

## Chương 4

### CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH GẦN ĐÚNG TRONG ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Các phương pháp tính gần đúng trong Động lực học công trình có thể phân thành ba nhóm chính:

- **Nhóm thứ nhất** là các phương pháp năng lượng. Các phương pháp năng lượng dựa vào nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học được phát biểu như sau: Tại mọi thời điểm của hệ dao động, tổng thế năng và động năng của hệ luôn luôn là một hằng số:

$$T + U = \text{hằng số} \quad (4-1)$$

Trong đó: T là động năng của hệ.

U là thế năng của hệ.

Có thể giải bài toán bằng cách áp dụng trực tiếp phương trình (4-1), hoặc dựa vào các phương trình Lagrange, hay nguyên lý Hamilton.

Các phương pháp năng lượng sơ dĩ cho kết quả gần đúng vì phải giả thiết trước dạng dao động của hệ

- **Nhóm thứ hai** là nhóm các phương pháp chuyển hệ vô hạn bậc tự do về hệ có số bậc tự do hữu hạn để giải. Các phương pháp chính thuộc nhóm này là: Phương pháp khối lượng tập trung, phương pháp biến dạng tập trung và phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH).

- **Nhóm thứ ba** là nhóm các phương pháp giải gần đúng phương trình vi phân dao động của hệ, mà điển hình là phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp rời rạc hóa toán tử vi phân, hay phương pháp Butnopol-Galookin.

Phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp rời rạc hóa toán tử vi phân và phương pháp phần tử hữu hạn còn được gọi chung là *phương pháp số-vì* kết quả tính toán là các con số.

Trong khuôn khổ thời lượng của môn học, trong tài liệu này chỉ trình bày một số phương pháp cơ bản.

#### 4.1 CÁC PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

##### 4.1.1 Phương pháp Rayleigh

Phương pháp Rayleigh áp dụng trực tiếp nguyên lý bảo toàn năng lượng (4-1) để xác định tần số dao động riêng của hệ dao động. Ta nhận thấy rằng, với giả thiết dao động tự do là điều hoà, thì khi hệ dao động tới vị trí cân bằng ban đầu, thế năng của hệ bằng không, còn vận tốc đạt cực đại; còn khi hệ ở vị trí biên độ chuyển động thì vận tốc chuyển động bằng không-cũng tức là động năng bằng không, còn thế năng đạt cực đại. Điều này có nghĩa là:

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (4-2)$$

**A- Xét trường hợp hệ có số bậc tự do hữu hạn (n bậc tự do):**

Nếu ký hiệu  $\{a_k\} = \{a_{1k} \ a_{2k} \ \dots \ a_{nk}\}^T$  (xem (2-12)) là vectơ chứa biên độ dao động của các khối lượng thứ 1, 2, ..., n tương ứng với tần số dao động riêng thứ k (dạng dao động riêng thứ k) thì với vật liệu đàn hồi tuyến tính ta có:

$$\text{Thế năng cực đại bằng: } U_{\max} = \frac{1}{2} \{a_k\}^T [K] \{a_k\} \quad (1) \quad (4-3)$$

$$\text{Động năng cực đại bằng: } T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_k^2 \{a_k\}^T [M] \{a_k\} \quad (2)$$

trong đó:  $[K]$  là ma trận độ cứng của hệ, còn  $[M]$  là ma trận khối lượng. Thay (4-3) vào (4-2) ta được tần số dao động riêng thứ k:

$$\omega_k^2 = \frac{\{a_k\}^T [K] \{a_k\}}{\{a_k\}^T [M] \{a_k\}} \quad (4-4)$$

Rõ ràng là nếu biết dạng dao động riêng thứ k,  $\{a_k\}$ , ta sẽ xác định được tần số riêng tương ứng. Tất nhiên dạng dao động riêng này ta phải giả thiết trước.

**B- Trường hợp khối lượng phân bố-hệ có vô hạn bậc tự do:**

Với giả thiết dao động tự do là điều hoà, thì phương trình dao động chính thức thứ k có dạng:

$$y_k(z, t) = y_k(z) \sin(\omega_k t + \lambda) \quad (4-5)$$

Theo Sức bền vật liệu, đối với cấu kiện chịu uốn khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, thế năng biến dạng được tính theo công thức sau:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \int_{l_i} \frac{M_i^2(z)}{EJ_i} dz \quad (4-6)$$

Theo (4-5) dao động đạt biên độ khi  $\sin(\omega_k t + \lambda) = \pm 1$ .

Mặt khác,  $M_k(z) = -EJ y_k''(z, t) = -EJ y_k''(z) \sin(\omega_k t + \lambda)$ , nên khi dao động đạt biên độ thì  $M_k(z) = EJ y_k''(z)$  (xét về trị số) (a)

nên 
$$U_{\max} = \frac{1}{2} \sum_i \int_{l_i} EJ_i [y_k''(z)]^2 dz \quad (4-7)$$

Tại vị trí cân bằng vận tốc đạt cực đại; mà  $v_k(z, t) = y_k(z) \omega_k \cos(\omega_k t + \lambda)$  nên

$$V_{k\max} = y_k(z) \omega_k \quad (b)$$

Lúc này động năng cực đại

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_k^2 \sum_i \int_{l_i} [y_k(z)]^2 m(z) dz \quad (4-8)$$

Trong đó:  $m(z)$  là cường độ khối lượng phân bố theo chiều dài thanh.

Khi trên hệ, ngoài khối lượng phân bố  $m(z)$ , còn có các khối lượng tập trung  $M_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), thì tổng động năng của các khối lượng tập trung sẽ là

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega_k^2 \sum_j M_j [y_k(z_j)]^2 \quad (4-9)$$

## Chương 4. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình

Ở đây  $M_j$  là khối lượng tập trung thứ  $j$ , còn  $y_k(z_j)$  là biên độ dao động của khối lượng thứ  $j$  tương ứng với tần số riêng thứ  $k$ .

Thay (4-7), (4-8), (4-9) vào (4-2) ta được:

$$\omega_k^2 = \frac{\sum_i \int_{l_i} EJ_i [y_k''(z)]^2 dz}{\sum_i \int_{l_i} [y_k(z)]^2 m(z) dz + \sum_j M_j [y_k(z_j)]^2} \quad (4-10)$$

Trong đó  $l_i$  là đoạn thứ  $i$  có chiều dài là  $l_i$ .

Công thức (4-10) là lời giải tổng quát có thể áp dụng để xác định tần số dao động riêng thứ  $k$  cho dầm, vòm,... thậm chí cả tấm vỏ... kể cả khi tiết diện thay đổi. Thực tế là dạng dao động riêng thứ nhất thường rất gần với dạng biến dạng giả tĩnh tương ứng. Bởi vậy, người ta thường dùng công thức (4-10) để xác định tần số cơ bản  $\omega_1$ , lúc này ta lấy đường biến dạng giả tĩnh để tính toán.

Với các tần số bậc cao, do rất khó để giả thiết được một dạng dao động gần sát với thực tế, nên ít được tính theo (4-10).

### VÍ DỤ 4-1:

Xác định tần số dao động riêng thứ nhất của dầm conson có tiết diện hằng số và chiều dài  $l$ .

Ta giải bài toán trong hai trường hợp.

**I)** Lấy dạng đường đàn hồi của trục dầm do tải trọng phân bố đều đặt tĩnh gây ra làm dạng dao động riêng thứ nhất.

Theo hình (4-1) ta có:

$$y_1(z) = A_0 \left( 1 - \frac{4z}{3l} + \frac{z^4}{3l^4} \right) \quad (a)$$

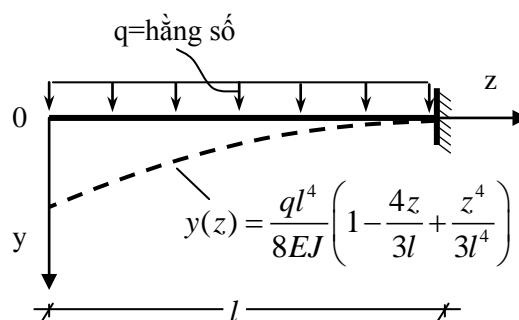
$$\text{Khi đó: } y_1''(z) = A_0 \left( \frac{4z^2}{l^4} \right) \quad (b)$$

Trong đó:  $A_0$  là một hệ số.

Thay (a); (b) vào (4-10) và chú ý là  $M_j=0$ , và ký hiệu  $m$  là cường độ khối lượng phân bố đều và  $A_0$  bị triệt tiêu, rồi tiến hành tích phân ta có:

$$\omega_1^2 = \frac{EJ \int_0^l \left( \frac{4z^2}{l^4} \right)^2 dz}{m \int_0^l \left( 1 - \frac{4z}{3l} + \frac{z^4}{3l^4} \right)^2 dz} = \frac{\left( \frac{16}{5l^3} \right) EJ}{\left( \frac{104}{405} l \right) m} = \frac{162}{13} \frac{EJ}{ml^4}$$

$$\text{Suy ra: } \omega_1 = \frac{3,5301}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (c)$$



**Hình 4-1**

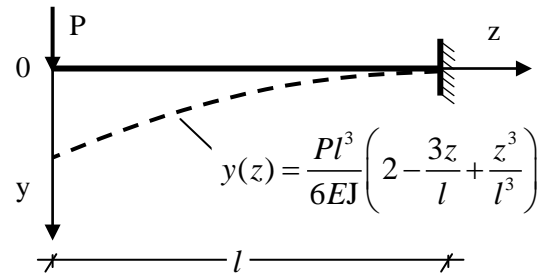
So sánh với lời giải chính xác:  $\omega_1 = \frac{3,516}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ , sai số 0,4%.

2) Lấy dạng đường đàn hồi của trục dầm do lực tập trung đặt tĩnh tại đầu tự do gây ra làm dạng dao động riêng thứ nhất.

Theo hình (4-2) ta có:

$$y_1(z) = A_0 \left( 2 - \frac{3z}{l} + \frac{z^3}{l^3} \right) \quad (d)$$

và  $y_1''(z) = A_0 \left( \frac{6z}{l^3} \right) \quad (f)$



**Hình 4-2**

Lại thay (d); (f) vào (4-10) rồi tích phân ta được:

$$\omega_1^2 = \frac{EJ}{m} \frac{\int_0^l \left( \frac{6z}{l^3} \right)^2 dz}{\int_0^l \left( 2 - \frac{3z}{l} + \frac{z^3}{l^3} \right)^2 dz} = \frac{\left( \frac{12}{l^3} \right) EJ}{\left( \frac{33}{35} l \right) m} = \frac{140}{11} \frac{EJ}{ml^4}$$

hay  $\omega_1 = \frac{3,568}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ ; Sai số  $\approx 1,48\%$

Qua ví dụ trên ta thấy, lấy dạng biến dạng giả tĩnh của hệ do trọng lượng bản thân gây ra làm dạng dao động chính thứ nhất cho kết quả tương đối chính xác đối với tần số riêng  $\omega_1$ .

**4.1.2 Phương pháp Rayleigh-Ritz**

Như đã thấy ở phần trên, độ chính xác của lời giải của Rayleigh phụ thuộc vào độ chính xác của dạng dao động mà ta giả thiết, và thông thường là lớn hơn giá trị thực. Để nâng cao độ chính xác của lời giải (4-10), năm 1911, Ritz đã phát triển lời giải của Rayleigh dựa trên giả thiết cơ bản cho rằng: “Hàm biểu diễn dạng dao động là tổ hợp của nhiều hàm sẽ cho kết quả chính xác hơn so với chỉ một hàm như Rayleigh”. Với cách chọn hàm như thế này, không chỉ tần số cơ bản, mà các tần số bậc cao ta cũng có thể tính được một cách khá chính xác và dễ dàng. Về mặt lý thuyết, số lượng hàm sử dụng càng nhiều, kết quả càng chính xác-song cũng cần lưu ý rằng, khi số lượng hàm khá lớn, thì việc tăng số lượng hàm sẽ không còn làm tăng nhiều độ chính xác của lời giải nữa.

Theo Ritz hàm biểu diễn dạng dao động riêng có dạng:

$$y(z) = C_1\varphi_1(z) + C_2\varphi_2(z) + \dots + C_n\varphi_n(z) = \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(z) \quad (4-11)$$

Trong đó:  $C_i$  là các hệ số

$\varphi_i(z)$  là các hàm thoả mãn các điều kiện biên của bài toán.

Như đã nói, lời giải của phương pháp năng lượng cho kết quả lớn hơn giá trị thực. Để giảm bớt sai số, Ritz kiến nghị làm cực tiểu hoá tần số  $\omega$  tính theo (4-10) bằng cách chọn các hệ số  $C_i$  trong (4-11) sao cho  $\omega$  đạt cực tiểu, nghĩa là

**Chương 4. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình**

$$\frac{\partial \omega}{\partial C_i} = 0 \quad (4-12)$$

(i=1, 2, ..., n)

Đây là một hệ phương trình đại số tuyến tính chứa ẩn là  $\omega$  và các hệ số  $C_i$ . Giải bài toán trị riêng này, ta sẽ xác định được các  $\omega$ .

Ví dụ, để xác định tần số dao động riêng của dầm chịu uốn, ta thay (4-11) vào (4-10), khi đó phương trình (4-12) có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \omega^2 = \frac{\partial \int_0^l EJ [y''(z)]^2 dz}{\partial C_i \int_0^l m [y(z)]^2 dz} = 0 \quad (a)$$

Thực hiện phép đạo hàm của một thương, ta có:

$$\int_0^l m [y(z)]^2 dz \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l EJ [y''(z)]^2 dz - \int_0^l EJ [y''(z)]^2 dz \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l m [y(z)]^2 dz = 0 \quad (b)$$

Mặt khác, từ (4-10) ta có:

$$\omega^2 \int_0^l m [y(z)]^2 dz = \int_0^l EJ [y''(z)]^2 dz \quad (c)$$

Thay (c) vào số hạng thứ hai của (b) ta được:

$$\int_0^l m [y(z)]^2 dz \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l EJ [y''(z)]^2 dz - \omega^2 \int_0^l m [y(z)]^2 dz \frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l m [y(z)]^2 dz = 0 \quad (b')$$

Chia hai vế của (b') cho  $\int_0^l m [y(z)]^2 dz$  ta được:

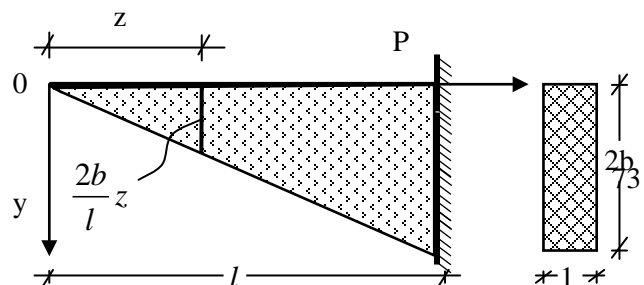
$$\frac{\partial}{\partial C_i} \int_0^l \left( EJ [y''(z)]^2 - \omega^2 m [y(z)]^2 \right) dz = 0 \quad (4-13)$$

(i= 1, 2, ..., n)

Hệ phương trình (4-13) là dạng chính tắc của hệ phương trình (4-12) khi hàm biểu diễn dạng dao động lấy theo (4-11).

Thực hiện phép vi phân, (4-13) cho ta một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ẩn là  $C_1, C_2, \dots, C_n$  và  $\omega$ . Từ điều kiện tồn tại dao động, hay nói cách khác, ma trận các hệ số phải không suy biến, ta thu được phương trình tần số là phương trình bậc n đối với  $\omega^2$ . Giải phương trình này ta sẽ được n tần số dao động riêng.

**VÍ DỤ 4-2:**



**Hình 4-3**

Sử dụng phương pháp Rayleigh-Ritz để xác định các tần số dao động riêng của dầm conson dài  $l$ , bề rộng không đổi bằng đơn vị, còn chiều cao biến đổi theo quy luật bậc 1 (hình 4-3).

**Bài giải (Lời giải của Timoshenko, 1937)**

Xét mặt cắt ngang tại toạ độ  $z$ , có:

$$F(z) = \frac{2b}{l} z$$

$$J(z) = \frac{1}{12} \left( \frac{2bz}{l} \right)^3$$

$$m(z) = \frac{\gamma F(z)}{g} = \frac{2b\gamma}{gl} z$$

Trong đó:  $\gamma$  là trọng lượng riêng của vật liệu dầm.

$g$  là gia tốc trọng trường.

Với hệ toạ độ chọn như trên hình vẽ, tại ngàm ( $z=l$ ) có góc xoay và độ võng đều bằng không, nên ta chọn hàm biểu diễn dạng dao động như sau (các hàm  $\varphi_i(z)$  đều thoả mãn điều kiện biên)

$$y(z) = C_1 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 + C_2 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 + \dots + C_n \frac{z^{n-1}}{l^{n-1}} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \quad (d)$$

1) Nếu chỉ lấy một hàm trong (d), giả sử số hạng thứ nhất- ta có lời giải Rayleigh và tính được:

$$\omega_1 = \frac{5,48g}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}$$

2) Nếu trong (d) ta lấy hai số hạng trở lên, ta sẽ có nghiệm Rayleigh-Ritz, giả sử ta lấy hai số hạng đầu:

$$y(z) = C_1 \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 + C_2 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \quad (f)$$

Thay  $y(z)$  và  $y''(z)$  từ (f) vào (4-13) rồi tích phân ta có:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \frac{2b^3}{3l^3} \left[ (C_1 - 2C_2)^2 + \frac{24}{5} C_2 (C_1 - 2C_2) + 6C_2^2 \right] - \frac{2b\gamma l \omega^2}{Eg} \left( \frac{C_1^2}{30} + \frac{2C_1 C_2}{105} + \frac{C_2^2}{280} \right) \right\} = 0$$

Tiến hành đạo hàm ta được:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial C_1}(\dots) = \left( \frac{Eg b^2}{\gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{30} \right) C_1 + \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) C_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C_2}(\dots) = \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) C_1 + \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) C_2 = 0 \end{cases} \quad (g)$$

Do phải tồn tại dao động, nghĩa là  $C_1, C_2$  không đồng thời bằng không, ta được định thức các hệ số trong (g) phải bằng không, đây chính là phương trình tần số của bài toán.

$$\begin{vmatrix} \left( \frac{Eg b^2}{\gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{30} \right) & \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) \\ \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) & \left( \frac{2 Eg b^2}{5 \gamma 3l^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (h)$$

(h) là phương trình bậc hai đối với  $\omega^2$ . Giải phương trình này ta được nghiệm nhỏ nhất:

$$\omega_1 = \frac{5,319b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}$$

Lời giải dựa vào hàm Bessel (được coi là chính xác) cho kết quả là:

$$\omega_1 = \frac{5,315b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}$$

*So sánh ta thấy:* Đối với tần số cơ bản  $\omega_1$  khi dùng một hàm (nghiệm Rayleigh) sai số 3%; Khi dùng hai hàm (nghiệm Rayleigh-Ritz) sai số 0,1%. Như vậy, đối với  $\omega_1$  ta chỉ cần dùng một hàm là đủ, chỉ khi cần xác định các tần số bậc cao thì mới cần dùng nhiều hàm trong (4-11).

### **Chú ý:**

Cũng có thể dùng phương pháp này để giải bài toán dao động cưỡng bức. Độc giả có thể xem chi tiết trong các tài liệu tham khảo.

## **4.2 PHƯƠNG PHÁP KHỐI LƯỢNG TẬP TRUNG**

Nội dung cơ bản của phương pháp này là chuyển khối lượng phân bố trên hệ về tập trung tại một số điểm nào đó (thường là các điểm đặc biệt). Bằng cách như vậy, ta đã chuyển một hệ có vô hạn bậc tự do về hệ có số bậc tự do hữu hạn. Tùy thuộc vào bài toán và độ chính xác yêu cầu mà ta xác định số lượng khối lượng tập trung. Về mặt lý thuyết số khối lượng tập trung càng lớn, kết quả càng chính xác, tất nhiên tính toán càng phức tạp.

Khi chuyển khối lượng phân bố về đặt tại một số điểm, ta phải giải quyết hai vấn đề cơ bản:

- 1- Khối lượng tập trung đặt ở đâu?
- 2- Trị số mỗi khối lượng tập trung bằng bao nhiêu?

Qua các tính toán thực tế người ta đưa ra một số hướng dẫn chung như sau:

- 1- Về vị trí đặt khối lượng tập trung:

- Khi trên hệ, ngoài khối lượng phân bố còn có các khối lượng tập trung, thì nên chuyển khối lượng về các nơi có các khối lượng tập trung này.

## ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

- Nên chuyển khối lượng về các nơi có chuyển vị lớn.
- Nên đặt khối lượng tại các nút của hệ hay tại các tầng sàn của các khung cao tầng.

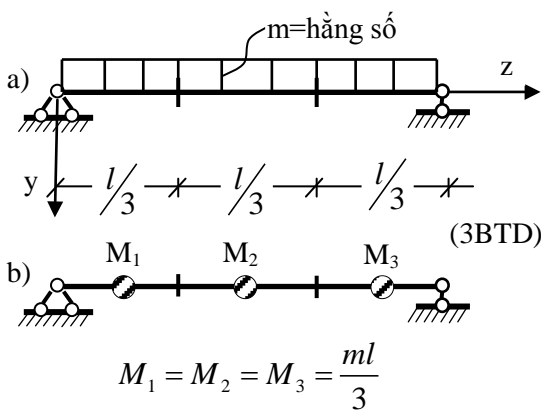
### 2- Về độ lớn của các khối lượng thay thế:

Thường có 2 cách phân bố khối lượng-song tùy thuộc từng bài toán mà chọn cách thích hợp.

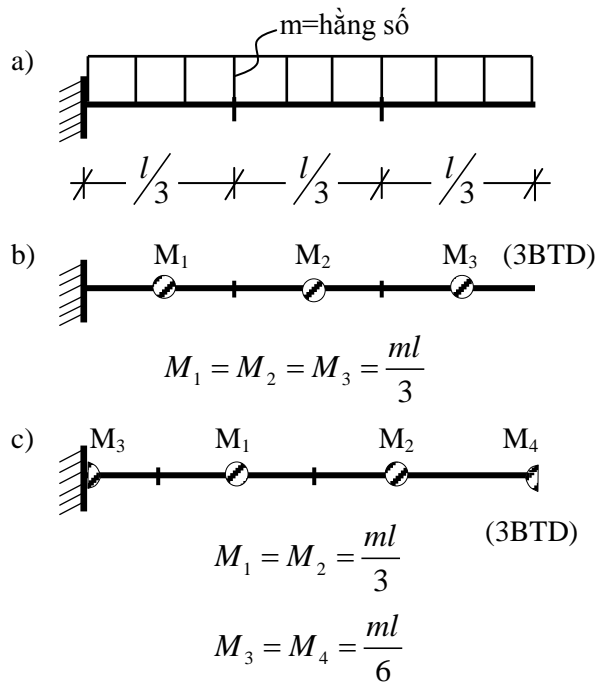
- Chia khối lượng phân bố thành nhiều khoảng, rồi tập trung khối lượng về trung tâm của từng khoảng. Xem hình 4-4b, 4-5b, 4-6b.

- Chia khối lượng phân bố thành nhiều khoảng, rồi tập trung khối lượng trên mỗi khoảng ra hai đầu. Xem hình 4-4c, 4-5c, 4-6a, b.

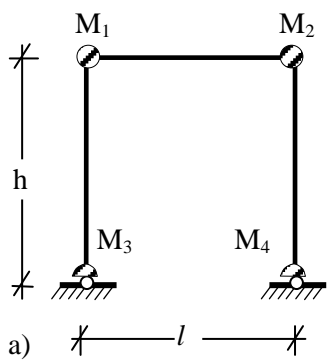
Cách phân thứ hai được dùng nhiều hơn, vì nó thường cho lời giải đơn giản hơn.



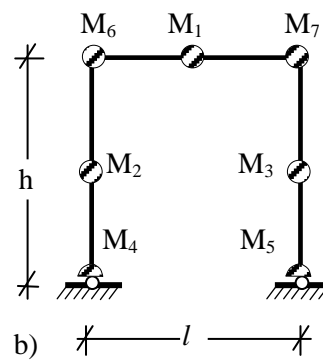
Hình 4-4



Hình 4-5



$$\begin{cases} M_1 = M_2 = m \left( \frac{l}{2} + \frac{h}{2} \right) \\ M_3 = M_4 = \frac{mh}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} M_1 = \frac{ml}{2}; M_2 = M_3 = \frac{mh}{2} \\ M_4 = M_5 = \frac{mh}{4}; M_6 = M_7 = m \left( \frac{l}{4} + \frac{h}{4} \right) \end{cases}$$

Hình 4-6



## Chương 4. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình

Trong nhiều trường hợp, khi chỉ cần xác định tần số cơ bản  $\omega_1$ , thì ta có thể thay các khối lượng phân bố bằng chỉ một khối lượng tập trung tương đương ( $M_{td}$ ). Trong trường hợp này, khối lượng thay thế tương đương nên đặt tại nơi có chuyển vị lớn nhất, còn độ lớn của  $M_{td}$  có thể được xác định trên cơ sở giả thiết cho rằng: Hai hệ (hệ thực và hệ thay thế) tương đương về động năng thì cũng tương đương về tần số.

$$T_{thực} = T_{thay thế} \quad (4-14)$$

Xét hệ có khối lượng phân bố  $m(z)$ , trên đó có đặt thêm các khối lượng tập trung  $M_j$  tại các tọa độ  $z_j$ . Giả sử phương trình chuyển động của hệ được biểu diễn dưới dạng tách biến:

$$y(z, t) = y(z)S(t) \quad (a)$$

$$\text{Khi đó vận tốc: } v(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(z, t) = y(z)\dot{S}(t) \quad (b)$$

Tổng động năng của hệ đã cho sẽ là:

$$T_{thực} = \sum_i \int_{l_i} \frac{1}{2} m(z) [y(z)\dot{S}(t)]^2 dz + \frac{1}{2} \sum_j M_j [y(z_j)\dot{S}(t)]^2 \quad (c)$$

Khối lượng tương đương thay thế giả sử đặt tại điểm có tọa độ ( $z_a$ ), thì động năng hệ thay thế sẽ là:

$$T_{thay thế} = \frac{1}{2} M_{td} [y(z_a)\dot{S}(t)]^2 \quad (d)$$

Thay (c); (d) vào (4-14) ta tính được khối lượng thay thế tương đương:

$$M_{td} = \frac{\sum_i \int_{l_i} m(z) [y(z)]^2 dz + \sum_j M_j [y(z_j)]^2}{[y(z_a)]^2} \quad (4-15)$$

Thay  $M_{td}$  này vào công thức (1-15) tương ứng với hệ một bậc tự do, ta sẽ xác định được  $\omega_1$ .

### VÍ DỤ 4-3:

Xác định tần số cơ bản  $\omega_1$  của dầm đơn giản hai đầu khớp, chiều dài  $l$  và khối lượng phân bố  $m = \text{hằng số}$ . Hình 4-7a

### Bài giải:

Ở bài toán này, dạng dao động riêng thứ nhất là dạng đối xứng, chuyển vị lớn nhất ở giữa dầm, nên khi đưa khối lượng của hệ về tập trung tại một điểm thì ta đưa về giữa dầm. Ta xét bài toán trong hai trường hợp.

I) Thay thế khối lượng của hệ thành một  $M_{td}$  tính theo (4-15).

Trước hết ta giả thiết dạng dao động riêng thứ nhất là dạng đường đàn hồi của trục dầm do một lực  $P$  đặt tĩnh ở giữa dầm gây ra. Dùng phương pháp của sức bền tính được phương trình này có dạng: Hình 4-7b

$$y(z) = A_0 \left( \frac{3l^2 z - 4z^3}{l^3} \right) \quad (a)$$

Trong đó  $A_0$  là một hệ số. Lúc này chuyển vị ở giữa dầm:

$$y(z_a) = y|_{z=\frac{l}{2}} = A_0 \left[ \frac{3l^2 \frac{l}{2} - 4\left(\frac{l}{2}\right)^3}{l^3} \right] = A_0 \quad (b)$$

$$M_{td} = \frac{mA_0^2 \int_0^l \left[ \frac{3l^2 z - 4z^3}{l^3} \right]^2 dz}{A_0^2} = \frac{m}{l^2} \int_0^l \left( 9z^2 - \frac{24}{l^2} z^4 - z^6 + \frac{16}{l^4} \right) dz = 0,486ml \quad (c)$$

thay  $M_{td}$  vào (1-15) ta được:

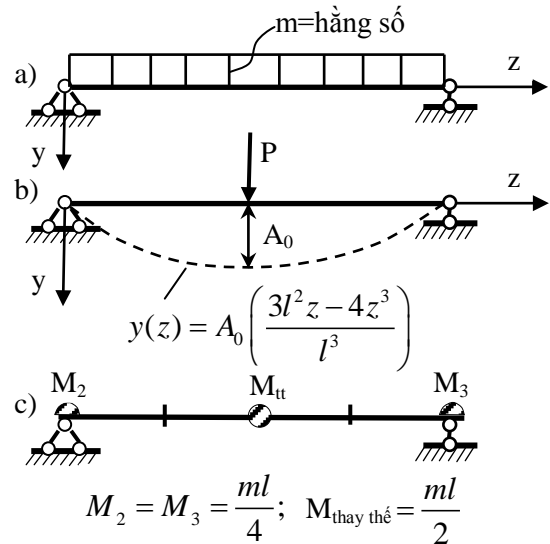
$$\omega_1 = \frac{9,92}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ Sai số } 0,6\%$$

2) Chia dầm làm 2 đoạn rồi tập trung khối lượng về hai đầu của mỗi đoạn ta được 3 khối lượng tập trung. Hai khối lượng đặt ở hai đầu dầm không dao động-Hệ chỉ còn một khối lượng đặt giữa dầm dao động (xem 4-7c).

$$M_{\text{thay thế}} = m \frac{l}{2} \quad (d)$$

Thay (d) vào (1-15) ta có:

$$\omega_1 = \frac{9,798}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ Sai số } 0,7\%$$



**Hình 4-7**

Dùng công thức (4-15) để xác định khối lượng thay thế cho kết quả chính xác hơn. Nếu chuyển hệ về hai, 3 hay nhiều bậc tự do hơn, thì kết quả tất nhiên cũng sẽ chính xác hơn.

Ví dụ, cũng bài toán này, song khi ta đưa hệ về hai bậc tự do như trên hình (4-4c), sẽ tính được (xem chương 2).

$$\omega_1 = \frac{9,86}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ Sai số } 0,1\%$$

**Chú ý:**

**I-** Tương tự phương pháp khối lượng tập trung, phương pháp biến dạng tập trung cũng cho phép chuyển một hệ vô hạn bậc tự do về hệ có số bậc tự do hữu hạn. Tư tưởng của phương pháp là tập trung biến dạng phân bố trên toàn hệ về một số điểm nào đó mà ta chọn trước.

## **Chương 4. Các phương pháp tính gần đúng trong động lực học công trình**

2- Phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp rời rạc hoá toán tử vi phân, đặc biệt là phương pháp PTHH (còn gọi chung là các phương pháp số) là những phương pháp gần đúng có hiệu quả để giải bài toán tĩnh lực học và động lực học công trình. Phương pháp PTHH gắn liền với máy tính điện tử (MTĐT), vì ẩn số của phương pháp rất lớn. Hầu hết các phần mềm tính toán kết cấu hiện nay đều được viết bằng phương pháp PTHH. Những phương pháp này được trình bày chi tiết trong các tài liệu riêng về các phương pháp số trong tính toán kết cấu. Ở đây chỉ giới thiệu tóm tắt nội dung cơ bản của phương pháp.

Như đã biết trong tĩnh lực học, phương trình cơ bản của phương pháp PTHH mô hình chuyển vị là:

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (4-16)$$

Trong đó:  $[K]$  là ma trận độ cứng của hệ, được xây dựng từ các ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn đã được lập sẵn.

$\{F\}$  là véc tơ lực nút, bao gồm các lực nút có sẵn và các lực tác dụng trên phần tử chuyển về các nút.

$\{\Delta\}$  là véc tơ chuyển vị nút là ẩn của phương pháp. Sau khi xác định được  $\{\Delta\}$  từ (4-16), ta sẽ xác định được trường ứng suất, biến dạng, chuyển vị trong kết cấu. Còn với kết cấu hệ thanh, ta sẽ vẽ được các biểu đồ nội lực.

Đối với bài toán động lực học, phương trình cơ bản của phương pháp PTHH mô hình chuyển vị cũng có dạng như (2-5). Tất nhiên cách xác định từng đại lượng là hoàn toàn khác.

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (4-17)$$

Trong đó:  $[K]$  là ma trận độ cứng của hệ như trong (4-16)

$\{\Delta\}$  là véc tơ chuyển vị động của các nút

$\{F\}$  là véc tơ ngoại lực nút động.

$\{\ddot{\Delta}\}$  và  $\{\dot{\Delta}\}$  lần lượt là véc tơ vận tốc và gia tốc chuyển động của các nút.

$[C]$  là ma trận cản

$[M]$  là ma trận khối lượng được tập trung tại các nút và được thành lập từ các ma trận khối lượng của từng phần tử hữu hạn đã được lập sẵn như đối với ma trận độ cứng.

Còn phương trình vi phân dao động tự do:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{0\} \quad (4-18)$$

3- Đối với hệ có số bậc tự do hữu hạn, thay cho việc giải phương trình tần số phức tạp, S.A.Pestel đã đề xuất một công thức gần đúng để xác định  $\omega_1$  như sau:

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} \leq \omega_1^2 \leq \frac{2}{B_1 \left( 1 + \sqrt{2 \frac{B_2}{B_1} - 1} \right)} \quad (4-19)$$

được gọi là công thức S.A. Pestel

trong đó, 
$$B_1 = \sum_{i=1}^n M_i \delta_{ii}$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^n M_i^2 \delta_{ii}^2 + 2 \sum_{i,k=1}^n M_i M_k \delta_{ik}^2 \quad (i \neq k)$$

Ngoài ra còn có nhiều phương pháp gần đúng khác để xác định các tần số dao động riêng của hệ có hữu hạn bậc tự do, như phương pháp ma trận chuyển của Pestel-Leckie (1963), hay phương pháp lập ma trận của Livesley (1964). Những phương pháp này có thể tìm thấy trong các tài liệu tham khảo.

## Chương 5 ĐỘNG LỰC HỌC CỦA KẾT CẤU HỆ THANH PHẪNG

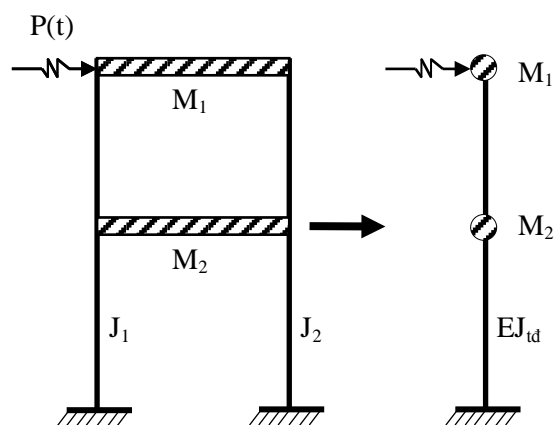
Ở phần trên, ta đã nghiên cứu các phương pháp cơ bản để tính toán dao động của một hệ đàn hồi bất kỳ bao gồm xác định các tần số dao động riêng để kiểm tra hiện tượng cộng hưởng và tính biên độ các phản lực động, nội lực động, chuyển vị động vv... để phục vụ bài toán kiểm tra cũng như bài toán thiết kế. Tuy nhiên khi áp dụng các phương pháp tổng quát này vào một bài toán cụ thể, đòi hỏi người tính phải phân tích kỹ lưỡng để chọn ra cách giải đơn giản nhất mà vẫn đảm bảo độ chính xác yêu cầu.

Một công trình xây dựng thực tế luôn luôn là một hệ có vô số bậc tự do. Lời giải chính xác của bài toán rõ ràng là rất phức tạp (Xem chương 3) thậm chí là không thực hiện được. Bởi vậy, trong nhiều trường hợp ta phải giải gần đúng. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu cách áp dụng các phương pháp được trình bày trong các chương trước để tính động lực học của các kết cấu hệ thanh phẳng bất kỳ như dầm, khung, dàn, vòm...

### 5.1 CÁCH TÍNH GẦN ĐÚNG

Có thể nói phương pháp tập trung khối lượng là phương pháp gần đúng thông dụng để tính dao động của các kết cấu hệ thanh phẳng như dầm, khung, dàn, vòm, hệ liên hợp nhờ sự đơn giản của nó. Tất nhiên, với các kết cấu phức tạp, số lượng các khối lượng tập trung khá lớn, thì việc tính toán cũng khá phức tạp và tốn nhiều thời gian do phải lập và giải một phương trình tần số bậc cao, cũng như phải lập và giải hệ phương trình để xác định biên độ các lực quán tính. Trước đây, khi chưa có MTĐT, người ta thường tập trung khối lượng về 1, 2, hoặc 3 vị trí để giải. Còn ngày nay, nhờ có MTĐT mà số khối lượng tập trung có thể tăng lên nhiều, nhờ đó mà độ chính xác của lời giải được tăng lên.

Đối với kết cấu nhà nhiều tầng chịu tải trọng động theo phương ngang như tải trọng gió bão, động đất vv... người ta thường đưa về sơ đồ thanh con son (hình 5-1) để giải.



**Hình 5-1**

Đối với kết cấu dàn hay hệ liên hợp, khối lượng của các thanh dàn và dầm thường được tập trung tại các nút dàn và đặc biệt chú ý tới các nút dàn nằm trên đường biên xe chạy (hình 5-2).

Đối với vòm, sau khi tập trung khối lượng về một số điểm, để đơn giản tính toán, ta có thể thay các đoạn thanh cong nối giữa các khối lượng thành các thanh thẳng mà kết quả vẫn chấp nhận được.

## ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Sau khi đã thay khối lượng phân bố về tập trung tại một số điểm, tức là ta đã chuyển một hệ có vô hạn bậc tự do về một hệ có số bậc tự do hữu hạn. Việc giải hệ này đã được trình bày ở chương 2.

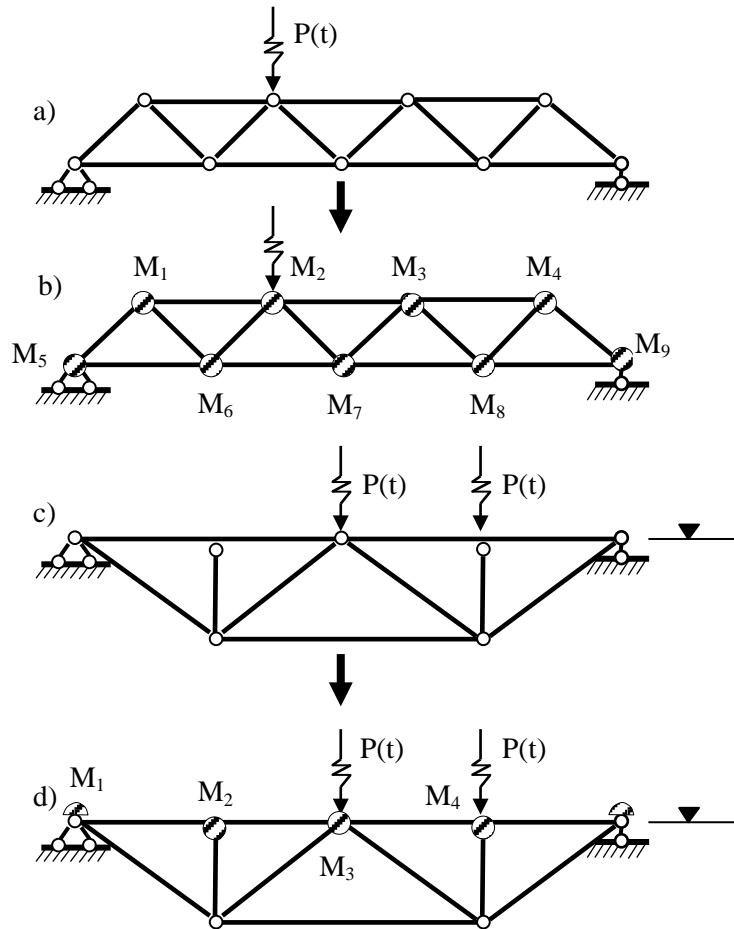
Phương pháp năng lượng ít được sử dụng để tính khung, nhất là các khung nhiều tầng nhiều nhịp phức tạp, do phương trình biểu diễn dạng dao động  $a_k(z)$  là rất phức tạp vì thường phải viết trên nhiều đoạn, đồng thời việc thực hiện các tích phân trong (4-10) cũng tốn rất nhiều thời gian. Còn đối với dầm và dàn, người ta vẫn dùng phương pháp này để xác định tần số riêng  $\omega_1$ , trong trường hợp này hàm  $a_1(z)$  thường lấy dạng giả tĩnh tương ứng và thường cũng không phức tạp lắm.

Sau đây ta xét vài ví dụ minh họa cách áp dụng các phương pháp gần đúng để giải các bài toán cụ thể:

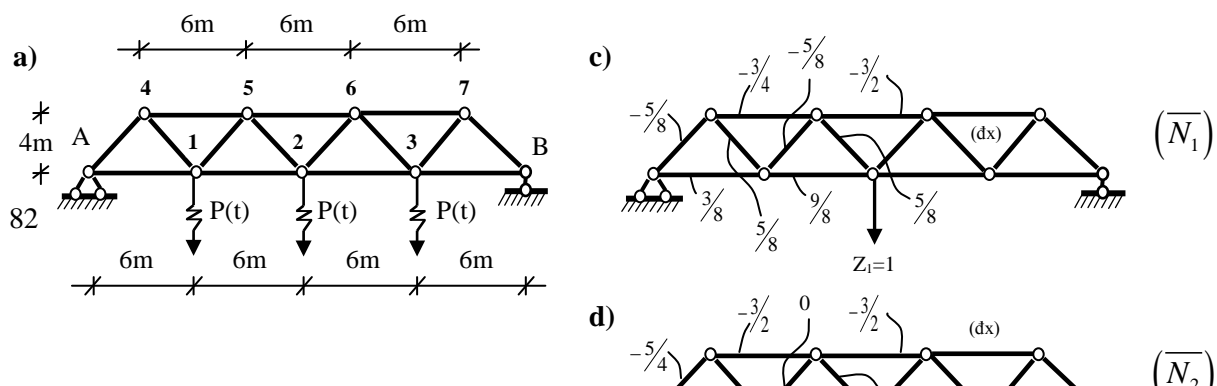
### VÍ DỤ 5-1:

Cho dàn có kích thước và chịu tác dụng của các tải trọng động điều hoà cùng tần số như trên hình 5-3a. Biết  $EF =$  hằng số;  $P(t) = (20kN) \sin rt$ , trong đó  $r = 0,07 \sqrt{\frac{EF}{M}}$  ( $m^{-1}$ ) và dàn có đường xe chạy dưới ( $m$  là viết tắt của mét).

**Yêu cầu:** Xác định các tần số dao động riêng của dàn và biên độ nội lực động trong các thanh dàn.



Hình 5-2



**Bài giải:**

Ta dùng phương pháp khối lượng tập trung để giải bài toán.

**1) Xác định các khối lượng tập trung**

Theo đề ra, dàn có đường xe chạy dưới nên ta sẽ tập trung khối lượng của dàn chỉ vào các nút A, 1, 2, 3, B thuộc biên dưới, nên bài toán chỉ có ba khối lượng thực hiện dao động. Chiều dài các thanh biên trên và dưới là 6m; của các thanh xiên là 5m (do dàn cao 4m). Ta chuyển khối lượng thanh A-4 và một nửa thanh A-1 vào nút A; của thanh B-7 và của nửa thanh B-3 vào nút B. Như vậy khối lượng phần dàn còn lại chuyển về 3 nút 1, 2, 3 sẽ có giá trị như nhau (khối lượng tại mỗi nút bằng tổng khối lượng của hai thanh biên và hai thanh xiên). Ký hiệu khối lượng này là M thì (xem hình 5-3b):

$$M_1 = M_2 = M_3 = M \quad (a)$$

Để giải phương trình tần số (2-11)' và phương trình xác định biên độ lực quán tính (2-24), ta phải xác định các  $\delta_{ik}$  và  $\Delta_{iP}$ , là các chuyển vị đơn vị, và chuyển vị do các biên độ lực động đặt tĩnh gây ra tại các khối lượng. Ta sẽ xác định các chuyển vị này theo công thức Maxwell-Mohr áp dụng cho dàn tĩnh định.

**2) Xác định  $\delta_{ik}$  và  $\Delta_{iP}$**

Do bài toán đối xứng, nên ta chỉ tính bài toán ứng với các dạng dao động đối xứng. Các biểu đồ nội lực  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$  và  $N_P$  do các lực  $Z_1 = 1; Z_2 = 1$  và do các biên độ lực động  $P_0 = 20kN$  đặt tĩnh gây ra tính được như trên hình 5-3c, d, e.

Dùng công thức Maxwell-Mohr ta tính được:

$$\begin{cases} \delta_{11} = (\bar{N}_1)(\bar{N}_1) = 52,75 \frac{m}{EF} \\ \delta_{22} = (\bar{N}_2)(\bar{N}_2) = 105,5 \frac{m}{EF} \\ \delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{N}_1)(\bar{N}_2) = 66,25 \frac{m}{EF} \\ \Delta_{1P} = (\bar{N}_1)(N_{P_0}) = 2380 \frac{kNm}{EF} \\ \Delta_{2P} = (\bar{N}_2)(N_{P_0}) = 3435 \frac{kNm}{EF} \end{cases} \quad (b)$$

**Chú ý:**

Thứ nguyên của  $\delta_{ik}$  là [ chiều dài ], song theo (b), nó được biểu diễn qua  $\left(\frac{m}{EF}\right)$  không cho ta chiều dài, vậy là không đúng về thứ nguyên. Sở dĩ như vậy, bởi vì đúng ra, khi vẽ  $\bar{N}_i$  ta phải giả thiết trước đơn vị của biên độ lực quán tính, nó là [ lực ] (trong bài toán này, ngoại lực được đo bằng kN, nên nó cũng sẽ là kN). Khi đó đơn vị của  $\bar{N}_i$  sẽ là kN, và do đó  $\delta_{ik}$  tính được sẽ được biểu diễn qua  $\left(\frac{kNm}{EF}\right)$  giống như  $\Delta_{iP}$ , song vì một trong hai biểu đồ của phép nhân biểu đồ là thuộc trạng thái giả tạo do lực không thứ nguyên gây ra, cho nên để tiện dụng, khi vẽ  $\bar{N}_i$  ta lấy  $Z_i = 1$  không thứ nguyên, bởi vậy trong biểu thức của  $\delta_{ik}$  thiếu một đơn vị lực của  $Z_i$ . Cũng vì lý do không có đơn vị lực trong  $Z_i$ , nên ở kết quả cuối cùng sẽ xuất hiện thứ nguyên của  $Z_i$  là [ lực ] (trong bài toán này là kN). Như vậy, cách làm như thế này cũng cho kết quả đúng khi tính phản lực và nội lực.

### 3) Xác định các tần số dao động riêng

Thay  $M_1 = M_2 = M$  và các  $\delta_{ik}$  tính được ở trên vào phương trình tần số (2-11)

Ta có:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}M_1 - u) & \left(\delta_{12}\frac{M_2}{2}\right) \\ (\delta_{21}M_1) & \left(\frac{\delta_{22}M_2}{2} - u\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(52,75M\frac{m}{EF} - u\right) & \left(66,25\frac{M}{2}\frac{m}{EF}\right) \\ \left(66,25M\frac{m}{EF}\right) & \left(105,5\frac{M}{2}\frac{m}{EF} - u\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (c)$$

là phương trình bậc 2 đối với u, giải (c) ta được:

$$u_1 = 99,58M\frac{m}{EF} \quad \text{suy ra} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{u_1}} = 0,1002\sqrt{\frac{EF}{M}}(m^{-1})$$

$$\text{và} \quad u_2 = 5,92M\frac{m}{EF} \quad \text{suy ra} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{u_2}} = 0,4105\sqrt{\frac{EF}{M}}(m^{-1})$$

### 4) Xác định biên độ nội lực động trong các thanh dầm



Thay  $\delta_{iK}$ ,  $\Delta_{iP}$  vào phương trình (2-24) rồi giản ước hai vế cho  $\left(\frac{m}{EF}\right)$  ta được hệ phương trình để xác định biên độ lực quán tính như sau:

$$\begin{cases} -151,33Z_1 + 66,25Z_2 + 2380kN = 0 \\ 66,25Z_1 - 302,66Z_2 + 3435kN = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Trong đó ta đã tính được các  $\delta_{11}^*$  và  $\delta_{22}^*$  trong (2-24) như sau:

$$\delta_{11}^* = \left( \delta_{11} - \frac{1}{M_1 r^2} \right) = \left( 52,75 - \frac{1}{0,07^2} \right) \frac{m}{EF} = -151,33 \left( \frac{m}{EF} \right)$$

$$\delta_{22}^* = \left( \delta_{22} - \frac{1}{\frac{M_2}{2} r^2} \right) = \left( 105,5 - \frac{2}{0,07^2} \right) \frac{m}{EF} = -302,66 \left( \frac{m}{EF} \right)$$

Giải (d) ta được:

$$\begin{cases} Z_1 = 22,90kN \\ Z_2 = 16,40kN \end{cases} \quad (e)$$

Biên độ nội lực động trong các thanh dàn có thể tính theo hai cách:

a) Tính trực tiếp: Đặt các biên độ lực quán tính theo (e) và biên độ các lực động  $P_0 = 20kN$  đặt tĩnh tại các khối lượng rồi tính như bài toán tĩnh hình (5-3f).

b) Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng.

$$N^d = \bar{N}_1 Z_1 + \bar{N}_2 Z_2 + N_{P_0}$$

Kết quả như trên hình (5-3g)

### VÍ DỤ 5-2:

Xác định tần số dao động riêng và biểu đồ biên độ mômen động của khung cho trên hình 5-4a. Biết khung có  $EJ =$  hằng số,  $l = 6m$ ét = hằng số, tổng khối lượng mỗi thanh là  $ml = M$ . Khung chịu tác dụng của các lực kích thích điều hoà cùng tần số:

$$P(t) = (60kN) \sin rt; \quad q(t) = \left( 30 \frac{kN}{m} \right) \sin rt$$

Trong đó:  $r = 0,319 \sqrt{\frac{EJ}{M}} (m^{-3})$ . Khi tính bỏ qua lực cản. ( $m$  là viết tắt của mét)

#### Bài giải:

Chia khung thành 5 đoạn và tập trung khối lượng của mỗi thanh về hai đầu thanh, ta được 11 khối lượng tập trung (hình 5-4b). Giả thiết các nút khung không có chuyển vị thẳng, nên hệ chỉ còn 5 khối lượng đặt tại điểm giữa các thanh thực hiện các dao động ngang (hình 5-4c). Đây là một hệ đối xứng chịu tác dụng của các lực động đối xứng, nên ta chỉ cần xét các dao động có dạng đối xứng. Như vậy hệ chỉ có ba bậc tự do.

#### 1) Xác định các $\delta_{iK}$ và $\Delta_{iP}$ :

Cũng như ở ví dụ 5-1, trước hết ta phải xác định các  $\delta_{iK}$  và  $\Delta_{iP}$ . Đây là hệ siêu tĩnh, nên trạng thái giả tạo khi tính chuyển vị theo công thức Maxwell-Mohr có thể tạo ra trên hệ tĩnh định bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho. Nghĩa là, nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, ta có:

$$\Delta_{iP} = (M_P) \bar{M}_i^0 \quad (a)$$

Trong đó  $M_P$  là biểu đồ mômen do tải trọng đã cho gây ra trong hệ siêu tĩnh đang xét.  $\bar{M}_i^0$  là biểu đồ mômen ở trạng thái giả tạo được tạo ra trên hệ tĩnh định.

Áp dụng (a) để tính  $\delta_{iK}$  ta có:

$$\delta_{iK} = (\bar{M}_i) (\bar{M}_K^0) \text{ hoặc } = (\bar{M}_i^0) (\bar{M}_K) \quad (b)$$

Các biểu đồ mômen đơn vị  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  do  $Z_1=1, Z_2=1, Z_3=1$  không thứ nguyên (xem chú ý ở ví dụ 5-1) gây ra, còn  $M_P$  do biên độ các lực động ( $P_0$  và  $q_0$ ) đặt tĩnh gây ra trong hệ siêu tĩnh đã cho, dùng phương pháp chuyển vị vẽ được như trên các hình (5-4 d, e, f, g).

Các biểu đồ mômen ở trạng thái giả tạo  $\bar{M}_1^0, \bar{M}_2^0, \bar{M}_3^0$  trên các hệ tĩnh định vẽ được như trên các hình (5-4 h, m, n).

Áp dụng (a) và (b) sau khi “nhân” các biểu đồ ta được:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 1,88 \frac{m^3}{EJ} & \delta_{12} = \delta_{21} &= -1,13 \frac{m^3}{EJ} \\ \delta_{22} &= 5,63 \frac{m^3}{EJ} & \delta_{13} = \delta_{31} &= -0,75 \frac{m^3}{EJ} \\ \delta_{33} &= 3,00 \frac{m^3}{EJ} & \delta_{23} = \delta_{32} &= 1,13 \frac{m^3}{EJ} \\ \Delta_{1P} &= 123,7 \frac{kNm^3}{EJ}; \Delta_{2P} = 202,5 \frac{kNm^3}{EJ}; \Delta_{3P} = -22,5 \frac{kNm^3}{EJ}. \end{aligned}$$

**2) Xác định các tần số dao động riêng:**

Áp dụng phương trình tần số (2-11)' ta có

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}M_1 - u) & \left( \delta_{12} \frac{M_2}{2} \right) & \left( \delta_{13} \frac{M_3}{2} \right) \\ (\delta_{21}M_1) & \left( \delta_{22} \frac{M_2}{2} - u \right) & \left( \delta_{23} \frac{M_3}{2} \right) \\ (\delta_{31}M_1) & \left( \delta_{32} \frac{M_2}{2} \right) & \left( \delta_{33} \frac{M_3}{2} - u \right) \end{vmatrix} = 0$$

Thay các  $\delta_{iK}$  tính ở trên và các khối lượng tập trung

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{M}{2} \text{ và ký hiệu là } M^* \quad (d)$$

vào (c) rồi khai triển định thức (c) ta được một phương trình bậc 3 đối với  $u$ . Giải phương trình này ta được (bỏ qua tính toán chi tiết)

$$u_1 = 3,546M^* \frac{m^3}{EJ} \text{ suy ra } \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{u_1}} = 0,531 \sqrt{\frac{EJ}{M^*}} (m^{-3})$$

$$u_2 = 1,502M^* \frac{m^3}{EJ} \text{ suy ra } \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{u_2}} = 0,816 \sqrt{\frac{EJ}{M^*}} (m^{-3})$$

và  $u_3 = 1,139M^* \frac{m^3}{EJ} \text{ suy ra } \omega_3 = \sqrt{\frac{1}{u_3}} = 0,937 \sqrt{\frac{EJ}{M^*}} (m^{-3})$

3) Vẽ biểu đồ biên độ mô men động:

Thay  $\delta_{iK}$  và  $\Delta_{iP}$  tính ở trên vào phương trình (2-24), rồi giản ước hai vế cho  $\frac{m^3}{EJ}$  ta được hệ phương trình để xác định biên độ các lực quán tính là:

$$\begin{cases} -7,94Z_1 - 1,13Z_2 - 0,75Z_3 + 123,7kN = 0 \\ -1,13Z_1 - 14,01Z_2 + 1,13Z_3 + 202,5kN = 0 \\ -0,75Z_1 + 1,13Z_2 - 16,64Z_3 - 22,5kN = 0 \end{cases} \quad (f)$$

Trong đó ta đã tính được các  $\delta_{ii}^*$  trong phương trình (2-24) như sau:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{(M^* r^2)} = \left[ 1,88 - \frac{1}{(0,319)^2} \right] \frac{m^3}{EJ} = -7,94 \left( \frac{m^3}{EJ} \right)$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{\left( \frac{M^*}{2} r^2 \right)} = \left[ 5,63 - \frac{2}{(0,319)^2} \right] \frac{m^3}{EJ} = -14,01 \left( \frac{m^3}{EJ} \right)$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{1}{\left( \frac{M^*}{2} r^2 \right)} = \left[ 3,00 - \frac{2}{(0,319)^2} \right] \frac{m^3}{EJ} = 16,64 \left( \frac{m^3}{EJ} \right)$$

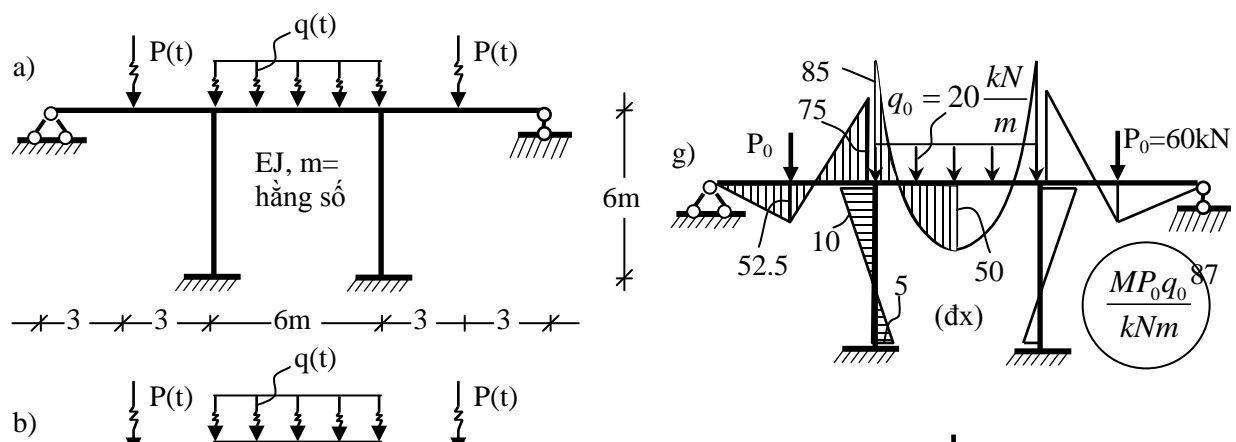
Giải hệ phương trình (f) ta được:

$$Z_1 = 13,9kN; Z_2 = 13,27kN; Z_3 = -1,08kN$$

Biểu đồ biên độ nội lực mô men động vẽ được theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$M^d = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_{(P_0, q_0)}$$

Kết quả cho trên hình (5-4l).



## **5.2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH CHÍNH XÁC**

Để tính chính xác động lực học của một hệ kết cấu thực (có vô hạn bậc tự do), ta áp dụng lý thuyết tính toán đã được trình bày ở chương 3. Tùy thuộc vào cách vận dụng mà ta có hai phương pháp tính cơ bản: Phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Phương pháp lực

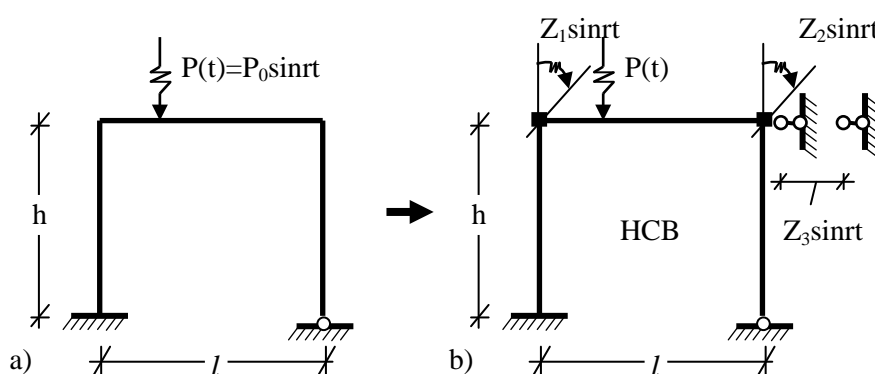
dùng để tính động lực học các kết cấu siêu tĩnh bất kỳ. Đây là một phương pháp tính tổng quát song rất phức tạp với khối lượng tính toán lớn nên rất ít được dùng trong thực tế. Phương pháp chuyển vị, như đã biết trong tĩnh lực học kết cấu, là phương pháp dùng để tính chuyển vị cho kết cấu bất kỳ (hệ siêu động)-có thể tĩnh định hoặc siêu tĩnh-miễn là có đủ các phần tử mẫu liên quan. Đây là phương pháp tính đơn giản, được coi là chính xác, và được áp dụng nhiều cả trong tĩnh lực học và động lực học kết cấu hệ thanh thẳng. Trong mục này chúng ta chỉ nghiên cứu phương pháp này.

Các phần tử mẫu (động lực học dầm một nhịp) phục vụ cho phương pháp chuyển vị để tính động lực học hệ thanh thẳng, phẳng có thể xây dựng được dựa vào lý thuyết đã được trình bày ở chương 3 (xem chương 3)-kết quả cho ở bảng phụ lục.

Việc áp dụng phương pháp chuyển vị để giải bài toán động lực học cũng tương tự như trong bài toán tĩnh. Nghĩa là, ẩn số của phương pháp là các chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng độc lập của các nút, mà ta ký hiệu là  $Z_i(t)$ .

Số ẩn số của bài toán:  $n=n_g+n_t$  (5-1)

Xét kết cấu trên hình 5-5a: Hệ có:  $n_g=2$ ;  $n_t=1$ ; nên  $n=3$



**Hình 5-5**

Hệ cơ bản như trên hình 5-5b. Khi tải trọng động là điều hoà  $P(t) = P_0 \sin rt$ , thì chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng của các nút của kết cấu khi dao động đã ổn định cũng biến đổi điều hoà với tần số là tần số của lực kích thích điều hoà:

$$Z_i(t) = Z_i \sin rt \quad (a)$$

Phản lực động sinh ra trong các liên kết được thêm vào trong hệ cơ bản (HCB) cũng biến đổi điều hoà cùng tần số r.

$$R_{iK}(t) = R_{iK} \sin rt \quad (b)$$

Lập luận hoàn toàn như trong bài toán tĩnh, điều kiện để HCB làm việc như hệ thực là các phản lực trong các liên kết mới thêm vào trong HCB phải bằng không. Xét liên kết thêm vào thứ i:

$$\begin{aligned} R_i(t) &= R_{iZ_1(t)} + R_{iZ_2(t)} + \dots + R_{iZ_n(t)} + R_{iP(t)} = 0 \\ R_i(t) &= r_{i1}Z_1(t) + r_{i2}Z_2(t) + \dots + r_{in}Z_n(t) + R_{iP(t)} = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

Ở đây  $r_{ik}$  là biên độ phản lực động trong liên kết thêm vào thứ  $i$  do liên kết thêm vào thứ  $k$  dịch chuyển cưỡng bức một lượng  $(1.\sin rt)$  gây ra trong hệ cơ bản.

Thay (a), (b) vào (c) rồi giản ước hai vế cho  $\sin rt$  (do phải tồn tại dao động nên  $\sin rt \neq 0$ ), ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị để tính động lực học các kết cấu hệ thanh thẳng, có dạng hoàn toàn như ở bài toán tĩnh. Khi bài toán có  $n$  ẩn:

$$\begin{cases} r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{iP} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5-2)$$

Trong đó:  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  là biên độ chuyển vị động của các nút (chuyển vị góc, chuyển vị thẳng).  $R_{iP}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) là biên độ phản lực động tại liên kết thêm vào thứ  $i$  do ngoại lực động điều hoà gây ra trên HCB.

Các  $r_{iK}$  và  $R_{iP}$  có thể tra trực tiếp ở bảng phụ lục, tuy nhiên trong thực tế, ta hay tra bảng các biểu đồ  $\bar{M}_i, M_p^0$  rồi dùng điều kiện cân bằng để xác định  $r_{iK}$  và  $R_{iP}$  sẽ thuận tiện hơn. Trong đó  $\bar{M}_i$  là biểu đồ mômen do  $Z_i = 1 \sin rt$  gây ra, còn  $M_p^0$  là do ngoại lực động ( $P_0 \sin rt$ ) gây ra trên hệ cơ bản (các biểu đồ này đều tra bảng).

### 5.2.1 Xác định tần số dao động tự do

Hệ phương trình biểu diễn dao động tự do theo phương pháp chuyển vị có được từ (5-2):

$$\begin{cases} r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + R_{in}Z_n = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5-3)$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Để tồn tại dao động, nghĩa là các  $Z_i$  không đồng thời bằng không, buộc định thức các hệ số phải bằng không-Đây là phương trình tần số của bài toán:

$$Det = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (5-4)$$

Giải bài toán trị riêng này ta sẽ xác định được các giá trị riêng (chính là các tần số riêng) và các véc tơ riêng (chính là các dạng dao động riêng tương ứng). (5-4) thường là một phương trình siêu việt, nên sẽ có vô số nghiệm tương ứng với vô số tần số dao động riêng của hệ.

### 5.2.2 Biểu đồ biên độ nội lực động

Giải hệ phương trình (5-2) sẽ xác định được  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ . Biểu đồ biên độ mô men động vẽ được theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$M^d = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p^0 \quad (5-5)$$

Biểu đồ  $Q^d$  được suy ra từ  $M^d$ ; còn  $N^d$  được suy ra từ  $Q^d$  như vẫn thường làm trong bài toán tĩnh.

**VÍ DỤ 5-3:**

Xác định tần số dao động riêng và vẽ biểu đồ biên độ nội lực mô men động của khung chịu tác dụng của tải trọng động điều hoà  $P(t) = \frac{P}{2} \sin rt$  như trên hình (5-6a). Biết khung có:

$EJ = 4 \times 10^4 \text{ kNm}^2 = \text{hằng số}$ ; trọng lượng trên một mét dài là:  $q = \frac{40 \text{ kN}}{3 \text{ m}}$  và  $r = 10 \frac{1}{s}$ .

**Bài giải:**

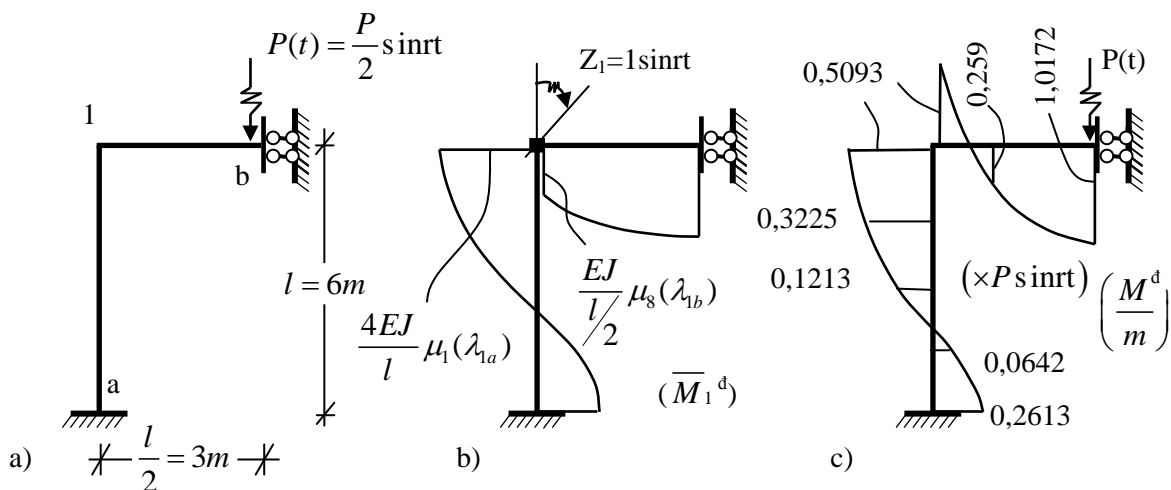
Ta dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán

**1) Xác định các tần số dao động riêng**

Hệ có  $n_g=1$ ;  $n_t=0$  nên  $n=n_g+n_t=1$

nên phương trình tần số là:  $r_{11}=0$  (a)

Hệ cơ bản và biểu đồ  $\bar{M}_1^d$  tra bảng được như trên hình (5-6b)



**Hình 5-6**

Xét cân bằng nút 1 trên biểu đồ  $\bar{M}_1^d$  ta được:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{l} \mu_1(\lambda_{1a}) + \frac{EJ}{l/2} \mu_8(\lambda_{1b}) \quad (b)$$

Trong đó, theo (3-42) ta có:

Ký hiệu:  $\lambda_{1a} = Kl_{1a} = Kl = \lambda$ ;  $\lambda_{1b} = Kl_{1b} = K \frac{l}{2} = \frac{\lambda}{2}$  (c)

Thay (c), (b) vào (a) được phương trình tần số:

$$\lambda \frac{(ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda)}{(1 - ch\lambda \cos \lambda)} + 2 \frac{\lambda}{2} \frac{2ch\left(\frac{\lambda}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(ch\left(\frac{\lambda}{2}\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) + sh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)} = 0$$

Sau khi biến đổi ta được:

$$2ch\lambda \sin \lambda - 2sh\lambda \cos \lambda - sh\lambda + \sin \lambda = 0 \quad (a)'$$

(a)' là phương trình siêu việt, sẽ có vô số nghiệm; bằng cách giải gần đúng ta xác định được hai nghiệm bé nhất (ứng với hai tần số bé nhất) như nhau:

$$\lambda_1 = K_1 l = 3,56 \quad \text{suy ra} \quad K_1 = \frac{3,56}{l}$$

và (d)

$$\lambda_2 = K_2 l = 7,43 \quad \text{suy ra} \quad K_2 = \frac{7,43}{l}$$

Theo (3-9):  $\omega_i = K_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$  ( $m$  là cường độ khối lượng phân bố) (f)

Thay  $l=6$  mét; khối lượng  $m = \frac{q}{g} = \frac{40kN}{3 \times 10} s^2 m^{-2} = \frac{4}{3} kNs^2 m^{-2}$ ; và EJ vào (f) ta có:

$$\omega_1 = \left(\frac{3,56}{6}\right)^2 \sqrt{\frac{4 \times 10^4 \times 3}{4s^2}} = 60,7 \frac{1}{s};$$

$$\omega_2 = \left(\frac{7,43}{6}\right)^2 \sqrt{\frac{4 \times 10^4 \times 3}{4s^2}} = 265,5 \frac{1}{s};$$

Ta có thể tính tiếp các tần số bậc cao hơn  $\omega_3, \omega_4 \dots$

**2) Vẽ biểu đồ biên độ nội lực mô men động:**

Từ các số liệu của bài toán, ta tính được thông số k theo (3-34) là:

$$k = \sqrt[4]{\frac{mr^2}{EJ}} = \sqrt[4]{\frac{40}{3 \times 10} \times 10^2 \over 4 \times 10^4}} = 0,24(m^{-1}) \text{ nên}$$

$$\lambda_{1a} = kl = 0,24m^{-1} \times 6m = 1,44$$

$$\lambda_{1b} = k \frac{l}{2} = 0,24m^{-1} \times 3m = 0,72$$

rồi thay vào (b) ta tính được:  $r_{11} = 5,588652 \frac{EJ}{l}$

**Chú ý:**

Để tính  $r_{11}$  ta tra bảng phụ lục được:

$$\mu_1(\lambda_{1a}) = \mu_1(1,44) \approx 0,989515$$

còn  $\mu_8(\lambda_{1b}) = \mu_8(0,72)$  không có trong bảng tra, nên ta phải tra trực tiếp theo công thức:



$$\mu_8(\lambda) = \lambda \frac{A_\lambda^2 - C_\lambda^2}{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}$$

Tra bảng A, B, C, D ( $\lambda$ ) (với  $\lambda=0,72$ ) rồi thay vào và ta tính được:

$$\mu_8(0,72) = 0,81573$$

còn 
$$R_{1P} = -\frac{P}{2K} \frac{(C_\lambda A_{K_0} - A_\lambda C_{K_0})}{(A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda)} = -0,75730Pm$$

Thay  $r_{11}$  và  $R_{1P}$  tính ở trên vào phương trình chính tắc của bài toán:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0 \quad \text{hay}$$

$$5,588652 \frac{EJ}{l} Z_1 - 0,7573P = 0$$

$$Z_1 = 0,12865 \frac{Pl}{EJ} m \quad (m \text{ là viết tắt của mét}) \quad (g)$$

Để vẽ biểu đồ biên độ mô men động (luôn luôn là đường cong) ta phải viết biểu thức biểu diễn sự biến đổi của biên độ mô men động cho từng thanh dựa vào công thức thông số ban đầu (3-35).

\* *Xét thanh a-1*: Chọn gốc tọa độ ở đầu a, các thông số ban đầu gồm:

$$y_{(0)} = 0; y'_{(0)} = 0;$$

$$M(0) = \frac{2EJ}{l} \mu_2(1,44)Z_1 = \frac{2EJ}{l} \times 1,0155 \times 0,12865 \frac{Pl}{EJ} m = 0,26129Pm$$

$$Q(0) = -\frac{6EJ}{l^2} \varepsilon_2(1,44)Z_1 = -\frac{EJ}{l} \times 1,02241 \times 0,12865 \frac{Pl}{EJ} = -0,13153P$$

Thay các thông số ban đầu này vào (3-35) được:

$$M(z) = [0,26129A_{KZ} - 0,54805B_{KZ}] Pm \quad (h)$$

\* *Xét thanh 1-b*: Chọn gốc tọa độ tại nút 1, có các thông số ban đầu:

$$y_{(0)} = 0; y'_{(0)} = Z_1 = 0,12865 \frac{Pl}{EJ} m$$

$$M_{(0)} = \bar{M}_1 Z_1 + M_P^0 = \frac{EJ}{(l/2)} \mu_8(0,72)Z_1 - 0,7573P = -0,50929P$$

$$Q_{(0)} = \bar{Q}_1 Z_1 + Q_P^0 = \frac{EJ}{(l/2)^2} \varepsilon_9(0,72)Z_1 + P \frac{(B_\lambda A_{K_0} - D_\lambda C_{K_0})}{(A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda)}$$

Tra bảng  $\varepsilon_9(0,72)$  và các hàm  $A(0,72)$ ;  $B(0,72)$  vv... rồi thay vào ta tính được

$$Q_{(0)} = 0,51335P$$

Lại thay các thông số vừa tìm được vào (3-35) ta được phương trình  $M(z)$  của thanh 1-b như sau:

$$M(z) = -KEJ \frac{0,12865Pl}{EJ} D_{KZ} - 0,50929PA_{KZ} + \frac{1}{K} 0,51335PB_{KZ} \quad (i)$$

$$M(z) = (-0,18526D_{KZ} - 0,50929A_{KZ} + 2,1389B_{KZ}) Pm$$

Vẽ đồ thị hàm (h) và (i) ta được biểu đồ biên độ mô men động như trên hình (5-6c).

**VÍ DỤ 5-4:**

Xác định tần số dao động riêng của dầm liên tục cho trên hình (5-7a). Biết dầm có  $l, EJ$ , khối lượng  $m =$  hằng số.

**Bài giải:**

Dầm đã cho có dạng đối xứng, nên sẽ có dạng dao động riêng đối xứng và dạng dao động riêng phản đối xứng.

Phương trình dao động tự do-theo phương pháp chuyển vị-có dạng như sau:

$$r_{11}Z_1 = 0$$

Đây là phương trình tích, nên có thể xảy ra 2 trường hợp.

1) Khi  $Z_1=0$ , nghĩa là nút 1 không xoay, đây là dạng dao động đối xứng. Lúc này dạng dao động của dầm tương ứng với một nửa hệ như trên hình (5-7b). Đây là dầm 1 nhịp một đầu ngàm một đầu khớp, các tần số  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  và các dạng dao động tương ứng đã cho như trong bảng 3.1.

2) Khi  $r_{11}=0$ , dạng dao động có dạng phản đối xứng như trên hình (5-7c).

Với dầm đã cho, tra bảng có:

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} \mu_5(\lambda) + \frac{3EJ}{l} \mu_5(\lambda) = 0, \text{ suy ra}$$

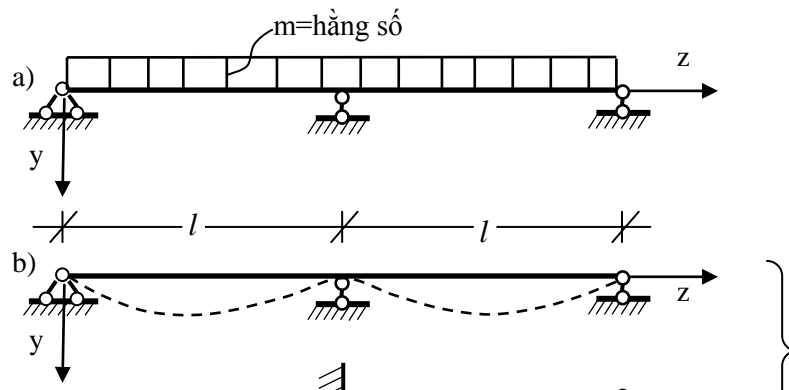
$$\mu_5(\lambda) = 0 = \frac{\lambda 4sh\lambda \sin \lambda}{(6ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda)}. \text{ Do mẫu số khác không nên } \sin \lambda = 0$$

Suy ra: 
$$\begin{cases} \lambda = i\pi \\ (i = 1, 2, \dots, \infty) \end{cases} \quad (j)$$

Thay  $\lambda$  tính theo (j) vào (3-9) ta được công thức tổng quát để xác định các tần số dao động riêng tương ứng với dao động phản đối xứng:

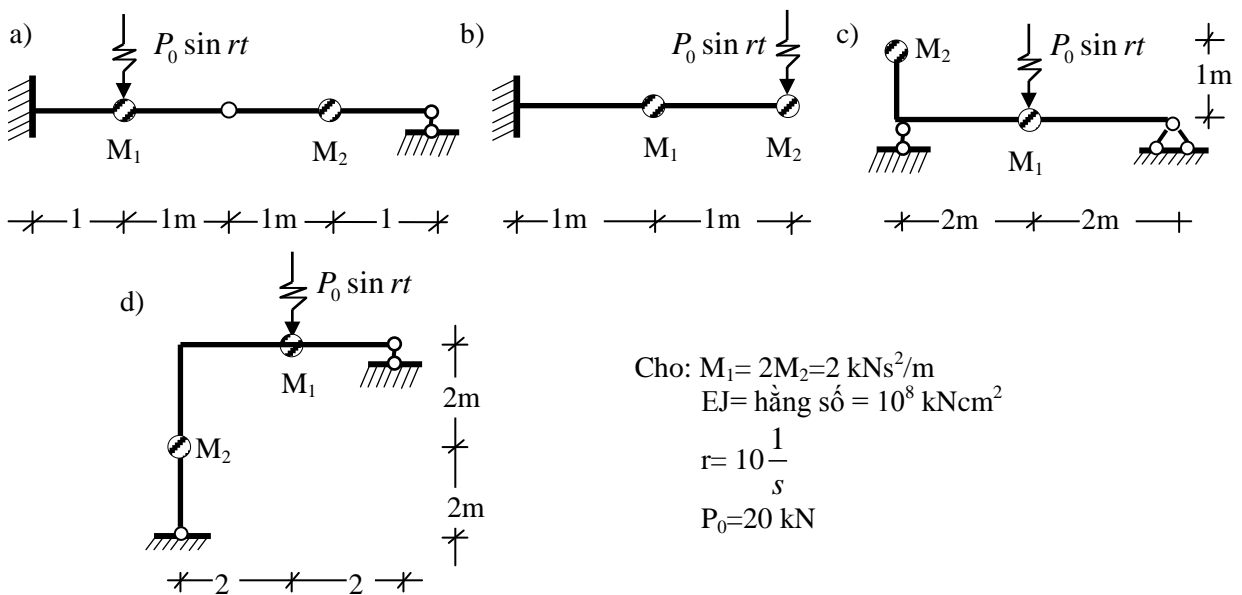
$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (k)$$

$$(i=1, 2, \dots, \infty)$$



**BÀI TẬP**

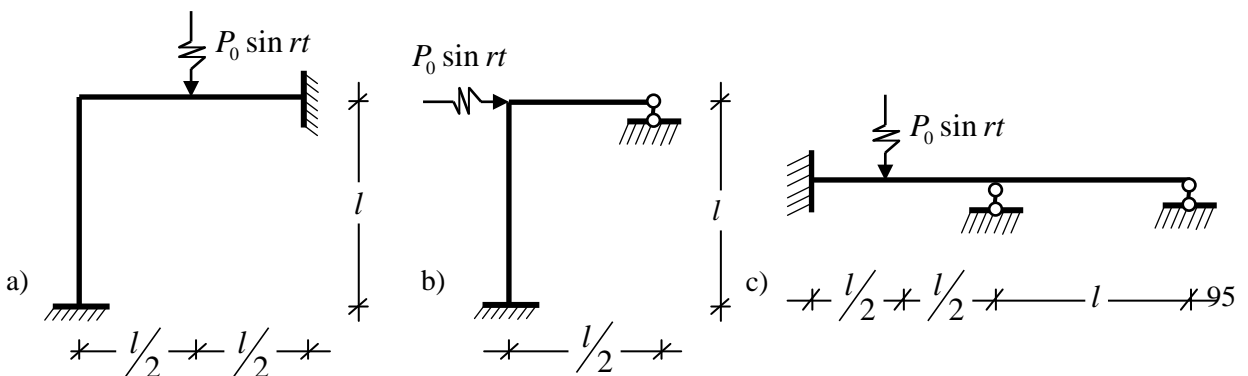
1) Tính tần số dao động riêng  $\omega_1$  của các kết cấu cho trên hình bằng hai phương pháp: Tính chính xác và tính gần đúng theo công thức của S.A.Pestel. Vẽ biểu đồ biên độ mô men động.



2) Xác định tần số dao động riêng Hình 1' và vẽ biểu đồ biên độ mô men động của kết cấu trên hình 2 bằng hai phương pháp: gần đúng và chính xác.

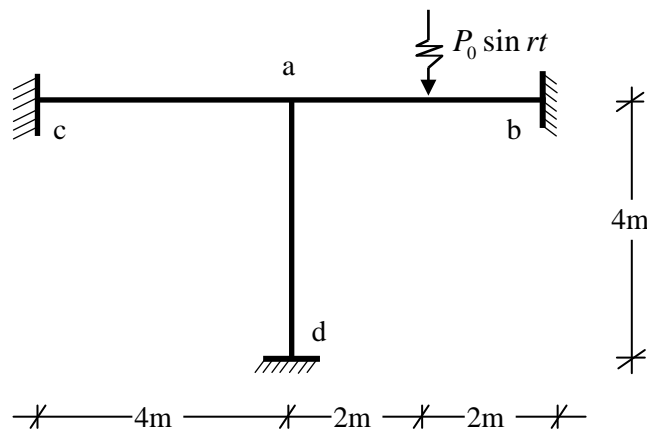
Biết:  $EJ, m$  (là khối lượng phân bố trên 1 mét dài), bằng hằng số,  $P=20\text{kN}$ ,

$$r = 0,25 \sqrt{\frac{EJ}{ml}} (\text{met})^{-3}$$



Cho:  $EJ, m = \text{hằng số}$

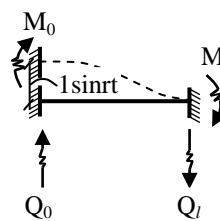
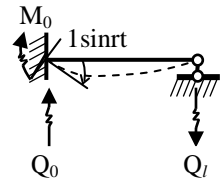
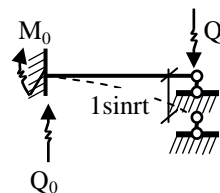
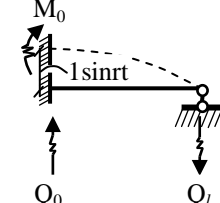
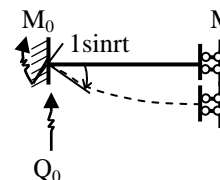
3) Vẽ biểu đồ biên độ mômen động, kết cấu cho trên hình 3. Biết:  $EJ$ ,  $m =$  hằng số;  $K_{ab}=0,6 \text{ m}^{-1}$ ;  $K_{ac}=0,3 \text{ m}^{-1}$ ;  $K_{ad}=0,5 \text{ m}^{-1}$ .



**Hình 3**

**Bảng 1: Biên độ phản lực động do chuyển vị động điều hoà của liên kết tựa gây ra**

Sơ đồ	$M_{ab} = M_0$	$M_{ba} = M_l$	$Q_{ab} = M_0$	$Q_{ba} = Q_l$
	$\frac{4EJ}{l} \mu_1(\lambda)$	$\frac{2EJ}{l} \mu_2(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \varepsilon_1(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \varepsilon_2(\lambda)$

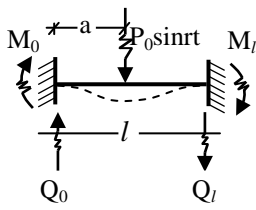
	$-\frac{6EJ}{l^2} \mu_3(\lambda)$	$-\frac{6EJ}{l^2} \mu_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \varepsilon_4(\lambda)$	$\frac{12EJ}{l^3} \varepsilon_4(\lambda)$
	$\frac{3EJ}{l} \mu_5(\lambda)$	0	$-\frac{3EJ}{l^2} \varepsilon_5(\lambda)$	$-\frac{3EJ}{l^2} \varepsilon_5^*(\lambda)$
	$-\frac{3EJ}{l^2} \mu_6(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_6(\lambda)$	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_5^*(\lambda)$
	$-\frac{3EJ}{l^2} \mu_7(\lambda)$	0	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_7(\lambda)$	$\frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_8(\lambda)$
	$\frac{EJ}{l} \mu_8(\lambda)$	$-\frac{EJ}{l} \mu_9(\lambda)$	$\frac{EJ}{l^2} \varepsilon_9(\lambda)$	0

$$k^4 = \frac{mr^2}{EJ}; \quad \lambda = kl; \quad \text{Các hàm } \mu, \varepsilon \text{ trên bảng 3}$$

**Bảng 2: Biên độ phản lực động do tải trọng động điều hoà gây ra trong dầm 1 nhịp.**

Sơ đồ

Trị số các hàm A, B, C, D tra bảng

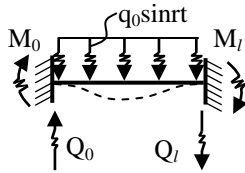


$$M_0 = \frac{P_0}{k} [C_\lambda D_{k(l-a)} - D_\lambda C_{k(l-a)}] / \Delta_1$$

$$Q_0 = P_0 [C_\lambda C_{k(l-a)} - B_\lambda D_{k(l-a)}] / \Delta_1$$

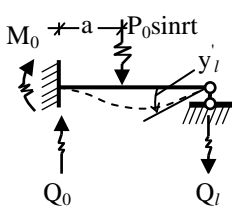
$$M_l = \frac{P_0}{k} [D_\lambda C_{ka} - C_\lambda D_{ka}] / \Delta_1$$

$$Q_l = P_0 [B_\lambda D_{ka} - C_\lambda C_{ka}] / \Delta_1$$



$$M_0 = -M_l = \frac{q_0}{k^2} [C_\lambda (A_\lambda - 1) - D_\lambda^2] / \Delta_1$$

$$Q_0 = -Q_l = \frac{q_0}{k} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] / \Delta_1$$

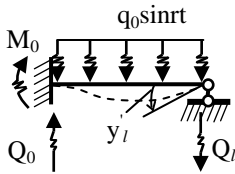


$$M_0 = \frac{P_0}{k} [D_\lambda B_{k(l-a)} - B_\lambda D_{k(l-a)}] / \Delta_2$$

$$Q_0 = P_0 [A_\lambda D_{k(l-a)} - C_\lambda B_{k(l-a)}] / \Delta_2$$

$$M_l = P_0 [B_\lambda C_{ka} - A_\lambda D_{ka}] / \Delta_2$$

$$y_l = \frac{P_0}{k^2 EJ} [C_\lambda D_{ka} - D_\lambda C_{ka}] / \Delta_2$$

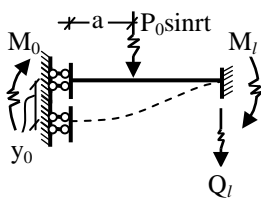


$$M_0 = \frac{q_0}{k^2} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] / \Delta_2$$

$$Q_0 = \frac{q_0}{k} [A_\lambda (A_\lambda - 1) - C_\lambda^2] / \Delta_2$$

$$Q_l = \frac{q_0}{k} [A_\lambda (A_\lambda - 1) - B_\lambda D_\lambda] / \Delta_2$$

$$y_l = \frac{q_0}{k^2 EJ} [D_\lambda^2 - C_\lambda (A_\lambda - 1)] / \Delta_2$$

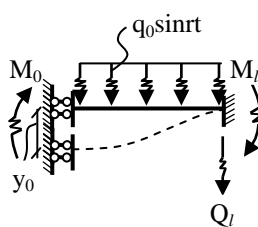


$$M_0 = \frac{P_0}{k} [A_\lambda C_{k(l-a)} - D_\lambda D_{k(l-a)}] / \Delta_3$$

$$Q_0 = \frac{P_0}{k^3 EJ} [B_\lambda D_{k(l-a)} - C_\lambda C_{k(l-a)}] / \Delta_3$$

$$M_l = \frac{P_0}{k} [C_\lambda A_{ka} - A_\lambda C_{ka}] / \Delta_3$$

$$Q_l = P_0 [D_\lambda C_{ka} - B_\lambda A_{ka}] / \Delta_3$$



$$M_0 = \frac{q_0}{k^2} D_\lambda / \Delta_3$$

$$Q_0 = \frac{q_0}{k^4 EJ} [C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] / \Delta_3$$

$$M_l = -\frac{q_0}{k^2} [A_\lambda D_\lambda + B_\lambda C_\lambda] / \Delta_3$$

$$Q_l = \frac{q_0}{k} [D_\lambda^2 - B_\lambda^2] / \Delta_3$$

$$\Delta_1 = C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda; \Delta_2 = A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda; \Delta_3 = A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda$$

**BẢNG CÁC HÀM SỐ ẢNH HƯỞNG ĐỂ TÍNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA KHUNG VÀ DÀM LIÊN TỤC**

**Biểu thức các hàm số ảnh hưởng:**

$$A_{kz} = \frac{chkz + \cos kz}{2}; \quad B_{kz} = \frac{shkz + \sin kz}{2}$$

$$C_{kz} = \frac{chkz - \cos kz}{2}; \quad D_{kz} = \frac{shkz - \sin kz}{2}$$

**Đạo hàm của các hàm số:**

$$\frac{dA_{kz}}{dz} = k.D_{kz}; \quad \frac{dC_{kz}}{dz} = k.B_{kz}$$

$$\frac{dB_{kz}}{dz} = k.A_{kz}; \quad \frac{dD_{kz}}{dz} = k.C_{kz}$$

**Tích phân của các hàm số:**

$$\int A_{kz} dz = \frac{1}{k} B_{kz}; \quad \int z.A_{kz} dz = \frac{z}{k} B_{kz} - \frac{C_{kz}}{k^2}$$

$$\int B_{kz} dz = \frac{1}{k} C_{kz}; \quad \int z.B_{kz} dz = \frac{z}{k} C_{kz} - \frac{D_{kz}}{k^2}$$

$$\int C_{kz} dz = \frac{1}{k} D_{kz}; \quad \int z.C_{kz} dz = \frac{z}{k} D_{kz} - \frac{A_{kz}}{k^2}$$

$$\int D_{kz} dz = \frac{1}{k} A_{kz}; \quad \int z.D_{kz} dz = \frac{z}{k} A_{kz} - \frac{B_{kz}}{k^2}$$

**Liên hệ giữa các hàm số:**

$$C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \frac{1 - ch\lambda \cos \lambda}{2}$$

$$A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda = \frac{1}{2} (sh\lambda \cos \lambda - ch\lambda \sin \lambda)$$

$$B_\lambda^2 - D_\lambda^2 = 2(A_\lambda C_\lambda - D_\lambda^2) = sh\lambda \sin \lambda$$

$$A_\lambda^2 - C_\lambda^2 = ch\lambda \cos \lambda$$

$$A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda = \frac{1}{2} (ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda)$$

$$A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2 = D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda = -\frac{1}{2} sh\lambda \sin \lambda$$

$$2A_\lambda C_\lambda = B_\lambda^2 + D_\lambda^2$$

$$B_\lambda D_\lambda - A_\lambda^2 = -\frac{1}{2} (1 + ch\lambda \cos \lambda)$$

<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
0.00	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.10	1.000000	0.100000	0.005000	0.000170

**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

0.20	1.000070	0.200005	0.020000	0.001335
0.30	1.000340	0.300020	0.045000	0.004500
0.40	1.001065	0.400085	0.080005	0.010665
0.50	1.002605	0.500265	0.125025	0.020835
0.60	1.005405	0.600645	0.180065	0.036005
0.70	1.010005	0.701400	0.245165	0.057180
0.80	1.017070	0.802735	0.320360	0.085375
0.90	1.027350	0.904925	0.405740	0.121595
1.00	1.416900	1.008335	0.501390	0.166865
1.02	1.045130	1.029205	0.521760	0.177095
1.04	1.048780	1.050140	0.542560	0.187740
1.06	1.052640	1.071160	0.563770	0.198800
1.08	1.056735	1.092250	0.585405	0.210290
1.10	1.041690	1.008338	0.501390	0.166863
1.12	1.061060	1.134695	0.629945	0.234595
1.14	1.070440	1.156050	0.652850	0.247420
1.16	1.075525	1.177510	0.676185	0.260710
1.18	1.080875	1.199080	0.699955	0.274470
1.20	1.086510	1.220750	0.724150	0.887100
1.22	1.092430	1.242540	0.748780	0.303440
1.24	1.098650	1.264445	0.773850	0.318665
1.26	1.105180	1.286485	0.799390	0.334395
1.28	1.112030	1.308660	0.835310	0.350640
1.30	1.119205	1.330970	0.851705	0.367410
1.32	1.126730	1.353430	0.878550	0.384710
1.34	1.134595	1.376040	0.905845	0.402560
1.36	1.142835	1.398815	0.933595	0.420955
1.38	1.151440	1.421755	0.961800	0.439905
1.40	1.160435	1.444875	0.990465	0.459425
1.42	1.169825	1.468175	1.019595	0.479525
1.44	1.179615	1.491670	1.049195	0.500210
1.46	1.189835	1.515365	1.079265	0.521465
1.48	1.120048	1.539265	1.109810	0.543385
1.50	1.211575	1.563385	1.140835	0.565895
1.52	1.223120	1.587735	1.172350	0.589025
1.54	1.235140	1.612315	1.204350	0.612785
1.56	1.247640	1.637140	1.236840	0.637200
1.58	1.260635	1.662225	1.269835	0.662565
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
1.60	1.274130	1.687570	1.303330	0.688000
1.62	1.288155	1.713195	1.337335	0.714405



**Chương 5. Động lực học của kết cấu hệ thanh phẳng**

1.64	1.302710	1.713195	1.371860	0.741490
1.66	1.317815	1.765305	1.406905	0.769285
1.68	1.333485	1.791815	1.442475	0.797775
1.70	1.349740	1.818645	1.476580	0.826985
1.72	1.367575	1.845810	1.515225	0.856920
1.74	1.384015	1.873315	1.552415	0.887595
1.76	1.402080	1.901175	1.590160	0.919025
1.78	1.420785	1.929405	1.628465	0.951205
1.80	1.440135	1.958010	1.667335	0.984160
1.82	1.460155	1.987015	1.706785	1.017905
1.84	1.430860	2.016420	1.768200	1.052440
1.86	1.502255	2.046250	1.787445	2.087780
1.88	1.524375	2.076520	1.828675	1.123940
1.90	1.547220	2.107230	1.870510	1.160940
1.92	1.570815	2.138415	1.912965	1.198765
1.94	1.595180	2.170065	1.956050	1.237455
1.96	1.620320	2.202220	1.999770	1.277010
1.98	1.646265	2.234890	2.044145	1.317450
2.00	1.673025	2.268080	2.089175	1.358780
2.02	1.700620	2.301181	2.134870	1.401020
2.04	1.729070	2.336110	2.181250	1.444180
2.06	1.758395	2.370985	2.228315	1.488275
2.08	1.788610	2.406450	2.276090	1.533320
2.10	1.819730	2.442535	2.324580	1.579325
2.12	1.851785	2.479245	2.373795	1.626305
2.14	1.884795	2.516661	2.423755	1.674280
2.16	1.918765	2.555465	2.474465	1.723265
2.18	1.953730	2.593365	2.525940	1.773265
2.20	1.989705	2.632805	2.578205	1.824305
2.22	2.026710	2.672965	2.631260	1.876395
2.24	2.064765	2.713880	2.685125	1.929560
2.26	2.103990	2.755560	2.739820	1.983810
2.28	2.144125	2.798040	2.795355	2.039160
2.30	2.185470	2.811335	2.851750	2.095625
2.32	2.227955	2.885465	2.909015	2.153235
2.34	2.271610	2.930455	2.967170	2.211995
2.36	2.316450	2.976340	3.026240	2.271930
2.38	2.362495	3.023125	3.086235	2.333055
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
2.40	2.409780	3.070845	3.447170	2.395385
2.42	2.158320	3.119525	3.209070	2.458045

**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

2.44	2.508140	3.191900	3.271960	2.523750
2.46	2.559275	3.219850	3.358450	2.589830
2.48	2.611745	3.271565	3.400755	2.657165
2.50	2.665575	3.324335	3.466715	2.725865
2.52	2.720790	3.378200	3.533740	2.795870
2.54	2.777415	3.433180	3.601855	2.867220
2.56	2.835485	3.893100	3.671075	2.939950
2.58	2.895025	3.546605	3.741435	3.014075
2.60	2.956060	3.605115	3.812950	3.089615
2.62	3.018615	3.664860	3.885645	3.166600
2.64	3.082730	3.725870	3.959550	3.245050
2.66	3.148430	3.788180	4.034690	3.324990
2.68	3.215745	3.851830	4.111085	3.406450
2.70	3.284700	3.916820	4.188770	3.489440
2.72	3.355330	3.983215	4.267770	3.574005
2.74	3.427670	4.051045	4.348110	3.660165
2.76	3.501750	4.120340	4.429820	3.747940
2.78	3.577600	4.191125	4.512930	3.837365
2.80	3.655255	4.263455	4.597475	3.928465
2.82	3.734750	4.337350	4.683480	4.021270
2.84	3.816120	4.412855	4.770980	4.115815
2.86	3.899395	4.490010	4.860005	4.212120
2.88	3.984610	4.568845	4.950590	4.310225
2.90	4.071810	4.649405	5.042770	4.410155
2.92	4.161030	4.731730	5.136580	4.511950
2.94	4.252305	4.815860	5.232055	4.615630
2.96	4.345670	4.091840	5.329230	4.721240
2.98	4.441165	4.989700	5.428135	4.828810
3.00	4.538835	5.079495	5.528825	4.938375
3.02	4.638715	5.171270	5.631335	5.049980
3.04	4.740850	5.265060	5.735690	5.163610
3.06	4.845275	5.360915	5.841945	5.279415
3.08	4.952040	5.458885	5.950140	5.397335
3.10	5.061180	5.559015	6.060320	5.517435
3.12	5.172750	5.661350	6.172520	5.639760
3.14	5.286785	5.765940	6.286785	5.764350
3.16	5.403345	5.872840	6.403170	5.891250
3.18	5.522455	5.982090	6.521715	6.020490
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
3.20	5.644180	6.093755	6.642470	6.152425
3.22	5.768555	6.207875	6.765485	6.286205

**Chương 5. Động lực học của kết cấu hệ thanh phẳng**

3.24	5.895640	6.324515	6.890800	6.422765
3.26	6.025480	6.443725	7.018480	6.561850
3.28	6.158130	6.565550	7.148570	6.703520
3.30	6.293640	6.690065	7.281120	6.847815
3.32	6.432060	6.817320	7.416190	6.994780
3.34	6.573450	6.947370	7.553830	7.144480
3.36	6.717860	7.080275	7.694100	7.296955
3.38	6.865345	7.216100	7.837065	7.452260
3.40	7.015970	7.354910	7.982770	7.610450
3.42	7.169785	7.496765	8.131275	7.771585
3.44	7.326850	7.641725	8.282660	7.935725
3.46	7.487230	7.789860	8.436970	8.102910
3.48	7.650990	7.941235	8.594270	8.273225
3.50	7.818180	8.095925	8.754640	8.446705
3.52	7.988880	8.253985	8.918130	8.632425
3.54	8.163450	8.415500	9.084825	8.803450
3.56	8.341040	8.580535	9.254780	8.986845
3.58	8.522640	8.749165	9.428070	9.173665
3.60	8.708010	8.921470	9.604770	9.363990
3.62	8.897225	9.097510	9.784955	9.557880
3.64	9.090345	9.277380	9.968695	9.755410
3.66	9.287465	9.461155	10.156075	9.956650
3.68	9.488640	9.648910	10.347170	10.161680
3.70	9.693955	9.840725	10.542055	10.370565
3.72	9.903490	10.036695	10.740820	10.583385
3.74	10.117420	10.236895	10.943550	10.800225
3.76	10.335525	10.441415	11.150325	11.021155
3.78	10.558190	10.650345	11.361240	11.246265
3.80	10.785405	10.863775	11.576375	11.476350
3.82	11.017250	11.081795	11.795820	11.709365
3.84	11.253805	11.304495	12.019675	11.947495
3.86	11.495180	11.531975	12.248030	12.190165
3.88	11.741145	11.764335	12.409850	12.437445
3.90	11.992710	12.001665	12.718640	12.689435
3.92	12.249055	12.244075	12.961850	12.946225
3.94	12.510585	12.491665	13.208435	13.207915
3.96	12.777405	12.744535	13.460785	13.474595
3.98	13.049605	13.002795	13.748255	13.746375
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
4.00	13.327295	13.266560	13.980935	14.023360
4.02	13.610575	13.553593	14.248955	14.305650

**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

4.04	13.899555	13.811015	14.522415	14.593355
4.06	14.194345	14.091945	14.801435	14.886585
4.08	14.495060	14.378830	15.086130	15.185450
4.10	14.801805	14.671790	15.376625	15.490070
4.12	15.114700	14.970495	15.673040	15.800555
4.14	15.433865	15.276420	15.975505	16.117030
4.16	15.759425	15.588345	16.284145	16.439615
4.18	16.091495	15.906840	16.599085	16.768440
4.20	16.430200	16.232045	16.920460	17.103625
4.22	16.775680	16.564090	17.248410	17.445300
4.24	17.128060	16.903120	17.583070	17.793600
4.26	17.487465	17.249260	17.924585	18.148670
4.28	17.854050	17.602665	18.273090	18.510635
4.30	18.227940	17.963470	18.628740	18.879640
4.32	18.609280	18.331830	18.991680	19.255830
4.34	18.998225	18.707895	19.362065	19.639355
4.36	18.394910	19.091815	19.740050	20.030365
4.38	18.799490	19.483740	20.125790	20.429010
4.40	20.212120	19.883850	20.519450	20.835450
4.42	20.632960	20.292285	20.921200	21.249845
4.44	21.062170	20.709220	21.331200	21.672350
4.46	21.499910	21.134825	21.749630	22.103145
4.48	21.946350	21.569275	22.176650	22.542395
4.50	22.401660	22.012740	22.612460	22.990270
4.52	22.866960	22.465400	23.057220	23.446950
4.54	23.339600	22.927440	23.511140	23.912620
4.56	23.822585	22.399050	23.974385	24.387460
4.58	24.315160	22.880410	24.447160	24.871660
4.60	24.817515	24.371720	24.929665	25.365410
4.62	25.329840	24.873175	25.422100	25.868915
4.64	25.852335	25.384980	25.924665	26.382360
4.66	26.385200	26.907340	26.347570	26.905970
4.68	26.928650	26.440160	26.961030	27.439940
4.70	27.482870	26.984560	27.495260	27.984480
4.72	28.048095	27.539850	28.040485	28.539820
4.74	28.624540	28.106555	28.596930	29.106175
4.76	29.212420	28.684905	29.164830	29.683775
4.78	29.811965	29.275130	29.744405	30.272850
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
4.80	30.423410	29.877465	30.335910	30.873625
4.82	31.046990	30.492145	30.939590	31.486365

**Chương 5. Động lực học của kết cấu hệ thanh phẳng**

4.84	31.682945	31.119425	31.555685	32.111295
4.86	32.331530	31.759550	32.184450	32.748680
4.88	32.992980	32.412770	32.826150	33.398760
4.90	33.667560	33.079360	33.481050	34.061810
4.92	34.355540	33.759565	34.149420	34.738095
4.94	35.057175	34.453670	34.831525	35.427880
4.96	35.772745	35.161945	35.527655	36.131445
4.98	36.502530	35.884670	36.238100	36.849080
5.00	37.246805	36.622145	36.963145	37.581065
5.02	38.005865	37.374645	37.703085	38.327705
5.04	38.780010	38.142480	38.458230	39.089290
5.06	39.569540	38.925950	39.228890	39.866140
5.08	40.374765	39.725537	40.015375	40.658555
5.10	41.195990	40.541050	40.818010	41.466860
5.12	42.033545	41.373315	41.637125	42.291385
5.14	42.887755	43.222500	42.473055	43.132460
5.16	43.758955	43.088940	43.326145	43.990420
5.18	44.647490	43.972970	44.196730	44.865620
5.20	45.553700	44.692190	45.081580	45.758405
5.22	46.477945	45.795240	45.991855	46.669150
5.24	47.420585	46.734195	46.917115	47.598205
5.26	48.381995	47.692190	47.861345	48.545960
5.28	49.362550	48.669600	48.824930	49.512790
5.30	50.362635	49.666820	49.808265	50.499090
5.32	51.382650	50.684240	50.811740	51.505250
5.34	52.422980	51.722265	51.835770	52.531695
5.36	53.484050	52.781295	52.880770	53.578825
5.38	54.566275	53.861765	53.947165	54.647065
5.40	55.670080	54.994095	55.035390	55.736855
5.42	56.795895	56.088715	56.145875	56.848635
5.44	57.944475	57.236075	57.279085	57.982845
5.46	59.115365	58.406635	58.435475	59.139955
5.48	60.309930	59.600850	59.615510	60.320420
5.50	61.528340	60.819190	60.819670	61.524730
5.52	62.771080	62.062145	62.048440	62.753375
5.54	64.038640	63.330200	63.302320	64.006840
5.56	65.334520	64.623855	64.581820	65.285635
5.58	66.650240	65.943635	65.887450	66.590285
<b>kz</b>	<b>Akz</b>	<b>Bkz</b>	<b>Ckz</b>	<b>Dkz</b>
5.60	67.995310	67.290040	67.219740	67.921310
5.62	69.367270	68.663625	68.579230	69.279255

**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

5.64	70.766665	70.064915	69.966475	70.664665
5.66	72.194040	71.494480	71.382020	72.078100
5.68	73.649975	72.952870	72.826445	73.520140
5.70	75.135040	74.440670	74.300330	74.991360
5.72	76.649830	75.958470	75.804270	76.492350
5.74	78.194940	77.506865	77.338870	78.023735
5.76	79.770985	79.086475	78.904755	79.586115
5.78	81.378595	80.697915	80.502545	81.180135
5.80	83.018405	82.341884	82.132885	82.806435
5.82	84.691070	84.018870	83.796440	84.465670
5.84	86.397255	85.729700	85.493865	86.158520
5.86	88.137645	87.474990	87.225855	87.885660
5.88	89.912920	89.255435	88.993400	89.647785
5.90	91.723790	91.071740	90.796310	91.445620
5.92	93.570985	92.924630	92.636215	93.279880
5.94	95.455235	94.814830	94.513545	95.151320
5.96	97.377290	96.743090	96.429600	97.060680
5.98	99.337920	98.710180	98.383530	99.008740
6.00	101.337905	100.716870	100.377735	100.996290
6.01	102.352905	101.735315	101.389985	102.005115
6.02	103.378040	102.763960	102.412470	103.024120
6.03	104.413420	103.802910	103.445300	104.053400
6.04	105.459145	104.852265	104.488565	105.093065
6.06	107.582045	106.982605	106.606845	107.203945
6.07	108.659430	108.063810	107.682070	108.275380
6.08	109.747585	109.155830	108.768155	109.357620
6.09	110.846620	110.258790	109.865220	110.450780
6.10	111.956640	111.372800	110.973370	111.554960
6.11	113.077755	112.497965	112.092715	112.670285
6.12	114.210080	113.634395	113.223370	113.796855
6.13	115.353730	114.782200	114.365440	114.934790
6.14	116.508815	115.941505	115.519045	116.084205
6.16	118.853755	118.295055	117.861335	118.417925
6.17	120.043850	119.489535	119.050250	119.602475
6.18	121.245845	120.695970	120.251165	120.798970
6.19	122.459870	121.914490	121.464210	122.007540
6.20	123.686040	123.145210	122.689500	123.228300
6.21	124.924475	124.388250	123.927155	124.461370
6.22	126.175305	125.643740	125.177305	125.706880

6.23	127.438660	126.911800	126.440070	126.964960
6.24	128.714650	128.192550	127.715580	128.235725
6.46	131.305080	130.792665	130.305350	130.815815
6.27	132.619775	132.112280	131.619865	132.125460
6.28	133.947630	133.445105	132.947640	133.448295

**CÁC HÀM  $\mu$  VÀ  $\varepsilon$  TRONG ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

$$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{4 \Delta_1} = \frac{\lambda ch\lambda \sin \lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{4 (1 - ch\lambda \cos \lambda)}; \quad \mu_2(\lambda) = \frac{\lambda D_\lambda}{2 \Delta_1} = \frac{\lambda sh\lambda - \sin \lambda}{2 (1 - ch\lambda \cos \lambda)};$$

$$\mu_3(\lambda) = -\frac{\lambda^2 D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{6 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 sh\lambda \sin \lambda}{6 (1 - ch\lambda \cos \lambda)}; \quad \mu_4(\lambda) = \frac{\lambda C_\lambda}{3 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 ch\lambda - \cos \lambda}{6 (1 - ch\lambda \cos \lambda)};$$

$$\mu_5(\lambda) = \frac{\lambda D_\lambda^2 - B_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{2\lambda sh\lambda \sin \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda}; \quad \mu_6(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2 sh\lambda \cos \lambda + ch\lambda \sin \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_7(\lambda) = -\frac{\lambda^2 B_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2 sh\lambda + \sin \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda}; \quad \mu_8(\lambda) = \lambda \frac{A_\lambda^2 - C_\lambda^2}{\Delta_3} = \lambda \frac{2ch\lambda \sin \lambda}{ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\mu_9(\lambda) = \lambda \frac{A_\lambda}{\Delta_3} = \lambda \frac{ch\lambda + \cos \lambda}{ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2}{6 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 sh\lambda \sin \lambda}{6 \Delta_1} = \mu_3(\lambda); \quad \varepsilon_2(\lambda) = \frac{\lambda^2 C_\lambda}{6 \Delta_1} = \mu_4(\lambda);$$

$$\varepsilon_3(\lambda) = \frac{\lambda^3 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{12 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 sh\lambda \cos \lambda + ch\lambda \sin \lambda}{12 (1 - ch\lambda \cos \lambda)};$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\lambda^3 B_\lambda}{12 \Delta_1} = \frac{\lambda^2 sh\lambda + \sin \lambda}{12 (1 - ch\lambda \cos \lambda)}; \quad \varepsilon_5(\lambda) = -\frac{\lambda^2 A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2 sh\lambda \cos \lambda + ch\lambda \sin \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_5^*(\lambda) = -\frac{\lambda^2 B_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^2 sh\lambda + \sin \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda} = \mu_7(\lambda); \quad \varepsilon_6(\lambda) = -\frac{\lambda^3 C_\lambda^2 - A_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3 2ch\lambda \cos \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_6^*(\lambda) = -\frac{\lambda^3 A_\lambda}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3 ch\lambda + \cos \lambda}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda} = \varepsilon_7(\lambda); \quad \varepsilon_8(\lambda) = \frac{\lambda^3 B_\lambda D_\lambda - A_\lambda^2}{3 \Delta_2} = \frac{\lambda^3 (1 + ch\lambda \cos \lambda)}{3 ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda};$$

$$\varepsilon_9(\lambda) = \lambda^2 \frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{\Delta_3} = \lambda^2 \frac{ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda}{ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda};$$

$\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$  xem ở bảng 2

**Bảng 5: Các hàm số để tính động lực học của khung và dầm liên tục**

**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda)=\varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda)=\varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda)=\varepsilon_5(\lambda)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00009
0.20	1.00000	1.00001	0.99999	1.00001	0.99999	0.99995
0.30	0.99998	1.00003	0.99993	1.00003	0.99994	0.99977
0.40	0.99994	1.00009	0.99978	1.00014	0.99984	0.99927
0.50	0.99985	1.00022	0.99945	1.00032	0.99960	0.99821
0.60	0.99969	1.00046	0.99887	1.00067	0.99918	0.99630
0.70	0.99943	1.00086	0.99790	1.00124	0.99847	0.99314
0.80	0.99902	1.00146	0.99642	1.00211	0.99739	0.98828
0.90	0.99844	1.00235	0.99427	1.00339	0.99582	0.98121
1.00	0.99761	1.00358	0.99126	1.00517	0.99363	0.97133
1.10	0.99650	1.00525	0.98719	1.00758	0.99065	0.95796
1.20	0.99504	1.00744	0.98184	1.01075	0.98673	0.94034
1.30	0.99317	1.01026	0.97496	1.01483	0.98167	0.91762
1.40	0.99079	1.01384	0.96627	1.02000	0.97525	0.88882
1.50	0.98784	1.01828	0.95547	1.02643	0.96723	0.85289
1.60	0.98422	1.02375	0.94223	1.03433	0.95734	0.80859
1.70	0.97983	1.03039	0.92618	1.04394	0.94525	0.75455
1.80	0.97455	1.03838	0.90692	1.05551	0.93060	0.68920
1.90	0.96826	1.04791	0.88400	1.06933	0.91289	0.61071
2.00	0.96083	1.05922	0.85694	1.08572	0.89188	0.51698
2.10	0.95210	1.07255	0.82519	1.10507	0.86617	0.40552
2.20	0.94189	1.08819	0.78815	1.12778	0.83678	0.27334
2.30	0.93000	1.10646	0.74512	1.15436	0.80120	0.11685
2.40	0.91622	1.12776	0.69533	1.18536	0.75891	-0.06838
2.50	0.90027	1.15252	0.63789	1.24146	0.70855	-0.28792
2.60	0.88187	1.18121	0.57178	1.26345	0.64838	-0.54885
2.70	0.86064	1.21465	0.49582	1.31227	0.57610	-0.86042
2.80	0.83618	1.25340	0.40859	1.30906	0.48864	-1.23499
2.90	0.80797	1.29844	0.30844	1.43520	0.38175	-1.68954
3.00	0.77540	1.35089	0.19336	1.51241	0.24973	-2.24817
3.10	0.73772	1.41217	0.06090	1.60282	0.08256	-2.94636
3.20	0.69399	1.48404	-0.09197	1.70914	-0.13252	-3.83880
3.30	0.64300	1.56877	-0.26908	1.83484	-0.41847	-5.01472
3.40	0.58322	1.66931	-0.47534	1.98444	-0.81502	-6.63059
3.50	0.51264	1.78959	-0.71717	2.16396	-1.39906	-8.98677



**Chương 5. Động lực học của kết cấu hệ thanh phẳng**

$\lambda$	$\mu_1(\lambda)$	$\mu_2(\lambda)$	$\mu_3(\lambda)=\varepsilon_1(\lambda)$	$\mu_4(\lambda)=\varepsilon_2(\lambda)$	$\mu_5(\lambda)$	$\mu_6(\lambda)=\varepsilon_5(\lambda)$
3.60	0.42845	1.93491	-1.00321	2.38160	-2.34150	-12.76200
3.70	0.32694	2.11269	-1.34530	2.64874	-4.11481	-19.80680
3.80	0.20271	2.33351	-1.76031	2.98174	-8.68383	-37.84500
3.90	0.04780	2.61310	-2.27304	3.40484	-47.55530	-190.68800
4.00	-0.15008	2.97580	-2.92177	3.95573	19.46700	72.58920
4.10	-0.41099	3.46151	-3.76880	4.69608	9.17015	32.01490
4.20	-0.77004	4.14023	-4.14023	5.73426	6.39342	20.98440
4.30	-1.29502	5.14721	-6.59517	7.27962	5.09273	15.74350
4.40	-2.13568	6.78170	-9.24895	9.79564	4.33068	12.60740
4.50	-3.70212	9.86350	-14.17530	14.75210	3.32358	10.46030
4.60	-7.66550	17.73460	-26.49220	26.72950	3.45605	8.84763
4.70	-37.94770	78.23820	-120.37400	120.43000	3.17311	7.54806
4.80	18.30480	-34.33280	53.83900	-53.95580	2.94125	6.43993
4.90	8.34376	-14.48300	22.90350	-23.25230	2.74520	5.44965
5.00	5.74862	9.37158	14.78660	-15.36250	2.57221	4.52887
5.10	4.54448	-7.04949	10.97120	-11.79660	2.41419	3.64239
5.20	3.84172	-5.73831	8.70237	-9.80006	2.26523	2.76656
5.30	3.37489	-4.90802	7.15699	-8.55222	2.12066	1.87670
5.40	3.03685	-4.34539	6.00243	-7.72326	1.97654	0.95373
5.50	2.77590	-3.94830	5.07780	-7.15559	1.82925	-0.02214
5.60	2.56393	-3.66194	4.29505	-6.76502	1.67518	-1.07206
5.70	2.38420	-3.45455	3.60123	-6.50316	1.51046	-2.22019
5.80	2.22596	-3.30668	2.96183	-6.34091	1.33058	-3.49580
5.90	2.08186	-3.20607	2.35258	-6.26051	1.13003	-4.93603
6.00	1.94654	-3.14497	1.75508	-6.25142	0.90164	-6.59010
6.10	1.81579	-3.11863	1.15419	-6.30816	0.63564	-8.52590
6.20	1.68609	-3.12451	0.53635	-6.42908	0.31810	-10.84110


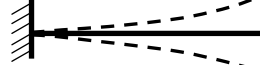

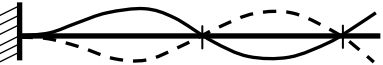



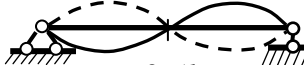


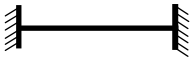

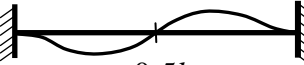

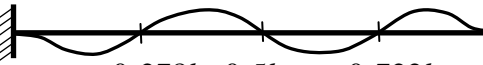
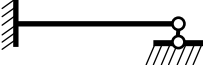

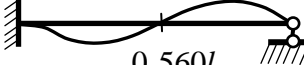
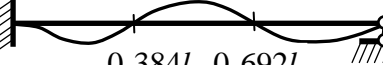
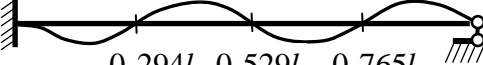
**ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH**

$\lambda$	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	1.00000	0.99999
0.20	1.00002	0.99995	1.00002	0.99974	1.00007	0.99987
0.30	1.00011	0.99975	1.00009	0.99869	1.00038	0.99936
0.40	1.00034	0.99921	1.00027	0.99585	1.00119	0.99799
0.50	1.00082	0.99806	1.00067	0.98998	1.00290	0.99509
0.60	1.00170	0.99599	1.00139	0.97901	1.00602	0.98981
0.70	1.00315	0.99257	1.00257	0.96111	1.01116	0.98112
0.80	1.00537	0.98732	1.00439	0.93362	1.01906	0.96779
0.90	1.00862	0.97968	1.00704	0.89361	1.03057	0.94837
1.00	1.01316	0.96902	1.01074	0.83772	1.04667	0.92152
1.10	1.01931	0.95462	1.01575	0.76210	1.06850	0.88458
1.20	1.02743	0.93569	1.02234	0.66264	1.09733	0.83630
1.30	1.03792	0.91135	1.03083	0.53448	1.13462	0.77412
1.40	1.05125	0.88064	1.04157	0.37238	1.18201	0.69549
1.50	1.06794	0.84252	1.05495	0.17050	1.24142	0.59757
1.60	1.08859	0.79583	1.07141	-0.07768	1.31504	0.47721
1.70	1.11391	0.73933	1.09144	-0.37944	1.40540	0.33090
1.80	1.14470	0.67165	1.11557	-0.74297	1.51549	0.15468
1.90	1.18194	0.59133	1.14442	-1.17151	1.64887	-0.05590
2.00	1.22675	0.49673	1.17870	-1.69362	1.80980	-0.30593
2.10	1.28054	0.38609	1.21920	-2.30348	2.00346	-0.60126
2.20	1.34499	0.25746	1.26683	-3.02127	2.23621	-0.94869
2.30	1.42221	0.10867	1.32266	-3.86381	2.51603	-1.35628
2.40	1.51486	-0.06265	1.38794	-4.85132	2.85300	-1.83370
2.50	1.62631	-0.25924	1.46412	-6.00856	3.26008	-2.39277
2.60	1.76099	-0.48401	1.55296	-7.36650	3.75427	-3.04824
2.70	1.92479	-0.74051	1.65655	-8.96474	4.35821	-3.81896
2.80	2.12566	-1.03267	1.77743	-10.85530	5.10279	-4.72963
2.90	2.37473	-1.36510	1.91871	-13.10850	6.03118	-5.81363

**Chương 5. Động lực học của kết cấu hệ thanh phẳng**

$\lambda$	$\mu_7(\lambda)$	$\varepsilon_3(\lambda)$	$\varepsilon_4(\lambda)$	$\varepsilon_6(\lambda)$	$\varepsilon_7(\lambda)$	$\varepsilon_8(\lambda)$
3.00	2.68795	-1.74324	2.08425	-15.82280	7.20554	-7.11762
3.10	3.08906	-2.17360	2.27887	-19.14160	8.71851	-8.70949
3.20	3.61495	-2.66408	2.50873	-23.28410	10.71440	-10.69290
3.30	4.32616	-3.22447	2.78172	-28.60530	13.43040	-13.23570
3.40	5.32940	-3.86709	3.10821	-35.72480	17.28490	-16.63060
3.50	6.83166	-4.60787	3.50200	-45.83660	23.09050	-21.44150
3.60	9.29380	-5.46784	3.98191	-61.58710	32.65720	-28.91840
3.70	13.99080	-6.47565	4.57418	-90.27690	50.99400	-42.50940
3.80	26.22730	-7.67158	5.31656	-162.26400	98.94480	-76.54490
3.90	131.07600	-9.11447	6.26517	-764.08100	510.81600	-360.74400
4.00	-50.02020	-10.89450	7.50722	269.20400	-200.99700	127.06100
4.10	-22.35040	-13.15770	9.18596	108.34700	-92.44860	51.05060
4.20	-15.00170	-16.15900	11.55200	63.46710	-63.77640	29.79270
4.30	-11.65410	-20.38810	15.09230	41.20980	-50.85040	19.21000
4.40	-9.77808	-26.92540	20.88290	27.08610	-43.73380	12.46120
4.50	-8.60946	-38.72540	31.87390	16.70070	-39.42790	7.47032
4.60	-7.83952	-67.82150	60.09390	8.25542	-36.72140	3.38788
4.70	-7.31942	-286.43100	277.77500	0.86832	-35.03650	-0.20327
4.80	-6.96999	117.88200	-127.58400	-5.95313	-34.00673	-3.53645
4.90	-6.74570	45.47060	-56.28450	-12.51440	-33.64170	-6.75683
5.00	-6.61931	26.03480	38.05190	-19.02400	-33.66110	-9.96388
5.10	-6.57441	16.55680	29.87730	-25.63810	-34.07120	-13.23260
5.20	-6.60156	10.62840	25.36140	-32.48520	-34.84730	-16.62510
5.30	-6.69622	6.33368	22.59900	-39.68110	-35.98720	-20.19780
5.40	-6.85771	2.89632	20.85580	-47.33980	-37.50730	-24.00680
5.50	-7.08877	-0.06147	-19.67770	-55.58200	-39.44290	-28.11150
5.60	-7.39562	-2.74869	-18.96190	-64.55400	-41.84960	-32.57970
5.70	-7.78837	-5.29338	-18.56900	-74.38780	-44.80780	-37.49210
5.80	-8.28201	-7.78152	-18.43540	-85.31460	-48.43030	-42.94900
5.90	-8.89804	-10.27620	-18.52450	-97.58370	-52.87430	-49.08010
6.00	-9.66722	-12.82790	-18.81760	-111.54200	-58.36100	-56.05890
6.10	-10.63400	-15.48130	-19.30910	-127.67000	-65.20740	-64.12900
6.20	-11.86420	-18.27900	-20.00420	-146.65900	-73.88130	-72.62790

**Bảng 3.1: Các tần số cơ bản và dạng dao động riêng của dầm một nhịp**

<b>CÁC DẠNG DAO ĐỘNG</b>				
<b>Loại dầm</b>	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
	 $0,644l$	 $0,774l$ $B = 22,4$	 $0,5l$ $0,868l$ $B = 61,7$	 $0,356l$ $0,644l$ $0,906l$ $B = 121,0$
	 $B = 9,86$	 $0,5l$ $B = 39,5$	 $0,333l$ $0,667l$ $B = 88,9$	 $0,25l$ $0,5l$ $0,75l$ $B = 158$
	 $B = 22,4$	 $0,5l$ $B = 61,7$	 $0,359l$ $0,641l$ $B = 121$	 $0,278l$ $0,5l$ $0,722l$ $B = 250$
	 $B = 15,4$	 $0,560l$ $B = 50,0$	 $0,384l$ $0,692l$ $B = 104$	 $0,294l$ $0,529l$ $0,765l$ $B = 178$

### **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. **Phạm Khắc Hùng và những người khác:** *Ổn định và động lực học công trình*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội, 1979.
2. **Nguyễn Văn Tĩnh:** *Cơ sở dao động công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng - Hà Nội, 1987.
3. **Nguyễn Văn Phụng:** *Động lực học công trình*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội, 2005.
4. **Véste György:** *Dynamics of Structures*. Budapest, 1976.
5. **Groschy Béla:** *Design of Structures Under Special Loads*. Budapest, 1984.
6. **Norris.Ch.H.:** *Structural Design of Dynamic Loads*. New York, Mc Graw-Hill, 1969.
7. **Livesley R.K.:** *Matrix Methods in Structural Analysis*. Pergamon Press, 1964.
8. **Warburton, G.B.:** *The Dynamical Behavior of Structures*. Pergamon Press, 1964.
9. **Rayw-Crough, Joseph Reuzien:** *Dynamics of Structures*. Mc Graw-Hill, Inc, 1993.
10. **Коренев В.Г., Рабинович И.М.:** *Справочник по динамике сооружений*. Москва, 1984.

## THÔNG TIN TÁC GIẢ

Giáo trình: ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Chủ biên: PGS.TS Dương Văn Thứ

Họ và tên: **PGS.TS Dương Văn Thứ**

Ngày sinh: 04 tháng 10 năm 1947

Quê quán: Hà Tĩnh

Cơ quan công tác: Bộ môn Sức bền - Kết cấu trường Đại học Thủy Lợi

Địa chỉ liên hệ: Bộ môn Sức bền - Kết cấu trường Đại học Thủy Lợi - 175 Tây Sơn - Đống Đa - Hà Nội.

Số điện thoại liên lạc: ĐTCQ: 043.5636433

DD: 0914363668

Phạm vi và đối tượng sử dụng giáo trình

Ngành học: Công trình thủy lợi, Xây dựng dân dụng, Cầu đường, Thủy điện, Kỹ thuật biển, Cơ khí... Trường Đại học Thủy Lợi

Yêu cầu kiến thức: Cơ học cơ sở, Sức bền Vật liệu, Cơ học kết cấu

Số lần xuất bản: 1

Nhà xuất bản: Nhà xuất bản khoa học tự nhiên và công nghệ - năm 2010.

Từ khóa để tra cứu: Động lực học công trình, dao động, nội lực động, chuyển vị động, tần số dao động.

