

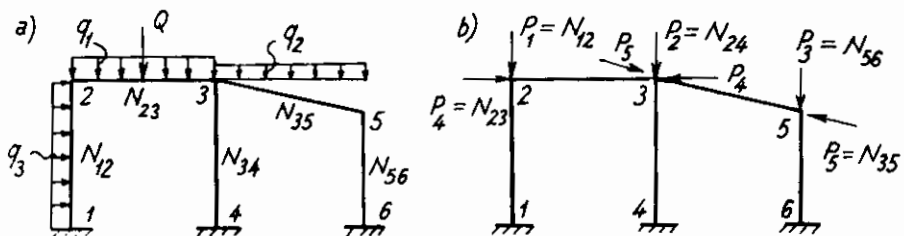
3 Ổn định của hệ thanh thẳng

3.1. Các giả thiết

Khi nghiên cứu Ổn định của hệ thanh ta chấp nhận các giả thiết dưới đây nhằm đơn giản hóa việc xác định tải trọng tới hạn:

1. Vật liệu của hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi.
2. Các nút của hệ xem như tuyệt đối cứng. Do đó, chuyển vị tại các đầu thanh quy tụ vào một nút sẽ như nhau.
3. Các thanh của hệ xem như không co giãn. Trước và sau biến dạng, khoảng cách theo phương ban đầu giữa các nút của hệ không thay đổi.
4. Khi xác định chuyển vị trong hệ, chỉ xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn do mômen uốn và do lực dọc phát sinh trước khi hệ mất ổn định. Bỏ qua ảnh hưởng của gia số lực dọc phát sinh sau khi hệ mất ổn định.
5. Tải trọng tác dụng trên hệ chỉ đặt ở các nút. Những tải trọng này chỉ gây ra kéo hoặc nén mà không gây ra uốn ngang trong các thanh khi hệ chưa bị mất ổn định.

Trong thực tế, tải trọng thường không chỉ đặt ở nút mà có thể đặt ở ngoài nút nên sẽ gây ra trong các thanh hiện tượng uốn cùng với nén hoặc kéo. Tuy nhiên, trong các thanh thẳng thì chuyển vị do biến dạng uốn ngang cùng với uốn dọc chỉ phát triển nhanh khi lực nén có giá trị xấp xỉ bằng lực tới hạn. Đối với hệ thanh thẳng cũng vậy, chuyển vị do biến dạng uốn ngang cùng với uốn dọc chỉ phát triển nhanh khi lực nén tiến gần đến giá trị tới hạn. Bởi vậy, việc xác định lực tới hạn cho hệ chịu tải trọng đặt ở nút là cần thiết để đánh giá khả năng ổn định của hệ khi chịu các dạng tải trọng khác.



Hình 3.1

Để đáp ứng giả thiết 5, trước khi giải bài toán ổn định ta cần xác định lực dọc trong các thanh của hệ chịu tải trọng đã cho bất kỳ (hình 3.1a) theo các phương pháp trong Cơ học kết cấu, tiếp đó xác định tải trọng tới hạn hay thông số tới hạn cho hệ chịu tải trọng chỉ đặt ở nút với giá trị lực dọc trong các thanh vừa tìm được ở khâu trên (hình 3.1b) theo các phương pháp sẽ trình bày trong chương này.

Trước khi nghiên cứu các phương pháp tính ta cần đặt vấn đề: *có thể áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng trong bài toán ổn định của hệ thanh thẳng hay không?* Để giải đáp ta sẽ tìm hiểu sự liên hệ giữa chuyển vị và tải trọng tác dụng trong những thanh chịu uốn cùng với nên.

Trong bài toán ổn định, ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn ngang do tải trọng ngang, nhất thiết phải kể đến ảnh hưởng của biến dạng uốn dọc do lực dọc gây ra khi tính chuyển vị. Khi biến dạng nhỏ, giữa chuyển vị và tải trọng ngang có sự liên hệ tuyến tính còn giữa chuyển vị và lực dọc P có sự liên hệ phi tuyến.

Nếu bài toán ổn định được nghiên cứu theo giả thiết trên thì khi bắt đầu mất ổn định, hệ ở trạng thái biến dạng rất gần với trạng thái ban đầu, các lực ngang chỉ phát sinh sau khi hệ bị mất ổn định với những giá trị rất nhỏ. Ngoài ra, *nếu không coi các lực dọc P là tải trọng mà quy ước xem chúng như là một trong các tính chất đặc trưng P của hệ thì có thể phát biểu là giữa chuyển vị và tải trọng ngang có sự liên hệ tuyến tính.*

Trên cơ sở đó ta có thể kết luận: *trong bài toán ổn định của hệ thanh thẳng có thể áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng đối với các tải trọng ngang, mỗi tải trọng ngang xảy ra kèm theo yếu tố đặc trưng P của hệ.*

Để làm sáng tỏ ta xét một ví dụ. Nếu gọi:

y – chuyển vị tại một tiết diện nào đó do lực nén P và do các tải trọng ngang q_1 , q_2 đồng thời cùng tác dụng gây ra;

y_1 – chuyển vị tương ứng do tác dụng đồng thời của lực P và tải trọng ngang q_1 ;

y_2 – chuyển vị tương ứng do tác dụng đồng thời của lực P và tải trọng ngang q_2 ,

thì theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có: $y = y_1 + y_2$

Tương tự, nếu gọi \bar{y} là chuyển vị do tác dụng đồng thời của lực P và tải trọng ngang q bằng đơn vị thì chuyển vị y do tác dụng đồng thời của lực P và tải trọng ngang q khác đơn vị gây ra sẽ bằng: $y = q\bar{y}$.

Như vậy, ta có thể áp dụng được các phương pháp tính xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng để giải bài toán ổn định của hệ thanh. Ngoài ra cũng có thể mở rộng phạm vi áp dụng công thức xác định chuyển vị và các định lý cơ bản đã nghiên cứu trong Cơ học kết cấu cho hệ thanh chịu uốn cùng với nén hoặc kéo.

Trong các mục dưới đây ta sẽ nghiên cứu cách vận dụng phương pháp lực, phương pháp chuyển vị và các phương pháp khác phù hợp để giải bài toán ổn

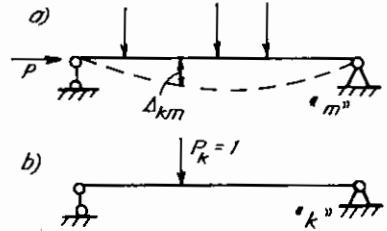
định hệ thanh thẳng như hệ khung, hệ dầm liên tục, hệ dàn. Bạn đọc có thể tìm hiểu cách tính ổn định của hệ khung theo phương pháp hỗn hợp và các phương pháp gần đúng trong tài liệu [3].

3.2. Cách tính ổn định của khung theo phương pháp lực

A. Chuyển vị trong thanh thẳng chịu uốn cùng với nén hoặc kéo

Trước khi nghiên cứu cách vận dụng phương pháp lực để giải bài toán ổn định của hệ thanh ta cần biết cách xác định chuyển vị trong thanh thẳng chịu uốn cùng với nén hoặc kéo.

Xét thanh chịu uốn cùng với nén như trên hình 3.2a. Gọi M_m là mômen uốn do tác dụng đồng thời của tải trọng ngang và lực nén P gây ra. Để xác định chuyển vị Δ_{km} tại k , ta tạo trạng thái khả dĩ "k" trong đó đặt lực $P_k=I$ tương ứng với vị trí và phương của chuyển vị cần tìm (hình 3.2b). Gọi \bar{M}_k là mômen uốn ở trạng thái "k" do lực $P_k=I$ gây ra.



Hình 3.2

Từ công thức biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của các ngoại lực tác dụng trên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m", ta có:

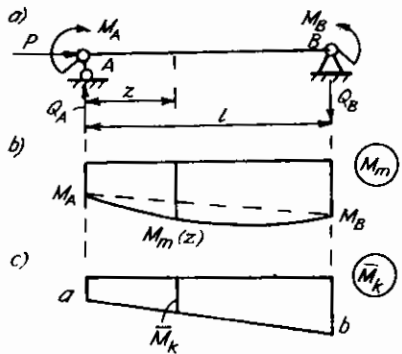
$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds \quad (3.1)$$

Đó là công thức chuyển vị của hệ thanh chịu uốn cùng với nén hoặc kéo trong đó đã bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt.

Để phục vụ cho các nội dung tiếp sau, ta sẽ tập trung nghiên cứu cách xác định chuyển vị cho hai trường hợp cụ thể: thanh có khớp tựa ở hai đầu và thanh côngxôn, tiết diện không đổi, chịu lực nén P cùng với các tải trọng ngang chỉ đặt ở các đầu thanh.

1. Thanh có khớp tựa ở hai đầu

Xét thanh đặt tự do trên hai gối tựa chịu lực nén P và các tải trọng ngang đặt ở các đầu thanh như trên hình 3.3a. Yêu cầu tìm chuyển vị tại các đầu thanh.



Hình 3.3

Trong trường hợp tổng quát, tải trọng ngang tại các đầu A, B của thanh AB bao gồm M_A, M_B như trên hình 3.3a. Phản lực tại đầu A có giá trị bằng:

$$Q_A = \frac{1}{l}(M_B - M_A).$$

Biểu đồ mômen uốn (M_m) khi xét đến ảnh hưởng của lực P , có dạng đường cong như trên hình 3.3b. Theo (2.6), ta có biểu thức của M_m như sau:

$$\begin{aligned} M(z) &= \alpha EI y'(0) \sin \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q(0)}{\alpha} \sin \alpha z = \\ &= \alpha EI y'(0) \sin \alpha z + M_A \cos \alpha z + \frac{M_B - M_A}{\alpha l} \sin \alpha z. \end{aligned}$$

trong đó $y'(0)$ là thông số ban đầu chưa biết.

Theo (2.4) ta lập điều kiện biên khi $z = l$; $y(l) = 0$ sẽ tìm được:

$$y'(0) = \frac{1}{\alpha EI} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right) M_A + \frac{1}{\alpha EI} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right) M_B,$$

trong đó:
$$v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (3.2)$$

Thay biểu thức $y'(0)$ vào phương trình mômen uốn, ta được:

$$M_m(z) = M_A \cos \alpha z + \left(\frac{M_B}{\sin v} - \frac{M_A}{\operatorname{tg} v} \right) \sin \alpha z. \quad (3.3)$$

Để xác định chuyển vị tại các đầu thanh ta cần tạo trạng thái khả dĩ và lập biểu thức mômen uốn tương ứng. Trong trường hợp tổng quát, biểu đồ mômen uốn (\bar{M}_k) có dạng như trên hình 3.3c, biểu thức mômen uốn tương ứng có dạng:

$$\bar{M}_k = a + \frac{b-a}{l} z. \quad (3.4)$$

Thay (3.3) và (3.4) vào (3.1), ta được:

$$EI \Delta_{km} = M_A \int_0^l \left(a + \frac{b-a}{l} z \right) \cos \alpha z dz + \left(\frac{M_B}{\sin v} - \frac{M_A}{\operatorname{tg} v} \right) \int_0^l \left(a + \frac{b-a}{l} z \right) \sin \alpha z dz.$$

Sau khi lấy tích phân và biến đổi, ta được:

$$EI \Delta_{km} = \frac{1}{3} [aM_A + bM_B] \alpha(v) + \frac{1}{6} [aM_B + bM_A] \beta(v), \quad (3.5)$$

trong đó:
$$\alpha(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right); \quad \beta(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{v}{\sin v} - 1 \right), \quad (3.6)$$

là các hàm điều chỉnh kể đến ảnh hưởng của lực nén P . Có thể tìm giá trị của các hàm này theo các đối số v qua bảng 1 của phụ lục.

2. Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do

Trong trường hợp tổng quát, tải trọng ngang tại đầu A của thanh AB bao gồm M_A , Q_A như trên hình 3.4a. Biểu đồ mômen uốn (M_m) khi xét đến ảnh hưởng của lực P , có dạng đường cong như trên hình 3.4b.

Mômen uốn tại đầu ngàm B có giá trị bằng:

$$M_B = M_A + Q_A l + P y_A = M_B^o + P y_A,$$

trong đó: M_B^o là mômen uốn tại đầu ngàm B do riêng tải trọng ngang gây ra. Từ đó ta có:

$$Q_A = (M_B^o - M_A) / l$$

Vận dụng các phương trình (2.6), (2.5) và điều kiện biên khi $z = l$; $y'(l) = 0$ sẽ tìm được biểu thức của M_m như sau:

$$M_m(z) = M_A \cos \alpha z + \left(\frac{M_A (v \sin v - l) + M_B^o}{v \cos v} \right) \sin \alpha z. \quad (3.7)$$

Để xác định chuyển vị tại các đầu thanh ta cần tạo trạng thái khả dĩ và lập biểu thức mômen uốn tương ứng. Trong trường hợp tổng quát, biểu đồ (\bar{M}_k) có dạng như trên hình 3.4c, biểu thức mômen uốn tương ứng có dạng (3.4).

Thay (3.7) và (3.4) vào (3.1), sau khi lấy tích phân và biến đổi, ta được:

$$EI \Delta_{km} = \frac{l}{3} b M_B^o \theta_1(v) + \frac{l}{3} a M_A \theta_2(v) + \frac{l}{6} [a M_B^o + b M_A] \theta_3(v), \quad (3.8)$$

trong đó:
$$\theta_1(v) = \frac{3}{v^2} \left(\frac{tgv}{v} - 1 \right);$$

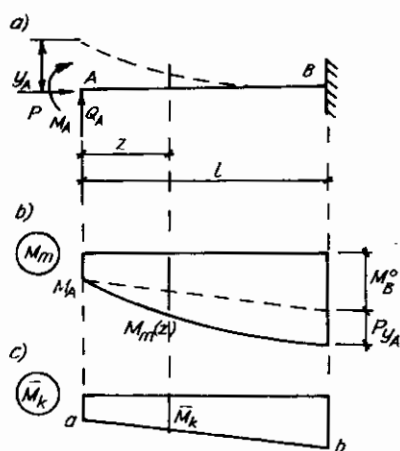
$$\theta_2(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 + vtgv - \frac{2}{\cos v} + \frac{tgv}{v} \right); \quad (3.9)$$

$$\theta_3(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{1}{\cos v} - \frac{tgv}{v} \right);$$

là các hàm điều chỉnh kể đến ảnh hưởng của lực nén P . Có thể tìm giá trị của các hàm này theo các đối số v qua bảng 1 của phụ lục.

Chú thích: Trường hợp thanh chịu uốn cùng với lực kéo P , trong tất cả các biểu thức trên ta cần thực hiện phép thay thế như sau: $\alpha \Rightarrow i\beta$ với $\beta = P/EI$; khi đó:

$$\alpha^2 \Rightarrow -\beta^2; \quad \sin \alpha z \Rightarrow i \operatorname{sh} \beta z; \quad \cos \alpha z \Rightarrow \operatorname{ch} \beta z; \quad \operatorname{tg} \alpha z \Rightarrow i \operatorname{th} \beta z.$$



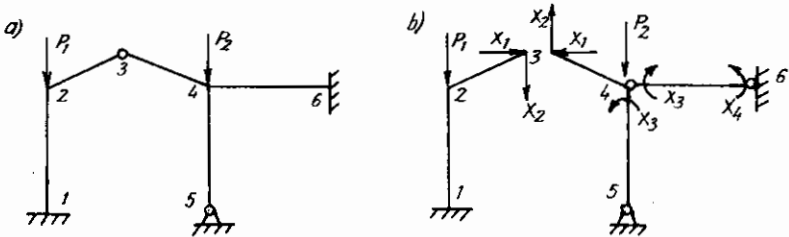
Hình 3.4

B. Nội dung phương pháp lực

Khi vận dụng phương pháp lực để kiểm tra ổn định của khung ta cũng tiến hành tương tự như đã thực hiện khi kiểm tra điều kiện bền đã quen biết.

1. Hệ cơ bản

Về nguyên tắc, hệ cơ bản có thể chọn bất kỳ với điều kiện là phải bất biến hình như đã nêu trong Cơ học kết cấu. Tuy nhiên, để cho đơn giản khi tính ổn định, ta chỉ nên chọn hệ cơ bản bằng cách loại trừ các liên kết thừa sao cho những thanh chịu nén hoặc kéo trở thành thanh có hai đầu là khớp không có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục thanh hoặc thanh có một đầu ngàm một đầu tự do. Với cách chọn hạn chế như vậy ta có thể dễ dàng xác định chuyển vị trong hệ cơ bản theo các công thức đã lập sẵn ở điểm A. Nếu chọn khác đi thì cách thực hiện sẽ phức tạp hơn vì cần phải tự lập công thức chuyển vị tương ứng.



Hình 3.5

Với hệ khung trên hình 3.5a, hệ cơ bản 3.5b hợp quy cách đã hạn chế ở trên.

2. Hệ phương trình chính tắc

Sau khi chọn hệ cơ bản và đặt các ẩn X_i tại các liên kết bị loại trừ, ta cũng lập được hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực tương tự như trong Cơ học kết cấu. Trong trường hợp này, theo giả thiết 3 và 5, tải trọng chỉ gây ra nén hoặc kéo mà không gây ra uốn trong các thanh của hệ cơ bản. Như vậy, biểu đồ (M_p^o) do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản sẽ không tồn tại và do đó các số hạng tự do Δ_{kP} của hệ phương trình chính tắc đều bằng không. Lúc này, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n &= 0; \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n &= 0; \\
 \dots & \\
 \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

3. Cách xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

Để xác định các δ_{km} ta cần tạo trạng thái "k" do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản và tạo trạng thái "m" do lực $X_m = 1$ cùng các lực nén hoặc kéo P gây ra trong hệ cơ bản; tiếp đó áp dụng công thức (3.1) hoặc áp dụng cách nhân biểu đồ. Đối với các thanh không có lực nén hoặc kéo P cách áp dụng công thức (3.1) hoặc áp dụng cách nhân biểu đồ cũng tương tự như trong bài toán kiểm tra điều kiện bền. Đối với các thanh có lực nén hoặc kéo P ta cần áp dụng các công thức (3.5) hoặc (3.8) đã lập ở điểm A.

Ngoài ra, cần lưu ý là định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị: $\delta_{km} = \delta_{mk}$ vẫn được nghiệm đúng trong bài toán ổn định.

Khi xác chuyển vị trong các thanh chịu nén hoặc kéo ta cần quan niệm các lực này chỉ là lực sẵn có đặt tại các nút. Thực ra, khi mất ổn định các lực này có thay đổi. Chẳng hạn đối với hệ trên hình 3.5b, thanh 1-2 sẽ chịu lực nén với giá trị bằng $P_1 + X_2$ song các lực X_i chỉ phát sinh sau khi hệ bị mất ổn định và có giá trị nhỏ nên theo giả thiết 4 ta có thể bỏ qua.

4. Phương trình ổn định

Hệ phương trình thuần nhất (3.10) được thỏa mãn với hai khả năng:

- * *Tất cả các ẩn X_i đều bằng không.* Lúc này, trong hệ chỉ có biến dạng kéo hoặc nén mà chưa có biến dạng uốn; do đó hệ vẫn ở trạng thái cân bằng ban đầu. Như vậy, hệ ổn định, tải trọng chưa đạt đến giá trị tới hạn.
- * *Tất cả hoặc một số ẩn X_i khác không.* Lúc này, trong hệ phát sinh biến dạng uốn; do đó hệ bị mất ổn định. Điều kiện tồn tại các nghiệm X_i là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc (3.10) phải bằng không:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Các chuyển vị δ_{km} phụ thuộc lực P cho nên từ điều kiện (3.11) ta có thể tìm được giá trị của lực P , đó là lực tới hạn cần tìm. Điều kiện (3.11) được gọi là *phương trình ổn định theo phương pháp lực*.

Với cách giải bài toán như trên ta chưa tìm được giá trị của các ẩn X_i vì những ẩn này là vô định. Để tìm được sự phân bố nội lực và hình dạng đường biến dạng của hệ một cách định tính ta có thể quy ước gán cho một ẩn nào đó một giá trị bất kỳ, chẳng hạn bằng đơn vị, rồi xác định các ẩn khác theo hệ phương trình chính tắc (3.10).

Trong thực hành, phương pháp lực không được ưa dùng bằng phương pháp chuyển vị sẽ đề cập đến ở mục 3.3.

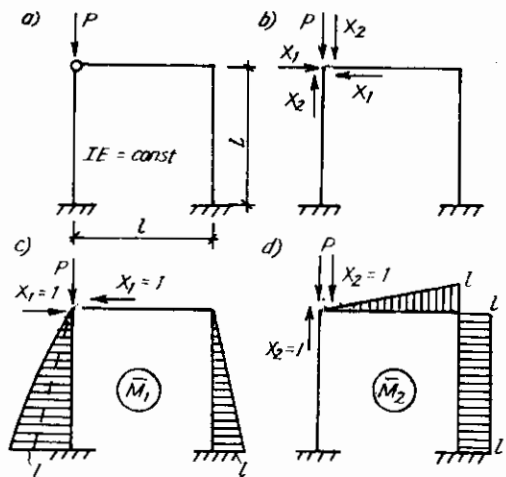
Ví dụ 3.1. Xác định giá trị tới hạn P_{th} cho hệ khung trên hình 3.6a.

Hệ cơ bản chọn như trên hình 3.6b.

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Để xác định δ_{11} ta cần vẽ biểu đồ mômen uốn do lực $X_1=1$ cùng với lực nén P gây ra trong hệ cơ bản (hình 3.6c) và biểu đồ mômen uốn do riêng lực $X_1=1$ gây ra trong hệ cơ bản; tiếp đó áp dụng công thức (3.1) hoặc áp dụng cách nhân biểu đồ.



Hình 3.6

Biểu đồ mômen uốn do riêng lực ngang $X_1 = 1$ gây ra có dạng đường đứt nét trên hình 3.6c.

Với thanh có lực nén P ta cần áp dụng công thức (3.8) trong đó thay: $M_B^0 = l$; $M_A = 0$; $a = 0$; $b = l$. Với các thanh khác, ta vẫn áp dụng cách nhân biểu đồ như đã quen biết. Kết quả:

$$EI\delta_{11} = \frac{l^3}{3} \theta_1(v) + \frac{l^3}{3} = \frac{l^3}{3} [1 + \theta_1(v)]; \quad \text{với:} \quad v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Sau khi vẽ biểu đồ mômen uốn do lực $X_2 = 1$ gây ra trong hệ cơ bản (hình 3.6d) ta dễ dàng tìm được các hệ số còn lại. Kết quả:

$$EI\delta_{22} = \frac{l^3}{3} + l^3 = \frac{4}{3} l^3; \quad EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{2} l^3.$$

$$\text{Phương trình ổn định: } D = \frac{l^3}{6EI} \begin{vmatrix} 2[1 + \theta_1(v)] & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{2l^3}{3EI} \{4[1 + \theta_1(v)] - 2,25\} = 0.$$

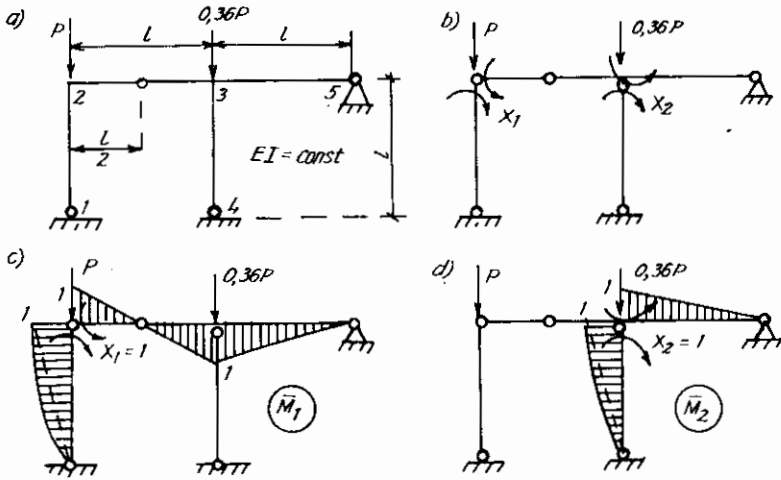
Suy ra: $\theta_1(v) = -0,4375$.

Sử dụng bảng 1 trong phụ lục, ta tìm được: $v = 2,79$.

Do đó: $P_{th} = v^2 EI / l^2 = 7,78 EI / l^2$.

Vi dụ 3.2. Xác định giá trị tới hạn P_{th} cho hệ khung trên hình 3.7a.

Hệ cơ bản chọn như trên hình 3.7b. Các biểu đồ mômen uốn do $X_1=1$ và $X_2=1$ cùng với lực nén P gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 3.7c, d.



Hình 3.7

Gọi $v = l\sqrt{P/EI}$. Với thanh chịu nén 1-2, ta có: $v_1 = l\sqrt{P/EI} = v$.

Với thanh chịu nén 3-4, ta có: $v_2 = l\sqrt{0,36P/EI} = 0,6v$.

Áp dụng cách nhân biểu đồ và công thức (3.5) ta tìm được các chuyển vị đơn vị:

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3}\alpha(v_1) + 2\frac{l}{3}; \quad EI\delta_{22} = \frac{l}{3}\alpha(v_2) + \frac{l}{3}; \quad EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{l}{3}.$$

Phương trình ổn định: $D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \frac{l}{3EI} \begin{vmatrix} 2 + \alpha(v_1) & -1 \\ -1 & 1 + \alpha(v_2) \end{vmatrix} = 0.$

Hay: $2\alpha(0,6v) + \alpha(v) + \alpha(v)\alpha(0,6v) + 1 = 0.$

Vận dụng cách thử dần kết hợp với bảng 1 trong phụ lục ta sẽ tìm được giá trị của thông số tới hạn: $v_{th} = 3,57$.

Do đó: $P_{th} = v^2 EI/l^2 = 12,74 EI/l^2.$

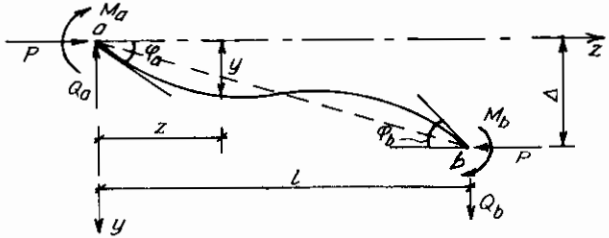
3.3. Cách tính ổn định của khung theo phương pháp chuyển vị

A. Phân lực và nội lực trong thanh thẳng chịu nén hoặc kéo khi liên kết chuyển vị cưỡng bức

Cũng tương tự như trong bài toán kiểm tra điều kiện bền, để chuẩn bị cho việc nghiên cứu phương pháp chuyển vị ta cần lập sẵn những kết quả về phân lực và nội

lực trong các phần tử mẫu là những thanh thẳng, tiết diện không đổi có liên kết khác nhau ở hai đầu khi liên kết chuyển vị cưỡng bức. Trong bài toán ổn định, các phần tử mẫu còn chịu lực nén hoặc kéo P và nhất thiết phải kể đến ảnh hưởng của P .

Trước khi đi vào các phần tử mẫu cụ thể, ta xét trường hợp tổng quát: thanh ab , tiết diện không đổi, có liên kết bất kỳ ở hai đầu, chịu lực nén P như trên hình 3.8.



Hình 3.8

• Giả thiết cho biết:

- φ_a và φ_b – góc xoay tại đầu a và đầu b của thanh với quy ước chiều dương là chiều quay thuận chiều kim đồng hồ;
- Δ – chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu a, b theo phương vuông góc với trục thanh, chiều dương quy định như trên hình 3.8.

Dưới tác dụng của lực nén P và các chuyển vị đã biết, thanh bị biến dạng như trên hình 3.8.

• Yêu cầu: tìm các đại lượng M_a, M_b, Q_a và Q_b tại các đầu thanh và trên cơ sở đó xác định nội lực trong thanh.

Từ các điều kiện cân bằng $\sum Y = 0$ và $\sum M_b = 0$ ta tìm được:

$$Q_a = Q_b = -\frac{1}{l} [M_a + M_b + P\Delta] = -\frac{1}{l} [M_a + M_b + \alpha^2 EI\Delta], \quad (3.12)$$

với: $\alpha^2 = P/EI$.

Vận dụng các phương trình (2.4), (2.5) và (2.6) với các thông số ban đầu $y(0) = 0$; $y'(0) = \varphi_a$; $M(0) = M_a$ và $Q(0) = Q_a$ xác định theo (3.12), ta có:

$$y(z) = \frac{\varphi_a}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M_a}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha z) + \left[M_a + M_b + \alpha^2 EI\Delta \right] \frac{(\alpha z - \sin \alpha z)}{\alpha^3 EI l};$$

$$y'(z) = \varphi_a \cos \alpha z - \frac{M_a}{\alpha EI} \sin \alpha z + \left[M_a + M_b + \alpha^2 EI\Delta \right] \frac{(1 - \cos \alpha z)}{\alpha^2 EI l};$$

$$M(z) = \alpha EI \varphi_a \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z - \left[M_a + M_b + \alpha^2 EI\Delta \right] \frac{\sin \alpha z}{\alpha l}.$$

Trong các phương trình trên, M_a và M_b là các đại lượng chưa biết, sẽ được xác định theo các điều kiện biên tại đầu b : khi $z = l$ ta có $y(l) = \Delta$ và $y'(l) = \varphi_b$.

$$y(l) = \frac{\varphi_a}{\alpha} \sin \alpha l - \frac{M_a}{\alpha^2 EI} (1 - \cos \alpha l) + \left[M_a + M_b + \alpha^2 EI\Delta \right] \frac{(\alpha l - \sin \alpha l)}{\alpha^3 EI l} = \Delta;$$

$$y'(l) = \varphi_a \cos \alpha l - \frac{M_a}{\alpha EI} \sin \alpha l + \left[M_a + M_b + \alpha^2 EI \Delta \right] \frac{(1 - \cos \alpha l)}{\alpha^2 EI l} = \varphi_b.$$

Giải hệ hai phương trình trên ta xác định được M_a và M_b theo các chuyển vị φ_a , φ_b và Δ ; tiếp đó tìm được $Q_a = Q_b$ theo (3.12). Kết quả:

$$M_a = 2i \left[\mu_1 \varphi_a + \mu_2 \varphi_b - (\mu_1 + \mu_2) \frac{\Delta}{l} \right]; \quad (3.13)$$

$$M_b = 2i \left[\mu_2 \varphi_a + \mu_1 \varphi_b - (\mu_1 + \mu_2) \frac{\Delta}{l} \right]; \quad (3.14)$$

$$Q_a = Q_b = -\frac{2i}{l} \left[(\mu_1 + \mu_2)(\varphi_a + \varphi_b) - \mu_3 \frac{\Delta}{l} \right], \quad (3.15)$$

trong đó: $i = \frac{EI}{l}; \quad v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EI}};$

$$\mu_1 = \frac{v}{2 \operatorname{tg} v} \times \frac{\operatorname{tg} v - v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}; \quad \mu_2 = \frac{v}{2 \sin v} \times \frac{v - \sin v}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v};$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{2} \times \frac{v^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}; \quad \mu_3 = \frac{1}{2} \times \frac{v^3}{2 \operatorname{tg} \frac{v}{2} - v}.$$

Trên cơ sở các biểu thức (3.13), (3.14), (3.15) ta dễ dàng tìm được phản lực tại hai đầu thanh cho các phân tử mẫu thường gặp khi tính ổn định của hệ thanh theo phương pháp chuyển vị. Kết quả cụ thể tương ứng với từng trường hợp được ghi trên bảng 3.1.

Chẳng hạn, với phân tử mẫu 1 trong bảng 3.1 là phân tử thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp, khi đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị ta thực hiện như sau:

- Các điều kiện đã biết ở đầu thanh: $\varphi_a = 1; \Delta = 0; M_b = 0$.
- Từ biểu thức (3.14) và các điều kiện đã biết ở trên ta tìm được: $\varphi_b = -\mu_2 / \mu_1$.
- Thay các kết quả tìm được vào biểu thức (3.13) và (3.15), ta được:

$$M_a = 3i \varphi_1(v); \quad Q_a = Q_b = -\frac{3i}{l} \varphi_1(v) \quad \text{với} \quad \varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}.$$

Cũng thực hiện tương tự như vậy đối với các trường hợp khác trong bảng 3.1.

Ngoài các dạng quen thuộc trong bài toán kiểm tra điều kiện bền (các trường hợp 1 ÷ 5 trong bảng 3.1), khi kiểm tra ổn định ta có thể gặp các dạng phân tử mẫu như trường hợp 6 và 7 trong bảng 3.1. Để có được các số liệu cho những trường hợp này ta thực hiện như sau:

Bảng 3.1

Thứ tự	Điều kiện đã biết	Sơ đồ, chuyển vị và dạng biểu đồ mômen uốn	M_a	M_b	$Q_a = Q_b$
1	$\varphi_a = 1$ $\Delta = 0$ $M_b = 0$		$3i \varphi_1(v)$	0	$-\frac{3i}{l} \varphi_1(v)$
2	$\varphi_a = 0$ $\Delta = 1$ $M_b = 0$		$-\frac{3i}{l} \varphi_1(v)$	0	$\frac{3i}{l^2} \eta_1(v)$
3	$\varphi_a = 1$ $\Delta = 0$ $\varphi_b = 0$		$4i \varphi_2(v)$	$2i \varphi_3(v)$	$-\frac{6i}{l} \eta_3(v)$
4	$\varphi_a = 0$ $\Delta = 1$ $\varphi_b = 0$		$-\frac{6i}{l} \varphi_4(v)$	$-\frac{6i}{l} \varphi_4(v)$	$\frac{12i}{l^2} \eta_2(v)$
5	$\varphi_a = 1$ $\varphi_b = 0$ $Q_a = Q_b = 0$		$i \frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$-i \frac{v}{\operatorname{sin} v}$	0

Bảng 3.1 (tiếp theo)

Thứ tự	Điều kiện đã biết	Sơ đồ, chuyển vị và dạng biểu đồ mômen uốn	M_a	M_b	$Q_a = Q_b$
6	$\varphi_a = 1$ $M_b = 0$ $Q_a = Q_b = 0$		$-i v \operatorname{tg} v$	0	0
7	$\Delta = 1$ $M_a = 0$ $M_b = 0$		0	0	$-\frac{i}{l^2} v^2$

Chú thích:

$$\bullet i = \frac{EI}{l}; \quad v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$\bullet \varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}$$

$$\varphi_4(v) = \varphi_1 \left(\frac{v}{2} \right); \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \eta_2(v) = \eta_1 \left(\frac{v}{2} \right); \quad \eta_3(v) = \varphi_4(v) = \varphi_1 \left(\frac{v}{2} \right)$$

Giá trị của các hàm $v / \operatorname{tg} v$; $v / \sin v$; $v \operatorname{tg} v$ cho trong bảng 1 của phụ lục.

Giá trị của các hàm φ và η cho trong bảng 2 của phụ lục. Khi $P = 0$; $v = 0$, các hàm này đều có giá trị bằng 1.

• Khi P là lực kéo, trong các kết quả cần thay:

$$\alpha = i \beta \text{ với } \beta = \sqrt{\frac{P}{EI}}; \quad \alpha^2 = -\beta^2; \quad \sin \alpha z = i \operatorname{sh} \beta z; \quad \cos \alpha z = \operatorname{ch} \beta z; \quad \operatorname{tg} \alpha z = i \operatorname{th} \beta z.$$

❖ Thanh chịu nên có một đầu ngàm, một đầu tự do, đầu ngàm chuyển vị xoay cưỡng bức bằng đơn vị (trường hợp 6, bảng 3.1):

• Các điều kiện đã biết ở đầu thanh: $\varphi_a = 1$; $M_b = 0$; $Q_a = Q_b = 0$.

• Từ (3.12) và phương trình $y(z)$ ta lập các điều kiện $Q_a = Q_b = 0$ và $y(l) = \Delta$ sẽ tìm được: $\Delta = l \operatorname{tg} v / v$.

• Xác định M_a theo Δ : $M_a = -P\Delta = -\frac{v^2 EI}{l^2} \times \frac{l \operatorname{tg} v}{v} = -i v \operatorname{tg} v$.

3. Cách xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

Khi kiểm tra độ bền, các hệ số r_{km} không phụ thuộc tải trọng nhưng khi kiểm tra ổn định thì r_{km} phụ thuộc lực nén hoặc kéo trong các thanh. Đó là điều khác nhau cần lưu ý.

Về ý nghĩa vật lý, hệ số r_{km} là phản lực đơn vị tại liên kết k đặt thêm vào hệ do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m đặt thêm vào hệ và do các lực nén hoặc kéo gây ra trong hệ cơ bản. Do đó, để xác định các r_{km} ta cần vẽ biểu đồ (\bar{M}_m) do chuyển vị cưỡng bức $Z_m = 1$ tại liên kết m và do các lực nén hoặc kéo gây ra trong hệ cơ bản; tiếp đó áp dụng phương pháp tách nút hoặc mặt cắt để tìm phản lực trong liên kết k .

Ngoài ra, cần lưu ý là định lý tương hỗ về phản lực đơn vị: $r_{km} = r_{mk}$ vẫn được nghiệm đúng trong bài toán ổn định.

4. Phương trình ổn định

Hệ phương trình thuần nhất (3.16) được thỏa mãn với hai khả năng:

❖ *Tất cả các ẩn Z_i đều bằng không.* Lúc này, các nút trong hệ không chuyển vị; do đó hệ vẫn ở trạng thái cân bằng ban đầu. Như vậy, hệ ổn định, tải trọng chưa đạt đến giá trị tới hạn.

❖ *Tất cả hoặc một số ẩn Z_i khác không.* Lúc này, các nút trong hệ có phát sinh chuyển vị; do đó hệ có dạng biến dạng mới khác với dạng ban đầu tức là hệ bị mất ổn định. Điều kiện tồn tại các nghiệm Z_i là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc (3.16) phải bằng không:

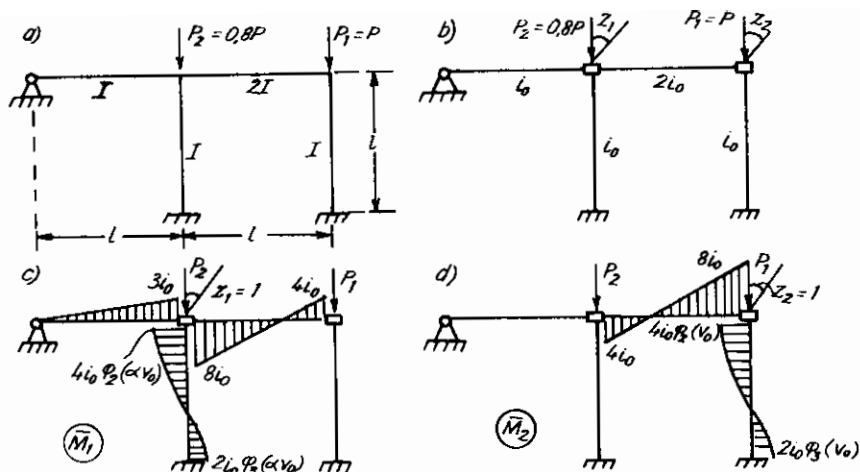
$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

Các hệ số r_{km} phụ thuộc lực nén hoặc kéo P cho nên từ điều kiện (3.17) ta có thể tìm được giá trị của lực P , đó là lực tới hạn cần tìm. Điều kiện (3.17) được gọi là *phương trình ổn định theo phương pháp chuyển vị*.

Với cách giải bài toán như trên ta chưa tìm được giá trị của các ẩn Z_i vì những ẩn này là vô định. Để tìm được dạng biến dạng của hệ một cách định tính ta có thể quy ước gán cho một ẩn nào đó một giá trị bất kỳ, chẳng hạn bằng đơn vị, rồi xác định các ẩn khác theo hệ phương trình chính tắc (3.16).

Ví dụ 3.3. Xác định lực tới hạn cho hệ khung trên hình 3.10a.

Hệ có hai ẩn, hệ cơ bản như trên hình 3.10b. Trên hình có ghi độ cứng đơn vị của các thanh theo $i_0 = EI/l$.



Hình 3.10

Thông số v trong các thanh chịu nén:

- Thanh đứng bên phải: $v_1 = l\sqrt{P_1/EI} = l\sqrt{P/EI} = v_0$.
- Thanh đứng bên trái: $v_2 = l\sqrt{P_2/EI} = l\sqrt{0,8P/EI} = \sqrt{0,8} v_0 = \alpha v_0$.

Phương trình ổn định:
$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Các biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 3.10c, d. Áp dụng phương pháp tách nút hoặc mặt cắt, ta xác định được:

$$r_{11} = 4i_0 \varphi_2(\alpha v_0) + 3i_0 + 8i_0 = i_0 [4\varphi_2(\alpha v_0) + 11];$$

$$r_{12} = r_{21} = 4i_0; \quad r_{22} = 4i_0 \varphi_2(v_0) + 8i_0 = 4i_0 [\varphi_2(v_0) + 2].$$

Phương trình ổn định trong trường hợp này sẽ là:

$$4i_0^2 [4\varphi_2(\alpha v_0) + 11] [\varphi_2(v_0) + 2] - 16i_0^2 = 0.$$

Hãy:
$$\varphi_2(v_0) \cdot \varphi_2(\alpha v_0) + 2\varphi_2(\alpha v_0) + 2,75\varphi_2(v_0) + 4,5 = 0. \quad (a)$$

Có thể giải phương trình siêu việt này bằng cách thử dần. Để giảm nhẹ việc tìm nghiệm, trước tiên ta hãy xác định phạm vi có thể xảy ra nghiệm v_0 của phương trình. Vì v_0 tỷ lệ thuận với tải trọng tới hạn và xuất phát từ ý nghĩa vật lý của bài toán là giá trị tải trọng tới hạn cần tìm phải nằm trong khoảng giữa hai trường hợp: khi hai lực $P_1 = P_2$ cùng bằng P và khi hai lực $P_1 = P_2$ cùng bằng $0,8P$. Do đó, ta có thể tìm cận dưới v' và cận trên v'' của nghiệm v_0 từ phương trình (a) như sau:

- Khi $P_1 = P_2 = P$ tức là $v_1 = v_2 = v'$; phương trình (a) có dạng:

$$\varphi_2^2(v') + 4,75\varphi_2(v') + 4,5 = 0. \quad (b)$$

Nghiệm nhỏ nhất của (b): $\varphi_2(v') = -1,307$; suy ra: $v' = 5,46$.

- Khi $P_1 = P_2 = 0,8P$ tức là $v_1 = v_2 = \alpha v''$ với $\alpha = \sqrt{0,8} = 0,89443$; phương trình (a) có dạng:

$$\varphi_2^2(\alpha v'') + 4,75\varphi_2(\alpha v'') + 4,5 = 0. \quad (c)$$

Nghiệm nhỏ nhất của (c): $\varphi_2(\alpha v'') = -1,307$; suy ra: $\alpha v'' = 5,46$ và $v'' = 6,10$.

Như vậy, nghiệm v_0 cần tìm nằm trong khoảng: $5,46 < v_0 < 6,10$.

Nếu gọi: $\Delta = \varphi_2(v_0) \cdot \varphi_2(\alpha v_0) + 2\varphi_2(\alpha v_0) + 2,75\varphi_2(v_0) + 4,5$ (d)

thì: • khi $v_0 = 5,46$ ta có: $\Delta > 0$; • khi $v_0 = 6,10$ ta có: $\Delta < 0$.

Trong lần thử thứ nhất, ta chọn $v_0 = 5,8$. Sử dụng bảng 2 trong phụ lục ta tìm được giá trị của biểu thức (d):

$$\Delta = \varphi_2(5,8) \cdot \varphi_2(0,89443 \cdot 5,8) + 2\varphi_2(0,89443 \cdot 5,8) + 2,75\varphi_2(5,8) + 4,5 = -2,54.$$

Do đó, phạm vi xảy ra nghiệm v_0 của phương trình (a) được thu hẹp như sau:

$$5,46 < v_0 < 5,8.$$

Tiếp tục thu hẹp dần phạm vi qua các lần thử tương tự, cuối cùng ta được:

$$v_0 = 5,56; \text{ suy ra: } P_{th} = v_0^2 EI / l^2 = 30,9 EI / l^2.$$

Ví dụ 3.4. Xác định lực tới hạn cho hệ khung trên hình 3.11a.

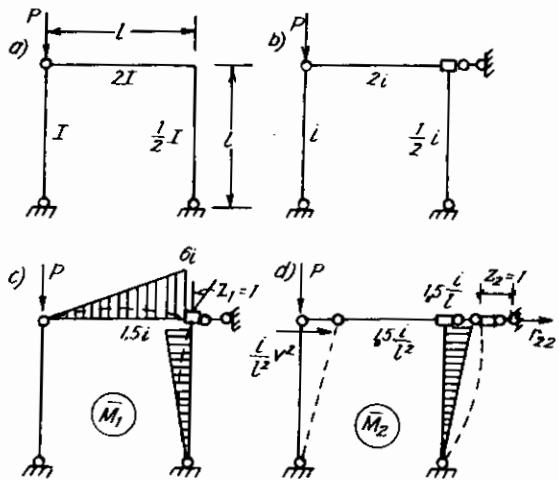
Hệ có hai ẩn, hệ cơ bản như trên hình 3.11b. Trên hình ghi độ cứng đơn vị của các thanh theo $i_0 = EI/l$.

Thông số v trong thanh chịu nén:

$$v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$



Hình 3.11

Các biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 3.11c, d. Áp dụng phương pháp tách nút, ta tìm được:

$$r_{11} = 7,5i; \quad r_{12} = r_{21} = -1,5i/l.$$

Để xác định r_{22} ta vận dụng phương pháp mặt cắt và tìm lực cắt trong thanh chịu nén theo số liệu ở hàng thứ 7 của bảng 3.1. Kết quả:

$$r_{22} = \frac{i}{l^2} (1,5 - v^2).$$

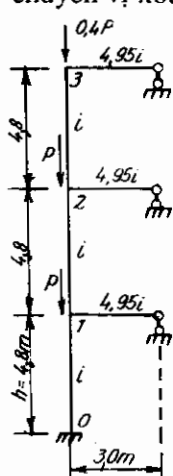
Phương trình ổn định trong trường hợp này sẽ là:

$$\frac{i^2}{l^2} [7,5(1,5 - v^2) - 1,5^2] = 0. \text{ Hay: } 7,5 v^2 - 9 = 0.$$

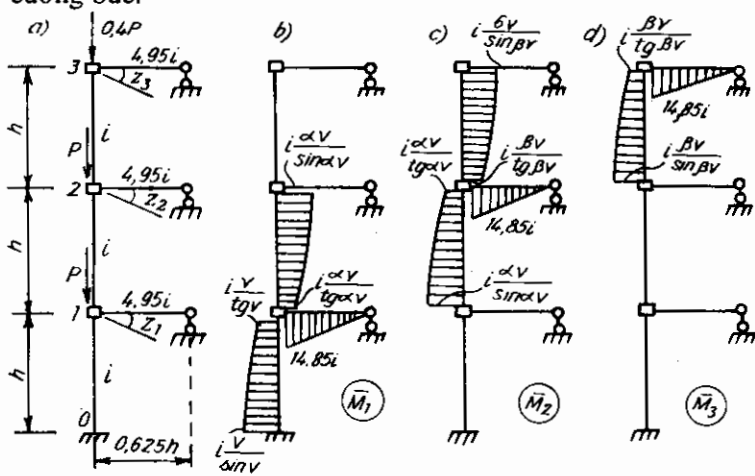
Suy ra: $v^2 = 1,2$; và $P_{th} = v^2 EI / l^2 = 1,2 EI / l^2$.

Ví dụ 3.5. Cho hệ khung như trên hình 3.12, xác định giá trị tới hạn của P .

Hệ có 6 ẩn gồm 3 chuyển vị xoay và 3 chuyển vị thẳng tại các nút 1, 2, 3. Tuy nhiên, trong trường hợp này ta có thể lập hệ cơ bản với 3 ẩn là 3 chuyển vị xoay tại các nút 1, 2, 3 như trên hình 3.13a. Thật vậy, điều quan trọng khi quyết định số ẩn và lập hệ cơ bản tương ứng là trong hệ cơ bản chỉ tồn tại các phần tử đã được nghiên cứu trước để có thể dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn trong hệ. Với hệ cơ bản trên hình 3.13a, khi một nút có chuyển vị xoay cưỡng bức: thanh ngang làm việc như phần tử thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp (đã quen biết); thanh đứng sẽ làm việc như phần tử thanh có đầu ngàm, một đầu ngàm trượt tự do theo phương ngang tương ứng với số liệu 5 trong bảng 3.1. Như vậy ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản trên hình 3.13a khi nút chuyển vị xoay cưỡng bức.



Hình 3.12



Hình 3.13

Xác định lực nén và thông số v trong các thanh chịu nén:

- Thanh 0-1: $P_1 = 2,4P$; $v_1 = h\sqrt{P_1/EI} = h\sqrt{2,4P/EI} = v$;
- Thanh 1-2: $P_2 = 1,4P$; $v_2 = h\sqrt{P_2/EI} = h\sqrt{1,4P/EI} = 0,763 v = \alpha v$.
- Thanh 2-3: $P_3 = 0,4P$; $v_3 = h\sqrt{P_3/EI} = h\sqrt{0,4P/EI} = 0,408 v = \beta v$.

Các biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 3.13b, c, d. Từ các biểu đồ ta xác định được:

$$r_{11} = i \left[\frac{v}{\operatorname{tg} v} + \frac{\alpha v}{\operatorname{tg} \alpha v} + 14,85 \right]; \quad r_{22} = i \left[\frac{\alpha v}{\operatorname{tg} \alpha v} + \frac{\beta v}{\operatorname{tg} \beta v} + 14,85 \right];$$

$$r_{33} = i \left[\frac{\beta v}{\operatorname{tg} \beta v} + 14,85 \right]; \quad r_{12} = r_{21} = -i \frac{\alpha v}{\sin \alpha v};$$

$$r_{13} = r_{31} = 0; \quad r_{23} = r_{32} = -i \frac{\beta v}{\sin \beta v};$$

Phương trình ổn định:
$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = -\frac{r_{12}^2}{r_{11}} + r_{22} - \frac{r_{23}^2}{r_{33}} = 0.$$

Thay giá trị các phản lực đơn vị vào phương trình trên, ta được:

$$\frac{\left(\frac{\alpha v}{\sin \alpha v} \right)^2}{\left(\frac{v}{\operatorname{tg} v} + \frac{\alpha v}{\operatorname{tg} \alpha v} + 14,85 \right)} + \frac{\alpha v}{\operatorname{tg} \alpha v} + \frac{\beta v}{\operatorname{tg} \beta v} + 14,85 - \frac{\left(\frac{\beta v}{\sin \beta v} \right)^2}{\left(\frac{\beta v}{\operatorname{tg} \beta v} + 14,85 \right)} = 0.$$

Sau khi giải phương trình theo phương pháp thử dần kết hợp với bảng 1 trong phụ lục ta tìm được giá trị tới hạn của thông số $v = 2,85$. Suy ra:

$$P_{th} = v^2 \frac{EI}{2,4h^2} = 3,38 \frac{EI}{h^2}.$$

3.4. Cách sử dụng tính đối xứng khi tính ổn định của hệ thanh

Khi tính ổn định ta chỉ có thể sử dụng tính đối xứng trong trường hợp hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng.

Trong bài toán kiểm tra độ bền, hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng chỉ có thể biến dạng đối xứng.

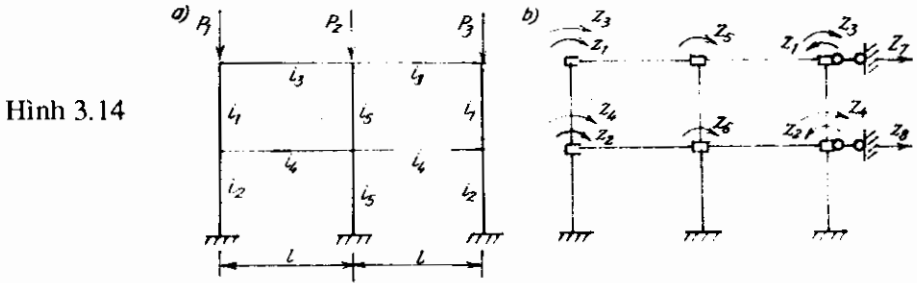
Trong bài toán kiểm tra ổn định, hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng vừa có thể mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng vừa có thể mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng.

Ta sẽ chứng minh tính chất sau:

Hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng có thể mất ổn định theo một trong hai dạng: dạng biến dạng đối xứng hoặc dạng biến dạng phản xứng.

Để xác nhận điều đó ta chỉ cần chứng minh: định thức D biểu thị điều kiện ổn định của hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng bằng tích của hai định

thức: một định thức chỉ chứa các hệ số thuộc nhóm các ẩn đối xứng còn một định thức chỉ chứa các hệ số thuộc nhóm các ẩn phản xứng. Có thể thực hiện điều này theo phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị như sẽ trình bày dưới đây.



Giả sử theo phương pháp chuyển vị hệ có n ẩn (n – chẵn hoặc lẻ), trong đó có:

- ◆ m số ẩn chuyển vị xoay tại các nút nằm trên trục đối xứng (các ẩn Z_5, Z_6 trên hình 3.14) hoặc các chuyển vị thẳng (các ẩn Z_7, Z_8 trên hình 3.14). Đó là những *ẩn phản xứng*, khi hệ biến dạng phản xứng thì những ẩn này tồn tại còn khi hệ biến dạng đối xứng thì những ẩn này bằng không.
- ◆ $(n-m)$ là số ẩn còn lại, những ẩn này có vị trí đối xứng với nhau từng đôi một. Phân tích $(n-m)$ ẩn này thành các cặp ẩn, bao gồm hai nhóm:
 - $(n-m)/2$ cặp ẩn đối xứng, ví dụ các cặp ẩn Z_1, Z_2 trên hình 3.14b;
 - $(n-m)/2$ cặp ẩn phản xứng, ví dụ các cặp ẩn Z_3, Z_4 trên hình 3.14b.

Như vậy, trong hệ sẽ có:

- ❖ $k = (n-m)/2$ cặp ẩn đối xứng, đánh số thứ tự từ 1, 2, ... đến k ;
- ❖ $n-k = (n-m)/2 + m = (n+m)/2$ cặp ẩn phản xứng, đánh số thứ tự từ $k+1, k+2, \dots$ đến n .

Phương trình ổn định có dạng:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & r_{1(k+1)} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & r_{2(k+1)} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} & r_{k(k+1)} & \dots & r_{kn} \\ r_{(k+1)1} & r_{(k+1)2} & \dots & r_{(k+1)k} & r_{(k+1)(k+1)} & \dots & r_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nk} & r_{n(k+1)} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.18)$$

Như đã biết, các phản lực đối xứng do chuyển vị phản xứng và các phản lực phản xứng do chuyển vị đối xứng gây ra đều bằng không nên các phần tử trong định thức (3.18) sẽ có giá trị như sau:

❖ $r_{pq} = r_{qp} = 0$ khi $p \leq k; q > k$.

❖ $r_{pq} = r_{qp} \neq 0$ khi $p \leq k; q \leq k$ và khi $p > k; q > k$.

Do đó, định thức (3.18) sẽ có dạng:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{(k+1)(k+1)} & \dots & r_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n(k+1)} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{dx} & 0 \\ 0 & D_{px} \end{vmatrix} = D_{dx} \cdot D_{px} = 0,$$

trong đó:

D_{dx} – định thức chỉ chứa các phần lục đơn vị đối xứng do các ẩn đối xứng gây ra;

D_{px} – định thức chỉ chứa các phần lục đơn vị phản xứng do các ẩn phản xứng gây ra.

Như vậy, hệ sẽ mất ổn định khi một trong hai điều kiện sau đây xảy ra:

◆ $D_{dx} = 0$ tương ứng với dạng biến dạng đối xứng;

◆ $D_{px} = 0$ tương ứng với dạng biến dạng phản xứng.

Đó là điều cần chứng minh.

Căn cứ vào tính chất trên, khi tính ổn định của hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng ta được phép khảo sát hệ với hai trường hợp tách biệt: hệ mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng và hệ mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng. Với mỗi trường hợp nên vận dụng phép đơn giản hóa tương ứng đã biết trong Cơ học kết cấu. Tất nhiên, lực tới hạn cần tìm của hệ đã cho là lực nhỏ nhất tìm được tương ứng với hai trường hợp nêu trên. Với cách làm như vậy, khối lượng tính toán sẽ giảm nhẹ khá nhiều bởi vì khai triển hai định thức có cấp thấp nhẹ nhàng hơn nhiều so với khai triển một định thức có cấp bằng tổng số cấp của hai định thức trên.

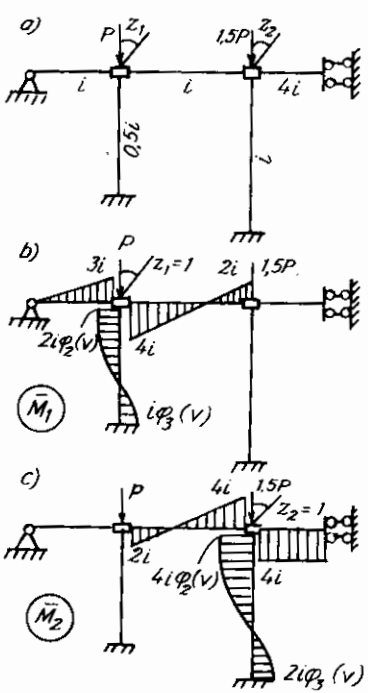
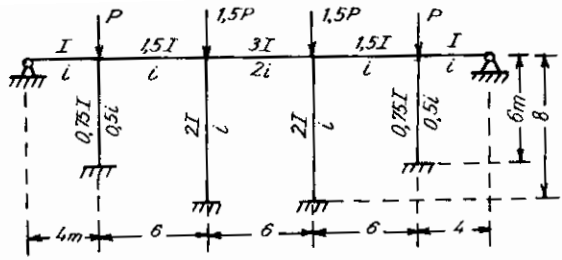
Ví dụ 3.6. Xác định lực tới hạn cho hệ khung đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên hình 3.15. Độ cứng đơn vị của các thanh tính theo i với $i = EI/4$.

Xác định thông số ν trong các thanh chịu nén:

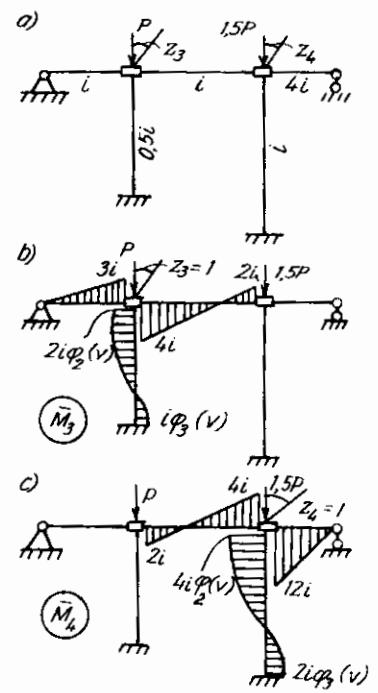
• hai thanh đứng ngoài biên: $\nu_1 = 6 \sqrt{\frac{P}{0,75EI}} = \sqrt{\frac{48P}{EI}} = \nu;$

• hai thanh đứng bên trong: $\nu_2 = 8 \sqrt{\frac{1,5P}{2EI}} = \sqrt{\frac{48P}{EI}} = \nu.$

Hình 3.15



Hình 3.16



Hình 3.17

♦ Giả thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng: hệ cơ bản lập cho sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.16a. Bài toán có hai ẩn. Các biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 3.16b, c. Áp dụng phương pháp tách nút, ta xác định được:

$$r_{11} = 3i + 4i + 2i \varphi_2(v) = i [7 + 2\varphi_2(v)]; \quad r_{12} = r_{21} = 2i ;$$

$$r_{22} = 4i + 4i + 4i \varphi_2(v) = i [8 + 4\varphi_2(v)].$$

Phương trình ổn định:
$$D = \begin{vmatrix} 7 + 2\varphi_2(v) & 2 \\ 2 & 8 + 4\varphi_2(v) \end{vmatrix} i = 0.$$

Hay:
$$2 \varphi_2^2(v) + 11 \varphi_2(v) + 13 = 0.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình ổn định: $\varphi_2(v) = -1,72$.

Suy ra: $v = 5,59$; và $P_{1,th} = v^2 \frac{EI}{48} = 0,651 EI$.

♦ *Giả thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng*: hệ cơ bản lập cho sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.17a. Bài toán có hai ẩn. Các biểu đồ mômen uốn đơn vị như trên hình 3.17b, c. Áp dụng phương pháp tách nút, ta xác định được:

$$r_{33} = 3i + 4i + 2i \varphi_2(v) = i [7 + 2\varphi_2(v)]; \quad r_{34} = r_{43} = 2i ;$$

$$r_{44} = 4i + 12i + 4i \varphi_2(v) = i [16 + 4\varphi_2(v)].$$

Phương trình ổn định: $D = \begin{vmatrix} 7 + 2\varphi_2(v) & 2 \\ 2 & 16 + 4\varphi_2(v) \end{vmatrix} i = 0$.

Hay: $2 \varphi_2^2(v) + 15 \varphi_2(v) + 27 = 0$.

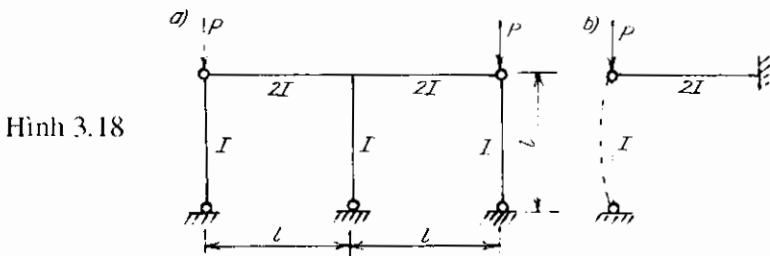
Nghiệm nhỏ nhất của phương trình ổn định: $\varphi_2(v) = -3,00$.

Suy ra: $v = 5,83$; và $P_{2,th} = v^2 \frac{EI}{48} = 0,708 EI$.

So sánh hai kết quả vừa tìm được ta thấy: $P_{1,th} < P_{2,th}$. Như vậy, hệ đã cho sẽ mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng với lực tới hạn $P_{th} = 0,651 EI$.

Ví dụ 3.7. Xác định lực tới hạn cho hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên hình 3.18a.

♦ *Giả thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng*: sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.18b. Hệ bị mất ổn định khi thanh có khớp ở hai đầu bị mất ổn định. Do đó: $P_{1,th} = \pi^2 EI / l^2$.



Hình 3.18

♦ *Giả thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng*: sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.11a. Bài toán này đã được khảo sát trong ví dụ 3.4, kết quả:

$$P_{2,th} = 1,2 EI / l^2$$

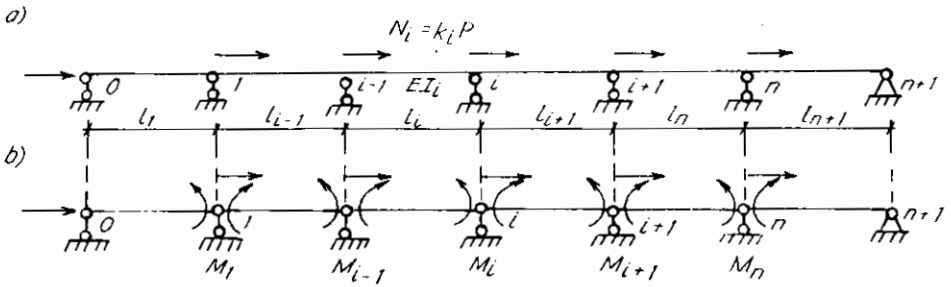
So sánh hai kết quả tìm được ta thấy: $P_{2,th} < P_{1,th}$. Như vậy, hệ đã cho sẽ mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng với lực tới hạn $P_{th} = 1,2 EI / l^2$.

3.5. Ổn định của dầm liên tục trên các gối cứng

Bài toán ổn định của dầm liên tục trên các gối cứng đã được nghiên cứu khá đầy đủ theo nhiều phương pháp khác nhau. Trong giáo trình này chỉ đề cập đến cách tính dầm liên tục chịu các lực dọc trục theo hai phương pháp cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị.

A. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp lực

Xét dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng đoạn nhịp và chịu các lực dọc trục đặt tại các gối tựa như trên hình 3.19a. Lực dọc trục trong nhịp thứ i được biểu thị theo một thông số cần tìm P qua hệ số k_i đã biết như sau: $N_i = k_i P$.



Hình 3.19

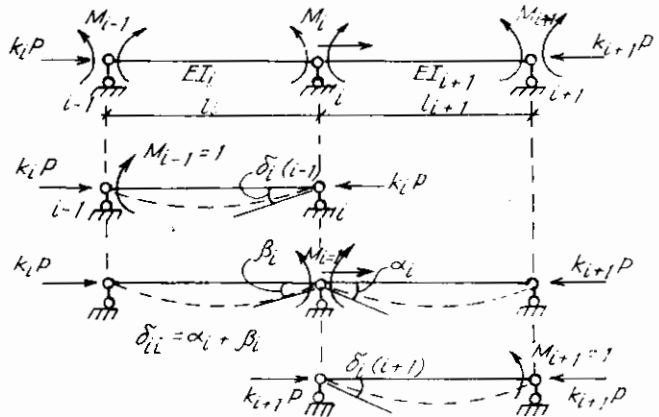
Tương tự như khi kiểm tra điều kiện bền, nếu chọn hệ cơ bản như trên hình 3.19b thì phương trình chính tắc viết cho gối tựa thứ i sẽ chỉ có ba số hạng:

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} = 0, \quad (3.19)$$

$\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$ – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các mô men đơn vị M_{i-1} , M_i và M_{i+1} gây ra trong hệ cơ bản.

Các hệ số này được xác định theo các trạng thái đơn vị như trên hình 3.20. Các dầm đơn giản chịu tải trọng như trên hình 3.20 đã được nghiên cứu trong mục 3.2.

Áp dụng công thức (3.5) cho các trường hợp này, ta sẽ tìm được:



Hình 3.20

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EI_i} \alpha(v_i) + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \alpha(v_{i+1});$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EI_i} \beta(v_i); \quad \delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \beta(v_{i+1}),$$

trong đó: $\alpha(v_i) = \frac{3}{v_i^2} \left(1 - \frac{v_i}{\operatorname{tg} v_i} \right); \quad \beta(v_i) = \frac{6}{v_i^2} \left(\frac{v_i}{\sin v_i} - 1 \right),$ với $v_i = l_i \sqrt{\frac{k_i P}{EI_i}}.$

$\alpha(v_i), \beta(v_i)$ là các hàm điều chỉnh kể đến ảnh hưởng của lực nén P . Có thể tìm giá trị của các hàm này theo các đối số v_i trong bảng 1 của phụ lục.

Thay các hệ số vừa tìm được vào phương trình chính tắc (3.19) ta được phương trình ba mômen để tính ổn định cho dầm liên tục chịu các lực dọc trục:

$$\lambda_i \beta(v_i) M_{i-1} + 2[\lambda_i \alpha(v_i) + \lambda_{i+1} \alpha(v_{i+1})] M_i + \lambda_{i+1} \beta(v_{i+1}) M_{i+1} = 0. \quad (3.20)$$

trong đó: $\lambda_i = l_i \frac{I_0}{I_i}, \quad (3.21)$

với I_0 là hằng số bất kỳ thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó trong dầm. λ_i được gọi là chiều dài quy ước của nhịp i .

Như vậy, khi tính ổn định của dầm liên tục chịu các lực dọc trục theo phương pháp lực ta cần thực hiện các bước sau:

- ◆ Xác định chiều dài quy ước λ_i theo (3.21).
- ◆ Xác định các thông số v_i . Trong trường hợp các nhịp có thông số v_i khác nhau ta cần biểu thị theo một thông số chung v_k tự chọn. Ví dụ, nếu chọn v_k là thông số của nhịp thứ k :

$$v_k = l_k \sqrt{\frac{k_k P}{EI_k}} \text{ thì } v_i = l_i \sqrt{\frac{k_i P}{EI_i}} = \frac{l_i}{l_k} \sqrt{\frac{k_i I_k}{k_k I_i}} \times l_k \sqrt{\frac{k_k P}{EI_k}} = \alpha_i v_k \text{ với } \alpha_i = \frac{l_i}{l_k} \sqrt{\frac{k_i I_k}{k_k I_i}}.$$

- ◆ Lập các phương trình ba mômen theo (3.20). Với dầm có n gối tựa trung gian ta sẽ lập được hệ n phương trình thuần nhất.
- ◆ Lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức các hệ số của hệ n phương trình thuần nhất bằng không.
- ◆ Giải phương trình ổn định để tìm thông số v_k , từ đó suy ra giá trị tới hạn của lực P .

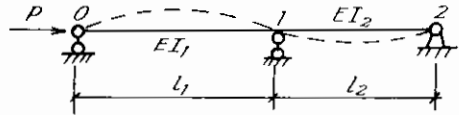
Chú ý:

- ❖ Giá trị tới hạn của lực P tìm được theo cách trình bày ở trên tương ứng với khi dầm bị mất ổn định thì mômen uốn tại các tiết diện trên gối tựa trung gian khác không. Trong bài toán dầm liên tục,

ngoài nghiệm nêu ở trên ta còn phải tìm nghiệm tương ứng với khi dầm bị mất ổn định với mômen uốn tại các tiết diện trên gối tựa trung gian đều bằng không nếu về ý nghĩa vật lý có thể xảy ra trường hợp này (xem ví dụ 3.9).

- ❖ Phương trình ba mômen (3.20) thiết lập cho trường hợp dầm liên tục đơn giản (hai liên kết biên là khớp). Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa hoặc đầu ngàm hay ngàm trượt, ta cần thực hiện cách biến đổi như đã trình bày trong Cơ học kết cấu, đưa dầm về dầm liên tục đơn giản để áp dụng phương trình (3.20).

Ví dụ 3.8. Lập phương trình ổn định cho dầm liên tục hai nhịp chịu lực nén P như trên hình 3.21. Khảo sát sự biến thiên của lực tới hạn theo tỷ số chiều dài của hai nhịp khi $EI = const$.



Hình 3.21

- Xác định chiều dài quy ước λ_i : Chọn $l_0 = l_1$ và gọi: $n = l_2/l_1$; $k = I_1/I_2$ ta có:

$$\lambda_1 = l_1; \quad \lambda_2 = k l_2.$$

- Xác định các thông số v_i : $v_1 = l_1 \sqrt{P/EI_1}$; $v_2 = n\sqrt{k} v_1$.

- Theo (3.20), phương trình ba mômen có dạng: $2[l_1 \alpha(v_1) + l_2 k \alpha(v_2)] M_1 = 0$.

- Phương trình ổn định: $\alpha(v_1) = -n.k.\alpha(v_2)$.

Nếu biết các tỷ số n và k , sau khi giải phương trình ổn định trên ta sẽ tìm được v_1 và từ đó suy ra lực tới hạn cần tìm.

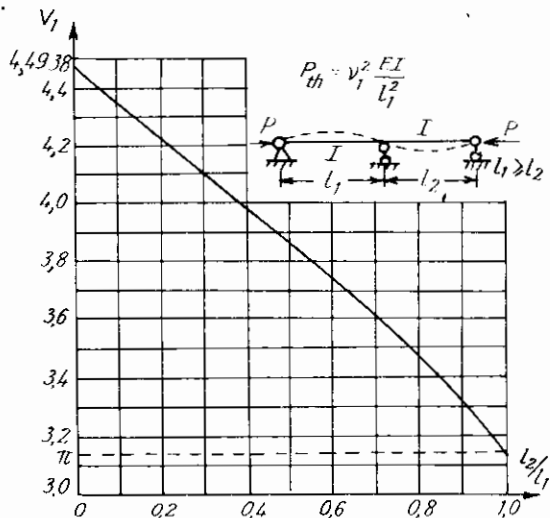
- Phương trình ổn định khi $EI = const$:

$$\alpha(v_1) = -n.\alpha(n.v_1).$$

- Tương ứng với mỗi tỷ số n , giải phương trình ổn định sẽ tìm được thông số v_1 , tiếp đó suy ra lực tới hạn theo công thức:

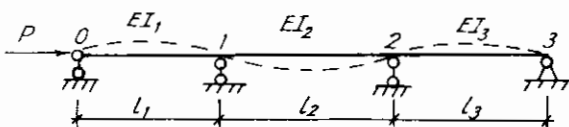
$$P_{th} = v_1^2 \frac{EI}{l_1^2}.$$

Trên hình 3.22 là đồ thị mô tả sự biến thiên của thông số v_1 theo các tỷ số chiều dài nhịp $n = l_2/l_1$.



Hình 3.22

Ví dụ 3.9. Lập phương trình ổn định cho dầm liên tục ba nhịp chịu lực nén P như trên hình 3.23. Tìm lực tối hạn khi $l_1 = l_2 = l_3 = l$ và $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI$.



Hình 3.23

- Theo (3.20), phương trình ba mômen viết cho gối 1 và gối 2 có dạng:

$$2[\lambda_1 \alpha(v_1) + \lambda_2 \alpha(v_2)] M_1 + \lambda_2 \beta(v_2) M_2 = 0.$$

$$\lambda_2 \beta(v_2) M_1 + 2[\lambda_2 \alpha(v_2) + \lambda_3 \alpha(v_3)] M_2 = 0.$$

- Phương trình ổn định: $D = \begin{vmatrix} 2[\lambda_1 \alpha(v_1) + \lambda_2 \alpha(v_2)] & \lambda_2 \beta(v_2) \\ \lambda_2 \beta(v_2) & 2[\lambda_2 \alpha(v_2) + \lambda_3 \alpha(v_3)] \end{vmatrix} = 0$

Chọn $l_0 = l_1$ và gọi: $n_2 = l_2/l_1$; $n_3 = l_3/l_1$; $k_2 = l_1/l_2$; $k_3 = l_1/l_3$ ta có:

$$\lambda_1 = l_1; \quad \lambda_2 = k_2 l_2 = k_2 n_2 l_1; \quad \lambda_3 = k_3 l_3 = k_3 n_3 l_1.$$

Sau khi khai triển định thức, ta được:

$$4[\alpha(v_1) + k_2 n_2 \alpha(v_2)] [k_2 n_2 \alpha(v_2) + k_3 n_3 \alpha(v_3)] - (k_2 n_2)^2 \beta^2(v_2) = 0.$$

trong đó: $v_1 = l_1 \sqrt{P/EI_1}$; $v_2 = n_2 \sqrt{k_2} v_1$; $v_3 = n_3 \sqrt{k_3} v_1$;

Nếu biết các tỷ số n và k , sau khi giải phương trình ổn định trên ta sẽ tìm được v_1 và từ đó suy ra lực tối hạn cần tìm.

- Khi $l_1 = l_2 = l_3 = l$ và $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI$: trong trường hợp này ta có: $n_2 = n_3 = 1$; $k_2 = k_3 = 1$; $v_1 = v_2 = v_3 = v$. Phương trình ổn định sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

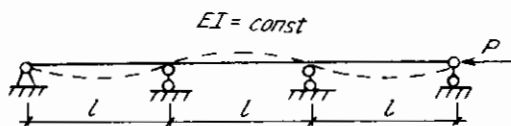
$$[4\alpha(v) + \beta(v)] [4\alpha(v) - \beta(v)] = 0 \quad \text{với} \quad v = l \sqrt{P/EI}.$$

Phương trình này thỏa mãn với hai khả năng sau:

- $4\alpha(v) + \beta(v) = 0$; nghiệm nhỏ nhất $v = 5,14$ tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng.
- $4\alpha(v) - \beta(v) = 0$; nghiệm nhỏ nhất $v = 3,88$ tương ứng với dạng mất ổn định phản xứng.

Hai nghiệm vừa tìm được xảy ra tương ứng với khi M_1 và M_2 khác không.

Về ý nghĩa vật lý, dầm cũng có thể mất ổn định tương ứng với khi $M_1 = M_2 = 0$. Lúc này đường biến dạng sẽ có dạng đường đứt nét như trên hình 3.24.



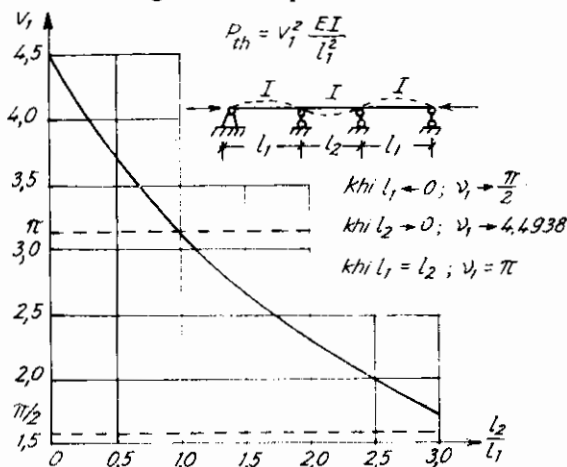
Hình 3.24

Mỗi nhịp dầm làm việc như một thanh đơn giản có khớp ở hai đầu nên: $v = \pi$.

So sánh ba kết quả tìm được ta thấy kết quả thứ ba tương ứng với $v = \pi$ là nhỏ nhất nên:

$$P_{th} = v^2 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

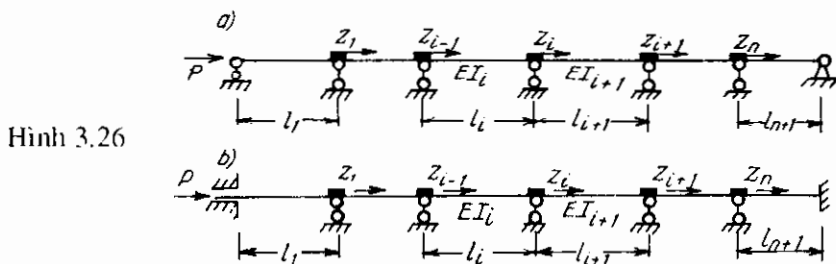
Trên hình 3.25 là đồ thị mô tả sự biến thiên của thông số v_l theo các tỷ số chiều dài nhịp $n = l_2/l_1$ khi dầm liên tục có ba nhịp với $l_1 = l_3$ và độ cứng $EI = const$.



Hình 3.25

B. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp chuyển vị

Xét dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng đoạn nhịp và chịu các lực dọc trục đặt tại các gối tựa như trên hình 3.19a. Lực dọc trục trong nhịp thứ i được biểu thị theo một thông số cần tìm P qua các hệ số k_i đã biết như sau $N_i = k_i P_i$. Khi tính hệ theo phương pháp chuyển vị ta lập hệ cơ bản như trên hình 3.26a.



Hình 3.26

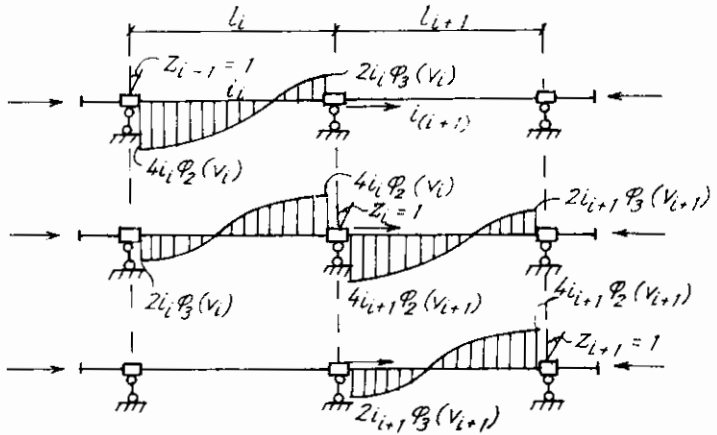
Trong trường hợp này, phương trình chính tắc thứ i biểu thị điều kiện phản lực mômen trong liên kết đặt thêm vào thứ i bằng không sẽ chỉ bao gồm ba số hạng:

$$r_{i(i-1)} Z_{i-1} + r_{ii} Z_i + r_{i(i+1)} Z_{i+1} = 0; \text{ với } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.22)$$

Phương trình (3.22) còn được gọi là *phương trình ba góc xoay*.

Về ý nghĩa vật lý, hệ số r_{im} là phản lực đơn vị dưới dạng mômen tại liên kết i đặt thêm vào hệ do chuyển vị xoay cưỡng bức tại liên kết m đặt thêm vào hệ và do các lực nén hoặc kéo gây ra trong hệ cơ bản. Do đó, để xác định các r_{km} ta cần vẽ biểu đồ (\bar{M}_m) do chuyển vị xoay cưỡng bức $Z_m = 1$ tại liên kết m và do các lực nén hoặc kéo cùng gây ra trong hệ cơ bản; tiếp đó áp dụng phương pháp tách nút để tìm phản lực trong liên kết i .

Trên hình 3.27 là các biểu đồ mômen uốn đơn vị cần thiết để xác định các phản lực mômen $r_{i(i-1)}$, r_{ii} , $r_{i(i+1)}$.



Hình 3.27

Nếu đặt:
$$i_i = \frac{EI_i}{l_i}, \quad \text{và} \quad v_i = l_i \sqrt{\frac{k_i P}{EI_i}}. \quad (3.23)$$

ta sẽ tìm được:
$$r_{ii} = 4i_i \varphi_2(v_i) + 4i_{i+1} \varphi_2(v_{i+1}); \quad (3.24)$$

$$r_{i(i-1)} = 2i_i \varphi_3(v_i); \quad r_{i(i+1)} = 2i_{i+1} \varphi_3(v_{i+1}); \quad (3.25)$$

Công thức (3.24) chỉ nghiệm đúng với $i > 1$ và $i < n$. Khi $i = 1$ và $i = n$, công thức của hệ số r_{ii} phụ thuộc điều kiện liên kết ở các đầu dầm:

- Nếu các gối biên là ngàm (hình 3.26b), r_{11} và r_{nn} được xác định theo (3.24).
- Nếu các gối biên là khớp (hình 3.26a), r_{11} và r_{nn} được xác định như sau:

$$r_{11} = 3i_1 \varphi_1(v_1) + 4i_2 \varphi_2(v_2); \quad r_{nn} = 4i_n \varphi_2(v_n) + 3i_{n+1} \varphi_1(v_{n+1}). \quad (3.26)$$

Từ hệ phương trình thuận nhất (3.22) ta lập được phương trình ổn định cho dầm liên tục theo phương pháp chuyển vị bằng cách cho định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc (3.22) bằng không:

$$D = 0. \quad (3.27)$$

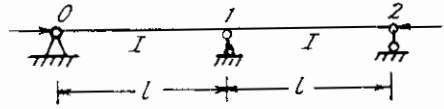
Sau khi khai triển định thức D và giải phương trình ổn định ta tìm thông số v_i , từ đó suy ra giá trị tới hạn của lực P .

Chú ý:

Giá trị tới hạn của lực P tìm được theo cách trình bày ở trên tương ứng với khi dầm bị mất ổn định thì chuyển vị xoay tại các tiết diện trên gối tựa trung gian khác không. Trong bài toán dầm liên tục, ngoài nghiệm nêu ở trên ta còn phải tìm nghiệm tương ứng với khi dầm bị mất ổn định với chuyển vị xoay tại các tiết diện trên gối tựa trung gian đều bằng không nếu về ý nghĩa vật lý có thể xảy ra trường hợp này.

Chẳng hạn, đối với dầm liên tục hai nhịp chịu lực như trên hình 3.28, phương trình chính tắc có dạng:

$$[3i_1 \varphi_1(v) + 3i_1 \varphi_1(v)] Z_1 = 0.$$



Hình 3.28

Phương trình này được thỏa mãn với hai khả năng:

- $Z_1 \neq 0$ tương ứng với dạng mất ổn định phản xứng, ta có: $\varphi_1(v) = 0$. Suy ra $v = \pi$.

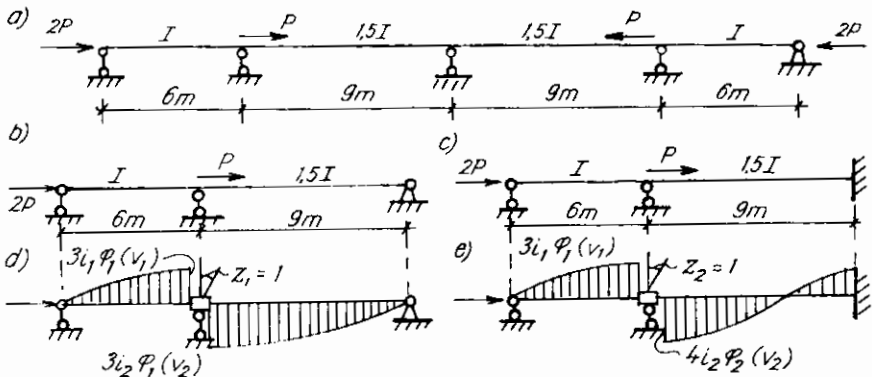
Do đó
$$P_{1,th} = \pi^2 EI / l^2$$

- $Z_1 = 0$ tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng, mỗi nhịp của dầm làm việc như một thanh có một đầu ngàm (tại 1) và một đầu khớp (tại 0 và 2). Theo kết quả đã biết từ chương 2, ta có:

$$P_{2,th} = \pi^2 EI / (0,7l)^2.$$

Lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với khi $Z_1 \neq 0$. Do đó: $P_{th} = \pi^2 EI / l^2$.

Ví dụ 3.10. Xác định lực tới hạn cho dầm liên tục đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng như trên hình 3.29a.



Hình 3.29

Theo (3.23), độ cứng đơn vị i_i và thông số v_i của các thanh như sau:

$$i_1 = i_4 = \frac{EI}{6}; \quad i_2 = i_3 = \frac{1,5EI}{9} = i_1; \quad v_1 = v_4 = 6 \sqrt{\frac{2P}{EI}}; \quad v_2 = v_3 = 9 \sqrt{\frac{3P}{1,5EI}} = 1,5 v_1.$$

- ♦ **Giá thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng:** sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.29b. Hệ cơ bản và biểu đồ mômen uốn đơn vị tương ứng như trên hình 3.29d. Phương trình chính tắc: $r_{11} Z_1 = 0$.

Trong trường hợp này, lực tới hạn nhỏ nhất xảy ra khi dầm bị mất ổn định với $Z_1 \neq 0$. Do đó, phương trình ổn định có dạng:

$$r_{11} = 3i_1 \varphi_1(v_1) + 3i_2 \varphi_1(v_2) = 0. \tag{a}$$

Hay:
$$\varphi_1(v_1) + \varphi_1(1,5v_1) = 0. \tag{b}$$

Để giải phương trình (b) ta vận dụng cách thử đúng dần:

• Khi $v_1 = 2,34$ ta có: $1,5 v_1 = 3,51$; $\varphi_1(2,34) = 0,5589$; $\varphi_1(3,51) = -0,5075$.

Thay vào (b), ta được: $0,5589 - 0,5075 = 0,0514 > 0$.

• Khi $v_1 = 2,36$ ta có: $1,5 v_1 = 3,54$; $\varphi_1(2,34) = 0,5496$; $\varphi_1(3,54) = -0,5638$.

Thay vào (b), ta được: $0,5496 - 0,5638 = -0,0142 < 0$.

Như vậy, giá trị của v_1 ở trong khoảng: $2,34 < v_1 < 2,36$.

Khi $v_1 = 2,36$ phương trình (b) cho kết quả gần bằng không hơn khi $v_1 = 2,34$ nên ta chọn $v_1 = 2,355$. Do đó:

$$P_{1,th} = \frac{v_1^2}{6^2} \times \frac{EI}{2} = 0,077 EI.$$

♦ Giả thiết hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng: sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.29c. Hệ cơ bản và biểu đồ mômen uốn đơn vị tương ứng như trên hình 3.29c. Phương trình chính tắc: $r_{22} Z_2 = 0$.

Trong trường hợp này, lực tới hạn nhỏ nhất xảy ra khi dầm bị mất ổn định với $Z_1 \neq 0$. Do đó, phương trình ổn định có dạng:

$$r_{11} = 3i_1 \varphi_1(v_1) + 4i_2 \varphi_2(v_2) = 0. \quad (c)$$

Hay: $3\varphi_1(v_1) + 4\varphi_2(1,5v_1) = 0. \quad (d)$

Để giải phương trình (d) ta vận dụng cách thử đúng dần:

• Khi $v_1 = 3,05$ ta có: $1,5 v_1 = 4,575$; $\varphi_1(3,05) = 0,0906$; $\varphi_2(4,575) = -0,0611$.

Thay vào (d), ta được: $3,0,0906 - 4,0,0611 = 0,0272 > 0$.

• Khi $v_1 = 3,06$ ta có: $1,5 v_1 = 4,59$; $\varphi_1(3,06) = 0,0812$; $\varphi_2(4,59) = -0,0611$.

Thay vào (d), ta được: $3,0,0812 - 4,0,0611 = -0,048 < 0$.

Như vậy, giá trị của v_1 ở trong khoảng: $3,05 < v_1 < 3,06$.

Khi $v_1 = 3,05$ phương trình (d) cho kết quả gần bằng không hơn khi $v_1 = 3,06$ nên ta chọn $v_1 = 3,054$. Do đó:

$$P_{2,th} = \frac{v_1^2}{6^2} \times \frac{EI}{2} = 0,1295 EI.$$

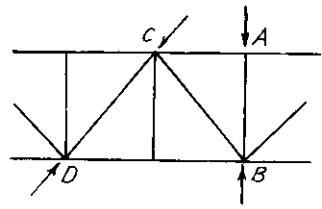
♦ Kết luận: dầm bị mất ổn định theo dạng phản xứng với $P_{th} = 0,077 EI$.

3.6. Ổn định của các thanh chịu nén trong dàn

Trong giáo trình này chỉ đề cập đến bài toán ổn định cục bộ của các thanh dàn chịu nén dọc trục. Dưới tác dụng của tải trọng, các thanh dàn chịu nén có thể bị mất ổn định và làm cho toàn dàn bị phá hỏng.

Các thanh chịu nén trong dàn thường là các thanh thẳng có tiết diện không đổi và có thể là:

❖ *Các thanh đứng, thanh biên hoặc thanh xiên không cắt qua các thanh khác*, ví dụ như các thanh AB , AC và CD trên hình 3.30.



Hình 3.30

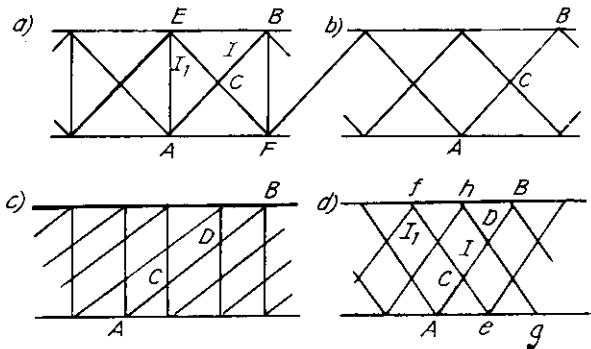
Để kiểm tra ổn định, ta xem thanh làm việc theo sơ đồ thanh có liên kết khớp ở hai đầu và tùy theo thanh đó là thanh đơn hay thanh ghép để sử dụng các công thức đã nghiên cứu trong 2.2 hoặc 2.6 của chương 2.

Giả thiết thanh có liên kết khớp ở hai đầu chỉ là gần đúng và thiên về mặt an toàn, thực ra liên kết ở hai đầu là liên kết đàn hồi song nếu xét đến yếu tố này thì bài toán sẽ phức tạp.

❖ *Các thanh đứng hoặc thanh xiên cắt qua một, hai hoặc nhiều thanh đứng hay thanh xiên khác*

Trên hình 3.31 trình bày một số ví dụ về những thanh thuộc loại này.

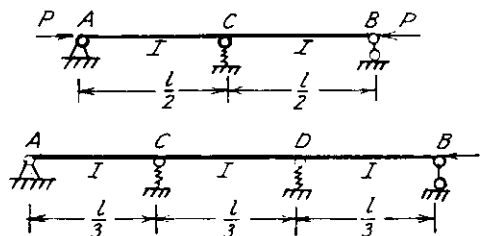
Các thanh xiên chịu nén ACB trên hình 3.31a và b là thanh cắt qua một thanh xiên khác ở giữa nhịp. Các thanh xiên chịu nén $ACDB$ trên hình 3.31c và d là thanh cắt qua hai thanh đứng hoặc hai thanh xiên khác của dàn.



Hình 3.31

Khi mất ổn định, những thanh này làm việc giống như thanh có hai gối khớp ở hai đầu và có một, hai hoặc nhiều gối đàn hồi ở bên trong nhịp (hình 3.32).

Thật vậy, khi tăng lực nén đến giá trị tới hạn, thanh bị cong ra ngoài mặt phẳng dàn, những thanh bị thanh này cắt sẽ ngăn cản lại và chỉ cho phép chuyển vị tỷ lệ với độ cứng đàn hồi của chúng, do đó có thể xem thanh bị cắt như một gối đàn hồi.



Hình 3.32

Như vậy, bài toán kiểm tra ổn định của những loại thanh này được đưa về bài toán ổn định của thanh liên tục có các gối tựa trung gian là gối đàn hồi. Trong mục 3.7 ta sẽ nghiên cứu cách giải bài toán này.

Khi số lượng gối đàn hồi trung gian khá lớn ta có thể giải bài toán theo trường hợp thanh làm việc trong môi trường đàn hồi sẽ đề cập đến trong mục 3.8.

❖ **Hệ thanh biên trên của cầu dầm hõ.** Cầu dầm hõ là cầu có đường xe chạy dưới và không có giằng gió ở phía biên trên. Hệ thanh biên trên của cầu chịu lực nén thay đổi dọc theo chiều dài của hệ thanh. Khi mất ổn định, hệ thanh biên trên bị cong ra ngoài mặt phẳng dầm, các khung ngang trong cầu (bao gồm dầm ngang của hệ thống mặt cầu và thanh đứng, xem hình 3.44d) ngăn cản không cho phép hệ thanh biên trên chuyển vị tự do và làm việc giống như những liên kết dầm hõ. Kinh nghiệm cho biết, khi số dốt của dầm lớn hơn bốn thì có thể thay các gối dầm hõ bằng nền dầm hõ. Như vậy, bài toán được đưa về trường hợp thanh làm việc trong môi trường đàn hồi chịu lực nén thay đổi dọc theo chiều dài thanh. Trong mục 3.9 sẽ giới thiệu cách giải gần đúng bài toán này do F. S. Iaxinski [23] đề xuất.

Trên thực tế cũng đã có một số công trình cầu dầm bị phá hoại do hiện tượng mất ổn định của các thanh chịu nén như đã nêu trong chương Mở đầu.

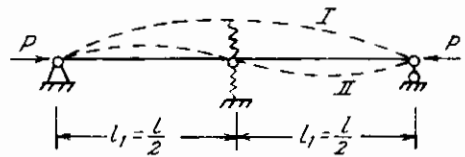
3.7. Ổn định của thanh liên tục có gối trung gian đàn hồi

Trong mục này trình bày cách tính ổn định của thanh liên tục có một và hai gối trung gian đàn hồi là những trường hợp thường gặp trong thực tế. Trường hợp thanh có nhiều gối trung gian đàn hồi thì cách thực hiện cũng tương tự. Để giải bài toán này có thể thực hiện theo nhiều phương pháp, trong mục này chỉ đề cập đến phương pháp chuyển vị đã nghiên cứu trong 3.3.

A. Ổn định của thanh liên tục hai nhịp có gối trung gian đàn hồi

Xét thanh liên tục hai nhịp có gối trung gian đàn hồi và chịu lực nén P như trên hình 3.33.

Gọi c là độ cứng của liên kết dầm hõ. Về ý nghĩa, c là lực cần thiết tác dụng tại gối dầm hõ sao cho gối chuyển vị bằng đơn vị theo phương vuông góc với trục thanh.



Hình 3.33

Hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị như trên hình 3.34. Vì hệ đối xứng chịu tải trọng tác dụng đối xứng nên có thể phân tích thành hai trường hợp: thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng (đường I trên hình 3.33); thanh bị mất ổn định theo dạng phản xứng (đường II trên hình 3.33).



♦ *Giá thiết thanh bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng:*

Trong trường hợp này ta có: $Z_1 \neq 0; Z_2 = 0$.

Phương trình chính tắc: $r_{11} Z_1 = 0$. Phương trình ổn định: $r_{11} = 0$.

Từ biểu đồ mômen uốn đơn vị trên hình 3.34b và bảng 3.1, ta xác định được:

$$r_{11} = 2 \cdot \frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v) + c = 0, \quad \text{trong đó: } v = l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

Suy ra:
$$\eta_1(v) = -\frac{cl^3}{48EI}. \quad (3.28)$$

Như vậy, nếu cho biết độ cứng c của liên kết đàn hồi và kích thước hình học của thanh thì có thể sử dụng bảng 2 trong phần Phụ lục để xác định v và từ đó suy ra lực tới hạn.

♦ *Giá thiết thanh bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng:*

Trong trường hợp này ta có:

$$Z_1 = 0; Z_2 \neq 0.$$

Phương trình chính tắc: $r_{22} Z_2 = 0$.

Phương trình ổn định: $r_{22} = 0$.

Từ biểu đồ mômen uốn đơn vị trên hình 3.34c và bảng 3.1, ta xác định được:

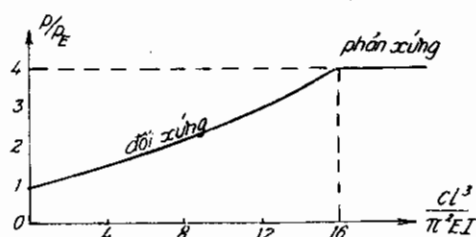
$$r_{22} = 2 \cdot 3i \varphi_1(v) = 0, \quad \text{Hay } \varphi_1(v) = 0. \quad \text{Suy ra: } v = \pi.$$

Do đó, ta có:
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2} = 4 \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 4 P_E; \quad (3.29)$$

với $P_E = \pi^2 EI / l^2$ – lực tới hạn khi thanh không có gối đàn hồi trung gian.

Sau khi xác định lực tới hạn tương ứng với hai trường hợp trên, ta chọn giá trị nhỏ nhất là giá trị tới hạn của bài toán.

Trên hình 3.35 (theo [22]) là đồ thị biến thiên của tỷ số P_{th}/P_E theo tương quan độ cứng của gối đàn hồi với độ cứng của thanh $cl^3/\pi^2 EI$.



Hình 3.35

Ta thấy: • khi $c < 16\pi^2 EI / l^3$, thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng;

• khi $c > 16\pi^2 EI / l^3$, thanh bị mất ổn định theo dạng phản xứng, lực tới hạn được xác định theo (3.29) và không phụ thuộc độ cứng c .

Để áp dụng kết quả nghiên cứu ở trên khi kiểm tra ổn định của thanh chịu nén *ACB* trong dàn trên hình 3.31a và b ta cần xác định độ cứng *c* của gối đàn hồi.

Gọi: *EI* – độ cứng của thanh chịu nén *ACB* cần kiểm tra ổn định;

EI₁ – độ cứng của thanh bị cắt *ECF*.

Trong trường hợp này, độ cứng *c* của gối đàn hồi là lực cần thiết tác dụng theo phương vuông góc với mặt phẳng dàn tại giữa nhịp thanh đơn giản *ECF* sao cho điểm *C* chuyển vị bằng đơn vị theo phương vuông góc với mặt phẳng dàn.

Từ công thức tính chuyển vị: $\Delta_C = \frac{cI^3}{48EI_1} = 1$ suy ra $c = \frac{48EI_1}{I^3}$. (3.30)

Thay (3.30) vào (3.28) ta được phương trình ổn định tương ứng với dạng biến dạng đối xứng:

$$\eta_I(v) = -\frac{I_1}{I}. \quad (3.31)$$

Nếu cho biết tỷ số *I₁/I* thì sau khi giải phương trình (3.31) ta tìm được thông số *v* và từ đó suy ra lực tới hạn.

Có thể biểu thị lực tới hạn của thanh theo công thức quen thuộc như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (3.32)$$

Hệ số μ phụ thuộc tỷ số *I₁/I* và có giá trị tìm được như trong bảng 3.2.

Bảng 3.2

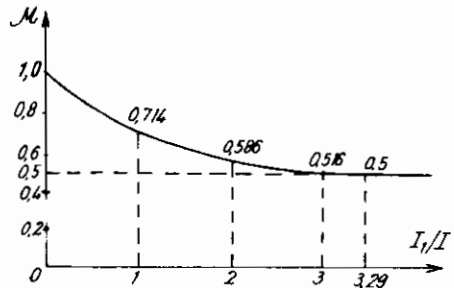
<i>I₁/I</i>	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	$\geq \pi^2/3$
μ	0,950	0,912	0,845	0,818	0,793	0,750	0,714	0,586	0,516	0,500

Lực tới hạn tương ứng với dạng phản xứng được xác định theo công thức (3.29). Khi đó ta có $\mu = 0,5$ tương ứng với các tỷ số $(I_1/I) \geq (\pi^2/3) = 3,2896$.

Như vậy:

- khi $(I_1/I) < (\pi^2/3)$, thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng;
- khi $(I_1/I) \geq (\pi^2/3)$, thanh bị mất ổn định theo dạng phản xứng, hệ số μ không đổi và bằng 0,5.

Điều đó có nghĩa là khi *I₁* vượt qua giá trị 3,2898 *I* thì mặc dù có tăng độ cứng của thanh bị cắt *ECF* lên nữa, lực tới hạn cũng không thay đổi.

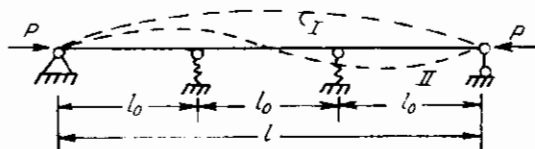


Hình 3.36

Trên hình 3.36 là đồ thị biến thiên của μ theo các tỷ số *I₁/I*.

B. Ổn định của thanh liên tục ba nhịp có gối trung gian đàn hồi

Xét thanh liên tục ba nhịp có hai gối trung gian đàn hồi và chịu lực nén P như trên hình 3.37. Giả sử hai gối trung gian đàn hồi có độ cứng như nhau và bằng c .



Hình 3.37

Hệ có tính chất đối xứng và chịu tải trọng tác dụng đối xứng. Ta có thể phân tích thành hai trường hợp: thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng (đường I trên hình 3.37); thanh bị mất ổn định theo dạng phản xứng (đường II trên hình 3.37).

♦ Giả thiết thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng:

Sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.38a. Hệ cơ bản và các biểu đồ mômen uốn đơn vị tương ứng như trên hình 3.38b, c, d.

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Từ các biểu đồ mômen uốn đơn vị ta xác định được:

$$r_{12} = r_{21} = \frac{3EI}{l_o^2} \varphi_1(v);$$

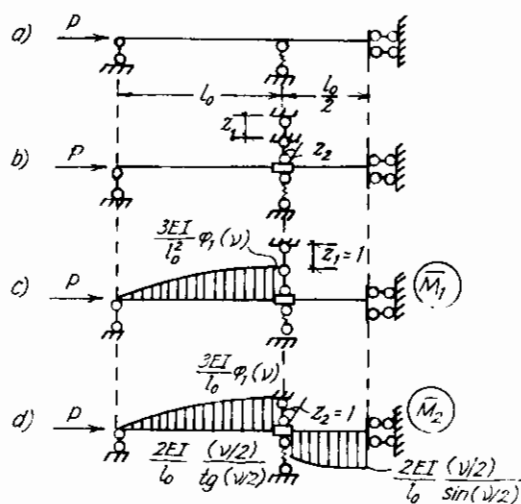
$$r_{11} = \frac{3EI}{l_o^3} \eta_1(v) + c = \frac{3EI}{l_o^3} \left[\eta_1(v) + \frac{2}{5} f \right];$$

$$r_{22} = \frac{3EI}{l_o} \varphi_1(v) + \frac{2EI}{l_o} \times \frac{(v-2)}{\operatorname{tg}(v-2)} = \frac{3EI}{l_o} \left[\varphi_1(v) + \frac{2}{3} \times \frac{(v-2)}{\operatorname{tg}(v-2)} \right],$$

trong đó:
$$v = l_o \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{P}{EI}}; \quad (3.33)$$

$$f = \frac{5cl_o^3}{6EI} = \frac{5}{162} \times \frac{cl^3}{EI}. \quad (3.34)$$

Sau khi thay các phần tử đơn vị vào phương trình ổn định và khai triển, ta được:



Hình 3.38

$$f = \frac{5}{2} \times \frac{\varphi_1^2(v) - \eta_1(v) \left[\varphi_1(v) + \frac{v}{3 \operatorname{tg}(v/2)} \right]}{\varphi_1(v) + \frac{v}{3 \operatorname{tg}(v/2)}} \quad (3.35)$$

Nếu cho biết kích thước của thanh và độ cứng c của gối đàn hồi, tức là biết giá trị của f theo (3.34) thì sau khi giải phương trình (3.35) ta tìm được thông số v và từ đó suy ra lực tới hạn.

Từ (3.33) ta có thể biểu thị lực tới hạn của thanh theo công thức:

$$P_{1h} = \frac{9v^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \text{với} \quad \mu = \frac{\pi}{3v} \quad (3.36)$$

♦ Giả thiết thanh bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng:

Sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 3.39a. Hệ cơ bản và các biểu đồ mômen uốn đơn vị tương ứng như trên hình 3.39b, c, d.

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Từ các biểu đồ mômen uốn đơn vị ta xác định được các phần lực đơn vị như sau:

$$r_{12} = r_{21} = \frac{3EI}{l^2} [\varphi_1(v) - 4\varphi_1(v/2)];$$

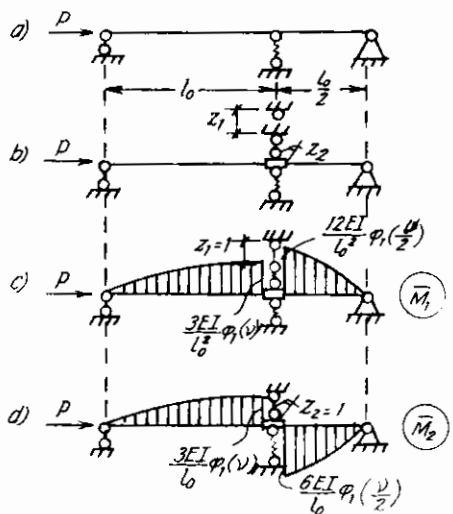
$$r_{11} = \frac{3EI}{l^3} \eta_1(v) + \frac{24EI}{l^3} \eta_1(v/2) + c = \frac{3EI}{l^3} \left[\eta_1(v) + 8\eta_1(v/2) + \frac{2}{5} f \right];$$

$$r_{22} = \frac{3EI}{l} [\varphi_1(v) + 2\varphi_1(v/2)].$$

Thay các phần lực đơn vị vào phương trình ổn định và khai triển, ta được:

$$f = \frac{5}{2} \times \frac{[\varphi_1(v) - 4\varphi_1(v/2)]^2 - [\eta_1(v) + 8\eta_1(v/2)][\varphi_1(v) + 2\varphi_1(v/2)]}{\varphi_1(v) + 2\varphi_1(v/2)}, \quad (3.37)$$

trong đó v và f được xác định theo (3.33) và (3.34).

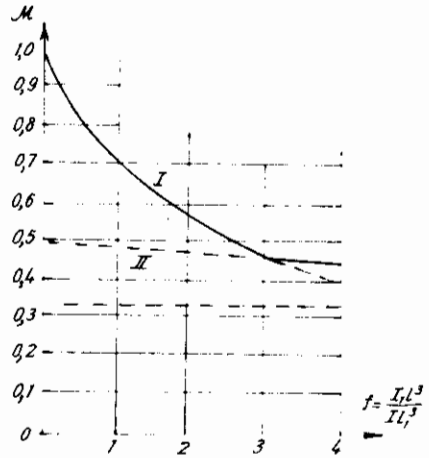


Hình 3.39

Nếu cho biết kích thước của thanh và độ cứng c của gối đàn hồi, tức là biết giá trị của f theo (3.34) thì sau khi giải phương trình (3.37) ta tìm được thông số v và từ đó suy ra lực tới hạn theo (3.36).

Để dựng đồ thị liên hệ giữa hệ số μ trong công thức (3.36) với đại lượng f biểu thị kích thước của thanh và độ cứng của gối đàn hồi, ta lần lượt cho v nhiều giá trị khác nhau, ứng với mỗi giá trị của v xác định một giá trị của f theo (3.35) hoặc (3.37) và xác định được một giá trị của μ theo công thức (3.36).

Trên hình 3.40 là đồ thị liên hệ giữa hệ số μ với đại lượng f . Đường cong I tìm được theo (3.35) tương ứng với khi thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng. Đường cong II tìm được theo (3.37) tương ứng với khi thanh bị mất ổn định theo dạng phản xứng. Tất nhiên ta chỉ sử dụng những phần đường cong nào cho kết quả μ lớn hơn tức là cho lực tới hạn nhỏ nhất. Đó là những đoạn cong vẽ liền nét trên hình 3.40. Đồ thị 3.40 giúp ta dễ dàng tìm được lực tới hạn cho thanh chịu nén có ba nhịp đều nhau và có hai gối đàn hồi trung gian.



Hình 3.40

Để áp dụng kết quả nghiên cứu ở trên khi kiểm tra ổn định của thanh chịu nén ACDB trong dàn trên hình 3.31c, d ta cần xác định độ cứng c của gối đàn hồi.

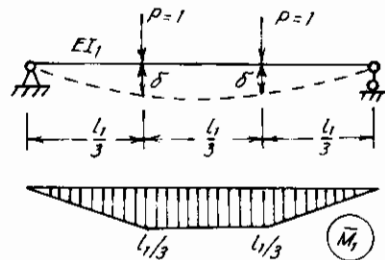
Gọi: EI và l – độ cứng và chiều dài của thanh chịu nén ACDB;

EI_1 và l_1 – độ cứng và chiều dài của thanh bị cắt.

Độ cứng c của gối đàn hồi được xác định theo điều kiện biến dạng đối xứng của thanh bị cắt, đó là lực cần tác dụng theo phương vuông góc với mặt phẳng dàn tại giao điểm của thanh chịu nén với thanh bị cắt sao cho giao điểm đó chuyển vị bằng đơn vị theo phương vuông góc với mặt phẳng dàn.

Nói khác đi, c là giá trị nghịch đảo của chuyển vị δ tại giao điểm nói trên khi thanh bị cắt chịu lực $P = 1$.

Vận dụng tính chất đối xứng của chuyển vị trong thanh bị cắt và khái niệm về chuyển vị khái quát, ta có thể xác định chuyển vị khái quát $\delta^* = 2\delta$ bằng cách nhân biểu đồ mômen uốn đơn vị trên hình 3.41b với chính nó.



Hình 3.41

Kết quả: $EI_1 \delta^* = EI_1 2\delta = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{l_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{l_1}{3}\right)^3 = \frac{5}{81} l_1^3$.

Hay: $\delta = \frac{5l_1^3}{162EI_1}$ suy ra $c = \frac{162EI_1}{5l_1^3}$.

Theo (3.34), trong trường hợp này ta có: $f = \frac{5}{162} \times \frac{cl^3}{EI} = \frac{l_1 l^3}{11l_1^3}$.

Sau khi biết giá trị của f , sử dụng đồ thị trên hình 3.40 ta tìm được hệ số μ và từ đó suy ra lực tối hạn.

Trường hợp đặc biệt khi $l_1 = l$ và $l_1 = l$, ta có $f = 1$, từ đồ thị trên hình 3.40 ta tìm được hệ số $\mu = 0,7$ và suy ra lực tối hạn: $P_{th} = \pi^2 EI / (0,7l)^2$.

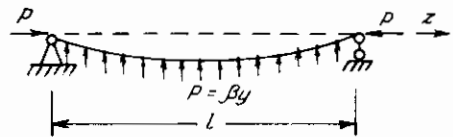
3.8. Ổn định của thanh làm việc trong môi trường đàn hồi

Để trình bày cách tính ổn định của thanh làm việc trong môi trường đàn hồi hay thanh đặt trên nền đàn hồi, ta xét trường hợp thanh có khớp tựa cứng ở hai đầu, tiết diện không đổi và chịu lực nén P như trên hình 3.42.

Giả thiết phản lực nền p tỷ lệ với độ võng y của dầm theo hệ số tỷ lệ β :

$$p = \beta \cdot y. \quad (3.38)$$

Hệ số β được gọi là hệ số nền, có thứ nguyên là thứ nguyên của lực chia cho bình phương thứ nguyên chiều dài. Hệ số này được xác định bằng phản lực của nền trên đơn vị chiều dài thanh khi thanh bị võng bằng đơn vị.



Hình 3.42

Phương trình vi phân tương ứng: $EI y'' = -(M^* + P y)$.

với M^* là mômen uốn do riêng phản lực nền gây ra trong thanh.

Vì $EI = const$ nên sau khi lấy đạo hàm hai lần ta được phương trình vi phân biểu thị trực tiếp qua phản lực nền như sau:

$$EI y^{IV} = -(M^{*''} + P y'') = -(\beta \cdot y + P y'').$$

hay: $y^{IV} + \alpha^2 y'' + \frac{\beta}{EI} y = 0; \quad (3.39)$

trong đó: $\alpha^2 = \frac{P}{EI}. \quad (3.40)$

Chọn nghiệm của phương trình (3.39) dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad \text{với } a_k \text{ là các hệ số cần xác định.} \quad (3.41)$$

Đạo hàm cấp hai và cấp bốn của nghiệm (3.41) có dạng:

$$v'' = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi z}{l}; \quad v^{IV} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{k\pi z}{l}.$$

Sau khi thay vào (3.39), ta được:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{\beta}{EI} \right] a_k \sin \frac{k\pi z}{l} = 0.$$

Điều kiện để cho thanh bị mất ổn định là các hệ số a_k phải tồn tại khác không với mọi z , do đó các thừa số trong dấu móc vuông đều phải bằng không:

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{\beta}{EI} = 0. \quad \text{Suy ra: } \alpha^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2 EI}.$$

Từ (3.40) ta tìm được: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(k^2 + \frac{\beta l^4}{k^2 \pi^4 EI} \right)$, với $k = 1, 2, 3, \dots$ (3.42)

trong đó k là số nửa bước sóng của đường đàn hồi của thanh khi mất ổn định, phụ thuộc hệ số nền β của nền đàn hồi.

Để tìm công thức (3.42) ta cũng có thể vận dụng phương pháp năng lượng song phức tạp hơn (xem [3]).

Vấn đề cần đặt ra là phải chọn số nửa bước sóng k bằng bao nhiêu? Tất nhiên, cần chọn giá trị k sao cho lực tới hạn nhỏ nhất. Về ý nghĩa, k phải là một số nguyên. Để tìm giá trị nhỏ nhất của P_{th} ta giả thiết k là một đại lượng biến thiên liên tục để lấy đạo hàm biểu thức (3.42). Biểu thức (3.42) được viết gọn dưới dạng:

$$P_{th} = P_E \left(k^2 + \frac{\gamma}{k^2} \right), \quad (3.43)$$

trong đó: $P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}; \quad \gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI},$ (3.44)

Điều kiện để cho P_{th} có giá trị nhỏ nhất: $\frac{dP_{th}}{dk} = P_E \left(2k - \frac{2\gamma}{k^3} \right) = 0.$

Suy ra: $k = \sqrt[3]{\gamma}.$ (3.45)

Như vậy, khi tìm lực tới hạn nhỏ nhất cho thanh làm việc trong môi trường đàn hồi ta cần căn cứ vào kích thước, độ cứng của thanh và hệ số nền để xác định hệ số γ theo (3.44), tiếp đó tìm giá trị của k theo (3.45) và suy ra lực tới hạn tương ứng theo (3.43). Nói chung, công thức (3.45) thường cho giá trị k không phải là số nguyên, do đó trong trường hợp này ta cần vận dụng công thức (3.43) để tìm hai giá trị P tương ứng với hai số nguyên kê dưới và kê trên của k và chọn giá trị nhỏ nhất là lực tới hạn.

Ví dụ, nếu $\gamma = 4$, theo (3.45) ta tìm được $k = 1,4I$ thì lực tới hạn cần tìm là lực ổn bất tính theo (3.43) tương ứng với khi $k = 1$ và $k = 2$:

• khi $k = 1$:
$$P_{th} = P_E \left(1^2 + \frac{4}{1^2} \right) = 5 P_E$$

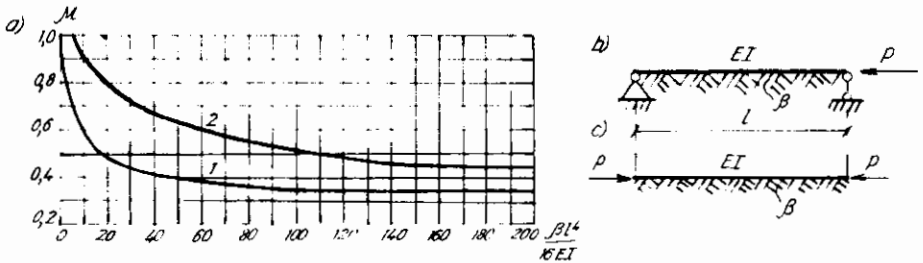
• khi $k = 2$:
$$P_{th} = P_E \left(2^2 + \frac{4}{2^2} \right) = 5 P_E$$
 Kết quả: $P_{th} = 5 P_E$.

Trong mọi trường hợp, ta có thể biểu thị công thức (3.43) dưới dạng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \tag{3.46}$$

với μ là hệ số phụ thuộc kích thước, độ cứng của thanh, hệ số nền và điều kiện liên kết ở hai đầu thanh.

Trên hình 3.43a là đồ thị liên hệ giữa kết quả tính hệ số μ theo các giá trị khác nhau của $\beta^4 l^4 / 16EI$ khi thanh làm việc trong môi trường đàn hồi [9]: đường cong 1 tương ứng trường hợp thanh có khớp tựa cứng ở hai đầu (hình 3.43b); đường cong 2 tương ứng trường hợp thanh có hai đầu tự do (hình 3.43c).



Hình 3.43

3.9. Ổn định của hệ thanh biên trên chịu nén trong cầu dầm hở

Bài toán ổn định ngoài mặt phẳng dầm của hệ thanh biên trên chịu nén trong cầu dầm hở (hình 3.44a) được xem như bài toán thanh liên tục đặt trên nhiều gối tựa dầm hở và chịu lực nén thay đổi dọc theo chiều dài thanh như trên hình 3.44b. Cách giải bài toán này thường khá phức tạp.

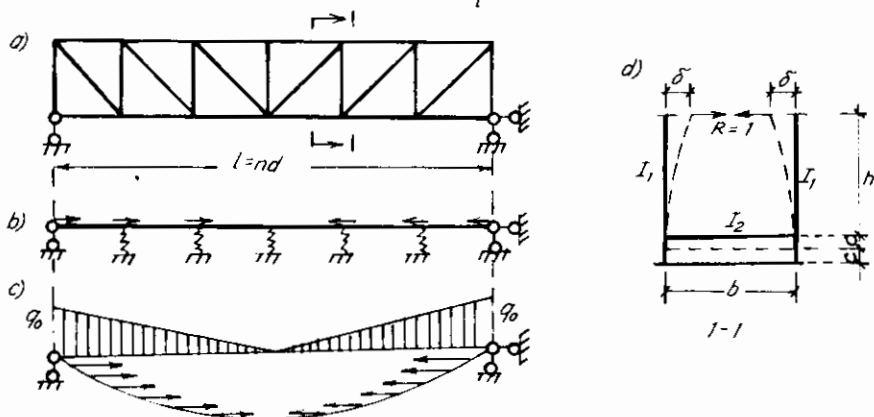
Trong mục này trình bày cách tính gần đúng do F. S. Iaxinski [22] kiến nghị trên cơ sở những giả thiết sau:

- ❖ Hệ thanh biên trên có tiết diện không đổi.
- ❖ Độ cứng theo phương ngang cầu của các cổng cầu tương đối lớn nên có thể xem hệ thanh biên trên như thanh có khớp tựa cứng ở hai đầu.
- ❖ Thay thế các gối dầm hở bằng môi trường đàn hồi. Chỉ chấp nhận được giả thiết này nếu trong mỗi nửa sóng của đường biến dạng khi thanh bị mất ổn định

có chứa ít nhất ba đốt dầm. Khi xác định hệ số nền của môi trường dầm hồi chỉ kể đến biến dạng của dầm ngang và thanh đứng, bỏ qua biến dạng của thanh xiên.

❖ Thay thế các lực nền tập trung truyền từ các thanh xiên vào hệ thanh biên trên tại các mắt bằng các lực nền phân bố. Nếu tải trọng tác dụng trên cầu là thẳng đứng và phân bố đều thì lực nền trong hệ thanh biên có thể xem là phân bố theo biểu đồ có dạng hai hình tam giác như trên hình 3.44c với cường độ ở hai đầu thanh là q_0 còn ở giữa nhịp bằng không và được mô tả bằng phương trình sau:

$$q(z) = q_0 \frac{(l - 2z)}{l} \quad (3.47)$$



Hình 3.44

Nếu chấp nhận các giả thiết trên thì sơ đồ tính sẽ có dạng như trên hình 3.44b với sơ đồ lực như trên hình 3.44c.

Để giải bài toán này ta sẽ áp dụng phương pháp năng lượng.

Trước tiên, cần xác định hệ số nền β của môi trường. Gọi:

d – chiều dài của một đốt dầm;

R – lực cân đặt tại đầu trên của thanh đứng để sao cho mắt dầm tại đó chuyển vị theo phương ngang cầu một giá trị bằng đơn vị;

δ – chuyển vị theo phương ngang cầu tại đầu trên của thanh đứng do lực $R = 1$ có điểm đặt và phương tương ứng với chuyển vị δ gây ra. δ là đại lượng nghịch đảo của R .

ta có:
$$\beta = \frac{R}{d} = \frac{1}{d\delta} \quad (3.48)$$

Nếu có xét đến ảnh hưởng của uốn dọc trong thanh đứng thì δ được xác định theo công thức tính chuyển vị trong bài toán uốn ngang cùng với uốn dọc như sau:

$$\delta = \frac{I \times h^3}{3EI_1(1 - N P_E)} + \frac{I \times (h+c)^2 b}{2EI_2}$$

trong đó (xem hình 3.44d):

EI_1 và EI_2 – độ cứng của thanh đứng và của dầm ngang;

h – chiều cao của thanh đứng;

b và c – chiều dài và nửa chiều cao của dầm ngang;

N – lực nén lớn nhất trong các thanh đứng;

$P_E = \pi^2 EI_1 / 4h^2$ – lực Euler của thanh đứng theo phương ngang cầu.

Do đó:

$$\beta = \frac{I}{d \left[\frac{h^3}{3EI_1(1-N/P_E)} + \frac{(h+c)^2 b}{2EI_2} \right]} \quad (3.49)$$

Từ mục 1.9, ta có điều kiện xác định lực tới hạn như sau:

$$\delta T = \delta U. \quad (3.50)$$

❖ δU – độ biến thiên của thế năng biến dạng đàn hồi, bao gồm hai thành phần:

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2;$$

δU_1 – độ biến thiên của thế năng biến dạng đàn hồi của thanh. Theo (1.27):

$$\delta U_1 = \frac{1}{2} \sum \int EI(y'')^2 ds,$$

δU_2 – độ biến thiên của thế năng biến dạng đàn hồi của nền. Phần năng lượng này được đo bằng công của phản lực nền.

Trên mỗi phân tố chiều dài dz , phản lực nền có giá trị bằng $\beta y \cdot dz$ và sinh công bằng: $(1/2) \cdot \beta y \cdot dz \cdot y = (1/2) \cdot \beta y^2 \cdot dz$.

Do đó, ta có:

$$\delta U_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dz.$$

Như vậy:

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum \int EI(y'')^2 ds + \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dz. \quad (3.51)$$

❖ δT – độ biến thiên của công các ngoại lực. Trong trường hợp này ngoại lực là tải trọng phân bố. Để tìm δT , trước tiên ta tìm độ biến thiên của công phân tố $d(\delta T)$ của một phân tố chiều dài dz tại hoành độ z của thanh. Khi thanh bị mất ổn định, phân tố dz bị nghiêng đi, các lực tác dụng ở bên trái phân tố sẽ sinh công trên chuyển dời theo phương của trục thanh về phía gối tựa cố định.

Độ chuyển dời này đã được xác định (xem mục 1.9, hình 1.11) bằng: $\frac{1}{2}(y')^2 dz$.

Lực tác dụng ở bên trái phân tố bằng: $\int_0^z q_o \frac{(l-2\xi)}{l} d\xi$.

Do đó, độ biến thiên của công phân tố:

$$d(\delta T) = \frac{1}{2}(y')^2 dz \times \int_0^z q_o \frac{(l-2\xi)}{l} d\xi = q_o \frac{z(l-z)}{2l} (y')^2 dz.$$

Như vậy, độ biến thiên của công các ngoại lực trên toàn hệ thanh sẽ bằng:

$$\delta T = \frac{q_0}{2l} \int_0^l z(l-z)(y')^2 dz. \quad (3.52)$$

Giả thiết phương trình đường đàn hồi của thanh khi mất ổn định có dạng:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad (3.53)$$

với a_k là các hệ số cần xác định.

Sau khi thay (3.53) và các biểu thức đạo hàm của (3.53) vào (3.51), (3.52) và bình phương các tổng, ta được:

$$\begin{aligned} \delta U = & \frac{EI\pi^4}{2l^4} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_k^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi z}{l} dz + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k a_m km \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} dz \right] + \\ & + \frac{\beta}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi z}{l} dz + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k a_m \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} dz \right]; \\ \delta T = & \frac{q_0 \pi^4}{2l^3} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 \int_0^l z(l-z) \cos^2 \frac{k\pi z}{l} dz + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k a_m km \int_0^l z(l-z) \cos \frac{k\pi z}{l} \cos \frac{m\pi z}{l} dz \right]. \end{aligned}$$

Nếu chú ý đến kết quả tính các tích phân:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi z}{l} dz &= \frac{l}{2}; & \int_0^l \sin \frac{k\pi z}{l} \sin \frac{m\pi z}{l} dz &= 0; \\ \int_0^l z \cos^2 \frac{k\pi z}{l} dz &= \frac{l^2}{4}; & \int_0^l z^2 \cos^2 \frac{k\pi z}{l} dz &= \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{4k^2 \pi^2}; \\ \int_0^l z \cos \frac{k\pi z}{l} \cos \frac{m\pi z}{l} dz &= \begin{cases} 0 & \text{khi } (k+m) \text{ chẵn} \\ -\frac{2l^2}{\pi^2} \times \frac{m^2 + k^2}{(m^2 - k^2)^2} & \text{khi } (k+m) \text{ lẻ} \end{cases}; \\ \int_0^l z^2 \cos \frac{k\pi z}{l} \cos \frac{m\pi z}{l} dz &= (-1)^{k+m} \frac{2l^3}{\pi^2} \times \frac{m^2 + k^2}{(m^2 - k^2)^2}, \end{aligned}$$

thì sau khi lấy tích phân trên toàn chiều dài thanh ta sẽ được các biểu thức:

$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_k^2 + \frac{\beta l}{4} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (3.54)$$

$$\delta T = \frac{q_o l}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{k^2 \pi^2}{12} - \frac{l}{4} \right) - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k a_m km \frac{m^2 + k^2}{(m^2 - k^2)^2} \right]. \quad (3.55)$$

Trong (3.55), biểu thức thứ hai có tổng kép chỉ bao gồm các số hạng với $(k+m)$ hoặc $(k-m)$ là chẵn và $k \neq m$.

Thay (3.54), (3.55) vào (3.50) ta tìm được:

$$\frac{q_o l}{4} = \frac{\frac{\pi^4 EI}{8l^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_k^2 + \frac{\beta l^2}{8} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{k^2 \pi^2}{12} - \frac{l}{4} \right) - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k a_m km \frac{m^2 + k^2}{(m^2 - k^2)^2}}. \quad (3.56)$$

Công việc cân tiếp tục là phải chọn tỷ số giữa các a_k để sao cho lực tối hạn có giá trị nhỏ nhất. Muốn vậy, ta cân lấy đạo hàm riêng của (3.56) theo từng a_k rồi cho bằng không sẽ được hệ phương trình đại số thuần nhất như sau:

$$\left[(\gamma k^4 + \nu) \pi^2 - 2\alpha \left(\frac{k^2 \pi^2}{3} - l \right) \right] a_k + 16\alpha \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{km(m^2 + k^2)}{(m^2 - k^2)^2} = 0. \quad (3.57)$$

với $k = 1, 2, 3, \dots$; $(k+m)$ hoặc $(k-m)$ là chẵn và $k \neq m$;

$$\text{trong đó: } \alpha = \frac{q_o l^3}{4\pi^2 EI}; \quad \gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI}. \quad (3.58)$$

Khi khai triển, hệ phương trình đại số thuần nhất (3.57) sẽ phân thành hai nhóm:

- một nhóm chỉ chứa các a_k với k là số lẻ, tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng (biến dạng theo một số lẻ của nửa sóng);
- một nhóm chỉ chứa các a_k với k là số chẵn, tương ứng với dạng mất ổn định phản xứng (biến dạng theo một số chẵn của nửa sóng).

Từ điều kiện tồn tại các nghiệm a_k là định thức các hệ số của (3.57) bằng không:

$$D = D_{dx} \cdot D_{px} = 0,$$

ta sẽ tìm được giá trị nhỏ nhất của α và suy ra lực tối hạn $q_o l / 4$ theo (3.58).

Trong thực hành, chuỗi vô hạn (3.53) tắt khá nhanh nên thường được thay bằng chuỗi hữu hạn với số số hạng vừa đủ.

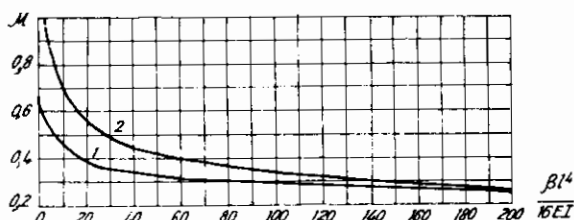
Trong mọi trường hợp, công thức xác định lực tối hạn được biểu thị dưới dạng:

$$\left(\frac{q_o l}{4} \right)_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad \text{với } \mu = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{2(\pi^2 - 3)}{3 \left(1 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} \right)}}, \quad (3.59)$$

μ là hệ số phụ thuộc kích thước, độ cứng của hệ thanh biên trên, hệ số nền và điều kiện liên kết ở hai đầu hệ thanh biên trên.

Theo [9], đồ thị liên hệ giữa hệ số μ tương ứng với các giá trị của $\beta l^4 / 16EI$ như trên hình 3.45.

Đường cong 1 tương ứng trường hợp hệ thanh biên trên có khớp tựa cứng ở hai đầu; đường cong 2 tương ứng trường hợp hệ thanh biên trên có hai đầu tự do.



Hình 3.45

3.10. Cách tính ổn định của hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp số được áp dụng có hiệu quả để giải các bài toán kết cấu trên máy tính. Đa số các phần mềm tính kết cấu hiện hành thường được xây dựng trên cơ sở phương pháp PTHH.

Trong mục này ta sẽ tìm hiểu cách áp dụng phương pháp PTHH (mô hình chuyển vị) để giải bài toán ổn định của hệ thanh theo theo tiêu chí cân bằng ổn định dưới dạng tĩnh học và chấp nhận các giả thiết đã nêu trong mục 3.1. Về cơ bản, các phương trình, các ma trận cũng như các bước thực hiện của phương pháp PTHH khi kiểm tra ổn định cũng tương tự như khi kiểm tra độ bền đã quen biết song cũng tồn tại các nội dung khác biệt cần quan tâm:

- ❖ Khi kiểm tra ổn định, ảnh hưởng của lực nén (hoặc kéo) đến biến dạng uốn trong các phần tử cần được xét đến về nguyên tắc. Do đó, cần xây dựng các ma trận độ cứng cho phần tử chịu uốn đồng thời cùng chịu lực nén (hoặc kéo).
- ❖ Khi kiểm tra ổn định, thay cho việc giải hệ phương trình của phương pháp khi kiểm tra độ bền, ta cần áp dụng thuật toán khai triển định thức hoặc tìm giá trị riêng để xác định các thông số tới hạn và từ đó suy ra lực tới hạn cần tìm.

A. Ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng trong hệ tọa độ địa phương

1. Bài toán phẳng

Xét phần tử hữu hạn (PTHH) thứ i là thanh lẳng trụ trong hệ tọa độ địa phương như trên hình 3.46a, các độ cứng khi uốn và khi nén hoặc kéo EI , EA không đổi, chiều dài l , chịu lực nén P với qui ước chiều dương và thứ tự của tọa độ nút như trên hình 3.46b, chiều dương của nội lực nút và chuyển vị nút tương ứng như hình 3.46c. Gọi:

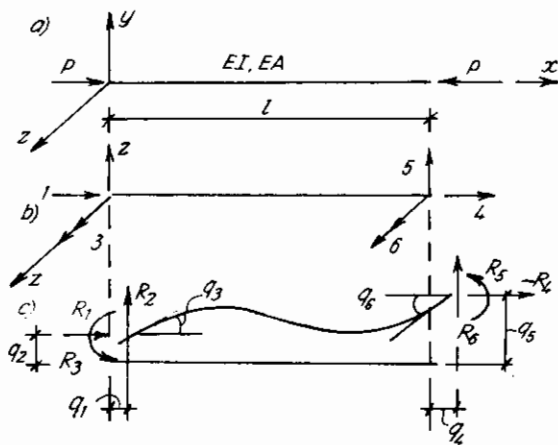
$[q]_i = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6\}_i$ - ma trận cột, kích thước $[6 \times 1]$, biểu thị chuyển vị nút của PTHH thứ i ;

$[R]_i = \{ R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6 \}_i$ - ma trận cột, kích thước $[6 \times 1]$, biểu thị nội lực nút của PTHH thứ i .

trong đó:

q_1, R_1 và q_4, R_4 - chuyển vị, nội lực theo phương x tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i với chiều dương hướng theo chiều dương trục x .

q_2, R_2 và q_5, R_5 - chuyển vị, nội lực theo phương y tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i với chiều dương hướng theo chiều dương trục y .



Hình 3.46

q_3, R_3 và q_6, R_6 - chuyển vị xoay, mômen uốn quanh trục z tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i với chiều dương là chiều tiến (biểu thị bằng hai mũi tên) theo chiều dương trục z của cái mở nút chai khi xoay theo chiều của chuyển vị và nội lực.

Giữa chuyển vị và nội lực trong PTHH thứ i có sự liên hệ theo phương trình cơ bản của phương pháp PTHH như sau:

$$[R]_i = [K]_i [q]_i \quad (3.60)$$

với $[K]_i$ - ma trận độ cứng của PTHH thứ i trong hệ tọa độ địa phương.

Có nhiều cách tiếp cận đến ma trận độ cứng $[K]_i$. Đơn giản hơn cả là vận dụng các kết quả đã tìm được trong mục 3.3 để xây dựng ma trận $[K]_i$.

Đối chiếu hình 3.46 với hình 3.8, nếu chú ý đến sự thay đổi ký hiệu và quy ước về dấu ta dễ dàng xác định được mối tương quan như sau:

$$\text{Về nội lực nút:} \quad R_1 = +P; \quad R_2 = Q_a; \quad R_3 = -M_a;$$

$$R_4 = -P; \quad R_5 = -Q_b; \quad R_6 = -M_b.$$

$$\text{Về chuyển vị nút:} \quad \varphi_a = -q_3; \quad \varphi_b = q_6; \quad \Delta = -(q_5 - q_2).$$

Nếu chú ý đến giả thiết 4 trong 3.1 và áp dụng định luật Hooke, ta có:

$$R_1 = P = -\frac{EA}{l} (q_4 - q_1) = \frac{EA}{l} (q_1 - q_4); \quad (3.61)$$

$$R_4 = -P = \frac{EA}{l} (q_4 - q_1). \quad (3.62)$$

Từ các công thức (3.13), (3.14), (3.15), ta có:

$$R_2 = Q_a = \frac{2EI}{l^2} \left[(\mu_1 + \mu_2)(q_3 + q_6) - \mu_3 \frac{(q_5 - q_2)}{l} \right]; \quad (3.63)$$

$$R_3 = -M_a = \frac{2EI}{l} \left[\mu_1 q_3 + \mu_2 q_6 - (\mu_1 + \mu_2) \frac{(q_5 - q_2)}{l} \right]; \quad (3.64)$$

$$R_5 = -Q_b = -\frac{2EI}{l^2} \left[(\mu_1 + \mu_2)(q_3 + q_6) - \mu_3 \frac{(q_5 - q_2)}{l} \right]; \quad (3.65)$$

$$R_6 = -M_b = \frac{2EI}{l} \left[\mu_2 q_3 + \mu_1 q_6 - (\mu_1 + \mu_2) \frac{(q_5 - q_2)}{l} \right]. \quad (3.66)$$

Gọi Φ_j là các hàm lượng giác:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{v^3 \sin v}{12\Phi_n}; & \Phi_2 &= \frac{v^2(1 - \cos v)}{6\Phi_n}; \\ \Phi_3 &= \frac{v(\sin v - v \cos v)}{4\Phi_n}; & \Phi_4 &= \frac{v(v - \sin v)}{2\Phi_n}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

trong đó: $\Phi_n = 2 - 2\cos v - v \sin v$; và $v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

Với mỗi đối số v , giữa các hàm Φ_j và các hàm μ , φ , η đã biết trong 3.3 có sự liên hệ như sau:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2\Phi_3 = 2\varphi_2; & \mu_2 &= \Phi_4 = \varphi_3; \\ \mu_1 + \mu_2 &= 3\Phi_3 = 3\eta_3; & \mu_3 &= 6\Phi_1 = 6\eta_2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Sau khi thay thế các liên hệ (3.68) vào các phương trình (3.61)-(3.66) và sắp xếp theo thứ tự các tọa độ nút ta được các phương trình:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{EA}{l} (q_1 - q_4); \\ R_2 &= \frac{EI}{l} \left[\frac{12}{l^2} \Phi_1 q_2 + \frac{6}{l} \Phi_2 q_3 - \frac{12}{l^2} \Phi_1 q_5 + \frac{6}{l} \Phi_2 q_6 \right]; \\ R_3 &= \frac{EI}{l} \left[\frac{6}{l} \Phi_2 q_2 + 4\Phi_3 q_3 - \frac{6}{l} \Phi_2 q_5 + 2\Phi_4 q_6 \right]; \\ R_4 &= -\frac{EA}{l} (q_1 - q_4); \\ R_5 &= \frac{EI}{l} \left[-\frac{12}{l^2} \Phi_1 q_2 - \frac{6}{l} \Phi_2 q_3 + \frac{12}{l^2} \Phi_1 q_5 - \frac{6}{l} \Phi_2 q_6 \right]; \\ R_6 &= \frac{EI}{l} \left[\frac{6}{l} \Phi_2 q_2 + 2\Phi_4 q_3 - \frac{6}{l} \Phi_2 q_5 + 4\Phi_3 q_6 \right]. \end{aligned}$$

Từ các liên hệ tìm được giữa nội lực nút và chuyển vị nút ta dễ dàng suy ra cấu trúc của ma trận độ cứng trong hệ tọa độ địa phương:

$$[K]_i = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2}\Phi_1 & \frac{6}{l}\Phi_2 & 0 & -\frac{12}{l^2}\Phi_1 & \frac{6}{l}\Phi_2 \\ 0 & \frac{6}{l}\Phi_2 & 4\Phi_3 & 0 & -\frac{6}{l}\Phi_2 & 2\Phi_4 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{l^2}\Phi_1 & -\frac{6}{l}\Phi_2 & 0 & \frac{12}{l^2}\Phi_1 & -\frac{6}{l}\Phi_2 \\ 0 & \frac{6}{l}\Phi_2 & 2\Phi_4 & 0 & -\frac{6}{l}\Phi_2 & 4\Phi_3 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Ma trận độ cứng $[K]_i$ của phần tử thứ i là ma trận vuông, kích thước $[6 \times 6]$, đối xứng qua đường chéo chính.

Chú ý:

- ❖ Ma trận (3.69) tương ứng với các hàm Φ_j xác định theo (3.67) được xây dựng với giả thiết phần tử thanh chịu lực nén P .
- ❖ Khi phần tử thanh chịu lực kéo P , ma trận độ cứng của phần tử thanh vẫn có cấu trúc như (3.69) song các hàm Φ_j tương ứng cần được xác định như sau:

$$\Phi_1 = \frac{v^3 shv}{12\Phi_k}; \quad \Phi_2 = \frac{v^2(chv - 1)}{6\Phi_k}; \quad \Phi_3 = \frac{v(chv - shv)}{4\Phi_k}; \quad \Phi_4 = \frac{v(shv - v)}{2\Phi_k},$$

$$\text{trong đó: } \Phi_k = 2 - 2chv + v shv; \quad \text{và} \quad v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (3.70)$$

- ❖ Khi $P = 0$, các hàm Φ_j nhận giá trị bằng 1.
- ❖ Nếu khai triển các hàm $\sin v$, $\cos v$, $sh v$ và $ch v$ thành chuỗi nguyên thì các hàm Φ_j cũng được biểu thị dưới dạng chuỗi nguyên như sau [2]:

$$\Phi_1 = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [\mp v^2]^n}{12\Phi}; \quad \Phi_2 = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} [\mp v^2]^n}{6\Phi};$$

$$\Phi_3 = \frac{\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} [\mp v^2]^n}{4\Phi}; \quad \Phi_4 = \frac{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} [\mp v^2]^n}{2\Phi}.$$

$$\text{trong đó: } \Phi = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [\mp v^2]^n.$$

Dấu âm tương ứng với khi lực dọc là nén, dấu dương tương ứng với khi lực dọc là kéo.

Các chuỗi nguyên đó tạo điều kiện thuận lợi và áp dụng có hiệu quả khi tính toán có sự trợ giúp của máy tính vì sẽ không gặp phải những vướng mắc số học khi lực P là nhỏ. Hơn nữa, khai triển dạng chuỗi này phù hợp với cả hai trường hợp khi lực P là kéo hay nén. Thông thường, với số thành phần của chuỗi là 10 là đủ đảm bảo mức độ chính xác cần thiết.

Khi lực dọc trong phần tử là nhỏ, nếu sử dụng chuỗi Taylor để khai triển các hàm Φ_j và chỉ giữ lại hai số hạng đầu của chuỗi, ta có:

$$\Phi_1 = 1 - \frac{v^2}{10}; \quad \Phi_2 = 1 - \frac{v^2}{60}; \quad \Phi_3 = 1 - \frac{v^2}{30}; \quad \Phi_4 = 1 + \frac{v^2}{60}.$$

Sau khi thay vào (3.69), ma trận độ cứng sẽ được mô tả dưới dạng tổng của hai ma trận như sau:

$$[K]_i = [K_o]_i + [K_P]_i, \quad (3.71)$$

$[K_o]_i$ – ma trận độ cứng của phần tử thanh đàn hồi tuyến tính thông thường, có cấu trúc như sau:

$$[K_o]_i = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & 0 & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 4 & 0 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 2 & 0 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix}; \quad (3.72)$$

$[K_P]_i$ – ma trận độ cứng của phần tử thanh trong đó xét đến ảnh hưởng của lực P tới độ cứng chống uốn của phần tử, có cấu trúc như sau:

$$[K_P]_i = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2l^2}{10} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{l^2}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{15}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{30}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}; \quad (3.73)$$

$[K_P]_i$ nhận dấu âm khi phần tử chịu lực nén và nhận dấu dương khi phần tử chịu lực kéo.

2. Bài toán không gian

Xét phần tử thứ i thuộc hệ thanh không gian là thanh lăng trụ trong hệ tọa độ địa phương như trên hình 3.47, các độ cứng khi uốn, khi xoắn và khi nén hoặc kéo không đổi, chiều dài l , chịu lực nén P với quy ước chiều dương và thứ tự của tọa độ nút như trên hình 3.47b. Gọi:

$$[q]_i = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}\}_i$$

– ma trận cột, kích thước $[12 \times 1]$, biểu thị chuyển vị nút của PTHH thứ i ;

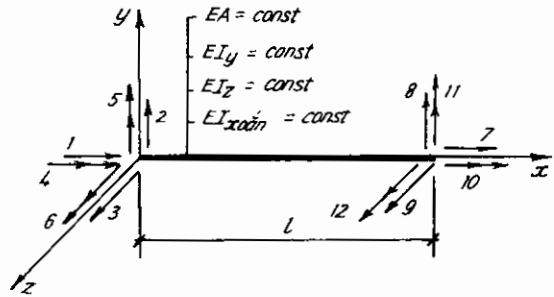
$$[R]_i = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ R_7 \ R_8 \ R_9 \ R_{10} \ R_{11} \ R_{12}\}_i$$

– ma trận cột, kích thước $[12 \times 1]$, biểu thị nội lực nút của PTHH thứ i .

trong đó:

q_1, R_1 và q_7, R_7 – chuyển vị, nội lực theo phương x tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .

q_2, R_2 và q_8, R_8 – chuyển vị, nội lực theo phương y tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .



Hình 3.47

q_3, R_3 và q_9, R_9 – chuyển vị, nội lực theo phương z tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .

q_4, R_4 và q_{10}, R_{10} – chuyển vị xoay, mômen xoắn quanh trục x tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .

q_5, R_5 và q_{11}, R_{11} – chuyển vị xoay, mômen uốn quanh trục y tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .

q_6, R_6 và q_{12}, R_{12} – chuyển vị xoay, mômen uốn quanh trục z tại nút trái và nút phải của phần tử thứ i .

Giữa chuyển vị và nội lực trong PTHH thứ i có sự liên hệ theo phương trình cơ bản (3.60) của phương pháp PTHH với $[K]_i$ là ma trận độ cứng của PTHH thứ i trong hệ tọa độ địa phương. Để lập ma trận độ cứng tương ứng ta có thể tổ hợp các nguyên nhân tác dụng độc lập đã xét trong bài toán phẳng đồng thời chú ý:

❖ ngoài trường hợp uốn ngang trong mặt phẳng xOy (quanh trục z) tương ứng với các tọa độ nút 2, 6, 8, 12 và độ cứng EI_z đã xét trong bài toán phẳng, cần bổ sung trường hợp uốn ngang trong mặt phẳng xOz (quanh trục y) tương ứng

với các tọa độ nút 3, 5, 9, 11 và độ cứng EI_y :

❖ cân bằng xung quanh trục x tương ứng với các tọa độ nút 4, 10 và độ cứng $GI_{xoắn}$: từ SBVL ta có các liên hệ như sau:

$$R_4 = \frac{GI_{xoắn}}{l} (q_4 - q_{10}) ; \quad R_{10} = \frac{GI_{xoắn}}{l} (-q_4 + q_{10}) ;$$

❖ lực nén hoặc kéo P chỉ có ảnh hưởng đến biến dạng uốn.

Ma trận độ cứng $[K]_i$ trong bài toán không gian cũng được mô tả dưới dạng tổng của hai ma trận như sau:

$$[K]_i = [K_o]_i + [K_p]_i , \quad (3.74)$$

$[K_o]_i$ – ma trận độ cứng của phần tử thanh dàn hồi tuyến tính thông thường, đối xứng qua đường chéo chính, kích thước $[12 \times 12]$ và có cấu trúc như sau:

$$[K_o]_i = \begin{bmatrix} k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,2} & 0 & 0 & 0 & k_{2,6} & 0 & k_{2,8} & 0 & 0 & 0 & k_{2,12} \\ 0 & 0 & k_{3,3} & 0 & k_{3,5} & 0 & 0 & 0 & k_{3,9} & 0 & k_{3,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{5,3} & 0 & k_{5,5} & 0 & 0 & 0 & k_{5,9} & 0 & k_{5,11} & 0 \\ 0 & k_{6,2} & 0 & 0 & 0 & k_{6,6} & 0 & k_{6,8} & 0 & 0 & 0 & k_{6,12} \\ = & k_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{8,2} & 0 & 0 & 0 & k_{8,6} & 0 & k_{8,8} & 0 & 0 & 0 & k_{8,12} \\ 0 & 0 & k_{9,3} & 0 & k_{9,5} & 0 & 0 & 0 & k_{9,9} & 0 & k_{9,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11,3} & 0 & k_{11,5} & 0 & 0 & 0 & k_{11,9} & 0 & k_{11,11} & 0 \\ 0 & k_{12,2} & 0 & 0 & 0 & k_{12,6} & 0 & k_{12,8} & 0 & 0 & 0 & k_{12,12} \end{bmatrix} ;$$

trong đó:

$$k_{1,1} = -k_{1,7} = -k_{7,1} = k_{7,7} = EA/l ;$$

$$k_{2,2} = -k_{2,8} = -k_{8,2} = k_{8,8} = 12EI_z/l^3 ;$$

$$k_{2,6} = k_{6,2} = k_{2,12} = k_{12,2} = -k_{6,8} = -k_{8,6} = -k_{8,12} = -k_{12,8} = 6EI_z/l^3 ;$$

$$k_{3,3} = -k_{3,9} = -k_{9,3} = k_{9,9} = 12EI_y/l^3 ;$$

$$k_{3,5} = k_{5,3} = k_{3,11} = k_{11,3} = -k_{5,9} = -k_{9,5} = -k_{9,11} = -k_{11,9} = -6EI_y/l^3 ;$$

$$k_{4,4} = -k_{4,10} = -k_{10,4} = k_{10,10} = GI_{xoắn}/l ;$$

$$k_{5,5} = k_{11,11} = 4EI_y/l ;$$

$$k_{6,6} = k_{12,12} = 4EI_z/l ;$$

$$k_{5,11} = k_{11,5} = 2EI_y/l ;$$

$$k_{6,12} = k_{12,6} = 2EI_z/l ;$$

$[K_P]_i$ – ma trận độ cứng của phần tử thanh trong đó xét đến ảnh hưởng của lực P tới độ cứng chống uốn của phần tử, đối xứng qua đường chéo chính, kích thước $[12 \times 12]$ và có cấu trúc như sau:

$$[K_P]_i = \frac{P}{l} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & -6/5 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 6/5 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & -6/5 & 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 0 & 2l^2/15 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & -l^2/30 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 2l^2/15 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & -l^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & 0 & 6/5 & 0 & 0 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & -6/5 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 6/5 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 0 & -l^2/30 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 2l^2/15 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & -l^2/30 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 2l^2/15 \end{bmatrix}$$

Các đại lượng l ; EA ; EI_z ; EI_y ; $GI_{xoắn}$; P lần lượt là chiều dài, độ cứng khi nén hoặc kéo, độ cứng khi uốn quanh trục z , độ cứng khi uốn quanh trục y , độ cứng khi xoắn quanh trục x và lực nén hoặc kéo của phần tử thứ i .

B. Thứ tự giải bài toán ổn định của hệ thanh

1. Rời rạc hóa hệ thanh và tải trọng để sao cho trong hệ chỉ bao gồm các phần tử thanh thẳng, tiết diện không đổi, chịu lực đặt ở hai đầu thanh. Cần thực hiện bước này khi trong hệ tồn tại các thanh có tiết diện thay đổi, thanh cong.
2. Lập ma trận độ cứng trong hệ tọa độ địa phương cho các phần tử theo (3.71), (3.72), (3.73) hoặc (3.74).

$$[K]_i = [K_o]_i \mp [K_P]_i. \quad (3.75)$$

3. Chuyển các ma trận $[K]_i$ từ hệ tọa độ địa phương sang hệ tọa độ chung. Để thực hiện, ta có thể sử dụng ma trận $[T]_i$ là ma trận chuyển hệ tọa độ từ hệ tọa độ địa phương của phần tử thứ i sang hệ tọa độ chung.

Nếu gọi $[U]_i$ là ma trận cosin chỉ phương giữa hệ tọa độ chung $x' y' z'$ và hệ tọa độ địa phương $x y z$ của phần tử thứ i với cấu trúc:

$$[U]_i = \begin{bmatrix} l_{xx'} & l_{xy'} & l_{xz'} \\ l_{yx'} & l_{yy'} & l_{yz'} \\ l_{zx'} & l_{zy'} & l_{zz'} \end{bmatrix}$$

thì $[T]_i$ sẽ có cấu trúc như sau:

- Trong bài toán không gian: $[T]_i$ là ma trận khối chéo, gồm bốn khối $[I]_i$, kích thước $[12 \times 12]$:

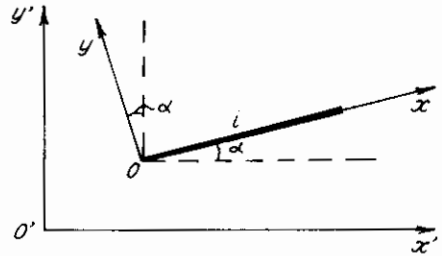
$$[T]_i = \begin{bmatrix} [I]_i & & & \\ & [I]_i & & \\ & & [I]_i & \\ & & & [I]_i \end{bmatrix}.$$

- Trong bài toán phẳng: $[T]_i$ là ma trận khối chéo, gồm hai khối $[I]_i$, kích thước $[6 \times 6]$:

$$[T]_i = \begin{bmatrix} [I]_i & \\ & [I]_i \end{bmatrix}.$$

Nếu bài toán được thực hiện trong mặt phẳng $x y$, gọi α là góc hợp giữa hệ tọa độ chung $(x' y')$ và hệ tọa độ địa phương $(x y)$ của phần tử thứ i (hình 3.48), ta có:

$$[I]_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Hình 3.48

Do đó, ma trận độ cứng $[K']_i$ của phần tử thứ i trong hệ tọa độ chung được xác định như sau:

$$[K']_i = [T]_i^T [K]_i [T]_i = [K'_o]_i \mp [K'_p]_i \quad (3.76)$$

với: $[K'_o]_i = [T]_i^T [K_o]_i [T]_i$; $[K'_p]_i = [T]_i^T [K_p]_i [T]_i$.

4. Lập ma trận độ cứng $[K'_o]_g$ và $[K'_p]_g$ cho toàn kết cấu trong hệ tọa độ chung. Nếu trong hệ có n phần tử thì $[K']_g$ là ma trận khối chéo, gồm n khối, tìm được bằng cách ghép nối n ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ tọa độ chung:

$$[K']_g = \begin{bmatrix} [K']_1 & & & \\ & [K']_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [K']_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & [K']_n \end{bmatrix} = [K'_o]_g \mp [K'_p]_g. \quad (3.77)$$

với: $[K'_o]_g = \begin{bmatrix} [K'_o]_1 & & & \\ & [K'_o]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [K'_o]_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & [K'_o]_n \end{bmatrix}$,

$[K'_p]_g = \begin{bmatrix} [K'_p]_1 & & & \\ & [K'_p]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [K'_p]_i & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & [K'_p]_n \end{bmatrix}$,

Phương trình cân bằng tương ứng của toàn kết cấu có dạng:

$$[R'] = [K']_g [q'] = \{ [K'_o]_g \mp [K'_p]_g \} [q']. \quad (3.78)$$

5. Khi trùng lặp. Đối với các nút có r phần tử quy tụ thì trong (3.77) sẽ có r phương trình được lập lại, do đó cần khử bỏ sự trùng lặp này tức là gộp r phương trình đó thành một phương trình chung. Có nhiều cách thực hiện, nếu sử dụng ma trận nhận dạng $[H]$ có cấu trúc phụ thuộc hình dạng kết cấu như đã quen biết trong bài toán kiểm tra độ bền thì phương trình cơ bản (3.78) sau khi khử trùng lặp được viết dưới dạng:

$$[\bar{R}] = [\bar{K}] [\bar{q}] = ([\bar{K}_o] \mp [\bar{K}_p]) [\bar{q}], \quad (3.79)$$

trong đó: $[\bar{R}] = [H]^T [R']; \quad [q'] = [H] [\bar{q}];$

$$[\bar{K}] = [H]^T [K']_g [H]; \quad [\bar{K}_o] = [H]^T [K'_o]_g [H]; \quad [\bar{K}_p] = [H]^T [K'_p]_g [H].$$

6. *Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng.* Phương trình (3.79) thể hiện sự cân bằng của kết cấu còn được tự do trong không gian nên ma trận $[\bar{K}]$ suy biến. Do đó, cần đưa điều kiện biên vào bài toán để khử suy biến. Sau khi bổ sung điều kiện biên, phương trình (3.79) sẽ có dạng:

$$[R^*] = [K^*] [q^*] = \{[K^*_{*o}] \mp [K^*_{*p}]\} [q^*]. \quad (3.80)$$

$[K^*]$, $[K^*_{*o}]$, $[K^*_{*p}]$ là các ma trận suy từ $[\bar{K}]$, $[\bar{K}_o]$, $[\bar{K}_p]$ bằng cách loại bỏ hàng thứ i và cột thứ i tương ứng với thành phần chuyển vị nút thứ i bằng không.

7. *Lập phương trình ổn định.* Theo giả thiết 5 (mục 3.1), tải trọng tác dụng trên hệ chỉ đặt ở các nút. Đó là các lực nén hoặc kéo P được xác định bằng lực dọc trong các thanh khi hệ chịu tải trọng đã cho bất kỳ. Vì các lực P được quy ước xem như là một trong các tính chất đặc trưng của hệ mà không được xem là tải trọng nên ma trận lực đặt ở nút $[R^*] = [0]$. Phương trình (3.80) trở thành:

$$[K^*] [q^*] = \{[K^*_{*o}] \mp [K^*_{*p}]\} [q^*] = [0]. \quad (3.81)$$

Theo tiêu chí cân bằng ổn định dưới dạng tĩnh học, hệ sẽ mất ổn định khi tồn tại trạng thái lệch khỏi trạng thái ban đầu, tức là khi $[q^*] \neq [0]$. Do đó, hệ sẽ mất ổn định khi định thức của ma trận độ cứng bằng không:

$$|K^*| = |K^*_{*o} \mp K^*_{*p}| = 0. \quad (3.82)$$

Trong (3.82), ma trận $[K^*_{*p}]$ được thiết lập tương ứng với các lực P . Nếu gọi $[\bar{K}^*_{*p}]$ là ma trận tương ứng được thiết lập theo lực cùng bằng P_o chọn bất kỳ hoặc $P_o = 1$ và đặt $P = \lambda P_o$ thì trong trường hợp biến dạng nhỏ ta có viết $[\bar{K}^*_{*p}] = \lambda [K^*_{*p}]$, điều kiện (3.82) sẽ có dạng:

$$|K^*| = |K^*_{*o} \mp \lambda \bar{K}^*_{*p}| = 0. \quad (3.83)$$

Đó là phương trình ổn định, λ là trị riêng, giữ vai trò thông số cần tìm.

8. *Giải phương trình ổn định để tìm giá trị nhỏ nhất của λ , gọi là thông số tới hạn λ_{th} .* Có nhiều cách thực hiện, đơn giản và có hiệu quả là vận dụng cách tính lặp như sau:

◆ Lập $|K^*| = |K^*_{*o} \mp \lambda \bar{K}^*_{*p}|$

◆ Gán cho λ một giá trị gần đúng λ_1 , tính $|K^*_{*1}| = |K^*_{*o} \mp \lambda_1 \bar{K}^*_{*p}|$. Nếu $|K^*_{*1}| > 0$, hệ vẫn ổn định.

◆ Gán cho λ giá trị $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, tính $|K^*_{*2}| = |K^*_{*o} \mp \lambda_2 \bar{K}^*_{*p}|$.

- Nếu $|K^*_{22}| > 0$, hệ vẫn ổn định, tiếp tục tăng giá trị λ .
- Nếu $|K^*_{22}| < 0$, hệ mất ổn định. Điều này chứng tỏ $\lambda_2 > \lambda_{th}$. Khi hai giá trị λ_1 và λ_2 đã rất gần nhau, vận dụng phép nội suy tuyến tính để tìm λ_{th} .

Khi thực hiện cần chọn $\Delta\lambda$ đủ nhỏ để đảm bảo giữa λ_1 và λ_2 chỉ có một λ_{th} .

Chú thích: Hiện lưu hành một số phần mềm có khả năng tính toán ổn định kết cấu theo phương pháp PTHH, chẳng hạn như P. Frame; MICROSTRAN; STRAND6....

❖ Chương trình MICROSTRAN V5.5/32 thuộc Hệ thống Kỹ thuật Vương quốc Anh (Engineering System, London) là chương trình tính toán và thiết kế kết cấu hệ thanh phẳng và hệ thanh không gian với số phần tử tối đa là 32000 phần tử. Các tiêu chuẩn thiết kế theo hệ tiêu chuẩn của Hoa kỳ, Anh, Úc, Newzealand. MICROSTRAN V5.5/32 có khả năng giải các bài toán: đàn hồi tuyến tính, đàn hồi phi tuyến, ổn định và động lực học qua phân tích các phổ phản ứng. Trong bài toán ổn định, MICROSTRAN V5.5/32 cho kết quả lực tới hạn trong kết cấu và chiều dài quy đổi (μl) của các thanh khi kiểm tra ổn định tương ứng với các trường hợp kết cấu cụ thể chịu tải trọng cho trước. Dạng mất ổn định của kết cấu tương ứng với các trị riêng được thể hiện bằng hình ảnh.

❖ Chương trình STRAND6 là sản phẩm của Công ty G+D Computing Pty, Ltd., Australia (1991). STRAND6 tạo điều kiện thuận lợi cho việc giao diện giữa người sử dụng và máy. Với một thư viện lớn các phần tử mẫu, STRAND6 có khả năng áp dụng rộng rãi để giải các bài toán tĩnh học, động lực học, ổn định cho các hệ thanh, tấm, vỏ và vật thể ba chiều làm việc trong giai đoạn đàn hồi tuyến tính hay phi tuyến về vật liệu và phi tuyến hình học, đặc biệt là các bài toán về năng lượng dòng chảy như bài toán truyền nhiệt. Trong bài toán ổn định, cũng như MICROSTRAN V5.5/32, STRAND6 cho kết quả lực tới hạn hay ứng suất tới hạn trong kết cấu. Dạng mất ổn định của kết cấu tương ứng với các trị riêng được thể hiện bằng hình ảnh.

Ví dụ 3.11. Xác định lực tới hạn trong khung chịu lực như trên hình 3.49a.

Sơ đồ các tọa độ nút trong hệ tọa độ chung được bố trí như trên hình 3.49b. Số liệu các phần tử ghi trong bảng 3.3.

Bảng 3.3

Phần tử	Nút i (đầu)	Nút j (cuối)	A	EI	l	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
1	1	2	A	EI	l	0	-1
2	1	3	A	EI	l/2	1	0

❖ **Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ chung**

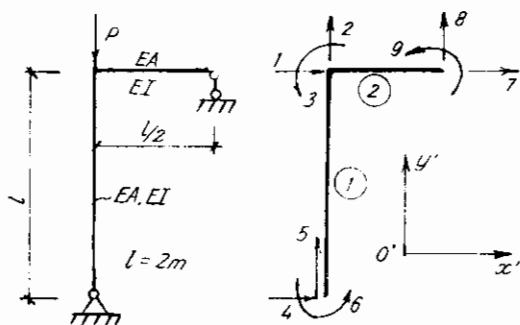
Theo (3.71) và (3.76):

$$[K']_i = [K'_o]_i - [K'_p]_i = [T]_i^T ([K_o]_i - [K_p]_i) [T]_i \quad (a)$$

◇ **Phần tử 1:**

$[T]_1$ là ma trận khối chéo, gồm hai khối $[T]_i$, kích thước $[6 \times 6]$:

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Theo (3.72) và (3.73):

Hình 3.49

$$[K_o]_1 - [K_P]_1 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & 0 & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 4 & 0 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & 0 & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & \frac{6}{l} & 2 & 0 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{2l^2}{10} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{l^2}{10} \\ 0 & \frac{1}{15} & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận theo (a), ta được:

$$[K']_1 = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} \\ 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 4 & \frac{6}{l} & 0 & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} \\ 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2l^2}{10} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} \end{bmatrix}$$

◇ **Phần tử 2:** Phần tử này có tọa độ địa phương cùng phương với tọa độ chung và không chịu lực nén nên $P = 0$, $[T]_2$ trở thành ma trận đơn vị. Theo (a), ta có:

$$[K']_2 = [K_o]_2 = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48}{l^2} & \frac{12}{l} & 0 & -\frac{48}{l^2} & \frac{12}{l} \\ 0 & \frac{12}{l} & 4 & 0 & -\frac{12}{l} & 2 \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{48}{l^2} & -\frac{12}{l} & 0 & \frac{48}{l^2} & -\frac{12}{l} \\ 0 & \frac{12}{l} & 2 & 0 & -\frac{12}{l} & 4 \end{bmatrix}$$

❖ *Lập ma trận độ cứng cho toàn kết cấu trong hệ tọa độ chung:*

Trong hệ có 2 phần tử nên $[K']_g$ là ma trận khối chéo, gồm 2 khối, kích thước $[12 \times 12]$ tìm được bằng cách ghép nối 2 ma trận $[K']_1$ và $[K']_2$:

$$[K']_g = \begin{bmatrix} [K']_1 & [0] \\ [0] & [K']_2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

❖ *Lập ma trận nhận dạng kết cấu $[H]$ và khử trùng lặp*

Ma trận $[H]$ có cấu trúc như sau:

- số cột bằng số tọa độ nút trong hệ tọa độ chung, xếp theo thứ tự đã quy định;
- số hàng bằng số tọa độ nút của các phần tử ($6 \times 2 = 12$), xếp theo thứ tự tương ứng với tọa độ nút trong hệ tọa độ chung;
- $H_{ik} = 1$ khi $i = k$ và $H_{ik} = 0$ khi $i \neq k$, với i là chỉ số biểu thị hàng tương ứng với tọa độ nút trong hệ tọa độ chung.

$$[H] = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \\ \left. \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{matrix} \end{matrix} \quad (c)$$

Kết quả khử trùng lặp cho ma trận độ cứng toàn kết cấu:

$$\begin{aligned}
[\bar{K}] &= [H]^T [K]_g [H] = \\
&= \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} - \frac{2A}{l} & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} & -\frac{2A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A}{l} + \frac{96}{l^2} & \frac{24}{l} & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{96}{l^2} & \frac{24}{l} \\ -\frac{6}{l} & \frac{24}{l} & 12 & \frac{6}{l} & 0 & 2 & 0 & -\frac{24}{l} & 4 \\ -\frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & 0 & \frac{6}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{l} & 0 & 2 & \frac{6}{l} & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{96}{l^2} & -\frac{24}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{96}{l^2} & -\frac{24}{l} \\ 0 & \frac{24}{l} & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{24}{l} & 8 \end{bmatrix} - \\
&- \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & 0 & \frac{l}{10} & \frac{6}{5} & 0 & \frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} & \frac{l}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{d}
\end{aligned}$$

❖ *Khử dạng suy biến của ma trận độ cứng toàn kết cấu theo điều kiện biên*

Theo điều kiện liên kết, nếu bỏ qua biến dạng dọc trục trong thanh dầm ta có các điều kiện biên: $q_1 = q_4 = q_5 = q_8 = 0$. Do đó, để khử dạng suy biến ta loại bỏ các hàng và các cột tương ứng với các chuyển vị bằng không.

Ngoài ra, nếu chú ý là các chuyển vị $q_1 = q_7$ thì ta có thể giảm kích thước của ma trận độ cứng toàn kết cấu bằng cách sáp nhập các hàng và cột 1 với 7.

Cũng có thể thực hiện những điều nói trên bằng cách lập một ma trận biến đổi $[G]$ tương tự như ma trận $[H]$ và thực hiện phép nhân ma trận.

Ma trận $[G]$ có cấu trúc như sau:

- số hàng bằng số cột của $[\bar{K}]$;
- số cột bằng số hàng hoặc cột của $[\bar{K}]$ trừ đi số lượng các chuyển vị bằng không, mang các chỉ số theo thứ tự phù hợp với các chỉ số của hàng tương ứng với chuyển vị khác không,
- để thực hiện phép loại bỏ: $G_{jk} = 0$ với mọi k khi j là chỉ số biểu thị hàng tương ứng với chuyển vị bằng không; các phần tử G_{jk} còn lại bằng 1;
- để thực hiện phép sắp nhập: thực hiện như khi lập ma trận $[H]$.

Đối với bài toán này, ta có:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad (e)$$

1 3 6 9

Kết quả khử suy biến cho ma trận độ cứng toàn kết cấu:

$$[K^*] = [G]^T [\bar{K}] [G] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & 0 \\ -\frac{6}{l} & 12 & 2 & 4 \\ -\frac{6}{l} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & -\frac{l}{10} & 0 \\ -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & -\frac{l^2}{30} & 0 \\ -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & \frac{2l^2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f)$$

Đặt $P = \lambda \times 30EI/l^2$, sau khi thay vào (f), ta được:

$$[K^*] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12-36\lambda}{l^2} & \frac{-6+3\lambda}{l} & \frac{-6+3\lambda}{l} & 0 \\ \frac{-6+3\lambda}{l} & 12-4\lambda & 2+\lambda & 4 \\ \frac{-6+3\lambda}{l} & 2+\lambda & 4-4\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

❖ Lập và giải phương trình ổn định: $|K^*| = 0$.

Vận dụng cách tính lặp để giải phương trình ổn định, tìm thông số tới hạn λ_{th} . Sau khi thực hiện một số lần tính $|K^*|$ với các giá trị λ khác nhau nhằm xác định khoảng giá trị λ dẫn đến sự đổi dấu của định thức $|K^*|$ ta thấy:

Với $l = 2 \text{ m}$: • Khi $\lambda = 0,0607$, $|K^*| = 0,3916 > 0$, hệ vẫn ổn định.

• Khi $\lambda = 0,0610$, $|K^*| = -0,25000 < 0$, hệ mất ổn định.

Hai giá trị của λ đã rất gần nhau, vận dụng phép nội suy tuyến tính ta tìm được: $\lambda_{th} = 0,0609$.

$$\text{Do đó: } P_{th} = \lambda_{th} \frac{30EI}{l^2} = 0,0609 \cdot \frac{30EI}{l^2} = 1,8275 \frac{EI}{l^2}.$$

Bài tập

III.1. Cho hệ như trên hình III.1. Vận dụng phương pháp lực để lập phương trình ổn định.

Tìm lực tới hạn cho các trường hợp sau:

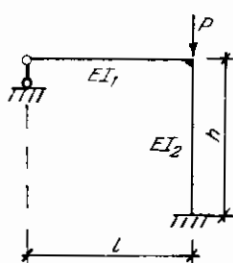
a) Khi $EI_1 = EI_2 = EI$; $h = l$.

b) Khi $EI_1 = \infty$.

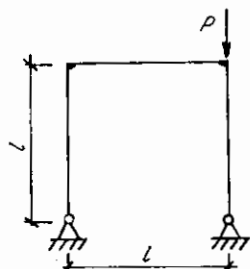
c) Khi $EI_1 = 0$.

III.2. Vận dụng phương pháp lực để tìm lực tới hạn cho hệ chịu lực nén như trên hình

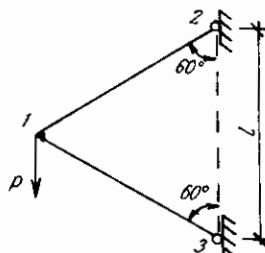
III.2. Cho biết: $EI = \text{const}$.



Hình III.1



Hình III.2



Hình III.3

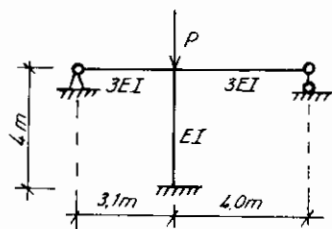
III.3. Cho hệ chịu lực P như trên hình III.3. Vận dụng phương pháp lực để lập phương trình ổn định và tìm giá trị tới hạn của P . Cho biết: $EI = \text{const}$.

Chỉ dẫn: Chọn hệ cơ bản bằng cách thay liên kết hàn bằng liên kết khớp tại nút 1, ẩn là mômen uốn tại nút 1. Khi hệ chưa mất ổn định, lực dọc trong các thanh: $N_{13} = -P$ (nén); $N_{12} = +P$ (kéo). Nếu đặt:

$v_{13}^2 = P l^2 / EI = v^2$ thì $v_{12}^2 = -P l^2 / EI = -v^2$. Do đó, khi xác định chuyển vị do biến dạng của thanh

1-2 cần chú ý là thanh chịu kéo, các số liệu trong (3.6) cần được thay thế như sau: $v_{12}^2 = -v^2$; $v_{12} = i v$; các hàm $\sin v$ và $\text{tg } v$ được thay bằng $i \text{sh } v$ và $i \text{th } v$.

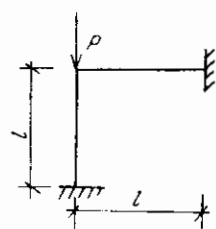
III.4. Tìm lực tới hạn cho hệ trên hình III.4.



Hình III.4

III.5. Tìm lực tới hạn cho hệ trên hình III.5. Cho biết:

$$EI = \text{const}$$



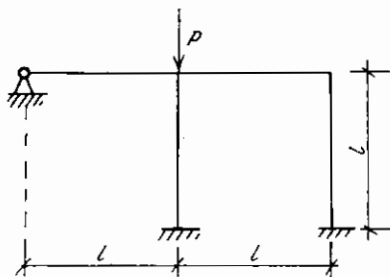
Hình III.5

III.6. Tìm lực tới hạn cho hệ trên hình III.6. Cho biết: $EI = \text{const}$.

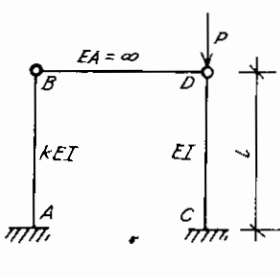
III.7. Cho hệ chịu lực P như trên hình III.7.

Tìm giá trị tới hạn của P tương ứng với hai trường hợp:

- khi $k = 1$;
- khi $k = \infty$.

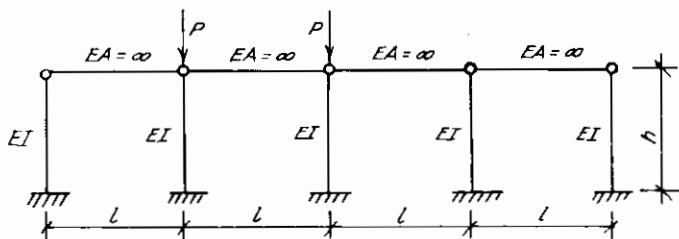


Hình III.6



Hình III.7

III.8. Cho hệ chịu các lực P như trên hình III.8. Tìm giá trị tới hạn của lực P .



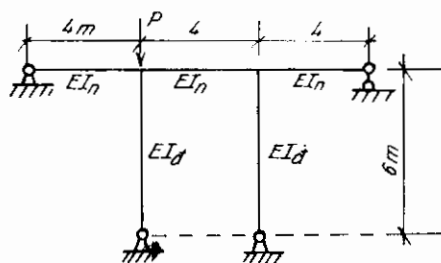
Hình III.8

III.9. Cho hệ chịu lực như trên hình III.9, tìm giá trị tới hạn của lực P . Cho biết độ cứng của các thanh:

- thanh ngang $EI_n = 2796 \text{ kNm}^2$;
- thanh đứng $EI_d = 1398 \text{ kNm}^2$.

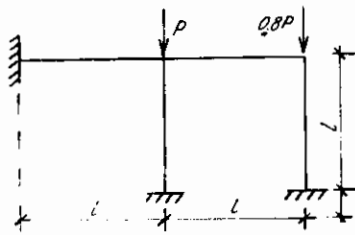
III.10. Cho hệ chịu lực như trên hình III.10, tìm giá trị tới hạn của lực P .

Cho biết: $EI = \text{const}$.

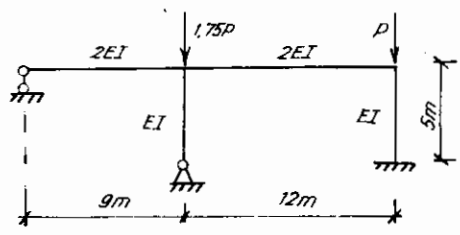


Hình III.9

III.11. Cho hệ chịu lực như trên hình III.11, tìm giá trị tới hạn của lực P .



Hình III.10



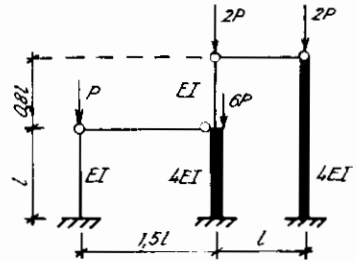
Hình III.11

III.12. Cho hệ chịu lực như trên hình III.12, tìm giá trị tới hạn của lực P . Cho biết các thanh ngang có độ cứng $EA = \infty$.

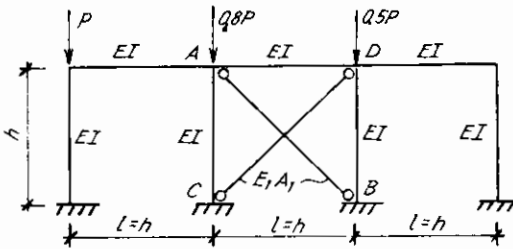
III.13. Cho hệ chịu lực như trên hình III.13, tìm giá trị tới hạn của lực P .

Cho biết các thanh xiên AB và CD có độ cứng $E_1 A_1 = \frac{40}{\sqrt{2}} \times \frac{EI}{h^2}$.

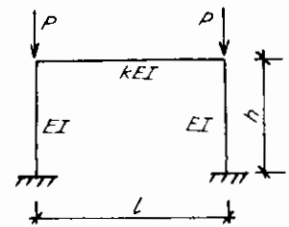
III.14. Cho hệ chịu lực tác dụng đối xứng như trên hình III.14. Lập phương trình ổn định và tìm giá trị tới hạn của P khi $k = 2$; $l = 2h$.



Hình III.12



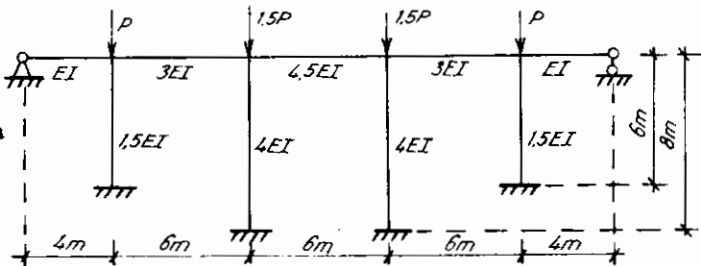
Hình III.13



Hình III.14

III.15. Cho hệ chịu lực như trên hình III.15. Xác định thông số tới hạn của tải trọng. Cho biết $P = 40 \text{ kN}$; $EI = 80 \text{ kNm}^2$.

Hình III.15

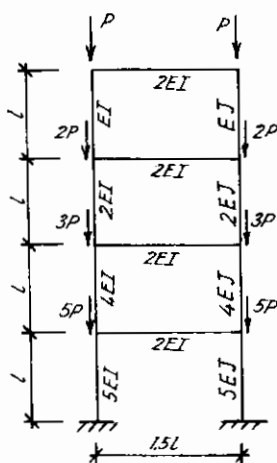


III.16. Cho hệ đối xứng chịu lực tác dụng đối xứng như trên hình III.16. Tìm giá trị tới hạn của P . Cho biết lúc tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với khi hệ mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng.

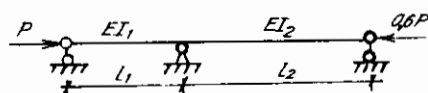
III.17. Cho dầm chịu lực như trên hình III.17. Vận dụng phương pháp lực, tìm giá trị tới hạn của P . Cho biết: $l_1 = 0,5 l$; $l_2 = 2 l$; $EI_1 = EI$; $EI_2 = 3,57EI$.

III.18. Cho dầm chịu lực và có liên kết như trên hình III.18a và b. Vận dụng phương pháp lực, tìm giá trị tới hạn của P .

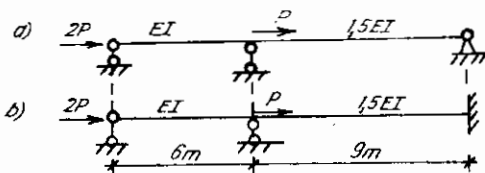
III.19. Cho dầm chịu lực như trên hình III.19. Tìm giá trị tới hạn của P .



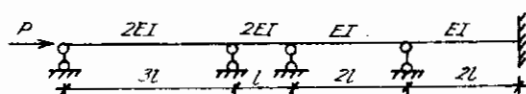
Hình III.16



Hình III.17

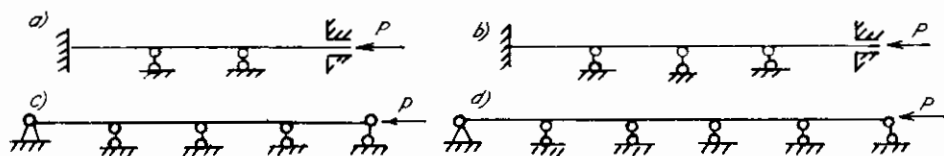


Hình III.18



Hình III.19

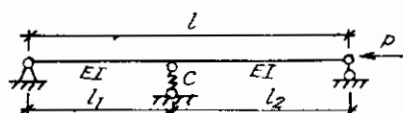
III.20. Cho các dầm liên tục chịu lực như trên các hình III.20a, b, c, d. Tìm giá trị tới hạn của P . Cho biết các nhịp dầm có chiều dài như nhau và bằng l ; $EI = \text{const}$.



Hình III.20

III.21. Lập phương trình ổn định cho hệ chịu lực như trên hình III.21.

Cho biết gối tựa trung gian là gối đàn hồi có độ cứng bằng c (lực cản tác dụng để sao cho gối đàn hồi chuyển vị bằng đơn vị).

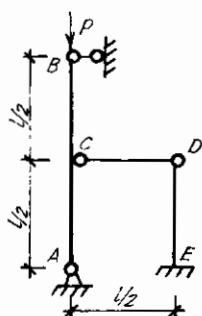


Hình III.21

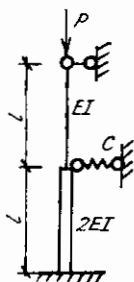
III.22. Tìm lực tới hạn cho hệ chịu lực P như trên hình III.22. Cho biết: $EI = const$; thanh ngang CD có độ cứng $EA = \infty$.

III.23. Tìm lực tới hạn cho hệ chịu lực P như trên hình III.23. Cho biết: gối tựa trung gian là gối đàn hồi có độ cứng bằng $c = EI/l^3$.

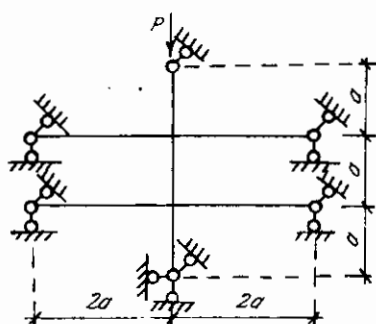
III.24. Tìm giá trị tới hạn của lực P tác dụng như trên hình III.24 khi thanh đứng bị mất ổn định theo dạng biến dạng vênh ra ngoài mặt phẳng hệ. Cho biết độ cứng tương ứng với dạng biến dạng nói trên của thanh đứng là EI , của các thanh ngang là $0,5EI$.



Hình III.22



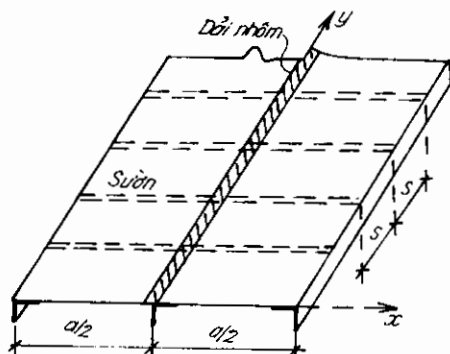
Hình III.23



Hình III.24

III.25. Tìm giá trị tới hạn của lực nén tác dụng trong dải nhôm nẹp trong bộ phận chịu nén của thân máy bay (hình III.25). Cho biết:

- Dải nhôm có chiều dài $l = 2$ m, độ cứng chịu uốn quanh trục x là $E_n I_x = 0,7 \cdot 10^4$ kN.cm²; được xem như đặt trên hai gối khớp ở hai biên và tựa trên các sườn ngang bằng nhôm đặt cách đều nhau là $s = 20$ cm.



Hình III.25

- Mỗi sườn ngang được xem như dầm đặt tự do trên hai khớp tựa có nhịp là $a = 50$ cm; độ cứng chịu uốn quanh trục y là $E_n I_y = 0,7 \cdot 10^3$ kN.cm².

Chỉ dẫn: Quy đổi các gối đàn hồi (sườn ngang) về môi trường đàn hồi tương đương để áp dụng kết quả tìm được trong mục 3.8.

III.26. Tìm ứng suất tới hạn trong hệ thanh biên trên của cầu dầm hở qua sông Kevđa ở Nga (cầu bị phá hoại năm 1875 khi có đoàn tàu chạy qua, hệ thanh biên trên có ứng suất lớn nhất tương ứng là $\sigma_{max} = 9,7$ kN/cm², và bị mất ổn định).

Các số liệu thực tế của cầu như sau:

- Chiều dài nhịp cầu $l = 33,5$ m; chiều dài mỗi đốt dầm $d = 213$ cm.
- Các thanh biên trên có : diện tích tiết diện $A = 146$ cm² ; mômen quán tính quanh trục thẳng đứng $I = 6580$ cm⁴ ; môđun đàn hồi của vật liệu $E = 1,96 \cdot 10^7$ N/cm².
- Các thanh đứng có : lực nén lớn nhất $N = 226$ kN; chiều cao $h = 195$ cm ; mômen quán tính quanh trục dọc theo chiều dài cầu $I_1 = 215$ cm⁴ ; môđun đàn hồi của vật liệu $E = 1,96 \cdot 10^7$ N/cm².
- Dầm ngang có độ cứng $EI_2 = \infty$.

III.27. Vận dụng phương pháp PTHH, tìm lực tới hạn cho hệ đã xét trong:

- a) Ví dụ 3.3 (hình 3.10a). Cho biết: $l = 1$ m; $EI = 6,667 \cdot 10^{-5}$ kN/m².
- b) Ví dụ 3.4 (hình 3.11a). Cho biết: $l = 1$ m; $EI = 13333,333$ kN/m².

III.28. Vận dụng chương trình tính ổn định theo phương pháp PTHH, tìm lực tới hạn cho hệ đã xét trong:

- a) Bài tập III.5 (hình III.5).
- b) Bài tập III.6 (hình III.6).
- c) Bài tập III.7 (hình III.7).
- d) Bài tập III.8 (hình III.8).

Cho biết: $l = h = 1$ m; vật liệu bằng thép; môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^8$ kN/m²; mômen quán tính của tiết diện $I = 3,125 \cdot 10^7$ m⁴.

4

Ổn định của thanh cong

Trong giáo trình này chủ yếu nghiên cứu ổn định dạng nên đúng tâm của thanh cong là kết cấu vòm thường gặp trong xây dựng. Như đã biết, vòm chỉ chịu nén đúng tâm khi trục thanh trùng với đường cong áp lực. Khi mất ổn định, vòm chuyển từ dạng cân bằng chịu nén sang dạng cân bằng chịu uốn và trong vòm sẽ phát sinh mômen uốn. Trong chương này cũng chỉ đề cập đến bài toán ổn định trong mặt phẳng cho hai dạng vòm có trục là *đường tròn* (gọi là vòm tròn) và *đường parabol* (gọi là vòm parabol). Ngoài ra cũng giới thiệu cách giải gần đúng để kiểm tra ổn định dạng uốn đối xứng của vòm parabol.

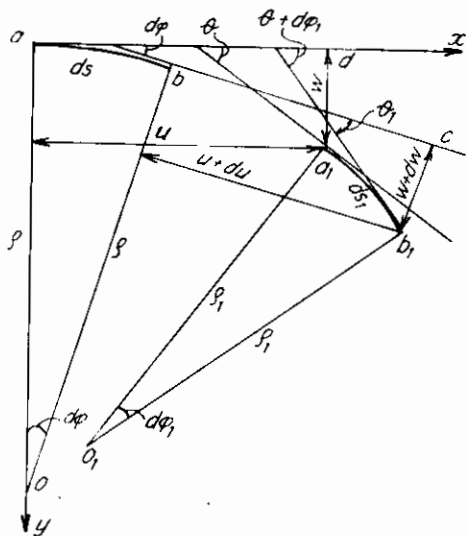
Trong các trường hợp khác, ta có thể thay trục thanh cong bằng đường đa giác với số lượng phân tử thẳng vừa đủ (khoảng 10 phân tử) và áp dụng phương pháp phân tử hữu hạn đã trình bày trong mục 3.10.

4.1. Phương trình vi phân và nghiệm tương ứng của thanh tròn

Xét một phân tử vô cùng bé ab của thanh cong tròn có góc ở tâm là $d\varphi$, bán kính cong là ρ (hình 4.1).

Chuyển vị tại điểm bất kỳ a trên thanh được phân tích thành hai thành phần: chuyển vị hướng tâm w (chiều dương hướng về tâm cong) và chuyển vị theo phương tiếp tuyến u (chiều dương hướng về bên phải). Các thành phần chuyển vị tương ứng của điểm b sẽ là $w+dw$ và $u+du$. Sau khi hệ bị biến dạng, phân tử ab chuyển dịch tới vị trí mới a_1b_1 như trên hình 4.1. Phân tử a_1b_1 có góc ở tâm là $d\varphi_1$, bán kính cong là ρ_1 .

Chọn trục x trùng với tiếp tuyến tại a và gọi θ là góc hợp thành giữa tiếp tuyến tại a_1 với tiếp tuyến tại a .



Hình 4.1

Từ hình 4.1 ta tìm được góc hợp thành giữa tiếp tuyến tại b_1 với tiếp tuyến tại b là

$\theta_1 = \theta + d\varphi_1 - d\varphi$. Do đó: $d\theta = \theta_1 - \theta = d\varphi_1 - d\varphi$.

Nếu quy ước chiều dương của mômen uốn là chiều làm giảm độ cong của thanh đồng thời chú ý là $ds = \rho d\varphi$ và $ds_1 = \rho_1 d\varphi_1$ thì từ Sức bên vật liệu ta có sự liên hệ giữa độ biến thiên của độ cong và mômen uốn như sau:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}. \quad (4.1)$$

Để thiết lập các điều kiện hình học, chiếu đường khép kín $abcb_1a_1da$ lên các trục tọa độ, ta có:

$$\sum X = ds \cos(d\varphi/2) + (u+du)\cos d\varphi - (w+dw)\sin d\varphi - ds_1 \cos[\theta + (d\varphi_1/2)] - u = 0.$$

$$\sum Y = ds \sin(d\varphi/2) + (u+du)\sin d\varphi + (w+dw)\cos d\varphi - ds_1 \sin[\theta + (d\varphi_1/2)] - w = 0.$$

Sau khi biến đổi các hàm lượng giác của tổng các góc và chỉ giữ lại các số hạng vô cùng bé bậc một, ta được:

$$ds + du - w d\varphi = ds_1 \cos \theta; \quad (4.2)$$

$$u d\varphi + dw = ds_1 \sin \theta. \quad (4.3)$$

Nếu bỏ qua biến dạng nén do lực dọc gây ra, tức là xem $ds_1 = ds$, thì với các góc θ được xem là nhỏ ta được:

$$\frac{du}{ds} - \frac{w}{\rho} = 0; \quad (4.4)$$

$$\frac{u}{\rho} + \frac{dw}{ds} = 0. \quad (4.5)$$

Đối với các thanh cong tròn có bán kính r , từ các phương trình (4.1), (4.4) và (4.5) ta tìm được phương trình vi phân của chuyển vị hướng tâm như sau:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} = -\frac{M}{EI}; \quad \text{hay} \quad \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{Mr^2}{EI}. \quad (4.6)$$

Phương trình vi phân của chuyển vị tiếp tuyến (4.4) sẽ trở thành:

$$\frac{du}{ds} - \frac{w}{r} = 0; \quad (4.7)$$

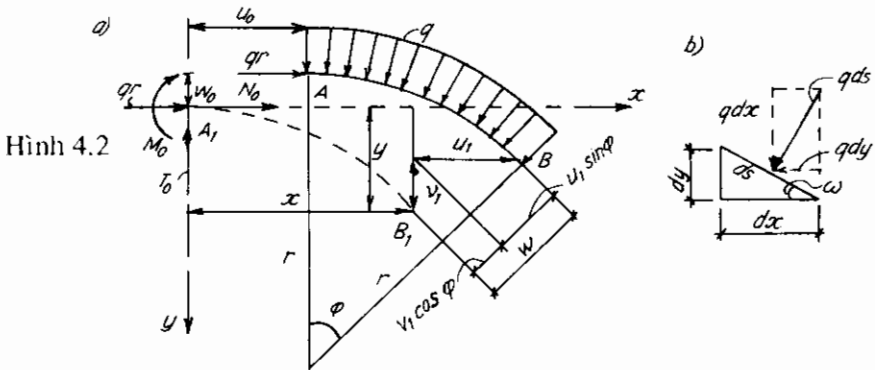
Để giải phương trình vi phân của chuyển vị hướng tâm (4.6) ta cần xác định mômen uốn phát sinh trong thanh ở trạng thái biến dạng khi mất ổn định.

Xét cung tròn AB chịu tải trọng tác dụng hướng tâm như trên hình 4.2. Khi thanh chưa mất ổn định, nếu bỏ qua biến dạng nén do lực dọc gây ra thì từ Cơ học kết cấu ta dễ dàng tìm được: tại tiết diện bất kỳ chỉ tồn tại lực dọc bằng qr .

Giả sử khi hệ vừa bị mất ổn định, cung tròn AB chuyển dịch tới vị trí A_1B_1 như trên hình 4.2. Chọn gốc tọa độ tại A_1 : trục x theo phương tiếp tuyến tại A ở trạng thái ban đầu; trục y vuông góc với trục x . Vị trí của B_1 được xác định theo các tọa độ x, y . Gọi u_0, w_0 và u_1, v_1 là chuyển vị theo phương x và y của điểm A và B : u

và w là chuyển vị theo phương tiếp tuyến và chuyển vị hướng tâm của B . Từ hình 4.2a ta tìm được các liên hệ sau:

$$x = r \sin \varphi - u_1 + u_0; \quad y = r - r \cos \varphi + v_1 - w_0; \quad w = u_1 \sin \varphi + v_1 \cos \varphi \quad (4.8)$$



Giả sử khi bắt đầu mất ổn định, tại A_1 với $\varphi = 0$, phát sinh thêm các nội lực rất nhỏ N_0 , T_0 , và M_0 . Để lập biểu thức mômen uốn được dễ dàng, ta phân tích hợp lực của tải trọng hướng tâm q trên phần tử thanh ds tại tọa độ góc ω là $q ds$ thành hai thành phần theo hai phương x và y . Vì ds rất nhỏ nên có thể xem như một đoạn thẳng nghiêng so với trục x theo góc ω . Chiều hợp lực $q ds$ lên trục x và trục y (hình 4.2b), ta được: $q ds \cdot \sin \omega = q \cdot dy$; $q ds \cdot \cos \omega = q \cdot dx$.

Như vậy, ta có thể thay tải trọng phân bố đều theo chiều dài cong của thanh với cường độ q bằng hai thành phần: tải trọng theo phương y phân bố đều với cường độ q theo chiều dài hình chiếu của thanh lên phương x và tải trọng theo phương x phân bố đều với cường độ q theo chiều dài hình chiếu của thanh lên phương y .

Biểu thức mômen uốn tại B_1 ở trạng thái biến dạng sẽ bằng:

$$M = M_0 + T_0 x + N_0 y + q r y - \frac{q}{2} (x^2 + y^2). \quad (4.9)$$

Sau khi thay (4.8) vào (4.9) và bỏ qua các số hạng bậc hai của các đại lượng được xem là vô cùng bé (N_0 , T_0 , M_0 và các chuyển vị), ta sẽ tìm được biểu thức mômen uốn dưới dạng:

$$M = A + B \sin \varphi + C \cos \varphi + q r w, \quad (4.10)$$

trong đó: $A = M_0 + N_0 r$; $B = T_0 r - q r u_0$; $C = -(N_0 r + q r w_0)$.

Biểu thức lực cắt:
$$Q = \frac{dM}{ds} = \frac{B}{r} \cos \varphi - \frac{C}{r} \sin \varphi + q r \frac{dw}{ds}. \quad (4.11)$$

Thay (4.10) vào (4.6), ta được:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = -\frac{r^2}{EI} (A + B \sin \varphi + C \cos \varphi + q r w).$$

Hay:
$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + k^2 w = -\frac{r^2}{EI} (A + B \sin\varphi + C \cos\varphi), \quad (4.12)$$

trong đó:
$$k^2 = \frac{qr^3}{EI} + 1. \quad (4.13)$$

Tích phân (4.12) ta được phương trình chuyển vị hướng tâm w tại tọa độ góc φ :

$$w = D_1 \sin k\varphi + D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EI} + \frac{Br^2 \sin\varphi}{(1-k^2)EI} + \frac{Cr^2 \cos\varphi}{(1-k^2)EI}, \quad (4.14)$$

với D_1 và D_2 là các hằng số tích phân.

Từ phương trình (4.4), ta có: $du = w ds / \rho = w d\varphi$. Do đó:

$$u = \int w d\varphi = \int \left[D_1 \sin k\varphi + D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EI} + \frac{Br^2 \sin\varphi}{(1-k^2)EI} + \frac{Cr^2 \cos\varphi}{(1-k^2)EI} \right] d\varphi.$$

Sau khi lấy tích phân ta được phương trình chuyển vị tiếp tuyến u tại tọa độ φ :

$$u = -\frac{D_1 \cos k\varphi}{k} + \frac{D_2 \sin k\varphi}{k} - \frac{Ar^2}{k^2 EI} \varphi - \frac{Br^2 \cos\varphi}{(1-k^2)EI} + \frac{Cr^2 \sin\varphi}{(1-k^2)EI} + H,$$

Hằng số tích phân H được xác định theo điều kiện: khi $\varphi = 0$; $u = u_0$. Kết quả:

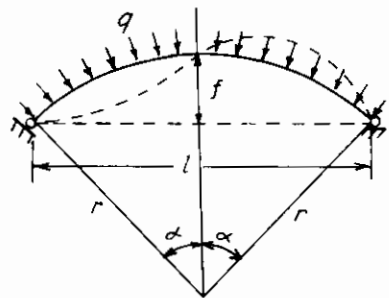
$H = u_0 + (D_1/k)$. Do đó:

$$u = u_0 + \frac{D_1(1 - \cos k\varphi)}{k} + \frac{D_2 \sin k\varphi}{k} - \frac{Ar^2}{k^2 EI} \varphi - \frac{Br^2 \cos\varphi}{(1-k^2)EI} + \frac{Cr^2 \sin\varphi}{(1-k^2)EI}. \quad (4.15)$$

4.2. Ổn định của vòm tròn đối xứng và vành tròn chịu lực hướng tâm phân bố đều

A. Vòm hai khớp (hình 4.3)

Dưới tác dụng của áp lực phân bố đều hướng tâm, trong vòm hai khớp chỉ tồn tại lực dọc nên đúng tâm bằng qr . Qua nghiên cứu, tải trọng tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với dạng biến dạng phân xứng như trên hình 4.3, do đó ta không cần xét dạng biến dạng đối xứng.



Hình 4.3

Khi hệ mất ổn định theo dạng biến dạng phân xứng, tại đỉnh vòm ta có các điều kiện sau: $M_0 = 0$; $N_0 = 0$; $w_0 = 0$. Do đó biểu thức mômen uốn (4.10) và phương trình chuyển vị hướng tâm (4.14) sẽ có dạng:

$$M = B \sin\varphi + q r w, \quad (4.16)$$

$$w = D_1 \sin k\varphi + D_2 \cos k\varphi + \frac{Br^2 \sin \varphi}{(1-k^2)EI}, \quad (4.17)$$

Các điều kiện biên:

- ◆ Khi $\varphi = 0$ (tại đỉnh vòm) ta có $w = 0$; từ (4.17) ta tìm được $D_2 = 0$.
- ◆ Khi $\varphi = \alpha$ (tại chân vòm) ta có $M = 0$ và $w = 0$:
 - từ (4.16) ta tìm được $B \sin \alpha = 0$; suy ra $B = 0$.
 - từ (4.17) ta tìm được $D_1 \sin k\alpha = 0$.

Vòm bị mất ổn định khi $D_1 \neq 0$ và $\sin k\alpha = 0$. Tải trọng tới hạn nhỏ nhất tương ứng với nghiệm $k\alpha = \pi$.

Từ (4.13), ta có:
$$k^2 = \frac{qr^3}{EI} + 1 = \frac{\pi^2}{\alpha^2}. \quad (4.18)$$

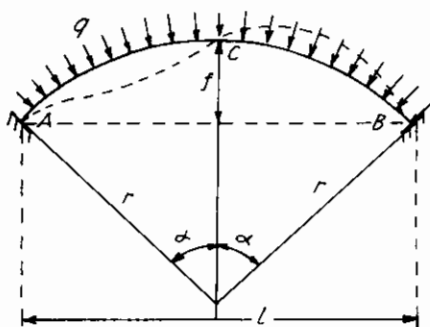
Suy ra:
$$q_{th} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad \text{và} \quad N_{th} r = \frac{EI}{r^2} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (4.19)$$

Đường biến dạng của hệ khi mất ổn định xảy ra theo hai nửa sóng hình sin.

B. Vòm không khớp (hình 4.4)

Qua nghiên cứu, tải trọng tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với dạng biến dạng phân xứng như trên hình 4.4, do đó ta không cần xét dạng biến dạng đối xứng.

Khi hệ mất ổn định theo dạng biến dạng phân xứng, tại đỉnh vòm ta có các điều kiện: $M_o = 0$; $N_o = 0$; $w_o = 0$. Do đó phương trình chuyển vị hướng tâm vẫn có dạng (4.17) như trường hợp vòm hai khớp:



Hình 4.4

$$w = D_1 \sin k\varphi + D_2 \cos k\varphi + \frac{Br^2 \sin \varphi}{(1-k^2)EI}, \quad (4.20)$$

Phương trình góc xoay:

$$\frac{dw}{d\varphi} = k D_1 \cos k\varphi - k D_2 \sin k\varphi + \frac{Br^2 \cos \varphi}{(1-k^2)EI}, \quad (4.21)$$

Các điều kiện biên:

- ◆ Khi $\varphi = 0$ (tại đỉnh vòm) ta có $w = 0$; từ (4.20) ta tìm được $D_2 = 0$.
- ◆ Khi $\varphi = \alpha$ (tại chân vòm) ta có $w = 0$ và $dw/d\varphi = 0$:

Từ (4.20) và (4.21) ta tìm được:

$$D_1 \sin k\varphi + \frac{Br^2 \sin \alpha}{(1-k^2)EI} = 0; \quad k D_1 \cos k\varphi + \frac{Br^2 \cos \alpha}{(1-k^2)EI} = 0,$$

Phương trình ổn định:

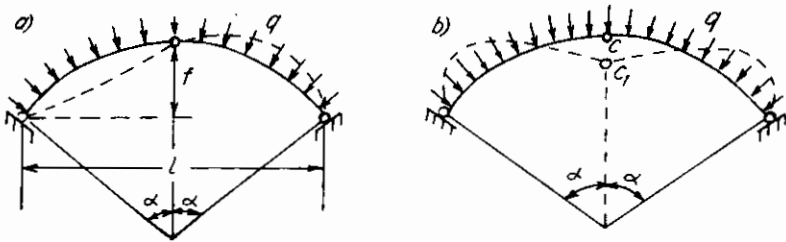
$$D = \begin{vmatrix} \sin k\alpha & \sin \alpha \\ k \cos k\alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Hay:} \quad \operatorname{tg} k\alpha = k \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.22)$$

Giải phương trình (4.22) ta sẽ tìm được giá trị k và từ (4.13) suy ra công thức xác định lực tới hạn:

$$q_{th} = \frac{EI}{r^3} (k^2 - 1). \quad (4.23)$$

C. Vòm ba khớp (hình 4.5)

Dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều, hướng tâm, vòm tròn ba khớp có thể bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng (hình 4.5a) hoặc theo dạng biến dạng đối xứng (hình 4.5b). Do đó ta cần xét cả hai dạng biến dạng và chọn tải trọng nhỏ nhất làm tải trọng tới hạn của hệ.



Hình 4.5

- ❖ Hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng. Trong trường hợp này đường biến dạng của vòm ba khớp có dạng tương tự như đường biến dạng của vòm hai khớp. Do đó ta có thể vận dụng công thức (4.19) để xác định lực tới hạn cho vòm ba khớp.
- ❖ Hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng. Trong trường hợp này, tại đỉnh vòm ta có các điều kiện: $M_o = 0$; $T_o = 0$; $u_o = 0$. Do đó, biểu thức mômen uốn (4.10) có dạng:

$$M = A + C \cos \varphi + q r w.$$

- Khi $\varphi = 0$, ta có: $M = 0$; $w = w_o$. Suy ra: $A + C + q r w_o = 0$.
- Khi $\varphi = \alpha$, ta có: $M = 0$; $w = 0$. Suy ra: $A + C \cos \alpha = 0$.

Giải hai phương trình trên ta tìm được:

$$A = \frac{q r w_o \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}; \quad C = -\frac{q r w_o}{1 - \cos \alpha}. \quad (4.24)$$

Phương trình chuyển vị hướng tâm (4.14) sẽ có dạng:

$$w = D_1 \sin k\varphi + D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EI} + \frac{Cr^2 \cos \varphi}{(1-k^2)EI}, \quad (4.25)$$

Khi $\varphi = 0$, ta có: $w = w_0$. Suy ra: $D_2 = \frac{Ar^2}{k^2 EI} + \frac{Cr^2}{(1-k^2)EI} = w_0$.

Thay thế (4.24) vào điều kiện trên ta tìm được:

$$D_2 = w_0 \left[1 + \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} + \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{(1 - k^2)EI} \right].$$

Phương trình chuyển vị hướng tâm trong trường hợp này sẽ là:

$$w = D_1 \sin k\varphi + w_0 \left[1 + \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} + \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{(1 - k^2)EI} \right] \cos k\varphi - w_0 \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} - w_0 \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2 \cos \varphi}{(1 - k^2)EI}. \quad (4.26)$$

Phương trình chuyển vị tiếp tuyến (4.15) trong trường hợp này sẽ là:

$$u = D_1 \frac{(1 - \cos k\varphi)}{k} + \frac{\sin k\varphi}{k} w_0 \left[1 + \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} + \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{(1 - k^2)EI} \right] - w_0 \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} \varphi - w_0 \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2 \sin \varphi}{(1 - k^2)EI}. \quad (4.27)$$

Các điều kiện biên tại chân vòm, khi $\varphi = \alpha$ ta có $w = 0$ và $u = 0$:

$$D_1 \sin k\alpha + w_0 \left[1 + \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} + \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{(1 - k^2)EI} \right] \cos k\alpha - w_0 \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} - w_0 \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2 \cos \alpha}{(1 - k^2)EI} = 0. \quad (4.28)$$

$$D_1 \frac{(1 - \cos k\alpha)}{k} + \frac{\sin k\alpha}{k} w_0 \left[1 + \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} + \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{(1 - k^2)EI} \right] - w_0 \frac{qr \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2}{k^2 EI} \alpha - w_0 \frac{qr}{1 - \cos \alpha} \times \frac{r^2 \sin \alpha}{(1 - k^2)EI} = 0. \quad (4.29)$$

Cho định thức các hệ số của D_1 và w_0 trong (4.28) và (4.29) bằng không, sau khi biến đổi ta được phương trình ổn định:

$$\frac{\operatorname{tg} v - v}{v^3} = \frac{4(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{\alpha^3} \quad \text{với} \quad v = \frac{k\alpha}{2} \quad (4.30)$$

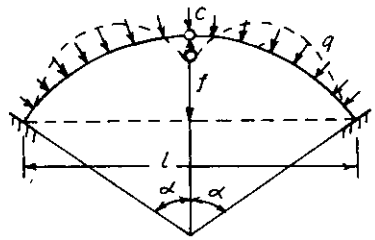
Giải phương trình (4.30) ta sẽ tìm được giá trị v tức là giá trị k và từ (4.13) suy ra công thức xác định lực tối hạn:

$$q_{th} = \frac{4v^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \times \frac{EI}{r^3}. \quad (4.31)$$

D. Vòm một khớp (hình 4.6)

Dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều, hướng tâm, vòm tròn một khớp có thể bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng hoặc theo dạng biến dạng đối xứng. Do đó ta cần xét cả hai dạng biến dạng và chọn tải trọng nhỏ nhất làm tải trọng tối hạn của hệ.

❖ *Hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng.* Trong trường hợp này đường biến dạng của vòm một khớp có dạng tương tự như đường biến dạng của vòm không khớp. Do đó ta có thể vận dụng công thức (4.23) và phương trình ổn định (4.22) để xác định lực tối hạn cho vòm một khớp.



Hình 4.6

❖ *Hệ bị mất ổn định theo dạng biến dạng đối xứng.* Cũng thực hiện các bước tương tự như trong bài toán vòm ba khớp nhưng với các điều kiện biên ở chân vòm như sau: khi $\varphi = \alpha$: $w = 0$; $u = 0$; $dw/d\varphi = 0$. Kết quả:

Công thức xác định lực tối hạn:

$$q_{th} = \frac{EI}{r^3} (k^2 - 1). \quad (4.32)$$

k được xác định theo phương trình ổn định:

$$\begin{aligned} [2(k^2 - 1) + (k^4 - 2k^2 + 2) \cos k\alpha - (k^2 - 1) k\alpha \sin k\alpha] \tan \alpha = \\ = k[\sin k\alpha + (k^2 - 1) k\alpha \cos k\alpha]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

E. Kết quả tính các vòm tròn chịu tải trọng phân bố đều, hướng tâm

Trong tất cả các trường hợp trên, công thức tải trọng tối hạn và lực dọc tối hạn có thể viết dưới dạng chung như sau:

$$q_{th} = K_I \frac{EI}{r^3}; \quad N_{th} = K_I \frac{EI}{r^2}. \quad (4.34)$$

Hệ số K_I phụ thuộc điều kiện liên kết và góc mở 2α của vòm. Bảng 4.1 (theo [14] và [3]) cung cấp các giá trị K_I tương ứng với dạng biến dạng đối xứng và dạng biến dạng phản xứng của các loại vòm đã xét ở trên. Giá trị nhỏ nhất của K_I được in đậm và gạch chân.

Bảng 4.1

2α	Vòm hai khớp		Vòm không khớp		Vòm ba khớp		Vòm một khớp	
	Dạng biến dạng		Dạng biến dạng		Dạng biến dạng		Dạng biến dạng	
	đối xứng	phản xứng	đối xứng	phản xứng	đối xứng	phản xứng	đối xứng	phản xứng
30°	320,0	<u>143,00</u>	484,0	<u>294,0</u>	<u>108,00</u>	143,0	<u>162,00</u>	294,0
60°	79,2	<u>35,00</u>	120,0	<u>73,3</u>	<u>27,60</u>	35,0	<u>40,20</u>	74,3
90°	34,7	<u>15,00</u>	53,2	<u>32,4</u>	<u>12,00</u>	15,0	<u>17,40</u>	32,4
120°	19,1	<u>8,00</u>	29,7	<u>18,1</u>	<u>6,75</u>	8,0	<u>10,20</u>	19,1
150°	11,0	<u>4,76</u>	18,8	<u>11,5</u>	<u>4,32</u>	4,8	<u>6,56</u>	11,6
180°	8,0	<u>3,00</u>	12,9	<u>8,0</u>	<u>3,00</u>	3,0	<u>4,61</u>	8,0

Nếu biểu thị vòm theo chiều dài nhịp l và đường tên f thì sau khi thay:

$$R(1 - \cos\alpha) = f \quad \text{và} \quad 2R \sin\alpha = l,$$

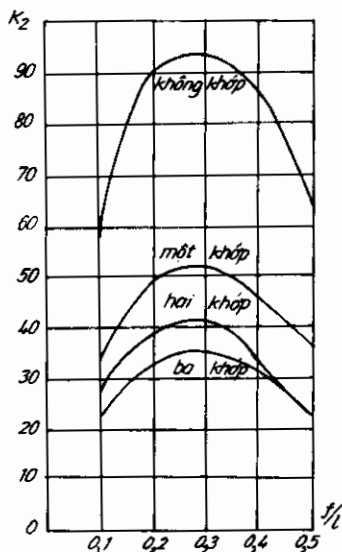
công thức tải trọng tới hạn sẽ có dạng:

$$q_{th} = K_2 \frac{lI}{l^3} \quad (4.35)$$

Hệ số K_2 phụ thuộc điều kiện liên kết, tỷ số f/l của vòm và có giá trị nhỏ nhất ghi trong bảng 4.2 (theo [14] và [3]).

Bảng 4.2

f/l	Vòm hai khớp	Vòm không khớp	Vòm ba khớp	Vòm một khớp
0,1	28,4	58,9	22,2	33,0
0,2	39,3	90,4	33,5	50,0
0,3	40,9	93,4	34,9	52,0
0,4	32,8	80,7	30,2	46,0
0,5	24,0	64,0	24,0	37,0



Hình 4.7

Trên hình 4.7 là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của hệ số K_2 theo điều kiện liên kết và các tỷ số f/l . Qua các đồ thị ta thấy:

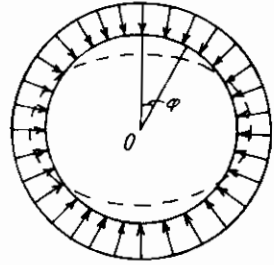
- * Độ ổn định của vòm giảm dần khi số khớp trong vòm tăng.
- * Tải trọng tới hạn có giá trị lớn nhất khi tỷ số f/l ở trong khoảng 0,25 - 0,30.

Thật vậy, vòm có khả năng ổn định tốt khi các thông số của vòm được chọn sao cho chiều dài đường cung ngắn và lực nén trong vòm nhỏ. Khi tỷ số f/l nhỏ

hơn khoảng nêu trên thì tuy chiều dài của đường cung ngắn nhưng lực nén trong vòm lại tăng lên nhanh và làm giảm khả năng ổn định của vòm. Khi tỷ số f/l lớn hơn khoảng nêu trên thì lực nén trong vòm nhỏ nhưng chiều dài của đường cung lại tăng nhanh nên cũng làm giảm khả năng ổn định của vòm. Do đó, về mặt ổn định ta nên chọn tỷ số f/l ở trong khoảng 0,25 - 0,30 là hợp lý.

E. Vành tròn không khớp (hình 4.8)

Dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều, hướng tâm, vành tròn không khớp có thể bị mất ổn định theo dạng đường đứt nét như trên hình 4.8. Nếu vẫn chọn tọa độ φ như trên hình 4.8 thì ta có các điều kiện sau:



Hình 4.8

- ◆ Khi $\varphi = 0$, ta có: $u_0 = 0$; $w'_0 = dw/d\varphi = 0$; $T_0 = 0$. Do đó, các phương trình (4.10), (4.11) và phương trình góc xoay thỏa mãn các điều kiện nay có dạng:

$$M = A + C \cos\varphi + q r w, \\ Q = \frac{dM}{ds} = -\frac{C}{r} \sin\varphi + q \frac{dw}{d\varphi}. \tag{4.36}$$

$$\frac{dw}{d\varphi} = -k D_2 \sin k\varphi - \frac{C r^2 \sin\varphi}{(1-k^2)EI}, \tag{4.37}$$

- ◆ Khi $\varphi = \pi/2$, ta có: $u = 0$; $w' = dw/d\varphi = 0$; $Q = 0$. Do đó:

- Từ (4.36) ta có: $\frac{C}{r} \sin \frac{\pi}{2} = 0$; suy ra: $C = 0$.
- Từ (4.37) ta có: $-k D_2 \sin \frac{k\pi}{2} = 0$; suy ra: $\sin \frac{k\pi}{2} = 0$.

Tải trọng tới hạn nhỏ nhất tương ứng với nghiệm $(k\pi/2) = \pi$. Do đó $k = 2$.

Thay $k = 2$ vào công thức (4.13) ta tìm được tải trọng tới hạn:

$$q_{th} = 3 \frac{EI}{r^3}. \tag{4.38}$$

G. Vòm tròn không khớp có liên kết ngàm dần hồi (hình 4.9)

Qua nghiên cứu, tải trọng tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với dạng biến dạng phân xứng như trên hình 4.9, do đó ta không cần xét dạng biến dạng đối xứng.

Khi hệ mất ổn định theo dạng biến dạng phản xứng, tại đỉnh vòm ta có các điều kiện: $M_0 = 0$; $N_0 = 0$; $w_0 = 0$. Do đó, biểu thức mômen uốn, phương trình chuyển vị hướng tâm và phương trình góc xoay vẫn có dạng (4.10), (4.20) và (4.21) như trường hợp vòm hai khớp và vòm không khớp.

Các điều kiện biên:

- ◆ Khi $\varphi = 0$ (tại đỉnh vòm) ta có $w = 0$; từ (4.20) ta tìm được $D_2 = 0$.
- ◆ Khi $\varphi = \alpha$ (tại chân vòm) ta có:
 - $w = 0$. Theo (4.20), ta có điều kiện:

$$D_1 \sin k\alpha + \frac{Br^2 \sin \alpha}{(1-k^2)EI} = 0. \quad (4.39)$$

- Nếu gọi c là hệ số đàn hồi của liên kết ngàm đàn hồi (góc xoay của ngàm đàn hồi do mômen bằng đơn vị đặt tại ngàm đàn hồi gây ra), thì theo (4.16) mômen uốn ở chân vòm bằng $B \sin \alpha$ nên góc xoay tại chân ngàm sẽ bằng $cB \sin \alpha$.

Theo (4.21), ta có điều kiện:

$$k D_1 \cos k\alpha + \frac{Br^2 \cos \alpha}{(1-k^2)EI} = c B \sin \alpha. \quad (4.40)$$

Cho định thức các hệ số của D_1 và B trong (4.39) và (4.40) bằng không, sau khi biến đổi ta được phương trình ổn định:

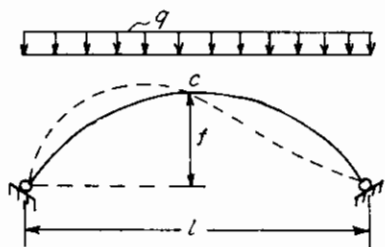
$$\sin k\alpha \left[\cot g \alpha - k \cot g k\alpha - \frac{cEI}{r^2} (1-k^2) \right] = 0. \quad (4.41)$$

Giải phương trình (4.41) ta sẽ tìm được giá trị k và từ (4.13) suy ra công thức xác định lực tới hạn:

$$q_{th} = (k^2 - 1) \frac{EI}{r^3}. \quad (4.42)$$

4.3. Ổn định của vòm parabol đối xứng chịu lực phân bố đều theo chiều dài nhịp

Nếu bỏ qua biến dạng nén trong vòm thì dưới tác dụng của lực thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài nhịp (hình 4.10), trục vòm parabol trùng với đường cong hợp lực nên trong vòm chỉ tồn tại lực dọc nén đúng tâm. Nhưng khi tải trọng đạt đến giá trị tới hạn thì vòm bị mất ổn định và trong vòm sẽ phát sinh các thành phần nội lực khác.



Hình 4.10

Giải bài toán ổn định của vòm parabol bằng giải tích sẽ gặp nhiều khó khăn hơn so với khi giải bài toán vòm tròn bởi vì thường dẫn đến các phương trình vi phân bậc cao. Do đó, phương pháp có hiệu quả để giải bài toán này thường là phương pháp gần đúng, chẳng hạn thay thế trục vòm bằng đường đa giác và áp dụng các phương pháp số như phương pháp phần tử hữu hạn (xem mục 3.10), áp dụng phương pháp tải trọng đàn hồi (xem [3])...

A.C. Loxin là tác giả đầu tiên, đã tìm ra nghiệm chính xác của bài toán vòm parabol. Viện sĩ A.N. Dinnik, A.F. Smirnov [16] đã vận dụng phương pháp số để nghiên cứu sự ổn định của vòm parabol có tiết diện không đổi và thay đổi tương ứng với các điều kiện liên kết khác nhau.

Trong mục này cung cấp một số kết quả tính ổn định của vòm parabol.

Cũng như trường hợp vòm tròn, công thức xác định tải trọng tới hạn cho vòm parabol được viết dưới dạng chung như sau:

❖ Vòm có tiết diện không đổi:
$$q_{th} = K_i \frac{EI}{l^3} \quad (4.43)$$

Hệ số K_i phụ thuộc điều kiện liên kết, tỷ số f/l của vòm và có giá trị nhỏ nhất ghi trong bảng 4.3 (theo [14], [20] và [3]). Trong bảng cung cấp các giá trị K_i tương ứng với dạng biến dạng đối xứng và dạng biến dạng phản xứng của vòm ba khớp, số liệu in đậm và có gạch chân là giá trị nhỏ nhất của K_i .

Bảng 4.3

f/l	Vòm không khớp	Vòm một khớp	Vòm hai khớp	Vòm ba khớp	
				Dạng biến dạng	
				đối xứng	phản xứng
0,1	60,7	33,8	28,5	<u>22,5</u>	28,5
0,2	101,0	59,0	45,4	<u>39,6</u>	45,4
0,3	115,0	—	46,5	47,3	<u>46,5</u>
0,4	111,0	96,0	43,9	49,2	<u>43,9</u>
0,5	97,4	—	38,4	—	<u>38,4</u>
0,6	83,8	80,0	30,5	38,0	<u>30,5</u>
0,8	59,1	63,0	20,0	28,8	<u>20,0</u>
1,0	43,7	48,0	14,1	22,1	<u>14,1</u>

❖ Vòm có tiết diện hình chữ nhật, bề ngang không đổi, chiều cao thay đổi theo quy luật để sao cho diện tích $A = A_0 / \cos\varphi$; mômen quán tính $I = I_0 / \cos^3\varphi$ với A_0 và I_0 là diện tích và mômen quán tính tại tiết diện ở đỉnh vòm; φ là góc hợp giữa tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện bất kỳ so với phương ngang.

$$q_{th} = K_4 \frac{EI}{l^3} \theta \quad (4.44)$$

❖ Vòm có tiết diện hình chữ nhật, chiều cao không đổi, bề ngang thay đổi theo quy luật để sao cho diện tích $A = A_0 / \cos \varphi$; mômen quán tính $I = I_0 / \cos \varphi$ với A_0 , I_0 và φ là các đại lượng đã giải thích ở trên.

$$q_{th} = K_5 \frac{EI}{l^3} \theta \quad (4.45)$$

Các hệ số K_4 và K_5 phụ thuộc điều kiện liên kết, tỷ số f/l của vòm và có giá trị nhỏ nhất ghi trong bảng 4.4 (theo [14]).

Bảng 4.4

f/l	K_4			K_5		
	Vòm không khớp	Vòm hai khớp	Vòm ba khớp	Vòm không khớp	Vòm hai khớp	Vòm ba khớp
0,1	65,5	30,7	24,0	62,3	29,5	23,2
0,2	134,0	59,8	51,2	112,0	49,0	43,6
0,3	204,0	81,1	81,1	-	-	59,0
0,4	277,0	101,0	104,0	154,0	57,0	57,0
0,6	444,0	142,0	142,0	152,0	52,0	52,0
0,8	587,0	170,0	170,0	133,0	44,0	44,0
1,0	700,0	193,0	193,0	118,0	37,0	37,0

4.4. Ổn định dạng uốn đối xứng của vòm parabol

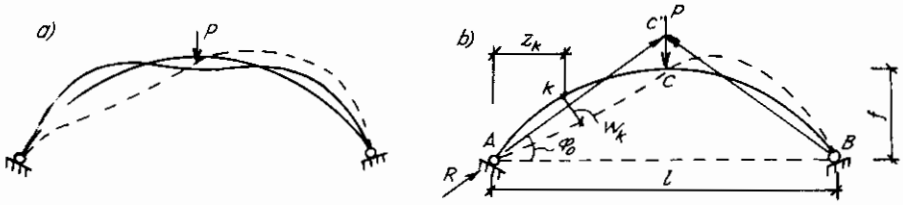
Trong mục này giới thiệu một cách giải gần đúng bài toán ổn định dạng uốn đối xứng của vòm thông qua hai trường hợp: vòm parabol hai khớp có độ cong thoải chịu lực tập trung P ở giữa nhịp và chịu đoạn tải trọng phân bố đều trên khoảng giữa vòm.

A. Vòm hai khớp chịu lực tập trung P ở giữa nhịp

Dưới tác dụng của lực tập trung P , vòm bị uốn và có dạng biến dạng đối xứng (hình 4.11a). Khi đạt đến giá trị tới hạn, nếu lực P không thay đổi phương tác dụng thì đường biến dạng của vòm sẽ mất tính đối xứng và chuyển sang dạng biến dạng phản xứng (đường đứt nét trên hình 4.11a). Đó là hiện tượng mất ổn định dạng uốn đối xứng.

Khi vòm chưa mất ổn định, dưới tác dụng của lực P , đường áp lực là đường $AC'B$ như trên hình 4.11b. Phương của phản lực tại A được xác định theo góc nghiêng φ_0 với:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{V_A}{H} = \frac{P}{2H}$$



Hình 4.11

Gọi $H_0 = Pl/4f$ là lực xô trong vòm ba khớp tương ứng với vòm hai khớp đang xét và ký hiệu:

$$\nu = \frac{H_0}{H}; \quad m = \frac{f}{l}, \quad (4.46)$$

với: ν - tỷ số giữa lực xô H_0 trong vòm ba khớp tương ứng và lực xô H trong vòm hai khớp;

m - tỷ số giữa đường tên vông f và chiều dài nhịp l của vòm.

Ta có:
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{P\nu}{2H_0} = \frac{2f}{l} \nu = 2m\nu. \quad (4.47)$$

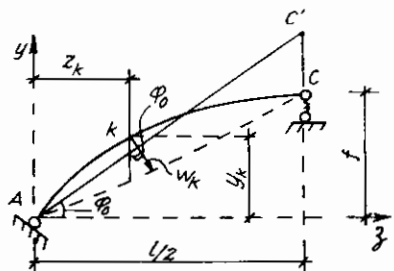
Nếu xem chuyển vị trong vòm là nhỏ thì độ biến thiên của mômen uốn tại tiết diện bất kỳ k có hoành độ z_k được xác định như sau:

$$M_k = R w_k = \frac{H}{\cos \varphi_0} w_k, \quad (4.48)$$

trong đó: $H/\cos \varphi_0$ là đại lượng không đổi; w_k là chuyển vị theo phương pháp tuyến của đường áp lực tại tiết diện có hoành độ z_k .

Để tìm w_k ta thực hiện như sau:

- Do tính chất phản xứng của biến dạng, ta đưa vòm về sơ đồ tính tương đương với nửa hệ như trên hình 4.12.
- Giả định hàm $M_z = H w_z / \cos \varphi_0$ thay đổi theo đường cung của vòm theo quy luật parabol bậc hai, đỉnh của đường parabol ở tại điểm k có tọa độ z_k, y_k .

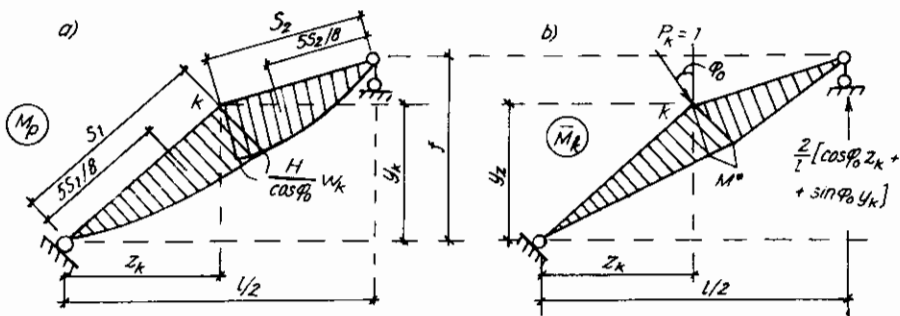


Hình 4.12

- Thay trục vòm bằng đường gãy khúc gần đúng. Trong trường hợp này ta chia nửa đường cung vòm thành hai đoạn gãy khúc như trên hình 4.13a. Để nâng cao độ chính xác, đặc biệt là khi vòm có tiết diện thay đổi, cần phải chia hệ

với số đoạn nhiều hơn, mỗi đoạn có một độ cứng tương ứng.

- Về biểu đồ mômen uốn M_P do tải trọng gây ra, biểu đồ gồm hai mảnh parabol có đỉnh ở tại điểm k với giá trị $H w_k / \cos \varphi_0$ như trên hình 4.13a.



Hình 4.13

- Tạo trạng thái khả dĩ "k" để tìm w_k bằng cách đặt tại k lực $P_k=1$ vuông góc với đường áp lực và vẽ biểu đồ mômen uốn \bar{M}_k tương ứng như trên hình 4.13b. Giá trị của biểu đồ tại k là $M_k^* = [z_k \cos \varphi_0 + y_k \sin \varphi_0] [1 - (2z_k/l)]$.
- Áp dụng công thức chuyển vị trong Cơ học kết cấu, ta tìm được:

$$w_k = (M_P)(\bar{M}_k) = \frac{1}{EI} \frac{2}{3} \frac{H w_k}{\cos \varphi_0} (s_1 + s_2) \times \frac{5}{8} (z_k \cos \varphi_0 + y_k \sin \varphi_0) \left(1 - \frac{2}{l} z_k\right).$$

Gọi $S = (s_1 + s_2)$ là tổng chiều dài của các dây cung đã chia trên nửa nhịp vòm, sau khi biến đổi, ta được:

$$\left[\frac{5SH}{12EI} (z_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_0) \left(1 - \frac{2}{l} z_k\right) - 1 \right] w_k = 0. \quad (4.49)$$

Điều kiện để cho vòm bị mất ổn định là $w_k \neq 0$, do đó ta được phương trình ổn định như sau:

$$\frac{5SH}{12EI} (z_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_0) \left(1 - \frac{2}{l} z_k\right) - 1 = 0.$$

Suy ra:
$$H_{th} = \frac{12EI}{5S(z_k + y_k \operatorname{tg} \varphi_0) \left(1 - \frac{2}{l} z_k\right)}. \quad (4.50)$$

Khi sử dụng công thức (4.50) ta cần phải xác định được vị trí của điểm k để sao cho biểu đồ mômen uốn M_P tại đó là đỉnh của đường parabol tức là khi w_k lớn nhất. Xác định chính xác vị trí này tương đối phức tạp cho nên khi vòm có độ cong thoải với $f/l \leq 1/5$ ta có thể chọn gần đúng vị trí k ở một phần tư nhịp cũng đạt yêu cầu.

Sau khi thay:

- $z_k = l/4$ và tung độ tương ứng $y_k = 3f/4$ của đường parabol;
- $tg \varphi_0 = 2mv$ theo (4.47);
- $S = \bar{S}l$ với \bar{S} là tỷ số giữa tổng chiều dài của các dây cung trên nửa vòm với chiều dài nhịp:

$$\bar{S} = \frac{l}{l} \left[\sqrt{z_k^2 + y_k^2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z_k\right)^2 + (f - y_k)^2} \right].$$

Đối với các vòm thoải, khi $z_k = l/4$ và $y_k = 3f/4$, ta có:

$$\bar{S} = \frac{l}{4} \left[\sqrt{l + 9m^2} + \sqrt{l + m^2} \right]. \quad (4.51)$$

công thức (4.50) sẽ trở thành:

$$H_{th} = \frac{38,4}{2\bar{S}(1 + 6m^2v)} \times \frac{EI}{l^2}. \quad (4.52)$$

Trong bài toán vòm hai khớp chịu lực tập trung thẳng đứng P ở đỉnh vòm ta có:

- lực xô trong vòm hai khớp $H \approx 0,20Pl/f$;
- lực xô trong vòm ba khớp tương ứng $H_0 = 0,25Pl/f$.

Do đó, từ (4.46) ta có: $v = 1,25$; $H = H_0/v = 0,25Pl/vf = 0,25P/mv$, suy ra:

$$P_{th} = \frac{192m}{2\bar{S}(1 + 7,5m^2)} \times \frac{EI}{l^2}. \quad (4.53)$$

B. Vòm parabol hai khớp chịu đoạn tải trọng phân bố đều trên khoảng giữa vòm (hình 4.14)

Cũng thực hiện các bước tương tự như trong trường hợp A ta sẽ được công thức xác định lực xô tối hạn có dạng (4.50) song cần thay $tg \varphi_0$ bằng $tg \varphi_k$ với φ_k là góc nghiêng của đường áp lực tại k so với phương ngang và được xác định như sau:

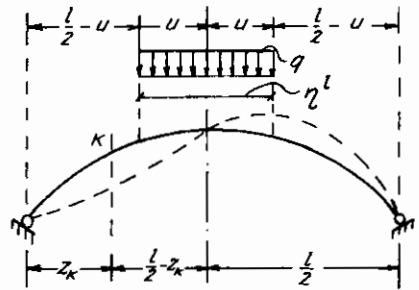
$$tg \varphi_k = \frac{Q_k^o}{H} = \frac{Q_k^o}{H_0} v.$$

trong đó:

H và H_0 – lực xô do tải trọng gây ra trong vòm hai khớp và trong vòm ba khớp tương ứng;

Q_k^o – lực cắt do tải trọng gây ra tại tiết diện k trong dầm đơn giản tương ứng.

Từ (4.50), khi $z_k = l/4$, ta có:



Hình 4.14

$$H_{th} = \frac{38,4}{2\bar{S}(1 + 3mtg\varphi_k)} \times \frac{EI}{l^2}. \quad (4.54)$$

Trong bài toán này ta có:

Lực xô trong vòm ba khớp tương ứng:

$$H_o = \frac{qu}{2f}(1-u) = \frac{qu}{2m} \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \quad \text{với} \quad \eta = \frac{2u}{l}.$$

Lực cắt Q_k^o trong dầm đơn giản tương ứng và do đó $tg\varphi_k$ phụ thuộc chiều dài đoạn tải trọng nên ta cần xét hai trường hợp sau:

♦ Khi $u \leq l/4$: $Q_k^o = qu$; nên $tg\varphi_k = \frac{qu}{H_o} \nu = \frac{2m\nu}{1-\eta/2}$.

Công thức xác định lực xô tới hạn (4.54) sẽ là:

$$H_{th} = \frac{38,4}{2\bar{S} \left[1 + \frac{12m^2\nu}{(2-\eta)} \right]} \times \frac{EI}{l^2}. \quad (4.55)$$

♦ Khi $u \geq l/4$: $Q_k^o = qu - q(u-z_k)$; nên $tg\varphi_k = \frac{m\nu}{\eta - \eta^2/2}$.

Công thức xác định lực xô tới hạn (4.54) sẽ là:

$$H_{th} = \frac{38,4}{2\bar{S} \left[1 + \frac{6m^2\nu}{(2\eta - \eta^2)} \right]} \times \frac{EI}{l^2}. \quad (4.56)$$

Từ công thức (4.55), nếu cho $\eta = 0$ ta sẽ được công thức xác định lực xô tới hạn khi vòm chịu lực tập trung đặt ở đỉnh vòm.

Từ công thức (4.56), nếu cho $\eta = 1$ ta sẽ được công thức xác định lực xô tới hạn khi vòm chịu lực phân bố đều theo chiều dài nhịp vòm.

Bài tập

IV.1. Tìm lực tới hạn cho vòm tròn không khớp (hình 4.4) có bán kính r , tiết diện không đổi, chịu áp lực phân bố đều hướng tâm tương ứng với các trường hợp sau:

- a) Khi $\alpha = 120^\circ$; b) Khi $\alpha = 150^\circ$;

IV.2. Chứng minh rằng phương trình (4.33) là phương trình ổn định của vòm tròn một khớp (hình 4.6) có bán kính r , tiết diện không đổi, chịu áp lực phân bố đều hướng tâm.

IV.3. Tìm lực tới hạn cho vòm tròn hai khớp (hình 4.3) có bán kính r , tiết diện không đổi,

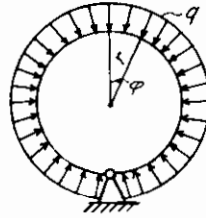
chịu áp lực phân bố đều hướng tâm khi $2\alpha = 45^\circ$.

IV.4. Tìm lực tới hạn cho vòm tròn ba khớp (hình 4.5) có bán kính r , tiết diện không đổi, chịu áp lực phân bố đều hướng tâm khi $2\alpha = 45^\circ$.

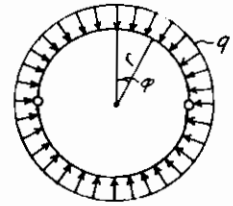
IV.5. Tìm lực tới hạn cho vành tròn một khớp có bán kính r , tiết diện không đổi, chịu áp lực phân bố đều hướng tâm và có liên kết như trên hình IV.5.

Chi dẫn: Lực tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với dạng biến dạng đối xứng. Vận dụng các phương trình đã lập trong phần lý thuyết với các điều kiện như sau:

- Tại $\varphi = 0$: $u_0 = 0$; $w_0 = 0$; $T_0 = 0$;
 $Q_0 = 0$.
- Tại $\varphi = \pi$: $u = 0$; $w = 0$; $M = 0$.



Hình IV.5



Hình IV.6

IV.6. Tìm lực tới hạn cho vành tròn hai khớp có bán kính r , tiết diện không đổi, chịu áp lực phân bố đều hướng tâm như trên hình IV.6.

Chi dẫn: Lực tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với dạng biến dạng đối xứng. Vận dụng các phương trình đã lập trong phần lý thuyết với các điều kiện như sau:

- Tại $\varphi = 0$: $u_0 = 0$; $w_0 = 0$; $T_0 = 0$; $Q_0 = 0$.
- Tại $\varphi = \pi/2$: $u = 0$; $M = 0$.

IV.7. Tìm lực tới hạn tương ứng với dạng uốn đối xứng của vòm parabol hai khớp (hình 4.14) chịu đoạn tải trọng thẳng đứng phân bố đều trên khoảng giữa vòm với chiều dài là $0,5l$. Cho biết: $f = 0,2l$; lực xô trong vòm hai khớp tương ứng với tải trọng đã cho là $H = 0,08994 q l^2 / f$.

IV.8. Xét vòm parabol hai khớp có chiều dài nhịp $l = 12$ m; đường tên $f = 4$ m; mômen quán tính của tiết diện $I = 3,3333 \cdot 10^{-5}$ m⁴; môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^8$ kN/m².

Chia vòm thành n đoạn đều nhau theo phương ngang. Vận dụng phương pháp phần tử hữu hạn với số đoạn chia $n = 6; 8; 10; 12$ để tìm giá trị tới hạn của tải trọng tương ứng với các trường hợp chịu lực như sau:

- Lực tập trung thẳng đứng P tại đỉnh vòm.
- Tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo phương ngang với cường độ q trên khoảng giữa vòm với chiều dài là $0,5l$.
- Tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài cong của vòm với cường độ q trên toàn chiều dài vòm.

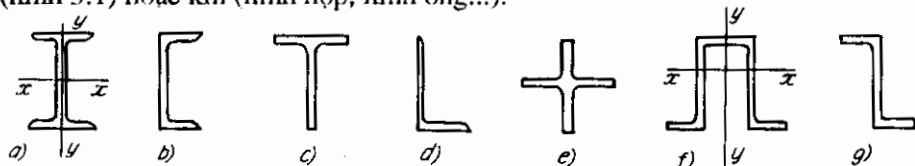
5 Ổn định của thanh thành mỏng tiết diện hở và ổn định dạng uốn phẳng của dầm

Trong chương đề cập đến bài toán ổn định của thanh thành mỏng có tiết diện hở (gọi tắt là thanh thành mỏng hở) chịu nén; bài toán ổn định dạng uốn phẳng của thanh thành mỏng hở và của dầm có tiết diện thường gặp trong thực tế. Cách tính thanh thành mỏng được xây dựng trên cơ sở lý thuyết tính của V.Z. Vlasov đã được trình bày trong Sức bền vật liệu [5]. Trong chương này chỉ nêu lên một số khái niệm cơ bản và kết quả nghiên cứu phỏng theo cách trình bày của A.X. Volmir [13] nhằm phục vụ cho bài toán ổn định.

5.1. Các phương trình cơ bản của thanh thành mỏng hở

A. Khái niệm về thanh thành mỏng

Thanh thành mỏng là thanh thẳng với kích thước theo ba chiều có bậc khác nhau. Nếu gọi l là chiều dài thanh, a là kích thước theo một cạnh nào đó của tiết diện, t là bề dày của thành thì thanh được xem là thanh thành mỏng khi có các tỷ số như sau: $t/a \leq 0,1$; $a/l \leq 0,1$. Tiết diện của thanh thành mỏng có thể hở (hình 5.1) hoặc kín (hình hộp, hình ống...).



Hình 5.1

So với thanh thành mỏng kín, khả năng chống xoắn của thanh thành mỏng hở yếu hơn. Do đó, các thanh thành mỏng hở chịu nén khi mất ổn định không những chỉ phát sinh biến dạng uốn mà phát sinh biến dạng xoắn và uốn, làm giảm khả năng chịu ổn định của thanh.

B. Các giả thiết về thanh thành mỏng

Cách tính thanh thành mỏng được xây dựng trên cơ sở các giả thiết:

1. Khi thanh biến dạng, hình chiếu của tiết diện lên mặt phẳng vuông góc với trục thanh vẫn giữ nguyên hình dạng ban đầu.

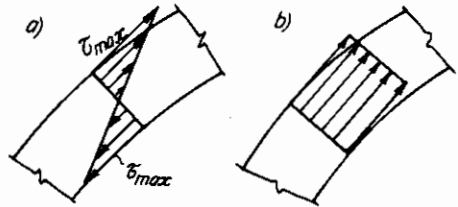
2. Mặt trung gian của thanh không có biến dạng trượt.

Mặt trung gian của thanh là mặt cách đều hai mặt bên của thanh thành mỏng. Giao tuyến của mặt trung gian với tiết diện là *đường trung gian của tiết diện*. Trong tính toán, tiết diện của thanh được mô tả bằng đường trung gian.

C. Xoắn tự do

Khi xoắn các thanh thành mỏng hở, tiết diện thanh bị cong vênh: các điểm khác nhau của tiết diện sẽ có chuyển vị dọc trục thanh với giá trị khác nhau. Nếu tiết diện thanh được phép vênh tự do (xoắn tự do): trên tiết diện thanh không phát sinh ứng suất pháp mà chỉ có ứng suất tiếp.

Khi xoắn tự do, biểu đồ ứng suất tiếp theo bề dày của thành có dạng hai hình tam giác như trên hình 5.2a. Các ứng suất tiếp này tạo thành ngẫu lực có mômen là M_{xo} gọi là *mômen xoắn thuần túy*, được xem là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ.



Hình 5.2

Theo SBVI. [5], nếu gọi θ là góc xoắn tại tiết diện tương ứng của thanh, ta có:

$$M_{xo} = GI_{xo} \theta'. \quad (5.1)$$

I_{xo} – mômen quán tính khi xoắn của tiết diện thanh, có thứ nguyên [chiều dài]⁴.

Khi tiết diện được hình thành từ n phần tử hình chữ nhật với b_i , t_i là chiều dài và bề dày của phần tử thứ i :

$$I_{xo} = \frac{1}{3} \alpha \sum_{i=1}^n b_i t_i^3; \quad (5.2)$$

α – hệ số phụ thuộc dạng tiết diện, xấp xỉ lớn hơn đơn vị, từ 1 đến 1,3 (xem [4]).

Ứng suất tiếp trên mép ngoài ở điểm giữa cạnh dài của phần tử thứ i được xác định theo công thức:

$$\tau_{max}^i = \frac{M_{xo} t_i}{I_{xo}}. \quad (5.3)$$

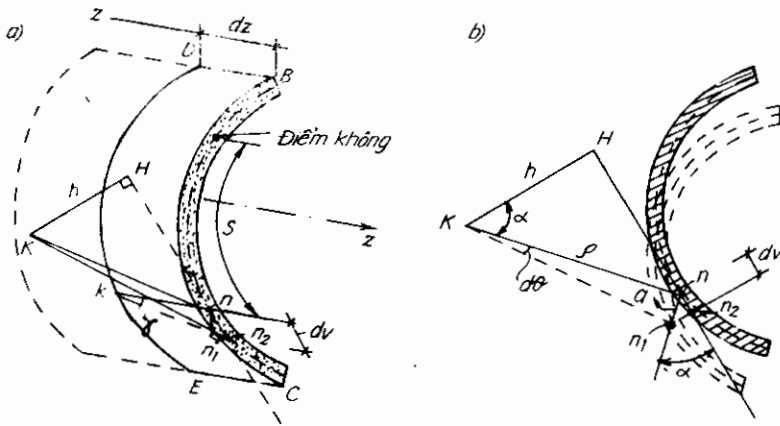
D. Xoắn kìm chế

Khi tiết diện thanh không được phép vênh tự do (xoắn kìm chế), xảy ra khi có liên kết cản trở hoặc khi thanh chịu nhiều ngẫu lực xoắn: trên tiết diện thanh phát sinh ứng suất pháp dọc trục thanh và gây ra ứng suất tiếp phân bố đều theo bề dày của thành như trên hình 5.2b.

Các ứng suất tiếp này tạo thành ngẫu lực có mômen là M_{ω} gọi là *mômen xoắn – uốn*, được xem là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ.

Để lập công thức cho mômen xoắn kìm chẽ ta cần phân tích hiện tượng vênh qua chuyển vị và biến dạng tại điểm bất kỳ n có tọa độ cong s trên tiết diện có tọa độ z (hình 5.3a). Sau khi tiết diện bị xoay một góc vô cùng bé $d\theta$, điểm n chuyển dời đến vị trí mới là n_1 . Chuyển vị tại điểm n bao gồm các thành phần:

- theo phương tiếp tuyến với đường trung gian của tiết diện, ($n-n_2$);
- theo phương vuông góc với tiếp tuyến nói trên. (không thể hiện trên hình);
- theo phương của trục thanh (vuông góc với mặt phẳng hình, n_2-n_1).



Hình 5.3

Theo giả thiết 1, khi xác định thành phần chuyển vị theo phương tiếp tuyến ta có thể xem tiết diện như một miếng cứng xoay trong mặt phẳng của nó quanh tâm xoắn K (hình 5.3a). Xét một phần tử thanh có chiều dài dz , giới hạn bởi hai tiết diện BC và DE có góc xoắn tương đối là $d\theta$ quanh tâm xoắn K (hình 5.3b).

Gọi:

a – hình chiếu chuyển vị toàn phần $n-n_1$ lên mặt phẳng ban đầu của tiết diện;

ρ – bán kính vector từ tâm xoắn K đến n ;

h – khoảng cách từ tâm xoắn A_0 đến tiếp tuyến tại M ;

α – góc ở đỉnh n của tam giác nn_2n_1 vuông góc tại n_2 .

Từ hình (5.3b), ta có: $dv = a \cos \alpha = \rho \theta \cos \alpha = h \theta$. (5.4)

Khi n chuyển dời đến n_1 , đường sinh kn (hình 5.3a) trượt một góc γ bằng:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} = -h \frac{\partial \theta}{\partial s}. \quad (5.5)$$

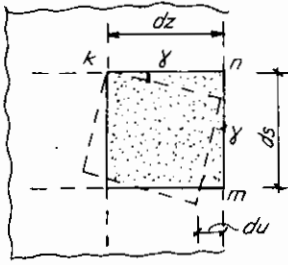
Biểu thức trên mang dấu âm bởi vì góc trượt γ ở đây là góc dương (khi nhìn từ tâm xoắn dọc theo bán kính vector, góc trượt xoay thuận chiều kim đồng hồ được xem là dương), phù hợp với góc xoay $d\theta$ mang dấu âm (khi nhìn từ góc tọa độ dọc theo trục z , góc xoay thuận chiều kim đồng hồ được xem là dương).

Theo giả thiết thứ hai, mặt trung gian không có biến dạng trượt. Do đó, nếu tại n ta tách một phần tử chữ nhật có các cạnh dz và ds như trên hình 5.4 thì sau biến dạng, các góc cạnh của phần tử không thay đổi, phần tử chỉ xoay theo góc trượt γ . So với điểm n , điểm m có chuyển vị tương đối theo phương z là du bằng:

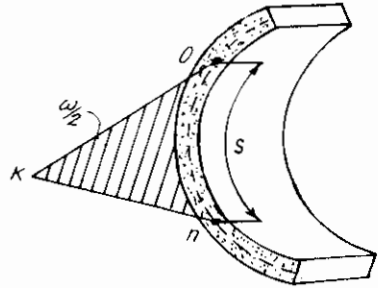
$$du = ds \cdot \sin \gamma \approx ds \cdot \gamma.$$

Sau khi thay γ theo (5.5), ta được chuyển vị dọc trục của phần tử:

$$du = -ds \cdot h \cdot \theta'.$$



Hình 5.4



Hình 5.5

Chuyển vị u của điểm n là tổng các chuyển vị phần tử tích lũy từ điểm O có tọa độ s lấy theo đường trung gian bằng không (gọi là điểm không) đến điểm n , do đó:

$$u = -\theta' \int_s h ds = -\theta' \omega, \quad (5.6)$$

trong đó:

$$\omega = \int_s h ds \quad (5.7)$$

là *tọa độ quạt* của điểm n , được tính với điểm cực chọn trùng với tâm xoay K . Tọa độ này bằng hai lần diện tích hình quạt KOn hình thành khi chuyển dời bán kính vectơ ban đầu có góc O (điểm không) quanh điểm cực K đến điểm n có tọa độ cong s lấy theo đường trung gian của tiết diện (hình 5.5).

Từ (5.6) ta thấy: chuyển vị dọc trục tại điểm n tỷ lệ với tọa độ quạt của n . Do đó, *tọa độ quạt biểu thị mức độ vênh của tiết diện*. Theo chiều dài thanh, độ vênh phụ thuộc góc xoắn θ' .

Biến dạng dài tỷ đối theo phương của trục thanh: $\epsilon_z = \frac{du}{dz} = -\theta'' \omega.$

Nếu giả thiết các *thờ dọc trục thanh không chèn ép lẫn nhau* thì theo định luật Hooke, ứng suất pháp xoắn - uốn σ_ω theo phương của trục thanh sẽ là:

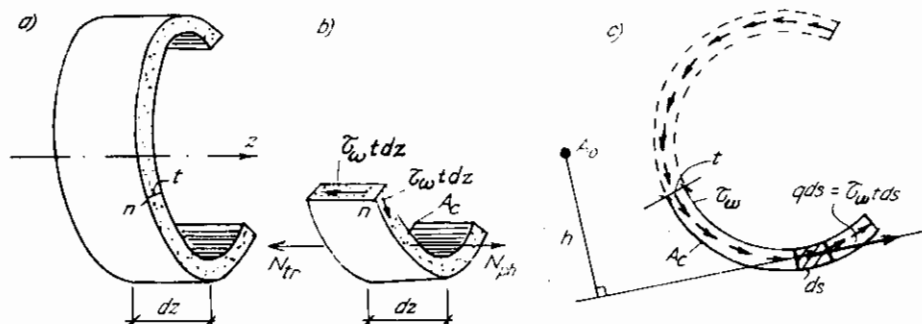
$$\sigma_\omega = E \epsilon_z = -E \theta'' \omega. \quad (5.8)$$

Từ (5.8) ta thấy: ứng suất pháp xoắn-uốn σ_ω tại mỗi điểm tỷ lệ thuận với tọa độ quạt chính của điểm đó. Tại điểm có tọa độ quạt bằng không (điểm không), ứng suất σ_ω bằng không.

Để tìm ứng suất tiếp xoắn - uốn ta cắt một phần tử thanh có chiều dài dz với trục z đi qua các tâm xoắn (hình 5.6a). Tiếp đó, bằng mặt cắt song song với trục thanh và vuông góc với đường trung gian tại n , tách ra một phần phân tử thanh như trên hình 5.6b. Tại n có ứng suất τ_{ω} tác dụng trên mặt cắt vuông góc với trục thanh. Theo luật đối ứng của ứng suất tiếp, trên mặt cắt song song với trục thanh cũng có ứng suất tiếp bằng τ_{ω} .

Khi giả thiết τ_{ω} phân bố đều theo bề dày thành mỏng, từ điều kiện cân bằng của phần phân tử nói trên ta có:

$$\tau_{\omega} t dz = N_{ph} - N_{tr} = \int_{A_1} (\sigma_{\omega} + d\sigma_{\omega}) dA - \int_{A_1} \sigma_{\omega} dA.$$



Hình 5.6

Thay (5.8) vào điều kiện trên, sau khi biến đổi ta được:

$$\tau_{\omega} = - \frac{t}{I} \frac{d^3 \theta}{dz^3} \int_{A_1} \omega dA = - \frac{ES^{\omega}}{I} \theta''', \quad (5.9)$$

trong đó:
$$S_{\omega}^{\omega} = \int_{A_1} \omega dA \quad (5.10)$$

là đại lượng có thứ nguyên [chiều dài]³, gọi là *mômen tĩnh quạt* của phần diện tích A_1 của tiết diện từ điểm n đang xét đến mép tiết diện.

Ứng suất τ_{ω} phân bố đều theo bề dày t của thành, tạo thành luồng ứng lực:

$$q = \tau_{\omega} t = - ES^{\omega} \theta'''.$$

Mômen xoắn-uốn M_{ω} là mômen của luồng ứng lực đối với tâm xoay K của tiết diện. Nếu quy ước chiều dương của M_{ω} là thuận chiều kim đồng hồ thì mômen của phân tử luồng ứng lực $q ds$ đối với tâm xoay sẽ mang dấu âm (hình 5.6b) và bằng $q \rho ds = q d\omega$. Do đó:

$$M_{\omega} = - \int_A q t d\omega = E \theta''' \int_A \left(\int_{A_1} \omega dA \right) d\omega.$$

Lấy tích phân phân đoạn, ta được: $M_\omega = EI\theta''' \left[\omega \int_A dA \Big|_A - \int_A \omega^2 dA \right]$.

Vì ω là tọa độ quạt chính nên: $S_\omega = \int_A \omega dA \Big|_A = \int_A \omega dA = 0$.

Do đó: $M_\omega = -EI_\omega \theta''' \tag{5.11}$

với: $I_\omega = \int_A \omega^2 dA \tag{5.12}$

là mômen quán tính quạt của tiết diện.

Thay (5.11) vào (5.9), ta được công thức ứng suất tiếp xoắn-uốn:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega^C}{I_\omega l} \tag{5.13}$$

Mômen xoắn-uốn M_ω thay đổi theo chiều dài thanh.

Để biểu thị ứng suất pháp σ_ω qua một đại lượng tĩnh học, ta đưa ra thành phần nội lực là *bimômen xoắn-uốn*, gọi tắt là *bimômen*, ký hiệu $B(z)$ với định nghĩa:

$$B = \int_A \omega \sigma_\omega dA \tag{5.14}$$

Từ (5.8) và (5.12), với $\theta'' = 0$ khi $B = 0$, ta có:

$$B = -EI_\omega \theta'' \tag{5.15}$$

Từ (5.11) và (5.15) ta suy ra công thức đạo hàm cấp một của bimômen:

$$\frac{dB}{dz} = M_\omega \tag{5.16}$$

Bimômen là thành phần nội lực suy rộng có thứ nguyên: [lực].[chiều dài]². *Bimômen được xem là dương khi gây ra ứng suất kéo tại những điểm có tọa độ quạt dương trên tiết diện có pháp tuyến ngoài dương (pháp tuyến hướng theo chiều dương của trục z).*

Đối chiếu (5.15) với (5.8), nếu giả thiết khi $\sigma = 0$ thì $B = 0$, ta tìm được sự liên hệ giữa ứng suất pháp xoắn-uốn với bimômen:

$$\sigma_\omega = \frac{B\omega}{I_\omega} \tag{5.17}$$

Như vậy, ứng suất pháp σ_ω tỷ lệ với bimômen; công thức (5.17) có cấu trúc tương tự như công thức ứng suất pháp khi uốn đã quen biết trong SBV1.

E. Phương trình vi phân khi xoắn-kìm chế

Trên tiết diện của thanh thành mỏng hở chịu xoắn-kìm chế song song tồn tại mômen xoắn thuần túy M_x và mômen xoắn-uốn M_ω . Nếu ký hiệu M_z là tổng mômen của các ngoại lực tác dụng trên phần thanh đang xét đối với trục z (trục

z đi qua các tâm xoay của tiết diện) và gọi là *mômen xoắn tổng quát* với chiều dương quay thuận chiều kim đồng hồ thì khi thanh chịu xoắn kim chế, ta có:

$$M_z = M_{\omega} + M_{\omega}. \quad (5.18)$$

Thay các biểu thức (5.1) và (5.11) vào (5.18), ta được phương trình vi phân của góc xoắn cho thanh thành mỏng hở chịu xoắn kim chế:

$$-EI_{\omega} \frac{d^3 \theta}{dz^3} + GI_{\omega} \frac{d\theta}{dz} = M_z. \quad (5.19)$$

Lấy vi phân cả hai vế của (5.19) theo z , ta được phương trình vi phân cấp bốn của góc xoắn cho thanh thành mỏng hở chịu xoắn kim chế:

$$-EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} + GI_{\omega} \frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{dM_z}{dz} = -m_z; \quad (5.20)$$

m_z – cường độ của mômen xoắn ngoại lực phân bố, được xem là dương khi làm giảm mômen xoắn tổng quát theo chiều tăng của trục z .

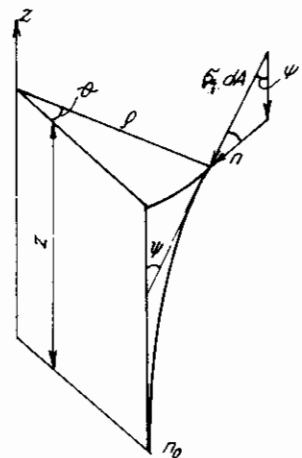
Từ (5.15) và (5.20) ta lập được phương trình vi phân cấp hai của binômen cho thanh thành mỏng hở chịu xoắn kim chế:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} - \frac{GI_{\omega}}{EI_{\omega}} B = -m_z. \quad (5.21)$$

5.2. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở có hai trục đối xứng

Xét thanh chịu lực nén P đặt đúng trọng tâm tiết diện, chiều dài l , tiết diện hở có hai trục đối xứng, chẳng hạn trường hợp tiết diện hình chữ I (hình 5.1e). Trong trường hợp này, tâm xoay K trùng với trọng tâm tiết diện.

Khi P đạt đến giá trị tới hạn, thanh bị mất ổn định theo dạng xoắn thuần túy, các thớ dọc trục thanh bị uốn cong nhưng thớ trung tâm không bị uốn cong. Tại tiết diện bất kỳ, tồn tại góc xoắn θ với chiều dương quay thuận chiều kim đồng hồ khi nhìn theo chiều dương của trục z . Để sử dụng được các phương trình vi phân (5.20) hoặc (5.21) ta cần tìm cường độ của mômen xoắn phân bố phát sinh do ứng suất nén cơ bản $\sigma = P/A$ với A là diện tích tiết diện thanh. Cô lập một thớ bất kỳ của thanh song song với trục z , tiết diện của thớ có diện tích phần tử là dA . Khi thanh bị xoắn, thớ đang xét bị vận theo đường cong n_0 nằm trên mặt trụ tròn xoay với bán kính ρ (hình 5.7).



Hình 5.7

Gọi ψ là góc hợp thành giữa phương thẳng đứng z với tiếp tuyến của thờ cong u, θ tại n cách đầu dưới của thanh một khoảng z . Nói chung, góc ψ rất nhỏ, thay đổi theo chiều dài thanh. Khi thờ bị vận cong, lực σdA trong thờ nghiêng so với phương thẳng đứng theo góc ψ . Thành phần hình chiếu lên phương ngang của lực này bằng $\sigma dA \sin \psi \approx \psi \sigma dA$ sẽ gây ra mômen xoắn phân bố quanh trục z bằng $\rho \psi \sigma dA$. Như vậy, mômen xoắn do ứng lực nén phân bố ra trên toàn tiết diện đang xét sẽ là: $\int_A \rho \psi \sigma dA$. Nếu xét hai tiết diện lân cận cách nhau là dz thì góc ψ

trở thành $d\psi$, còn mômen xoắn sẽ gia tăng một lượng là $\int_A \rho d\psi \sigma dA$.

Cường độ m_z^c của mômen xoắn quanh trục z đi qua các trọng tâm C của tiết diện, phân bố theo chiều dài thanh là độ gia tăng của mômen xoắn trên đơn vị chiều dài thanh, ta thấy m_z^c làm tăng mômen xoắn tổng quát theo chiều tăng của trục z nên mang dấu trừ:

$$m_z^c = - \int_A \sigma \frac{d\psi}{dz} \rho dA. \quad (5.22)$$

Nếu chú ý đến sự liên hệ giữa các đại lượng hình học (hình 5.7) khi xét hai tiết diện lân cận cách nhau là dz , ta có: $\rho d\theta = \psi dz$, suy ra: $\psi = \rho (d\theta/dz)$.

Sau khi thay vào (5.22), ta được:

$$m_z^c = - \sigma \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_A \rho^2 dA = - \sigma I_p^c \frac{d^2\theta}{dz^2}; \quad (5.23)$$

với I_p^c là mômen quán tính cực đối với trọng tâm tiết diện:

$$I_p^c = \int_A \rho^2 dA. \quad (5.24)$$

❖ *Trường hợp tiết diện ở hai đầu thanh được phép vênh tự do*

Trong trường hợp này ta có thể vận dụng phương trình vi phân của bimômen (5.21) tương ứng với các điều kiện biên: $B = 0$ khi $z = 0$ và $z = l$.

Lưu ý là trong bài toán này, ứng suất pháp khi nén được xem là dương nên xuất phát từ công thức (5.17) ta cần đổi dấu của B trong (5.15) như sau:

$$B = E I_\omega^c \theta'', \quad (5.25)$$

với I_ω^c là mômen quán tính quạt của tiết diện đối với trọng tâm C .

Đổi chiếu (5.23) với (5.25), ta được:

$$m_z^c = - \frac{\sigma I_p^c}{E I_\omega^c} B; \quad (5.26)$$

Thay (5.26) vào (5.21) và chú ý đến sự đổi dấu của B , ta được phương trình vi phân của bimômen:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + k^2 B = 0 \quad \text{với} \quad k^2 = -\frac{I}{EI_{\omega}^c} (\sigma I_p^c - GI_{\omega 0}). \quad (5.27)$$

Nghiệm của phương trình: $B = C_1 \operatorname{sinc} k z + C_2 \operatorname{cos} k z$.

Từ các điều kiện biên ta xác định được $C_2 = 0$ và khi $C_1 \neq 0$ thì

$$kl = n\pi \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Với $n = 1$ thì $k = \pi/l$, từ biểu thức k trong (5.27) ta tìm được ứng suất tới hạn nhỏ nhất khi thanh bị mất ổn định theo dạng biến dạng xoắn:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\pi^2 EI_{\omega}^c}{l^2 I_p^c} + \frac{GI_{\omega 0}}{I_p^c}. \quad (5.28)$$

Đối với các tiết diện thanh có thành khá mỏng, có thể bỏ qua số hạng thứ hai (thể hiện ảnh hưởng của xoắn tự do) trong (5.28), so với số hạng thứ nhất (thể hiện ảnh hưởng của xoắn kìm chế). Khi đó, công thức σ_{θ} có cấu trúc tương tự như công thức Euler:

$$\sigma_{\theta} \approx \frac{\pi^2 EI_{\omega}^c}{l^2 I_p^c}. \quad (5.29)$$

❖ Trường hợp tiết diện ở hai đầu thanh không được phép vênh tự do

Trong trường hợp này nên vận dụng phương trình vi phân của góc xoắn theo (5.20). Thay (5.23) vào (5.20) với lưu ý là đổi dấu của σ như đã nói ở trên, ta có phương trình vi phân:

$$\frac{d^4 \theta}{dz^4} + \frac{I}{EI_{\omega}^c} (\sigma I_p^c - GI_{\omega 0}) \frac{d^2 \theta}{dz^2} = 0. \quad (5.30)$$

Sau khi giải phương trình (5.30) với các điều kiện biên phù hợp điều kiện liên kết ở các đầu thanh ta lập được công thức ứng suất tới hạn σ_{θ} với số hạng đầu có cấu trúc tương tự như công thức σ_{th} của các thanh đặc:

$$\sigma_{\theta} = \frac{\pi^2 EI_{\omega}^c}{(\mu^* l)^2 I_p^c} + \frac{GI_{\omega 0}}{I_p^c}, \quad (5.31)$$

μ^* là hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết ở hai đầu thanh:

- $\mu^* = 1$ khi hai đầu thanh có liên kết khớp, vênh tự do;
- $\mu^* = 0,5$ khi hai đầu thanh có liên kết ngàm;
- $\mu^* = 2$ khi một đầu thanh có liên kết ngàm, một đầu tự do;
- $\mu^* = 0,7$ khi một đầu thanh có liên kết ngàm, một đầu được phép xoay nhưng tiết diện vẫn phẳng.

Chú ý: Cần đối chiếu giá trị của σ_θ với các giá trị ứng suất tới hạn tìm theo công thức Euler tương ứng với khi thanh bị mất ổn định trong các mặt phẳng chứa trục quán tính chính trung tâm x và y :

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu_y l)^2 A}; \quad \sigma_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu_x l)^2 A}, \quad (5.32)$$

với μ_x và μ_y là hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết ở hai đầu thanh theo các mặt phẳng chứa trục quán tính chính trung tâm tương ứng. Ứng suất để tính là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị σ_θ , σ_y và σ_x .

Đối với các thanh bằng thép cán hình chữ I, σ_θ thường lớn hơn σ_y và σ_x nên không cần kiểm tra ổn định theo dạng biến dạng xoắn. Trường hợp thanh có tiết diện hình chữ thập (hình 5.1c), ta có $I_\omega^C = 0$ nên σ_θ thường nhỏ hơn σ_x và σ_y .

5.3. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở có một trục đối xứng

Xét thanh chịu lực nén P đặt đúng trọng tâm tiết diện, chiều dài l , tiết diện hở có một trục đối xứng, chẳng hạn trục y như trên hình 5.8. Trong trường hợp này, tâm xoay K nằm trên trục đối xứng y , không trùng với trọng tâm C và có vị trí chưa xác định. Phương trình vi phân khi xoắn kìm chế vẫn có dạng (5.21):

$$\frac{d^2 B}{dz^2} - \frac{GI_{\omega 0}}{EI_\omega} B = -m_z. \quad (5.33)$$

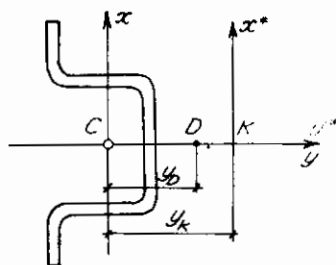
Khác với trường hợp tiết diện có hai trục đối xứng, trong trường hợp này các đại lượng I_ω , m_z và I_p (khi tính m_z) cần được tính với tâm xoay K và sẽ được biểu thị theo các đại lượng I_ω^C , m_z^C , I_p^C tính với trọng tâm C .

Cũng lập biểu thức m_z tương tự như đã thực hiện trong mục 5.2, ta được phương trình:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + k^2 B = 0 \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{l}{EI_\omega} (\sigma I_p - GI_{\omega 0}). \quad (5.34)$$

Trong trường hợp tiết diện ở hai đầu thanh được phép vênh tự do, sau khi giải phương trình (5.34), ta được công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 I_p} + \frac{GI_{\omega 0}}{I_p}. \quad (5.35)$$



Hình 5.8

Xuất phát từ công thức (5.35) ta có thể tìm tọa độ y_k của tâm xoay K theo vị trí của trục trong tâm C (hình 5.8) như sau: *tâm xoay phải có vị trí để sao cho ứng suất tới hạn xác định theo (5.35) có giá trị nhỏ nhất.*

Theo công thức chuyển cực đã biết trong SBVL, khi gốc của tọa độ s là điểm không thì tọa độ quạt ω tính với cực K (tâm xoay) được biểu thị qua tọa độ quạt ω_c tính với cực C (trọng tâm) như sau:

$$\omega = \omega_c - y_k x \quad (5.36)$$

với x là tọa độ theo trục x của điểm bất kỳ trên tiết diện.

Thay (5.36) vào công thức mômen quán tính quạt của tiết diện tính với tâm xoay K , ta có:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \int_A \omega_c^2 dA - 2y_k \int_A \omega_c x dA + y_k^2 \int_A x^2 dA \quad (5.37)$$

Tích phân thứ nhất của (5.37) là mômen quán tính quạt tính với trọng tâm C .

Tích phân thứ hai của (5.37) là mômen quán tính quạt ly tâm hay mômen tích quạt đường, tính với trọng tâm C và được ký hiệu như sau:

$$R_y = \int_A \omega_c x dA \quad (5.38)$$

Tích phân thứ ba của (5.37) là mômen quán tính chính trung tâm I_y của tiết diện.

Công thức (5.37) sẽ trở thành: $I_\omega = I_\omega^c - 2y_k R_y + y_k^2 I_y$ (5.39)

Mômen quán tính cực của tiết diện tính với tâm xoay K bằng tổng các mômen quán tính đối với các trục y^* và x^* đi qua tâm xoay K (hình 5.8), ta có:

$$I_p = I_{y^*} + I_{x^*} = I_y + I_x + y_k^2 A = I_p^c + y_k^2 A \quad (5.40)$$

Như vậy, công thức ứng suất tới hạn (5.35) sẽ có dạng:

$$\sigma_{th} = \frac{l}{I_p^c + y_k^2 A} \left[\frac{\pi^2 E}{l^2} (I_\omega^c - 2y_k R_y + y_k^2 I_y) + GI_{xo} \right] \quad (5.41)$$

Hay:
$$\sigma_{th} = \frac{\sigma_\theta - 2\rho_y \eta + \sigma_y \eta^2}{l + \eta^2} \quad (5.42)$$

trong đó:
$$\sigma_\theta = \frac{\pi^2 EI_\omega^c}{l^2 I_p^c} + \frac{GI_{xo}}{I_p^c}; \quad \sigma_y = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2 A} \quad (5.43)$$

$$\rho_y = \frac{\pi^2 E R_y}{l^2 A r}; \quad \eta = \frac{y_k}{r}; \quad \text{với } r = \sqrt{\frac{I_p^c}{A}} \quad (5.44)$$

Đại lượng σ_θ tương ứng với công thức (5.28), biểu thị ứng suất tới hạn khi thanh bị mất ổn định dạng xoắn-uốn quanh trọng tâm tiết diện. Đại lượng σ_y tương ứng

với công thức (5.32), biểu thị ứng suất tối hạn khi thanh bị mất ổn định trong mặt phẳng xz . Đại lượng ρ_y tỷ lệ với R_y có thứ nguyên là thứ nguyên của ứng suất. Đại lượng không thứ nguyên η là thông số phụ thuộc tọa độ tâm xoay y_k .

Điều kiện để ứng suất tối hạn có giá trị nhỏ nhất là đạo hàm theo thông số η của công thức (5.42) bằng không:

$$\frac{d\sigma_{th}}{d\eta} = (-2\rho_y + 2\sigma_y \eta) (1 + \eta^2) - 2\eta (\sigma_{\theta} - 2\rho_y \eta + \sigma_y \eta^2) = 0.$$

Kết hợp với (5.42), ta tìm được:

$$\eta = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{th}}. \quad (5.45)$$

Thay (5.45) vào (5.42) và biến đổi ta được phương trình bậc hai đối với σ_{th} :

$$(\sigma_{th} - \sigma_{\theta}) (\sigma_{th} - \sigma_y) - \rho_y^2 = 0,$$

hay:

$$\sigma_{th}^2 - \sigma_{th} (\sigma_{\theta} + \sigma_y) + (\sigma_y \sigma_{\theta} - \rho_y^2) = 0, \quad (5.46)$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình (5.46):

$$\sigma_{th} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{\theta} + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_{\theta} - \sigma_y)^2 + 4\rho_y^2} \right]. \quad (5.47)$$

Cũng có thể tìm nghiệm (5.47) của phương trình (5.46) bằng cách dựng vòng tròn Mohr, tương tự như khi nghiên cứu trạng thái ứng suất trong SBVI.

Trong trường hợp tiết diện có một trục đối xứng, ngoài khả năng mất ổn định dạng xoắn-uốn, thanh còn có khả năng mất ổn định theo dạng uốn thuần túy trong mặt phẳng xy với giá trị tối hạn σ_x xác định theo (5.32):

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2 A}, \quad (5.48)$$

Ứng suất dễ tính là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị σ_{th} và σ_x .

Từ (5.44) và (5.45) ta xác định được tọa độ của tâm xoay K :

$$y_k = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{th}} r. \quad (5.49)$$

Ta thấy tâm xoay không trùng với trọng tâm tiết diện và cũng không trùng với tâm uốn D của tiết diện (hình 5.8). Thật vậy, tâm uốn của thanh thành mỏng được xác định theo công thức đã biết trong SBVI, như sau:

$$y_D = \frac{I}{I_y A} \int \omega_{c,x} dA = \frac{R_y}{I_y}. \quad (5.50)$$

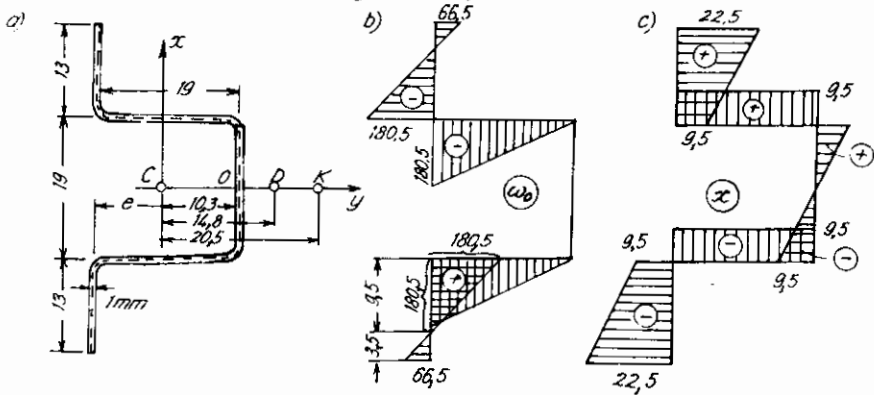
Theo (5.44), (5.43) và (5.50), ta có:

$$\rho_y = \frac{\sigma_y y_D}{r}; \quad (5.51)$$

Công thức (5.49) sẽ có dạng:
$$\gamma_k = \frac{\sigma_y}{\sigma_y - \sigma_{th}} \cdot \gamma_D. \quad (5.52)$$

Như vậy, nói chung ta thấy $\gamma_k \neq \gamma_D$.

Ví dụ 5.1 (theo [13]). Xác định lực tối hạn cho thanh đũa có chiều dài $l = 1$ m; chịu lực nén đúng tâm P . Tiết diện thanh có dạng và kích thước (theo mm) như trên hình 5.9a. Cho biết: các đầu thanh được phép vênh tự do; $E=7 \cdot 10^4$ N/mm²; $G=2,8 \cdot 10^4$ N/mm²; giới hạn tỷ lệ $\sigma_{Hl} = 200$ N/mm².



Hình 5.9

❖ *Xác định các đặc trưng hình học*

- Diện tích tiết diện: $A = 3 \cdot 1 \cdot 19 + 2 \cdot 1 \cdot 13 = 83 \text{ mm}^2$.
- Khoảng cách e từ đường trung gian của cánh tiết diện đến trọng tâm C :

$$e = \frac{1 \cdot 19 \cdot 19 + 2 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 9,5}{3 \cdot 1 \cdot 19 + 2 \cdot 1 \cdot 13} = 8,7 \text{ mm}.$$

- Các mômen quán tính chính trung tâm:

$$I_y = \frac{1 \cdot 19^3}{12} + 2 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 9,5^2 + 2 \left(\frac{1 \cdot 13^3}{12} + 1 \cdot 13 \cdot 16^2 \right) = 11 \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$$

$$I_x = 2 \left(\frac{1 \cdot 19^3}{12} + 1 \cdot 19 \cdot (9,5 - 8,7)^2 \right) + 2 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 8,7^2 + 1 \cdot 19 \cdot 10,3^2 = 5,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

- Mômen quán tính cực đối với trọng tâm: $I_p^C = I_y + I_x = 16,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$.
- Mômen quán tính khi xoắn (theo (5.2)): $I_{xo} = \frac{1}{3} (2 \cdot 13 \cdot 13^3 + 3 \cdot 19 \cdot 1^3) = 28 \text{ mm}^4$.

❖ *Xác định các đặc trưng quạt đối với trọng tâm C*

- Mômen tĩnh quạt đường R_y đối với trọng tâm C theo (5.38):

Trước tiên, tính $R_{y,O}$ đối với cực O nằm trên đường trung gian của thành giữa:

$$R_{y,0} = \int_A \omega_o x dA. \quad (a)$$

Để tính tích phân này ta có thể vẽ biểu đồ tọa độ quạt ω_o (hình 5.9b) và tọa độ x (hình 5.9c) rồi áp dụng cách nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin với chú ý là bề dày $t = 1 \text{ mm}$. Kết quả:

$$R_{y,0} = -2 \left[\frac{180,5 \cdot 19}{2} \cdot 9,5 + \frac{180,5 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{3} (2 \cdot 9,5 + 22,5) - \frac{66,5 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{3} (9,5 + 2 \cdot 22,5) \right] \\ = -49,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^5. \quad (b)$$

Tiếp đó, áp dụng công thức chuyển cực (5.36) để tìm các đại lượng tính với trọng tâm C theo các đại lượng tính với cực O . Trong trường hợp này, công thức (5.36) sẽ có dạng:

$$\omega_c = \omega_o + y_o x \quad (c)$$

với y_o là khoảng cách giữa trọng tâm C và cực O : $y_o = 10,3 \text{ mm}$.

Thay (c) vào (5.38), ta được:

$$R_y = \int_A \omega_c x dA = \int_A (\omega_o + y_o x) x dA = R_{y,0} + y_o I_y = \\ = -49,3 \cdot 10^3 + 10,3 \cdot 11 \cdot 10^4 = -163 \cdot 10^5 \text{ mm}^5. \quad (d)$$

- Mômen quán tính quạt I_{ω}^C đối với trọng tâm C : cũng thực hiện tương tự như khi tính R_y đối với trọng tâm C .

Trước tiên, tính $I_{\omega,0}$ đối với cực O : $I_{\omega,0} = \int_A \omega_o^2 dA. \quad (e)$

Nhân biểu đồ tọa độ quạt ω_o (hình 5.9b) với chính biểu đồ đó, ta được:

$$I_{\omega,0} = 2 \left[\frac{180,5 \cdot 19}{2} \cdot \frac{2 \cdot 180,5}{3} + \frac{180,5 \cdot 9,5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 180,5}{3} + \frac{66,5 \cdot 3,5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 66,5}{3} \right] = \\ = 630 \cdot 10^3 \text{ mm}^6. \quad (f)$$

Tiếp đó, áp dụng công thức (5.39) để tìm I_{ω}^C tính với trọng tâm C theo $I_{\omega,0}$ tính với cực O . Trong trường hợp này, ta cần thay I_{ω} bằng $I_{\omega,0}$; y_k bằng y_o , công thức (5.39) sẽ có dạng:

$$I_{\omega}^C = I_{\omega,0} + 2y_o R_y - y_o^2 I_y. \quad (g)$$

$$I_{\omega}^C = 630 \cdot 10^3 + 2 \cdot (-10,3) \cdot (-163 \cdot 10^5) - (10,3)^2 \cdot 11 \cdot 10^4 = 282 \cdot 10^6 \text{ mm}^6.$$

❖ Xác định các ứng suất

- Ứng suất σ_y và σ_{θ} theo (5.43):

$$\sigma_y = \frac{\pi^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 11 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 83} = 91,6 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_u = \frac{\pi^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 282 \cdot 10^4}{10^6 \cdot 16,2 \cdot 10^3} + \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 28}{16,2 \cdot 10^3} = 120 + 48,4 = 168,7 \text{ N/mm}^2.$$

• Đại lượng ρ_y theo (5.44):
$$\rho_y = \frac{\pi^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot (-163 \cdot 10^3)}{10^6 \sqrt{83 \cdot 16,2 \cdot 10^3}} = -97,1 \text{ N/mm}^2.$$

• Ứng suất tới hạn dạng xoắn-uốn quanh tâm K theo (5.47):

$$\sigma_{th} = \frac{I}{2} \left[(168,7 + 91,6) - \sqrt{(168,7 - 91,6)^2 + 4(-97,1)^2} \right] = 25,7 \text{ N/mm}^2.$$

• Ứng suất tới hạn dạng uốn trong mặt phẳng zy theo (5.48):

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 5,2 \cdot 10^3}{10^6 \cdot 83} = 43 \text{ N/mm}^2.$$

• Ứng suất để tính: cả hai giá trị σ_{th} và σ_x đều nhỏ hơn $\sigma_H = 200 \text{ N/mm}^2$. Chọn giá trị nhỏ nhất bằng $25,7 \text{ N/mm}^2$ là ứng suất để tính.

Lực tới hạn tương ứng khi $l = 1 \text{ m}$: $P_{th} = \sigma_{th} A = 25,7 \cdot 83 = 213,3 \text{ N}$.

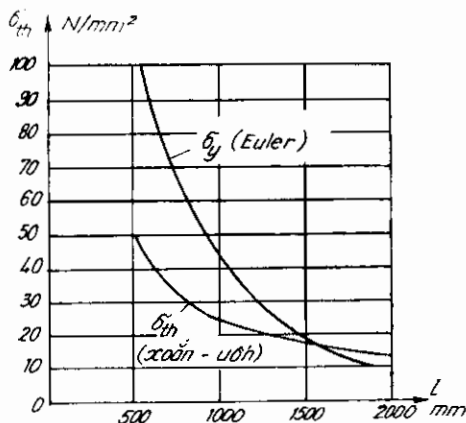
❖ Xác định tọa độ tâm xoay và tâm uốn

• Tâm xoay, theo (5.49):
$$y_k = \frac{9,71}{91,6 - 25,7} \sqrt{\frac{16,2 \cdot 10^3}{83}} = 20,6 \text{ mm}.$$

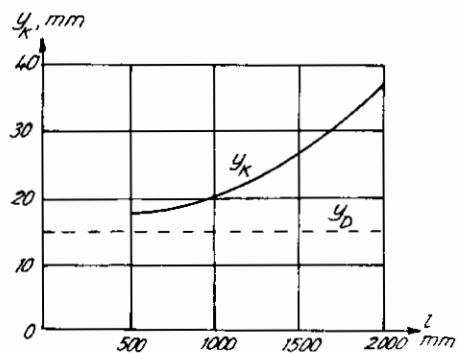
• Tâm uốn, theo (5.50):
$$y_D = \frac{163 \cdot 10^3}{11 \cdot 10^3} = 14,8 \text{ mm}.$$

Ta thấy tâm xoay nằm cách trọng tâm xa hơn tâm uốn.

❖ Khảo sát sự thay đổi ứng suất theo chiều dài thanh



Hình 5.10



Hình 5.11

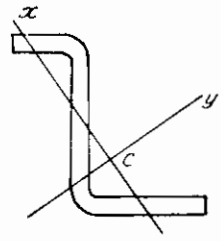
Trên hình 5.10 là kết quả vẽ đồ thị liên hệ giữa các ứng suất σ_{th} và σ_x theo chiều dài các thanh từ 500 mm đến 2000 mm. Ta thấy: khi chiều dài thanh lớn hơn 1580 mm thì thanh sẽ mất ổn định theo dạng uốn trong mặt phẳng đối xứng.

❖ *Khảo sát vị trí của tâm xoay và tâm uốn theo chiều dài thanh*

Trên hình 5.11 là kết quả đối chiếu giữa các vị trí của tâm xoay (y_C) và tâm uốn (y_D) theo chiều dài các thanh từ 500 mm đến 2000 mm. Ta thấy: khoảng cách giữa tâm xoay và tâm uốn tăng nhanh khi tăng chiều dài thanh.

5.4. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở không đối xứng

Xét thanh chịu lực nén P đặt đúng trọng tâm tiết diện, chiều dài l , tiết diện hở, không đối xứng (hình 5.12), tiết diện ở hai đầu thanh được phép vênh tự do. Gọi x, y là các trục quán tính chính trung tâm của tiết diện. Trong trường hợp này, ứng suất tối hạn khi thanh mất ổn định theo dạng xoắn-uốn vẫn được xác định theo công thức (5.35) song các tọa độ x_k, y_k của tâm xoay K còn chưa được xác định.



Hình 5.12

Thay thế cho công thức (5.36), khi gốc tọa độ s là điểm không thì tọa độ quạt ω tính với cực K (tâm xoay) được biểu thị qua tọa độ quạt ω_c tính với cực C (trọng tâm) như sau:

$$\omega = \omega_c - y_k x + x_k y \quad (5.53)$$

với x, y là tọa độ theo các trục x, y của điểm bất kỳ trên tiết diện.

Thay (5.53) vào công thức mômen quán tính quạt của tiết diện tính với tâm xoay K , ta có:

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \int_A (\omega_c^2 - 2\omega_c y_k x + 2\omega_c x_k y - 2y_k x_k xy + y_k^2 x^2 + x_k^2 y^2) dA \quad (5.54)$$

Sử dụng các ký hiệu tương tự như trong mục 5.3 về các mômen tĩnh quạt đường:

$$R_y = \int_A \omega_c x dA; \quad R_x = \int_A \omega_c y dA, \quad (5.55)$$

đồng thời lưu ý là mômen quán tính ly tâm $I_{yx} = \int_A x y dA = 0$, ta có:

$$I_{\omega} = I_{\omega}^c - 2y_k R_y + 2x_k R_x + y_k^2 I_y + x_k^2 I_x \quad (5.56)$$

Biểu thức mômen quán tính cực của tiết diện tính với tâm xoay K có dạng:

$$I_p = I_y + I_x + y_k^2 A + x_k^2 A = I_p^c + (y_k^2 + x_k^2) A \quad (5.57)$$

Như vậy, công thức ứng suất tối hạn (5.35) sẽ có dạng:

$$\sigma_{th} = \frac{I}{I_p + (y_k^2 + x_k^2) A} \left[\frac{\pi^2 E}{l^2} (I_{\omega}^c - 2y_k R_y + 2x_k R_x + y_k^2 I_y + x_k^2 I_x) + G I_{\omega} \right]$$

Hay:

$$\sigma_{th} = \frac{\sigma_0 - 2\rho_y \eta + 2\rho_x \xi + \sigma_y \eta^2 + \sigma_x \xi^2}{1 + \eta^2 + \xi^2} \quad (5.58)$$

trong đó:

$$\rho_x = \frac{\pi^2 ER_v}{l^2 \Delta r}; \quad \xi = \frac{x_k}{r} \quad (5.59)$$

các đại lượng σ_0 , σ_y , ρ_y , η , r vẫn được xác định theo (5.43), (5.44).

Điều kiện để ứng suất tối hạn có giá trị nhỏ nhất là các đạo hàm riêng của biểu thức (5.58) theo thông số η và ξ bằng không:

$$\frac{\partial \sigma_{th}}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{th}}{\partial \xi} = 0.$$

Kết hợp với (5.58), ta tìm được:

$$\eta = \frac{\rho_y}{\sigma_y - \sigma_{th}}; \quad \xi = \frac{\rho_x}{\sigma_x - \sigma_{th}} \quad (5.60)$$

Thay (5.60) vào (5.58) và biến đổi ta được phương trình bậc ba đối với σ_{th} :

$$(\sigma_{th} - \sigma_0)(\sigma_{th} - \sigma_y)(\sigma_{th} - \sigma_x) - \rho_y^2(\sigma_{th} - \sigma_x) - \rho_x^2(\sigma_{th} - \sigma_y) = 0, \quad (5.61)$$

Qua khảo sát, nghiệm nhỏ nhất của (5.61) nhỏ hơn các đại lượng σ_0 , σ_y , σ_x . Do đó, thanh có tiết diện không đối xứng sẽ mất ổn định theo dạng xoắn-uốn.

Phương trình (5.61) là tổng quát nên có thể áp dụng cho các trường hợp đặc biệt:

- Tiết diện có hai trục đối xứng: khi đó $\rho_y = \rho_x = 0$, ba nghiệm của (5.61) sẽ là:

$$(\sigma_{th})_1 = \sigma_0; \quad (\sigma_{th})_2 = \sigma_y; \quad (\sigma_{th})_3 = \sigma_x,$$

phù hợp với các công thức (5.28) và (5.32) đã lập trong mục 5.2.

- Tiết diện có một trục đối xứng: khi đó $\rho_y \neq 0$; $\rho_x = 0$, ta tìm được các nghiệm của (5.61): $(\sigma_{th})_{1,2}$ theo (5.46) và $(\sigma_{th})_3$ theo (5.48).

5.5. Ổn định của thanh thành mỏng chịu uốn thuần túy

A. Trường hợp tiết diện có một trục đối xứng

Xét thanh thành mỏng, tiết diện hở, có một trục đối xứng là trục y , chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng xy do tác dụng của hai mômen M đặt theo chiều dương ở hai đầu thanh như trên hình 5.13. Trong trường hợp này ta có:

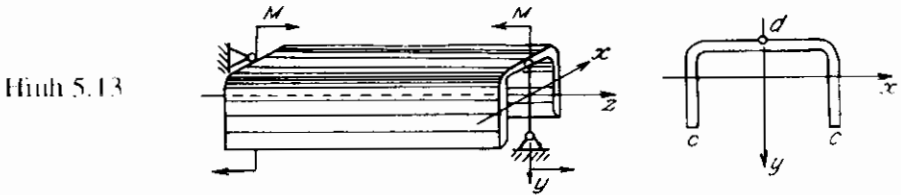
Ứng suất pháp tại các tiết diện phân bố theo quy luật: $\sigma = \frac{M}{I_x} y$. (5.62)

Ứng suất pháp tại thớ biên: $\sigma_M = \frac{M}{W_x}$ (5.63)

với W_x là mômen chống uốn của tiết diện, liên quan đến các thớ biên (tại c hoặc d trên hình 5.13).

Khi chưa mất ổn định, đường đàn hồi của thanh là đường cong phẳng trong mặt phẳng xy . Khi M đạt đến giá trị tối hạn, trục thanh có thể bị uốn cong theo

phương x , vuông góc với mặt phẳng uốn ban đầu yz . Đó là hiện tượng *mất ổn định dạng uốn phẳng*.



Hình 5.13

Khi mất ổn định, các tiết diện bị xoay trong mặt phẳng xy quanh tâm xoay K nằm trên trục đối xứng của tiết diện. Do đó, ta có thể vận dụng phương trình vi phân khi xoắn kim chế (5.33) để giải bài toán này. Muốn vậy, cần tìm cường độ m_z của mômen xoắn phân bố, tính với tâm xoay K của tiết diện.

Theo (5.22) với chú ý là $\psi = \rho(d\theta/dz)$, ta có:

$$m_z = - \int_A \sigma \frac{d\psi}{dz} \rho dA = - \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_A \sigma \rho^2 dA, \quad (5.64)$$

với ρ là bán kính vectơ của phân tố diện tích dA đối với tâm xoay K .

Thay (5.62) vào (5.64), ta được:
$$m_z = - \frac{d^2\theta}{dz^2} \frac{M}{I_x} \int_A y \rho^2 dA. \quad (5.65)$$

Nếu ký hiệu:
$$S_y = \int_A y \rho^2 dA, \quad (5.66)$$

và chú ý đến (5.15), với quy định ứng suất kéo là dương, ta có:

$$m_z = - M \frac{S_y}{I_x} \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{M}{EI_\omega} \frac{S_y}{I_x} B, \quad (5.67)$$

trong đó, đại lượng I_ω được xác định đối với tâm xoay của tiết diện.

Phương trình vi phân (5.33) trở thành:

$$\frac{d^2B}{dz^2} + k^2 B = 0; \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{M}{EI_\omega} \frac{S_y}{I_x} - \frac{GI_{xo}}{EI_\omega}. \quad (5.68)$$

Khi tiết diện ở hai đầu thanh được phép vênh tự do, sau khi giải phương trình (5.68) và sử dụng các điều kiện biên như đã thực hiện với phương trình (5.27), ta tìm được giá trị tới hạn nhỏ nhất của mômen tương ứng với $kl = \pi$ như sau:

$$\frac{M_{th}}{I_x} = \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2 S_y} + \frac{GI_{xo}}{S_y}. \quad (5.69)$$

Cấu trúc của (5.69) tương tự như cấu trúc của ứng suất tới hạn (5.35) khi thanh

chịu nén đúng tâm song cân thay đại lượng I_p bằng S_y . Đại lượng I_w vẫn được xác định theo (5.39), theo các đại lượng đã quen biết trong mục 5.3.

Để xác định đại lượng S_y đối với tâm xoay ta cần tìm sự liên hệ giữa bán kính vectơ ρ_c đối với tâm xoay K và bán kính vectơ ρ_c đối với trọng tâm C . Nếu x, y là hệ trục quán tính chính trung tâm và y_k là khoảng cách theo trục đối xứng, từ tâm xoay K đến trọng tâm C , ta có:

$$\rho^2 = y^2 + x^2 = (y - y_k)^2 + x^2 = \rho_c^2 - 2y_k y + y_k^2. \quad (5.70)$$

Thay (5.70) vào (5.66), ta được:

$$S_y = \int_A (\rho_c^2 - 2y_k y + y_k^2) y dA = S_y^c - 2y_k I_y, \quad (5.71)$$

trong đó:

$$S_y^c = \int_A \rho_c^2 y dA. \quad (5.72)$$

Thay (5.71) vào (5.69), ta được:

$$\frac{M_{th}}{I_x} = \frac{I}{S_y^c - 2y_k I_y} \left[\frac{\pi^2 E}{I^2} (I_w - 2y_k R_y + y_k^2 I_y) + G I_{tw} \right]. \quad (5.73)$$

Từ (5.73) và (5.63), sau khi biến đổi ta xác định được giá trị tới hạn của ứng suất tại thờ biên:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_\theta - 2\sigma_y \eta_D \eta_k + \sigma_y \eta_k^2}{2\nu(\beta_y + \eta_D - \eta_k)}; \quad (5.74)$$

$$\text{với: } \beta_y = \left(\frac{S_y^c}{2I_x} - y_D \right) \frac{I}{r}; \quad \nu = \frac{W_x}{rA}; \quad \eta_k = y_k \frac{I}{r}; \quad \eta_D = y_D \frac{I}{r} = \frac{R_y I}{I_y r}; \quad (5.75)$$

các đại lượng σ_θ , σ_y , ρ_y , r vẫn được xác định theo (5.43), (5.44).

Vị trí của tâm xoay được xác định theo điều kiện: *ứng suất tới hạn có giá trị nhỏ nhất* tức là đạo hàm của biểu thức (5.74) theo thông số η_k bằng không.

Khi $\beta_y + \eta_D - \eta_k \neq 0$, điều kiện trên có dạng:

$$-\sigma_y \eta_D + \sigma_y \eta_k + \nu \sigma_M = 0.$$

$$\text{Suy ra:} \quad \eta_k = \eta_D - \nu \frac{\sigma_M}{\sigma_y}. \quad (5.76)$$

Thay (5.76) vào (5.74) ta được phương trình bậc hai để tìm ứng suất tới hạn:

$$(\nu \sigma_M)^2 + 2\beta_y \sigma_y (\nu \sigma_M) + \sigma_y^2 \eta_D^2 - \sigma_\theta \sigma_y = 0.$$

$$\text{Nghiệm của phương trình: } \sigma_M = \frac{\sigma_y}{\nu} \left(-\beta_y \pm \sqrt{\beta_y^2 + (\sigma_\theta / \sigma_y) - \eta_D^2} \right). \quad (5.77)$$

Mômen tới hạn:
$$M_{th} = P_y' \left(-\gamma_y \pm \sqrt{\gamma_y^2 + (P_\theta r^2 / P_y) - y_D^2} \right); \quad (5.78)$$

trong đó:
$$\gamma_y = \beta_y r = \frac{S_y^c}{2I_x} - y_D; \quad P_y = \sigma_y A; \quad P_\theta = \sigma_\theta A.$$

B. Trường hợp tiết diện có hai trục đối xứng

Trong trường hợp đặc biệt này, ta có: $R_y = S_y^c = \beta_y = y_D = 0$. Công thức xác định ứng suất và mômen tới hạn có dạng:

$$\sigma_{M,th} = \frac{1}{v} \sqrt{\sigma_\theta \sigma_y}; \quad M_{th} = r \sqrt{P_\theta P_y}. \quad (5.79)$$

❖ *Tiết diện hình sao tạo thành từ các dải chữ nhật hẹp có hai trục đối xứng và tiết diện hình chữ nhật hẹp.* Trong trường hợp này ta có:

$$I_\omega = I_\omega^c = 0; \quad \sigma_\theta = GI_{\omega\theta} / I_p^c = GI_{\omega\theta} (A r^2 - W_x^2).$$

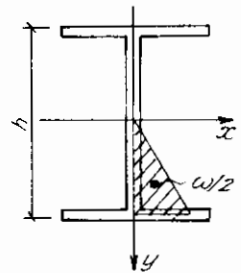
Do đó:
$$\sigma_{M,th} = \frac{\pi}{W_x} \sqrt{GI_{\omega\theta} EI_y}; \quad M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{GI_{\omega\theta} EI_y}. \quad (5.80)$$

Trong trường hợp tiết diện hình chữ nhật hẹp có các cạnh b, t lần lượt theo các trục y và x , khi yz là mặt phẳng uốn ta có: $I_y = bt^3/12; W_x = tb^2/6; I_{\omega\theta} = bt^3/3$. Các công thức (5.81) sẽ có dạng cụ thể hơn như sau:

$$\sigma_{M,th} = \frac{\pi t^2}{bl} \sqrt{GE}; \quad M_{th} = \frac{\pi b t^3}{6l} \sqrt{GE}. \quad (5.81)$$

❖ *Tiết diện hình chữ I (hình 5.14)*

Trong trường hợp này $I_\omega = I_\omega^c \neq 0$. Để xác định ta cần lưu ý: tọa độ quạt ω bằng không tại các điểm nằm trên bản bụng tiết diện và bằng $h/2$ tại các điểm nằm trên bản đế tiết diện khi tọa độ y được tính từ đường trung gian của bản bụng và bán kính vector bản đầu trùng với đường trung gian của bản bụng. Do đó, mômen quán tính quạt được xác định như sau:



Hình 5.14

$$I_\omega = I_\omega^c = \int_A \omega^2 dA = 2 \int_{A^*} \frac{x^2 h^2}{4} dA = \frac{h^2}{2} \int_{A^*} x^2 dA = \frac{h^2}{2} I_y^*; \quad (5.82)$$

với I_y^* là mômen quán tính đối với trục y của một bản đế.

Sau khi thay các đại lượng $\sigma_\theta, \sigma_y, v$ xác định theo (5.43), (5.75) và đặt:

$$K = \pi \sqrt{l + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}} \quad \text{với} \quad a^2 = \frac{h^2 EI_y^*}{2GI_{\omega\theta}}. \quad (5.83)$$

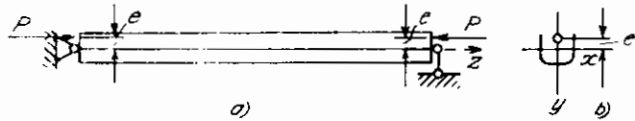
ta được:
$$\sigma_{M,th} = \frac{K}{W_x} \sqrt{GI_{xo} EI_y}; \quad M_{th} = \frac{K}{l} \sqrt{GI_{xo} EI_y}. \quad (5.84)$$

5.6. Ổn định của thanh thành mỏng chịu nén lệch tâm

A. Trường hợp tiết diện có một trục đối xứng

Xét thanh thành mỏng, tiết diện hở, có một trục đối xứng là trục y , chịu lực P nén lệch tâm với tâm sai e trong mặt phẳng đối xứng zy như trên hình 5.15.

Hình 5.15



Khi chưa mất ổn định, đường đàn hồi của thanh là đường cong phẳng trong mặt phẳng yz . Khi P đạt đến giá trị tới hạn, thanh có thể mất ổn định dạng uốn phẳng: trục thanh bị uốn cong theo phương x , vuông góc với mặt phẳng uốn ban đầu yz . Các tiết diện bị xoay trong mặt phẳng xy quanh tâm xoay K nằm trên trục đối xứng của tiết diện, cách trọng tâm C là y_K chưa xác định. Do đó, ta có thể giải bài toán tương tự như đã thực hiện trong mục 5.5: xác định y_K theo điều kiện ứng suất tới hạn có giá trị nhỏ nhất.

Nếu quy ước ứng suất nén là dương và gọi x, y là các trục quán tính chính trung tâm thì ứng suất pháp cơ bản tại thờ bất kỳ có tọa độ y bằng:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{I_x} y = \sigma_o \left(1 + ey/i_v^2 \right). \quad (5.85)$$

trong đó: $\sigma_o = P/A$; $i_v^2 = I_x/A$.

Cường độ m_z của mômen xoắn phân bố, tính với tâm xoay K của tiết diện, do các ứng suất cơ bản gây ra được xác định theo (5.64):

$$m_z = - \frac{d^2 \theta}{dz^2} \int_A \sigma \rho^2 dA = - \frac{d^2 \theta}{dz^2} \sigma_o \left(\int_A \rho^2 dA + \frac{e}{i_x^2} \int_A y \rho^2 dA \right).$$

Hay:
$$m_z = - \frac{d^2 \theta}{dz^2} \sigma_o \left[I_p + (eS_y/i_v^2) \right] = - \frac{\sigma_o}{EI_w} \left[I_p + (eS_y/i_v^2) \right] B. \quad (5.86)$$

Thay cho (5.27) trong trường hợp này ta được phương trình vi phân:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + k^2 B = 0; \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{\sigma_o}{EI_w} \left[I_p + (eS_y/i_v^2) \right] - \frac{GI_{xo}}{EI_w}. \quad (5.87)$$

Khi tiết diện ở hai đầu thanh được phép vênh tự do, sau khi giải phương trình (5.87) và sử dụng các điều kiện biên như đã thực hiện trong mục 5.5 ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của ứng suất, tương ứng với $kl = \pi$ như sau:

$$\sigma_o = \frac{I}{I_p + (eS_y i_v^2)} \left[\frac{\pi^2 EI \omega}{l^2} + GI_{xo} \right]. \quad (5.88)$$

Vận dụng các công thức (5.39), (5.71) biến đổi I_ω và S_y đối với tâm xoay K theo các đại lượng tính với trọng tâm C , ta có thể đưa (5.88) về dạng:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_\theta - \sigma_y \eta_k (2\eta_D - \eta_k)}{1 + \eta_k^2 + 2\eta_k (\beta_y + \eta_D - \eta_k)}. \quad (5.89)$$

trong đó: $\eta_c = e/r$; (5.90)

các đại lượng r , β_y , η_k , η_D được xác định theo (5.75) còn σ_θ , σ_y , r vẫn được xác định theo (5.43), (5.44).

Vị trí của tâm xoay được xác định theo điều kiện đạo hàm của biểu thức (5.89) theo thông số η_k bằng không. Kết quả:

$$\eta_k = \eta_D + \frac{\sigma_o (\eta_D - \eta_c)}{\sigma_y - \sigma_o}. \quad (5.91)$$

Thay (5.91) vào (5.89) ta được phương trình bậc hai để tìm ứng suất σ_o :

$$(\sigma_o - \sigma_\theta)(\sigma_o - \sigma_y) + 2\sigma_o(\sigma_o - \sigma_y)\eta_c(\beta_y + \eta_D) - (\sigma_o\eta_c - \sigma_y\eta_D)^2 = 0. \quad (5.92)$$

Hay:

$$[1 + 2\eta_c(\beta_y + \eta_D) - \eta_c^2] \sigma_o^2 - (\sigma_\theta + \sigma_y + 2\sigma_y\beta_y\eta_c)\sigma_o + \sigma_\theta\sigma_y - \sigma_y^2\eta_D^2 = 0. \quad (5.93)$$

Từ phương trình (5.92), nếu cho $\eta_c = 0$, ta có thể suy ra phương trình (5.46) tương ứng với trường hợp lực nén đặt tại trọng tâm tiết diện.

Trường hợp lực nén đặt tại tâm uốn D của tiết diện, ta có: $\eta_c = \eta_D$. Từ (5.91), ta tìm được $\eta_k = \eta_D$, nếu $\sigma_y \neq \sigma_o$, điều đó chứng tỏ là tâm xoay trùng với tâm uốn D . Từ (5.92) ta suy ra các nghiệm:

$$\sigma_o^{(1)} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_y \eta_D^2}{1 + \eta_D^2 + 2\eta_D \beta_y}; \quad \sigma_o^{(2)} = \sigma_y. \quad (5.94)$$

Qua khảo sát phương trình (5.93) ta nhận thấy: với độ lệch tâm đủ lớn, một trong các nghiệm của (5.93) trở thành nghiệm âm nghĩa là thanh có thể bị mất ổn định dạng uốn phẳng với lực P là lực kéo. Giá trị giới hạn của độ lệch tâm tương ứng với khi P là lực kéo được xác định theo điều kiện: nghiệm của (5.93) bằng $\pm \infty$. Khi đó, hệ số của số hạng đầu của (5.93) phải bằng không:

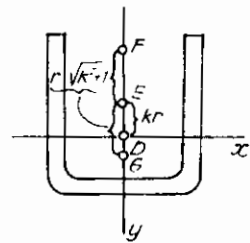
$$[1 + 2\eta_c(\beta_y + \eta_D) - \eta_c^2] = 0; \quad \text{hay} \quad \eta_c^2 - 2\eta_c k - 1 = 0, \quad (5.95)$$

với: $k = \beta_y + \eta_D$ là đại lượng không thứ nguyên.

Nghiệm của (5.95): $\eta_c = k \pm \sqrt{k^2 + 1}$.

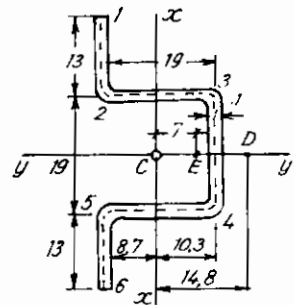
Từ (5.90), suy ra: $e = (k \pm \sqrt{k^2 + 1}) r$.

Như vậy, nếu trên trục đối xứng y , từ trọng tâm C ta dựng một đoạn $CE = kr$ và từ E dựng về hai chiều các đoạn EF và EG bằng $r\sqrt{k^2 + 1}$ thì khi P đặt trong khoảng FG , lực tối hạn chỉ có thể là lực nén (hình 5.16).



Hình 5.16

Ví dụ 5.2 Xác định giá trị tối hạn của ứng suất trung bình $\sigma_0 = P/A$ cho thanh thành mỏng đã xét trong ví dụ 5.1 tương ứng với khi lực nén lệch tâm P (hình 5.17) có điểm đặt:



Hình 5.17

- 1) tại E cách trọng tâm C là 7 mm;
- 2) tại tâm uốn D cách trọng tâm là 14,8 mm.

Để vận dụng (5.93), ta cần chuẩn bị các số liệu:

❖ Tìm S_y^C của tiết diện theo (5.72):

$$S_y^C = \int_A \rho_y^2 y dA = \int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA.$$

- Đoạn 3-4: $S_{y,1} = 10,3^3 \cdot 19 + 10,3 \int_{-9,5}^{+9,5} x^2 dx = 20762 + 5887 = 26649 \text{ mm}^5$.
- Đoạn 2-3, 5-4: $S_{y,2} = 2 \int_{-8,7}^{10,3} x^3 dy + 2 \cdot 9,5^2 \int_{-8,7}^{10,3} x dy = 5507 \text{ mm}^5$.
- Đoạn 1-2, 5-6: $S_{y,3} = 2(-8,7)^3 \cdot 13 + (-8,7) \cdot 2 \int_{9,5}^{22,5} x^2 dx = -78214 \text{ mm}^5$

Giá trị S_y^C của toàn tiết diện: $S_y^C = S_{y,1} + S_{y,2} + S_{y,3} = -46058 \text{ mm}^5$.

❖ Tìm r theo (5.44) với $A = 83 \text{ mm}^2$ và $I_p^C = 16,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$ (xem ví dụ 5.1):

$$r = \sqrt{I_p^C / A} = \sqrt{16200 / 83} = 14 \text{ mm}.$$

❖ Tìm β_y và η_D theo (5.75) với $I_x = 5200 \text{ mm}^4$ và $y_D = 14,8 \text{ mm}$ đã tìm được trong ví dụ 5.1:

$$\eta_D = y_D / r = 14,8 / 14 = 1,057.$$

$$\beta_y = \left[(S_y^C / 2I_x) - y_D \right] / r = \left[-\frac{46095}{2 \cdot 5200} - 14,8 \right] \times \frac{1}{14} = -1,373.$$

Các đại lượng $\sigma_0 = 168,7 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_y = 91,6 \text{ N/mm}^2$ đã tìm được trong ví dụ 5.1.

1) Khi P đặt tại E cách trọng tâm C là 7 mm:

Từ (5.90), ta có: $\eta_c = e/r = 7/14 = 0,5$. Phương trình (5.93) sẽ là:

$$|1+2.0,5(-1,373+1,057)-0,5^2| \sigma_o^2 - [168,7+91,6+2.91,6.(-1,373).0,5] \sigma_o + 168,7.91,6 - 91,6^2.1,057^2 = 0.$$

Hay: $\sigma_o^2 - 309,98 \sigma_o + 14006 = 0.$

Các nghiệm của phương trình: $\sigma_o^{(1)} = 255 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_o^{(2)} = 55 \text{ N/mm}^2.$

Các nghiệm tìm được đều lớn hơn giá trị $\sigma_x = 43 \text{ N/mm}^2$ đã tìm được trong ví dụ 5.1. Do đó, giá trị để tính của ứng suất tối hạn sẽ là $\sigma_{o,th} = 43 \text{ N/mm}^2.$

2) Khi P đặt tại tâm uốn D cách trọng tâm C là $14,8 \text{ mm}$:

Từ (5.94) ta có các nghiệm:

$$\sigma_o^{(1)} = \frac{168,7 - 91,6.1,057^2}{1 + 1,057^2 + 2.1,057.(-1,371)} = -84,5 \text{ N/mm}^2; \quad \sigma_o^{(2)} = 91,6 \text{ N/mm}^2.$$

Do đó, giá trị để tính của ứng suất tối hạn sẽ là $\sigma_{o,th} = \sigma_x = 43 \text{ N/mm}^2.$

Ta thấy: khi độ lệch tâm lớn, một trong các ứng suất tối hạn là lực kéo.

B. Trường hợp tiết diện có hai trục đối xứng

Trong trường hợp này tâm uốn trùng với trọng tâm, ta có: $S_y^c = \beta_y = y_D = \eta_D = 0.$

Phương trình xác định ứng suất tối hạn (5.93) sẽ có dạng:

$$(1 - \eta_e^2) \sigma_o^2 - (\sigma_o + \sigma_x) \sigma_o + \sigma_o \sigma_y = 0, \quad (5.96)$$

Trường hợp thanh có tiết diện hình chữ nhật hẹp, hai đầu tự do, chịu lực nén lệch tâm P với tâm sai e trong mặt phẳng yz , ta có:

$$I_\omega = I_\omega^c = 0; \quad \sigma_o = GI_{x_o} / I_p^c; \quad \sigma_y = \pi^2 EI_y / l^2 A.$$

Thay $\sigma_o = P/A$ và $\eta_e = e^2/r^2$ vào (5.96) ta được phương trình tìm lực tối hạn:

$$(e^2 - r^2)P^2 + \left(GI_{x_o} + \frac{\pi^2}{l^2} EI_y r^2 \right) P - \frac{\pi^2}{l^2} EI_y GI_{x_o} = 0. \quad (5.97)$$

5.7. Các phương trình cơ bản của thanh thành mỏng chịu uốn ngang phẳng khi tiết diện có một trục đối xứng

Xét thanh thành mỏng, tiết diện hở, có một trục đối xứng, chịu uốn ngang phẳng do tải trọng tác dụng trong mặt phẳng đối xứng xy . Trong trường hợp này, để có thể sử dụng những kết quả đã biết trong SBVL về các đặc trưng quạt ta chọn *điểm cực của tọa độ quạt* không trùng với tâm xoay như trước đây mà *trùng với tâm uốn* của tiết diện. Như vậy, điểm cực đã chọn là *điểm cực chính, điểm góc chính (điểm không chính) của tọa độ quạt nằm trên trục đối xứng.*

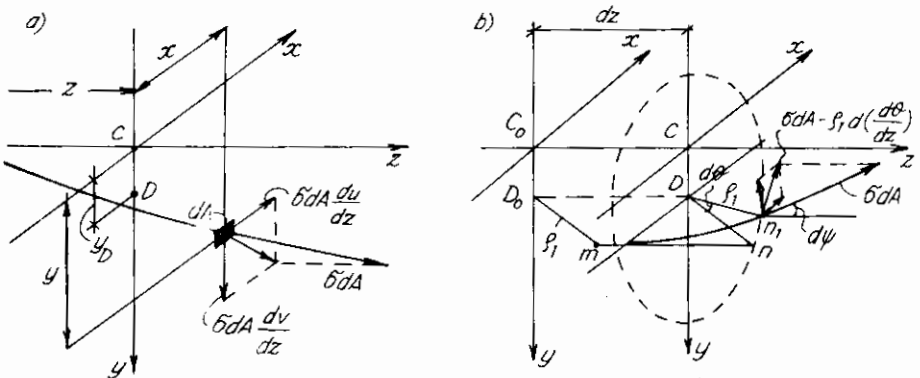
Ở trạng thái ban đầu, dưới tác dụng của tải trọng, tại tiết diện bất kỳ phát sinh mômen uốn M_x . Ứng suất cơ bản tại thờ bất kỳ có tọa độ y trên tiết diện chịu mômen uốn M_x sẽ là:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad (5.98)$$

Khi mất ổn định, trục đi qua các tâm uốn bị uốn cong ra ngoài mặt phẳng uốn ban đầu zy, đồng thời các tiết diện bị xoắn quanh trục bị uốn nói trên. Ta sẽ tìm các đại lượng được xem như các thành phần "tải trọng" phát sinh do các ứng suất cơ bản tương ứng với hai dạng biến dạng nêu ở trên:

❖ *Do biến dạng uốn:* Tại tiết diện có hoành độ z, xét một thờ bất kỳ có diện tích phần tử dA ở tọa độ x, y, nếu xem ứng suất cơ bản kéo là dương thì ứng lực cơ bản tại đó là σdA sẽ bị nghiêng so với trục z và được mô tả tương ứng với các chiều dương theo quy ước về dấu trong SBVL, như trên hình 5.18a.

Gọi v, u là các thành phần chuyển vị của tâm uốn theo phương y, x thì góc nghiêng của tiết diện đang xét trong các mặt phẳng zy và zx lần lượt là dv/dz và du/dz . Do đó, hình chiếu của ứng lực σdA lên các trục y, x sẽ là: $\sigma dA(dv/dz)$ và $\sigma dA(du/dz)$.



Hình 5.18

Như vậy, cường độ các thành phần "tải trọng" phân bố trên một đơn vị chiều dài thanh, phát sinh do ứng suất cơ bản tại các thờ trên toàn tiết diện sẽ là:

$$q_{x,l} = - \int_A \sigma \frac{d^2 v}{dz^2} dA; \quad q_{y,l} = - \int_A \sigma \frac{d^2 u}{dz^2} dA \quad (5.99)$$

Nếu quan niệm cường độ mômen xoắn phân bố quanh tâm uốn có tọa độ y_D do các thành phần trên gây ra có chiều dương là chiều làm giảm mômen xoắn tổng quát theo chiều tăng của trục z thì ta có:

$$m_l = \int_A \sigma \left[- \frac{d^2 v}{dz^2} x + \frac{d^2 u}{dz^2} (y - y_D) \right] dA. \quad (5.100)$$

Sau khi thay (5.98) vào (5.99) và (5.100) với lưu ý là mômen tĩnh và mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục quán tính chính bằng không, ta được:

$$q_{y,1} = -\frac{d^2v}{dz^2} \times \frac{M_y}{I_x} \int_A y dA = 0; \quad q_{x,1} = -\frac{d^2u}{dz^2} \times \frac{M_x}{I_x} \int_A y dA = 0; \quad (5.101)$$

$$m_1 = \frac{M_x}{I_x} \left[-\frac{d^2v}{dz^2} \int_A xy dA + \frac{d^2u}{dz^2} \int_A y(y-y_D) dA \right] = M_x \frac{d^2u}{dz^2}. \quad (5.102)$$

❖ *Do biến dạng xoắn:* Tương tự như trong mục 5.2, nếu xét hai tiết diện lân cận C_D và C cách nhau dz thì khi thanh bị xoắn, thờ $m-n$ bị vận theo đường cong nằm trên mặt trụ tròn xoay có trục đi qua các tâm uốn D , bán kính ρ_l tương ứng với chiều dương của góc $d\theta$ như trên hình 5.18b, điểm n chuyển dịch tới n_1 , lực σdA trong thờ nghiêng so với phương z theo góc $d\psi$.

Thành phần hình chiếu của lực σdA lên mặt phẳng xy có phương vuông góc với bán kính ρ_l tính từ tâm uốn D và bằng $\sigma dA \cdot d\psi$ hay bằng $\sigma d(d\theta/dz) \cdot \rho_l dA$ vì $\psi = \rho_l(d\theta/dz)$. Phân tích thành phần hình chiếu trên mặt phẳng xy theo hai phương x và y ta được:

- theo phương y : $[\sigma d(d\theta/dz) \cdot \rho_l dA] \cdot [x/\rho_l] = \sigma d(d\theta/dz) \cdot x dA$;
- theo phương x : $[\sigma d(d\theta/dz) \cdot \rho_l dA] \cdot [(y-y_D)/\rho_l] = \sigma d(d\theta/dz) \cdot (y-y_D) dA$.

Như vậy, cường độ các thành phần "tải trọng" phân bố trên một đơn vị chiều dài thanh, phát sinh do ứng suất cơ bản tại các thờ trên toàn tiết diện sẽ là:

$$q_{y,2} = \int_A \sigma \frac{d^2\theta}{dz^2} x dA; \quad q_{x,2} = - \int_A \sigma \frac{d^2\theta}{dz^2} (y-y_D) dA. \quad (5.103)$$

Theo (5.23), cường độ mômen xoắn phân bố quanh tâm uốn có tọa độ y_D do các thành phần trên gây ra sẽ là:

$$m_2 = \int_A \sigma \frac{d^2\theta}{dz^2} \rho_l^2 dA. \quad (5.104)$$

Sau khi thay (5.98) vào (5.103) và (5.104), ta được:

$$q_{y,2} = \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{M_x}{I_x} \int_A xy dA = 0; \quad q_{x,2} = -\frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{M_x}{I_x} \int_A y(y-y_D) dA = -M_x \frac{d^2\theta}{dz^2};$$

$$m_2 = \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{M_x}{I_x} \int_A y \rho_l^2 dA = \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{M_x}{I_x} S_y^c, \quad \text{với } S_y^c = \int_A y \rho_l^2 dA. \quad (5.105)$$

Đại lượng S_y^c được xác định theo (5.71), trong trường hợp này ta có:

$$S_y^c = S_y^c - 2y_D I_x, \quad \text{với } S_y^c = \int_A \rho_l^2 y dA.$$

$$\text{Do đó: } m_2 = \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{M_x}{I_x} (S_y^c - 2y_D I_x) = 2\beta_y^* M_x \frac{d^2\theta}{dz^2}. \quad (5.106)$$

$$\text{với: } \beta_y^* = (S_y^c / 2I_x) - y_D. \quad (5.107)$$

Để lập các phương trình cơ bản cho bài toán đang xét, ta sử dụng các phương trình vi phân của chuyển vị với quy ước về dấu quen biết trong SBVI, và phương trình vi phân của góc xoắn (5.20):

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} = -q_y; \quad EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} = -q_x; \quad EI_\omega \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{x\omega} \frac{d^2 \theta}{dz^2} = m_z. \quad (5.108)$$

Trong trường hợp này, I_ω là mômen quán tính quạt chính của tiết diện đối với tam uốn D và được xác định theo (5.39) và (5.50) như sau:

$$I_\omega = I_{\omega'}^c - 2y_D R_V + y_D^2 I_{y'} = I_{\omega'}^c - 2y_D y_D I_y + y_D^2 I_y = I_{\omega'}^c - y_D^2 I_y. \quad (5.109)$$

Các đại lượng $q_y; q_x; m_z$ trong (5.108) là tập hợp các đại lượng tương ứng tìm được theo (5.101), (5.102), (5.105), (5.106) và của tải trọng tác dụng trên thanh. Nếu gọi q_y^*, q_x^*, m^* là cường độ của các tải trọng phân bố trên thanh, ta có:

$$q_y = q_{y,1} + q_{y,2} + q_y^* = 0 + 0 + q_y^*; \quad q_x = q_{x,1} + q_{x,2} = 0 - M_x \frac{d^2 \theta}{dz^2} + q_x^*;$$

$$m_z = m_1 + m_2 + m^* = M_x \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\beta_y^* M_x \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m^*.$$

Sau khi thay các biểu thức trên vào (5.108) ta được các phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} &= -q_y^*; & EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} - M_x \frac{d^2 \theta}{dz^2} &= -q_x^*; \\ EI_\omega \frac{d^4 \theta}{dz^4} - (2\beta_y^* M_x + GI_{x\omega}) \frac{d^2 \theta}{dz^2} - M_x \frac{d^2 u}{dz^2} &= m^*. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Trong các mục sau ta sẽ vận dụng các phương trình (5.110) để giải các bài toán cụ thể thường gặp.

5.8. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh có tiết diện chữ nhật hẹp

Xét thanh có tiết diện chữ nhật hẹp, chịu uốn ngang trong mặt phẳng xy . Trong trường hợp này, ta có: $I_\omega = \beta_y^* = 0$ và $q_x^* = m^* = 0$. Tích phân hai lần phương trình thứ hai của (5.110) với chú ý là các hằng số tích phân bằng không, phương trình thứ hai và thứ ba của (5.110) có dạng:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} - M_x \theta = 0; \quad GI_{x\omega} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + M_x \frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

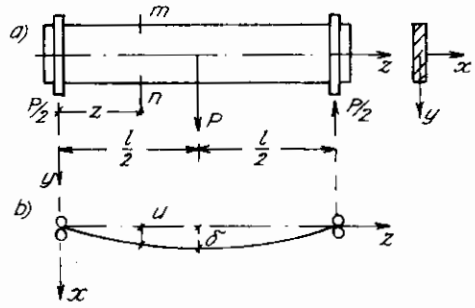
Sau khi khử nghiệm u ta tìm được phương trình vi phân cấp hai theo nghiệm θ :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{M_x^2}{GI_{x\omega} EI_y} \theta = 0. \quad (5.111)$$

Ta sẽ vận dụng phương trình (5.111) để giải một số bài toán cụ thể thường gặp.

A. Thanh đặt trên hai gối tựa

Trước tiên ta xét thanh có liên kết ở hai đầu như trên hình 5.19, chịu uốn trong mặt phẳng xy bởi lực tập trung P đặt tại trọng tâm tiết diện giữa. Trong trường hợp này, biểu thức mômen uốn tại tiết diện có hoành độ z là $M_x = Pz/2$ nên (5.111) sẽ là phương trình vi phân có hệ số thay đổi:



Hình 5.19

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + k^2 z^2 \theta = 0, \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{P^2}{4GI_{xo}EI_y} \quad (5.112)$$

Có thể tìm nghiệm của (5.112) dưới dạng hàm Bessel hoặc dưới dạng chuỗi vô hạn. Nếu dùng chuỗi vô hạn, ta viết nghiệm dưới dạng:

$$\theta = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_i z^i + \dots \quad (5.113)$$

Thay (5.113) vào (5.112), ta được:

$$2c_2 + 2.3c_3 z + 3.4 c_4 z^2 + 4.5c_5 z^3 + \dots + k^2 z^2 (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots) = 0.$$

Hay:

$$2c_2 + 2.3 c_3 z + (3.4 c_4 + k^2 c_0) z^2 + (4.5c_5 + k^2 c_1) z^3 + (5.6 c_6 + k^2 c_2) z^4 + (6.7c_7 + k^2 c_3) z^5 + \dots = 0.$$

Phương trình này cần được thỏa mãn với bất kỳ giá trị z nên các hệ số của đa thức này buộc phải đồng nhất bằng không. Do đó, ta có:

$$c_2 = 0; \quad c_3 = 0; \quad 3.4c_4 = -k^2 c_0; \quad 4.5c_5 = -k^2 c_1;$$

$$5.6 c_6 = -k^2 c_2 = 0; \quad 6.7c_7 = -k^2 c_3 = 0; \quad 7.8 c_8 = -k^2 c_4 = \frac{k^4}{3.4} c_0; \dots$$

Ta thấy các hằng số c mang chỉ số 2, 3, 6, 7, 10, 11, ... đều bằng không, tức là:

$$c_{2+4i} = 0 \quad \text{và} \quad c_{3+4i} = 0, \quad \text{với} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Các hệ số tồn tại có quan hệ như sau: $c_{i+2} = \frac{-k^2}{(i+1)(i+2)} c_{i-2}$,

và có thể biểu thị theo c_0 và c_1 :

$$c_4 = -\frac{k^2}{3.4} c_0; \quad c_8 = -\frac{k^2}{7.8} c_4 = \frac{k^4}{3.4.7.8} c_0; \quad c_{12} = -\frac{k^6}{3.4.7.8.11.12} c_0; \dots$$

$$c_5 = -\frac{k^2}{4.5} c_1; \quad c_9 = -\frac{k^2}{8.9} c_5 = \frac{k^4}{4.5.8.9} c_1; \quad c_{13} = -\frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} c_1; \dots$$

Do đó, nghiệm (5.113) được đưa về dạng:

$$\theta = c_0 \left(1 - \frac{k^2}{3.4} z^4 + \frac{k^4}{3.4.7.8} z^8 - \frac{k^6}{3.4.7.8.11.12} z^{12} + \dots \right) + c_1 z \left(1 - \frac{k^2}{4.5} z^4 + \frac{k^4}{4.5.8.9} z^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} z^{12} + \dots \right). \quad (5.114)$$

Các điều kiện biên:

- ◆ Khi $z = 0$, ta có: $\theta = 0$. Suy ra $c_0 = 0$.
- ◆ Khi $z = l/2$: do tính chất đối xứng của bài toán và lực P đặt tại trọng tâm không gây ra mômen tập trung tại $z = l/2$, nên biến dạng xoắn tại đó là liên tục, trơn tru. Do đó, góc xoắn $\theta(l/2)$ có giá trị cực đại và ta có: $\theta'(l/2) = 0$.

Tại đây đạo hàm (5.114) theo z với $c_0 = 0$, ta được:

$$\frac{d\theta}{dz} = c_1 \left(1 - \frac{k^2}{4} z^4 + \frac{k^4}{4.5.8} z^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12} z^{12} + \dots \right).$$

Từ điều kiện biên thứ hai, sau khi thay $z = l/2$, ta lập điều kiện tồn tại của c_1 sẽ được phương trình ổn định như sau:

$$1 - a + \frac{a^2}{10} - \frac{a^3}{270} + \dots = 0; \quad \text{với} \quad a = \frac{k^2 l^4}{64} = \frac{P_{th}^2 l^4}{256 G I_{xo} E I_y}. \quad (5.115)$$

Giải phương trình (5.115) ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của a là: $a = 1.126$.

Từ (5.115) ta suy ra giá trị của lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{16,94}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}}. \quad (5.116)$$

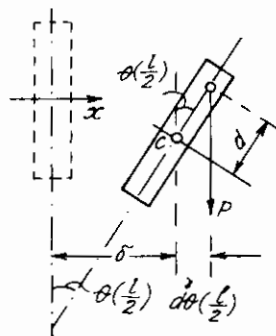
Chú thích:

1. Giá trị của lực tới hạn còn phụ thuộc vị trí của điểm đặt lực P theo chiều cao của tiết diện: khi lực P hướng xuống dưới, nếu điểm đặt lực ở phía trên trọng tâm tiết diện thì giá trị tới hạn giảm xuống và ngược lại.

Trong trường hợp này, phương trình vi phân và nghiệm của bài toán vẫn có dạng như (5.112) và (5.114). Điều kiện biên thứ nhất không đổi, nhưng điều kiện biên thứ hai sẽ khác đi. Nếu gọi d là khoảng cách thẳng đứng từ điểm đặt lực đến trọng tâm tiết diện (d dương khi điểm đặt ở phía trên trọng tâm) như trên hình 5.20 thì tại $z = l/2$ sẽ phát sinh thêm mômen xoắn $P.d \theta(l/2)$.

Biến dạng xoắn sẽ không trơn tru tại đó nên theo (5.1), ta có:

$$G I_{xo} \theta' = [P.d \theta(l/2)] / 2 \quad \text{khi} \quad z = l/2.$$



Hình 5.20

Cũng thực hiện các phép tính tương tự như trên, ta được:

$$P_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}}, \quad (5.117)$$

với K là hệ số phụ thuộc vị trí của điểm đặt lực, có giá trị cho trong bảng 5.1.

Bảng 5.1

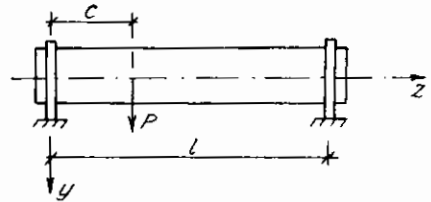
Điểm đặt lực ở trên trọng tâm tiết diện									
$\frac{a}{l} \sqrt{E I_y / G I_{x_0}}$	0	0,030	0,143	0,293	0,544	1,210			
K	16,94	16,0	12,8	9,6	6,4	3,2			
Điểm đặt lực ở dưới trọng tâm tiết diện									
$\frac{a}{l} \sqrt{E I_y / G I_{x_0}}$	0	0,069	0,166	0,271	0,396	0,562	0,815	1,30	2,78
K	16,94	19,2	22,4	25,6	28,8	32,0	35,2	38,4	41,6

Khi tỷ số d/l nhỏ ta có thể sử dụng công thức gần đúng tìm được theo phương pháp năng lượng:

$$P_{th} = \frac{16,94}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} \left(1 - \frac{3,48d}{l} \sqrt{E I_y / G I_{x_0}} \right). \quad (5.118)$$

2. Trường hợp lực P đặt tại tiết diện bất kỳ cách đầu trái là c (hình 5.21): để giải bài toán này ta cần giải phương trình (5.112) cho hai đoạn thanh với các hệ số k như sau:

- đoạn bên trái: $k_1 = 2k(l-c)/l$;
- đoạn bên phải: $k_2 = 2kc/l$.



Hình 5.21

- Các điều kiện biên:
- ở hai đầu thanh: $O_1 = 0$; $O_2 = 0$;
 - ở tiết diện tiếp giáp giữa hai đoạn: $O_1 = O_2$; $O'_1 = O'_2$.

A. Kôrôbov đã giải bài toán này, công thức lực tới hạn có dạng (5.117) với K là hệ số phụ thuộc vị trí của lực P , có giá trị cho trong bảng 5.2.

Bảng 5.2

c/l	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
K	16,94	17,15	17,82	19,04	21,01	24,10	29,11	37,88	56,01	111,6

3. Trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q trên toàn nhịp, công thức lực tới hạn:

$$(q l)_{th} = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}}. \quad (5.119)$$

B. Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do

Trước tiên ta xét thanh chịu uốn trong mặt phẳng zy bởi lực tập trung P đặt tại trọng tâm tiết diện ở đầu tự do (hình 5.22). Trong trường hợp này, mômen uốn tại tiết diện có hoành độ z là $M_x = -Pz$ nên (5.111) sẽ là phương trình vi phân

có hệ số thay đổi:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + k^2 z^2 \theta = 0, \quad \text{với} \quad k^2 = \frac{P^2}{GI_{xo} EI_y}. \quad (5.120)$$

Phương trình này có dạng giống như (5.112) nên nghiệm của (5.120) cũng có dạng (5.114).

Các điều kiện biên:

◆ Khi $z = 0$, mômen xoắn bằng không nên $\theta' = 0$. Từ biểu thức đạo hàm của (5.114) ta tìm được: $c_1 = 0$.

◆ Khi $z = l$: $\theta = 0$. Từ điều kiện này, ta có:

$$c_0 \left(1 - \frac{k^2 l^4}{3.4} + \frac{k^4 l^8}{3.4.7.8} - \frac{k^6 l^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \dots \right) = 0.$$

Từ điều kiện tồn tại c_0 ta tìm được phương trình ổn định như sau:

$$1 - a + \frac{a^2}{14} - \frac{a^3}{154} + \dots = 0; \quad \text{với} \quad a = \frac{k^2 l^4}{12} = \frac{P_{th}^2 l^4}{12 GI_{xo} EI_y}. \quad (5.121)$$

Giải phương trình (5.121) ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của a là: $a = 1,342$.

Từ (5.121) ta suy ra giá trị của lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{xo}}. \quad (5.122)$$

Chú thích:

- Trường hợp lực P tác dụng ở đầu tự do tại điểm đặt cách trọng tâm tiết diện một khoảng cách thẳng đứng là d (d dương khi điểm đặt ở phía trên trọng tâm), cũng lập luận tương tự như trong trường hợp thanh có hai gối tựa, ta được công thức xác định lực tới hạn như sau:

$$P_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{xo}}, \quad (5.123)$$

với K là hệ số phụ thuộc vị trí của điểm đặt lực, có giá trị cho trong bảng 5.3.

Bảng 5.3

Điểm đặt lực ở trên trọng tâm tiết diện											
$\frac{d}{l} \sqrt{EI_y / GI_{xo}}$	0	0,0031	0,0887	0,164	0,238	0,322	0,425	0,568	0,791	1,224	2,485
K	4,013	4,0	3,6	3,2	2,8	2,4	2,0	1,6	1,2	0,8	0,4
Điểm đặt lực ở dưới trọng tâm tiết diện											
$\frac{d}{l} \sqrt{EI_y / GI_{xo}}$	0	0,114			0,320		0,923		∞		
K	4,013	4,4			4,8		5,2		5,562		

Khi tỷ số d/l nhỏ ta có thể sử dụng công thức gần đúng tìm được theo phương pháp năng lượng như sau:

$$P_{th} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}} \left(1 - \frac{d}{l} \sqrt{E I_y / G I_{xo}} \right) \quad (5.124)$$

2. Trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố trên toàn nhịp, công thức lực tới hạn có dạng:

❖ phân bố đều với cường độ q : $(ql)_{th} = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}}$ (5.125)

❖ phân bố theo luật tam giác $q = q_0 z/l$: $q_{0,th} = \frac{52,8}{l^3} \sqrt{E I_y G I_{xo}}$ (5.126)

3. Trường hợp tiết diện thanh có chiều cao thay đổi theo luật $h = h_0(z/l)^n$, công thức lực tới hạn có dạng:

❖ chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q : $(ql)_{th} = \frac{m}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}}$ (5.127)

❖ chịu lực tập trung đặt tại đầu tự do: $P_{th} = \frac{m^*}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}}$ (5.128)

Các hệ số m và m^* phụ thuộc giá trị của số mũ n , được xác định theo bảng 5.4.

Bảng 5.4

n	0	1/4	1/2	3/4	1
m (tải trọng phân bố đều)	12,85	12,05	11,24	10,43	9,62
m^* (lực tập trung tại đầu tự do)	4,013	3,614	3,214	2,811	2,405

4. Trường hợp thanh có hai đầu bị ngàm, chịu lực tập trung đặt tại trọng tâm tiết diện ở giữa nhịp:

$$P_{th} = \frac{26,6}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{xo}} \quad (5.129)$$

5. Trường hợp thanh có dạng liên kết khác ở hai đầu, có thể tìm kết quả trong [9].

5.9. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh tiết diện chữ I

Xét thanh có tiết diện chữ I, chịu uốn ngang phẳng trong mặt phẳng xy . Trong trường hợp này, tâm uốn trùng với trọng tâm nên ta có: $\beta_y^* = 0$. Tích phân hai lần phương trình thứ hai của (5.110) với chú ý là $q_x^* = 0$ và các hằng số tích phân bằng không, phương trình thứ hai và thứ ba của (5.110) có dạng:

$$E I_y \frac{d^2 u}{dz^2} - M_x \theta = 0; \quad E I_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - G I_{xo} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - M_x \frac{d^2 u}{dz^2} = m^*$$

Đại lượng I_{ω} được xác định theo công thức (5.82).

Sau khi khử nghiệm u ta tìm được phương trình vi phân cấp bốn theo nghiệm θ :

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{xo} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{M_x^2}{EI_y} \theta = m^*. \quad (5.130)$$

Ta sẽ vận dụng phương trình (5.130) để giải một số bài toán cụ thể thường gặp.

A. Thanh đặt trên hai gối tựa chịu tải trọng phân bố q^*_y

Trong trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố với cường độ q^*_y theo quy luật bất kỳ đặt tại cao độ cách trục tâm một khoảng là d , trong hệ sẽ phát sinh mômen xoắn phân bố với cường độ $m^* = -q^*_y \cdot d \cdot \theta$. Nếu chú ý đến sự liên hệ vi phân giữa q^*_y và M_x thì phương trình (5.130) sẽ có dạng:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{xo} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \left(\frac{M_x^2}{EI_y} - \frac{d^2 M_x}{dz^2} d \right) \theta = 0. \quad (5.131)$$

Có thể tìm nghiệm của (5.131) dưới dạng chuỗi theo (5.113) hoặc áp dụng các phương pháp gần đúng, chẳng hạn phương pháp Bubnov-Galerkin (xem [13]).

Trong trường hợp thanh chịu tải trọng phân bố đều trên toàn nhịp với cường độ $q^*_y = q$, phương trình (5.131) có dạng:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{xo} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{q^2 z^2 (l-z)^2}{4EI_y} \theta = 0. \quad (5.132)$$

Đặt nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn (5.113), thực hiện các bước tương tự như trong mục 5.7 tương ứng với các điều kiện biên tại các đầu thanh:

- ♦ góc xoắn $\theta = 0$ khi $z = 0$ và $z = l$;
 - ♦ binômen bằng không hay theo (5.17), $\theta'' = 0$ khi $z = 0$ và $z = l$;
- ta sẽ tìm được công thức xác định giá trị tới hạn:

$$(ql)_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{xo}}. \quad (5.133)$$

với K là hệ số phụ thuộc vị trí đặt lực và tỷ số l^2/a^2 , đại lượng a được xác định theo công thức (5.83). Các giá trị của K cho trong bảng 5.5.

Bảng 5.5

		l^2/a^2	0,4	4,0	8,0	16,0	24,0	32,0	48,0
K	Tải	trong tâm tiết diện	143,0	53,0	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5
	trọng	bản đế trên	92,9	36,3	30,4	27,5	26,6	26,1	26,0
		bản đế dưới	222,5	77,4	59,6	48,1	43,6	40,5	37,9
		l^2/a^2	64	80	128	200	280	360	400
K	Tải	trong tâm tiết diện	30,5	30,1	29,4	29,0	28,8	28,6	28,6
	trọng	bản đế trên	25,9	25,8	26,0	26,3	26,5	26,6	26,7
		bản đế dưới	36,3	35,1	33,2	32,0	31,5	31,0	30,8

B. Thanh đặt trên hai gối tựa chịu lực tập trung P ở giữa nhịp

Trong trường hợp này, biểu thức mômen uốn $M_x = Pz/2$ với $0 \leq z \leq l/2$. Do đó, khi $0 \leq z \leq l/2$, phương trình (5.131) có dạng:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{x_0} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{P^2}{4EI_y} z^2 \theta = 0. \quad (5.134)$$

Đặt nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn (5.113), thực hiện các bước tương tự như trong mục 5.7 tương ứng với các điều kiện biên như trong mục 5.8, ta sẽ tìm được công thức xác định giá trị tới hạn:

$$P_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{x_0}}, \quad (5.135)$$

với K là hệ số phụ thuộc vị trí đặt lực và tỷ số l^2/a^2 , đại lượng a được xác định theo công thức (5.83). Các giá trị của K cho trong bảng 5.6.

Bảng 5.6

		l^2/a^2	0,4	4,0	8,0	16,0	24,0	32,0	48,0
K	Tải	trong tâm tiết diện	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,8
	trọng	bản đế trên	51,7	20,2	16,9	15,4	15,0	14,9	14,8
	đặt tại	bản đế dưới	146,7	50,0	38,3	30,4	27,3	25,5	23,5
		l^2/a^2	64	80	96	160	240	320	400
K	Tải	trong tâm tiết diện	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2
	trọng	bản đế trên	14,9	15,0	15,0	15,3	15,4	15,6	15,7
	đặt tại	bản đế dưới	22,3	21,6	21,1	20,0	19,2	19,0	18,7

C. Thanh có một đầu ngàm một đầu tự do chịu lực tập trung P tại trọng tâm tiết diện tự do

Trong trường hợp này, biểu thức mômen uốn $M_x = -Pz$. Do đó, phương trình (5.131) có dạng:

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \theta}{dz^4} - GI_{x_0} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{P^2}{EI_y} z^2 \theta = 0. \quad (5.136)$$

Cũng áp dụng cách giải bài toán tương tự như trên, ta sẽ tìm được công thức xác định giá trị của lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{x_0}}, \quad (5.137)$$

với K là hệ số phụ thuộc tỷ số l^2/a^2 , đại lượng a được xác định theo công thức (5.83). Các giá trị của K cho trong bảng 5.7.

Bảng 5.7

l^2/a^2	0,1	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	24	32	40
K	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	8,03	7,58	7,20	6,96	6,73	6,19	5,87	5,64

Qua kết quả cho trong bảng ta thấy: khi tỷ số l^2/a^2 tăng thì hệ số K giảm và tiệm cận đến giá trị 4,013 là giá trị xác định theo công thức (5.122) tương ứng với trường hợp tiết diện chữ nhật hẹp. Đối với những tỷ số l^2/a^2 lớn hơn 40, ta có thể xác định gần đúng hệ số K theo công thức:

$$K = 4,01 \frac{l^2}{(l-a)^2}$$

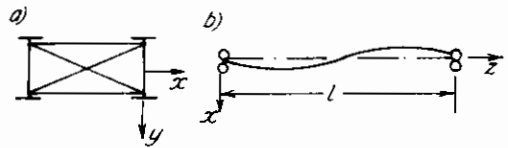
tìm được bằng cách thay chiều dài l trong công thức (5.122) bằng chiều dài quy ước (l-a).

Trường hợp thanh có dạng liên kết khác ở hai đầu, có thể tìm kết quả trong [9].

5.10. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh ghép có liên kết ngang

Để tăng cường ổn định dạng uốn ngang phẳng ta có thể ghép nối các thanh đơn bằng liên kết ngang. Ảnh hưởng của liên kết ngang đến lực tới hạn cũng được nghiên cứu theo các phương pháp đã trình bày ở các mục trên.

Để giới thiệu cách phân tích bài toán, ta xét trường hợp hệ gồm hai thanh đặt song song có liên kết ngang đặt ở giữa nhịp (hình 5.23a) nhằm ngăn cản chuyển vị xoay quanh trục hệ.



Hình 5.23

Hệ sẽ mất ổn định tương ứng với dạng biến dạng phản xứng theo phương x. Đường đàn hồi theo phương x có dạng hai nửa sóng với điểm uốn tại giữa nhịp như trên hình (5.23b). Nếu các thanh có tiết diện hình chữ nhật hẹp và chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng y,z thì tải trọng tới hạn cũng được xác định theo phương trình vi phân (5.68) nhưng trong trường hợp này nghiệm nhỏ nhất phải lấy bằng $kl = 2\pi$ tương ứng với đường đàn hồi có dạng hai nửa sóng. Do đó, thay cho (5.81) ta có:

$$M_{th} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{GI_{vo} EI_y} \tag{5.138}$$

Như vậy, trong trường hợp này mômen tới hạn lớn gấp đôi giá trị mômen tới hạn khi không có liên kết ngang.

Cũng thực hiện tương tự như vậy ta có thể tìm được lực tới hạn cho hệ có liên kết ngang chịu các dạng tải trọng khác.

Dưới đây là một số kết quả (theo [22]) cho hệ hai thanh đơn có tiết diện chữ I:

1. Thanh đơn tiết diện chữ I có liên kết ngang ở giữa nhịp, đặt trên hai gối tựa, chịu lực tập trung P tại trọng tâm tiết diện giữa nhịp:

$$P_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{xo}}, \quad (5.139)$$

với K là hệ số phụ thuộc tỷ số l/a , đại lượng a được xác định theo công thức (5.83). Các giá trị của K cho trong bảng 5.8.

Bảng 5.8

l^2/a^2	0,4	4,0	8,0	16,0	32,0	96,0	128	200	400
K	466	154	144	86,4	69,2	54,5	52,4	49,8	47,4

2. Thanh đơn tiết diện chữ I có liên kết ngang ở giữa nhịp, đặt trên hai gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q trên toàn bộ chiều dài của trục hệ:

$$(ql)_{th} = \frac{K}{l^2} \sqrt{EI_y GI_{xo}}, \quad (5.140)$$

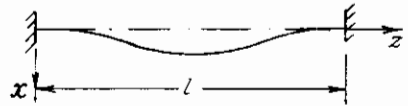
với K là hệ số phụ thuộc tỷ số l/a , đại lượng a được xác định theo công thức (5.83). Các giá trị của K cho trong bảng 5.9.

Bảng 5.9

l^2/a^2	0,4	4,0	8,0	16,0	64	96	128	200
K	673	221	164	126	101	79,5	76,4	72,8

3. Thanh đơn tiết diện chữ I có liên kết ngang ở hai đầu, đặt trên hai gối tựa, chịu lực tập trung P tại trọng tâm tiết diện giữa nhịp.

Trong trường hợp này, các tiết diện ở hai đầu thanh không xoay được quanh trục y . Khi mất ổn định, đường đàn hồi theo phương x có hai điểm uốn như trên hình 5.24.



Hình 5.24

Lực tối hạn được xác định theo công thức (5.137). Các giá trị của K cho trong bảng 5.10.

Bảng 5.10

l^2/a^2	0,4	4,0	8,0	16,0	24,0	32,0	64,0	128	200	320
K	268	88,8	65,5	50,2	43,6	40,2	34,1	30,7	29,4	28,4

4. Thanh đơn tiết diện chữ I có liên kết ngang ở hai đầu, đặt trên hai gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q trên toàn bộ chiều dài của trục hệ:

Lực tối hạn được xác định theo công thức (5.138). Các giá trị của K cho trong bảng 5.11.

Bảng 5.11

l/a	0,4	4,0	8,0	16,0	32,0	96,0	128	200	400
K	488	161	119	91,3	73,0	58,0	55,8	53,5	51,2

Số sánh kết quả trong bảng (5.10) và (5.11) với kết quả trong bảng (5.6) và (5.5) ta thấy các liên kết ngang có ảnh hưởng nhiều đối với những thanh có chiều dài ngắn (tỷ số l/a nhỏ).

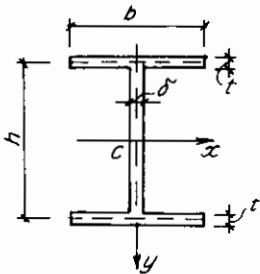
Bài tập

V.1. Cho thanh có chiều dài $l = 800$ mm, chịu lực nén đúng tâm P , tiết diện chữ I như trên hình V.1 với $h = 20$ mm; $b = 10$ mm; $\delta = t = 1$ mm. Cho biết: $E = 7 \cdot 10^4$ N/mm²; $G = 2,8 \cdot 10^4$ N/mm²; giới hạn tỷ lệ $\sigma_{II} = 200$ N/mm²; khi tính I_{x0} theo công thức (5.2), lấy hệ số $\alpha = 1$. Tìm lực tới hạn tương ứng với hai trường hợp sau:

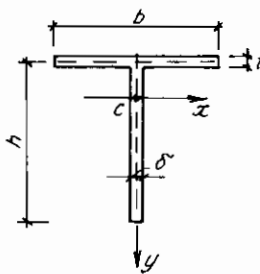
- Thanh đặt trên hai gối tựa, các chuyển vị xoay tự do.
- Thanh có một đầu bị ngàm, một đầu tự do.

V.2. Cho thanh có chiều dài $l = 800$ mm, đặt trên hai gối tựa cho phép các đầu thanh có chuyển vị xoay tự do. Cho biết: thanh có tiết diện hình chữ T như trên hình V.2 với $h = 20$ mm; $b = 10$ mm; $\delta = t = 1$ mm; $E = 7 \cdot 10^4$ N/mm²; $G = 2,8 \cdot 10^4$ N/mm²; giới hạn tỷ lệ $\sigma_{II} = 200$ N/mm²; khi tính I_{x0} theo công thức (5.2), lấy hệ số $\alpha = 1$. Tìm lực tới hạn tương ứng với hai trường hợp sau:

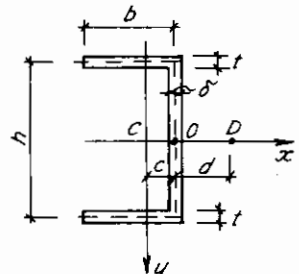
- Thanh chịu lực nén P đặt tại trọng tâm C.
- Thanh chịu lực nén P đặt tại tâm uốn D.



Hình V.1



Hình V.2



Hình V.3

V.3. Cho tiết diện hình chữ U như trên hình V.3.

- Nghiệm lại các công thức sau:

• Khoảng cách từ O đến trọng tâm C và tâm uốn D : $c = \frac{b^2 t}{2bt + h\delta}$; $d = \frac{3b^2 t}{6bt + h\delta}$.

• Các mômen quán tính chính trung tâm:

$$I_x = \delta h c^2 + \frac{2}{3} t b (b^2 + 3c^2 - 3bc); \quad I_y = \frac{\delta h^3}{12} + t b \frac{h^2}{2}.$$

• Các mômen quán tính quạt đối với trọng tâm C và tâm uốn D :

$$I_{\omega}^C = \frac{\delta h^3 c^2}{12} + \frac{t b h^2}{6} (b^2 + 2c^2 + 2bc); \quad I_{\omega}^D = \frac{t b^3 h^2}{12} \times \frac{2\delta h + 3t b}{5t b + \delta h}.$$

• Các đại lượng R_y^C và S_y^C đối với trọng tâm C :

$$R_y^C = \int_A \omega_c x dA = -\frac{\delta h^3 c}{12} - \frac{t b h^2}{4} (2c + b);$$

$$S_y^C = \int_A \rho_c^2 y dA = \delta h c \left(c^2 + \frac{h^2}{12} \right) - \frac{t b}{4} (b - 2c) (2b^2 - 4b c + 4c^2 + h^2).$$

b) Xác định các đại lượng trên khi: $h = 20 \text{ mm}$; $b = 10 \text{ mm}$; $\delta = t = 1 \text{ mm}$.

V.4. Cho thanh có chiều dài $l = 800 \text{ mm}$, đặt trên hai gối tựa cho phép các đầu thanh có chuyển vị xoay tự do. Cho biết: thanh có tiết diện hình chữ U như trên hình V.3 với $h = 20 \text{ mm}$; $b = 10 \text{ mm}$; $\delta = t = 1 \text{ mm}$; $E = 7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$; $G = 2,8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$; giới hạn tỷ lệ $\sigma_{Hl} = 200 \text{ N/mm}^2$; khi tính I_{x_0} theo công thức (5.2), lấy hệ số $\alpha = 1$. Xác định các ứng suất tới hạn σ^* theo dạng xoắn-uốn, σ_x theo dạng uốn quanh trục x và tìm lực tới hạn để tính tương ứng với các trường hợp chịu lực như sau:

a) Lực nén P đặt tại trọng tâm C .

b) Lực nén P đặt tại tâm uốn D .

c) Lực nén P đặt tại điểm O .

V.5. Cho thanh có chiều dài l , một đầu bị ngàm, một đầu tự do, tiết diện hình chữ nhật hẹp với các cạnh theo phương x và phương y lần lượt là t và b . Thanh chịu mômen M đặt tại đầu tự do, luôn luôn tác dụng trong mặt phẳng tọa độ z, y trong quá trình đầu tự do chuyển vị. Lập công thức xác định giá trị tới hạn của M .

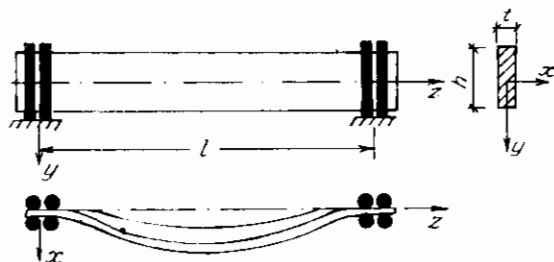
V.6. Cho thanh có chiều dài l , tiết diện chữ nhật hẹp, hai đầu thanh có liên kết ngăn cản chuyển vị thẳng theo các phương x, y và chuyển vị xoay quanh các trục z, y (cho phép xoay tự do quanh trục x) như trên hình V.6. Lập công thức xác định giá trị tới hạn của lực tác dụng cho các trường hợp thanh chịu lực trong mặt phẳng tọa độ z, y như sau:

a) Mômen uốn thuần túy M .

b) Lực tập trung thẳng đứng P tại trọng tâm tiết diện giữa nhịp.

- c) Lực tập trung thẳng đứng P tại trọng tâm tiết diện ở cách đầu trái là $c = 0,3l$.
- d) Lực thẳng đứng phân bố đều với cường độ q trên toàn chiều dài trục thanh.

V.7. Cho thanh có chiều dài l , tiết diện hình chữ nhật hẹp như trên hình V.6. Thanh có đầu phải bị ngàm, đầu trái có liên kết như liên kết trong bài V.6.



Hình V.6

Lập công thức xác định giá trị tới hạn của lực tác dụng trong mặt phẳng tọa độ z, y tương ứng với các trường hợp chịu lực như sau:

- a) Lực tập trung thẳng đứng P tại trọng tâm tiết diện ở cách đầu trái là $c = 0,2l$.
- b) Lực thẳng đứng phân bố đều với cường độ q trên toàn chiều dài trục thanh.

V.8. Cho thanh có chiều dài l , tiết diện hình chữ nhật hẹp như trên hình V.6. Thanh có hai đầu bị ngàm hoàn toàn. Lập công thức xác định giá trị tới hạn của lực tác dụng trong mặt phẳng tọa độ z, y tương ứng với các trường hợp chịu lực như sau:

- a) Lực tập trung thẳng đứng P tại trọng tâm tiết diện ở cách đầu trái là $c = 0,3l$.
- b) Lực thẳng đứng phân bố đều với cường độ q trên toàn chiều dài trục thanh.

V.9. Cho thanh chịu uốn thuần túy có chiều dài $l = 2,37$ m, tiết diện hình chữ I như trên hình V.1 với $h = 20$ cm; $b = 10$ cm; $\delta = t = 1$ cm. Cho biết: $E = 2,6$ G. Các đầu thanh có liên kết ngăn cản chuyển vị thẳng theo các phương x, y và chuyển vị xoay quanh trục z (xoay tự do quanh các trục x, y). Lập công thức xác định giá trị tới hạn của M .

V.10. Cho thanh có chiều dài $l = 2,37$ m, tiết diện chữ I như trên hình V.1 với $h = 20$ cm; $b = 10$ cm; $\delta = t = 1$ cm. Cho biết: $E = 2,6$ G. Các đầu thanh có liên kết như trên hình V.6. Lập công thức xác định giá trị tới hạn của lực tác dụng trong mặt phẳng tọa độ z, y tương ứng với các trường hợp chịu lực như sau:

- a) Lực tập trung thẳng đứng P tại trọng tâm tiết diện ở giữa nhịp.
- b) Lực thẳng đứng phân bố đều với cường độ q trên toàn chiều dài trục thanh.

6 Ổn định của hệ thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi

Trong các chương trước đã giới thiệu cách tính ổn định của hệ thanh với giả thiết là vật liệu tuyệt đối đàn hồi và tuân theo định luật Hooke. Do đó, các phương pháp tính và các công thức xác định lực tới hạn trình bày trong các chương trên sẽ không áp dụng được khi ứng suất tới hạn tìm được vượt quá giới hạn đàn hồi (hay giới hạn tỷ lệ).

Theo [13], E. Lamarle là người đầu tiên (năm 1845) xác định giới hạn áp dụng các công thức tìm được theo lý thuyết Euler, đồng thời cũng phát hiện thấy đa số các công trình thực tế thường nằm ngoài phạm vi áp dụng của lý thuyết Euler. Vào cuối thế kỷ thứ 19, I. Bauschinger, A. Considère, F. S. Iaxinski, L. Tetmajer, B. Rankine, J. B. Johnson ... đã tiến hành nhiều thí nghiệm và trên cơ sở đó kiến nghị một số công thức thực nghiệm để tính ổn định của thanh chịu nén làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Tiếp đó, những nội dung này đã được nghiên cứu bằng lý thuyết với các công trình của F. Engesser, F. S. Iaxinski, Th. Kármán, F. R. Shanely...

Trong chương này sẽ trình bày cách tính ổn định của hệ thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi lần lượt theo quá trình phát triển của nghiên cứu.

6.1. Các công thức thực nghiệm

Như đã biết, công thức xác định lực tới hạn theo lý thuyết Euler có dạng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2},$$

trong đó μ là hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết ở các đầu thanh (xem chương 2).

Chia cả hai vế cho diện tích A của tiết diện thanh ta có công thức ứng suất tới hạn:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (6.1)$$

$$\text{trong đó: } \lambda = \frac{\mu l}{r} - \text{độ mảnh của thanh}; \quad (6.2)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} - \text{bán kính quán tính của tiết diện thanh}. \quad (6.3)$$

Nếu dựng đồ thị liên hệ giữa σ_{th} và λ ta thấy công thức (6.1) được mô tả theo

đường cong hypebol gọi là *đường hypebol Euler* (hình 6.1). Công thức (6.1) chỉ áp dụng được khi ứng suất tối hạn nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ σ_{Hl} :

$$\sigma_{Hl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{Hl} \quad \text{hay} \quad \lambda \geq \lambda^* \quad \text{với} \quad \lambda^* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{Hl}}} \quad (6.4)$$

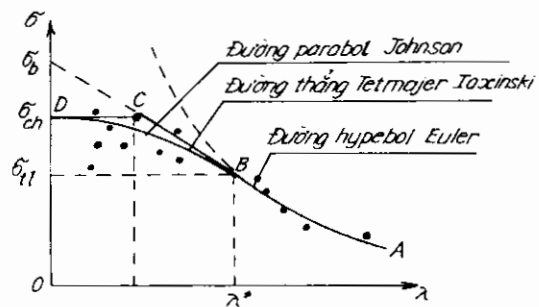
Như vậy, đối với những thanh có độ mảnh $\lambda \leq \lambda^*$ thì không áp dụng được công thức Euler

Ví dụ, với thanh làm bằng thép C45 ta có: $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{Hl} = 19,2 \text{ kN/cm}^2$ thì độ mảnh giới hạn $\lambda^* = 100$.

Kết quả thí nghiệm cũng xác nhận điều đó.

Nếu làm thí nghiệm xác định ứng suất tối hạn cho các thanh có độ mảnh khác nhau ta sẽ tìm được các điểm thí nghiệm như trên hình 6.1. Qua đó ta thấy:

- Đối với những thanh có độ mảnh $\lambda > \lambda^*$ các điểm thí nghiệm sát với đường hypebol Euler và tập trung
- Đối với những thanh có độ mảnh $\lambda < \lambda^*$ tức là khi thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi thì các điểm thí nghiệm khác xa với đường hypebol Euler và rất phân tán.



Hình 6.1

Có thể giải thích kết quả trên như sau:

- ♦ Ở trong giai đoạn đàn hồi, ứng suất tối hạn tương ứng với mỗi độ mảnh chỉ phụ thuộc môđun đàn hồi E mà môđun E hầu như không thay đổi đối với các mẫu tải nghiệm khác nhau làm bằng cùng một vật liệu, do đó kết quả thí nghiệm tập trung.
- ♦ Ở ngoài giai đoạn đàn hồi, ứng suất tối hạn phụ thuộc đồ thị liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng tỷ đối ϵ mà đồ thị này thường khác nhau ngay cả khi các mẫu thí nghiệm thuộc cùng một nhóm có độ mảnh như nhau, do đó kết quả thí nghiệm thường bị phân tán. Ngoài yếu tố trên còn có nhiều yếu tố khác gây ảnh hưởng đáng kể khi vật liệu làm việc ngoài giai đoạn đàn hồi như: tải trọng đặt lệch tâm; trạng thái chịu uốn ban đầu của mẫu thí nghiệm; phương pháp gia công mẫu...

Như vậy, để thiết lập công thức thực nghiệm áp dụng cho trường hợp vật liệu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi trên cơ sở những số liệu thí nghiệm ta cần áp dụng phương pháp thống kê. Nhiều tác giả đã kiến nghị các công thức thực nghiệm khác nhau. Dưới đây là các công thức được lưu ý hơn cả:

❖ *Công thức đường thẳng*, do L. Tetmajer và F. S. Iaxinski kiến nghị (đoạn BC trên hình 6.1):

$$\sigma_{th} = a - b\lambda. \quad (6.5)$$

a và b là các thông số phụ thuộc vật liệu chế tạo thanh và được xác định theo điều kiện:

- khi $\lambda = \lambda^*$ thì σ_{th} bằng giới hạn tỷ lệ σ_{tl} ;
- khi $\lambda = 0$ thì σ_{th} bằng giới hạn bền chịu nén σ_b .

Công thức (6.5) cho kết quả phù hợp với thí nghiệm khi thanh có độ mảnh trung bình. Chẳng hạn đối với thép Ct3, công thức này cho kết quả phù hợp khi độ mảnh ở trong khoảng $40 \leq \lambda \leq 100$.

Đối với thanh có độ mảnh nhỏ (với thép Ct3, khi $\lambda \leq 40$), thì σ_{th} được lấy bằng giới hạn chảy (đoạn CD trên hình 6.1):

$$\sigma_{th} = \sigma_{ch}. \quad (6.6)$$

❖ *Công thức parabol*, do J. B. Johnson kiến nghị:

$$\sigma_{th} = \alpha - \beta \lambda^2. \quad (6.7)$$

α là ứng suất nguy hiểm khi nén đơn, phụ thuộc vật liệu thanh, xác định như sau:

- với vật liệu dẻo, α bằng giới hạn chảy $\alpha = \sigma_{ch}$;
- với vật liệu giòn, α bằng giới hạn bền $\alpha = \sigma_b$;

β là hệ số được xác định theo điều kiện: *đường parabol tiếp xúc thoải với đường hypebol Euler*, tức là khi $\lambda = \lambda^*$ thì đường parabol và đường hypebol Euler có tiếp tuyến chung.

6.2. Ổn định của thanh khi tải trọng không thay đổi

A. Các phương trình cơ bản

Để nghiên cứu lý thuyết bài toán ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi ta giả thiết vật liệu chế tạo thanh có đồ thị liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng tỷ đối ε như trên hình 6.2. Đó là kết quả thí nghiệm nén mẫu có chiều dài ngắn. Trên biểu đồ: đoạn Oa tương ứng với giai đoạn biến dạng đàn hồi, đoạn ab tương ứng với giai đoạn biến dạng ngoài miền đàn hồi.

Sau khi nén thanh vượt quá giới hạn đàn hồi, đạt đến điểm m bất kỳ (hình 6.2):

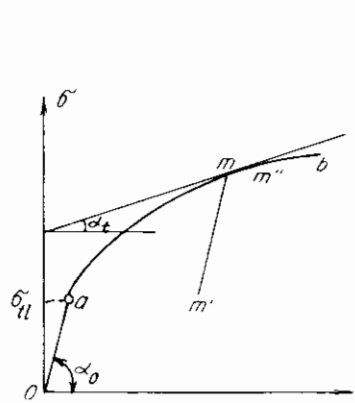
❖ Nếu *hạ tải* (giảm lực nén) thì theo F. I. Gerstner, đồ thị tương ứng là đường thẳng mm' gần song song với đoạn Oa . *Tang* góc nghiêng của đoạn này gọi là *môđun hạ tải*. Có thể xem môđun hạ tải này bằng môđun đàn hồi $E = tg\alpha_0$.

❖ Nếu *tăng tải* (tăng lực nén) thì đồ thị tương ứng là đoạn mm'' . Gọi *tang* của góc nghiêng của tiếp tuyến tại m là *môđun tiếp tuyến* và ký hiệu là $E_t = tg\alpha_1$.

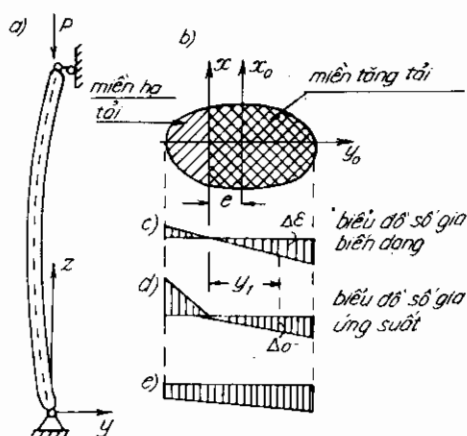
Bây giờ ta xét thanh có khớp tựa ở hai đầu, chịu nén đúng tâm với ứng suất vượt quá giới hạn đàn hồi. Giả thiết rằng *khi ứng suất trong thanh đạt đến một giá trị σ nào đó, thanh bị uốn cong thì lực nén P tương ứng với ứng suất đó không thay*

đổi giá trị trong quá trình thanh bị uốn. Khi bị uốn cong (hình 6.3a), các thớ dọc trục của thanh có thêm biến dạng phụ:

- ♦ Các thớ ở phía lõm có thêm biến dạng nén $\Delta\varepsilon$; ứng suất nén trong các thớ này tăng lên là $\Delta\sigma$. Như vậy, trong khu vực này xảy ra hiện tượng tăng tải, giữa số gia ứng suất và số gia biến dạng tỷ đối có liên hệ theo môđun tiếp tuyến: $\Delta\sigma = E_t \Delta\varepsilon$. Gọi khu vực này là *miền tăng tải*.
- ♦ Các thớ ở phía lồi có thêm biến dạng kéo $\Delta\varepsilon$; ứng suất nén trong các thớ này giảm xuống là $\Delta\sigma$. Như vậy, trong khu vực này xảy ra hiện tượng hạ tải, giữa số gia ứng suất và số gia biến dạng tỷ đối có liên hệ: $\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon$. Gọi khu vực này là *miền hạ tải*.
- ♦ Ranh giới giữa hai miền nói trên là thớ có biến dạng phụ bằng không, gọi là *thớ trung hòa của các biến dạng phụ*. Thớ trung hòa của các biến dạng phụ không đi qua trọng tâm của các tiết diện.



Hình 6.2



Hình 6.3

Giả thiết rằng khi phát sinh biến dạng phụ, các tiết diện của thanh vẫn phẳng (hình 6.3c). Do đó, nếu gọi x_0, y_0 là các trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, x là trục trung hòa của các biến dạng phụ (hình 6.3b) đồng thời giả thiết là thanh bị uốn cong trong mặt phẳng (z, y_0) thì biến dạng phụ $\Delta\varepsilon$ tại thớ bất kỳ cách trục trung hòa của các biến dạng phụ là y_1 được xác định theo công thức quen biết trong SBVL như sau: $\Delta\varepsilon = y_1 / \rho$ với ρ là bán kính cong của đường đàn hồi.

Số gia ứng suất $\Delta\sigma_1$ trong miền tăng tải và $\Delta\sigma_2$ trong miền hạ tải (hình 6.3d):

$$\Delta\sigma_1 = E_t \Delta\varepsilon = E_t y_1 / \rho; \quad \Delta\sigma_2 = E \Delta\varepsilon = E y_1 / \rho.$$

Vì lực nén không thay đổi giá trị trong quá trình thanh bị uốn nên hợp lực của các số gia ứng suất trên toàn tiết diện phải bằng không, ta có:

$$\int_{A_1} \Delta\sigma_1 dA + \int_{A_2} \Delta\sigma_2 dA = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y dA + \frac{E}{\rho} \int_{A_2} y dA = 0.$$

Hay: $E_1 S_1 + E S_2 = 0,$ (6.8)

trong đó: A_1, A_2 và S_1, S_2 – lần lượt là diện tích và mômen tĩnh đối với trục trung hòa x của phần tiết diện thuộc miền tăng tải và miền hạ tải.

Điều kiện (6.8) được dùng để xác định vị trí của trục trung hòa x .

Từ điều kiện tổng mômen của các số gia ứng suất đối với trục trung hòa x bằng mômen uốn ngoại lực M , ta có:

$$\int_{A_1} y \Delta\sigma_1 dA + \int_{A_2} y \Delta\sigma_2 dA = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y^2 dA + \frac{E}{\rho} \int_{A_2} y^2 dA = M.$$

Suy ra: $\frac{I}{\rho} (E_1 I_1 + E I_2) = M,$ (6.9)

trong đó: I_1, I_2 – lần lượt là mômen quán tính đối với trục trung hòa x của phần tiết diện thuộc miền tăng tải và miền hạ tải.

Gọi E_q là *môđun quy ước*, xác định theo công thức sau:

$$E_q = \frac{E_1 I_1 + E I_2}{I},$$
 (6.10)

trong đó: I – mômen quán tính của toàn bộ tiết diện đối với trục x_0 đi qua trọng tâm của tiết diện.

Từ (6.9) và (6.10) ta được: $\frac{I}{\rho} = \frac{M}{E_q I}$ và từ SBVI, ta đã biết: $\frac{I}{\rho} = - \frac{d^2 y}{dz^2}.$

Do đó ta có: $E_q I \frac{d^2 y}{dz^2} = - M.$ (6.11)

Đó là phương trình vi phân đường đàn hồi của bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi, có dạng tương tự như phương trình vi phân đường đàn hồi của bài toán ổn định trong giới hạn đàn hồi. Như vậy về nguyên tắc, các phương pháp tính và các kết quả đã nghiên cứu được ở các chương trên đều có thể áp dụng cho trường hợp hệ thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi nếu thay môđun đàn hồi E bằng môđun quy ước E_q .

Công thức xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn có dạng tương ứng như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_q I}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_q}{\lambda^2},$$
 (6.12)

Vấn đề mới còn tồn tại ở đây là xác định môđun quy ước E_q .

Từ (6.8) và (6.10) ta thấy môđun quy ước E_q phụ thuộc những yếu tố sau:

- Hình dạng của tiết diện thanh.
- Vật liệu chế tạo thanh.
- Đồ thị liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng tỷ đối ε .

Ngoài ra E_q còn phụ thuộc giá trị ứng suất tối hạn. Thật vậy, từ (6.10) ta thấy E_q phụ thuộc E_t , nhưng E_t phụ thuộc đồ thị $\sigma(\varepsilon)$ (hình 6.2) và giá trị ứng suất ở trạng thái đang xét tức là ứng suất tối hạn. Như vậy, bài toán mang tính chất hỗn độn; để tìm σ_{th} ta cần biết E_q (theo 6.12) nhưng muốn biết E_q lại phải biết σ_{th} . Do đó chỉ có thể giải bài toán theo cách thử đúng dần (xem các mục sau).

B Công thức xác định môđun quy ước cho một số dạng tiết diện

❖ Tiết diện chữ nhật (hình 6.4)

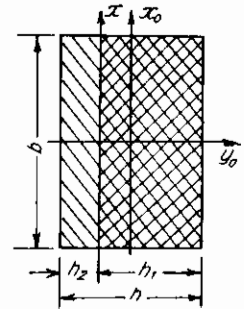
Giả thiết thanh bị uốn trong mặt phẳng zOy . Gọi h_1 , h_2 lần lượt là khoảng cách từ trục trung hòa x đến các bờ biên của các miền tăng tải và hạ tải. Theo (6.8):

$$E_1 A_1 (h_1/2) + E A_2 (h_2/2) = 0.$$

Hay: $E_1 b (h_1^2/2) + E b (h_2^2/2) = 0.$

Ngoài ra ta có: $h_1 + h_2 = h$. Nên:

$$h_1 = h \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E}}; \quad h_2 = h \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E}}.$$



Hình 6.4

Các mômen quán tính:

$$I_1 = \frac{bh_1^3}{3} = \frac{bh^3}{3} \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E}} \right)^3; \quad I_2 = \frac{bh_2^3}{3} = \frac{bh^3}{3} \left(\frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E}} \right)^3; \quad I = \frac{bh^3}{12}.$$

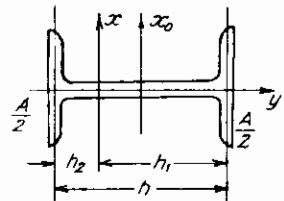
Thay những kết quả này vào (6.10), ta được:

$$E_q = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E_t} + \sqrt{E}\right)^2}. \quad (6.13)$$

Nhận xét: $E_t < E_q < E$.

❖ Tiết diện chữ I (hình 6.5)

Giả thiết bán kính của tiết diện rất mỏng nên không tham gia chịu uốn. Trường hợp thanh bị uốn cong trong mặt phẳng zOy ta có thể xem tiết diện gồm hai bản để như hai hình chữ nhật và áp dụng công thức (6.13) để tính E_q . Trường hợp thanh bị uốn cong trong mặt phẳng zOy ta cần lập công thức tính E_q .



Hình 6.5

Gọi h là khoảng cách giữa trọng tâm của hai bản đế và xem diện tích của mỗi bản đế bằng nửa diện tích A của toàn bộ tiết diện. Gọi h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ trục trung hòa x đến trọng tâm bản đế thuộc miền tăng tải và trọng tâm bản đế thuộc miền hạ tải. Theo (6.8):

$$E_t S_1 + E S_2 = E_t (A/2) h_1 + E (A/2) h_2 = 0.$$

Ngoài ra ta có: $h_1 + h_2 = h$.

$$\text{Nên: } h_1 = h \frac{E}{E_t + E}; \quad h_2 = h \frac{E_t}{E_t + E}.$$

Các mômen quán tính:

$$I_t = \frac{A}{2} h_1^2 = \frac{A}{2} h^2 \frac{E^2}{(E_t + E)^2}; \quad I_2 = \frac{A}{2} h_2^2 = \frac{A}{2} h^2 \frac{E_t^2}{(E_t + E)^2}; \quad I = \frac{Ah^2}{4}.$$

Thay những kết quả này vào (6.10), ta được:

$$E_q = \frac{2EF}{E_t + E}. \quad (6.14)$$

Nhận xét: $E_t < E_q < E$.

❖ *Tiết diện có hình dạng khác*

Kết quả tính môđun quy ước theo công thức (6.10) cho một số tiết diện có dạng hình học khác nhau chứng tỏ rằng ảnh hưởng của hình dạng tiết diện đối với E_q không lớn lắm. Do đó, theo [13] ta có thể vận dụng công thức (6.13) hoặc (6.14) để xác định E_q cho các tiết diện có hình dạng khác.

Qua những kết quả vừa tìm được ta thấy:

◆ Khi hệ làm việc trong giới hạn đàn hồi, $E_t = E$ thì $E_q = E$.

◆ Đối với những vật liệu có diện chảy lớn, rõ ràng và khi hệ làm việc gần tới giai đoạn chảy thì $\alpha_t \approx 0$ (hình 6.2) nên E_t và E_q cũng xấp xỉ bằng không. Điều đó chứng tỏ: *ứng suất tới hạn không bao giờ vượt quá giới hạn chảy.*

C. *Đồ thị liên hệ giữa ứng suất tới hạn và độ mảnh của thanh*

Nếu cho biết đồ thị liên hệ giữa ứng suất σ và biến dạng tỷ đối ε thì ta có thể dựng được đồ thị liên hệ giữa ứng suất tới hạn σ_{th} và độ mảnh λ của thanh. Thật vậy, từ (6.12), nếu gọi λ_q là độ mảnh tương ứng với môđun quy ước E_q ta có:

$$\lambda_q = \pi \sqrt{\frac{E_q}{\sigma_{th}}}. \quad (6.15)$$

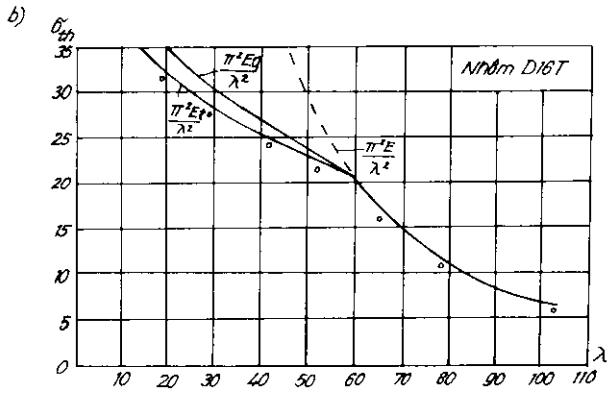
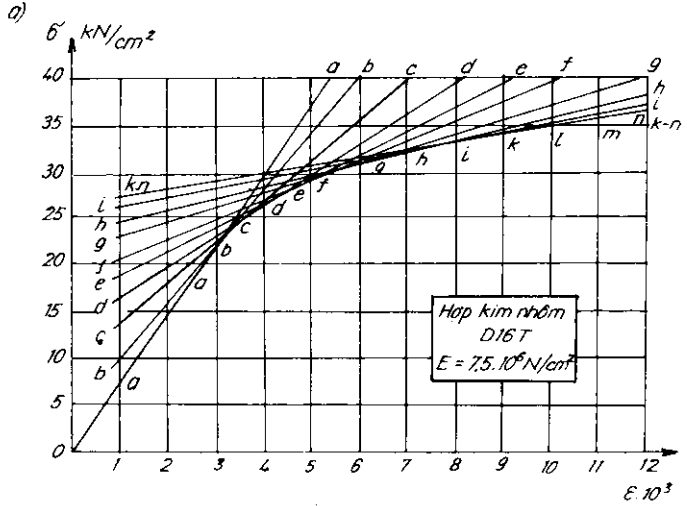
Cho trước σ_{th} một giá trị nào đó, căn cứ vào đồ thị $\sigma(\varepsilon)$ và theo (6.13) hoặc (6.14) ta sẽ xác định được giá trị tương ứng E_t, E_q và từ đó tìm độ mảnh λ_q tương ứng theo (6.15). Lần lượt cho σ_{th} những giá trị khác nhau và thực hiện

tương tự như trên ta sẽ dựng được đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$.

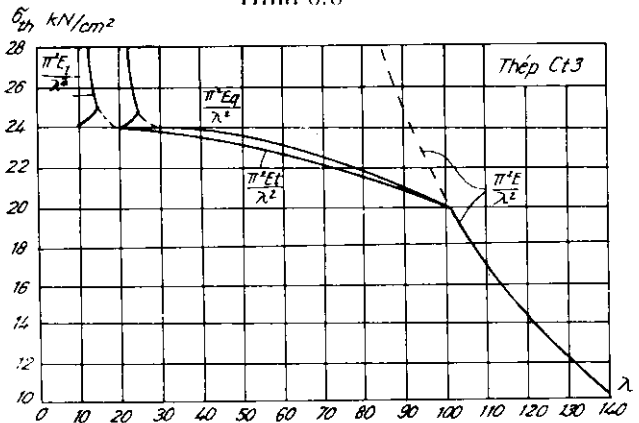
Năm 1948, A. S. Volmir [13] đã lập đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$ cho hai loại vật liệu: hợp kim nhôm D16T và thép xây dựng Ct3.

Đồ thị trên hình 6.6a là kết quả thí nghiệm nên mẫu với chiều dài ngắn bằng hợp kim nhôm D16T có: môđun đàn hồi $E = 7,5 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$; giới hạn tỷ lệ $\sigma_{th} = 2 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$. Để xác định các E_l , từ những điểm khác nhau (a, b, c,...) trên đồ thị ta kẻ các tiếp tuyến với đường $\sigma(\varepsilon)$ và tìm \tan của góc nghiêng tương ứng với trục hoành.

Kết quả tìm các E_l tương ứng với các giá trị σ và ε ghi trong bảng 6.1. Trong bảng cũng cung cấp kết quả tính các E_q và λ_q (cột 5 và 6) tương ứng với các giá trị σ tìm theo (6.13) hoặc (6.14) và (6.15).



Hình 6.6



Hình 6.7

Từ các số liệu tìm được trong bảng 6.1 ta dựng được đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$ như trên hình 6.6b (đường liền nét). Khi $\lambda \geq 60$, đường cong này trùng với đường hyperbol Euler.

Bảng 6.1

Điểm trên đồ thị	$\varepsilon \cdot 10^3$	σ kN/cm ²	$E_l \cdot 10^{-3}$ kN/cm ²	$E_q \cdot 10^{-3}$ kN/cm ²	λ_q	λ_l
a	2,67	20,0	7,50	7,50	60,5	60,5
b	3,0	22,0	5,96	6,65	54,7	51,6
c	3,5	24,6	4,34	5,50	47,0	42,0
d	4,0	26,4	3,72	4,97	43,0	37,5
e	4,5	27,8	2,55	3,81	36,8	30,2
t	5,0	29,0	2,05	3,22	33,0	26,5
g	6,0	30,8	1,50	2,50	28,3	22,0
h	7,0	32,0	1,17	2,03	25,0	18,9
i	8,0	33,2	0,97	1,72	22,6	17,0
k	9,0	34,0	0,82	1,48	20,8	15,4
l	10,0	34,5	0,82	1,48	20,6	15,3
m	11,0	35,6	0,82	1,48	20,2	15,1
n	12,0	36,4	0,82	1,48	20,0	14,9

Bảng 6.2

$\varepsilon \cdot 10^3$	σ kN/cm ²	$E_l \cdot 10^{-3}$ kN/cm ²	$E_q \cdot 10^{-3}$ kN/cm ²	λ_q	λ_l
0,95	20,0	2,10	2,10	102	102
1,0	21,0	1,42	1,72	90	81,8
1,1	22,0	0,99	1,39	79	66,6
1,2	22,8	0,67	1,05	67,6	54
1,3	23,4	0,46	0,85	59	44
1,4	23,8	0,26	0,54	47,5	32,7
1,5	23,9	0,13	0,33	37	23,1
1,6	24,0	0,06	0,19	28	15,7
1,8 - 4,0	24,0	0,00	0,00	0	0
4,5	24,1	0,02	0,07	17	9,1
5	24,2	0,04	0,13	23	12,7
6	24,7	0,05	0,15	24,5	14,2
8	25,75	0,05	0,15	24	13,8
10	26,85	0,05	0,15	23,6	13,6
12	28,00	0,05	0,15	23	13,5

Đối với thép C13, kết quả cần tìm về E_q và λ_q tương ứng với các giá trị σ khác nhau ghi trong bảng 6.2 (cột 4 và 5). Từ các số liệu tìm được trong bảng 6.2 ta dựng được đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$ như trên hình 6.7 (đường liền nét). Từ hình 6.7 ta thấy trong khu vực tương ứng với các độ mảnh nhỏ, đồ thị tiệm cận dần tới đường nằm ngang tương ứng với giới hạn chảy; tiếp đó từ điểm có $\lambda = 0$ đồ thị quay ngoặt lại, tăng dần theo λ và cuối cùng tăng nhanh về phía trên. Như vậy, trong khu vực này, tương ứng với một độ mảnh λ có thể có hai hoặc ba giá trị σ_{th} , đó là do hiện tượng biến cứng ngược của thép sau khi vượt qua giai đoạn chảy. Thật vậy, trên đồ thị $\sigma(\varepsilon)$ có thể tồn tại hai hoặc ba điểm tương ứng với các ứng suất có giá trị gần bằng và lớn hơn giới hạn chảy cho cùng một tỷ số E_q / σ_{th} ; do đó theo (6.15), độ mảnh λ_q cũng có cùng một giá trị. Khi $\sigma_{th} = \sigma_{th}$ thì $E_t = 0$, do đó $E_q = 0$ nên $\lambda_q = 0$. Tất nhiên ứng suất tới hạn chỉ có thể vượt qua giới hạn chảy để đạt đến giá trị ở nhánh phía trên của đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$ khi ta dùng một biện pháp nhân tạo nào đó để giữ cho thanh không bị mất ổn định ở giai đoạn chảy mà chuyển sang giai đoạn cứng cố. Đối với vật liệu không có diện chảy (góc α_f trên hình 6.2 luôn khác không cho tới khi bị phá hoại), đồ thị $\sigma_{th}(\lambda)$ sẽ không hình thành mũi nhọn mà thay đổi liên tục theo đường nối đứt nét như trên hình 6.7.

D. Đối chiếu với kết quả thí nghiệm

Để đánh giá kết quả lý thuyết, A. S. Volmir [13] đã thực hiện một số thí nghiệm uốn dọc các thanh làm bằng hợp kim nhôm D16T với các độ mảnh khác nhau. Các điểm thí nghiệm thường nằm ở bên dưới đồ thị $\sigma_{th} = \pi^2 E_q / \lambda_q^2$ (các khuyên tròn trên hình 6.6b) và chỉ tương đối sát với đồ thị đó trong những trường hợp cá biệt, khi thực hiện thí nghiệm thật cẩn thận.

Cũng cần lưu ý là kết quả thí nghiệm lại phù hợp với đồ thị xác định theo hệ thức giữa ứng suất tới hạn σ_{th} và độ mảnh λ_t tương ứng với môđun tiếp tuyến E_t :

$$\lambda_t = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{th}}}. \quad (6.16)$$

Như vậy, kết quả thí nghiệm phù hợp với quan điểm của F. Engesser đề xuất năm 1889, cho rằng: *giữa số gia ứng suất và số gia biến dạng tỷ đối có liên hệ theo môđun tiếp tuyến E_t .*

Năm 1895, F. S. Iasinski đã phê phán cách tính theo quan điểm môđun tiếp tuyến của F. Engesser là không chú ý đến *hiện tượng hạ tải*, trong miền hạ tải số gia ứng suất và số gia biến dạng tỷ đối có liên hệ theo môđun đàn hồi E chứ không phải môđun tiếp tuyến E_t . Tiếp thu ý kiến đó, cũng ngay trong năm 1895, F. Engesser đã xây dựng cách tính theo quan điểm môđun quy ước như đã trình bày ở trên. Năm 1909 Th. Kármán cũng đã xây dựng cách tính theo quan điểm môđun quy ước một cách độc lập.

Vê lý luận, cách tính theo môđun quy ước chặt chẽ hơn cách tính theo môđun tiếp tuyến. Song tại sao kết quả thí nghiệm lại thường phù hợp với cách tính theo môđun tiếp tuyến và cá biệt mới phù hợp với cách tính theo môđun quy ước? Trong mục 6.5 sẽ giải thích rõ hơn về vấn đề này song sơ bộ có thể nhận thấy: cách tính theo môđun quy ước được xây dựng tương ứng với giả thiết tải trọng không thay đổi khi hệ bị uốn cong còn cách tính theo môđun tiếp tuyến phù hợp với giả thiết số gia của ứng suất chỉ tăng mà không giảm (hình 6.3e) và điều này chỉ xảy ra nếu tải trọng tiếp tục tăng sau khi hệ bị uốn cong. Giả thiết tải trọng tiếp tục tăng sau khi hệ bị mất ổn định đang cân bằng ban đầu do E. R. Shanely đề xuất năm 1947 (xem mục 6.3).

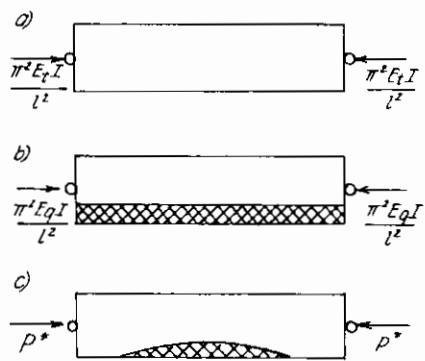
6.3. Ổn định của thanh có kèm theo sự tăng tải trọng khi bị uốn

Trong mục 6.2, khi nghiên cứu lý thuyết tính ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi đã đề cập đến hai quan niệm khác nhau:

❖ *Cách tính theo môđun tiếp tuyến (Engesser):* các công thức xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn có dạng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2}; \quad \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (6.17)$$

Quan niệm này phù hợp với giả thiết trong thanh không phát sinh hiện tượng hạ tải. Trên hình 6.8 trình bày các trạng thái làm việc của thanh chịu lực nén khi bị uốn cong và được vẽ theo sơ đồ ban đầu của hệ. Hình 6.8a là trạng thái làm việc của thanh tương ứng với quan niệm đang xét, trong đó miền tăng tải (miền để trắng) chiếm toàn bộ thể tích thanh.



Hình 6.8

❖ *Cách tính theo môđun quy ước (Engesser-Kármán):* các công thức xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn có dạng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_t I}{l^2}; \quad \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (6.18)$$

Quan niệm này phù hợp với giả thiết tải trọng không thay đổi trong quá trình thanh bị uốn, có phát sinh hiện tượng hạ tải. Trong trường hợp này, theo (6.8), trục trung hòa có vị trí không thay đổi tại mọi tiết diện dọc theo chiều dài thanh;

do đó sau khi bị uốn, trong thanh hình thành hai miền: miền hạ tải (miền gạch chéo hai lần) và miền tăng tải (miền để trắng) như trên hình 6.8b. Vì $E_I < E$ nên từ điều kiện (6.8) ta thấy miền tăng tải chiếm phần lớn còn miền hạ tải chiếm phần nhỏ của thể tích thanh.

Bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn nếu giả thiết tải trọng còn tiếp tục tăng trong quá trình thanh bị uốn. Thật vậy, trong trường hợp này thay cho điều kiện xác định trục trung hòa (6.8), ta có điều kiện:

$$E_I S_I + E S_2 = \rho \cdot \Delta P, \tag{6.19}$$

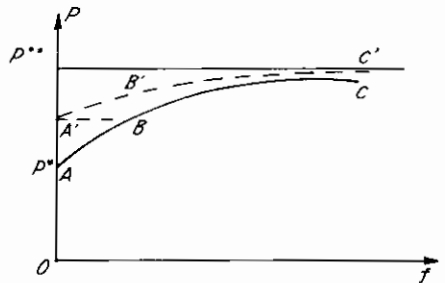
với ΔP là số giá của lực nén P ; các đại lượng khác vẫn có ý nghĩa như ở mục 6.2. Như vậy, vị trí của trục trung hòa phụ thuộc bán kính cong ρ , nhưng ρ là hàm của toạ độ z nên vị trí của trục trung hòa cũng thay đổi dọc theo chiều dài thanh và điều đó làm cho bài toán trở nên phức tạp.

Trong tài liệu [13] và [16] đã giới thiệu kết quả nghiên cứu định lượng bài toán này cho một số trường hợp cụ thể. Dưới đây ta chỉ phân tích định tính vấn đề này.

Xét thanh chịu nén cố khớp tựa ở hai đầu. Giả thiết khi lực nén đạt đến giá trị P^* , thanh bị uốn cong và lực nén vẫn tiếp tục tăng thêm là ΔP . Lúc này, tại một số tiết diện ứng suất chỉ tăng mà không giảm còn tại một số tiết diện khác ở khoảng giữa thanh có thể xảy ra cả hiện tượng tăng ứng suất (tăng tải) lẫn hiện tượng giảm ứng suất (hạ tải). Trong thanh hình thành hai miền như trên hình 6.8c:

- miền tăng tải (miền để trắng) được đặc trưng bằng môđun tiếp tuyến E_I xác định theo đồ thị $\sigma(\varepsilon)$ tương ứng với ứng suất $\sigma^* = P^*/A$;
- miền hạ tải (miền gạch chéo hai lần) được đặc trưng bằng môđun đàn hồi E , chiếm một phần nhỏ thể tích thanh.

Nếu giả thiết hiện tượng hạ tải bắt đầu phát sinh đồng thời với khi thanh bị uốn cong thì đường cong cân bằng liên hệ giữa lực nén P và độ võng f tại giữa nhịp có dạng như trên hình 6.9. Thật vậy, nghiên cứu ý nghĩa của từng đoạn đường biểu diễn trạng thái cân bằng ổn định của thanh ta thấy:



Hình 6.9

❖ Khi $P < P^*$, thanh chưa bị uốn cong, trạng thái cân bằng ổn định của thanh tương ứng với đoạn thẳng đứng OA trên hình 6.9.

❖ Khi $P = P^*$, thanh bắt đầu bị uốn cong, hiện tượng hạ tải bắt đầu phát sinh tại điểm biên của tiết diện ở giữa nhịp. Ở thời điểm này có thể xem như toàn bộ thể tích thanh đều làm việc ở trạng thái tăng tải như trên hình 6.8a. Như vậy thanh sẽ cân bằng với lực P^* được xác định với giả thiết trong thanh không phát sinh hiện tượng hạ tải tức là tương ứng với giá trị tải hạn tìm được theo môđun tiếp tuyến:

$$P^* = \frac{\pi^2 E_1 I}{l^2} \quad (6.20)$$

❖ Khi $P > P^*$, độ võng f tăng, miền hạ tải phát triển rộng thêm (hình 6.8c). Vì $E > E_1$ nên khi miền hạ tải được đặc trưng bằng môđun đàn hồi E phát triển còn miền tăng tải được đặc trưng bằng môđun tiếp tuyến E_1 thu hẹp thì độ cứng của thanh tăng lên. Độ cứng tăng tạo điều kiện cho thanh có khả năng cân bằng với giá trị lực nén lớn hơn. Lực nén tăng, độ võng tăng theo, độ cứng của thanh cũng tăng lên nên thanh lại có khả năng cân bằng với giá trị lực nén lớn hơn... và cứ thế tiếp diễn. Trạng thái cân bằng ổn định của thanh tương ứng với đường cong ABC trên hình 6.9.

❖ Trường hợp giới hạn khi f tiến tới vô cùng, miền hạ tải phát triển đến mức tối đa tương ứng với trường hợp trên hình 6.8b. Thật vậy, khi f tiến tới vô cùng thì ρ tiến tới không nên công thức (6.19) sẽ có dạng như (6.8) đã xét ở mục 6.2. Do đó, theo chiều cao của các tiết diện thanh, miền hạ tải chỉ có thể phát triển đến mức tối đa tương ứng với khi trục trung hòa được xác định theo công thức (6.8) còn dọc theo trục z , miền hạ tải có thể phát triển đến hết chiều dài thanh.

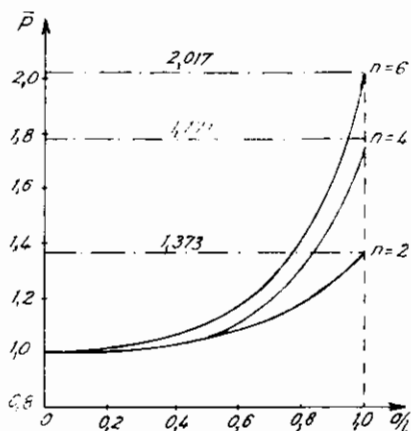
Như vậy trong trường hợp này thanh làm việc ở trạng thái tương tự như trường hợp đã xét trong mục 6.2, theo môđun quy ước. Đường cong cân bằng $P(f)$ tiệm cận tới đường cân bằng phiếm định nằm ngang tương ứng với giá trị P^{**} được xác định theo môđun quy ước:

$$P^{**} = \frac{\pi^2 E_1 I}{l^2} \quad (6.21)$$

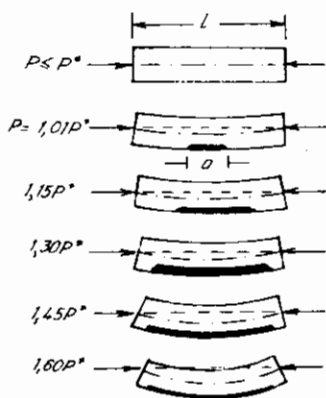
Toàn bộ đường $OABC$ trên hình 6.9 là đường cân bằng ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi khi giả thiết tải trọng còn tiếp tục tăng trong quá trình thanh bị uốn. Mỗi điểm của đường cong xác định một trạng thái cân bằng ổn định của thanh. Cần lưu ý là quá trình diễn biến của đồ thị $P(f)$ chỉ có thể thực hiện liên tục theo chiều tăng của độ võng f (theo chiều $A \rightarrow B \rightarrow C$). Chẳng hạn, khi $P = P^*$, nếu giữ cho thanh không bị uốn cong và tăng tải trọng đến giá trị tương ứng với điểm A' thì thanh sẽ không chuyển sang trạng thái cân bằng ứng với điểm B trên đường ABC mà sẽ phát triển theo đường đứt nét $A'B'C'$ như trên hình 6.9. Như vậy, tùy từng tình hình cụ thể, mỗi điểm nằm trong miền khép giữa đường nằm

ngang $P = P^{**}$ và đường cong ABC có thể biểu thị một trạng thái cân bằng của thanh.

Để làm cụ thể bài toán này ta tham khảo một vài số liệu do A. S. Volmir [13] nghiên cứu cho trường hợp thanh có tiết diện hình chữ nhật. Trên hình 6.10 ta có thể hệ hệ giữa $\bar{P} = P/P^*$ và tỷ số a/l giữa chiều dài của miền hạ tải và chiều dài thanh, tương ứng với các tỷ số $n = E/E_T$ khác nhau.

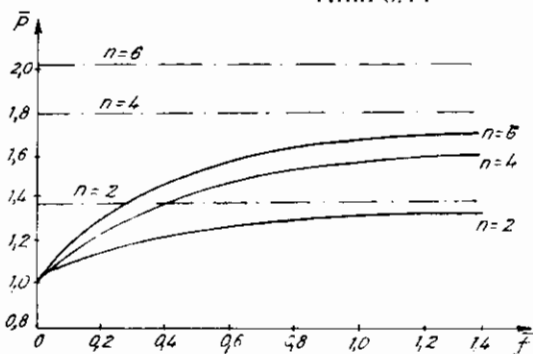


Hình 6.10



Hình 6.11

Quá trình phát triển của miền hạ tải theo giá trị của tải trọng P tương ứng với trường hợp $n = 4$ được thể hiện trên hình 6.11. Trên hình 6.12 là đường cong cân bằng liên hệ giữa \bar{P} và tỷ số $\bar{f} = 2f/l$ (f – chiều cao của tiết diện thanh).



Hình 6.12

6.4. Ổn định của thanh có kèm theo sự giảm tải trọng khi bị uốn

Trong mục này nghiên cứu sự ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi với giả thiết tải trọng giảm xuống trong quá trình thanh bị uốn.

Xét thanh thẳng chịu nén có khớp tựa ở hai đầu. Giả thiết thanh vẫn giữ nguyên dạng thẳng ban đầu cho đến khi tải trọng P đạt đến giá trị P_T , tiếp đó thanh bị uốn cong và tải trọng giảm xuống là ΔP . Ngay sau khi thanh bị uốn, vì tải trọng giảm nên trong thanh hình thành hai miền như trên hình 6.13a. Khác với trường hợp

tang tải trọng đã xét ở 6.3 (hình 6.8c), trong trường hợp này ta thấy:

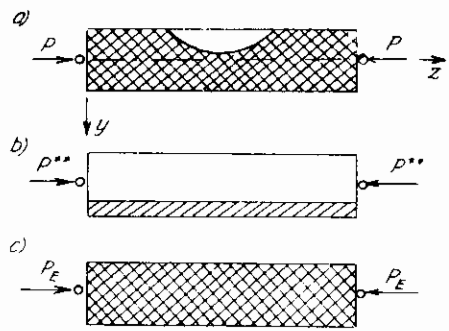
- miền tăng tải (miền để trắng) đặc trưng bằng môđun tiếp tuyến E_t chỉ chiếm một phần nhỏ thể tích thanh;
- miền hạ tải (miền gạch chéo hai lần) đặc trưng bằng môđun đàn hồi E , chiếm phần lớn thể tích thanh.

Ranh giới của hai miền này là lớp trung hòa được xác định theo biểu thức (6.19) nhưng trái dấu:

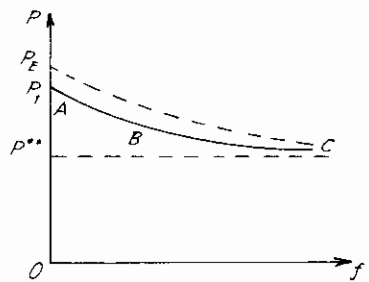
$$E_t S_1 + E S_2 = - \rho \cdot \Delta P. \quad (6.22)$$

Như vậy, vị trí của lớp trung hòa thay đổi dọc theo chiều dài thanh và làm cho bài toán trở nên phức tạp. Bài toán này đã được A. A. Iljusin, V. G. Zubehaninov đề xuất đầu tiên và cũng đã được nhiều tác giả khác nghiên cứu. Dưới đây ta cũng chỉ phân tích định tính vấn đề này.

❖ Vì $E > E_t$ và miền hạ tải đặc trưng bằng môđun đàn hồi E chiếm phần thể tích thanh lớn hơn trường hợp tải trọng không thay đổi đã xét ở mục 6.2 (hình 6.13b) nên độ cứng của thanh trong trường hợp này lớn hơn độ cứng của thanh trong trường hợp tải trọng không thay đổi. Do đó, tải trọng giữ cho thanh ở trạng thái cân bằng sẽ có giá trị lớn hơn P^{**} ; điểm phân nhánh ứng với giá trị P_t trên trục P (hình 6.14) sẽ ở phía trên điểm có giá trị P^{**} .



Hình 6.13



Hình 6.14

Trường hợp giới hạn khi miền hạ tải phát triển đến mức tối đa, chiếm toàn bộ thể tích thanh như trên hình 6.13c, tải trọng P sẽ tiến tới giá trị P_E là lực tối hạn Euler xác định với giả thiết vật liệu đàn hồi thuần túy.

Như vậy, trong trường hợp thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi với giả thiết tải trọng giảm xuống trong quá trình thanh bị uốn, điểm phân nhánh trên trục tải trọng có thể xảy ra trong khoảng giữa hai điểm tương ứng với giá trị P^{**} xác định theo môđun quy ước và giá trị P_E xác định theo lý thuyết của Euler song không bao gồm điểm có giá trị bằng P_E .

- ❖ Sau khi phân nhánh, đường cong cân bằng $P(f)$ sẽ giảm dần khi f tăng và tiệm cận tới đường cân bằng phiếm định nằm ngang tương ứng với giá trị P^{**} (hình 6.14). Thật vậy, khi độ vòng f tăng, miền hạ tải phát triển rộng dần, độ cứng của toàn thanh giảm do đó tải trọng giữ cho thanh ở trạng thái cân bằng sẽ giảm dần.
- ❖ Trường hợp giới hạn khi f tiến tới vô cùng, miền tăng tải phát triển đến mức tối đa như sau: theo trục z , phát triển đến hết chiều dài thanh; theo chiều cao của các tiết diện thanh, lớp trung hòa được xác định theo công thức (6.22) với ρ tiến tới không tức là tương ứng với công thức (6.8) đã xét trong mục 6.2. Như vậy trong trường hợp này thanh làm việc ở trạng thái tương tự như trường hợp tải trọng không thay đổi. Do đó, khi f tiến tới vô cùng thì tải trọng P sẽ tiến tới giá trị P^{**} được xác định theo môđun quy ước.

Toàn bộ đường $OABC$ trên hình 6.14 là đường cân bằng ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi khi giả thiết tải trọng giảm trong quá trình thanh bị uốn. Cũng tương tự như ở mục 6.3, quá trình diễn biến của đồ thị $P(f)$ chỉ có thể thực hiện liên tục theo chiều tăng của độ vòng f . Vì điểm phân nhánh trên trục tải trọng có thể xảy ra trong khoảng giữa hai điểm tương ứng với giá trị P^{**} và P_E nên mỗi điểm nằm trong miền khép giữa đường nằm ngang $P = P^{**}$ và đường cong đứt nét biểu thị một trạng thái cân bằng của thanh.

Cũng cần đặt câu hỏi: liệu trong thực tế có xảy ra trường hợp thanh bị mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi kèm theo hiện tượng giảm tải trọng hay không? Như đã biết, khi thanh bị uốn cong thì khoảng cách giữa hai đầu thanh thu ngắn lại. Do đó, nếu các liên kết nối thanh với công trình toàn thể chẳng hạn như các mâm nên của máy thí nghiệm không chuyển vị kịp theo độ thu ngắn của các đầu thanh thì sẽ phát sinh hiện tượng giảm tải trọng. V. G. Zubchaninov đã sử dụng nhưng thiết bị đơn giản để làm thí nghiệm về trường hợp này và đã thu được lực tới hạn vượt quá giá trị P^{**} tìm được theo môđun quy ước.

6.5. Chọn tải trọng để tính khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi

Nếu quan niệm tải trọng tới hạn là tải trọng tương ứng với điểm phân nhánh của đường cong cân bằng thì trong bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi ta sẽ gặp phải một vấn đề mới là điểm phân nhánh không xảy ra ở một điểm duy nhất như các bài toán ổn định trong giới hạn đàn hồi. Thật vậy, như đã biết, điểm phân nhánh có thể xảy ra với những giá trị P ở trong khoảng P^* đến P^{**} khi tải trọng

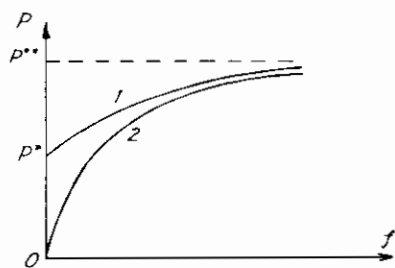
tang trong quá trình thanh bị uốn và trong khoảng P^{**} đến P_L khi tải trọng giảm trong quá trình thanh bị uốn. Như vậy, những thanh thí nghiệm hay thanh làm việc trong điều kiện thực tế sẽ bắt đầu bị uốn cong tại điểm nào trong những khoảng đó? Điều này còn phụ thuộc tính chất của máy thí nghiệm và điều kiện liên kết của thanh với toàn bộ công trình. Đặc điểm đo cho phép giải thích về sự phân tán của các điểm thí nghiệm tìm được khi ứng suất vượt qua giới hạn đàn hồi đã nêu trong mục 6.1 (hình 6.1). Đồng thời cũng cần thấy là điều kiện để cho điểm phân nhánh vượt quá giá trị P^* thường khó thực hiện cho nên đa số các kết quả thí nghiệm thường dẫn tới giá trị P^* . Điều đó cũng cho phép giải thích được vấn đề đã đặt ra ở cuối mục 6.2: *kết quả thí nghiệm thường phù hợp với cách tính theo môđun tiếp tuyến và cả biệt mọi phù hợp với cách tính theo môđun quy ước.*

Trong thực hành, ta sẽ chọn tải trọng nào là tải trọng để tính khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi? Nếu chọn tải trọng lớn hơn P^{**} làm tải trọng để tính thì sẽ tiết kiệm được vật liệu hơn song trong mỗi trường hợp cụ thể ta cần phân tích kỹ điều kiện làm việc của thanh vì khả năng này không thiên về mặt an toàn.

Khi thiết kế thực tế, nên chọn lực P^* xác định theo môđun tiếp tuyến là tải trọng để tính vì những lý do sau:

- * Lực P^* tương ứng với điểm phân nhánh thấp nhất nên cách tính theo môđun tiếp tuyến sẽ thiên về mặt an toàn.
- * Kết quả thực nghiệm thường phù hợp với lực P^* .
- * Khi nghiên cứu ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của thanh chịu lực nên lệch tâm ta tìm được đường cong cân bằng $P(f)$ mang số 2 trên hình 6.15.

Nếu độ lệch tâm tiến tới không thì đường cong 2 sẽ tiến tới đường cong 1 tìm được với giả thiết tải trọng tăng trong quá trình thanh bị uốn cong. Trong thực tế tải trọng thường dễ tác dụng lệch tâm nên trạng thái cân bằng ổn định của hệ thường khó xảy ra ở phía trên đường cong 1.



Hình 6.15

Ngoài ra, độ vòng của hệ bắt đầu phát triển nhanh ngay từ khi $P = P^*$ nên chọn lực P^* làm tải trọng để tính là có ý nghĩa thực tế.

Thực ra, độ chênh lệch giữa các lực P^* và P^{**} cũng không lớn lắm cho nên, theo N. J. Hoff thì việc chọn cách tính theo môđun quy ước hay cách tính theo môđun

tiếp tuyến để nghiên cứu cũng không ảnh hưởng đáng kể đến kết quả tính toán.

Từ mục 6.2 ta đã biết, cách tính theo môđun tiếp tuyến hay cách tính theo môđun quy ước cũng dẫn đến phương trình vi phân dương dần hồi có dạng tương tự như phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn dần hồi và được biểu thị dưới dạng chung như sau:

$$E^*I \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (6.23)$$

với: $E^* = E$ - khi kiểm tra ổn định trong giới hạn dần hồi;

$E^* = E$ - khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn dần hồi theo môđun tiếp tuyến;

$E^* = E_q$ - khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn dần hồi theo môđun quy ước.

Như vậy, về nguyên tắc ta có thể vận dụng các phương pháp đã nghiên cứu ở các chương trước để giải bài toán ổn định ngoài giới hạn dần hồi nếu thay môđun dần hồi E bằng môđun E hay môđun E_q tùy thuộc cách tính theo môđun tiếp tuyến hay môđun quy ước. Tuy nhiên, trong trường hợp này các môđun E hay E_q phụ thuộc ứng suất tối hạn là đại lượng chưa biết, đang cần tìm cho nên chỉ có thể giải bài toán bằng cách thử dùng dần. Ngoài ra cũng cần lưu ý là trong nhiều trường hợp, các môđun E và E_q còn có thể thay đổi dọc theo chiều dài thanh.

Trong các mục dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách tính thực hành để giải bài toán ổn định ngoài giới hạn dần hồi cho một số kết cấu cụ thể.

6.6. Ổn định ngoài giới hạn dần hồi của các thanh thẳng

A. Thanh chịu nén có liên kết cứng ở hai đầu

Trong trường hợp này, lực nén không thay đổi dọc theo chiều dài thanh, do đó ứng suất nén trong thanh và môđun E^* , phụ thuộc ứng suất nén, cũng không thay đổi dọc theo chiều dài thanh.

Nghiệm của phương trình vi phân (6.23) cũng có dạng tương tự như nghiệm của phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn dần hồi. Từ những kết quả tìm được trong mục 2.2, ta thấy các phương trình ổn định cho nghiệm α độc lập với môđun dần hồi E . Do đó, trong trường hợp này ta vẫn có thể áp dụng các kết quả trong mục 2.2 để xác định lực tối hạn nếu thay môđun E bằng môđun E^* . Công thức lực tối hạn và ứng suất tối hạn được viết dưới dạng chung như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E^* I}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E^*}{\lambda^2}. \quad (6.24)$$

trong đó: μ – hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết ở các đầu thanh;

λ – độ mảnh của thanh, xác định theo (6.2).

Đại lượng E^* phụ thuộc ứng suất tới hạn σ_{th} mà bản thân σ_{th} lại là đại lượng cần tìm, do đó để giải bài toán ta cần áp dụng cách thử đúng dần theo thứ tự như sau.

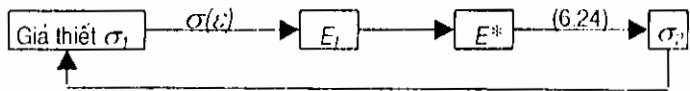
- Giả thiết ứng suất tới hạn có giá trị σ_1 .
- Từ đồ thị hoặc quy luật liên hệ giữa σ và ε , xác định môđun E_I tương ứng với giá trị σ_1 .
- Tìm môđun E^* : $E^* = E_I$ – khi tính theo môđun tiếp tuyến;

$$E^* = E_q \text{ – khi tính theo môđun quy ước, xem (6.13), (6.14).}$$

- Theo (6.24), xác định ứng suất tới hạn σ_2 .

Nói chung, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ nên cần giả thiết lại giá trị σ_1 rồi lại thực hiện các bước tính đã nêu ở trên. Tiếp tục như vậy cho đến khi σ_1 xấp xỉ bằng σ_2 thì đó là kết quả cần tìm. Quá trình thực hiện được tóm tắt qua sơ đồ trên hình 6.16.

Hình 6.16



Nếu cần dựng đồ thị liên hệ giữa σ_{th} và độ mảnh λ thì ta cũng thực hiện các bước tính tương tự như đã nêu ở cuối mục 6.2.

Ví dụ 6.1. Xác định lực tới hạn cho thanh có khớp tựa ở hai đầu, tiết diện vuông có cạnh $a = 4,5$ cm; chiều dài $l = 1,2$ m. Cho biết [7]:

$$E = 2,14 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{khi } \sigma \leq 19 \text{ kN/cm}^2;$$

$$E_I = \frac{\sigma(31 - \sigma)^2}{0,128} \text{ kN/cm}^2 \quad \text{khi } \sigma > 19 \text{ kN/cm}^2.$$

Giả thiết thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi. Theo (6.1), (6.2) và (6.3), ta có:

$$\text{Bán kính quán tính của tiết diện: } r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 1,3 \text{ cm.}$$

$$\text{Độ mảnh của thanh: } \lambda = \frac{\mu l}{r} = \frac{1,120}{1,3} = 92,5.$$

$$\text{Ứng suất tới hạn: } \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2,14 \cdot 10^4}{92,5^2} = 24,7 \text{ kN/cm}^2 > 19 \text{ kN/cm}^2.$$

Như vậy, thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Ta tiếp tục giải bài toán theo hai cách tính:

1. Cách tính theo môđun quy ước:

- Lần thử thứ nhất: Vì σ_{th} cần tìm ở khoảng giữa hai giá trị 19 kN/cm² và 24,7 kN/cm² nên ta chọn σ_I bằng giá trị trung bình cộng là 21,85 kN/cm². Khi đó:

$$\text{Môđun tiếp tuyến: } E_t = \frac{21,85(31 - 21,85)^2}{0,128} = 1,43 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Môđun quy ước xác định theo công thức (6.13):

$$E_q = \frac{4EE_t}{\left(\sqrt{E_t} + \sqrt{E}\right)^2} = \frac{4 \cdot 2,14 \cdot 10^4 \cdot 1,43 \cdot 10^4}{\left(\sqrt{2,14 \cdot 10^4} + \sqrt{1,43 \cdot 10^4}\right)^2} = 1,73 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Theo (6.24) với $E^* = E_q$, ta có:

$$\sigma_2 = \frac{\pi^2 \cdot 1,73 \cdot 10^4}{92,5^2} = 19,9 \text{ kN/cm}^2 \neq 21,85 \text{ kN/cm}^2.$$

- Lần thử thứ hai: Chọn $\sigma_I = (19,90 + 21,85) / 2 \approx 20,9$ kN/cm². Thực hiện các phép tính tương tự như ở lần thử thứ nhất, ta có:

$$E_t = 1,666 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \quad E^* = E_q = 1,88 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \\ \sigma_2 = 21,6 \text{ kN/cm}^2 \neq 20,9 \text{ kN/cm}^2.$$

- Lần thử thứ ba: Chọn $\sigma_I = 21,2$ kN/cm². Thực hiện các phép tính tương tự như trên, ta có:

$$E_t = 1,59 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \quad E^* = E_q = 1,834 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 21,1 \text{ kN/cm}^2.$$

Vì σ_I đã xấp xỉ bằng σ_2 nên có thể kết thúc quá trình thử và lấy giá trị trung bình cộng của σ_I và σ_2 làm ứng suất tới hạn cần tìm:

$$\sigma_{th} = (21,2 + 21,2) / 2 = 21,15 \text{ kN/cm}^2.$$

Lực tới hạn tương ứng: $P_{th}^{**} = \sigma_{th} A = 21,15 \cdot 4,5^2 = 427,5$ kN.

2. Cách tính theo môđun tiếp tuyến:

- Lần thử thứ nhất: Vì $P^* < P^{**}$ nên ta chọn $\sigma_I = 21$ kN/cm². Khi đó ta có:

$$E^* = E_t = \frac{21(31 - 21)^2}{0,128} = 1,64 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Theo (6.23), ta có: $\sigma_2 = \frac{\pi^2 \cdot 1,64 \cdot 10^4}{92,5^2} = 18,9$ kN/cm² $\neq 21$ kN/cm².

- Lần thử thứ hai: Chọn $\sigma_I = 20,5$ kN/cm². Thực hiện các phép tính tương tự như ở lần thử thứ nhất, ta có:

$$E^* = E_t = 1,765 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 20,4 \text{ kN/cm}^2.$$

Vì σ_I đã xấp xỉ bằng σ_2 nên ta kết thúc quá trình thử và lấy giá trị trung bình cộng của σ_I và σ_2 làm ứng suất tới hạn cần tìm:

$$\sigma_{th} = (20,5 + 20,4) / 2 = 20,45 \text{ kN/cm}^2.$$

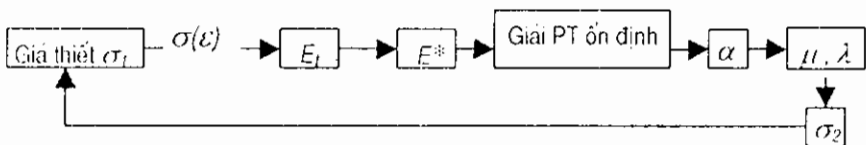
Lực tới hạn tương ứng: $P_{th}^* = \sigma_{th} A = 20,45 \cdot 4,5^2 = 414$ kN.

B. Thanh chịu nén có liên kết đàn hồi ở hai đầu

Trong trường hợp này, môđun E^* cũng không thay đổi dọc theo chiều dài thanh. Nghiệm của phương trình vi phân (6.23) cũng có dạng tương tự như nghiệm của phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn đàn hồi. Tuy nhiên, bài toán cơ bản khó khăn hơn đôi chút. Từ những kết quả tìm được trong mục 2.2, ta thấy các phương trình ổn định phụ thuộc trực tiếp giá trị E , tức E^* cho nên nghiệm α cũng phụ thuộc môđun E^* .

Vì $\alpha = \pi/\mu l$ và $\lambda = \mu l/r = \pi/\alpha r$ nên hệ số thể hiện điều kiện liên kết μ và độ mảnh λ của thanh sẽ không phải là hằng số như trong trường hợp thanh có liên kết cứng mà thay đổi theo giá trị của E^* .

Như vậy, để giải bài toán này ta cũng áp dụng cách thử đúng dần tiến hành theo thứ tự như đã nêu ở điểm A song trước khi bước vào khâu xác định ứng suất σ_2 ta cần thiết lập và giải phương trình ổn định để xác định giá trị α và từ đó suy ra hệ số μ hoặc độ mảnh λ tương ứng với giá trị E^* đang xét tức là tương ứng với giá trị σ_1 đã chọn. Quá trình thực hiện được tóm tắt qua sơ đồ trên hình 6.17.

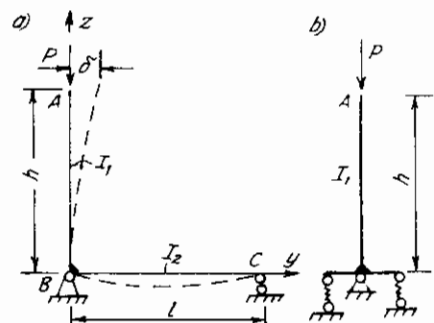


Hình 6.17

Ví dụ 6.2. Áp dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, tìm lực tới hạn cho thanh trên hình 6.18a. Cho biết: $h = l = 0,45$ m; tiết diện thanh là hình vuông có cạnh $a = 4,5$ cm; $I_1 = I_2$; môđun E và E_t được xác định như trong ví dụ 6.1

Thanh gãy khúc trên hình 6.18a được đưa về sơ đồ tính tương đương như trên hình 6.18b, ta được bài toán thanh có một đầu tự do và một đầu ngàm đàn hồi đã xét trong mục 2.2. Trong trường hợp này, khi thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi, phương trình ổn định có dạng:

$$v \operatorname{tg} v = \frac{h}{\omega E^* I_1} \quad \text{với} \quad v = \alpha h.$$



Hình 6.18

ω – góc xoay của liên kết ngàm đàn hồi do mômen đơn vị gây ra. Trong trường hợp này, ω là góc xoay tại B của dầm đơn giản BC do mômen đơn vị đặt

tại B gây ra. Đại lượng này bằng: $\omega = 1/3EI_2$ với E là môđun đàn hồi (thanh ngang vẫn làm việc trong giới hạn đàn hồi).

Phương trình ổn định khi $\omega = 1/3EI_2$; $l = h$; $I_1 = I_2$ sẽ trở thành:

$$\alpha h \cdot \operatorname{tg} \alpha h = 3 \frac{E}{E^*} \quad (a)$$

Gia thiết thanh đứng còn làm việc trong giới hạn đàn hồi. Khi đó, $E^* = E$, phương trình ổn định (a) có dạng:

$$\alpha h \cdot \operatorname{tg} \alpha h = 3 \quad (b)$$

Giải phương trình (b), ta vận dụng phương pháp đồ thị hoặc phương pháp thử đúng dần. Kết quả $\alpha h = 1,193$. Do đó, thanh đứng sẽ có:

Chiều dài tự do: $L = \mu h = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{1,193} h = 2,63 h$.

Độ mảnh: $\lambda = \frac{\mu l}{r} = 2,63 h \sqrt{\frac{A}{I}} = 2,63 \cdot 45 \frac{\sqrt{12}}{4,5} = 2,63 \cdot 34,64 = 91$.

Lực tới hạn: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(2,63h)^2} \quad (c)$

Ứng suất tới hạn: $\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 214 \cdot 10^4}{91^2} = 22,5 \text{ kN/cm}^2 > 19 \text{ kN/cm}^2$.

Như vậy, thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Ta cần tiếp tục giải bài toán theo cách tính theo môđun tiếp tuyến như đã quy định.

- Lần thứ thứ nhất: Chọn $\sigma_1 = 21 \text{ kN/cm}^2$. Khi đó:

$$E^* = E_t = \frac{21(31 - 21)^2}{0,128} = 1,64 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $\alpha h \cdot \operatorname{tg} \alpha h = 3 \frac{214 \cdot 10^4}{1,64 \cdot 10^4} = 3,91$.

Sau khi giải phương trình, ta được: $\alpha h = 1,26$. Do đó thanh đứng sẽ có:

Chiều dài tự do: $L = \mu h = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{1,26} h = 2,49 h$.

Độ mảnh: $\lambda = \frac{\mu h}{r} = 2,49 \cdot 34,64 = 86,25$.

Ứng suất tới hạn: $\sigma_2 = \frac{\pi^2 E^*}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 1,64 \cdot 10^4}{86,25^2} = 21,76 \text{ kN/cm}^2$.

Vì $\sigma_2 \neq \sigma_1$ nên cần tiếp tục phép thử đúng dần.

- Lần thứ thứ hai: Chọn $\sigma_1 = 21,4 \text{ kN/cm}^2$. Khi đó: $E^* = E_t = 1,542 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $\alpha h \cdot \operatorname{tg} \alpha h = 3 \frac{2,14 \cdot 10^4}{1,542 \cdot 10^4} = 4,16$.

Nghiệm: $\alpha h = 1,273$. Cũng thực hiện những phép tính như trên, ta được:

$$L = \mu h = 2,465 h; \quad \lambda = 2,465 \cdot 34,64 = 85,2; \quad \sigma_2 = 21 \text{ kN/cm}^2.$$

Vì $\sigma_2 \neq \sigma_1$ nên cần tiếp tục phép thử đúng dần.

- Lần thử thứ ba: Chọn $\sigma_1 = 21,25 \text{ kN/cm}^2$. Khi đó: $E^* = E_1 = 1,576 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $\alpha h \cdot \operatorname{tg} \alpha h = 4,07$.

Nghiệm: $\alpha h = 1,268$. Do đó:

$$L = \mu h = 2,48 h; \quad \lambda = 2,48 \cdot 34,64 = 85,8; \quad \sigma_2 = 21,25 \text{ kN/cm}^2.$$

Vì $\sigma_2 = \sigma_1$ nên ta kết thúc phép thử đúng dần.

Lực tối hạn tương ứng: $P_{th} = \sigma_{th} A = 21,25 \cdot 4,5^2 = 432 \text{ kN}$.

Cũng có thể viết công thức lực tối hạn dưới dạng quen thuộc như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E^* I}{(\mu h)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2,48h)^2}. \quad (đ)$$

Đối chiếu (c) và (đ) ta thấy chiều dài tự do khi thanh làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi khác và có giá trị nhỏ hơn khi thanh làm việc ở trong giới hạn đàn hồi. Sở dĩ như vậy là do khi làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi thì thanh dứng, đặc trưng bởi môđun tiếp tuyến $E_1 < E$, nên độ cứng sẽ giảm trong khi đó độ cứng của thanh ngang không đổi. Do đó, độ cứng tương đối của liên kết đàn hồi tăng lên và làm giảm chiều dài tự do của thanh dứng. Trường hợp giới hạn, khi σ_{th} tiến tới giới hạn chảy σ_{ch} , E^* tiến tới không; phương trình ổn định (a) sẽ có dạng: $\cos \alpha h = 0$. Đó là phương trình ổn định của thanh có một đầu tự do và một đầu ngàm cứng với chiều dài tự do $L = 2h$.

Tính chất nói trên cũng đúng cho trường hợp thanh có các dạng liên kết đàn hồi khác kể cả trường hợp thanh liên tục đặt trên các gối đàn hồi và thanh làm việc trong môi trường đàn hồi. Như vậy, ta có thể kết luận: *khi thanh làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi, độ cứng tương đối của liên kết đàn hồi hay của nền đàn hồi sẽ tăng lên còn chiều dài tự do của thanh sẽ giảm xuống so với khi thanh làm việc ở trong giới hạn đàn hồi.*

C. Thanh chịu lực nén phân bố dọc theo chiều dài trục thanh

Trong trường hợp này, ứng suất nén thay đổi theo chiều dài thanh nên môđun E^* cũng thay đổi dọc theo chiều dài thanh và là hàm của biến số z : $E^* = E^*(z)$.

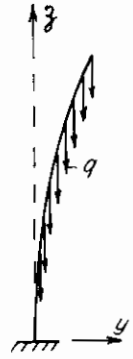
Phương trình vi phân (6.23) sẽ có dạng:

$$E^*(z) I \frac{d^2 y}{dz^2} = -M. \quad (6.25)$$

Như vậy, cách giải cũng tương tự như đã thực hiện trong bài toán thanh có độ cứng thay đổi đã xét ở mục 2.5 song cần lưu ý là độ cứng $E^*(x) I$ còn phụ thuộc luật phân phối ứng suất nén trong thanh.

Chẳng hạn, với trường hợp thanh chịu lực như trên hình 6.19, khi ứng suất trong phần dưới của thanh vượt quá giới hạn đàn hồi thì ứng suất trong phần trên của thanh còn có thể ở trong giới hạn đàn hồi. Lúc này, cần xem phần dưới của thanh có độ cứng thay đổi là $E^*(x) I$ còn phần trên của thanh có độ cứng không đổi là EI .

Tuy vậy, bài toán cũng còn rất phức tạp vì độ cứng $E^*(x) I$ phụ thuộc luật phân phối ứng suất nén tức là phụ thuộc tải trọng tới hạn là đại lượng đang cần tìm.



Hình 6.19

Để xác định gần đúng giá trị tải trọng tới hạn ta có thể sử dụng kết quả đã tìm được khi thanh làm việc ở trong giới hạn đàn hồi và thay thế môđun đàn hồi E bằng môđun E^* được xác định tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong thanh. Chẳng hạn, với thanh chịu lực phân bố đều trên hình 6.19, ta có thể sử dụng công thức (2.27) đã thiết lập trong mục 2.4 và biến đổi như sau:

$$(ql)_{th} = 7,84 \frac{E^* I}{l^2}.$$

Môđun E^* được xác định theo ứng suất tại tiết diện ở ngàm. Vì ứng suất này còn là đại lượng chưa biết nên cần áp dụng cách thử đúng dần như đã thực hiện ở điểm A, theo sơ đồ trên hình 6.16.

Cách tính gần đúng nêu trên phù hợp với giả thiết là ở ngoài giới hạn đàn hồi, độ cứng $E^* I$ của thanh không đổi và bằng độ cứng tại tiết diện có ứng suất lớn nhất. Khi ứng suất tăng thì E^* giảm nên cách tính gần đúng này cho giá trị lực tới hạn nhỏ hơn giá trị chính xác, tức là thiên về mặt an toàn.

D. Thanh chịu nén có tiết diện thay đổi

Trong trường hợp này, ứng suất nén thay đổi theo chiều dài thanh nên môđun E^* cũng thay đổi dọc theo chiều dài thanh và là hàm của biến số z .

Phương trình vi phân (6.23) sẽ có dạng:

$$E^*(z) I(z) \frac{d^2 v}{dz^2} = -M. \quad (6.26)$$

Như vậy, bài toán cũng tương tự như bài toán đã nêu ở điểm C. Cách tính chính xác sẽ rất phức tạp vì những lý do đã nêu ở trên.

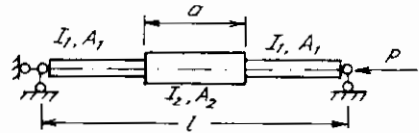
Để xác định gần đúng giá trị tải trọng tối hạn ta cũng sử dụng kết quả đã tìm được khi thanh làm việc ở trong giới hạn đàn hồi và thay thế môđun đàn hồi E bằng môđun E^* được xác định tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong thanh. Cách tính gần đúng này cho giá trị lực tối hạn nhỏ hơn giá trị chính xác, tức là thiên về mặt an toàn.

Khi ứng suất trong thanh không thay đổi như trường hợp thanh có tiết diện không đổi trong từng đoạn (hình 6.20) hoặc thanh có tiết diện thay đổi phù hợp với luật phân phối của ứng suất thì cách tính sẽ đơn giản hơn và có thể áp dụng cách thứ dùng dần như đã thực hiện ở điểm B, theo sơ đồ trên hình 6.17.

Ví dụ 6.3. Áp dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, tìm lực tối hạn cho thanh chịu lực nén có tiết diện thay đổi như trên hình 6.20.

Cho biết: $l = 2 \text{ m}$; $a = 0,8 \text{ m}$; $A_1 = 27 \text{ cm}^2$; $A_2 = 49 \text{ cm}^2$; $I_1 = 123 \text{ cm}^4$; $I_2 = 307 \text{ cm}^4$; các môđun E và E_t được xác định như trong ví dụ 6.1.

Trong mục 2.5 đã giải bài toán này khi thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi. Khi thanh làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi, ứng suất không thay đổi trong từng đoạn nên E^* cũng không đổi trong từng đoạn.



Hình 6.20

Cũng thiết lập và giải các phương trình cho từng đoạn thanh như trong mục 2.5, ta được phương trình ổn định:

$$tg \frac{\alpha_1(l-a)}{2} \times tg \frac{\alpha_2 a}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{với} \quad \alpha_1^2 = \frac{P}{E_1^* I_1}; \quad \alpha_2^2 = \frac{P}{E_2^* I_2}.$$

Với các số liệu cụ thể đã cho, phương trình ổn định sẽ có dạng:

$$tg(0,475 k \alpha l) \times tg(0,2 \alpha l) = 1,583 k \tag{a}$$

$$\text{trong đó:} \quad \alpha^2 = \alpha_2^2 = P/E_2^* I_2; \quad k^2 = E_2^* / E_1^* . \tag{b}$$

Giả thiết thanh còn làm việc trong giới hạn đàn hồi. Khi đó, $E_1^* = E_2^* = E$, nên $k = 1$, phương trình ổn định (a) có dạng:

$$tg(0,475 k \alpha l) \times tg(0,2 \alpha l) = 1,583.$$

Để tìm nghiệm, ta vận dụng phương pháp đồ thị hoặc sử dụng các số liệu trong bảng 2.4. Kết quả $\alpha l = 2,59$. Do đó:

$$P_{th} = 2,59^2 \frac{EI_2}{l^2} = 2,59^2 \frac{2,14 \cdot 10^4 \cdot 307}{4 \cdot 10^4} = 1098 \text{ kN}.$$

Ứng suất tối hạn trong đoạn thanh ngoài và trong đoạn thanh giữa lần lượt bằng $40,7 \text{ kN/cm}^2$ và $22,4 \text{ kN/cm}^2$ đều vượt quá giới hạn đàn hồi. Như vậy, thanh làm

việc ngoài giới hạn đàn hồi, ta cần tiếp tục giải bài toán theo cách tính theo môđun tiếp tuyến như đã quy định.

❖ Lần thử thứ nhất: Giả thiết $P_{th} = 650$ kN. Khi đó ta có:

• trong đoạn thanh ngoài:

$$\sigma_1 = 650 / 27 = 24,1 \text{ kN/cm}^2 > 19 \text{ kN/cm}^2;$$

do đó:
$$E_1^* = E_1 = \frac{24,1(31 - 24,1)^2}{0,128} = 0,896 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

• trong đoạn thanh giữa:

$$\sigma_2 = 650 / 49 = 13,26 \text{ kN/cm}^2 < 19 \text{ kN/cm}^2;$$

do đó:
$$E_2^* = E = 2,14 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Trong lần thử này:
$$k = \sqrt{\frac{E_2^*}{E_1^*}} = \sqrt{\frac{2,14 \cdot 10^4}{0,896 \cdot 10^4}} = 1,546.$$

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $\text{tg}(0,735\alpha l) \times \text{tg}(0,2\alpha l) = 2,448.$

Sau khi giải phương trình, ta được: $\alpha l = 1,908$. Do đó, theo (b) ta có:

$$P_{th} = 1,908^2 \frac{E_2^* I_2}{l^2} = 3,63 \frac{2,14 \cdot 10^4 \cdot 307}{4 \cdot 10^4} = 596 \text{ kN.}$$

Giá trị này còn chênh lệch nhiều so với giá trị xuất phát nên cần tiếp tục phép thử đúng dần.

❖ Lần thử thứ hai: Giả thiết $P_{th} = 640$ kN. Khi đó ta có:

• trong đoạn thanh ngoài: $\sigma_1 = 23,7 \text{ kN/cm}^2 > 19 \text{ kN/cm}^2;$

do đó:
$$E_1^* = E_1 = 0,987 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

• trong đoạn thanh giữa: $\sigma_2 = 13,07 \text{ kN/cm}^2 < 19 \text{ kN/cm}^2;$

do đó:
$$E_2^* = E = 2,14 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Trong lần thử này:
$$k = 1,473.$$

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $\text{tg}(0,7\alpha l) \times \text{tg}(0,2\alpha l) = 2,33.$

Nghiệm: $\alpha l = 1,99$. Do đó, theo (b) ta có: $P_{th} = 650$ kN.

Giá trị này vẫn còn chênh lệch so với giá trị xuất phát, ta tiếp tục phép thử.

❖ Lần thử thứ ba: Giả thiết $P_{th} = 642$ kN. Khi đó ta có:

• trong đoạn thanh ngoài: $\sigma_1 = 23,78 \text{ kN/cm}^2 > 19 \text{ kN/cm}^2;$

do đó:
$$E_1^* = E_1 = 0,967 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

• trong đoạn thanh giữa: $\sigma_2 = 13,10 \text{ kN/cm}^2 < 19 \text{ kN/cm}^2;$

do đó:
$$E_2^* = E = 2,14 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$

Trong lần thử này:
$$k = 1,488.$$

Phương trình ổn định (a) sẽ trở thành: $tg(0,707\alpha l) \times tg(0,2\alpha l) = 2,355$

Nghiệm: $\alpha l = 1,975$. Do đó, theo (b) ta có: $P_{th} = 641 \text{ kN}$.

Kết quả xấp xỉ bằng giá trị xuất phát, ta kết thúc phép thử và chọn: $P = 642 \text{ kN}$.

E. Thanh ghép chịu nén

Khi chưa mất ổn định, dưới tác dụng của lực nén dọc trục, các thanh cơ bản của hệ chịu ứng suất như nhau tại mọi tiết diện còn các thanh bụng (thanh giằng hoặc bản giằng) không chịu ứng suất. Do đó, khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi ta vẫn có thể áp dụng các công thức tìm được khi kiểm tra ổn định trong giới hạn đàn hồi đã xét trong mục 2.7 nếu thay môđun E bằng môđun E^* trong các số hạng có liên quan đến thanh cơ bản và giữ nguyên môđun E trong các số hạng có liên quan đến thanh giằng hoặc bản giằng. Như vậy, khi thanh ghép làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi thì độ cứng tương đối của các thanh bụng tăng lên, do đó sự làm việc của thanh ghép sẽ có chiều hướng tiên gần hơn đến sự làm việc của thanh đặc.

Quá trình kiểm tra ổn định của thanh ghép cũng được thực hiện theo các bước đã nêu ở điểm A, tương ứng với sơ đồ trên hình 6.16.

6.7. Ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của các khung phẳng

Về nguyên tắc, khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của các khung phẳng ta chỉ cần thay môđun đàn hồi E bằng môđun E^* phụ thuộc ứng suất. Tuy vậy, bài toán cũng khá phức tạp và còn ít được nghiên cứu, đặc biệt là đối với những khung bê tông cốt thép. Sự phức tạp của bài toán này chủ yếu là do ứng suất trong các thanh chịu nén của khung có giá trị khác nhau đồng thời có thể có giá trị vượt quá hoặc chưa vượt quá giới hạn đàn hồi. Lúc này, môđun E^* và do đó độ cứng đơn vị tương ứng:

$$i^* = \frac{E^* I}{l} \quad (6.27)$$

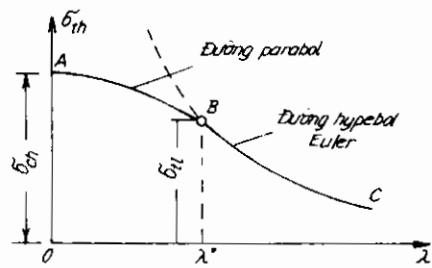
cũng có giá trị khác nhau trong các thanh chịu nén.

Trong giáo trình này chỉ giới thiệu cách kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của khung đơn giản bằng kim loại đã đề cập trong tài liệu [19].

Hướng giải quyết là đưa bài toán khung làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi về bài toán khung làm việc ở trong giới hạn đàn hồi với các độ cứng đơn vị i^* đồng thời áp dụng cách thử đúng đắn. Như vậy, độ cứng đơn vị i^* giữ vai trò quan trọng khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của khung. Vì môđun E^* phụ thuộc ứng suất tới hạn σ_{th} nên i^* cũng phụ thuộc ứng suất tới hạn σ_{th} . Trong thực hành, tiện hơn cả là nên biểu thị i^* theo độ mảnh λ , có thể thực hiện được điều đó nếu biết

quy luật liên hệ giữa σ_{th} và λ .

Trên hình 6.21 là đồ thị liên hệ giữa σ_{th} và λ trong đó: đoạn BC là đường hypebol Euler thích hợp với khi vật liệu làm việc ở trong giới hạn đàn hồi; đoạn AB tương ứng với khi vật liệu làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi có quy luật biến thiên còn chưa biết.



Hình 6.21

Đối với thép xây dựng và hợp kim nhôm ta có thể giả thiết gần đúng đoạn cong AB theo quy luật parabol:

$$\sigma_{th} = \sigma_{ch} - (\sigma_{ch} - \sigma_{tl}) \frac{\lambda^2}{(\lambda^*)^2}; \quad (6.28)$$

trong đó: σ_{ch} và σ_{tl} – giới hạn chảy và giới hạn tỷ lệ của vật liệu;

λ^* – độ mảnh tương ứng với điểm ranh giới giữa hai đoạn AB và BC.

Theo (6.4), ta có: $\lambda^* = \pi \sqrt{I^*/\sigma_{tl}}.$ (6.29)

Mặt khác, từ (6.24) ta có: $E^* = \sigma_{th} \frac{\lambda^2}{\pi^2}.$ (6.30)

Thay (6.28) vào (6.30) đồng thời chú ý đến (6.29), sau khi biến đổi ta được:

$$E^* = E \left[1 - p(1-p) \frac{\sigma_{ch}}{\pi^2 E} \lambda^2 \right] \cdot \frac{\sigma_{ch}}{\pi^2 E} \lambda^2; \quad \text{với } p = \frac{\sigma_{tl}}{\sigma_{ch}}. \quad (6.31)$$

Độ cứng đơn vị i^* của thanh bất kỳ chịu nén ở ngoài giới hạn đàn hồi có thể biểu thị theo độ cứng đơn vị i của thanh tương ứng làm việc ở trong giới hạn đàn hồi như sau:

$$i^* = \tau i; \quad \text{với } \tau = \frac{E^*}{E}. \quad (6.32)$$

Hệ số τ biến thiên trong khoảng từ 0 (khi $E^* = 0$) đến 1 (khi $E^* = E$).

Thay (6.31) vào (6.32) ta tìm được quy luật biến thiên của τ theo độ mảnh λ :

$$\tau = \left[1 - p(1-p) \frac{\sigma_{ch}}{\pi^2 E} \lambda^2 \right] \frac{\sigma_{ch}}{\pi^2 E} \lambda^2. \quad (6.33)$$

Theo công thức (6.33) và căn cứ vào các số liệu về đặc trưng cơ học của vật liệu trong bảng 6.3 ta có thể dựng đồ thị liên hệ giữa hệ số τ và độ mảnh λ cho các loại thép xây dựng và hợp kim nhôm như trên hình 6.22. Đối với thép Ct3, phương trình đường cong $\tau = \tau(\lambda)$ có dạng cụ thể như sau:

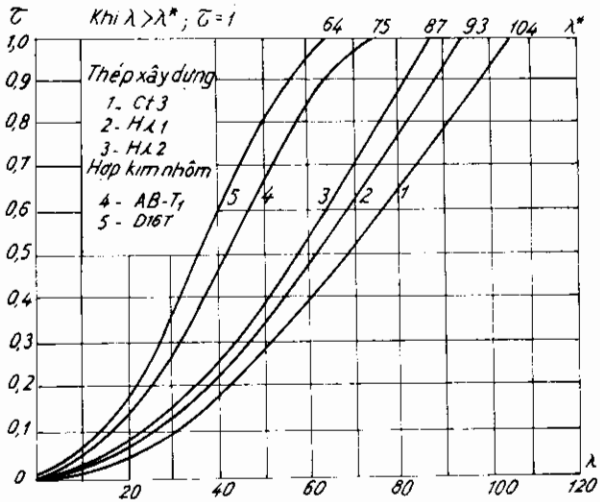
$$\tau = [1 - 0,185 \cdot 10^{-4} \lambda^2] 1,16 \cdot 10^{-4} \lambda^2. \quad (6.34)$$

Bảng 6.3

Vật liệu	Nhãn hiệu	E kN/cm ²	σ_{ch} kN/cm ²	$\sigma_{đh} \approx \sigma_{11}$ kN/cm ²	$p = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{ch}}$	λ^*
Thép xây dựng	C12	2,1.10 ⁴	22	17,6	0,8	108
	C13	2,1.10 ⁴	24	19,2	0,8	104
	IIA1	2,1.10 ⁴	30	24,0	0,8	93
	IIA2	2,1.10 ⁴	34	27,2	0,8	87
Hợp kim nhôm	AB - T1	7,1.10 ³	23	12,6	0,55	75
	D16 - T	7,15.10 ³	31	17,0	0,55	64

Chú thích: Đối với thép IIA1, IIA2 và hợp kim nhôm ta quan niệm giới hạn chảy là ứng suất tương ứng với biến dạng dư tỷ đối bằng 0,2%.

Đồ thị liên hệ giữa τ và λ trên hình 6.22 sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho việc giải bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của các khung phẳng. Từ đồ thị này ta có thể nhanh chóng xác định được giá trị của hệ số τ theo các giá trị λ với độ chính xác tới 0,01; đáp ứng được yêu cầu thực tế.



Hình 6.22

Thứ tự thực hiện:

1. Giả thiết toàn bộ khung làm việc trong giới hạn đàn hồi. Lúc này, các thanh chịu nén đều có $\tau = 1$; $i^* = i$. Áp dụng các phương pháp đã nghiên cứu trong chương 3, xác định các thông số tới hạn v_{th} cho tất cả các thanh chịu nén.

Như đã biết từ chương 3 và theo (6.1), ta có:

$$v_{th} = \alpha_{th} l = l \sqrt{\frac{P_{th}}{EI}} = \frac{l}{r} \sqrt{\frac{\sigma_{th}}{E}} = \frac{l}{r} \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\lambda^2 E}} = \frac{\pi l}{r \lambda};$$

với $r = \sqrt{I/A}$ – bán kính quán tính của tiết diện thanh.

Như vậy, sau khi biết thông số tối hạn v_{th} của các thanh chịu nén ta có thể xác định độ mảnh tương ứng của thanh theo công thức:

$$\lambda = \frac{\pi l}{r v_{th}} \quad (6.35)$$

Nếu các thanh đều có $\lambda > \lambda^*$ thì khung làm việc trong giới hạn đàn hồi, kết thúc bài toán. Nếu tồn tại những thanh có $\lambda < \lambda^*$ thì khung làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi, cần chuyển sang bước thứ hai để tiếp tục giải bài toán.

2. *Tính khung làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi.* Cần thực hiện cách thử đúng dần như sau:

- *Lần thử thứ nhất:* Căn cứ vào độ mảnh λ tìm được ở bước trên, theo đồ thị $\pi(\lambda)$ trên hình 6.22, xác định hệ số τ cho từng thanh chịu nén và từ đó suy ra độ cứng đơn vị i^* tương ứng:

$$i^* = \tau i \quad \text{khi thanh có } \lambda < \lambda^*; \quad i^* = i \quad \text{khi thanh có } \lambda > \lambda^*.$$

Áp dụng các phương pháp đã nghiên cứu trong chương 3, xác định các thông số tối hạn v_{th} cho tất cả các thanh chịu nén tương ứng với các độ cứng đơn vị vừa tìm được. Tiếp đó, theo (6.35) xác định độ mảnh λ của các thanh chịu nén.

- *Lần thử tiếp sau:* Lại căn cứ vào độ mảnh λ tìm được ở bước trên, theo đồ thị $\pi(\lambda)$ xác định hệ số τ cho từng thanh chịu nén. Sau đó cũng thực hiện tương tự như trong lần thử trước.

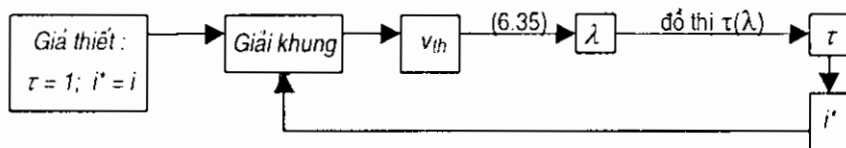
Tiếp tục như vậy cho đến khi các thông số v_{th} hoặc độ mảnh λ tìm được trong hai lần thử kế tiếp xấp xỉ bằng nhau thì kết thúc quá trình thử đúng dần. Giá trị v_{th} và λ đó chính là kết quả cần tìm.

Trên hình 6.23 là sơ đồ tóm tắt quá trình thực hiện các phép thử.

Lực tối hạn tương ứng khi khung làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi được xác định theo công thức:

$$P_{th} = v_{th}^2 \frac{E_i^* I}{l^2} \quad (6.36)$$

Kinh nghiệm chứng tỏ là quá trình tính toán hội tụ khá nhanh, thường chỉ cần thực hiện độ 3-4 lần là đạt.



Hình 6.23

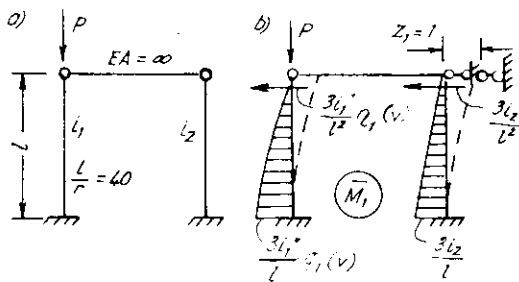
Ví dụ 6.4. Áp dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, tìm lực tới hạn cho khung trên hình 6.24a. Cho biết: $i_1 = 3i_2$; $l = 40r$ với r là bán kính quán tính của tiết diện thanh chịu nén; vật liệu chế tạo khung là thép Ct3 có $\lambda^* = 104$.

Để tính khung ta vận dụng phương pháp chuyển vị. Hệ có một ẩn số. Hệ cơ bản và biểu đồ đơn vị như trên hình 6.24b. Phương trình ổn định:

$$D = r_{11} = \frac{3i_1^3}{l^3} \eta_1(v) + \frac{3i_2^3}{l^3} = 0.$$

Suy ra:

$$\eta_1(v) = -\frac{i_2^3}{i_1^3} = -\frac{\tau_2^3 i_2^3}{\tau_1^3 i_1^3} = -\frac{\tau_2^3}{3\tau_1^3} \quad \text{với} \quad v = l \sqrt{\frac{P}{E^* I_1}}.$$



Hình 6.24

Thanh đứng thứ hai không chịu lực nén nên khi hệ mất ổn định thì thanh này vẫn làm việc trong giới hạn đàn hồi. Do đó $\tau_2 = 1$, phương trình ổn định sẽ có dạng:

$$\eta_1(v) = -\frac{1}{3\tau_1^3} \quad \text{với} \quad v = l \sqrt{\frac{P}{\tau_1^3 E I_1}}. \quad (a)$$

1. Giả thiết toàn khung làm việc trong giới hạn đàn hồi. Khi đó, $\tau_1 = 1$; phương trình ổn định (a) có dạng:

$$\eta_1(v) = -\frac{1}{3} \quad \text{với} \quad v = l \sqrt{\frac{P}{E I_1}}. \quad (b)$$

Sử dụng bảng 2 trong phần phụ lục ta tìm được: $v_{th} = 1,81$. Theo (6.32), xác định độ mảnh của thanh chịu nén:

$$\lambda_1 = \frac{\pi l}{r v_{th}} = \frac{\pi}{1,81} \times 40 = 69,3 < \lambda^* = 104.$$

Như vậy, khung bị mất ổn định ở ngoài giới hạn đàn hồi.

2. Tính khung làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi.

• **Lần thứ nhất:** Từ đồ thị $\tau(\lambda)$ trên hình 6.22, đối với thép Ct3, khi $\lambda = 69,3$ ta tìm được hệ số $\tau_1 = 0,51$. Do đó, phương trình ổn định (a) có dạng:

$$\eta_1(v) = -\frac{1}{3 \cdot 0,51^3} = -0,653 \quad \text{với} \quad v = l \sqrt{\frac{P}{0,51^3 E I_1}}. \quad (c)$$

Sử dụng bảng 2 trong phần phụ lục ta tìm được: $v_{th} = 2,01$. Theo (6.32), xác định độ mảnh của thanh chịu nén, kết quả: $\lambda_1 = 62,5$.

- *Lần thứ hai:* Cũng thực hiện tương tự như trong lần thử trên, ta được:
 khi $\lambda = 62,5$; $\tau_I = 0,41$; $v_{th} = 2,10$; $\lambda_I = 59,8$.

- *Lần thứ ba:* Kết quả:

$$\text{khi } \lambda = 59,8; \quad \tau_I = 0,39; \quad v_{th} = 2,125; \quad \lambda_I = 59,1.$$

Kết quả v_{th} trong hai lần thử đã gần bằng nhau nên ta kết thúc qua trình tính toán và chọn kết quả cuối cùng bằng: $v_{th} = 2,13$; khi đó $\lambda_I = 59$; $\tau_I = 0,38$.

Lực tối hạn tương ứng được xác định theo công thức (6.36):

$$P_{th} = v_{th}^2 \frac{E^* I}{l^2} = 2,13^2 \frac{0,38 E I}{l^2} = 1,724 \frac{E I}{l^2}.$$

6.8. Ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm chữ I chịu uốn

Trong chương 5 đã trình bày cách tính ổn định của dầm chịu uốn phẳng trong giới hạn đàn hồi cho hai trường hợp: dầm có tiết diện chữ nhật hẹp và dầm có tiết diện chữ I.

Đối với dầm có tiết diện chữ nhật hẹp, ứng suất không những có khả năng thay đổi theo chiều dài mà còn thay đổi theo chiều cao của dầm, do đó môđun E^* phụ thuộc ứng suất cũng thay đổi theo chiều dài và theo chiều cao của dầm. Như vậy, bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm có tiết diện chữ nhật hẹp chịu uốn phẳng sẽ rất phức tạp.

Đối với dầm có tiết diện chữ I, ta có thể xem gần đúng: ứng suất trong các bản đế không đổi; khi mất ổn định ngoài mặt phẳng, các bản đế chịu uốn quanh trục y là chủ yếu còn bản bụng tham gia chịu uốn ở mức độ rất nhỏ nên có thể coi như không chịu uốn. Do đó, khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm có tiết diện chữ I, môđun E^* phụ thuộc ứng suất chỉ thay đổi theo chiều dài của dầm nên bài toán sẽ đơn giản hơn.

Trong giáo trình này chỉ đề cập cách kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm có tiết diện chữ I, chịu uốn thuần túy và chịu uốn ngang phẳng.

Tương tự như trường hợp thanh thẳng, khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm chữ I chịu uốn phẳng ta vẫn sử dụng được các phương trình đã thiết lập ở chương 5 và chỉ cần thay môđun đàn hồi E bằng môđun E^* . Song, ngoài môđun E , trong các phương trình đó còn bao hàm cả môđun trượt G . Môđun trượt G cũng thay đổi khi dầm làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi nên trong các phương trình đó ta cũng cần thay môđun G bằng G^* là môđun trượt hoặc xoắn ở ngoài giới hạn đàn hồi.

Giải thiết sự thay đổi giữa hai trạng thái làm việc ở ngoài và ở trong giới hạn đàn

hỏi của môđun trượt và môđun kéo hoặc nén là như nhau, nghĩa là:

$$\frac{E^*}{E} = \frac{G^*}{G} \quad (6.37)$$

Giả thiết này là gần đúng và thiên về mặt an toàn vì theo [22], tỷ số G^*/G thường nhỏ hơn tỷ số E^*/E .

A. Dầm chịu uốn thuần túy

Trong trường hợp này, ứng suất trong các bản đế không thay đổi dọc theo chiều dài dầm, do đó ở ngoài giới hạn đàn hồi môđun E^* cũng không đổi với mọi tiết diện. Phương trình vi phân cũng có dạng tương tự như phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn đàn hồi, trong đó chỉ cần thay E và G bằng E^* và G^* . Do đó, trong trường hợp này ta vẫn có thể áp dụng các kết quả (5.84), (5.85) trong mục 5.5 để xác định mômen uốn tới hạn như sau:

$$M'_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{E^* I_y G^* I_{xo}} \times \sqrt{1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}}; \quad \text{với} \quad a^2 = \frac{h^2 E^* I_y}{2G^* I_{xo}}$$

Các đại lượng trong công thức vẫn có ý nghĩa như đã giải thích trong mục 5.5.

Nếu chấp nhận (6.37) thì hệ số a vẫn có giá trị như trong trường hợp dầm làm ở trong giới hạn đàn hồi:

$$a^2 = \frac{h^2 E I_y}{2G I_{xo}}, \quad (6.38)$$

còn công thức mômen uốn tới hạn sẽ có dạng:

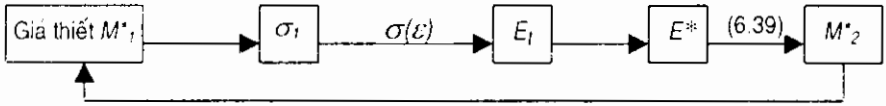
$$M^*_{th} = \frac{E^*}{E} \times \frac{\pi}{l} \sqrt{E I_y G I_{xo}} \times \sqrt{1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}} = \frac{E^*}{E} M_{th}, \quad (6.39)$$

trong đó M_{th} – mômen uốn tới hạn xác định với giả thiết dầm làm việc trong giới hạn đàn hồi.

Đại lượng E^* phụ thuộc ứng suất tới hạn σ_{th} tức là phụ thuộc mômen uốn tới hạn mà bản thân mômen uốn tới hạn lại là đại lượng cần tìm, do đó để giải bài toán ta cần áp dụng cách thử đúng dần theo thứ tự như sau:

- Giả thiết mômen uốn tới hạn có giá trị M^*_l ; từ đó suy ra ứng suất lớn nhất σ_l trong bản đế.
- Từ đồ thị hoặc quy luật liên hệ giữa σ và ε xác định môđun E_l tương ứng với giá trị σ_l .
- Tìm môđun E^* : $E^* = E_l$ – khi tính theo môđun tiếp tuyến;
 $E^* = E_q$ – khi tính theo môđun quy ước, xem (6.14).

- Theo (6.39), xác định mômen uốn tới hạn, giả sử được kết quả là M^{*2} . Nói chung, $M^{*1} \neq M^{*2}$ nên cần giả thiết lại giá trị M^{*1} rồi lại thực hiện các bước tính đã nêu ở trên. Tiếp tục như vậy cho đến khi M^{*2} xấp xỉ bằng M^{*1} thì đó là kết quả cần tìm. Quá trình thực hiện được tóm tắt qua sơ đồ trên hình 6.25.



Hình 6.25

B. Dầm chịu uốn ngang phẳng

Trong trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, ứng suất thay đổi dọc theo chiều dài dầm, do đó ở ngoài giới hạn đàn hồi môđun E^* cũng thay đổi dọc theo chiều dài dầm. Phương trình vi phân cũng có dạng tương tự như phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn đàn hồi nhưng cần thay E bằng $E^*(z)$. Bài toán tương ứng với trường hợp dầm có độ cứng thay đổi nên rất phức tạp.

Để làm đơn giản bài toán ta có thể quan niệm E^* không đổi theo chiều dài dầm và có giá trị được xác định tương ứng với ứng suất lớn nhất trong dầm. Lúc này, phương trình vi phân cũng có dạng tương tự như phương trình vi phân khi tính ổn định trong giới hạn đàn hồi nên vẫn có thể áp dụng các kết quả trong 5.8 để xác định tải trọng tới hạn khi dầm làm việc ở ngoài giới hạn đàn hồi nếu thay E bằng E^* và G bằng G^* .

Để giải bài toán ta cũng cần áp dụng cách thử đúng dần theo thứ tự như đã nêu trong trường hợp dầm chịu uốn thuần túy.

Cách tính gần đúng này thiên về mặt an toàn. Thật vậy, cách đơn giản hóa nói trên phù hợp với trường hợp độ cứng khi uốn và khi xoắn của tất cả mọi tiết diện cùng giảm xuống theo một tỷ số E^*/E . Thực ra, chỉ có độ cứng tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất giảm xuống theo tỷ số E^*/E còn độ cứng tại các tiết diện khác giảm ít hơn khi ứng suất tại các tiết diện đó vượt quá giới hạn đàn hồi hoặc không giảm khi ứng suất tại các tiết diện đó chưa vượt quá giới hạn đàn hồi. Như vậy, độ cứng thực tế của toàn dầm sẽ lớn hơn độ cứng tính toán theo giả thiết gần đúng nên tải trọng tới hạn xác định theo cách tính gần đúng nói trên sẽ nhỏ hơn tải trọng tới hạn thực tế.

Bài tập

VI.1. Cho thanh chịu lực nén P , có chiều dài $l = 1,2$ m; liên kết khớp ở hai đầu; làm bằng thép Ct 3 với các số liệu sau: môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm²; giới hạn đàn hồi $\sigma_{dh} = 20$ kN/cm²; giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 24$ kN/cm²; ở ngoài giới hạn đàn hồi, ứng suất tới hạn được xác định theo công thức thực nghiệm: $\sigma_{th} = 30 - 0,1 \lambda$. Vận dụng công thức thực nghiệm, xác định lực tới hạn tương ứng với các tiết diện thanh như sau:

- hình tròn có đường kính $d = 6$ cm;
- hình vuông có cạnh $a = 4,5$ cm;
- hình chữ nhật có các cạnh 10×5 cm.

VI.2. Cho thanh chịu lực nén P , một đầu ngàm, một đầu tự do, chiều dài $l = 1,2$ m; tiết diện hình vuông có cạnh $a = 4,5$ cm; vật liệu thanh bằng thép Ct 3 có môđun được xác định như sau:

$$E = 2,14 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{khi } \sigma \leq 19 \text{ kN/cm}^2;$$
$$E_t = \frac{\sigma(31 - \sigma)^2}{0,128} \text{ kN/cm}^2 \quad \text{khi } \sigma > 19 \text{ kN/cm}^2.$$

Tìm P_{th} tương ứng với hai cách tính: theo môđun quy ước và theo môđun tiếp tuyến.

VI.3. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định lực tới hạn cho thanh chịu lực nén P , một đầu ngàm, một đầu có liên kết thanh đặt vuông góc với trục thanh. Cho biết: thanh có chiều dài $l = 1,4$ m; tiết diện hình tròn có đường kính $d = 4$ cm; vật liệu bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2.

VI.4. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định lực tới hạn cho hệ thanh đã xét trong ví dụ 2.2 (hình 2.4a thuộc chương 2). Cho biết: các thanh đứng có chiều dài $l = 90$ cm; tiết diện hình vuông có cạnh $a = 5$ cm; vật liệu thanh bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2.

VI.5. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định giá trị tới hạn của tải trọng phân bố đều dọc theo chiều dài thanh công xôn (hình 6.19). Cho biết: thanh có chiều dài $l = 82$ cm; tiết diện hình tròn có đường kính $d = 4$ cm; vật liệu bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2; môđun tiếp tuyến E_t được lấy gần đúng tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong thanh.

VI.6. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định giá trị tới hạn của tải trọng tác dụng trên thanh có tiết diện thay đổi và có liên kết khớp ở hai đầu như trên hình 6.20. Cho biết các số liệu: $l = 20$ m; $a = 10$ m; tiết diện của hai đoạn thanh biên có diện tích

$A_1 = 60,44 \text{ cm}^2$, mômen quán tính $I_1 = 10000 \text{ cm}^4$, tiết diện của đoạn thanh giữa có diện tích $A_2 = 180,44 \text{ cm}^2$, mômen quán tính $I_2 = 49800 \text{ cm}^4$; vật liệu bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2.

VI.7. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định tải trọng tới hạn tác dụng trên thanh công xôn có tiết diện thay đổi như trên hình 2.16b (chương 2). Cho biết các số liệu: chiều dài thanh $l = 200 \text{ cm}$; tiết diện tại ngàm là hình chữ nhật có kích thước $25 \times 10 \text{ cm}$; tiết diện tại đầu tự do là hình vuông có kích thước $10 \times 10 \text{ cm}$; vật liệu bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2; môđun tiếp tuyến E_I được lấy gần đúng tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong thanh.

Chỉ dẫn. Trong giới hạn đàn hồi, khi tỷ số giữa các mômen quán tính tại tiết diện ở đầu tự do I_1 và ở đầu ngàm I_0 bằng 0,4 thì lực tới hạn được xác định theo công thức $P_{th} = 1,9675 E I_0 / l^2$.

VI.8. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định tải trọng tới hạn tác dụng trên thanh rỗng có liên kết khớp ở hai đầu, tiết diện cơ bản được cấu tạo từ 4 thép góc $75 \times 75 \times 5 \text{ mm}$ và thay đổi như trên hình 2.18b (xem chương 2).

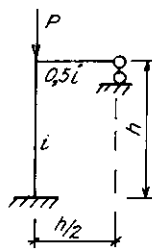
Cho biết các số liệu: chiều dài thanh $l = 15 \text{ m}$; $a = 3 \text{ m}$; tiết diện ở hai đầu thanh có diện tích $A_1 = 35,12 \text{ cm}^2$, mômen quán tính $I_1 = 2300 \text{ cm}^4$, tiết diện của đoạn thanh giữa có diện tích $A_2 = 35,12 \text{ cm}^2$, mômen quán tính $I_2 = 11500 \text{ cm}^4$; vật liệu bằng thép Ct 3 có môđun được xác định theo các công thức như trong bài tập VI.2; môđun tiếp tuyến E_I được lấy gần đúng tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong thanh.

Chỉ dẫn. Trong giới hạn đàn hồi, sử dụng bảng 2.7, chương 2 để tìm lực tới hạn.

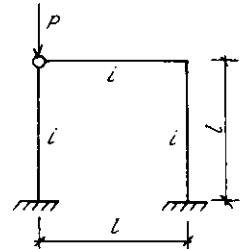
VI.9. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định tải trọng tới hạn cho khung trên hình VI.9.

Cho biết tỷ số giữa chiều dài thanh đứng và bán kính quán tính của tiết diện thanh đứng là $h/r = 40$.

Chỉ dẫn. Trong giới hạn đàn hồi, tham khảo ví dụ 3.5 để giải bài toán với 1 ẩn. Sử dụng công thức (6.34) để tìm τ theo λ .



Hình VI.9



Hình VI.10

VI.10. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định tải trọng tới hạn cho khung trên hình VI.10. Cho biết tỷ số giữa chiều dài thanh đứng và bán kính quán tính của tiết diện thanh đứng là $l/r = 48$.

Chỉ dẫn. Trong giới hạn đàn hồi, tham khảo ví dụ 3.1 để giải bài toán. Sử dụng công thức (6.34) để tìm τ theo λ .

VI.11. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định mômen uốn tới hạn cho dầm chịu uốn thuần túy. Cho biết: chiều dài của dầm $l = 220$ cm; tiết diện chữ IN^o12 với các số liệu như sau: mômen chống uốn lớn nhất $W_x = 58,4$ cm³; mômen quán tính chính trục trung tâm nhỏ nhất $I_y = 27,9$ cm⁴; mômen quán tính đối với trục y của một bản dề $I_y^* = I_y / 2 = 13,95$ cm⁴; mômen quán tính khi xoắn $I_{xo} = 2,1022$ cm⁴. Các môđun E và E_T được xác định như trong bài tập VI.2.

VI.12. Vận dụng cách tính theo môđun tiếp tuyến, xác định giá trị tới hạn của tải trọng phân bố đều trên dầm chịu uốn ngang phẳng. Cho biết: chiều dài của dầm $l = 220$ cm; tiết diện chữ IN^o12 với các số liệu như trong bài tập VI.11. Các môđun E và E_T được xác định như trong bài tập VI.2; môđun tiếp tuyến E_T được lấy gần đúng tương ứng với giá trị ứng suất lớn nhất trong dầm.

7

Khái niệm về ổn định động

Trong các chương trước đã trình bày bài toán ổn định dạng cân bằng của hệ thanh với giả thiết tải trọng tác dụng tĩnh. Trong chương này sẽ đề cập đến bài toán ổn định của hệ chịu tải trọng tác dụng động, trong đó cần xét đến ảnh hưởng của gia tốc chuyển động thông qua các lực quán tính khi lập các phương trình ổn định. Dao động phát sinh trong bài toán ổn định động thuộc thể loại *dao động có thông số*, mang tính chất riêng biệt. Khác với dao động tự do, dao động này xảy ra trong thời kỳ có tác động của nguyên nhân bên ngoài thay đổi theo thời gian. Cũng khác với dao động cưỡng bức đã quen biết vì tác động của nguyên nhân bên ngoài không phải là nguồn kích động trực tiếp.

Dao động có thông số là dao động được duy trì bởi các nguyên nhân bên ngoài, gián tiếp gây ra sự thay đổi các thông số của hệ theo thời gian, được mô tả bằng phương trình vi phân có hệ số thay đổi (thường là thay đổi tuần hoàn) và nằm ở vế trái của phương trình. Tùy theo các đặc trưng của dao động có thông số, hệ có thể ổn định động hoặc không ổn định động.

Ví dụ đơn giản nhất về dao động có thông số trong Cơ học là dao động của con lắc khi có sự thay đổi tuần hoàn về chiều dài treo con lắc. Sự thay đổi này dẫn đến sự thay đổi độ cứng của hệ. Dao động của khối lượng con lắc không phải là dao động tự do vì xảy ra trong thời kỳ có tác động của nguyên nhân bên ngoài là sự thay đổi tuần hoàn về độ cứng. Cũng không phải là dao động cưỡng bức vì tác động của nguyên nhân bên ngoài không phải là lực kích động trực tiếp.

Dao động có thông số có liên quan với bài toán ổn định đàn hồi. Thể loại bài toán này có đặc điểm chung như sau: nguyên nhân gây ra dao động là do sự thay đổi tuần hoàn của *ngoại lực có thông số*. Ngoại lực có thông số là ngoại lực khi tác dụng tĩnh có thể gây ra mất ổn định dạng cân bằng của hệ đàn hồi. Sự thay đổi tuần hoàn của ngoại lực có thông số dẫn đến sự thay đổi tuần hoàn về độ cứng của hệ đối với các lực khác ngoại lực ban đầu.

Để giới thiệu khái niệm về ổn định động của hệ đàn hồi và cách giải bài toán, trong phạm vi chương này chỉ đề cập đến hai bài toán:

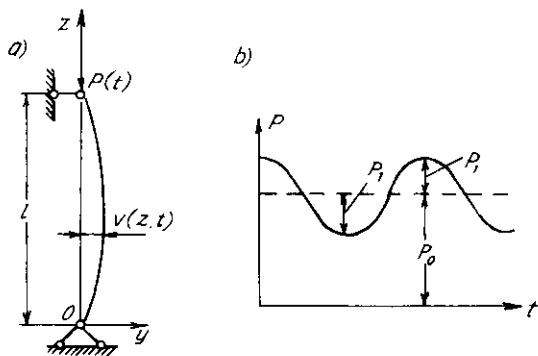
- Ổn định động của thanh lăng trụ, tiết diện không đổi, có liên kết cứng ở hai đầu, chịu lực nén dọc trục thay đổi điều hòa theo thời gian.
- Ổn định động của vành tròn, tiết diện không đổi, chịu lực phân bố thay đổi theo thời gian.

Trên cơ sở đó, bạn đọc có thể vận dụng công cụ toán học tương tự để giải các bài toán khác.

7.1. Ổn định động của thanh thẳng có liên kết khớp ở hai đầu

Bài toán ổn định động của hệ đàn hồi đầu tiên do N. M. Bèliaev đề xuất vào năm 1924 là trường hợp thanh thẳng trụ có liên kết khớp ở hai đầu (hình 7.1a), chịu lực nén dọc trục thay đổi điều hòa theo thời gian với tần số θ : $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$ (hình 7.1b).

Khi biên độ của lực còn nhỏ, thanh chỉ chịu dao động dọc trục. Song, với một quan hệ tỷ lệ xác định giữa tần số dao động riêng ω và tần số dao động cưỡng bức θ thì dạng cân bằng thẳng không còn ổn định mà phát sinh dao động uốn theo phương ngang, biên độ dao động có thể tăng nhanh với những giá trị rất lớn.



Hình 7.1

Tỷ số các tần số khi phát sinh cộng hưởng có thông số, tức là khi thanh bị mất ổn định động, khác với tỷ số các tần số khi phát sinh cộng hưởng do dao động cưỡng bức. Nếu tần số θ đủ nhỏ thì tỷ số này sẽ là $\theta \approx 2\omega$.

Trong trường hợp thanh có độ cứng EI không đổi, cường độ khối lượng phân bố $m = const$, nếu gọi $v(z,t)$ là chuyển vị theo phương y tại tọa độ z ở thời điểm t thì phương trình vi phân của đường đàn hồi khi dao động ngang có dạng:

$$EI \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = -M(z,t); \quad (7.1)$$

với $M(z,t)$ là mômen uốn tại tiết diện có tọa độ z , được xác định theo biểu thức:

$$M(z,t) = M^0(z,t) + P(t) \cdot v(z,t); \quad (7.2)$$

trong đó, $M^0(z,t)$ là mômen uốn tại tiết diện có tọa độ z do riêng các lực ngang gây ra. Trong trường hợp này, lực ngang là lực quán tính tại các khối lượng phân bố trên chiều dài thanh, có giá trị được xác định như sau:

$$p(z,t) = \frac{\partial^2 M^0(z,t)}{\partial z^2} = m \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}, \quad (7.3)$$

Sau khi lấy đạo hàm hai lần phương trình (7.1) theo z và chú ý đến (7.2), (7.3), ta được phương trình vi phân của dao động ngang của thanh chịu lực nén $P(t)$, thiết lập với giả thiết chuyển vị v là nhỏ so với chiều dài thanh:

$$EI \frac{\partial^4 v(z,t)}{\partial z^4} + P(t) \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (7.4)$$

Đặt nghiệm $v(z,t)$, thỏa mãn các điều kiện biên, dưới dạng tổng các nghiệm riêng:

$$v(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l}. \quad (7.5)$$

Thay một nghiệm riêng thứ k của (7.5) vào (7.4), sau khi rút gọn ta được:

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{P(t)}{P_{E,k}} \right] f_k(t) = 0; \quad (7.6)$$

trong đó: ω_k – tần số dao động ngang thứ k của thanh khi không chịu lực $P(t)$:

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad (7.7)$$

$$P_{E,k} \text{ – lực tới hạn Euler thứ } k \text{ của thanh: } P_{E,k} = (k\pi/l)^2 EI. \quad (7.8)$$

Từ (7.6), ta thấy hàm $f_k(t)$ phụ thuộc các thông số ω_k , $P_{E,k}$, $P(t)$.

Khi $P(t) = P_o + P_1 \cos \theta t$, phương trình (7.6) sẽ có dạng:

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \omega_k^2 \left[1 - \frac{P_o}{P_{E,k}} - \frac{P_1 \cos \theta t}{P_{E,k}} \right] f_k(t) = 0; \quad (7.9)$$

$$\text{Hay: } \ddot{f}_k(t) + \Omega_k^2 \left[1 - 2\mu_k \cos \theta t \right] f_k(t) = 0; \quad (7.10)$$

$$\text{với: } \Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_o}{P_{E,k}}}; \quad \mu_k = \frac{P_1}{2(P_{E,k} - P_o)}. \quad (7.11)$$

Phương trình (7.10) là phương trình thuần nhất có hệ số thay đổi tuần hoàn thuộc loại *phương trình Mathieu* (E. Mathieu, 1835-1890).

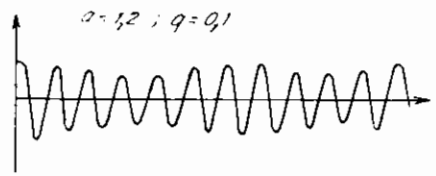
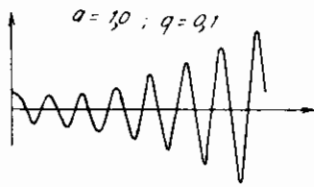
Sau khi đổi biến số $\tau = \theta t / 2$, ta có thể đưa phương trình (7.10) về *dạng chuẩn của phương trình Mathieu*:

$$\ddot{f}_k(\tau) + (a - 2q \cos 2\tau) f_k(\tau) = 0; \quad (7.12)$$

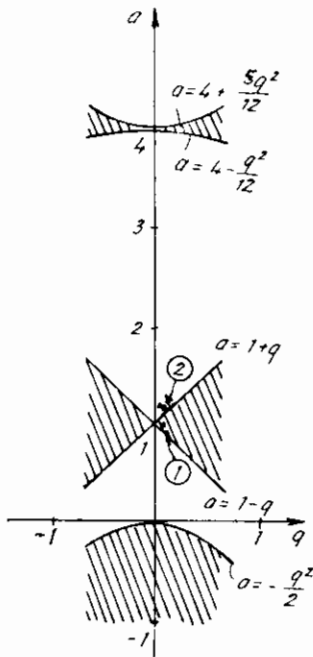
$$\text{với: } a = \frac{4\omega_k^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{P_o}{P_{E,k}} \right) \quad \text{hay} \quad a = \frac{4}{m\theta^2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \left[EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 - P_o \right]; \quad (7.13)$$

$$2q = \frac{4\omega_k^2}{\theta^2} \frac{P_1}{P_{E,k}} \quad \text{hay} \quad 2q = \frac{4}{m\theta^2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 P_1. \quad (7.14)$$

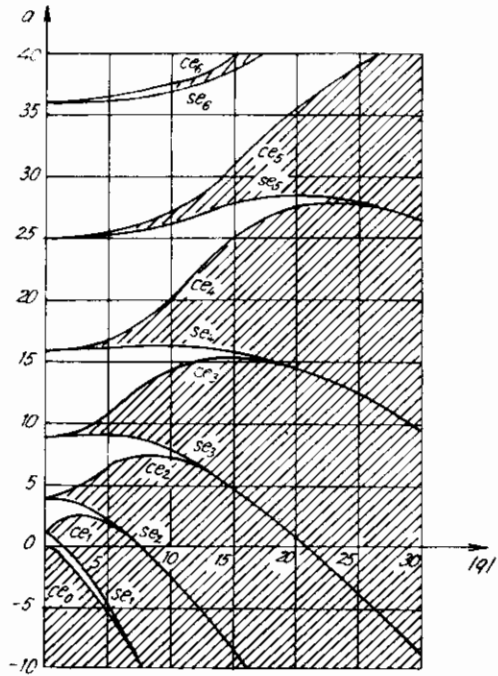
Nghiệm của phương trình Mathieu phụ thuộc giá trị cụ thể của các thông số a và q tức là phụ thuộc các tỷ số ω/θ ; $P_o/P_{E,k}$; $P_1/P_{E,k}$. Ứng với một tổ hợp của thông số a và q , nếu hệ dao động với biên độ gia tăng nhanh (trường hợp trên hình 7.2a, khi $a = 1,0$ và $q = 0,1$) thì hệ *không ổn định*. Ứng với một tổ hợp khác của thông số a và q , nếu hệ dao động với biên độ hữu hạn (trường hợp trên hình 7.2b, khi $a = 1,2$ và $q = 0,1$) thì hệ *ổn định*.



Hình 7.2



Hình 7.3



Hình 7.4

Trong thực hành, điều quan trọng là tìm được ranh giới giữa miền ổn định và miền không ổn định của nghiệm. Vấn đề này đã được nghiên cứu đầy đủ, kết quả cuối cùng được trình bày dưới dạng đồ thị trong mặt phẳng các thông số a và q , gọi là đồ thị Ince - Strutt. Trên hình 7.3 là đồ thị Ince - Strutt tương ứng với các giá trị rất nhỏ của thông số q . Với một hệ đã cho được đặc trưng bởi các thông số a và q tương ứng với một điểm có tọa độ a, q trên đồ thị Ince - Strutt gọi là "điểm đặc trưng". Nếu điểm đặc trưng nằm trong miền gạch chéo của đồ thị thì hệ không ổn định (trường hợp điểm 1 trên hình 7.3, khi $a = 1,0$ và $q = 0,1$, tương ứng với dạng dao động trên hình 7.2a). Nếu điểm đặc trưng nằm trong miền trắng của đồ thị thì hệ ổn định (trường hợp điểm 2 trên hình 7.3, khi $a = 1,2$ và $q = 0,1$, tương ứng với dạng dao động trên hình 7.2b).

Trên hình 7.4 là đồ thị Ince - Strutt tương ứng với các giá trị đầy đủ hơn của

thông số q . Từ đồ thị ta thấy: miền ổn định (miền trắng) xen kẽ với miền không ổn định (gạch chéo). Nghiệm tuần hoàn trên biên giữa các miền thứ i là các hàm Mathieu cấp i . Ký hiệu là $ce_i(\tau)$ và $se_i(\tau)$.

Trong thực hành, khi giải bài toán cụ thể ta cần thiết lập phương trình vi phân tương ứng, đưa phương trình đó về dạng phương trình Mathieu tức là tìm được giá trị của các thông số a và q ; tiếp đó, căn cứ vào vị trí của điểm đặc trưng có tọa độ a, q trên đồ thị Ince - Strutt ta có thể phán đoán về khả năng ổn định hay không ổn định của hệ.

Từ hình 7.3 và 7.4 ta thấy: với các lực tác động P_I nhỏ, tức là khi μ (theo 7.11) và q (theo 7.13) nhỏ, miền không ổn định xảy ra ở lân cận các điểm nằm trên trục a có tọa độ $1; 4; 9; 16...$ Từ (7.13) ta có: $a = 4\Omega^2 / \theta^2 = 1; 4; 9; 16...$

Suy ra:
$$\frac{2\Omega}{\theta} = n \text{ với } n = 1; 2; 3; 4 \dots \quad (7.14)$$

Miền không ổn định tương ứng với $n = 1$ gọi là *miền chính* hoặc *miền thứ nhất*; miền không ổn định tương ứng với $n \neq 1$ gọi là *miền phụ*.

Trong thực hành, khi nghiên cứu bài toán dao động thông số của hệ đàn hồi, điều cần quan tâm là tìm ranh giới *miền không ổn định thứ nhất* tương ứng với các thông số μ nhỏ. Mặt khác, sử dụng đồ thị Ince - Strutt để tìm giá trị tới hạn của tỷ số θ / Ω cũng không được thuận tiện vì tỷ số này cùng tham gia trong các biểu thức của thông số a và q . Dưới đây ta sẽ tìm ranh giới các miền không ổn định và mô tả trên đồ thị liên hệ giữa tỷ số $\theta / 2\Omega$ và thông số μ .

Ranh giới của miền không ổn định được xác định theo điều kiện: chuyển động của thanh là phiếm định, dao động được duy trì nhưng không gia tăng và không giảm yếu.

Theo [13], Rayleigh đã xác định gần đúng ranh giới của miền không ổn định thứ nhất, lân cận giá trị $\theta = 2\Omega$, cách thực hiện như sau:

Xét một trong các phương trình vi phân (7.10), khi đó ta có thể bỏ chỉ số k và đặt $t_I = \Omega t$, ta được:

$$\ddot{f}(t_I) + \left[1 - 2\mu \cos \frac{\theta}{\Omega} t_I \right] f = 0; \quad (7.15)$$

Giả thiết chuyển động của hệ là tuần hoàn, tương ứng với biểu thức gần đúng:

$$f = A \cos \frac{\theta t_I}{2\Omega} + B \sin \frac{\theta t_I}{2\Omega}. \quad (7.16)$$

Thay (7.16) vào (7.15), ta được:

$$A \left[1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 2\mu \cos \frac{\theta t_I}{\Omega} \right] \cos \frac{\theta t_I}{2\Omega} + B \left[1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 2\mu \cos \frac{\theta t_I}{\Omega} \right] \sin \frac{\theta t_I}{2\Omega} = 0.$$

Chú ý đến các hệ thức:

$$\cos \frac{\theta t_1}{\Omega} \cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} + \cos \frac{3\theta t_1}{2\Omega} \right);$$

$$\cos \frac{\theta t_1}{\Omega} \sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} + \sin \frac{3\theta t_1}{2\Omega} \right).$$

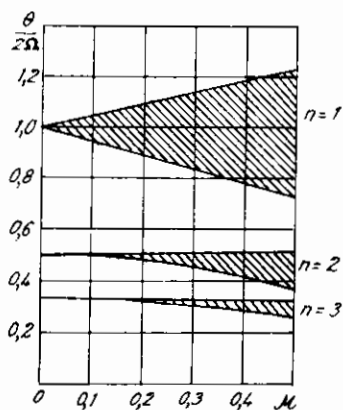
va loại bỏ các số hạng tương ứng với tần số gấp ba lần, ta được:

$$A \left[1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \mu \right] \cos \frac{\theta t_1}{2\Omega} + B \left[1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \mu \right] \sin \frac{\theta t_1}{2\Omega} = 0. \quad (7.17)$$

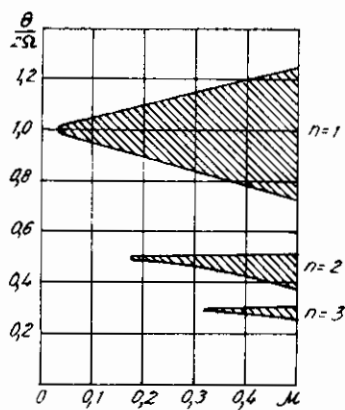
Vì $A \neq 0$ và $B \neq 0$ nên các biểu thức trong móc vuông phải bằng không, do đó:

$$\frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 - \mu}; \quad \frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 + \mu} \quad (7.18)$$

Từ (7.18) ta dựng được đồ thị biểu thị ranh giới dưới và trên của miền không ổn định khi $n = 1$ như trên hình 7.5. Trong [9] cung cấp một số kết quả về ranh giới của miền không ổn định khi $n = 2; 3; \dots$ tìm được theo phương pháp tham số bé, đồ thị tương ứng với $n = 2; 3$ như trên hình 7.5.



Hình 7.5



Hình 7.6

Khi thiết lập các công thức ở trên ta chưa quan tâm đến ảnh hưởng của lực cản trong quá trình dao động. Để đánh giá ảnh hưởng này ta giả thiết lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động qua hệ số cản ε và bổ sung thành phần này vào phương trình vi phân (7.15) như sau:

$$\ddot{f}(t) + 2\varepsilon \dot{f}(t) + \Omega^2 [1 - 2\mu \cos \theta t] f(t) = 0.$$

Nếu đặt $t_1 = \Omega t$, sau khi biến đổi, ta được:

$$\ddot{f}(t_1) + 2\frac{\varepsilon}{\Omega} \dot{f}(t_1) + \left[1 - 2\mu \cos \frac{\theta}{\Omega} t_1 \right] f(t_1) = 0; \quad (7.19)$$

Cũng giả thiết chuyển động của hệ là tuần hoàn, theo biểu thức (7.16), sau khi thay vào (7.19) và loại bỏ các số hạng tương ứng với tần số gấp ba lần, ta được:

$$\left[A \left(1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \mu \right) + B \frac{\theta \varepsilon}{\Omega^2} \right] \cos \frac{\theta t}{2\Omega} + \left[B \left(1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \mu \right) - A \frac{\theta \varepsilon}{\Omega^2} \right] \sin \frac{\theta t}{2\Omega} = 0.$$

Cho các biểu thức trong móc vuông bằng không ta tìm được hai phương trình xác định A và B. Từ điều kiện $A \neq 0$ và $B \neq 0$ ta có phương trình:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} - \mu & \frac{\theta \varepsilon}{\Omega^2} \\ -\frac{\theta \varepsilon}{\Omega^2} & 1 - \frac{\theta^2}{4\Omega^2} + \mu \end{vmatrix} = \left(\frac{\theta^2}{4\Omega^2} \right)^2 - 2 \times \frac{\theta^2}{4\Omega^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon^2}{\Omega^2} \right) + 1 - \mu^2 = 0.$$

Nếu xem tỷ số ε/Ω là nhỏ và bỏ qua các đại lượng bậc cao của ε/Ω thì nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$\frac{\theta}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\mu^2 - (\Delta/\pi)^2}} \quad \text{với} \quad \Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}. \quad (7.20)$$

Δ là độ suy giảm của dao động riêng.

Khi $\varepsilon = 0$, ta tìm được các công thức (7.18).

Khi $\varepsilon \neq 0$, trên cơ sở công thức (7.20) ta dựng được đồ thị biểu thị ranh giới của miền không ổn định thứ nhất. Theo [9], khi $\Delta = 0, 1$; đồ thị ranh giới của miền không ổn định tương ứng với $n = 1, 2, 3$ có dạng như trên hình 7.6. Từ hình 7.6, ta nhận thấy:

- ❖ Khi có lực cản, các miền không ổn định có sự chuyển dịch và thu hẹp, mức độ thu hẹp tăng theo độ lớn của ε . Lực cản có ảnh hưởng nhiều đối với các miền phụ ($n > 1$).
- ❖ Khi $\mu = 0$, sự mất ổn định không xảy ra ở các điểm nằm trên trục $\theta/2\Omega$ như trên hình 7.5. Từ (7.20) ta thấy miền không ổn định thứ nhất chỉ có thể xảy ra khi $\mu \geq \mu^*$ với μ^* là giá trị tới hạn của hệ số kích động: $\mu^* = \Delta/\pi$.

Theo Bolôtin, giá trị tới hạn của hệ số kích động tương ứng với miền không ổn định thứ n được xác định gần đúng bằng:

$$\mu_n^* \approx (\Delta/\pi)^n \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ta thấy, khi n càng tăng thì các miền phụ càng thu hẹp. Do đó, trong thực tế ta chỉ cần quan tâm đến miền không ổn định thứ nhất.

Ví dụ 7.1. Xét thanh thẳng có liên kết khớp ở hai đầu, chịu lực nền dọc trục thay đổi điều hòa theo quy luật $P(t) = P_0 + P_1 \sin \theta t$. Yêu cầu:

- 1) Lập phương trình vi phân của chuyển động.

2) Khảo sát khả năng ổn định của thanh tương ứng với hai dạng dao động ngang đầu tiên ($k = 1$ và 2).

Cho biết: $P_o = 1000$ N; $P_l = 200$ N; tần số $\theta = 300$ rad/s; thanh có chiều dài $l = 100$ cm; khối lượng $m = 8 \cdot 10^{-5}$ Ns²/cm; độ cứng $EI = 2 \cdot 10^6$ N.cm².

1) Lập phương trình vi phân của chuyển động. Phương trình vi phân (7.6) và các biểu thức (7.7), (7.8) vẫn nghiệm đúng cho trường hợp này.

Thay $P(t) = P_o + P_l \sin \theta t$ vào (7.6) ta sẽ được:

$$\ddot{f}_k(t) + \Omega_k^2 [1 - 2\mu_k \sin \theta t] f_k(t) = 0; \quad (a)$$

trong đó: Ω_k, μ_k vẫn được xác định theo (7.11).

Sau khi đổi biến số $\theta t = 2\tau - (\pi/2)$, phương trình (a) được đưa về dạng chuẩn của phương trình Mathieu:

$$\ddot{f}_k(\tau) + (a - 2q \cos 2\tau) f_k(\tau) = 0; \quad (b)$$

$$\text{với: } a = \frac{4}{m\theta^2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \left[EI \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 - P_o \right]; \quad 2q = -\frac{4}{m\theta^2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 P_l. \quad (c)$$

2) Khảo sát khả năng ổn định. Với các số liệu đã cho, theo (c) ta có:

$$2q = -\frac{4\pi^2}{m\theta^2 l^2} k^2 P_l = -\frac{4\pi^2}{8 \cdot 10^{-5} \cdot 300^2 \cdot 100^2} k^2 P_l = -5,483 \cdot 10^{-4} k^2 \cdot 200;$$

$$a = \frac{4\pi^2}{m\theta^2 l^2} k^2 \left[EI \frac{\pi^2}{l^2} k^2 - P_o \right] = 5,483 \cdot 10^{-4} k^2 \left[2 \cdot 10^6 \frac{\pi^2}{100^2} k^2 - P_o \right] = 5,483 \cdot 10^{-4} k^2 [2 \cdot 10^2 \pi^2 k^2 - 1000].$$

- Khi $k = 1$: $2q = -5,483 \cdot 10^{-4} \cdot 200 = -0,1097$; suy ra $|q| = 0,055$;
 $a = 5,483 \cdot 10^{-4} [2 \cdot 10^2 \pi^2 - 1000] = 0,534$.

Điểm đặc trưng thuộc miền ổn định của đồ thị trên hình 7.3. Kết luận: ổn định.

- Khi $k = 2$: $2q = -5,483 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 200 = -0,439$; suy ra $|q| = 0,22$;
 $a = 5,483 \cdot 10^{-4} \cdot 4 [2 \cdot 10^2 \pi^2 \cdot 4 - 1000] = 15,12$.

Điểm đặc trưng thuộc miền ổn định của đồ thị trên hình 7.4. Kết luận: ổn định.

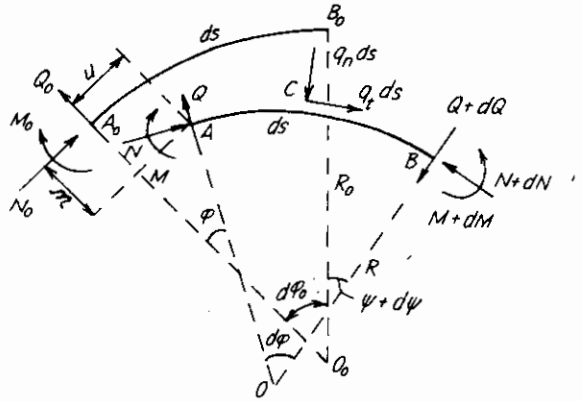
7.2. Ổn định động của vành tròn

Để giải bài toán ổn định động của vành tròn, tiết diện không đổi, chịu lực thay đổi điều hòa theo thời gian ta cần thiết lập phương trình vi phân của chuyển động tương ứng, đưa về phương trình Mathieu có dạng (7.12), tức là tìm các biểu thức của thông số a và q ; tiếp đó, căn cứ vào vị trí của điểm đặc trưng có tọa độ a, q trên đồ thị Ince - Strutt để phán đoán về khả năng ổn định của hệ.

A. Các phương trình cơ bản của thanh cong tròn

Để chuẩn bị thiết lập phương trình vi phân của chuyển động, ta cần lập các phương trình cơ bản của thanh cong tròn. Khảo sát phần tử thanh tròn A_0B_0 có chiều dài ds .

Ở trạng thái được xem là trạng thái xuất phát ban đầu, các đại lượng tương ứng được ký hiệu kèm theo chỉ số 0 (hình 7.7). Lập các điều kiện cân bằng và điều kiện hình học cho phần tử AB ở trạng thái khảo sát tương ứng với các đại lượng không mang chỉ số 0 như trên hình 7.7.



Hình 7.7

❖ **Điều kiện cân bằng:** Từ các phương trình cân bằng: hình chiếu lên phương tiếp tuyến, phương pháp tuyến tại C và mômen đối với điểm O , ta được:

$$\frac{dN}{ds} + \frac{Q}{R} - q_t = 0; \quad \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} - q_n = 0; \quad \frac{dM}{ds} + R \frac{dN}{ds} - Rq_t = 0. \quad (7.21)$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ ba của (7.21) ta suy ra liên hệ:

$$Q = \frac{dM}{ds}. \quad (7.22)$$

Từ phương trình thứ hai của (7.21) và phương trình (7.22) ta tìm được:

$$\frac{d^3 M}{ds^3} + \frac{1}{R^2} \frac{dM}{ds} + \frac{dq_n}{ds} - \frac{q_t}{R} = 0. \quad (7.23)$$

❖ **Điều kiện hình học:** Nếu gọi w là chuyển vị hướng tâm (chiều dương hướng về tâm cong) và u là chuyển vị theo phương tiếp tuyến (chiều dương hướng về bên phải) của điểm A từ trạng thái xuất phát đến trạng thái khảo sát thì sau khi vận dụng các kết quả (4.6), (4.7), (4.1) đã lập được trong mục 4.1 cho trường hợp này ta có các liên hệ:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = -\frac{M}{EI}; \quad \frac{du}{ds} - \frac{w}{R} = 0; \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = -\frac{M}{EI}. \quad (7.24)$$

❖ **Các phương trình cơ bản ở trạng thái chuyển động:** được xây dựng trên cơ sở các phương trình (7.21) ÷ (7.24) với các chú ý sau:

- Các đại lượng là hàm của hai biến số s và t nên cần thay các đạo hàm bằng

đạo hàm riêng tương ứng.

- Trong các phương trình cân bằng cân bổ sung các lực quán tính tương ứng:

$$q_n^* = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad q_l^* = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.25)$$

- Dao động của hệ được xem là nhỏ quanh vị trí cân bằng xuất phát từ trạng thái tĩnh tương ứng với các đại lượng mang chỉ số o . Các đại lượng ở trạng thái chuyển động sẽ được biểu thị theo các đại lượng ở trạng thái tĩnh cộng với số gia tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} M &= M_o + \Delta M; & Q &= Q_o + \Delta Q; & N &= N_o + \Delta N; \\ q_n &= q_{no} + \Delta q_n; & q_l &= q_{lo} + \Delta q_l; & \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_o} + \Delta(1/R). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Từ hình 7.7, ta có: $\frac{1}{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ nên $\Delta(1/R) = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial s}$. (7.27)

Thay thế (7.26) vào phương trình đầu của (7.21) và bổ sung lực quán tính theo (7.25), sau khi khai triển ta được:

$$\frac{\partial N_o}{\partial s} + \frac{Q_o}{R_o} - q_{lo} + \frac{\partial \Delta N}{\partial s} + \frac{\Delta Q}{R_o} + Q_o \Delta(1/R) + \Delta Q \Delta(1/R) - \Delta q_l + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc cao (số hạng thứ 7) đồng thời lưu ý là các phương trình cân bằng vẫn thỏa mãn với các đại lượng ở trạng thái cân bằng tĩnh nên tổng của ba số hạng đầu bằng không; kết hợp với (7.27), ta được:

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial s} + \frac{\Delta Q}{R_o} + Q_o \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial s} - \Delta q_l + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (7.28)$$

Cũng thực hiện tương tự như vậy với phương trình thứ hai của (7.21), ta được:

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial s} - \frac{\Delta N}{R_o} - N_o \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial s} + \Delta q_n - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.29)$$

Thực hiện như trên với phương trình (7.22), kết hợp với phương trình thứ ba của (7.24), ta được:

$$\Delta Q = \frac{\partial \Delta M}{\partial s} = -EI \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_o} \right) = -EI \frac{\partial}{\partial s} \Delta(1/R) = -EI \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial s^2}. \quad (7.30)$$

Kết hợp với phương trình đầu của (7.24), ta được:

$$\Delta Q = -EI \left[\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} \right]. \quad (7.31)$$

Lấy đạo hàm phương trình thứ hai của (7.24) theo thời gian, ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7.32)$$

Vận dụng các phương trình (7.28) ÷ (7.32) ta có thể giải các bài toán thanh tròn chịu lực bất kỳ.

B. Giải bài toán ổn định của vành tròn, tiết diện không đối, chịu lực phân bố đều hướng tâm với cường độ $q(t) = q_0 + q_1 \sin \theta t$

Trong trường hợp cụ thể này (hình 7.8), ta có các điều kiện sau:

$$q_{n0} = q = \text{const}; \quad \Delta q_n = 0;$$

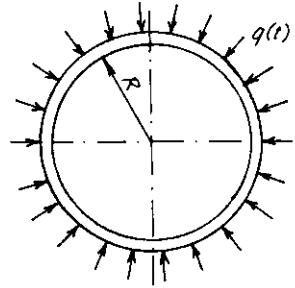
$$q_{t0} = 0; \quad \Delta q_t = 0.$$

Xem $R \approx R_0$ và ký hiệu chung là R ,

Theo kết quả đã biết trong Cơ học kết cấu, nội lực ở trạng thái tĩnh:

$$N_0 = qR; \quad Q_0 = 0.$$

Thay các điều kiện cụ thể trên vào các phương trình (7.28), (7.29) và thực hiện những biến đổi như sau:



Hình 7.8

• Đạo hàm phương trình (7.29) theo s ta được:

$$m \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial t^2} = \frac{\partial^2 \Delta Q}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta N}{\partial s} - qR \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial s^2}. \quad (7.33)$$

• Từ (7.28), ta có:
$$\frac{\partial \Delta N}{\partial s} = -\frac{\Delta Q}{R} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.34)$$

Thay (7.34) vào (7.33):
$$m \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial t^2} = \frac{\partial^2 \Delta Q}{\partial s^2} + \frac{m}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{R^2} \Delta Q - qR \frac{\partial^2 \Delta \varphi}{\partial s^2},$$

sau khi lấy đạo hàm theo s , ta được:

$$m \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} = \frac{\partial^3 \Delta Q}{\partial s^3} + \frac{m}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Delta Q}{\partial s} - qR \frac{\partial^3 \Delta \varphi}{\partial s^3}. \quad (7.35)$$

Lấy đạo hàm theo t của (7.32) và đạo hàm theo s của (7.30), ta có:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial s} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^3 \Delta \varphi}{\partial s^3} = -\frac{1}{EI} \frac{\partial \Delta Q}{\partial s}. \quad (7.36)$$

Sau khi thay (7.36) vào (7.35) và biến đổi, ta được:

$$m \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{m}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \Delta Q}{\partial s^3} + \left[\frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EI} \right] \frac{\partial \Delta Q}{\partial s}.$$

Thay ΔQ xác định theo (7.31) vào kết quả trên, ta được:

$$m \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{m}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \left[\frac{\partial^6 w}{\partial s^6} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right] - \left[\frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EI} \right] \left[\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right].$$

Hay:

$$EI \left[\frac{\partial^6 w}{\partial s^6} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] + qR \left[\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] + m \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial t^2} - \frac{m}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7.37)$$

Đó là phương trình vi phân của chuyển vị w trong vành tròn, chịu lực phân bố đều hướng tâm.

Khi lực phân bố đều với cường độ $q(t) = q_0 + q_1 \sin \theta t$, ta đặt nghiệm $w(z, t)$, thỏa mãn các điều kiện biên, dưới dạng:

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{ks}{R}. \quad (7.38)$$

Thay một nghiệm riêng thứ k của (7.38) vào (7.37) và thay $q = q_0 + q_1 \sin \theta t$, sau khi rút gọn ta được:

$$\frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} + \frac{k^2(k^2 - 1)}{mR(n^2 + 1)} \left[\frac{EI(k^2 - 1)}{R^3} - q_0 - q_1 \sin \theta t \right] f_k(t) = 0; \quad (7.39)$$

Sau khi đổi biến số $\theta t = 2\tau - (\pi/2)$ và thực hiện các phép biến đổi, ta có thể đưa phương trình (7.39) về dạng chuẩn của phương trình Mathieu:

$$\ddot{f}_k(\tau) + (a - 2q \cos 2\tau) f_k(\tau) = 0; \quad (7.40)$$

với:

$$a = \frac{4k^2(k^2 - 1)}{\theta^2 mR(k^2 + 1)} \left[\frac{EI(k^2 - 1)}{R^3} - q_0 \right]; \quad 2q = \frac{4k^2(k^2 - 1)}{\theta^2 mR(k^2 + 1)} q_1. \quad (7.41)$$

Trong bài toán cụ thể, sau khi tìm được các thông số a và q tương ứng với dạng dao động thứ k ta sẽ tìm được vị trí của điểm đặc trưng có tọa độ a, q trên đồ thị Ince - Strutt và từ đó phán đoán về khả năng ổn định của hệ.

Ví dụ 7.2. Xét vành tròn chịu áp lực hướng tâm, phân bố đều với cường độ thay đổi điều hòa theo quy luật $q(t) = q_0 + q_1 \sin \theta t$. Khảo sát khả năng ổn định của vành tương ứng với ba dạng dao động đầu tiên ($k = 1; 2$ và 3).

Cho biết: $q_0 = 100 \text{ N/cm}^2$; $q_1 = 20 \text{ N/cm}^2$; tần số $\theta = 1240 \text{ rad/s}$; trục vành có bán kính $R = 15 \text{ cm}$; bề dày $\delta = 0,5 \text{ cm}$; chiều cao $h = 1 \text{ cm}$; khối lượng phân bố trên đơn vị chiều dài $m = 4 \cdot 10^{-5} \text{ N s}^2/\text{cm}$; môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

Chuẩn bị các số liệu trong các công thức (7.41):

$$\frac{EI}{R^3} = \frac{2 \cdot 10^7}{15^3} \times \frac{1,0,5^3}{12} = 61,728 \text{ N/cm};$$

$$\frac{4}{\theta^2 mR} = \frac{4}{1240^2 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 15} = 43,36 \cdot 10^{-4} \text{ 1/N}.$$

$$\text{Theo (7.41): } 2q = 43,36 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 1 \cdot \frac{k^2(k^2 - 1)}{(k^2 + 1)} = 8,672 \cdot 10^{-2} \frac{k^2(k^2 - 1)}{(k^2 + 1)};$$

$$a = 43,36 \cdot 10^{-4} \frac{k^2(k^2 - 1)}{(k^2 + 1)} [61,728(k^2 - 1) - 100 \cdot 1].$$

Lần lượt thay $k = 1; 2; 3$ ta sẽ tìm được các tọa độ $q; a$ tương ứng của các điểm đặc trưng; tiếp đó phán đoán khả năng ổn định của hệ theo đồ thị Ince - Strutt. Kết quả ghi trên bảng 7.1.

Bảng 7.1

k	a	q	Kết luận
1	0	0	dao động phiếm định
2	0,886	0,104	dao động ổn định
3	12,294	0,312	dao động ổn định

Bài tập

VII.1. Khảo sát khả năng ổn định của thanh thẳng có liên kết khớp ở hai đầu, tương ứng với hai dạng dao động ngang đầu tiên ($k = 1$ và 2).

Cho biết: thanh chịu lực dọc trục thay đổi điều hòa theo quy luật $P(t) = -P_0 + P_1 \sin \theta t$ với $P_0 = 1000$ N; $P_1 = 200$ N; tần số $\theta = 300$ rad/s; thanh có chiều dài $l = 100$ cm; khối lượng phân bố đều $m = 8 \cdot 10^{-5}$ Ns²/cm; độ cứng $EI = 2 \cdot 10^6$ N.cm².

VII.2. Cho thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, chiều dài l ; độ cứng EI ; chịu lực nén dọc trục thay đổi điều hòa theo quy luật $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$. Yêu cầu:

1) Lập phương trình vi phân của chuyển động dưới dạng chuẩn của phương trình Mathieu.

2) Cho biết: $P_1 = 200$ N; tần số $\theta = 300$ rad/s; thanh có chiều dài $l = 100$ cm; khối lượng phân bố đều $m = 8 \cdot 10^{-5}$ Ns²/cm; độ cứng $EI = 2 \cdot 10^6$ N.cm². Khảo sát khả năng ổn định của dạng dao động ngang đầu tiên ($k = 1$) tương ứng với hai trường hợp sau:

- Khi $P_0 = 400$ N;
- Khi $P_0 = 500$ N;

Chỉ dẫn. ❖ Để sử dụng được phương trình (7.4), nên chọn gốc tọa độ z tại đầu tự do.

❖ Thay cho (7.5), đặt nghiệm dưới dạng:

$$v(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi z}{2l} .$$

VII.3. Cho vành đai tròn, mềm (không có khả năng chịu uốn, $EI \approx 0$), chịu áp lực phân bố đều hướng từ tâm ra ngoài với cường độ thay đổi theo thời gian $q(t) = q_0 + q_1 \sin \theta t$.

- 1) Lập phương trình vi phân của chuyển động dưới dạng chuẩn của phương trình Mathieu.
- 2) Cho biết: tần số $\theta = 2000$ rad/s; trục vành có bán kính $R = 15$ cm; trên đơn vị chiều dài s của vành: khối lượng phân bố đều $m = 2.10^{-6}$ Ns²/cm; áp lực $q_0 = 50$ N/cm; áp lực $q_1 = 20$ N/cm. Khảo sát khả năng ổn định của 5 dạng dao động đầu tiên ($k = 1; 2; 3; 4; 5$).

Đáp số các bài tập

Chương 1

- I.1. a) và b) $P_{th} = \frac{k_2 l_1^2 + k_1 (l_1 + l_2)^2}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)}$.
- I.2. a) và b) $P_{th} = 4ka / 3$.
- I.3. $P_{th} = 6a^2 EI / l^3$.
- I.4. a.1) $P_{th} = \pi^2 EI / l^2$; a.2) $P_{th} = 12 EI / l^2$.
b) $P_{th} = 11,42 EI / l^2$.
- I.5. a) và b) $P_{th} = 0,904 EI / l^2$; c) $P_{th} = 0,802 EI / l^2$; d) $P_{th} = 1,085 EI / l^2$;
e) $P_{th} = 1,086 EI / l^2$; f) $P_{th} = 1,085 EI / l^2$.
- I.6. a), b) và c) $P_{th} = 8EI_0 / l^2$.

Chương 2

- II.1. Đưa về sơ đồ thanh chịu nén, một đầu là khớp cố định, một đầu có liên kết đàn hồi theo phương vuông góc với trục thanh. Phương trình ổn định:

$$-\frac{\sin v}{EI} + \frac{\alpha^3}{k} \frac{\sin v}{v} = 0 \quad \left(k = \frac{3EI_1}{l_1^3} - \text{hệ số đàn hồi của liên kết; } v = l \sqrt{\frac{P}{EI}} \right).$$

- II.2. $P_{th} = 1,421 (EI_1 / l_1^2)$.
- II.3. $P_{th} = 0,162 (\pi^2 EI / l^2)$.
- II.4. $P_{th} = 4,12 (EI / l^2)$.
- II.5. Phương trình ổn định: $\alpha l (\operatorname{tg} \alpha l + \operatorname{tg} \alpha a) = \operatorname{tg} \alpha l \cdot \operatorname{tg} \alpha a$; $P_{th} = 3,247 (EI / l^2)$.
- II.6. Phương trình ổn định: $-\sin \alpha (l+a) + \alpha l \cos \alpha (l+a) + (2 - \cos \alpha l) \sin \alpha a = 0$;
 $P_{th} = \pi^2 EI / l^2$.
- II.7. Phương trình ổn định: $\sin \alpha a [\alpha l \cdot \cos \alpha (l-a) - \sin \alpha (l-a)] = 0$;
 $P_{th} = 5,429 (EI / l^2)$.
- II.8. $P_{th} = 19,74 (EI / l^2)$.
- II.9. a) $(ql/2)_{th} = 4,23 (EI / l^2)$; [kết quả chính xác: $(ql/2)_{th} = 4,58 (EI / l^2)$].
b) $(ql/2)_{th} = 3\pi^2 EI / l^2$; [kết quả chính xác: $(ql/2)_{th} = 3,18 \pi^2 EI / l^2$].
- II.10. Phương trình ổn định:
 $\operatorname{tg} \alpha_1 a \times \operatorname{tg} \alpha_2 [(l/2) - a] = (\alpha_1 / \alpha_2)$; với $\alpha_1^2 = P / EI_1$; $\alpha_2^2 = P / EI_2$.
a) $P_{th} = 8,51 (EI / l^2)$. b) $P_{th} = 8,208 (EI / l^2)$.

II.11. Phương trình ổn định: $\cos\alpha_1 a \times \cos\alpha_2 (l-a) \times \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 (l-a)}{\alpha_2} + \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 a}{\alpha_1} \right] = 0$;

với $\alpha_1^2 = (P/EI_1)$; $\alpha_2^2 = (P/EI_2)$. $P_{th} = 9,87 (EI/l^2)$.

II.12. $P_{th} = 0,467 (EI/h^2)$.

II.13. $P_{th} = 8 (EI_0/l^2)$.

II.14. a) $P_{th} = 7,64 (EI_2/l^2)$. b) $P_{th} = 7,70 (EI_2/l^2)$.

II.15. a) $P_{th} = 1068$ kN khi không kể ảnh hưởng lực cắt.

b) $P_{th} = 1001$ kN khi có kể ảnh hưởng lực cắt.

II.16. a) $P_{th} = 1648,54$ kN khi không kể ảnh hưởng lực cắt.

b) $P_{th} = 1603,61$ kN khi có kể ảnh hưởng lực cắt.

II.17. a) $P_{th} = 810$ kN khi không kể ảnh hưởng lực cắt.

b) $P_{th} = 600$ kN khi có kể ảnh hưởng lực cắt.

Chương 3

III.1. Phương trình ổn định: $O_1(v) + O_2(v) + O_3(v) = 1$

hay $-\frac{l}{3I_1} + \frac{li}{I_2} \frac{\operatorname{tg} v}{v} = 0$; với $v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

a) $P_{th} = 6,05 (EI/l^2)$. b) $P_{th} = \pi^2 (EI/h^2)$. c) $P_{th} = \pi^2 (EI/4h^2)$.

III.2. $P_{th} = 11,22 (EI/l^2)$.

III.3. Phương trình ổn định: $\operatorname{tg} v = th v$; $P_{th} = 15,4 (EI/l^2)$.

III.4. $P_{th} = 2,25 EI$.

III.5. $P_{th} = 28,2 (EI/l^2)$.

III.6. $P_{th} = 30,98 (EI/l^2)$.

III.7. a) $P_{th} = 4,862 (EI/l^2)$; b) $P_{th} = 20,142 (EI/l^2)$.

III.8. $P_{th} = 6,0128 (EI/h^2)$.

III.9. $P_{th} = 711$ kN.

III.10. $P_{th} = 30,8 (EI/l^2)$.

III.11. $P_{th} = 0,064 EI$.

III.12. $P_{th} = 1,16 (EI/l^2)$.

III.13. $P_{th} = 17,22 (EI/h^2)$.

III.14. Phương trình ổn định: $6kh \operatorname{tg} v = -v$ với $v = l \sqrt{P/EI}$; $P_{th} = 7,378 (EI/h^2)$.

III.15. Thông số tới hạn: $\beta_{th} = 2,5$.

III.16. $P_{th} = 3,2 (EI/l^2)$.

III.17. $P_{th} = 12,11 (EI / l^2)$.

III.18. a) $P_{th} = 0,077 EI$; b) $P_{th} = 0,1295 EI$.

III.19. $P_{th} = 3,705 (EI / l^2)$.

III.20. a) $P_{th} = 14,9 (EI / l^2)$; b) $P_{th} = 12,82 (EI / l^2)$; c) và d) $P_{th} = \pi^2 (EI / l^2)$.

III.21. Phương trình ổn định: $\sin k l_1 \cdot \sin k l_2 = k \sin k l \left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{P}{c} \right)$ với $k = \sqrt{P/EI}$.

III.22. $P_{th} = 14,68 (EI / l^2)$.

III.23. $P_{th} = 3,76 (EI / l^2)$.

III.24. $P_{th} = 1,3 (EI / a^2)$.

III.25. $P_{th} = 20,53 \text{ kN}$.

III.26. $\sigma_{th} = 8,4 \text{ kN/cm}^2$.

III.27. Kết quả theo chương trình Microstran V5.5/32:

a) $P_{th} = 40700 \text{ kN} = 30,52 (EI / l^2)$;

b) $P_{th} = 15800 \text{ kN} = 1,185 (EI / l^2)$.

III.28. Kết quả theo chương trình Microstran V5.5/32:

a) $P_{th} = 1770,67 \text{ kN} = 28,38 (EI / l^2)$;

b) $P_{th} = 1942,72 \text{ kN} = 31,08 (EI / l^2)$;

c) Khi $k = 1$: $P_{th} = 302,73 \text{ kN} = 4,84 (EI / l^2)$;

Khi $k = \infty$: $P_{th} = 1253,13 \text{ kN} = 20,05 (EI / l^2)$;

d) $P_{th} = 429,30 \text{ kN} = 5,987 (EI / l^2)$;

Chương 4

IV.1. a) $q_{th} = 4,57 (EI / r^3)$. b) $q_{th} = 3,28 (EI / r^3)$.

IV.3. $q_{th} = 63 (EI / r^3)$

IV.4. $q_{th} = 48,4 (EI / r^3)$

IV.5. Phương trình ổn định: $\text{tg } k\pi = k(1 - k^2)\pi$; $q_{th} = 1,4 (EI / r^3)$.

IV.6. Phương trình ổn định: $\text{tg } (k\pi/2) = k(1 - k^2)\pi/2$; $q_{th} = 0,8 (EI / r^3)$.

IV.7. $q_{th} = 58,57 (EI / l^3)$.

IV.8. Kết quả theo chương trình Microstran V5.5/32:

n	6	8	10	12
Trường hợp a : $P_{th} \text{ (kN)}$	1567	1572	1586	1586
Trường hợp b : $q_{th} \text{ (kN/m)}$	289	270	270	270
Trường hợp c : $q_{th} \text{ (kN/m)}$	164	162	161,5	161,5

Chương 5

V.1. a) $P_{th} = 180 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục y); b) $P_{th} = 45 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục y).

V.2. a) $P_{th} = 683,2 \text{ N}$ (dạng xoắn-uốn); b) $P_{th} = 720 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục y).

V.3. $c = 2,5 \text{ mm}$; $d = 3,75 \text{ mm}$; $I_x = 416,67 \text{ mm}^4$; $I_y = 2666,67 \text{ mm}^4$;

$$I_{\omega}^C = 133333,33 \text{ mm}^6; \quad I_{\omega}^D = 29166,67 \text{ mm}^6; \quad R_y^C = -16666,67 \text{ mm}^5;$$

$$S_y^C = 4583,33 \text{ mm}^5.$$

V.4. a) $\sigma^* = 49,74 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_x = 11,25 \text{ N/mm}^2$; $P_{th} = 450 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục x);

b) $\sigma^* = -332 \text{ N/mm}^2$ (ứng suất kéo); $\sigma_x = 11,25 \text{ N/mm}^2$; $P_{th} = 450 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục x);

c) $\sigma^* = 63,41 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_x = 11,25 \text{ N/mm}^2$; $P_{th} = 450 \text{ N}$ (dạng uốn quanh trục x).

$$\text{V.5. } M_{th} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{\pi t^3 h}{12l} \sqrt{EG}.$$

V.6.

$$\text{a) } M_{th} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{\pi t^3 h}{3l} \sqrt{EG}; \quad \text{b) } P_{th} = \frac{44,5}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{7,42 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG};$$

$$\text{c) } P_{th} = \frac{35,2}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{5,87 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG}; \quad \text{d) } (ql)_{th} = \frac{48,6}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{8,1 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG}.$$

$$\text{V.7. a) } P_{th} = \frac{53,2}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{8,867 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG};$$

$$\text{b) } (ql)_{th} = \frac{86,4}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{14,4 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG}.$$

$$\text{V.8. a) } P_{th} = \frac{80,9}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{13,48 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG};$$

$$\text{b) } (ql)_{th} = \frac{129,1}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}} = \frac{21,52 t^3 h}{l^2} \sqrt{EG}.$$

$$\text{V.9. } M_{th} = \frac{3,995\pi}{l} \sqrt{E I_y G I_{x_0}}.$$

$$\text{V.10. a) } P_{th} = \frac{50,2}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}}; \quad \text{b) } (ql)_{th} = \frac{91,3}{l^2} \sqrt{E I_y G I_{x_0}}.$$

Chương 6

VI.1. a) $P_{th} = 6,22 \text{ kN}$; b) $P_{th} = 420 \text{ kN}$; c) $P_{th} = 1086 \text{ kN}$.

VI.2. $P_{th} = 430 \text{ kN}$ (theo môđun quy ước); $P_{th} = 414 \text{ kN}$ (theo môđun tiếp tuyến).

VI.3. $P_{th} = 249 \text{ kN}$.

VI.4. $P_{th} = 547,5 \text{ kN}$.

VI.5. $(qI)_{th} = 257,6 \text{ kN}$.

VI.6. $P_{th} = 1242 \text{ kN}$.

VI.7. $P_{th} = 1981 \text{ kN}$.

VI.8. $P_{th} = 708 \text{ kN}$.

VI.9. $P_{th} = 1,76 (EI / h^2)$.

VI.10. $P_{th} = 2,4216 (EI / l^2)$.

VI.11. $M_{th} = 1227 \text{ kN.cm}$.

VI.12. $(qI)_{th} = 43,78 \text{ kN}$.

Chương 7

VII.1. Khi $k=1$: $q = 0,055$; $a = 1,63$; ổn định.

Khi $k=2$: $q = 0,22$; $a = 1,63$; ổn định.

VII.2. 1) Phương trình vi phân của chuyển động có dạng (7.12) với:

$$a = \frac{4\omega_k^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{P_o}{P_{E,k}} \right); \quad 2q = \frac{4\omega_k^2}{\theta^2} \frac{P_1}{P_{E,k}}$$

trong đó: $\omega_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$; $P_{E,k} = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right]^2 EI$.

2) • Khi $k=1$; $P_o = 400 \text{ N}$: $q = 0,0137$; $a = 0,0128$; ổn định.

• Khi $k=1$; $P_o = 500 \text{ N}$: $q = 0,0137$; $a = -0,0009$; không ổn định.

VII.3. 1) Phương trình vi phân của chuyển động có dạng (7.40) với:

$$a = \frac{4k^2(k^2-1)}{\theta^2 mR(k^2+1)} q_o; \quad 2q = \frac{4k^2(k^2-1)}{\theta^2 mR(k^2+1)} q_1$$

2) Kết quả tính được ghi trong bảng:

k	a	q	Kết luận
1	0	0	dao động phiếm định
2	4	0,80	dao động không ổn định
3	12	2,40	dao động ổn định
4	23,53	4,71	dao động ổn định
5	38,46	7,69	dao động ổn định

Phụ lục

Bảng 1

Bảng giá trị các hàm số:

$$\alpha(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right); \quad \theta_1(v) = \frac{3}{v^2} \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1 \right); \quad \theta_3(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{1}{\cos v} - \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right);$$

$$\beta(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{v}{\sin v} - 1 \right); \quad \theta_2(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 + v \operatorname{tg} v - \frac{2}{\cos v} + \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right); \quad \frac{v}{\operatorname{tg} v}; \quad \frac{v}{\sin v}; \quad v \operatorname{tg} v.$$

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \sin v$	$v \operatorname{tg} v$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,10	1,0007	1,0012	1,0040	1,0015	1,0045	0,9967	1,0017	0,0100
0,20	1,0027	1,0047	1,0163	1,0061	1,0183	0,9866	1,0067	0,0405
0,30	1,0061	1,0106	1,0374	1,0140	1,0421	0,9698	1,0152	0,0928
0,40	1,0108	1,0190	1,0684	1,0255	1,0771	0,9461	1,0272	0,1691
0,50	1,0171	1,0300	1,1113	1,0412	1,1253	0,9152	1,0429	0,2732
0,60	1,0249	1,0437	1,1686	1,0621	1,1900	0,8770	1,0626	0,4105
0,70	1,0343	1,0603	1,2445	1,0895	1,2758	0,8311	1,0866	0,5896
0,80	1,0454	1,0801	1,3455	1,1255	1,3901	0,7770	1,1152	0,8237
0,90	1,0585	1,1033	1,4821	1,1736	1,5448	0,7142	1,1489	1,1341
1,00	1,0737	1,1304	1,6722	1,2396	1,7604	0,6421	1,1884	1,5574
1,10	1,0912	1,1617	1,9491	1,3343	2,0750	0,5599	1,2343	2,1612
1,20	1,1114	1,1979	2,3822	1,4805	2,5677	0,4665	1,2875	3,0866
1,30	1,1345	1,2396	3,1435	1,7342	3,4349	0,3609	1,3492	4,6827
1,40	1,1610	1,2878	4,8082	2,2828	5,3331	0,2415	1,4207	8,1170
1,50	1,1915	1,3434	11,2013	4,3725	12,6290	0,1064	1,5038	21,1521
$\pi / 2$	1,2159	1,3880	∞	∞	∞	0,0000	1,5708	∞
1,60	1,2266	1,4078	-26,2445	-7,8201	-30,1214	-0,0467	1,6007	-54,7721
1,70	1,2573	1,4830	-5,7378	-1,1305	-6,7139	-0,2209	1,7143	-13,0842
1,80	1,3148	1,5710	-3,1308	-0,2720	-3,7409	-0,4199	1,8483	-7,7153
1,90	1,3704	1,6750	-2,1113	0,0701	-2,5805	-0,6491	2,0078	-5,5615
2,00	1,4365	1,7993	-1,5694	0,2575	-1,9657	-0,9153	2,1995	-4,3701
2,02	1,4512	1,8270	-1,4902	0,2856	-1,8762	-0,9738	2,2425	-4,1902
2,04	1,4664	1,8558	-1,4179	0,3115	-1,7944	-1,0342	2,2872	-4,0240
2,06	1,4822	1,8858	-1,3516	0,3355	-1,7195	-1,0967	2,3337	-3,8695

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \operatorname{sin} v$	$v \cdot \operatorname{tg} v$
2,08	1,4987	1,9169	-1,2905	0,3579	-1,6507	-1,1613	2,3822	-3,7255
2,10	1,5158	1,9494	-1,2342	0,3787	-1,5872	-1,2282	2,4328	-3,5907
2,12	1,5335	1,9832	-1,1820	0,3982	-1,5285	-1,2975	2,4855	-3,4640
2,14	1,5521	2,0184	-1,1335	0,4166	-1,4741	-1,3693	2,5406	-3,3446
2,16	1,5713	2,0551	-1,0884	0,4339	-1,4235	-1,4438	2,5981	-3,2316
2,18	1,5914	2,0935	-1,0463	0,4503	-1,3763	-1,5211	2,6582	-3,1244
2,20	1,6124	2,1336	-1,0069	0,4659	-1,3324	-1,6014	2,7211	-3,0224
2,22	1,6343	2,1755	-0,9700	0,4807	-1,2912	-1,6849	2,7870	-2,9251
2,24	1,6572	2,2194	-0,9354	0,4948	-1,2526	-1,7717	2,8560	-2,8320
2,26	1,6812	2,2653	-0,9028	0,5083	-1,2165	-1,8622	2,9284	-2,7427
2,28	1,7062	2,3135	-0,8721	0,5212	-1,1824	-1,9566	3,0044	-2,6569
2,30	1,7325	2,3641	-0,8431	0,5336	-1,1504	-2,0550	3,0843	-2,5742
2,32	1,7601	2,4172	-0,8157	0,5456	-1,1202	-2,1579	3,1684	-2,4943
2,34	1,7891	2,4731	-0,7897	0,5571	-1,0917	-2,2654	3,2569	-2,4170
2,36	1,8195	2,5319	-0,7651	0,5683	-1,0647	-2,3780	3,3503	-2,3421
2,38	1,8516	2,5940	-0,7418	0,5791	-1,0392	-2,4961	3,4489	-2,2693
2,40	1,8854	2,6595	-0,7196	0,5897	-1,0151	-2,6200	3,5531	-2,1984
2,42	1,9212	2,7287	-0,6985	0,5999	-0,9921	-2,7503	3,6634	-2,1293
2,44	1,9589	2,8021	-0,6784	0,6099	-0,9704	-2,8875	3,7804	-2,0618
2,46	1,9989	2,8798	-0,6592	0,6196	-0,9497	-3,0322	3,9046	-1,9958
2,48	2,0413	2,9624	-0,6409	0,6291	-0,9301	-3,1850	4,0366	-1,9311
2,50	2,0864	3,0502	-0,6234	0,6384	-0,9114	-3,3466	4,1773	-1,8676
2,52	2,1344	3,1438	-0,6067	0,6476	-0,8936	-3,5180	4,3274	-1,8051
2,54	2,1855	3,2438	-0,5907	0,6566	-0,8767	-3,7000	4,4880	-1,7437
2,56	2,2402	3,3508	-0,5753	0,6654	-0,8605	-3,8938	4,6600	-1,6831
2,58	2,2988	3,4656	-0,5606	0,6741	-0,8451	-4,1006	4,8448	-1,6233
2,60	2,3618	3,5890	-0,5465	0,6828	-0,8304	-4,3218	5,0436	-1,5642
2,62	2,4295	3,7221	-0,5329	0,6913	-0,8164	-4,5591	5,2583	-1,5057
2,64	2,5027	3,8659	-0,5199	0,6997	-0,8030	-4,8142	5,4906	-1,4477
2,66	2,5819	4,0218	-0,5073	0,7081	-0,7902	-5,0896	5,7428	-1,3902
2,68	2,6680	4,1914	-0,4952	0,7164	-0,7780	-5,3877	6,0174	-1,3331
2,70	2,7619	4,3766	-0,4836	0,7246	-0,7663	-5,7115	6,3176	-1,2764

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \operatorname{sin} v$	$v \operatorname{tg} v$
2,72	2,8648	4,5795	-0,4724	0,7328	-0,7551	-6,0649	6,6469	-1,2199
2,74	2,9778	4,8029	-0,4615	0,7410	-0,7444	-6,4520	7,0097	-1,1636
2,76	3,1027	5,0499	-0,4511	0,7491	-0,7342	-6,8783	7,4114	-1,1075
2,78	3,2414	5,3245	-0,4410	0,7572	-0,7244	-7,3502	7,8583	-1,0515
2,80	3,3963	5,6315	-0,4312	0,7654	-0,7151	-7,8756	8,3585	-0,9955
2,82	3,5704	5,9769	-0,4218	0,7735	-0,7061	-8,4645	8,9218	-0,9395
2,84	3,7676	6,3685	-0,4127	0,7817	-0,6976	-9,1294	9,5610	-0,8835
2,86	3,9928	6,8160	-0,4039	0,7898	-0,6894	-9,8866	10,2920	-0,8273
2,88	4,2525	7,3322	-0,3953	0,7980	-0,6816	-10,7572	11,1361	-0,7711
2,90	4,5550	7,9343	-0,3870	0,8063	-0,6742	-11,7692	12,1212	-0,7146
2,92	4,9121	8,6455	-0,3790	0,8146	-0,6670	-12,9609	13,2858	-0,6579
2,94	5,3401	9,4982	-0,3712	0,8229	-0,6603	-14,3858	14,6831	-0,6008
2,96	5,8622	10,5393	-0,3636	0,8313	-0,6538	-16,1207	16,3902	-0,5435
2,98	6,5134	11,8386	-0,3563	0,8398	-0,6476	-18,2806	18,5219	-0,4858
3,00	7,3486	13,5057	-0,3492	0,8484	-0,6417	-21,0458	21,2585	-0,4276
3,02	8,4583	15,7219	-0,3422	0,8570	-0,6361	-24,7145	24,8983	-0,3690
3,04	10,0049	18,8117	-0,3355	0,8657	-0,6308	-29,8204	29,9750	-0,3099
3,06	12,3094	23,4173	-0,3290	0,8746	-0,6258	-37,4201	37,5450	-0,2502
3,08	16,1102	31,0155	-0,3226	0,8835	-0,6210	-49,9427	50,0376	-0,1899
3,10	23,5659	45,9233	-0,3164	0,8926	-0,6165	-74,4894	74,5539	-0,1290
3,12	44,8321	88,4522	-0,3103	0,9018	-0,6122	-144,4711	144,5048	-0,0674
3,14	600,1919	1199,1683	-0,3044	0,9111	-0,6082	-1971,5507	1971,5532	-0,0050
π	∞	∞	-0,3040	0,9119	-0,6079	∞	∞	-0,0000
3,16	-51,2692	-103,7576	-0,2987	0,9206	-0,6045	171,6512	-171,6803	0,0582
3,18	-24,2542	-49,7312	-0,2931	0,9303	-0,6009	82,7559	-82,8170	0,1222
3,20	-15,7398	-32,7063	-0,2876	0,9401	-0,5976	54,7253	-54,8188	0,1871
3,22	-11,5688	-24,3681	-0,2823	0,9501	-0,5946	40,9834	-41,1097	0,2530
3,24	-9,0929	-19,4202	-0,2771	0,9602	-0,5918	32,8180	-32,9776	0,3199
3,26	-7,4532	-16,1447	-0,2720	0,9706	-0,5892	27,4033	-27,5965	0,3878
3,28	-6,2872	-13,8166	-0,2670	0,9812	-0,5868	23,5466	-23,7740	0,4569
3,30	-5,4154	-12,0770	-0,2621	0,9920	-0,5846	20,6578	-20,9197	0,5272
3,32	-4,7389	-10,7281	-0,2574	1,0030	-0,5827	18,4112	-18,7082	0,5987

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \sin v$	$v. \operatorname{tg} v$
3,34	-4,1986	-9,6517	-0,2527	1,0143	-0,5810	16,6126	-16,9450	0,6715
3,36	-3,7571	-8,7729	-0,2482	1,0258	-0,5795	15,1387	-15,5071	0,7457
3,38	-3,3895	-8,0421	-0,2437	1,0377	-0,5782	13,9078	-14,3126	0,8214
3,40	-3,0787	-7,4248	-0,2393	1,0498	-0,5772	12,8533	-13,3051	0,8987
3,42	-2,8124	-6,8966	-0,2351	1,0622	-0,5764	11,9651	-12,4443	0,9775
3,44	-2,5817	-6,4397	-0,2308	1,0749	-0,5758	11,1836	-11,7007	1,0581
3,46	2,3798	6,0405	-0,2267	1,0880	-0,5755	10,4968	-11,0524	1,1405
3,48	-2,2017	-5,6889	-0,2227	1,1014	-0,5753	9,8879	-10,4824	1,2248
3,50	-2,0433	-5,3768	-0,2187	1,1152	-0,5755	9,3437	-9,9777	1,3110
3,52	-1,9016	-5,0981	-0,2148	1,1294	-0,5758	8,8538	-9,5279	1,3994
3,54	-1,7740	-4,8477	-0,2109	1,1440	-0,5764	8,4102	-9,1249	1,4900
3,56	-1,6584	-4,6215	-0,2071	1,1591	-0,5773	8,0061	-8,7619	1,5830
3,58	-1,5533	-4,4163	-0,2034	1,1747	-0,5784	7,6359	-8,4335	1,6784
3,60	-1,4573	-4,2293	-0,1998	1,1907	-0,5797	7,2953	-8,1352	1,7765
3,62	-1,3691	-4,0582	-0,1961	1,2073	-0,5814	6,9805	-7,8633	1,8773
3,64	-1,2879	-3,9011	-0,1926	1,2244	-0,5833	6,6883	-7,6146	1,9810
3,66	-1,2129	-3,7564	-0,1890	1,2421	-0,5855	6,4160	-7,3865	2,0878
3,68	-1,1434	-3,6227	-0,1856	1,2604	-0,5880	6,1614	-7,1767	2,1979
3,70	-1,0787	-3,4989	-0,1821	1,2795	-0,5908	5,9225	-6,9833	2,3115
3,72	-1,0184	-3,3839	-0,1787	1,2992	-0,5939	5,6977	-6,8046	2,4288
3,74	-0,9620	-3,2768	-0,1754	1,3196	-0,5974	5,4855	-6,6391	2,5499
3,76	-0,9092	-3,1769	-0,1720	1,3409	-0,6012	5,2846	-6,4857	2,6753
3,78	-0,8595	-3,0835	-0,1687	1,3630	-0,6053	5,0939	-6,3432	2,8050
3,80	-0,8128	-2,9961	-0,1655	1,3861	-0,6099	4,9124	-6,2106	2,9395
3,82	-0,7687	-2,9140	-0,1622	1,4101	-0,6149	4,7393	-6,0871	3,0790
3,84	-0,7271	-2,8369	-0,1590	1,4351	-0,6203	4,5738	-5,9720	3,2239
3,86	-0,6876	-2,7643	-0,1557	1,4613	-0,6261	4,4152	-5,8646	3,3746
3,88	-0,6502	-2,6959	-0,1525	1,4887	-0,6324	4,2629	-5,7643	3,5315
3,90	-0,6147	-2,6314	-0,1493	1,5173	-0,6392	4,1164	-5,6705	3,6950
3,92	-0,5809	-2,5704	-0,1461	1,5474	-0,6466	3,9752	-5,5829	3,8656
3,94	-0,5486	-2,5127	-0,1429	1,5789	-0,6545	3,8388	-5,5009	4,0439
3,96	-0,5178	-2,4580	-0,1397	1,6121	-0,6631	3,7068	-5,4242	4,2305
3,98	-0,4884	-2,4062	-0,1365	1,6470	-0,6723	3,5789	-5,3525	4,4260

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \sin v$	$v \cdot \operatorname{tg} v$
4,00	-0,4603	-2,3570	-0,1332	1,6838	-0,6823	3,4548	-5,2854	4,6313
4,02	-0,4333	-2,3103	-0,1300	1,7227	-0,6930	3,3340	-5,2227	4,8471
4,04	-0,4074	-2,2660	-0,1267	1,7639	-0,7045	3,2164	-5,1640	5,0744
4,06	-0,3825	-2,2238	-0,1233	1,8074	-0,7169	3,1018	-5,1093	5,3143
4,08	-0,3586	-2,1836	-0,1199	1,8537	-0,7304	2,9897	-5,0582	5,5678
4,10	-0,3355	-2,1453	-0,1165	1,9030	-0,7449	2,8802	-5,0105	5,8365
4,12	-0,3133	-2,1089	-0,1130	1,9555	-0,7606	2,7728	-4,9662	6,1216
4,14	-0,2919	-2,0741	-0,1094	2,0116	-0,7775	2,6676	-4,9250	6,4251
4,16	-0,2712	-2,0410	-0,1057	2,0717	-0,7960	2,5642	-4,8868	6,7489
4,18	-0,2511	-2,0094	-0,1020	2,1362	-0,8160	2,4626	-4,8515	7,0952
4,20	-0,2317	-1,9792	-0,0981	2,2057	-0,8378	2,3625	-4,8189	7,4667
4,22	-0,2129	-1,9504	-0,0940	2,2807	-0,8615	2,2639	-4,7889	7,8664
4,24	-0,1947	-1,9229	-0,0899	2,3621	-0,8875	2,1665	-4,7615	8,2979
4,26	-0,1769	-1,8966	-0,0855	2,4505	-0,9161	2,0704	-4,7365	8,7653
4,28	-0,1597	-1,8715	-0,0809	2,5471	-0,9475	1,9753	-4,7138	9,2738
4,30	-0,1430	-1,8475	-0,0760	2,6529	-0,9821	1,8811	-4,6935	9,8291
4,32	-0,1266	-1,8246	-0,0708	2,7694	-1,0206	1,7878	-4,6753	10,4386
4,34	-0,1107	-1,8028	-0,0653	2,8984	-1,0634	1,6953	-4,6593	11,1107
4,36	-0,0952	-1,7819	-0,0594	3,0418	-1,1114	1,6033	-4,6455	11,8563
4,38	-0,0801	-1,7619	-0,0530	3,2025	-1,1653	1,5120	-4,6336	12,6884
4,40	-0,0652	-1,7429	-0,0459	3,3835	-1,2265	1,4210	-4,6238	13,6238
4,42	-0,0508	-1,7248	-0,0381	3,5893	-1,2963	1,3305	-4,6159	14,6836
4,44	-0,0366	-1,7074	-0,0295	3,8251	-1,3767	1,2402	-4,6100	15,8951
4,46	-0,0226	-1,6909	-0,0197	4,0981	-1,4702	0,6077	1,1502	-4,6059
4,48	-0,0090	-1,6752	-0,0085	4,4180	-1,5800	0,6034	1,0603	-4,6038
4,50	0,0044	-1,6603	0,0045	4,7980	-1,7109	0,5991	0,9704	-4,6034
4,52	0,0175	-1,6461	0,0199	5,2568	-1,8695	0,5948	0,8805	-4,6050
4,54	0,0305	-1,6326	0,0386	5,8218	-2,0653	0,5905	0,7905	-4,6083
4,56	0,0432	-1,6198	0,0617	6,5349	-2,3129	0,5861	0,7003	-4,6135
4,58	0,0558	-1,6076	0,0915	7,4632	-2,6359	0,5817	0,6099	-4,6204
4,60	0,0682	-1,5962	0,1313	8,7215	-3,0744	0,5772	0,5192	-4,6292
4,62	0,0804	-1,5854	0,1878	10,5243	-3,7036	0,5727	0,4281	-4,6398

Bảng I (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \operatorname{sin} v$	$v. \operatorname{tg} v$
4,64	0,0925	-1,5752	0,2748	13,3227	-4,6815	0,5681	0,3365	-4,6522
4,66	0,1044	-1,5656	0,4272	18,2571	-6,4071	0,5636	0,2444	-4,6664
4,68	0,1162	-1,5567	0,7663	29,2842	-10,2660	0,5589	0,1516	-4,6825
4,70	0,1279	-1,5483	2,1964	75,9114	-26,5890	0,5543	0,0582	-4,7004
$3\pi/2$	0,1351	-1,5434	∞	∞	∞	0,5514	0,0000	-4,7124
4,72	0,1395	-1,5405	-3,8830	-122,5075	42,8825	0,5496	-0,0359	-4,7201
4,74	0,1510	-1,5334	-1,1535	-33,4762	11,7131	0,5449	-0,1309	-4,7418
4,76	0,1624	-1,5267	-0,7162	-19,2430	6,7317	0,5401	-0,2268	-4,7654
4,78	0,1738	-1,5207	-0,5370	-13,4299	4,6983	0,5352	-0,3237	-4,7909
4,80	0,1851	-1,5152	-0,4390	-10,2704	3,5939	0,5304	-0,4216	-4,8185
4,82	0,1964	-1,5103	-0,3771	-8,2850	2,9006	0,5255	-0,5207	-4,8480
4,84	0,2076	-1,5060	-0,3343	-6,9216	2,4250	0,5205	-0,6210	-4,8797
4,86	0,2188	-1,5022	-0,3028	-5,9273	2,0787	0,5155	-0,7226	-4,9134
4,88	0,2300	-1,4989	-0,2785	-5,1702	1,8154	0,5105	-0,8257	-4,9494
4,90	0,2412	-1,4963	-0,2593	-4,5742	1,6085	0,5054	-0,9302	-4,9875
4,92	0,2524	-1,4941	-0,2435	-4,0929	1,4417	0,5003	-1,0364	-5,0280
4,94	0,2636	-1,4926	-0,2304	-3,6959	1,3045	0,4951	-1,1442	-5,0708
4,96	0,2748	-1,4916	-0,2192	-3,3630	1,1896	0,4899	-1,2539	-5,1160
4,98	0,2861	-1,4912	-0,2096	-3,0796	1,0921	0,4846	-1,3655	-5,1638
5,00	0,2975	-1,4914	-0,2011	-2,8355	1,0083	0,4793	-1,4791	-5,2142
5,02	0,3089	-1,4922	-0,1937	-2,6230	0,9356	0,4739	-1,5948	-5,2672
5,04	0,3204	-1,4936	-0,1871	-2,4363	0,8720	0,4685	-1,7129	-5,3231
5,06	0,3320	-1,4955	-0,1811	-2,2710	0,8157	0,4631	-1,8334	-5,3819
5,08	0,3437	-1,4982	-0,1757	-2,1235	0,7658	0,4576	-1,9564	-5,4437
5,10	0,3555	-1,5014	-0,1707	-1,9912	0,7211	0,4520	-2,0822	-5,5087
5,12	0,3674	-1,5053	-0,1662	-1,8717	0,6809	0,4464	-2,2108	-5,5769
5,14	0,3795	-1,5099	-0,1620	-1,7633	0,6446	0,4407	-2,3425	-5,6486
5,16	0,3918	-1,5152	-0,1582	-1,6644	0,6116	0,4350	-2,4774	-5,7239
5,18	0,4043	-1,5212	-0,1545	-1,5739	0,5816	0,4292	-2,6157	-5,8030
5,20	0,4169	-1,5280	-0,1512	-1,4908	0,5541	0,4234	-2,7577	-5,8860
5,22	0,4298	-1,5355	-0,1480	-1,4141	0,5288	0,4175	-2,9035	-5,9732
5,24	0,4429	-1,5438	-0,1450	-1,3431	0,5056	0,4116	-3,0534	-6,0647

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$O_1(v)$	$O_2(v)$	$O_3(v)$	$v / \operatorname{tg} v$	$v / \sin v$	$v. \operatorname{tg} v$
5,26	0,4562	-1,5529	-0,1422	-1,2772	0,4841	0,4056	-3,2077	-6,1609
5,28	0,4699	-1,5629	-0,1396	-1,2158	0,4643	0,3996	-3,3665	-6,2620
5,30	0,4838	-1,5738	-0,1371	-1,1585	0,4458	0,3935	-3,5303	-6,3681
5,32	0,4981	-1,5857	-0,1347	-1,1049	0,4286	0,3873	-3,6994	-6,4798
5,34	0,5128	-1,5985	-0,1324	-1,0547	0,4126	0,3811	-3,8740	-6,5972
5,36	0,5278	-1,6124	-0,1302	-1,0074	0,3977	0,3748	-4,0545	-6,7208
5,38	0,5433	-1,6274	-0,1281	-0,9629	0,3837	0,3685	-4,2414	-6,8509
5,40	0,5592	-1,6436	-0,1261	-0,9209	0,3706	0,3621	-4,4352	-6,9879
5,42	0,5756	-1,6610	-0,1242	-0,8812	0,3583	0,3556	-4,6362	-7,1324
5,44	0,5925	-1,6797	-0,1223	-0,8436	0,3467	0,3491	-4,8450	-7,2848
5,46	0,6101	-1,6998	-0,1205	-0,8079	0,3358	0,3425	-5,0622	-7,4456
5,48	0,6282	-1,7214	-0,1188	-0,7740	0,3255	0,3358	-5,2884	-7,6156
5,50	0,6470	-1,7446	-0,1171	-0,7417	0,3158	0,3291	-5,5244	-7,7954
5,52	0,6666	-1,7694	-0,1155	-0,7110	0,3066	0,3223	-5,7708	-7,9858
5,54	0,6870	-1,7961	-0,1140	-0,6816	0,2979	0,3154	-6,0286	-8,1876
5,56	0,7083	-1,8248	-0,1125	-0,6535	0,2897	0,3085	-6,2987	-8,4016
5,58	0,7305	-1,8555	-0,1110	-0,6267	0,2819	0,3015	-6,5821	-8,6291
5,60	0,7538	-1,8886	-0,1096	-0,6010	0,2745	0,2944	-6,8801	-8,8711
5,62	0,7783	-1,9242	-0,1082	-0,5763	0,2675	0,2873	-7,1939	-9,1289
5,64	0,8040	-1,9624	-0,1068	-0,5526	0,2608	0,2801	-7,5249	-9,4040
5,66	0,8311	-2,0036	-0,1055	-0,5298	0,2544	0,2728	-7,8750	-9,6980
5,68	0,8598	-2,0481	-0,1043	-0,5079	0,2484	0,2654	-8,2459	-10,0129
5,70	0,8901	-2,0962	-0,1030	-0,4868	0,2426	0,2580	-8,6399	-10,3507
5,72	0,9224	-2,1481	-0,1018	-0,4665	0,2371	0,2504	-9,0593	-10,7140
5,74	0,9567	-2,2045	-0,1006	-0,4468	0,2319	0,2428	-9,5070	-11,1054
5,76	0,9934	-2,2657	-0,0995	-0,4278	0,2269	0,2352	-9,9861	-11,5283
5,78	1,0327	-2,3323	-0,0983	-0,4095	0,2221	0,2274	-10,5006	-11,9863
5,80	1,0750	-2,4050	-0,0972	-0,3917	0,2176	0,2195	-11,0546	-12,4838
5,82	1,1207	-2,4845	-0,0962	-0,3745	0,2132	0,2116	-11,6535	-13,0260
5,84	1,1702	-2,5718	-0,0951	-0,3578	0,2090	0,2036	-12,3031	-13,6188
5,86	1,2240	-2,6680	-0,0941	-0,3416	0,2051	0,1955	-13,0107	-14,2695
5,88	1,2829	-2,7743	-0,0931	-0,3258	0,2013	-13,7849	-14,9866	-2,5081

Bảng 1 (tiếp theo)

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$O_1(\nu)$	$O_2(\nu)$	$O_3(\nu)$	$\nu / \operatorname{tg} \nu$	$\nu / \sin \nu$	$\nu, \operatorname{tg} \nu$
5,90	1,3476	-2,8924	-0,0921	-0,3105	0,1976	-14,6362	-15,7806	-2,3784
5,92	1,4190	-3,0241	-0,0911	-0,2956	0,1941	-15,5772	-16,6642	-2,2499
5,94	1,4934	-3,1719	-0,0901	-0,2811	0,1908	-16,6235	-17,6529	-2,1225
5,96	1,5873	-3,3388	-0,0892	-0,2670	0,1876	-17,7949	-18,7664	-1,9962
5,98	1,6876	-3,5234	-0,0883	-0,2532	0,1846	-19,1158	-20,0294	-1,8707
6,00	1,8015	-3,7456	-0,0874	-0,2398	0,1817	-20,6181	-21,4734	-1,7460
6,02	1,9323	-3,9936	-0,0865	-0,2267	0,1789	-22,3430	-23,1398	-1,6220
6,04	2,0842	-4,2899	-0,0856	-0,2138	0,1762	-24,3455	-25,0835	-1,4985
6,06	2,2628	-4,6366	-0,0848	-0,2013	0,1737	-26,7000	-27,3791	-1,3754
6,08	2,4761	-5,0527	-0,0839	-0,1890	0,1712	-29,5105	-30,1303	-1,2527
6,10	2,7353	-5,5609	-0,0831	-0,1769	0,1689	-32,9263	-33,4866	-1,1301
6,12	3,0573	-6,1948	-0,0823	-0,1651	0,1667	-37,1699	-37,6703	-1,0077
6,14	3,4686	-7,0072	-0,0814	-0,1535	0,1645	-42,5880	-43,0284	-0,8852
6,16	4,0125	-8,0852	-0,0806	-0,1422	0,1625	-49,7528	-50,1327	-0,7627
6,18	4,7664	-9,5828	-0,0799	-0,1310	0,1606	-59,6795	-59,9987	-0,6400
6,20	5,8814	-11,8031	-0,0791	-0,1200	0,1587	-74,3604	-74,6184	-0,5169
6,22	7,7007	-15,4319	-0,0783	-0,1092	0,1570	-98,3096	-98,5061	-0,3935
6,24	11,2028	-22,4264	-0,0776	-0,0985	0,1553	-144,4038	-144,5385	-0,2696
6,26	20,7425	-41,4962	-0,0768	-0,0880	0,1537	-269,9502	-270,0228	-0,1452
6,28	150,0476	-300,0967	-0,0761	-0,0776	0,1522	-1971,5457	-971,5557	-0,0200
2π	∞	∞	-0,0760	-0,0760	0,1520	∞	∞	-0,0000

Bảng giá trị các hàm số:

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$$

$$\varphi_4(v) = \eta_3(v) = \varphi_1 \left(\frac{v}{2} \right); \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \eta_2(v) = \eta_1 \left(\frac{v}{2} \right).$$

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,10	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990
0,20	0,9973	0,9987	1,0007	0,9993	0,9840	0,9960
0,30	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,40	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,60	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,70	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510
0,80	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,90	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8788
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,30	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,50	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0,0000	0,7525
1,60	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,80	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0813	0,9270	-0,7399	0,5734

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
2,08	0,6673	0,8468	1,0831	0,9256	-0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8436	1,0849	0,9241	-0,8103	0,5566
2,12	0,6521	0,8404	1,0868	0,9226	-0,8461	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9558	0,5219
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0967	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0987	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1008	0,9116	-1,1077	0,4859
2,28	0,5861	0,8134	1,1030	0,9099	-1,1467	0,4767
2,30	0,5772	0,8099	1,1051	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1073	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7990	1,1118	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1141	0,9015	-1,3481	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8980	-1,4316	0,4100
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4740	0,4001
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5603	0,3801
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6483	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6930	0,3495
2,56	0,4464	0,7597	1,1363	0,8853	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8834	-1,7838	0,3287
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7295	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1171	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8675	-2,1667	0,2419
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2194
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1965
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1849
2,86	0,2504	0,6918	1,1810	0,8549	-2,4761	0,1733
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8527	-2,5296	0,1615
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1497
2,92	0,2036	0,6769	1,1913	0,8483	-2,6386	0,1378
2,94	0,1873	0,6717	1,1948	0,8461	-2,6939	0,1258
2,96	0,1706	0,6666	1,1984	0,8438	-2,7499	0,1137
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1015
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6507	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0769
3,04	0,1000	0,6453	1,2133	0,8346	-2,9806	0,0645
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2211	0,8299	-3,1001	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2251	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2849	0,0010
π	0,0000	0,6169	1,2337	0,8225	-3,2899	0,0000
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8202	-3,3480	-0,0119
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8177	-3,4120	-0,0250
3,20	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381
3,22	-0,0864	0,5937	1,2506	0,8127	-3,5426	-0,0513
3,24	-0,1100	0,5877	1,2551	0,8102	-3,6092	-0,0646
3,26	-0,1342	0,5816	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7452	-0,0915
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,32	-0,2110	0,5627	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,34	-0,2382	0,5563	1,2788	0,7971	-3,9567	-0,1325
3,36	-0,2662	0,5498	1,2838	0,7945	-4,0294	-0,1463
3,38	-0,2950	0,5432	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1603
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743
3,42	-0,3556	0,5298	1,2993	0,7863	-4,2544	-0,1884
3,44	-0,3873	0,5230	1,3046	0,7835	-4,3319	-0,2026
3,46	-0,4202	0,5161	1,3100	0,7808	-4,4107	-0,2169
3,48	-0,4542	0,5091	1,3156	0,7779	-4,4910	-0,2313
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,52	-0,5259	0,4949	1,3269	0,7723	-4,6560	-0,2603
3,54	-0,5637	0,4877	1,3327	0,7694	-4,7409	-0,2749
3,56	-0,6030	0,4804	1,3387	0,7665	-4,8275	-0,2897
3,58	-0,6438	0,4730	1,3447	0,7635	-4,9159	-0,3045
3,60	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,62	-0,7304	0,4579	1,3571	0,7576	-5,0985	-0,3344
3,64	-0,7764	0,4502	1,3635	0,7546	-5,1930	-0,3495
3,66	-0,8244	0,4424	1,3700	0,7516	-5,2896	-0,3647
3,68	-0,8746	0,4345	1,3766	0,7485	-5,3887	-0,3800
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4904	-0,3954
3,72	-0,9819	0,4184	1,3902	0,7424	-5,5947	-0,4108
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7392	-5,7020	-0,4264
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4421
3,78	-1,1634	0,3935	1,4117	0,7329	-5,9262	-0,4578
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3008	0,3764	1,4266	0,7265	-6,1650	-0,4896
3,84	-1,3754	0,3676	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4542	0,3588	1,4422	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5379	0,3498	1,4502	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6969	-0,5542
3,92	-1,7216	0,3315	1,4668	0,7099	-6,8437	-0,5706
3,94	-1,8228	0,3221	1,4753	0,7065	-6,9973	-0,5871
3,96	-1,9311	0,3126	1,4840	0,7031	-7,1583	-0,6037

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3,98	- 2,0474	0,3030	1,4928	0,6996	- 7,3275	- 0,6204
4,00	- 2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	- 7,5060	- 0,6372
4,02	- 2,3079	0,2834	1,5111	0,6926	- 7,6947	- 0,6541
4,04	- 2,4546	0,2734	1,5205	0,6891	- 7,8952	- 0,6710
4,06	- 2,6143	0,2632	1,5302	0,6855	- 8,1088	- 0,6881
4,08	- 2,7887	0,2529	1,5400	0,6819	- 8,3375	- 0,7053
4,10	- 2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	- 8,5836	- 0,7225
4,12	- 3,1916	0,2318	1,5603	0,6747	- 8,8497	- 0,7399
4,14	- 3,4260	0,2211	1,5708	0,6710	- 9,1392	- 0,7573
4,16	- 3,6878	0,2101	1,5815	0,6673	- 9,4564	- 0,7749
4,18	- 3,9821	0,1990	1,5925	0,6635	- 9,8063	- 0,7925
4,20	- 4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	- 10,1956	- 0,8103
4,22	- 4,6968	0,1763	1,6151	0,6559	- 10,6329	- 0,8281
4,24	- 5,1370	0,1647	1,6269	0,6521	- 11,1296	- 0,8461
4,26	- 5,6514	0,1529	1,6388	0,6482	- 11,7006	- 0,8641
4,28	- 6,2609	0,1409	1,6511	0,6443	- 12,3670	- 0,8822
4,30	- 6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	- 13,1581	- 0,9005
4,32	- 7,8961	0,1164	1,6765	0,6364	- 14,1169	- 0,9188
4,34	- 9,0304	0,1038	1,6896	0,6324	- 15,3089	- 0,9372
4,36	- 10,5025	0,0910	1,7031	0,6284	- 16,8390	- 0,9558
4,38	- 12,4908	0,0780	1,7168	0,6243	- 18,8856	- 0,9744
4,40	- 15,3271	0,0648	1,7310	0,6202	- 21,7805	- 0,9931
4,42	- 19,7043	0,0514	1,7454	0,6160	- 26,2165	- 1,0120
4,44	- 27,3534	0,0377	1,7602	0,6119	- 33,9246	- 1,0309
4,46	- 44,1501	0,0238	1,7754	0,6077	- 50,7807	- 1,0500
4,48	- 111,0248	0,0096	1,7910	0,6034	- 117,7150	- 1,0691
4,50	227,9292	- 0,0048	1,8070	0,5991	221,1792	- 1,0884
4,52		- 0,0194	1,8234	0,5948		- 1,1077
4,54		- 0,0344	1,8402	0,5905		- 1,1272
4,56		- 0,0496	1,8574	0,5861		- 1,1467
4,58		- 0,0651	1,8751	0,5817		- 1,1664
4,60		- 0,0809	1,8933	0,5772		- 1,1861

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,62		-0,0969	1,9120	0,5727		-1,2060
4,64		-0,1134	1,9312	0,5681		-1,2260
4,66		-0,1301	1,9509	0,5636		-1,2461
4,68		-0,1471	1,9711	0,5589		-1,2663
4,70		-0,1645	1,9920	0,5543		-1,2865
$3\pi/2$		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1823	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	0,5401		-1,3481
4,78		-0,2379	2,0815	0,5352		-1,3688
4,80		-0,2572	2,1056	0,5304		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4106
4,84		-0,2972	2,1560	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3179	2,1823	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3390	2,2095	0,5105		-1,4740
4,90		-0,3607	2,2375	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3828	2,2665	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4056	2,2964	0,4951		-1,5385
4,96		-0,4288	2,3273	0,4899		-1,5603
4,98		-0,4527	2,3592	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3923	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5023	2,4264	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5281	2,4618	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5546	2,4984	0,4631		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5364	0,4576		-1,6930
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6387	2,6165	0,4464		-1,7381
5,14		-0,6683	2,6588	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6989	2,7028	0,4350		-1,7838
5,18		-0,7304	2,7485	0,4292		-1,8068
5,20		-0,7629	2,7960	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8455	0,4175		-1,8532

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
5,24		- 0,8311	2,8969	0,4116		- 1,8765
5,26		- 0,8669	2,9506	0,4056		- 1,9000
5,28		- 0,9039	3,0065	0,3996		- 1,9236
5,30		- 0,9422	3,0648	0,3935		- 1,9474
5,32		- 0,9819	3,1257	0,3873		- 1,9712
5,34		- 1,0231	3,1894	0,3811		- 1,9952
5,36		- 1,0658	3,2560	0,3748		- 2,0193
5,38		- 1,1102	3,3258	0,3685		- 2,0436
5,40		- 1,1563	3,3989	0,3621		- 2,0679
5,42		- 1,2044	3,4755	0,3556		- 2,0924
5,44		- 1,2544	3,5560	0,3491		- 2,1171
5,46		- 1,3066	3,6407	0,3425		- 2,1418
5,48		- 1,3611	3,7297	0,3358		- 2,1667
5,50		- 1,4182	3,8236	0,3291		- 2,1917
5,52		- 1,4779	3,9226	0,3223		- 2,2169
5,54		- 1,5404	4,0272	0,3154		- 2,2422
5,56		- 1,6062	4,1379	0,3085		- 2,2676
5,58		- 1,6753	4,2551	0,3015		- 2,2932
5,60		- 1,7481	4,3794	0,2944		- 2,3189
5,62		- 1,8249	4,5116	0,2873		- 2,3447
5,64		- 1,9061	4,6523	0,2801		- 2,3707
5,66		- 1,9920	4,8024	0,2728		- 2,3968
5,68		- 2,0833	4,9628	0,2654		- 2,4231
5,70		- 2,1803	5,1346	0,2580		- 2,4495
5,72		- 2,2838	5,3190	0,2504		- 2,4761
5,74		- 2,3944	5,5174	0,2428		- 2,5028
5,76		- 2,5129	5,7313	0,2352		- 2,5296
5,78		- 2,6403	5,9628	0,2274		- 2,5566
5,80		- 2,7777	6,2139	0,2195		- 2,5838
5,82		- 2,9262	6,4873	0,2116		- 2,6111
5,84		- 3,0876	6,7858	0,2036		- 2,6386
5,86		- 3,2634	7,1132	0,1955		- 2,6662

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,88		- 3,4560	7,4738	0,1873		- 2,6939
5,90		- 3,6679	7,8727	0,1790		- 2,7219
5,92		- 3,9022	8,3162	0,1706		- 2,7499
5,94		- 4,1630	8,8123	0,1621		- 2,7782
5,96		- 4,4550	9,3706	0,1535		- 2,8066
5,98		- 4,7845	10,0036	0,1449		- 2,8352
6,00		- 5,1594	10,7270	0,1361		- 2,8639
6,02		- 5,5900	11,5615	0,1272		- 2,8928
6,04		- 6,0900	12,5346	0,1182		- 2,9219
6,06		- 6,6780	13,6835	0,1091		- 2,9512
6,08		- 7,3801	15,0601	0,1000		- 2,9806
6,10		- 8,2336	16,7392	0,0907		- 3,0102
6,12		- 9,2941	18,8319	0,0812		- 3,0400
6,14		- 10,6483	21,5117	0,0717		- 3,0699
6,16		- 12,4391	25,0645	0,0621		- 3,1001
6,18		- 14,9205	29,9980	0,0523		- 3,1304
6,20		- 18,5905	37,3084	0,0424		- 3,1609
6,22		- 24,5776	49,2526	0,0324		- 3,1916
6,24		- 36,1011	72,2690	0,0223		- 3,2225
6,26		- 67,4876	135,0113	0,0121		- 3,2536
6,28		- 492,8864	985,7779	0,0017		- 3,2849
2π		$-\infty$	$+\infty$	0,0000		- 3,2899

Tài liệu tham khảo

1. Chajes A. *Principles of Structural Stability Theory*. Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
2. Chen W.F. , Lui E.M. *Structural Stability – Theory and implementation*. Elsevir Science Publishing Co., Inc. 1987. America.
3. Lê Văn Quý, Lê Thọ Trình. *Ổn định công trình*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1979.
4. Lê Thọ Trình. *Cơ học kết cấu – Tập I và Tập II*. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 2001.
5. Nguyễn Y Tô - Lê Minh Khanh - Lê Quang Minh - Nguyễn Khải - Vũ Đình Lai. *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1970.
6. Panovko Ya. *Elements of the applied Theory of Elastic Vibration*. Mir Publishers. Moscow, 1971.
7. Безухов Н. И., Лужин О. В., Колкунов Н. В. *Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах*. Издательство литературы по строительству. Москва, 1969.
8. Беляев Б. И., Корненко В. С. *Причины аварий стальных конструкций и способы их устранения*. Издательство литературы по строительству. Москва, 1968.
9. Биргер И. А., Пановко Я. Г. *Прочность - Устойчивость - Колебания*. Том 3. Издательство "Машиностроение". Москва, 1968.
10. Болотин В. В. *Неконсервативные задач теории упругой устойчивости*. Физматгиз, 1964.
11. Болотин В. В. *О понятии устойчивости в строительной механике*. Проблемы устойчивости в строительной механике. Издательство литературы по строительству. Москва, 1965.
12. Вольмир А. С. *Устойчивость упругих систем*. Физматгиз, 1963.

13. Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем*. Физматгиз, 1967.
14. Киселев В. А. *Строительная механика - Специальный курс*. Стройиздат, Москва, 1969.
15. Клейн Г. К., Рекач В. Г., Розенблат Г. И. *Руководство к проведению занятий по специальному курсу строительной механики*. "Высшая школа", 1969.
16. Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки*. Издательство "Наука". Москва, 1967.
17. Пиковский А. А. *Статика стержневых систем со сжатыми элементами*. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, 1961.
18. Рабинович И. М. *Курс строительной механики. Часть II*. Стройиздат, Москва, 1954.
19. Раевский А. Н. *Основы расчета сооружений на устойчивость*. "Высшая школа", 1962.
20. Смирнов А. Ф. *Устойчивость и колебания сооружений*. Государственное транспортное железнодорожное издательство. Москва, 1958.
21. Снитко Н. К. *Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области*. Стройиздат, Москва, 1968.
22. Тимошенко С. П. *Устойчивость упругих систем*. Огиз. Гостехиздат, 1946.
23. Ясинский Ф. С. *Избранные работы по устойчивости сжатых стержней*. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва - Ленинград, 1952.

Mục lục

Lời tựa	3
Mở đầu	5
1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu ổn định công trình	5
2. Khái niệm về ổn định và mất ổn định	6
3. Khái niệm về bậc tự do	12
4. Các tiêu chí về sự cân bằng ổn định	14
Chương 1. Các phương pháp nghiên cứu	19
1.1. Khái niệm về các phương pháp nghiên cứu	19
1.2. Phương pháp thiết lập và giải phương trình vi phân	21
1.3. Phương pháp thiết lập và giải hệ phương trình đại số	23
1.4. Phương pháp sai phân hữu hạn	27
1.5. Phương pháp dây xích	32
1.6. Phương pháp Bubnov - Galerkin	35
1.7. Phương pháp nghiệm đúng tại một số hữu hạn điểm	38
1.8. Phương pháp đúng dần	39
1.9. Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý Lejeune-Dirichlet	41
1.10. Phương pháp Rayleigh - Ritz	43
1.11. Phương pháp Timoshenko	46
1.12. Phương pháp động lực học	48
Bài tập	51
Chương 2. Ổn định của thanh thẳng	53
2.1. Các phương trình chuyển vị và nội lực trong thanh chịu uốn cùng với nén hoặc kéo	53
2.2. Ổn định của các thanh thẳng, tiết diện không đổi có liên kết bất kỳ ở hai đầu	55
2.3. Ổn định của thanh thẳng tiết diện không đổi, chịu lực đặt bất kỳ dọc theo chiều dài thanh	61
2.4. Ổn định của thanh thẳng tiết diện không đổi, chịu tác dụng của trọng lượng bản thân	67

2.5. Ổn định của thanh thẳng có tiết diện thay đổi	71
2.6. Ảnh hưởng của lực cắt đến giá trị lực tới hạn trong các thanh đặc	80
2.7. Ổn định của thanh ghép	81
Bài tập	87
Chương 3. Ổn định của hệ thanh thẳng	91
3.1. Các giả thiết	91
3.2. Cách tính ổn định của khung theo phương pháp lực	93
3.3. Cách tính ổn định của khung theo phương pháp chuyển vị	99
3.4. Cách sử dụng tính đối xứng khi tính ổn định của hệ thanh	109
3.5. Ổn định của dầm liên tục trên các gối cứng	114
3.6. Ổn định của các thanh chịu nén trong dàn	121
3.7. Ổn định của thanh liên tục có gối trung gian dàn hồi	123
3.8. Ổn định của thanh làm việc trong môi trường dàn hồi	129
3.9. Ổn định của hệ thanh biên trên chịu nén trong cầu dàn hở	131
3.10. Cách tính ổn định của hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn	136
Bài tập	151
Chương 4. Ổn định của thanh cong	157
4.1. Phương trình vi phân và nghiệm tương ứng của thanh tròn	157
4.2. Ổn định của vòm tròn đối xứng và vành tròn chịu lực hướng tâm phân bố đều	160
4.3. Ổn định của vòm parabol đối xứng chịu lực phân bố đều theo chiều dài nhịp	167
4.4. Ổn định dạng uốn đối xứng của vòm parabol	169
Bài tập	173
Chương 5. Ổn định của thanh thành mỏng tiết diện hở và ổn định dạng uốn phẳng của dầm	175
5.1. Các phương trình cơ bản của thanh thành mỏng hở	175
5.2. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở có hai trục đối xứng	181
5.3. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở có một trục đối xứng	184
5.4. Ổn định dạng nén đúng tâm của thanh thành mỏng, tiết diện hở không đối xứng	190
5.5. Ổn định của thanh thành mỏng chịu uốn thuần túy	191

5.6. Ổn định của thanh thành mỏng chịu nén lệch tâm	195
5.7. Các phương trình cơ bản của thanh thành mỏng chịu uốn ngang phẳng khi tiết diện có một trục đối xứng	198
5.8. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh có tiết diện chữ nhật hẹp	201
5.9. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh tiết diện chữ I	206
5.10. Ổn định dạng uốn ngang phẳng của thanh ghép có liên kết ngang	209
Bài tập	211
Chương 6. Ổn định của hệ thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi	214
6.1. Các công thức thực nghiệm	214
6.2. Ổn định của thanh khi tải trọng không thay đổi	216
6.3. Ổn định của thanh có kèm theo sự tăng tải trọng khi bị uốn	224
6.4. Ổn định của thanh có kèm theo sự giảm tải trọng khi bị uốn	227
6.5. Chọn tải trọng để tính khi kiểm tra ổn định ngoài giới hạn đàn hồi	229
6.6. Ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của các thanh thẳng	231
6.7. Ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của các khung phẳng	240
6.8. Ổn định ngoài giới hạn đàn hồi của dầm chữ I chịu uốn	245
Bài tập	248
Chương 7. Khái niệm về ổn định động	251
7.1. Ổn định động của thanh thẳng có liên kết khớp ở hai đầu	252
7.2. Ổn định động của vành tròn	258
Bài tập	263
Đáp số các bài tập	265
Phụ lục	270
Bảng 1	270
Bảng 2	278
Tài liệu tham khảo	286

Gs, Ts. LÊU THỌ TRÌNH (chủ biên)

Ths. ĐỖ VĂN BÌNH

ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản :</i>	Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI
<i>Biên tập :</i>	MINH HẰNG, THANH ĐỊNH
<i>Kỹ mỹ thuật :</i>	NHƯ MAI
<i>Sửa bản in :</i>	MINH HẰNG
<i>Trình bày bìa :</i>	HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HUNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 700 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Xí nghiệp in 19-8.
Giấy phép xuất bản số: 1527-47 cấp ngày 20/10/2004
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2005.