PGS.TS. DƯƠNG VĂN THỨ

ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
HÀ NỘI - 2010

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Tải trọng tác dụng vào công trình, dựa vào tính chất tác dụng, được phân thành hai loại: Tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Tải trọng tác dụng động là tải trọng khi tác động vào công trình làm cho công trình chuyển động có gia tốc. Do công trình có khối lượng, nên khi chuyển động có gia tốc, trong công trình sẽ xuất hiện thêm lực quán tính.

Tải trọng động là tải trọng có trị số thay đổi theo thời gian, thậm chí vị trí tác dụng cũng có thể thay đổi theo thời gian; như tải trọng được sinh ra do khối lượng lệch tâm trong động cơ khi động cơ hoạt động, tải trọng gió bão, áp lực nổ, áp lực thuỷ động, tải trọng động đất vv...

Các công trình xây dựng ngày càng có hình dáng thanh mảnh nhờ các tiến bộ về mặt vật liệu xây dựng và công nghệ xây dựng, nên rất nhạy cảm với các tác dụng động. Dưới tác dụng của tải trọng động, các đại lượng phát sinh trong công trình như: Phản lực liên kết, nội lực, biến dạng, chuyển vị vv... đều thay đổi theo thời gian.

Nhiệm vụ chính của môn Động lực học công trình là nghiên cứu các phương pháp để xác định giá trị lớn nhất (biên độ) của các đại lượng nghiên cứu phát sinh trong công trình khi công trình chịu tác dụng của các tải trọng động để phục vụ bài toán kiểm tra cũng như bài toán thiết kế. Ngoài ra môn học cũng nghiên cứu các phương pháp để xác định các tần số dao động riêng của công trình để tránh hiện tượng cộng hưởng có thể xảy ra làm cho công trình bị phá hoại do nội lực, chuyển vị vv... có thể tăng lên rất lớn.

*Trong khuôn khổ một cuốn sách phục vụ học tập cho sinh viên trường Đại học Thuỷ lợi với thời lượng hai tín chỉ, trong giáo trình này chúng tôi chỉ trình bày các kiến thức cơ bản nhất của môn học **"Động lực học công trình".** Cuốn sách cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các trường Đại học kỹ thuật khác, cho các học viên cao học, và cho những người quan tâm tới việc tính toán công trình dưới tác dụng của tải trọng động.*

Do thời gian và trình độ có hạn, nên khó tránh khỏi các thiếu sót trong công việc trình bày nội dung cuốn sách; chúng tôi chân thành cảm ơn các ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp và các bạn đọc gần xa.

Các tác giả cũng gửi lời cảm ơn tới giảng viên trẻ Lý Minh Dương đã nhiệt tình tham gia chế bản và vẽ hình cho cuốn sách này.

Hà Nội, năm 2010
Tác giả

Chương 1
DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

1.1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG

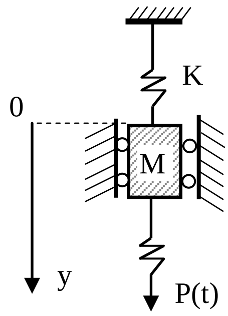
1.1.1 Khái niệm về chu kỳ và tần số

Xét hệ trên hình 1.1. Hệ gồm khối lượng M được gắn vào một điểm cố định nhờ lò xo có độ cứng K (là phản lực phát sinh trong lò xo khi lò xo biến dạng một lượng bằng đơn vị). Khối lượng M chịu tác động của một lực P(t) có phương theo phương của chuyển động (phương y), còn chiều và trị số thay đổi theo thời gian.

Khối lượng M chuyển động, lực phát sinh trong lò xo thay đổi làm cho vật thực hiện một dao động cơ học.

Tuỳ thuộc vào quan hệ giữa lực lò xo và biến dạng của lò xo là tuyến tính, hay phi tuyến, mà ta có *bài toán dao động tuyến tính hay dao động phi tuyến.*

Dao động của vật thuần túy do lực lò xo sinh ra khi M dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng ban đầu (do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra rồi mất đi) được gọi là *dao động tự do* hay là *dao động riêng*.



Hình 1.1

Dạng chuyển vị của vật M được gọi là *dạng dao động riêng*. Nếu trong quá trình dao động luôn luôn tồn tại lực động P(t), ta có bài toán *dao động cưỡng bức*. Lực động P(t) còn được gọi là *lực kích thích.*

Số các dao động toàn phần của khối lượng thực hiện trong một đơn vị thời gian, chỉ phụ thuộc vào các đặc trưng cơ học của hệ, gọi là *tần số dao động riêng* hay *tần số dao động tự do*, và được ký hiệu là *f*. Thời gian để thực hiện một dao động toàn phần được gọi là *chu kỳ* dao động, và được ký hiệu là T. Nếu T đo bằng giây (s) (trong Động lực học công trình thời gian thường được đo bằng giây), thì thứ nguyên của f là 1/s. Về trị số f và T là nghịch đảo của nhau.

1.1.2 Dao động điều hoà và véc tơ quay

Sau đây ta xét một dạng dao động quan trọng được gọi là *dao động điều hòa*. Đây là dạng dao động cơ bản thường gặp trong cơ học, mặt khác, các dao động có chu kỳ luôn luôn có thể phân tích thành các dạng dao động điều hòa đơn giản này.

Xét dao động điều hòa,

$$S(t) = A\sin\omega t \qquad (1\text{-}1)$$

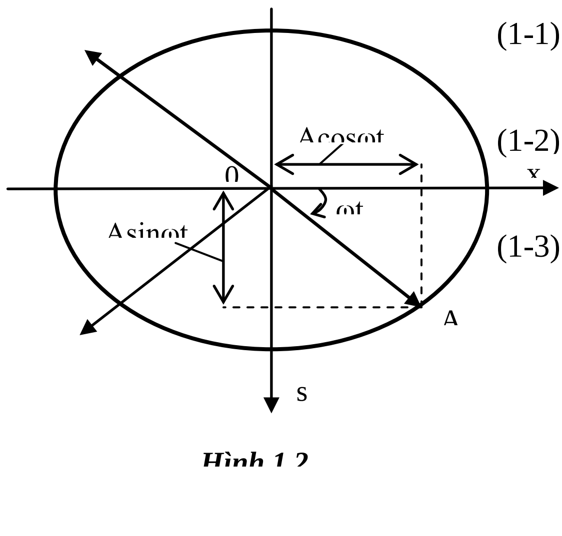
Có vận tốc

$$v(t) = A\omega\cos\omega t \qquad (1\text{-}2)$$

và gia tốc

$$a(t) = -A\omega^2\sin\omega t \qquad (1\text{-}3)$$

Ta thấy rằng, có thể miêu tả chuyển động này như chuyển dịch của điểm mút véc tơ OA (có độ lớn bằng A) lên một trục S nào đó khi véc



Hình 1.2

tơ này quay quanh điểm cố định O với vận tốc góc ω.(xem hình 1.2).

Lúc này, trị số A được gọi là *biên độ* dao động, còn vận tốc góc ω được gọi là *tần số vòng* của dao động - là số dao động toàn phần của hệ thực hiện trong 2π giây.

Thật vậy, theo định nghĩa,

$\omega T = 2\pi$, nên $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$, do đó $\omega = 2\pi f$

Tóm lại, trong dao động điều hòa ta có các quan hệ sau,

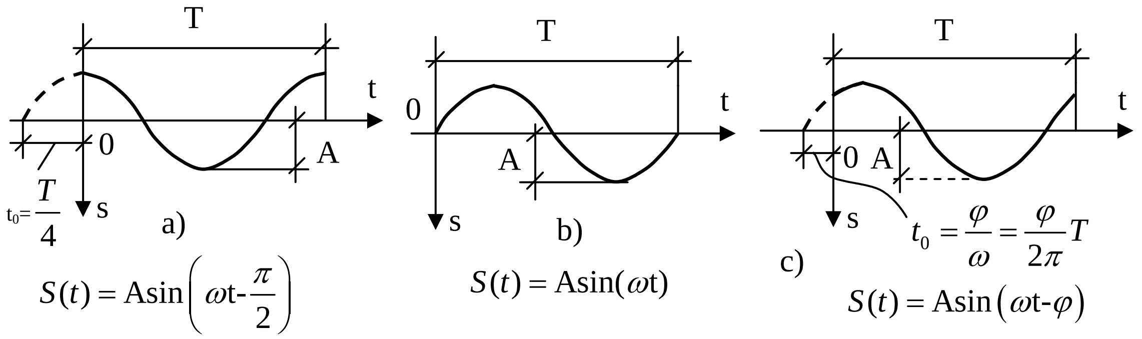
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (1\text{-}4)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (1\text{-}5)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1\text{-}6)$$

Sau này trong tính toán thực tế, người ta hay dùng ω hơn f.

Khảo sát ba dao động điều hòa cùng biên độ A và chu kỳ T, nhưng biên độ đạt được ở các thời điểm khác nhau; Cũng có nghĩa là thời điểm bắt đầu của ba dao động này là lệch nhau. Ta nói ba dao động lệch pha nhau - xem hình 1.3;



Hình 1.3

Dao động (c) bắt đầu sớm hơn dao động (b) một khoảng thời gian t_0; Nghĩa là, sau khi véc tơ quay OA biểu diễn dao động (c) quay được một góc $\varphi = \omega t_0$ thì dao động (b) mới bắt đầu. Ta nói *t_0 là độ lệch pha*, còn φ là *góc lệch pha* (hay góc pha). Tương tự, dao động (a) có góc pha là $\pi/2$.

Cách biểu diễn dao động điều hòa dưới dạng véc tơ quay như trên hình 1.2, giúp ta thực hiện thuận tiện việc hợp các dao động điều hòa. Ví dụ, xét hợp của hai dao động điều hòa cùng tần số (có thể khác biên độ và lệch pha).

$$S_1(t) = A_1 \sin \omega t \qquad (a)$$

$$S_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \qquad (b)$$

Các véc tơ quay biểu diễn các dao động S_1 và S_2 tại thời điểm *t* nào đó là OA_1 và OA_2 như trên hình 1.4. Hợp của hai dao động S_1 và S_2 chính là hợp của hai véc tơ OA_1 và OA_2 cho ta véc tơ OA có độ lớn, theo qui tắc hình bình hành, là

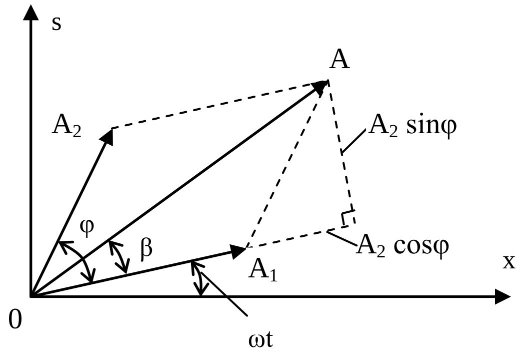
$$OA = A = \sqrt{\left(A_1 + A_2\cos\varphi\right)^2 + \left(A_2 \sin\varphi\right)^2} \qquad (1\text{-}7)$$

và góc lệch pha β, mà: $tg\beta = \dfrac{A_2 \sin\varphi}{\left(A_1 + A_2\cos\varphi\right)}$ (1-8)

Như vậy, *hợp của hai dao động điều hòa cùng tần số là một dao động điều hòa cùng tần số*, có biên độ A được tính theo (1-7) và góc lệch pha β được tính theo (1-8)

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \mathrm{A}\sin\left(\omega \mathrm{t}+\beta\right) \qquad (c)$$

Chú ý rằng, nếu hai dao động thành phần khác tần số, thì hợp của chúng không còn là dao động điều hòa nữa, mà chỉ là dao động có chu kỳ (chi tiết có thể xem ở các tài liệu tham khảo).



Hình 1.4

1.1.3 Lực cản và các mô hình lực cản

Dao động tự do của hệ do một nguyên nhân tác dụng tức thời nào đó gây ra rồi mất đi sẽ không tồn tại mãi, mà sẽ mất đi sau một khoảng thời gian. Sở dĩ như vậy là do trong quá trình dao động, hệ luôn luôn phải chịu tác dụng của một số lực gây cản trở dao động mà ta gọi là *lực cản*. Lực cản do nhiều nguyên nhân gây ra như : ma sát giữa các mặt tiếp xúc mà ta gọi là *lực cản ma sát*; sức cản của môi trường như không khí, chất lỏng… hay lực nội ma sát mà ta gọi chung là *lực cản nhớt*.

Trong chuyển động cơ học, người ta thường chia lực cản thành ba nhóm chính:

1- Lực cản ma sát được xác định theo định luật Culong

$$R_c = C_1.N \qquad (1\text{-}9)$$

Trong đó: C_1 là hệ số ma sát,

N là thành phần pháp tuyến của lực sinh ra giữa hai mặt tiếp xúc khi chuyển động (nó phụ thuộc vào vận tốc chuyển động)

2- Lực cản nhớt tuyến tính Newton tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động

$$R_c = C_2.v \qquad (1\text{-}10)$$

Trong đó: C_2 là hệ số cản nhớt

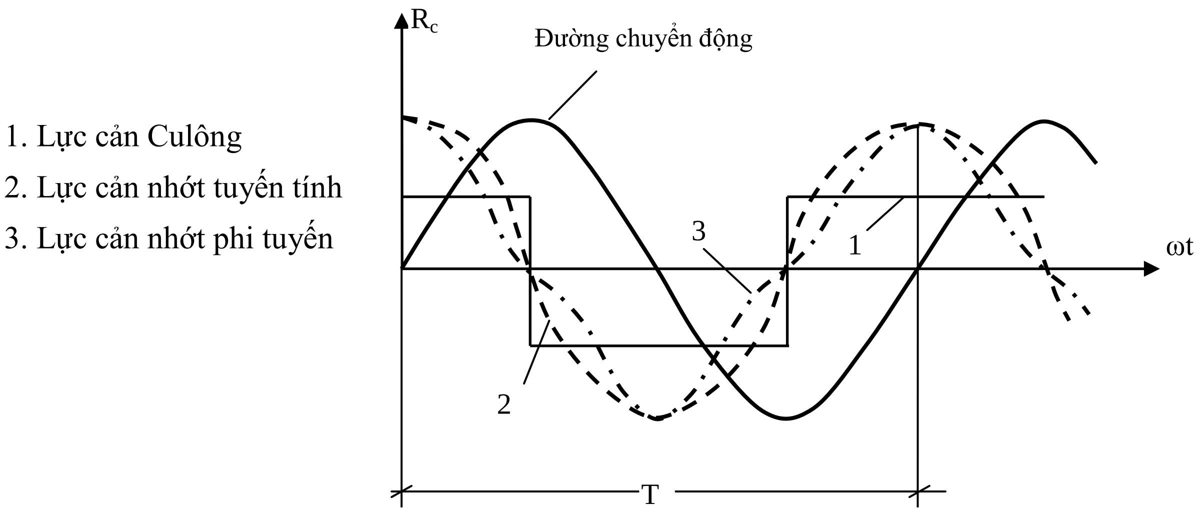
v là vận tốc chuyển động, $v = \dot{S}(t)$

Đây là mô hình lực cản được dùng nhiều trong thực tế xây dựng; và được mô tả bằng một pít tông chuyển động trong chất lỏng nhớt như trên hình 1.6d.

3- Lực cản tỷ lệ bậc cao với vận tốc (thường là bậc hai). Lực cản này thường xẩy ra khi vật chuyển động trong môi trường chất lỏng hay chất khí với vận tốc tương đối lớn.

$$R_c = C_3.v^{\alpha} \tag{1-11}$$

Sự thay đổi của ba nhóm lực cản này trong dao động điều hòa được thể hiện trên hình 1.5;

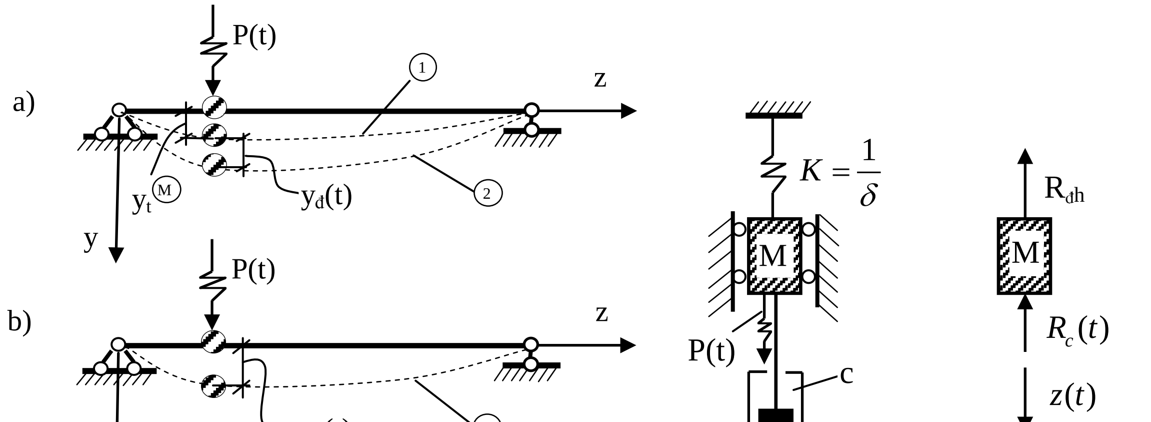


Hình 1.5: Lực cản trong dao động điều hòa

1.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG NGANG TỔNG QUÁT CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Xét hệ một bậc tự do gồm dầm đàn hồi giả thiết không có khối lượng, trên đó có đặt khối lượng tập trung M, chịu tác dụng của tải trọng động P(t) đặt tại khối lượng và có phương theo phương chuyển động của khối lượng (xem hình 1.6a). Trường hợp tải trọng không đặt tại khối lượng thì phải chuyển tương đương về đặt tại khối lượng. Một trong các cách chuyển tương đương như vậy sẽ được trình bày chi tiết ở mục 2-4. Kết cấu được đặt trong hệ tọa độ *yz* như trên hình vẽ.

Khi trên hệ chưa chịu tác động của lực động P(t), nhưng do trọng lượng của khối lượng M,(G = Mg), hệ có biến dạng và chuyển dịch tới vị trí '1' như trên hình 1.6a; Trạng thái tương ứng với vị trí này của hệ ta gọi là *trạng thái cân bằng tĩnh ban đầu* của hệ. Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động P(t), hệ sẽ dao động xung quanh vị trí cân bằng này. Giả sử, đến thời điểm *t* nào đó, hệ đang chuyển động hướng xuống và tới vị trí '2' như trên hình 1.6a;



Hình 1.6

Do ở đây ta chỉ xét ảnh hưởng của lực động P(t), đồng thời do giả thiết biến dạng bé, nên trạng thái cân bằng tĩnh ban đầu có thể coi gần đúng như trường hợp chưa có biến dạng (Hình 1.6b). Tất nhiên, khi xác định một đại lượng nghiên cứu nào đó, ta phải kể tới giá trị do M gây ra theo nguyên lý cộng tác dụng.

Xét hệ dao động chịu lực cản nhớt tuyến tính Newton, thì dao động của hệ trên hình 1.6b có thể được mô hình hóa như trên hình 1.6d; gồm khối lượng M được treo vào lò xo có độ cứng K, và gắn vào pít tông chuyển động trong chất lỏng nhớt có hệ số cản C.

Xét hệ ở thời điểm *t* nào đó đang chuyển động hướng xuống cùng chiều với lực P(t). Khi đó hệ chịu tác dụng của các lực sau: lực động P(t); lực đàn hồi sinh ra trong lò xo phụ thuộc độ dịch chuyển *y* của khối lượng, $R_{đh}(y) = K.y(t)$, có chiều hướng lên; lực quán tính $Z(t) = -M\,\ddot{y}(t)$ có chiều hướng xuống cùng chiều với chuyển động; và lực cản nhớt tuyến tính $R_c = C\,\dot{y}(t)$ có chiều hướng lên ngược với chiều chuyển động (xem hình 1.6f). Hệ ở trạng thái cân bằng động, nên:

$$R_{đh} + R_c(t) - Z(t) - P(t) = 0$$

Hay $$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = P(t) \qquad (1\text{-}12)$$

Phương trình (1-12) là *phương trình vi phân* (PTVP) dao động ngang tổng quát của hệ đàn hồi tuyến tính một bậc tự do chịu lực cản nhớt tuyến tính. Trong đó, C là hệ số cản có thứ nguyên là [lực × thời gian / chiều dài]; K là độ cứng của hệ, là giá trị lực đặt tĩnh tại khối lượng làm cho khối lượng dịch chuyển một lượng bằng đơn vị, và có thứ nguyên là [lực / chiều dài].

Phương trình (1-12) cũng có thể được thiết lập dựa vào biểu thức chuyển vị. Thật vậy, nếu ký hiệu δ là chuyển vị đơn vị theo phương chuyển động tại nơi đặt khối lượng (hình 1.6c) - còn gọi là *độ mềm* của hệ một bậc tự do - thì dịch chuyển y(t) của khối lượng tại thời điểm *t* do tất cả các lực tác dụng trên hệ gây ra, theo nguyên lý cộng tác dụng sẽ là:

$$y(t) = \delta P(t) - \delta M\ddot{y}(t) - \delta C\dot{y}(t)$$

Hay $M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = P(t)$ chính là (1-12)

Trong đó $$K = \frac{1}{\delta} \qquad (1\text{-}13)$$

được gọi là *độ cứng* của hệ.

Giải PTVP (1-12) sẽ xác định được phương trình chuyển động, vận tốc, và gia tốc chuyển động của khối lượng; Từ đó có thể xác định được các đại lượng nghiên cứu trong hệ. Sau đây ta sẽ giải bài toán trong một số trường hợp.

1.3 DAO ĐỘNG TỰ DO-TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO (HAY TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG)

1.3.1 Dao động tự do không có lực cản

Đây là trường hợp lý tưởng hóa, vì trong thực tế lực cản luôn tồn tại. PTVP dao động lúc này có dạng đơn giản (cho C và P(t) trong (1-12) bằng không).

$$M\ddot{y}(t)+Ky(t)=0$$

Hay là $$\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0 \qquad (1\text{-}14)$$

Trong đó $$\omega^2=\frac{K}{M}=\frac{1}{M\delta}=\frac{g}{G\delta}=\frac{g}{y_t^{(M)}} \qquad (1\text{-}15)$$

Ở đây, ta ký hiệu $G\delta = y_t^{(M)}$, về mặt ý nghĩa, nó là chuyển vị tĩnh của khối lượng M do trọng lượng của khối lượng, G, đặt tĩnh theo phương chuyển động gây ra (xem hình 1.6a); còn *g* là gia tốc trọng trường. Phương trình vi phân (1-14) có nghiệm tổng quát là:

$$y(t)=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t \qquad \text{(a)}$$

Các hằng số tích phân A_1và A_2 được xác định từ các điều kiện đầu: Tại thời điểm bắt đầu dao động (t=0), giả sử hệ có chuyển vị ban đầu y_o và vận tốc ban đầu v_0

$$y\big|_{t=0}=y_0; \qquad v\big|_{t=0}=v_0 \qquad (1\text{-}16)$$

Thay (1-16) vào (a) với chú ý; $v(t)=\dot{y}(t)=-\omega A_1\sin\omega t+\omega A_2\cos\omega t$, ta được:

$$A_1=y_0\ ;\ \text{và} \quad \omega A_2=v_0 \qquad \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a) ta được phương trình dao động tự do không có lực cản của hệ một bậc tự do:

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (1\text{-}17)$$

Hay $$y(t)=y_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad (1\text{-}17)'$$

Điều này có nghĩa là, dao động tự do không cản của khối lượng là hợp của hai dao động điều hòa cùng tần số ω và lệch pha π/2. Sử dụng khái niệm véc tơ quay, theo (1-7) và (1-8), phương trình (1-17)' có dạng đơn giản:

$$y(t)=A\sin\left(\omega t+\beta\right) \qquad (1\text{-}18)$$

Trong đó $$A=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

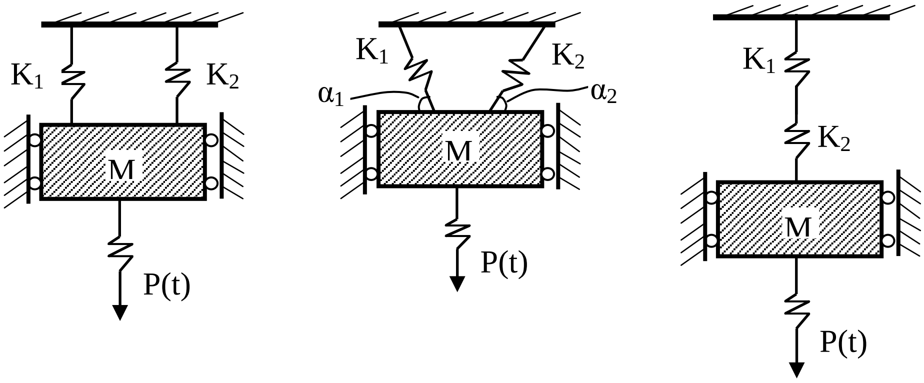
và $$\beta=\text{arctg}\left(\frac{y_0}{v_0}\omega\right) \qquad (1\text{-}19)$$

Như vậy, dao động tự do của hệ một *bậc tự do* (BTD), khi không có lực cản, là một *dao động điều hòa*, có tần số ω được tính theo (1-15), có biên độ và góc lệch pha được tính theo (1-19), còn chu kỳ dao động được tính theo (1-6).

Nhìn vào (1-15) ta thấy ω chỉ phụ thuộc $y_t^{(M)}$, cũng tức là phụ thuộc δ hay K, nghĩa là chỉ phụ thuộc vào độ đàn hồi của hệ. Nên *tần số dao động tự do ω* còn được gọi là *tần số dao động riêng* của hệ; Nó là một đặc trưng của hệ dao động.

Dao động tự do không cản có dạng như trên hình 1-3; Phụ thuộc điều kiện ban đầu mà có dạng (hình 1.3a, b, hay c). Ví dụ, khi không có chuyển vị ban đầu ($y_0 = 0$), thì β = 0, nên dạng dao động như trên hình 1.3b; Khi không có vận tốc ban đầu ($v_0 = 0$), thì góc pha bằng π/2, dạng dao động như trên hình 1.3a; Còn dạng dao động trên hình 1.3c tương ứng với khi cả y_0 và v_0 đều khác không.

Chú ý: Khi khối lượng được liên kết bằng nhiều lò xo mắc song song hay nối tiếp như trên hình 1.7, khi đó độ cứng tổng cộng được tính như sau:



$$k = \sum_i k_i \qquad k = \sum_i k_i \sin^2 \alpha_i \qquad \frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{k_i} \qquad (1\text{-}20)$$

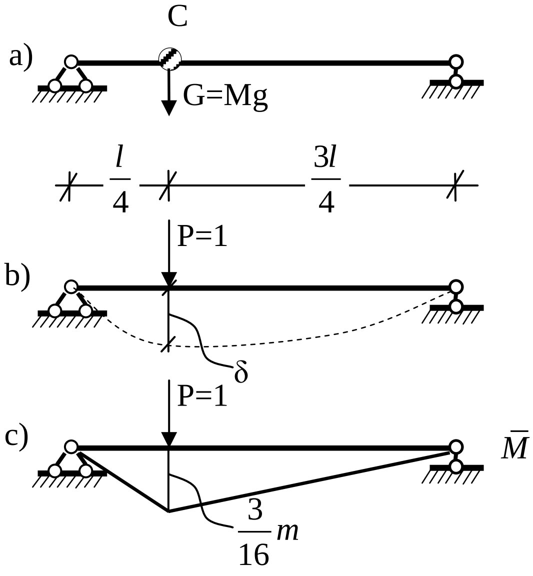
Hình 1.7

VÍ DỤ 1.1:

Trên dầm đơn giản hai đầu khớp, đặt tại C một khối lượng tập trung M có trọng lượng G = 0,75 kN như trên hình 1.8a; Biết $E = 2{,}1.10^4$ kN/cm^2; $J = \dfrac{10^4}{12} cm^4$; l=1m.

Yêu cầu: Xác định tần số vòng và chu kỳ dao động riêng của hệ. Bỏ qua khối lượng dầm, và lấy g = 981 cm/s^2.

Giải: Chuyển vị đơn vị tại C, theo phương chuyển động, do lực P = 1 gây ra, theo công thức Maxwell - Mohr là (xem hình 1.8b):



Hình 1.8

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) m \times \frac{3}{16} m \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{16} m = \frac{3m^3}{256EJ} \quad \text{(a)}$$

Chuyển vị tĩnh tại nơi đặt khối lượng do trọng lượng của khối lượng gây ra là:

$$y_t^{(M)} = G.\delta = \frac{3m^3}{256EJ} \times 0,75kN = \frac{2,25kNm^3}{256EJ} \qquad \text{(b)}$$

Tần số dao động riêng của hệ, theo (1-15) là:

$$\omega = \sqrt{981 \times \frac{256 \times 2,1 \times 10^4 \times 4^4}{2,25 \times 12 \times 100^3}} = 70,6 \times s^{-1} \qquad \text{(c)}$$

Chu kỳ dao động riêng tính theo (1-6) là:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3,1416}{70,6} = 0,089s \qquad \text{(d)}$$

VÍ DỤ 1.2:

Trên khung ba khớp có đặt vật nặng trọng lượng G (hình 1.9a). Bỏ qua ảnh hưởng của khối lượng khung, lực cắt, và lực dọc tới biến dạng. Hãy xác định tần số dao động riêng theo phương đứng và phương ngang của hệ.

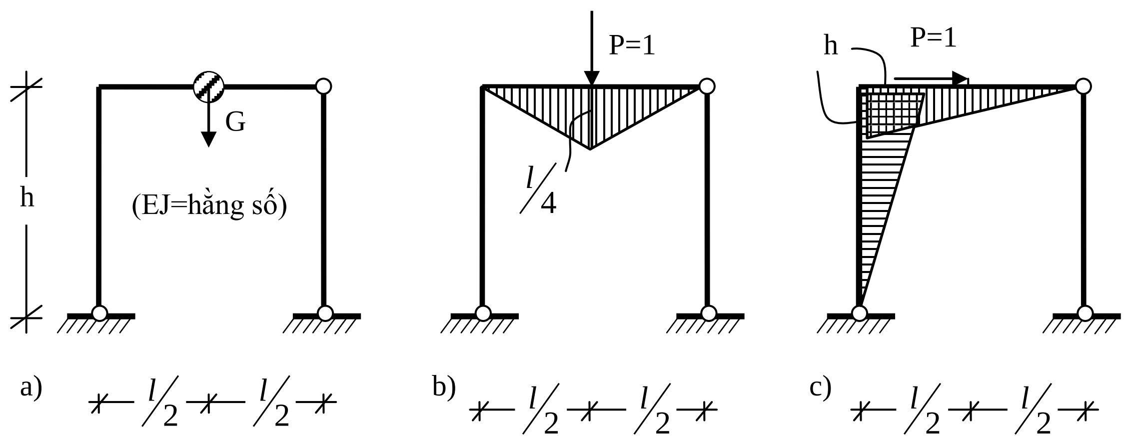
Giải: Chuyển vị đơn vị theo phương đứng $\delta_{đg}$, và phương ngang δ_{ng} tại nơi đặt khối lượng được tính theo công thức Maxwell - Mohr. Từ các biểu đồ mô men đơn vị trên hình 1.9b, và c, ta được:

$$\delta_{đg} = \left(\frac{l}{4} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{l}{4} \times 2 \right) \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{48EJ} \qquad \text{(a)'}$$

$$\delta_{ng} = \left(\frac{h.h}{2} \times \frac{2}{3} h + \frac{h.l}{2} \times \frac{2}{3} l \right) \frac{1}{EJ} = \frac{h^3 + h^2 l}{3EJ} \qquad \text{(b)'}$$

Thay (a)' và (b)' vào (1-15) ta được tần số dao động riêng theo phương đứng và phương ngang là:

$$\omega_{đg} = \sqrt{\frac{g}{G\delta_d}} = \sqrt{\frac{48EJg}{Gl^3}} \frac{1}{s} \ ; \qquad \omega_{ng} = \sqrt{\frac{g}{G\delta_{ng}}} = \sqrt{\frac{3EJg}{G\left(h^3 + h^2 l\right)}} \frac{1}{s}$$



Hình 1.9

1.3.2 Dao động tự do có lực cản

Khi coi lực cản tỷ lệ với vận tốc, PTVP dao động tự do tổng quát có dạng:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = 0 \qquad (1\text{-}21)$$

Hay $$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad (1\text{-}21)'$$

Ở đây ta đã đặt $2\alpha = \dfrac{c}{M}$ cũng được gọi là *hệ số cản* (1-22)

Phương trình đặc trưng của PTVP (1-21)' có nghiệm là:

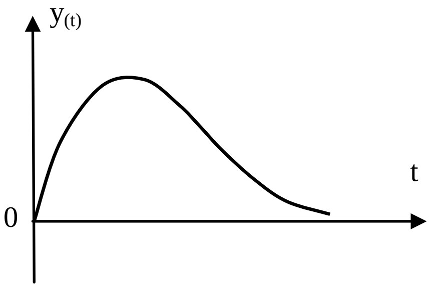
$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \qquad (a)$$

nên nghiệm tổng quát của (1-21)': $y(t) = A_1 e^{\lambda_{1t}} + A_2 e^{\lambda_{2t}}$ sẽ có dạng:

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 e^{\left(\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\right)t}\right] \qquad (1\text{-}23)$$

Chuyển động của khối lượng, theo (1-23), phụ thuộc vào hệ số α. Phân tích từng trường hợp ta thấy:

1- *Khi $\alpha^2 \geq \omega^2$; hay $C \geq 2\sqrt{KM}$*



Hình 1.10

Khi α > ω ta gọi là *lực cản lớn*; còn khi α = ω ta gọi là lực *cản trung bình* (hay lực cản giới hạn). Lúc này λ là một số thực; Hơn nữa, vì α ≥ ω nên $\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} < \alpha$, (bằng không khi α = ω). Do đó cả hai nghiệm λ tính theo (a) đều âm. Như vậy, chuyển động của khối lượng khi lực cản lớn và trung bình, theo (1-23), là tổng của hai hàm số mũ âm. Hệ không dao động mà chuyển động tiệm cận dần tới vị trí cân bằng như trên hình 1.10;

2- *Khi $\alpha^2 < \omega^2$*:

Trường hợp này được gọi là *lực cản bé*. Lúc này nghiệm λ là phức.

Đặt

$$\omega_1^2 = \left(\omega^2 - \alpha^2\right) \qquad (1\text{-}24)$$

Khi đó nghiệm của phương trình đặc trưng (xem (a) sẽ là:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_1 \qquad (b)$$

Và phương trình chuyển động (1-23) trở thành:

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left[A_1 e^{i\omega_{1t}} + A_2 e^{-i\omega_{2t}}\right] \qquad (1\text{-}23)'$$

Sử dụng công thức Euller

$$\begin{aligned} e^{i\omega} &= \cos\omega + i\sin\omega \\ e^{-i\omega} &= \cos\omega - i\sin\omega \end{aligned} \qquad (1\text{-}25)$$

thay vào (1-23)' ta có:

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_1 t + i\left(A_1 - A_2\right)\sin\omega_1 t\right]$$

hay là, $$y(t) = e^{-\alpha t}\left[B_1 \cos \omega_1 t + B_2 \sin \omega_1 t\right] \qquad (1\text{-}23)''$$

Trong đó: $B_1 = A_1 + A_2$; $B_2 = i\,(A_1 - A_2)$ (c)

Các hằng số B_1, B_2 xác định được từ các điều kiện đầu (1-16)

$$B_1 = y_0 \; ; \; B_2 = (v_0 + \alpha y_0) / \omega_1 \qquad (d)$$

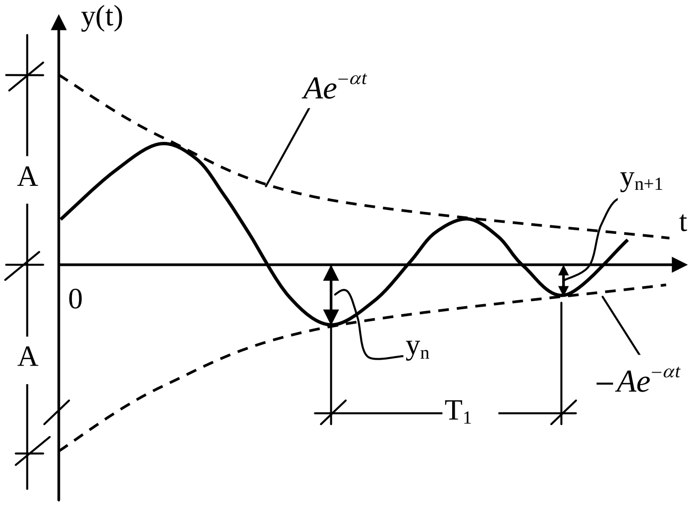
Thay (d) vào (1-23)'', và lại áp dụng khái niệm véc tơ quay để hợp hai dao động điều hòa trong dấu móc vuông, ta được phương trình dao động tự do của hệ một bậc tự do khi lực cản bé là:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \beta) \qquad (1\text{-}26)$$

Trong đó, $$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + \alpha y_0}{\omega_1}\right)^2} \qquad (1\text{-}27)$$

và $$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 \omega_1}{v_0 + \alpha y_0}\right)$$

Dạng dao động trong trường hợp này được thể hiện trên hình 1.11;



Hình 1.11 : Dao động tự do khi lực cản bé

Từ (1-26), hay từ hình 1-11 ta thấy, dao động tự do của hệ một bậc tự do khi lực cản bé, cũng là một dao động điều hòa có tần số vòng ω_1 tính theo (1-24), và chu kỳ T_1 tính theo (1-28)

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \qquad (1\text{-}28)$$

song biên độ dao động giảm dần theo luật hàm số mũ âm : $Ae^{-\alpha t}$.

Để nghiên cứu độ tắt dần của dao động, ta xét tỷ số giữa hai biên độ dao động liền kề nhau (cách nhau một chu kỳ T_1). Ký hiệu biên độ đạt được tại thời điểm *t* nào đó là A_n, còn tại thời điểm $(t + T_1)$ là A_{n+1}, thì từ (1-26) ta có:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t+\beta)}{Ae^{-\alpha(t+T_1)}\sin[\omega_1(t+T_1)+\beta]} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T_1)}} = e^{\alpha T_1} = \text{hằng số}$$

Suy ra, $\alpha T_1 = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \chi$ (1-29)

Như vậy, tỷ số giữa hai biên độ liền kề nhau là một hằng số; còn logarit tự nhiên của tỷ số này**,** ký hiệu là χ, là một đại lượng phụ thuộc vào hệ số cản α và đương nhiên là cả ω_1 của hệ, dùng để đánh giá độ tắt dần của dao động, người ta gọi là *hệ số cản logarit,* hay là *Dekremen logatit* của dao động tự do có cản bé.

Hệ số cản logarit χ đóng vai trò quan trọng trong thực tế. Nó giúp xác định hệ số cản α nhờ thí nghiệm đo biên độ dao động A_n và A_{n+1}. Sau đây là một số kết quả thí nghiệm tìm được cho một số loại kết cấu xây dựng.

1, Đối với các kết cấu thép

$\alpha T_1 = (0,016 \sim 0,08)2\pi \approx 0,1 \sim 0,15$

2, Đối với kết cấu gỗ ... $= (0,005 \sim 0,022)2\pi \approx 0,03 \sim 0,15$

3, Đối với các kết cấu bê tông cốt thép

$\alpha T_1 = (0,016 \sim 0,032)2\pi \approx 0,08 \sim 0,2$

4, Đối với cầu thép -- = $(0,01 \sim 0,15)$; trung bình 0,28

5, Với cầu bê tông cốt thép: ... = 0,31

6, Với dầm bê tông cốt thép: ... = $(0,17 \sim 0,39)$; trung bình 0,28

7, Với khung bê tông cốt thép: ... = $(0,08 \sim 0,16)$; trung bình 0,12

So sánh hai phương trình dao động tự do không cản (1-18) và có cản bé (1-26) ta thấy, tần số riêng khi có cản bé $\omega_1 < \omega$ khi không có cản, còn chu kỳ $T_1 > T$; Có nghĩa là, khi có cản bé, dao động chậm hơn so với không có lực cản. Tuy nhiên, sự sai khác này cũng rất nhỏ. Do đó trong xây dựng, do chủ yếu là cản bé, người ta thường coi gần đúng $\omega_1 \approx \omega$, và $T_1 \approx T$ trong tính toán.

Thật vậy, ta xét một trường hợp dao động tắt khá nhanh.

Ví dụ, $A_n / A_{n+1} = 0,5$.

Khi đó $\chi = \ln(A_n/A_{n+1}) = \ln 0,5 = 0,693$. suy ra,

$\alpha = 0,693 / T_1 = 0,693\omega_1 / 2\pi = 0,11\omega_1$ hay

$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{\omega^2 - (0,11\omega_1)^2} = 0,994\omega \approx \omega$.

Trở lại trường hợp lực cản trung bình (cản giới hạn) $\alpha^2 = \omega^2$. Lúc này,

$$\chi = \alpha T = \omega.\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi; \text{ Do đó: } \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\alpha T} = e^{2\pi} = 529.$$

Nghĩa là biên độ dao động sau một chu kỳ đã giảm đi 529 lần, hay nói cách khác, khi hệ chịu lực cản trung bình, hệ gần như không dao động mà chỉ chuyển động tiệm cận dần tới vị trí cân bằng ban đầu. Điều này nhất quán với kết luận đã được đề cập tới ở mục *a*.

1.4 DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CHỊU LỰC KÍCH THÍCH ĐIỀU HOÀ P(t) = P_0sinrt - HỆ SỐ ĐỘNG

Phương trình vi phân dao động tổng quát trong trường hợp này, theo (1-12) sẽ là:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = P_0 \sin rt \qquad (1\text{-}30)$$

Hay là $$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \left(\frac{P_0}{M}\right)\sin rt \qquad (1\text{-}30)'$$

Trong đó, P_0 và r lần lượt là biên độ và tần số của lực kích thích; Còn α và ω như đã ký hiệu trước đây. Đây là PTVP bậc hai tuyến tính chuẩn có vế phải là một hàm điều hòa. Nghiệm tổng quát của (1-30)' bằng nghiệm tổng quát của PTVP thuần nhất ký hiệu là $y_0(t)$, cộng với một nghiệm riêng ký hiệu là $y_1(t)$.

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) \qquad (a)$$

1.4.1 Xét trường hợp lực cản bé

Nghiệm $y_0(t)$ tính theo (1-26), còn nghiệm riêng $y_1(t)$ có thể xác định bằng nhiều cách, ví dụ phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Song thuận tiện hơn, ở đây ta giải bằng phương pháp nửa ngược như sau:

Giả thiết nghiệm riêng dưới dạng tổng quát sau

$$y_1(t) = A_1 \sin rt + A_2 \cos rt$$

Hay là $$y_1(t) = A_0 \sin(rt - \varphi) \qquad (1\text{-}31)$$

Trong đó r là tần số lực kích thích đã biết, còn A_0 và φ là biên độ và góc lệch pha chưa biết. Rõ ràng là nếu ta tìm được một A_0, và một φ để (1-31) thỏa mãn phương trình (1-30), thì (1-31) là một nghiệm riêng của (1-30). Thật vậy, thay $y_1(t)$ và các đạo hàm của nó

$$\dot{y}_1(t) = rA_0\cos(rt-\varphi) \text{ và } \ddot{y}_1(t) = -r^2A_0\sin(rt-\varphi) \qquad (b)$$

vào phương trình (1-30) ta được,

$$-r^2A_0\sin(rt-\varphi) + 2\alpha rA_0\cos(rt-\varphi) + \omega^2A_0\sin(rt-\varphi) = \left(\frac{P_0}{M}\right)\sin rt \qquad (c)$$

Khai triển sin(rt-φ) và cos(rt-φ), rồi nhóm các số hạng có chứa sinrt và cosrt ta được:

$$\sin rt\left[-r^2A_0\cos\varphi + 2\alpha rA_0\sin\varphi + \omega^2A_0\cos\varphi - \frac{P_0}{M}\right] + \cos rt\left[r^2A_0\sin\varphi + 2\alpha rA_0\cos\varphi - \omega^2A_0\sin\varphi\right] = 0 \qquad (d)$$

Biểu thức (d) phải bằng không với mọi *t* tùy ý; Muốn vậy, các biểu thức hệ số của sinrt và cosrt phải bằng không. Từ đó suy ra:

$$A_0 = \frac{P_0}{M\left[\left(\omega^2 - r^2\right)\cos\varphi + 2r\alpha\sin\varphi\right]} \tag{1-32}$$

$$tg\varphi = \frac{2r\alpha}{\omega^2 - r^2} \tag{1-32)'$$

Thay (1-32) và (1-32)' vào (1-31) ta có nghiệm riêng $y_1(t)$; Rồi lại thay (1-26) và (1-31) vào (a) ta được nghiệm tổng quát của PTVP dao động (1-30) là:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t + \beta) + A_0\sin(rt - \varphi) \tag{1-33}$$

Trong đó: A, β tính theo (1-27) chứa các điều kiện đầu y_0 *và* v_0.

A_0, φ tính theo (1-32) chứa biên độ P_0 và tần số *r* của lực kích thích điều hòa. Phân tích (1-33) ta thấy:

Số hạng thứ nhất liên quan tới dao động tự do của hệ. Trong thực tế luôn luôn tồn tại lực cản. Nhưng cho dù lực cản là bé, thì phần dao động tự do này, sớm hay muộn, cũng sẽ mất đi sau một khoảng thời gian nào đó. Dao động của hệ lúc này được coi là *đã ổn định,* và được biểu diễn bằng số hạng thứ hai trong (1-33).

$$y(t) = y_1(t) = A_0\sin(rt - \varphi) \tag{1-34}$$

Như vậy, *dao động cưỡng bức - lực cản bé - của hệ một bậc tự do chịu lực kích thích điều hòa P_0sinrt, khi đã ổn định, là một dao động điều hòa có cùng tần số và chu kỳ với tần số và chu kỳ của lực kích thích, còn biên độ A_0 và góc pha φ được tính theo (1-32).*

Biên độ dao động A_0 cũng thường được biểu diễn ở dạng khác tiện lợi hơn như sau:

Từ (1-32)' ta có, $2\alpha r = [(\omega^2 - r^2)\sin\varphi]/\cos\varphi$, rồi thay vào (1-32) được:

$$A_0 = P_0\cos\varphi / M(\omega^2 - r^2) \tag{f}$$

Thay φ tính theo (1-32)' vào (f) với chú ý: $M = \dfrac{1}{\delta\omega^2}$

và $$\text{Cos}(\text{artg}\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} \tag{g}$$

Ta được,

$$A_0 = \frac{P_0}{M\left(\omega^2 - r^2\right)}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{2r\alpha}{\omega^2 - r^2}\right)^2}} = \frac{P_0}{M\left(\omega^2 - r^2\right)\sqrt{\dfrac{\left(\omega^2 - r^2\right)^2 + (2r\alpha)^2}{\left(\omega^2 - r^2\right)^2}}}$$

hay

$$A_0 = \frac{P_0}{M\sqrt{\left(\omega^2 - r^2\right)^2 + 4r^2\alpha^2}} = \frac{\delta P_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4r^2\alpha^2}{\omega^4}}}$$

Ký hiệu: $\delta.P_0 = y_t^{(P_0)}$ là chuyển vị tĩnh tại nơi đặt khối lượng do lực có trị số bằng biên độ lực động P_0 đặt tĩnh tại đó gây ra, và

$$K_đ = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4r^2\alpha^2}{\omega^4}}} \qquad (1\text{-}35)$$

Thì ta được $A_0 = y_t^{(P_0)}.K_đ$ (1-32)''

Điều này có nghĩa là, khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động điều hòa P_0sinrt, thì biên độ chuyển vị động A_0 lớn gấp $K_đ$ lần so với chuyển vị khi P_0 đặt tĩnh gây ra. $K_đ$ được gọi là *hệ số động.*

Hệ số động cũng có thể được biểu diễn qua hệ số cản c. Độc giả có thể tự viết công thức này.

1.4.2 Xét trường hợp khi không có lực cản

Hệ số động trong trường hợp này có dạng đơn giản hơn (cho α = 0 trong công thức 1-35)

$$K_đ = \frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)} \qquad (1\text{-}36)$$

Kết quả này cũng có thể tìm được nhờ giải trực tiếp PTVP dao động cưỡng bức không có lực cản. Độc giả có thể tự thực hiện điều này.

1.4.3 Phân tích hệ số động - Hiện tượng cộng hưởng

Nhìn vào công thức (1-35) và (1-36) ta thấy, hệ số động phụ thuộc vào tỷ số r/ω.

a) Xét trường hợp không có lực cản:

Đồ thị quan hệ giữa hệ số động và tỷ số r/ω vẽ được như trên hình (1.12a) với chú ý là hệ số động chỉ lấy giá trị dương. Ta thấy rằng,

Khi tỷ số $\frac{r}{\omega} \to 0$ thì $K_đ \to 1$

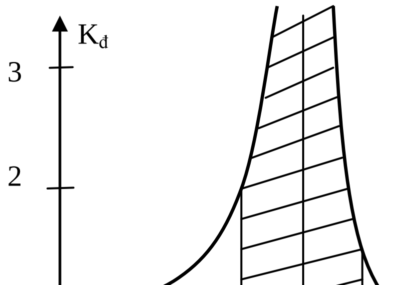
$\frac{r}{\omega} \to \infty$ thì $K_đ \to 0$

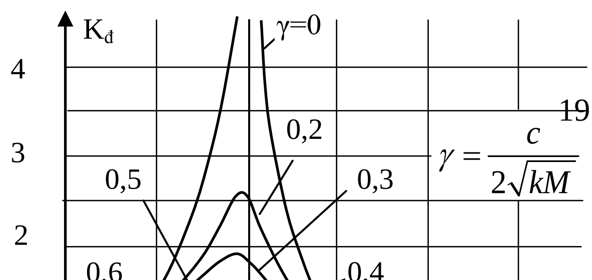
$\frac{r}{\omega} \to 1$ thì $K_đ \to \infty$

Nghĩa là, khi tần số lực kích thích lớn hơn nhiều tần số riêng của hệ, hệ số động có giá trị nhỏ, thậm chí biên độ dao động còn nhỏ hơn cả chuyển vị tĩnh do P_o gây ra. Có thể lý giải điều này là do khi r>ω, $K_đ$ có trị số âm, về mặt ý nghĩa, điều này có nghĩa là dao động của khối lượng ngược pha với lực kích thích (chiều chuyển động ngược với chiều của lực kích thích), nên lực kích thích chống lại chuyển động.

Khi r<ω, $K_đ$ dương, nghĩa là dao động của khối lượng và lực kích thích cùng pha.

Khi r ≈ ω, $K_đ$ tăng lên rất lớn, biên độ dao động tăng rất nhanh. Hiện tượng này được gọi là *hiện tượng cộng hưởng.* Trong thực tế, khi tỷ số r/ω nằm trong khoảng từ 0,75 đến 1,25, $K_đ$ đã rất lớn. Vùng như vậy được gọi là *vùng cộng hưởng* (vùng gạch chéo trên hình 1.12).





b) Xét trường hợp lực cản bé:

Trong trường hợp này, $K_đ$ không những phụ thuộc tỷ số r/ω, mà còn phụ thuộc vào hệ số cản α. Trên hình 1.12b cho ta các đường cong quan hệ này ứng với các hệ số cản khác nhau, và thấy rằng:

***b₁*-** Hệ số cản càng lớn thì $K_đ$ càng nhỏ; Thậm chí khi

$$C \geq 2\sqrt{KM}\text{ , cũng tức là } \alpha \geq \sqrt{\frac{K}{2M}} \qquad (1\text{-}37)$$

hệ số $K_đ$ luôn luôn nhỏ hơn một. Trường hợp riêng khi hệ số cản lấy dấu bằng trong công thức (1-37) được gọi là *hệ số cản lý tưởng*; và có ý nghĩa quan trọng khi chế tạo các thiết bị đo dao động.

***b₂*-** Khác với trường hợp không cản, khi có lực cản, hệ số động có giá trị lớn nhất không phải khi r/ω bằng một, mà khi tỷ số này nhỏ hơn một. Thật vậy, khảo sát biểu thức $K_đ$ theo tỷ số r/ω, từ (1-35) hay (1-35)' ta có $K_đ$ đạt cực trị khi :

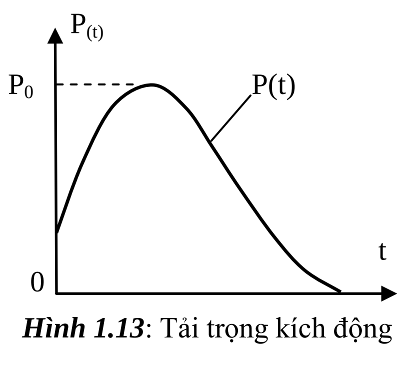
$$\frac{dK_đ}{d\left(\frac{r}{\omega}\right)} = 0 \quad \text{suy ra} \quad \frac{r}{\omega} = \sqrt{1-2\frac{\alpha^2}{\omega^2}} = \sqrt{1-\frac{c^2}{2M^2\omega^2}} < 1 \qquad (1\text{-}37)'$$

(Bỏ qua biến đổi chi tiết)

Tuy nhiên sự sai khác này là nhỏ, nên thực tế vẫn coi gần đúng $K_đ$ đạt giá trị lớn nhất khi r/ω ≈ 1.

1.5 HỆ MỘT BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG KÍCH ĐỘNG - HÀM ĐỘNG LỰC VÀ TÍCH PHÂN DUHAMEL

Như đã trình bày trong phần mở đầu, *tải trọng kích động* là tải trọng tác dụng vào công trình một cách đột ngột với cường độ lớn, rồi giảm nhanh sau một khoảng thời gian



Hình 1.13: Tải trọng kích động

tương đối ngắn. Tuy thời gian chất tải ngắn, nhưng ta cũng không thể bỏ qua yếu tố thời gian này trong tính toán.

Ký hiệu P_0 là giá trị lớn nhất mà tải trọng đạt được, f(t) là hàm biểu diễn luật biến đổi của tải trọng theo thời gian, còn gọi là *hàm chất tải*. Khi đó có thể biểu diễn tải trọng kích động dưới dạng tổng quát như sau (hình 1.13).

$$P(t) = P_0 f(t) \tag{1-38}$$

Do chịu tải kích động, nên trạng thái nguy hiểm của kết cấu xẩy ra khá nhanh sau khi chịu tải. Bởi vậy, trong trường hợp này người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực cản. PTVP dao động tổng quát có dạng:

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = P_0 f(t) \tag{1-39}$$

hay $$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \left(\frac{P_0}{M}\right) f(t) \tag{1-39'}$$

Có thể giải phương trình này bằng nhiều cách. Ở đây ta giải theo cách hạ dần bậc đạo hàm bằng các phép biến đổi tương đương như sau.

Trước hết nhân hai vế của (1-39)' với sinωt, cộng và trừ vào vế trái hàm $\left[\omega\dot{y}(t)\cos(\omega t)\right]$ ta được:

$$\left(\ddot{y}\sin\omega t + \omega\dot{y}\cos\omega t\right) + \left(y\omega^2\sin\omega t - \omega\dot{y}\cos\omega t\right) = \left(\frac{P_0}{M}\right) f(t)\sin\omega t$$

Hay $$\frac{d}{dt}\left(\dot{y}\sin\omega t\right) + \frac{d}{dt}\left(-y\omega\cos\omega t\right) = \frac{P_0}{M} f(t)\sin\omega t \qquad \text{(a)}$$

Tích phân hai vế của (a) theo cận từ t_0 tới t ta được:

$$\left(\dot{y}\sin\omega\tau\right)\Big|_{t_0}^{t} - \left(y\omega\cos\omega\tau\right)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}\frac{P_0}{M} f(\tau)\sin\left(\omega\tau\right)d\tau \qquad \text{(b)}$$

Trong đó τ là một thời điểm nào đó trong khoảng từ t_0 tới t (do cận tích phân là t nên biến tích phân phải là τ)

Sử dụng điều kiện đầu: $y(\tau)\big|_{\tau=t_0} = y_0$; $\dot{y}(\tau)\big|_{\tau=t_0} = v_0$ (c)

thì phương trình (b) trở thành:

$$\dot{y}\sin\omega t - v_0\sin\omega t_0 - y\omega\cos\omega t + y_0\omega\cos\omega t_0 = \int_{t_0}^{t}\frac{P_0}{M} f(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau \tag{1-40}$$

Tiếp theo, ta lại thực hiện các phép tính theo đúng thứ tự như trên nhưng nhân hai vế của (1-39)' với cosωt; Sau cộng và trừ vào vế trái hàm $(\omega\dot{y}\sin\omega t)$, rồi tích phân hai vế với cận từ t_0 tới t, và sử dụng điều kiện đầu (c); Ta lại được một biểu thức có dạng tương tự (1-40):

$$\dot{y}\cos\omega t - v_0\cos\omega t_0 + y\omega\sin\omega t - y_0\omega\sin\omega t_0 = \int_{t_0}^{t}\frac{P_0}{M} f(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \tag{1-40'}$$

Các phương trình (1-40) và (1-40)' chỉ là dạng khác của (1-39)' nhờ các biến đổi tương đương. Bây giờ ta lại nhân hai vế của (1-40) với cosωt, và với (1-40)' là sinωt; rồi trừ hai phương trình cho nhau, với chú ý các quan hệ lượng giác sau:

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\end{aligned}\qquad (d)$$

Ta được

$$-\omega y(t) + v_0\sin\omega(t-t_0) + \omega y_0\cos\omega(t-t_0) = -\int_{t_0}^{t}\frac{P_0}{M}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Suy ra

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\sin\omega(t-t_0) + y_0\cos\omega(t-t_0) + \frac{P_0}{\omega M}\int_{t_0}^{t}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Hay

$$y(t) = y_0\cos\omega(t-t_0) + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\sin\omega(t-t_0) + y_t^{P_0}\left[\omega\int_{t_0}^{t}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right] \qquad (1\text{-}41)$$

Trong đó, $y_t^{(P_0)} = \delta P_0$ là chuyển vị tĩnh của khối lượng do lực có trị số bằng P_0 đặt tĩnh gây ra.

(1-41) là nghiệm tổng quát của PTVP (1-39), trong đó có chứa tích phân

$$K(t) = \omega\int_{t_0}^{t}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (1\text{-}42)$$

Được gọi là *tích phân Duhamel.*

Như vậy, phương trình chuyển động của hệ một bậc tự do, chịu tác dụng của lực kích động viết dưới dạng (1-38), là hoàn toàn xác định nếu biết các điều kiện đầu (y_0,v_0) và hàm chất tải f(t). Khi không có tải trọng tác dụng, phương trình (1-41) trở về phương trình (1-18) là phương trình dao động tự do của hệ khi không có lực cản.

Nếu điều kiện đầu y_0 =0, và v_0 =0; thì phương trình chuyển động chỉ còn lại số hạng thứ ba trong (1-41).

$$y(t) = y_t^{(P_0)}K(t) \qquad (1\text{-}43)$$

Chú ý: Lời giải (1-41), hay (1-43) là lời giải tổng quát không những cho trường hợp tải trọng kích động như trình bày ở trên, mà cho tải trọng động bất kỳ có thể biểu diễn được ở dạng (1-38).

Hàm K(t) đóng vai trò ảnh hưởng của tác dụng động, nó là hàm của thời gian, được gọi là *hàm nhân tố động* hay là *hàm động lực*. Giá trị lớn nhất của K(t) chính là *hệ số động.* Trong thực tế tính toán, ta cần xác định giá trị lớn nhất này.

Sau đây ta xét một số dạng tải trọng kích động thường gặp, với giả thiết ban đầu hệ ở trạng thái tĩnh, nghĩa là y_0 = 0, và v_0 = 0. Lúc này phương trình chuyển động của hệ là (1-43).

1) Lực không đổi tác động đột ngột vào khối lượng

Đồ thị hàm chất tải như trên hình 1.14a; Lúc này có:

$P = P_0$

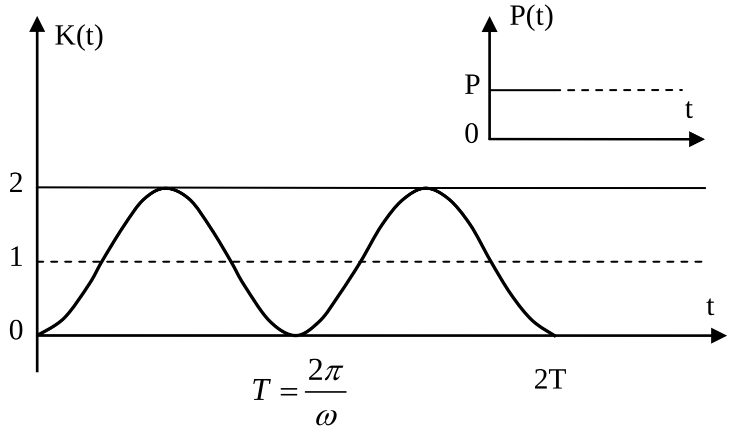
$f(t) = 1 \ (t \geq 0)$ (a)

Nên, $K(t) = \omega \int_0^t \sin\omega(t-\tau)\, d\tau$

$= 1 - \cos\omega t$ (b)

Đồ thị hàm K(t) này như trên hình 1.14b, và ta có

$K_đ = \max K(t) = 2$



Hình 1.14: Lực tác động đột ngột

2- Tải trọng kích động dạng chữ nhật (như trên hình 1.15a)

♦ Khi $0 \leq t \leq t_1$, có $P = P_0$, và f(t) = 1; nên theo (b) ta có:

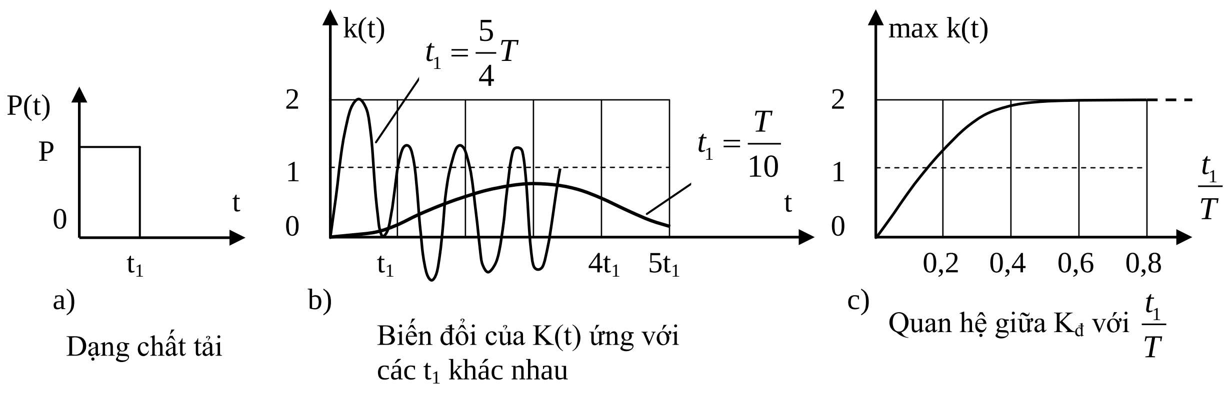
$$K(t) = 1 - \cos\omega t \qquad (c_1)$$

♦ Khi $t_1 \leq t$, có P = 0, và f(t) = 0; nên theo (1-42) ta có:

$$K(t) = 2\sin\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)\sin\omega\left(t - \frac{t_1}{2}\right) \qquad (c_2)$$

Trong đó t_1 là thời gian chất tải.

Trong trường hợp này, sự biến đổi của hàm động lực, cũng như giá trị lớn nhất của nó ($K_đ$) phụ thuộc t_1. Sự biến đổi của K(t) theo thời gian, ứng với các t_1 khác nhau, được thể hiện trên hình 1-15b; Còn quan hệ giữa $\max K(t) = K_đ$ với tỷ số $\frac{t_1}{T}$ được thể hiện trên hình 1.15c. Rõ ràng là, khi t_1 càng lớn, trường hợp này sẽ trở về trường hợp (1). Và trong thực tế, khi $t_1 \geq \frac{T}{2}$ là đã có thể coi như trường hợp (1) - xem hình 1.5c; Lúc này $K_đ \approx 2$. Còn t_1 càng lớn thì tần số càng lớn. Ở đây, T là chu kỳ dao động tự do.



Hình 1.15

3- Tải trọng tăng tuyến tính rồi sau đó không đổi (như trên hình 1.16a.)

♦ Khi $0 \le t \le t_1$, có $P = P_0(\frac{t}{t_1})$; Còn $f(t) = \frac{t}{t_1}$; Thay vào (1-42) ta được

hàm động lực trong trường hợp này là:

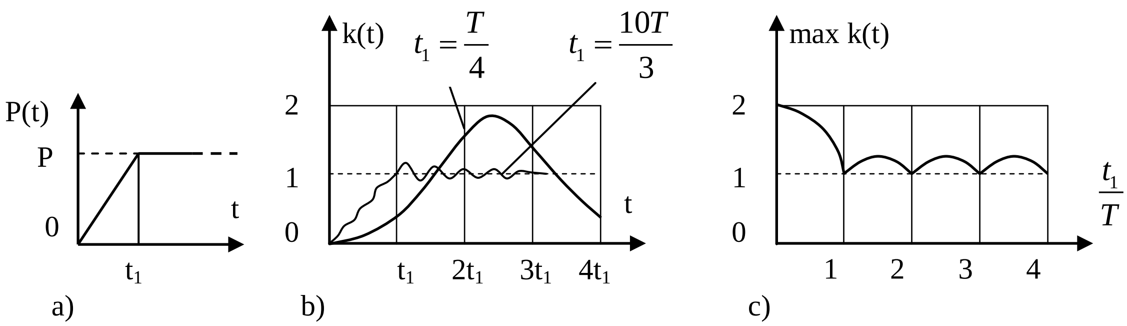
$$K(t) = \frac{t}{t_1} - \frac{\sin\omega t}{\omega t_1} = \frac{t}{t_1} - (\frac{T}{2\pi\, t_1})\sin\omega t \qquad \text{(d1)}$$

♦ Khi $t_1 \le t$, có $P = P_0$; Còn $f(t) = 1$; Nên trong trường hợp này

$$K(t) = 1 + (\frac{T}{2\pi\, t_1})[\sin\omega(t-t_1) - \sin\omega t] \qquad \text{(d2)}$$

Trong đó, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ là chu kỳ dao động tự do.

Đồ thị biến đổi của K(t) theo thời gian, ứng với các t_1 khác nhau, như trên hình 1.16b; Còn quan hệ giữa $\max K(t) = K_đ$ với tỷ số $\frac{t_1}{T}$ như trên hình 1.16c. Ta thấy, khi t_1 càng nhỏ ($t_1 \to 0$), nó tiến dần tới trường hợp (1): $K_đ \to 2$.



Hình 1.16

4, Tải trọng kích động dạng tam giác (như trên hình 1.17a.)

♦ Khi $0 \le t \le \frac{t_1}{2}$, có $P = 2(\frac{t}{t_1})P_0$; Còn $f(t) = \frac{2t}{t_1}$; Nên theo (1-42) ta có:

$$K(t) = \frac{2t}{t_1} - (\frac{T}{\pi\, t_1})\sin\omega t \qquad \text{(f1)}$$

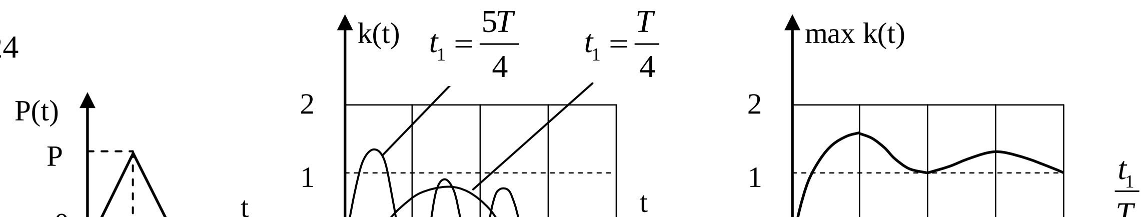
♦ Khi $\frac{t_1}{2} \le t \le t_1$, có $P = (2-\frac{2t}{t_1})P_0$; Còn $f(t) = (2-\frac{2t}{t_1})$; Nên ta được:

$$K(t) = 2 - \frac{2t}{t_1} + (\frac{T}{\pi\, t_1})[2\sin\omega(t-\frac{t_1}{2}) - \sin\omega t \qquad \text{(f2)}$$

♦ Khi $t_1 \le t$; có $P = 0$; Còn $f(t) = 0$; Nên lúc này ta được:

$$K(t) = (\frac{T}{\pi\, t_1})[-\sin\omega(t-t_1) + 2\sin\omega(t-\frac{t_1}{2}) - \sin\omega t] \qquad \text{(f3)}$$

Sự biến đổi của K(t) ứng với các t_1 khác nhau như trên hình 1.7b; Còn quan hệ giữa $\max K(t) = K_đ$ với $\frac{t_1}{T}$ như trên hình 1.17c. Và ta thấy $K_đ$ luôn luôn nhỏ hơn 2.



Qua các ví dụ ở trên, ta có thể rút ra một số nhận xét quan trọng.

a, Khi chịu tác dụng của tải trọng kích động, hệ số động có giá trị nhỏ hơn, hoặc bằng hai.

b, Khi thời gian chất tải kích động t_1 là nhỏ so với chu kỳ dao động riêng, ta có thể giải gần đúng bài toán với giả thiết: khối lượng chỉ bắt đầu chuyển động sau thời gian t_1. Như vậy, dựa vào nguyên lý động lượng ta có:

$$J = \int_0^t P(t)dt = Mv_0 \text{ ; Suy ra } v_0 = \frac{J}{M} \qquad \text{(g)}$$

Nghĩa là, có thể thay bài toán hệ chịu tải kích động có t_1 nhỏ, bằng bài toán hệ chuyển động có vận tốc ban đầu v_0 giải đơn giản hơn nhiều. Lời giải loại bài toán này có thể tìm thấy trong các tài liệu.

Chương 2
DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ NHIỀU BẬC TỰ DO

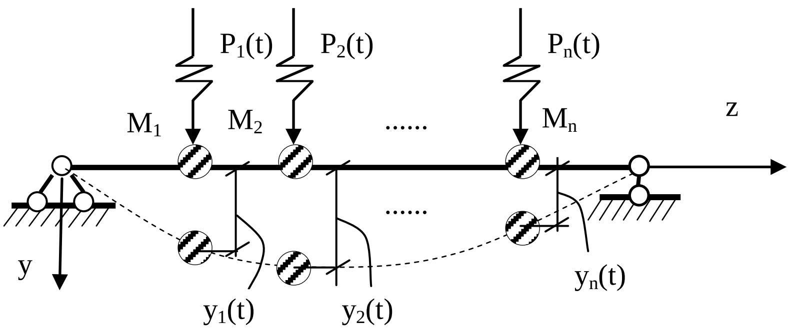
2.1 KHÁI NIỆM BAN ĐẦU

Như đã trình bày ở chương 1; hệ một BTD được đặc trưng bằng một dạng dao động riêng với tần số ω. Tương tự như vậy, dao động tự do của hệ nhiều bậc tự do cũng được đặc trưng bằng các tần số dao động riêng, và ứng với mỗi tần số riêng hệ có một dạng dao động riêng tương ứng. Hay nói cách khác như sau này sẽ chứng minh, *hệ có bao nhiêu bậc tự do sẽ có bấy nhiêu tần số dao động riêng*, và trong các điều kiện nhất định, ta có thể làm cho tất cả các khối lượng - tại một thời điểm nào đó- chỉ thực hiện dao động tương ứng với một tần số nào đó trong số các tần số riêng. Những dạng dao động như vậy được gọi là những *dạng dao động riêng chính*, hay *dạng dao động chuẩn*. Tất nhiên dao động tự do của hệ là tổng hợp của tất cả các dạng dao động riêng này.

Việc nghiên cứu các dạng dao động riêng chính là rất quan trọng vì nó đơn giản (như hệ một bậc tự do); sau đó hợp các dao động này sẽ cho dao động tổng cộng. Trong thực tế ta cũng gặp nhiều bài toán có số BTD hữu hạn, bởi vì người ta thường chuyển bài toán có vô hạn BTD (giải phức tạp) về bài toán có số BTD hữu hạn để giải đơn giản hơn.

2.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG NGANG TỔNG QUÁT CỦA HỆ CÓ n BẬC TỰ DO

Xét hệ có *n* BTD, *n* khối lượng tập trung $M_1, M_2, ..., M_n$, như trên hình 2.1 (bỏ qua khối lượng kết cấu). Hệ dao động dưới tác dụng của hệ lực động $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$, trong trường hợp tổng quát, giả thiết đặt tại tất cả các khối lượng, và có phương theo phương chuyển động. Trường hợp có các tải trọng không đặt tại khối lượng, thì ta phải chuyển tương đương về đặt tại khối lượng (xem ở mục 2.4).



Hình 2.1

Khi dao động, tại mỗi khối lượng đều chịu tác dụng của các ngoại lực như sau,

+ Ngoại lực động (nếu có) $P_k(t)$;

+ Lực quán tính $Z_k(t) = - M_k\ddot{y}_k(t)$

+ Lực cản $R_k(t)$

Ở đây, *k* là khối lượng thứ *k;(k* = 1, 2, ….n); Còn lực đàn hồi $R_{đh}(t)$ không phải là ngoại lực. Hợp của các ngoại lực này, ký hiệu là $F_k(t)$, thì:

$$F_k(t) = Z_k(t) + R_k(t) + P_k(t) \qquad \text{(a)}$$

Giả sử tại thời điểm *t* đang xét, khối lượng thứ *k* chuyển động hướng xuống cùng chiều với lực P(t), thì như đã phân tích ở mục 1.2, biểu thức (a) có dạng:

$$F_k(t) = -M_k \ddot{y}_k(t) - R_k(t) + P_k(t) \qquad \text{(b)}$$

Dưới tác động của hệ lực này, dầm sẽ thực hiện dao động. PTVP dao động ngang tổng quát của hệ cũng có thể thiết lập được từ điều kiện cân bằng động viết tại từng khối lượng.

$$R_{đhk}(t) - F_k(t) = 0 \qquad \text{(c)}$$

(k = 1, 2,…, n)

Song trong trường hợp này, sử dụng biểu thức chuyển vị tỏ ra thuận tiện hơn.

Chuyển vị của các khối lượng tại thời điểm nào đó, giả sử xét khối lượng thứ *k*,

$$y_k(t) = \delta_{k1} F_1(t) + \delta_{k2} F_2(t) + \ldots + \delta_{kn} F_n(t) \qquad \text{(d)}$$

Cho *k* biến thiên từ (k = 1, 2, ..., n); ta được hệ *n* PTVP chuyển động của *n* khối lượng tại thời điểm *t* là:

$$\begin{cases} y_1(t) = \delta_{11}F_1(t) + \delta_{12}F_2(t) + \ldots + \delta_{1n}F_n(t) \\ y_2(t) = \delta_{21}F_1(t) + \delta_{22}F_2(t) + \ldots + \delta_{2n}F_n(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t) = \delta_{n1}F_1(t) + \delta_{n2}F_2(t) + \ldots + \delta_{nn}F_n(t) \end{cases} \qquad \text{(f)}$$

Hay ở dạng ma trận,

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \ldots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{(f)'}$$

Trong đó, δ_{kj}, (k, j = 1,2, ..., n) là chuyển vị đơn vị tại khối lượng thứ k do lực bằng đơn vị đặt tại khối lượng thứ j gây ra.

Ký hiệu các ma trận và các véc tơ như sau:

$$[N] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & M_n \end{bmatrix};$$

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & .... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & .... & C_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ C_{n1} & C_{n2} & .... & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

$$\{y(t)\}=\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ .... \\ y_n(t) \end{Bmatrix};\ \{\dot{y}(t)\}=\begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ .... \\ \dot{y}_n(t) \end{Bmatrix};\ \{\ddot{y}(t)\}=\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ .... \\ \ddot{y}_n(t) \end{Bmatrix};\ \{P(t)\}=\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ .... \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \tag{2-2}$$

Trong đó, [N] là ma trận đối xứng, và được gọi là *ma trận độ mềm* của hệ, gồm có các phần tử là các chuyển vị đơn vị tại nơi đặt các khối lượng, theo phương chuyển động.

[M] là *ma trận khối lượng*, là ma trận đường chéo. Các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là các khối lượng tập trung đặt trên hệ.

[C] là *ma trận cản*. Việc xác định các phần tử của [C] khá phức tạp. Trong tính toán thực tế, người ta thường coi gần đúng [C] tỷ lệ với ma trận cứng [K].

$\{y(t)\}$; $\{\dot{y}(t)\}$; $\{\ddot{y}(t)\}$, lần lượt là *véc tơ chuyển vị, véc tơ vận tốc,* và *véc tơ gia tốc* chuyển động của hệ, mà các phần tử của nó, lần lượt là chuyển vị, vận tốc, và gia tốc chuyển động của các khối lượng.

{P(t)} là *véc tơ ngoại lực động*, có các phần tử là các ngoại lực động tác dụng tại các khối lượng.

Còn

$$\{R_c(t)\}=\{R_1(t)\quad R_2(t)\quad ....\quad R_n(t)\}^T=[C]\{\dot{y}(t)\} \tag{2-3}$$

là *véc tơ lực cản nhớt tuyến tính* (tỷ lệ bậc một với vận tốc). Thay (b) kết hợp với (2-3) vào (f)’ và chuyển vế, ta được:

$$[N][M]\{\ddot{y}(t)\}+[N][C]\{\dot{y}(t)\}+[E]\{y(t)\}=[N]P(t) \text{ (f)''}$$

Ở đây, [E] là ma trận đơn vị cấp *n*.

Nhân bên trái (f)’’ với $[K]=[N]^{-1}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & .... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & .... & k_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ k_{n1} & k_{n2} & .... & k_{nn} \end{bmatrix}$ (2-4)

ta được PTVP dao động ngang tổng quát của hệ có *n* BTD, cản nhớt tuyến tính, dưới dạng ma trận như sau:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{P(t)\} \tag{2-5}$$

Ma trận [K] đối xứng, và được gọi là *ma trận độ cứng* của hệ.

So sánh hai phương trình (2-5) và (1-12) ta thấy chúng hoàn toàn giống nhau về hình thức, cho nên cách giải cũng có phần tương tự nhau. Tuy nhiên, giải hệ phương trình (2-5) phức tạp hơn rất nhiều, vì [M], [C], [K] là các ma trận chứ không phải là các con số như trong (1-12), còn $\{y(t)\}$; $\{\dot{y}(t)\}$; $\{\ddot{y}(t)\}$ là các véc tơ hàm. Sau đây ta sẽ giải một số trường hợp riêng.

2.3 DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ CÓ n BẬC TỰ DO - PHƯƠNG TRÌNH TẦN SỐ

2.3.1 Tần số và phương trình tần số

Khi nghiên cứu dao động hệ một bậc tự do ta thấy rằng, khi lực cản bé, tần số riêng $\omega_1 \approx \omega$; Bởi vậy, đối với hệ nhiều bậc tự do, khi nghiên cứu dao động tự do, ta quan tâm chủ yếu tới trường hợp giả thiết không có lực cản.

Phương trình vi phân dao động tự do lúc này có dạng đơn giản:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{0\} \tag{2-6}$$

Giả thiết dao động tự do là điều hòa, nên phương trình dao động tự do không lực cản của khối lượng thứ k, cũng như (1-18), có dạng:

$$y_k(t) = A_k \sin(\omega t + \lambda) \tag{2-7}$$

và gia tốc $\ddot{y}_k(t) = -\omega^2 A_k \sin(\omega t + \lambda)$ (2-8)

Trong đó, A_k là biên độ dao động của khối lượng thứ k, ω và λ là tần số và góc lệch pha của dao động.

Thay (2-8) và (2-7) vào (2-6), rồi khai triển với (k = 1, 2, …, n); và đặt sin(ωt+λ) làm thừa số chung, ta được:

$$\left([M]\{-\omega^2 A\} + [K]\{A\}\right)\sin(\omega t + \lambda) = \{0\}$$

Do phải tồn tại dao động, sin(ωt+λ) ≠ 0;

nên, $\left([K]\{A\} - [M]\omega^2\{A\}\right) = \left([K] - [M]\omega^2\right)\{A\} = \{0\}$ (2-9)

Trong đó, $\{A\} = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}^T$ là véc tơ cột chứa các biên độ dao động của các khối lượng thứ nhất, thứ hai,..., thứ *n*, và được gọi là *véc tơ biên độ dao động tự do* của hệ. Do phải tồn tại dao động, nghĩa là {A} ≠ {0}. Từ đó suy ra định thức

$$D = \left|[K] - [M]\omega^2\right| = 0 \tag{2-10}$$

Hay ở dạng khai triển:

$$D = \begin{vmatrix} \left(k_{11} - M_1\omega^2\right) & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & \left(k_{22} - M_2\omega^2\right) & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & \left(k_{nn} - M_n\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (2\text{-}10)'$$

(2-10), là phương trình bậc *n* đối với ω^2. Do [K] và [M] là các ma trận đối xứng, và xác định dương, nên giải (2-10), ta sẽ xác định được *n* nghiệm thực và dương: $\omega_1^2, \omega_2^2, ... ,\omega_n^2$; cũng có nghĩa là ta có n tần số dao động riêng với qui ước ký hiệu, $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_n$; (các giá trị âm của phép khai căn không có ý nghĩa vật lý nên bỏ đi). Điều này trùng với kết luận đã nêu ra ở mục 2.1 của chương: hệ có bao nhiêu bậc tự do sẽ có bấy nhiêu tần số riêng. Phương trình (2-10) được gọi là *phương trình tần số* (hay còn gọi là phương trình thế kỷ). Tần số riêng bé nhất ω_1 được gọi là *tần số cơ bản*, và có vai trò quan trọng trong tính toán kết cấu khi chịu tải trọng động. Điều này sẽ được sáng tỏ ở các phần sau.

Phương trình tần số (2-10) cũng có thể biểu diễn qua ma trận độ mềm. Muốn vậy, ta nhân bên trái hai vế của (2-9) với $[N](\frac{1}{\omega^2})$ được:

$$\left\{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)[N][K]-\left(\frac{1}{\omega^2}\right)[N][M]\omega^2\right\}\{A\}=\{0\}$$

Hay $$\left\{\left(\frac{1}{\omega^2}\right)[E]-[N][M]\right\}\{A\}=\{0\} \qquad (2\text{-}9)'$$

Ở đây, [E] là ma trận đơn vị cấp n, và ký hiệu: $u=\frac{1}{\omega^2}$ (2-11)’’

Thì từ (2-9)’ ta suy ra phương trình tần số biểu diễn qua ma trận độ mềm là,

$$D=\left|u[E]-[N][M]\right|=0$$

Hay $$D=\left|[N][M]-u[E]\right|=0 \qquad (2\text{-}11)$$

hay ở dạng khai triển:

$$D=\begin{vmatrix}(M_1\delta_{11}-u) & M_2\delta_{12} & .... & M_n\delta_{1n}\\ M_1\delta_{21} & (M_2\delta_{22}-u) & .... & M_n\delta_{2n}\\ .... & .... & .... & ....\\ M_1\delta_{n1} & M_2\delta_{n2} & .... & (M_n\delta_{nn}-u)\end{vmatrix}=0 \qquad (2\text{-}11)'$$

Như vậy, phương trình tần số có thể biểu diễn qua ma trận cứng hoặc qua ma trận mềm. Tuy nhiên trong thực tế, người ta hay dùng ma trận mềm hơn, vì các phần tử của nó được xác định dễ dàng hơn nhờ công thức tính chuyển vị Maxwell- Mohr quen thuộc.

VÍ DỤ 2.1

Xác định các tần số dao động riêng của dầm cho trên hình 2-2a. Biết dầm có E J = hằng số, $M_1 = M_2 = M$, khi tính bỏ qua khối lượng dầm.

Bài giải

Bài toán này có hai BTD, nên phương trình tần số là định thức cấp hai sau:

$$\begin{vmatrix}(\delta_{11}M_1-u) & \delta_{12}M_2\\ \delta_{21}M_1 & (\delta_{22}M_2-u)\end{vmatrix}=0 \qquad (a)$$

Dầm đã cho là siêu tĩnh, công thức Maxwell- Mohr để tính chuyển vị là (Xem giáo trình cơ học kết cấu)

$$\delta_{ik} = \left(\overline{M_i}\right)\left(\overline{M_k^0}\right) = \left(\overline{M_i^0}\right)\left(\overline{M_k}\right) \qquad \text{(b)}$$

Ở đây, biểu đồ mô men đơn vị có thêm chỉ số ‘0’ là trên hệ tĩnh định (ứng với trạng thái giả tạo).

Các biểu đồ mô men đơn vị vẽ được như trên hình 2-2b,c,d,e; Thực hiện nhân các biểu đồ ta có:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{23l^3}{1536EJ}; \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-3l^3}{512EJ} \quad \text{(c)}$$

Thay (c) vào (a) và giải phương trình bậc hai này đối với u ta được:

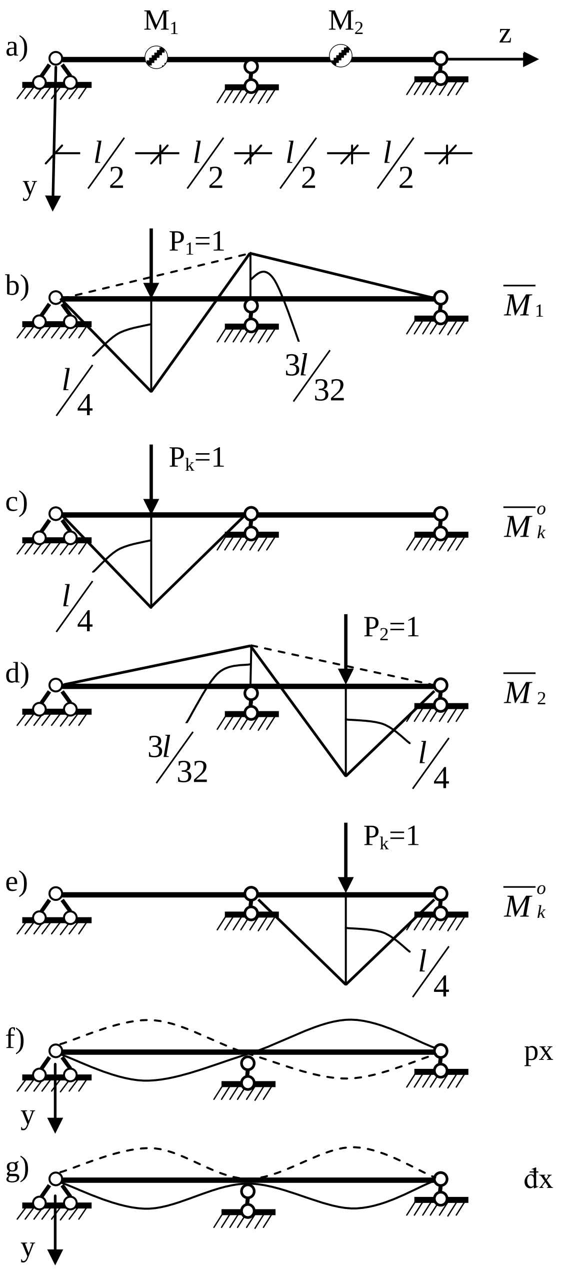
$$u_1 = \frac{Ml^3}{48EJ}$$

suy ra $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{1}{u_1}} = \sqrt{\dfrac{48EJ}{Ml^3}} = 6,9282\sqrt{\dfrac{EJ}{Ml^3}}$

và $\qquad u_2 = \dfrac{7Ml^3}{768EJ}$

suy ra $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{1}{u_2}} = \sqrt{\dfrac{109,72EJ}{Ml^3}} = 10,4745\sqrt{\dfrac{EJ}{Ml^3}}$

Dạng dao động ứng với ω_1 có dạng phản đối xứng (px) như trên hình 2-2f; còn ứng với ω_2 là dạng dao động đối xứng (đx) như trên hình 2-2g.



Hình 2.2

2.3.2 Dạng dao động riêng và tính chất trực giao của các dao động riêng

a) Dạng dao động riêng

Nếu ta thay lần lượt các tần số dao động riêng ω_1, ω_2,...., ω_n vào phương trình (2-9), sẽ xác định được *n* véc tơ tỷ số biên độ dao động ký hiệu là$\{a_1\}$, $\{a_2\}$,....$\{a_n\}$ ứng với từng tần số riêng. Ví dụ, ứng với tần số riêng thứ *i* ta có véc tơ biên độ dao động $\{a_i\}$ có các phần tử ký hiệu là (a_{1i}, a_{2i},..., a_{ki},..., a_{ni}); là biên độ dao động của các khối lượng thứ (1, 2,..., k,..., n) ứng với tần số riêng ω_i:

$$\{a_i\} = \{a_{1i} \quad a_{2i} \quad .... \quad a_{ki} \quad .... \quad a_{ni}\}^T \qquad \text{(2-12)}$$

Các a_{ki} (k = 1, 2, ..., n) là nghiệm của phương trình (2-9)’’ sau đây,

$$\left([K] - [M]\omega^2\right)\{a_i\} = \{0\} \qquad \text{(2-9)''}$$

Cần chú ý rằng, ở đây ta chỉ xác định được dạng của các dao động riêng, hay nói cách khác, chỉ xác định được tỷ số (quan hệ) giữa các biên độ dao động của các khối lượng ứng với một tần số cụ thể. Sở dĩ như vậy là vì, (2-9)'' là phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, sẽ có vô số nghiệm. Muốn xác định một hệ nghiệm nào đó, ta phải giả thiết trước một biến a_{ki} nào đó làm *biến cơ sở*; Sau đó sẽ giải nốt (n-1) biến còn lại qua biến cơ sở a_{ki} này. Rõ ràng, khi cho biến cơ sở các trị khác nhau ta sẽ được các véc tơ {ai} khác nhau. Tuy vậy, tỷ số giữa các phần tử trong véc tơ này với biến cơ sở chọn trước luôn không đổi.

Nếu chọn ẩn cơ sở ban đầu $a_{ki} = 1$, thì các tỷ số này chính là các phần tử trong véc tơ (2-12). Trong thực tế, người ta thường chọn ẩn cơ sở ban đầu là $a_{1i} = 1$, khi đó véc tơ biên độ dao động ứng với tần số riêng ω_i sẽ là:

$$\{a_i\} = \{(a_{1i} = 1) \quad a_{2i} \quad .... \quad a_{ki} \quad .... \quad a_{ni}\}^T \tag{2-12)'}$$

Trong đó, các a_{ki} (k = 2, 3,..., n) là nghiệm của phương trình (2-9)'' ứng với $a_{1i} =1$.

Các phần tử của véc tơ biên độ (2-12)' cho ta dạng dao động của hệ ứng với tần số riêng thứ *i* được gọi là *dạng dao động riêng thứ i* (hay *dạng dao động chính thứ i).* Như vậy, hệ có bao nhiêu bậc tự do sẽ có bấy nhiêu dạng dao động riêng.

Nếu ta đặt tất cả các véc tơ biểu diễn các dạng dao động riêng vào trong một ma trận vuông, ký hiệu là [A], thì [A] được gọi là *ma trận các dạng dao động riêng* của hệ.

$$[A] = [a_1 \quad a_2 \quad .... \quad a_n] = \begin{bmatrix} (a_{11} = 1) & (a_{12} = 1) & .... & (a_{1n} = 1) \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2-13}$$

Cũng cần phải nói thêm rằng, (2-9) hay (2-9)'là bài toán trị riêng điển hình, nên việc giải phương trình (2-9)' để xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng tương ứng như đã trình bày ở trên, thực chất là xác định các giá trị riêng và các véc tơ riêng tương ứng của bài toán trị riêng này như ta đã quen thuộc trong đại số học.

b) Tính chất trực giao giữa các dạng dao động riêng

Các dạng dao động riêng của hệ nhiều bậc tự do có *tính chất trực giao*. Thật vậy, xét hai dạng dao động thứ *i* và thứ *k*. Thay ω_i và ω_k vào (2-9) rồi chuyển vế, ta có:

Với ω_i có: $[K]\{a_i\} = [M]\omega_i^2\{a_i\}$ (a)

Với ω_k có: $[K]\{a_k\} = [M]\omega_k^2\{a_k\}$ (b)

Chuyển trí từng vế trong (a) và chú ý rằng, $[M]^T = [M]$; $[K]^T = [K]$ thì (a) trở thành,

$$\{a_i\}^T [K] = \omega_i^2 \{a_i\}^T [M] \tag{c}$$

Nhân bên phải véc tơ $\{a_k\}$ vào (c), nhân bên trái véc tơ $\{a_i\}^T$ vào (b) ta được:

$$\{a_i\}^T [K]\{a_k\} = \omega_i^2 \{a_i\}^T [M]\{a_k\} \tag{c)'}$$

$$\{a_i\}^T [K]\{a_k\} = \omega_k^2 \{a_i\}^T [M]\{a_k\} \tag{b)'}$$

Trừ hai phương trình cho nhau: $(c)'-(b)'=\left(\omega_i^2-\omega_k^2\right)\{a_i\}^T[M]\{a_k\}=0$

Vì $\omega_i \neq \omega_k$, ta suy ra: $\{a_i\}^T[M]\{a_k\}=0$ (2-14)

Về mặt toán học**,** (2-14) là *điều kiện trực giao* của hai véc tơ $\{a_i\}$ và $\{a_k\}$, cũng tức là của hai dạng dao động riêng thứ *i* và thứ *k*. Đây là điều phải chứng minh.

Thực hiện phép nhân ma trận, điều kiện (2-14) có thể viết ở dạng khai triển như sau:

$$\{a_{1i}\quad a_{2i}\quad .....\quad a_{ni}\}\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ .... & .... & .... & .... \\ & & & M_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ .... \\ a_{nk} \end{Bmatrix}=a_{1i}M_1a_{1k}+a_{2i}M_2a_{2k}+....+a_{ni}M_na_{nk}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}M_ja_{jk}=0 \qquad (2\text{-}14)'$$

c) Chuẩn hóa các dạng dao động riêng

Nếu ta thay véc tơ dạng dao động riêng thứ i, $\{a_i\}$ bằng véc tơ $\{b_i\}$ thỏa mãn điều kiện

$$\{b_i\}^T[M]\{b_i\}=1 \qquad (2\text{-}15)$$

thì véc tơ $\{b_i\}$ được gọi là véc tơ biểu diễn dạng dao động riêng thứ i đã được chuẩn hóa, hay gọi ngắn gọn là *véc tơ chuẩn hóa dạng dao động riêng thứ i.*

Nếu đặt các véc tơ $\{b_i\}$ vào trong một ma trận vuông, ký hiệu là [B],

$$[B]=[b_1\quad b_2\quad ....\quad b_n]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & .... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ b_{n1} & b_{n2} & .... & b_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}13)'$$

thì [B] được gọi là *ma trận chuẩn hóa các dạng dao động riêng* của hệ. Lúc này theo (2-15) ta có:

$$[B]^T[M][B]=[E] \qquad (2\text{-}15)'$$

Trong đó [E] là ma trận đơn vị cấp *n*.

Sử dụng dạng chuẩn hóa của các dạng dao động riêng kết hợp với hệ tọa độ chính sẽ cho phép ta chuyển việc giải bài toán có *n* BTD về giải *n* bài toán có một BTD đơn giản hơn nhiều đã được trình bày chi tiết trong chương 1.

Thật vậy, để xác định $\{b_i\}$, ta đặt

$$\{b_i\}=\frac{1}{d_i}\{a_i\} \qquad (2\text{-}16)$$

Trong đó d_i là một hệ số.

Thay (2-16) vào (2-15) ta rút ra: $d_i^2=\{a_i\}^T[M]\{a_i\}$ (2-16)'

Ký hiệu ma trận

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ .... & .... & .... & .... \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}17)$$

được gọi là *ma trận các tần số dao động riêng,* hay *ma trận tần số.*

Thay (2-16) vào ma trận [A] (2-13), rồi thay vào (2-9) ta được:

$$[K][B] = [M][B][\Omega] \qquad (a)$$

Nhân bên trái cả hai vế của (a) với $[B]^T$ và chú ý tới (2-15)' ta có:

$$[B]^T[K][B] = [\Omega] \qquad (2\text{-}18)$$

Ký hiệu véc tơ {q(t)} như sau - được gọi là *hệ tọa độ chính,*

$$\{y(t)\} = [B]\{q(t)\} \qquad (2\text{-}19)$$

Thay (2-19) vào PTVP dao động tự do (2-6) ta được,

$$[M][B]\{\ddot{q}(t)\} + [K][B]\{q(t)\} = \{0\} \qquad (b)$$

Nhân bên trái (b) với $[B]^T$, kết hợp với (2-15)' và (2-18) ta được:

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\Omega]\{q(t)\} = \{0\} \qquad (2\text{-}20)$$

Phương trình (2-20) là PTVP dao động tự do không có lực cản của hệ có *n* BTD được viết trong hệ tọa độ chính dưới dạng ma trận. (2-20) là một hệ phương trình gồm *n* phương trình độc lập (vì Ω là ma trận đường chéo) mà trong mỗi phương trình chỉ chứa một hàm ẩn. Hay nói cách khác, *(2-20) là một hệ gồm n phương trình độc lập có dạng sau đây- là dạng PTVP dao động của hệ một BTD không có lực cản(1-14):*

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \qquad (2\text{-}21)$$

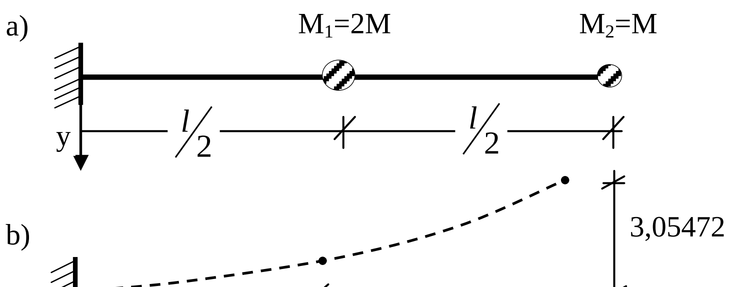
(i = 1,2,...., n)

Giải (2-21) (Xem chương 1- hệ một BTD) ta được các nghiệm $q_i(t)$, rồi thay vào (2-19) ta được lời giải của bài toán.

VÍ DỤ 2.2 Xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động tương ứng của dầm conson trên đó có đặt hai khối lượng tập trung như trên hình 2-3a. Dầm có EJ không đổi và bỏ qua khối lượng dầm khi tính. Cho M = $\frac{ml}{4}$ (*m* là cường độ khối lượng phân bố)

Bài giải:

Hệ có hai BTD. Các chuyển vị đơn vị tính được theo công thức Maxwell- Mohr và cho kết quả như sau:



$$\delta_{11} = \frac{l^3}{24EJ}; \qquad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ}; \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{5l^3}{48EJ} \qquad \text{(a)}$$

1. Xác định các tần số dao động riêng

Cũng như ở ví dụ 2-1, thay (a) vào phương trình tần số (2-11) ta được một phương trình bậc hai đối với u, giải phương trình này ta được (bỏ qua tính toán chi tiết):

$$u_1 = 0{,}1004\frac{ml^4}{EJ}, \quad \text{suy ra} \quad \omega_1 = \frac{3{,}156}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \qquad \text{(b)}$$

và
$$u_2 = 0{,}0043\frac{ml^4}{EJ}, \quad \text{suy ra} \quad \omega_2 = \frac{16{,}258}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

2. Xác định các dạng dao động riêng

Thay lần lượt ω_1, ω_2 (hay u_1, u_2) vào hệ phương trình (2-9)' (là hệ hai phương trình hai ẩn), rồi giả thiết trước ẩn thứ nhất bằng 1, ta sẽ giải ra ẩn thứ hai là các biên độ chuyển động của khối lượng thứ nhất và thứ hai, các dịch chuyển này cho ta dạng dao động tương ứng. Cụ thể:

Dạng dao động thứ nhất: Thay u_1 vào phương trình thứ nhất (hoặc thứ hai) của (2-9)' và cho $a_{11} = 1$ ta được một phương trình chứa một biến a_{21} như sau,

$$\left(M_1\delta_{11} - u_1\right) \times \left(a_{11} = 1\right) + M_2\delta_{12}a_{21} = 0$$

Thay M_1, M_2, δ_{11}, δ_{12}, u_1 vào rồi giải ta được, $a_{21} = 3{,}05472$; Véc tơ biên độ dao động cho ta dạng dao động riêng thứ nhất là:

$$\{a_1\} = \{a_{11} \quad a_{21}\}^T = \{1{,}0 \quad 3{,}05472\}^T$$

Dạng dao động này như trên hình 2-3b.

Dạng dao động riêng thứ hai hoàn toàn tương tự, thay u_2 vào (2-9)' rồi cho a_{12} = 1, ta sẽ giải được a_{22} = -0,655. Do đó véc tơ biên độ cho ta dạng dao động riêng thứ hai là:

$$\{a_2\} = \{a_{12} \quad a_{22}\}^T = \{1,0 \quad -0,65472\}^T$$

Dạng dao động riêng thứ hai như trên hình 2-3c.

Ma trận các dạng dao động riêng của bài toán này là:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 3,05472 & -0,65472 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

3. Chuẩn hóa các dạng dao động riêng

Để xác định ma trận chuẩn hóa các dạng dao động riêng [B] ta phải tính các hệ số d_i. Theo (2-16)'ta có:

$$d_1^2 = \{a_1\}^T[M]\{a_1\} = \{1,0 \quad 3,05472\} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 3,05472 \end{Bmatrix} = 11,33133M$$

Suy ra $d_1 = 3,3662\sqrt{M}$

$$d_2^2 = \{1,0 \; -0,65472\} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -0,65472 \end{Bmatrix} = 2,42866M, \text{ suy ra } d_2 = 1,55842\sqrt{M}$$

Bây giờ lại thay d_1, d_2 vào (2-16) sẽ được ma trận chuẩn hóa [B] như sau:

$$\{b_1\} = \frac{1}{d_1}\{a_1\} = \frac{1}{3,3662\sqrt{M}} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 3,05472 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2971 \\ 0,90747 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\{b_2\} = \frac{1}{d_2}\{a_2\} = \frac{1}{1,55842\sqrt{M}} \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -0,65472 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,64168 \\ -0,42012 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Ghép hai véc tơ b_1 và b_2, ta được ma trận chuẩn hóa các dạng dao động riêng của hệ:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0,29707 & 0,641677 \\ 0,90747 & -0,42012 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \text{(d)}$$

2.3.3 Phân tích tải trọng theo các dạng dao động riêng

Xét hệ có *n* bậc tự do, *n* khối lượng $M_1, M_2, ..., M_n$; Trên đó có hệ tải trọng động tác dụng tại các khối lượng lập thành véc tơ tải trọng động như trong (2-2):

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ .... \\ .... \\ P_k(t) \\ .... \\ .... \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Ta sẽ phân tích hệ tải trọng này thành các thành phần đặt tại tất cả các khối lượng tương ứng với các dạng dao động riêng, nghĩa là:

$$\begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ .... \\ .... \\ P_k(t) \\ .... \\ .... \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P'_{11}(t) + P'_{12}(t) + ... + P'_{1i}(t) + ... + P'_{1n}(t) \\ P'_{21}(t) + P'_{22}(t) + ... + P'_{2i}(t) + ... + P'_{2n}(t) \\ .... \\ .... \\ P'_{k1}(t) + P'_{k2}(t) + ... + P'_{ki}(t) + ... + P'_{kn}(t) \\ .... \\ .... \\ P'_{n1}(t) + P'_{n2}(t) + ... + P'_{ni}(t) + ... + P'_{nn}(t) \end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

hay viết ở dạng véc tơ

$$\{P(t)\} = \{P'_1(t)\} + \{P'_2(t)\} + ... + \{P'_i(t)\} + ... + \{P'_n(t)\} \qquad \text{(2-22)}$$

Trong đó, $P'_{ki}(t)$ là thành phần lực tác dụng tại khối lượng thứ *k* tương ứng với tần số ω_i (dạng chính thứ *i*). Như vậy theo (2-22), ta đã phân tích véc tơ tải trọng {P(t)} thành tổng của *n* véc tơ tải trọng tương ứng với *n* dạng dao động riêng.

Véc tơ $\{P'_1(t)\} = \{P'_{11}(t) \quad P'_{21}(t) \quad .... \quad P'_{k1}(t) \quad .... \quad P'_{n1}(t)\}^T$ là hệ tải trọng tác dụng tại *n* khối lượng tương ứng với dạng chính thứ nhất.

Véc tơ $\{P'_2(t)\} = \{P'_{12}(t) \quad P'_{22}(t) \quad .... \quad P'_{k2}(t) \quad .... \quad P'_{n2}(t)\}^T$ là hệ tải trọng tác dụng tại *n* khối lượng tương ứng với dạng chính thứ hai.

Tương tự, ta có các véc tơ tải trọng tác dụng tại các khối lượng tương ứng với các dạng chính thứ ba, thứ tư, ..., thứ k, ..., thứ n:

$$\{P'_n(t)\} = \{P'_{1n}(t) \quad P'_{2n}(t) \quad .... \quad P'_{kn}(t) \quad .... \quad P'_{nn}(t)\}^T$$

Để xác định *n* véc tơ này, ta phải xác định (n×n) thành phần $P'_{ki}(t)$ [k, i = 1,2,..., n]. Vì $P'_{ki}(t)$ liên quan tới khối lượng thứ *k*, và dạng dao động thứ *i*, nên ta đặt:

$$P_{ki}^{'}(t) = M_k a_{ki} H_i(t) \tag{2-23}$$

Trong đó: M_k là khối lượng thứ *k*

a_{ki} là biên độ dao động của khối lượng thứ *k* tương ứng với dạng dao động thứ *i* [xem 2-12)']

$H_i(t)$ là hàm tương ứng với dạng chính thứ *i,* chưa biết mà ta phải xác định.

Áp dụng (2-23) cho tất cả các khối lượng, ta được véc tơ ngoại lực động tác dụng tại các khối lượng tương ứng với dạng dao động thứ *i*.

$$\begin{cases} P_{1i}^{'}(t) = M_1 a_{1i} H_i(t) \\ P_{2i}^{'}(t) = M_2 a_{2i} H_i(t) \\ \qquad .... \\ \qquad .... \\ P_{ki}^{'}(t) = M_k a_{ki} H_i(t) \\ \qquad .... \\ \qquad .... \\ P_{ni}^{'}(t) = M_n a_{ni} H_i(t) \end{cases}$$

hay ở dạng ma trận

$$\left\{P_i^{'}(t)\right\} = \begin{Bmatrix} P_{1i}^{'}(t) \\ P_{2i}^{'}(t) \\ .... \\ P_{ki}^{'}(t) \\ .... \\ P_{ni}^{'}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & & & & & \\ & M_2 & & & & \\ & & .... & & & \\ & & & M_k & & \\ & & & & .... & \\ & & & & & M_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ ... \\ a_{ki} \\ ... \\ a_{ni} \end{Bmatrix} H_i(t)$$

Hay thu gọn,

$$\left\{P_i^{'}(t)\right\} = \left[M\right]\left\{a_i\right\} H_i(t) \tag{2-24}$$

Ở đây, [M] là ma trận khối lượng, còn $\{a_i\}$ là véc tơ (2-12)' cho ta dạng dao động thứ *i*. Thay (2-24) vào (2-22), với (i = 1, 2, ..., n); ta có:

$$\left\{P(t)\right\} = \left[M\right]\left\{a_1\right\} H_1(t) + \left[M\right]\left\{a_2\right\} H_2(t) + ... + \left[M\right]\left\{a_i\right\} H_i(t) + ... + \left[M\right]\left\{a_n\right\} H_n(t) \quad \text{(c)}$$

Nhân bên trái hai vế của (c) với véc tơ $\{a_i\}^T$, ta được:

$$\left\{a_i\right\}^T \left\{P(t)\right\} = \left\{a_i\right\}^T \left[M\right]\left\{a_1\right\} H_1(t) + \left\{a_i\right\}^T \left[M\right]\left\{a_2\right\} H_2(t) + ... + \left\{a_i\right\}^T \left[M\right]\left\{a_i\right\} H_i(t) +$$
$$+ .... + \left\{a_i\right\}^T \left[M\right]\left\{a_n\right\} H_n(t) \quad \text{(d)}$$

Do tính chất trực giao (2-14), nên các số hạng thứ 1, 2,..., (i-1), (i+1), (i+2),...., n trong (d) đều bằng không; chỉ có số hạng thứ *i* là khác không.

Từ đó suy ra:

$$\{a_i\}^T\{P(t)\} = \{a_i\}^T[M]\{a_i\}H_i(t)$$

hay
$$H_i(t) = \frac{\{a_i\}^T\{P(t)\}}{\{a_i\}^T[M]\{a_i\}} \tag{2-25}$$

Thay (2-25) vào (2-24) ta được véc tơ tải trọng tương ứng với dạng dao động thứ *i*

$$\{P_i^{'}(t)\} = ([M]\{a_i\}) \times \left(\frac{\{a_i\}^T\{P(t)\}}{\{a_i\}^T[M]\{a_i\}}\right) \qquad (2\text{-}24)'$$

Chú ý:

1- Khi sử dụng công thức (2-24)' cần lưu ý: (2-24)' có hai thừa số, (mỗi thừa số được đặt trong dấu ngoặc đơn), và phải tính riêng từng thừa số; Thừa số thứ nhất là một véc tơ có *n* phần tử; thừa số thứ hai cho ta một con số; Tích hai thừa số này là một véc tơ có *n* phần tử chính là véc tơ tải trọng tương ứng với dạng dao động thứ *i*.

Lần lượt cho (i= 1, 2,..., n) vào (2-24)'; ta xác định được *n* véc tơ tải trọng tương ứng với *n* dạng dao động riêng của hệ, được tách ra từ hệ tải trọng đã cho ban đầu. Có thể kiểm tra sự đúng đắn của phép phân tích từ công thức (b), hoặc (2-22).

2- Bằng cách tương tự, ta cũng có thể phân tích chuyển vị theo các dạng dao động riêng.

Nhờ phân tích hệ tải trọng đã cho theo các dạng dao động riêng, và nhiều khi cả chuyển vị, mà sau này, khi nghiên cứu dao động cưỡng bức của hệ nhiều bậc tự do, ta cũng có thể chuyển việc giải bài toán hệ nhiều bậc tự do phức tạp về giải nhiều bài toán như hệ một bậc tự do đơn giản đã được nghiên cứu kỹ ở chương 1.

2.4 CÁCH CHUYỂN TƯƠNG ĐƯƠNG CÁC TẢI TRỌNG ĐỘNG ĐẶT TẠI CÁC VỊ TRÍ BẤT KỲ TRÊN KẾT CẤU VỀ ĐẶT TẠI CÁC KHỐI LƯỢNG

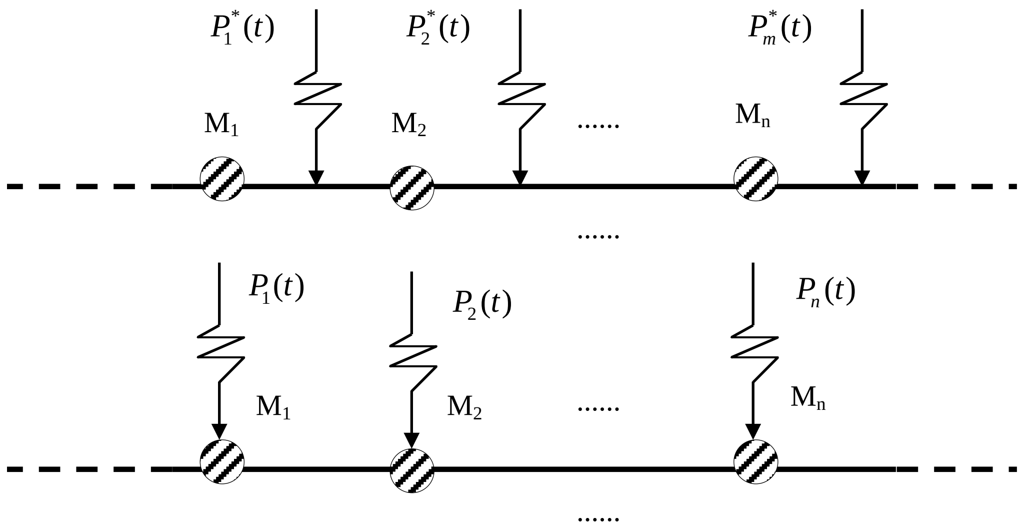
Khi trên kết cấu có các lực không đặt tại các khối lượng, ký hiệu là $P^*_k(t)$ tác dụng, giả sử có *m* lực, lập thành véc tơ:

$$\{P^*(t)\} = \{P_1^*(t) \quad P_2^*(t) \quad .... \quad P_m^*(t)\}^T \tag{2-26}$$

Lúc này, để có thể áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần trên, ta phải thay thế tương đương (chuyển tương đương) hệ lực này thành hệ lực đặt tại các khối lượng

Có nhiều cách chuyển tương đương như vậy, song chỉ là gần đúng. Sau đây là một trong các cách chuyển tương đương như vậy dựa trên giả thiết gần đúng cho rằng: *Hai hệ lực tương đương là hai hệ lực gây ra chuyển vị tĩnh tại các khối lượng bằng nhau.* Ký hiệu véc tơ hệ lực thay thế đặt tại *n* khối lượng là,

$$\{P(t)\} = \{P_1(t) \quad P_2(t) \quad .... \quad P_n(t)\}^T \tag{2-27}$$



Hình 2.4

và δ^*_{ik} là chuyển vị đơn vị tại khối lượng thứ *i* do lực bằng đơn vị đặt tại lực $P^*_k(t)$ gây ra;

δ_{ij} là chuyển vị đơn vị tại khối lượng thứ *i* do lực bằng đơn vị đặt tại khối lượng thứ *j* gây ra. Khi đó, chuyển vị tại các khối lượng thứ (1, 2, ..., n) do hệ lực {P*(t)} gây ra, bằng chuyển vị này, do hệ lực thay thế {P(t)} gây ra, nghĩa là:

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_1(t) & \delta^*_{11}P_1^*(t)+\delta^*_{12}P_2^*(t)+...+\delta^*_{1m}P_m^*(t) & & \delta_{11}P_1(t)+\delta_{12}P_2(t)+...+\delta_{1n}P_n(t) \\ .... & .... & & .... \\ y_i(t) = & \delta^*_{i1}P_1^*(t)+\delta^*_{i2}P_2^*(t)+...+\delta^*_{im}P_m^*(t) & = & \delta_{i1}P_1(t)+\delta_{i2}P_2(t)+...+\delta_{in}P_n(t) \\ .... & .... & & .... \\ y_n(t) & \delta^*_{n1}P_1^*(t)+\delta^*_{n2}P_2^*(t)+...+\delta^*_{nm}P_m^*(t) & & \delta_{n1}P_1(t)+\delta_{n2}P_2(t)+...+\delta_{nn}P_n(t) \end{array}\right. \qquad (c)$$

Ký hiệu ma trận sau,

$$\left[N^*\right]=\begin{bmatrix} \delta^*_{11} & \delta^*_{12} & .... & \delta^*_{1m} \\ \delta^*_{21} & \delta^*_{22} & .... & \delta^*_{2m} \\ .... & .... & .... & .... \\ \delta^*_{n1} & \delta^*_{n2} & .... & \delta^*_{nm} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}28)$$

Lúc này có thể biểu diễn hệ *n* đẳng thức (c) dưới dạng ma trận:

$$\left[N^*\right]\left\{P^*(t)\right\}=\left[N\right]\left\{P(t)\right\} \qquad (c)'$$

Suy ra, $$\left\{P(t)\right\}=\left[N\right]^{-1}\left[N^*\right]\left\{P^*(t)\right\} \qquad (2\text{-}29)$$

Trong đó, [N] là ma trận độ mềm của hệ được tính theo (2-1).

2.5 DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO, KHÔNG LỰC CẢN CHỊU LỰC KÍCH THÍCH ĐIỀU HOÀ: P(t)=P_0sinrt

2.5.1 Biểu thức nội lực động và chuyển vị động

Xét hệ nhiều bậc tự do chịu tác dụng của các lực kích thích điều hòa cùng tần số. Cũng như hệ một bậc tự do, trong thực tế luôn tồn tại lực cản; nên dù lực cản rất nhỏ, thì sau một khoảng thời gian nào đó, dao động tự do cũng sẽ mất đi. Dao động của hệ lúc này hoàn toàn phụ thuộc lực kích thích điều hòa, nên nội lực, ứng suất, v.v. cũng thay đổi điều hòa cùng chu kỳ với chu kỳ của lưc kích thích.

Khi hệ có *n* BTD, sẽ có *n* tần số dao động riêng. Khi một trong số các tần số riêng xấp xỉ bằng tần số lực kích thích sẽ xuất hiện hiện tượng cộng hưởng. Thực tế, tần số lực kích thích thường nhỏ hơn nhiều so với tần số dao động riêng ($r << \omega_i$), nên cộng hưởng thường xẩy ra với ω_1, hoặc ω_2. Bởi vậy, để nghiên cứu cộng hưởng, ta thường quan tâm tới hai tần số nhỏ nhất này. Các tần số riêng là nghiệm của phương trình tần số (2-10) hoặc (2-11).

Để phục vụ bài toán kiểm tra và bài toán thiết kế, ta phải biết biểu đồ biên độ nội lực động và chuyển vị động.

Khi dao động đã ổn định (phần dao động tự do đã mất), hệ dao động do tác dụng của các lực sau:

• Các lực kích thích điều hòa P(t) = P_0sin rt đặt tại các khối lượng;

• Các lực quán tính biến đổi điều hòa cùng tần số với tần số của lực kích thích, đặt tại các khối lượng :

$$Z_i(t) = Z_i \sin rt \qquad (a)$$

(i = 1, 2, ..., n)

Khi đó, đại lượng nghiên cứu S (có thể là nội lực, chuyển vị, phản lực, v.v.) tại tiết diện K nào đó trên hệ được tính theo nguyên lý cộng tác dụng như sau:

$$S_K(t) = S_{KP}(t) + \overline{S}_{K1}Z_1(t) + \overline{S}_{K2}Z_2(t) + \ldots + \overline{S}_{Kn}Z_n(t) \qquad (b)$$

Vì dao động đã ổn định, nên các đại lượng nghiên cứu đều biến đổi điều hòa theo cùng một tần số với tần số của lực kích thích. Bởi vậy, khi tải trọng đạt biên độ, thì các đại lượng nghiên cứu cũng đạt biên độ, nghĩa là:

$$S_K = S_K^{P_0} + \overline{S}_{K1}Z_1 + \overline{S}_{K2}Z_2 + \ldots + \overline{S}_{Kn}Z_n \qquad (2\text{-}30)$$

Trong đó,

$S_K^{P_0}$ là trị số của S_K do biên độ lực động P_0 đặt tĩnh gây ra, và được xác định bằng các phương pháp được trình bày trong giáo trình cơ học kết cấu.

$\overline{S}_{ki}$ là giá trị S_K do lực quán tính $Z_i = 1$ đặt tĩnh gây ra. (i = 1, 2,..., n)

Z_i là biên độ của lực quán tính $Z_i(t)$

Như vậy, để xác định được S_k ta phải xác định được các biên độ lực quán tính Z_i.

2.5.2 Xác định biên độ của các lực quán tính

Khi bỏ qua lực cản, phương trình chuyển động của khối lượng thứ *i*, theo nguyên lý cộng tác dụng, có dạng:

$$y_i(t) = \delta_{i1} Z_1(t) + \delta_{i2} Z_2(t) + \ldots + \delta_{in} Z_n(t) + \Delta_{iP}(t) \qquad \text{(c)}$$

Trong đó, $\Delta_{iP}(t)$ là chuyển vị của khối lượng thứ *i* do các lực động P(t) gây ra. Sau khi dao động đã ổn định, cả $y_i(t)$, $Z_i(t)$, và $\Delta_{iP}(t)$ đều biến đổi điều hòa với tần số *r* của lực kích thích. Nghĩa là:

$$y_i(t) = \Delta_i \sin rt \ \text{ và } \ \Delta_{iP}(t) = \Delta_{iP_0} \sin rt \qquad \text{(d)}$$

đồng thời, $\ddot{y}_i(t) = -r^2 \Delta_i \sin rt$

Trong đó, Δ_i là biên độ chuyển vị động của khối lượng thứ *i* ta đang tính.

Δ_{iP_0} là chuyển vị của khối lượng thứ *i* do biên độ P_0 của các lực động P(t) đặt tĩnh gây ra.

Mặt khác, lực quán tính $Z_i(t) = -M_i \ddot{y}_i(t)$ (f)

Thay (d) vào (f) ta được: $Z_i(t) = M_i r^2 \Delta_i \sin rt = M_i r^2 y_i(t)$

Hay rút ra: $y_i(t) = \dfrac{1}{M_i r^2} Z_i(t)$ (2-31)

Thay (a), (d), và (2-31) vào (c), rồi chuyển vế và đặt *sinrt* làm thừa số chung, ta được:

$$\left[\delta_{i1} Z_1 + \delta_{i2} Z_2 + \ldots + \left(\delta_{ii} - \frac{1}{M_i r^2} \right) Z_i + \ldots + \delta_{in} Z_n + \Delta_{iP_0} \right] \sin rt = 0 \qquad \text{(g)}$$

Vì sinrt khác không (do tồn tại dao động), nên từ (g) ta rút ra được hệ phương trình dùng để xác định biên độ của các lực quán tính, khi hệ chịu tác dụng của các lực kích thích điều hòa và không có lực cản, như sau:

$$\delta_{i1} Z_1 + \delta_{i2} Z_2 + \ldots + \delta_{ii}^{*} Z_i + \ldots + \delta_{in} Z_n + \Delta_{iP_0} = 0 \qquad \text{(2-32)}$$

(i = 1, 2, ..., n)

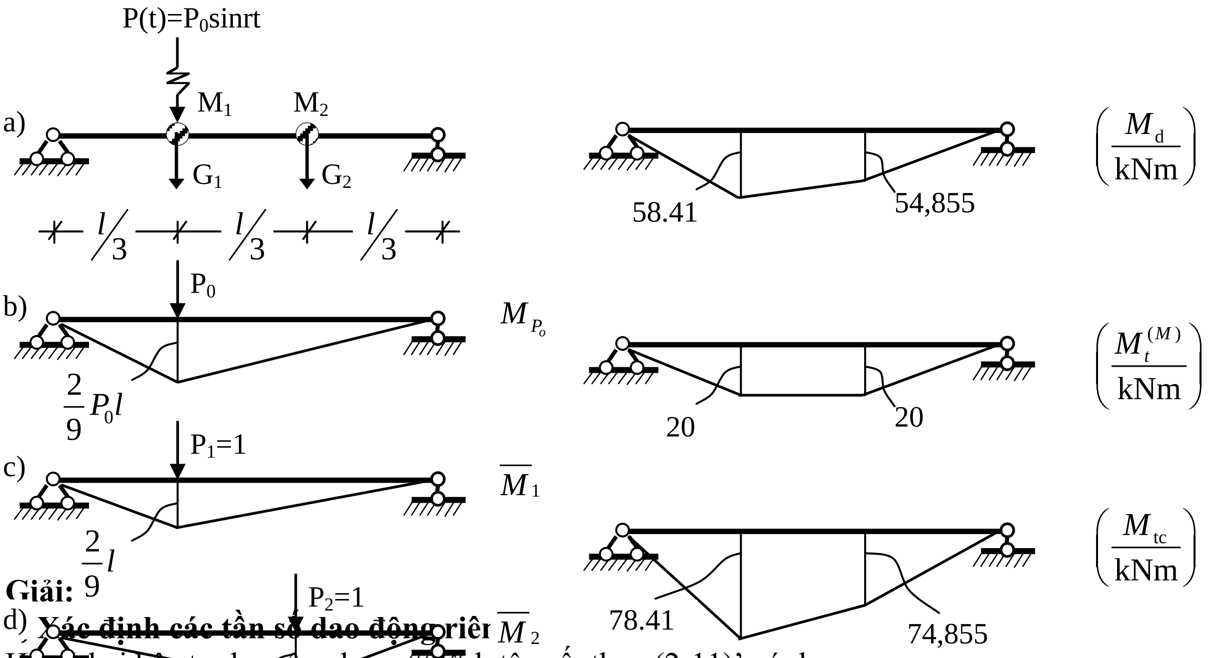
Trong đó ta đã ký hiệu, $\delta_{ii}^{*} = \left(\delta_{ii} - \dfrac{1}{M_i r^2} \right)$ (2-33)

(i = 1,2,..., n)

Giải hệ phương trình (2-32) ta được biên độ của các lực quán tính. Nếu kết quả tính ra dương, thì chiều giả thiết ban đầu của lực là đúng; Nếu kết quả tính ra âm, thì chiều giả thiết là sai và phải đổi ngược lại. Đặt các lực quán tính và các lực kích thích theo đúng chiều, và có trị số bằng biên độ của chúng; ta sẽ xác định được đại lượng cần tìm bằng lý thuyết tĩnh học đã được trình bày trong giáo trình cơ học kết cấu.

VÍ DỤ 2.3

Cho dầm dài l = 6m, trên đó đặt hai mô tơ, trọng lượng mỗi mô tơ là G = 10 kN. Khi mô tơ thứ nhất quay với vận tốc n = 450 v/phút tạo ra lực ly tâm P_0 = 5 kN. Xem hình 2.5a.
Yêu cầu : Xác định các tần số dao động riêng, và vẽ biểu đồ biên độ mô men động, và biểu đồ mô men tổng cộng của dầm. Biết dầm có: J = 8880 cm^4; E = 2,1. 10^4 kN/cm^2; Lấy g = 981cm/s^2 và bỏ qua khối lượng và trọng lượng của dầm trong tính toán.



Giải:

1, Xác định các tần số dao động riêng

Hệ có hai bậc tự do, nên phương trình tần số, theo (2-11)' có dạng

$$D = \begin{bmatrix} (M_1\delta_{11} - u) & M_2\delta_{12} \\ M_1\delta_{21} & (M_2\delta_{22} - u) \end{bmatrix} = 0 \quad (a)$$

Hình 2.5

Từ các biểu đồ mô men đơn vị trên hình 2.5c và d; ta tính được theo Maxwell-Mohr:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243EJ}; \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EJ} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a) và giải, ta được:

$$u_1 = \frac{Ml^3}{486EJ}; \qquad u_2 = \frac{5Ml^3}{162EJ}$$

Nên $\omega_1^2 = \dfrac{1}{u_2} = \dfrac{162EJ}{5Ml^3}; \qquad \omega_2^2 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{486EJ}{Ml^3}$ (c)

Thay $M = \dfrac{G}{g} = \dfrac{10kNs^2}{9,81m} = 1,02\dfrac{kNs^2}{m}; \quad l = 6m$ và EJ vào (c), ta được

$\omega_1 = 52,5s^{-1}$ và $\omega_2 = 203s^{-1}$

2, Xác định biên độ các lực quán tính

Hệ phương trình để xác định biên độ hai lực quán tính Z_1 và Z_2, theo (2-32), trong trường hợp này là,

$$\begin{cases} \delta_{11}^{*}Z_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1P_0} = 0 \\ \delta_{21}Z_1 + \delta_{22}^{*}Z_2 + \Delta_{2P_0} = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Tần số lực kích thích r = 2πn/60 = 50 s^{-1}; đồng thời thay l, E, J vào (b) ta tính được:

$\delta_{11} = \delta_{22} = 1{,}908.10^{-4}\ \dfrac{m}{kN}$; $\delta_{12} = \delta_{21} = 1{,}67.\ 10^{-4}\dfrac{m}{kN}$; (b)'

Thay M, r, δ_{11} vào (2-25) được: $\delta^*_{11} = \delta^*_{22} = -\ 2{,}013.10^{-4}\dfrac{m}{kN}$ (f)

(Đơn vị của δ_{ik} trong (b)' và (f) được giải thích ở ví dụ 4- 1)

Còn Δ_{1P_0} , và Δ_{2P_0} có thể tính được từ các biểu đồ mô men đơn vị trên các hình 2.5c và d, và biểu đồ M_{P_0} trên hình 2.5b; Tuy nhiên ở đây có thể tính đơn giản hơn, bởi vì:

$$\Delta_{1P_0} = P_0.\delta_{11} = 5kN.1{,}908.10^{-4}\frac{m}{kN} = 9{,}54.10^{-4}m$$

$$\Delta_{2P_0} = P_0.\delta_{21} = 5kN.1{,}67.10^{-4}\frac{m}{kN} = 8{,}35.10^{-4}m \qquad \text{(g)}$$

Thay (f), (g) vào (d) và giải hệ phương trình này ta được:

$Z_1 = 25{,}98$ kN; $Z_2 = 25{,}65$ kN (h)

3, Vẽ các biểu đồ nội lực yêu cầu

Có hai cách vẽ biểu đồ biên độ mô men động

a, Cách vẽ trực tiếp:

Theo cách này, ta đặt vào hệ các lực có trị số bằng biên độ các ngoại lực động và biên độ các lực quán tính, rồi tính toán như với bài toán tĩnh dưới tác dụng của các lực này.

b, Cách vẽ theo nguyên lý cộng tác dụng:

Theo cách này, biểu đồ biên độ mô men động được vẽ theo công thức (2-30)

$M_đ = \overline{M}_1.Z_1 + \overline{M}_2.Z_2 + M_{P_0}$ (i)

Kết quả cho trên hình 2.5e;

So sánh hai biểu đồ: $M_đ$ và $\left(M_t^{(P_0)} \equiv M_{P_0}\right)$ ta thấy rằng, trong trường hợp tổng quát, hệ số $K_đ$ tại các tiết diện khác nhau là khác nhau. Như vậy, khác với hệ một bậc tự do, đối với hệ nhiều bậc tự do, ta không có một hệ số $K_đ$ chung cho tất cả các tiết diện ; cũng như không có một hệ số $K_đ$ chung cho tất cả các đại lượng nghiên cứu. Tuy nhiên như sau này sẽ thấy, để đơn giản trong tính toán, đồng thời thiên về an toàn, đối với một đại lượng nghiên cứu ta cũng có thể dùng một hệ số $K_đ$ chung, đó là $K_đ$ của tiết diện có trị số $K_đ$ lớn nhất. Ví dụ ở trường hợp đang xét, hệ số động có trị số lớn nhất đối với mô men là tại tiết diện đặt khối lượng M_2:

Max $K_đ = \dfrac{58{,}855}{3{,}335} = 16{,}4.$

Thậm chí, nhiều khi người ta còn dùng một hệ số $K_đ$ chung cho tất cả các đại lượng. Lúc này hệ số động được tính theo công thức (1-36) đối với hệ một bậc tự do, mà ở đó ta lấy tần số riêng bé nhất ω_1 để tính toán.

c, Biểu đồ mô men tổng cộng:

Trước khi động cơ đặt tại khối lượng thứ nhất hoạt động, trong dầm đã có nội lực do trọng lượng của hai động cơ gây ra. Biểu đồ mô men này vẽ được như trên hình 2.6f. (ký hiệu là $M_t^{(M)}$). Rõ ràng, khi động cơ làm việc, mô men lớn nhất xuất hiện trong dầm sẽ là tổng của hai biểu đồ này, và ta gọi nó là *biểu đồ mô men tổng cộng.*

$M_{tc} = M_đ + M_t^{(M)}$ (k)

Kết quả như trên hình 2.5g.

Chú ý:

Ta cũng có thể giải bài toán bằng cách phân tích tải trọng điều hòa đã cho ra *n* hệ tải trọng tương ứng với các dạng dao động riêng (với bài toán đang xét n=2) rồi giải bài toán như hệ một bậc tự do. Cách làm này sẽ được trình bày ở mục tiếp theo đây.

2.6 DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO, KHÔNG LỰC CẢN, CHỊU LỰC KÍCH THÍCH BẤT KỲ P(t)

Trong trường hợp này, ta có thể giải bài toán bằng nhiều cách.

Cách 1: Ta phân tích tải trọng bất kỳ thành các hàm điều hòa dưới dạng chuỗi lượng giác, rồi giải bài toán như đã được trình bày ở mục 2.5. Khi tải trọng động P(t) có chu kỳ T, thì có thể phân tích thành chuỗi lượng giác như sau:

$$P(t) = a_0 + a_1 \sin rt + a_2 \sin 2rt + ... + a_k \sin krt + ... + b_1 \cos rt + b_2 \cos 2rt + ... + b_k \cos krt + ... \quad (2\text{-}34)$$

Trong đó, $r = \frac{\pi}{T}$ (được gọi là tần số cơ bản của lực kích thích)

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$a_k = \frac{k}{T}\int_0^T P(t)\sin krt\, dt \quad (2\text{-}34)'$$

$$b_k = \frac{k}{T}\int_0^T P(t)\cos krt\, dt$$

Cách 2: Sử dụng hệ tọa độ chính để đưa hệ *n* BTD về *n* bài toán hệ một BTD. Xét trường hợp không lực cản, PTVP dao động tổng quát có dạng:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\} + [K]\{y(t)\} = \{P(t)\} \quad (2\text{-}35)$$

Nhân bên trái (2-35) với $[B]^T$, và chú ý tới (2-19) ta được:

$$[B]^T[M][B]\{\ddot{q}(t)\} + [B]^T[K][B]\{q(t)\} = [B]^T\{P(t)\}$$

Hay $$\{\ddot{q}(t)\} + \{\Omega\}\{q(t)\} = [B]^T\{P(t)\} \quad (2\text{-}35)'$$

Phương trình (2-35)' là một hệ gồm *n* phương trình độc lập có dạng như dạng PTVP dao động của hệ một BTD (1-39)';

[Điều này cũng đã được nói tới khi nghiên cứu dao động tự do ở điểm (c) của mục 2.3.2]

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = B_{1i}P_1(t) + B_{2i}P_2(t) + ... + B_{ni}P_n(t) \quad (2\text{-}36)$$

(i = 1, 2,...., n)

Trong đó, B_{ij} (i, j = 1,2,...., n) là các phần tử của ma trận chuẩn hóa $[B]$.

Nghiệm của phương trình (2-36) được biểu diễn qua tích phân Duhamel (1- 41) như đã biết ở mục (1- 5). Thay các nghiệm $q_i(t)$ vào (2-19) ta được lời giải của bài toán.

Cách 3: Dựa vào (2-24)' ta phân tích véc tơ tải trọng {P(t)} theo các dạng chính, sau đó giải n bài toán như hệ một BTD đã được trình bày ở chương một. Cụ thể là: (Bỏ qua các biến đổi chi tiết):

Phương trình chuyển động của khối lượng thứ k dưới tác dụng của hệ lực động {P(t)} là:

$$y_k(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}S_i(t) \tag{2-37}$$

Trong đó $S_i(t)$ là nghiệm của PTVP sau:

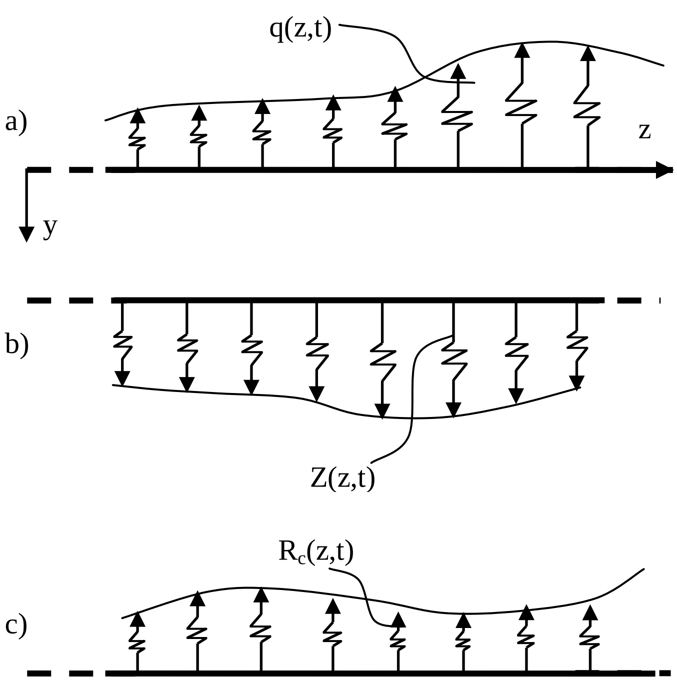
$$\ddot{S}_i(t)+\omega_i^2 S_i(t)=H_i(t) \tag{2-38}$$

Ở đây $H_i(t)$ được tính theo công thức (2- 25), còn a_{ki} là thành phần thứ *k* của véc tơ biên độ dao động của dạng chính thứ *i*. (xem 2-12)'; phương trình vi phân (2-38) có dạng như của hệ một BTD, nghiệm tổng quát của nó được biểu diễn qua tích phân Duhamel (1-41) như đã được trình bày trong mục 1-5.

Chương 3
DAO ĐỘNG NGANG CỦA THANH THẲNG CÓ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

3.1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TỔNG QUÁT DAO ĐỘNG NGANG CỦA THANH THẲNG

Một hệ kết cấu thực tế luôn luôn có vô hạn bậc tự do. Xét đoạn thanh thẳng được đặt trong hệ tọa độ (yz). Xét trường hợp tổng quát thanh có tiết diện thay đổi với khối lượng phân bố cường độ m(z), chịu tác dụng của hệ lực ngang phân bố cường độ q(z,t) như trên hình 3.1a..



Hình 3.1

Dao động ngang của hệ tại thời điểm nào đó, chính là vị trí đường đàn hồi của nó tại thời điểm xét. Phương trình đường đàn hồi khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động, phụ thuộc hai biến là *z* và *t*, nghĩa là:

$$y = y(z,t) \qquad \text{(a)}$$

Mối quan hệ giữa đường đàn hồi của trục thanh có tiết diện thay đổi với tải trọng ngang phân bố trên thanh, trường hợp tải trọng tĩnh, đã được nghiên cứu trong giáo trình Sức bền vật liệu:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y(z)\right] = -q(z) \qquad \text{(b)}$$

Với qui ước trục *y* hướng xuống là dương, còn tải trọng hướng lên là dương.

Trường hợp tải trọng động thì:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}y(z,t)\right] = -p(z,t) \qquad \text{(3-1)}$$

Ở đây, p(z,t) là tổng tải trọng ngang tác dụng trên dầm (chiều hướng lên là dương). Khi dao động, giả sử tại thời điểm *t* hệ đang chuyển động hướng xuống cùng chiều với trục y, ngoài lực kích thích q(z,t), thanh còn chịu tác dụng của hệ lực quán tính phân bố :

$$Z(z,t) = -m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) \qquad \text{(c)}$$

Và lực cản phân bố: R(z,t) (ngược chiều chuyển động) (d)

Do đó ta có: $P(z,t) = q(z,t) - Z(z,t) + R(z,t)$

hay là $$P(z,t) = q(z,t) + m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) + R(z,t) \tag{3-2}$$

Thay (3-2) vào (3-1) rồi chuyển vế, ta được PTVP dao động ngang tổng quát của thanh thẳng có tiết diện thay đổi là:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}y(z,t)\right] + m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) + R(z,t) = -q(z,t) \tag{3-3}$$

Trường hợp riêng, khi tiết diện thanh là hằng số, thì phương trình (3-3) có dạng đơn giản hơn:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ\frac{\partial^2}{\partial z^2}y(z,t)\right] + m\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) + R(z,t) = -q(z,t) \qquad \text{(3-3)'}$$

Trường hợp dao động tự do thì vế phải của (3-3) hay (3-3)' bằng không. Sau đây ta giải PTVP (3-3) trong một số trường hợp riêng.

3.2 DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CÓ LỰC CẢN CỦA THANH THẲNG TIẾT DIỆN HẰNG SỐ - TÍNH CHẤT TRỰC GIAO CỦA CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

3.2.1 Phương trình vi phân dao động tự do không có lực cản

Phương trình vi phân dao động trong trường hợp này, theo (3-3)' là:

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4}y(z,t) + \frac{m}{EJ}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) = 0 \tag{3-4}$$

Đây là PTVP đạo hàm riêng cấp bốn thuần nhất, nghiệm của nó có thể được biểu diễn dưới dạng tách biến như sau:

$$y(z,t) = y(z)\times s(t) \tag{3-5}$$

Thay (3-5) vào (3-4) ta có:

$$\frac{EJ}{m}\frac{d^4y(z)}{dz^4}S(t) + \frac{d^2S(t)}{dt^2}y(z) = 0$$

Hay chuyển vế được:

$$\frac{EJ}{m}\frac{1}{y(z)}\frac{d^4y(z)}{dz^4} = -\frac{1}{S(t)}\frac{d^2S(t)}{dt^2} \tag{f}$$

Hai vế của (f) phụ thuộc hai biến khác nhau nên chúng chỉ bằng nhau khi cả hai vế cùng có giá trị bằng một hằng số nào đó, giả sử ký hiệu là ω^2. Như vậy, từ (f) ta có thể biểu diễn PTVP đạo hàm riêng cấp bốn (3-4) bằng hai PTVP thường (chỉ phụ thuộc một biến).

$$\frac{d^2S(t)}{dt^2} + \omega^2S(t) = 0 \tag{3-6}$$

và $$\frac{d^4y(z)}{dz^4}-\frac{m}{EJ}\omega^2y(z)=0 \qquad (3\text{-}7)$$

Nhờ đó, thay cho giải một PTVP đạo hàm riêng (3-4) phức tạp, ta giải hai PTVP thường (3-6) và (3-7) đơn giản hơn nhiều.

3.2.2 Giải PTVP (3-6)-Xác định quy luật dao động tự do

Phương trình vi phân (3-6) chính là PTVP dao động tự do, không lực cản, của hệ một bậc tự do (1-14) đã được trình bày trong chương 1, nên nghiệm tổng quát của nó theo (1-18) sẽ là:

$$s(t)=\text{A}\sin(\omega \text{t}+\lambda)$$

Hay $$s(t)=\sin(\omega \text{t}+\lambda) \qquad (3\text{-}8)$$

Ở đây ta đã cho A = 1; Sở dĩ làm được như vậy, bởi vì từ (3-5) ta thấy biên độ dao động chính là hàm y(z). Bởi vậy sau này ta gộp A nằm trong y(z) luôn [xem(3-5)']. Theo (3-8), *dao động tự do của hệ có vô hạn BTD cũng là dao động điều hòa.*

3.2.3 Giải PTVP (3-7) - Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng

Nghiệm của (3-7) là hàm y(z) sẽ cho ta biên độ dao động, cũng chính là dạng dao động riêng của hệ. Do thanh có tiết diện không đổi, nên (3-7) là PTVP thường cấp bốn có hệ số là hằng số; Nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(z)=a_1e^{\beta_1 z}+a_2e^{\beta_2 z}+a_3e^{\beta_3 z}+a_4e^{\beta_4 z} \qquad (g)$$

Trong đó: a_1, a_2, a_3, a_4 là các hằng tích phân, còn β_1, β_2, β_3, β_4 là nghiệm của phương trình đặc trưng của PTVP (3-7) như sau:

$$\beta^4 - k^4 = 0,\ \text{với ký hiệu } k^4 = \frac{m}{EJ}\omega^2 \qquad (3\text{-}9)$$

Nên ta có: $\beta_{1,2} = \pm\, k$; và $\beta_{3,4} = \pm\, ik$ (h)

Thay (h) vào (g) ta có nghiệm của PTVP (3-7) là:

$$y(z)=a_1e^{kz}+a_2e^{-kz}+a_3e^{ikz}+a_4e^{-ikz} \qquad (i)$$

Sử dụng quan hệ

$$Chx=\frac{1}{2}\left[e^x+e^{-x}\right] \text{ và } Shx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right] \qquad (k)$$

Thì (i) trở thành:

$$y(z)=Achkz+Bshkz+C\cos kz+D\sin kz \qquad (3\text{-}10)$$

Trong đó, A, B, C, D, là các hằng tích phân, được xác định từ các điều kiện biên như sau:

a, *Tại gối tựa khớp có*: Độ võng y(z) = 0; và

mô men M(z) = 0 $\Rightarrow \dfrac{d^2y(z)}{dz^2}=0$

***b,** Tại ngàm cứng có:* y(z) = 0 và góc xoay $\theta(z) = \dfrac{d\ y(z)}{dz} = 0$ (3-11)

***c,** Tai đầu tự do có:* Mô men $M(z) = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2y(z)}{dz^2} = 0$; và

Lực cắt $Q(z) = 0 \Rightarrow \dfrac{d^3y(z)}{dz^3} = 0$

Để thuận tiện cho tính toán sau này, ta đặt:

$$A = \frac{C_1 + C_3}{2};\ B = \frac{C_2 + C_4}{2};\ C = \frac{C_1 - C_3}{2};\ D = \frac{C_2 - C_4}{2} \quad (3\text{-}12)$$

Khi đó nghiệm (3-10) có dạng:

$$y(z) = C_1A_{kz} + C_2B_{kz} + C_3C_{kz} + C_4D_{kz} \quad (3\text{-}13)$$

Trong đó ta đã ký hiệu các hàm như sau:

$$A_{kz} = \frac{ch_{kz} + \cos_{kz}}{2};\ B_{kz} = \frac{sh_{kz} + \sin_{kz}}{2};$$

$$C_{kz} = \frac{ch_{kz} - \cos_{kz}}{2};\ D_{kz} = \frac{sh_{kz} - \sin_{kz}}{2}; \quad (3\text{-}14)$$

còn được gọi là *các hàm ảnh hưởng* có một số tính chất đặc biệt. Hơn nữa, giá trị của bốn hàm này ứng với các giá trị khác nhau của (kz) biến thiên từ [0,0] đến [6,5] (là khoảng biến đổi thực tế) đã được tính sẵn và lập thành bảng tra sẵn.

1, Tính hoán vị vòng quanh của các đạo hàm.

$A'_{kz} = k\,D_{kz}$

$B'_{kz} = k\,A_{kz}$

$C'_{kz} = k\,B_{kz}$

$D'_{kz} = k\,C_{kz}$

$$\begin{tikzcd} & A_{kz} \arrow[dr] & \\ B_{kz} \arrow[ur] & & D_{kz} \arrow[dl] \\ & C_{kz} \arrow[ul] & \end{tikzcd} \quad (m)$$

Có thể minh họa tính chất này trên hình vẽ bên cạnh. Dấu (') là ký hiệu phép đạo hàm theo biến z. Dựa vào tính chất này, các đạo hàm của y(z) có dạng rất đơn giản.

$$\left.\begin{aligned} y'(z) &= \theta(z) = k\left(C_1D_{kz} + C_2A_{kz} + C_3B_{kz} + C_4C_{kz}\right) \\ y''(z) &= -\frac{M(z)}{EJ} = k^2\left(C_1C_{kz} + C_2D_{kz} + C_3A_{kz} + C_4B_{kz}\right) \\ y'''(z) &= -\frac{Q(z)}{EJ} = k^3\left(C_1B_{kz} + C_2C_{kz} + C_3D_{kz} + C_4A_{kz}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}15)$$

2, Tại tọa độ z = 0, giá trị các hàm đã biết:

A(0) = 1, còn B(0) = C(0) = D(0) = 0; (n)

Như vậy, nghiệm tổng quát của PTVP đạo hàm riêng (3-4) như sau:

$$y(z,t) = \left(C_1A_{kz} + C_2B_{kz} + C_3C_{kz} + C_4D_{kz}\right)\sin(\omega t + \lambda) \qquad (3\text{-}5)'$$

Để xác định các hằng tích phân trong (3-13), ta sử dụng các điều kiện biên (3-11) nếu đã biết các liên kết tựa; Còn trong trường hợp tổng quát, ta có các điều kiện tại tọa độ z = 0 được giả thiết như sau:

$$y(0) = y_0;\ y'(0) = y'_0;\ y''(0) = -\frac{M_0}{EJ};\ y'''(0) = -\frac{Q_0}{EJ} \qquad (3\text{-}16)$$

Các giá trị (y_0, y'_0, M_0, Q_0), được gọi là *các thông số ban đầu*. Thay (3-16) vào (3-13) và (3-15), kết hợp với (n), rồi giải hệ bốn phương trình này ta được:

$$C_1 = y_0\ ;\ C_2 = \frac{y'_0}{k}\ ;\ C_3 = -\frac{M_0}{k^2EJ}\ ;\ C_4 = -\frac{Q_0}{k^3EJ} \qquad (3\text{-}17)'$$

Thay các hằng tích phân tính theo (3-17)' vào (3-13) và (3-15), ta được các biểu thức biểu diễn dạng dao động (biên độ dao động) của chuyển vị, góc xoay, mô men, và lực cắt tại tiết diện có tọa độ z bất kỳ trên kết cấu.

$$\left.\begin{aligned}
&y(z) = y_0A_{kz} + \frac{y'_0}{k}B_{kz} - \frac{M_0}{k^2EJ}C_{kz} - \frac{Q_0}{k^3EJ}D_{kz} && (a)\\
&y'(z) = y_0kD_{kz} + y'_0A_{kz} - \frac{M_0}{kEJ}B_{kz} - \frac{Q_0}{k^2EJ}C_{kz} && (b)\\
&M(z) = -EJy_0k^2C_{kz} - EJy'_0kD_{kz} + M_0A_{kz} + \frac{Q_0}{k}B_{kz} && (c)\\
&Q(z) = -EJy_0k^3B_{kz} - EJy'_0k^2C_{kz} + M_0kD_{kz} + Q_0A_{kz} && (d)
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}17)$$

Rõ ràng, (3-17) cho phép ta xác định được các đại lượng cần thiết để tính dao động tự do của thanh. Mặt khác, để tồn tại dao động, y(z) phải khác không, cũng có nghĩa là, bốn thông số ban đầu trong (3-16) không thể đồng thời bằng không. Hay nói cách khác, hệ bốn phương trình điều kiện biên để xác định bốn hằng số C_1,C_2,C_3 C_4, có định thức các hệ số phải bằng không. Điều kiện này dẫn tới một phương trình siêu việt dùng để xác định thông số *k* - cũng tức là phương trình để xác định ω -, mà ta gọi là *phương trình tần số*. Do tính chất chu kỳ của các hàm siêu việt, nên phương trình tần số sẽ có vô số nghiệm (k_1, k_2, ..., k_∞); Thay các k_i vào (3-9) [i = 1, 2, ..., ∞], ta sẽ xác định được vô số các tần số dao động riêng ω_i, (tuân theo ký hiệu: $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_i < ...$). Như vậy*, hệ có vô số bậc tự do sẽ có vô số tần số dao động riêng*. Lại thay các ω_i, (k_i), vào phương trình (3-17) ta lại xác định được vô số dạng dao động riêng tương ứng. Tất nhiên, dao động tự do của hệ là tổng của các dao động riêng này. Nghĩa là (3-13) có dạng chi tiết như sau:

$$y(z) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{1i}A_{k_iz} + C_{2i}B_{k_iz} + C_{3i}C_{k_iz} + C_{4i}D_{k_iz}\right] \qquad (3\text{-}13)'$$

Lúc này,

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(z)s_i(t) \qquad \text{hay}$$

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[C_{1i} A_{k_i z} + C_{2i} B_{k_i z} + C_{3i} C_{k_i z} + C_{4i} D_{k_i z} \right] \sin(\omega t + \lambda) \qquad \text{(3-5)''}$$

Ở đây các [C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}, C_{4i}] được tính theo các biểu thức (3-17)', trong đó phải thay k bằng các k_i. Tương tự, ta có các biểu thức y'(z,t); M(z,t); Q(z,t).

Chú ý :

Trong thực tế, chỉ có tần số riêng bé nhất, hay hơn nữa là tần số riêng thứ hai, thứ ba là có ý nghĩa. Các tần số cao hơn không có ý nghĩa thực tế, vì có thể nó không hình thành do bản thân chúng gây nhiễu loạn cho nhau; hoặc chúng có hình thành nhưng gây ra biên độ rất nhỏ.

3.2.4 Xác định tần số dao động riêng của các dầm một nhịp

Trước hết, ta xét dao động của dầm đơn giản có một đầu ngàm cứng và một đầu tự do, tiết diện hằng số, như trên hình 3.2a (dầm conson)

1, Xác định các thông số ban đầu:

Tại đầu ngàm (z = 0) ta có:

$y_0 = 0$; $y'_0 = 0$;

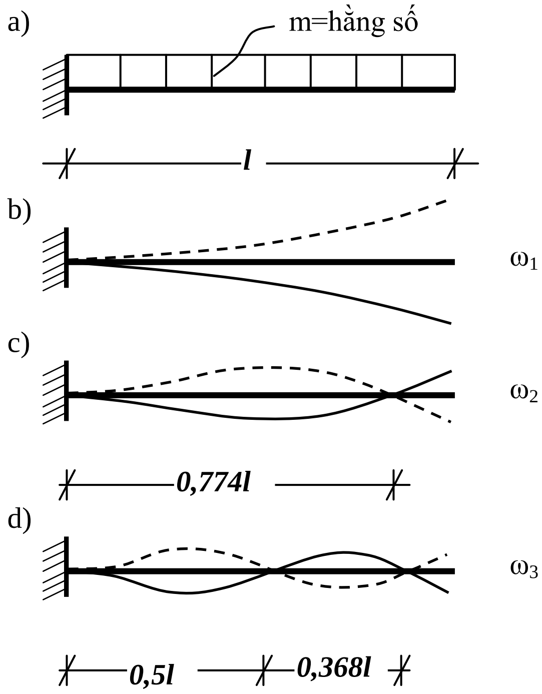
còn $M_0 \neq 0$; $Q_0 \neq 0$; chưa biết (a)

2, Xác định các tần số dao động riêng. Tại đầu tự do (z = l) ta có:

$M_l = 0$; $Q_l = 0$ (b)

Thay (b) vào (3-17c,d), đồng thời sử dụng các thông số ban đầu (a) ta có hệ phương trình sau:

(m là ký hiệu cường độ khối lượng phân bố)



Hình 3.2

$$\begin{cases} M_0 A_{k1} + \left(\dfrac{Q_0}{k}\right) B_{k1} = 0 \\ kM_0 D_{k1} + Q_0 A_{k1} = 0 \end{cases}$$

hay dạng ma trận $\begin{bmatrix} A_{kl} & \dfrac{1}{k} B_{kl} \\ kD_{kl} & A_{kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \{0\}$ (c)

Do phải tồn tại dao động, nên M_0, và Q_0 phải khác không. Do đó từ (c) ta suy ra định thức

$D = \begin{vmatrix} A_{kl} & \dfrac{B_{kl}}{k} \\ kD_{kl} & A_{kl} \end{vmatrix} = 0$; Thay các biểu thức (3-14) vào ta được:

$$D = \left(chk1 + \cos k1\right)^2 - \left(sh^2 k1 - \sin^2 k1\right) = 0;$$

hay $D = chk1.\cos k1 + 1 = 0$ (d)

(d) là phương trình tần số của bài toán đang xét, là phương trình siêu việt nên sẽ có vô số nghiệm. Như đã nói ở chương hai, đối với hệ nhiều BTD, quan trọng nhất là hai, hay ba tần số đầu tiên. Ở đây ta giải gần đúng phương trình (d) xác định được ba nghiệm đầu tiên như sau (không trình bày chi tiết cách giải phương trình này):

$$k_1 l \approx 0{,}6\pi \approx 1{,}88;\ \text{suy ra } \omega_1 = \frac{3{,}515}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$k_2 l \approx 1{,}49\pi \approx 4{,}68;\ \text{suy ra } \omega_2 = \frac{22}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

tương tự ta có
$$\omega_3 = \frac{61{,}7}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

3, Xác định các biểu thức biên độ dao động, biên độ nội lực động

Thay lần lượt các ω_i vào hệ phương trình (c), kết hợp với điều kiện đầu, sẽ xác định được M_0, và Q_0. Lại thay M_0, Q_0 vào (3-17) sẽ xác định được các biểu thức biên độ dao động, biên độ góc xoay động, biên độ mô men động, biên độ lực cắt động. Ba dạng dao động đầu tiên cho trên hình 3.2b, c, d.

Đối với các dầm một nhịp khác, cách làm hoàn toàn tương tự, và ta thấy các tần số dao động riêng có thể được biểu diễn bằng một công thức chung có tính chất tổng quát như sau:

$$\omega_i = \frac{B_i}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{3-18}$$

Trong đó B_i là một hệ số. Trong phần phụ lục có bảng (3-1) cho các giá trị B_i (i= 1, 2, 3, 4) và các dạng dao động tương ứng với bốn tần số cơ bản đầu tiên của một số dầm một nhịp hay gặp.

Bảng 3.1 (xem ở phần phụ lục).

3.2.5 Tính chất trực giao của các dạng dao động riêng

Cũng như hệ có hữu hạn BTD, các dạng dao động riêng của hệ vô hạn BTD cũng có tính chất trực giao.

Thật vậy, từ PTVP dao động tự do (3-4), xét trường hợp tổng quát khi tiết diện thay đổi, có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[-EJ(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}y(z,t)\right] = m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) \tag{3-19}$$

Xét hai dao động riêng thứ *i* và thứ *k*. Phương trình dao động tương ứng, theo (3-5)'' là,

$$y_i(z,t) = y_i(z)\sin(\omega_i t + \lambda_i) \tag{a}$$

$$y_k(z,t) = y_k(z)\sin(\omega_k t + \lambda_k) \tag{b}$$

Thay (a) vào (3-19), rồi chia hai vế cho $\sin(\omega_i t+\lambda i)$ ta được,

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)\right]=m(z)\omega_i^2 y_i(z) \qquad \text{(c)}$$

Nhân hai vế của (c) với dạng dao động thứ *k*,[$y_k(z)$], rồi tích phân trên toàn bộ chiều dài thanh, ta được,

$$\int_0^1 y_k(z)\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)\right]dz=\int_0^1 y_k(z)m(z)\omega_i^2 y_i(z)dz \qquad \text{(c)'}$$

Tính tích phân bên trái bằng phương pháp tích phân phân đoạn ta được,

$$\omega_i^2\int_0^1 m(z)y_k(z)y_i(z)dz=\int_0^1 EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_k(z)\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)dz \qquad \text{(d)}$$

Làm hoàn toàn tương tự với dạng dao động thứ *k*, nghĩa là thay (b) vào (3-19) rồi biến đổi tương tự, ta được quan hệ cũng có dạng như (d):

$$\omega_k^2\int_0^1 m(z)y_k(z)y_i(z)dz=\int_0^1 EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_k(z)\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)dz \qquad \text{(f)}$$

Trừ hai phương trình (d) và (f) cho nhau, và chú ý $\omega_i \neq \omega_k$, ta rút ra:

$$\int_0^1 m(z)y_i(z)y_k(z)dz=0 \qquad \text{(3-20)}$$

Đây là điều phải chứng minh: quan hệ (3-20) là điều kiện trực giao của hai dạng dao động riêng thứ *i* và thứ *k*. Thay (3-20) vào (d) hoặc (f) ta còn rút ra,

$$\int_0^1 EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)\frac{d^2}{dz^2}y_k(z)dz=0 \qquad \text{(3-21)}$$

$$\int_0^1 y_i(z)\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_k(z)\right]dz=0 \qquad \text{(3-21)'}$$

Còn trường hợp đặc biệt khi, $i = k$, ta có:

$$\omega_k^2\int_0^1 m(z)[y_k(z)]^2dz=\int_0^1 y_k(z)\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2}{dz^2}y_k(z)\right]dz \qquad \text{(3-21)''}$$

Dựa vào tính chất trực giao này, ta có thể phân tích tải trọng q(z,t), chuyển vị y(z,t) theo các dạng dao động riêng. Nhờ đó, có thể chuyển bài toán dao động cưỡng bức của hệ vô hạn BTD về giải các bài toán dao động cưỡng bức hệ một BTD như sẽ nghiên cứu ở các phần sau.

3.2.6 Phân tích tải trọng theo các dạng dao động riêng

Cũng như (2-15), ta phân tích tải trọng q(z,t) thành các thành phần tương ứng với các dạng dao động riêng như sau:

$$q(z,t)=\sum_{i=1}^{\infty} q_i(z,t) \qquad \text{(3-22)}$$

Trong đó, $q_i(z,t)$ là thành phần tải trọng tương ứng với dạng dao động thứ *i*, nên nó liên quan tới $y_i(z)$. Do đó ta có thể biểu diễn $q_i(z,t)$ dưới dạng sau,

$$q_i(z,t) = m(z).y_i(z).H_i(t) \qquad (3\text{-}23)$$

Ở đây $H_i(t)$ là hàm chưa biết cần phải tìm. Cách làm hoàn toàn như ở mục 2.3.3; Thay (3-23) vào (3-22), rồi nhân hai vế với $y_i(z)$. Tiếp theo ta tích phân hai vế trên toàn bộ chiều dài thanh được:

$$\int_0^1 q(z,t)y_i(z)dz = \int_0^1 y_i(z)\left[\sum_{i=1}^{\infty} m(z)y_i(z)H_i(t)\right]dz$$ khai triển vế bên phải ta có,

$$\Big[\int m(z)y_i(z)y_1(z)dz + \int m(z)y_i(z)y_2(z)dz + ... + \int m(z)y_i(z)y_i(z)dz + \\ + ... + \int m(z)y_i(z)y_n(z)dz + ...\infty\Big]H_i(t) \qquad (3\text{-}22)'$$

Do tính chất trực giao (3-20), tất cả các số hạng trong (3-22)' đều bằng không, trừ số hạng thứ *i;* nên từ (3-22)' ta được

$$H_i(t) = \frac{\int_0^l q(z,t)y_i(z)dz}{\int_0^l m(z)\left[y_i(z)\right]^2 dz} \qquad (3\text{-}24)$$

Thay (3-24) vào (3-23), và cho *i* biến thiên từ *i* = 1, 2, ..., ∞ ta được các thành phần tải trọng tương ứng với các dạng dao động riêng.

$$q_i(z,t) = m(z)y_i(z).\frac{\int_0^l q(z,t)y_i(z)dz}{\int_0^l m(z)\left[y_i(z)\right]^2 dz} \qquad (3\text{-}23)'$$

3.2.7 Dạng chuẩn của các dao động riêng

Nhìn vào (3-23)' ta thấy hàm tải trọng $q_i(z,t)$ không thay đổi nếu ta nhân vào hàm $y_i(z)$ một số bất kỳ. Như vậy, nếu ta chọn một số thích hợp nhân với $y_i(z)$ được hàm mới ký hiệu là $y_i^*(z)$, để sao cho mẫu số của (3-23)' bằng một, nghĩa là:

$$\int_0^l m(z)\left[y_i^*(z)\right]^2 dz = 1 \qquad (3\text{-}20)'$$

thì dạng dao động được biểu diễn bằng hàm $y_i^*(z)$ này được gọi là *dạng chuẩn của dao động riêng*. Tương ứng với dạng chuẩn, hàm tải trọng có dạng đơn giản:

$$q_i(z,t) = m(z)y_i^*(z)\int_0^l y_i^*(z)q(z,t)dz \qquad (3\text{-}23)''$$

Và hàm $$H_i(t) = \int_0^l y_i^*(z)q(z,t)dz \qquad (3\text{-}24)'$$

Chú ý:

a, Trường hợp trên thanh có các lực tập trung $P_j(t)$ tác dụng. Lúc này ta có thể làm gần đúng bằng cách thay lực tập trung bằng hệ lực phân bố tương đương. Nhờ vậy, (bỏ qua biến đổi chi tiết) ta được hàm $H_i(t)$ như sau:

$$H_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j(t) y_i(z_j)}{\int_0^l m(z)[y_i(z)]^2 dz} \tag{3-25}$$

Còn ứng với dạng chuẩn,

$$H_i(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) y_i^*(z_j) \tag{3-25'}$$

Ở đây, n là số lực tập trung, còn z_j là tọa độ của điểm đặt lực tập trung $P_j(t)$;

b, Khi trên hệ có cả lực phân bố q(z,t), và các lực tập trung $P_j(t)$ tác dụng, thì hàm $H_i(t)$ được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng.

3.3 DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC KHÔNG CÓ LỰC CẢN CỦA THANH THẲNG TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

3.3.1 Trường hợp lực kích thích phân bố bất kỳ q(z,t)

Xét trường hợp tải trọng một thông số, nghĩa là có thể biểu diễn tải trọng theo (1-38) như sau,

$$q(z,t) = q(z) f(t) \tag{3-26}$$

Trong đó,

q(z) chỉ phụ thuộc tọa độ không gian z, biểu diễn quy luật biến đổi của tải trọng theo chiều dài thanh, được gọi là *hàm tải trọng cơ sở*.

f(t) chỉ phụ thuộc thời gian *t*, như trong (1-38), được gọi là *hàm chất tải*. Lúc này, PTVP dao động (3-3), khi bỏ qua lực cản, sẽ là:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}y(z,t)\right] + m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(z,t) = -q(z)f(t) \tag{3-27}$$

Lại biểu diễn nghiệm của PTVP (3-27) dưới dạng tách biến $y(z,t) = y(z)S(t)$ và cũng như khi nghiên cứu dao động tự do, nếu ta phân tích biên độ dao động theo các dạng dao động riêng, thì:

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(z) S_i(t) \tag{3-28}$$

Ở đây, hàm chỉ phụ thuộc thời gian $S_i(t)$ mà ta cần tìm, còn được gọi là *tọa độ khái quát*. Để xác định $S_i(t)$, ta thay (3-28) vào (3-27); sau đó nhân hai vế với $y_k(z)$, rồi tích phân trên toàn bộ chiều dài thanh:

$$\int_0^l y_k(z)\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^2}{dz^2}y_i(z)S_i(t)\right]dz+\int_0^l y_k(z)m(z)\sum_{i=1}^{\infty}\left[y_i(z)\frac{d^2}{dt^2}S_i(t)\right]dz=$$

$$=\int_0^l y_k(z)q(z)f(t)dz \qquad \text{(a)}$$

Chú ý tới tính chất trực giao (3-20) và (3-21), cùng với các quan hệ (3-21)’, và (3-21)’’, phương trình (a) trở thành (độc giả tự biến đổi):

$$\frac{d^2}{dt^2}S_i(t)+\omega_i^2 S_i(t)=\left[\frac{\int_0^l q(z)y_i(z)dz}{\int_0^l m(z)[y_i(z)]^2 dz}\right]f(t) \text{ hay } = K_i\, f(t) \qquad (3\text{-}29)$$

Trong đó ký hiệu hệ số

$$K_i=\frac{\int_0^l q(z)y_i(z)dz}{\int_0^l m(z)[y_i(z)]^2 dz} \qquad (3\text{-}30)$$

Khi dạng dao động là chuẩn thì:

$$K_i=\int_0^l q(z)y_i^*(z)dz \qquad (3\text{-}30)’$$

Phương trình vi phân (3-29) có dạng như PTVP dao động (1-39)’của hệ một BTD, không có lực cản, chịu lực kích thích bất kỳ đã nghiên cứu ở chương 1. Xét trường hợp, trước khi chịu lực kích thích, hệ ở trạng thái tĩnh ($y_0 = v_0 = 0$), thì nghiệm của (3-29) được biểu diễn qua tích phân Duhamel tương tự (1-41) như sau,

$$S_i(t)=\frac{K_i}{\omega_i}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (3\text{-}31)$$

$(i = 1, 2, \dots \infty)$

Kết luận:

Để giải bài toán dao động cưỡng bức, trước hết phải giải bài toán dao động tự do để xác định các tần số riêng ω_i và các dạng dao động riêng $y_i(z)$. Sau đó thay vào (3-30) để xác định các K_i, rồi lại thay vào (3-31) để xác định các $S_i(t)$. Cuối cùng, thay các $S_i(t)$ tính theo (3-31) vào (3-28), ta sẽ nhận được lời giải của bài toán.

$$y(z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}y_i(z)\frac{K_i}{\omega_i}\int_0^t f(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (3\text{-}28)’$$

Có y(z,t) ta có thể xác định được các đại lượng nghiên cứu khác như: góc xoay, mô men uốn, lực cắt, bằng cách đạo hàm y(z,t) theo biến z.

3.3.2 Trường hợp lực kích thích phân bố đều quy luật điều hoà q(z,t) = $q_0$sinrt

Nếu ở thời điểm ban đầu hệ đứng yên, nghĩa là, $y_0 = v_0 = 0$; thì đây là trường hợp riêng của lời giải (3-28)’, trong đó ta chỉ việc thay hàm f(τ) bằng hàm sinrτ; Còn $K_i = \dfrac{q_0\int_0^l y_i(z)dz}{\int_0^l m(z)[y_i(z)]^2dz}$. Tuy nhiên, đây là trường hợp thường gặp trong thực tế, nên sẽ được trình bày chi tiết hơn ở đây.

Như đã nói ở chương một và hai, do tồn tại của lực cản, nên khi dao động đã ổn định, dao động của hệ hoàn toàn phụ thuộc vào lực kích thích. Trường hợp lực kích thích điều hòa, thì dao động cuả hệ khi đã ổn định cũng thay đổi điều hòa với chu kỳ bằng chu kỳ của lực kích thích. Nghĩa là,

$$y(z,t) = y(z)\sin rt \qquad (3\text{-}32)$$

Hàm biên độ dao động y(z) do tải trọng động gây ra, hoàn toàn xác định được từ phương trình (3-13)’. Song ở đây ta sẽ giải trực tiếp từ PTVP dao động của hệ lại tỏ ra đơn giản hơn.

Thật vậy, thay (3-32) và đạo hàm bậc hai của nó vào PTVP (3-3), rồi chia hai vế cho EJsinrt, bỏ qua lực cản, ta được PTVP sau,

$$\frac{d^4}{dz^4}y(z) - k^4y(z) = -\frac{q_0}{EJ} \qquad (3\text{-}33)$$

Trong đó ký hiệu $\qquad k^4 = \dfrac{mr^2}{EJ} \qquad (3\text{-}34)$

Nghiệm riêng của (3-33) là ($\dfrac{q_0}{k^4EJ}$); Nên nghiệm tổng quát của (3-33) là:

$$y(z) = C_1A_{kz} + C_2B_{kz} + C_3C_{kz} + C_4D_{kz} + \frac{q_0}{k^4EJ} \qquad (b)$$

Còn các đạo hàm của y(z) vẫn hoàn toàn như (3-15) [do số hạng cuối trong (b) là hằng số]. Lại sử dụng các điều kiện biên (3-16), ta xác định được:

$$C_1 = y_0 - \frac{q_0}{k^4EJ}\ ;\ C_2 = \frac{y_0'}{k}\ ;\ C_3 = -\frac{M_0}{k^2EJ}\ ;\ C_4 = -\frac{q_0}{k^3EJ} \qquad (c)$$

Thay (c) vào (b) và (3-15) ta được biểu thức biên độ dao động, và biểu thức biên độ nội lực động khi thanh chịu lực kích thích phân bố đều theo luật điều hòa *$q_0$sinrt* là:

$$y(z) = y_0 A_{kz} + \frac{y_0'}{k} B_{kz} - \frac{M_0}{k^2 EJ} C_{kz} - \frac{Q_0}{k^3 EJ} D_{kz} - \frac{q_0}{k^4 EJ}(A_{kz} - 1) \qquad (d1)$$

$$y'(z) = k y_0 D_{kz} + y_0' A_{kz} - \frac{M_0}{kEJ} B_{kz} - \frac{Q_0}{k^2 EJ} C_{kz} - \frac{q_0}{k^3 EJ} D_{kz} \qquad (d2)$$

$$M(z) = -EJy''(z) = -k^2 EJ y_0 C_{kz} - kEJ y_0' D_{kz} + M_0 A_{kz} + \frac{Q_0}{k} B_{kz} + \frac{q_0}{k^2} C_{kz} \qquad (d3)$$

$$Q(z) = -EJy'''(z) = -k^3 EJ y_0 B_{kz} - k^2 EJ y_0' C_{kz} + k M_0 D_{kz} + Q_0 A_{kz} + \frac{q_0}{k} B_{kz} \qquad (d4)$$

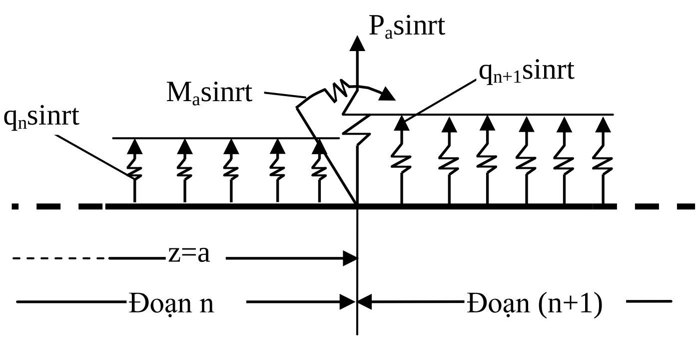
(3-35)

Trong đó hệ số k được tính theo (3-34).

Đồ thị của các hàm trong (3-35) cho ta các biểu đồ biên độ chuyển vị và nội lực động của thanh. Giá trị của các hàm (A_{kz},B_{kz},C_{kz},D_{kz}) ứng với các trị khác nhau của kz đã được cho trong các bảng tra sẵn ở phần phụ lục, sẽ giúp ta vẽ các biểu đồ này.

Chú ý:

Trường hợp tải trọng phân bố trên nhiều đoạn khác nhau, các phương trình (3-35) chỉ áp dụng cho đoạn đầu tiên. Các phương trình của các đoạn tiếp theo có thể viết được dựa vào phương pháp truy hồi kiểu "thông số ban đầu" quen thuộc trong sức bền vật liệu. Xét hai đoạn thanh thứ *n* và *(n+1)* được phân chia tại tọa độ z = a. Trên mỗi đoạn có lực động phân bố đều $q_n sinrt$, và $q_{(n+1)}$ *sinrt* tác dụng. Tại ranh giới giữa hai đoạn có lực tập trung $P_a sinrt$, và mô men tập trung $M_a sinrt$ tác dụng (xem hình 3.3), với quy ước: lực hướng lên là dương, mô men dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ. Khi đó công thức truy hồi có dạng như (3-36) (bỏ qua chứng minh)



Hình 3.3

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y_a A_{k(z-a)} + \frac{\Delta y_a'}{k} B_{k(z-a)} - \frac{M_a}{k^2 EJ} C_{k(z-a)} - \frac{P_a}{k^3 EJ} D_{k(z-a)} - \frac{\Delta q_a}{k^4 EJ}\left[A_{k(z-a)} - 1\right] \quad (f1)$$

$$y_{n+1}'(z) = y_n'(z) + k\Delta y_a D_{k(z-a)} + \Delta y_a' A_{k(z-a)} - \frac{M_a}{kEJ} B_{k(z-a)} - \frac{P_a}{k^2 EJ} C_{k(z-a)} - \frac{\Delta q_a}{k^3 EJ} D_{k(z-a)} \qquad (f2)$$

$$M_{n+1}(z) = M_n(z) - k^2 EJ \Delta y_a C_{k(z-a)} - kEJ \Delta y_a' D_{k(z-a)} + M_a A_{k(z-a)} + \frac{P_a}{k} B_{k(z-a)} + \frac{\Delta q_a}{k^2} C_{k(z-a)} \qquad (f3)$$

$$Q_{n+1}(z) = Q_n(z) - k^3 EJ \Delta y_a B_{k(z-a)} - k^2 EJ \Delta y_a' C_{k(z-a)} + k M_a D_{k(z-a)} + P_a A_{k(z-a)} + \frac{\Delta q_a}{k} B_{k(z-a)} \qquad (f4)$$

(3-36)

Trong đó, Δy_a, $\Delta y'_a$, Δq_a, là bước nhảy của biên độ độ võng, góc xoay, và cường độ lực phân bố tại tọa độ *z = a (*như trong sức bền vật liệu*)*; Các ví dụ minh họa cách áp dụng phương pháp này sẽ được trình bày ở cuối chương.

Qua nội dung đã được trình bày ở đây và ở chương hai ta thấy rằng, trường hợp lực kích thích bất kỳ, ta nên phân tích tải trọng theo các dạng dao động riêng để tính sẽ đơn giản hơn;

Còn trường hợp lực kích thích điều hòa, ta không nhất thiết phải phân tích tải trọng, mà có thể nhận được kết quả nhờ các biểu thức (3-35) và (3-36) (với hệ vô hạn BTD), hay (2-22) kết hợp với (2-24) (với hệ hữu hạn BTD).

3.3.3 Trường hợp lực tập trung P(t)

Giả sử trên thanh có lực động tập trung đặt tại tọa độ, z = *a*, được biểu diễn ở dạng:

$$P(t) = Pf(t) \qquad \text{(a)}$$

như trên hình 3.4a. Ta thay thế tương đương lực tập trung bằng đoạn tải trọng phân bố đều cường độ q(z) trên đoạn thanh dài Δz như trên hình 3.4b. Hợp của hai hệ lực bằng nhau, nên ta có:

$$P = \lim_{\Delta z \to 0} q(z)\Delta z = q(z)dz \qquad \text{(b)}$$

Thay (b) vào (3-30) ta được:

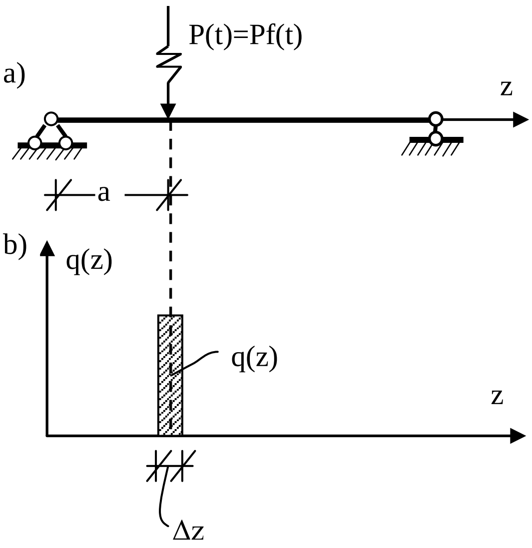
$$K_i = \frac{Py_i(a)}{\int_0^1 m[y_i(z)]^2 dz} \qquad \text{(3-37)}$$

Trường hợp riêng, khi P(t) là lực điều hòa:

P(t) = P sin rt (b)

Lúc này PTVP dao động (3-29) sẽ là,

$$\frac{d^2}{dt^2}S_i(t) + \omega_i^2 S_i(t) = K_i \sin rt \qquad \text{(3-38)}$$



Hình 3.4

Phương trình (3-38) có dạng như PTVP (1-30)’ khi bỏ qua lực cản, trong đó K_i vẫn được tính theo (3-37) đóng vai trò của ($\frac{P_0}{M}$), nên nghiệm tổng quát của nó, khi dao động đã ổn định, có dạng hoàn toàn như (1-34); nghĩa là,

$$S_i(t) = \frac{K_i}{K_i^{(d)}} \sin rt \qquad \text{(3-39)}$$

Trong đó ký hiệu, $K_i^{(d)} = (1 - \frac{r^2}{\omega_i^2})$ (3-40)

Lại thay (3-39) vào (3-28), ta được phương trình dao động tổng quát của hệ vô hạn BTD chịu lực kích thích điều hòa tập trung *Psinrt* là:

$$y(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(z) \frac{K_i}{K_i^{(d)}} \sin rt \qquad \text{(3-41)}$$

Phân tích (3-40) và (3-41) ta lại rút ra được nhận xét như đã nói tới ở chương hai. Hiện tượng cộng hưởng sẽ xảy ra khi tần số lực kích thích *r* trùng với một tần số dao động riêng ω_i bất kỳ.

Chú ý :

a, Trường hợp tiết diện thanh thay đổi thì, *EJ* và *m*, trong các công thức trên phải được thay bằng *EJ(z)* và *m(z)*.

b, Trường hợp lực động biến đổi điều hòa, có hai cách giải bài toán:

Cách thứ nhất: Sử dụng công thức truy hồi (3-36) kết hợp với (3-35) tỏ ra rất có hiệu quả nhờ có các bảng tra sẵn các hàm ảnh hưởng.

Cách thứ hai: Phân tích tải trọng theo các dạng dao động riêng để tính. Lúc này sử dụng công thức (3-28)' nếu tải trọng là phân bố, còn tải trọng tập trung ta dùng công thức (3-41).

VÍ DỤ 3-1:

Cho dầm đơn giản hai đầu khớp dài 2m, có EJ = 16.10^7 $kNcm^2$ = hằng số; trọng lượng bản thân q = 1kN/m. Dầm chịu lực động P(kN)sinrt đặt giữa nhịp như trên hình 3.5a. (ở đây *m* là đơn vị đo chiều dài- *mét*)

Yêu cầu: Vẽ biểu đồ biên độ chuyển vị động,và mô men động. Khi tính lấy gần đúng: $g = 10\dfrac{m}{s^2}$; $\pi^2 = 10$ và $r = 400\ s^{-1}$.

Bài giải: Bốn tần số riêng đầu tiên cùng với bốn dạng dao động tương ứng đã cho trong bảng 3.1 ở phần phụ lục. Lời giải tổng quát cho kết quả:

$$\omega_i = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \qquad \text{(a)}$$

$$y_i(z) = f_i \sin\frac{i\pi}{l}z \qquad \text{(b)}$$

Do lực động biến đổi điều hòa, nên có thể giải bài toán bằng hai cách như đã chú ý ở trên. Song ở đây chỉ trình bày cách giải áp dụng công thức truy hồi (3-35) và (3-36).

Cách giải bài toán dựa vào tải trọng đã được phân tích ra các dạng chính, độc giả có thể tự thực hiện.

1, Trước hết thiết lập biểu thức của y(z) và M(z).

• *Xét đoạn thứ nhất AC*

có $(0 \le z \le \dfrac{l}{2} = 1m)$

Các thông số ban đầu:

$$y_0 = 0;\ y'_0 = \theta_0 = ?;\ M_0 = 0;\ Q_0 = ?;\ q_0 = 0 \qquad \text{(c)}$$

Thay (c) vào (3-35) d_1, d_3 được,

$$y_1(z) = \frac{\theta_0}{k}B_{kz} - \frac{Q_0}{k^3EJ}D_{kz}$$ (d)

$$M_1(z) = -kEJ\theta_0 D_{kz} + \frac{Q_0}{k}B_{kz}$$

• *Xét đoạn thứ hai CB*

có (1m = $\frac{l}{2}$) ≤ z ≤ (l = 2m)

Áp dụng (3-36) f_1, f_3 được:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P}{k^3EJ}D_{k\left(z-\frac{l}{2}\right)}$$ (f)

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P}{k}B_{k\left(z-\frac{l}{2}\right)}$$

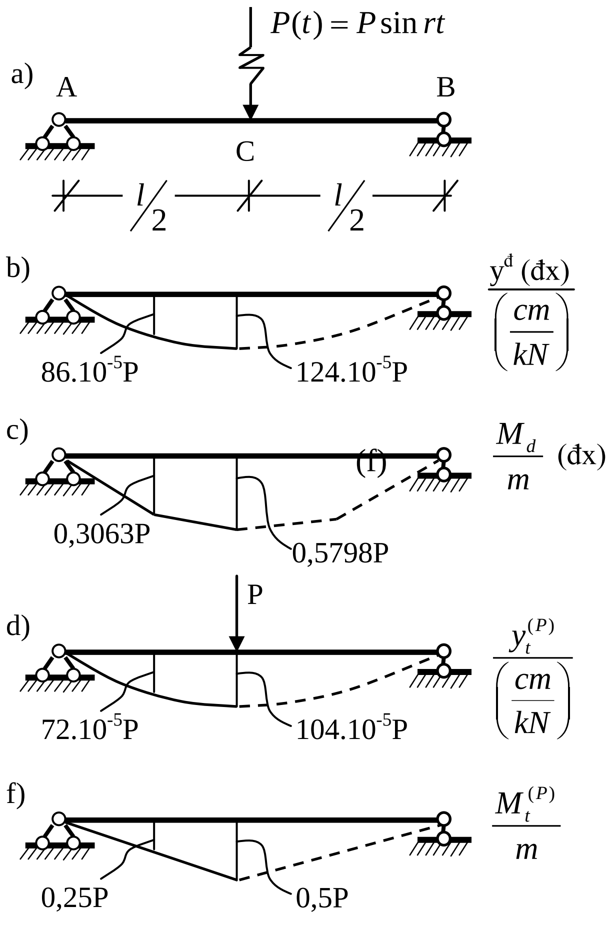
Thay (d) vào (f) và sử dụng các điều kiện biên:

Tại B (z = l) có: $y_l = y_2(z=l) = 0$;
và $M_l = M_2(z=l) = 0$; (g)

rồi giải hệ hai phương trình điều kiện biên này, và ký hiệu

$$\lambda = kl \qquad (3\text{-}42)$$

ta được,



Hình 3.5

$$\theta_0 = y'_0 = \frac{P}{k^2EJ}\frac{D_\lambda B_{\frac{\lambda}{2}} - B_\lambda D_{\frac{\lambda}{2}}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}$$ (h)

$$Q_0 = P\frac{B_\lambda B_{\frac{\lambda}{2}} - D_\lambda D_{\frac{\lambda}{2}}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}$$

Lại thay (h) vào (d) và (f) ta được biểu thức biên độ chuyển vị động và mô men động của đoạn một và hai. Tuy nhiên ở trường hợp đang xét, do tính đối xứng, ta chỉ cần viết cho đoạn một là đủ.

$$y_1(z) = \frac{P}{2k^2EJ}\frac{B_{kz}C_{\frac{\lambda}{2}} - D_{kz}A_{\frac{\lambda}{2}}}{A_{\frac{\lambda}{2}}^2 - C_{\frac{\lambda}{2}}^2}$$ (i)

$$M_1(z) = \frac{P}{2k}\frac{B_{kz}A_{\frac{\lambda}{2}} - D_{kz}C_{\frac{\lambda}{2}}}{A_{\frac{\lambda}{2}}^2 - C_{\frac{\lambda}{2}}^2}$$

2, Vẽ biểu đồ biên độ chuyển vị động và mô men động. Thực chất là vẽ đồ thị của các hàm trong (i).

Từ các số liệu đã cho ta tính được, $k^4 = \frac{mr^2}{EJ} = 10^{-8}(\frac{1}{cm^4})$, suy ra

$$K = 10^{-2}\ cm^{-1}, \text{ nên } \lambda = kl = 2 \text{ và } \frac{\lambda}{2} = 1.$$

Tra bảng các hàm ảnh hưởng được: $A_{\lambda/2} = A_1 = 1,04169$; $B_{\lambda/2} = 1,00833$;

$C_{\lambda/2} = = 0,50139$; $D_{\lambda/2} = 0,16686$;

Thay các giá trị này vào (i) ta được,

$$y_1(z) = 0,00374823P[0,50139B_{\ 0,01z} - 1,04169D_{\ 0,01z}]\left(\frac{cm}{kN}\right)$$

$$M_1(z) = 59,97174P[1,04169B_{\ 0,01z} - 0,50139D_{\ 0,01z}]\ (cm) \qquad (j)$$

Để vẽ đồ thị của (j), ta tính giá trị của hàm tại một số mặt cắt - càng nhiều càng chính xác. Ở đây ta tính cho ba mặt cắt:

+ Tại z = 0 (khớp A) có*: y(z=0) = 0; và M(z=0) = 0;*

+ Tại $z = \frac{l}{4}$ = 50cm, nghĩa là kz = 0,01z = 0,5; tra bảng được:

A = 1,00261; B = 0,50026; C = 0,12502; D = 0,02484; thay vào (i) có:

$$y_1(z=\frac{l}{4}) = \underline{0,00086\ P\ cm/kN};\ M_1(z=\frac{l}{4}) = \underline{30,\ 625576\ P\ cm;}$$

+ Tại $z = \frac{l}{2}$ = 100cm, nghĩa là kz = 0,01z = 1; Tra bảng được:

A = 1,04169; B = 1,00833; C = 0,50139; D = 0,16686; Thay vào (i) có:

$$y_1(z=\frac{l}{2}) = \underline{0,001243476\ P\ cm/kN};\ M_1\ (z=\frac{l}{2}) = \underline{57,974992\ P\ cm;}$$

Dựa vào các giá trị của *y* và *M* tính được ở trên, ta vẽ được biểu đồ biên độ chuyển vị động và mô men động như trên hình 3.5 b, và c.

Để tiện so sánh độ võng và nội lực mô men lớn nhất phát sinh trong dầm ở hai trường hợp: chất tải tĩnh và chất tải động, trên hình 3.5d, và f, ta vẽ thêm đường trục võng, và biểu đồ mô men do biên độ của lực động, P, đặt tĩnh gây ra. Từ đó độc giả có thể tự rút ra các nhận xét quan trọng và cần thiết.

3.3.4 Dao động cưỡng bức không cản của dầm một nhịp, tiết diện không đổi, chịu tác động của tải trọng và dịch chuyển gối tựa biến đổi điều hoà.

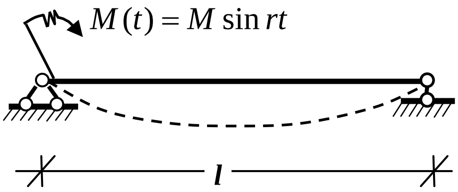
Sau đây ta sẽ tính dao động của các dầm một nhịp chịu tác dụng của các nguyên nhân khác nhau biến đổi theo qui luật điều hòa. Tần số dao động tự do của dầm một nhịp đã được nghiên cứu ở mục 3.2.4; Ở đây chủ yếu trình bày cách vẽ biểu đồ biên độ nội lực động phục vụ bài toán kiểm tra và thiết kế các dầm; Đồng thời chúng cũng là các phần tử mẫu để tính dao động của các khung và dầm nhiều nhịp, chịu tải trọng động điều hòa, bằng phương pháp chuyển vị sẽ được trình bày ở chương 5.

1- Dầm đơn giản hai đầu khớp chịu tác dụng của M(t) = M sinrt đặt ở đầu trái dầm

Bài toán chỉ một đoạn, nên chỉ cần dùng phương trình (3-35) là đủ. Các thông số ban đầu gồm:

$$y_0 = 0;\ y'_0 = \theta_0 = ?,\ M_0 = M;\ Q_0 = ?\ ;q_0 = 0; \qquad (a)$$

Thay (a) vào (3-35) được:



Hình 3.6

$$y(z) = \frac{\theta_0}{k}B_{kz} - \frac{M}{k^2EJ}C_{kz} - \frac{Q_0}{k^3EJ}D_{kz} \qquad (b)$$

$$M(z) = -kEJ\theta_0 D_{kz} + MA_{kz} + \frac{Q_0}{k}B_{kz} \qquad (b)'$$

Các điều kiện biên để xác định y'_0, và Q_0 là:

Tại z = l có: $y_l = 0$; và $M_l = 0$; (c)

Thay (c) vào (b) và (b)' rồi giải hệ hai Phương trình này ta được,

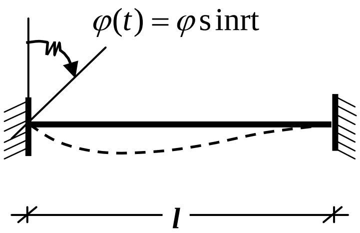
$$\theta_0 = y'_0 = \frac{M}{k\ EJ}\frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}\ ;\ Q_0 = kM\frac{D_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2} \qquad (3\text{-}43)$$

Lại thay (3-43) vào (b) và (b)' ta được phương trình của y(z) và M(z).

2- Dầm hai đầu ngàm, ngàm bên trái xoay góc φ(t) = φsin rt.

Các thông số ban đầu: Tại z = 0,

$$y_0 = 0;\ y_o' = \theta_0 = \varphi;\ M_0 = ?;\ Q_0 = ? \qquad (a)$$



Hình 3.7

Các điều kiện biên ở cuối dầm,

Tại z = l có:

$$y_l = 0;\ \text{và}\ y'_l = 0. \qquad (b)$$

Thay (b) vào (3-35) rồi giải hệ hai phương trình này ta được:

$$M_0 = \frac{EJ}{l}\varphi\lambda\frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}\ ;\ Q_0 = -\frac{EJ}{l^2}\varphi\lambda^2\frac{B_\lambda^2 - A_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} \qquad (3\text{-}44)$$

Lại thay (3-44) vào (3-35) ta sẽ được các hàm biên độ chuyển vị, góc xoay, mô men, lực cắt của bài toán.

Nếu ngàm bên phải xoay, làm tương tự ta có:

$$M_o = \frac{EJ}{l}\varphi\frac{\lambda\ D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda},\ Q_0 = -\frac{EJ}{l^2}\varphi\frac{\lambda^2 C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} \quad (3\text{-}45)$$

3- Dầm ngàm bên trái, khớp bên phải; Ngàm trái dịch chuyển thẳng đứng Δ(t) = Δsin rt.

Các thông số ban đầu:

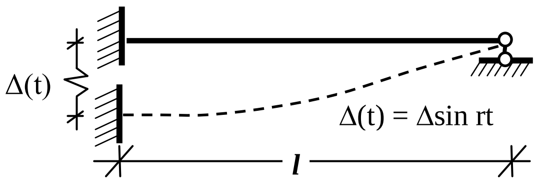
Tại z = 0 có,

$y_0 = \Delta$; $y'_0 = \theta_0 = 0$; $M_0 = ?$; $Q_0 = ?$ (a)

Các điều kiện biên ở cuối dầm để xác định M_0, và Q_0 là:

Tại z = l có:

$y_l = 0$ và $M_l = 0$; (b)



Hình 3.8

Lại thay (b) vào (3-35) ta sẽ giải ra được:

$$M_0 = \frac{EJ}{l^2}\Delta\lambda^3\frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda};\ Q_0 = \frac{EJ}{l^3}\Delta\lambda^3\frac{C_\lambda^2 - A_\lambda^2}{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda} \quad (3\text{-}46)$$

Thay (3-46) vào (3-35) ta sẽ viết được các biểu thức cần tìm.

Tất cả các trường hợp dầm một nhịp chịu các tác dụng động biến đổi điều hòa khác nhau cũng được tính tương tự. Các kết quả được cho trong phần phụ lục.