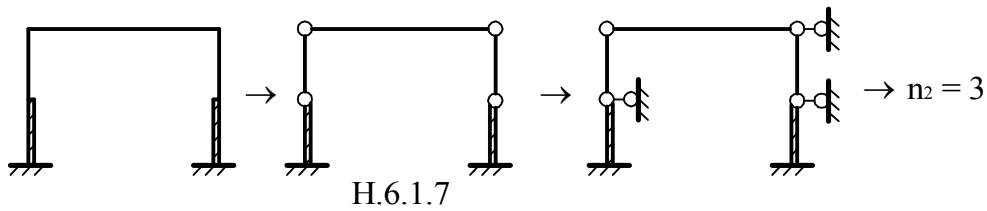
Ví dụ: Xác định n_2 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.5 → H.6.1.7).



H.6.1.5



H.6.1.6



**Chú ý:* Khái niệm về bậc siêu động có thể thay đổi và phụ thuộc vào các yếu tố:

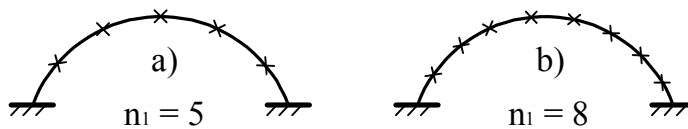
- Các giả thiết chấp nhận: chẳng hạn nếu phủ nhận giả thiết 3 thì n_1 không đổi còn n_2 tăng lên.

- Sơ đồ rời rạc hoá chấp nhận (H.6.1.8).

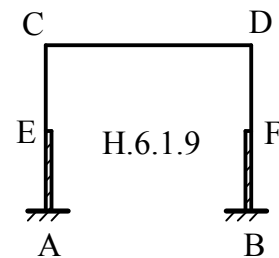
- Các cấu kiện mẫu mà người thiết kế sẵn có (H.6.1.9):

+ Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng có độ cứng không đổi (AB, BC, CD, DE, EF) thì $n = n_1 + n_2 = 4 + 3 = 7$.

+ Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng (AEC, CD, DFB) thì $n = 2 + 1 = 3$.



H.6.1.8



§2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

I. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị:

1. Định nghĩa: Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách đặt các liên kết phụ thêm vào hệ nhằm ngăn cản chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất

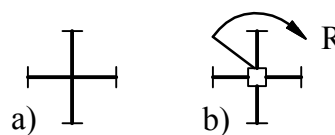
- Nếu các liên kết thêm vào khử được tất cả chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất thì hệ cơ bản là hệ xác định động.

- Nếu các liên kết chỉ khử được 1 phần chuyển vị của các nút thì hệ cơ bản là hệ siêu động nhưng có bậc siêu động thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản chỉ tồn tại những cấu kiện mẫu, tức là có biểu đồ nội lực cho sẵn trong bảng.

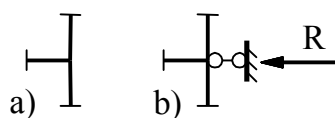
2. Các loại liên kết phụ thêm:

a. Liên kết mômen: Là loại liên kết chỉ ngăn cản chuyển vị góc xoay, không ngăn cản chuyển vị thẳng. Trong liên kết này chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực mômen. Ký hiệu (H.6.2.1).



H.6.2.1

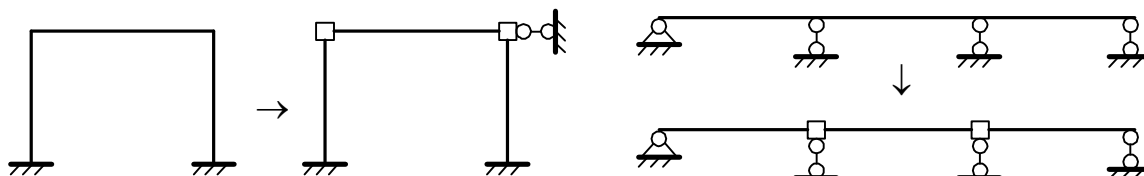
b. Liên kết lực (liên kết thanh): Liên kết này chỉ ngăn cản chuyển vị dọc theo trục thanh (trục liên kết). Trong liên kết thanh chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực dọc theo trục thanh.



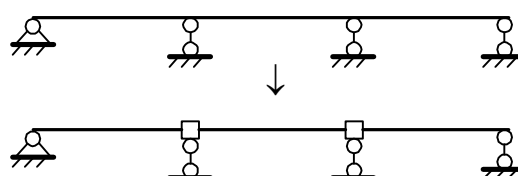
H.6.2.2

Ký hiệu: (H.6.2.2)

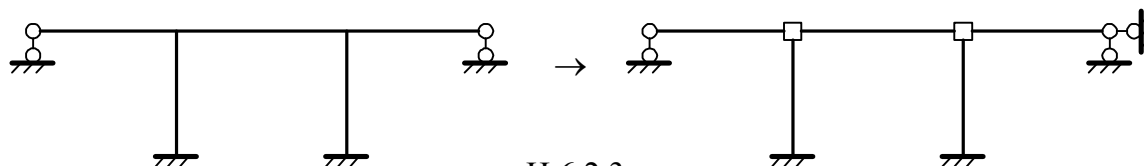
3. Các ví dụ tạo hệ cơ bản:



H.6.2.3a



H.6.2.3b



H.6.2.3c

Nhận xét:

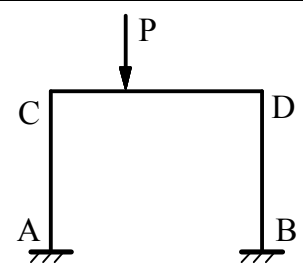
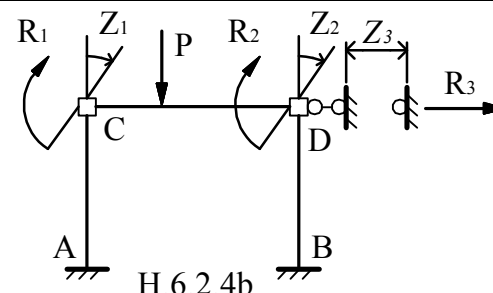
- Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố ảnh hưởng đến bậc siêu động là xác định.

- Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện rời rạc và làm việc độc lập nhau.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị:

Do đặt các liên kết phụ thêm vào nên hệ cơ bản có những yếu tố khác với hệ siêu động ban đầu. Vì vậy ta cần so sánh sự khác nhau đó và bổ sung thêm các điều kiện để hệ cơ bản làm việc giống với hệ ban đầu.

Giả sử xét hệ siêu động trên hình (H.6.2.4a) và hệ cơ bản của nó (H.6.2.4b).

 H.6.2.4a	 H.6.2.4b
- Về chuyển vị: Tại C và D có tồn tại chuyển vị ngang và góc xoay. - Về mặt phản lực: Tại C và D không tồn tại phản lực.	Tại C và D không tồn tại chuyển vị. Tại C và D tồn tại phản lực (R_1, R_2, R_3) tại các liên kết phụ thêm.

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu động ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1 , Z_2 , Z_3) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào.

- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1 , Z_2 , Z_3 , P) bằng không. Các điều kiện này được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có thể giải ra được (Z_1 , Z_2 , Z_3).

Tương tự như vậy ta mở rộng cho 1 hệ siêu động bất kỳ chịu các nguyên nhân bên ngoài (P , t , Z). Tạo hệ cơ bản bằng cách đặt n liên kết phụ thêm vào. Để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1 , $Z_2, \dots, Z_n$) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào. Các chuyển vị này có chiều tùy ý, tuy nhiên thường chọn xoay theo chiều kim đồng hồ, thẳng theo chiều từ trái sang phải. Các chuyển vị này đóng vai trò là ẩn số.

- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1 , $Z_2, \dots, Z_n$, P , t , Z) = 0.

Điều kiện thứ 2 được viết:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ R_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

Hệ phương trình này gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị.

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0.$$

Khai triển phương trình này theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$R_k(Z_1) + R_k(Z_2) + \dots + R_k(Z_n) + R_k(P) + R_k(t) + R_k(Z) = 0.$$

Gọi r_{km} là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết phụ thêm thứ m $Z_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(Z_m) = r_{km} \cdot Z_m$

Gọi R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} : lần lượt là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do nguyên nhân ngoài P , t , Z gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(P) = R_{kP}$, $R_k(t) = R_{kt}$, $R_k(Z) = R_{kZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển ta được:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} + R_{kt} + R_{kZ} = 0$$

Cho $k = \overline{1, n}$ ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

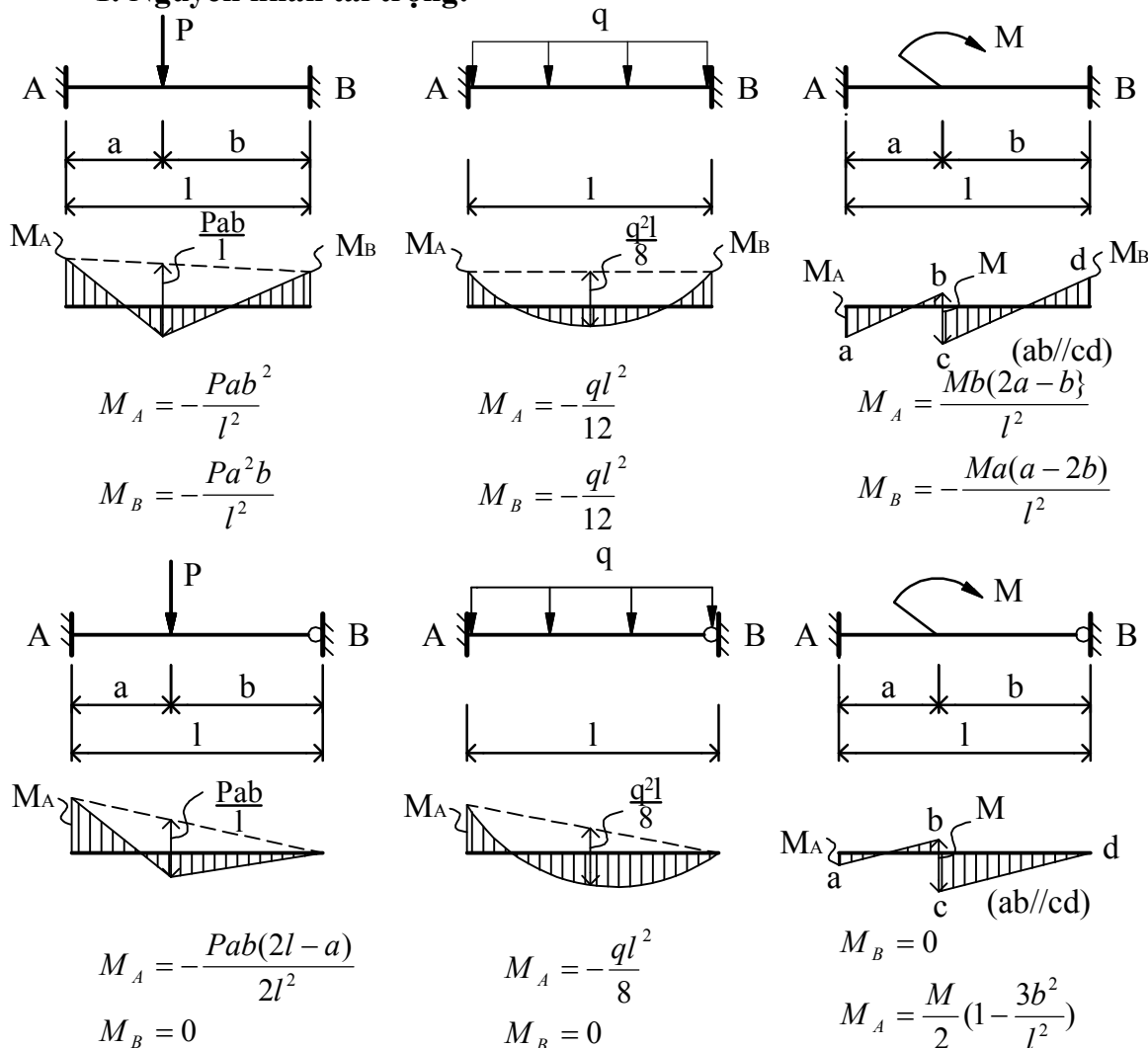
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} + R_{2t} + R_{2Z} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} + R_{nt} + R_{nZ} = 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

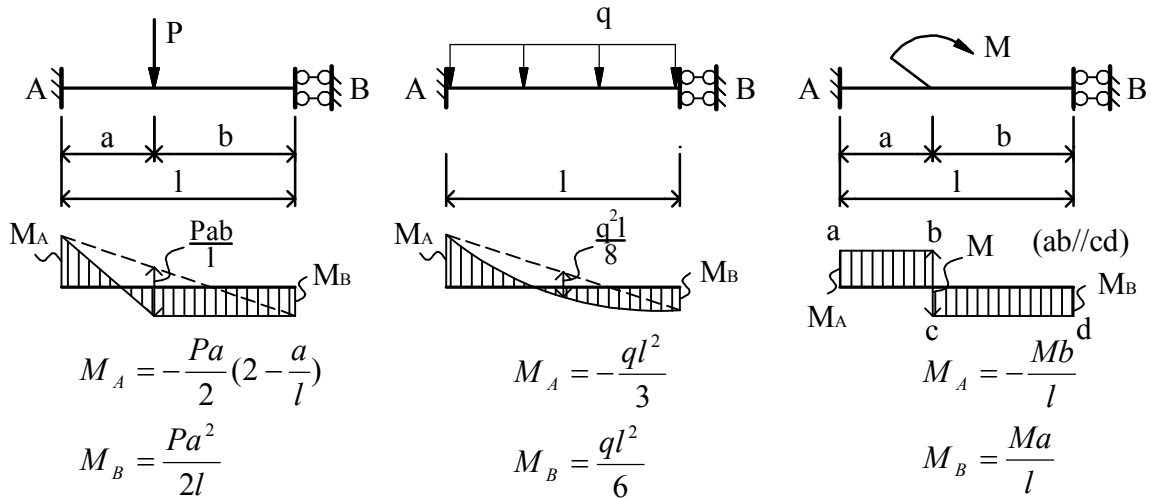
Trong hệ phương trình này:

- r_{kk} : gọi là hệ số chính, $r_{kk} > 0$; - r_{km} : ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $r_{km} = r_{mk}$
- R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} : gọi là số hạng tự do.

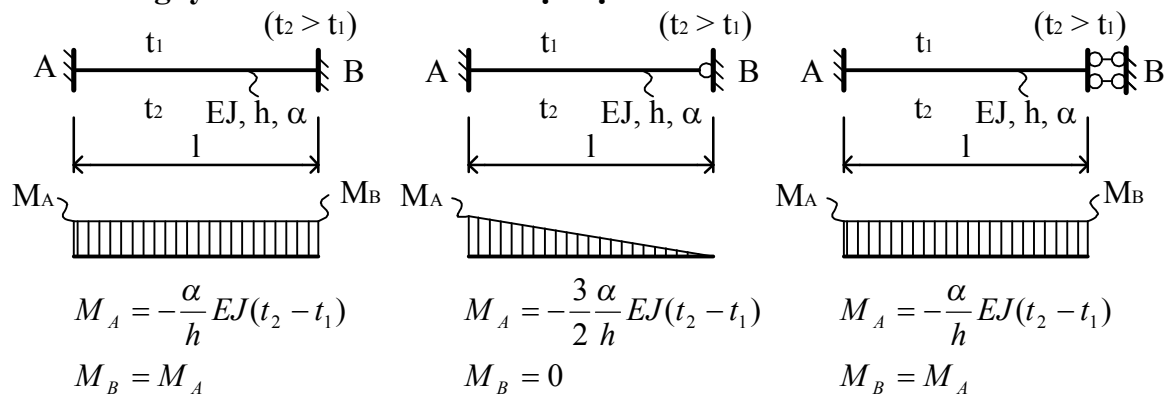
IV. Bảng tra nội lực cho một số phần tử:

1. Nguyên nhân tải trọng:

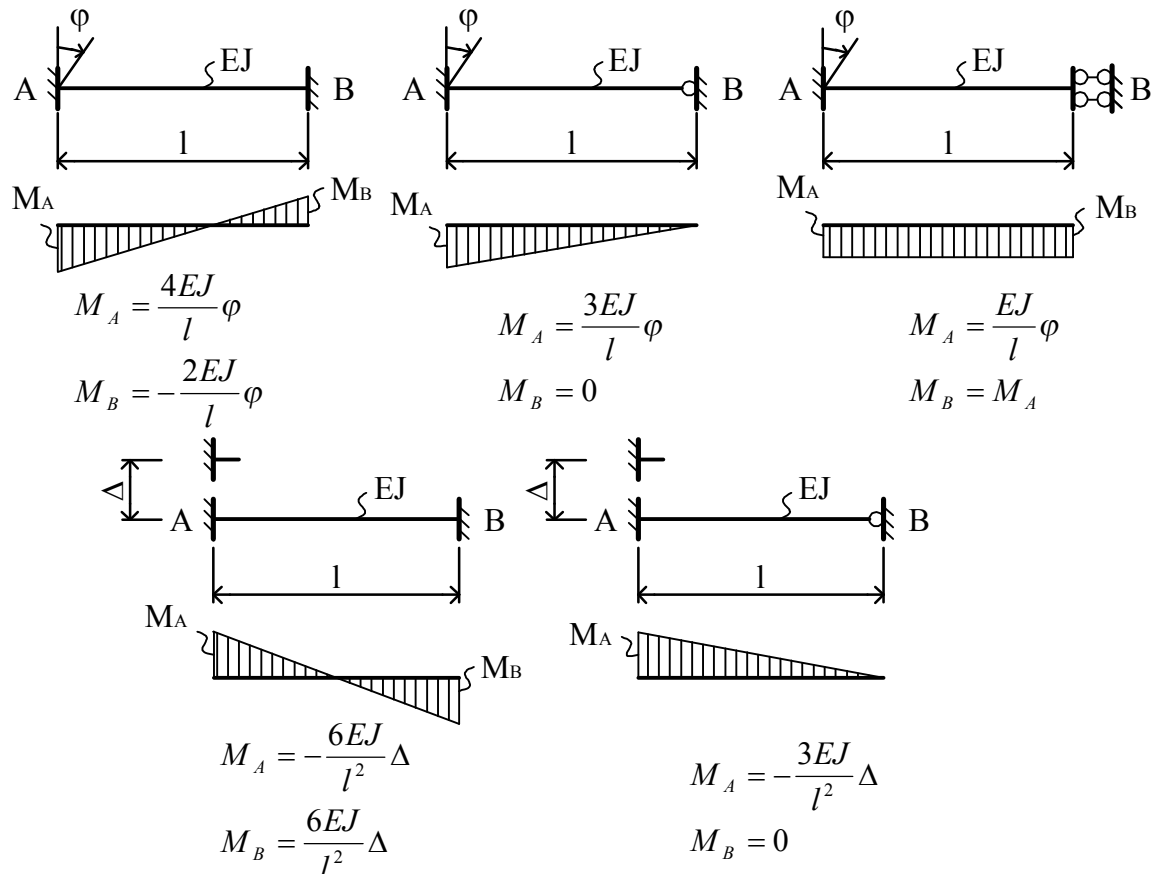




2. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:



3. Nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức:



V. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:**1. Vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản xác định động:**

a. Biểu đồ ($\bar{M}_k$): Là biểu đồ mômen uốn do riêng nguyên nhân $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

a.1. Trường hợp Z_k là chuyển vị góc xoay:

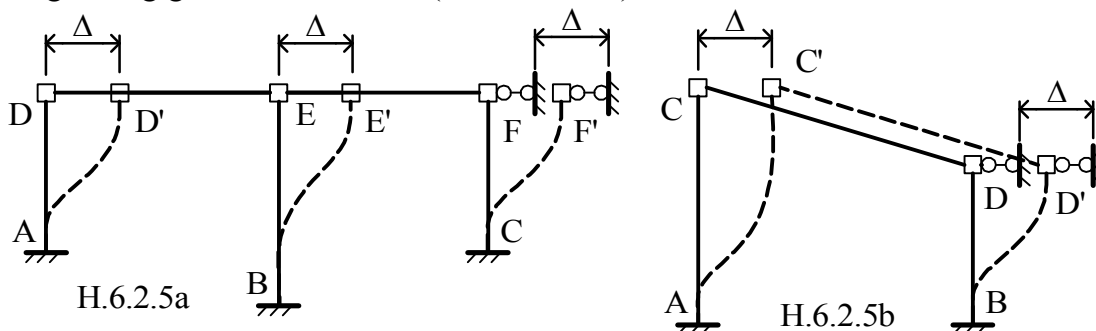
Nguyên nhân này chỉ gây ảnh hưởng cục bộ tại liên kết chịu Z_k , nghĩa là chỉ có các thanh có đầu quy tụ vào nút đó mới chịu ảnh hưởng. Do vậy biểu đồ ($\bar{M}_k$) được vẽ bằng cách rời rạc hệ cơ bản và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị góc xoay tại đầu thanh.

a.2. Trường hợp Z_k là chuyển vị thẳng:

Khi một nút chuyển vị thẳng sẽ gây ra chuyển vị thẳng tại nhiều nút trong hệ, do đó sẽ gây ra nội lực trong nhiều thanh. Mặc khác chỉ có chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh mới gây ra nội lực.

a.2.1 Khi hệ chỉ gồm các thanh đứng song song:

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thanh, khi 1 nút nào đó chuyển vị thẳng thì các thanh ngang và nghiêng sẽ tịnh tiến nghĩa là các thanh phần chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng không, còn các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.5a & b).

**a.2.2. Khi hệ có các thanh đứng không song song:**

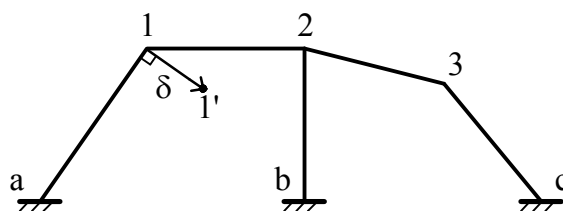
Thành phần chuyển vị thẳng cần tìm nói chung sẽ tồn tại trong tất cả các thanh, giá trị của chúng sẽ khác nhau trong mỗi thanh đứng. Các thành phần này có thể tìm bằng cách lập sơ đồ chuyển vị.

* Cơ sở của việc lập sơ đồ: Chuyển vị thẳng tại 1 nút sẽ biết nếu như biết được ít nhất 1 chuyển vị tại 2 đầu thanh đối diện quy tụ vào nút. Xem sự phân tích trên hình (H.6.1.2)

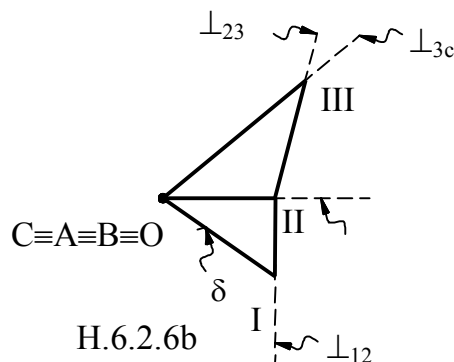
* Mục đích của việc lập sơ đồ chuyển vị là biểu diễn sự thay đổi vị trí của các đầu thanh lên sơ đồ mà trên đó ta có thể xác định được chuyển vị thẳng tương đối tại các đầu thanh. Ta tìm hiểu cách lập sơ đồ qua hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.6a). Trong đó, giả sử nút 1 chịu chuyển vị δ .

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm gốc và tượng trưng cho các điểm không có chuyển vị. Vậy nếu gọi A, B, C là tượng trưng cho các điểm a, b, c trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C trùng với O.

Bước 2: Qua O kẻ 1 đoạn $OI = \delta$ theo phương và chiều của chuyển vị nút 1, có độ lớn theo tỷ lệ xích tùy chọn. Điểm I là tượng trưng cho chuyển vị của nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.



H.6.2.6a



H.6.2.6b

Bước 3: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $1 \rightarrow I$, $b \rightarrow B$. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 12, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 2b. Giao điểm chính là II.

Bước 4: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Tương tự bước 3, qua II kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 23, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 3c. Giao điểm là điểm III.

Bước 5: Xác định kết quả. Để xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn IK tương ứng trên sơ đồ chuyển vị hoặc giải các tam giác với các góc và các cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

* Sau khi đã xác định chuyển vị thẳng, ta vẽ biểu đồ $(\bar{M}_k)$ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

b. Biểu đồ (M_p^o) : Là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. $(\bar{M}_p^o)$ được vẽ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

c. Biểu đồ (M_t^o) : Là biểu đồ mômen uốn do biến thiên nhiệt độ gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm hai thành phần:

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ của thớt trên và thớt dưới trong phạm vi mỗi cấu kiện và được đặc trưng bằng $\Delta t = t_2 - t_1$. Thành phần này gây ra (M_{Δ}^o) .

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ dọc trục thanh và được đặc trưng bằng t_c . Thành phần này gây ra (M_{tc}^o) .

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$(M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta}^o)$$

- (M_{Δ}^o) là do Δt gây ra. Nhưng sự chênh lệch nhiệt độ Δt chỉ làm cho thanh bị uốn cong mà không thay đổi chiều dài. Điều này có nghĩa Δt chỉ gây ra mômen uốn trong thanh đó mà không ảnh hưởng đến các thành phần tử khác. Vậy $(\bar{M}_{\Delta}^o)$ được vẽ bằng cách rời rạc hệ và tra bảng cho cái phần tử chịu Δt .

- (M_{tc}^o) do t_c gây ra. Mặc dù t_c không làm cho thanh bị uốn cong nhưng làm thay đổi chiều dài. Điều này gây ra chuyển vị thẳng tại các nút và gây ra nội lực trong hệ. So sánh với trường hợp hệ chịu nguyên nhân Z_k là chuyển vị thẳng thì có

sự tương tự nhưng ở đây sự chuyển vị của các nút do sự thay đổi chiều dài của các thanh. Vậy ta cũng đi lập sơ đồ chuyển vị (còn gọi là *giản đồ Williot*) như khi lập cho Z_k là chuyển vị thẳng nhưng cần bổ sung sự chuyển vị các nút do sự thay đổi chiều dài trong mỗi thanh.

Ta sẽ tìm hiểu cách lập sơ đồ chuyển vị qua hệ trên hình (H.6.2.7.a).

Biến dạng dọc trục của thanh ik được xác định bằng biểu thức

$$\Delta l_{ik} = \alpha l_{ik} t_{cik}$$

+ α hệ số dẫn nở vì nhiệt

+ t_{cik} , l_{ik} là biến thiên nhiệt độ dọc trục và chiều dài thanh ik

Trong ví dụ này giả sử biến dạng trong các thanh tương ứng là Δl_{a3} , Δl_{23} , Δl_{21} , Δl_{1c} (giãn ra) và Δl_{2b} : (co ngắn lại)

Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm chuẩn, O tượng trưng cho những điểm không có chuyển vị. Như vậy nếu gọi A, B, C, D là tượng trưng cho các điểm a, b, c, d trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C, D trùng với O.

Bước 2: Xác định điểm I tượng trưng cho nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.

Ta nhận thấy nút 1 chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh 1c nên trên giản đồ ta dựng 1 đoạn $I = \Delta l_{1c}$.

Bước 3: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $b \rightarrow B$; $1 \rightarrow I$.

+ Qua I kẻ 1 đoạn Δl_{12} (độ giãn của thanh 12) được 2_1

+ Qua B kẻ 1 đoạn Δl_{2b} (độ co ngắn của thanh 2b) được 2_2

+ Qua 2_1 kẻ đường vuông góc với thanh 12.

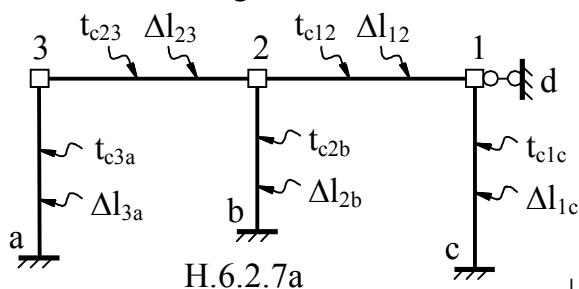
+ Qua 2_2 kẻ đường vuông góc với thanh 2b.

Giao điểm của 2 đường này là II.

Bước 4: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 3 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $2 \rightarrow II$, $a \rightarrow A$.

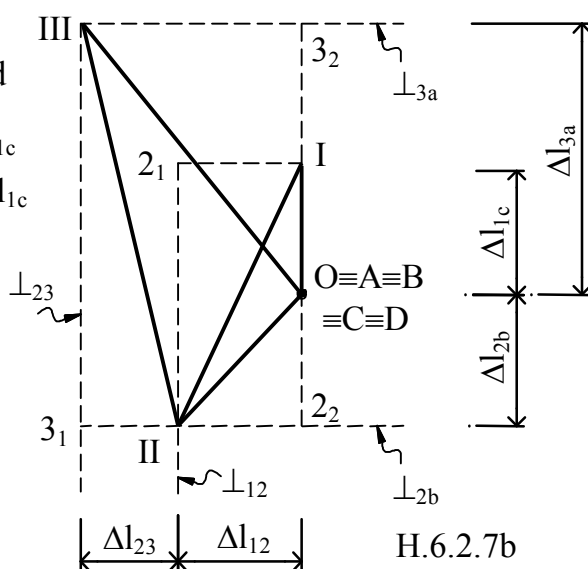
Ta thực hiện tương tự như bước 3.



Bước 5: Xác định kết quả.

Muốn tìm chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik , ta chiếu đoạn IK tương ứng trên giản đồ lên phương cần tìm.

Sau khi đã xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh ta sẽ tra bảng vẽ được ($\bar{M}_{tc}^o$).



d. Biểu đồ (M_z^o): là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm 2 loại: chuyển vị thẳng (Δ) và chuyển vị góc xoay (φ).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$(M_z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$$

(M_φ^o) : do nguyên nhân (φ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ ($\bar{M}_k$) do Z_k là chuyển vị góc xoay.

(M_Δ^o) : do nguyên nhân (Δ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ ($\bar{M}_k$) do Z_k là chuyển vị thẳng. Tất nhiên là có thể lập sơ đồ chuyển vị nếu cần.

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Trường hợp liên kết k là liên kết mômen:

- Xác định r_{km} : Tách nút k trên biểu đồ mômen ($\bar{M}_m$) và xét cân bằng mômen nút.

- Xác định R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} . Tương tự, tách nút k trên các biểu đồ mômen tương ứng và xét cân bằng mômen nút.

b. Trường hợp liên kết k là liên kết lực:

Tương tự như ở trên bằng cách thực hiện 1 mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen tương ứng nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận và xét cân bằng lực.

* *Chú ý:*

- Chiều dương của phản lực lấy theo chiều của chuyển vị cưỡng bức đặt thêm vào trên hệ cơ bản.

- Khi liên kết k là liên kết mômen, thì chỉ cần xác định mômen quanh nút k là đủ để viết phương trình cân bằng mômen. Khi liên kết k là liên kết lực thì ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

VI. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được ($Z_1, Z_2, \dots, Z_n$) và có thể giải hệ theo cách tính trực tiếp hay theo nguyên lý cộng tác dụng như phương pháp lực. Trong vẽ thực hành người ta thường sử dụng phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^o) + (M_t^o) + (M_z^o)$$

Biểu đồ lực cắt được suy ra từ biểu đồ mômen và biểu đồ lực dọc được suy ra từ biểu đồ lực cắt như trong phương pháp lực.

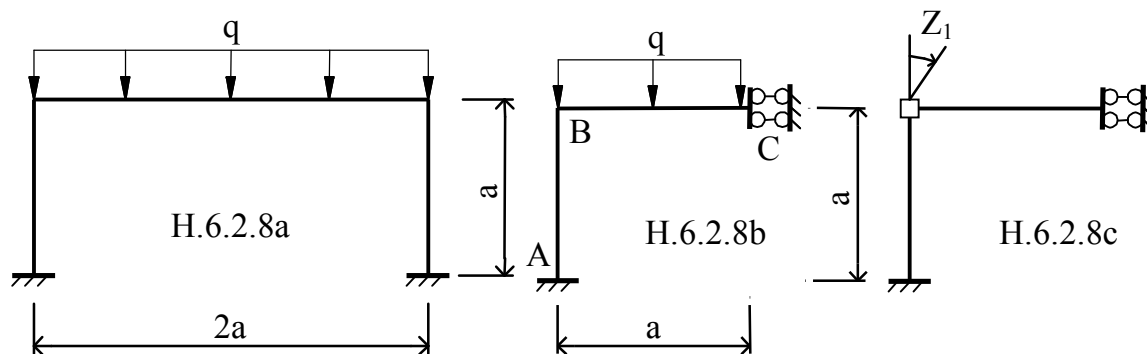
CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.6.2.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh là $EJ = \text{const}$ và chỉ xét biến dạng uốn.

* Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng, ta lập sơ đồ tính một nửa hệ tương đương như trên hình (H.6.2.8b) và đi giải bài toán trên một nửa hệ tương đương.

1. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

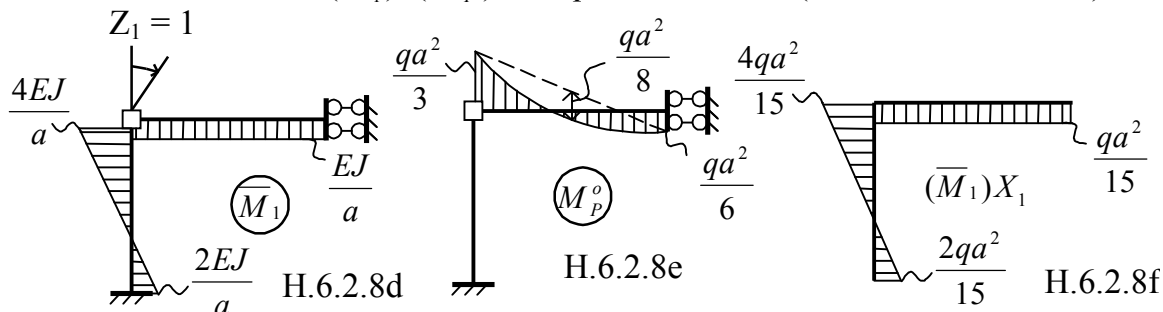
- Hệ cơ bản: (H.6.2.8c)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1)$, (M_p^o) : kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8d & H.6.2.8e).



- Xác định các hệ số:

* r_{11} : Tách nút B trên $(\bar{M}_1)$ và xét cân bằng nút.

$$\text{Kết quả } r_{11} = \frac{5EJ}{a}$$

* R_{1P} : Tách nút B trên (M_p^o) và xét cân bằng nút.

$$\text{Kết quả } R_{1P} = -\frac{qa^2}{3}$$

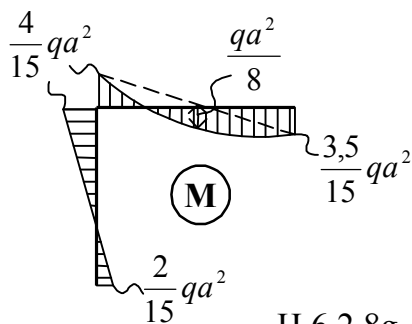
Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\frac{5EJ}{a}Z_1 - \frac{qa^2}{3} = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{qa^3}{15EJ} > 0$$

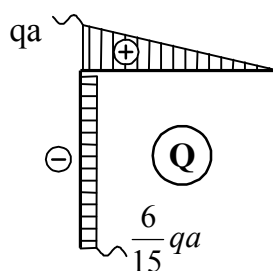
4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

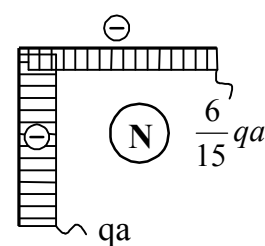
$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_p^o)$$



H.6.2.8g



H.6.2.8k



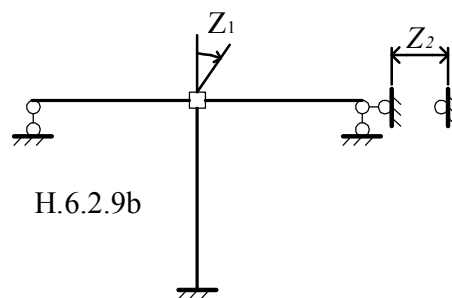
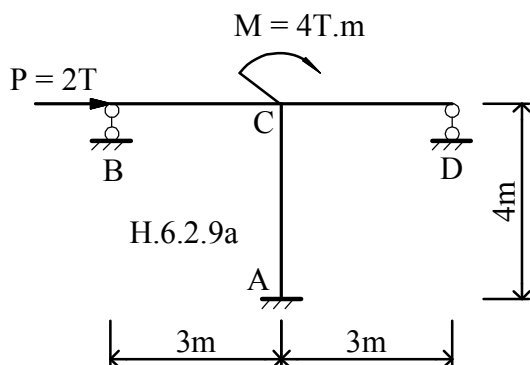
H.6.2.8l

b. Biểu đồ lực cắt: được suy ra từ biểu đồ mômen. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8k).

c. Biểu đồ lực dọc: suy ra từ biểu đồ lực cắt. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8l).

Sau khi đã có kết quả trên 1 nửa hệ, ta suy ra kết quả trên toàn hệ theo tính chất của hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.6.2.9a). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là $2EJ$, trong các thanh ngang là EJ . Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



1. Bậc siêu động:

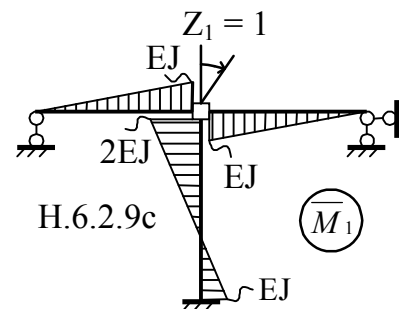
$$n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.6.2.9b)

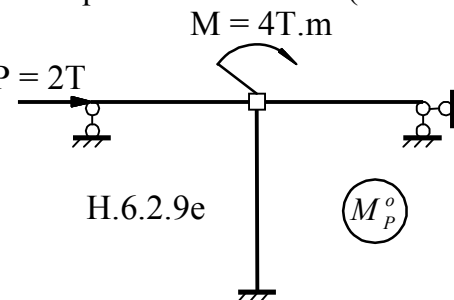
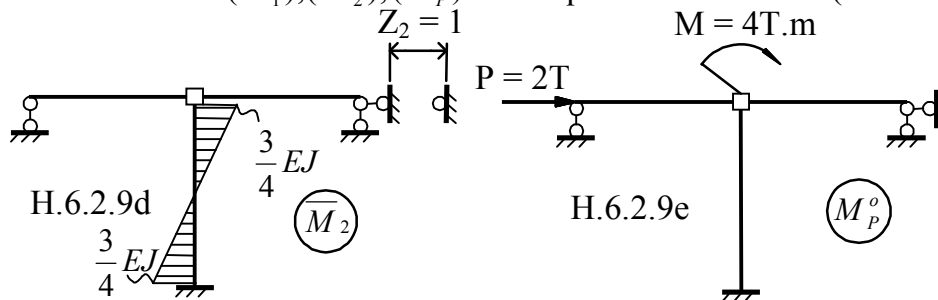
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$



3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_P^o)$: kết quả trên hình vẽ (H.6.2.9c → H.6.2.9e).



- Xác định các hệ số:

* r_{11} : Tách nút C trên $(\bar{M}_1)$, $r_{11} = 4EJ$

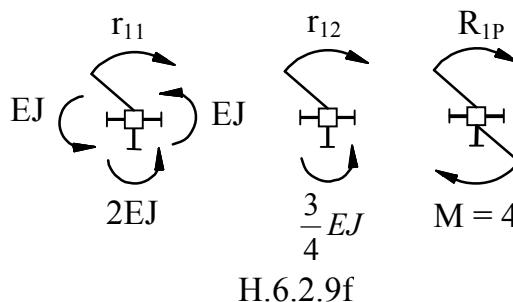
* $r_{12} = r_{21}$: Tách nút C trên $(\bar{M}_2)$

$$r_{12} = r_{21} = 0,75EJ$$

* r_{22} cắt 1 phần hệ trên $(\bar{M}_2)$ (H.6.2.9g).

Q được suy ra từ $(\bar{M}_2)$. $Q = Q^{\text{tr}}$ trên đoạn AC:

$$Q = \frac{0,75EJ - (-0,75EJ)}{4} = 0,375EJ$$



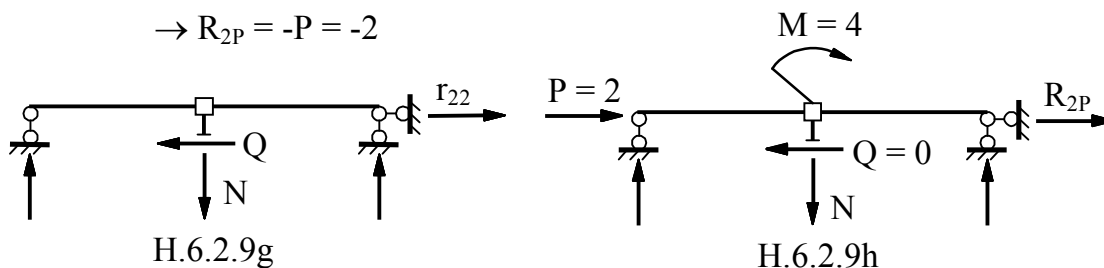
Chiều lên phương X $\rightarrow r_{22} = Q = 0,375EJ$

* R_{1P} : tách nút C trên (M_p^o)

$$\rightarrow R_{1P} = -M = -4$$

* R_{2P} : cắt 1 phần hệ trên (M_p^o) (H.6.2.9h). Chiều lên phương X

$$\rightarrow R_{2P} = -P = -2$$



Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} 4EJ.Z_1 - 0,75EJ.Z_2 - 4 = 0 \\ -0,75EJ.Z_1 + 0,375EJ.Z_2 - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} Z_1 = 3,2 / EJ \\ Z_2 = 11,733 / EJ \end{cases}$$

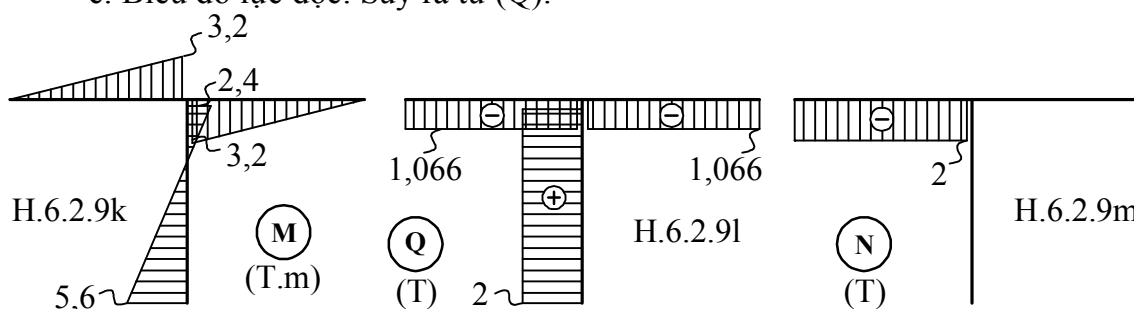
4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_p^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.6.2.9k)

b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M)

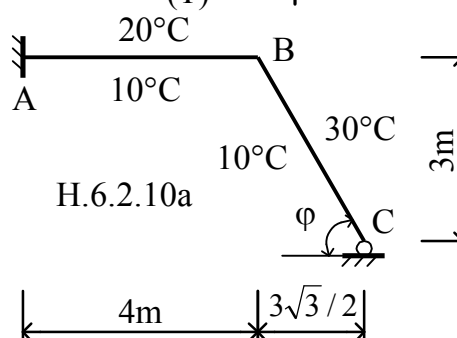
c. Biểu đồ lực dọc: Suy ra từ (Q).



Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.10a). Cho biết độ cứng trong các thanh là như nhau $EJ = 2000T.m^2$; $h = 0,4m$; $\alpha = 1,2.10^{-5}.^{\circ}C^{-1}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

* Chiều dài trong thanh BC:

$$l_{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^{\circ}} = 3(m)$$



1. Bậc siêu độ:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.2.10b)

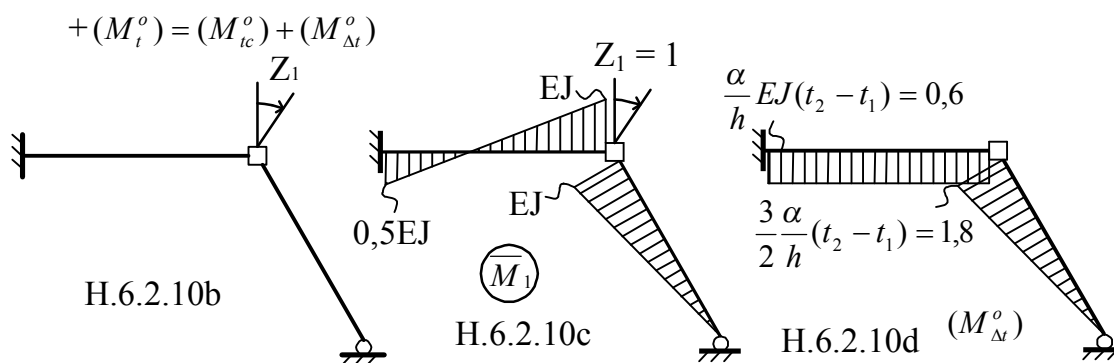
- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}.Z_1 + R_{1t} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1)$, (M_t^o)

+ $(\bar{M}_1)$ do $Z_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản (H.6.2.10c)



* $(M_{\Delta t}^o)$ Rời rạc hệ và tra bảng cho các cầu kiện chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới (H.6.2.10d)

* (M_{tc}^o) : do biến thiên nhiệt độ dọc trục gây ra chuyển vị thẳng tại nút. Ta sẽ đi xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng sơ đồ chuyển vị (*giản đồ Williot*)

+ Biến thiên chiều dài trong các thanh:

$$\Delta l_{AB} = \alpha l_{AB} t_{cAB} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot \frac{10 + 20}{2} = 0,72 \text{ mm} \quad (\text{dãn dài ra})$$

$$\Delta l_{BC} = \alpha l_{BC} t_{cBC} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \frac{10 + 30}{2} = 0,72 \text{ mm}$$

(dãn dài ra)

+ Lập sơ đồ chuyển vị: (H.6.2.10e)

+ Chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với thanh AB là chiều đoạn A'B' lên phương cần tìm chuyển vị. Đo bằng đoạn B1B'.

+ Tương tự đối với thanh BC là bằng đoạn B'B2. Bằng quan hệ hình học dễ thấy:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \frac{\Delta l_{BC}}{\tan 15^\circ} = \frac{0,72}{\tan 15^\circ} = 2,687 \text{ (mm)}$$

+ Rời rạc hệ và tra bảng theo các chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.10f).

b. Xác định các hệ số:

$$* r_{11}: r_{11} = 2EJ$$

$$* R_{1t} = R_{1tc} + R_{1\Delta t}$$

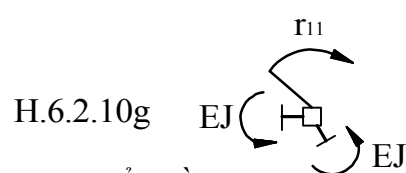
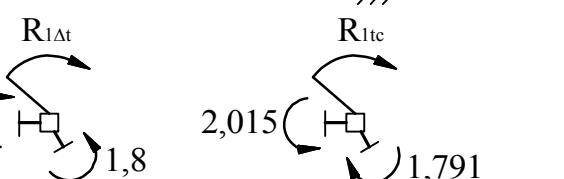
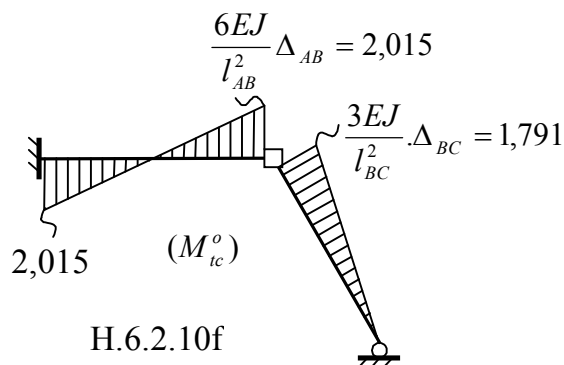
$$+ R_{1\Delta t}: R_{1\Delta t} = 1,2$$

$$+ R_{1tc}: R_{1tc} = 0,224$$

$$\rightarrow R_{1t} = 1,424$$

Thay vào phương trình:

$$2EJ \cdot Z_1 + 1,424 = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{-0,712}{EJ} < 0$$



4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_{ic}^o) + (M_{\Delta t}^o)$ (Xem H.9.10h)

b. Biểu đồ lực cắt (Q), và biểu đồ lực dọc (N), vẽ tương tự các ví dụ trước.

Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho như trên hình vẽ (H.6.1.2.11a). Các số liệu bài toán tương tự ví dụ 3. Cho $\varphi = 0,005\text{rad}$; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,02\text{m}$.

Hệ có sơ đồ giống ví dụ 3 nhưng chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức thay vì nhiệt độ nên trong phương trình chính tắc chỉ khác số hạng tự do (dùng R_{1Z} , thay vì R_{1t}). Vậy ta cần xác định số hạng tự do.

+ Vẽ biểu đồ:

$$(M_Z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$$

* Biểu đồ (M_φ^o) : (H.6.2.11b)

* Biểu đồ (M_Δ^o) : Lập sơ đồ chuyển vị.

Từ sơ đồ chuyển vị (H.6.2.11c), xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh:

$$\Delta_{AB} = A'B' = \Delta_1 \cdot \sin 45^\circ + \Delta_2 \cdot \tan 60^\circ = 0,05464(\text{m})$$

$$\Delta_{BC} = B'C' = \frac{\Delta_2}{\cos 60^\circ} = 0,04(\text{m})$$

* Rời rạc hệ, tra bảng, vẽ được (M_Δ^o)

+ Xác định số hạng tự do:

$$R_{1Z} = R_{1\varphi} - R_{1\Delta}$$

Từ (M_φ^o) xác định được $R_{1\varphi} = -5$

Từ (M_Δ^o) xác định được $R_{1\Delta} = 26,666 - 40,98 = -14,314$

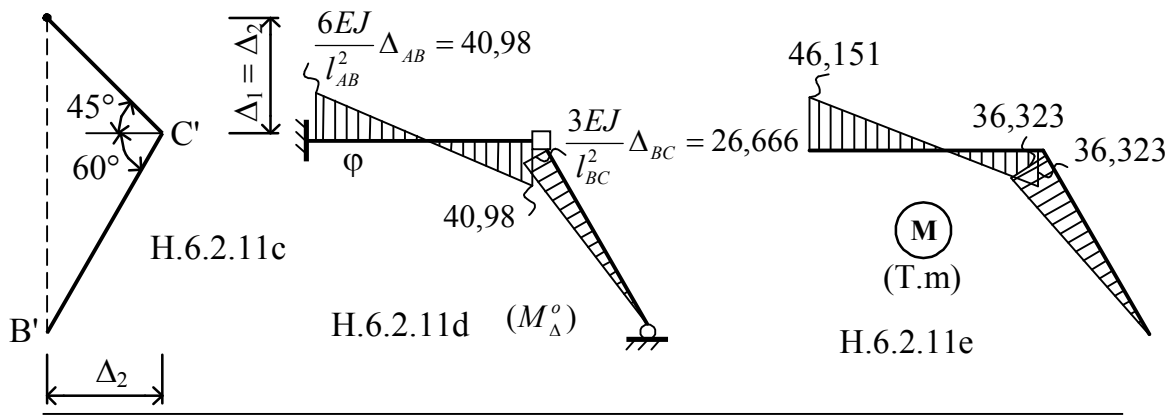
Suy ra $R_{1Z} = -19,314$

Thay vào phương trình chính tắc, giải ra được: $Z_1 = 9,657/EJ > 0$

Vẽ biểu đồ $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$

Biểu đồ lực cắt và lực dọc vẽ tương tự các ví dụ trước.

O $\equiv$ A'



§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU ĐỘNG.

1. Chuyển vị tại các nút:

Đó chính là các chuyển vị Z_k tương ứng tìm được khi giải hệ phương trình chính tắc.

2. Chuyển vị tại các tiết diện bên trong phần tử:

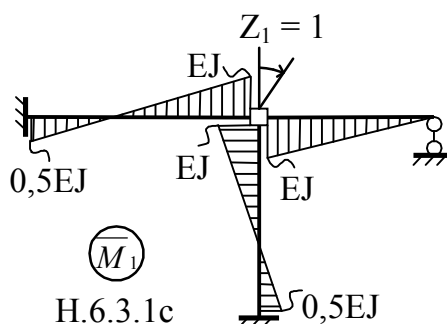
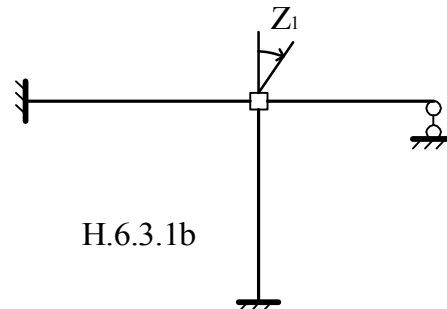
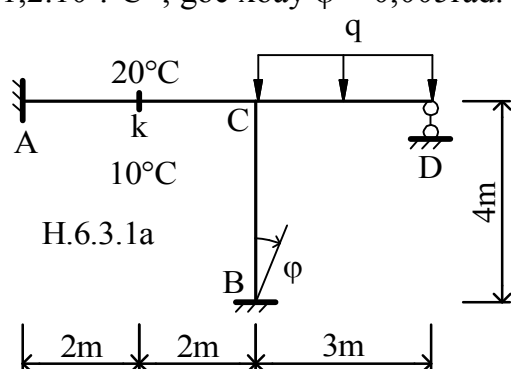
Có thể được xác định theo 1 trong 3 cách sau:

a. Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như 1 nút của hệ. Như vậy, ta đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản nhưng làm tăng số lượng ẩn số.

b. Sau khi giải bài toán, đã biết được nội lực và chuyển vị ở 2 đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ bên trong phần tử theo các phương pháp đã biết như phương pháp thông số ban đầu, cách xác định chuyển vị trong chương chuyển vị...

c. Sau khi xác định được nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh như đã biết trong chương phương pháp lực. Trong tính toán thường sử dụng cách này.

Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.6.3.1a). Cho EJ trên toàn hệ bằng $1000T.m^2$, chiều cao tiết diện các thanh $h = 0,3m$; hệ số dẫn nở vì nhiệt $\alpha = 1,2.10^{-5}.^{\circ}C^{-1}$; góc xoay $\varphi = 0,005rad$.



1. Vẽ biểu đồ mômen uốn:

a. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

b. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính

tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.3.1b)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}.Z_1 + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1)$, (M_p^o) , (M_t^o) , (M_Z^o)

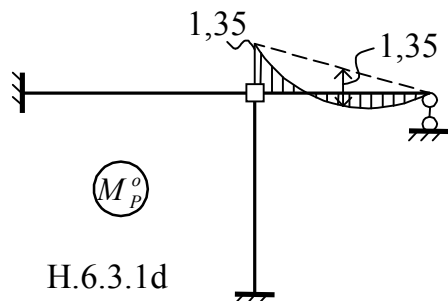
$$+ (M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o)$$

* (M_{tc}^o) : nguyên nhân t_c trong thanh AC chỉ gây ra chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc trục thanh của thanh BC. Dễ thấy:

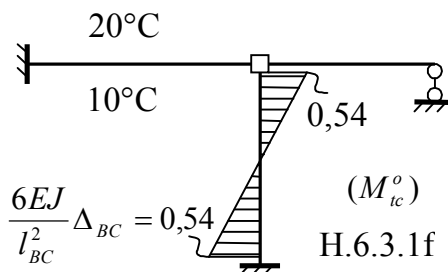
$$\Delta l_{BC} = \alpha l_{AC} t_{CAC} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot \frac{10+20}{2} = 0,72 \text{ mm}$$

$$+ (M_Z^o) = (M_\phi^o) + (M_\Delta^o)$$

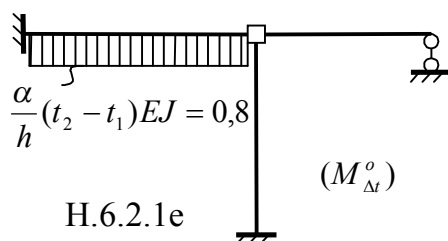
Ở đây (M_Δ^o) không tồn tại.



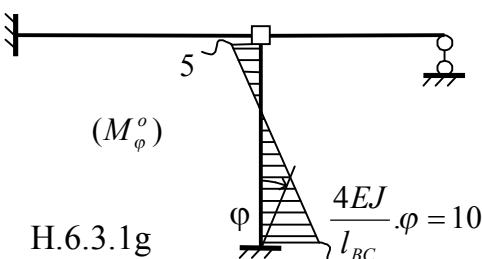
H.6.3.1d



H.6.3.1f



H.6.2.1e



H.6.3.1g

- Xác định các hệ số: Từ các biểu đồ đã vẽ, tính được:

$$* r_{11} = 3EJ; R_{1P} = -1,35;$$

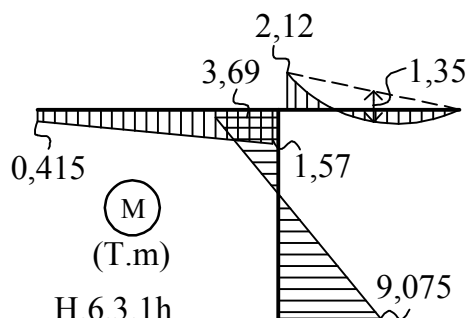
$$* R_{1t} = R_{1tc} + R_{1Dt} = -0,54 - 0,8 = -1,34$$

$$* R_{1Z} = R_{1\phi} = 5$$

Thay vào hệ phương trình:

$$3EJ \cdot Z_1 - 1,35 - 1,34 + 5 = 0$$

$$\rightarrow Z_1 = -\frac{0,77}{EJ}$$



H.6.3.1h

d. Vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1) Z_1 + (M_P^o) + (M_{ic}^o) + (M_{Dt}^o) + (M_\phi^o)$$

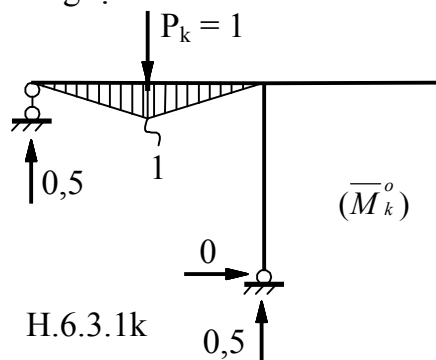
2. Xác định độ võng tại k:

- Trạng thái "m" đã được giải với biểu đồ (M) ở trên

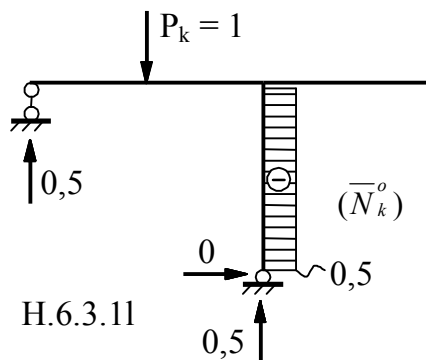
- Trạng thái "k" tạo trên hệ cơ bản của phương pháp lực và xác định $(\bar{M}_k^o)$,

$$(\bar{N}_k^o), (\bar{R}_{jk}^o)$$

- Độ võng tại k:



H.6.3.1k



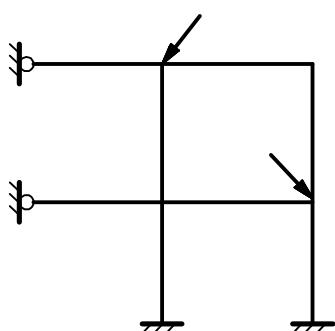
H.6.3.1l

$$\begin{aligned}y_k &= (\bar{M}_k^o)(M) - \Sigma \bar{R}_{jk}^o . Z_{jm} + \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(M_k^o) + \Sigma \alpha t_c \Omega(\bar{N}_k^o) \\&= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.4}{2} \cdot \frac{0,415 + 1,57}{2} - 0 + \frac{\alpha}{0,3} (10 - 20) \cdot \frac{1.4}{2} + 0 \\&= \frac{1,985}{EJ} - \frac{200\alpha}{3} = 0,1925(mm) > 0\end{aligned}$$

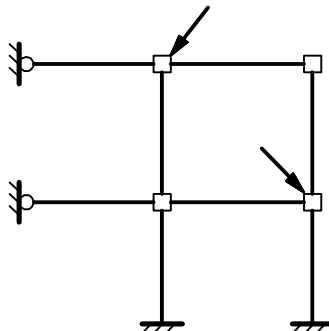
Chuyển vị cùng chiều với P_k .

§4: TÍNH HỆ CÓ NÚT KHÔNG CHUYỂN VỊ THẲNG CHỈ CHỊU TẢI TRỌNG LÀ CÁC LỰC TẬP TRUNG TẠI NÚT

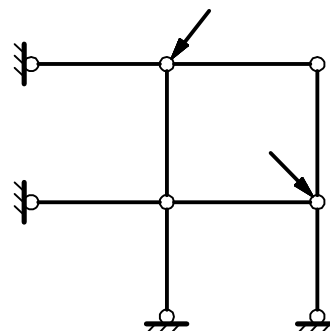
Chẳng hạn hệ cho trên hình (H.6.4.1) là thỏa mãn yêu cầu bài toán.



H.6.4.1



H.6.4.2



H.6.4.3

Với những loại hệ này thì khi tạo hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị ta chỉ đặt thêm các liên kết mômen. Mặc khác, tải trọng chỉ là những lực tập trung tại nút nên biểu đồ (M_p^o) không tồn tại và do đó R_{kp} cũng không tồn tại.

Vậy hệ phương trình chính tắc tổng quát cho trường hợp này:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình thuần nhất, đẳng cấp và người ta chứng minh chỉ có nghiệm duy nhất $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$

Suy ra biểu đồ mômen của hệ:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_p^o) \text{ sẽ không tồn tại}$$

Suy ra biểu đồ lực cắt của hệ không tồn tại.

Nội lực trong hệ chỉ tồn tại lực dọc, hệ làm việc như 1 hệ dàn với các nút và các ngàm được thay bằng các khớp lý tưởng (H.6.4.1c)

Kết luận: Khi tính hệ có nút không chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút, ta có thể thay thế các nút và ngàm bằng các liên kết khớp và tính toán như 1 hệ dàn thông thường.

§ 5. TÍNH HỆ SIÊU ĐỘNG CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Cũng tương tự như phương pháp lực, ta chỉ nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng.

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: Là ảnh hưởng của các ản Z_k khi $P = 1$ di động trên hệ cơ bản gây ra:

1. Hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, số hạng tự do được thay bằng r_{kp} :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots r_{1n}Z_n + r_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots r_{2n}Z_n + r_{2p} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots r_{nn}Z_n + r_{np} = 0 \end{cases}$$

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ (r_{km}): Các hệ số này là không thay đổi và được xác định như trường hợp tải trọng bất động.

b. Số hạng tự do (r_{kp}): Là phản lực tại liên kết k do $P = 1$ di động trên hệ gây ra. Điều này có nghĩa là r_{kp} sẽ thay đổi theo các vị trí của P .

Do hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện làm việc độc lập nhau nên người ta đã lập sẵn bảng tra nội lực, phản lực tại các đầu thanh (Xem bảng B.6.5.1 $\rightarrow$ 3). Dựa vào bảng tra đó ta có thể xác định được r_{kp} theo các vị trí của $P = 1$.

c. Giải hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, ta sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11}r_{1p} + \beta_{12}r_{2p} + \dots \beta_{1n}r_{np} \\ Z_2 = \beta_{21}r_{1p} + \beta_{22}r_{2p} + \dots \beta_{2n}r_{np} \\ \dots \\ Z_n = \beta_{n1}r_{1p} + \beta_{n2}r_{2p} + \dots \beta_{nn}r_{np} \end{cases}$$

β_{ik} là hệ số ảnh hưởng: $\beta_{ik} = (-1)^{i+k+1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$

D là định thức hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = |r_{ik}| \text{ với } i, k \in [1; n]$$

D_{ik} là định thức suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng i cột k (hoặc hàng k cột i).

Sau khi xác định được Z_k , cho $P = 1$ di động, sẽ vẽ được đ.a.h. Z_k .

II. Đường ảnh hưởng của nội lực, phản lực và chuyển vị:

Sau khi xác định được đường ảnh hưởng Z_k , áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, hay chuyển vị) tại 1 tiết diện bất kỳ theo biểu thức:

$$\text{đ.a.h. } S = \bar{S}_1 (\text{đ.a.h. } Z_1) + \bar{S}_2 (\text{đ.a.h. } Z_2) + \dots \bar{S}_n (\text{đ.a.h. } Z_n) + \text{đ.a.h. } S^0$$

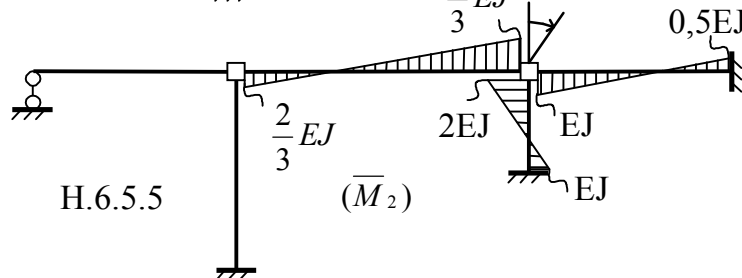
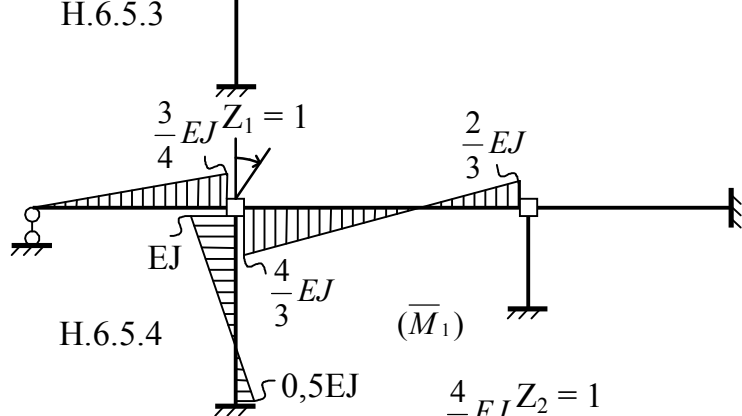
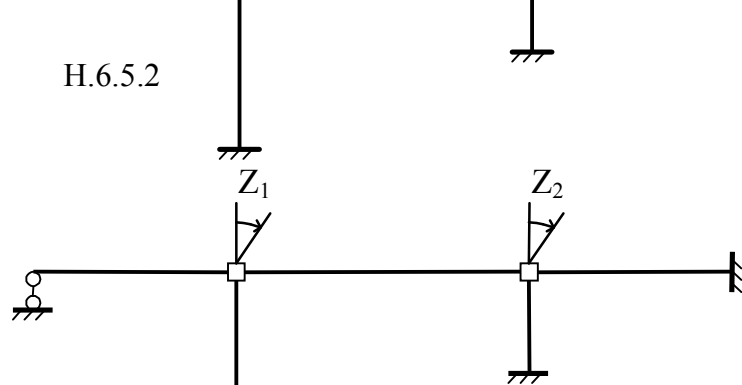
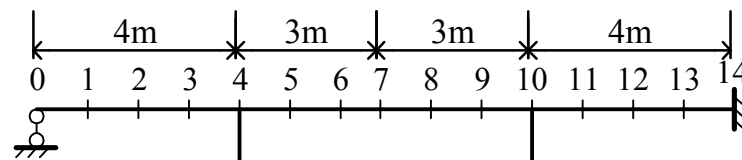
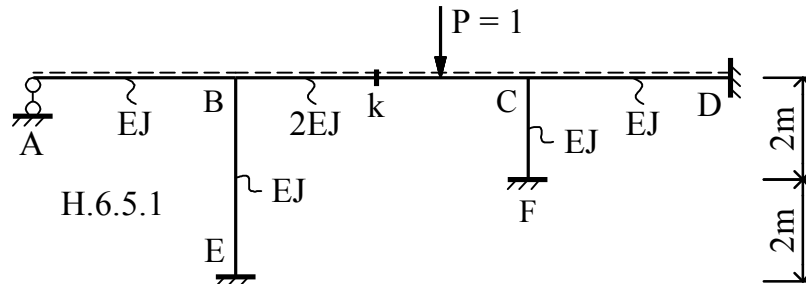
- $\bar{S}_k$ là giá trị của đại lượng S do $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

- đ.a.h. S^0 là đ.a.h. S do $P = 1$ di động trên hệ cơ bản gây ra. (đ.a.h. này có thể vẽ theo bảng tra B.6.5.1 $\rightarrow$ 3)

* *Chú ý:* Quá trình tính toán có thể lập thành bảng tương tự như đã nêu trong phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn đ.a.h. M_k của hệ cho trên hình (H.6.5.1)

Chia đường xe chạy ra làm 14 đoạn, mỗi đoạn dài 1m và đánh số thứ tự các điểm chia như trên hình (H.6.5.2)



1. Bậc siêu động: $n = n_1 + n_2 = 2 + 0 = 2$

- Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:
- Hệ cơ bản (H.6.5.3)

2. Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Vẽ biểu đồ $(\overline{M}_1), (\overline{M}_2)$

$$r_{11} = \left[\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3} \right] EJ = \frac{37}{12} EJ$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2}{3} EJ$$

$$r_{22} = \left[\frac{4}{3} + 2 + 1 \right] EJ = \frac{13}{3} EJ$$

- Xác định số hạng tự do:

+ Khi $P = 1$ di động trên AB, sơ đồ cấu kiện mẫu ta có

$$r_{1P} = -M_A = \frac{1}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi)l$$

$$r_{2P} = 0$$

Lần lượt cho $\xi = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ ta sẽ có các giá trị tương ứng của r_{1P} khi $P = 1$ di động trên AB.

+ Khi $P = 1$ di động trên BC: tương tự.

$$r_{1P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

$$r_{2P} = -M_B = \xi^2(1-\xi)l$$

Lần lượt cho $\xi = 0; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}; 1$ (ứng với điểm chia trên BC) ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của r_{1P}, r_{2P} khi P di động.

+ Khi $P = 1$ di động trên CD: tương tự.

$$r_{1P} = 0$$

$$r_{2P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

Cho ξ các giá trị $0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ ta sẽ tìm được các số hạng tự do trên đoạn này.

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

- Xác định các hệ số ảnh hưởng

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{37}{12} EJ & \frac{2}{3} EJ \\ \frac{2}{3} EJ & \frac{13}{3} EJ \end{vmatrix} = \frac{465}{36} (EJ)^2$$

$$D_{11} = \frac{13}{3} EJ; D_{12} = D_{21} = \frac{2}{3} EJ; D_{22} = \frac{37}{12} EJ$$

$$\rightarrow \beta_{11} = -\frac{156}{465} / EJ; \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{24}{465} / EJ; \beta_{22} = -\frac{111}{465} / EJ$$

- Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11}r_{1P} + \beta_{12}r_{2P} \\ Z_2 = \beta_{21}r_{1P} + \beta_{22}r_{2P} \end{cases}$$

Thực hiện tính toán theo các biểu thức trên. Kết quả được thể hiện trong bảng: (B.6.5.3)

5. Vẽ đường ảnh hưởng M_k :

$$\text{đ.a.h.}M_k = \bar{M}_{k1}(\text{đ.a.h.}Z_1) + \bar{M}_{k2}(\text{đ.a.h.}Z_2) + \text{đ.a.h.}M_k^o$$

- $\bar{M}_{k1}$ lấy trên ($\bar{M}_1$) tại tiết diện k

$$\bar{M}_{k1} = \frac{EJ}{3}$$

- Tương tự: $\bar{M}_{k2} = -\frac{EJ}{3}$

- $\text{đ.a.h.}M_k^o$ là đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k do $P = 1$ di động gây ra trên hệ cơ bản. Ở bài toán này $P = 1$ chỉ gây ra ảnh hưởng đến k khi nó di động trên BC. Tra sơ đồ cầu kiện mẫu ta sẽ xác định được. Kết quả trong bảng (B.6.5.4)

B.6.5.4 Bảng tính các tung độ đường ảnh hưởng Z_k & M_k

Thanh	Điểm	r_{1P}	r_{2P}	Tung độ (đ.a.h. Z_i). EJ		đ.a.h. M_k^o	đ.a.h M_k
				Z_1	Z_2		
AB	0	0	0	0	0	0	0
	1	0,6562	0	-0,220	0,034	0	-0,084
	2	0,75	0	-0,252	0,039	0	-0,096
	3	0,4687	0	-0,157	0,024	0	-0,060
	4	0	0	0	0	0	0
BC	4	0	0	0	0	0	0
	5	-0,694	0,139	0,240	-0,069	0,083	0,186
	6	-0,888	0,444	0,321	-0,152	0,333	0,491
	7	-0,75	0,75	0,290	-0,217	0,75	0,919
	8	-0,444	0,888	0,195	-0,235	0,333	0,476
	9	-0,139	0,694	0,082	-0,173	0,083	0,168
	10	0	0	0	0	0	0
CD	10	0	0	0	0	0	0
	11	0	-0,562	-0,029	0,134	0	-0,054
	12	0	-0,5	-0,026	0,119	0	-0,048
	13	0	-0,1875	-0,009	0,044	0	-0,018
	14	0	0	0	0	0	0

CHƯƠNG 7 PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP VÀ PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

§ 1. SO SÁNH PHƯƠNG PHÁP LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ, CHỌN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Nội dung so sánh	Phương pháp lực	Phương pháp chuyển vị
Độ chính xác	Như nhau nếu các giả thiết được chấp nhận như nhau	
Phạm vi áp dụng	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ. Nên áp dụng cho hệ khung, dầm.
Số ẩn số	Bảng số bậc siêu tĩnh (không phụ thuộc các giả thiết)	Bảng số bậc siêu động (phụ thuộc giả thiết, cấu kiện mẫu, sơ đồ rời rạc chấp nhận)
Hệ cơ bản	Loại bỏ các liên kết thừa. Có nhiều cách tạo hệ cơ bản.	Thêm các liên kết để ngăn cản chuyển vị tại các nút. Hệ cơ bản là duy nhất
Vẽ $(\bar{M}_k), (M_p^o)$	Người tính toán tự vẽ (tốn thời gian, dễ mắc sai sót)	Vẽ bằng cách tra bảng (đơn giản, ít sai sót)
Vẽ $(M_i^o), (M_z^o)$	Không tồn tại nếu hệ cơ bản là tĩnh định.	Tồn tại và thường phức tạp.
Xác định các hệ số và các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.	Theo các bài toán xác định chuyển vị. (phức tạp, dễ sai sót)	Theo các điều kiện cân bằng (đơn giản hơn)
Hệ phương trình chính tắc	Nói chung thường đầy đủ các hệ số nên tốn thời gian khi giải hệ phương trình.	Thường có nhiều hệ số phụ bằng không nên đỡ tốn thời gian giải.
Biểu đồ nội lực cuối cùng	Tương đương nhau	
Kiểm tra kết quả	Theo điều kiện chuyển vị nên phức tạp.	Theo điều kiện cân bằng nên đơn giản.

B.7.1.1 Bảng so sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Qua so sánh cho thấy phương pháp chuyển vị có nhiều ưu điểm hơn phương pháp lực. Tuy vậy, cũng không thể kết luận được phương pháp nào ưu việt hơn vì điều này còn căn cứ vào bài toán cụ thể và công cụ tính toán. Đối với công cụ thông thường người ta khuyên nên chọn phương pháp nào cho số hạng ẩn số là ít nhất. Trong trường hợp 2 phương pháp này đều có ẩn số như nhau thì nên chọn phương pháp chuyển vị để giải bài toán.

§ 2 PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP

I. Đặt vấn đề:

Trong thực tế có những loại hệ mà có 1 bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp lực, bộ phận khác lại thích hợp với phương pháp chuyển vị (cho số ẩn số ít) nhưng nếu sử dụng độc lập 1 trong 2 phương pháp để giải bài toán thì ẩn số sẽ lớn. Ví dụ, hệ cho trên hình (H.7.4.1)

+ Phương pháp lực cho $n = 7$

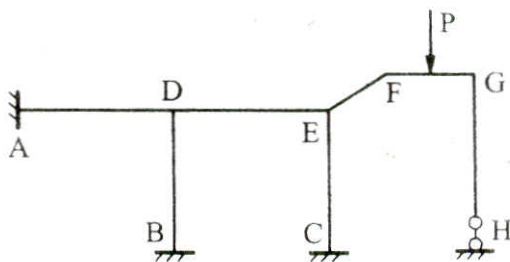
+ Phương pháp chuyển vị cho $n = 5$

Nếu phân tích cho từng phần hệ, ta thấy phần ABCDE là thích hợp phương pháp chuyển vị, phần (EFGH) thích hợp với phương pháp lực. Để tận dụng ưu điểm của từng bộ phận, dùng phương pháp hỗn hợp do giáo sư A.A.Gvôzdiev đề xuất. Nội dung như sau:

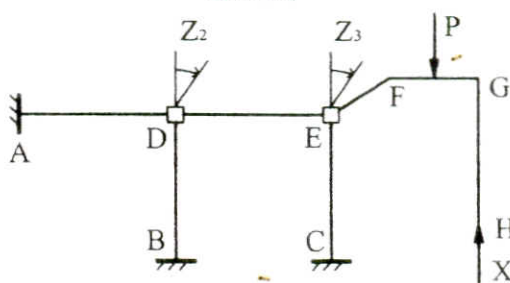
+ Đối với phần hệ thích hợp với phương pháp lực (có nhiều nút nhưng số liên kết với phần khác là ít), dùng phương pháp lực để giải.

+ Đối với phần hệ thích hợp với phương pháp chuyển vị (có ít nút nhưng số liên kết với phần hệ khác là nhiều), dùng phương pháp chuyển vị để giải.

Số ẩn số sẽ bằng tổng số ẩn của 2 phần hệ và giảm đi khá nhiều. ✓



H.7.2.1



H.7.2.2

$n=3$

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình cơ bản:

1. Hệ cơ bản:

- Loại bỏ các liên kết thừa và chọn lực làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp phương pháp lực.

- Đặt thêm liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút và chọn chuyển vị làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp phương pháp chuyển vị.

2. Hệ phương trình cơ bản: Xét hệ (H.7.2.2)

Tương tự phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm X_1, Z_2, Z_3 trên hệ cơ bản

+ Thiết lập điều kiện chuyển vị đứng tại H, các phản lực tại các liên kết đặt thêm vào D, C do (X_1, Z_2, Z_3, P) bằng không. Điều kiện này được viết:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát, cho 1 hệ chịu (P, t, Z) gồm n ẩn số, trong đó số ẩn số theo phương pháp lực là m :

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ \Delta X_m(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_{m+1}(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ R_n(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình cơ bản của phương trình hỗn hợp.

III. Hệ phương trình chính tắc:

1. Xét phương trình thứ $i, i = \overline{1, m}$ của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_i(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0$$

$$\rightarrow \Delta X_i(X_1) + \Delta X_i(X_2) + \dots + \Delta X_i(X_m) + \Delta X_i(Z_{m+1}) + \dots + \Delta X_i(Z_n) + \Delta X_i(P) + \Delta X_i(t) + \Delta X_i(Z) = 0$$

+ Gọi δ_{ik} là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $k = \overline{1, m} \rightarrow \Delta X_i(X_k) = \delta_{ik} \cdot X_k$

+ Gọi δ_{ij} là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do riêng $Z_j = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $j = \overline{m+1, n} \rightarrow \Delta X_i(Z_j) = \delta_{ij} \cdot Z_j$ $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$

+ Gọi $\Delta_{iP}, \Delta_{it}, \Delta_{iZ}$ là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản $\rightarrow \Delta X_i(P) = \Delta_{iP}, \Delta X_i(t) = \Delta_{it}, \Delta X_i(Z) = \Delta_{iZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển:

$$\delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{im} \cdot X_m + \delta_{i, m+1} \cdot Z_{m+1} + \dots + \delta_{in} \cdot Z_n + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0$$

2. Xét phương trình thứ j của hệ phương trình cơ bản: $j = \overline{m+1, n}$

$$R_j(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0$$

+ Gọi r_{ji} là phản lực tại liên kết j thêm vào do $X_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $i = \overline{1, m}$ xét H.P.T. cụ thể tách và xét cb

$$\rightarrow R_j(X_i) = r_{ji}$$

+ Gọi r_{jq} là phản lực tại liên kết j thêm vào do $Z_q = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $q = \overline{m+1, n}$

$$\rightarrow R_j(Z_q) = r_{jq} \cdot Z_q$$

+ Gọi R_{jP}, R_{jt}, R_{jZ} lần lượt là phản lực tại liên kết j do P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản:

$$\rightarrow R_j(P) = R_{jP}, R_j(t) = R_{jt}, R_j(Z) = R_{jZ}$$

Thay tất cả vào phương trình khai triển:

$$r_{j1} X_1 + r_{j2} X_2 + \dots + r_{jm} X_m + r_{j, m+1} Z_{m+1} + \dots + r_{jn} Z_n + R_{jP} + R_{jt} + R_{jZ} = 0$$

Tiếp đó cho $i = \overline{1, m}, j = \overline{m+1, n}$ sẽ được hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Trước khi tiến hành cần phải vẽ các biểu đồ nội lực (thường là biểu đồ mômen) do các nguyên nhân X_i, Z_q, P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản.

+ δ_{ik} : được xác định theo phương pháp lực: $\delta_{ik} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_k)$

+ $\dot{\delta}_{ij}$: có thể xác định theo nguyên tắc chung của bài toán xác định chuyển vị hoặc bằng hình học hoặc thông qua việc xác định $\dot{r}_{ji}$ từ mối quan hệ: $\dot{\delta}_{ij} = -\dot{r}_{ji}$

+ $\Delta_{iP}, \Delta_{it}, \Delta_{iZ}$: được xác định theo phương pháp lực.

+ $\dot{r}_{ji}$: xác định theo điều kiện cân bằng như phương pháp chuyển vị.

+ $q_{jq}, R_{jP}, R_{jt}, R_{jZ}$: xác định theo phương pháp chuyển vị.

V. Vẽ các biểu đồ nội lực:

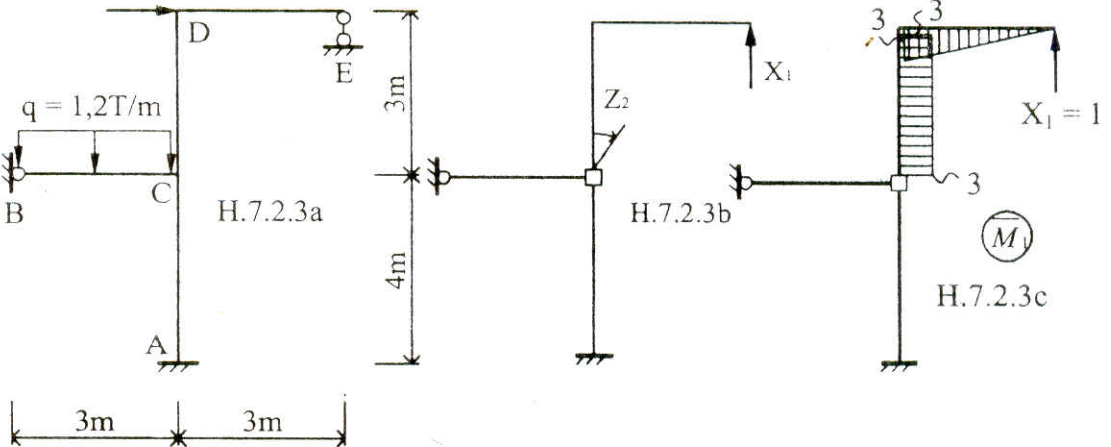
1. Biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + \dots (\bar{M}_m)X_m + (\bar{M}_{m+1})Z_{m+1} + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^o) + (M_t^o) + (M_Z^o)$$

2. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: được vẽ theo biểu đồ mômen như trong phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.7.2.3a). Cho độ cứng trong các thanh là $EJ = \text{const}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

$P = 2T$



1. Số ẩn số:

- Phần hệ CDE: giải bằng phương pháp lực, $n = 1$
- Phần hệ ABC: giải bằng phương pháp chuyển vị, $n = 1 + 0 = 1$

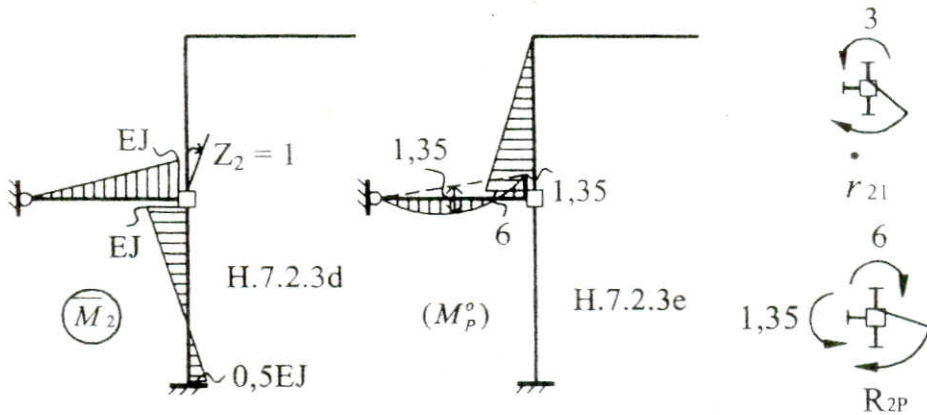
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.7.2.3b)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \dot{\delta}_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \dot{r}_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_P^o)$.
- Xác định các hệ số:



$$* \delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3.3.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$* \delta_{12} = -\dot{r}_{21} \quad \dot{r}_{21} = 3.$$

$$\rightarrow \delta_{12} = -\dot{r}_{21} = -3$$

$$* r_{22} = 2EJ.$$

$$* \Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{6.3}{2} \cdot 3 = -\frac{27}{EJ}$$

$$* R_{2P} = -6 + 1,35 = -4,65$$

Thay vào hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{36}{EJ} X_1 - 3Z_2 - \frac{27}{EJ} = 0 \\ 3X_1 + 2EJ \cdot Z_2 - 4,65 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0,839 \\ Z_2 = 1,066/EJ \end{cases}$$

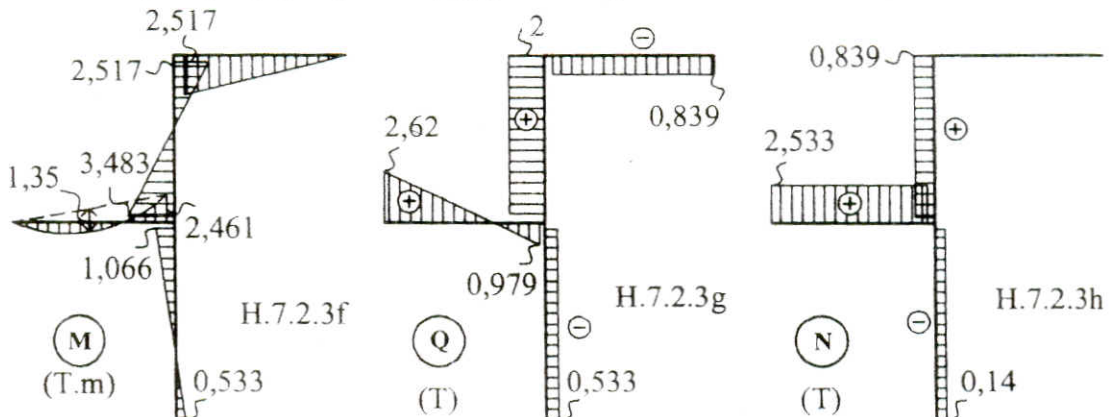
4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^o)$

Kết quả trên hình (H.7.2.7)

b. Lực cắt: (Q) suy ra từ (M) (H.7.2.3g)

c. Lực dọc: (N) suy ra từ (Q) (H.7.2.3h)

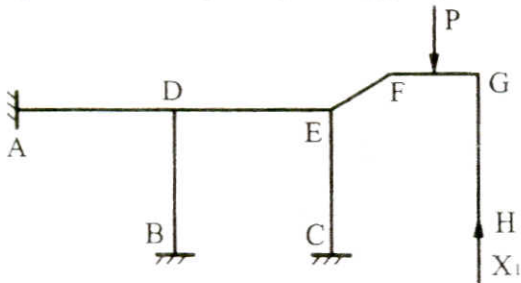


§ 3. PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

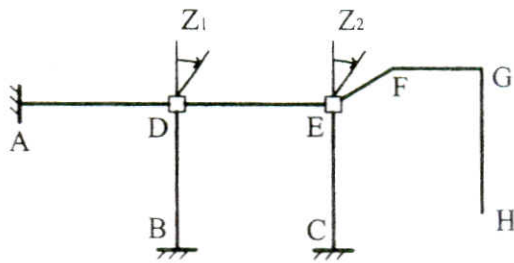
Đối với những loại bài toán như đã nêu trên ta còn có thể dùng phương pháp liên hợp để giải, trong đó phối hợp song song phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Để trình bày được đơn giản ta sẽ lý luận với hệ cho trên hình (H.7.2.1), tuy nhiên cách lập luận vẫn tổng quát và được áp dụng cho hệ bất kỳ.

Theo phương pháp liên hợp, ta có thể tiến hành theo 1 trong 2 hướng sau:

1. Chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực. Hệ cơ bản vẫn là hệ siêu tĩnh (H.7.3.1).



H.7.3.1



H.7.3.2

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

- Để xác định các hệ số δ_{11} , Δ_{1P} cần vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1)$, (M_p^o) trên hệ cơ

+ Bộ phận tĩnh định EFGH: vẽ dễ dàng.

+ Bộ phận siêu tĩnh ABCDE: dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán phụ.

* Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.2)

* Hệ phương trình chính tắc của bài toán phụ:

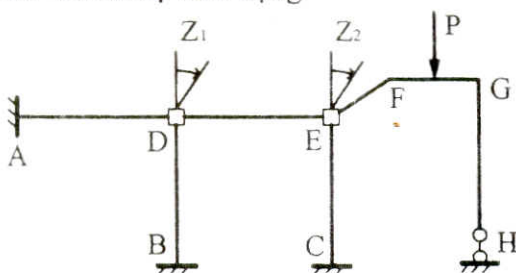
$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

* Lần lượt giải bài toán phụ với các nguyên nhân $X_1 = 1$ và P sẽ vẽ được $(\bar{M}_1)$, (M_p^o) .

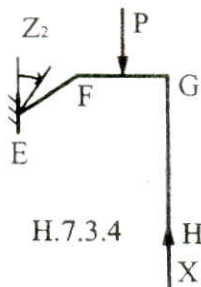
- Sau khi giải được X_1 ta sẽ tìm được (M) bằng cách tổ hợp:

$$(M) = (\bar{M}_1) X_1 + (M_p^o)$$

2. Chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng chỉ đặt thêm các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị (H.7.3.3). Hệ cơ bản vẫn là hệ siêu tĩnh.



H.7.3.3



H.7.3.4

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

- Để xác định các hệ số r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} , R_{1P} , R_{2P} ta cần phải vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1)$, $(\bar{M}_2)$, (M_P^o)

+ Bộ phận xác định động ABCDE: vẽ dễ dàng.

+ Bộ phận siêu động EFGH (do không phải là phần tử mẫu) dùng phương pháp lực để giải bài toán phụ.

* Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.4)

* Hệ phương trình chính tắc của bài toán phụ:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

* Lần lượt giải bài toán phụ với các nguyên nhân $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$, P gây ra trên hệ cơ bản sẽ vẽ được $(\bar{M}_1)$, $(\bar{M}_2)$, (M_P^o) .

- Sau khi giải ra được Z_1 , Z_2 ta sẽ vẽ được (M):

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + M_P^o$$

* Nhận xét:

+ Số ẩn số bài toán khi giải theo phương pháp hỗn hợp và liên hợp như nhau.

+ Phương pháp liên hợp đưa về 2 bài toán độc lập: 1 theo phương pháp lực và 1 theo phương pháp hỗn hợp.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.7.3.5a). Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là $2EJ$, trong thanh đứng là EJ . Chỉ xét ảnh hưởng ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Chọn hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản theo hướng thứ 2 của phương pháp liên hợp, ẩn số là Z_1 (H.7.3.5b)

2. Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

3. Xác định các hệ số và số hạng tự do:

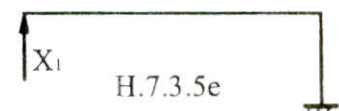
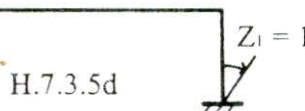
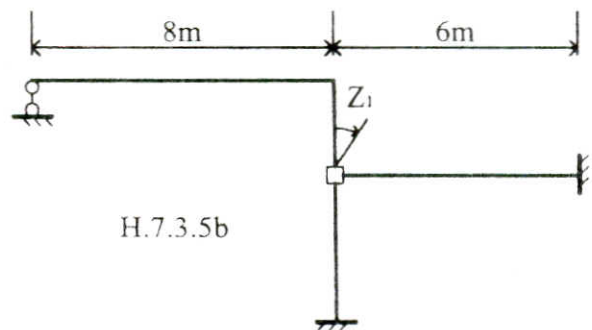
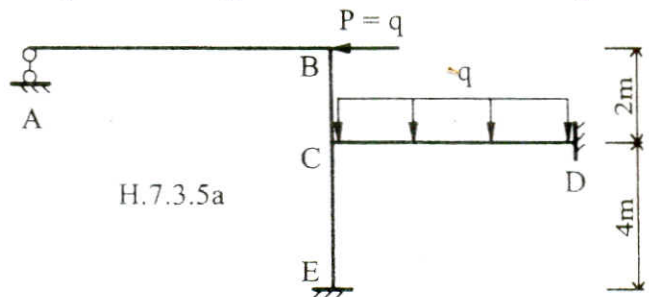
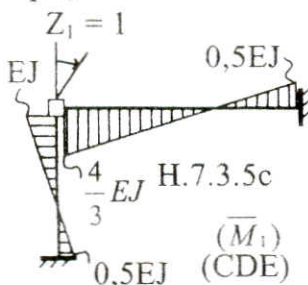
- Vẽ $(\bar{M}_1)$, (M_P^o) .

a. Vẽ $(\bar{M}_1)$ do $Z_1 = 1$ gây ra

- Phần hệ CDE: (H.7.3.5c)

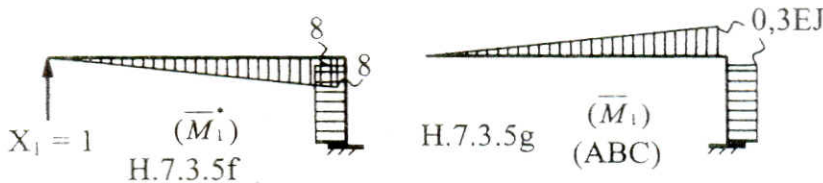
- Phần hệ CDE (H.7.3.5d):

giải bài toán phụ bằng phương pháp lực:



+ Hệ cơ bản (H.7.3.5e)

+ Hệ phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{12} = 0$



+ Xác định các hệ số:

Vẽ $(\bar{M}_1^*)$ do $X_1 = 1$ gây ra (H.7.3.5f)

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1^*)(\bar{M}_1^*) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{EJ} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 = \frac{640}{3EJ}$$

$$\Delta_{12} = -\sum R_{j1} \cdot Z_{jm} = -(-8 \cdot Z_1) = 8$$

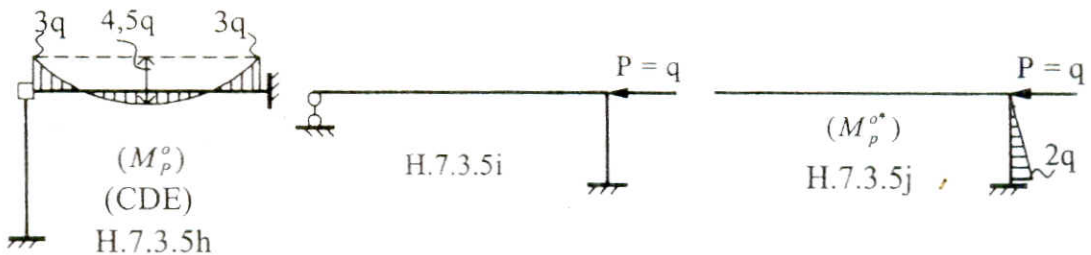
$$\rightarrow \frac{640}{3EJ} X_1 + 8 = 0 \rightarrow X_1 = -0,0375EJ$$

+ Vẽ $(\bar{M}_1)$ trên phần hệ ABC: $(\bar{M}_1) = (\bar{M}_1^*)X_1$ (H.7.3.5g)

b. Vẽ (M_p^o) do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản:

- Phần hệ CDE (H.7.3.5h)

- Phần hệ ABC (H.7.3.5i): giải bài toán phụ bằng phương pháp lực:



+ Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.5e) - giống bài toán phụ vẽ $(\bar{M}_1)$

+ Hệ phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

+ Xác định các hệ số:

$(\bar{M}_1^*)$ và δ_{11} là không đổi so với trường hợp vẽ $(\bar{M}_1)$

Vẽ $(\bar{M}_p^o)$ (H.7.3.5j)

$$\rightarrow \Delta_{1P} = (\bar{M}_1^*)(M_p^o) = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2 \cdot 29}{2} \cdot 8 = -\frac{169}{EJ}$$

Thay vào, giải ra được:

$$X_1 = 0,0759$$

Vẽ $(M_p^o) = (\bar{M}_1^*)X_1 + (M_p^o)$ (H.7.3.5k)

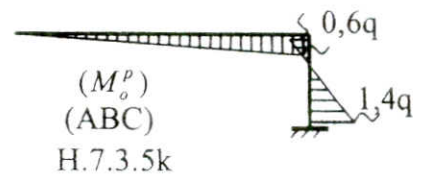
c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$* r_{11} = 0,3EJ + EJ + \frac{4}{3}EJ = 2,633EJ$$

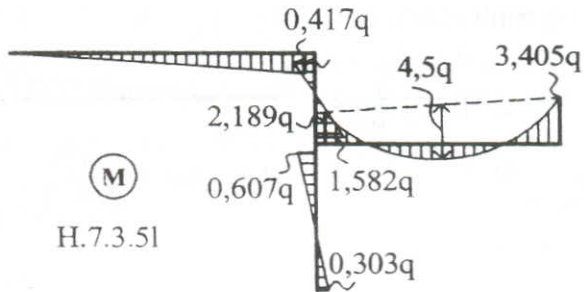
$$* R_{1P} = 1,4q - 3q = -1,6q$$

$$\rightarrow 2,633EJ \cdot Z_1 - 1,6q = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{0,6076q}{EJ}$$

d. Vẽ các biểu đồ nội lực:



- Biểu đồ mômen: $(M) = (\bar{M}_1).Z_1 + (M_p^o)$. Kết quả trên hình (H.7.3.51).
- Biểu đồ lực cắt và lực dọc: vẽ tương tự các ví dụ trước.



H.7.3.51

CHƯƠNG 9 TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÚNG DẦN

Cách tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp chuyển vị hay phương pháp lực cho ta các kết quả có độ chính xác cao. Tuy nhiên, việc tính theo các phương pháp này có gây ra những khó khăn nhất định đặc biệt là khi số lượng các ẩn số càng lớn nhưng với những công cụ tính toán thông thường.

Để giải quyết khó khăn này, người ta tìm cách giải bài toán với kết quả gần đúng bằng những cách tính đơn giản và kết quả gần đúng đó là chấp nhận được khi thiết kế kết cấu. Một trong các cách tính đó là phương pháp tính đúng dần.

Đặc điểm của phương pháp này là ta chỉ cần thực hiện phép tính theo một trình tự nhất định, lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi thỏa mãn yêu cầu độ chính xác là được.

Nội dung của phương pháp tính đúng dần nói chung được trình bày dưới dạng phân phối mômen hay phân phối biến dạng theo hình thức này hoặc hình thức khác.

Sau đây, ta đi tìm hiểu 2 phương pháp đúng dần, đó là phương pháp H.Cross và phương pháp G.Kani.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP H.CROSS

I. Khái niệm:

Phương pháp H.Cross là hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp đúng dần mang ý nghĩa vật lý.

* Ưu điểm của phương pháp:

- Tính toán đơn giản.
- Chỉ yêu cầu phải giải 1 số lượng phương trình rất ít so với số lượng các phương trình theo phương pháp "chính xác" và có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình.

* Nhược điểm của phương pháp: Chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ có nút không chuyển vị thẳng.

II. Quy ước cách đọc tên và xét dấu của nội lực:

1. Quy ước khi đọc tên của nội lực:

Ta dùng ký hiệu cho nội lực tương ứng như đã biết nhưng kèm theo hai chỉ số:

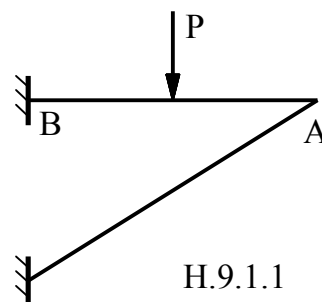
- Chỉ số thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chứa thành phần nội lực.
- Chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chứa nội lực đó.

Ví dụ: M_{AB} : mômen tại tiết diện A thuộc thanh AB.

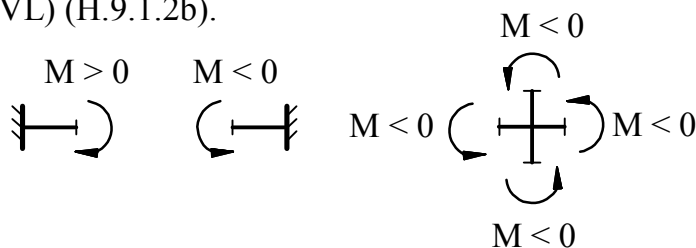
Q_{AC} : đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AC.

2. Quy ước dấu:

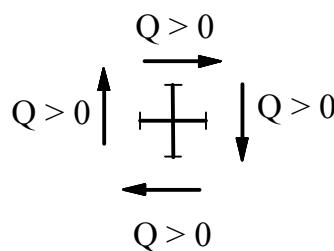
- Mômen uốn tại nút được xem là dương khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và ngược lại. Xem ví dụ trên hình (H.9.1.2a).



- Lực cắt được xem là dương làm cho thành phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và xem là âm khi nó quay ngược chiều kim đồng hồ (giống SBVL) (H.9.1.2b).



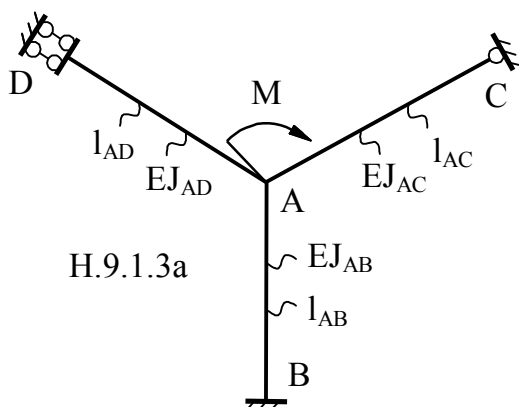
H.9.1.2a



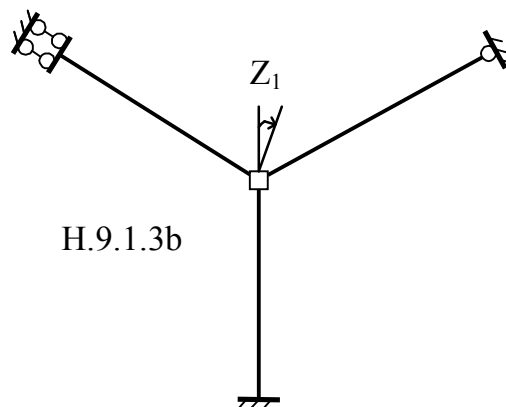
H.9.1.2b

III. Sự phân phối mômen xung quanh một nút:

Xét một hệ chỉ gồm có một nút không có chuyển vị thẳng và chịu mômen tập trung tại nút như trên hình (H.9.1.3a). Ta đi xác định mômen uốn M_{AB} , M_{AC} , M_{AD} tại các đầu thanh quy tụ tại nút A và mômen M_{BA} , M_{CA} , M_{DA} tại các đầu đối diện với nút A.



H.9.1.3a



H.9.1.3b

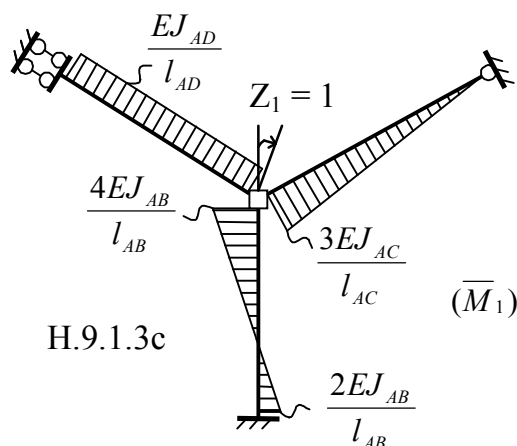
Chọn cách giải hệ bằng phương pháp chuyển vị:

- Chọn hệ cơ bản trên hình (H.9.1.3b), hệ phương trình chính tắc có dạng:

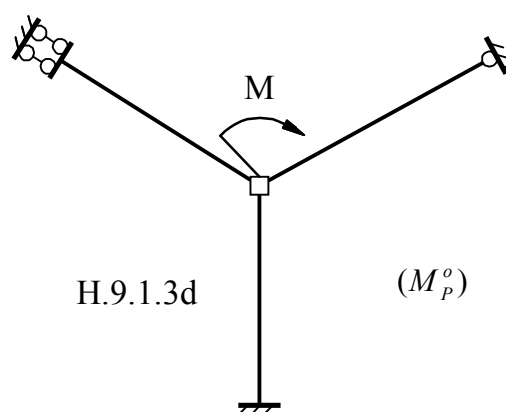
$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

- Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

+ Các biểu đồ $(\bar{M}_1)$ và (M_p^o) vẽ trên hình (H.9.1.3.c & H.9.1.3d).



H.9.1.3c

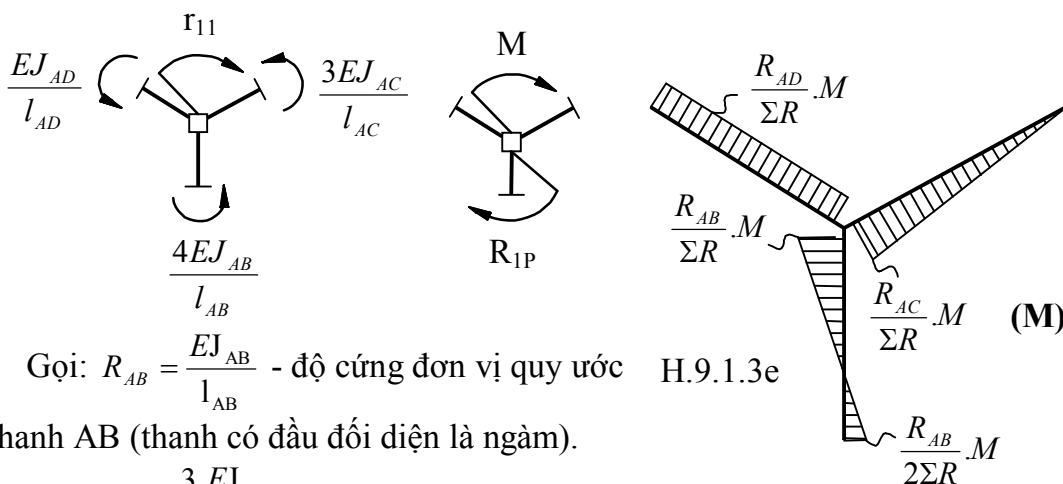


H.9.1.3d

 (M_p^o)

* r_{11} :

$$r_{11} = \frac{4EJ_{AB}}{l_{AB}} + \frac{3EJ_{AC}}{l_{AC}} + \frac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$$



Gọi: $R_{AB} = \frac{EJ_{AB}}{l_{AB}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AB (thanh có đầu đối diện là ngàm).

$R_{AC} = \frac{3}{4} \frac{EJ_{AC}}{l_{AC}}$ - độ cứng đơn vị quy

ước của thanh AC (thanh có đầu đối diện là khớp).

$R_{AD} = \frac{1}{4} \frac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AD (thanh có đầu đối

diện là ngàm trượt song song với trục thanh).

Suy ra: $r_{11} = 4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}) = 4 \Sigma R$

* R_{1P} :

$R_{1P} = -M.$

Thay vào phương trình chính tắc:

$$4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}).Z_1 - M = 0 \Rightarrow Z_1 = \frac{M}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} = \frac{M}{4\Sigma R}$$

- Vẽ biểu đồ mômen (M):

$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + M_p^o$. Kết quả thể hiện trên hình (H.9.1.3e).

Từ đây, ta xác định được giá trị mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút

A:

$$M_{AB} = \frac{R_{AB}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AC} = \frac{R_{AC}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AD} = \frac{R_{AD}}{\Sigma R} . M$$

- Các mômen uốn M_{AB} , M_{AC} , M_{AD} là do mômen M phân phối vào nút A nên gọi là mômen phân phối. Và nếu xét dấu theo qui ước H.Cross thì:

$$M_{AB} = -\frac{R_{AB}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AC} = -\frac{R_{AC}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AD} = -\frac{R_{AD}}{\Sigma R} . M$$

- Mômen uốn tại các đầu thanh đối diện với nút A:

$$M_{BA} = +\frac{1}{2} . M_{AB}; \quad M_{CA} = 0 . M_{AC}; \quad M_{DA} = -1 . M_{AD}.$$

Các mômen này gọi là mômen truyền.

♦ **Tổng quát:** Khi nút A gồm nhiều thanh quy tụ, ta có:

+ Mômen phân phối tại đầu A thuộc thanh AX:

$$M_{AX} = -\gamma_{AX} . M.$$

+ Mômen truyền:

$$M_{XA} = \beta_{XA} . M_{AX}.$$

Trong đó: γ_{AX} - hệ số phân phối của thanh AX.

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}.$$

R_{AX} : là độ cứng đơn vị quy ước của thanh AX, phụ thuộc vào liên kết đầu đối diện với nút.

ΣR : tổng độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút A.

β_{XA} : hệ số truyền của thanh AX.

* *Chú ý*: Mômen M tập trung tại nút trong các biểu thức trên được lấy dấu dương khi xoay cùng chiều kim đồng hồ và ngược lại.

B.9.1.1 Bảng độ cứng đơn vị vi ước và các hệ số truyền

Liên kết đầu đối diện nút	R_{AX}	β_{XA}
- Khớp	$\frac{3}{4} \frac{EJ}{l}$	0
- Ngàm trượt	$\frac{1}{4} \frac{EJ}{l}$	-1
- Ngàm	$\frac{EJ}{l}$	+1/2
- Tự do	0	0

Ví dụ 1: Xác định mômen phân phối và mômen truyền của hệ cho trên hình (H.9.1.4a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước:

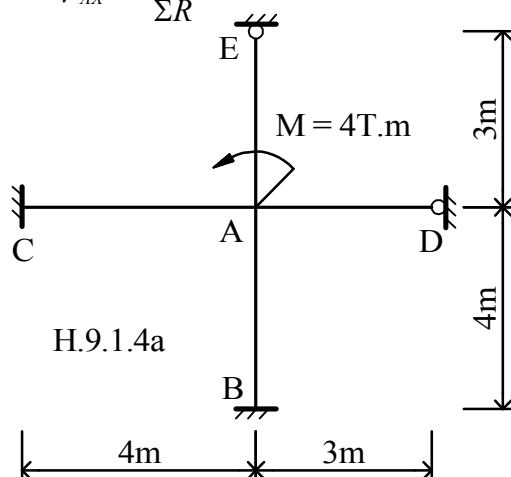
$$R_{AB} = \frac{EJ}{l_{AB}} = \frac{EJ}{4}; R_{AC} = \frac{EJ}{l_{AC}} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{AD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{EJ}{l_{AD}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4}; R_{AE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{EJ}{l_{AE}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4}$$

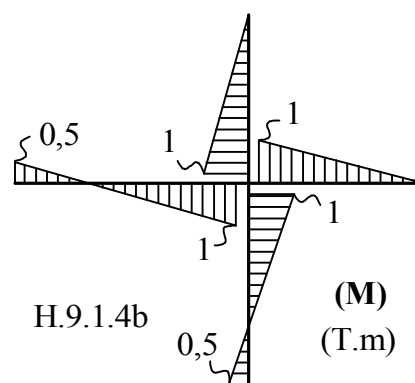
2. Xác định hệ số phân phối và mômen phân phối:

- Hệ số phân phối:

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}.$$



H.9.1.4a



H.9.1.4b

$$\rightarrow \gamma_{AB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25$$

Mômen phân phối: $M_{AX} = -\gamma_{AX} \cdot M$.

→ $M_{AB} = -0,25 \cdot (-4) = 1$; $M_{AC} = -0,25 \cdot (-4) = 1$;

$M_{AD} = -0,25 \cdot (-4) = 1$; $M_{AE} = -0,25 \cdot (-4) = 1$

3. Xác định hệ số truyền và mômen truyền:

- Hệ số truyền: $\beta_{BA} = \beta_{CA} = \frac{1}{2}$; $\beta_{DA} = \beta_{EA} = 0$.

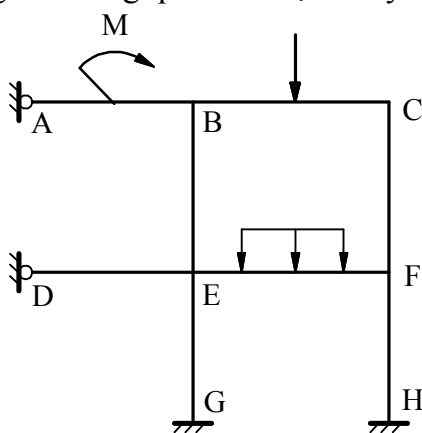
- Mômen truyền: $M_{XA} = \beta_{XA} \cdot M_{AX}$.

→ $M_{BA} = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5$; $M_{CA} = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5$; $M_{DA} = M_{EA} = 0$.

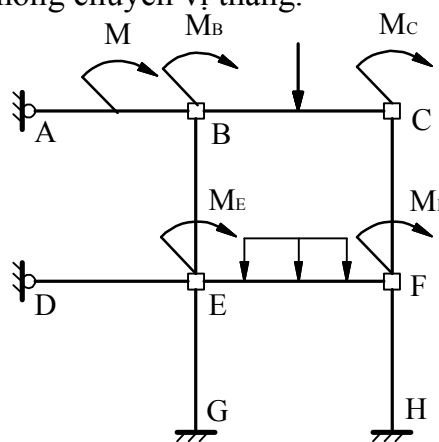
Kết quả tính toán có thể được vẽ trên biểu đồ (M) (H.9.1.4b)

IV. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng:

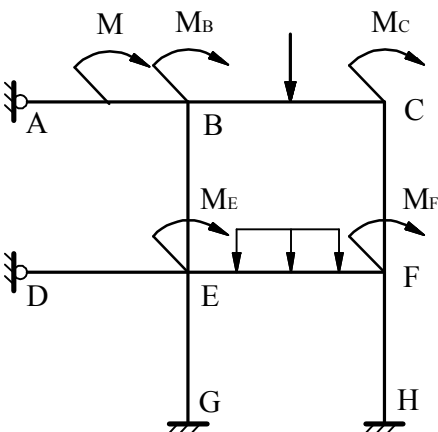
Ta phân tích cách tính hệ trên hình (H.9.1.5a). Tuy nhiên, cách lập luận vẫn mang tính tổng quát cho hệ bất kỳ có nút không chuyển vị thẳng.



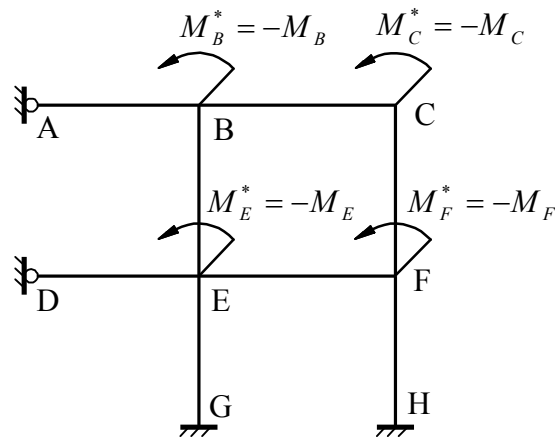
H.9.1.5a



H.9.1.5b



H.9.1.5c

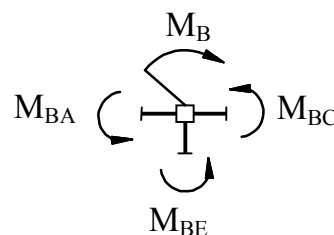


H.9.1.5d

Giả sử ngăn cản chuyển vị xoay của tất cả các nút bằng cách đặt thêm vào mỗi nút một liên kết mômen, ta sẽ thu được một hệ mới chính là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (H.9.1.5b). Tại mỗi nút bị chốt, sẽ phát sinh những phản lực mômen gọi là ngẫu lực chèn. Ngẫu lực chèn phải cân bằng với mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút đó.

Ví dụ: Với nút B:

$$M_B + M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0.$$



Suy ra: $M_B = -(M_{BA} + M_{BE} + M_{BC})$.

Vậy ngẫu lực chèn tại một nút sẽ bằng tổng đại số mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại mỗi nút đang xét do tải trọng gây ra trên hệ có nút bị chốt nhưng trái dấu.

Nhận xét: - Các ngẫu lực chèn chính là R_{kp} của phương pháp chuyển vị.

Tiếp tục biến đổi nút bị chốt bằng cách thay các liên kết mômen bằng các ngẫu lực chèn tương ứng tại mỗi nút ta sẽ được hệ tương đương trên hình (H.9.1.5c). Hệ này khác với hệ ban đầu là hệ có thêm các ngẫu lực chèn tại các nút.

Xét một hệ phụ lấy từ hệ ban đầu, trong đó chỉ chịu các ngẫu lực đặt tại các nút. Các ngẫu lực này có giá trị bằng ngẫu lực chèn nhưng ngược chiều và được gọi là mômen nút cứng (H.9.1.5d).

Theo nguyên lý cộng tác dụng thì:

Hệ ban đầu H.9.1.5a	=	Hệ ban đầu + ngẫu lực chèn tại các nút cứng (H.9.1.5c)	+	Hệ ban đầu chỉ chịu mômen nút cứng (H.9.1.5d)
------------------------	---	--	---	---

Như vậy, thay vì đi giải bài toán với hệ trên hình (H.9.1.5.a), ta đi giải bài toán trên hình (H.9.5.1b) hoặc (H.9.5.1c) và (H.9.5.1d).

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1c) ta dễ dàng xác định được nội lực, đó chính là nội lực do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là biểu đồ $(\bar{M}_p^o)$ của phương pháp chuyển vị.

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1d), ta tìm cách tính đúng dần. Cách thực hiện như sau:

+ Lần lượt tháo từng chốt. Khi tháo từng chốt thì mômen nút cứng sẽ phân phối vào nút đó và truyền vào các nút lân cận như đã trình bày trong bài toán sự phân phối mômen xung quanh một nút. Và nút này sẽ xoay đến vị trí cân bằng mới.

+ Chốt lại nút này và chuyển sang nút khác và thực hiện tương tự.

Quá trình cứ tiến hành như vậy và lặp lại nhiều lần cho đến khi ta tháo tất cả các chốt thì các nút không xoay nữa (mômen tại các nút đã cân bằng). Thực chất vẫn chưa cân bằng nhưng giá trị của mômen uốn không cân bằng là không đáng kể. Lúc này, ta dừng quá trình thực hiện và trạng thái đó là trạng thái cần tìm.

Mômen uốn tại các đầu thanh tương ứng chính là tổng đại số mômen phân phối và mômen truyền tích lũy trong các chu trình.

- Muốn tìm mômen uốn tại các đầu thanh nào của hệ đã cho ban đầu, ta lấy tổng đại số mômen do tải trọng gây ra trên hệ có các nút bị chốt với mômen uốn do mômen nút cứng gây ra trên các đầu thanh tương ứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục trên hình (H.9.1.6.a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AB} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{l_{AB}} = \frac{3EJ}{16}; \quad R_{BC} = \frac{EJ}{l_{BC}} = \frac{EJ}{3}.$$

$$R_{CD} = \frac{EJ}{l_{CD}} = \frac{EJ}{4}; \quad R_{DE} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{l_{DE}} = \frac{EJ}{4}.$$

2. Xác định hệ số phân phối từng đầu thanh quy tụ vào nút:

- Tại nút B:

$$\gamma_{BA} = \frac{\frac{3EJ}{16}}{\left(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3}\right)} = 0,36; \gamma_{BC} = \frac{\frac{EJ}{3}}{\left(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3}\right)} = 0,64.$$

- Tại nút C:

$$\gamma_{CB} = \frac{\frac{EJ}{3}}{\left(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,577; \gamma_{CD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,429.$$

- Tại nút D:

$$\gamma_{DC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,5; \gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,5.$$

3. Xác định mômen nút cứng M^* tại các đầu thanh do tải trọng gây ra:

Tra bảng cho các phần tử chịu tải trọng và xét dấu theo qui ước H.Cross.

$$M_{BA}^* = -2,25(\text{T.m}); M_{BC}^* = 0,9(\text{T.m}); M_{CB}^* = -0,9(\text{T.m});$$

$$M_{CD}^* = 1(\text{T.m}); M_{DC}^* = -1(\text{T.m}); M_{DE}^* = 1,35(\text{T.m}).$$

4. Phân phối và truyền mômen:

Quá trình phân phối và truyền mômen được lập thành bảng. Bảng có thể được lập như sau:

* Hàng thứ nhất ghi ký hiệu các nút và các đầu thanh có liên kết ngàm.

* Hàng thứ hai ghi ký hiệu những đầu thanh quy tụ tại nút tương ứng. Nút có bao nhiêu thanh quy tụ thì có bấy nhiêu cột.

* Hàng thứ ba ghi các hệ số phân phối tương ứng với các đầu thanh quy tụ vào nút.

* Hàng thứ tư ghi trị số mômen nút cứng tại các đầu thanh.

* Các hàng tiếp theo ghi kết quả phân phối và truyền mômen lần lượt tương ứng với các nút được tháo chốt.

Với ví dụ trên quá trình được thực hiện như sau:

Chu trình 1:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = -2,25 + 0,9 = -1,35(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{BA} = (-0,36).(-1,35) = 0,486(\text{T.m})$$

$$M_{BC} = (-0,64).(-1,35) = 0,864(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{CB} = \frac{1}{2}.0,864 = 0,432$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = -0,9 + 1 + 0,432 = 0,532(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{CB} = (-0,571).0,532 = -0,3037(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{BC} = -0,1519(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).0,532 = -0,2282(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = -0,1141(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = -1 + 0,35 - 0,1141 = 0,2359(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{DC} = (-0,5).0,2359 = -0,1179(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{CD} = -0,0589(\text{T.m})$$

$$M_{DE} = (-0,5).0,2359 = -0,1179(\text{T.m})$$

$$M_{ED} = 0.$$

Chu trình 2:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = -0,1519(\text{T.m}).$$

* Nhận xét: Khi tháo chốt ở các nút trong chu kỳ thứ (i) nào đó thì nguyên nhân làm cho nút không cân bằng là các mômen truyền từ các nút khác tới trong chu trình thứ (i-1) chứ không phải do mômen phân phối.

+ Mômen phân phối:

$$M_{BA} = (-0,36).(-0,1519) = 0,0546(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{BC} = (-0,64).(-0,1519) = 0,0972(\text{T.m})$$

$$M_{CB} = 0,0486(\text{T.m})$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = 0,0486 - 0,0589 = -0,0103(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{CB} = (-0,571).(-0,0103) = 0,0058(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{BC} = 0,0029(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).(-0,0103) = 0,0044(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = 0,0022(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = 0,0022(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{DC} = (-0,5).0,0022 = -0,0011(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = \frac{1}{2}.(-0,0011) = -0,0005(\text{T.m})$$

$$M_{DE} = (-0,5).0,0022 = -0,0011(\text{T.m})$$

$$M_{ED} = 0.$$

Chu trình 3:

- Tháo chốt nút B

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = 0,0029(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{BA} = -0,36.0,0029 = -0,0010(\text{T.m})$$

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{BC} = -0,64.0,0029 = -0,0018(\text{T.m})$$

$$M_{CB} = -0,0009(\text{T.m})$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = -0,0009 - 0,0005 = -0,0014(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{CB} = (-0,571).(-0,0014) = 0,0008(\text{T.m})$$

$$M_{BC} = 0,0004(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).(-0,0014) = 0,0006(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = 0,0003(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = 0,0003(T.m).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{DC} = (-0,5).0,0003 = -0,00015(T.m)$$

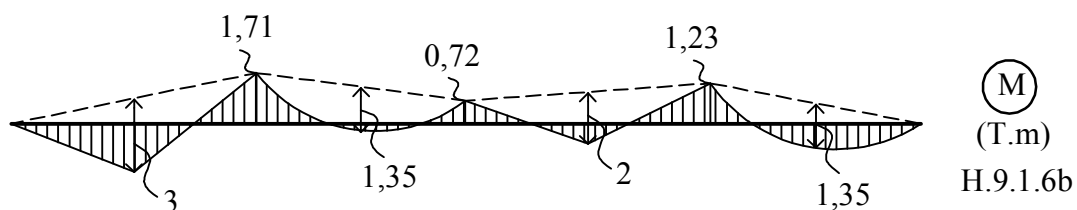
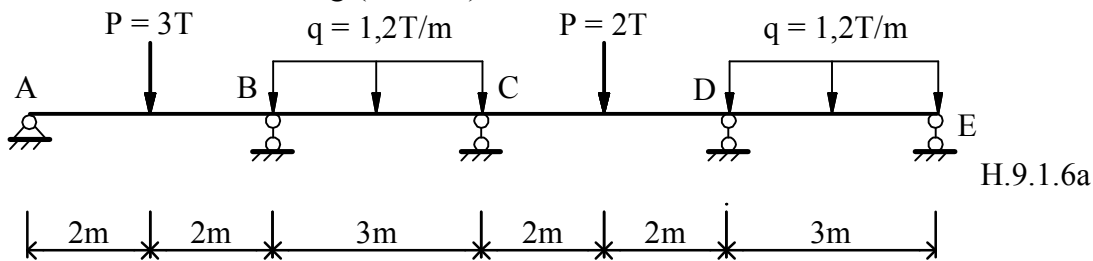
$$M_{DE} = (-0,5).0,0003 = -0,00015(T.m)$$

Mômen truyền:

$$M_{CD} = -0,00007(T.m)$$

$$M_{DC} = 0.$$

Các mômen phân phối đã khá nhỏ, ta có thể dùng quá trình tại đây. Kết quả tính toán ta thể hiện trên bảng (B.9.1.2).



Nút (Ngàm)	A	B		C		D		E
Đầu	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
γ		0,36	0,64	0,571	0,429	0,5	0,5	
M^*		-2,25	0,9	-0,9	1	-1	1,35	
B	0	0,486	0,864	0,432				
C			-0,1519	-0,3037	-0,2282	-0,1141		
D					-0,0589	-0,1179	0,1179	0
B	0	0,05476	-0,0972	0,0486				
C			0,0029	0,0058	0,0044	0,0022		
D					-0,0005	-0,0011	-0,0011	0
B	0	-0,0010	-0,0018	-0,0009				
C			0,0004	0,0008	0,0006	0,0003		
D					-0,00007	-0,00015	-0,00015	0
M_{cc}	0	-1,7102	1,7108	-0,7174	0,7173	-1,230	1,230	0

B.9.1.2 Bảng phân phối mômen.

Mômen uốn tại các đầu thanh trong hệ ban đầu sẽ bằng mômen uốn trong hệ có các nút bị chốt ghi ở hàng thứ 4 trên bảng cộng với mômen uốn trong hệ chịu các mômen nút cứng đặt tại nút cứng là tổng các giá trị ghi từ hàng thứ 5 trở xuống.

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi đã biết mômen uốn tại các đầu thanh ta vẽ được biểu đồ (M) theo cách đã biết như phương pháp treo biểu đồ chẳng hạn (H.9.1.6b).

6. Kiểm tra cân bằng nút:

$$\text{Nút B: } -1,7102 + 1,7108 = 0,0006 \approx 0.$$

$$\text{Nút C: } -0,7174 + 0,7173 = -0,0001 \approx 0.$$

Nút D: $-0,1230 + 0,1230 = 0$.

* Chú ý:

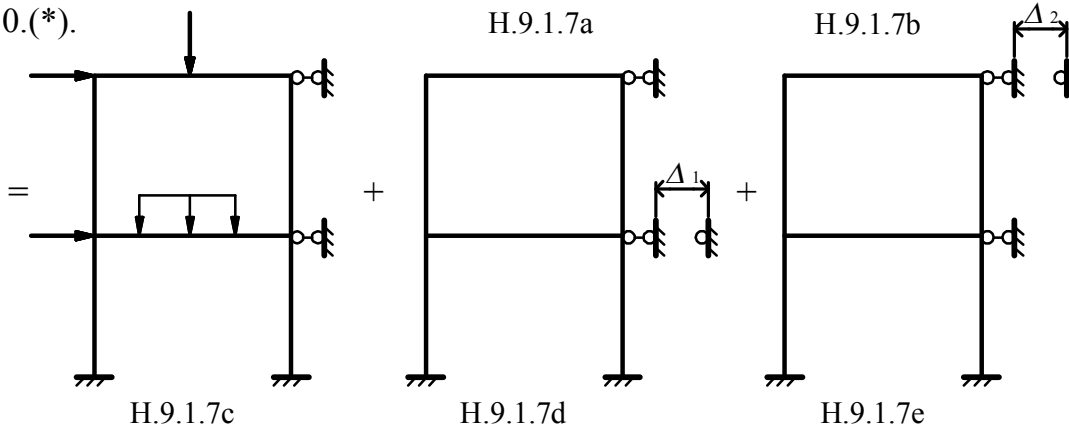
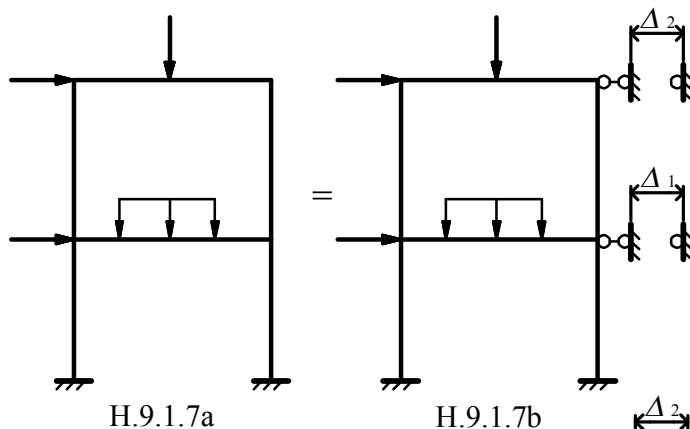
- Ta luôn kiểm tra kết quả trong quá trình tính toán:
 - + Tổng hệ số phân phối xung quanh một nút bằng đơn vị.
 - + Tổng mômen phân phối bằng mômen nút cứng nhưng trái dấu.
- Theo kinh nghiệm, ta nên tháo chốt nút có mômen không cân bằng lớn nhất làm nút khởi đầu.
- Trong trường hợp hệ chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, cũng tính tương tự với cách tính trên, riêng ở bước xác định mômen nút cứng M^* , ta thực hiện giống như lúc vẽ biểu đồ (M_z^o) , (M_t^o) của phương pháp chuyển vị.

V. Tính hệ có nút chuyển vị thẳng:

Để đơn giản, ta đi tìm hiểu cách tính hệ trên hình (H.9.1.7a). Tuy nhiên, cách lập luận vẫn tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ.

Đưa hệ đã cho về hệ có nút không chuyển vị thẳng bằng cách đặt thêm hai liên kết thanh vào ngang mức hai tầng (H.9.1.7b).

Để hệ mới làm việc giống hệ ban đầu, ta cần gây ra các chuyển vị cưỡng bức Δ_1 , Δ_2 tương ứng với vị trí và phương của liên kết thanh mới thêm vào và thiết lập điều kiện phản lực trong các liên kết thanh này bằng không: $R_1 = 0$; $R_2 = 0$.(*)



Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta đưa hệ trên hình (H.9.1.7b) về ba hệ thành phần:

- Hệ có nút không chuyển vị thẳng và chịu tải trọng (H.9.1.7c).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng nhưng tại liên kết đặt thêm vào tại tầng một chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_1 (H.9.1.7d).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng tại liên kết đặt thêm vào tầng hai chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_2 (H.9.1.7e).

Viết lại điều kiện (*):

$$\begin{cases} R_1(P, \Delta_1, \Delta_2) = 0 \\ R_2(P, \Delta_1, \Delta_2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{1P} + R_{1\Delta_1} + R_{1\Delta_2} = 0 \\ R_{2P} + R_{2\Delta_1} + R_{2\Delta_2} = 0 \end{cases}$$

Trong đó:

R_{kP} : phản lực tại liên kết k đặt thêm vào do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng.

$R_{k\Delta_m}$: phản lực tại liên kết k thêm vào do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng Δ_m gây ra.

Mặc khác, các chuyển vị Δ_m là chưa biết, để thuận lợi cho việc tính toán, ta biểu thị:

$$\Delta_m = k_m \cdot \delta_m$$

δ_m : chuyển vị tại liên kết m, δ_m có thể chọn tùy ý (thường chọn bằng đơn vị), còn k_m chưa biết giữ vai trò ẩn số.

Nếu gọi r_{km} là phản lực tại liên kết k do δ_m gây ra thì $R_{k\Delta_m} = r_{km} \cdot k_m$.

Thay vào hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} R_{1P} + r_{11}k_1 + r_{12}k_2 = 0 \\ R_{2P} + r_{21}k_1 + r_{22}k_2 = 0 \end{cases}$$

Biểu đồ mômen cuối cùng trong hệ:

$$(M) = (M_P) + (M_{\Delta_1}) + (M_{\Delta_2}) = (M_P) + k_1 \cdot (\overline{M}_1) + k_2 \cdot (\overline{M}_2).$$

- $(\overline{M}_m)$ là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị δ_m gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng; (M_P) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng.

+ Biểu đồ (M_P) ta dễ dàng vẽ được theo hệ có nút không có chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng như ở phần phương pháp chuyển vị.

+ Biểu đồ $(\overline{M}_m)$ cũng thực hiện như vẽ biểu đồ (M_P) nhưng ở đây nguyên nhân tác dụng là chuyển vị cưỡng bức là δ_m .

Vấn đề còn lại là đi xác định k_1, k_2 . Cách thực hiện như sau:

- Sau khi vẽ được biểu đồ $(M_P), (\overline{M}_m)$, ta sẽ xác định được r_{km}, R_{kP} bằng cách thực hiện mặt cắt, tách ra một hệ và xét cân bằng như lúc xác định các hệ số của phương pháp chuyển vị tại liên kết thanh đặt thêm vào. Sau đó giải hệ trên ta sẽ được k_1, k_2 .

Trong trường hợp tổng quát, hệ có n nút chuyển vị độc lập:

- Phương trình thứ i của hệ xác định các k_i :

$$R_{iP} + r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \dots + r_{in}k_n = 0; i = \overline{1, n}.$$

- Và $(M) = (M_P) + (\overline{M}_1)k_1 + \dots + (\overline{M}_n)k_n$.

* *Chú ý:*

- Trường hợp hệ có thanh đứng không song song hay chịu tác dụng của nguyên nhân biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, nguyên tắc tính toán vẫn không thay đổi. Tuy nhiên, cần chú ý vận dụng sơ đồ chuyển vị hay giản đồ *Williot* khi xác định các mômen nút cứng.

- Nếu chọn $\delta_k = \delta_m$ thì $r_{km} = r_{mk}$.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.9.1.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh đứng là EJ, trong các thanh ngang là 2EJ.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AD} = R_{BE} = R_{CF} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{DE} = R_{EF} = \frac{2EJ}{4} = \frac{EJ}{2}.$$

2. Xác định hệ số phân phối:

Nút D:

$$\gamma_{DA} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333;$$

$$\gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$$

Nút E:

$$\gamma_{ED} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EF} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,2.$$

$$\text{Nút F: } \gamma_{FC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333; \gamma_{FE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$$

3. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng. (H.9.1.8b)

- Xác định mômen nút cứng:

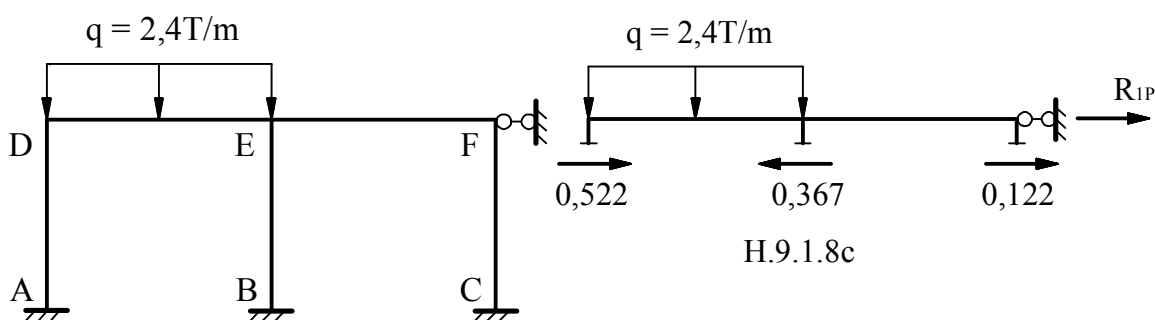
$$M_{DE}^* = -M_{ED}^* = \frac{ql^2}{12} = \frac{2,4 \cdot 4^2}{12} = 3,2(T.m).$$

- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.3)

- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được (M_p^o).

- Xác định phản lực R_{IP} : Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8c). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen (M_p^o).

$$\rightarrow R_{IP} = 0,367 - 0,522 - 0,122 = -0,277.$$



H.9.1.8b

Nút (Ngàm)	A	B	D		E			F		C
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,3333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,6666	0,3333	
M^*				3,2	-3,2					
D	-0,533		-1,066	-2,133	-1,066					
E		0,426		0,853	1,706	0,853	1,706	0,853		
F							-0,284	-0,568	-0,284	-0,142
D	-0,142		-0,284	-0,568	-0,284					
E		0,056		0,113	0,227	0,113	0,227	0,113		
F							-0,037	-0,075	-0,037	-0,018
D	-0,018		-0,037	-0,075	-0,037					
E		0,007		0,014	0,029	0,014	0,029	0,014		
F							-0,004	-0,009	-0,004	-0,002
D	-0,022		-0,004	-0,009	-0,004					
M_{cc}	-0,695	0,489	-1,395	1,395	-2,629	0,98	1,637	0,328	-0,325	-0,162

B.9.1.3 Bảng phân phối mômen do tải trọng

4. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu chuyển vị cưỡng bức:

- Hệ số phân phối và hệ số truyền đã xác định ở mục 3.
- Xác định mômen nút cứng:

Chốt tất cả các nút và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị cưỡng bức (H.9.1.8d):

$$M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = \frac{6EJ}{l^2} \cdot \delta_1$$

Nếu chọn $\delta = \frac{l^2}{6EJ}$ thì $M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = 1$

Suy ra được: $M_{AD}^* = M_{BE}^* = M_{CF}^* = 1/2$.

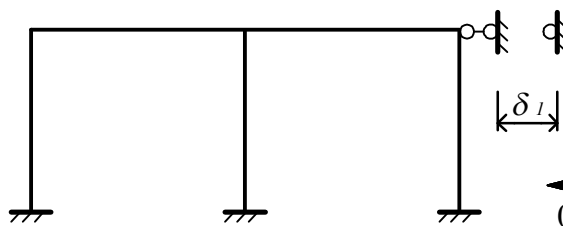
- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.4)
- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được $(\bar{M}_1)$.
- Xác định phản lực r_{11} :

Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8d). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen $(\bar{M}_1)$.

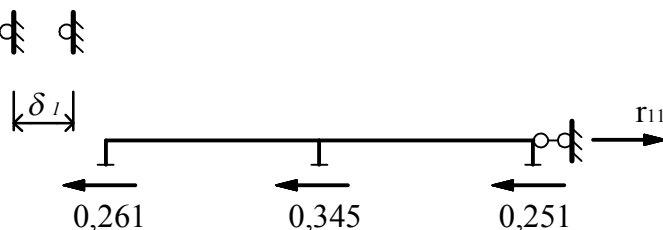
$$\rightarrow r_{11} = 0,261 + 0,345 + 0,251 = 0,857.$$

5. Thay tất cả vào phương trình xác định k:

$$r_{11}k_1 + R_{1P} = 0 \rightarrow 0,877 \cdot k_1 - 0,277 = 0 \rightarrow k_1 = 0,323.$$



H.9.1.8d



H.9.1.8e

Nút (Ngàm)	A	B	D		E			F		C
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,666	0,333	
M^*	0,5	0,5	1			1			1	0,5
D	-0,166		-0,333	-0,666	-0,333					
E		-0,066		-0,133	-0,266	-0,133	-0,266	-0,133		
F								-0,577	-0,288	-0,144
D	0,022		0,044	0,088	0,044					
E		0,024		0,048	0,097	0,048	0,097	0,048		
F							-0,015	-0,031	-0,015	-0,007
D	-0,008		-0,015	-0,031	-0,015					
E		0,003		0,006	0,012	0,006	0,012	0,006		
F							-0,002	-0,004	-0,002	-0,001
M_{cc}	0,348	0,461	0,696	-0,688	-0,461	0,921	-0,462	-0,687	0,659	0,348

B.9.1.4 Bảng phân phối mômen do δ_1

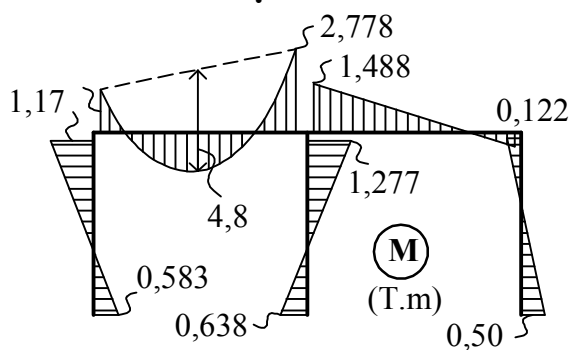
6. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh của hệ ban đầu:

Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
M_p^o	-0,695	0,489	-1,395	1,395	-2,629	0,98	1,637	0,328	-0,325	-0,162
$\bar{M}_1$	0,348	0,461	0,696	-0,688	-0,461	0,921	-0,462	-0,687	0,659	0,348
$\bar{M}_1.k_1$	0,112	0,149	0,225	-0,222	-0,149	0,297	-0,149	-0,222	0,213	0,112
M_{cc}	-0,583	0,638	-1,170	1,173	-2,778	1,277	1,488	0,106	-0,112	-0,50

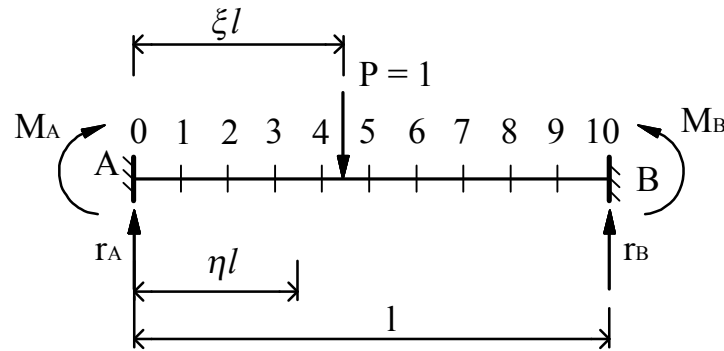
B.9.1.5 Bảng xác định mômen trên hệ.

Sau khi đã xác định được mômen uốn tại các đầu thanh, ta có thể vẽ được biểu đồ (M). Xem hình (H.9.1.8f).

Sau khi đã vẽ được biểu đồ (M), tiến hành biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc theo nguyên tắc đã biết.



H.9.1.8f



$$M_A = -\xi(1-\xi)^2 l; \quad M_B = -\xi^2(1-\xi) l$$

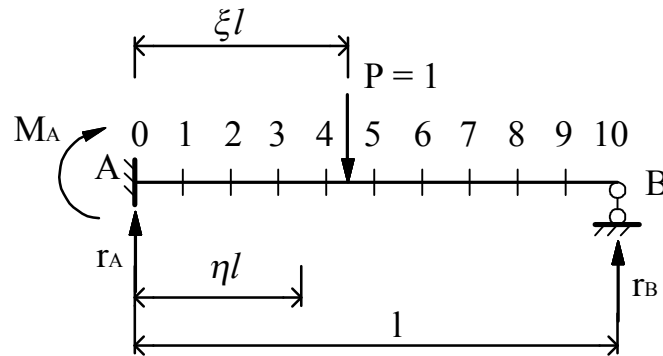
$$r_A = (1-\xi)^2(1+2\xi); \quad r_B = \xi^2(3-2\xi) l$$

$$M_k = (1-\xi)[\eta(1+2\xi) - \xi] l \quad \text{when } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \xi^2[(1-\eta)(3-2\xi) - (1-\xi)] l \quad \text{when } \eta \geq \xi$$

ξ		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,0810.1	-0,1280.1	-0,1470.1	-0,1440.1	-0,1250.1	-0,0960.1	-0,0630.1	-0,0320.1	-0,0090.1	0
	0,1	0	0,08092.1	-0,0384.1	-0,0686.1	-0,0792.1	-0,0750.1	-0,0608.1	-0,0414.1	-0,0216.1	-0,0062.1	0
	0,2	0	0,0134.1	0,0512.1	0,0118.1	-0,0144.1	-0,0250.1	-0,0256.1	-0,0198.1	-0,0112.1	-0,0034.1	0
	0,3	0	0,0106.1	0,0408.1	0,0882.1	0,0504.1	0,0250.1	0,0096.1	0,0234.1	-0,0008.1	-0,0006.1	0
	0,4	0	0,0078.1	0,0302.1	0,0666.1	0,1152.1	0,0750.1	0,0448.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0022.1	0
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0
	0,6	0	0,0022.1	0,0096.1	0,0234.1	0,0448.1	0,0750.1	0,1152.1	0,0666.1	0,0302.1	0,0078.1	0
	0,7	0	-0,0006.1	-0,0008.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0250.1	0,0504.1	0,0882.1	0,0408.1	0,0106.1	0
	0,8	0	-0,0034.1	-0,0112.1	0,0198.1	-0,0256.1	-0,0250.1	-0,0144.1	0,0118.1	0,0512.1	0,0134.1	0
	0,9	0	-0,0062.1	-0,0216.1	0,0414.1	-0,0608.1	-0,0750.1	-0,0792.1	-0,0686.1	-0,0384.1	0,0892.1	0
1,0	0	-0,0090.1	-0,0320.1	0,0630.1	-0,0960.1	-0,1250.1	-0,1400.1	-0,1470.1	-0,1284.1	-0,0810.1	0	

B.6.5.1



$$M_A = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)l ;$$

$$M_B = 0$$

$$r_A = \frac{1}{2}(2-3\xi^2+\xi^3) ;$$

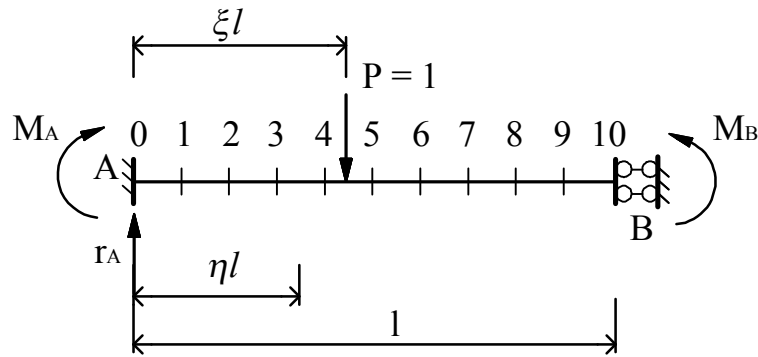
$$r_B = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)l$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)(1-\eta)l - (\xi-\eta)l \quad \text{khi } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\eta)(1-\eta)l \quad \text{khi } \eta \geq \xi$$

ξ		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,08550.1	-0,1440.1	-0,17850.1	-0,1920.1	-0,18750.1	-0,1680.1	-0,13650.1	-0,0960.1	-0,04950.1	0
	0,1	0	0,01305.1	-0,0496.1	-0,09065.1	-0,1128.1	-0,11875.1	-0,1112.1	-0,09285.1	-0,0664.1	-0,03455.1	0
	0,2	0	0,01160.1	0,0448.1	-0,00280.1	-0,0336.1	-0,05000.1	-0,0544.1	-0,04920.1	-0,0368.1	-0,01960.1	0
	0,3	0	0,01015.1	0,0392.1	0,08505.1	0,0456.1	0,01875.1	0,0024.1	-0,00550.1	-0,0072.1	-0,00465.1	0
	0,4	0	0,00780.1	0,0336.1	0,07290.1	0,1248.1	0,08750.1	0,0592.1	0,03810.1	0,0224.1	0,01030.1	0
	0,5	0	0,00725.1	0,0280.1	0,06075.1	0,1040.1	0,15625.1	0,1160.1	0,08175.1	0,0520.1	0,02525.1	0
	0,6	0	0,00580.1	0,0224.1	0,04860.1	0,0832.1	0,12500.1	0,1728.1	0,12540.1	0,0816.1	0,04020.1	0
	0,7	0	0,00435.1	0,0168.1	0,03645.1	0,0624.1	0,09735.1	0,1296.1	0,16905.1	0,1112.1	0,05515.1	0
	0,8	0	0,00290.1	0,0112.1	0,02130.1	0,0416.1	0,06250.1	0,0864.1	0,11270.1	0,1408.1	0,07010.1	0
	0,9	0	0,00145.1	0,0056.1	0,01215.1	0,0208.1	0,03125.1	0,0432.1	0,05635.1	0,0704.1	0,08505.1	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

B.6.5.2



$$M_A = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l ; \quad M_B = \frac{1}{2}\xi^2l$$

$$r_A = 1; \quad r_B = 0$$

$$M_k = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l + \eta l \quad \text{khi } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2l \quad \text{khi } \eta \geq \xi$$

ξ		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Mômen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,0950.1	-0,1800.1	-0,2550.1	-0,3200.1	-0,3750.1	-0,4200.1	-0,4550.1	-0,4800.1	-0,4950.1	-0,50.1
	0,1	0	0,0050.1	-0,0800.1	-0,1550.1	-0,2200.1	-0,2750.1	-0,3200.1	-0,3550.1	-0,3800.1	-0,3950.1	-0,40.1
	0,2	0	0,0050.1	0,0200.1	-0,0550.1	-0,1200.1	-0,1750.1	-0,2200.1	-0,2550.1	-0,2800.1	-0,2950.1	-0,30.1
	0,3	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	-0,0200.1	-0,0750.1	-0,1200.1	-0,1500.1	-0,1800.1	-0,1950.1	-0,20.1
	0,4	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,0250.1	-0,0200.1	0,0550.1	-0,0800.1	-0,0950.1	-0,10.1
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0,00
	0,6	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,1450.1	0,1200.1	0,1050.1	0,10.1
	0,7	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,2200.1	0,2050.1	0,20.1
	0,8	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,3050.1	0,30.1
	0,9	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,40.1
1,0	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,50.1	

B.6.5.3