

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH (chủ biên)

Ths. ĐỖ VĂN BÌNH

ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2005

Lời tựa

Ổn định công trình là một phần kiến thức cơ sở đối với kỹ sư thuộc các ngành xây dựng cơ bản. Môn học này trang bị cho sinh viên và kỹ sư những kiến thức cần thiết để đánh giá khả năng ổn định cho các công trình xây dựng, dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài; bảo đảm cho công trình không bị phá hoại do sự gia tăng biến dạng khi công trình không còn khả năng bảo toàn dạng cân bằng ban đầu ở trạng thái biến dạng.

Trong chương trình đào tạo hiện hành tại các trường đại học thuộc lĩnh vực xây dựng cơ bản, ổn định công trình với đối tượng hệ thanh là môn học chuyên đề tiếp nối sau môn Cơ học kết cấu, được xem là môn tự chọn ở bậc đại học và là môn bắt buộc ở bậc cao học. Để đáp ứng yêu cầu học tập và nghiên cứu, trong sách này chủ yếu giới thiệu các khái niệm cơ bản về sự ổn định và các phương pháp nghiên cứu (chính xác và gần đúng), đủ để vận dụng giải quyết các bài toán ổn định của các hệ thanh thường gặp trong thực tế tính toán công trình. Trên cơ sở đó, hy vọng là bạn đọc sẽ linh hoạt vận dụng để giải các bài toán kỹ thuật khác có thể gặp trong thực tế và trong công tác nghiên cứu.

Nội dung cuốn sách bao gồm chương Mở đầu và 7 chương:

- *Chương Mở đầu* giới thiệu các khái niệm về ổn định, các dạng mất ổn định thường gặp và các tiêu chí về ổn định của hệ đàn hồi.
- *Chương 1* giới thiệu tương đối đầy đủ các phương pháp tính toán ổn định thuộc thể loại phương pháp tĩnh, phương pháp năng lượng và phương pháp động lực học.
- *Các chương 2, 3, 4, 5* giới thiệu cách kiểm tra khả năng ổn định dạng nén đúng tâm, dạng chịu uốn cho các thể loại kết cấu cụ thể như: thanh thẳng có liên kết bất kỳ (cứng hoặc đàn hồi); hệ thanh thẳng; thanh cong; thanh thành mỏng tiết diện hở; dầm.
- *Chương 6* giới thiệu các quan điểm tính toán và cách kiểm tra ổn định khi hệ làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi. Đó là một nội dung còn mới và đang được quan tâm nghiên cứu.

- *Chương 7* giới thiệu khái niệm về ổn định động khi hệ chịu lực thay đổi theo thời gian. Đó là bài toán dao động có thông số, khá phức tạp, gặp trong lĩnh vực công trình và đặc biệt là trong lĩnh vực chế tạo máy. Chúng tôi không có tham vọng trình bày đầy đủ các thể loại bài toán dao động có thông số mà chỉ cùng bạn đọc làm quen với cách giải bài toán thông qua hai trường hợp thuộc lĩnh vực công trình: thanh thẳng chịu lực nén thay đổi điều hòa theo thời gian và vành tròn chịu áp lực thay đổi điều hòa theo thời gian.

Để dễ dàng tiếp thu các nội dung trình bày trong sách, bạn đọc cần nắm vững các kiến thức về: phương trình đại số, phương trình vi phân, phương pháp tính trong giáo trình Toán cao cấp; giáo trình Sức bền vật liệu; giáo trình Cơ học kết cấu theo chương trình hiện hành trong các trường đại học kỹ thuật.

Tuy đã có nhiều cố gắng trong biên soạn song cũng khó tránh khỏi những thiếu sót, chúng tôi chân thành cảm ơn sự quan tâm và những ý kiến đóng góp của bạn đọc cùng đồng nghiệp.

TÁC GIẢ

Mở đầu

1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình

Khi thiết kế kết cấu công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng không thôi thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình. Trong nhiều trường hợp, đặc biệt là các kết cấu chịu nén hoặc nén cùng với uốn, tuy tải trọng chưa đạt đến giá trị phá hoại và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn hình dạng ban đầu ở trạng thái biến dạng mà chuyển sang dạng cân bằng khác. Nội lực trong dạng cân bằng mới đó sẽ phát triển rất nhanh và làm cho công trình bị phá hoại. Đó là hiện tượng kết cấu bị mất ổn định.

Vào cuối thế kỷ XIX và đầu thế kỷ XX, đã xảy ra nhiều tai nạn do kết cấu công trình bị mất ổn định và dẫn đến phá hủy. Ví dụ, theo các tài liệu [23], [17]:

- Cầu đường sắt Kevda ở Nga là cầu dàn hỏ đã bị phá hủy năm 1875 do hệ thanh biên trên bị mất ổn định.
- Cầu Menklienxtein ở Thụy Sĩ bị phá hủy năm 1891 do mất ổn định.
- Cầu dàn Québec qua sông St. Laurent ở Canada bị phá hủy năm 1907 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định.
- Bể chứa khí ở Hamburg bị phá hủy năm 1907 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định.
- Cầu dàn Mojur ở Nga bị phá hủy năm 1925 do thanh ghép chịu nén bị mất ổn định.

Riêng ở Pháp, theo số liệu của kỹ sư Girard, trong khoảng thời gian 1955-1965 đã có 24 cầu bị phá hủy, phần lớn là do nguyên nhân mất ổn định.

Theo [5], ở Liên Xô cũ, trong khoảng thời gian 1951-1967 đã có 39 công trình kết cấu thép bị phá hủy, trong số đó có 17 trường hợp (44 %) là do nguyên nhân mất ổn định.

Hiện nay, yêu cầu phát triển kinh tế đòi hỏi phải xây dựng các công trình lớn và nhỏ, trong đó thường dùng các thanh chịu nén có chiều dài lớn dễ bị mất ổn định. Do đó, việc nghiên cứu ổn định công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tế.

Theo [23], bài toán ổn định đã được quan tâm từ đầu thế kỷ XVIII, khởi đầu từ công trình nghiên cứu bằng thực nghiệm do Piter van Musschenbroek công bố

năm 1729, đã đi đến kết luận đúng: "*lực tới hạn tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài thanh*". Người đặt nền móng cho việc nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định là L. Euler qua công trình công bố đầu tiên vào năm 1744. Tuy nhiên, cho mãi đến cuối thế kỷ XIX vấn đề ổn định công trình mới được phát triển mạnh mẽ qua những cống hiến của các nhà khoa học như: Giáo sư F. S. Iaxinski, Viện sỹ A. N. Đinnik, Viện sỹ V. G. Galerkin... Cho đến nay, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về lĩnh vực này và đã giải quyết tốt những yêu cầu cơ bản của thực tế. Tuy vậy, cũng tồn tại nhiều vấn đề chưa được giải quyết đến cùng và còn tiếp tục lôi cuốn sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Chẳng hạn như các bài toán: ổn định của những hệ làm việc ngoài giới hạn đàn hồi; ổn định của hệ khi xét đến hiện tượng từ biến; ổn định của hệ khi xét đến các yếu tố phi tuyến; ổn định của hệ dưới tác dụng của tải trọng động (ổn định động).

Trong giáo trình Sức bền vật liệu đã đề cập đến bài toán ổn định của những thanh đơn giản chịu nén đúng tâm. Trong phạm vi giáo trình này ta sẽ nghiên cứu các phương pháp tính ổn định của những hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi chịu tải trọng tác dụng tĩnh là chủ yếu; ngoài ra cũng giới thiệu qua về khái niệm ổn định động.

2. Khái niệm về ổn định và mất ổn định

A. Định nghĩa

Ổn định là một khái niệm có liên quan đến nhiều lĩnh vực như trong cuộc sống, trong kỹ thuật nói chung, trong công trình và trong toán học. Trong mỗi lĩnh vực có một định nghĩa tương ứng phù hợp với đối tượng nghiên cứu. Theo [1], định nghĩa toán học của A. M. Liapunov về ổn định chuyển động được xem là tổng quát và bao trùm cho mọi lĩnh vực.

Trong giáo trình này chỉ đề cập đến định nghĩa thuộc lĩnh vực công trình theo quan điểm của Euler-Lagrange, vốn có từ lâu đời trước định nghĩa của Liapunov, tự phát triển độc lập với định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov và cũng đủ để giải quyết phần lớn các bài toán ổn định trong lĩnh vực công trình. Chỉ cần quan tâm đến định nghĩa về ổn định chuyển động của Liapunov khi gặp các bài toán ổn định của hệ không bảo toàn, ổn định động và ổn định không đàn hồi.

Trong lĩnh vực công trình, ổn định là tính chất của công trình có khả năng giữ được vị trí ban đầu hoặc giữ được dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng.

Tính chất ổn định của công trình thường không phải là vô hạn khi tăng giá trị của các tải trọng tác dụng trên công trình. Khi tính chất đó mất đi thì công trình

không còn khả năng chịu tải trọng, lúc này công trình được gọi là *không ổn định*. Như vậy, vị trí của công trình hoặc dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình có khả năng *ổn định hoặc không ổn định*.

Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là *ổn định* dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có (còn được gọi là *nhiều*) rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì công trình sẽ có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu. Tùy theo các nguyên nhân gây ra trong công trình các biến dạng dần hồi hay dần đều, công trình sẽ phục hồi trạng thái ban đầu hoàn toàn hay không hoàn toàn.

Vị trí của công trình hay dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng của công trình được gọi là *không ổn định* dưới tác dụng của tải trọng nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân bất kỳ nào đó ngoài tải trọng đã có rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì công trình sẽ không quay trở về trạng thái ban đầu. Lúc này, độ lệch của công trình không có khuynh hướng giảm dần mà có thể tiếp tục phát triển cho đến khi công trình có vị trí mới hoặc dạng cân bằng mới.

Bước quá độ của công trình từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định gọi là *mất ổn định*. Giới hạn đầu của bước quá độ đó gọi là *trạng thái tới hạn* của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là *tải trọng tới hạn*.

Từ khái niệm về ổn định ta cũng cần phân biệt hai trường hợp: mất ổn định về vị trí và mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

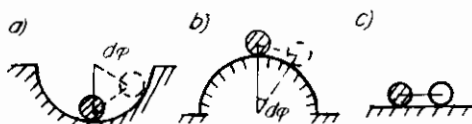
* Mất ổn định về vị trí

Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà buộc phải chuyển sang vị trí khác. Đó là trường hợp mất ổn định lật hoặc trượt của các công trình tường chắn, mố cầu, trụ cầu, tháp nước... Trong những trường hợp này, các ngoại lực tác dụng trên công trình không thể cân bằng ở vị trí ban đầu của công trình mà chỉ có thể cân bằng ở vị trí mới khác vị trí ban đầu. Vị trí của các vật thể tuyệt đối cứng có thể là ổn định, không ổn định hoặc phiếm định.

Một ví dụ đơn giản về hiện tượng ổn định và mất ổn định về vị trí là trường hợp hòn bi ở các vị trí khác nhau như trên hình 1.

Mặc dù hòn bi đều cân bằng ở cả ba vị trí, song có sự khác nhau cơ bản giữa ba trường hợp này khi có một nguyên nhân nào đó đưa hòn bi lệch khỏi vị trí cân bằng ban đầu với một lượng vô cùng bé rồi thả ra, ta thấy:

- Trường hợp thứ nhất, hòn bi đặt trên mặt cầu lõm (hình 1.a): hòn bi dao động quanh vị trí ban đầu rồi cuối cùng trở về vị trí cũ. Vị trí này là vị trí cân bằng ổn định.



Hình 1

Khi lệch khỏi vị trí cân bằng ổn định, thế năng của hòn bi tăng lên. Do đó, vị trí của hòn bi ở dưới đáy mặt cầu lõm hay vị trí cân bằng ổn định tương ứng với khi thế năng của hòn bi là cực tiểu.

- Trường hợp thứ hai, hòn bi đặt trên mặt cầu lồi (hình 1.b): hòn bi không trở về vị trí ban đầu mà tiếp tục lăn xuống phía dưới. Vị trí này là vị trí cân bằng không ổn định. Khi lệch khỏi vị trí cân bằng không ổn định, thế năng của hòn bi giảm. Do đó, vị trí cân bằng không ổn định tương ứng với khi thế năng của hòn bi là cực đại.
- Trường hợp thứ ba, hòn bi đặt trên mặt phẳng (hình 1.c): hòn bi không quay về vị trí ban đầu và cũng không chuyển động tiếp tục. Vị trí này là vị trí cân bằng phiếm định. Vị trí cân bằng phiếm định tương ứng với khi thế năng của hòn bi không đổi.

✧ Mất ổn định về dạng cân bằng

Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi dạng biến dạng ban đầu của vật thể biến dạng tương ứng với tải trọng còn nhỏ, buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó hoặc xảy ra khi biến dạng của vật thể phát triển nhanh mà không xuất hiện dạng biến dạng mới khác trước về tính chất nếu tải trọng đạt đến một giá trị nào đó. Trong những trường hợp này, sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng ban đầu mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng mới khác dạng ban đầu về tính chất hoặc chỉ có thể thực hiện được khi giảm tải trọng. Hiện tượng này khác với hiện tượng mất ổn định về vị trí ở các điểm sau: đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng chứ không phải tuyệt đối cứng, sự cân bằng cần được xét với cả ngoại lực và nội lực.

Bài toán ổn định về vị trí thường đơn giản, trên cơ sở vận dụng các điều kiện cân bằng quen biết trong Cơ học cơ sở cũng đủ để giải bài toán. Trong giáo trình này chỉ xét bài toán ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

B. Phân loại

Có nhiều cách phân loại bài toán mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng. Trong giáo trình này chỉ giới thiệu cách phân loại đơn giản nhất tương đối phù hợp với các bài toán ổn định đàn hồi. Xuất phát từ hai quan niệm khác nhau

về trạng thái tới hạn của Euler và của Poincaré, có thể chia thành hai loại mất ổn định với các đặc trưng như sau [17]:

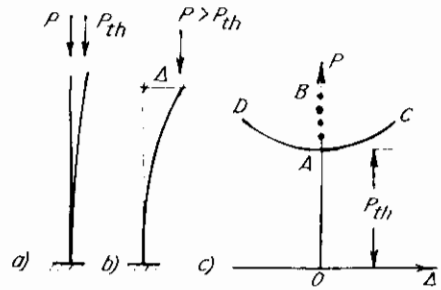
*** Mất ổn định loại một**

Các đặc trưng của hiện tượng mất ổn định loại một hay mất ổn định Euler:

- ◆ *Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh.*
- ◆ *Phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất.*
- ◆ *Trước trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định; sau trạng thái tới hạn dạng cân bằng ban đầu là không ổn định.*

Để minh họa ta xét một ví dụ đơn giản là trường hợp thanh thẳng chịu nén đúng tâm như trên hình 2a:

- Khi lực P còn nhỏ, thanh vẫn thẳng, trạng thái chịu nén của thanh là trạng thái ban đầu và duy nhất. Nếu đưa hệ ra khỏi dạng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì hệ sẽ dao động rồi trở về dạng ban đầu như cũ. Do đó, dạng cân bằng này là ổn định.



Hình 2

Trạng thái cân bằng ổn định này được mô tả bởi đoạn OA trên đồ thị liên hệ giữa chuyển vị Δ và tải trọng P (hình 2c).

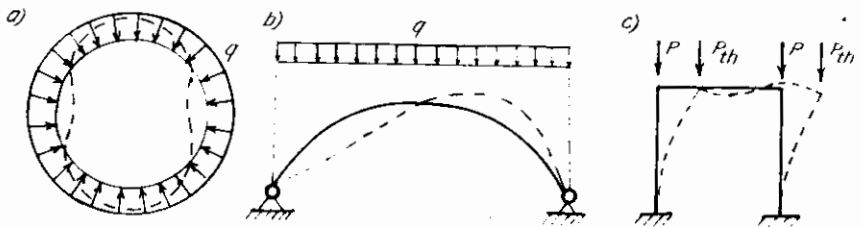
- Khi tăng lực P đến một giá trị gọi là lực tới hạn P_{th} , thanh ở trạng thái tới hạn. Lúc này, ngoài trạng thái cân bằng chịu nén còn có khả năng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc, nghĩa là thanh ở trạng thái cân bằng phiếm định. Như vậy, dạng cân bằng bị phân nhánh thành hai dạng biến dạng. Trạng thái này tương ứng với điểm phân nhánh A trên đồ thị (hình 2c).
- Khi $P > P_{th}$, trạng thái cân bằng chịu nén vẫn có khả năng tiếp tục tồn tại song không ổn định vì nếu đưa hệ ra khỏi dạng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó rồi bỏ nguyên nhân đó đi thì hệ sẽ không có khả năng trở về dạng thẳng ban đầu. Dạng cân bằng không ổn định này tương ứng với nhánh AB trên đồ thị (nhánh có điểm thêm các dấu chấm trên hình 2c). Trong hệ cũng phát sinh đồng thời trạng thái cân bằng uốn dọc khi biến dạng của thanh là hữu hạn (hình 2b). Dạng cân bằng này là ổn định và được mô tả bởi nhánh AC hoặc AD trên đồ thị (hình 2c).

Nếu tiếp tục tăng lực P thì về mặt lý thuyết trong thanh sẽ phát sinh những dạng cân bằng mới dưới dạng uốn dọc tương ứng với những lực tới hạn bậc cao. Tuy nhiên, ngoài dạng cân bằng thứ nhất tương ứng với lực tới hạn nhỏ

nhất, những dạng cân bằng tương ứng với lực tới hạn bậc cao đều là không ổn định, hiếm khi xảy ra và không có ý nghĩa thực tế. Bởi vậy trong thực tế ta chỉ cần tìm lực tới hạn nhỏ nhất.

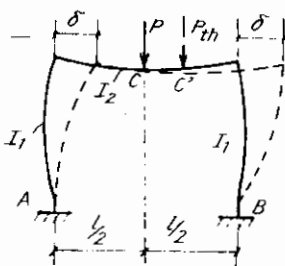
Hiện tượng mất ổn định loại một có thể xảy ra tương ứng với các dạng sau:

1. *Mất ổn định dạng nén đúng tâm.* Ngoài ví dụ vừa xét, trên hình 3 giới thiệu một số ví dụ khác về mất ổn định dạng nén đúng tâm như: vành tròn kín (hình 3a) chịu áp lực phân bố đều hướng tâm (áp lực thủy tĩnh); vòm parabol chịu tải trọng phân bố đều theo phương ngang (hình 3b). Đó là những hệ chỉ chịu nén đúng tâm nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng nén đàn hồi khi hệ còn ổn định. Nếu tải trọng q vượt quá giá trị q_{th} thì trong hệ sẽ phát sinh dạng cân bằng mới theo đường đứt nét. Trong trường hợp khung chịu tải trọng như trên hình 3c: khi $P < P_{th}$, khung có dạng cân bằng chịu nén; khi $P > P_{th}$, dạng cân bằng chịu nén không ổn định và khung có dạng cân bằng mới chịu nén cùng với uốn theo đường đứt nét trên hình vẽ.

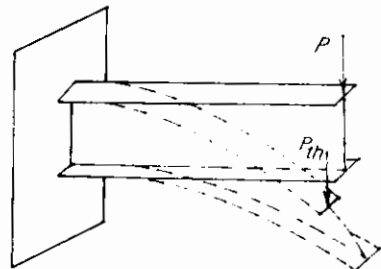


Hình 3

2. *Mất ổn định dạng biến dạng đối xứng.* Để làm ví dụ, ta xét khung đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên hình 4.



Hình 4



Hình 5

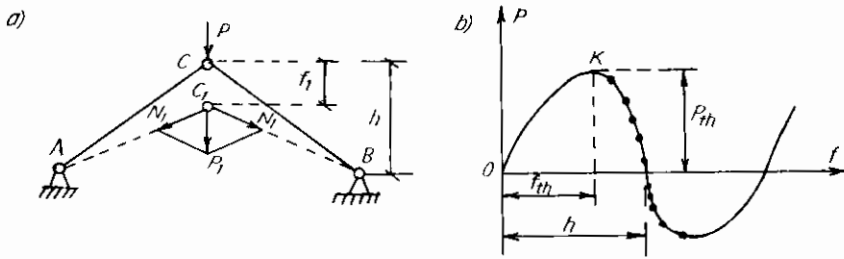
Khi $P < P_{th}$, khung có dạng cân bằng ổn định là dạng đối xứng (đường liền nét); khi $P > P_{th}$, dạng cân bằng đối xứng không ổn định và khung có dạng cân bằng mới không đối xứng (đường đứt nét).

3. *Mất ổn định dạng uốn phẳng.* Để làm ví dụ, ta xét dầm chữ I chịu uốn phẳng do tải trọng P (hình 5). Khi $P < P_{lh}$, dầm có dạng cân bằng ổn định là dạng uốn phẳng; khi $P > P_{lh}$, dạng uốn phẳng không ổn định và dầm có dạng cân bằng mới là dạng uốn cùng với xoắn (đường đứt nét).

❖ **Mất ổn định loại hai**

Các đặc trưng của hiện tượng mất ổn định loại hai như sau:

- ◆ *Dạng cân bằng không phân nhánh.*
- ◆ *Biến dạng và dạng cân bằng của hệ không thay đổi về tính chất.*



Hình 6

Để minh họa ta xét một ví dụ đơn giản là trường hợp dầm Mises có ba khớp A, B, C chịu lực P đặt tại khớp C như trên hình 6a. Đồ thị liên hệ giữa lực P và chuyển vị thẳng đứng f tại C như trên hình 6b.

Để dựng đồ thị này ta cần tìm tọa độ của các điểm trên đường cong $P = P(f)$, ứng với mỗi điểm ta thực hiện như sau: tương ứng với mỗi giá trị chuyển vị f_i ta dễ dàng tìm được biến dạng dọc trục của các thanh AC, BC ; tiếp đó từ biến dạng đã biết tìm được giá trị lực dọc N_i trong các thanh và suy ra giá trị P_i tương ứng theo tổng hình học của các lực N_i . Ta nhận thấy ở giai đoạn đầu lực P tăng lên cùng với độ võng f nhưng khi $f = h$ tức là khi ba khớp A, B, C nằm trên cùng đường thẳng thì $P = 0$. Sự liên hệ giữa lực P và chuyển vị f là liên tục nên đường cong $P = P(f)$ phải có dạng như trên hình 6b.

Giá trị của lực P tương ứng với khi độ võng tăng mà không cần tăng tải trọng gọi là lực tới hạn. Khi $P = P_{lh}$, sự cân bằng giữa nội lực và ngoại lực đạt đến trạng thái giới hạn. Khi $P > P_{lh}$, sự cân bằng chỉ có thể xảy ra khi giảm tải trọng P . Trạng thái giới hạn được xác định từ điều kiện: $dP/df = 0$.

Đó là hiện tượng mất ổn định loại hai hay hiện tượng mất khả năng chịu lực theo trạng thái giới hạn thứ nhất. Trong trường hợp này ta thấy biến dạng của hệ phát triển nhưng không thay đổi về tính chất, không phân nhánh. Sự mất ổn định loại hai có thể xảy ra khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi.

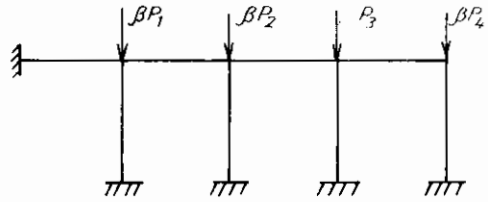
Trong thực tế, các cấu kiện của công trình thường không đơn thuần chịu nén mà chịu uốn cùng với nén nên các cấu kiện này thường bị mất ổn định loại hai với tải trọng nhỏ hơn tải trọng tới hạn loại một. Tuy vậy, khi xác định khả năng chịu lực của các cấu kiện chịu uốn cùng với nén ta vẫn cần biết giá trị tới hạn của lực dọc trong các cấu kiện đó tương ứng với sự mất ổn định loại một (xem mục 3.1, chương 3). Do đó, sự nghiên cứu hiện tượng mất ổn định loại một không những chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tế.

C. Phạm vi và nhiệm vụ nghiên cứu

Trong phạm vi giáo trình Ổn định công trình ta chỉ nghiên cứu bài toán ổn định loại một về dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng của các loại thanh và hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi.

Nhiệm vụ chính là nghiên cứu các phương pháp xác định tải trọng tới hạn để đánh giá khả năng chịu lực của công trình.

Trong trường hợp hệ chịu nhiều lực tác dụng đồng thời như trên hình 7, thay thế cho tải trọng tới hạn ta thường dùng khái niệm về thông số tới hạn để đánh giá khả năng ổn định.



Hình 7

Thông số tới hạn là độ an toàn về mặt ổn định của công trình đối với một nhóm lực nhất định.

Chẳng hạn, cần xác định độ an toàn của khung trên hình 7 đối với ba lực P_1 , P_2 và P_4 trong số bốn lực tác dụng trên hệ. Muốn vậy ta nhân ba lực này với thông số β và tìm giá trị tới hạn β_{th} của thông số để sao cho khi hệ chịu tác dụng đồng thời của các lực $\beta_{th} P_1$, $\beta_{th} P_2$, P_3 và $\beta_{th} P_4$ (nghĩa là tăng các lực P_1 , P_2 và P_4 lên β_{th} lần còn lực P_3 không tăng) thì khung sẽ đạt tới trạng thái tới hạn.

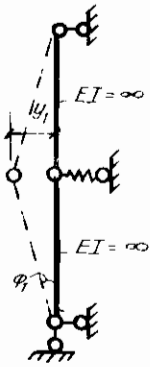
3. Khái niệm về bậc tự do

Bậc tự do của hệ là số thông số hình học độc lập đủ để xác định vị trí của tất cả các điểm của hệ khi hệ mất ổn định.

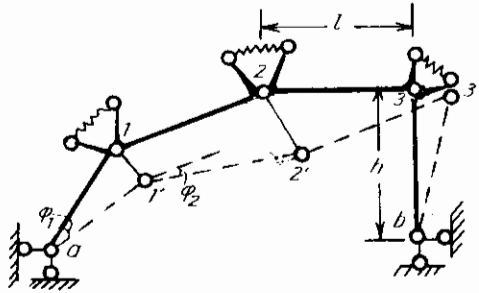
Ví dụ, hệ gồm hai thanh tuyệt đối cứng được liên kết như trên hình 8 có một bậc tự do vì toàn bộ dạng mất ổn định (đường đứt nét) của hệ được xác định theo một thông số (chuyển vị y_1 của khớp giữa hay góc xoay φ_1 của một thanh nào đó).

Hệ gồm bốn thanh tuyệt đối cứng được liên kết như trên hình 9 có hai bậc tự do. Thật vậy, sau khi xác định vị trí mới I' , $2'$ của khớp 1 và 2 bằng hai thông số φ_1

và φ_2 ta dễ dàng tìm được vị trí mới $3'$ của khớp 3 là giao điểm của đường tròn có tâm $2'$ bán kính l với đường tròn có tâm b bán kính h .



Hình 8



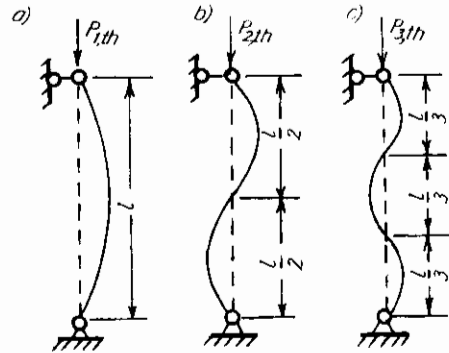
Hình 9

Với hệ có bậc tự do bằng n ta có n giá trị lực tới hạn. Ngoài lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với dạng cân bằng ổn định còn các lực tới hạn khác tương ứng với dạng cân bằng không ổn định.

Các hệ biến dạng đàn hồi có bậc tự do bằng vô cùng nên có vô số giá trị lực tới hạn song chỉ có lực tới hạn nhỏ nhất là có ý nghĩa thực tế. Ví dụ với thanh có hai đầu khớp trên hình 10a, từ Súc bên vật liệu ta đã biết lực tới hạn được xác định theo công thức:

$$P_{n,th} = (n\pi)^2 \frac{EI}{l^2},$$

với n - số nguyên.



Hình 10

Lần lượt cho $n = 1, 2, 3, \dots$ ta sẽ được vô số giá trị của lực tới hạn:

$$P_{1,th} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}; \quad P_{2,th} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}; \quad P_{3,th} = 9\pi^2 \frac{EI}{l^2}, \dots$$

Trên hình 10a, b, c là các dạng biến dạng tương ứng với giá trị thứ nhất, thứ hai và thứ ba của lực tới hạn. Chỉ có lực tới hạn thứ nhất tương ứng với giá trị nhỏ nhất mới có ý nghĩa thực tế. Các lực tới hạn thứ hai, thứ ba... chỉ có ý nghĩa lý luận và các dạng biến dạng tương ứng không ổn định.

4. Các tiêu chí về sự cân bằng ổn định

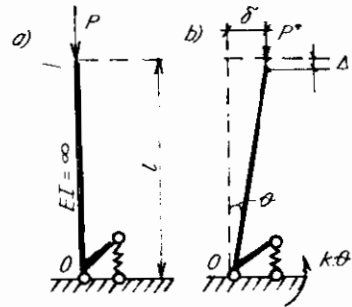
* Tiêu chí dưới dạng tĩnh học

Trong tĩnh học, sự cân bằng được mô tả dưới dạng các phương trình cân bằng tĩnh học song các điều kiện cân bằng này chưa nói lên được dạng cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Để khẳng định vấn đề này ta cần khảo sát hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng đang nghiên cứu. Giả sử ở trạng thái lệch này sự cân bằng có thể thực hiện được về nguyên tắc thì ta cần tìm giá trị P^* của lực tự các điều kiện cân bằng tĩnh học của hệ ở trạng thái lệch để đối chiếu với giá trị P của lực đã cho ở trạng thái ban đầu.

- ◆ Nếu $P^* > P$: lực cần thiết để giữ cho hệ cân bằng ở trạng thái lệch lớn hơn lực đã cho thì lực đã cho không thể giữ hệ ở trạng thái lệch được và hệ phải trở lại trạng thái ban đầu, nghĩa là cân bằng ổn định.
- ◆ Nếu $P^* < P$: lực cần thiết để giữ cho hệ cân bằng ở trạng thái lệch nhỏ hơn lực đã cho thì lực đã cho không những có thể giữ hệ ở trạng thái lệch mà còn làm tăng độ lệch, hệ không trở lại trạng thái ban đầu, nghĩa là cân bằng không ổn định.
- ◆ Nếu $P^* = P$: lực cần thiết để giữ cho hệ cân bằng ở trạng thái lệch bằng lực đã cho thì sự cân bằng là phiếm định.

Trong trường hợp khi sự cân bằng ở trạng thái lệch không thể thực hiện được về nguyên tắc thì ta cần căn cứ vào lực tác dụng trên hệ để phán đoán cách thức chuyển động của hệ. Nếu độ lệch tăng thì sự cân bằng là không ổn định còn nếu độ lệch giảm thì sự cân bằng là ổn định.

Ví dụ 1. Xét thanh tuyệt đối cứng không trọng lượng, một đầu tự do, một đầu có liên kết ngàm đàn hồi như trên hình 11. Gọi k là độ cứng của liên kết ngàm đàn hồi (giá trị của mômen phát sinh trong liên kết ngàm đàn hồi khi tiết diện ở liên kết xoay một góc bằng đơn vị). Khảo sát sự cân bằng khi $P < k/l$; $P = k/l$ và $P > k/l$.



Hình 11.

Khảo sát hệ ở trạng thái lệch lân cận với trạng thái cân bằng ban đầu (hình 11b): thanh bị nghiêng một góc θ , trong liên kết ngàm đàn hồi phát sinh phân lực mômen $k.\theta$. Thiết lập điều kiện cân bằng để tìm lực P^* cần thiết để giữ hệ ở trạng thái lệch:

$$\sum M_o = P \cdot \delta - k \cdot \theta = P \cdot l \sin \theta - k \cdot \theta = 0.$$

Vì θ rất nhỏ nên $\sin \theta \approx \theta$, do đó: $P \cdot l \cdot \theta - k \cdot \theta = 0$. Suy ra $P^* = k / l$.

Ta thấy: Khi $P < k / l$, tức là $P < P^*$, hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.

Khi $P = k / l$, tức là $P = P^*$, hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định.

Khi $P > k / l$, tức là $P > P^*$, hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định.

* Tiêu chí dưới dạng năng lượng

Nguyên lý công khả dĩ và nguyên lý cực trị của thế năng toàn phần đã quen biết chỉ nói lên sự cân bằng của hệ mà chưa nói lên được trạng thái cân bằng đó là ổn định hay không ổn định. Để khẳng định vấn đề này ta cần vận dụng nguyên lý Lejeune - Dirichlet:

Nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực tiểu so với tất cả các vị trí của hệ ở lân cận vị trí ban đầu với những chuyển vị vô cùng bé. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực đại. Nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi.

Thế năng toàn phần U^* của hệ ở trạng thái biến dạng bao gồm thế năng biến dạng (thế năng của các nội lực) U và thế năng của các ngoại lực U_p . Như đã biết, thế năng của các ngoại lực U_p được đo bằng công T của các ngoại lực nhưng trái dấu, do đó ta có:

$$U^* = U + U_p = U - T.$$

Độ biến thiên δU^* của thế năng toàn phần của hệ khi chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận sẽ là:

$$\delta U^* = \delta U - \delta T. \quad (1)$$

trong đó: δU - độ biến thiên của thế năng biến dạng;

δT - độ biến thiên của công các ngoại lực.

Như vậy, theo nguyên lý Lejeune - Dirichlet:

- ◆ Nếu $\delta U > \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.
- ◆ Nếu $\delta U < \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định. (2)
- ◆ Nếu $\delta U = \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định.

Cũng có thể giải thích các tiêu chí trên như sau: ngoại lực có khuynh hướng sinh công dương, do đó nếu ở trạng thái lệch, thế năng biến dạng của hệ được tích lũy lớn hơn công của ngoại lực thì phần năng lượng tích lũy đó có khả năng vượt qua được sự cản trở của ngoại lực để đưa hệ về trạng thái ban đầu tức là hệ ổn định. Ngược lại, khi phần năng lượng tích lũy đó nhỏ hơn công của ngoại lực

thì chúng không có khả năng vượt qua được sự cản trở của ngoại lực để đưa hệ về trạng thái ban đầu tức là hệ mất ổn định.

Tiêu chí dưới dạng năng lượng cũng có thể diễn đạt theo điều kiện cực trị của thế năng toàn phần. Muốn vậy ta cần lập biểu thức của thế năng toàn phần ở trạng thái lệch với các chuyển vị hữu hạn theo số thông số tương ứng với bậc tự do của hệ rồi nghiên cứu điều kiện cực trị của thế năng toàn phần:

❖ Trường hợp hệ có bậc tự do bằng một: lập biểu thức thế năng toàn phần ở trạng thái lệch theo một thông số q , ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dU^*}{dq} = 0 \text{ nếu } \begin{cases} \frac{d^n U^*}{dq^n} > 0 & \text{cân bằng ổn định;} \\ \frac{d^n U^*}{dq^n} < 0 & \text{cân bằng không ổn định;} \\ \frac{d^m U^*}{dq^m} = 0 & \text{cân bằng phiếm định.} \end{cases} \quad (3)$$

trong đó: n – bậc đạo hàm chẵn thấp nhất và khác không (thường là $n=2$);
 m – bậc đạo hàm bất kỳ.

❖ Trường hợp hệ có bậc tự do bằng hai: lập biểu thức thế năng toàn phần ở trạng thái lệch theo hai thông số q_1, q_2 ta có: $U^* = f(q_1, q_2)$.

Điều kiện cực trị:

$$\frac{\partial U^*}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial U^*}{\partial q_2} = 0. \quad (4)$$

• Nếu các nghiệm q_1, q_2 của hệ phương trình (4) thỏa mãn bất đẳng thức:

$$D = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 > 0, \quad (5)$$

với $C_{11} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial q_1^2}; \quad C_{12} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad C_{22} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial q_2^2},$

thì khi $C_{11} > 0$ hay $C_{22} > 0$ thế năng cực tiểu, cân bằng ổn định;

khi $C_{11} < 0$ hay $C_{22} < 0$ thế năng cực đại, cân bằng không ổn định.

- Nếu các nghiệm q_1, q_2 của hệ phương trình (4) không thỏa mãn bất đẳng thức (5) nghĩa là khi $D < 0$ thì thế năng toàn phần không có cực trị.
- Nếu các nghiệm q_1, q_2 của hệ phương trình (4) thỏa mãn đẳng thức $D = 0$ thì ta cần nghiên cứu các đạo hàm bậc cao hơn, bài toán sẽ khá phức tạp.

❖ Trường hợp hệ cơ bậc tự do bằng n : lập biểu thức thế năng toàn phần ở trạng thái lực¹ theo n thông số $q_1, q_2 \dots q_n$ ta có: $U^* = f(q_1, q_2 \dots q_n)$.

Điều kiện cực tiểu:

$$C_{11} > 0; \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} > 0; \dots; \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (6)$$

với
$$C_{ik} - C_{ki} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial q_i \partial q_k}$$

Nếu một trong các điều kiện (6) không thỏa mãn thì ta cần nghiên cứu bổ sung với các điều kiện phức tạp hơn.

Ví dụ 2. Thực hiện lại ví dụ 1 theo các tiêu chí dưới dạng năng lượng.

♦ Thực hiện theo tiêu chí (2):

Độ biến thiên của công ngoại lực:

$$\delta T = P \cdot \Delta = Pl(1 - \cos \theta) = 2Pl \sin^2(\theta/2) \approx Pl\theta^2 / 2.$$

Độ biến thiên của thế năng biến dạng tích lũy trong liên kết ngầm đàn hồi:

$$\delta U = M \cdot \theta / 2 = k\theta^2 / 2.$$

Ta thấy:

- Khi $P < k/l$: $\delta U > \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.
- Khi $P = k/l$: $\delta U = \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định.
- Khi $P > k/l$: $\delta U < \delta T$ hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định.

♦ Thực hiện theo tiêu chí (3):

Biểu thức của thế năng toàn phần:

$$U^* = U_o + \delta U - \delta T = U_o + (k\theta^2 / 2) - (Pl\theta^2 / 2),$$

với U_o - thế năng toàn phần ở trạng thái ban đầu.

Lấy đạo hàm theo thông số θ , ta có:

$$\frac{dU^*}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2}k\theta^2 - \frac{1}{2}Pl\theta^2 \right) = (k - Pl) \theta; \quad \frac{d^2U^*}{d\theta^2} = k - Pl.$$

Ta thấy: khi $\theta = 0$ thì đạo hàm cấp một của U^* bằng không, có cực trị.

- Khi $P < k/l$: đạo hàm cấp hai của U^* dương, cân bằng ổn định.
- Khi $P = k/l$: đạo hàm cấp hai của U^* bằng không, cân bằng phiếm định.
- Khi $P > k/l$: đạo hàm cấp hai của U^* âm, cân bằng không ổn định.

* Tiêu chí dưới dạng động lực học

Tiêu chí của sự cân bằng ổn định dưới dạng động lực học được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu khuynh hướng chuyển động của hệ sau khi bị lệch khỏi dạng ban đầu bằng một nhiễu loạn nào đó rồi loại bỏ nhiễu loạn đó đi. Nếu sau khi nhiễu loạn mất đi, hệ dao động tắt dần hay trở về trạng thái ban đầu mà không dao động thì sự cân bằng là ổn định.

Để thực hiện ta cần khảo sát chuyển động bé của hệ ở lân cận vị trí cân bằng:

- ◆ Nếu chuyển động tắt dần hoặc điều hòa (khi không kể đến lực cản) thì cân bằng là ổn định.
- ◆ Nếu chuyển động không tuần hoàn (xa dần trạng thái ban đầu), mang đặc trưng dẫn đến sự tăng dần của biên độ chuyển động thì cân bằng là không ổn định.

Ví dụ 3. Thực hiện ví dụ 1 theo các tiêu chí dưới dạng động lực học (hình 11).

Gọi θ là góc xoay của thanh tuyệt đối cứng quanh gối O ; I_o là mômen quán tính của khối lượng thanh quanh trục quay tại O . Từ điều kiện cân bằng mômen đối với điểm O với chú ý kể đến lực quán tính, ta được phương trình vi phân của chuyển động xoay của thanh như sau:

$$I_o \ddot{\theta} + (k - Pl) \theta = 0. \quad (a)$$

Phương trình đặc trưng: $I_o r^2 + (k - Pl) = 0$.

Nghiệm của phương trình đặc trưng: $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Pl - k}{I_o}}$. (b)

- Khi $P < k/l$: (b) cho nghiệm ảo nên nghiệm của (a) sẽ là hàm điều hòa:

$$\theta = a \sin rt + b \cos rt, \text{ cân bằng ổn định.}$$

- Khi $P > k/l$: (b) cho nghiệm thực nên nghiệm của (a) sẽ là hàm:

$$\theta = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t} \text{—với } r_1 > 0 \text{ nên } \theta \text{ mang đặc trưng tăng biên độ, cân bằng không ổn định.}$$

1 Các phương pháp nghiên cứu

1.1. Khái niệm về các phương pháp nghiên cứu

Để giải bài toán ổn định của hệ thanh có thể vận dụng nhiều phương pháp khác nhau được xây dựng trên cơ sở các tiêu chí về sự cân bằng ổn định đã trình bày trong chương Mở đầu.

Các phương pháp vận dụng tiêu chí cân bằng ổn định dưới dạng tĩnh học được gọi là *phương pháp tĩnh học*. Các phương pháp vận dụng tiêu chí cân bằng ổn định dưới dạng năng lượng được gọi là *phương pháp năng lượng*. Các phương pháp vận dụng tiêu chí cân bằng ổn định dưới dạng động lực học được gọi là *phương pháp động lực học*.

A. Phương pháp tĩnh học

Nội dung phương pháp tĩnh học: Tạo cho hệ nghiên cứu một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu; xác định giá trị của lực (lực tới hạn) có khả năng giữ cho hệ ở trạng thái cân bằng mới lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Lực tới hạn được xác định từ phương trình đặc trưng hay còn gọi là phương trình ổn định biểu thị điều kiện tồn tại dạng cân bằng mới.

Có thể vận dụng nội dung nói trên dưới nhiều hình thức khác nhau, do đó tồn tại nhiều thể loại phương pháp tĩnh học. Trong giáo trình này chỉ đề cập đến các phương pháp sau:

- 1) Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân.
- 2) Phương pháp thông số ban đầu.
- 3) Phương pháp lực.
- 4) Phương pháp chuyển vị.
- 5) Phương pháp hỗn hợp.
- 6) Phương pháp phần tử hữu hạn.
- 7) Phương pháp thiết lập và giải hệ phương trình đại số.
- 8) Phương pháp sai phân hữu hạn.

- 9) Phương pháp dây xích.
- 10) Phương pháp nghiệm đúng tại từng điểm.
- 11) Phương pháp Bubnov-Galerkin.
- 12) Phương pháp giải đúng dần.

Các phương pháp từ 1 đến 6 được xem là "chính xác" còn các phương pháp từ 7 đến 12 được xem là gần đúng. Trong thực hành, phương pháp 1 cho phép giải dễ dàng các bài toán thanh đơn giản. Đối với hệ thanh, khi giải chính xác ta thường áp dụng các phương pháp 2, 3, 4, 5, 6. Tuy nhiên, trong thực tế để giải các phương trình cho nghiệm chính xác thường gặp nhiều khó khăn và đôi khi không thể thực hiện được. Đối với các thanh phức tạp, thanh có tiết diện thay đổi, các phương pháp gần đúng (7 + 12) thường được áp dụng có hiệu quả mà vẫn đảm bảo được sai số trong phạm vi cho phép.

B. Phương pháp năng lượng

Nội dung phương pháp năng lượng: Giả thiết cho trước dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu; căn cứ vào dạng biến dạng đã giả thiết, lập các biểu thức thế năng biến dạng và công của ngoại lực để viết điều kiện tới hạn của hệ theo tiêu chí dưới dạng năng lượng đã nêu trong mục 4 chương Mở đầu: từ điều kiện tới hạn sẽ xác định được giá trị của lực tới hạn.

Nếu dạng biến dạng giả thiết chọn đúng thì kết quả tìm được là chính xác. Trong thực hành nói chung ta chưa biết được chính xác dạng biến dạng của hệ nên kết quả tìm được theo phương pháp năng lượng thường là gần đúng và cho giá trị lực tới hạn lớn hơn giá trị chính xác (xem I.11). Như vậy, mức độ chính xác của kết quả tìm được theo phương pháp năng lượng phụ thuộc khả năng phán đoán dạng biến dạng của hệ ở trạng thái lệch.

Trong giáo trình này sẽ đề cập đến các phương pháp sau:

- 1) Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejeune - Dirichlet.
- 2) Phương pháp Rayleigh - Ritz.
- 3) Phương pháp Timoshenko.

C. Phương pháp động lực học

Nội dung phương pháp động lực học: Lập và giải phương trình dao động riêng của hệ chịu lực; xác định giá trị lực tới hạn bằng cách biên luận tính chất của nghiệm của chuyển động.

Cũng có thể vận dụng nội dung nói trên dưới nhiều hình thức khác nhau tương tự như trong phương pháp tĩnh học.

Có thể đặt vấn đề: đường lối giải bài toán của ba loại phương pháp nói trên tuy khác nhau song có dẫn đến cùng một kết quả hay không? Theo [10], đối với những hệ bảo toàn tức là những hệ chịu lực bảo toàn [lực bảo toàn có các tính chất sau: 1) độ biến thiên của công của lực bằng vi phân toàn phần của hàm thế năng; 2) công sinh ra bởi các lực trên các chuyển vị hữu hạn không phụ thuộc đường đi chuyển của lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đặt đầu và điểm đặt cuối của lực; 3) tuân theo nguyên lý bảo toàn năng lượng. Sự xuất hiện của ma sát nội do quan hệ phi đàn hồi hay do ma sát ngoại sẽ dẫn đến hệ lực không bảo toàn] thường gặp trong các công trình xây dựng thì về nguyên tắc, cả ba loại phương pháp nói trên đều dẫn đến cùng một kết quả.

Việc chọn lựa phương pháp khi giải một bài toán cụ thể không chỉ phụ thuộc dạng bài toán mà còn phụ thuộc mục đích giải bài toán và công cụ tính toán. Khi chỉ cần xác định sơ bộ giá trị tối hạn của hệ bảo toàn thì phù hợp hơn cả là vận dụng phương pháp năng lượng. Đối với những hệ không bảo toàn thì nhất thiết phải vận dụng phương pháp động lực học.

Phần lớn các phương pháp nói trên sẽ được trình bày ở chương này, trong các mục dưới đây. Để tiện so sánh, trong mỗi phương pháp sẽ khảo sát một ví dụ chung là hệ có số bậc tự do bằng vô cùng (thanh công-xôn có tiết diện không đổi). Ngoài ra, tùy theo từng thể loại phương pháp thích hợp ta sẽ khảo sát thêm hai dạng ví dụ: hệ có số bậc tự do hữu hạn và thanh có tiết diện thay đổi. Trong các chương sau, khi nghiên cứu các kết cấu cụ thể, sẽ đề cập đến các phương pháp còn lại đồng thời cũng đề cập đến các phương pháp gần đúng thích hợp khác.

1.2. Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân

Thứ tự thực hiện:

1. Lập phương trình vi phân của đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu.
2. Tìm nghiệm của phương trình vi phân.
3. Lập các phương trình xác định các hằng số tích phân và các đại lượng chưa biết theo các điều kiện biên. Số lượng các điều kiện biên cần thiết phải bằng tổng số các hằng số tích phân và các đại lượng chưa biết.

Các phương trình tìm được dẫn đến hệ phương trình đại số thuần nhất nên có thể xây ra hai khả năng:

- ♦ Các nghiệm đều duy nhất bằng không: không phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu. Đó là nghiệm tầm thường tương ứng với trạng thái cân bằng ổn định.

- ♦ Các nghiệm tồn tại: phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu, hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định. Điều kiện tồn tại nghiệm là định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất phải bằng không:

$$D(\alpha) = 0, \quad (1.1)$$

α là các hệ số của hệ phương trình thuần nhất, phụ thuộc các đặc trưng hình học của hệ và phụ thuộc tải trọng dưới dạng các hàm siêu việt.

Phương trình (1.1) được gọi là phương trình đặc trưng hoặc phương trình ổn định của hệ theo phương pháp tĩnh học.

4. Giải phương trình ổn định (1.1) để tìm lực tới hạn.

Cách giải này được xem là chính xác, áp dụng thích hợp cho những thanh đơn giản là hệ có bậc tự do bằng vô cùng.

Về lý thuyết, với hệ có bậc tự do bằng n ta sẽ tìm được n giá trị lực tới hạn, do đó với hệ có bậc tự do bằng vô cùng ta sẽ tìm được vô số giá trị lực tới hạn, song chỉ có lực tới hạn thứ nhất (nhỏ nhất) mới có ý nghĩa thực tế.

Ví dụ 1.1. Xác định lực nén tới hạn nhỏ nhất của thanh có một đầu ngàm một đầu tự do (hình 1.1). Cho biết $EI = \text{const}$.

1. Lập phương trình vi phân của đường đàn hồi của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái thẳng ban đầu.

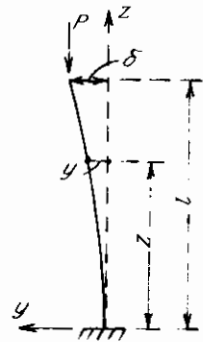
Tạo một chuyển vị nhỏ δ tại đầu tự do của thanh, khi đó mômen uốn tại tiết diện cách gốc tọa độ một khoảng z (hình 1.1) sẽ là: $M(z) = -P(\delta - y)$.

Từ sức bền vật liệu ta có phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:

$$EIy'''' = -M = P(\delta - y)$$

hay
$$y'''' + \alpha^2 y = \alpha^2 \delta, \quad (a)$$

với
$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (b)$$



Hình 1.1

2. Nghiệm của phương trình vi phân (a):

$$y = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + \delta. \quad (c)$$

3. Lập các phương trình xác định các hằng số tích phân A, B và đại lượng chưa biết δ theo các điều kiện biên:

- tại ngàm, khi $z = 0$ ta có: $y(0) = 0$ suy ra $A + \delta = 0$;
- tại ngàm, khi $z = 0$ ta có: $y'(0) = 0$ suy ra $B \cdot \alpha = 0$;
- tại đầu tự do, khi $z = l$ ta có: $y(l) = \delta$ suy ra $A \cos \alpha l + B \sin \alpha l + \delta = \delta$.

Phương trình ổn định:
$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 0 \end{vmatrix} = -\cos \alpha l = 0.$$

4. Nghiệm của phương trình ổn định: $\alpha l = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ với $k = 1, 2, 3, \dots$

Lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với khi $k = 1$. Khi đó: $\alpha l = \sqrt{\frac{P}{EI}}l = \frac{\pi}{2}.$

Suy ra giá trị của lực tới hạn:
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 2,467 \frac{EI}{l^2}.$$
 (1.2)

Đường biến dạng tương ứng của thanh có phương trình: $y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l}\right)$ là một phần tư của bước sóng hình sin.

1.3. Phương pháp thiết lập và giải hệ phương trình đại số

Thứ tự thực hiện:

1. Tạo cho hệ một trạng thái biến dạng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu. Trạng thái này được xác định theo chuyển vị tại một số hữu hạn các điểm.
2. Căn cứ vào các điều kiện cân bằng, điều kiện biến dạng, thiết lập hệ phương trình đại số liên hệ giữa các chuyển vị tại những điểm khảo sát. Nếu xác định chuyển vị tại n điểm và bỏ qua các vô cùng bé bậc cao của chuyển vị thì hệ phương trình đại số có thể đưa về dạng tổng quát như sau:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1) y_{11} + a_{12} y_{21} + \dots + a_{1n} y_{n1} &= 0; \\ a_{21} y_{11} + (a_{22} - \lambda_1) y_{21} + \dots + a_{2n} y_{n1} &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{n1} y_{11} + a_{n2} y_{21} + \dots + (a_{nn} - \lambda_1) y_{n1} &= 0, \end{aligned}$$
 (1.3)

trong đó:

- λ_i – đại lượng phụ thuộc thông số của lực tới hạn thứ i ;
- y_{ki} – chuyển vị tại điểm thứ k của đường biến dạng tương ứng với lực tới hạn thứ i ;
- a_{km} – các hệ số phụ thuộc kích thước hình học và độ cứng của hệ.

Hệ phương trình thuần nhất (1.3) được thỏa mãn với hai khả năng:

- ◆ Các nghiệm y_{ki} đều bằng không: không phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu, hệ chưa mất ổn định.
- ◆ Các nghiệm y_{ki} tồn tại: phát sinh trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu, hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định. Điều kiện tồn tại nghiệm là định thức các hệ số

của hệ phương trình thuần nhất (1.3) phải bằng không:

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda_i) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_i) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Phương trình (1.4) là phương trình đặc trưng hay phương trình ổn định của phương pháp này

3. Giải phương trình ổn định (1.4) sẽ xác định được n giá trị λ_i và từ đó suy ra n giá trị lực tối hạn.

Muốn tìm dạng biến dạng của hệ tương ứng với lực tối hạn P_i ta thay giá trị P_i vào (1.3) sẽ được hệ phương trình liên hệ giữa các chuyển vị y_{ki} . Hệ phương trình này không xác định, nhưng nếu cho trước giá trị của một chuyển vị nào đó thì có thể xác định được các chuyển vị còn lại và tìm được dạng biến dạng của hệ tương ứng với giá trị của chuyển vị cho trước.

Phương pháp này thường được áp dụng cho hệ có số bậc tự do hữu hạn. Nếu số thông số dùng để tính toán (số chuyển vị tại các điểm chọn để xác định dạng biến dạng) bằng số bậc tự do thực tế của hệ thì kết quả là chính xác. Trong trường hợp số thông số dùng để tính nhỏ hơn số bậc tự do thực tế của hệ thì kết quả là gần đúng. Khi chỉ cần xác định lực tối hạn nhỏ nhất thì phương pháp này cho kết quả đáp ứng được yêu cầu thực tế.

Ví dụ 1.2. Xác định lực tối hạn của thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do chịu lực nén P đã xét trong ví dụ 1.1 (hình 1.1).

Hệ có bậc tự do bằng vô cùng nên phương pháp này sẽ cho kết quả gần đúng.

♦ **Tạo trạng thái lệch theo một thông số δ** (hình 1.2a):

- Giả sử biểu đồ mômen uốn do lực P gây ra có dạng hình tam giác (hình 1.2b) thì ta có thể tìm chuyển vị bằng cách nhân biểu đồ này với biểu đồ mômen uốn do lực $P_k = I$ đặt tại đầu tự do gây ra (hình 1.2c):

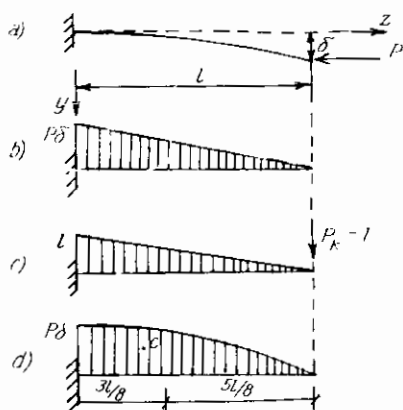
$$EI\delta = \frac{P\delta}{2} l \cdot \frac{2}{3} l \quad \text{hay} \quad \delta \left(EI - \frac{Pl^2}{3} \right) = 0.$$

Trong trường hợp này chỉ có một phương trình đại số; suy ra $P_{th} = 3EI/l^2$. So với kết quả chính xác (1.2) đã tìm trong ví dụ 1.1, sai số là 20%.

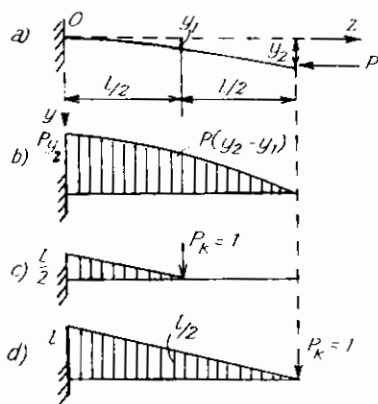
- Nếu quan niệm biểu đồ mômen uốn do lực P gây ra có dạng hình parabol (hình 1.2d) thì:

$$EI\delta = \frac{2}{3}P\delta l \cdot \frac{5}{8}l \quad \text{hay} \quad \delta \left(EI - \frac{5Pl^2}{12} \right) = 0. \quad \text{Suy ra: } P_{th} = 2,4 \frac{EI}{l^2}.$$

So với kết quả chính xác (1.2), sai số là 2,83%.



Hình 1.2



Hình 1.3

♦ Tạo trạng thái lệch theo hai thông số y_1 và y_2 (hình 1.3a):

Giả thiết biểu đồ mô men uốn do lực P gây ra có dạng hai đường gãy như trên hình 1.3b. Để xác định y_1 và y_2 ta lần lượt nhân biểu đồ đó với các biểu đồ đơn vị vẽ trên hình 1.3c và d.

$$EIy_1 = Py_2 \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{2} + P(y_2 - y_1) \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{2};$$

$$EIy_2 = P(y_2 - y_1) \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + Py_2 \frac{l}{4} \left(\frac{l}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{2l}{3} \right).$$

Sau khi biến đổi ta được hệ phương trình thuần nhất:

$$(24EI + Pl^2)y_1 - 3Pl^2y_2 = 0;$$

$$Pl^2y_1 + (24EI - 11Pl^2)y_2 = 0.$$

Điều kiện để cho các nghiệm y_1 và y_2 khác không:

$$D = \begin{vmatrix} 24EI + Pl^2 & -3Pl^2 \\ Pl^2 & 24EI - 11Pl^2 \end{vmatrix} = (Pl^2)^2 + 30EI(Pl^2) - 72(EI)^2 = 0.$$

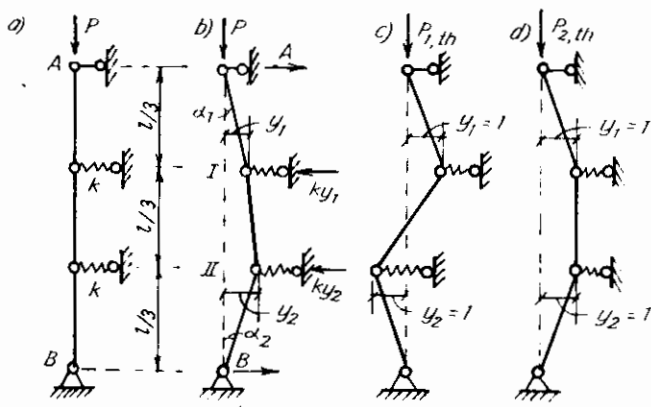
Sau khi giải phương trình ta tìm được lực tới hạn nhỏ nhất: $P_{th} = 2,23EI/l^2$.

So với kết quả chính xác (1.2), sai số là 9,47%.

Qua ví dụ này ta thấy: càng tăng số thông số tính toán thì kết quả càng chính xác hơn, song khối lượng tính toán cũng tăng lên.

Ví dụ 1.3. Xác định lực tới hạn và dạng mất ổn định tương ứng của hệ trên hình 1.4a. Cho biết: độ cứng của các thanh bằng vô cùng, độ cứng của mỗi liên kết đàn hồi bằng k .

Hệ có hai bậc tự do. Chọn chuyển vị y_1 và y_2 tại các gối đàn hồi là hai thông số để tính toán (hình 1.4b).



Hình 1.4

Phản lực tại các gối đàn hồi: $R_1 = k y_1$; $R_2 = k y_2$. (a)

Phản lực tại các gối cứng A và B được xác định từ điều kiện cân bằng của toàn hệ:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A = k \frac{2y_1 + y_2}{3}; \quad \sum M_A = 0 \rightarrow B = k \frac{y_1 + 2y_2}{3}. \quad (b)$$

Từ phương trình cân bằng mômen đối với khớp I (xét phần trên) và đối với khớp II (xét phần dưới) ta có:

$$\sum M_I^r = P y_1 - A \frac{l}{3} = 0; \quad \sum M_{II}^d = P y_2 - B \frac{l}{3} = 0. \quad (c)$$

Suy ra:
$$A = \frac{3P y_1}{l}; \quad B = \frac{3P y_2}{l}. \quad (d)$$

Thay (d) vào (b) và sau khi biến đổi ta được hệ phương trình đại số thuần nhất:

$$\left(\frac{2kl}{9} - P \right) y_1 + \frac{kl}{9} y_2 = 0; \quad \frac{kl}{9} y_1 + \left(\frac{2kl}{9} - P \right) y_2 = 0. \quad (e)$$

Phương trình ổn định:
$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{2kl}{9} - P \right) & \frac{kl}{9} \\ \frac{kl}{9} & \left(\frac{2kl}{9} - P \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (f)$$

Sau khi khai triển ta được phương trình bậc hai:
$$9P^2 - 4klP + \frac{1}{3} k^2 l^2 = 0 \quad (g)$$

Hai nghiệm của phương trình này cho hai giá trị của lực tới hạn. Kết quả là chính xác vì hệ cô bậc tự do bằng 2.

$$P_{1,th} = \frac{kl}{9}; \quad P_{2,th} = \frac{kl}{3}. \quad (h)$$

Để xác định dạng mất ổn định, ta hãy tìm sự liên hệ giữa y_1 và y_2 . Từ phương trình đầu của (c), ta có:

$$y_2 = -\frac{3}{kl} \left(\frac{2kl}{3} - 3P \right) y_1$$

- cho $y_1 = 1$ thì:
- tương ứng với $P_{1,th} = \frac{kl}{9}$ ta có $y_2 = -1$;
 - tương ứng với $P_{2,th} = \frac{kl}{3}$ ta có $y_2 = 1$.

Các dạng mất ổn định như trên hình 1.4c, d.

1.4. Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân là một phương pháp số trong đó phương trình vi phân được thay thế bằng hệ phương trình đại số tương đương. Cơ sở của phương pháp sai phân hữu hạn là tìm giá trị của hàm cần tìm tại một số điểm chia hữu hạn, tại mỗi điểm chia có thể thay phương trình vi phân xấp xỉ bằng một phương trình đại số chứa các giá trị của hàm tại điểm đó và một số điểm lân cận. Do đó có thể thay thế các đạo hàm trong phương trình vi phân theo các sai phân và đưa phương trình vi phân về các phương trình đại số.

Giả sử chia miền xác định của hàm $f(z)$ thành n khoảng chia cách đều nhau là h như trên hình 1.5. Tại điểm chia thứ i có hoành độ z_i , giá trị của hàm là $f(z_i) = f_i$. Nếu giữa các điểm chia ta quan niệm hàm $f(z)$ biến thiên theo luật đường thẳng thì đạo hàm cấp một của hàm tại điểm chia thứ i có thể thay thế gần đúng bằng:

$$\left(\frac{df}{dz} \right)_i \approx \frac{\Delta f_i}{h}. \quad (1.5)$$

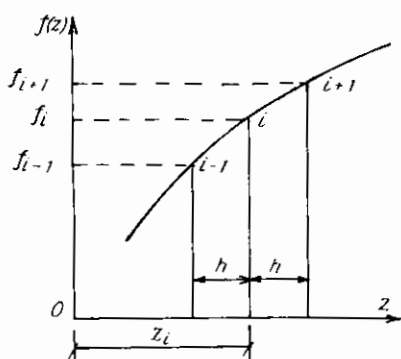
Δf_i được gọi là sai phân cấp một.

Nếu Δf_i được biểu thị theo thứ tự tăng dần của hàm f kể từ điểm i thì gọi là sai phân tiến:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i. \quad (1.6)$$

Nếu Δf_i được biểu thị theo thứ tự giảm dần của hàm f kể từ điểm i thì gọi là sai phân lùi:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}. \quad (1.7)$$



Hình 1.5

Nếu Δf_i được biểu thị theo các giá trị hàm f ở hai bên điểm i thì gọi là sai phân trung tâm:

$$\Delta f_i = \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}). \quad (1.8)$$

Với khoảng chia h chọn bằng nhau, sai phân trung tâm cho kết quả có độ chính xác cao hơn.

Đạo hàm cấp hai tại điểm chia thứ i được thay thế bằng:

$$\left(\frac{d^2 f}{dz^2}\right)_i \approx \frac{\Delta(\Delta f_i)}{h^2} = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad (1.9)$$

$\Delta^2 f_i$ được gọi là sai phân cấp hai:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}. \quad (1.10)$$

Biểu thức (1.10) là sai phân trung tâm cấp hai tại điểm i .

Thực hiện tương tự, tại điểm i ta có thể thay đạo hàm cấp ba, cấp bốn... theo các sai phân cấp ba, cấp bốn ... như sau:

$$\left(\frac{d^3 f}{dz^3}\right)_i = \frac{\Delta^3 f_i}{h^3} \quad \text{với} \quad \Delta^3 f_i = \frac{1}{2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2});$$

$$\left(\frac{d^4 f}{dz^4}\right)_i = \frac{\Delta^4 f_i}{h^4} \quad \text{với} \quad \Delta^4 f_i = (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Thứ tự thực hiện:

1. Lập phương trình vi phân của đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu.
2. Giá thiết chuyển vị tại một số điểm chia của hệ ở trạng thái cân bằng lệch. Thay phương trình vi phân bằng các phương trình sai phân tương ứng tại mỗi điểm chia sẽ được hệ phương trình đại số thuần nhất với ẩn là các chuyển vị.
3. Thiết lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức của hệ phương trình đại số bằng không.
4. Giải phương trình ổn định để tìm các lực tới hạn.

Nếu chia thành thành n khoảng thì số ẩn y_i nói chung bằng $n+1$ bao gồm f_0, f_1, \dots, f_n , còn số phương trình sai phân chỉ có $(n-1)$. Do đó, để giải bài toán ta cần bổ sung thêm hai điều kiện biên.

Để tăng mức độ chính xác của phương pháp ta có thể vận dụng công thức sai phân bậc cao hoặc tăng số lượng đoạn chia, nhưng tất nhiên khối lượng tính toán cũng tăng lên.

Salvadovi đã vận dụng sơ đồ ngoại suy Richardson, giới thiệu một cách đơn giản và nhanh để nâng cao mức độ chính xác của kết quả như sau:

Giá thiết sai số e của kết quả gần đúng tương ứng với khoảng chia h tỷ lệ với h theo hệ thức: $e = C.h^2$, với C là một hằng số.

Gọi: n_1 và n_2 – số lượng điểm chia trong hệ tương ứng với hai lần tính, khi đó chiều dài của khoảng chia tương ứng là $h_1 = l/n_1$ và $h_2 = l/n_2$;

P_1 và P_2 – các giá trị tối hạn gần đúng tương ứng với hai lần tính;

P – giá trị ngoại suy của kết quả.

$$\text{Các sai số tương ứng: } e_1 = P - P_1 = C \frac{l^2}{n_1^2} \quad \text{và} \quad e_2 = P - P_2 = C \frac{l^2}{n_2^2}$$

Từ hai công thức trên với chú ý là C, l không đổi, ta suy ra kết quả ngoại suy:

$$P = \frac{n_1^2 P_1 - n_2^2 P_2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.11)$$

Phương pháp sai phân hữu hạn áp dụng có hiệu quả cho những trường hợp hệ có tiết diện thay đổi theo quy luật phức tạp.

Ví dụ 1.4. Xác định lực tối hạn cho thanh có tiết diện thay đổi và có liên kết khớp ở hai đầu như trên hình 1.6.

Ở trạng thái lệch khỏi dạng ban đầu, mômen uốn tại tiết diện bất kỳ có tung độ y bằng $M = Py$. Do đó, phương trình vi phân đường biến dạng của thanh có dạng:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \alpha^2 y = 0 \quad \text{với} \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad (1.12)$$

Chia thanh thành n đoạn bằng nhau bằng $h = l/n$, gọi chuyển vị tại điểm chia thứ i là y_i . Sau khi thay đạo hàm cấp hai trong (1.12) theo (1.9) và (1.10), ta sẽ được phương trình sai phân tại điểm thứ i :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \alpha_i^2 y_i = 0, \quad \text{với} \quad \alpha_i^2 = \frac{P}{EI_i}$$

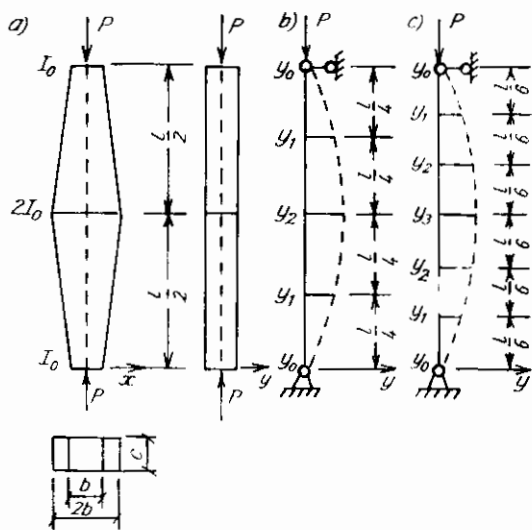
$$\text{hay} \quad y_{i-1} + (\beta_i^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 0; \quad \text{với} \quad i = 1, 2, \dots, (n-1); \quad (1.13)$$

trong đó:

y_{i-1} và y_{i+1} – chuyển vị tại các điểm bên trái và bên phải của điểm chia thứ i :

$$\beta_i^2 = \alpha_i^2 h^2 = \frac{P}{EI_i} h^2 \quad (1.14)$$

Các điều kiện biên: $y(0) = y(l) = 0$.



Hình 1.6

◆ Khi thanh được chia thành bốn đoạn (hình 1.6b): $n = 4$ và $h = l/4$.

Do hệ có tính chất đối xứng nên ta đánh số các điểm chia như trên hình 1.6b. Bài toán có hai chuyển vị chưa biết là y_1, y_2 và chỉ cần viết các phương trình sai phân với $i = 1, 2$ kèm theo các điều kiện biên $y_0 = 0; y_3 = y_1$.

Thanh mất ổn định trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ yOz nên cần tìm mômen quán tính quanh trục x .

Tại điểm 0: $I_0 = I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_0^2 = \frac{P}{EI_0} \cdot \frac{l^2}{16}$;

Tại điểm 1: $I_1 = \frac{3}{2} I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_1^2 = \frac{P}{E \cdot 3I_0} \cdot \frac{l^2}{2 \cdot 16} = \frac{2}{3} \beta_0^2$;

Tại điểm 2: $I_2 = 2 I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_2^2 = \frac{P}{E \cdot 2I_0} \cdot \frac{l^2}{16} = \frac{1}{2} \beta_0^2$.

Theo (1.13), các phương trình sai phân tại điểm $i=1$ và $i=2$ tương ứng với các điều kiện biên $y_0 = 0; y_3 = y_1$ sẽ có dạng:

$$\left(\frac{2}{3}\beta_0^2 - 2\right)y_1 + y_2 = 0; \quad y_1 + \left(\frac{1}{2}\beta_0^2 - 2\right)y_2 + y_1 = 0.$$

Phương trình ổn định: $D = \begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}\beta_0^2 - 2\right) & 1 \\ 2 & \left(\frac{1}{2}\beta_0^2 - 2\right) \end{vmatrix} = (\beta_0^2)^2 - 7(\beta_0^2) + 6 = 0.$

Nghiệm nhỏ nhất: $\beta_0^2 = \frac{P}{EI_0} \cdot \frac{l^2}{16} = 1$. Suy ra lực tới hạn: $P_{th} = 16 \frac{EI_0}{l^2}$.

So sánh với kết quả chính xác $P_{th} = 16,48 \frac{EI_0}{l^2}$, sai số 2,91%.

◆ Khi thanh được chia thành sáu đoạn (hình 1.6c): $n = 6$ và $h = l/6$.

Tại điểm 0: $I_0 = I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_0^2 = \frac{P}{EI_0} \cdot \frac{l^2}{36}$;

Tại điểm 1: $I_1 = \frac{4}{3} I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_1^2 = \frac{3}{4} \beta_0^2$;

Tại điểm 2: $I_2 = \frac{5}{3} I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_2^2 = \frac{3}{5} \beta_0^2$;

Tại điểm 3: $I_3 = 2 I_0$; theo (1.14) ta có: $\beta_3^2 = \frac{1}{2} \beta_0^2$.

Theo (1.13), các phương trình sai phân tại điểm $i = 1, 2$ và 3 tương ứng với các điều kiện biên $y_0 = 0$; $y_4 = y_2$ sẽ có dạng:

$$\left(\frac{3}{4}\beta_0^2 - 2\right)y_1 + y_2 = 0;$$

$$y_1 + \left(\frac{3}{5}\beta_0^2 - 2\right)y_2 + y_3 = 0;$$

$$y_2 + \left(\frac{1}{2}\beta_0^2 - 2\right)y_3 + y_2 = 0.$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{3}{4}\beta_0^2 - 2\right) & 1 & 0 \\ 1 & \left(\frac{3}{5}\beta_0^2 - 2\right) & 1 \\ 0 & 2 & \left(\frac{1}{2}\beta_0^2 - 2\right) \end{vmatrix} = \left(\beta_0^2\right)^3 - 10\left(\beta_0^2\right)^2 + 24\left(\beta_0^2\right) - \frac{80}{9} = 0.$$

Nghiệm nhỏ nhất: $\beta_0^2 = \frac{P}{EI_0} \cdot \frac{l^2}{16} = 0,4514$. Suy ra lực tới hạn: $P_{th} = 16,25 \frac{EI_0}{l^2}$.

So sánh với kết quả chính xác $P_{th} = 16,48 \frac{EI_0}{l^2}$, sai số 1,4%.

◆ Tìm kết quả ngoại suy theo sơ đồ Richardson: Áp dụng công thức (1.11) cho trường hợp này ta có:

Khi $n_1 = 4$: $P_1 = 16 \frac{EI_0}{l^2}$. Khi $n_2 = 6$: $P_2 = 16,25 \frac{EI_0}{l^2}$. Kết quả ngoại suy:

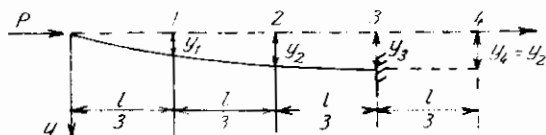
$$P = \left[\frac{16 \cdot 16 - 36 \cdot 16,25}{16 - 36} \right] \frac{EI_0}{l^2} = 16,45 \frac{EI_0}{l^2}.$$

So với kết quả chính xác, sai số chỉ là 0,18%.

Ví dụ 1.5. Xác định lực tối hạn cho thanh có tiết diện không đổi và có liên kết như trên hình 1.7.

Để vận dụng được phương trình vi phân (1.12) và phương trình sai phân (1.13) đã lập trong bài toán thanh có hai đầu khớp cho trường hợp này, ta cần chọn hệ tọa độ như trên hình 1.7.

Hình 1.7



Chia thanh thành ba đoạn đều nhau, ta có: $n = 3$; $h = l/3$; số phương trình bằng $n-1 = 2$; số chuyển vị bằng $n+1 = 4$ bao gồm y_0, y_1, y_2, y_3 . Đo đo cần có hai điều kiện biên.

- Tại đầu tự do: $y_0 = 0$.
- Tại đầu ngàm: góc xoay ở ngàm bằng không nên ta có thể tưởng tượng kéo dài thanh thêm một đoạn như trên hình 1.7 rồi viết điều kiện $y_4 = y_2$.

Như vậy ta có thể lập ba phương trình sai phân theo (1.13) tại các điểm $i = 1, 2$ và 3 tương ứng với các điều kiện biên $y_0 = 0$; $y_4 = y_2$ như sau:

$$0 + (\beta^2 - 2)y_1 + y_2 = 0;$$

$$y_1 + (\beta^2 - 2)y_2 + y_3 = 0;$$

$$y_2 + (\beta^2 - 2)y_3 + y_4 = 0.$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} (\beta^2 - 2) & 1 & 0 \\ 1 & (\beta^2 - 2) & 1 \\ 0 & 2 & (\beta^2 - 2) \end{vmatrix} = (\beta^2 - 2)[(\beta^2 - 2)^2 - 3] = 0.$$

Nghiệm nhỏ nhất: $\beta^2 = \frac{P}{EI} \cdot \frac{l^2}{9} = 0,268$. Suy ra lực tối hạn: $P_{th} = 2,41 \frac{EI}{l^2}$.

So sánh với kết quả chính xác (1.2) là $P_{th} = 2,467 EI_0 / l^2$, sai số 2,3%.

1.5. Phương pháp dây xích

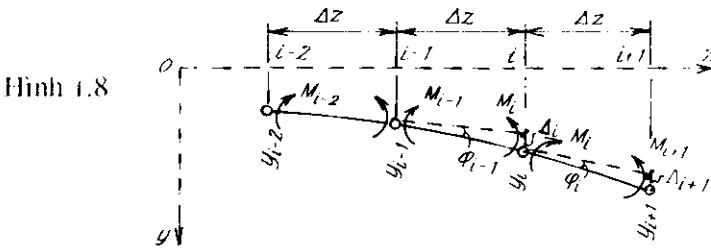
Phương pháp dây xích [12] là một hình thức khác của phương pháp sai phân hữu hạn do H. Henki đề xuất.

Chia thanh thành n đoạn bằng nhau bằng Δz và coi hệ như một dây xích có n đốt liên kết với nhau bằng khớp đàn hồi (hình 1.8). Gọi y_0, y_1, \dots, y_n là độ võng tại các mắt xích.

Trong trường hợp này, tại mắt i phương trình vi phân $y'' = -M/EI$ có thể viết gần đúng dưới dạng số gia như sau:

$$\frac{\Delta y'_i}{\Delta z} = -\frac{M_i}{EI_i} \quad \text{hay} \quad \Delta y'_i = -\frac{M_i}{EI_i} \Delta z,$$

trong đó : M_i và I_i – mômen uốn và mômen quán tính tại mắt thứ i .



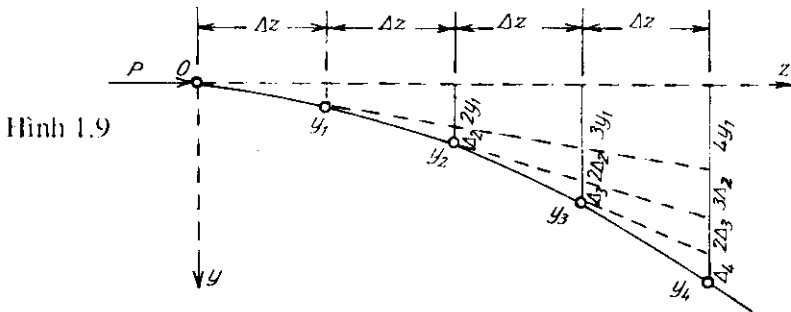
Hình 1.8

Ta thấy $\Delta y'_i$ là số gia của góc xoay, số gia này chính bằng góc xoay tương đối φ_i giữa hai đốt xích lân cận mắt i (hình 1.8).

$$\varphi_i = -\frac{M_i}{EI_i} \Delta z. \quad (1.15)$$

Trong trường hợp $y_0 = 0$ trục z trùng với đường tác dụng của lực P ta có $M_i = P \cdot y_i$. Ngoài ra, nếu biểu thị mômen quán tính tại các tiết diện theo một giá trị I_0 , tức là $I_i = k_i I_0$, ta có :

$$\varphi_i = -\frac{P}{EI_0} \Delta z \frac{y_i}{k_i}. \quad (1.16)$$



Hình 1.9

Từ hình 1.9 ta dễ dàng tìm được sự liên hệ giữa các độ võng y_i như sau:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2y_1 + \Delta_2 ; \\ y_3 &= 3y_1 + 2\Delta_2 + \Delta_3 ; \\ y_4 &= 4y_1 + 3\Delta_2 + 2\Delta_3 + \Delta_4 ; \\ &\dots \dots \dots \\ y_i &= i y_1 + (i-1)\Delta_2 + (i-2)\Delta_3 + \dots + \Delta_i ; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

Từ hình 1.8 và theo (1.16) ta xác định được các Δ_i :

$$\Delta_i = \varphi_{i-1} \cdot \Delta z = - \frac{M_{i-1}}{EI_{i-1}} \Delta z^2 = - \frac{P \cdot \Delta z^2}{EI_o} \cdot \frac{y_{i-1}}{k_{i-1}}.$$

Hay:
$$\Delta_i = - \frac{P^*}{k_{i-1}} y_{i-1}, \quad (1.18)$$

với
$$P^* = \frac{P \cdot \Delta z^2}{EI_o}. \quad (1.19)$$

Thay (1.18) vào (1.17) ta tìm được các phương trình liên hệ giữa các độ võng:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2y_1 - P^* \frac{1}{k_1} y_1; \\ y_3 &= 3y_1 - P^* \left[\frac{2}{k_1} y_1 + \frac{1}{k_2} y_2 \right]; \\ y_4 &= 4y_1 - P^* \left[\frac{3}{k_1} y_1 + \frac{2}{k_2} y_2 + \frac{1}{k_3} y_3 \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ y_i &= iy_1 - P^* \left[\frac{(i-1)}{k_1} y_1 + \frac{(i-2)}{k_2} y_2 + \dots + \frac{1}{k_{i-1}} y_{i-1} \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= ny_1 - P^* \left[\frac{(n-1)}{k_1} y_1 + \frac{(n-2)}{k_2} y_2 + \dots + \frac{1}{k_{n-1}} y_{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Lần lượt thay y_2, y_3, \dots, y_{n-1} xác định từ các phương trình trên vào phương trình cuối đồng thời sử dụng điều kiện biên để xác định y_n , ta sẽ được một phương trình thuần nhất đối với y_1 . Giải phương trình này với điều kiện $y_1 \neq 0$ ta sẽ xác định được P^* và từ đó suy ra lực tối hạn.

Cách vận dụng các điều kiện biên trong phương pháp này cũng giống như trong phương pháp sai phân.

Phương pháp đây xích áp dụng tốt cho thanh có tiết diện thay đổi và có ưu điểm hơn phương pháp sai phân là không phải khai triển định thức.

Ví dụ 1.6. Xác định lực tối hạn cho thanh côngxôn chịu lực nén P (hình 1.7).

Chia thanh thành ba đoạn với $\Delta z = l/3$ như trên hình 1.7. Trong trường hợp này $EI = const$ nên các hệ số $k_i = 1$. Theo (1.20), ta có:

$$y_2 = 2y_1 - P^* y_1;$$

$$y_3 = 3y_1 - P^*(2y_1 + y_2) = 3y_1 - 4y_1 P^* + y_1 P^{*2};$$

$$y_4 = 4y_1 - P^*(3y_1 + 2y_2 + y_3) = y_2.$$

Thay hai phương trình trên vào phương trình thứ ba và biến đổi, ta có:

$$y_1 (P^{*3} - 6P^{*2} + 9P^* - 2) = 0$$

Từ điều kiện $y_1 \neq 0$, ta được phương trình ổn định: $P^{*3} - 6P^{*2} + 9P^* - 2 = 0$.

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình ổn định: $P^* = 0,268$.

Theo (1.19), ta xác định được lực tối hạn: $P_{th} = \frac{EI}{\Delta z^2} P^* = \frac{9EI}{l^2} P^* = 2,41 \frac{EI}{l^2}$.

Sơ với kết quả chính xác (1.2), sai số 2,3%.

Ví dụ 1.7. Xác định lực tối hạn cho thanh có tiết diện thay đổi chịu lực nén P đã xét trong ví dụ 1.4 (hình 1.6).

Chia thanh thành bốn đốt xích với $\Delta z = l/3$ như trên hình 1.6b. Mômen quán tính tại các mắt 0, 1 và 2 đã được xác định trong ví dụ 1.4, kết quả:

$$I_0 = I_0; \quad I_1 = 3 I_0/2 \rightarrow k_1 = 3/2; \quad I_2 = 2 I_0 \rightarrow k_2 = 2.$$

Áp dụng các phương trình (1.20), ta có:

$$y_2 = 2y_1 - \frac{P^*}{k_1} y_1; \tag{a}$$

$$y_3 = 3y_1 - P^* \left[\frac{2}{k_1} y_1 + \frac{1}{k_2} y_2 \right]. \tag{b}$$

Thay (a) vào (b) đồng thời chú ý đến tính chất đối xứng $y_3 = y_1$, ta được phương trình thuần nhất:

$$\frac{1}{3} y_1 (P^{*2} - 7P^* + 6) = 0.$$

Từ điều kiện $y_1 \neq 0$, ta được phương trình ổn định: $P^{*2} - 7P^* + 6 = 0$.

Nghiệm nhỏ nhất: $P^* = 1$. Do đó, theo (1.19), ta có $P_{th} = \frac{EI}{\Delta z^2} P^* = \frac{16EI}{l^2}$.

Kết quả giống như đã tìm được trong phương pháp sai phân, sai số 2,91%.

1.6. Phương pháp Bubnov - Galerkin

Phương pháp Bubnov - Galerkin là phương pháp gần đúng xây dựng trên cơ sở tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân thông qua hệ phương trình đại số tuyến tính. Trong mục này trình bày phương pháp theo tiêu chí tính học song

cũng có thể trình bày phương pháp theo tiêu chí năng lượng nếu vận dụng khái niệm về biến phân.

Giả sử phương trình vi phân cân bằng của hệ ở trạng thái lệch có dạng tổng quát như sau:

$$L(z, y, y', y'' \dots) = 0. \quad (1.21)$$

Giả thiết nghiệm của phương trình vi phân (1.21) có dạng chuỗi bao gồm p số hạng với p là số nguyên bất kỳ:

$$y = a_1 g_1(z) + a_2 g_2(z) + \dots + a_p g_p(z) = \sum_{i=1}^p a_i g_i(z). \quad (1.22)$$

trong đó: a_i – các hệ số chưa biết;

$g_i(z)$ – các hàm độc lập thỏa mãn các điều kiện biên.

Trong các bài toán kết cấu, các hàm $g_i(z)$ phải thỏa mãn các điều kiện biên về hình học (liên quan đến độ võng, góc xoay) và tĩnh học (liên quan đến các lực) nếu phương trình vi phân xuất phát từ phương trình vi phân cấp bốn $y^{IV} = -q/EI$ và chỉ cần thỏa mãn các điều kiện biên về hình học nếu phương trình vi phân xuất phát từ phương trình vi phân cấp hai $y'' = -M/EI$.

Thay (1.22) vào (1.21) ta có đẳng thức:

$$L \left\{ z, \sum_{i=1}^p a_i g_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g'_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g''_i(z), \dots \right\} \equiv 0.$$

Đẳng thức này không đổi khi nhân với hàm bất kỳ $g_k(z)$:

$$L \left\{ z, \sum_{i=1}^p a_i g_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g'_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g''_i(z), \dots \right\} g_k(z) \equiv 0.$$

Sau khi lấy tích phân trên toàn hệ, ta được:

$$\int L \left\{ z, \sum_{i=1}^p a_i g_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g'_i(z), \sum_{i=1}^p a_i g''_i(z), \dots \right\} g_k(z) dz = 0, \quad (1.23)$$

với $k = 1, 2, \dots, p$.

Thứ tự thực hiện:

1. Lập phương trình vi phân của đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu và biểu thị theo dạng (1.21).
2. Giả thiết nghiệm gần đúng dưới dạng chuỗi (1.22) và lập các phương trình (1.23) sẽ được hệ p phương trình đại số thuần nhất với các ẩn số là a_1, a_2, \dots, a_p .
3. Thiết lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức của hệ phương trình đại số thuần nhất bằng không.
4. Giải phương trình ổn định để tìm các lực tới hạn.

Phương pháp này áp dụng có hiệu quả đối với hệ có bậc tự do bằng vô cùng và cho kết quả càng chính xác nếu chọn nhiều hàm độc lập $g_i(z)$. Thường chỉ cần lấy p bằng 2 hoặc 3 là đủ.

Ví dụ 1.8. Xác định lực tối hạn cho thanh công-xôn đã xét trong ví dụ 1.1.

Từ ví dụ 1.1, ta có phương trình vi phân:

$$L = y'' + \alpha^2 y - \alpha^2 \delta = 0, \quad \text{với} \quad \alpha^2 = P/EI. \quad (a)$$

Chọn nghiệm dưới dạng chuỗi gồm hai số hạng: $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$. (b)

Từ (b) ta thấy: $\delta = a_1 l^2 + a_2 l^4$;

$$g_1(z) = z^2; \quad \text{suy ra} \quad g'_1(z) = 2z; \quad g''_1(z) = 2;$$

$$g_2(z) = z^4; \quad \text{suy ra} \quad g'_2(z) = 4z^3; \quad g''_2(z) = 12z^2.$$

Theo (1.23), ta lập được hai phương trình:

$$\int_0^l \left[(2a_1 + 12a_2 z^2) + \alpha^2 (a_1 z^2 + a_2 z^4) - \alpha^2 (a_1 l^2 + a_2 l^4) \right] z^2 dz = 0;$$

$$\int_0^l \left[(2a_1 + 12a_2 z^2) + \alpha^2 (a_1 z^2 + a_2 z^4) - \alpha^2 (a_1 l^2 + a_2 l^4) \right] z^4 dz = 0.$$

Sau khi lấy tích phân và biến đổi ta được hệ hai phương trình đại số thuần nhất:

$$7(5 - \alpha^2 l^2) a_1 + 2(63 l^2 - 5\alpha^2 l^4) a_2 = 0;$$

$$(63 - 9\alpha^2 l^2) a_1 + 2(135 l^2 - 7\alpha^2 l^4) a_2 = 0.$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} 7(5 - \alpha^2 l^2) & 2(63 l^2 - 5\alpha^2 l^4) \\ (63 - 9\alpha^2 l^2) & 2(135 l^2 - 7\alpha^2 l^4) \end{vmatrix} = (\alpha^2 l^2)^2 - 77\alpha^2 l^2 + 189 = 0.$$

Nghiệm nhỏ nhất: $\alpha^2 l^2 = 2,54$. Suy ra lực tối hạn: $P_{th} = \alpha^2 EI = 2,54EI/l^2$.

So sánh với kết quả chính xác theo (1.2), sai số 2,96%.

Ví dụ 1.9. Xác định lực tối hạn cho thanh có tiết diện thay đổi đã xét trong ví dụ 1.4 (hình 1.6).

Từ ví dụ 1.4, ta có phương trình vi phân: $L = y'' + \alpha^2 y = 0$, với $\alpha^2 = P/EI$.

Chọn nghiệm theo một số hạng: $y = a_1 \sin \frac{\pi z}{l}$.

Ta thấy: $g_1(z) = \sin \frac{\pi z}{l}$; $g'_1(z) = \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}$; $g''_1(z) = -\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}$.

Mômen quán tính của tiết diện thay đổi theo luật bậc nhất:

$$I(z) = I_0 \left(1 + \frac{2z}{l} \right) \quad \text{với} \quad I_0 = \frac{bc^3}{12}.$$

Theo (1.23), ta lập được phương trình:

$$2 \int_0^{l/2} \left[-\frac{\pi^2}{l^2} a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{P}{EI_o \left(1 + \frac{2z}{l}\right)} a_1 \sin \frac{\pi z}{l} \right] \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0;$$

Từ điều kiện tồn tại nghiệm $a_1 \neq 0$, ta suy ra:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_o}{l^2} \frac{\int_0^{l/2} \left(1 + \frac{2z}{l}\right) \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{\int_0^{l/2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz} = 16,74 \frac{EI_o}{l^2}.$$

Số sánh với kết quả chính xác $P_{th} = 16,48 EI_o / l^2$, sai số 1,58 %.

1.7. Phương pháp nghiệm đúng tại một số hữu hạn điểm

Theo [12], phương pháp này là hình thức trung gian giữa phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp Bubnov - Galerkin.

Giả sử chọn nghiệm phương trình vi phân dưới dạng chuỗi:

$$y = \sum_1^p a_i g_i(z), \quad (1.24)$$

trong đó $g_i(z)$ là các hàm độc lập, chọn phù hợp với các điều kiện biên.

Các thông số a_i được xác định để sao cho sau khi thay (1.24) vào phương trình vi phân cơ bản của bài toán thì phương trình vi phân phải được thoả mãn với p giá trị của biến số độc lập tức là với p điểm trên hệ. Những điểm mà tại đó ta áp dụng phương trình vi phân có thể chọn bất kỳ, song thường nên chọn cách đều nhau.

Sau khi áp dụng phương trình vi phân tại n điểm ta sẽ được n phương trình đại số thuần nhất với n ẩn a_i . Từ điều kiện định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất bằng không, tức là điều kiện các $a_i \neq 0$, suy ra giá trị của lực tới hạn.

Ví dụ 1.10. Xác định lực tới hạn cho thanh công-xôn đã xét trong ví dụ 1.1.

Phương trình vi phân có dạng: $y'' + \alpha^2 y - \alpha^2 \delta = 0$, với $\alpha^2 = P/EI$. (a)

Chọn nghiệm dưới dạng chuỗi gồm hai số hạng: $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$. (b)

Áp dụng phương trình vi phân (a) chọn các điểm có hoành độ $z = l/2$ và $z = l$. Lần lượt thay (b) vào (a) với $z = l/2$ và $z = l$, ta được hai phương trình thuần nhất:

$$\begin{aligned} \left(2a_1 + 12a_2 \frac{l^2}{4}\right) + \alpha^2 \left(a_1 \frac{l^2}{4} + a_2 \frac{l^4}{16}\right) - \alpha^2 (a_1 l^2 + a_2 l^4) &= 0; \\ \left(2a_1 + 12a_2 l^2\right) + \alpha^2 (a_1 l^2 + a_2 l^4) - \alpha^2 (a_1 l^2 + a_2 l^4) &= 0. \end{aligned}$$

hay:
$$\left(2 - \frac{3}{4}\alpha^2 l^2\right)a_1 + \left(3 - \frac{15}{16}\alpha^2 l^2\right)l^2 a_2 = 0;$$

$$a_1 + 6l^2 a_2 = 0.$$

Phương trình ổn định:
$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{3}{4}\alpha^2 l^2 & \\ & 6l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 - \frac{15}{16}\alpha^2 l^2 \\ l^2 \end{vmatrix} = 3\left(3 - \frac{19}{16}\alpha^2 l^2\right) = 0.$$

Suy ra: $\alpha^2 l^2 = 48/19 \approx 2,53$ và $P_{th} = 2,53 EI/l^2$,

So sánh với kết quả chính xác $P_{th} = 2,47 EI/l^2$, sai số 2,4%.

1.8. Phương pháp đúng dần

Theo phương pháp này, trước tiên ta giả thiết dạng gần đúng của phương trình biến dạng, căn cứ vào đường biến dạng này và các phương trình vi phân của hệ xác định đường biến dạng mới thứ hai của hệ và tải trọng tới hạn tương ứng. Tiếp đó lại căn cứ vào đường biến dạng thứ hai của hệ để tìm đường biến dạng thứ ba của hệ và tải trọng tới hạn tương ứng... Cứ tiếp tục như vậy cho tới khi tải trọng tới hạn và đường biến dạng của lần sau xấp xỉ trùng với tải trọng tới hạn và đường biến dạng của lần trước thì ngừng. Giá trị tới hạn lần cuối là kết quả cần tìm.

Để tìm đường biến dạng mới theo đường biến dạng trước ta có thể dùng phương pháp giải tích hay phương pháp đồ toán.

Thứ tự thực hiện khi tìm đường biến dạng theo phương pháp giải tích: ..

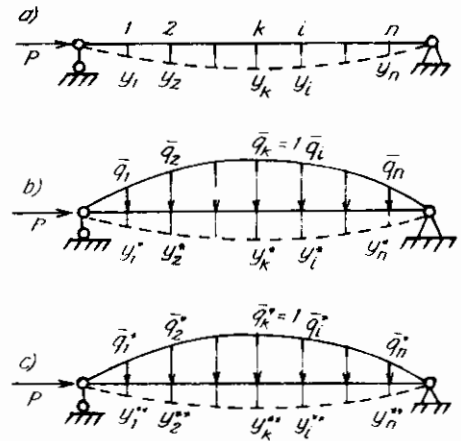
1. Chọn nghiệm gần đúng $y(z)$ của đường biến dạng biểu thị theo một độ võng nào đó, chẳng hạn theo độ võng lớn nhất. Hàm $y(z)$ cần thoả mãn các điều kiện biên.
2. Xác định mômen uốn trong hệ ở trạng thái biến dạng theo hàm $y(z)$ và thay vào vế phải của phương trình vi phân $y'' = -M/EI$
3. Tích phân phương trình vi phân đồng thời sử dụng các điều kiện biên để xác định đường biến dạng mới và tải trọng tới hạn tương ứng.

Cứ thế tiếp tục cho tới khi giá trị P_{th} tìm được trong lần sau xấp xỉ bằng giá trị trong lần trước thì ngừng.

Thứ tự thực hiện khi tìm đường biến dạng theo phương pháp đồ toán:

1. Chọn đường biến dạng gần đúng theo một số tung độ y_1, y_2, \dots, y_n , tại các điểm $1, 2, \dots, n$. (hình 1.10a).
2. Xác định tải trọng giả tạo (xem SBVL) tại điểm thứ i theo công thức: $q_i = -M_i/EI_i$. Cần biểu thị giá trị q_i theo giá trị q_k tại một điểm bất kỳ nào đó được chọn bằng đơn vị (hình 1.10b), ta có: $\bar{q}_i = -q_i/q_k$.

3. Xác định mômen uốn giả tạo trong hệ giả tạo do các tải trọng giả tạo \bar{q}_i gây ra sẽ được các tung độ mới $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ của đường biến dạng mới. Tiếp đó xác định các q_i^* tương ứng với các tung độ mới $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ và cũng biểu thị các q_i^* theo giá trị q_k^* chọn bằng đơn vị, ta có $\bar{q}_i^* = -q_i^* / q_k^*$ (hình 1.10c).



Hình 1.10

Cứ thế tiếp tục cho tới khi tải trọng và độ võng được trong lần sau xấp xỉ bằng lần trước thì ngừng.

Biết tải trọng q_i^{**} và độ võng y_i^{**} trong lần cuối cùng tại điểm i ta dễ dàng xác định được mômen uốn M_i^{**} và từ đó suy ra lực tới hạn P_{th} tương ứng.

Cách giải bằng phương pháp đồ toán áp dụng thích hợp cho hệ có tiết diện thay đổi.

Ví dụ 1.11. Vận dụng cách giải đúng dần theo phương pháp giải tích, xác định lực tới hạn trong thanh đã xét trong ví dụ 1.1.

Phương trình vi phân: $EI y'' = P(\delta - y)$. (a)

1. Lần đúng dần thứ nhất: Chọn đường biến dạng: $y = \frac{\delta}{l^2} z^2$.

Thay vào vế phải của (a) và lấy tích phân hai lần, ta được:

$$EIy = P\delta \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{12} \frac{z^4}{l^2} + Az + B \right).$$

Từ các điều kiện biên khi $z = 0$ thì $y = 0$ và $y' = 0$, ta xác định được $A = B = 0$.

Lúc này phương trình đường biến dạng có dạng:

$$EIy = P\delta \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{12} \frac{z^4}{l^2} \right). \quad (b)$$

Từ điều kiện khi $z = l$ thì $y = \delta$, ta có:

$$EI\delta = P\delta \left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{12} \frac{l^4}{l^2} \right) = \frac{5}{12} Pl^2 \delta \quad \text{hay} \quad \delta \left[EI - \frac{5}{12} Pl^2 \right] = 0.$$

Từ điều kiện $\delta \neq 0$, suy ra $P_{th} = 2,400 EI / l^2$. (c)

Thay (c) vào (b) ta được phương trình: $y = \frac{6}{5} \frac{\delta}{l^2} \left(z^2 - \frac{1}{6} \frac{z^4}{l^2} \right)$. (d)

2. *Lần đúng lần thứ hai*: Chọn đường biến dạng theo (d) và cũng thực hiện tính toán tương tự như lần thứ nhất ta được:

$$P_{th} = 2,459 EI / l^2 ; \quad y = \frac{1}{61} \frac{\delta}{l^2} \left(75z^2 - 15 \frac{z^4}{l^2} + \frac{z^6}{l^4} \right)$$
 (e)

3. *Lần đúng lần thứ ba*: Chọn đường biến dạng theo (e) và cũng thực hiện tính toán tương tự như lần thứ nhất ta được:

$$P_{th} = 2,466 EI / l^2 ; \quad y = \frac{1}{1385} \frac{\delta}{l^2} \left(1708z^2 - 350 \frac{z^4}{l^2} + 28 \frac{z^6}{l^4} - \frac{z^8}{l^6} \right)$$
 (f)

Để thấy được mức độ tiệm cận ta xác định độ võng tại các hoành độ $z = l/3$ và $z = 2l/3$ trong mỗi lần gần đúng và lập bảng đối chiếu (bảng 1.1).

Bảng 1.1

Lần gần đúng	Độ võng tại			$P_{th} \frac{l^2}{EI}$	Sai số về P_{th}
	$z = l/3$	$z = 2l/3$	$z = l$		
1	$0,1308 \delta$	$0,4938 \delta$	δ	2,400	2,71%
2	$0,1336 \delta$	$0,4993 \delta$	δ	2,459	0,32%
3	$0,1339 \delta$	$0,4999 \delta$	δ	2,466	0,04%
Kết quả chính xác	$0,1340 \delta$	$0,5000 \delta$	δ	2,467	

1.9. Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet

Theo tiêu chí năng lượng đã trình bày trong chương Mở đầu, trạng thái cân bằng phiếm định xảy ra khi:

$$\delta T = \delta U \quad (1.25)$$

trong đó: δT – độ biến thiên của công các ngoại lực;

δU – độ biến thiên của thế năng biến dạng đàn hồi.

Điều kiện (1.25) sẽ cho ta phương trình xác định lực tới hạn.

Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng, độ biến thiên của thế năng biến dạng đàn hồi được xác định theo biểu thức đã thiết lập trong Cơ học kết cấu:

$$\delta U = \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int_V \frac{Q^2 ds}{2GA}$$
 (1.26)

trong đó M, N, Q – độ biến thiên của nội lực phát sinh khi hệ ở trạng thái cân bằng lệch với trạng thái ban đầu. Các đại lượng khác đã giải thích trong CHKC.

Trong những trường hợp có thể bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục so với biến dạng uốn, đồng thời chú ý là $EIy'' = -M$, ta có:

$$\delta U = \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI} = \frac{1}{2} \sum \int EI(y'')^2 ds. \quad (1.27)$$

Khi trong hệ chỉ tồn tại lực dọc không đổi trên từng đoạn thanh (dàn khớp), ta có:

$$\delta U = \sum \frac{N^2 l}{2EA}. \quad (1.28)$$

Độ biến thiên δT của công các ngoại lực phụ thuộc dạng tải trọng nên thường phải xác định riêng biệt cho từng bài toán.

Trong những trường hợp khi hệ chỉ chịu các lực tập trung P_k đặt tại các nút hoặc tại các đầu thanh ta có thể xác định δT như sau:

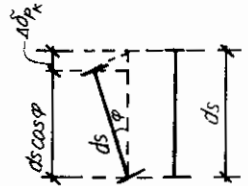
$$\delta T = \sum_{k=1}^m P_k \delta_{P_k},$$

trong đó: m – số lượng tải trọng đặt tại các nút hoặc tại các đầu thanh;

δ_{P_k} – chuyển vị tại điểm đặt lực P_k theo phương P_k , xác định như sau:

$$\delta_{P_k} = \int_0^{l_k} \Delta \delta_{P_k},$$

với $\Delta \delta_{P_k}$ là độ biến thiên chiều dài của phần tử ds của thanh chịu lực P_k khi phần tử bị xoay một góc φ (hình 1.11) còn l_k chiều dài của thanh chịu lực P_k .



Hình 1.11

$$\Delta \delta_{P_k} = ds - ds \cdot \cos \varphi = ds(1 - \cos \varphi) = ds \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} =$$

$$\approx 2 ds \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi ds = \frac{1}{2} (y')^2 ds.$$

Do đó:

$$\delta_{P_k} = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} (y')^2 ds.$$

Suy ra:

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m P_k \int_0^{l_k} (y')^2 ds. \quad (1.29)$$

Thứ tự thực hiện :

1. Tự cho trước đường biến dạng $y(z)$ của hệ ở trạng thái lệch phù hợp với các điều kiện biên theo một thông số.
2. Tìm độ biến thiên của thế năng biến dạng theo các công thức (1.26) ÷ (1.28).

3. Tìm đô biến thiên của công ngoại lực theo công thức (1.29).

4. Lập phương trình ổn định theo (1.25) và từ đó suy ra lực tới hạn.

Phương pháp năng lượng là phương pháp gần đúng, thường cho kết quả lực tới hạn lớn hơn so với kết quả chính xác (xem mục 1.11).

Khi chọn hàm chuyển vị cần chú ý:

- Hàm chuyển vị thỏa mãn càng nhiều các điều kiện biên của hệ càng tốt. Nếu không thỏa mãn đồng thời cả điều kiện biên hình học và điều kiện biên tĩnh học thì ít nhất phải thỏa mãn các điều kiện biên hình học.
- Hàm chuyển vị chọn gần với đường cong biến dạng đàn hồi của thanh thì kết quả càng chính xác.

Trong thực tế, hàm chuyển vị thường chọn là các hàm lượng giác hoặc hàm đa thức vì các hàm này dễ lấy tích phân và thuận tiện khi kiểm tra khả năng thỏa mãn các điều kiện biên.

Ví dụ 1.12. Xác định lực tới hạn cho thanh đã xét trong ví dụ 1.1 (hình 1.1).

Chọn hàm chuyển vị là hàm lượng giác với một thông số δ : $y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right)$.

$$\text{Các đạo hàm: } y' = \frac{\delta \pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} \quad \text{và} \quad y'' = \frac{\delta \pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi z}{2l}.$$

Dễ dàng nhận thấy các điều kiện biên đều được thỏa mãn.

$$\text{Theo (1.27): } \delta U = \frac{1}{2} \sum \int EI (y'')^2 ds = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\delta \pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi z}{2l} \right)^2 dz = \frac{EI \delta^2 \pi^4}{64 l^3}.$$

$$\text{Theo (1.29): } \delta T = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 ds = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{\delta \pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} \right)^2 dz = P \frac{\delta^2 \pi^2}{16l}.$$

$$\text{Phương trình ổn định theo (1.25): } P \frac{\delta^2 \pi^2}{16l} = \frac{EI \delta^2 \pi^4}{64 l^3}.$$

Suy ra: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$. Kết quả tìm được là chính xác vì hàm chuyển vị chọn phù

hợp với đường biến dạng thực tế của thanh.

1.10. Phương pháp Rayleigh - Ritz

Phương pháp Rayleigh - Ritz được xây dựng trên cơ sở nghiên cứu thế năng toàn phần của hệ ở trạng thái cân bằng lệch khỏi dạng ban đầu. Lực tới hạn được xác định từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch, khi đó thế năng toàn phần sẽ cực trị: $\delta U^* = \delta(U + U_P) = 0$.

Thứ tự thực hiện :

1. Tự cho trước đường biến dạng $y(z)$ của hệ ở trạng thái lệch dưới dạng chuỗi:

$$y = \sum_{i=1}^p a_i g_i(z). \quad (1.30)$$

trong đó: p - số nguyên bất kỳ;

a_i - các thông số chưa biết;

$g_i(z)$ - các hàm độc lập thỏa mãn các điều kiện biên về hình học.

2. Căn cứ vào (1.30), tìm các đạo hàm y' và y'' rồi lập biểu thức thế năng toàn phần:

$$U^* = U^*_o + \delta U - \delta T \quad (1.31)$$

δU và δT được xác định theo các công thức (1.26) ÷ (1.28) và (1.29).

3. Lập điều kiện thế năng toàn phần cực trị để xác định các a_i : $dU^* = \sum_{i=1}^p \frac{\partial U^*}{\partial a_i} da_i$.

Vì a_i là các đại lượng độc lập và bất kỳ nên điều kiện trên chỉ thỏa mãn khi các thừa số của da_i bằng không :

$$\frac{\partial U^*}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial U^*}{\partial a_2} = 0; \dots; \quad \frac{\partial U^*}{\partial a_p} = 0. \quad (1.32)$$

Như vậy ta sẽ được hệ p phương trình đại số thuần nhất đối với các thông số a_i .

4. Lập điều kiện tồn tại các thông số a_i (tồn tại trạng thái lệch) bằng cách cho định thức các hệ số của hệ phương trình thuần nhất bằng không ta sẽ được phương trình ổn định và từ đó suy ra lực tới hạn.

Cũng như các phương pháp năng lượng khác, phương pháp này là gần đúng, thường cho kết quả lực tới hạn lớn hơn so với kết quả chính xác (xem mục 1.11).

Nếu chọn hàm chuyển vị (1.30) với nhiều thông số thì kết quả càng chính xác. Trong thực tế, thường lấy số lượng p bằng 1, 2 hoặc 3 là đủ.

Ví dụ 1.13. Xác định lực tới hạn cho thanh đã xét trong ví dụ 1.1 (hình 1.1).

Chọn đường biến dạng theo hai thông số: $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$.

Các đạo hàm của y : $y' = 2a_1 z + 4a_2 z^3$; $y'' = 2a_1 + 12a_2 z^2$.

Theo (1.27) và (1.29):

$$\delta U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dz = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_1 + 12a_2 z^2)^2 dz = 2EI l \left(a_1^2 - 4a_1 a_2 l^2 + \frac{36}{5} a_2^2 l^4 \right).$$

$$\delta T = \frac{Pl}{2} \int_0^l (y')^2 dz = \frac{Pl}{2} \int_0^l (2a_1 z + 4a_2 z^3)^2 dz = 2Pl^3 \left(\frac{1}{3} a_1^2 + \frac{4}{5} a_1 a_2 l^2 + \frac{4}{7} a_2^2 l^4 \right).$$

Thế năng toàn phần theo (1.31): $U^* = U^*_o + \delta U - \delta T$. Do đó:

$$U^* = U^*_o + 2EI l \left(a_1^2 - 4a_1 a_2 l^2 + \frac{36}{5} a_2^2 l^4 \right) - 2Pl^3 \left(\frac{1}{3} a_1^2 + \frac{4}{5} a_1 a_2 l^2 + \frac{4}{7} a_2^2 l^4 \right).$$

Điều kiện cực trị của thế năng toàn phần: $\frac{\partial U^*}{\partial a_1} = 0$; $\frac{\partial U^*}{\partial a_2} = 0$.

Sau khi thực hiện và biến đổi, ta được hệ hai phương trình thuần nhất:

$$5(3-P^*)a_1 + 2l^2(15-3P^*)a_2 = 0;$$

$$7(5-P^*)a_1 + 2l^2(63-5P^*l^2)a_2 = 0,$$

với : $P^* = \frac{Pl^2}{EI}$.

Phương trình ổn định: $D = \begin{vmatrix} 5(3-P^*) & 2l^2(15-3P^*) \\ 7(5-P^*) & 2l^2(63-5P^*) \end{vmatrix} = 8(P^{*2} - 45P^* + 105) = 0$.

Nghiệm nhỏ nhất $P^* = 2,5$ do đó lực tới hạn: $P_{th} = 2,50 EI / l^2$. Sai số so với kết quả chính xác là 1,2%.

Nếu chọn đường biến dạng theo ba thông số $y = a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6$ thì kết quả $P_{th} = 2,48 EI / l^2$ (sai số là 0,4%).

Ví dụ 1.14. Xác định lực tới hạn cho hệ có hai bậc tự do đã xét trong ví dụ 1.3. (hình 1.4).

Xét hệ ở trạng thái lệch theo hai thông số là hai góc α_1 và α_2 như trên hình 1.12.

Độ biến thiên của năng lượng biến dạng tích lũy trong các liên kết đàn hồi:

$$\delta U = \frac{1}{2} k y_1^2 + \frac{1}{2} k y_2^2.$$

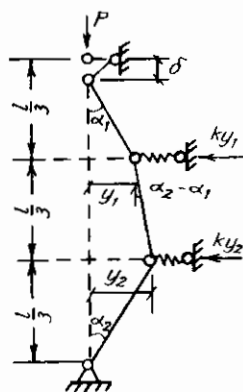
Nhưng $y_1 = \frac{l}{3} \sin \alpha_1 \approx \frac{l}{3} \alpha_1$; $y_2 = \frac{l}{3} \sin \alpha_2 \approx \frac{l}{3} \alpha_2$.

Do đó: $\delta U = \frac{1}{2} k \left[\frac{l^2}{9} \alpha_1^2 + \frac{l^2}{9} \alpha_2^2 \right] = \frac{1}{18} k l^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$.

Độ biến thiên của của công ngoại lực:

$$\begin{aligned} \delta T &= P \delta = P \frac{l}{3} \{ [1 - \cos \alpha_1] + [1 - \cos \alpha_2] + [1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] \} \approx \\ &\approx P \frac{l}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2). \end{aligned}$$

Biểu thức thế năng toàn phần:



Hình 1.12

$$U = U^*_{o} + \frac{l}{18}kl^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - P\frac{l}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2).$$

Điều kiện cực trị của thế năng toàn phần:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \alpha_1} = \frac{l}{3}\left(\frac{l}{3}kl - 2P\right)\alpha_1 + \frac{Pl}{3}\alpha_2 = 0;$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial \alpha_2} = \frac{Pl}{3}\alpha_1 + \frac{l}{3}\left(\frac{l}{3}kl - 2P\right)\alpha_2 = 0.$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{l}{3}kl - 2P\right) & P \\ P & \left(\frac{l}{3}kl - 2P\right) \end{vmatrix} = 3P^2 - \frac{4}{3}klP + \frac{l}{9}k^2l^2 = 0.$$

Sau khi giải phương trình, ta được: $P_{th,1} = \frac{kl}{9}$ và $P_{th,2} = \frac{kl}{3}$.

Kết quả tìm được là chính xác vì số thông số để xác định biến dạng của hệ bằng số bậc tự do của hệ.

1.11. Phương pháp Timoshenko

Các phương pháp năng lượng luôn luôn cho kết quả lực tới hạn lớn hơn kết quả chính xác. Có thể giải thích điều đó như sau: Khi áp dụng các phương pháp năng lượng ta phải giả thiết đường biến dạng của hệ, nói chung đường biến dạng giả thiết thường khác với đường biến dạng thực tế; sự khác biệt đó xảy ra tương tự như khi ta đặt thêm liên kết vào hệ và những liên kết này làm tăng độ cứng của hệ tức là làm tăng giá trị của tải trọng tới hạn.

Từ kết luận trên ta thấy: muốn tăng độ chính xác của phương pháp năng lượng ta cần chọn đường biến dạng giả thiết theo một số thông số có khả năng làm thay đổi đường biến dạng khi các thông số đó thay đổi, đồng thời chọn những thông số này sao cho lực tới hạn xác định theo điều kiện (1.25) có giá trị cực tiểu. Đó là nội dung phương pháp Timoshenko.

Thứ tự thực hiện :

1. Tự cho trước đường biến dạng $y(z)$ của hệ ở trạng thái lệch dưới dạng chuỗi như (1.30), theo các thông số a_i .

2 Thiết lập điều kiện (1.25), từ đó suy ra lực tới hạn là hàm của các thông số a_i .

$$P = F(a_1, a_2, \dots, a_p). \quad (1.33)$$

3. Viết các điều kiện để cho lực tới hạn có giá trị nhỏ nhất:

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial a_2} = 0; \dots; \quad \frac{\partial P}{\partial a_p} = 0. \quad (1.34)$$

ta được hệ p phương trình đại số để xác định các thông số a_i .

4. Thay các a_i vào phương trình (1.33) sẽ được lực tới hạn nhỏ nhất cần tìm.

Ví dụ 1.15. Tìm lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do chịu lực nén P , đã xét trong ví dụ 1.1 (hình 1.1).

Giả thiết phương trình đường biến dạng: $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$. (a)

Trong ví dụ 1.13 ta đã lập các biểu thức δU và δT theo các thông số a_1, a_2 . Thay những biểu thức này vào điều kiện $\delta U = \delta T$, ta tìm được:

$$P = \frac{EI}{l^2} \left(\frac{u^2 + 4ul^2 + \frac{36}{5}l^4}{\frac{1}{3}u^2 + \frac{4}{5}ul^2 + \frac{4}{7}l^4} \right), \quad \text{với } u = \frac{a_1}{a_2}. \quad (b)$$

Từ điều kiện $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$ ta được phương trình xác định thông số u :

$$u^2 + \frac{48}{7}ul^2 + \frac{228}{35}l^4 = 0 \quad (c)$$

Nghiệm của phương trình: $u_1 = -0,120 l^2$; $u_2 = -6,978 l^2$. (d)

Lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với nghiệm u_2 , sau khi thay u_2 vào (b), ta được:

$P_{1h} = 2,494 EI / l^2$. So với kết quả chính xác $P_{1h} = 2,467 EI / l^2$; sai số xấp xỉ 1,1%.

Ví dụ 1.16. Tìm lực tới hạn cho hệ có hai bậc tự do đã xét trong ví dụ 1.3 (hình 1.12).

Trong ví dụ 1.14 đã thiết lập biểu thức δU và δT theo các thông số α_1, α_2 . Thay những biểu thức này vào điều kiện $\delta U = \delta T$, ta tìm được:

$$P = \frac{kl}{6} \left(\frac{u^2 + 1}{u^2 - u + 1} \right) \quad \text{với } u = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (a)$$

Từ điều kiện $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$ ta được phương trình: $u^2 - 1 = 0$ suy ra $u = \pm 1$. (b)

Lần lượt thay $u = -1$ và $u = +1$ vào (a) ta được hai giá trị của lực tới hạn tương ứng với hai dạng biến dạng như trên hình 1.4c và d.

$$P_{1,th} = \frac{kl}{9} \quad \text{và} \quad P_{2,th} = \frac{kl}{3}.$$

Kết quả là chính xác vì số thông số để xác định dạng biến dạng của hệ bằng số bậc tự do của hệ.

1.12. Phương pháp động lực học

Phương pháp động lực học được xây dựng trên cơ sở tiêu chí động lực học đã trình bày trong chương Mở đầu, là phương pháp tổng quát áp dụng được cho hệ bảo toàn cũng như không bảo toàn.

Trong giáo trình này chỉ đề cập đến bài toán ổn định của hệ bảo toàn và thông qua một ví dụ đơn giản để giới thiệu nội dung phương pháp động lực học. Cũng cần nhận thấy là cách giải theo phương pháp động lực học thường phức tạp hơn các phương pháp khác nên phương pháp này thường ít được quan tâm khi chỉ cần giải bài toán ổn định của hệ bảo toàn thường gặp trong tính toán công trình. Tuy nhiên, đối với các bài toán ổn định của hệ không bảo toàn thì các phương pháp tính có thể dẫn đến kết quả không đúng nên khi đó cần áp dụng phương pháp động lực học.

Thứ tự thực hiện (áp dụng cho hệ đàn hồi có bậc tự do bằng vô cùng):

1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ ở trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu. Khi thiết lập cần xét đến các lực quán tính tại các khối lượng.

Đối với hệ đàn hồi có bậc tự do bằng vô cùng, chuyển động của hệ được biểu thị theo hàm phụ thuộc tọa độ và thời gian nên phương trình vi phân của chuyển động được mô tả theo phương trình đạo hàm riêng.

Trường hợp đặc biệt, khi hệ đàn hồi là thanh có tiết diện không đổi, ta có thể lập phương trình vi phân của chuyển động như sau:

Từ Sức bền vật liệu, phương trình vi phân của đường đàn hồi của thanh có liên kết bất kỳ ở hai đầu khi chịu uốn ngang cùng với uốn dọc bởi lực nén P có dạng:

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + P \frac{d^2 y}{dz^2} + q(z) = 0.$$

Áp dụng cho trường hợp này, ta có: $y = y(z, t)$; $q(z)$ giữ vai trò lực quán tính $q(z, t)$.

Gọi m là khối lượng phân bố của thanh, vì thanh có tiết diện không đổi nên:

$$q(z, t) = q(t) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Phương trình chuyển động của thanh có tiết diện không đổi, sẽ có dạng:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

$$\text{Hay: } \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad \text{với } k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (1.35)$$

2. Đặt nghiệm của phương trình chuyển động của thanh dưới dạng:

$$y(z,t) = Y(z) e^{i\Omega t}, \quad (1.36)$$

trong đó: $Y(z)$ - hàm chỉ phụ thuộc tọa độ;

Ω - đại lượng cần tìm, được xác định theo điều kiện tồn tại hàm $Y(z)$.

3. Thay nghiệm (1.36) vào phương trình (1.35) ta sẽ lập được phương trình xác định hàm $Y(z)$.

4. Lập điều kiện tồn tại chuyển động của hệ tức là tồn tại hàm $Y(z)$. Từ điều kiện này sẽ tìm được đại lượng Ω .

5. Căn cứ vào giá trị tìm được của Ω , phân tích chuyển động theo tiêu chí đã nêu trong chương Mở đầu:

* Nếu Ω là số thực hoặc số phức với phần ảo dương thì chuyển động là điều hòa với tần số Ω quanh vị trí cân bằng: dạng cân bằng ban đầu là ổn định.

* Nếu Ω là số phức với phần ảo âm thì chuyển động sẽ tăng theo thời gian: dạng cân bằng ban đầu là không ổn định.

Thật vậy, nếu Ω là số phức thì ta có thể viết: $\Omega = \alpha + i\beta$; do đó:

$$e^{i\Omega t} = e^{i(\alpha + i\beta)t} = e^{i\alpha t} e^{-\beta t}.$$

Khi $\beta > 0$ thì $e^{-\beta t}$ là hàm tắt dần, chuyển động điều hòa quanh vị trí cân bằng.

Khi $\beta < 0$ thì $e^{-\beta t}$ là hàm tăng theo thời gian, chuyển động tăng theo thời gian.

Như vậy, trạng thái tới hạn xảy ra khi phần ảo của nghiệm Ω bằng không. Đó là điều kiện xác định lực tới hạn.

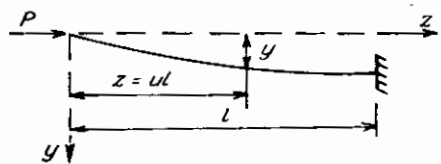
Ví dụ 1.17. Tìm lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do chịu lực nén P , đã xét trong ví dụ 1.1 (hình 1.13).

Phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ có dạng (1.35). Đặt nghiệm dưới dạng (1.36).

Nếu gọi: $u = z/l$, ta có:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\Omega^2 e^{i\Omega t} Y;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{d^2 Y}{dz^2} e^{i\Omega t} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 Y}{du^2} e^{i\Omega t}; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \frac{d^4 Y}{dz^4} e^{i\Omega t} = \frac{1}{l^4} \frac{d^4 Y}{du^4} e^{i\Omega t}$$



Hình 1.13

Thay các kết quả trên vào phương trình (1.35), sau khi biến đổi ta được phương trình vi phân xác định hàm $Y(z)$ như sau:

$$\frac{d^4 Y}{du^4} + \alpha \frac{d^2 Y}{du^2} - \omega^2 Y = 0 \quad (a)$$

trong đó: $\alpha = \frac{Pl^2}{EI}$; $\omega = \Omega l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$. (b)

Phương trình đặc trưng của (a): $r^4 + \alpha r^2 - \omega^2 = 0$.

Nghiệm của phương trình đặc trưng: $r_{1,2}^2 = -\frac{\alpha}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega^2}$.

Nếu đặt: $s_1^2 = i^2 r_1^2 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega^2}$; $s_2^2 = r_2^2 = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \omega^2}$ (c)

ta có thể viết nghiệm của (a) dưới dạng:

$$Y(u) = C_1 \sin s_1 u + C_2 \cos s_1 u + C_3 \operatorname{sh} s_2 u + C_4 \operatorname{ch} s_2 u. \quad (d)$$

Để xác định các hằng số tích phân, ta có 4 điều kiện biên như sau:

♦ Tại $z = 0$ tức là $u = 0$, ta có độ võng và mômen uốn bằng không:

1) $Y(0) = 0$. Suy ra: $C_2 + C_4 = 0$. (e)

2) $Y''(0) = 0$. Suy ra: $s_1^2 C_2 + s_2^2 C_4 = 0$. (f)

Giải hai phương trình (e) và (f) ta được: $C_2 = C_4 = 0$.

Như vậy, nghiệm (d) có dạng đơn giản hơn như sau:

$$Y(u) = C_1 \sin s_1 u + C_3 \operatorname{sh} s_2 u. \quad (g)$$

♦ Tại $z = l$ tức là $u = l$, ta có góc xoay và lực cắt bằng không. Hay:

3) $Y'(l) = 0$. Suy ra: $C_1 s_1 \cos s_1 + C_3 s_2 \operatorname{ch} s_2 = 0$. (h)

4) $Y'''(l) = 0$. Suy ra: $C_1 s_1^3 \cos s_1 - C_3 s_2^3 \operatorname{ch} s_2 = 0$. (i)

Từ các phương trình (h) và (i) ta thiết lập điều kiện tồn tại nghiệm $Y(u)$ tức là điều kiện tồn tại các hằng số tích phân C_1 và C_3 :

$$D = \begin{vmatrix} s_1 \cos s_1 & s_2 \operatorname{ch} s_2 \\ s_1^3 \cos s_1 & -s_2^3 \operatorname{ch} s_2 \end{vmatrix} = s_1 s_2 (s_1^2 + s_2^2) \cos s_1 \operatorname{ch} s_2 = 0.$$

Ta thấy: $s_1 \neq 0$ (theo c); $(s_1^2 + s_2^2) \neq 0$; hàm $\operatorname{ch} s_2 \neq 0$ với mọi giá trị s_2 . Do đó, điều kiện trên chỉ thỏa mãn khi:

- $s_2 = 0$. Từ (c) ta suy ra: $\omega = 0$ hay $\Omega = 0$ (theo b). Nghiệm tìm được là nghiệm thực nên trạng thái cân bằng là ổn định.
- $\cos s_1 = 0$. Suy ra: $s_1 = (2i+1)\pi/2$ với i là số nguyên bất kỳ.

Từ (c) ta có: $\omega = (2i+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \left[1 - \frac{4\alpha}{(2i+1)^2 \pi^2} \right]^2$.

Thay (b) vào kết quả trên, ta được:

$$\Omega = (2i + 1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \sqrt{\frac{EI}{m} \left[1 - \frac{4Pl^2}{EI(2i + 1)^2 \pi^2} \right]^2}$$

◆ Khi $P < (2i + 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$, nghiệm Ω là thực, hệ ổn định.

◆ Khi $P > (2i + 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$, nghiệm Ω là phức và chỉ tồn tại phần ảo. Do kết quả khai căn nên phần ảo này luôn có một giá trị âm, khi đó hệ không ổn định.

Trạng thái tới hạn xảy ra khi $P = (2i + 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$.

Lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với khi $i = 0$: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$.

Kết quả tìm được phù hợp với kết quả theo phương pháp tĩnh học.

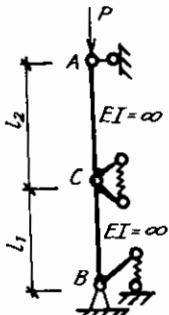
Bài tập

I.1. Cho hệ chịu lực nén P như trên hình I.1. Gọi k_1, k_2 là độ cứng của liên kết đàn hồi C và B (mômen phát sinh khi liên kết bị xoay bằng đơn vị). Tìm lực tới hạn theo:

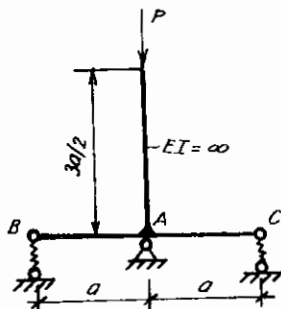
- Phương pháp thiết lập và giải phương trình đại số.
- Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejeune - Dirichlet.

I.2. Cho hệ chịu lực nén P như trên hình I.2. Gọi k là độ cứng của liên kết đàn hồi B và C (phần lực phát sinh khi liên kết chuyển vị bằng đơn vị). Tìm lực tới hạn theo:

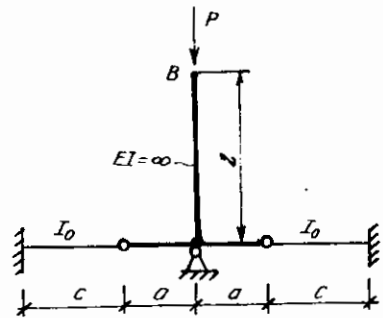
- Phương pháp thiết lập và giải phương trình đại số.
- Phương pháp Rayleigh - Ritz.



Hình I.1



Hình I.2



Hình I.3

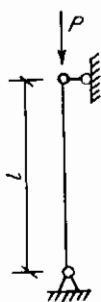
I.3. Cho hệ chịu lực nén P như trên hình I.3. Tìm lực tới hạn.

I.4. Cho thanh có liên kết khớp ở hai đầu, tiết diện không đổi và chịu lực nén P như trên hình I.4. Tìm lực tới hạn theo:

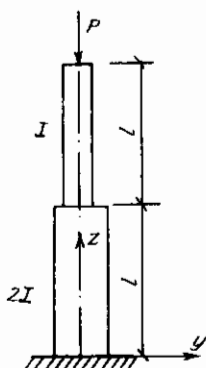
a) Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejeune - Dirichlet. Chọn hàm theo hai phương án sau:

$$1) y = f \cdot \sin(\pi z / l); \quad 2) y = f \cdot z (l - z).$$

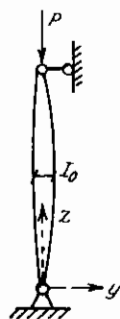
b) Phương pháp Rayleigh - Ritz. Chọn hàm $y = a_1 z (l - z) + a_2 \frac{z^3}{l^2} (l - z)$.



Hình I.4



Hình I.5



Hình I.6

I.5. Cho hệ có tiết diện thay đổi và chịu lực nén P như trên hình I.5. Tìm lực tới hạn theo:

a) Phương pháp sai phân hữu hạn (chia hệ thành 4 đoạn).

b) Phương pháp dây xích (chia hệ thành 4 đoạn).

c) Phương pháp Bubnov - Galerkin. Chọn hàm $y = f[1 - \cos(\pi z / 4l)]$.

d) Phương pháp nghiệm đúng tại một số hữu hạn điểm. Chọn hàm $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$.

e) Phương pháp Rayleigh - Ritz. Chọn hàm $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$.

f) Phương pháp Timoshenko. Chọn hàm $y = a_1 z^2 + a_2 z^4$.

I.6. Cho thanh có liên kết khớp ở hai đầu, tiết diện thay đổi và chịu lực nén P như trên

hình I.6. Cho biết mômen quán tính của tiết diện thay đổi theo luật: $I = I_0 \frac{4z(l-z)}{l^2}$.

Tìm lực tới hạn theo:

a) Phương pháp Bubnov - Galerkin. Chọn hàm $y = az (l - z)$.

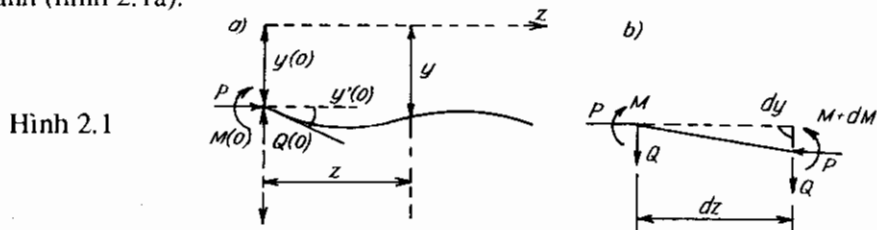
b) Phương pháp Rayleigh - Ritz. Chọn hàm $y = az (l - z)$.

c) Phương pháp sai phân hữu hạn (chia hệ thành 4 đoạn).

2 Ổn định của thanh thẳng

2.1. Các phương trình chuyển vị và nội lực trong thanh chịu uốn cùng với nén hoặc kéo

Để lập các phương trình chuyển vị và nội lực trong thanh chịu uốn cùng với nén hoặc kéo, ta xét thanh chịu lực nén P ở trạng thái cân bằng biến dạng trong hệ tọa độ như trên hình 2.1a. Giả sử ở trạng thái biến dạng, đầu trái của thanh có chuyển vị thẳng theo phương trục y là $y(0)$ và chuyển vị góc là $y'(0)$, đồng thời tại đầu trái cũng xuất hiện mômen uốn $M(0)$ và lực $Q(0)$ vuông góc với vị trí ban đầu của thanh (hình 2.1a).



Hình 2.1

Mômen uốn tại tiết diện bất kỳ có hoành độ z của thanh ở trạng thái biến dạng:

$$M(z) = M(0) + Q(0)z + P[y - y(0)].$$

Từ phương trình vi phân của đường đàn hồi: $y'' = -M/EI$, ta có:

$$y'' = -\frac{1}{EI} \{ M(0) + Q(0)z + P[y - y(0)] \}.$$

Hay: $y'' + \alpha^2 y = -\frac{1}{EI} [M(0) + Q(0)z - Py(0)]$, với $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$. (2.1)

Nghiệm của phương trình vi phân (2.1) có dạng:

$$y(z) = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - \frac{1}{\alpha^2 EI} [M(0) + Q(0)z - Py(0)]. \quad (2.2)$$

Các hằng số tích phân A và B được xác định theo các điều kiện biên ở đầu trái tại $z = 0$. Để thực hiện, ta lấy đạo hàm phương trình (2.2) theo z :

$$y'(z) = \alpha A \cos \alpha z - \alpha B \sin \alpha z - \frac{1}{\alpha^2 EI} Q(0). \quad (2.3)$$

Từ (2.2) và (2.3) ta có thể viết điều kiện biên ở đầu trái tại $z = 0$ như sau:

$$y(0) = B - \frac{1}{\alpha^2 EI} [M(0) - Py(0)]; \quad y'(0) = \alpha A - \frac{1}{\alpha^2 EI} Q(0).$$

Suy ra:
$$A = \frac{y'(0)}{\alpha} + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI}; \quad B = \frac{M(0)}{\alpha^2 EI}.$$

Thay các giá trị vừa tìm được của A và B vào (2.2) và chú ý là $\alpha^2 = P/EI$ ta được phương trình đường đàn hồi ở trạng thái biến dạng:

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha z) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI} (\alpha z - \sin \alpha z). \quad (2.4)$$

Các đại lượng $y(0)$, $y'(0)$, $M(0)$ và $Q(0)$ được gọi là các thông số ban đầu.

Tùy theo điều kiện liên kết ở đầu thanh, các thông số ban đầu có thể là đã biết hoặc chưa biết. Các thông số ban đầu chưa biết được xác định theo các điều kiện biên ở đầu phải của thanh.

Từ phương trình (2.4), ta tìm được phương trình góc xoay và từ đó suy ra phương trình mômen uốn trong thanh:

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EI} \sin \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha z); \quad (2.5)$$

$$M(z) = -EI y''(z) = \alpha EI y'(0) \sin \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q(0)}{\alpha} \sin \alpha z. \quad (2.6)$$

Từ điều kiện cân bằng lực như trên hình 2.1b ta xác định được lực cắt theo sơ đồ thanh không biến dạng:

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz} - P \frac{dy(z)}{dz} = Q(0). \quad (2.7)$$

Các phương trình từ (2.4) đến (2.7) thiết lập cho trường hợp chuyển vị và nội lực trong thanh là liên tục. Nếu dọc theo chiều dài thanh, chuyển vị và nội lực có bước nhảy (gián đoạn) thì cần lập các phương trình trên cho từng đoạn thanh trong đó các đại lượng này là liên tục. Cách lập các phương trình cho trường hợp này đã giới thiệu đầy đủ trong các giáo trình Sức bền vật liệu. Trong các trường hợp này:

- đối với đoạn thứ nhất ta sử dụng các phương trình từ (2.4) đến (2.7);
- đối với đoạn bất kỳ thứ $m+1$ ta có thể viết các phương trình chuyển vị và nội lực theo các phương trình của đoạn thứ m như sau:

$$y_{m+1}(z) = y_m(z) + \Delta y(a_m) + \frac{\Delta y'(a_m)}{\alpha} \sin \alpha(z-a_m) - \frac{\Delta M(a_m)}{\alpha^2 EI} [1 - \cos \alpha(z-a_m)] - \frac{\Delta Q(a_m)}{\alpha^3 EI} [\alpha z - a_m - \sin \alpha(z-a_m)]; \quad (2.8)$$

$$y'_{m+1}(z) = y'_m(z) + \Delta y'(a_m) \cos \alpha(z-a_m) - \frac{\Delta M(a_m)}{\alpha EI} \sin \alpha(z-a_m) - \frac{\Delta Q(a_m)}{\alpha^2 EI} [1 - \cos \alpha(z-a_m)]; \quad (2.9)$$

$$M_{m+1}(z) = M_m(z) + \alpha EI \Delta y'(a_m) \sin \alpha(z-a_m) + \Delta M(a_m) \cos \alpha(z-a_m) + \frac{\Delta Q(a_m)}{\alpha} \sin \alpha(z-a_m); \quad (2.10)$$

$$Q_{m+1}(z) = Q_m(z) + \Delta Q(a_m). \quad (2.11)$$

Trong các phương trình trên:

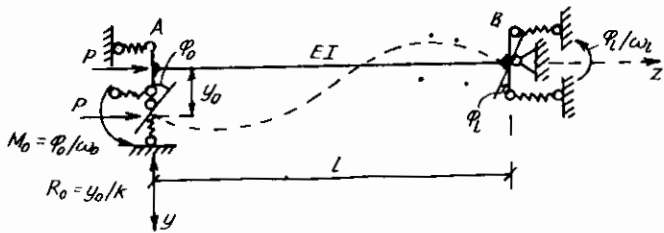
$z \geq a_m$, với a_m – hoành độ của tiết diện phân giới giữa đoạn thứ m và đoạn thứ $m+1$, tại đó có sự gián đoạn về chuyển vị và nội lực.

$\Delta y(a_m)$, $\Delta y'(a_m)$, $\Delta M(a_m)$ và $\Delta Q(a_m)$ – lần lượt là giá trị bước nhảy về độ võng, góc xoay, mômen uốn và lực cắt tại hoành độ a_m .

Chú thích: Trường hợp thanh chịu uốn cùng với lực kéo P , trong tất cả các biểu thức trên ta cần thực hiện phép thay thế như sau: $\alpha \Rightarrow i\beta$ với $\beta^2 = P/EI$; khi đó: $\alpha^2 \Rightarrow -\beta^2$; $\sin \alpha z \Rightarrow i \operatorname{sh} \beta z$; $\cos \alpha z \Rightarrow \operatorname{ch} \beta z$;

2.2. Ổn định của các thanh thẳng, tiết diện không đổi có liên kết bất kỳ ở hai đầu

Để lập phương trình ổn định áp dụng chung cho các thanh thẳng, tiết diện không đổi có liên kết bất kỳ ở hai đầu ta xét thanh chịu lực nén P với mô hình như trên hình 2.2.



Hình 2.2

Gọi:

k – hệ số đàn hồi của liên kết đàn hồi khi chuyển vị thẳng (chuyển vị thẳng của liên kết đàn hồi do lực đơn vị gây ra);

ω – hệ số đàn hồi của liên kết ngàm đàn hồi khi chuyển vị xoay (góc xoay của liên kết ngàm đàn hồi do mômen đơn vị gây ra).

Tại đầu trái A, nếu gọi y_0 và φ_0 là các thông số chưa biết thì ta có thể xác định các phản lực M và R theo y_0 và φ_0 . Như vậy các thông số tại đầu trái sẽ là:

$$y(0) = y_0 = ?; \quad y'(0) = \varphi_0 = ?; \quad M(0) = -\varphi_0 / \omega_0; \quad Q(0) = y_0 / k.$$

Tại đầu phải B, ta có các điều kiện: $y(l) = 0$; $y'(l) = \varphi_l$.

Góc xoay chưa biết φ_l sẽ được xác định theo điều kiện cân bằng:

$$\sum M_B = \frac{\varphi_l}{\omega_l} + \frac{\varphi_o}{\omega_o} + P y_o - \frac{y_o}{k} l = 0 \text{ suy ra: } \varphi_l = \omega_l \left[\left(\frac{l}{k} - P \right) y_o - \frac{l}{\omega_o} \varphi_o \right].$$

Như vậy, bài toán chỉ có hai thông số chưa biết là y_o và φ_o sẽ được xác định theo các điều kiện ở đầu bên phải là $y(l) = 0$; $y'(l) = \varphi_l$.

Từ (2.4) và (2.5) với chú ý là $\alpha^2 = P/EI$ ta được:

$$y(z) = y_o + \frac{\varphi_o}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{\varphi_o}{\omega_o \alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha z) - \frac{y_o}{k \alpha^3 EI} (\alpha z - \sin \alpha z);$$

$$y'(z) = \varphi_o \cos \alpha z + \frac{\varphi_o}{\omega_o \alpha EI} \sin \alpha z - \frac{y_o}{k \alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha z).$$

Điều kiện biên tại đầu B:

$$y(l) = y_o + \frac{\varphi_o}{\alpha} \sin \alpha l - \frac{\varphi_o}{\omega_o \alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha l) - \frac{y_o}{k \alpha^3 EI} (\alpha l - \sin \alpha l) = 0;$$

$$\begin{aligned} y'(l) &= \varphi_o \cos \alpha l + \frac{\varphi_o}{\omega_o \alpha EI} \sin \alpha l - \frac{y_o}{k \alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha l) = \\ &= \omega_l \left[\left(\frac{l}{k} - P \right) y_o - \frac{l}{\omega_o} \varphi_o \right]. \end{aligned}$$

Đặt: $v = \alpha l$ (2.12)

Sau khi biến đổi ta được hệ hai phương trình thuần nhất:

$$\left[1 - \frac{v - \sin v}{k \alpha^3 EI} \right] y_o + \left[\frac{\sin v}{\alpha} + \frac{1 - \cos v}{\omega_o \alpha^2 EI} \right] \varphi_o = 0;$$

$$\left[\omega_l \left(P - \frac{l}{k} \right) - \frac{1 - \cos v}{k \alpha^2 EI} \right] y_o + \left[\cos v + \frac{\sin v}{\omega_o \alpha EI} + \frac{\omega_l}{\omega_o} \right] \varphi_o = 0;$$

Lập điều kiện tồn tại nghiệm y_o và φ_o bằng cách cho định thức các hệ số bằng không ta sẽ được phương trình ổn định như sau:

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{v - \sin v}{k \alpha^3 EI} \right] \left[\cos v + \frac{\sin v}{\omega_o \alpha EI} + \frac{\omega_l}{\omega_o} \right] - \\ &- \left[\omega_l \left(P - \frac{l}{k} \right) - \frac{1 - \cos v}{k \alpha^2 EI} \right] \left[\frac{\sin v}{\alpha} + \frac{1 - \cos v}{\omega_o \alpha^2 EI} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nếu cho biết các đại lượng: l, k, ω_0, ω_1 , ta có thể giải phương trình siêu việt (2.13) để tìm α và từ đó suy ra giá trị của lực tới hạn: $P_{th} = \alpha^2 EI$.

Khi giải các bài toán cụ thể ta có thể lập được các phương trình ổn định tương ứng từ phương trình (2.13) với các chú ý sau:

- Trường hợp liên kết cứng, hệ số đàn hồi nhận giá trị bằng không.
- Trường hợp không có liên kết, hệ số đàn hồi nhận giá trị bằng vô cùng.
- Khi áp dụng cụ thể, nếu các biểu thức trong (2.13) có dạng vô định thì cần khử vô định theo các quy tắc quen biết trong toán học.

Bảng 2.1 cung cấp kết quả tìm phương trình ổn định hoặc giá trị tới hạn cho các bài toán cụ thể thường gặp trong thực tế. Khi sử dụng bảng cần chú ý:

- Hàng thứ ba nêu cách tìm kết quả của các sơ đồ từ 5 đến 9 theo các sơ đồ từ 1 đến 4.
- Trường hợp thanh có liên kết cứng, lực tới hạn được xác định theo công thức:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (2.14)$$

Giá trị của μ tìm theo hàng cuối của bảng 2.1.

- Trên các sơ đồ 4 và 9, ký hiệu hình vuông với các nét gạch chéo theo hai chiều biểu thị ngàm trượt theo phương vuông góc với trục thanh.

Ví dụ 2.1. Cho hệ như trên hình 2.3a. Yêu cầu:

- 1) Tìm sơ đồ tính và phương trình ổn định để kiểm tra ổn định cho thanh đứng chịu nén. Trình bày cách tìm lực tới hạn.
- 2) Tìm giá trị của lực tới hạn khi $a = 2l$ và $EI = const$.

1) Để giải bài toán ta xem thanh AC như thanh có một đầu tự do và một đầu ngàm đàn hồi. Sơ đồ tính của hệ như trên hình 2.3b. Hệ số đàn hồi ω của ngàm đàn hồi tại A chính là góc xoay tại A của dầm AB do mômen đơn vị đặt tại A gây ra. Ta xác định đại lượng này theo các phương pháp quen biết trong Sức bền vật liệu hoặc Cơ học kết cấu. Kết quả: $\omega = a / 3EI$.

Từ kết quả cho trong bảng 2.1, với sơ đồ 1 ta có phương trình ổn định:

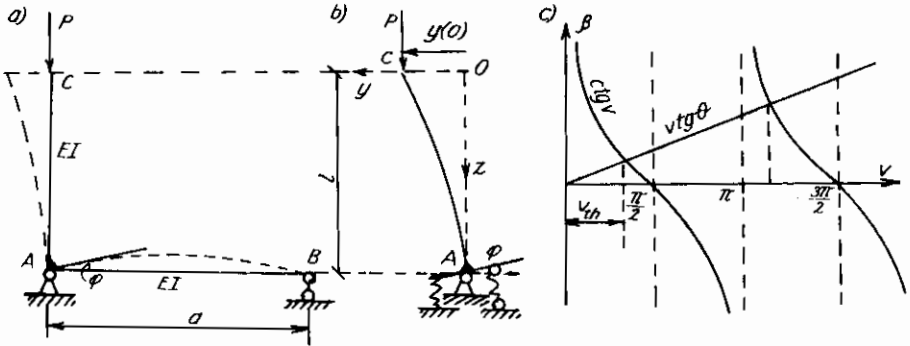
$$v \operatorname{ctgv} = \frac{l}{\omega EI} \quad \text{hay} \quad \operatorname{ctgv} = v \cdot \operatorname{tg} \theta \quad \text{với} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\omega EI}{l}.$$

Để giải phương trình siêu việt này ta có thể vận dụng cách thử đúng dần hoặc vận dụng phương pháp đồ thị. Theo phương pháp đồ thị, ta lần lượt vẽ các đường biểu diễn của hàm số $\beta = \operatorname{ctgv}$ và $\beta = v \cdot \operatorname{tg} \theta$ theo biến số v như trên hình 2.3c để tìm giao điểm của chúng. Hoành độ của những giao điểm này xác định các nghiệm cần tìm. Nghiệm có ý nghĩa thực tế là nghiệm cho giá trị lực tới hạn nhỏ nhất.

Bảng 2.1

Sơ đồ					
Phương trình ổn định	$v \operatorname{tg} v = \frac{l}{\omega EI}$	$\operatorname{tg} v = \frac{v - v^3 \frac{kEI}{l^3}}{v}$	$\operatorname{tg} v = \frac{v}{l + v^2 \frac{\omega EI}{l}}$	$4 \sin^2 \frac{v}{2} = \left[v - \frac{k v^3 EI}{l^3} \right] \sin v$	
Sơ đồ					
Phương trình ổn định	$\operatorname{ctg} v = 0$	$\operatorname{tg} v = v$	$\sin v = 0$	$\sin \frac{v}{2} = 0 \text{ và } \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$	$\sin \frac{v}{2} = 0 \text{ và } \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \infty$
μ	2	0,7	1	0,5	1

Sau khi tìm được v_{th} ta sẽ xác định được $\alpha_{th} = v_{th} / l$ và từ đó suy ra lực tới hạn tương ứng.



Hình 2.3

Từ hình 2.3b ta thấy v_{th} nhỏ nhất có giá trị luôn nhỏ hơn $\pi/2$ do đó lực tới hạn của thanh đang xét luôn luôn nhỏ hơn giá trị $\pi^2 EI / 4l^2$ là lực tới hạn tương ứng với thanh có sơ đồ 5 trong bảng 2.1: một đầu tự do, một đầu là ngàm cứng (khi đó $\omega = 0$ nên phương trình ổn định có dạng $ctg v = 0$ và $v_{th} = \pi/2$).

2) Trường hợp $a = 2l$: ta có $\omega = \frac{2l}{3EI}$ nên $tg \theta = \frac{2l}{3EI} \cdot \frac{EI}{l} = \frac{2}{3}$.

Phương trình ổn định sẽ có dạng $ctg v = 2v / 3$.

Vận dụng phương pháp đồ thị ta tìm được $v_{th} = 1,01$.

Do đó: $P_{th} = (1,01)^2 EI / l^2 = 1,02 EI / l^2$.

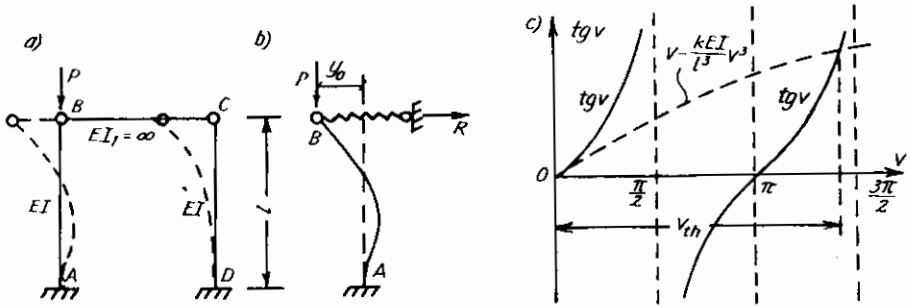
Ví dụ 2.2. Cho hệ trên hình 2.4a. Tìm sơ đồ tính và phương trình ổn định để kiểm tra ổn định cho thanh đứng chịu nén. Xác định giá trị của lực tới hạn.

Để giải bài toán ta xem thanh AB như thanh có một đầu ngàm tại A và một đầu có liên kết đàn hồi theo phương ngang tại B . Sơ đồ tính của hệ như trên hình 2.4b, tương ứng với sơ đồ 2 trong bảng 2.1. Vì độ cứng của thanh BC bằng vô cùng nên khi hệ bị mất ổn định thì chuyển vị ngang tại B và C là như nhau. Do đó, hệ số đàn hồi k của liên kết đàn hồi tại B chính là chuyển vị ngang tại đầu tự do C của thanh CD do lực đơn vị đặt tại C gây ra, ta có: $k = l^3 / 3EI$.

Từ kết quả cho trong bảng 2.1, với sơ đồ 2 ta có phương trình ổn định:

$$tg v = v - v^3 \frac{kEI}{l^3}$$

Để giải phương trình siêu việt này ta vận dụng phương pháp đồ thị: lần lượt vẽ các đường biểu diễn của hàm $\beta = tg v$ và hàm $\beta = v - (kEI / l^3) v^3$ theo biến số v như trên hình 2.4c để tìm giao điểm của chúng. Hoành độ của những giao điểm này xác định các nghiệm cần tìm. Từ hình 2.4c ta thấy nghiệm có ý nghĩa thực tế tương ứng với giá trị của v_{th} nằm trong khoảng từ $\pi/2$ đến $3\pi/2$.



Hình 2.4

- Khi $k = l^3 / 3EI$: Theo phương pháp đồ thị ta xác định được $v_{th} = 0,69\pi = 2,16$. Do đó: $P_{th} = (2,16)^2 EI / l^2 = 4,67 EI / l^2$.
- Khi $k = \infty$, tức là khi không có liên kết đàn hồi, phương trình ổn định trở thành: $tg v = -\infty$; $v = \pi/2$. Kết quả: $P_{th} = \pi^2 EI / 4l^2$. Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do (sơ đồ 5 trong bảng 2.1).
- Khi $k = 0$, tức là khi thanh đàn hồi trở thành tuyệt đối cứng, phương trình ổn định trở thành: $tg v = v$; $v = 4,493$. Kết quả: $P_{th} = \pi^2 EI / (0,71)^2$. Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp (sơ đồ 6 trong bảng 2.1).

Ví dụ 2.3. Trình bày cách tìm lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm đàn hồi, một đầu có liên kết thanh tuyệt đối cứng (sơ đồ 3 trong bảng 2.1). Tìm lực tới hạn cho các sơ đồ 6 và 7 trong bảng 2.1.

Từ phương trình (2.13), cho $k = 0$; $\omega_0 = \infty$; $\omega_l = \omega$ với ω là hệ số đàn hồi của ngàm đàn hồi, ta được phương trình ổn định cho trường hợp này như sau:

$$tg v = \frac{v}{1 + v^2 \frac{\omega EI}{l}}$$

Để xác định v_{th} ta cũng vận dụng phương pháp đồ thị như đã thực hiện trong các ví dụ trên. Sau khi biết v_{th} ta dễ dàng tìm được lực tới hạn tương ứng.

- Khi $\omega = 0$, tức là khi liên kết ngàm đàn hồi trở thành ngàm cứng, phương trình ổn định trở thành: $tg v = v$; $v = 4,493$. Kết quả: $P_{th} = \pi^2 EI / (0,71)^2$. Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp (sơ đồ 6 trong bảng 2.1).
- Khi $\omega = \infty$, tức là khi ngàm đàn hồi trở thành khớp, phương trình ổn định trở thành: $\sin v = 0$; $v = \pi$. Kết quả: $P_{th} = \pi^2 EI / l^2$. Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có hai đầu khớp (sơ đồ 7 trong bảng 2.1).

Ví dụ 2.4. Trình bày cách tìm lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm cứng, một đầu ngàm trượt và có liên kết thanh đàn hồi theo phương vuông góc với trục thanh (sơ đồ 4 trong bảng 2.1). Cho biết k là hệ số đàn hồi của liên kết thanh đàn hồi. Tìm lực tới hạn cho thanh có sơ đồ 8 và 9 trong bảng 2.1.

Từ phương trình (2.13), cho $\omega_0 = 0$; $\omega_1 = 0$, ta được phương trình ổn định cho trường hợp này như sau:

$$4 \sin^2 \frac{v}{2} = \left[v - \frac{kv^3 EI}{l^3} \right] \sin v \quad \text{hay} \quad \sin \frac{v}{2} \left\{ 2 \sin \frac{v}{2} - \left[v - \frac{kv^3 EI}{l^3} \right] \cos \frac{v}{2} \right\} = 0.$$

Phương trình ổn định này được thỏa mãn với hai khả năng:

$$\blacklozenge \sin(v/2) = 0. \quad (a)$$

$$\blacklozenge 2 \sin \frac{v}{2} - \left[v - \frac{kv^3 EI}{l^3} \right] \cos \frac{v}{2} = 0. \quad (b)$$

Sau khi giải (a) và (b), ta chọn giá trị v_{th} nhỏ nhất để tìm lực tới hạn.

• Khi $k = 0$, tức là khi liên kết thanh đàn hồi trở thành thanh tuyệt đối cứng:

$$\blacklozenge \text{Từ (a): } \sin(v/2) = 0; \text{ suy ra } v = 2\pi$$

$$\blacklozenge \text{Từ (b): } tg(v/2) = (v/2); \text{ suy ra } v = 8,986.$$

Chọn giá trị nhỏ nhất, ta có $v_{th} = 2\pi$ suy ra $P_{th} = 4\pi^2 EI / l^2 = \pi^2 EI / (0,5l)^2$.

Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có hai đầu bị ngàm (sơ đồ 8 trong bảng 2.1).

• Khi $k = \infty$, tức là khi không có liên kết thanh đàn hồi:

$$\blacklozenge \text{Từ (a): } \sin(v/2) = 0; \text{ suy ra } v = 2\pi$$

$$\blacklozenge \text{Từ (b): } tg(v/2) = \infty; \text{ suy ra } v = \pi.$$

Chọn giá trị nhỏ nhất, ta có $v_{th} = \pi$ suy ra $P_{th} = \pi^2 EI / l^2$.

Ta được công thức tính lực tới hạn cho thanh có sơ đồ 9 trong bảng 2.1.

2.3. Ổn định của thanh thẳng tiết diện không đổi, chịu lực đặt bất kỳ dọc theo chiều dài thanh

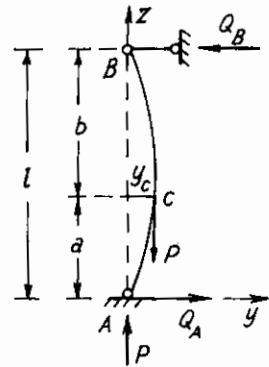
A. Cách tính chính xác

Để giải bài toán ổn định của thanh thẳng chịu một số lực đặt bất kỳ dọc theo chiều dài thanh, ta cần chia thanh thành từng đoạn trong đó chuyển vị, ngoại lực là liên tục để lần lượt thiết lập các phương trình chuyển vị và nội lực cần thiết từ (2.4) đến (2.11) cho từng đoạn thanh. Căn cứ vào các điều kiện biên ở đầu thanh và các điều kiện nối tiếp giữa các đoạn thanh sẽ lập được phương trình ổn định, từ đó xác định được lực tới hạn.

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách thực hiện qua một vài trường hợp cụ thể.

♦ Thanh có khớp tựa ở hai đầu, chịu lực đặt ở trong nhịp (hình 2.5)

Trong trường hợp này ta chia thanh thành hai đoạn: AC, BC và thiết lập các phương trình chuyển vị, góc xoay cho từng đoạn thanh ở trạng thái biến dạng:



Hình 2.5

• Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

Các thông số ban đầu tại A:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0; & y_1'(0) &= y'_A; \\ M_1(0) &= 0; & Q_1(0) &= -Q_A. \end{aligned}$$

Do đó theo (2.4) và (2.5) ta có:

$$y_1(z_1) = \frac{y'_A}{\alpha_1} \sin \alpha_1 z_1 + \frac{Q_A}{\alpha_1^3 EI} (\alpha_1 z_1 - \sin \alpha_1 z_1);$$

$$y_1'(z_1) = y'_A \cos \alpha_1 z_1 + \frac{Q_A}{\alpha_1^2 EI} (1 - \cos \alpha_1 z_1); \quad (a)$$

trong đó: $\alpha_1^2 = \frac{P}{EI}.$ (b)

• Đoạn BC, chọn gốc toạ độ tại B với chiều trục z hướng xuống dưới ($0 \leq z_2 \leq b$):

Các thông số ban đầu tại B:

$$y_2(0) = 0; \quad y_2'(0) = y'_B; \quad M_2(0) = 0; \quad Q_2(0) = Q_B.$$

Trong đoạn này lực nén bằng không nên $\alpha_2 = 0$, do đó các phương trình (2.4) và (2.5) có dạng vô định. Sau khi khử dạng vô định, ta có:

$$y_2(z_2) = y'_B z_2 - \frac{Q_B}{6EI} z_2^3; \quad y_2'(z_2) = y'_B - \frac{Q_B}{2EI} z_2^2. \quad (c)$$

Trong các phương trình trên, y'_A ; y'_B ; Q_A ; Q_B là các đại lượng chưa biết.

Nếu gọi y_C là độ võng tại C, từ điều kiện cân bằng của hệ ta có:

$$Q_A = Q_B = \frac{P y_C}{l} = \frac{\alpha_1^2 EI y_C}{l}. \quad (d)$$

Từ phương trình đầu của (c) đồng thời chú ý tới (d), ta có:

$$y_C = y_2(b) = y'_B b - \frac{Q_B}{6EI} b^3 = Q_B \frac{l}{\alpha_1^2 EI}.$$

Suy ra: $Q_A = Q_B = y'_B \times \frac{6b\alpha_1^2 EI}{6l + \alpha_1^2 b^3}$ (e)

Các điều kiện nối tiếp liên tục giữa hai đoạn: $y_1(a) = y_2(b)$; $y'_1(a) = -y'_2(b)$.
 Theo (a), (c), (f) và sau khi biến đổi, các điều kiện nối tiếp liên tục sẽ có dạng:

$$y'_A \left(1 + \frac{\alpha_1^2 b^3}{6l} \right) \sin \alpha_1 a - y'_B \frac{b}{l} (\alpha_1 b + \sin \alpha_1 a) = 0;$$

$$y'_A \left(1 + \frac{\alpha_1^2 b^3}{6l} \right) \cos \alpha_1 a + y'_B \frac{b}{l} \left(1 + \frac{l}{b} - \frac{\alpha_1^2 b^2}{3} - \cos \alpha_1 a \right) = 0.$$

Từ điều kiện tồn tại các thông số y'_A và y'_B ta được phương trình ổn định:

$$D(\alpha_1) = \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 a & -(\alpha_1 b + \sin \alpha_1 a) \\ \cos \alpha_1 a & 1 + \frac{l}{b} - \frac{\alpha_1^2 b^2}{3} - \cos \alpha_1 a \end{vmatrix} = 0.$$

Sau khi khai triển định thức trên và biến đổi, ta được:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 a = \frac{\alpha_1 b}{\frac{\alpha_1^2 b^2}{3} - 1 - \frac{l}{b}}. \quad (2.15)$$

Trường hợp $a = b = l/2$, nếu đặt $v = \alpha_1 l$ thì phương trình (2.15) có dạng:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{6v}{v^2 - 36}.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $v = \alpha_1 l = 4,32$.

Do đó, theo (b) ta có: $P_{th} = \alpha_1^2 EI = 18,66 EI/l^2$.

♦ Thanh có một đầu tự do, một đầu ngàm chịu một số lực tập trung

Trước tiên ta xét trường hợp thanh chịu tác dụng của hai lực: P_1 đặt ở đỉnh và P_2 đặt ở vị trí bất kỳ trong nhịp (hình 2.6). Các lực P_1 và P_2 luôn luôn giữ một quan hệ tỷ lệ nhất định.

Chia thanh thành hai đoạn:

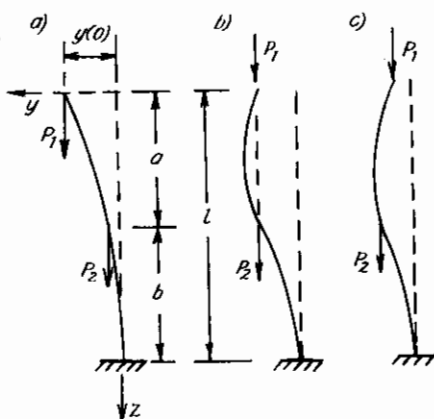
• Đoạn thứ nhất ($0 \leq z \leq a$):

Theo các phương trình (2.4) ÷ (2.7)

ta có thể viết:

$$y_1(z) = y(0) + y'(0) \frac{\sin \alpha_1 z}{\alpha_1};$$

$$y'_1(z) = y'(0) \cos \alpha_1 z;$$



Hình 2.6

$$M_1(z) = \alpha_1 EI y'(0) \sin \alpha_1 z ;$$

$$Q_1(z) = M'_1(z) - P_1 y'_1(z) = 0, \quad \text{trong đó: } \alpha_1^2 = \frac{P_1}{EI}.$$

- *Đoạn thứ hai:* Để viết phương trình cho đoạn này được dễ dàng ta chọn gốc tọa độ tại điểm đặt lực P_2 . Lúc này z biến thiên trong khoảng $(0 \leq z \leq b)$.

$$\text{Đặt: } \alpha_2^2 = \frac{P_1 + P_2}{EI}.$$

Theo điều kiện liên tục giữa hai đoạn, ta có thể xác định các thông số ban đầu của đoạn thứ hai như sau:

$$y_2(0) = y_1(a) = y(0) + y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} ; \quad M_2(0) = M_1(a) = P_1 y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} ;$$

$$y'_2(0) = y'_1(a) = y'(0) \cos \alpha_1 a ; \quad Q_2(0) = Q_1(a) = 0.$$

Theo (2.4) và (2.5) ta có các phương trình chuyển vị và góc xoay viết cho đoạn thứ hai:

$$y_2(z) = y(0) + y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} + y'(0) \frac{\cos \alpha_1 a}{\alpha_2} \sin \alpha_2 z - \\ - \frac{P_1}{P_1 + P_2} y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} (1 - \cos \alpha_2 z) ;$$

$$y'_2(z) = y'(0) \cos \alpha_1 a \cdot \cos \alpha_2 z - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y'(0) \sin \alpha_1 a \cdot \sin \alpha_2 z.$$

Điều kiện biên ở ngàm, khi $z = b$, ta có: $y_2(b) = 0$ và $y'_2(b) = 0$.

$$y_2(b) = y(0) + y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} + y'(0) \frac{\cos \alpha_1 a}{\alpha_2} \sin \alpha_2 b - \\ - \frac{P_1}{P_1 + P_2} y'(0) \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} (1 - \cos \alpha_2 b) = 0 ;$$

$$y'_2(b) = y'(0) \cos \alpha_1 a \cdot \cos \alpha_2 b - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y'(0) \sin \alpha_1 a \cdot \sin \alpha_2 b = 0.$$

Hay:

$$y(0) + y'(0) \left[\frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} + \frac{\cos \alpha_1 a}{\alpha_2} \sin \alpha_2 b - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1} (1 - \cos \alpha_2 b) \right] = 0 ;$$

$$y'(0) \cos \alpha_1 a \cdot \cos \alpha_2 b \left[1 - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg} \alpha_1 a \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 b \right] = 0.$$

Để lập điều kiện tồn tại nghiệm $y(0)$ và $y'(0)$ ta cho định thức các hệ số bằng không. Sau khi khai triển định thức ta được phương trình ổn định:

$$\cos\alpha_1 a \cdot \cos\alpha_2 b \left[1 - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg}\alpha_1 a \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 b \right] = 0. \quad (2.16)$$

Phương trình ổn định (2.16) được thoả mãn với một trong ba khả năng sau:

$$1) \quad \operatorname{tg}\alpha_1 a \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 b = \frac{P_1 + P_2}{P_1} \times \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (2.17)$$

Lúc này hệ mất ổn định theo dạng vẽ trên hình 2.6a.

$$2) \quad \cos\alpha_2 b = 0. \quad (2.18)$$

Lúc này hệ mất ổn định theo dạng vẽ trên hình 2.6b.

$$3) \quad \cos\alpha_1 a = 0. \quad (2.19)$$

Lúc này hệ mất ổn định theo dạng vẽ trên hình 2.6c.

Trong ba trường hợp trên, phương trình (2.17) thường cho lực tới hạn có giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 2.5. Xác định lực tới hạn cho thanh trên hình 2.6a. Cho biết $a = b = l/2$:

$$P_1 = P; \quad P_2 = 3P.$$

$$\text{Đặt} \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} = \alpha; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI}} = 2\sqrt{\frac{P}{EI}} = 2\alpha; \quad v = \alpha l.$$

- Theo phương trình (2.17), ta có: $\operatorname{tg}(v/2) \cdot \operatorname{tg} v = 2$. Giải phương trình ta được: $v_{th} = 1,23$; do đó: $P_{th} = 1,23^2 EI/l^2 = 1,513 EI/l^2$.
- Theo phương trình (2.18), ta có: $\cos v = 0$. $v = \pi/2$; do đó: $P_{th} = \pi^2 EI/4l^2$.
- Theo phương trình (2.19), ta có: $\cos(v/2) = 0$. $v = \pi$; do đó: $P_{th} = \pi^2 EI/l^2$.

Lực tới hạn xác định theo phương trình (2.17) nhỏ nhất. Vậy: $P_{th} = 1,513 EI/l^2$.

Đối với thanh chịu nhiều lực tác dụng, nguyên tắc tính toán cũng tương tự, song bài toán sẽ phức tạp hơn. Trong thực hành, nên áp dụng phương pháp gần đúng để giải.

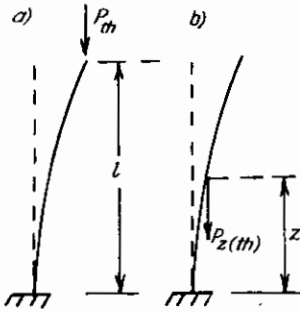
B. Cách tính gần đúng

Giáo sư A. N. Kôrôbôv đã đề xuất một cách tính gần đúng để xác định lực tới hạn cho thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do, chịu tác dụng của nhiều lực nên đọc theo trục thanh.

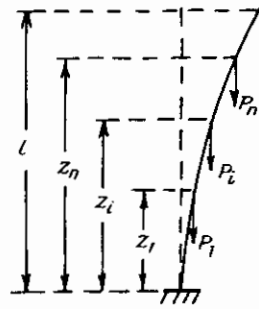
Xét hai trường hợp thanh chịu lực như trên hình 2.7a và 2.7b. Như đã biết:

❖ Tải trọng tới hạn đối với trường hợp thứ nhất: $P_{th} = \pi^2 EI/4l^2$.

❖ Tải trọng tới hạn đối với trường hợp thứ hai: $P_{z,th} = \pi^2 EI/4z^2$.



Hình 2.7



Hình 2.8

Từ đó ta suy ra biểu thức quan hệ giữa P_{th} và $P_{z,th}$ như sau:

$$P_{th} = \pi^2 \frac{EI}{4z^2} \times \frac{z^2}{l^2} = P_{z,th} \mu(z) = P_z \mu(z) \lambda_{th} ;$$

trong đó: $\mu(z) = \frac{z^2}{l^2} ; \quad \lambda_{th} = \frac{P_{th}}{P_z \mu(z)} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \mu(z)} ;$

với λ_{th} giữ vai trò thông số tới hạn.

Như vậy, nếu xem hai trường hợp trên tương đương với nhau thì có thể nói rằng lực tới hạn đặt ở đầu trên của thanh nhỏ hơn lực tới hạn đặt ở điểm bất kỳ cách ngàm một khoảng z là $\mu(z)$ lần. Do đó nếu có một lực đặt ở độ cao bất kỳ cách ngàm một khoảng z thì ta có thể chuyển lực đó lên đầu trên của thanh đồng thời giảm giá trị của lực xuống $\mu(z)$ lần. Lực được chuyển lên đầu trên của thanh được gọi là *lực quy ước*.

Theo quy tắc chuyển lực nói trên ta có thể mở rộng cách tính cho hệ có nhiều lực đặt ở các độ cao khác nhau. Giả sử hệ có n lực với lực thứ i là P_i đặt cách ngàm ở độ cao P_i (hình 2.8). Lúc này, lực quy ước được xác định gần đúng theo nguyên lý cộng tác dụng (đó là sự gần đúng của phương pháp vì về nguyên tắc, trong bài toán ổn định không được phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng) :

$$P = P_1 \mu(z_1) + P_2 \mu(z_2) + \dots + P_i \mu(z_i) + \dots + P_n \mu(z_n) = \sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i) .$$

Nếu các lực P_i đều được biểu thị theo một thông số tới hạn λ_{th} thì ta có thể viết:

$$P_{th} = P \cdot \lambda_{th} = \lambda_{th} \sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i) = \pi^2 \frac{EI}{4l^2} .$$

Từ hệ thức trên ta suy ra công thức xác định thông số tới hạn của hệ lực P_i :

$$\lambda_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i)}. \quad (2.20)$$

Ví dụ 2. 6. Xác định lực tới hạn cho trường hợp thanh chịu tải trọng đã xét ở ví dụ 2.5 theo phương pháp gần đúng.

Theo (2.20), ta có :

$$\lambda_{th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2 \left(P + 3P \cdot \frac{1}{4} \right)} = \frac{\pi^2 EI}{7Pl^2}.$$

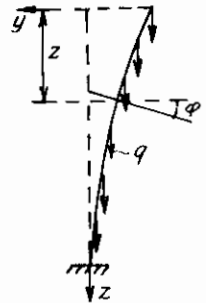
Vậy : $P_{1,th} = \lambda_{th} P = \frac{\pi^2 EI}{7Pl^2} = 1,41 \frac{EI}{l^2}$; $P_{2,th} = \lambda_{th} 3P = 3 \frac{\pi^2 EI}{7Pl^2} = 4,23 \frac{EI}{l^2}$.

Sai số so với kết quả chính xác: $\frac{1,513 - 1,410}{1,513} \times 100 = 6,8 \%$.

2.4. Ổn định của thanh thẳng tiết diện không đổi, chịu tác dụng của trọng lượng bản thân

A. Cách tính chính xác

Cách tính chính xác được xây dựng trên cơ sở phương pháp tĩnh học: thiết lập phương trình vi phân ở trạng thái cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu, giải phương trình vi phân và từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch suy ra lực tới hạn cần tìm. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu nội dung cách tính thông qua một ví dụ về trường hợp thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do, chịu tác dụng của trọng lượng bản thân biểu thị dưới dạng tải trọng phân bố đều với cường độ là q (hình 2.9).



Xuất phát từ liên hệ vi phân giữa đạo hàm cấp ba của chuyển vị với lực cắt $Q(z)$, ta có:

Hình 2.9

$$EI y''' = -Q(z) = -q \cdot z \cdot \sin \varphi \approx -q \cdot z \cdot \text{tg} \varphi = -q \cdot z \cdot y'$$

Do đó: $EI y''' + q \cdot z \cdot y' = 0$ (2.21)

Nếu đặt: $z = tl$; $y' = u$; $a^2 = \frac{ql^3}{EI}$, (2.22)

thì phương trình (2.21) có dạng: $\frac{d^2 u}{dt^2} + a^2 t u = 0$. (2.23)

Đó là phương trình vi phân cấp hai có hệ số thay đổi. Nghiệm của phương trình (2.23) có thể viết dưới dạng hàm Bessel hay dưới dạng chuỗi vô hạn.

Nếu dùng chuỗi vô hạn ta có:

$$u = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots + c_i t^i + \dots \quad (2.24)$$

Thay (2.24) vào (2.23), ta được:

$$2 c_2 + 2.3 c_3 t + 3.4 c_4 t^2 + \dots + a^2 (c_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dots) = 0.$$

Hay:

$$2 c_2 + (2.3 c_3 + a^2 c_0) t + (3.4 c_4 + a^2 c_1) t^2 + \\ + (4.5 c_5 + a^2 c_2) t^3 + (5.6 c_6 + a^2 c_3) t^4 + \dots = 0.$$

Phương trình này cần được thỏa mãn với bất kỳ giá trị z tức là với bất kỳ giá trị t nên các hệ số của đa thức này buộc phải đồng nhất bằng không. Do đó, ta có:

$$c_2 = 0; \quad 2.3 c_3 = -a^2 c_0; \quad 3.4 c_4 = -a^2 c_1; \\ 4.5 c_5 = -a^2 c_2 = 0; \quad 5.6 c_6 = -a^2 c_3 = \frac{a^4}{2.3} c_0; \dots$$

Ta thấy các hằng số c mang chỉ số 2, 5, 8, 11, ... đều bằng không, tức là:

$$c_{2+3i} = 0, \quad \text{với } i = 0, 1, 2, \dots$$

Các hằng số còn lại có quan hệ như sau: $c_{i+2} = \frac{-a^2}{(i+1)(i+2)} c_{i-1}$,

và cùng có thể biểu thị theo c_0 và c_1 :

$$c_3 = -\frac{a^2}{2.3} c_0; \quad c_4 = -\frac{a^2}{3.4} c_1; \quad c_6 = \frac{a^4}{2.3.5.6} c_0; \quad c_7 = \frac{a^4}{3.4.6.7} c_1 \dots$$

Do đó:

$$u = c_0 \left(1 - \frac{a^2}{2.3} t^3 + \frac{a^4}{2.3.5.6} t^6 - \frac{a^6}{2.3.5.6.8.9} t^9 + \dots \right) + \\ + c_1 t \left(1 - \frac{a^2}{3.4} t^3 + \frac{a^4}{3.4.6.7} t^6 - \frac{a^6}{3.4.6.7.9.10} t^9 + \dots \right). \quad (2.25)$$

Các điều kiện biên:

◆ Khi $z = 0$, tức là khi $t = 0$, ta có: $M = -EIy'' = 0$; suy ra $du/dx = 0$.

◆ Khi $z = l$, tức là khi $t = 1$, ta có: $y' = 0$, suy ra $u = 0$.

Lấy đạo hàm (2.25) theo t :

$$\frac{du}{dt} = c_0 \left(-\frac{a^2}{2} t^2 + \frac{a^4}{2.3.5} t^5 - \frac{a^6}{2.3.5.6.8} t^8 + \dots \right) + \\ + c_1 \left(1 - \frac{a^2}{3} t^3 + \frac{a^4}{3.4.6} t^6 - \frac{a^6}{3.4.6.7.9} t^9 + \dots \right).$$

Từ điều kiện biên thứ nhất ta tìm được: $c_1 = 0$.

Từ điều kiện biên thứ hai ta lập được điều kiện tồn tại của c_0 như sau:

$$1 - \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.5.6} - \frac{a^6}{2.3.5.6.8.9} + \dots = 0. \quad (2.26)$$

Giải phương trình (2.26) ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của a là: $a = 2,799$.

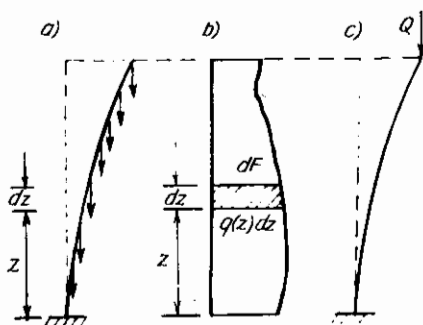
Như vậy, theo công thức (2.22) ta suy ra được:

$$(ql)_{th} = a^2 \frac{EI}{l^2} = 7,84 \frac{EI}{l^2}. \quad (2.27)$$

B. Cách tính gần đúng

Giáo sư N. M. Mitrôpônki đã phát triển cách tính gần đúng của A. P. Kôrôbôv để giải bài toán ổn định của thanh chịu tải trọng tác dụng dọc theo chiều dài thanh (hình 2.10a) và phân bố theo quy luật bất kỳ (hình 2.10b).

Theo phương pháp này, ta thay mỗi phân tố lực $q(z)dz$ (hình 2.10b) đặt tại tiết diện có tọa độ z bằng một phân tố lực tập trung dQ đặt ở đầu trên của thanh.



Hình 2.10

Phân tố lực tập trung này được xác định theo nguyên tắc chuyển lực tương đương của A. P. Kôrôbôv:

$$dQ = (z/l)^2 q(z)dz.$$

Như vậy, tại đầu trên của thanh sẽ có một lực tập trung Q tương đương với toàn bộ tải trọng tác dụng trên chiều dài thanh (hình 2.10c):

$$Q = \frac{1}{l^2} \int_0^l z^2 q(z) dz. \quad (2.28)$$

Từ hình 2.10b ta thấy $q(z)dz = dF$, với F là diện tích của biểu đồ tải trọng phân bố. Như vậy, tích phân trong biểu thức (2.28) chính là mômen quán tính I_o của biểu đồ tải trọng phân bố lấy đối với trục ngang đi qua tiết diện ở ngàm. Do đó:

$$Q = \frac{1}{l^2} I_o. \quad (2.29)$$

Khi thanh bị mất ổn định, ta có: $Q_{th} = \frac{1}{l^2} I_{o,th} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$.

Suy ra:
$$I_{o,th} = \frac{\pi^2 EI}{4}. \quad (2.30)$$

Phương trình (2.30) cho phép ta xác định được tải trọng tới hạn tác dụng dọc theo chiều dài thanh với quy luật bất kỳ.

Các trường hợp đặc biệt:

❖ Thanh có tiết diện không đổi chịu tác dụng của trọng lượng bản thân.

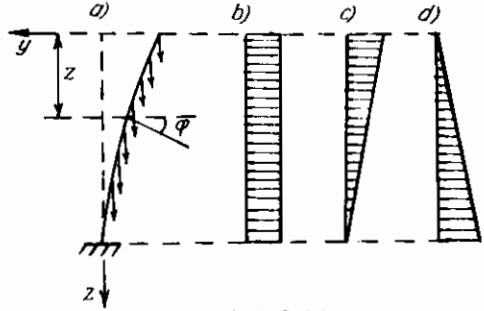
Lúc này tải trọng tác dụng trên thanh phân bố đều như trên hình 2.11b. Ta có:

$$I_{o,th} = \frac{q_{th}l^3}{3}.$$

Do đó, theo (2.30):

$$(ql)_{th} = \frac{3\pi^2 EI}{4l^2} = 7,4 \frac{EI}{l^2}.$$

Sai số 5,5 %.



Hình 2.11

❖ Thanh chịu tải trọng phân bố theo luật hình tam giác như trên hình 2.11c.

Ta có: $I_{o,th} = q_{th}l^3/4$. Do đó, theo (2.30): $(ql)_{th} = 9,87 EI/l^2$.

Kết quả chính xác do A. N. Đinnhích tìm được là: $(ql)_{th} = 10,24 EI/l^2$. Như vậy, sai số khi tính gần đúng trong trường hợp này là 3%.

❖ Thanh chịu tải trọng phân bố theo luật hình tam giác như trên hình 2.11d.

Ta có: $I_{o,th} = q_{th}l^3/12$. Do đó, theo (2.30): $(ql)_{th} = 29,6 EI/l^2$.

Kết quả chính xác do A. N. Đinnhích tìm được là: $(ql)_{th} = 21,2 EI/l^2$. Như vậy, sai số khi tính gần đúng trong trường hợp này là 8%.

Qua những kết quả vừa tìm được ở trên ta thấy cách tính gần đúng của N. M. Mitrôpônski cho kết quả tương đối tốt đối với những trường hợp tải trọng phân bố giảm dần từ đầu tự do đến đầu ngàm.

Ngoài cách tính gần đúng trên, ta còn có thể vận dụng các phương pháp khác trình bày trong Chương 1 để giải bài toán này.

Trên đây ta đã nghiên cứu cách tính chính xác và cách tính gần đúng để giải bài toán ổn định của thanh có một đầu ngàm và đầu tự do chịu tác dụng của trọng lượng bản thân. Đối với những trường hợp thanh có các dạng liên kết khác, cách giải bài toán cũng tương tự về nguyên tắc.

Trong tất cả mọi trường hợp, ta có thể viết công thức tải trọng tới hạn dưới dạng tổng quát như sau:

$$(ql)_{th} = K \frac{EI}{l^2}. \tag{2.31}$$

K là hệ số phụ thuộc vào dạng liên kết ở đầu thanh và dạng phân bố của tải trọng.

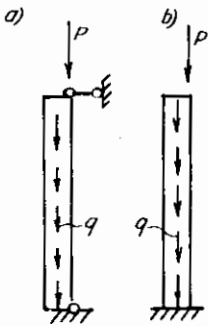
Trong trường hợp tải trọng phân bố đều dọc theo chiều dài thanh, theo [9] giá trị của hệ số K tìm được như trên bảng 2.2.

Bảng 2.2

Sơ đồ thanh và tải trọng						
K	7,84	52,5	18,9	73,6	19,28	29,6

Khi thanh chịu tác dụng đồng thời cả tải trọng phân bố đều với cường độ q và tải trọng tập trung P đặt ở đầu trên của thanh như trên hình 2.12, thì tải trọng tới hạn được xác định theo công thức sau:

$$P_{th} = K_1 \frac{EI}{l^2}. \quad (2.32)$$



Trong đó K_1 là hệ số phụ thuộc dạng liên kết ở đầu thanh, dạng phân bố của tải trọng và cường độ của tải trọng phân bố.

Trên bảng 2.3 (theo [22]) cho các giá trị của hệ số K_1 theo các trị số $n = ql^3 / \pi^2 EI$ tương ứng với các trường hợp thanh có dạng liên kết như trên hình 2.12a và 2.12b, chịu tải trọng phân bố đều.

Hình 2.12

Bảng 2.3

$n = ql^3 / \pi^2 EI$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,20	2,00	3,00
K_1 Hình 2.12a	π	8,63	7,36	6,08	4,77	- 0,66	- 4,94
Hình 2.12b	$\pi^2 / 4$	2,28	2,08	1,91	1,72	0,96	0,15

2.5. Ổn định của thanh thẳng có tiết diện thay đổi

Vận dụng phương pháp chính xác để giải bài toán ổn định của những thanh thẳng có tiết diện thay đổi thường gặp nhiều khó khăn trong quá trình tích phân các phương trình vi phân vì hệ số của các phương trình này thường là những đại

lượng thay đổi. Đối với những thanh có tiết diện thay đổi ta nên áp dụng các phương pháp gần đúng đã trình bày trong Chương 1.

Trong mục này chỉ giới thiệu cách tính chính xác cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế.

A. Thanh có độ cứng thay đổi theo hình bậc thang

Xét thanh gồm hai đoạn có độ cứng thay đổi với hệ tọa độ chọn như trên hình 2.13. Gọi EI_1 là độ cứng của đoạn trên và EI_2 là độ cứng của đoạn dưới.

Phương trình vi phân viết cho từng đoạn như sau:

$$EI_1 y_1'' + P y_1 = P\delta; \quad EI_2 y_2'' + P y_2 = P\delta.$$

Nghiệm của hai phương trình vi phân:

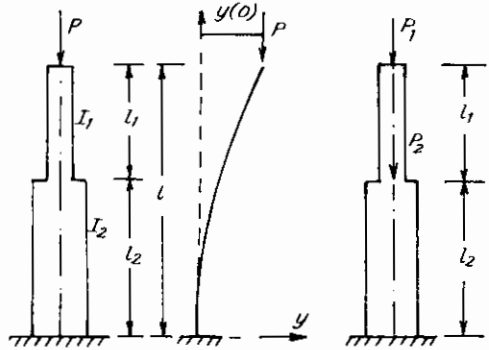
$$y_1 = A_1 \sin \alpha_1 z + B_1 \cos \alpha_1 z + \delta;$$

$$y_2 = A_2 \sin \alpha_2 z + B_2 \cos \alpha_2 z + \delta,$$

với: $\alpha_1^2 = \frac{P}{EI_1}; \quad \alpha_2^2 = \frac{P}{EI_2}.$

Các điều kiện biên:

- tại $z = 0$: ta có: $y_2' = 0$;
- tại $z = l$: ta có: $y_1 = \delta$;



Hình 2.13

Hình 2.14

- tại $z = l_2$: ta có: $y_1' = y_2'$ và $y_1'' = \frac{EI_2}{EI_1} y_2'' = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} y_2''.$

Từ các điều kiện biên ta lập được hệ bốn phương trình, đủ để xác định các hằng số tích phân:

$$A_2 = 0;$$

$$A_1 \sin \alpha_1 l + B_1 \cos \alpha_1 l = 0;$$

$$A_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 l_2 - B_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 l_2 + B_2 \alpha_2 \sin \alpha_2 l_2 = 0;$$

$$A_1 \sin \alpha_1 l_2 + B_1 \cos \alpha_1 l_2 - B_2 \cos \alpha_2 l_2 = 0.$$

Lập điều kiện tồn tại các hằng số tích phân ta được phương trình ổn định:

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 l & \cos \alpha_1 l & 0 \\ \cos \alpha_1 l_2 & -\sin \alpha_1 l_2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sin \alpha_2 l_2 \\ \sin \alpha_1 l_2 & \cos \alpha_1 l_2 & -\cos \alpha_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sau khi khai triển định thức trên và chỉnh lý lại, ta được phương trình ổn định:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (2.33)$$

Khi biết các tỷ số EI_1/EI_2 và l_2/l_1 , ta có thể giải được phương trình (2.33) và từ đó suy ra lực tới hạn cần tìm.

Trong trường hợp thanh chịu hai lực tập trung: lực P_1 đặt ở đỉnh và lực P_2 đặt ở chỗ tiếp giáp giữa hai đoạn như trên hình 2.14, cũng thiết lập tương tự như trên ta được phương trình ổn định:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \times \frac{P_1 + P_2}{P_1}. \quad (2.34)$$

trong đó: $\alpha_1 = \sqrt{P_1/EI_1}$; $\alpha_2 = \sqrt{(P_1 + P_2)/EI_2}$.

Ví dụ 2.7. Xác định lực tới hạn cho thanh trên hình 2.14. Cho biết :

$$l_1 = \frac{2}{3}l; l_2 = \frac{1}{3}l; P_1 = P; P_2 = 5P \text{ và } EI_2 = \frac{3}{2}EI_1.$$

Trong trường hợp này:

$$\alpha_1 = \sqrt{P/EI_1} = \alpha; \quad \alpha_2 = \sqrt{(P + 5P)/EI_2} = \sqrt{6P/1,5EI_1} = 2\alpha.$$

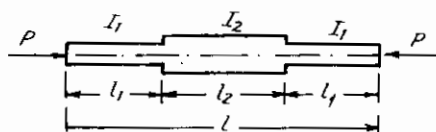
$$\alpha_1 l_1 = \alpha \cdot \frac{2}{3}l = v; \quad \alpha_2 l_2 = 2\alpha \cdot \frac{1}{3}l = \alpha \cdot \frac{2}{3}l = v.$$

Phương trình (2.34) có dạng: $\operatorname{tg}^2 v = 3$. Hay $\operatorname{tg} v = \sqrt{3}$. Suy ra: $v = \pi/3$.

Do đó ta có: $v = \alpha \cdot \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}l \sqrt{P/EI_1} = \frac{\pi}{3}$.

Suy ra: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI_1}{4l^2}$.

Cũng có thể áp dụng phương trình (2.33) cho thanh chịu lực nén ở hai đầu thanh có dạng như trên hình 2.15, nếu sử dụng các ký hiệu như đã ghi trên hình vẽ.



Hình 2.15

Đối với những thanh có dạng như trên hình 2.15, ta có thể viết công thức xác định lực tới hạn như sau:

$$P_{th} = K_2 \frac{EI_2}{l^2}. \quad (2.35)$$

K_2 – hệ số phụ thuộc dạng liên kết đầu thanh và các tỷ số $I_1/I_2; l_2/l_1$.

Theo [9] và [22], hệ số K_2 tìm được như trên bảng 2.4.

Bảng 2.4

	I_2/l I_1/I_2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Thanh có khớp ở hai đầu	0,01	0,153	0,207	0,598	0,257	-
	0,10	1,467	2,401	4,498	8,590	-
	0,20	2,796	4,222	6,694	9,330	-
	0,40	5,089	6,680	8,512	9,675	-
	0,60	6,978	8,187	9,240	9,780	-
	0,80	8,550	9,177	9,632	9,840	-
	1,00	-	-	-	-	π^2
Thanh có ngàm ở hai đầu	0,01	0,614	1,082	2,390	8,484	-
	0,10	5,866	9,484	15,467	17,130	-
	0,20	11,132	16,261	20,460	21,058	-
	0,40	20,238	24,888	36,306	27,470	-
	0,60	27,713	30,616	31,086	32,458	-
	0,80	34,022	35,314	35,442	36,374	-
	1,00	-	-	-	-	$4\pi^2$

B. Thanh có độ cứng thay đổi theo luật lũy thừa

Thanh có độ cứng thay đổi theo luật lũy thừa thường có giá trị sử dụng tương đối cao trong thực tế. Viện sĩ A. N. Đinnik là người đầu tiên đã nghiên cứu sự ổn định của những loại thanh này.

Xét trường hợp thanh chịu nén có một đầu ngàm và một đầu tự do như trên hình 2.16a. Giả thiết mômen quán tính của tiết diện thay đổi tỷ lệ với khoảng cách từ điểm O nào đó (hình 2.16a) theo luật lũy thừa:

$$I(z) = I_1 \left(\frac{z}{a} \right)^n, \quad (2.36)$$

trong đó I_1 là mômen quán tính ở đầu trên của thanh, số mũ n phụ thuộc hình dạng cụ thể của thanh.

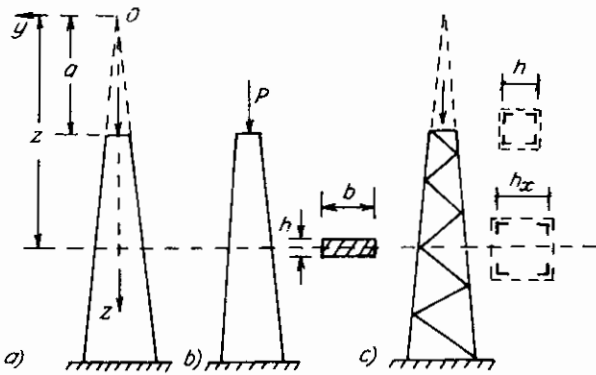
❖ Trường hợp thanh có tiết diện đặc (hình 2.16b) trong đó chiều cao h không đổi còn chiều rộng b thay đổi bậc nhất dọc theo chiều dài thanh thì $n = 1$ nếu khi mất ổn định thanh bị uốn cong quanh trục y .

❖ Trường hợp thanh có tiết diện rỗng (hình 2.16c), trong đó mỗi cạnh thay đổi bậc nhất dọc theo chiều dài thanh, ta có $n = 2$. Thật vậy, trong trường hợp này mômen quán tính tại tiết diện có tọa độ z bất kỳ được xác định như sau:

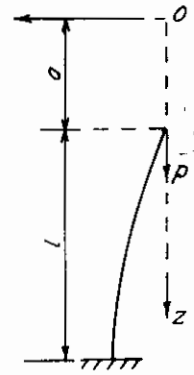
$$I(z) = 4A \left[\frac{h(z)}{2} \right]^2 \quad \text{với } A - \text{diện tích tiết diện ở đầu trên của thanh.}$$

Nhưng $h(z) = h_1 \frac{z}{a}$ nên: $I(z) = 4A \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \left(\frac{z}{a} \right)^2 = I_1 \left(\frac{z}{a} \right)^2$. (2.37)

❖ Trường hợp thanh có tiết diện đặc thay đổi theo dạng hình chóp cụt hay hình nón cụt, cũng lý luận tương tự như trên ta có $n = 4$.



Hình 2.16



Hình 2.17

Để giải bài toán này ta chọn hệ trục tọa độ như trên hình 2.17. Phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$EI_1 \left(\frac{z}{a} \right)^n \frac{d^2 y}{dz^2} = -Py \quad (2.38)$$

Phương trình vi phân này có hệ số thay đổi. Ta có thể tìm nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn hay dưới dạng hàm Bessel. Trường hợp khi $n = 2$ và $n = 4$, ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng các hàm sơ cấp.

a) Trường hợp chung với $n \neq 2$

Sau khi đổi biến số $z = \frac{1}{u}$, ta có: $\frac{dy}{dz} = -u^2 \frac{dy}{du}$;

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = u^4 \frac{d^2 y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du}$$

Phương trình (2.38) có dạng: $u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} + \alpha^2 u^{n-2} y = 0$, (2.39)

trong đó: $\alpha^2 = \frac{Pa^n}{EI_1}$. (2.40)

Phương trình (2.39) là phương trình Bessel, nghiệm của phương trình có dạng:

$$y = u^{-1/2} [C_1 J_p(2\alpha p u^{1/2}) + C_2 J_{-p}(2\alpha p u^{1/2})], \quad (2.41)$$

trong đó:
$$p = \frac{l}{n-2}. \quad (2.42)$$

J_p và J_{-p} là các hàm Bessel loại một; C_1 và C_2 là các hằng số tích phân.

Sử dụng các điều kiện biên và thiết lập điều kiện tồn tại các hằng số tích phân ta sẽ được các phương trình ổn định trong đó chứa các hàm Bessel. Từ phương trình ổn định ta xác định được giá trị của α và từ đó suy ra lực tới hạn cần tìm.

b) Trường hợp $n = 4$

Theo (2.42), khi $n = 4$, ta có: $p = 1/2$. Do đó, nghiệm (2.41) sẽ có dạng:

$$y = u^{-1/2} [C_1 J_{1/2}(\alpha u) + C_2 J_{-1/2}(\alpha u)].$$

Nhưng: $J_{1/2}(\alpha u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha u}} \sin \alpha u$; $J_{-1/2}(\alpha u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha u}} \cos \alpha u$.

Nên:
$$y = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} [C_1 \sin \alpha u + C_2 \cos \alpha u].$$

Hay:
$$y = z \left[A \sin \frac{\alpha}{z} + B \cos \frac{\alpha}{z} \right]. \quad (2.43)$$

- Từ các điều kiện biên:
- khi $z = a$: $y(a) = 0$;
 - khi $z = a + l$: $dy/dx = 0$,

ta có:

$$A \sin \frac{\alpha}{a} + B \cos \frac{\alpha}{a} = 0;$$

$$A \left(\sin \frac{\alpha}{a+l} - \frac{\alpha}{a+l} \cos \frac{\alpha}{a+l} \right) + B \left(\cos \frac{\alpha}{a+l} + \frac{\alpha}{a+l} \sin \frac{\alpha}{a+l} \right) = 0.$$

Do đó, phương trình ổn định có dạng:

$$D = \begin{vmatrix} \sin \frac{\alpha}{a} & \cos \frac{\alpha}{a} \\ \sin \frac{\alpha}{a+l} - \frac{\alpha}{a+l} \cos \frac{\alpha}{a+l} & \cos \frac{\alpha}{a+l} + \frac{\alpha}{a+l} \sin \frac{\alpha}{a+l} \end{vmatrix} = 0.$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta được:
$$\frac{tgv}{v} = -\frac{a}{l}, \quad (2.44)$$

trong đó:
$$v = \frac{\alpha l}{a(a+l)} = \frac{l}{a+l} \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1}} \quad (2.45)$$

Từ phương trình (2.44) ta xác định được giá trị của ν và dễ dàng suy ra được lực tới hạn theo (2.45).

Lực tới hạn được biểu thị dưới dạng chung như sau:

$$P_{th} = K_3 \frac{EI_2}{l^2}. \quad (2.46)$$

K_3 là hệ số phụ thuộc tỷ số độ cứng của hai tiết diện ở hai đầu thanh. Trong bảng 2.5 cung cấp các giá trị của hệ số K_3 theo [22], tương ứng với khi $n = 4$.

Bảng 2.5

l_1/l_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K_3	1,202	1,505	1,710	1,870	2,002	2,116	2,217	2,308	2,391	2,467

c) Trường hợp $n = 2$

Trong trường hợp $n = 2$ ta có thể tìm được nghiệm của phương trình (2.38) dưới dạng các hàm sơ cấp.

Nếu đặt $z = ae^t$, ta có:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{z}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dz} = \frac{1}{z} \times \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{z^2} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{z^2} \frac{dy}{dt}.$$

Sau khi thay các số liệu trên vào (2.38) và cho $n = 2$, ta sẽ được phương trình vi phân thường như sau:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{Pa^2}{EI_1} y = 0. \quad (2.47)$$

Nghiệm của (2.47): $y = \sqrt{e^t} (A \sin \gamma t + B \cos \gamma t), \quad (2.48)$

trong đó $\gamma = \sqrt{\frac{Pa^2}{EI_1} - \frac{1}{4}}. \quad (2.49)$

Nếu biểu thị nghiệm theo biến số z , ta có:

$$y = \sqrt{\frac{z}{a}} \left[A \sin \left(\gamma \ln \frac{z}{a} \right) + B \cos \left(\gamma \ln \frac{z}{a} \right) \right] \quad (2.50)$$

Cũng sử dụng các điều kiện biên tương tự như trường hợp trên, ta lập được phương trình ổn định của thanh:

$$\operatorname{tg} \left(\gamma \ln \frac{a+l}{a} \right) + 2\gamma = 0. \quad (2.51)$$

Ứng với các giá trị xác định của a và l , ta có thể giải phương trình (2.51) để tìm γ và từ đó suy ra lực tới hạn theo (2.49).

Lực tới hạn được biểu thị dưới dạng chung như sau:

$$P_{th} = K_4 \frac{EI_2}{l^2}. \quad (2.52)$$

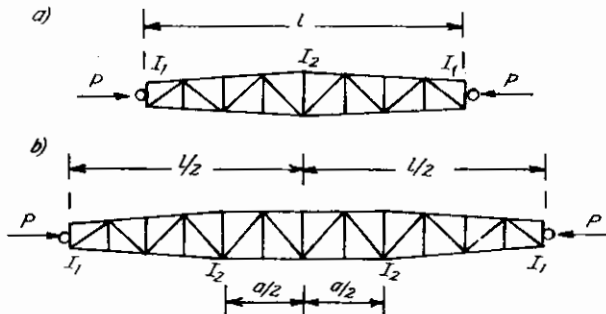
K_4 là hệ số phụ thuộc tỷ số độ cứng của hai tiết diện ở hai đầu thanh. Trong bảng 2.6 cung cấp các giá trị của hệ số K_4 theo [22], tương ứng với khi $n = 2$.

Bảng 2.6

I_1/I_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K_4	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023	2,128	2,223	2,311	2,392	2,467

Trên đây ta mới xem xét thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do. Đối với thanh có khớp tựa hai đầu cách tính cũng được thực hiện tương tự như vậy.

Hình 2.18



Trường hợp thanh có khớp tựa hai đầu và có tiết diện thay đổi đối xứng đối với tiết diện giữa (hình 2.18a) ta vẫn có thể sử dụng công thức (2.46) và (2.52) nếu thay l bằng $l/2$.

Đối với các thanh có tiết diện thay đổi đối xứng như hình 2.18b ta có thể xác định lực tới hạn theo công thức :

$$P_{th} = K_5 \frac{EI_2}{l^2}, \quad (2.53)$$

trong đó K_5 là hệ số phụ thuộc các tỷ số: I_1/I_2 , a/l và n .

Theo [22], A. N. Đinnik đã giải bài toán này và đã lập bảng hệ số K_5 (bảng 2.7) tương ứng với quy luật biến thiên của tiết diện từ lũy thừa 1 đến lũy thừa 4.

Ví dụ 2.8. Xác định tải trọng tới hạn cho thanh chịu nén của cần trục.

Thanh có dạng như trên hình 2.18b với các kích thước $a = 3,5$ m; $l = 17,5$ m và được cấu tạo bởi 4 thép góc $75 \times 75 \times 6$ mm. Mỗi thép góc có: diện tích tiết diện là $8,78$ cm²; mômen quán tính đối với trục trung tâm x_0 của riêng mỗi thép góc bằng $46,7$ cm⁴. Tiết diện ở hai đầu và ở giữa được bố trí như trên hình 2.19a,b. Cho biết $E = 2,1 \cdot 10^7$ N/cm²; $n = 2$.

Bảng 2.7

I_1/I_2	n	a/l					
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,1	1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	π^2
	2	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	
	3	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	
	4	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	
0,2	1	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	π^2
	2	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	
	3	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	
	4	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	
0,4	1	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84	π^2
	2	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	
	3	7,52	8,38	9,12	9,62	9,84	
	4	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	
0,6	1	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	π^2
	2	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	
	3	8,50	9,02	9,46	9,74	9,85	
	4	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	
0,8	1	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86	π^2
	2	9,24	9,50	9,69	9,82	9,86	
	3	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86	
	4	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	
1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

Mômen quán tính I_1 của tiết diện ở hai đầu và I_2 của tiết diện giữa:

$$I_1 = 4(46,7 + 8,78 \cdot 6,94^2) = 1900 \text{ cm}^4 ;$$

$$I_2 = 4(46,7 + 8,78 \cdot 17,92^2) = 11500 \text{ cm}^4 ;$$

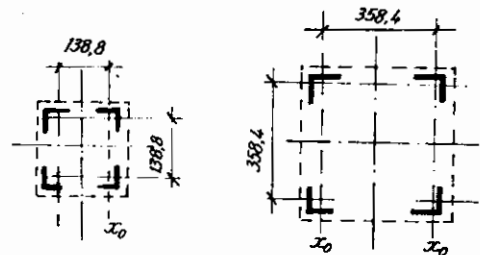
Theo công thức (2.53) ta có:

$$P_{th} = K_5 \frac{EI_2}{l^2}.$$

Để tìm hệ số K_5 ta cần xác định các tỷ số sau:

$$I_1 / I_2 = 1900 / 11500 = 0,165;$$

$$a / l = 3,5 / 17,5 = 0,20.$$



Hình 2.19

Theo bảng 2.7 và áp dụng phép nội suy ta xác định được $K_5 = 7,20$.

$$\text{Do đó: } P_{th} = 7,20 \frac{2,1 \cdot 10^7 \cdot 11500}{1750^2} = 590 \text{ kN.}$$

2.6. Ảnh hưởng của lực cắt đến giá trị lực tới hạn trong các thanh đặc

Khi thanh bị mất ổn định, ngoài mômen uốn và lực dọc nén, trong thanh còn có lực cắt. Để nghiên cứu ảnh hưởng của lực cắt đến lực tới hạn, ta xét thanh có hai đầu khớp chịu tải trọng P như trên hình 2.20a.

Góc trượt γ của phân tố thanh có chiều dài dz do lực cắt Q gây ra là:

$$\gamma = \nu \frac{Q}{GA}, \quad (2.54)$$

trong đó: ν – hệ số phụ thuộc hình dạng của tiết diện.

G – môđun đàn hồi khi trượt.

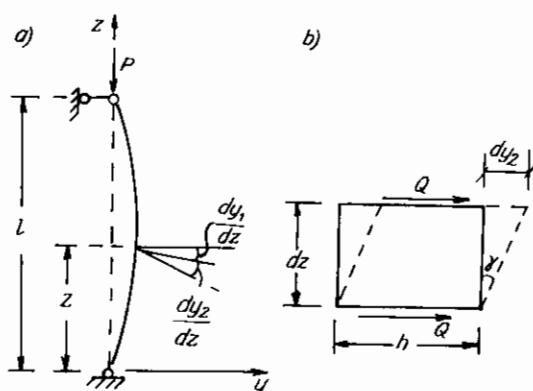
Gọi y_1 và y_2 lần lượt là độ võng của thanh do mômen uốn và do lực cắt gây ra, ta có (hình 2.20b):

$$\frac{dy_2}{dz} \approx \gamma = \nu \frac{Q}{GA} = \frac{\nu}{GA} \frac{dM}{dz}.$$

Do đó:

$$\frac{d^2 y_2}{dz^2} = \frac{\nu}{GA} \times \frac{d^2 M}{dz^2}.$$

Như vậy, nếu xét đến cả ảnh hưởng của mômen uốn và lực cắt thì phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:



Hình 2.20

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d^2 y_1}{dz^2} + \frac{d^2 y_2}{dz^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{\nu}{GA} M''.$$

Nhưng $M = +Py$ và $M'' = +Py''$ nên sau khi thay vào phương trình trên, ta được:

$$EI \left(1 - \frac{\nu P}{GA} \right) y'' + Py = 0.$$

Nghiệm của phương trình: $y = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$, với: $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI \left(1 - \frac{\nu P}{GA} \right)}}$.

Từ các điều kiện biên khi $z = 0$ và $z = l$: $y = 0$ ta tìm được phương trình ổn định:

$$\sin \alpha z = 0.$$

Phương trình này được thỏa mãn với các nghiệm $\alpha l = (2k+1)\pi$; với k là một số nguyên. Tải trọng nhỏ nhất tương ứng với khi $\alpha l = \pi$, hay:

$$\alpha l = l \cdot \sqrt{\frac{P}{EI \left(1 - \frac{\nu P}{GA}\right)}} = \pi.$$

Do đó:
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{l}{1 + \frac{\nu \pi^2 EI}{GA l^2}} = \beta P_E, \quad (2.55)$$

trong đó:
$$\beta = \frac{l}{1 + \frac{\nu \pi^2 EI}{GA l^2}}; \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (2.56)$$

P_E được gọi là lực tới hạn của thanh Euler.

Ta thấy β luôn có giá trị nhỏ hơn 1. Do đó nếu kể đến ảnh hưởng của lực cắt thì lực tới hạn sẽ nhỏ hơn lực Euler. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt thì $\beta = 1$.

Để đánh giá mức độ ảnh hưởng của lực cắt đối với tải trọng tới hạn, ta xét trường hợp thanh thép có tiết diện hình chữ nhật với $\nu = 1,20$; $G = 8.10^6$ N/cm², ứng suất tới hạn bằng giới hạn chảy $\sigma_{th} = 2,0.10^4$ N/cm².

$$\beta = \frac{l}{1 + \frac{\nu \pi^2 EI}{GA l^2}} = \frac{l}{1 + \frac{\nu}{G} \sigma_{th}} = \frac{l}{1 + \frac{1,2 \cdot 2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^6}} = \frac{l}{1 + 0,003}.$$

Ta thấy $\beta \approx 1$ nên ảnh hưởng của lực cắt rất nhỏ. Bởi vậy khi tính ổn định của các thanh đặc, ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

2.7. Ổn định của thanh ghép

Khi thiết kế thanh chịu lực nén tương đối lớn, ta thường mở rộng tiết diện bằng cách dùng nhiều thanh nối lại với nhau thành thanh ghép. Thường có hai cách cấu tạo các thanh ghép như trên hình 2.21.

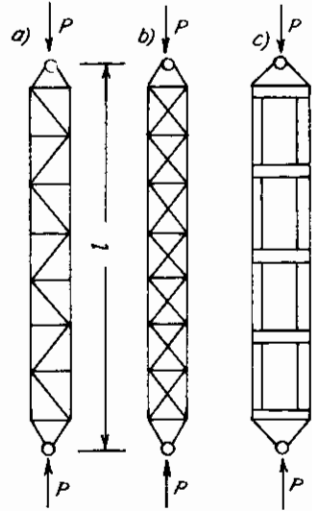
❖ Cách thứ nhất (hình 2.21a, b) cấu tạo bởi hai hoặc bốn thanh cơ bản thường bằng các loại thép hình nối với nhau bằng các thanh giằng ngang và giằng xiên, các mối nối được xem là liên kết khớp.

❖ Cách thứ hai (hình 2.21c) cấu tạo bởi hai hoặc bốn thanh cơ bản nối với nhau bằng các bản giằng, các mối nối được xem là liên kết hàn.

Dưới tác dụng của lực nén, khi thanh ghép bị mất ổn định, hiện tượng trượt sẽ xảy ra trong hầu hết các thanh giằng hoặc bản giằng. Do đó, đối với những thanh ghép, lực tới hạn không những phụ thuộc tiết diện thanh cơ bản mà còn phụ thuộc tiết diện và khoảng cách giữa các liên kết giằng. Ảnh hưởng của hiện tượng trượt tức là của lực cắt làm giảm giá trị của tải trọng tới hạn tương đối lớn, nên không thể bỏ qua như trường hợp thanh đặc.

Cách giải chính xác bài toán ổn định của những loại thanh này tương đối phức tạp. Do đó, trong thực tế khi khoảng cách giữa các thanh giằng hoặc bản giằng tương đối nhỏ so với chiều dài thanh thì ta có thể tính gần đúng theo cách tính do S. P. Timoshenko [22] đề xuất sẽ trình bày dưới đây.

Nội dung của cách tính gần đúng là xem thanh ghép như thanh đặc nhưng cần phải kể đến ảnh hưởng của lực cắt. Như vậy ta có thể sử dụng công thức (2.55) để tìm lực tới hạn, trong đó đại lượng ν/GA cần được xác định cụ thể cho từng trường hợp thanh ghép bởi bản giằng hay thanh giằng.



Hình 2.21

Từ (2.54) ta có: $\frac{\nu}{GA} = \frac{\gamma}{Q} = \bar{\gamma}$, với $\bar{\gamma}$ là góc trượt do lực cắt đơn vị gây ra.

A. Trường hợp thanh ghép được liên kết bằng các thanh giằng

Để tính góc trượt $\bar{\gamma}$ do lực cắt đơn vị gây ra, ta tách một khoang của thanh như trên hình 2.22. Dưới tác dụng của lực cắt đơn vị, khoang đang xét bị biến dạng và hình thành góc trượt $\bar{\gamma}$. Vì biến dạng nhỏ nên $\bar{\gamma}$ được tính gần đúng như sau:

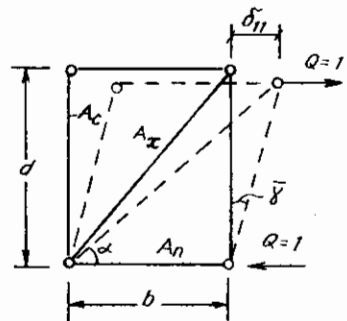
$$\bar{\gamma} \approx tg\bar{\gamma} = \frac{\delta_{11}}{d}$$

trong đó δ_{11} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực Q do chính lực $Q = 1$ gây ra và được xác định theo công thức sau:

$$\delta_{11} = \sum_i \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EA_i}$$

trong đó:

\bar{N}_i - lực dọc trong thanh thứ i do lực $Q = 1$ gây ra;



Hình 2.22

l_i và A_i – chiều dài và diện tích tiết diện của thanh thứ i .

Lần lượt gọi A_c , A_x và A_n là diện tích của các thanh cơ bản, thanh giằng xiên và thanh giằng ngang. Từ hình 2.22, ta thấy nội lực trong các thanh ngang và xiên lần lượt bằng l và $l/\cos\alpha$. Nếu chỉ kể đến biến dạng của các thanh giằng, ta có:

$$\delta_{II} = \frac{d}{E} \left[\frac{l}{\cos^2 \alpha \sin \alpha \cdot A_x} + \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha \cdot A_n} \right].$$

Do đó:

$$\bar{\gamma} = \frac{\nu}{GA} = \frac{\delta_{II}}{d} = \frac{l}{E} \left[\frac{l}{\cos^2 \alpha \sin \alpha \cdot A_x} + \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha \cdot A_n} \right].$$

Thay $\bar{\gamma}$ vào công thức (2.55) ta được:

$$\begin{aligned} P_{th} &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{l}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left[\frac{l}{EA_x \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} + \frac{l}{EA_n \operatorname{tg} \alpha} \right]} = \\ &= P_E \times \frac{l}{1 + \frac{P_E}{E} \left[\frac{l}{A_x \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha} + \frac{l}{A_n \operatorname{tg} \alpha} \right]}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Trong (2.57), I là mômen quán tính của tiết diện thanh ghép (chỉ kể các thanh cơ bản, không xét các thanh giằng). Thường thanh ghép được cấu tạo theo kiểu hình hộp, hai hoặc bốn mặt có dạng như trên hình 2.21a; lúc này các đại lượng A_x và A_n trong công thức (2.57) là hai lần diện tích của thanh xiên và thanh ngang trong hai mặt phẳng đối diện.

Từ công thức trên ta thấy P_{th} tỷ lệ thuận với A_x và A_n đồng thời các thanh xiên có tác dụng đảm bảo ổn định tốt hơn thanh ngang. Thật vậy, ta xét một ví dụ đơn giản để chứng tỏ điều này: giả thiết $A_x = A_n = A$ và góc $\alpha = 45^\circ$; theo công thức (2.57), ta có:

$$P_{th} = P_E \times \frac{l}{1 + \frac{P_E}{EA} [2,83 + l]}.$$

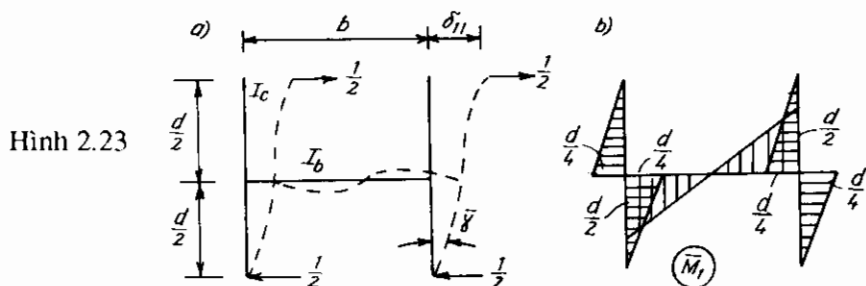
Trong trường hợp này, ta thấy thanh xiên có tác dụng gấp ba lần thanh ngang.

Nếu trong mỗi khoang có hai thanh xiên (hình 2.21b) thì một thanh xiên chịu kéo, một thanh xiên chịu nén còn thanh ngang không chịu lực, công thức (2.57) sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

$$P_{th} = P_E \times \frac{1}{1 + P_E \frac{1}{EA_x \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}} \quad (2.58)$$

B. Trường hợp thanh ghép được liên kết bằng các bản giằng

Giả thiết khi mất ổn định, đường biến dạng của thanh cơ bản có điểm uốn ở giữa mỗi khoang. Như vậy ta có thể tách một đoạn thanh như trên hình 2.23a để tính góc trượt $\bar{\gamma}$. Biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 2.23b.



Ta có :

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{d^3}{24EI_c} + \frac{bd^2}{12EI_b}$$

Do đó :

$$\bar{\gamma} = \frac{\delta_{11}}{d} = \frac{d^2}{24EI_c} + \frac{bd}{12EI_b} = \frac{\nu}{GA}$$

Thay đại lượng này vào công thức (2.55) ta được:

$$P_{th} = P_E \cdot \frac{1}{1 + P_E \left[\frac{bd}{12EI_b} + \frac{d^2}{24EI_c} \right]} \quad (2.59)$$

Khi cấu tạo thanh ghép theo kiểu hình hộp ta cần hiểu I_b là mômen quán tính của tiết diện hai bản giằng, còn I_c là mômen quán tính của một bên thanh cơ bản lấy đối với trục quán tính chính trung tâm của nó.

Từ công thức (2.59) ta thấy P_{th} tỷ lệ thuận với độ cứng của bản giằng và tỷ lệ nghịch với khoảng cách d giữa các bản giằng. Lực P_{th} luôn luôn nhỏ hơn lực tới hạn Euler.

Thường I_b lớn hơn I_c rất nhiều lần nên có thể coi $I_b = \infty$. Lúc này ta có:

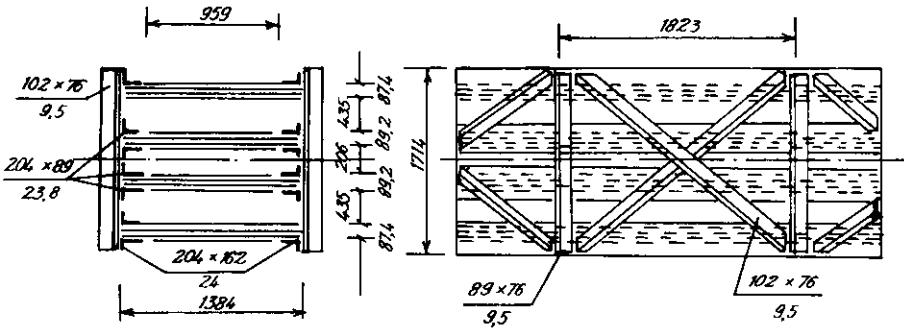
$$P_{th} = P_E \times \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 d^2}{24l^2} \cdot \frac{1}{I_c}} \quad (2.60)$$

Ví dụ 2.9. Thanh biên chịu nén trong cầu dầm Québec ở Canada được cấu tạo theo dạng thanh ghép có tiết diện và kích thước như trên hình 2.24. Khi thiết kế thanh biên này người ta đã bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt mà xem như một thanh đặc với lực tới hạn bằng lực Euler P_E nên cầu đã bị phá hoại năm 1907 do thanh này bị mất ổn định.

Tìm lực tới hạn so với lực P_E khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Cho biết:

- Các thanh cơ bản bao gồm 4 thép góc $204 \times 162 \times 24$ mm; 8 thép góc $204 \times 89 \times 23,8$ mm; các thép bản có tổng diện tích tiết diện là 4278 cm^2 .
- Thanh giằng ngang là thép góc $89 \times 76 \times 9,5$ mm.
- Thanh giằng xiên là 2 thép góc $102 \times 76 \times 9,5$ mm đặt nghiêng 45° .



Hình 2.24

Diện tích tiết diện của các thép góc:

- Thép góc $204 \times 162 \times 24$ mm: $A_1 = [20,4 + (16,2 - 2,4)] \cdot 2,4 = 72,1 \text{ cm}^2$.
- Thép góc $204 \times 89 \times 23,8$ mm: $A_2 = [20,4 + (8,9 - 2,38)] \cdot 2,38 = 64,0 \text{ cm}^2$.
- Thép góc $89 \times 76 \times 9,5$ mm: $A_3 = [8,9 + (7,6 - 0,95)] \cdot 0,95 = 14,8 \text{ cm}^2$.
- Thép góc $102 \times 76 \times 9,5$ mm: $A_4 = [10,2 + (7,6 - 0,95)] \cdot 0,95 = 16,0 \text{ cm}^2$.

Diện tích tiết diện để tính trong một khoang của các thanh:

- Thanh cơ bản: $A_c = 4 \cdot 72,1 + 8 \cdot 64 + 4278 = 5078 \text{ cm}^2$.
- Thanh giằng ngang: $A_n = 2 \cdot 14,8 = 29,6 \text{ cm}^2$.
- Thanh giằng xiên: $A_x = 4 \cdot 16 = 64 \text{ cm}^2$.

Vì $\alpha = 45^\circ$ nên $\sin \alpha = \cos \alpha = 0,707$; $\tan \alpha = 1$. Do đó, theo (2.57) ta có:

$$P_{th} = P_E \times \frac{1}{1 + \frac{P_E}{E} \left[\frac{1}{64,0 \cdot 0,707^3} + \frac{1}{29,6,1} \right]} = P_E \times \frac{1}{1 + \frac{P_E}{E} \times 0,0779}$$

Nếu gọi: $\sigma_{th}^o = P_E / A_c$ và cho bằng giới hạn tỷ lệ là 24000 N/cm^2 thì với giá trị $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$, ta được:

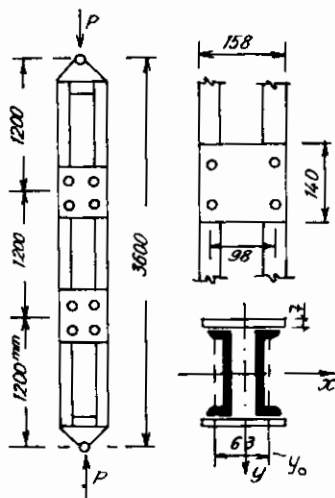
$$P_{th} = P_E \times \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{th}^o}{E} A_c \cdot 0,0779} = P_E \times \frac{1}{1 + \frac{2,4 \cdot 10^4}{2,1 \cdot 10^7} 5078 \cdot 0,0779} = 0,688 P_E.$$

Như vậy trong trường hợp này, lực tới hạn khi kể đến biến dạng trượt giảm xuống 33 % so với khi xem thanh là thanh đặc.

Ví dụ 2.10. Thanh chống chịu nén trong công trình bể chứa khí (đã bị phá hoại do thanh chống bị mất ổn định), được cấu tạo theo dạng thanh ghép có tiết diện và kích thước như trên hình 2.25. Tìm lực tới hạn khi không xét và khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt. Cho biết (theo [13]):

- $E = 2,03 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$;
- Giới hạn tỷ lệ $\sigma_{Hl} = 24000 \text{ N/cm}^2$;
- Mômen quán tính đối với trục y_0 của tiết diện thanh cơ bản: $I_c = 83,4 \text{ cm}^4$.
- Mômen quán tính của toàn bộ tiết diện đối với các trục quán tính chính:

$$I_x = 1869 \text{ cm}^4; \quad I_y = 670 \text{ cm}^4.$$



Hình 2.25

Ta thấy: $I_y < I_x$ nên thanh sẽ bị mất ổn định quanh trục y và cần kiểm tra ổn định theo bài toán thanh ghép bằng các bản giằng.

♦ Trường hợp không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt:

$$P_{th} = P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,03 \cdot 10^7 \cdot 670}{360^2} = 1036 \cdot 10^3 \text{ N} = 1036 \text{ kN}.$$

♦ Trường hợp xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt:

$$\text{Mômen quán tính của bản giằng: } I_b = 2 \cdot \frac{0,7 \cdot 14^3}{12} = 320 \text{ cm}^4.$$

Theo (2.59) ta có:

$$P_{th} = 1036 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1036 \cdot 10^3}{2,03 \cdot 10^7} \left[\frac{6,3 \cdot 120}{12 \cdot 320} + \frac{120^2}{24 \cdot 83,4} \right]} = 752 \cdot 10^3 \text{ N} = 752 \text{ kN}.$$

Như vậy, lực tới hạn khi kể đến biến dạng trượt giảm xuống 27% so với khi xem thanh là thanh đặc. Kết quả tìm được ở trên cũng chỉ tương đối gần đúng vì công thức (2.59) được thiết lập với giả thiết số lượng khoang tương đối nhiều. Trong trường hợp này chỉ có ba khoang nên cách cấu tạo chưa bảo đảm được yêu cầu của giả thiết.

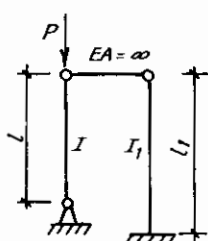
Nếu sử dụng 5 bản giằng tức là có 6 khoang với $d = 60$ cm thì lực tới hạn xác định theo (2.59) sẽ bằng 944 kN. Như vậy, lực tới hạn khi kể đến biến dạng trượt giảm xuống 9% so với khi xem thanh là thanh đặc.

Bài tập

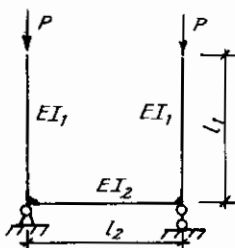
II.1. Cho hệ chịu lực nén như trên hình II.1. Tìm sơ đồ tính và lập phương trình ổn định.

II.2. Cho hệ chịu các lực nén như trên hình II.2. Tìm lực tới hạn.

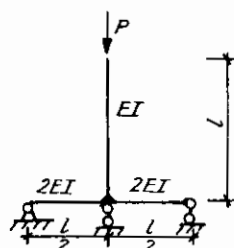
Cho biết: $l_2 = 2l_1/3$; $I_2 = I_1$.



Hình II.1



Hình II.2



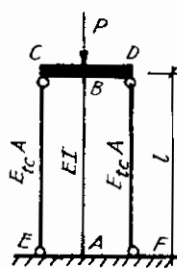
Hình II.3

II.3. Cho hệ chịu lực nén P như trên hình II.3. Tìm lực tới hạn.

II.4. Tìm lực tới hạn cho hệ được hình thành từ thanh AB chịu lực nén P ; hai dây căng không căng trước CE, DF và thanh tuyệt đối cứng CD như trên hình II.4.

Cho biết: thanh AB có độ cứng khi uốn là EI ; các dây căng CE, DF chỉ làm việc khi chịu kéo và có độ cứng khi

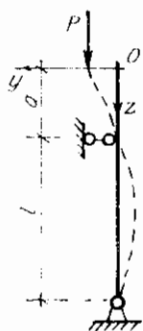
kéo là $E_{tc}A$; khoảng cách $a = \sqrt{\frac{EI}{E_{tc}A}}$.



Hình II.4

II.5 - II.7. Cho hệ chịu lực nén P như trên các hình tương ứng. Vận dụng các phương trình của phương pháp thông số ban đầu, lập phương trình ổn định. Tìm giá trị của lực tới hạn khi: $a = l/2$; $EI = const$.

11.8. Vận dụng phương pháp gần đúng của Kôrôbôv lập công thức tính ổn định cho thanh có khớp tựa ở hai đầu chịu lực nén P đặt ở trong nhịp (hình 2.5 trong phần lý thuyết). Tìm giá trị của lực tới hạn khi : $a = b = l/2$.



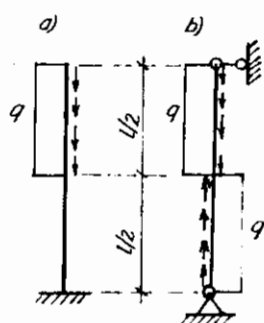
Hình 11.5



Hình 11.6



Hình 11.7



Hình 11.9

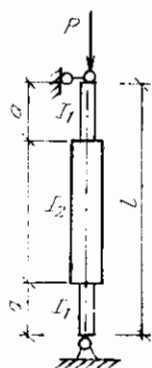
11.9. Vận dụng phương pháp gần đúng, tìm giá trị của lực tới hạn cho thanh chịu lực phân bố như trên các hình 11.9a, b.

11.10. Cho thanh có tiết diện thay đổi, chịu lực nén P như trên hình 11.10. Vận dụng các phương trình của phương pháp thông số ban đầu, lập phương trình ổn định. Tìm giá trị của lực tới hạn khi :

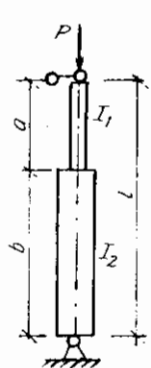
a) $a = 0,2l$; $l_2 = l$; $l_1 = 0,4l$.

b) $a = l/6$; $l_2 = l$; $l_1 = 0,25l$.

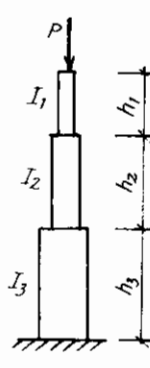
11.11. Cho thanh có tiết diện thay đổi, chịu các lực nén như trên hình 11.11. Vận dụng các phương trình của phương pháp thông số ban đầu, lập phương trình ổn định. Tìm giá trị của lực tới hạn khi: $a = b = 0,5l$; $l_1 = l$; $l_2 = 2l$.



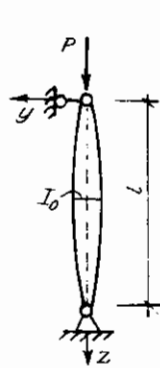
Hình 11.10



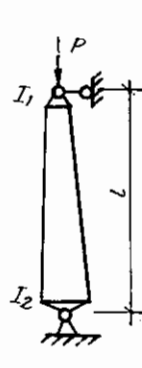
Hình 11.11



Hình 11.12



Hình 11.13



Hình 11.14

II.12. Cho thanh có tiết diện thay đổi, chịu lực nén P như trên hình II.12. Tìm giá trị của lực tới hạn khi : $h_1 = h$; $h_2 = 2h$; $h_3 = 3h$; $l_1 = l$; $l_2 = 4l$; $l_3 = 9l$.

II.13. Cho thanh có tiết diện thay đổi, chịu lực nén P như trên hình II.13. Tìm lực tới hạn. Cho biết: $I(z) = I_0 \times 4z(l-z)/l^2$, với I_0 - mômen quán tính của tiết diện ở giữa nhịp.

Chỉ dẫn: Sau khi lập phương trình vi phân của đường đàn hồi sẽ được phương trình vi phân có hệ số thay đổi. Phương trình này sẽ được thỏa mãn nếu đặt nghiệm như sau: $y(z) = 4 \cdot z(l-z)/l^2$, với f - chuyển vị tại tiết diện ở giữa nhịp.

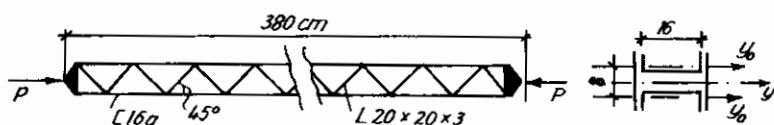
II.14. Cho thanh có khớp tựa ở hai đầu, tiết diện thay đổi, chịu lực như trên hình II.14. Tìm giá trị của lực tới hạn khi :

- Mômen quán tính của tiết diện thay đổi theo luật bậc bốn ($n = 4$) với $l_1 / l_2 = 0,6$.
- Mômen quán tính của tiết diện thay đổi theo luật bậc hai ($n = 2$) với $l_1 / l_2 = 0,6$.

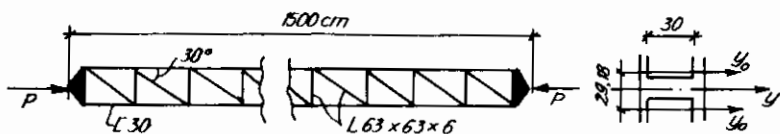
II.15. Cho thanh ghép có khớp tựa ở hai đầu, chịu lực như trên hình II.15. Tìm giá trị của lực tới hạn khi không kể và khi có kể đến ảnh hưởng của lực cắt. Cho biết:

- Thanh được cấu tạo từ hai thanh cơ bản là thép hình U16a, mỗi thanh có diện tích tiết diện là $19,5 \text{ cm}^2$; mômen quán tính đối với trục y_0 đi qua trọng tâm là $78,8 \text{ cm}^4$; khoảng cách giữa trọng tâm của hai thanh cơ bản là 80 mm ; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.
- Các thanh giằng xiên là thép góc $20 \times 20 \times 3 \text{ mm}$, diện tích tiết diện là $1,13 \text{ cm}^2$; nghiêng 45° so với trục thanh; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Hình II.15



Hình II.16



II.16. Cho thanh ghép có khớp tựa ở hai đầu, chịu lực như trên hình II.16. Tìm giá trị của lực tới hạn khi không kể và khi có kể đến ảnh hưởng của lực cắt. Cho biết:

- Thanh được cấu tạo từ hai thanh cơ bản là thép hình U30, mỗi thanh có diện tích tiết diện là $40,5 \text{ cm}^2$; mômen quán tính đối với trục y_0 đi qua trọng tâm là 327 cm^4 ; khoảng cách giữa trọng tâm của hai thanh cơ bản là $29,18 \text{ cm}$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

- Các thanh giằng xiên và giằng ngang là thép góc $63 \times 63 \times 6$ mm , diện tích tiết diện $7,28$ cm²; thanh giằng xiên nghiêng 30° so với thanh cơ bản; $E = 2,1 \cdot 10^4$ kN/cm².

II.17. Cho thanh ghép có khớp tựa ở hai đầu, chịu lực như trên hình II.17. Tìm giá trị của lực tới hạn khi không kể và khi có kể đến ảnh hưởng của lực cắt. Cho biết:

- Thanh được cấu tạo từ hai thanh cơ bản là thép hình U16, mỗi thanh có diện tích tiết diện là $18,1$ cm²; mômen quán tính đối với trục y_0 đi qua trọng tâm là $63,3$ cm⁴; khoảng cách giữa trọng tâm của hai thanh cơ bản là $6,2$ cm; $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm^{2.}
- Các bản giằng ngang là thép tấm dày $0,7$ cm dài 14 cm; $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm^{2.}

Hình II.17

