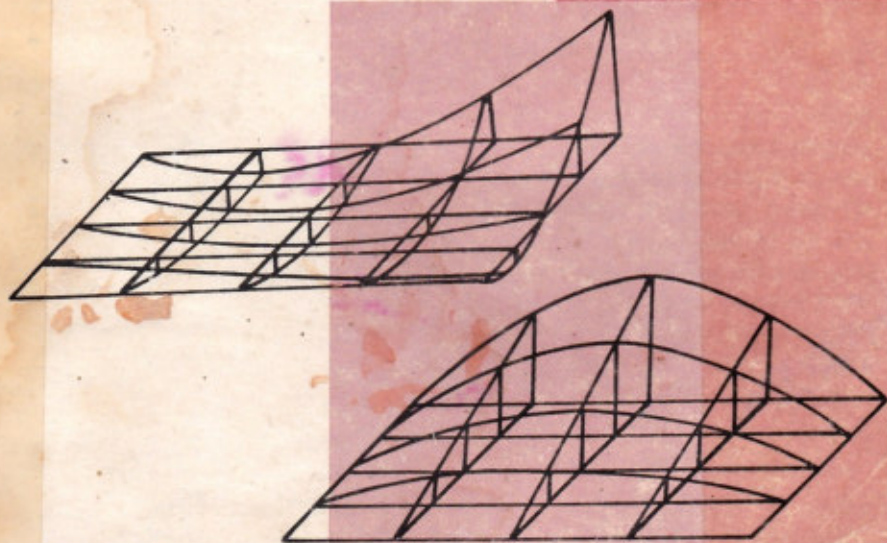


A. B. FADĒEV

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

TRONG ĐỊA CƠ HỌC



A. B. ФАДЕЕВ

Метод конечных элементов в геомеханике

МОСКВА "НЕДРА" 1987

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc TRẦN TRÂM PHƯƠNG
Tổng biên tập NGUYỄN KHẮC PHU

Biên tập :

PHẠM HÀ

Trình bày bìa :

NGUYỄN QUỐC VĂN

Biên tập kĩ thuật :

BÙI CHÍ HIẾU

Sửa bản in :

TRẦN THANH HUYẾN

Sắp chữ :

TRUNG TÂM VI TÍNH (NXB GIÁO DỤC)

ADEEV

Phương pháp phần tử hữu hạn trong địa cơ học / A. B. Fadeev ; Nguyễn Hữu Thái.

Nguyễn Uyên, Phạm Hà dịch. - H. : Giáo dục, 1995. - 268 tr. : 20,5cm

Mã số : 7B145M5

6X(075)

LỜI GIỚI THIỆU

Trong một thời gian dài, do hạn chế về mặt lịch sử của cơ học vật rắn, các bài toán đàn hồi và ổn định trong địa cơ học phải nghiên cứu riêng rẽ và theo các phương pháp không có liên quan gì với nhau. Khi phân tích ứng suất và biến dạng của khối đất chưa bị phá hoại ở dưới móng hoặc sau tường chắn thì địa cơ học dựa vào định luật đàn hồi tuyến tính của Hooke. Mặt khác, khi phân tích khối đất ở các điều kiện phá hoại cuối cùng (như bài toán về khả năng chịu tải của nền, về sự ổn định mái dốc, về áp lực đất lên tường chắn, ...) thì lại dựa hoàn toàn vào lí thuyết dẻo.

Biện pháp chia địa cơ học thành hai nhóm bài toán tách biệt như trên rõ ràng là bất đắc dĩ. Nó không phản ánh được bước chuyển có tính chất dòng dẻo của đất từ trạng thái đàn hồi tuyến tính ban đầu sang trạng thái cuối cùng.

Phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp số, lúc đầu được sử dụng rộng rãi để tính toán các kết cấu, sau đó đã được áp dụng vào địa cơ học. Nó đã tỏ rõ ưu thế không chỉ vì đã giải quyết thành công rất nhiều bài toán thực tế của địa cơ học, mà còn bởi tính đơn giản và thích dụng đối với việc phân tích trạng thái ứng suất biến dạng của khối đất, thường là môi trường hai hoặc ba hướng. Mặt khác, trong địa cơ học, do các bài toán thường có điều kiện biên phức tạp và do môi trường không đồng nhất, nên hầu như không thể có được lời giải giải tích chính xác. Ngày nay, với tình hình phát triển mạnh mẽ của các phần mềm máy tính về phần tử hữu hạn và phần cứng máy tính số có tốc độ cao, người ta dễ dàng thu được vô số các giải pháp khác nhau.

Do những ưu điểm kể trên, ở các trường đại học tiên tiến hiện nay trên thế giới đều đã giảng dạy phương pháp PTHH cùng với các vấn đề cơ học đất đá phi tuyến cho sinh viên các ngành kĩ thuật xây dựng.

Quan niệm chủ yếu của phương pháp PTHH là : làm xấp xỉ đại lượng liên tục cần tìm, chẳng hạn cột nước của dòng thấm hoặc chuyển vị của các vật thể bị biến dạng bằng một tập hợp những hàm đơn giản

nhất cho trước trên những bộ phân (phần tử) có ranh giới hạn định. Nhờ thủ tục như vậy, việc lấy tích phân các phương trình vi phân ở dạng giải tích được quy về việc giải hệ các phương trình tuyến tính. Các chương trình hiện đại của phương pháp PTHH trong địa cơ học thực chất là công cụ mô hình hóa toán học tất cả các quá trình xảy ra trong đất. Chúng so sánh tự động ứng suất với các tính chất bền của đất và, nhờ những thủ tục nhất định, đảm bảo sự phù hợp của trạng thái ứng suất với các điều kiện cân bằng và các tính chất của đất.

Tập thể người dịch đã lựa chọn chính xác và có rất nhiều cố gắng trong dịch thuật để có thể giới thiệu với bạn đọc một tài liệu vừa có tính hệ thống lại vừa tương đối ngắn gọn, dễ hiểu về lãnh vực còn mới mẻ này; phù hợp với trình độ sinh viên, cũng như nhu cầu tham khảo và học tập của các kỹ sư, cán bộ nghiên cứu ở nước ta.

Toàn bộ bản dịch đã được PTS Nguyễn Hữu Thái đọc duyệt lại tỉ mỉ.

Chúng tôi xin trân trọng giới thiệu cuốn sách với bạn đọc và hy vọng rằng các bạn sẽ tìm được ở đây nhiều điều bổ ích.

GS. TS. PHAM XUÂN
 Chủ tịch Hội KHKH chuyên ngành
 Địa chất công trình Việt Nam.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu	3
Mở đầu	9

Chương 1

NHỮNG NGUYÊN LÝ CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

1.1. Ứng suất	13
1.2. Biến dạng	19
1.3. Tính đàn hồi. Định luật Hooke	20
1.4. Mặt giới hạn của vật liệu đẳng hướng	23
1.5. Mặt chảy	27
1.6. Lí thuyết biến dạng dẻo	34
1.7. Lí thuyết chảy dẻo	35
1.8. Tính đàn nhớt và tính dẻo nhớt	40
1.9. Cơ học môi trường hai pha	43

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

2.1. Thẩm ổn định	48
2.1.1. Sự rời rạc hóa miền. Phần tử tam giác	48
2.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử và của hệ thống các phần tử	50
2.1.3. Điều kiện biên	57
2.2. Bài toán phẳng của lí thuyết-đàn hồi	57
2.2.1. Phần tử hữu hạn và các tính chất của nó	57
2.2.2. Ma trận độ cứng hệ thống	62
2.2.3. Đặt bài toán và xác định điều kiện biên	65

2.3. Bài toán đối xứng trục	67
2.4. Phân tử đẳng tham số phẳng	70
2.5. Bài toán ba chiều	82
2.6. Những thủ tục cơ bản khi giải bài toán phi tuyến	86
2.6.1. Tính đàn hồi phi tuyến với ma trận cát tuyến	87
2.6.2. Tính đàn hồi phi tuyến với ma trận tiếp tuyến	88
2.6.3. Phương pháp ứng suất ban đầu - lý thuyết biến dạng dẻo	89
2.6.4. Lý thuyết chảy dẻo	90
2.7. Đặc điểm cách giải các bài toán cân bằng giới hạn bằng phần tử hữu hạn	96
2.8. Mô phỏng sự thay đổi đường viền của miền	98
2.9. Giải hệ phương trình	99
2.10. Cấu trúc chương trình chung cho MTĐT	106

Chương 3
TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA ĐẤT

3.1. Tính chất cơ học của cát	118
3.2. Tính chất cơ học của sét	128
3.2.1. Tính ép co của sét	129
3.2.2. Phản ứng của sét chặt bình thường đối với ứng suất tiếp	133
3.2.3. Sức chống trượt của sét quá nén chặt	136
3.3. Đất chịu tải trọng động	140

Chương 4
TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA ĐÁ

4.1. Tính chất của mẫu nguyên khối	143
4.2. Tính chất của khối nứt nẻ	146
4.3. Các đặc trưng tiếp xúc	147
4.4. Tính chất lưu biến của đất và đá	152

Chương 5
GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊA KỸ THUẬT
BẰNG HỆ CHƯƠNG TRÌNH "ĐỊA CƠ"

5.1. Mô hình môi trường biến dạng đàn - dẻo lý tưởng	154
5.1.1. Bài toán của Galin	160
5.1.2. Ổn định của khối đắp trên nền đất yếu	162
5.1.3. Bài toán về khả năng vượt qua của máy xúc nặng	164
5.1.4. Tính áp lực lên vỏ đường hầm	166
5.1.5. Nghiên cứu quan hệ độ lún - tải trọng của móng cứng hình băng	168
5.1.6. Áp lực lên tường cọc ván	170
5.1.7. Bài toán đàn hồi trong điều kiện trạng thái ứng suất phẳng	172
5.2. Môi trường bị khử độ bền	174
5.3. Chương trình trên cơ sở lý thuyết chảy dẻo (biến dạng phẳng)	177
5.4. Bài toán đối xứng trục	183

Chương 6
CÁC MÔ HÌNH KHÁC CỦA ĐẤT ĐÁ

6.1. Mô hình đàn hồi phi tuyến của đất	190
6.2. Mô hình mú	197
6.3. Các phần tử tiếp xúc	209
6.4. Đất có cốt	215
6.5. Thực hiện mô hình lưu biến	222
6.6. Bài toán cổ kết thắm	226
6.7. Phương pháp phần tử rời rạc của Cundall	231
<i>Phụ lục</i> Chương trình "Địa cơ học"	235
<i>Tài liệu tham khảo</i>	265

MỞ ĐẦU

Do tăng khối lượng xây dựng các công trình ngầm, mở rộng sử dụng lòng đất cho các bể chứa khác nhau, do quy mô ngành công nghiệp mỏ ngày một lớn lên, cũng như triển vọng phát triển to lớn của nó liên quan với việc tăng chiều sâu công tác và việc đưa những mỏ quặng phức tạp hơn vào khai thác mà việc nghiên cứu các vấn đề vật lí và cơ học các lớp đất sâu - Cơ học các khối đất đá được đẩy lên vị trí hàng đầu.

Khoa học về tính chất cơ học của khối đất đá dưới tác dụng của ngoại lực được gọi là địa cơ học. Sự phát triển khoa học này có liên quan với sự phát triển kĩ thuật tính toán.

Trước khi xuất hiện các phương pháp số mạnh và phổ biến rộng rãi máy tính điện tử (MTDT), thì trong những năm 60-70 địa cơ học truyền thống chia những bài toán địa cơ học ra làm hai nhóm : *trạng thái giới hạn* và *biến dạng*. Nhóm thứ nhất bao gồm các bài toán xác định khả năng chịu tải của móng ; ổn định của mái dốc, của khối đất đắp, của các hầm và bể ngầm ; áp lực lên tường chắn. Nhóm thứ hai gồm các bài toán tính lún của nền đất dưới tải trọng nhà và các công trình khác, trong đó có kể đến cổ kết thấm, bài toán tiếp xúc về tác dụng tương hỗ giữa công trình và đất, dự báo độ bền của các công trình ngầm bằng cách so sánh ứng suất với tính bền của đất đá.

Cơ sở lí thuyết để giải các bài toán nhóm thứ nhất do Coulomb đưa ra vào cuối thế kỉ XVIII. Phép giải các bài toán giới hạn dựa trên sự phân tích phương trình cân bằng trong mặt phẳng, trong không gian hoặc trên một mặt nào đó cắt ra một phần khối nguyên vẹn. Những cách giải đã có chỉ xác định được tổ hợp các tải trọng tác dụng giới hạn khi đã biết tính bền của đất.

Phép giải các bài toán nhóm thứ hai dựa trên giả thiết về mối liên hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng trong đất; điều đó tạo cơ sở vận dụng các phương pháp của lý thuyết đàn hồi khi phân tích biến dạng của đất dưới tác dụng của tải trọng. Do rất khó thu được lời giải đàn hồi, các bài toán biến dạng của cơ học đất thường được chia thành bài toán tính ứng suất trong đất và bài toán tính biến dạng. Đồng thời, cả việc tính ứng suất lẫn tính biến dạng thường được thực hiện với nhiều giả thiết đơn giản hóa. Điều đó cho phép vận dụng lời giải đã biết của các bài toán đơn giản nhất (ví dụ, lời giải Boussinesq về tác dụng của lực lên bán không gian đàn hồi), bỏ qua một số thành phần của tenxơ ứng suất khi tính biến dạng.

Như đã biết, hai nhóm bài toán này nghiên cứu sự làm việc của đất với các quan điểm khác nhau và thậm chí đòi hỏi các đặc trưng của đất khác nhau: đối với các bài toán thuộc nhóm giới hạn, các đặc trưng là lực dính đơn vị C và góc ma sát trong φ , còn đối với bài toán thuộc nhóm biến dạng - môđun đàn hồi E và hệ số Poisson ν .

Khi giải các bài toán nhóm thứ nhất, biến dạng của đất không được xét đến và được giả thiết là vừa đủ để huy động toàn bộ sức kháng. Ở nhóm bài toán thứ hai, ứng suất và biến dạng được giả thiết là khá nhỏ, vùng trạng thái giới hạn còn chưa hình thành hoặc nhỏ đến mức có thể bỏ qua. Tuy nhiên, trong tất cả các bài toán có ý nghĩa thực tiễn của cơ học đất và đá lại xảy ra biến dạng hỗn hợp của cả hai kiểu - *biến dạng đàn hồi* và *biến dạng dẻo*. Khi độ lớn vùng dẻo nhỏ thì người ta bỏ qua chúng và coi bài toán là đàn hồi. Khi biến dạng dẻo phát triển đáng kể thì cần phải kể đến chúng và giải *bài toán hỗn hợp*.

Chỉ có một số rất hạn chế các bài toán hỗn hợp được giải bằng phương pháp giải tích. Đối với các điều kiện biên thực tế, đặc trưng cho các bài toán thiết kế móng và khai thác mỏ, nhất là trong môi trường không đồng nhất, thì lời giải bằng giải tích thường là không đạt được. Mới từ 10-15 năm trước, mỗi lời giải đàn dẻo thu được còn là một hiện tượng nổi bật trong cơ học. Ngày nay các phương pháp số cho phép thu được những lời giải với điều kiện biên hết sức phức tạp mà không cần cố nỗ lực gì đặc biệt. Với cố gắng của các nhà nghiên cứu, phạm vi các tính chất cơ học của đất đá được đưa vào các chương trình không ngừng được mở rộng.

Trong các phương pháp số khác nhau của cơ học môi trường liên tục, thì phương pháp phần tử hữu hạn là hoàn thiện nhất. E tương về các phương pháp tính toán gần đúng, chỗ dựa cho phương pháp phần tử hữu hạn, đã bắt đầu phát triển ngay từ cuối thế kỉ XIX - đầu thế kỉ XX. Các nhà bác học Nga đã có đóng góp đáng kể vào sự phát triển chúng. Chẳng hạn, phương pháp giải gần đúng các phương trình vi phân Bubnov-Galerkin được dùng rất thành công để diễn giải phần tử hữu hạn.

Sự phát triển các phương pháp số dựa trên các thành tựu của đại số tuyến tính và kĩ thuật tính toán. Phương pháp phần tử hữu hạn (PPPTH) đã được trình bày trong các công trình của J. Argyris, M. Terner, R. Klaf vào thế hệ máy tính đầu tiên của những năm 50. Phương pháp này nhanh chóng được phổ cập trong các lĩnh vực khoa học và kĩ thuật khác nhau. Công suất của máy tính điện tử (MTĐT) thế hệ đầu tiên cho phép giải các bài toán tuyến tính kiểu các bài toán truyền nhiệt ổn định và đàn hồi với sự trợ giúp của PPTH.

Trong các lĩnh vực kĩ thuật sử dụng tính toán độ bền theo các ứng suất đàn hồi, PPTH lập tức được áp dụng. Người ta vận dụng nó để tính toán thân tàu, các thiết bị bay, kết cấu xây dựng.

Tốc độ xử lí nhanh và dung lượng bộ nhớ của MTĐT thế hệ thứ hai đã dẫn đến sự phát triển nhanh chóng của các phương pháp giải các bài toán phi tuyến mà thông thường chúng được quy thành lập nhiều lần các bài toán tuyến tính. Giai đoạn này đã mở đường cho việc áp dụng có hiệu quả rất cao PPTH vào cơ học đất. Có thể nói rằng, nếu trước đây cơ học đất đã không thể tách rời khỏi phương pháp cân bằng giới hạn chừng nào thì ngày nay nó cũng không thể tách rời phương pháp phần tử hữu hạn chừng ấy.

PPPTH cho khả năng để xét tới tính nhiều vẻ và phức tạp của đất, chứ không phải chỉ có hai chỉ tiêu (E và ν hoặc C và φ) như các phương pháp trước đây của cơ học đất. Chính qua đó, PPTH đã kích thích sự phát triển các phương pháp thí nghiệm đất và đá, phát triển các lí thuyết mới về cường độ và biến dạng của chúng.

Đặc tính của các tài liệu công bố liên quan với các phương pháp giải tích và phương pháp số để giải các bài toán cơ học thì khác hẳn

nhau. Chẳng hạn lời giải giải tích của các bài toán lí thuyết đàn hồi thường đề cập đến các vật thể có hình dạng đơn giản hay gặp trong nhiều lĩnh vực kĩ thuật. Những lời giải chính xác này không cần phải hiệu chỉnh thêm, và chúng được tất cả các kĩ sư quan tâm, trong lúc đó phương pháp giải bằng giải tích lại chỉ được các nhà toán học quan tâm. Vì vậy việc công bố các lời giải của phương pháp giải tích luôn luôn bao gồm việc trình bày chi tiết các bài toán cụ thể.

Phương pháp số dùng để giải các bài toán phức tạp trong đó mỗi bài toán trên thực tế là đơn nhất theo các điều kiện biên và tính chất môi trường của chúng. Kết quả của phép giải này đối với đồng đạo bạn đọc chủ yếu có ý nghĩa minh họa tính hiệu quả của việc sử dụng phương pháp giải và phần nào về bản thân phương pháp. Sự thực hiện phương pháp trên máy đã được trình bày khá đầy đủ, nhờ đó việc thu được một số lượng không hạn chế các lời giải mới không khó khăn gì.

Do đó, các tài liệu công bố dành cho phương pháp số thường có tương đối ít các thí dụ giải cụ thể, mà cơ bản dành cho việc trình bày phương pháp. Số tên các tài liệu xuất bản về áp dụng PPPTHH trong địa cơ học rất lớn. Ấng chừng một phần ba bài báo trong các tạp chí địa kĩ thuật có liên quan ít nhiều với PPPTHH; một tạp chí chuyên ngành quốc tế về phương pháp số trong địa cơ học được xuất bản; nhiều chuyên khảo đã được phát hành.

Mặc dù các chương trình học tập về cơ học đất đá vẫn chưa có phần dành cho PPPTHH, tuy vậy trong các trường đại học tiên tiến đã bắt đầu giảng dạy PPPTHH cùng với các vấn đề cơ học đất và đá phi tuyến dưới dạng các khóa học chuyên ngành, cho các sinh viên làm luận văn tốt nghiệp và những người tham dự khóa nâng cao nghiệp vụ. Tác giả xem cuốn sách này như một giáo trình có hệ thống, cung cấp cho người đọc những khái niệm cơ bản về tính chất phi tuyến của đất đá và về các phương pháp giải những bài toán phi tuyến. PPPTHH được trình bày để hiểu đối với nhân thức của kĩ sư và sinh viên các trường đại học kĩ thuật chuyên ngành mỏ và xây dựng. Những kiến thức về lí thuyết ứng suất, biến dạng và lí thuyết dẻo được đề cập dưới dạng ngắn gọn. Khi viết sách, tác giả đã sử dụng kinh nghiệm giảng dạy của mình về PPPTHH và cơ học đất phi tuyến ở Trường đại học xây dựng Leningrat.

CHƯƠNG 1

NHỮNG NGUYÊN LÝ CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

1.1. UNG SUẤT

Trong hệ tọa độ Đề-các ba hướng, trạng thái ứng suất được đặc trưng bởi các ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Hai hệ thống ghi chép ngắn gọn và phân tích các ứng suất được dùng là: hệ thống vectơ - ma trận và hệ thống tenxơ. Vectơ các ứng suất $\{\sigma\}$ là vectơ ma trận cột, được lập nên từ các thành phần ứng suất nêu trên.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$$

Những phép tính với vectơ ứng suất được thực hiện theo các quy tắc của đại số ma trận.

Tenxơ ứng suất T_σ là một bảng vuông có dạng

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

trong đó các số 1, 2, 3 thay cho các kí hiệu trục tọa độ x, y và z.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \tau_{yz}, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{zx}. \end{aligned}$$

Khi phân tích trong hệ tenxơ người ta đưa ra quy tắc tính toán từng thành phần ten-xơ bất kì σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Ta nhận thấy rằng, ở ứng suất pháp các chỉ số là như nhau : $i = j$, ở ứng suất tiếp $i \neq j$.

Theo quy tắc phân tích tenxơ, khi chỉ số được lặp lại thì nó biểu thị phép tính tổng : σ_{ii} , hoặc σ_{jj} , hoặc σ_{kk} chính là $\sum_{i=1,2,3} \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$. Dưới đây chúng ta chủ yếu dùng hệ

thống phân tích vectơ - ma trận ; chỉ trong một số trường hợp để tránh các biểu thức cồng kềnh mới dùng hệ thống tenxơ.

Người ta gọi hiệu của phép trừ giữa tenxơ ứng suất với tenxơ cầu T_0 là tenxơ ứng suất lệch D_σ :

$$D_\sigma = T_\sigma - T_0 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$$\text{trong đó } T_0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \text{ - tenxơ cầu,}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \text{ - ứng suất trung bình.}$$

Trị số σ_0 bằng ứng suất pháp trên mặt nghiêng đều theo cả ba trục tọa độ (mặt bát diện), vì thế cũng được gọi là *ứng suất pháp bát diện*.

Khi kí hiệu thành phần bất kì của độ lệch D_σ là σ'_{ij} , quan hệ (1.1) có thể viết rút gọn lại là :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$$

Trị số δ_{ij} gọi là kí hiệu Kroneker : $\delta_{ij} = 1$ khi $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ khi $i \neq j$. Khi trạng thái ứng suất không đối, các thành phần ứng suất sẽ phụ thuộc vào sự lựa chọn phương của các trục tọa độ, đặc biệt, có thể tìm được phương đó khi các ứng suất tiếp bằng không. Khi ấy các ứng suất pháp được gọi là các *ứng suất chính* và kí hiệu là

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3. \text{ Ứng suất tiếp lớn nhất } \tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Ba tổ hợp I_1, I_2, I_3 có thể được lập thành từ các thành phần tenxơ ứng suất mà không phụ thuộc vào phương các trục tọa độ.

Chúng được gọi là *các bất biến*, có trị số không phụ thuộc vào các ứng suất trục.

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0 ; \\ I_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) ; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

Trong lí thuyết ứng suất đã chỉ ra rằng, khi các bất biến đã biết thì ba ứng suất chính là ba nghiệm của phương trình bậc ba :

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_1 - \sigma I_2 - I_3 = 0.$$

Phương của các ứng suất chính được tính toán không phức tạp.

Các bất biến tương tự có thể được tính cả cho deviator (tenxơ lệch) ứng suất. Các bất biến deviator ứng suất kí hiệu bằng J_1, J_2, J_3 . Rõ ràng là $J_1 = 0$.

$$\begin{aligned} J_2 &= -S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \end{aligned}$$

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2 = S_1 S_2 S_3$$

$$\text{trong đó } S_x = \sigma_x - \sigma_0, S_y = \sigma_y - \sigma_0, S_z = \sigma_z - \sigma_0,$$

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_0, S_2 = \sigma_2 - \sigma_0, S_3 = \sigma_3 - \sigma_0.$$

Ứng suất tiếp trên mặt khối bát diện τ_0 gọi là ứng suất tiếp bát diện : $\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$.

Ứng suất trung bình σ_0 liên hệ với bất biến I_1 bằng quan hệ

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1.$$

Trị số $\tau_1 = \sqrt{J_2}$ gọi là *cường độ* các ứng suất tiếp.

Để phân tích sau này người ta sử dụng các đạo hàm $\left\{ \frac{\partial \sigma_0}{\partial \sigma} \right\}, \left\{ \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} \right\}, \left\{ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right\}$, là vectơ các đạo hàm riêng của σ_0, τ_1, J_3

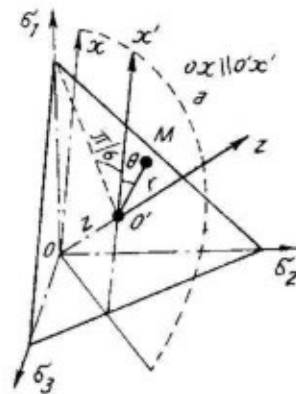
theo các thành phần ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Các vectơ này có dạng sau đây :

$$\left\{ \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \frac{\partial \tau_i}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{2\tau_i} \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix},$$

$$\left\{ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right\} = \begin{Bmatrix} S_y S_z - \tau_{yz}^2 \\ S_x S_z - \tau_{xz}^2 \\ S_x S_y - \tau_{xy}^2 \\ 2(\tau_{xy} \tau_{xz} - S_x \tau_{yz}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - S_y \tau_{xz}) \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xy} - S_z \tau_{xy}) \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \tau_1^2 + \frac{1}{3} \tau_1^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Trạng thái ứng suất, được đặc trưng bởi ba ứng suất chính, có thể biểu thị bằng điểm M trong không gian Đêcac ba chiều với các trục tọa độ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (hình 1-1).

Đường oz có phương trình $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, được gọi là trục thủy tĩnh. Để dễ dàng nhận thấy rằng, tại các điểm nằm trên trục thủy tĩnh, các thành phần deviator ứng suất bằng không. Mặt phẳng vuông góc với trục thủy tĩnh và nghiêng đều tương ứng với các trục tọa độ gọi là mặt deviator, mặt bát diện hoặc là mặt π . Một trong các mặt đó đi qua điểm M, được biểu diễn trên hình 1-1. Phương trình mặt deviator có dạng : $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}$. Tại các điểm của mặt phẳng deviator, ứng suất



Hình 1-1. Biểu đồ ứng suất trong hệ tọa độ Đêcac và hệ tọa độ trụ.

trung bình (nói chung là tenxơ cầu) không đổi, còn phần tenxơ ứng suất lệch thì thay đổi.

Vị trí điểm M trong không gian có thể được đặc trưng trong hệ tọa độ trụ với trục oz. Ta chọn phương của trục cực ox sao cho nó nằm trong mặt phẳng π và có phương trình $2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3 = 0$ (xem hình 1-1).

Nhờ các công thức biến đổi tọa độ đã biết trong hình học giải tích, dễ dàng biểu thị các tọa độ trụ của điểm M ($r = O'M, z = OO', \theta$) qua các tọa độ Đêcac :

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2} = \sqrt{J_2} = \tau_1; \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 = \sqrt{3}\sigma_0; \\ \theta &= \text{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right) \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Trị số $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = -\sqrt{3} \text{tg}\theta$ gọi là thông số Lode, còn

góc θ - là góc Lode. Một bộ τ_1, σ_0 và θ ta gọi là các tọa độ Lode. O. Zienkiewicz và G. Pande [50] đưa ra công thức khác rất thuận lợi để xác định góc θ :

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right).$$

Bảng 1-1

Chỉ tiêu	Giá trị các chỉ tiêu khi các ứng suất		
	$\sigma_2 = \sigma_1$	$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$	$\sigma_2 = \sigma_3$
μ_σ	-1	0	-1
θ	$+\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$

Các ứng suất chính* được gán các chỉ số sao cho $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

* Trong địa cơ học các ứng suất và biến dạng nên được coi là dương, kéo - là âm.
2-PII 17

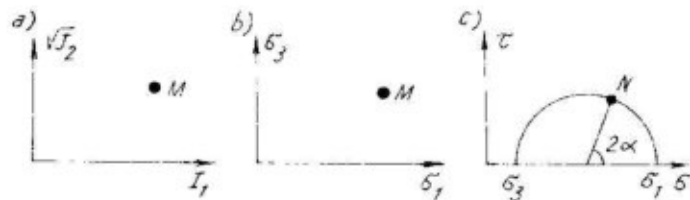
Khi σ_2 thay đổi trong phạm vi này, thì thông số và góc Lode nhận các giá trị nêu ở bảng 1.

Ba ứng suất chính có thể được biểu diễn qua các bất biến như sau [50] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \sin\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(-\theta) \\ \sin\left(-\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} T_1 \quad (1.4)$$

Khi thí nghiệm nén và nén ba trục mẫu đất, thì $\sigma_2 = \sigma_3$. Các điểm thỏa mãn điều kiện này trên hình 1-1 sẽ nằm trong mặt phẳng $\sigma_1 O z$. Để đặc trưng cho vị trí của điểm trong mặt phẳng này chỉ cần hai tọa độ : $r = \sqrt{2J_2}$ và $z = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1$ hoặc các trị số tỉ lệ với chúng $\sqrt{J_2}$ và I_1 (hình 1-2a). Ta thấy rằng, khi $\sigma_2 = \sigma_3$ thì các biểu thức đối với các bất biến có dạng đơn giản hơn :

$$\begin{cases} I_1 = (\sigma_1 + 2\sigma_2) \\ J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{3} \end{cases}$$



Hình 1-2. Các hệ tọa độ để biểu thị trạng thái ứng suất

Nếu phân tích trạng thái ứng suất chỉ tiến hành trong mặt phẳng tác dụng của hai ứng suất chính σ_1 và σ_3 , mà không kể tới ứng suất trung gian σ_2 , thì có thể dùng tọa độ vuông góc σ_1 và σ_3 (hình 1-2, b) hoặc tọa độ Mohr τ, σ (hình 1-2, c) để biểu thị biểu

độ trạng thái ứng suất. Trong tọa độ Mohr hoành độ và tung độ điểm N biểu thị ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng một góc α với phương ứng suất σ_1 .

1.2. BIẾN DẠNG

Vecto biến dạng tại một điểm có dạng tương tự như vectơ ứng suất : $\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$. Tenxơ biến dạng khác với tenxơ ứng suất là nó có một nửa các giá trị biến dạng trượt :

$$T_\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{Bmatrix}$$

Tenxơ biến dạng cũng đối xứng qua đường chéo chính. Có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng của tenxơ lệch (deviator) biến dạng và tenxơ cầu :

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_0 \delta_{ij}$$

trong đó $\epsilon_0 = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$ là biến dạng pháp tuyến trung bình (bất diện). Biến dạng thể tích $\epsilon_v = \Delta V/V = 3\epsilon_0$.

Như trường hợp với các ứng suất, trong không gian có thể lựa chọn phương các trục tọa độ sao cho trong các mặt phẳng tọa độ sẽ không có biến dạng trượt. Biến dạng pháp tuyến dọc theo các phương này gọi là biến dạng pháp tuyến chính $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Biến dạng trượt lớn nhất $\gamma_{max} = (\epsilon_1 - \epsilon_3)$. Các giá trị biến tenxơ biến dạng là :

Như trường hợp với các ứng suất, trong không gian có thể lựa chọn phương các trục tọa độ sao cho trong các mặt phẳng tọa độ sẽ không có biến dạng trượt. Biến dạng pháp tuyến dọc theo các phương này gọi là biến dạng pháp tuyến chính $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Biến dạng trượt lớn nhất $\gamma_{max} = (\epsilon_1 - \epsilon_3)$. Các giá trị biến tenxơ biến dạng là :

$$I_{1(\epsilon)} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_v = 3\epsilon_0$$

$$\begin{aligned} I_{2(\epsilon)} &= -\epsilon_x \epsilon_y - \epsilon_y \epsilon_z - \epsilon_z \epsilon_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ &= -(\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{3(\epsilon)} &= \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \epsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_z \gamma_{xy}^2 = \\ &= \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Các bất biến tenxơ lệch biến dạng là :

$$J_{2(\varepsilon)} = -e_x e_y - e_y e_z - e_z e_x + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ = \frac{1}{6} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2],$$

$$J_{3(\varepsilon)} = e_x e_y e_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} e_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} e_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} e_z \gamma_{xy}^2 = \\ = e_1 e_2 e_3, \quad (1.6)$$

trong đó $e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0, e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_0, e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_0,$
 $e_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, e_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_0, e_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_0, \quad (1.7)$

Trị số $\gamma_0 = 2 \sqrt{\frac{2}{3} J_{2(\varepsilon)}}$ gọi là *biến dạng trượt bất diện*, còn trị số $\gamma_1 = 2 \sqrt{J_{3(\varepsilon)}}$ gọi là *cường độ trượt*.

1.3. TÍNH ĐÀN HỒI - ĐỊNH LUẬT HOOKE

Đặc tính của quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tại một điểm của môi trường xác định tính chất của môi trường dưới tác dụng của tải trọng. Nghiên cứu quan hệ này và xử dụng chúng trong tính toán là mục tiêu và đối tượng của cơ học các vật thể biến dạng, nói riêng, của cơ học đất. Dạng liên hệ ứng suất và biến dạng đơn giản nhất là các phương trình của lí thuyết đàn hồi, được nhiều người biết như định luật Hooke :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (1.8)$$

Các tổ hợp ứng suất và biến dạng $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ khác nhau và các ma trận khác nhau $[D]$ sẽ tương ứng với các dạng trạng thái ứng suất - biến dạng khác nhau :

a) Trạng thái ứng suất - biến dạng ba trục

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

ĐỐI XỨNG

b) Trạng thái ứng suất phẳng.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} \\ \text{DX} & & & \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

c) Biến dạng phẳng

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ & & \frac{1-2\nu}{2} \\ \text{DX} & & & \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

d) Trạng thái ứng suất - biến dạng đối xứng trục

$$\{\sigma\} = \{\sigma_r \sigma_\theta \sigma_z \tau_{rz}\}^T; \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r \varepsilon_\theta \varepsilon_z \gamma_{rz}\}^T;$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \\ \text{DX} & & & & \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Có thể viết định luật Hooke dưới dạng khác khi sử dụng các cặp hằng số đàn hồi khác, chẳng hạn hằng số Lamé λ và μ , môđun nén thể tích K , môđun Young E . Chúng liên hệ với nhau bằng các hệ thức :

$$\left. \begin{aligned} E &= 2G(1 + \nu), \\ \lambda &= \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}, \mu = G, \\ K &= \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \end{aligned} \right\} (1.13)$$

Định luật Hooke ở dạng tenxơ được viết rất ngắn gọn :

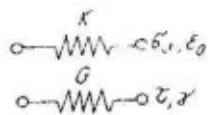
$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Để dàng chứng minh các quan hệ

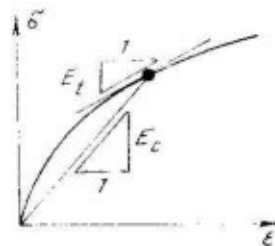
$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3K\varepsilon_{\alpha\alpha} = Ke_{\nu\nu}, \quad \tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}$$

Môi trường đàn hồi tuyến tính có thể biểu diễn bằng đồ thị nhờ hai phần tử đàn hồi (lò xo), mô phỏng phân lực của môi trường đối với thành phần tenxơ ứng suất thủy tĩnh và các thành phần tenxơ ứng suất lệch (Hình 1-3). Phương của các ứng suất và biến dạng chính trong vật thể đàn hồi - tuyến tính là đồng trục, còn các tenxơ chỉ phương của ứng suất và biến dạng là như nhau.

Sự xuất hiện biến dạng thuận nghịch có quan hệ phi tuyến với ứng suất trong vật thể dưới tác dụng của tải trọng được gọi là *tính đàn hồi phi tuyến*.



Hình 1-3. Mô hình môi trường đàn hồi - tuyến tính



Hình 1-4. Biểu diễn bằng đồ thị các môđun cắt tuyến tính E_t và tiếp tuyến E_c 1 - biến dạng đơn vị

Để mô tả tính đàn hồi phi tuyến, người ta dùng các phương trình đàn hồi tuyến tính - tuy nhiên, ma trận $[D]$ có các hằng số đàn hồi K và G biến đổi phụ thuộc vào mức các ứng suất

$$K = K(\{\sigma\}), G = G(\{\sigma\})$$

Đặc trưng liên hệ ứng suất và biến dạng toàn phần, được gọi là *đặc trưng cắt tuyến*, còn ma trận tương ứng với nó là *ma trận cắt tuyến* $[D_c]$ (Hình 1-4) :

$$\{\sigma\} = [D_c] \{\varepsilon\}.$$

Đặc trưng và ma trận liên hệ độ tăng ứng suất và biến dạng nhỏ ở mức các ứng suất đã đạt được, gọi là *đặc trưng và ma trận tiếp tuyến* :

$$\{d\sigma\} = [D_t] \{d\varepsilon\} \quad (1.14)$$

1.4. MẶT GIỚI HẠN CỦA VẬT LIỆU ĐẲNG HƯỚNG

Tính chất bền của vật liệu giới hạn vùng có các loại trạng thái ứng suất có thể có trong không gian ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3 . Đất và đá có thể chịu một trị số nén thủy tĩnh bất kì, có nghĩa là vùng các loại trạng thái ứng suất có thể có không bị hạn chế dọc theo trục thủy tĩnh của không gian.

Trị số các ứng suất tiếp bị giới hạn bởi tính bền của môi trường. Để diễn tả các mặt giới hạn vùng bền khi nén không đều, ta dùng tiêu chuẩn Tresca, Mises, Coulomb và Botkin.

Tiêu chuẩn Tresca (Xanh Vơng) khẳng định rằng, ứng suất tiếp giới hạn trong môi trường bằng trị số ổn định C nào đó, có nghĩa là $\tau - C = 0$.

Vi trị số ứng suất tiếp lớn nhất bằng $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, cho nên phương trình mặt giới hạn theo tiêu chuẩn Tresca trong không gian $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ có dạng :

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2C = 0 \quad (1.15)$$

Phương trình này biểu diễn mặt phẳng song song với trục thủy tĩnh.

Nếu không hạn chế điều kiện $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, mà coi tất cả các ứng suất chính có vai trò như nhau, thì phương trình (1.15) biến thành sáu phương trình được viết theo công thức

$$\sigma_i - \sigma_j - 2C = 0 \quad (1.16)$$

trong đó $i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3 ; i \neq j$.

Sáu mặt phẳng thỏa mãn sáu phương trình (1.16), tạo thành khối lăng trụ sáu mặt đều trong không gian các phương chính. (hình 1-5).

Tiêu chuẩn Mises khẳng định rằng, ứng suất tiếp bất diện giới hạn có trị số không đổi C :

$$\begin{aligned} \tau_0 - C &= 0, \\ \text{dạng khác của tiêu chuẩn Mises là} \\ \sqrt{J_2} - C &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Mặt thỏa mãn tiêu chuẩn Mises có dạng hình trụ, trục của nó trùng với trục thủy tĩnh (xem hình 1-5).

Từ các công thức biểu diễn các tiêu chuẩn Tresca và Mises cũng như từ biểu đồ, rõ ràng là các tiêu chuẩn này, không đặt trị số các ứng suất tiếp giới hạn phụ thuộc vào trị số lực nén thủy tĩnh : các tiết diện lăng trụ và hình trụ của mặt phẳng bất diện bất kì là như nhau.

Tiêu chuẩn Coulomb thì đặt trị số ứng suất tiếp giới hạn τ trên một mặt phụ thuộc vào ứng suất pháp trên mặt đó σ :

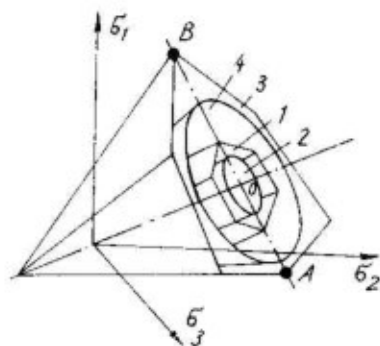
$$\tau = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.18)$$

hoặc cách khác là :

$$C + \sigma \operatorname{tg} \varphi - \tau = 0. \quad (1.19)$$

Trị số C gọi là lực dính, φ - là góc ma sát trong. Ứng suất tiếp có trị số lớn nhất sẽ tồn tại trên các mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng tác dụng của các ứng suất chính lớn nhất σ_1 và nhỏ nhất σ_3 .

Các ứng suất τ và σ trên các mặt phẳng đó có thể biểu diễn qua các ứng suất chính σ_1 và σ_3 nhờ các công thức quay trục tọa độ :



Hình 1-5. Biểu đồ các mặt giới hạn Tresca (1), Mises (2), Coulomb (3) và Botkin (4).

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha ; \quad (1.20)$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha, \quad (1.21)$$

trong đó α - là góc giữa mặt phẳng và phương σ_1 .

Đặt trị số σ và τ từ biểu thức (1.20) và (1.21) vào công thức (1.19), lấy đạo hàm biểu thức vừa nhận được theo α và cho bằng không ta sẽ có một phương trình. Giải phương trình này sẽ tìm được góc nghiêng của các mặt trượt α , trên các mặt đó hiệu các ứng suất chống trượt ($C + \sigma \operatorname{tg} \varphi$) và ứng suất trượt τ là lớn nhất :

$$\alpha = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Sau khi đặt trị số α này vào biểu thức (1.20) và (1.21), sau đó đặt các trị số σ và τ vào công thức (1.19), ta nhận được tiêu chuẩn Coulomb theo các ứng suất chính σ_1 và σ_3 :

$$\sigma_1 - \operatorname{ctg} \Psi \cdot \sigma_3 - S = 0, \quad (1.22)$$

trong đó

$\operatorname{ctg} \Psi = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$; $S = 2C \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$ - cường độ nén một trục, hoặc cách khác :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3 + 2C \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (1.23)$$

Nếu coi các ứng suất chính có vai trò như nhau, thì ta sẽ viết phương trình (1.22) dưới dạng :

$$\sigma_i - \operatorname{ctg} \Psi \sigma_j - S = 0 \quad (1.24)$$

trong đó $i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3 ; i \neq j$.

Sáu mặt phẳng biểu diễn bằng phương trình (1.24) tạo thành hình tháp sáu cạnh, được thể hiện trên hình 1.5. Ta hãy xem xét đặc điểm của hình lục giác có được khi cắt hình tháp coulomb bằng mặt phẳng bất diện bất kì.

Tọa độ cực cực tiểu của các đỉnh tiết diện đó $r_{\min} = OA$ được xác định bởi công thức (1.3) khi $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$. Theo công thức (1.24) ta có :

$$\sigma_1 = \sigma_2 + S + \sigma_3 \operatorname{ctg} \Psi. \quad (1.25)$$

Khi đó :

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2S + \sigma_3(2 \operatorname{ctg} \psi + 1)}{3} \quad (1.26)$$

rút ra

$$\sigma_3 = \frac{3\sigma_0 - 2S}{2 \operatorname{ctg} \psi + 1} \quad (1.27)$$

Đặt trị số σ_3 từ công thức (1.27) vào công thức (1.25), sau đó đặt trị số σ_1, σ_2 và σ_3 vào phương trình đầu tiên của (1.3), ta nhận được :

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{S + \sigma_0 \operatorname{ctg} \Psi - \sigma_0}{1 + 2 \operatorname{ctg} \Psi} \quad (1.28)$$

Tiến hành bước tính toán tương tự khi điều kiện $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, ta xác định được tọa độ cực đại $r_{\max} = OB$:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{S + \sigma_0 \operatorname{ctg} \Psi - \sigma_0}{2 + \operatorname{ctg} \Psi} \quad (1.29)$$

Từ công thức (1.28) và (1.29) ta có :

$$\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \quad (1.30)$$

Tiêu chuẩn Coulomb-Mises tổng quát (còn gọi là tiêu chuẩn Mises - Slesker, tiêu chuẩn Botkin) đặt trị số ứng suất tiếp bất diện phụ thuộc vào ứng suất pháp bất diện :

$$\tau_0 - C_0 - \alpha \sigma_0 = 0, \quad (1.31)$$

trong đó C_0 và α - là các hằng số về ý nghĩa gần với C và $\operatorname{tg} \varphi$ trong phương trình Coulomb (1.19).

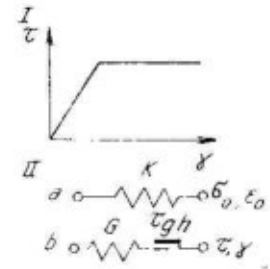
Tiêu chuẩn Coulomb-Mises tổng quát thể hiện một hình nón trong không gian ứng suất chính (xem hình 1 - 5). Bài toán thuần túy về hình học là tìm hàng số trong phương trình (1.31) để thể hiện hình nón nội tiếp trong hình chóp Coulomb hoặc hình nón ngoại tiếp bao quanh nó.

Dạng tổng quát của phương trình mặt giới hạn là :

$$F(\sigma) = 0. \quad (1.32)$$

Môi trường có biến dạng đàn hồi cho đến lúc đạt trạng thái giới hạn và sau đó có sức chống không thay đổi khi biến dạng tiếp tục được gọi là môi trường đàn - dẻo lý tưởng, hoặc là môi trường Reuss - Prandtl (Hình 1-6). Để biểu diễn các tính chất của môi trường này bằng biểu đồ người ta dùng yếu tố ma sát khô với sức chống giới hạn τ_{gh} , mà biến dạng của nó bằng không khi $\tau < \tau_{gh}$ và không xác định khi $\tau = \tau_{gh}$.

Mô hình biến dạng của môi trường đàn - dẻo lý tưởng phản ứng đàn hồi đối với lực nén thủy tĩnh và có giới hạn các ứng suất tiếp được xác định theo một tiêu chuẩn nào đấy, thể hiện trên hình 1-6, II, a và 1-6, II, b.

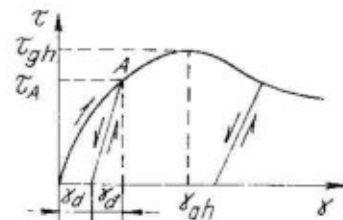


Hình 1-6. Đặc trưng biến dạng (I) và mô hình môi trường đàn - dẻo lý tưởng (II).

1.5. MẶT CHÁY

Trong quá trình tích lũy biến dạng dẻo (biến dạng không thuận nghịch), các vật liệu thực thay đổi sức chịu tải trọng tác dụng khác với môi trường lý tưởng Reuss-Prandtl. Khi đó đồng thời với biến dạng dẻo, trong vật liệu xuất hiện cả biến dạng thuận nghịch đàn hồi. Nếu vật liệu có kết cấu chặt và chỉ có biến dạng đàn hồi thể tích do tác dụng của thành phần trạng thái ứng suất thủy tĩnh (chàng hạn như kim loại, đất sét bão hòa trong điều kiện không thoát nước hoặc là đất đá cứng, thì biến dạng dẻo chỉ có thể xuất hiện dưới tác dụng của bộ phận tenxơ ứng suất lệch. Biểu đồ liên hệ ứng suất tiếp với biến dạng trượt có dạng tổng quát được đưa ra trên hình 1-7. Trạng thái biến dạng tại điểm A đặc trưng bởi thành phần dẻo γ_d và thành phần đàn hồi γ_0 . Sự dỡ tải từ điểm A sẽ kèm theo hiện tượng hồi phục biến dạng đàn hồi, còn khi tăng tải lại đến mức T_A như trước thì sẽ xảy ra thuận túy đàn hồi mà không xuất hiện các biến dạng dẻo phụ thêm. Như vậy, mức ứng

suất đạt được khi tăng tải lại sau khi dỡ tải bước đầu, sẽ là ranh giới vùng trạng thái đàn hồi, và ta gọi nó là giới hạn chảy. Chừng nào ứng suất τ chưa vượt quá sức bền giới hạn của vật liệu τ_{gh} , thì quá trình tăng tải còn kèm theo sự tăng giới hạn chảy, gọi là sự tăng bền. Sau khi đạt được sức bền giới hạn, biến dạng của vật liệu có thể kèm theo sự hạ thấp giới hạn chảy, gọi là sự khử bền.



Hình 1-7. Biểu đồ quan hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng.

Trong không gian ứng suất chính, giới hạn chảy tạo thành một mặt, gọi là *mặt chảy*. Đối với vật liệu có biến dạng dẻo chỉ xuất hiện dưới tác dụng của ứng suất tiếp, thì dạng mặt chảy đơn giản nhất sẽ là mặt được mô tả bằng phương trình tương tự phương trình của mặt giới hạn. Mặt chảy sẽ có các phương trình như sau :

theo tiêu chuẩn Tresca

$$F = \tau - C + f(k) = 0, \quad (1.33)$$

theo tiêu chuẩn Mises :

$$F = \tau_0 - C + f(k) = 0, \quad (1.34)$$

theo tiêu chuẩn Coulomb :

$$F = \tau - C - \sigma \tan \varphi + f(k) = 0, \quad (1.35)$$

theo tiêu chuẩn Coulomb - Mises tổng quát :

$$F = \tau_0 - C_0 - \alpha \sigma_0 + f(k) = 0, \quad (1.36)$$

trong đó $f(k)$ - là hàm biểu thị sự nở rộng mặt chảy theo mức độ tăng thông số bền k . Hàm số $f(k)$ giảm đều đến không ở đoạn tăng bền và lại tăng lên ở đoạn khử bền. Trị số biến dạng dẻo tích lũy (tăng bền biến dạng) hoặc trị số năng lượng biến dạng dẻo (tăng bền năng lượng) được dùng làm thông số tăng bền.

Các phương trình mặt chảy (1.33) - (1.36) có thể biểu diễn qua các ứng suất chính hoặc qua các thành phần tenxơ ứng suất bằng các phép thế thích hợp. Dạng tổng quát của phương trình mặt chảy là :

$$F(\{\sigma\}, f(k)) = 0. \quad (1.37)$$

Khi $f(k) > 0$, các phương trình sẽ mô tả các mặt ở bên trong mặt giới hạn tương ứng ; khi $f = 0$, mặt chảy trùng với mặt giới hạn.

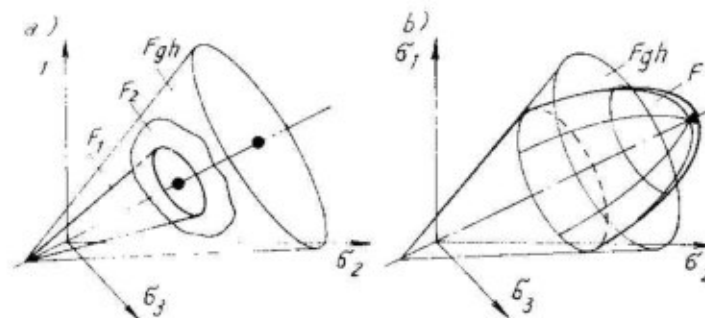
Trong quá trình tăng tải và biến dạng dẻo thì

$$F = 0 \quad (1.38)$$

Nếu như xảy ra dỡ tải, thì τ trong các phương trình (1.33) - (1.36) giảm xuống, còn $f(k)$ không đổi ; một cách tương ứng là $F < 0$, điều này thực chất có thể là dấu hiệu chuyển môi trường sang môi liên hệ đàn hồi giữa mức tăng ứng suất và biến dạng.

Nếu nghiên cứu môi trường đàn dẻo li tưởng Reuss-Prandtl, thì mặt giới hạn của nó là mặt chảy duy nhất. Phương trình của mặt này không chứa hàm tăng bền $f(k)$.

Cho đến nay chúng ta mới chỉ nghiên cứu các vật liệu có biến dạng không thuận nghịch (biến dạng dẻo) xuất hiện dưới tác dụng của các ứng suất tiếp. Mặt giới hạn của chúng là một mặt trong họ các mặt chảy. Trong khi đó các vật liệu xốp, bao gồm cả đất, thì có thể có biến dạng dẻo không thuận nghịch dưới tác dụng không chỉ do thành phần trạng thái ứng suất lệch mà còn do thành phần trạng thái ứng suất thủy tĩnh. Độ chặt của môi trường xốp khi nén mọi phía có thể tăng lên không thuận nghịch và không hồi phục được khi dỡ tải ; các tính chất về nén của đất khi tăng tải vượt quá áp lực mà đất chịu trong quá trình lịch sử địa chất chính là như vậy.

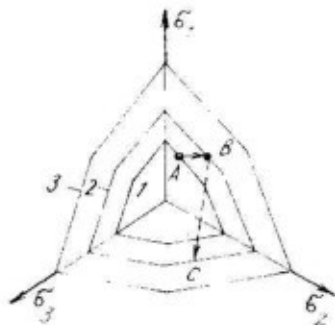


Hình 1-8. Biểu đồ mặt chảy của môi trường

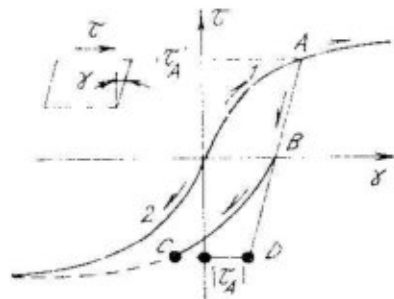
a - môi trường không lên chặt ; b - môi trường lên chặt

Mặt chảy của các vật liệu tương tự phải giới hạn những vùng kín nào đó trong không gian ứng suất chính. Chẳng hạn *vùng đàn hồi* có thể được giới hạn bởi hai mặt chảy (hình 1-8, a) : mặt F_1 diễn tả giới hạn chảy theo thành phần lệch, còn mặt F_2 - theo thành phần thủy tĩnh. Có thể dùng mặt nhẵn hình mũ kín làm mặt chảy F (hình 1-8, b). F_{gh} trên hình 1-8 là mặt giới hạn.

Đối với tất cả các mặt chảy và các mặt giới hạn đã được đề cập thì trục thủy tĩnh là trục trung tâm. Quá trình tăng bền được mô tả bằng các mặt đó gọi là *tăng bền đẳng hướng*. Theo khái niệm tăng bền đẳng hướng thì sự tăng tải vật liệu từ điểm A đến điểm B sẽ dẫn tới sự mở rộng mặt chảy từ vị trí 1 đến vị trí 2 (hình 1-9). Sự thay đổi trạng thái ứng suất tiếp theo trong phạm vi đường chu vi 2 (chẳng hạn, đến điểm C) của vật liệu tăng bền đẳng hướng sẽ không kèm theo sự xuất hiện biến dạng dẻo. Tuy nhiên, trên thực tế, tính chất của các vật liệu đàn dẻo khi tăng tải lại có thể khác hẳn.



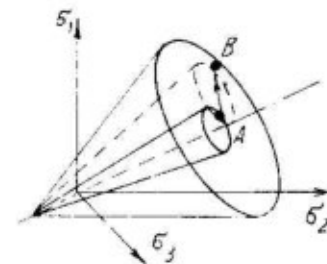
Hình 1-9. Biểu đồ tăng bền đẳng hướng
1, 2 - Vị trí các mặt chảy liên tiếp;
3 - mặt giới hạn



Hình 1-10. Biểu đồ hiển tượng trễ khi tăng tải đa trị.

Ta hãy nghiên cứu mẫu đất bị trượt theo các phương khác nhau. Trên hình 1-10 các đường 1 và 2 thể hiện đó thị liên hệ các ứng suất tiếp và biến dạng khi mẫu trượt về bên phải và bên trái từ trạng thái không biến dạng ban đầu. Nếu mẫu đất trượt về bên phải đến điểm A, thì khi dỡ tải tiếp theo các biến dạng sẽ là đàn hồi thuần túy (điểm B); tuy nhiên việc tăng tải tiếp tục bằng các ứng suất ngược dấu - có nghĩa là về bên trái - sẽ kèm theo sự

xuất hiện các biến dạng dẻo với mức ứng suất tuyệt đối thấp hơn, và biểu đồ biến dạng sẽ có dạng BC, mà không phải BD như dự đoán của mô hình vật liệu bền đẳng hướng. Như vậy, mặt chảy của vật thể đàn - dẻo thực tế (hình 1-11) khi thay đổi trạng thái ứng suất từ điểm A đến điểm B sẽ làm thay đổi không chỉ kích thước mà cả vị trí của nó trong không gian ứng suất chính. Dạng bền như thế gọi là *dạng bền động hình học*.



Hình 1-11. Đồ thị sự tăng bền động hình học

Ta gọi quá trình thay đổi trạng thái ứng suất, trong đó tất cả các thành phần ứng suất tăng lên tỉ lệ với một thông số tăng không đổi là sự tăng tải đơn. Rõ ràng là, đường mút tia thay đổi trạng thái ứng suất này trong không gian ứng suất chính sẽ có dạng tia, xuất phát từ gốc toạ độ. Khi tăng tải đơn, các vật liệu bền động hình học và đẳng hướng sẽ phản ứng lại như nhau, và việc phân tích các quá trình này có thể được xây dựng trên giả thuyết bền đẳng hướng, điều đó cho phép vận dụng công cụ toán học đơn giản hơn, đòi hỏi bộ các đặc trưng vật liệu ít hơn.

Để phân tích các quá trình khi tăng tải đổi chiều cần phải kể đến đặc tính bền động hình học. Trong một số trường hợp để giải các bài toán đàn-dẻo được thuận tiện, các mặt chảy và mặt giới hạn, trong đó kể các mặt không phải là thể xoay sẽ được thể hiện dưới dạng các mặt phẳng mà phương trình của chúng có đạo hàm liên tục. Để giải quyết vấn đề này, O.Zienkiewicz và G.Pande [50] đã đề nghị sử dụng tọa độ Lode.

Phương trình của mặt bất kì đã đề cập có thể biểu diễn trong tọa độ Lode, sau khi đặt vào nó các biểu thức ứng suất chính trong tọa độ Lode theo công thức (1.4). Chẳng hạn, sau khi đặt biểu thức (1.4) vào tiêu chuẩn Coulomb (1.23), ta nhận được)

$$\tau_1 \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta \sin \varphi \right) - \sigma_1 \sin \varphi - C \cos \varphi = 0 \quad (1.39)$$

Phương trình này trong khoảng $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ thể hiện một trong sáu mặt của hình chóp Coulomb. Khi thay $\sigma_o = \text{const}$ vào phương trình ta sẽ có tiết diện mặt tiêu chuẩn là mặt phẳng bất diện; còn khi thay $\theta = \text{const}$ thì sẽ có tiết diện kinh tuyến, thể hiện quan hệ τ_i và σ_o với giá trị thông số Lode cụ thể.

Phương trình mặt tiêu chuẩn (mặt giới hạn) hoặc là mặt chảy ở dạng tổng quát có thể viết như sau

$$F = f(\sigma_o) + h(\tau_i)/g(\theta) = 0, \quad (1.40)$$

trong đó $f(\sigma_o)$, $h(\tau_i)$, $g(\theta)$ là các hàm số.

Tiêu chuẩn Coulomb (1.39) là một trong các trường hợp riêng của phương trình (1.40)

Vì trong mặt phẳng bất diện $f(\sigma_o) = \text{const}$, cho nên $\tau_i/g(\theta) = \text{const}$.

Để mô tả sự biến đổi τ_i trong các tiết diện kinh tuyến, chỉ cần nghiên cứu một trong các tiết diện này là đủ, chẳng hạn, tiết diện $\theta = \pi/6$. Sau khi kí hiệu trị số τ_i với $\theta = \pi/6$ là $\bar{\tau}_i$, ta viết $\tau_i = \bar{\tau}_i g(\theta)$.

Hàm số $g(\theta)$ khi $\theta = \pi/6$ phải có giá trị $g(\theta) = 1$. Trong tiết diện kinh tuyến này, phương trình (1.40) có dạng $F = f(\sigma_o) + h(\bar{\tau}_i) = 0$.

Để tránh khỏi đỉnh nhọn trong tiết diện kinh tuyến, O.Zienkiewicz [50] đưa ra tiết diện mặt tiêu chuẩn kinh tuyến mô tả bằng phương trình bậc hai có dạng tổng quát:

$$F = \alpha \sigma_o^2 + \beta \sigma_o + \gamma + \tau_i^2 = 0. \quad (1.41)$$

Khi đó phương trình tương ứng của toàn mặt sẽ có dạng:

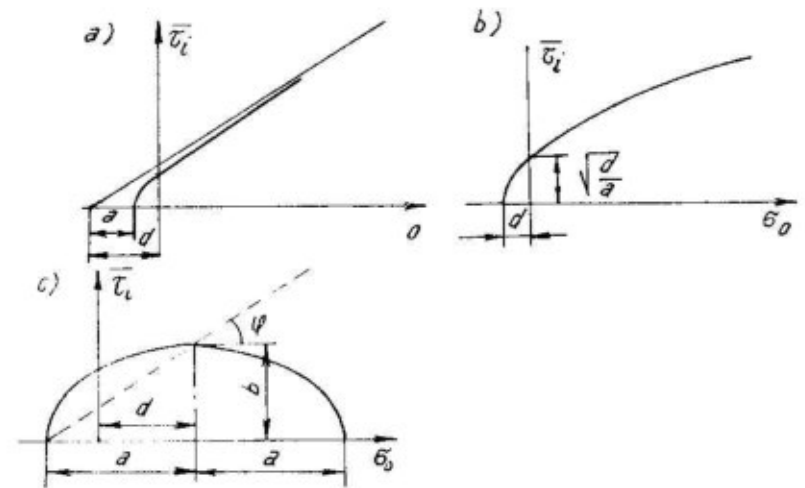
$$F = \alpha \sigma_o^2 + \beta \sigma_o + \gamma + \left(\frac{\bar{\tau}_i}{g(\theta)}\right)^2 = 0. \quad (1.42)$$

Biểu đồ đường thẳng Coulomb (hình 1-12, a) có thể lấy xấp xỉ với mức gần đúng bất kì bằng phương trình nhánh hypebôn nhận được từ phương trình (1.41) khi đặt vào nó các giá trị

$$\alpha = -\frac{b^2}{a^2}; \quad \beta = -2\frac{b^2}{a^2}d; \quad \gamma = b^2 - \frac{b^2}{a^2}d^2;$$

$$\frac{d - \sigma_o}{a} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\tau}_i}{b^2} + 1\right)} = 0.$$

Các trị số a, b và d được chỉ ra trên hình 1-12.



Hình 1-12. Các biểu diễn gần đúng của mặt chảy

Hiển nhiên, $d = C \text{ctg} \varphi$; $\frac{b}{a} = \text{tg} \varphi$. Nếu chọn giá trị a nhỏ thì có thể nhận được sự gần đúng khá cao với biểu đồ Coulomb đã cho. Xấp xỉ dạng parabol của biểu đồ đường cong Coulomb-Mohr (hình 1-12, b) có thể có dạng

$$\sqrt{\frac{d + \sigma_o}{a}} - \tau_i = 0.$$

Tiết diện dạng elip của mặt chảy có thể được mô tả bằng phương trình

$$\left(\frac{\sigma_o - d}{a}\right)^2 + \frac{\bar{\tau}_i^2}{b^2} = 1. \quad (1.43)$$

Nếu đặt điều kiện rằng, elip kết hợp với biểu đồ Coulomb như trên hình 1-12, c, thì: $a = d + C \text{ctg} \varphi$; $b = a \text{tg} \varphi$.

Trong tiết diện khối tám mặt, phương trình Coulomb (1.39) là đường thẳng có phương trình

$$g(\theta) = \frac{\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{6} \sin \varphi}{\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta \sin \varphi}$$

với các điểm nút A và B ở hai đầu của đoạn thẳng khi $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$

(hình 1-13)

Để tránh các góc có đạo hàm gián đoạn, K.Gudehus đưa ra hàm số

$$g(\theta) = \frac{2k}{(1+k) - (1-k) \sin 3\theta} \quad (1.44)$$

Phương trình này thể hiện trong hệ tọa độ cực một hình có ba trục đối xứng, mà tỉ lệ giữa các tọa độ cực cực đại và cực tiểu là

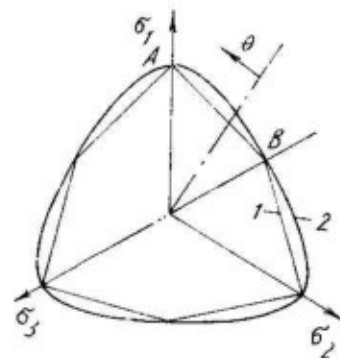
$$k = \frac{g(\theta)_{\min}}{g(\theta)_{\max}} \quad (1.45)$$

Khi $k = 1$, phương trình (1.44) thể hiện một vòng tròn (tiết diện này được tạo ra bởi các mặt theo tiêu chuẩn chảy Mises và tiêu chuẩn Coulomb-Mises, không phụ thuộc vào bất biến thứ ba).

Tỉ số r_{\min}/r_{\max} trong tiết diện khối tám mặt của hình chóp Coulomb thì đã được xác định trước đây - công thức (1.30). Khi $K = (3 - \sin \varphi)/(3 + \sin \varphi)$, phương trình (1.44) sẽ cho một hình tròn gần xấp xỉ tiết diện sáu cạnh Coulomb (hình 1.13).

1.6. LÍ THUYẾT BIẾN DẠNG DÈO

Những khái niệm cơ bản của lý thuyết biến dạng dẻo (LTBDD) do Genki đưa ra. Trong lý giải hiện nay đối với các vật liệu kiểu đất, LTBDD khẳng định rằng: ứng suất trong môi trường được xác định một cách đơn trị bởi các biến dạng của nó.



Hình 1-13. Tiết diện theo mặt bát diện của hình chóp Coulomb (1) và của mặt xấp xỉ (2)

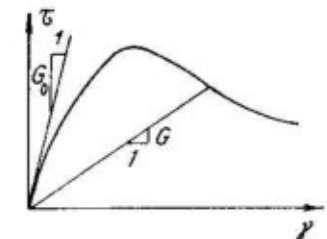
$$\{\sigma\} = [D_{dd}] \{\varepsilon\} \quad (1.46)$$

Vì ma trận $[D_{dd}]$ liên kết các giá trị biến dạng và ứng suất hiện tại, cho nên người ta gọi nó là ma trận cát tuyến.

Các phần tử của ma trận đàn-dẻo $[D_{dd}]$ là các hàm biến dạng (hoặc là hàm ứng suất). Trong trường hợp tổng quát ma trận $[D_{dd}]$ không đối xứng đối với đường chéo chính.

Nếu biến dạng dẻo không kèm theo tới xốp, thì có thể xếp ma trận ở dạng ma trận cát tuyến đàn hồi $[D_c]$ có các hằng số đàn hồi cát tuyến thay đổi $G = G(\varepsilon)$, $K = K(\varepsilon)$ hoặc là $G = G(\sigma)$, $K = K(\sigma)$. Điều đó được thể hiện bằng biểu đồ trên hình 1.14.

LTBDD ngầm định tính đồng trục của các ứng suất và biến dạng chính ở tất cả các giai đoạn biến dạng. Các điều kiện để áp dụng thành công những nguyên lý của LTBDD vào nghiên cứu các bài toán đàn dẻo là sự gia tải đơn kèm với tăng biến dạng theo tỉ lệ (tương ứng với việc duy trì các phương biến dạng chính) và trị số các biến dạng tương đối dẻo.



Hình 1-14. Sơ đồ kể tới tính dẻo khi trượt bằng môđun thay đổi G (G_0 - môđun ban đầu, 1 - biến dạng đơn vị)

1.7. LÍ THUYẾT CHÁY DÈO

Nếu không giới hạn điều kiện gia tải là tỉ lệ đơn, thì trường hợp gia tải tổng quát sẽ là các tenxơ lượng tăng tải trọng và ứng suất tác dụng không đồng trục (các tenxơ chỉ phương của chúng không cân bằng).

Giả sử trạng thái ứng suất - biến dạng khởi đầu của phần tử môi trường đàn-dẻo được đặc trưng bởi điểm A (hình 1-15) với các vectơ ứng suất và biến dạng tương ứng $\{\sigma\}$ và $\{\varepsilon\}$; nếu ta đặt vào phần tử đó lượng tăng ứng suất $\{d\sigma\}$, thì lượng tăng biến dạng

toàn phần $\{d\varepsilon\}$ có thể phân chia thành các phần đàn hồi $\{d\varepsilon^d\}$ và phần dẻo $\{d\varepsilon^p\}$.

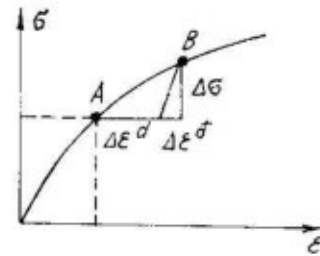
$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^d\} + \{d\varepsilon^p\}. \quad (1.46, a)$$

Lượng tăng biến dạng đàn hồi thì đồng trực với lượng tăng ứng suất và liên hệ với nó bởi quan hệ

$$\{d\varepsilon^d\} = [D]^{-1}\{d\sigma\}, \quad (1.46, b)$$

trong đó $[D]^{-1}$ - ma trận nghịch đảo của ma trận $[D]$.

Quan hệ của lượng tăng biến dạng dẻo với lượng tăng ứng suất thì hoàn toàn khác. Biến dạng dẻo xảy ra là do xuất hiện trượt trên các mặt có trị số ứng suất tiếp tới hạn nào đó hoặc là do gián đoạn các quan hệ ứng suất giới hạn nào đó.



Hình 1-15. Biểu đồ biến dạng đàn hồi và dẻo.

Nếu đặt lượng tăng ứng suất $\{\Delta\sigma\}$ vào phần tử ứng suất tới hạn, thì do lượng tăng này nhỏ mà các phương ứng suất chính và phương các mặt ứng suất tới hạn liên quan với chúng sẽ không thay đổi và lượng tăng biến dạng dẻo do sự trượt bổ sung trên các mặt này sẽ đồng trực với các ứng suất tác dụng $\{\sigma\}$

Tính đồng trực của lượng tăng biến dạng dẻo chính với các ứng suất chính cho phép phân tích chúng trong các trục trùng với các trục ứng suất chính, còn tenxơ lượng tăng biến dạng dẻo có thể đưa ra dưới dạng

$$d\varepsilon_{ij}^d = \lambda G_{ij}, \quad (1.47)$$

trong đó λ - hệ số tỉ lệ; G_{ij} - tenxơ đối xứng đồng trực với tenxơ ứng suất σ_{ij} .

Tính đồng trực của tenxơ G_{ij} với tenxơ σ_{ij} sẽ được đảm bảo trong trường hợp các thành phần tenxơ G_{ij} là các đạo hàm riêng của hàm vô hướng nào đó của các ứng suất chính (hoặc các bất biến) của tenxơ ứng suất :

$$G_{ij} = \partial g / \partial \sigma_{ij} \quad (1.48)$$

trong đó $g = g(\{\sigma\}, k)$ - hàm vô hướng của các bất biến ứng suất và lịch sử tải trọng, được đặc trưng bằng thông số bền k . Chẳng hạn, nếu hàm g phụ thuộc vào ứng suất trung bình σ_0 , cường độ các ứng suất tiếp τ_i và thông số bền k (chúng cũng là các hàm ứng suất), thì đạo hàm $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ sẽ được tính theo công thức

$$\partial g / \partial \sigma_{ij} = (\partial g / \partial \sigma_0)(\partial \sigma_0 / \partial \sigma_{ij}) + (\partial g / \partial \tau_i)(\partial \tau_i / \partial \sigma_{ij}) + (\partial g / \partial k)(\partial k / \partial \sigma_{ij})$$

Giá trị các vectơ đạo hàm $\{\partial \sigma_0 / \partial \sigma\}$, $\{\partial \tau_i / \partial \sigma\}$ được nêu trong công thức (1.3).

Mặt được mô tả bởi hàm g trong không gian ứng suất chính, gọi là mặt thế dẻo.

Đặt phương trình (1.48) vào phương trình (1.47) sẽ được

$$d\varepsilon_{ij}^d = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.49)$$

hoặc ở dạng ma trận

$$\{d\varepsilon^d\} = \lambda \{a\}, \quad (1.50)$$

$$\text{trong đó } \{a\} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_y} \quad \dots \right\}^T.$$

Trước khi đặt lượng tăng ứng suất, phương trình chảy có dạng

$$F(\{\sigma\}, k) = 0. \quad (1.51)$$

Sau khi tăng ứng suất một trị số $\{\Delta\sigma\}$, phương trình chảy có dạng

$$F(\{\sigma\} + d\sigma, k + dk) = 0 \quad (1.52)$$

Khi so sánh các đẳng thức (1.51) và (1.52), ta thấy rằng $dF = 0$. Lấy vi phân phương trình (1.52) theo các phần sẽ dẫn tới phương trình

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \{b\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0, \quad (1.53)$$

$$\text{trong đó } \{b\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \dots \right\}^T$$

Nếu thông số bền là công của các biến dạng dẻo

$$k = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^d\},$$

thì

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^d\} \quad (1.54)$$

Ta đặt phương trình (1.50) vào (1.54) và sau đó vào (1.53) :

$$dF = \{b\}^T \{d\sigma\} + \lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\} = 0, \quad (1.55)$$

từ đó có

$$\{b\}^T \{d\sigma\} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}. \quad (1.56)$$

Đặt quan hệ (1.46,b) và (1.50) vào phương trình (1.46,a) :

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \{a\}. \quad (1.57)$$

Nhân cả hai vế phương trình (1.57) với $\{b\}^T [D]$:

$$\{b\}^T [D] \{d\varepsilon\} = \{b\}^T [D] [D]^{-1} \{d\sigma\} + \lambda \{b\}^T [D] \{a\}.$$

Thay thành phần của vế phải tương ứng với phương trình (1.56)

là $-\lambda \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}$ rồi từ phương trình đó rút ra λ :

$$\lambda = \frac{\{b\}^T [D] \{d\varepsilon\}}{\{b\}^T [D] \{a\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}} \quad (1.58)$$

Đặt giá trị λ nhận được vào phương trình (1.57), sau khi biến đổi, ta có

$$\{d\sigma\} = [D_{dd}] \{d\varepsilon\}, \quad (1.59)$$

$$\text{trong đó } [D_{dd}] = [D] - \frac{[D] \{a\} \{b\}^T [D]}{\{b\}^T [D] \{a\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \{a\}} \quad (1.60)$$

- là ma trận liên hệ các ứng suất và biến dạng đàn dẻo [50].

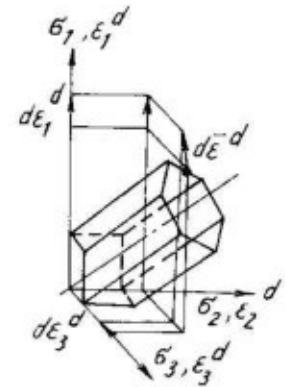
Các phần tử của ma trận $[D_{dd}]$ phụ thuộc vào mức ứng suất và biến dạng hiện thời. Ma trận đó liên kết các giá số ứng suất và biến dạng nhỏ vô cùng với nhau, và người ta gọi nó là ma trận đàn dẻo tiếp tuyến.

Nếu nghiên cứu môi trường không bền Reuss - Prandtl, thì có $\partial F / \partial k = 0$, và ở mẫu số của phân số trong các công thức (1.59) - (1.60) còn lại một số hạng [3].

Nếu mặt chảy và mặt thế dẻo trùng nhau, thì vectơ lượng tăng biến dạng $d\varepsilon^d$ vuông góc với mặt chảy. Trong lý thuyết dẻo của môi trường không bị ép co (kim loại) (tức môi trường có biến dạng dẻo chỉ dưới tác dụng của tenxơ lệch ứng suất, và có mặt chảy song song với trục thùy tĩnh), sự trùng hợp của mặt chảy và dẻo là có cơ sở về mặt vật lý và toán học. Tính vuông góc của vectơ $\{d\varepsilon^d\}$ với mặt chảy trong lý thuyết dẻo của kim loại gọi là *nguyên lý pháp tuyến* hoặc là *định luật chảy kết hợp*.

Ta hãy nghiên cứu đặc điểm của quá trình biến dạng dẻo bằng định luật chảy kết hợp và mặt chảy kiểu Tresca (hình 1-16)

Thứ nhất, bất kì một vectơ $d\varepsilon^d$ nào trực giao với mặt chảy và trục của nó, thì sẽ tương ứng nằm trong một mặt bát diện nào đó, được đặc trưng bởi phương trình $\varepsilon_1^d + \varepsilon_2^d + \varepsilon_3^d = \text{const}$, và vì $(\varepsilon_1^d + \varepsilon_2^d + \varepsilon_3^d)$ là biến dạng thể tích, cho nên với dạng mặt chảy đã cho theo định luật chảy kết hợp, biến dạng dẻo thể tích sẽ không có. Ta thấy ngay rằng, nếu mặt chảy không song song với trục thùy tĩnh, thì định luật chảy kết hợp sẽ dự đoán sự thay đổi thể tích trong quá trình chảy dẻo : thể tích tăng lên $(d\varepsilon_1^d + d\varepsilon_2^d + \varepsilon_3^d)$ khi các mặt



Hình 1-16. Biểu diễn bằng đồ thị định luật chảy kết hợp

chảy mở rộng (kiểu Coulomb hoặc mặt hình nón của tiêu chuẩn khái quát Coulomb - Mises), ở các mặt đó $\frac{\partial J_2}{\partial I_1} > 0$, và thể tích giảm bớt khi các mặt có $\frac{\partial J_2}{\partial I_1} < 0$ (thu hẹp về phía ép co thùy tĩnh).

Phân tích hình 1-16, dễ dàng nhận thấy rằng, vectơ $\{d\epsilon^d\}$ trực giao với trục ϵ_2^d , có nghĩa là không có biến dạng $d\epsilon_2^d$ dọc chiều tác động của ứng suất σ_2 . Khi đó hiển nhiên rằng, mật lắng trụ mà vectơ $d\epsilon^d$ vuông góc với nó, được đặc trưng bằng bất đẳng thức

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.61)$$

Tiêu chuẩn Tresca, cũng như tiêu chuẩn Coulomb, khẳng định rằng, quá trình biến dạng được xác định chỉ bằng quan hệ của các ứng suất chính cực đại và cực tiểu (σ_1 và σ_3), còn trị số ứng suất trung gian σ_2 không đóng vai trò gì, và biến dạng dẻo dọc theo nó không tồn tại. Như vậy, trong trường hợp này định luật chảy kết hợp tương ứng với cơ học của quá trình.

Mật chảy và mật thế dẻo chung trong định luật chảy kết hợp cho

$$g = F_1, \quad \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}.$$

Tích $\{a\}\{b\}^T$ trong công thức (1.60) và tất cả ma trận $[D_{dd}]$ trong đó là các ma trận đối xứng. Ma trận $[D_{dd}]$ đối với các vật thể tăng bền với định luật chảy kết hợp và không tăng thế tích khi chảy dẻo (nghĩa là khi các mật chảy có $\frac{\partial J_2}{\partial I_1} < 0$) có thể được trình bày như ma trận đàn hồi có các giá trị tiếp tuyến G và K biến thiên.

1.8. TÍNH ĐÀN NHỚT VÀ TÍNH ĐÉO NHỚT

Biến dạng của vật liệu theo thời gian dưới tác dụng của tải trọng không đổi được gọi là *từ biến*, còn hiện tượng ứng suất trong vật liệu giảm khi biến dạng không đổi được gọi là *sự rão*. Để biểu diễn bằng đồ thị các tính chất lưu biến của vật liệu người ta sử dụng yếu tố tính nhớt dưới dạng bộ giảm chấn thủy lực, mà tốc độ biến dạng của nó $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ tỉ lệ với ứng suất σ :

$$\dot{\epsilon} = \sigma/\eta,$$

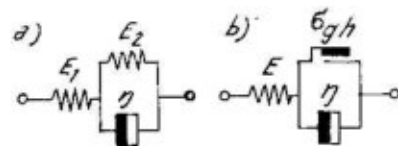
trong đó η - là hệ số nhớt.

Môi trường có chứa phần tử nhớt, liên kết nối tiếp với các phần tử bất kỳ khác hoặc với các khối trong mô hình biến dạng của mình, được gọi là *môi trường nhớt*. Môi trường này dưới tác dụng của tải trọng không đổi sẽ có biến dạng tăng vô hạn theo thời gian.

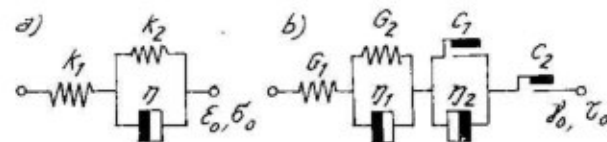
Môi trường có chứa phần tử nhớt chỉ liên kết song song với phần tử đàn hồi trong mô hình của mình được gọi là *môi trường đàn - nhớt*. Môi trường đàn - nhớt đơn giản nhất được biểu thị trên hình 1-17.a. Biến dạng của môi trường này dưới tác dụng của tải trọng không đổi sẽ tăng theo thời gian với tốc độ giảm dần tới một giới hạn tỉ lệ với tính dẻo biến dạng chung của các phần tử, theo quan hệ

$$\epsilon = \sigma \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\frac{\sigma}{\eta}}) \right]. \quad (1.62)$$

Nếu trong mô hình của mình, môi trường bao gồm phần tử nhớt, nhưng liên kết song song với phần tử dẻo, thì người ta gọi nó là *môi trường dẻo - nhớt*. Thí dụ môi trường dẻo - nhớt đơn giản nhất được biểu diễn trên hình 1-17,b.



Hình 1-17. Mô hình môi trường đàn - nhớt (a) và dẻo - nhớt (b)



Hình 1-18. Mô hình các môi trường có phản ứng khác nhau đối với phần tử ứng suất thủy tĩnh (a) và ứng suất lệch (b) ($C_1 < C_2$)

Khi gia tải thấp hơn giới hạn ($\sigma < \sigma_{gh}$) biến dạng của môi trường này hoàn toàn đàn hồi, còn khi tải trọng cao hơn giới hạn, thì môi trường thể hiện như môi trường nhớt và biến dạng tăng vô hạn.

Môi trường có thể có các mô hình lưu biến khác nhau đối với các thành phần tenxơ ứng suất lệch và thủy tĩnh (hình 1-18). Phản ứng đối với nén thủy tĩnh, dĩ nhiên không thể là nhớt hoặc dẻo - nhớt, bởi vì biến dạng thể tích không thể là vô hạn. Trong khi đó, phản ứng đối với thành phần tenxơ lệch có thể là *dàn - nhớt* ($\tau < C_1$), *dẻo - nhớt* ($C_2 > \tau > C_1$), và *dẻo* ($\tau > C_2$) khi mức ứng suất khác nhau.

Khi phân tích các quá trình lưu biến, người ta cố gắng mô tả các tính chất của môi trường bằng các mô hình biến dạng đơn giản nhất. Ta sẽ nghiên cứu quy luật biến dạng và các phương trình liên hệ đối với hai môi trường đơn giản nhất.

a) Giả sử phản ứng thể tích của môi trường là hoàn toàn đàn hồi, còn phản ứng tenxơ lệch là đàn - dẻo (hình 1-17, a). Nếu giải được bài toán về biến dạng theo thời gian của môi trường này dưới tải trọng không đổi ở thời điểm $t = 0$, thì lời giải đối với thời điểm bất kì t có thể thu được ở dạng tuyến tính nhỏ T sử dụng ma trận đàn hồi $[D_1]$, trong đó môđun nén thể tích không đổi, còn môđun trượt G_1 phụ thuộc vào thời gian :

$$\{\sigma\} = [D_1]\{\varepsilon\}.$$

Môđun trượt G_1 được xác định bằng biểu thức rút ra từ công thức (1.62), còn hệ số Poisson dễ dàng tìm được từ công thức (1.13) :

$$G_1 = \frac{G_1 G_2}{G_1 (1 - e^{-\frac{tG_2}{\eta}}) + G_2}; \quad (1.63)$$

$$\nu_1 = \frac{3K - 2G_1}{6K + 2G_1},$$

trong đó K là môđun nén thể tích.

Phương pháp này được ta áp dụng khi biến dạng từ biến tương đối nhỏ, bởi vì khi chúng lớn lên thì $G_1 \rightarrow 0$, còn $\nu_1 \rightarrow 0,5$; điều đó gây khó khăn cho việc nhận được lời giải đàn hồi.

b) Ta nghiên cứu môi trường có phản ứng thể tích là đàn hồi, còn phản ứng trượt là dẻo - nhớt (hình 1-17, b).

Mối liên hệ ứng suất $\{\sigma\}$ và biến dạng $\{\varepsilon\}$ trong môi trường này sẽ được xác định bằng quan hệ

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^d\}).$$

Trong đó tốc độ biến dạng dẻo nhớt $\{\varepsilon^d\}$ phụ thuộc vào mức quá tải của môi trường, còn quan hệ của các thành phần ε_{ij}^d phụ thuộc vào quy luật chảy dẻo.

Như đã thấy trước đây, mật chảy duy nhất của môi trường đàn - dẻo lí tưởng là mật giới hạn của nó và có phương trình

$$F(\{\sigma\}) = 0.$$

Nếu $F > 0$, thì điều đó có nghĩa là môi trường quá tải và trong nó diễn ra quá trình từ biến - rão với tốc độ tỉ lệ với F .

Để xác định quan hệ của các thành phần biến dạng dẻo, cần phải xác định mật thể dẻo g . Khi đó lượng tăng thành phần biến dạng dẻo trong khoảng thời gian dt là

$$d\varepsilon_{ij}^d = \frac{1}{\eta} F \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} dt. \quad (1.64)$$

Trị số biến dạng dẻo toàn phần

$$\{\varepsilon^d\} = \int_0^t \{d\varepsilon^d\}. \quad (1.65)$$

Rõ ràng là cho tới thời điểm $t = \infty$, khi các ứng suất trong môi trường chưa vượt ra ngoài mật giới hạn, tốc độ tăng biến dạng theo thời gian vẫn bằng không và phần tử nhớt vẫn chưa đóng vai trò gì. Trạng thái ứng suất - biến dạng của môi trường này dưới tải trọng không đổi vẫn tương tự trạng thái của môi trường đàn - dẻo lí tưởng dưới chính tải trọng đó.

1.9. CƠ HỌC MÔI TRƯỜNG HAI PHA

Ta sẽ nghiên cứu dòng ổn định phẳng trong phần tử vuông của vật thể rỗng thấm có kích thước $dx \times dy$. Lưu lượng đi qua mỗi mặt của phần tử trong một đơn vị thời gian bằng tích của diện tích mặt này với thành phần tốc độ thấm vuông góc với mặt đó. Lấy tổng đại số các

lưu lượng qua mặt của phần tử và cân bằng với không, ta sẽ nhận được đẳng thức biểu thị tính liên tục của dòng

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.66)$$

Chuyển động của chất lỏng trong các đất rỗng thấm là chảy tầng. Tốc độ thấm trong dòng chảy tầng liên hệ với gradien cột nước bằng định luật Darcy :

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}; v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}; v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (1.67)$$

trong đó k_x, k_y, k_z - là hệ số thấm tương ứng theo phương của các trục x, y, z ; H - là cột áp.

Đặt các hệ thức vào phương trình (1.66), ta nhận được

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (1.68)$$

Trong vật thể thấm đẳng hướng, khi $k_x = k_y = k_z$ phương trình (1.68) được rút gọn và có dạng

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (1.69)$$

Phương trình vi phân này được gọi là *phương trình điều hòa*, hoặc *phương trình Laplaso*.

Việc giải bài toán thấm ổn định cụ thể sẽ dẫn tới giải phương trình vi phân (1.68) hoặc là phương trình (1.69) với các điều kiện biên cụ thể.

Bây giờ giả sử phần tử vuông được nghiên cứu trong khoảng thời gian dt có biến dạng $d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, \dots, d\gamma_{yz}$. Trong đó biến dạng thể tích của phần tử là

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z. \quad (1.70)$$

Trong các môi trường rỗng phân tán kiểu đất, tính nén của các hạt là một phần rất nhỏ trong tính nén chung của môi trường, và khi không có sai số rõ rệt có thể cho rằng, biến dạng thể tích của môi trường rỗng bằng biến thiên thể tích của không gian rỗng chứa đầy chất lỏng.

Biến thiên thể tích chất lỏng trong không gian lỗ rỗng trong thời gian dt được hình thành từ dòng chất lỏng thuần túy nhập thêm vào phần tử, dòng này bằng tổng đại số lưu lượng qua các mặt :

$$qdt = \left(k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) dt \quad (1.71)$$

và biến dạng thể tích đàn hồi của chất lỏng trong phần tử khi áp lực lên nó thay đổi

$$ndp/K, \quad (1.72)$$

trong đó n - là độ rỗng; dp - là biến thiên áp lực lỗ rỗng của chất lỏng; K - là môđun nén ép thể tích của chất lỏng.

Cân bằng biến dạng thể tích của phần tử với tổng các biểu thức (1.71) và (1.72), ta nhận được phương trình vi phân về tính liên tục của dòng chất lỏng :

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} - \frac{n}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + q = 0. \quad (1.73)$$

Các ứng suất trong đất σ^{ip} bao gồm áp lực lỗ rỗng và ứng suất trong cốt đất (ứng suất hiệu quả) :

$$\sigma_{ij}^{ip} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}, \quad (1.74)$$

trong đó, σ_{ij} - là ứng suất hiệu quả; p - áp lực lỗ rỗng; δ_{ij} - kí hiệu Kronecker.

Nếu coi cốt đất là vật thể đàn hồi - tuyến tính đẳng hướng thì liên hệ giữa ứng suất hiệu quả và biến dạng sẽ được mô tả bằng định luật Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (1.75)$$

Đặt phương trình (1.75) vào phương trình (1.74), ta nhận được phương trình cân bằng, liên kết ứng suất toàn phần trong đất với các biến dạng,

$$\sigma_{ij}^{ip} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} + p\delta_{ij}. \quad (1.76)$$

Các phương trình (1.73) và (1.76) xác định diễn biến của các quá trình xảy ra trong môi trường rỗng bão hòa nước dưới tác

dụng của tải trọng không đổi và biến đổi. Tích phân chung của chúng theo không gian khi các điều kiện biên đã cho, và theo thời gian khi các điều kiện ban đầu đã cho sẽ giải đáp được trạng thái ứng suất - biến dạng của cốt đất và sự phân bố áp lực lỗ rỗng tại thời điểm cụ thể.

Nếu bỏ qua tính nén của chất lỏng và hợp nhất các phương trình (1.73) và (1.76) thì đối với bài toán một chiều sẽ dễ dàng đi đến phương trình cổ kết thấm một chiều đã biết của Terzaghi. Định luật Hooke (1.75) đối với trường hợp một chiều có dạng :

$$\varepsilon = m_v \sigma, \quad (1.77)$$

trong đó m_v - hệ số nén ép của đất.

Tri số $\partial \varepsilon_v$ trong phương trình (1.73) khi đó bằng vi phân phương trình (1.77)

$$\partial \varepsilon_v = m_v \partial \sigma. \quad (1.78)$$

Nếu bỏ qua tính nén ép của chất lỏng lỗ rỗng, thì số hạng thứ hai trong công thức (1.74) triệt tiêu.

Số hạng thứ ba của công thức (1.74) được xác định từ công thức (1.71) khi $\partial H / \partial x = \partial H / \partial z = 0$;

$$q = k \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \quad (1.79)$$

Vì $\partial^2 H / \partial z^2 = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$, cho nên có thể trình bày công thức (1.79) dưới dạng

$$q = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2},$$

trong đó γ_w - là trọng lượng riêng của nước.

Đặt biểu thức (1.78) và (1.80) vào công thức (1.74), ta nhận được phương trình vi phân cổ kết một hướng Terzaghi

$$m_v \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$$

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn là sản phẩm và đồng thời là công cụ chủ lực mạnh của tiến bộ khoa học - kĩ thuật ngày nay. Khả năng to lớn của PPPTHH thể hiện đặc biệt rõ trong cơ học đất và đá - là các vật liệu đa dạng về tính chất cơ học và điều kiện gia tải.

Những ưu điểm đảm bảo tính phổ cập của PPPTHH là : dễ dàng nhận được lời giải cụ thể theo chương trình sẵn có ; có thể cô đặc mạng lưới các phần tử tại những nơi tùy ý có gradien thông số nghiên cứu cao ; có thể giải các bài toán có các điều kiện biên bất kì ; về nguyên lí có khả năng thực hiện trong các chương trình về tính chất cơ học bất kì của vật liệu, trình tự gia tải bất kì, v.v...

Các chương trình của PPPTHH ngày nay không còn đơn giản chỉ là phương pháp tính toán ứng suất mà sau đây người kĩ sư phải so sánh chúng với các tính chất của đất ; các chương trình của PPPTHH ngày nay về bản chất là công cụ để mô hình hóa toán học tất cả các quá trình xảy ra trong đất. Chúng tự động đối chiếu ứng suất với tính bền của đất và nhờ các thủ tục nhất định chúng đảm bảo sự tương ứng của bức tranh ứng suất với các điều kiện cân bằng và với các tính chất đã cho của đất. Khi đó người kĩ sư không cần phải phân tích trường ứng suất, hơn nữa các thông tin về chúng cũng trở nên không cần thiết. Một chương trình hoàn thiện có thể cung cấp cho người kĩ sư các thông tin không cần tiếp tục xử lí, trong đó có cả dạng biểu đồ.

Thủ tục cơ bản của PPPTHH đảm bảo giải được các bài toán tuyến tính như bài toán thấm chảy tầng ổn định và bài toán trạng thái ứng suất - biến dạng của môi trường có liên hệ đàn

hối - tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng. Các lời giải phi tuyến khác nhau đạt được bằng phép lặp nhiều lần các lời giải tuyến tính. Chương này nghiên cứu các thủ tục cơ bản của PPPTHH, còn việc mô tả các thủ tục để nhận các lời giải phi tuyến sẽ được tiến hành cùng với việc mô tả các mô hình đất cụ thể.

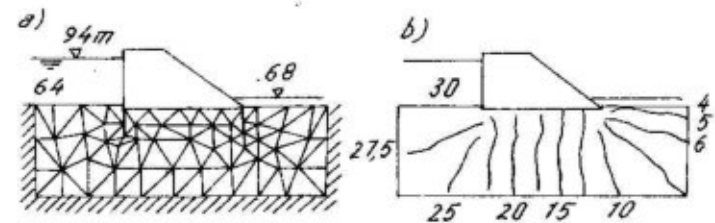
Quan niệm cơ bản của PPPTHH là trị số liên tục cần tìm - dù là cột áp của dòng thấm hay chuyển vị của các điểm trong vật thể biến dạng - được tính gần đúng bởi một bộ phân đoạn các hàm đơn giản nhất, cho trên các miền con (các phần tử) hữu hạn bị chặn. Nhờ thủ tục này mà phép lấy tích phân các phương trình vi phân được quy về giải hệ thống các phương trình tuyến tính. Các giá trị định lượng của đại lượng chưa biết sẽ được tìm thấy trong số lượng hạn chế các điểm (các nút) bị chặn của miền; còn trong phạm vi các phần tử các giá trị của hàm chưa biết và giá trị các đạo hàm của nó được xác định bằng các hàm xấp xỉ và các đạo hàm của chúng.

2.1. THẨM ỔN ĐỊNH

Việc nghiên cứu bài toán thẩm trong phạm vi cuốn sách này được quan tâm do hai nguyên nhân: thứ nhất, vì phép giải bài toán thẩm sẽ được ứng dụng khi nghiên cứu bài toán cố kết thấm của đất, thứ hai, vì những nguyên lý cơ bản của phương pháp phần tử hữu hạn được trình bày dưới dạng dễ hiểu nhất thông qua thí dụ của bài toán thẩm. Tất cả công cụ toán học của bài toán thẩm ổn định hoàn toàn áp dụng được vào giải bài toán dẫn nhiệt ổn định.

2.1.1. Sự rời rạc hóa miền. Phần tử tam giác

Ta sẽ nghiên cứu đầy đủ trình tự tính của PPPTHH trong bài toán thẩm ổn định phẳng cụ thể dưới đập (hình 2-1,a). Các biên của miền, đập và các màng chống thấm được coi là không thấm nước. Cần phải xác định sự phân bố cột áp dưới đập, cũng như tổng lưu lượng dòng nước ngầm. Cột áp được xem như là hàm chưa biết.

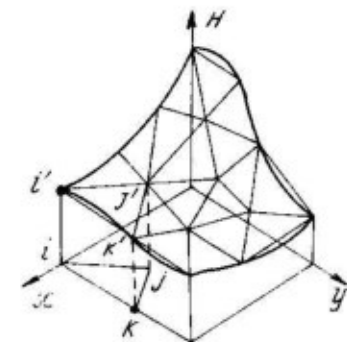


Hình 2-1. Lưới các phần tử hữu hạn (a) và đường đẳng cột áp (b) dưới đập

Mặt trơn của hàm H được xấp xỉ bằng một bộ các mảnh mặt phẳng tam giác dạng i', j', k' (hình 2-2), xác định trên miền con tam giác i, j, k (phần tử hữu hạn) thuộc miền nghiên cứu trong mặt phẳng xy .

Vị trí mặt phẳng trong không gian được xác định đơn trị bằng ba điểm không nằm trên một đường thẳng. Hiển nhiên là, để xấp xỉ mặt hàm trơn H bằng các mảnh mặt phẳng thì các phần tử hữu hạn i, j, k phải là các phần tử tam giác. Độ sai lệch của mặt phẳng xấp xỉ so với mặt trơn thực tế sẽ càng lớn, khi độ cong của mặt trơn càng lớn và kích thước của phần tử hữu hạn càng lớn. Từ đó rút ra qui tắc cơ bản xây dựng lưới các phần tử hữu hạn là: làm dày đặc lưới tại những nơi có gradien hàm cần tìm cao, chẳng hạn như các cột áp.

Công cụ toán học PPPTHH bảo đảm đưa bài toán tích phân phương trình vi phân song điều hòa về phép giải hệ thống các phương trình tuyến tính, trong đó giá trị cột áp ở nút các phần tử hữu hạn hiện diện như là các ẩn số.



Hình 2-2. Xấp xỉ hàm trơn $H(x,y)$ bằng phân mảnh - phần tử.

2.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử và của hệ thống các phần tử

Mảnh mặt phẳng xấp xỉ hàm cột nước trên một phần tử hữu hạn có phương trình dạng đa thức tuyến tính

$$H = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (2.1)$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - là các hằng số.

Tại các điểm nút i, j và k của phần tử, các giá trị cột áp bằng H_i, H_j và H_k , và chúng được xác định bằng phương trình (2.1) khi x và y lần lượt bằng $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$. Ở dạng ma trận, những hệ thức này có dạng:

$$\{H\} = [A] \{\alpha\}, \quad (2.2)$$

trong đó $\{H\} = \{H_i, H_j, H_k\}^T$ - là véc tơ các cột áp ở điểm nút của phần tử,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}; \quad \{\alpha\} = \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3\}^T.$$

Ta sẽ giải hệ ba phương trình tuyến tính (2.2) đối với véc tơ $\{\alpha\}$:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{H\} \quad (2.3)$$

Biến đổi hệ thức ma trận (2.3) về dạng thông thường, ta có:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_k - x_k y_j) H_i + (x_k y_i - x_i y_k) H_j + (x_i y_j - x_j y_i) H_k],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} [(y_i - y_k) H_i + (y_k - y_j) H_j + (y_j - y_i) H_k], \quad (2.4)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} [(x_k - x_j) H_i + (x_i - x_k) H_j + (x_j - x_i) H_k],$$

trong đó $2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ - là định thức, Δ - là diện tích phần tử.

Đặt các giá trị tìm được $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vào hệ thức (2.1), và sau những biến đổi đơn giản ta nhận được

$$H = N_i H_i + N_j H_j + N_k H_k, \quad (2.5)$$

trong đó

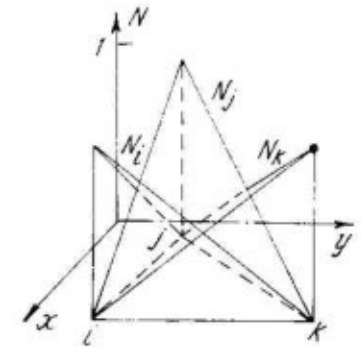
$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (2.6)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j. \quad (2.7)$$

Các biểu thức đối với hàm N_j và N_k nhận được bằng cách đặt tuần hoàn các chỉ số theo thứ tự i, j, k .

Các hàm N_i, N_j, N_k được gọi là các *hàm dạng*. Có lẽ đúng hơn nên gọi các hàm này là các *hàm ảnh hưởng của các điểm nút*, vì rằng chúng biểu thị ảnh hưởng của cột áp điểm nút tới trị số cột áp tại điểm tùy ý (x, y) của phần tử phù hợp với hàm xấp xỉ. Tuy nhiên, nếu giữ nguyên thuật ngữ phổ biến, thì ta nhận thấy những đặc điểm sau đây của hàm dạng. Chúng có dạng đa thức cùng bậc với đa thức xấp xỉ. Ở bất kỳ điểm nào của phần tử đều có $N_i + N_j + N_k = 1$. Hàm dạng của nút thứ l bằng một đơn vị tại nút l (khi $x = x_l$ và $y = y_l$) và bằng không tại các điểm nút còn lại của phần tử.

Các mặt được biểu diễn bằng ba hàm dạng trên mặt phẳng của phần tử tam giác được nêu trên hình 2-3. Chú ý rằng các gradien cột áp I_x và I_y bằng các đạo hàm riêng của hàm cột áp theo tọa độ, ta sẽ xác định chúng bằng cách lấy vi phân quan hệ (2.1):



Hình 2-3. Biểu diễn các hàm dạng bằng đồ thị

$$I_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} H_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} H_k; \quad (2.8)$$

$$I_y = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} H_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} H_k \quad (2.9)$$

hoặc dưới dạng ma trận:

$$\{I\} = [B] \{H\}, \quad (2.10)$$

trong đó

$$\{I\} = \{I_x, I_y\}^T, [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Các đạo hàm riêng của hàm dạng tính được dễ dàng từ biểu thức (2.6) và là các hằng số trong phạm vi phần tử. Thật vậy,

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A} \quad (2.11)$$

Nói chung, khi trình bày thủ tục PPPTHH cho các phần tử tam giác có hàm xấp xỉ dạng tuyến tính, người vẫn có thể thực hiện được mà không cần áp dụng khái niệm hàm dạng. Thật vậy, sau khi lấy vi phân phương trình (2.1) theo các tọa độ, ta có thể nhận được các biểu thức đối với các gradien cột áp không có các hàm dạng:

$$I = \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [B'] \{a\} = [B'] [A]^{-1} \{H\}, \quad (2.12)$$

$$\text{trong đó } [B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong các công bố đầu tiên về PPPTHH, khái niệm hàm dạng không được sử dụng. Tuy nhiên, các hàm dạng là cần thiết khi nghiên cứu các phần tử phức tạp hơn, và bản chất các hàm dạng thì minh họa bằng thí dụ phần tử tam giác là dễ dàng hơn cả.

Các tốc độ thấm v_x và v_y bằng tích các gradien cột áp với hệ số thấm k_{th} :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = k_{th} \{I\} = k_{th} [B] H. \quad (2.13)$$

PPPTHH thừa nhận rằng, sự trao đổi thể lỏng giữa các phần tử chỉ xảy ra tại các điểm nút dưới dạng các dòng chảy tập trung. Cụ thể là, phần tử được nghiên cứu sẽ có các lưu lượng nút trong một đơn vị thời gian Q_i, Q_j, Q_k , lớn hơn không, nhỏ hơn hay là bằng không. Rõ ràng là khi thấm ổn định sẽ có đẳng thức

$$Q_i + Q_j + Q_k = 0 \quad (2.14)$$

Bước cơ bản của PPPTHH là xác lập quan hệ giữa lưu lượng điểm nút và cột áp điểm nút. Quan hệ này có thể được rút ra bằng

phương pháp cực tiểu hóa phiếm hàm đã biết trong phép tính biến phân hoặc phương pháp sai số có trọng số của Galerkin. Chúng ta sẽ vận dụng phương pháp đơn giản để đi tới cùng những quan hệ trên. Để làm điều đó, tương tự như nguyên lý chuyển vị khả dĩ đã đề cập trong cơ học công trình, ta sẽ trình bày mà không chứng minh nguyên lý biến phân cột áp khả dĩ thích hợp với các bài toán thấm: trong miền kín của dòng ổn định khi biến thiên (biến phân) cột áp nhỏ vô hạn khả dĩ, công bù của dòng thấm trên đường viền quanh miền phải bằng công bù tương ứng trong phạm vi miền.

Nếu xem phần tử hữu hạn như là miền kín, thì dòng đường viền qui thành ba lưu lượng điểm nút với các cột áp H_i, H_j, H_k . Như vậy, ta hãy cho cột áp H_i một biến thiên khả dĩ dH . Chứng nào tại các điểm nút còn lại các biến phân còn chưa được đặt ra, thì vectơ của các biến phân cột áp bằng $\{dH\} = \{dH \ 0 \ 0\}^T$. Công bù của dòng tại đường viền bằng tổng các tích của lưu lượng điểm nút và biến phân cột áp.

$$A_{dv} = \{Q\}^T \{dH\} = Q_i dH \quad (2.15)$$

trong đó $\{Q\} = \{Q_i \ Q_j \ Q_k\}^T$ - là véc tơ lượng dòng vào nút của phần tử.

Các biến phân gradien cột áp trong phạm vi phần tử theo phương trình (2.10) bằng

$$\{dI\} = [B] \{dH\} \quad (2.16)$$

Công bù của dòng chảy trong phạm vi phần tử bằng tích phân theo diện tích phần tử của tích tốc độ với biến phân gradien cột áp:

$$A_{tr} = \int_S (v_x dI_x + v_y dI_y) dS = \int_S \{dI\}^T \{v\} dS \quad (2.17)$$

Đặt các biểu thức (2.13) và (2.16) vào quan hệ (2.17), ta có

$$A_{tr} = \int_S \{dH\}^T [B]^T k_{th} [B] \{H\} dS. \quad (2.18)$$

Cần bằng A_{dv} và A_{tr} từ các quan hệ (2.15) và (2.18) và giản ước cả hai vế cho dH , ta nhận được biểu thức đối với lưu lượng Q_i

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_S k_{th} [dH]^T [B]^T [B] \{H\} dS = \\ &= k_{th} dH \int_S \{1 \ 0 \ 0\} [B]^T [B] \{H\} dS \quad (2.19) \end{aligned}$$

Cho lần lượt biến phân dH ở các nút j và k , ta sẽ có các biểu thức đối với lượng dòng vào Q_j và Q_k tương tự như biểu thức (2.19), chỉ khác là trong số hạng thứ hai của chúng thành phần đơn vị sẽ có mật tương ứng ở vị trí thứ hai và thứ ba. Ba biểu thức vừa nhận được đối với lượng dòng vào có thể hợp nhất trong một công thức ma trận

$$\{Q\} = k_{th} \int_S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^T [B] \{H\} dS \quad (2.20)$$

Khử bỏ ma trận đơn vị, ta có

$$\{Q\} = [K] \{H\}, \quad (2.21)$$

trong đó $[K] = \int_S k_{th} [B]^T [B] dS$ - là ma trận đặc trưng cho tính

thấm của phần tử. Sau này để thống nhất về thuật ngữ chúng ta sẽ gọi ma trận $[K]$ là ma trận độ cứng của phần tử (MTĐCPT). MTĐCPT thấm có hạng 3×3 . Dấu hiệu tích phân theo diện tích có nghĩa là, mỗi một số hạng của ma trận này là tích phân theo diện tích của phần tử. Tuy nhiên, đạo hàm các hàm dạng của phần tử tam giác với ba điểm nút không phụ thuộc vào tọa độ, và các thành phần của ma trận dưới dấu tích phân $k_{th} [B]^T [B]$ cũng là các trị số không đổi. Đồng thời phép lấy tích phân của mỗi thành phần theo diện tích có thể thay thế đơn giản bằng cách nhân nó với diện tích phần tử Δ . Rút diện tích ra làm thừa số chung, ta thu được biểu thức cuối cùng đối với ma trận độ cứng của phần tử tam giác với ba điểm nút.

$$[K] = \Delta k_{th} [B]^T [B]. \quad (2.22)$$

Vận dụng phương trình (2.12), có thể viết biểu thức đối với MTĐCPT dưới dạng khác

$$[K] = \Delta k_{th} [A]^{-1T} [B']^T [B'] [A]^{-1} \quad (2.23)$$

Đối với môi trường thấm dị hướng có hai hệ số thấm khác nhau k_x và k_y ở hai phương vuông góc với nhau (x' và y'), không trùng với các phương của trục tọa độ, MTĐCPT có dạng

$$[K] = \Delta [B]^T [\theta]^T [D] [\theta] [B] \quad (2.24)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}; [\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

trong đó θ - là góc giữa các trục x và y .

Sau khi hoàn tất trình tự phép toán ma trận, dễ dàng nhận thấy rằng, ma trận độ cứng của phần tử đẳng hướng có dạng

$$[K] = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ a & -(a+c) & c \\ b & c & -(b+c) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$a = \Delta k_{th} [(y_k - y_i)(y_j - y_k) + (x_i - x_k)(x_k - x_j)], \quad (2.26)$$

trong đó Δ - là diện tích phần tử

Các biểu thức đối với b và c nhận được từ phương trình (2.26) bằng cách đặt tuần hoàn các chỉ số theo thứ tự $k-j-i$.

Bây giờ ta nghiên cứu một mắt lưới tam giác được tạo thành từ ba ống nhỏ có độ truyền dẫn a , b và c (hình 2-4). Lưu lượng theo mỗi ống được xác định bằng độ truyền dẫn và hiệu cột áp tại các đầu nút :

$$Q_{ij} = a(H_i - H_j); Q_{jk} = c(H_j - H_k); Q_{ki} = b(H_k - H_i). \quad (2.27)$$

Lưu lượng đến các điểm nút được xác định là tổng lưu lượng trong các ống nối với điểm nút :

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= -Q_{ij} + Q_{ki} = -a(H_i - H_j) + b(H_k - H_i) \\ Q_j &= -Q_{jk} + Q_{ij} = -c(H_j - H_k) + a(H_i - H_j) \\ Q_k &= -Q_{ki} + Q_{jk} = -b(H_k - H_i) + c(H_j - H_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

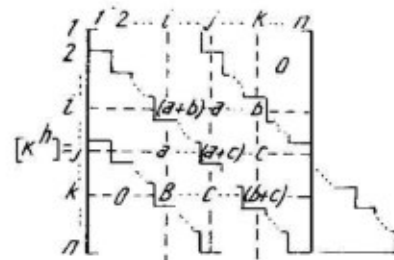
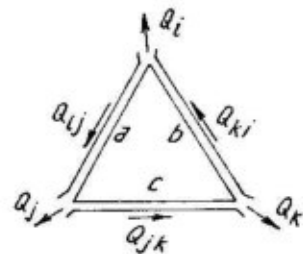
Dạng ma trận của ba đẳng thức này là :

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ a & -(a+c) & c \\ b & c & -(b+c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Các ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn liên tục và của mắt lưới tam giác làm bằng các ống nhỏ là giống nhau. Như vậy, thủ tục PPPHH đã thay miền thấm liên tục bằng lưới các phần tử phân tán có tính thấm. Ma trận độ cứng của toàn hệ thống các

phần tử (MTDCHT) được hình thành từ các ma trận độ cứng các phần tử, bằng cách chuyển các số hạng của ma trận độ cứng của các phần tử riêng biệt tới các địa chỉ tương ứng của MTDCHT, và lấy tổng đại số của chúng với các trị số đã tích lũy ở đây từ trước. Trên hình 2-5 cho thấy, các số hạng của ma trận độ cứng phần tử hữu hạn có các nút i, j và k được bổ sung vào các số hạng của MTDCHT như thế nào. Biểu thức chung đối với MTDCHT thậm chí có dạng

$$[K_{th}^h] = \sum_{i=1}^M [K_i] \quad (2.30)$$



Hình 2-4. Mắt lưới hình ống tam giác

Hình 2-5. Sơ đồ chuyển MTDCHT vào MTDCHT

MTDCHT là tập hợp các hệ số của hệ phương trình tuyến tính, liên kết n lưu lượng nút $\{Q^h\}$ với n cột áp nút $\{H^h\}$:

$$[K_{th}^h] \{H^h\} = \{Q^h\} \quad (2.31)$$

Các số hạng của vectơ lưu lượng nút toàn phần của miền $\{Q^h\}$ là lượng nước đến (nước đi) từ bên ngoài vào nút đã cho của miền. Nếu tại nút i không có lượng nước đến (nước đi) thì tổng lưu lượng của các phần tử tiếp giáp với nút này, và số hạng thứ i của vectơ lưu lượng chung cũng sẽ bằng không.

MTDCHT cũng như ma trận độ cứng của phần tử đều đối xứng với đường chéo chính. Số hạng lớn nhất về trị số tuyệt đối của mỗi hàng là số hạng nằm trên đường chéo chính. MTDCHT có cấu trúc dải, có nghĩa là các số hạng khác không lập thành nhóm dưới dạng

dải băng dọc theo đường chéo chính. Vì dải này đối xứng đối với đường chéo chính, cho nên trong bộ nhớ của MTDCHT chỉ tạo ra và lưu giữ nửa trên của dải là đủ. Chiều rộng của dải, có nghĩa là số các số hạng ở mỗi hàng của MTDCHT, được xác định bởi sự khác biệt cực đại P_{max} của các số hiệu thuộc một phần tử và bằng $(P_{max} + 1)$. MTDCHT thường được lưu giữ trong vùng nhớ riêng biệt của MTDCHT theo hàng, đồng thời để lưu giữ các hàng ngắn vừa nêu cho đều đặn, thì cũng phải chia ra các khoảng nhớ có độ dài $(P_{max} + 1)$ giống như đối với các hàng trên. Như vậy, để lưu giữ MTDCHT cần phải có một vùng với chiều dài $n(P_{max} + 1)$ số.

2.1.3. Điều kiện biên

MTDCHT liên kết các lưu lượng nút với các cột áp nút chưa biết. Tuy nhiên ở những nút trên biên, cũng như nút ở bên trong có thể có cột áp: đó là mức nước ổn định trong hồ trên biên của vùng trong lỗ khoan thoát nước, trong bể thu nước của hồ móng. Mỗi một cột áp được đưa ra sẽ rút bớt số ẩn số đi một đơn vị. Để đưa cột áp đã cho vào nút thứ i cần nhân cột áp này với các hệ số của cột thứ i của MTDCHT và, kết quả nhân sẽ được bổ sung (với dấu nghịch đảo) vào các phần tử tương ứng của vectơ lưu lượng nút. Sau đó hàng thứ i và cột thứ i trong MTDCHT lập được sẽ trở nên không cần thiết, có thể loại bỏ chúng và giải hệ phương trình đối với các ẩn số còn lại. Các phương pháp khác để giải hệ có số ẩn số không đầy đủ sẽ nghiên cứu ở mục 2.2.2.

Sau khi giải hệ phương trình, việc đặt các cột áp nút tìm được vào công thức (2.13) cho phép xác định tốc độ thấm trong các phần tử, còn đặt chúng vào phương trình (2.21) sẽ cho phép xác định lưu lượng tại các nút có cột áp đã cho. Hình 2-1, b trình bày đường đẳng cột áp dưới đập.

2.2. BÀI TOÁN PHẪNG CỦA LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

2.2.1. Phần tử hữu hạn và các tính chất của nó

Trong bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi, các điểm của miền ứng suất có chuyển vị biểu thị bằng các thành phần u và v dọc

theo trục x và y tương ứng. Mỗi thành phần này là hàm liên tục của các tọa độ và có thể biểu diễn bằng đồ thị dưới dạng các mặt trơn bên trên các mặt phẳng x và y (hình 2-6). Sau khi phân chia miền đã cho trong mặt phẳng x và y thành các phần tử tam giác, ta xấp xỉ các hàm chuyển vị trơn trong phạm vi các phần tử ("ở bên trên phần tử" theo hình 2-6) bằng các đa thức tuyến tính :

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\}, \quad (2.32)$$

trong đó $\alpha_1 \dots \alpha_6$ - là tập hợp các hằng số.

Khi đặt các tọa độ nút vào các phương trình (2.32) ta sẽ nhận được biểu thức đối với sáu thành phần chuyển vị nút :

$$\{\delta\} = [A] \{\alpha\}, \quad (2.33)$$

trong đó

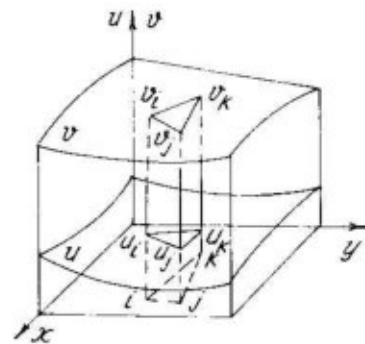
$$\{\delta\} = \{u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k\},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

Từ phương trình (2.33), ta biểu diễn vectơ $\{\alpha\}$ qua các chuyển vị nút

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta\} \quad (2.34)$$

Sau khi tính giá trị của tất cả sáu hằng số α và đặt chúng vào phương trình (2.32), ta nhận được các biểu thức tương tự công thức (2.5) :



Hình 2-6. Xấp xỉ hàm chuyển vị trơn bằng các mảnh - phần tử.

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

trong đó N_i, N_j, N_k - là các hàm dạng của phần tử tam giác, được xác định bằng phương trình (2.6)

Biến dạng tương đối trong phạm vi phần tử được xác định bằng cách lấy vi phân biểu thức (2.35) theo các tọa độ :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = N'_{ix} u_i + N'_{jx} u_j + N'_{kx} u_k ;$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = N'_{iy} v_i + N'_{jy} v_j + N'_{ky} v_k ;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = N'_{jy} u_i + N'_{ji} u_j + N'_{ky} u_k + N'_{ix} v_i + N'_{jx} v_j + N'_{kx} v_k ;$$

hoặc ở dạng ma trận

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}, \quad (2.36)$$

trong đó

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{ix} & N'_{jx} & N'_{kx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_{iy} & N'_{jy} & N'_{ky} \\ N'_{jy} & N'_{iy} & N'_{ky} & N'_{ix} & N'_{jx} & N'_{kx} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Giá trị các đạo hàm của hàm dạng dễ dàng nhận được bằng cách lấy vi phân các biểu thức của chúng. Chẳng hạn, lấy vi phân biểu thức (2.6), ta có

$$N'_{ix} = \frac{1}{2\Delta} b_i ; \quad N'_{iy} = \frac{1}{2\Delta} c_i \quad (2.38)$$

Các ứng suất $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \gamma_{xy}\}^T$ trong phần tử đàn hồi liên hệ với các biến dạng bằng định luật Hooke

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] \{\delta\} \quad (2.39)$$

Dạng ma trận [D] đối với điều kiện biến dạng phẳng và trạng thái ứng suất phẳng được xác định bằng các phương trình (1.10) và (1.11). Cần lưu ý những đặc tính quan trọng của phần tử hữu hạn tam giác :

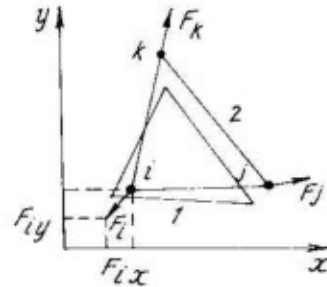
a) Chuyển vị u và v (phụ thuộc tuyến tính vào các tọa độ trong phạm vi phần tử) thì thay đổi tuyến tính dọc theo đường thẳng bất kỳ trong phần tử, có nghĩa là các đoạn thẳng trong phần tử không bị biến dạng - kể cả các cạnh của phần tử - cũng vẫn thẳng ngay cả khi phần tử bị biến dạng ;

b) Các đạo hàm của hàm dạng N' không phụ thuộc vào tọa độ ; trị số của chúng cũng như biến dạng và ứng suất được xác định bởi chúng trong phạm vi phần tử là không đổi.

Điều kiện liên tục được thỏa mãn nếu các phần tử trong quá trình biến dạng vẫn giữ được sự tiếp xúc với nhau tại các điểm nút.

Phương pháp phần tử hữu hạn giả thiết rằng, sự tương tác lực giữa các phần tử chỉ xảy ra tại các điểm nút. Biến dạng của phần tử từ dạng 1 (hình 2-7) đến dạng 2 xảy ra là do tác dụng của các lực nút F_i , F_j và F_k từ phía các phần tử kế liền hoặc do các tác động bên ngoài. Mỗi một lực nút lại được phân thành hai thành phần dọc theo các trục tọa độ. Để rút ra quan hệ giữa sáu thành phần lực nút với sáu thành phần chuyển vị nút người ta sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ được trình bày như sau : khi chuyển vị khả dĩ của các điểm nút là nhỏ vô hạn thì công của các lực nút phải bằng công các ứng suất bên trong. Ta cho nút i một chuyển vị nhỏ vô hạn $d\delta$ theo phương trục x . Khi đó vectơ toàn phần của chuyển vị nút sẽ có dạng

$$\{d\delta\} = \{d\delta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T = d\delta \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (2.40)$$



Hình 2-7. Sơ đồ biến dạng của phần tử do các lực nút gây ra

Khi chuyển vị đó là do các ngoại lực nút gây ra thì công của ngoại lực chỉ do lực F_{ix} thực hiện :

$$A_{dv} = d\delta F_{ix}$$

Biến dạng trong phần tử do chuyển vị nút i đã cho gây ra được xác định theo công thức (2.36) :

$$\{d\varepsilon\} = [B] \{d\delta\} \quad (2.41)$$

Công của các ứng suất trong thực tế khi xuất hiện các biến dạng tăng thêm $\{d\varepsilon\}$ (nhỏ vô hạn đối với thực tế) là

$$\begin{aligned} A_{tr} &= \int_S (d\varepsilon_x \sigma_x + d\varepsilon_y \sigma_y + d\gamma_{xy} \tau_{xy}) dS \\ &= \int_S \{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS \end{aligned} \quad (2.42)$$

Đặt các biểu thức (2.39), (2.40) và (2.41) vào phương trình (2.42) ta nhận được

$$A_{tr} = d\delta \int_S \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS \quad (2.43)$$

Cân bằng A_{dv} và A_{tr} và giản ước cả hai vế của phương trình cho $d\delta$, ta có biểu thức đối với lực

$$F_{ix} = \int_S \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS \quad (2.44)$$

Cho lần lượt các chuyển vị khả dĩ $d\delta$ theo phương của năm thành phần lực nút còn lại, ta thu được tất cả sáu phương trình liên kết các lực nút với vectơ các chuyển vị nút. Các phương trình này có dạng như phương trình (2.44) chỉ khác trong số hạng thứ nhất của biểu thức dưới dấu tích phân, số một sẽ lần lượt chiếm chỗ từ thứ hai đến thứ sáu. Hợp nhất tất cả sáu phương trình thành một phương trình ma trận và bỏ qua ma trận đơn vị được lập ra bằng các số hạng thứ nhất của các phương trình, ta có

$$\{F\} = [K] \{\delta\} \quad (2.45)$$

$$\text{trong đó} \quad [K] = \int_S [B]^T [D] [B] dS \quad (2.46)$$

là ma trận độ cứng của phần tử (MTDCPT).

Như trong bài toán thãm đã đề cập trước đây, do tính không đối của đạo hàm hàm dạng trong phạm vi phần tử, ta thay thế phép lấy tích phân theo diện tích bằng phép nhân với diện tích Δ và thu được biểu thức cuối cùng đối với MTĐCPT của phần tử tam giác :

$$[K] = \Delta [B]^T [D] [B] \quad (2.47)$$

Ma trận độ cứng phần tử tam giác (cứng như ma trận thãm - xem công thức 2.23) có thể được trình bày dưới dạng không chứa hàm dạng ở dạng tường minh

$$[K] = [A]^{-1T} [B']^T [D] [B'] [A]^{-1} \quad (2.48)$$

trong đó

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng $[B] = [B'] [A]^{-1}$

Ma trận độ cứng phần tử tam giác có hạng 6, nó đối xứng đối với đường chéo chính. Nếu chú ý tới quan hệ (2.48) và (2.39), thì có thể trình bày công thức (2.45) dưới dạng :

$$\{F\} = \int_S [B]^T \{\sigma\} dS = \Delta [B]^T \{\sigma\} \quad (2.49)$$

Đó là quan hệ quan trọng, liên hệ giữa các ứng suất trong phần tử với các lực nút.

2.2.2. Ma trận độ cứng hệ thống

Hợp nhất các ma trận độ cứng phần tử trong MTĐCHT $[K^h]$ được tiến hành theo công thức (2.30) và theo quy tắc như trong bài toán thãm : số hạng K_{ij}^h của MTĐCHT là tổng các số hạng K_{ij} lấy từ các ma trận độ cứng của tất cả các phần tử tiếp giáp với nút có bậc tự do thứ i (chuyển vị thứ i và lực thứ i).

Nếu $i = j$, thì số hạng K_{ij}^h của MTĐCHT sẽ nằm trên đường chéo chính, và nó sẽ là tổng các số hạng tương ứng từ các ma trận độ

cứng của tất cả các phần tử tiếp giáp với nút có bậc tự do thứ i . Nếu như $i \neq j$, thì số hạng K_{ij}^h sẽ không nằm trên đường chéo chính, và nó sẽ là tổng của hai số hạng thuộc các ma trận độ cứng chỉ của hai phần tử tiếp giáp đồng thời với các nút có bậc tự do i và j . Như vậy, số hạng trên đường chéo trong MTĐCHT rõ ràng lớn hơn bất kỳ số hạng nào nằm trên hàng hay cột đó nhưng không phải trên đường chéo chính. Đặc tính này là cơ bản khi chọn các phương pháp giải hệ phương trình. MTĐCHT có hạng bằng gấp đôi số nút : mỗi nút có hai bậc tự do, tương ứng với hai phương trình. Cũng như trong bài toán thãm, MTĐCHT của miền đàn hồi là đối xứng và có cấu trúc dải. Trong bộ nhớ của MTĐT chỉ hình thành và lưu trữ phần trên của dải có chiều rộng bằng $2(P_{\max} + 1)$, trong đó P_{\max} - là khác biệt cực đại của số hiệu các nút của một phần tử. Để lưu trữ phần MTĐCHT đã hình thành cần phải có trường dải $n(P_{\max} + 1)$, trong đó n là số nút của toàn bộ hệ thống các phần tử MTĐCHT liên kết các lực nút đã biết và các chuyển vị nút chưa biết thành hệ phương trình tuyến tính :

$$[K^h] \{\delta^h\} = \{F^h\} \quad (2.50)$$

Vectơ các lực nút được tạo thành từ các tải trong tập trung thực đã cho hoặc từ các lực phân bố trên đường biên hoặc trên mặt của miền được quy thành các lực nút. Việc quy trọng lực (hoặc lực quán tính) thành lực nút thường được đưa vào chương trình. Đồng thời trọng lượng của mỗi phần tử - tích giữa diện tích của nó với độ chặt và với gia tốc trọng trường (hoặc gia tốc đã cho nào đó) - thì được phân bố đều giữa ba nút của phần tử.

Nếu chuyển vị nút thứ i nào đó đã biết, thì số ẩn được giảm đi một đơn vị. Khi ấy các thành phần của cột thứ i trong MTĐCHT cần phải nhân với chuyển vị đó và kết quả phép nhân được bổ sung vào các lực nút đã có (với dấu ngược). Sau đó cột thứ i và hàng thứ i của MTĐCHT, cũng như số hạng chưa biết thứ i trong vectơ lực có thể được tách ra. Có thể có những cách khác cho phép tránh được những thủ tục cồng kềnh, "loại bỏ" những hàng và cột không cần thiết khỏi MTĐCHT.

Trong chương trình của chúng tôi (được trình bày ở phần phụ lục), khi giải hệ phương trình, ta đơn giản bỏ qua các dòng và các cột của MTĐCHT có số hiệu của chuyển vị đã cho. Để lưu trữ dấu

của các chuyển vị đã cho, ta sử dụng loại dấu tọa độ của nút tương ứng (còn toàn bộ lưới các phần tử thì được tạo ra ở góc phần tử có tọa độ dương). Phép cộng các "tích những chuyển vị đã cho và các hệ số tương ứng của MTĐCHT" với các thành phần vectơ lực được tiến hành trực tiếp trong quá trình giải hệ, điều đó cho phép lưu trữ vectơ lực ở dạng không thay đổi. Thủ tục chi tiết hơn trình bày ở mục 2.11.

R.Pein và J.Irons [5] đã đề nghị cách khác sau đây. Số hạng chéo thứ i của MTĐCHT được thay bằng số A nào đó, lớn hơn một số bậc so với các thành phần còn lại của MTĐCHT (chẳng hạn, $A = 10^8$), còn số bằng DA (D là chuyển vị đã cho) được đặt vào chỗ của lực thứ i chưa biết trong vectơ các lực nút. Sau đó hệ được giải theo trình tự thông thường.

Rõ ràng là, sau các phép thế này hàng thứ i của phương trình trong hệ (2.50) có dạng

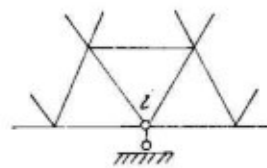
$$A\delta_i + \sum (k_{ij}\delta_j) = DA, (j \geq i + 1), \quad (2.51)$$

trong đó $\sum (k_{ij}\delta_j)$ - tổng các tích của các số hạng hàng thứ i không thuộc đường chéo của MTĐCHT và các chuyển vị chưa biết δ_j .

Vì trị số A lớn hơn $\sum (k_{ij}\delta_j)$ nhiều, cho nên trị số chuyển vị δ_i tìm được do giải hệ phương trình trên thực tế sẽ bằng trị số đã cho D .

Theo công thức (2.36) và (2.39), các chuyển vị nút tìm được cho phép tính biến dạng và chuyển vị trong các phần tử. Các lực, do hệ phần tử truyền đến các liên kết có các chuyển vị đã cho, có thể tìm được bằng hai phương pháp. Thứ nhất, thành phần vectơ lực thứ i (chưa biết) có thể tìm được bằng phép cộng các tích của những hệ số thuộc hàng thứ i của MTĐCHT với những số hạng của vectơ chuyển vị. Nếu trong quá trình giải hệ phương trình, các hàng cần thiết của MTĐCHT không được lưu giữ thì phương pháp tính toán các lực chưa biết này đòi hỏi phải tạo lại MTĐCHT.

Có thể dùng một cách khác. Trong đó, theo công thức (2.49) người ta tính toán phần lực góp (theo các ứng suất



Hình 2-8. Sơ đồ tính toán tổng lực nút

đã biết) của tất cả các phần tử (trên hình 2-8 là 3) tiếp giáp với nút nghiên cứu có chuyển vị đã cho. Tổng của tất cả các lực góp sẽ cho trị số ứng lực cần tìm mà liên kết tiếp nhận.

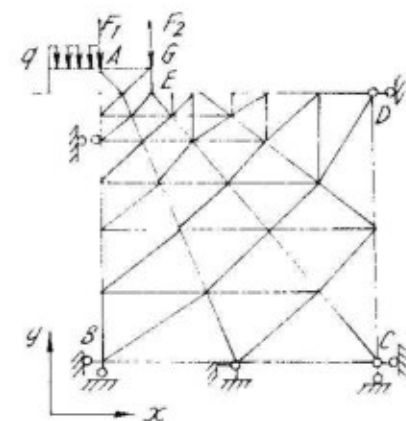
2.2.3. Đặt bài toán và xác định điều kiện biên

Ta nghiên cứu trình tự giải bài toán trong thí dụ cụ thể (móng băng nằm dưới tải trọng phân bố đã biết, trên bán không gian đàn hồi (hình 2-9)).

Sự tồn tại trục đối xứng cho phép chỉ nghiên cứu một nửa miền. Ta quy định kích thước của miền xuất phát từ đặc tính trạng thái ứng suất biến dạng đã dự tính của môi trường sao cho điều kiện biên ít ảnh hưởng tới các kết quả ta quan tâm - như độ lún của móng hoặc ứng suất trong vùng lân cận móng. Hiển nhiên là khi tăng miền nghiên cứu thì độ chính xác của lời giải sẽ tăng, tuy nhiên điều đó sẽ cũng làm tăng thời gian chạy máy và nỗ lực chuẩn bị thông tin.

Khi tiến hành phân chia lưới các phần tử hữu hạn cần lưu ý rằng, phép giải của PPTH trong phạm vi phần tử tam giác sẽ cho các giá trị ứng suất không đổi. Vì thế tại những nơi có Gradien ứng suất cao đã dự tính, lưới các phần tử cần làm dày đặc. Vì các cạnh của phần tử tam giác khi biến dạng vẫn thẳng, cho nên cần tránh sử dụng các phần tử hẹp và dài. Nếu áp dụng mạng lưới các phần tử tiêu chuẩn (đều hoặc được xây dựng theo quy luật nào đó) sẽ cho phép tự động hóa việc tính các tọa độ nút và rút gọn dung lượng thông tin đưa vào; nhưng thông thường các mạng lưới không đều lại tiết kiệm thời gian chạy máy hơn.

Trên trục đối xứng, các ứng suất tiếp bằng không và các chuyển vị vuông góc với biên này bằng không. Những điều kiện này đảm bảo hoàn toàn đúng khi cho các nút trên biên AB (xem hình 2-9) các chuyển vị: $u = 0$



Hình 2-9. Sơ đồ giải bài toán móng

Nếu các trọng lực được đặt vào các phần tử của miền và có thể dự tính độ lún chung của các nút, thì trên biên CD cho các nút những chuyển vị nằm ngang bằng không là hợp lý hơn cả. Nếu không cho các trọng lực, và biến dạng sẽ chỉ do tải trọng tác dụng vào móng gây ra, thì còn có thể cho cả các nút trên biên CD những chuyển vị thẳng đứng bằng không. Ở biên dưới cho các nút những chuyển vị nằm ngang và thẳng đứng bằng không là hợp lý.

Hệ liên kết (có các chuyển vị đã cho) trong mọi trường hợp cần phải làm sao loại trừ được chuyển vị tự do hoặc xoay của miền trong trường tọa độ. Số liên kết tối thiểu đảm bảo điều kiện này là - hai trên trục này và một trên trục khác. Số liên kết càng nhiều, số chuyển vị chưa biết càng ít, thời gian sử dụng máy càng ít.

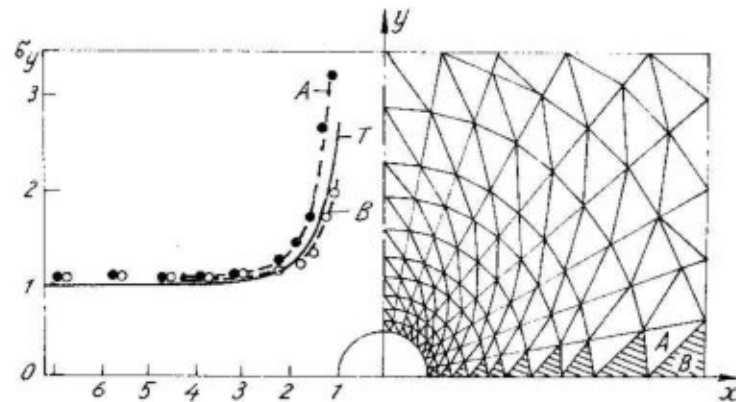
Sẽ hợp lý khi chia đôi tải trọng phân bố q tác dụng lên móng giữa các nút A và G, khi đó

$$F_1 = F_2 = ql_{AG}/2$$

trong đó q - tải trọng trên đơn vị diện tích móng ;

l_{AG} - chiều dài đoạn chắt tải AG.

Dương nhiên, hệ thống và tỷ lệ các đơn vị dùng cho các lực, các mô đun và độ chắt phải nhất quán. Lời giải thu được cũng phải theo tỷ lệ này.



Hình 2-10. Các biểu đồ ứng suất theo lời giải lý thuyết (T) và lời giải phần tử hữu hạn (A và B)

Kinh nghiệm cho thấy rằng, khi giải các bài toán phẳng lưới các phần tử có số nút lớn hơn 300 - 500 là không hợp lý. Nếu số nút đó không đảm bảo mật độ lưới cần thiết trong miền con có các gradien cao, thì tốt hơn nên tiến hành giải theo hai giai đoạn. Ở giai đoạn thứ nhất miền và miền con được chia thành các phần tử lớn và tiến hành tính toán. Sau đó chỉ giải đối với miền con được chia thành những phần tử nhỏ hơn, còn các chuyển vị nút trên đường viền của miền con nhận được trong lần giải thứ nhất, được đưa vào như những điều kiện biên đã cho. Ở các miền có hình dạng đơn giản khi số phần tử tương đối nhỏ cũng có thể đạt được độ chính xác cao : Trên hình 2-10 là so sánh ứng suất tại các điểm của vùng xung quanh hãm theo lời giải giải tích và lời giải số (chương trình "Địa cơ học"). Ứng suất cho trên các biên của miền : $\sigma_x = 0,3$; $\sigma_y = 1$. Trong các phần tử A (nét xiên) mức ứng suất gần hãm cao hơn lý thuyết một chút, còn trong các phần tử B (nét thoải) thì thấp hơn một chút. Chuyển vị của các nút theo lời giải của PPTTHH khác với các trị số nhận được bằng giải tích không quá 3 - 5%.

Sự phân tán ứng suất ở các phần tử gây khó khăn cho việc phân tích trường ứng suất (xây dựng đường đẳng trị, biểu đồ). Để san bằng ứng suất trong các lời giải đàn hồi có thể lấy trung bình số học các thành phần ứng suất (σ_x , σ_y , τ_{xy}) trong các cặp phần tử tam giác, mà tổng cộng lại sẽ tạo ra một hình tứ giác tương đối đều và chuyển các ứng suất được trung bình hóa vào trung điểm của tứ giác ; hoặc là lấy trung bình các thành phần ứng suất trên tất cả các phần tử tiếp giáp với nút đã cho và đặt các ứng suất được trung bình hóa vào nút.

2.3 BÀI TOÁN ĐỐI XỨNG TRỤC

Khi có đối xứng trục về mặt hình học, về các tính chất của miền chịu tải và về các điều kiện biên gây ra do sự chắt tải, thì chỉ những tọa độ r và z của các điểm thuộc môi trường là thay đổi, còn tọa độ trụ của nút θ thì không đổi.

Vì thế sự phân tích có thể tiến hành chỉ ở mặt phẳng tọa độ $r - z$, trong đó xem phần tử hữu hạn là một vành có tiết diện ngang hình tam giác (hình 2-11). Ta xấp xỉ các hàm chuyển vị trong phạm vi phần tử bằng các đa thức tuyến tính :

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{cases} \quad (2.52)$$

hoặc tương tự các phương trình (2.5) và (2.35)

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \end{cases} \quad (2.53)$$

trong đó N_i, N_j, N_k là các hàm dạng được xác định bởi phương trình (2.6) ; u_i, \dots, v_k là các chuyển vị nút.

Trạng thái biến dạng của các điểm thuộc miền đối xứng trục được đặc trưng bằng bốn thành phần khác không :

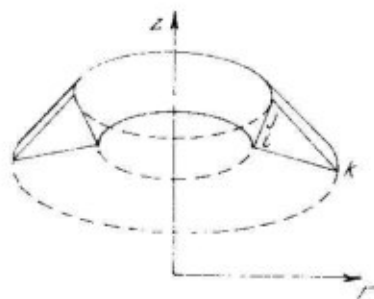
$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{u}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\}^T \quad (2.54)$$

Đặt hàm (2.53) vào phương trình (2.54) và lấy vi phân, ta có

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}, \quad (2.55)$$

trong đó

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{ir} & N'_{jr} & N'_{kr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_{iz} & N'_{jz} & N'_{kz} \\ \frac{N_i}{r} & \frac{N_j}{r} & \frac{N_k}{r} & 0 & 0 & 0 \\ N'_{iz} & N'_{jz} & N'_{kz} & N'_{ir} & N'_{jr} & N'_{kr} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$



Hình 2-11. Phần tử hữu hạn trong bài toán đối xứng trục

Để dàng nhận thấy rằng

$$[B] = [B'] [A]^{-1}, \quad (2.57)$$

trong đó

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_j & z_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_k & z_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_i & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Các ứng suất liên hệ với các biến dạng bằng định luật Hooke. Quan hệ của các lực nút với các chuyển vị nút được xác định một lần nữa, nhờ sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ từ điều kiện cân bằng công của ngoại lực và công của nội ứng suất. Khi đó tích phân không lấy theo diện tích phần tử, mà theo thể tích của phần tử hữu hạn :

$$(F) = \int_v [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv \quad (2.59)$$

Ta nhận thấy rằng, khác với bài toán phẳng, ma trận $[B]$ thay đổi trong phạm vi phần tử, điều này được xác nhận bởi sự tồn tại trong nó các thành phần phụ thuộc vào r và z (xem phương trình (2.56)). Nói chung, có các phương pháp cho phép thực hiện phép tích phân số trong phương trình (2.59) ; những phương pháp này sẽ được xem xét đến sau này. Tuy nhiên, khi áp dụng các phần tử tam giác có ba nút ở các đỉnh sẽ thu được kết quả hoàn toàn thỏa đáng, nếu các thành phần của ma trận $[B]$ trong phương trình (2.56) (hoặc là của ma trận $[B']$ trong phương trình (2.58)) được xác định cho tâm của phần tử có các tọa độ.

$$r_0 = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_k), \quad z_0 = \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_k)$$

và coi nó không đổi trong toàn phần tử. Rõ ràng điều này tương tự giả thiết về tính không đổi của các ứng suất và biến dạng trong phạm vi phần tử. Giả thiết tương tự một lần nữa cho phép thay phép tích phân theo thể tích của phần tử bằng phép nhân với thể tích có giá trị gần bằng $2\pi r_0 \Delta$ (Δ là diện tích phần tử):

$$[F] = [K]\{\delta\}, \quad (2.60)$$

trong đó $[K] = 2\pi r_0 \Delta [B]^T [D] [B]$,

$$\{\delta\} = \{u_i, u_k, v_i, v_k\}.$$

Liên kết giữa các ứng suất và các lực nút được xác định bằng quan hệ

$$\{F\} = 2\pi r_0 \Delta [B]^T \{\sigma\}. \quad (2.61)$$

Hợp nhất các ma trận độ cứng của các phần tử vào các ma trận độ cứng hệ thống được thực hiện theo thứ tự như trong bài toán phẳng. Cần lưu ý là tổng các trị số phân bố trên vòng tròn do đỉnh của nút về nên xung quanh trục đối xứng được xem như các lực nút. Trọng lượng của phần tử (hoặc các lực phân bố hướng dọc theo trục z) cũng là trọng lượng của toàn vành.

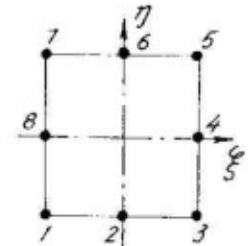
Nếu không đặt $U = 0$ là điều kiện biên cho các nút nằm trên trục đối xứng, thì kết quả tính toán chúng có thể cho các chuyển vị hướng tâm khác không (dù là nhỏ)

Giả thiết về tính không đổi của ma trận $[N']$ và phương pháp tính thể tích phần tử sẽ gây nên các sai số lớn nhất ở các phần tử có kích thước theo tọa độ r gần với trị số r_0 của chúng, vì thế ở các phần tử gần trục không tránh khỏi các sai số đáng kể.

2.4. PHẦN TỬ ĐẲNG THAM SỐ PHẪNG

Hàm xấp xỉ của hàm chuyển vị chưa biết trong phạm vi phần tử không chỉ là đa thức tuyến tính, mà còn có thể là các đa thức bậc cao hơn. Khi đó các ứng suất và biến dạng sẽ không ổn định trong phạm vi phần tử.

Trong tài liệu [5, 46] trình bày nhiều kiểu phần tử khác nhau. Ta chỉ nghiên cứu một kiểu được dùng rộng rãi nhất trong địa cơ học cùng với phần tử tam giác đơn giản nhất, đó là phần tử tứ giác với tám nút.



Hình 2-12. Đồ thị biểu diễn phần tử vuông.

Trước hết ta nghiên cứu phần tử vuông trong các tọa độ $\xi\eta$ (hình 2-12).

Hàm xấp xỉ chuyển vị u và v trong phạm vi phần tử này, sẽ là đa thức bậc ba:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta + \alpha_5 \xi^2 + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^2 \eta + \alpha_8 \xi \eta^2 \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \xi \eta + \alpha_{13} \xi^2 + \alpha_{14} \eta^2 + \alpha_{15} \xi^2 \eta + \alpha_{16} \xi \eta^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sau khi đặt vào phương trình (2.62) trị số tọa độ các nút, ta nhận được hệ các phương trình tương tự hệ (2.2) và liên kết 16 chuyển vị nút với 16 hệ số α ,

$$\{\delta\} = A\{\alpha\}. \quad (2.63)$$

Việc giải hệ này đối với các hệ số α và đặt các giá trị này vào (2.62) cho phép viết chúng dưới dạng khác:

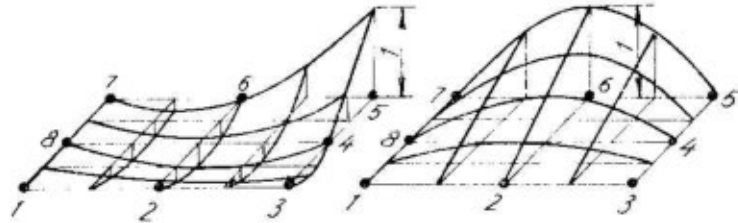
$$\begin{cases} u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_8 u_8 \\ v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \dots + N_8 v_8 \end{cases} \quad (2.64)$$

trong đó N_1, \dots, N_8 là các hàm dạng; u_1, \dots, v_8 là các chuyển vị nút dọc theo các trục ξ và η .

Tám hàm dạng có thể được tính theo các công thức

$$\begin{aligned} N_{i=1,3,5,7} &= \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \\ N_{i=2,4,6,8} &= \frac{1}{2}(1 - \eta_i^2 \xi^2 - \xi_i \eta^2)(1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Hàm dạng của hai nút đặc trưng được biểu diễn bằng biểu đồ trên hình 2-13. Các hàm dạng lại bằng đơn vị khi $\xi = \xi_i$ và $\eta = \eta_i$ và bằng không ở tất cả các nút còn lại. Tổng tất cả tám hàm dạng tại điểm bất kỳ của phần tử có tọa độ ξ, η bằng đơn vị.



Hình 2-13. Đồ thị biểu diễn mặt các hàm dạng của nút ở góc và của góc ở điểm giữa cạnh phần tử (1-8 là số hiệu các nút)

Tập hợp các biến dạng $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\}$ phụ thuộc vào các tọa độ của điểm trong phạm vi phần tử và được xác định bằng cách lấy vi phân các phương trình (2.2) :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}, \quad (2.66)$$

trong đó $\{\delta\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ v_8\}^T$,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Việc tính toán giá trị đạo hàm của các hàm dạng cho ở công thức (2.65) tại điểm bất kỳ của phần tử có các tọa độ cụ thể ξ và η không khó khăn : khi $i = 1, 3, 5, 7$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_i \eta) (2\xi_i \xi + \eta_i \eta),$$

khi $i = 2, 4, 6, 8$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{2} [-2\eta_i^2 \xi (1 + \xi_i \eta + \eta_i \eta) + \xi_i (1 + \eta_i^2 \xi^2 - \xi_i^2 \eta)] \quad (2.68)$$

Để có các đạo hàm theo η chỉ việc đổi chỗ ξ và η (kể cả các chỉ số) trong các công thức (2.68).

Ứng suất liên hệ với biến dạng thông qua ma trận đàn hồi $[D]$ thể hiện trong các công thức (1.9) và (1.10) :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}.$$

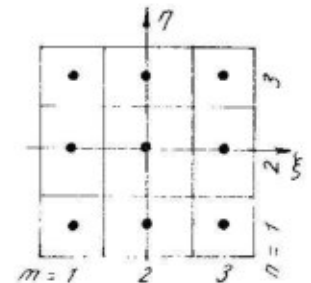
Việc áp dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ sẽ đưa ta đến hệ phương trình liên kết 16 thành phần lực nút với số chuyển vị nút tương tự,

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (2.69)$$

trong đó

$$[K] = \int_s [B]^T [D] [B] dS = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] d\xi d\eta \quad (2.70)$$

Ta nhận thấy rằng các thành phần của ma trận dưới dấu tích phân biến đổi theo diện tích phần tử, và sự thay thế phép tích phân bằng phép nhân giá trị dừng nào đấy của ma trận dưới dấu tích phân với diện tích của phần tử sẽ làm mất chính xác một cách vô lý.



Phương pháp tích phân số đã biết như phép cấu phương Gauss - Lezandr, [5], dự tính tích phân hàm theo diện tích của phần tử tương tự bằng cách sau đây.

Hình 2-14. Sơ đồ tích phân theo diện tích phần tử

Phần tử được chia thành 9 phần (hình 2-14). Ở mỗi phần của phần tử ấn định một điểm được gọi là *điểm lấy tích phân*. Tại đây một giá trị của hàm được nhân với diện tích của phần đó (Δ_{mn}), còn tích phân chung theo diện tích của phần tử được coi là tổng của các tích này :

$$[K] = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} [B_{mn}]^T [D_{mn}] [B_{mn}] \quad (2.71)$$

Cần lưu ý rằng, tính đàn hồi của phần tử xác định ma trận $[D_{mn}]$ cũng có thể khác nhau theo diện tích của phần tử. Hoàn hảo các điểm lấy tích phân trong các cột $m = 1, 3$ và tung độ của

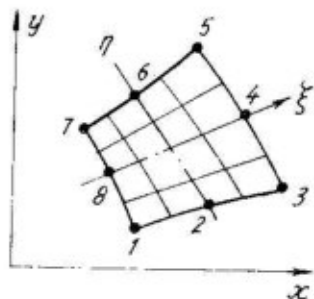
các điểm trong các hàng $n = 1, 3$ (hình 2-14) bằng: $\pm 0,774597$.

Diện tích các phần tử của phần tử bằng: $\Delta_{1,1;1,3;3,3;3,1} = \left(\frac{5}{9}\right)^2$;

$\Delta_{2,1;3,2;2,3;1,2} = \left(\frac{5}{9}\right) \left(\frac{8}{9}\right)$; $\Delta_{2,2} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Điều này là kết luận chung của ma trận độ cứng phần tử vuông có tám đỉnh.

Ta chú ý rằng, các đa thức xấp xỉ và các hàm dạng có hạng bằng hạng của chúng thì có dạng của các đa thức bậc ba. Nếu như lấy một trong các tọa độ không đối (mà dọc mỗi cạnh của phần tử có một trong các tọa độ là không đối), thì các đa thức sẽ trở thành các phương trình parabol. Trước hết đường thẳng trong phạm vi phần tử biến dạng sẽ trở thành đường cong tròn.

Việc sử dụng các phần tử vuông tự nó không có gì đáng quan tâm, tuy nhiên có thể áp dụng các tính toán đã tiến hành để rút ra ma trận độ cứng của phần tử có dạng phức tạp hơn. Ta hãy hình dung rằng, phần tử được biểu diễn trên hình 2-12, trước đây đã bị biến dạng thay đổi mạnh hình dạng và các đường thẳng ban đầu trong nó biến thành các đường cong (hình 2-15).



Hình 2-15. Biểu diễn phần tử cạnh cong đối mạnh hình dạng và các đường thẳng ban đầu trong nó biến thành các đường cong (hình 2-15).

Các tọa độ ξ, η và phép đánh số các nút của phần tử từ 1 đến 8 ta gọi là các tọa độ cục bộ và phép đánh số cục bộ, khác với các tọa độ toàn cục x, y và phép đánh số liên tục toàn cục các nút trong toàn hệ của các phần tử. Khi coi tọa độ toàn cục của các nút như các thành phần chuyển vị nút cố được do biến dạng, ta có thể sử dụng phương trình (2.64) để xác lập mối liên hệ các tọa độ x và y của bất kỳ điểm bên trong của phần tử với các tọa độ ξ và η của nó trong nghịch ảnh vuông của phần tử và với các tọa độ nút $\{x_1, y_1, \dots, y_8\}$:

$$\begin{cases} x = N_1x_1 + N_2x_2 + \dots + N_8x_8 \\ y = N_1y_1 + N_2y_2 + \dots + N_8y_8 \end{cases} \quad (2.72)$$

trong đó $N_1 - N_8$ là các hàm dạng được xác định bởi phương trình (2.65).

Nếu như phần tử cong đã cho bằng cách đó có biến dạng mới, thì chuyển vị của các điểm bên trong có thể liên hệ với chuyển vị của các điểm nút thông qua phương trình (2.64) nhờ chính các hàm dạng $N_1 - N_8$ đã được diễn tả trong hệ các tọa độ ban đầu ξ, η :

$$\begin{cases} u = N_1u_1 + N_2u_2 + \dots + N_8u_8 \\ v = N_1v_1 + N_2v_2 + \dots + N_8v_8 \end{cases} \quad (2.73)$$

Phần tử mà trong đó một tập hợp các hàm dạng như nhau được sử dụng để mô tả phép biến đổi tọa độ, cũng như để xấp xỉ hàm cần tìm (chuyển vị, cột áp v.v...) được gọi là phần tử đẳng tham số. Ảnh xạ của phần tử cong lên nghịch ảnh vuông cho phép sử dụng tốt các phương pháp tích phân số khi rút ra ma trận độ cứng

của nó. Các biến dạng trong phần tử $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$,

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ được xác định bằng cách lấy vi phân các phương trình (2.73) theo tọa độ $\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}$, trong đó

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Các hàm dạng là các hàm tọa độ x và y , và việc tính đạo hàm $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ và $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ được thực hiện theo công thức

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

trong đó $[J]$ là ma trận biến đổi tọa độ (ma trận Akobi);

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

trong đó $|J|$ là định thức của ma trận Akobi (akobian)

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (2.78)$$

Ứng suất liên hệ với biến dạng bằng ma trận đàn hồi $[D]$ - xem các công thức (1.8), (1.10), (1.11):

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}.$$

Ma trận độ cứng của phần tử thì nhận được nhờ sử dụng nguyên lý chuyển vị ban đầu và có dạng

$$[K] = \int_s [B]^T [D] [B] dS \quad (2.79)$$

Việc lấy tích phân theo diện tích của phần tử thực được thay thế bằng việc lấy tích phân theo diện tích nghịch ảnh vuông của nó. Giữa các diện tích cơ bản $dS = dx dy$ trong hệ tọa độ thực và $d\xi d\eta$ trong hệ tọa độ nghịch ảnh có quan hệ

$$dS = \text{abs}|J| d\xi d\eta \quad (2.80)$$

trong đó $\text{abs}|J|$ là trị số tuyệt đối của akobian. Khi đó biểu thức (2.79) có dạng

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{abs}|J| [B]^T [D] [B] d\xi d\eta \quad (2.81)$$

Khi chuyển sang tích phân số theo cách tương tự công thức (2.71), ta có công thức cuối cùng về ma trận độ cứng của phần tử (MTDCPT):

$$[K] = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs}|J_{mn}| [B_{mn}]^T [D_{mn}] [B_{mn}] \quad (2.82)$$

Tương tự với công thức (2.49), từ biểu thức đối với MTDCPT (2.82) ta viết ra được quan hệ giữa các lực nút và các ứng suất trong phần tử đẳng thông số tám nút

$$\{F\} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs}|J_{mn}| [B_{mn}]^T \{\sigma_{mn}\}, \quad (2.83)$$

trong đó $\{\sigma_{mn}\}$ là các ứng suất $\{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}\}^T$ tại điểm lấy tích phân. Tọa độ của các điểm lấy tích phân ξ và η và các trị số Δ_{mn} đã được biết trong phần giải thích công thức (2.71). Các giá trị $[B_{mn}]$ và $|J_{mn}|$ được tính toán tại mỗi điểm lấy tích phân.

Khi sử dụng các phần tử đẳng thông số, các lực nút tương đương của các lực phân bố có cường độ trên một đơn vị diện tích là γ_x và γ_y (tương ứng dọc theo trục x và y) được xác định theo công thức

$$\begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_s \gamma_x N_i dS \\ \int_s \gamma_y N_i dS \end{Bmatrix} = \int_s N_i dS \begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}, \quad (2.84)$$

Chuyển sang tích phân theo các tọa độ ξ và η và sau đó, thực hiện tích phân số, ta có

$$F_{x,i} = \gamma_x \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \Delta_{mn} \text{abs}|J_{mn}| N_{i,mn}. \quad (2.85)$$

Biểu thức đối với $F_{y,i}$ có dạng tương tự. Các giá trị của hệ số Δ_{mn} và biểu thức đối với $|J|$ đã đề cập ở trên.

Sự phân bố các lực nút tương đương được tính như trên có thể không được như dự định. Trên hình 2-16 đưa ra các lực mô phỏng trọng lực trong phần tử vuông có trọng lượng riêng bằng một đơn vị. Sự phân bố lực trong phần tử có các cạnh cong còn phức tạp hơn nữa.

Việc quy tải trọng chu tuyến phân bố đều thành các lực nút tương đương cần được tiến hành phù hợp với các hàm dạng khác không đang tồn tại trên biên này. Chẳng hạn, nếu đặt tải trọng (không nhất thiết là đều) lên cạnh của phần tử có các nút 5, 6, 7 (hình 2-17), thì các hàm N_5, N_6, N_7 trên cạnh đó sẽ khác không.

Trên đoạn phân tử của biên, mà hình chiếu của nó lên trục x bằng dx, sẽ chịu tác động của một lực $q_y dx$. Lực này phân bố giữa các nút 5, 6, 7 tỉ lệ với trị số hàm dạng của các nút này trên đoạn dx :

$$\begin{Bmatrix} dF_{y,5} \\ dF_{y,6} \\ dF_{y,7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y dx. \quad (2.86)$$

Tọa độ x là hàm của các tọa độ nghịch ảnh ξ và η , và trị số

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta. \quad (2.87)$$

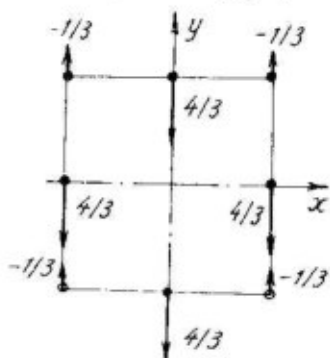
Trên cạnh có các nút 5, 6, 7 thì $\eta = \text{const}$.

Vì thế khi bỏ số hạng thứ hai trong công thức (2.87) và lấy vi phân hàm x (2.72), ta có

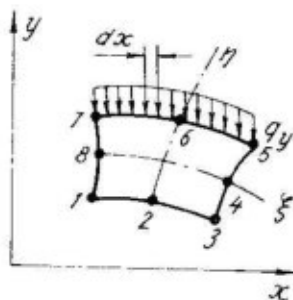
$$dx = \beta d\xi, \quad (2.88)$$

trong đó

$$\beta = (N'_5 \xi x_5 + N'_6 \xi x_6 + N'_7 \xi x_7). \quad (2.89)$$



Hình 2-16. Sơ đồ quy các lực phân bố thành các lực nút.



Hình 2-17. Sơ đồ quy tải trọng chu tuyến thành lực nút.

Đạo hàm của các hàm dạng còn lại không trình bày, vì $N_{1-4,8}$ trên cạnh này của phần tử bằng không.

Sau khi đặt giá trị dx từ phương trình (2.88) vào phương trình (2.86) và lấy tích phân theo ξ từ -1 đến +1 (từ nút 7 đến nút 5), ta nhận được

$$\begin{Bmatrix} F_{y,5} \\ F_{y,6} \\ F_{y,7} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y \beta d\xi. \quad (2.90)$$

Vận dụng phép cầu phương Gauss - Lezandr, Có thể đưa ra dạng xấp xỉ số của tích phân (2.90)

$$\begin{Bmatrix} F_{y,5} \\ F_{y,6} \\ F_{y,7} \end{Bmatrix} = \frac{5}{9} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y \beta \Big|_{\xi = -0.774597} + \frac{8}{9} \begin{Bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y \beta \Big|_{\xi = 0} + \frac{5}{9} \begin{Bmatrix} n_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{Bmatrix} q_y \beta \Big|_{\xi = 0.774597}$$

Đó là phép xấp xỉ khá thô, và tổng các lực được tính sẽ không đúng bằng tổng tải trọng trên cạnh của phần tử. Sự khác biệt không lớn có thể đem phân bố đều giữa các nút. Nếu cạnh của phần tử nghiêng cứ là đoạn thẳng dài 2b và nút giữa nằm ở chính giữa của cạnh, thì tải trọng phân bố đều được phân chia giữa các nút theo đúng tỉ lệ $\frac{1}{3} qb$, $\frac{4}{3} qb$, $\frac{1}{3} qb$. Tất nhiên cần phải lập chương trình quy các lực phân bố theo diện tích thành các lực nút và tốt hơn hết là tiến hành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo chu trình. Tính toán lực nút từ tải trọng phân bố theo chu tuyến được thực hiện một cách đơn giản hơn bằng tay.

Thuật toán đã trình bày để lập các ma trận độ cứng của phần tử dùng thông số mới thoạt nhìn có vẻ rất cồng kềnh, tuy nhiên chương trình được lập một cách hợp lí thường không phức tạp hơn mấy so với phương pháp xấp xỉ tuyến tính các chuyển vị đối với phần tử tam giác.

Từ công thức (2.82) rõ ràng là MTĐCPT về bản chất là tổng của chín ma trận được tính đối với mỗi điểm lấy tích phân. Vì thế các hàm hợp lí là sau khi lập các chu trình theo số hiệu cột m và hàng n của các điểm tích phân thì tính các ma trận này và đồng thời chuyển các phần tử của chúng tới chỗ của mình trong trường của ma trận độ cứng hệ thống. Khi đó các công thức sau đây được viết bằng ngôn ngữ Fortran có thể là hữu ích. Các tọa độ điểm lấy

tích phân ξ và η (KSI và ETA) phụ thuộc vào số hiệu cột M và số hiệu hàng N là cần thiết khi tính các thành phần của ma trận [B] và [J] trong công thức (2.82) :

$$\left. \begin{aligned} KSI &= (M-2) * 0,774597 \\ ETA &= (N-2) * 0,774597 \end{aligned} \right\};$$

Hệ số Δ_{mn} (DEL) trong công thức (2.82) phụ thuộc vào M và N :

$$\begin{aligned} DEL &= (5./9.) ** (IABS(2*(N/2) - N) + \\ &+ IABS * (2 * (M/2) - M) * (8./9.) ** ((1 - \\ &- IABS(2 * (N/2) - N) + (1 - IABS(2 * M/2) - M)). \end{aligned}$$

Nếu lập ma trận [B] theo công thức (2.74) trong chu kỳ với các số hiệu của các nút từ I = 1 đến I = 8, thì các tọa độ nút ξ_i và η_i có thể tính theo công thức :

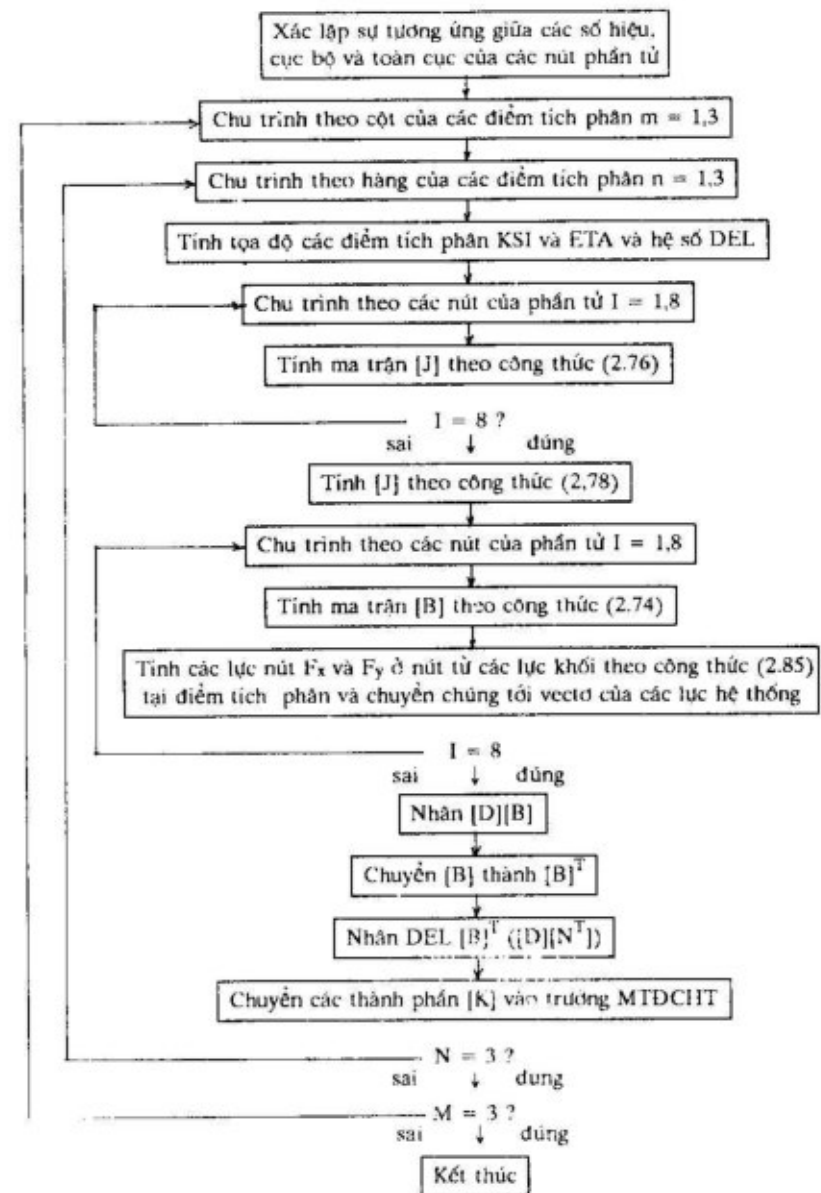
$$\begin{aligned} KSI &= (I - 4) * (8 - I) / IMAX (IABS (I - 4), 1) * \\ &* IMAX ((8 - 1), 1) ; \\ ETA &= (2 - I) * (I - 6) / (IMAX (IABS (2 - I), 1) * \\ &* IMAX (IABS (I - 6), 1)). \end{aligned}$$

Sơ đồ khối tổng quát của chương trình lập MTDCPT cho trên hình 2-18.

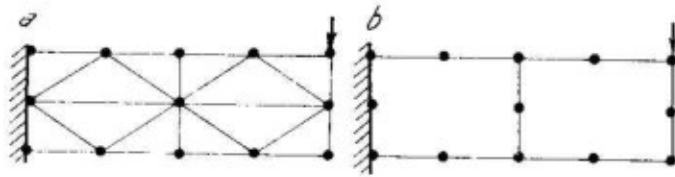
Ưu điểm của các phần tử đẳng tham số bậc cao so với các phần tử ba nút là : độ chính xác của lời giải cao hơn (khi số nút như nhau), có thể mô tả các biên cong chính xác hơn, có thể rút gọn lượng thông tin đưa vào. Nhược điểm là : tính phức tạp của các bài toán lực chu tuyến, sự hạn chế về mặt hình học khi xây dựng lưới các phần tử, chiều rộng của dải các số hạng khác không trong MTDCPT khá lớn.

Trên hình 2-19 theo tài liệu [5] cho ta sơ đồ dầm côngxon, được phân chia bởi lưới các phần tử tam giác (a) và đẳng tham số tám nút (b). Số nút trong cả hai sơ đồ là như nhau, tuy nhiên với các phần tử tam giác chuyển vị của điểm đặt tải trọng là 0,53 so với lời giải chính xác, còn ứng suất cực đại trong dầm là 0,51 ; còn với các phần tử đẳng tham số thì cả chuyển vị lẫn ứng suất đều bằng 0,99 so với các kết quả thuộc lời giải chính xác.

Trong phần tử đẳng tham số đã đề cập, một tập hợp các hàm dạng như nhau được sử dụng để mô tả hình học (phương trình (2.72)) và chuyển vị (phương trình (2.73)). Nếu để mô tả chuyển vị mà sử dụng các đa thức bậc thấp hơn, thì phần tử được gọi là *phần tử tham số trên*, còn nếu bậc cao hơn thì gọi là *phần tử tham số dưới*.



Hình 2-18. Sơ đồ khối tổng quát của chương trình lập MTDCPT



Hình 2-19. Dầm công xon

Đặc biệt là trong phần tử tám nút để mô tả các chuyển vị có thể chỉ sử dụng các chuyển vị của bốn nút ở góc thông qua bốn hàm dạng tương ứng có bậc thấp hơn :

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_3 u_3 + N_5 u_5 + N_7 u_7 \\ v &= N_1 v_1 + N_3 v_3 + N_5 v_5 + N_7 v_7 \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

trong đó $N_1 - N_7$ là các hàm dạng được xác định bằng biểu thức

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta). \quad (2.92)$$

Phần tử tham số trên có tám nút và bốn điểm tích phân ở bên trong được áp dụng khi phân tích đàn dẻo (xem mục 2.7).

2.5. BÀI TOÁN BA CHIỀU

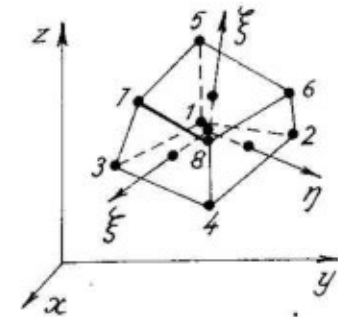
Để giải bài toán ba chiều có thể sử dụng các phần tử có dạng tứ diện bốn nút với các hàm chuyển vị xấp xỉ tuyến tính hoặc là các phần tử đẳng tham số có dạng bất kỳ.

Việc xây dựng lưới không gian các phần tử hữu hạn từ các tứ diện khác chiều phức tạp về hình học, vì thế trước hết thường người ta chia miền thành các khối sáu mặt tiêu chuẩn nào đó ("những viên gạch") có tám đỉnh. Bằng phương pháp tiêu chuẩn có thể phân chia mỗi "viên gạch" thành năm tứ diện và coi mỗi phần như là phần tử hữu hạn. Tuy nhiên sau khi miền được phân thành các viên gạch, đúng hơn nên coi các "viên gạch" này là các phần tử đẳng tham số có tám nút ở đỉnh. Trên cạnh của khối sáu mặt về nguyên tắc có thể tạo thêm một hoặc một số nút, tuy nhiên

việc sử dụng các phần tử đẳng tham số phức tạp trong các bài toán không gian sẽ làm tăng mạnh chiều rộng của dải các số hạng khác không của MTDCHT.

Vì thế trong thực tế giải các bài toán không gian thường áp dụng khối sáu mặt có tám nút, trong đó ta chỉ đưa ra ma trận độ cứng của nó mà thôi.

Nghịch ảnh của khối sáu mặt không đều (hình 2.20) là khối lập phương trong tọa độ ξ, η , mà tọa độ các đỉnh bằng 0, +1 hoặc -1. Tương tự như phương trình (2.72) ta sẽ thể hiện các tọa độ x, y và z của các điểm bên trong của phần tử thông qua các tọa độ nút và các tọa độ của nghịch ảnh ξ, η, ζ :



Hình 2-20

trong đó x, y và z của các điểm bên trong của phần tử thông qua các tọa độ nút và các tọa độ của nghịch ảnh ξ, η, ζ :

$$\left. \begin{aligned} x &= N_1 x_1 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + \dots + N_8 y_8 \\ z &= N_1 z_1 + \dots + N_8 z_8 \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

trong đó x_1, y_1, \dots, z_8 là các tọa độ nút ; $N_1 - N_8$ là các hàm dạng, được xác định bởi phương trình có dạng tổng quát

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad (2.94)$$

Đơn giản là, khi đánh số các nút trên hình 2-20, các tọa độ của nút i là ξ_i, η_i và ζ_i có thể được xác định theo công thức :

$$\xi_i = (-1)^i, \eta_i = (-1)^{\text{int}\left(\frac{i+1}{2}\right)} = (-1)^{\text{int}\left(\frac{i+3}{4}\right)}, \quad (2.95)$$

trong đó int là kí hiệu phần nguyên.

Các hàm chuyển vị trong phạm vi phần tử có dạng tương tự với các phương trình (2.73) :

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + \dots + N_8 u_8 \\ v &= N_1 v_1 + \dots + N_8 v_8 \\ \omega &= N_1 \omega_1 + \dots + N_8 \omega_8. \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

Các biến dạng tương đối trong phạm vi phần tử

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

được xác định bằng cách lấy vi phân các biểu thức (2.96)

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\},$$

trong đó $\{\delta\} = \{u_1 v_1 w_1 u_2 v_2 \dots u_8 v_8 w_8\}^T$

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_{1x} & 0 & 0 & N'_{2x} & 0 & \dots & N'_{8x} & 0 & 0 \\ 0 & N'_{1y} & 0 & 0 & N'_{2y} & \dots & 0 & N'_{8y} & 0 \\ 0 & 0 & N'_{1z} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N'_{8z} \\ N'_{1y} & N'_{1x} & 0 & N'_{2y} & N'_{2z} & \dots & N'_{8y} & N'_{8x} & 0 \\ 0 & N'_{1z} & N'_{1y} & 0 & N'_{2z} & \dots & 0 & N'_{8z} & N'_{8y} \\ N'_{1z} & 0 & N'_{1x} & 0 & N'_{2z} & \dots & N'_{8z} & 0 & N'_{8x} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Đạo hàm của các hàm dạng theo tọa độ x, y, z liên hệ với các đạo hàm của nghịch ảnh ξ, η, ζ bằng quan hệ

$$\begin{Bmatrix} N'_{ix} \\ N'_{iy} \\ N'_{iz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} N'_{i\xi} \\ N'_{i\eta} \\ N'_{i\zeta} \end{Bmatrix}, \quad (2.98)$$

trong đó

$$[J] = \begin{bmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_{1\xi} & N'_{2\xi} & \dots & N'_{8\xi} \\ N'_{1\eta} & N'_{2\eta} & \dots & N'_{8\eta} \\ N'_{1\zeta} & N'_{2\zeta} & \dots & N'_{8\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

là ma trận Akobi.

Quy tắc tính ma trận nghịch đảo $[J]^{-1}$, cũng như định thức $|J|$ được đề cập trong các giáo trình đại số tuyến tính.

Biểu thức tổng quát đối với đạo hàm của các hàm dạng theo tọa độ nghịch ảnh có dạng

$$N'_{i\xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta \eta_i)(1 + \zeta \zeta_i) \quad (2.100)$$

Các biểu thức đối với $N'_{i\eta}$ và $N'_{i\zeta}$ nhận được từ công thức (2.100) bằng cách đặt tuần hoàn các tọa độ theo trật tự $\xi \rightarrow \eta \rightarrow \zeta \rightarrow \xi \rightarrow \eta \rightarrow \dots$. Ứng suất liên hệ với biến dạng bằng định luật Hooke (xem các công thức (1.8 ; 1.9 ; 2.66)) :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}. \quad (2.101)$$

Quan hệ của các lực nút với các chuyển vị nút lại được xác định nhờ nguyên lý chuyển vị ban đầu bằng cách cân bằng công của các lực nút với công của các nội ứng suất (tính được bằng cách tích phân trị số $\{d\varepsilon\}^T \{\sigma\}$ theo thể tích của phần tử) :

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \quad (2.102)$$

trong đó

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |J| [B]^T [D] [B] d\xi d\eta d\zeta$$

$[K]$ - là ma trận độ cứng.

Việc tính tích phân ba lớp được thay bằng cách tính (theo phép cấu phương Gauss - Lezandr) giá trị biểu thức dưới dấu tích phân tại tám điểm tích phân, và bằng cách nhân các giá trị này với phần thể tích của phần tử ứng với điểm tích phân đã cho (hệ số trọng lượng) Δ , mà trong trường hợp này nó bằng một đơn vị và có thể không viết ra :

$$[K] = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs} |J_{mnk}| [B_{mnk}]^T [D_{mnk}] [B_{mnk}] \quad (2.103)$$

Các lực nút liên hệ với các ứng suất tại các điểm lấy tích phân bằng quan hệ

$$\{F\} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 \text{abs} |J_{mnk}| [B_{mnk}]^T \{\sigma_{mnk}\}. \quad (2.104)$$

Tọa độ của các điểm tích phân ξ, η, ζ mà ở đó giá trị các ma trận $[J_{mnk}]$, $[B_{mnk}]$ được tính, có thể được xác định bằng các công thức :

$$\begin{aligned} \xi_m &= (-1)^m 0,57735 ; \eta_n = (-1)^n 0,57735 ; \\ \xi_k &= (-1)^k 0,57735 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Tương tự như công thức (2.85) việc quy các lực phân bố về các lực nút có thể thực hiện nhờ công thức

$$F_{x,i} = \gamma_x \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{k=1}^2 N_{i,mnk} \text{abs}|J|. \quad (2.106)$$

trong đó $N_{i,mnk}$ - là giá trị hàm dạng của nút thứ i tại điểm tích phân theo trình tự ; γ_x là lực khối lượng đơn vị (trên đơn vị thể tích) tác dụng dọc theo trục x .

Hệ số trọng lượng Δ trong công thức (2.106) vắng mặt, vì nó bằng một đơn vị. Công thức tương tự có thể được viết cả đối với các thành phần lực nút theo các trục y và z . Ở phần tử lập phương với tám nút, lực tổng cộng phân bố theo thể tích được chia đều nhau cho các nút.

Nếu trên mặt bất kì của phần tử, chẳng hạn trên mặt $\zeta = +1$ có các nút 5, 6, 7, 8 (xem hình 2-20) đặt tải trọng phân bố, thì tải trọng này phải phân bố giữa các nút 5, 6, 7, 8 có các hàm dạng khác không trên mặt đó. Từ mỗi mặt phân tử có diện tích $dx dy$, tải trọng $q dx dy$ được phân bố giữa các nút 5, 6, 7, 8 tỉ lệ với trị số hàm dạng trên phần tử đó. Ban đọc dễ dàng rút ra công thức tương tự về ý nghĩa với công thức (2.90) để tính toán các lực nút. Khi mặt hình vuông và tải trọng đều, thì tổng tải trọng trên mặt được chia đều giữa các nút.

Nếu các phần tử về dạng không khác hình lập phương nhiều, thì việc phân đều các lực phân bố theo thể tích và theo đường viền giữa các nút tương ứng sẽ không mắc sai số lớn.

2.6. NHỮNG THỦ TỤC CƠ BẢN KHI GIẢI BÀI TOÁN PHI TUYẾN

Mặc dù trong địa cơ học phép giải đàn hồi đôi khi có lợi, chẳng hạn khi tính toán độ lún, đánh giá ổn định của các hầm ngầm trong đá ; tuy nhiên, khi phân tích hiện tượng trong các môi trường có tính chất phi tuyến phức tạp thì mới thấy hết khả năng to lớn của PPPTHH. Hiện có một số phương pháp khác nhau để thu được lời giải phi tuyến.

2.6.1. Tính đàn hồi phi tuyến với ma trận cát tuyến

Tính chất của môi trường được cho dưới dạng một tập hợp ban đầu các đặc trưng đàn hồi và các hàm xác định các đặc trưng cát tuyến, phụ thuộc vào biến dạng. Chẳng hạn, đối với môi trường đàn dẻo lý tưởng (hình 2-21) quan hệ của môđun trượt cát tuyến và biến dạng có dạng :

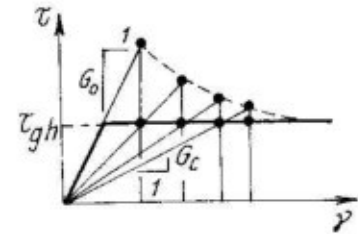
nếu $\gamma \leq \tau_{gh}/G_0$, thì $G = G_0$,

Nếu $\gamma > \tau_{gh}/G_0$, thì $G = \tau_{gh}/\gamma$.

Khi đó nếu mật giới hạn được diễn tả bằng tiêu chuẩn Tresca hoặc Mises, thì $\tau_{gh} = \text{const}$; còn nếu mật giới hạn được diễn tả bằng tiêu chuẩn Coulomb hoặc Botkin, thì $\tau_{gh} = f(I_1)$.

Trước tiên môđun ban đầu G_0 được gán cho các phần tử của miền nghiên cứu (xem hình 2-21), và bài toán đàn hồi được giải với tải trọng toàn phần. Sau đó, đối với mỗi phần tử, tính các giá trị G_c mới theo thuật toán đã nói ở trên (hoặc theo một thuật toán khác phù hợp với mô hình nghiên cứu). Trong một phần tử nếu có đủ chỉ một giá trị mới G_c khác với giá trị cũ, thì cần tiến hành giải lặp với ma trận độ cứng mới được lập nên từ các đặc trưng đàn hồi mới. Khi giải lặp, trong các phần tử có các môđun mới (giảm) thì mức ứng suất sẽ giảm, và qua một vài chu kì lặp nó sẽ xấp xỉ với mức giới hạn đã cho (xem hình 2-21). Phép lặp ngừng khi trong tất cả các phần tử mức khác biệt ($\tau_{gh} - \tau$) đủ nhỏ về trị số tuyệt đối hoặc tương đối.

Rõ ràng là thủ tục đó đảm bảo tính đồng trục của các ứng suất và biến dạng toàn phần. Hệ số Poisson không thể đạt được trị số 0,5, vì ở mẫu số của các phần tử thuộc ma trận đàn hồi có chứa đại lượng $(1-2\nu)$; do vậy, phương pháp này không dùng để phân tích các quá trình trong môi trường xốp. Phương pháp đã giả thiết là đặt đồng thời tất cả các tải trọng và khả năng của nó để giải các bài toán có các tải trọng đặt không đồng thời bị hạn chế.



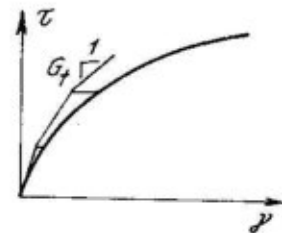
Hình 2-21. Đồ thị biểu diễn cách thu được lời giải phi tuyến bằng phương pháp các đặc trưng cát tuyến thay đổi

2.6.2. Tính đàn hồi phi tuyến với ma trận tiếp tuyến

Tính chất của môi trường được cho dưới dạng một tập hợp các đặc trưng đàn hồi ban đầu và các hàm xác định các đặc trưng tiếp tuyến phụ thuộc vào biến dạng hay ứng suất.

Tải trọng được đặt từng cấp nhỏ theo trình tự cần thiết, không nhất thiết theo tỉ lệ, còn ứng suất trong phần tử sau mỗi cấp tăng tải thì được lấy tổng.

Bước giải thứ nhất được tiến hành với tính chất đàn hồi của các phần tử, tương ứng với trạng thái ứng suất - biến dạng ban đầu đã cho, còn đối với mỗi bước tiếp theo, tính đàn hồi của các phần tử được xác định lại cho phù hợp với mức ứng suất (hay biến dạng) đã đạt được. Cách thức để có lời giải được trình bày trên hình 2-22. Vì các tính chất đàn hồi được coi là phù hợp với trạng thái của phần tử trước khi đặt cấp tải trọng tiếp theo, cho nên sai số dần dần tích lũy lại, làm cho các điểm tính toán lệch khỏi quan hệ ứng suất và biến dạng cho trước. Tuy nhiên, khi chia tải trọng thành 20 cấp hoặc lớn hơn thì sai số sẽ nhỏ hơn. Ngoài ra, có thể hiệu chỉnh sau mỗi bước bằng phép giải lặp với các môđun tính cho trị số trung bình cộng của các ứng suất (biến dạng) trước và sau khi đặt cấp tải trọng.



Hình 2-22. Đồ thị biểu diễn cách nhận được lời giải phi tuyến bằng phương pháp các đặc trưng tiếp tuyến thay đổi

Phương pháp chỉ được áp dụng đối với các môi trường tăng bền, vì trong miền khử bền các môđun tiếp tuyến là âm. Phương pháp không thích hợp với môi trường tơ xoắn. Phương pháp đảm bảo tính đồng trực của độ tăng ứng suất và biến dạng trong từng bước, điều này không đặc trưng cho biến dạng dẻo, và khi phương của các ứng suất chính thay đổi mạnh trong quá trình tăng tải không theo tỉ lệ thì có thể cho các kết quả sai.

Tuy nhiên, phương pháp được sử dụng thành công để giải các bài toán địa kĩ thuật, và hiện nay nó vẫn khá phổ biến. Một số lời giải theo phương pháp đó được nghiên cứu ở mục 6.1.

2.6.3. Phương pháp ứng suất ban đầu - lí thuyết biến dạng dẻo

Phương pháp ứng suất ban đầu, do O. Zienkiewicz [5] đưa ra lần đầu tiên, đôi khi được gọi là phương pháp Newton - Raphson cải biên. Phương pháp tổng hợp và hiệu quả này rất phổ biến khi giải các bài toán phi tuyến. Giả sử quan hệ phi tuyến của ứng suất và biến dạng có dạng

$$\sigma = [D_{dd}][\epsilon] \quad (2.107)$$

Các thành phần của ma trận $[D_{dd}]$ không phải là các trị số ổn định, mà phụ thuộc vào biến dạng. Ma trận $[D_{dd}]$ không nhất thiết phải cho ở dạng tường minh: chỉ cần đưa ra một loại phép toán mà nhờ nó có thể tính được các ứng suất lí thuyết theo biến dạng cho trước $\{\epsilon\}$ trong môi trường phi tuyến đã cho.

Lời giải đạt được bằng cách sau đây. Gán cho các phần tử của môi trường các tính chất đàn hồi ban đầu, và thiết lập ma trận độ cứng hệ thống không đổi. Đặt tải trọng toàn phần đã cho, giải bài toán đàn hồi, tính toán ứng suất và biến dạng điểm A trên hình 2-23. Ứng suất lí thuyết $\{\sigma^{ll}\}$ phù hợp với biến dạng định trước, được tính theo công thức (2.107), sẽ khác với ứng suất đàn hồi $\{\sigma\}_1$. Sự khác biệt giữa các ứng suất đàn hồi và ứng suất lí thuyết được xem như độ tăng của ứng suất ban đầu:

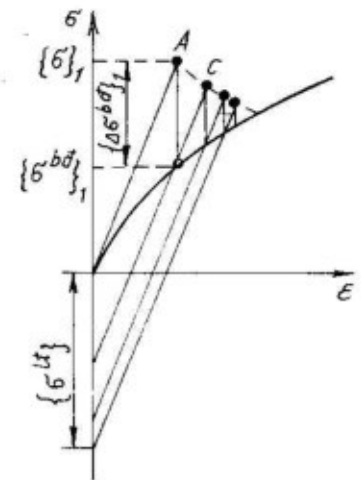
$$\{\Delta\sigma^{bd}\}_1 = \{\sigma\}_1 - \{\sigma^{ll}\}_1 \quad (2.108)$$

Độ tăng các ứng suất ban đầu của phần tử được tính đổi thành các lực nút ban đầu theo công thức

$$\{F\} = k_g \int_S [B]^T \{\Delta\sigma^{bd}\} dS, \quad (2.109)$$

trong đó k_g là hệ số gia tốc hội tụ.

Theo kinh nghiệm $k_g = 1,5$ là trị số tối ưu đối với phạm vi rộng các mô hình môi trường.



Hình 2-23. Biểu diễn bằng đồ thị các thủ tục của phương pháp "ứng suất ban đầu"

O. Zienkiewicz [50] đưa ra phương pháp khá phức tạp để xác định trị số k_q riêng biệt đối với mỗi phần tử; điều đó cho phép tối ưu hóa hơn nữa quá trình lập. Thêm các lực nút ban đầu vào vectơ lực của hệ thống, rồi tiến hành phép giải dần hồi sau đây với các ma trận độ cứng cũ, nhưng có tập hợp các lực nút mới.

Việc thêm các lực ban đầu vào sẽ làm tăng ứng suất dần hồi trong phần tử một lượng; tuy nhiên lượng này nhỏ hơn các ứng suất ban đầu dùng để tính các lực nút; chừng nào trong tập hợp các phần tử, các lực ban đầu đã được thêm vào cũng được phân phối cả cho các phần tử khác của miền. Vì thế sau khi trừ các ứng suất ban đầu được đưa vào khỏi các ứng suất tính toán ta sẽ nhận được điểm C, gần với đường lí thuyết hơn điểm A. Ta xác định lại các ứng suất lí thuyết $\{\sigma^{ll}\}_2$ tương ứng với các biến dạng mới, và các ứng suất ban đầu tăng thêm. Cứ thế, việc lập được làm lại chừng nào các ứng suất dần hồi tìm được trừ đi tổng các ứng suất ban đầu tích lũy $\{\sigma^{hd}\}$ còn chưa đủ gần với lí thuyết.

Ưu điểm của phương pháp ứng suất ban đầu là tính không đối của MTĐCHT, điều này cho phép thành lập nó và tính toán ma trận nghịch đảo chỉ một lần. Ngoài ra, phương pháp không đưa ra yêu cầu nào, chẳng hạn tính đối xứng, đối với ma trận $[D_{dd}]$ trong phương trình (2.107): môi trường có thể có quy luật chảy dẻo bất kì. Việc đưa ra nhóm mô hình có hiệu quả của các môi trường dùng phương pháp này được trình bày ở chương 5.

2.6.4. Lí thuyết chảy dẻo

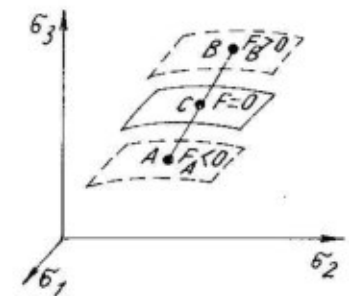
Trong trường hợp tổng quát trạng thái ứng suất khởi đầu của miền được đặc trưng bằng các điểm nằm bên trong mặt chảy $F(\{\sigma\}, k) = 0$. Khi tăng dần tải trọng, thoạt đầu miền sẽ bị biến dạng đàn hồi, và chỉ sau khi đạt mức tải trọng nhất định thì các ứng suất trong các phần tử của vùng có ứng lực lớn nhất mới bắt đầu liên tục đi tới mặt chảy.

Để nhận được lời giải phần tử hữu hạn thì tải trọng cần đặt theo từng cấp nhỏ, còn quan hệ của ứng suất và biến dạng trong phần tử ở phạm vi một cấp thì xác định hoặc là bằng ma trận đàn hồi, nếu phần tử là đàn hồi, hoặc là bằng ma

trận đàn dẻo $[D_{dd}]$ theo công thức (2.107), nếu các ứng suất trong phần tử ra tới mặt chảy. Ứng suất trong các phần tử được cộng lại theo từng bước. Trong tài liệu có trình bày một số phương án thực hiện quá trình này.

Quá trình từng bước với MTĐCHT thay đổi. Trong phương án này, đối với tất cả các phần tử có trạng thái ứng suất ở trên mặt chảy, người ta lập các ma trận tiếp tuyến đàn dẻo $[D_{dd}]$ theo công thức (1.90), còn đối với các phần tử có trạng thái ứng suất ở bên trong mặt chảy thì lập ma trận đàn hồi $[D]$; trị số cấp tăng tải theo thứ tự được lấy sao cho trạng thái ứng suất của phần tử chịu ứng lực lớn nhất (PTÚLLN) trong số các phần tử đàn hồi đi tới mặt chảy. Ở bước tăng tải thứ n , ma trận $[D_{dd}]$ của các phần tử, phụ thuộc vào ứng suất, được tính toán theo trạng thái ứng suất đến cuối bước thứ $(n - 1)$. Quá trình này được áp dụng đối với môi trường có quy luật chảy kết hợp, tức là quy luật đảm bảo tính đối xứng của ma trận $[D_{dd}]$, vì tính không đối xứng của MTĐCPT dẫn tới tính không đối xứng của MTĐCHT, làm phức tạp nhiều cho phép giải hệ phương trình. Trị số cấp tăng tải theo thứ tự đảm bảo PTÚLLN đi tới mặt chảy được xác định bằng cách sau đây. Giả sử trạng thái ứng suất của phần tử đàn hồi được xác định bằng điểm A ở bên trong mặt chảy (hình 2-24), có nghĩa là $F(\{\sigma\}, k) < 0$. Ta đặt cấp tải trọng thứ để đưa trạng thái ứng suất của phần tử tới điểm B ở ngoài hoặc ở trong mặt chảy. Giải đồng thời các phương trình đường thẳng AB và mặt chảy $F(\{\sigma\}, k) = 0$, ta xác định được điểm giao nhau giữa đường thẳng AB với mặt chảy - điểm C, nó sẽ nằm bên trong hoặc bên ngoài đoạn AB. Tỉ số độ dài các đoạn AC/AB được gọi là hệ số quá tải k_q . Nếu $AB > AC$, thì $k_q > 1$, và ngược lại.

Có phương pháp khác xác định hệ số quá tải. Ta kí hiệu trị số của hàm $F(\{\sigma\}, k)$ với trạng thái ứng suất khởi đầu của phần tử là F_A . Hiển nhiên là $F_A < 0$, vì điểm A



Hình 2-24. Đồ thị biểu diễn sự đi tới mặt chảy của PTÚLLN

nằm bên trong mặt chày có phương trình $F = 0$. Ta kí hiệu trị số hàm F tại điểm B là F_B ; $F_B > 0$, nếu điểm B nằm ngoài mặt chày, và $F_B < 0$, nếu điểm B nằm bên trong. Khi đó hệ số quá tải

$$k_q \approx (F_A - F_B)/F_A \quad (2.110)$$

Zienkiewicz [50] đã làm chính xác thêm công thức (2.110) bằng cách tính tới quan hệ phi tuyến giữa hàm F và ứng suất.

Phần tử có hệ số quá tải k_q cực đại được gọi là phần tử chịu ứng lực lớn nhất (PTULLN). Tất cả các lực (và chuyển vị) nút của cấp tải trọng thứ đều được đem chia cho k_q , và bằng cách đó xác định được cấp tải trọng tính toán để chuyển trạng thái ứng suất của PTULLN tới mặt chày. Không cần lặp lại cách giải với cấp tải trọng tính toán - chỉ cần thực hiện phép chia đơn giản các giá trị ứng suất tính được từ cấp thứ cho k_q và tính giá trị tương ứng với cấp tải trọng tính toán là đủ.

Đối với PTULLN đã đến mặt chày thì ma trận đàn dẻo được thiết lập theo cấp giá tải sau đây.

Nếu tải trọng tăng theo tỉ lệ, thì thủ tục đã trình bày sẽ đưa phần tử thứ nhất tới trạng thái dẻo sau một bước. Các cấp tiếp theo, mà mỗi cấp sẽ đưa một PTULLN đến trạng thái dẻo, là khá nhỏ. Ta lưu ý rằng, đối với mỗi cấp giá tải thì cần lập một MTĐCHT mới, và khi sử dụng các phương pháp này để giải hệ phương trình thì mỗi lần đều đòi hỏi tốn nhiều công sức.

Vì các ma trận độ cứng đàn dẻo của các phần tử được thành lập theo trạng thái ứng suất - biến dạng trước khi đặt cấp tải trọng, cho nên trạng thái ứng suất của phần tử sau khi đặt tải trọng không ở đúng trên mặt chày, và sai số này dần dần tích lũy giống như sơ đồ trên hình 2-22, nhưng do cấp tải trọng tính toán khá nhỏ như đã nêu mà nó không đạt tới trị số lớn.

A.K. Bugrov [3] đã vận dụng quá trình tương tự vào môi trường đàn dẻo lí tưởng có mặt giới hạn Coulomb, mặt này đồng thời là mặt chày và mặt thể dẻo duy nhất.

Quá trình lặp từng bước với MTĐCHT không đối là một phương án của phương pháp ứng suất ban đầu. MTĐCHT được thành lập một lần theo các đặc trưng đàn hồi ban đầu, rồi tính ra một ma trận nghịch đảo loại nào đó sao cho phù hợp với phương pháp đã sử dụng để giải hệ phương trình.

Tải trọng đã cho được đặt theo các cấp có trị số cho trước. Lời giải đối với bước tải trọng thứ n thì tìm được một cách chính xác theo phương pháp ứng suất ban đầu đã trình bày trước đây. Tổng ứng suất trong các phần tử $\{\sigma\}_{n-1}$ do $(n-1)$ cấp trước đó đã biết ở đầu bước.

Đặt véctor lực (và véctor chuyển vị đã cho) của cấp tải trọng tuần tự vào miền, rồi theo chế độ lặp tiến hành lại phép giải đàn hồi với các véctor lực đã được thay đổi.

Trong các phần tử ở chu kì lặp thứ i ta tính được :

độ tăng các biến dạng $\{\Delta \varepsilon\}_n^i$;

độ tăng các ứng suất đàn hồi tương ứng với độ tăng biến dạng

$$\{\Delta \sigma^d\}_n^i = [D] \{\Delta \varepsilon\}_n^i ; \quad (2.111)$$

các ứng suất đàn hồi

$$\{\sigma^d\}_n^i = \{\sigma\}_{n-1} + \{\Delta \sigma^d\}_n^i , \quad (2.112)$$

độ tăng các ứng suất "thực" bằng hiệu giữa độ tăng đàn hồi và các ứng suất ban đầu đã tích lũy ở $(n-1)$ chu kì lặp trước :

$$\{\Delta \sigma^t\}_n^i = \{\Delta \sigma^d\}_n^i - \{\sigma^{bd}\}_n \quad (2.113)$$

Theo mô hình môi trường đã cho, tính được độ tăng ứng suất "lí thuyết" $\{\Delta \sigma^l\}_n^i$ tương ứng với độ tăng biến dạng $\{\Delta \varepsilon\}_n^i$. Hiệu số giữa độ tăng thực và lí thuyết được xem là độ tăng ứng suất ban đầu :

$$\{\Delta \sigma^{bd}\}_n^i = \{\Delta \sigma^t\}_n^i - \{\Delta \sigma^l\}_n^i . \quad (2.114)$$

Từ độ tăng ứng suất ban đầu, tính được phần thêm vào véctor lực ban đầu theo công thức (2.109).

Các ứng suất ban đầu qua từng chu kì một trong phạm vi của một bước tải trọng sẽ được tích lũy lại :

$$\{\sigma^{bd}\}_n = \{\sigma^{bd}\}_n + \{\Delta \sigma^{bd}\}_n^i .$$

Nếu độ tăng các ứng suất ban đầu của một trong các phần tử vẫn còn chưa đủ nhỏ, thì phải tiến hành phép lặp thứ $(i+1)$ sau đây. Khi đạt tới độ chính xác cần thiết, thì đặt cấp tải trọng thứ

(n + 1) tiếp theo. Độ tăng ứng suất lý thuyết có thể tính bằng cách sau đây :

a) Nếu phần tử trước khi đặt cấp tải trọng thứ n đã đang ở trạng thái dẻo, thì

$$\{\Delta \sigma\}_n^i = [D_{dd}] \{\Delta \varepsilon\}_n^i \quad (2.115)$$

Các thành phần của ma trận đàn dẻo $[D_{dd}]$, phụ thuộc vào ứng suất (hoặc biến dạng), có thể tính theo các ứng suất $\{\sigma_{n-1}\}$.

b) Nếu phần tử trước khi đặt cấp tải trọng thứ n là đàn hồi, có nghĩa là $F(\{\sigma\}_{n-1}, k) < 0$, còn sau khi đặt cấp tải trọng thứ n mà chuyển sang dẻo, có nghĩa là $F(\{\sigma\}_n^i) > 0$, thì trong phạm vi cấp gia tải trọng thứ n phần tử sẽ biến dạng đàn hồi cục bộ, dẻo cục bộ. Phần biến dạng mà phần tử trải qua ở trạng thái đàn hồi là r, còn ở trạng thái dẻo là (1 - r). Dễ dàng thấy rằng, r quan hệ với hệ số quá tải k_q theo biểu thức : $r = 1/k_q$, và để tính nó có thể sử dụng cùng một phương pháp. Độ tăng các ứng suất lý thuyết sẽ gồm các phần đàn hồi và đàn dẻo :

$$\{\Delta \sigma\}_n^i = r \{\Delta \sigma\}_n^i + (1 - r) [D_{dd}] \{\Delta \varepsilon\}_n^i \quad (2.116)$$

Trong các công thức (2.115) và (2.116) các ma trận $[D_{dd}]$ tương ứng với các ứng suất trước khi bắt đầu biến dạng đàn dẻo ; khi các cấp tải trọng lớn, điều đó sẽ kéo các ứng suất trong phần tử thoát khỏi mặt chảy và dẫn đến tích lũy sai số. Để giảm sai số khi tính độ tăng ứng suất "lý thuyết", trong tài liệu [84] đề nghị chia khoảng biến dạng $\{\Delta \varepsilon\}_n^i$ và $(1 - r) \{\Delta \varepsilon\}_n^i$ trong các công thức (2.115) và (2.116) thành m (m = 5 + 10) khoảng con. Công thức (2.115) khi đó có dạng

$$\{\Delta \sigma\}_n^i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [D_{dd}]_j \{\Delta \varepsilon\}_n^i \quad (2.117)$$

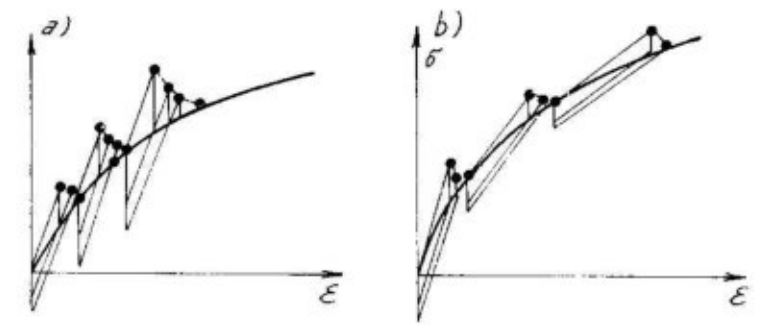
Ma trận $[D_{dd}]$ được thành lập theo mức ứng suất $(\{\sigma\}_{n-1} + \{\Delta \sigma\}_n^i)$, đặt được ở đầu khoảng con thứ j.

Cách này cùng với việc sử dụng phương pháp ứng suất ban đầu được áp dụng cho các môi trường tăng bền cũng như khử bền có

qui luật dòng chảy liên hợp và không liên hợp. Cách thức tiến hành đã trình bày được thể hiện trên hình 2-25, a.

Việc thực hành một số mô hình môi trường với sự hỗ trợ của phương pháp này được trình bày trong các mục 5.3 và 5.4.

Phương pháp hỗn hợp. Khi phân tích trạng thái ứng suất - biến dạng trong các môi trường có qui luật dòng chảy liên hợp nhằm tiết kiệm thời gian chạy máy thì điều hợp lý đối với mỗi bước tải trọng tương đối lớn là lập một MTĐCHT mới có sử dụng các ma trận đối xứng của các phần tử $[D_{dd}]$; còn trong phạm vi của bước thì tiến hành quá trình lặp bằng phương pháp ứng suất ban đầu, theo cách đã trình bày ở phần trước (xem hình 2-25, b).



Hình 2-25. Đồ thị biểu diễn phương pháp phân bước với MTĐCHT không đối (a) và thay đổi (b)

Phương pháp biến dạng ban đầu. Trong một số mô hình môi trường, người ta không cho độ tăng ứng suất phụ thuộc vào độ tăng biến dạng, mà cho độ tăng biến dạng $\{\Delta \varepsilon\}$ phụ thuộc vào độ tăng ứng suất $\{\Delta \sigma\}$, ứng suất hiệu quả $\{\sigma\}$, khoảng thời gian Δt , độ tăng nhiệt độ $\Delta \theta$ và các yếu tố khác. Độ tăng biến dạng này có thể được đưa vào tính toán bằng cách thêm vào vectơ tải trọng chung của các lực ban đầu, mà trị số của các lực này trong phần tử được xác định bằng công thức

$$\{F\} = \int_S [B]^T [D] \{\varepsilon\} ds \quad (2.118)$$

Đối với phần tử tam giác phẳng công thức (2.118) có thể trình bày dưới dạng

$$F = \Delta[A]^{-1T} [B^1]^T [D]\{\varepsilon\}. \quad (2.119)$$

Nếu độ tăng biến dạng $\{\Delta\varepsilon\}$ không phụ thuộc vào biến dạng, ứng suất hoặc độ tăng của chúng, thì chỉ thêm một lần các lực ban đầu vào vectơ tải trọng cũng đủ, chẳng hạn như khi đưa các độ tăng biến dạng nhiệt độ vào tính toán. Nếu như độ tăng biến dạng $\{\Delta\varepsilon\}$ phụ thuộc vào trạng thái ứng suất - biến dạng (chẳng hạn, biến dạng từ biến), thì cần hiệu chỉnh thêm vectơ tải trọng trong chu kỳ lặp cho đến khi nào độ tăng biến dạng thực tế ở các phần tử khá gần với các giá trị lý thuyết được xác định bằng mô hình môi trường. Thí dụ áp dụng phương pháp này cho môi trường đàn dẻo nhớt được trình bày ở mục 6.5.

2.7. ĐẶC ĐIỂM CÁCH GIẢI CÁC BÀI TOÁN CÂN BẰNG GIỚI HẠN BẰNG PHẦN TỬ HỮU HẠN

Theo mức tăng tải trọng, số các phần tử chuyển sang dẻo ngày càng lớn lên. Nếu ở trạng thái đàn hồi miền phẳng với n nút có $2n$ bậc tự do, thì việc chuyển một phần tử có k điểm tích phân sang dẻo sẽ làm giảm số bậc tự do một lượng k , bởi vì qui luật chày liên hợp hoặc không liên hợp qui định những hạn chế nhất định đến chuyển vị của các nút của phần tử này: chẳng hạn, việc duy trì thể tích hoặc thay đổi thể tích thì phụ thuộc nhất định vào hiện tượng trượt, v.v...

Khi nhóm lớn các phần tử chuyển sang dẻo, thì số liên kết bất buộc có thể vượt qua số bậc tự do của miền hoặc miền con.

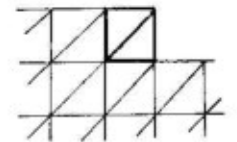
Trong trường hợp này sẽ diễn ra sự "khép kín" miền hoặc miền con, và không thu được lời giải giới hạn. Trong tài liệu của S.Sloan và M.Randolph [46] cho biết các điều kiện áp dụng của kiểu phần tử, để tránh hiện tượng khép kín là

$$l \geq k, \quad (2.120)$$

trong đó l là số bậc tự do trên một phần tử, bằng $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p}{m}$; p là số

bậc tự do của miền; m là số phần tử; k là số điểm tích phân trong một phần tử.

Để thấy rằng, phần tử tam giác tuyến tính đơn có $l = 1$: quá vậy (hình 2-26), khi thêm vào miền lớn hai phần tử tam giác thì sẽ có thêm một nút với hai bậc tự do.



Trên hình 2-27 đưa ra một số kiểu phần tử (điểm chấm đánh dấu nút, dấu cộng đánh dấu điểm tích phân), các thông số l, k và tính thích dụng của chúng đối với phân tích giới hạn (theo [46, 50]). Từ hình 2-27, theo tiêu chuẩn (2.120) rõ ràng không dùng được các phần tử

Hình 2-26. Lưới các phần tử tam giác

Kiểu phần tử	1	2	3	4	5
l	1	2	6	6	32
k	1	4	9	4	16
	$l=k$	$l < k$	$l < k$	$l > k$	$l > k$

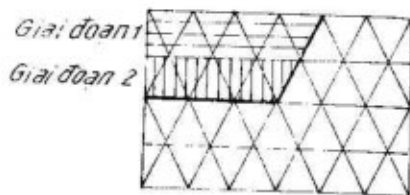
Hình 2-27. Các kiểu phần tử và tính thích dụng của chúng đối với các bài toán trạng thái giới hạn

dạng tham số kiểu 2 vào phân tích giới hạn. O.Zienkiewicz [50] chỉ rõ tính hợp lý của việc sử dụng các phần tử tham số trên (kiểu 4); đối với các phần tử này, để mô tả các chuyển vị bên trong phần tử thường sử dụng các hàm cơ bậc thấp hơn khi để mô tả hình học. S.Sloan và M.Randolph [46] mô tả phần tử tam giác 15 nút với ba nút bên trong (kiểu 5 trên hình 2-27), đưa ra tập hợp

các hàm dạng đối với nó và chứng minh tính hiệu quả cao của nó để giải các bài toán giới hạn. Theo kinh nghiệm, việc sử dụng các phần tử tam giác tuyến tính cho phép thu được lời giải thỏa đáng, nếu kích thước các miến dẻo không vượt quá 40 - 50% toàn bộ diện tích của miến

2.8. MÔ PHỎNG SỰ THAY ĐỔI ĐƯỜNG VIỄN CỦA MIẾN

Khi nghiên cứu tình hình địa kỹ thuật thường cần phải tiến hành một loạt phép giải với đường viền của miến bị thay đổi liên tiếp: chẳng hạn, khi đào hố móng theo từng lớp (hình 2-28), khi đào đường tunen theo từng giai đoạn. Toàn bộ các phép giải có thể thực hiện trên một lưới các phần tử hữu hạn theo chế độ tự động. Loại bỏ một nhóm phần tử nào đó bằng cách gán cho chúng trị số môđun đàn hồi bằng không, trong khi cố định đồng thời các nút chỉ có các phần tử không bao quanh. Việc loại bỏ liên tiếp theo chương trình một số nhóm các phần tử có thể thực hiện bằng cách sau đây, mà chúng tôi đã sử dụng trong một phương án của tổ hợp chương trình "Địa cơ học".



Hình 2-28. Sơ đồ đào từng lớp hố móng

Các phần tử kiểu không được gán các đặc trưng $E = 0$, $\nu = 0$. Tập hợp các tính chất đó bảo đảm ứng suất bằng không trong các phần tử kiểu này với biến dạng tùy ý. Các phần tử của những lớp đào lên liên tục được gán các số hiệu của kiểu bằng số hiệu của giai đoạn đào, còn toàn bộ các kiểu này được gán các đặc trưng thực tế của đất.

Chu kỳ được lập ra theo số giai đoạn đào. Trong mỗi chu kỳ:

- Tất cả các phần tử, có số hiệu kiểu trùng với số hiệu chu kỳ, được gán số hiệu kiểu là 0;
- Tất cả các nút của miến đều phải

thể hiện rõ, còn trong mỗi chu kỳ thì tất cả các phần tử của miến đều phải thể hiện rõ bằng các nút. Nếu bao quanh nút chỉ là các phần tử kiểu không, thì nút được gán những dấu hiệu cố định theo tất cả các phương tọa độ; c) Đối với tất cả các phần tử có kiểu 0 của miến (có nghĩa là các phần tử được lấy ra trong giai đoạn đào đã cho), thì các lực nút được tính theo các ứng suất xảy ra trước khi đào lớp này, theo công thức (2.49). Từ các lực nút vừa tính toán (với dấu ngược), thành lập vectơ tải trọng của hệ.

Sau khi thực hiện tất cả các bước kể trên, nhóm các phần tử tiếp theo sẽ được tách ra, còn trên đoạn đường viền mới thành lập sẽ đặt các lực tương đương với các ứng suất đã được lấy ra khỏi đường viền khi loại bỏ lớp. Các lực được tính toán và đặt vào các nút trong của vùng bị loại bỏ sẽ hoàn toàn không tham gia vào các phép giải sau này, vì các nút đã được gán dấu hiệu cố định và khi giải hệ thì các phương trình tương ứng bị bỏ qua.

2.9. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính lớn đã được nghiên cứu đầy đủ trong đại số tuyến tính. Trong số các phương pháp này người ta phân ra: *phương pháp lập*, trong đó hiệu quả hơn cả là phương pháp Gauss-Seidel, và *phương pháp trực tiếp*, trong đó người ta thường áp dụng phương pháp Gauss và Holeski hơn cả (phương pháp "Cân bậc hai"). Những phương pháp chính diện [28] là một nhóm đặc biệt của các phương pháp trực tiếp. Để nhận được lời giải duy nhất thì các phương pháp trực tiếp có ưu thế tuyệt đối.

Nếu tiến hành một số phép giải với một ma trận độ cứng, nhưng với vectơ các lực nút thay đổi, thì phương pháp trực tiếp cũng thích hợp hơn cả, vì khối lượng tính toán cơ bản, liên quan với việc tính ma trận nghịch đảo nào đó, chỉ phải tiến hành một lần.

Nếu như thực hiện một số phép giải với ma trận độ cứng thay đổi, thì có thể là hợp lý khi lời giải đầu thực hiện theo phương pháp trực tiếp, còn tất cả lời giải sau đây thực hiện bằng phương

pháp lập. Trong mỗi trường hợp sự tồn tại giá trị ban đầu gần đúng của vectơ chuyển vị về cơ bản đều làm tăng nhanh tính hội tụ của các phương pháp lập.

Ta hãy xét qua phép biến đổi trong phương pháp lập Gauss-Seidell và phương pháp trực tiếp Holeski có tính đến chuyển vị đã cho của các nút mà không cần lập lại MTĐCHT và vectơ các lực nút.

Phương pháp Gauss-Seidell. Phương trình cân bằng nhận được khi nhân hàng thứ j của MTĐCHT với vectơ chuyển vị có dạng

$$F_j = \sum_{i=1}^r k_{ij} \delta_i = k_{j1} \delta_1 + k_{j2} \delta_2 + \dots + k_{jr} \delta_r, \quad (2.121)$$

trong đó F_j là số hạng thứ j của vectơ lực; δ_i là số hạng thứ i của vectơ chuyển vị; k_{ij} - số hạng của MTĐCHT; r - số các ẩn.

Ta trình bày phương trình (2.121) dưới dạng:

$$F_j = \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij} \delta_i + k_{jj} \delta_j + \sum_{i=j+1}^r k_{ij} \delta_i. \quad (2.122)$$

Ở phương pháp Gauss-Seidell trong chu kỳ lập hiện thời ($s+1$) có sử dụng các giá trị chuyển vị gần đúng tìm được trong chu kỳ này, tức là các chuyển vị δ_i^{s+1} khi $i < j$ và δ_i^s khi $i > j$ (các chuyển vị có số hiệu nhỏ hơn số hiệu của hàng nghiên cứu là các chuyển vị mới tìm được trong chu kỳ lập thứ $(s+1)$; còn ở các hàng sau đó chúng vẫn là những chuyển vị cũ). Từ phương trình (2.122) ta thu được trị số gần đúng của chuyển vị chưa biết δ_j :

$$\delta_j^{s+1} = \left[F_j - \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij} \delta_i^{s+1} - \sum_{i=j+1}^r k_{ij} \delta_i^s \right] / k_{jj}. \quad (2.123)$$

Phương pháp Gauss-Seidell được áp dụng, nếu số hạng thuộc đường chéo của ma trận k_{jj} về trị số tuyệt đối lớn hơn số hạng bất kỳ khác ở hàng thứ j . Như đã nêu ra ở trên, MTĐCHT có đặc điểm này.

Tính hội tụ của phương pháp có thể tăng lên, nếu tính toán và sau đó sử dụng giá trị chuyển vị ban đầu "được hiệu chỉnh" δ_j^{s+1} theo công thức

$$\delta_j^{s+1} = \beta (\delta_j^{s+1} - \delta_j^s) + \delta_j^s, \quad (2.124)$$

trong đó β - là hệ số đảo, bằng $1,8 \div 1,95$.

Để tính các chuyển vị nút đã nêu cần phải bỏ qua việc tính toán giá trị mới δ_j trong mỗi chu kỳ lập, nếu trên liên kết thứ j đã cho trước chuyển vị. Tất nhiên khi đó chính chuyển vị này phải có ở vị trí của mình trong vectơ chuyển vị.

Phương pháp Holeski (phương pháp căn bậc hai) được áp dụng khi các ma trận là đối xứng và đặc biệt hiệu quả khi cấu trúc của chúng hình băng; cả hai tiêu chuẩn chắc chắn đều có mặt trong bất kỳ MTĐCHT nào. Phương pháp này được dùng trong chương trình nêu ở phụ lục.

Ma trận độ cứng được trình bày dưới dạng tích của ma trận tam giác trên $[R]$ với ma trận hoán vị của nó:

$$[K] = [R]^T [R]. \quad (2.125)$$

Ta gọi $[R]$ là ma trận liên hợp. Các thành phần trên đường chéo của nó tìm được theo công thức

$$r_{ii} = \text{sign}(b) \sqrt{|b|}, \quad (2.126)$$

trong đó

$$b = k_{ii} - \sum_{v=\max(1, (i-L+1))}^{i-1} \text{sign}(r_{iv}) r_{iv}^2 C_v, \quad (2.127)$$

i - số hiệu hàng; L - chiều rộng của dải các số hạng khác không của MTĐCHT; $C_v = 1$ khi lực cho theo quan hệ v , $C_v = 0$ khi chuyển vị cho theo quan hệ v .

Phép cộng trong công thức (2.126) không xảy ra, nếu giới hạn trên của tổng $(i-1)$ nhỏ hơn giới hạn dưới.

Các thành phần của ma trận R được giữ trong trường của MTĐCHT ban đầu, có nghĩa là số hạng tính toán r_{ii} được giữ tại chỗ của số hạng đã được dùng, và về sau ở chỗ của số hạng không cần thiết k_{ii} :

Không tiến hành tính toán theo công thức (2.126), nếu $C_i = 0$, có nghĩa là nếu hàng thứ i đã cho phù hợp với chuyển vị cho trước. Như vậy, tại chỗ của r_{ii} trong ma trận mới khi $C_i = 0$ thành phần của MTDCHT ban đầu k_{ij} vẫn được duy trì.

Khi có mặt thừa số C_v trong công thức (2.127) thì bỏ qua các thành phần thuộc các hàng trong MTDCHT có liên quan với các chuyển vị đã nêu.

Các số hạng không nằm trên đường chéo chính được tính theo công thức

$$r_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{v=\max(1, j-1, +1)}^{i-1} \text{sign}(r_{iv}) r_{vi} r_{vj} C_v}{r_{ii}} \quad (2.128)$$

Số hạng r_{ij} không được tính, nếu $C_i = 0$ hoặc $C_j = 0$.

Như vậy, tại vị trí các hàng và các cột (có số hiệu bằng số hiệu của các chuyển vị đã nêu) còn lại các hàng và các cột của MTDCHT ban đầu.

Tới đây phần tính toán đầu tiên, tốn công nhất, liên quan với việc giải hệ phương trình kết thúc. Ở chương trình nêu trong phụ lục, phần này được tách thành chương trình con độc lập "SOUS 5".

Những tính toán tiếp sau sẽ đưa đến việc giải hai hệ phương trình. Trước hết, tính vectơ trung gian $\{\omega\}$ từ phép giải hệ:

$$[R]^T \{\omega\} = \{F\}, \quad (2.129)$$

trong đó $\{F\}$ là vectơ các lực nút của hệ.

Và cuối cùng, tìm vectơ các chuyển vị chưa biết $\{\delta\}$ từ phép giải hệ phương trình

$$[R]\{\delta\} = \{\omega\}. \quad (2.130)$$

Các thành phần của vectơ $\{\omega\}$ được xác định theo công thức

$$\omega_i = \frac{F_i - \sum_{v=\max(1, i-1, +1)}^{i-1} \text{sign}(r_{iv}) r_{vi} C_v - \sum_{v=\max(1, i-1, +1)}^{i-1} x}{r_{ii}} \rightarrow \quad (2.131)$$

$$k_{vi} \delta_v (1 - C_v) - \sum_{v=i+1}^{\min(n, i+i-1)} k_{iv} \delta_v (1 - C_v)$$

trong đó n là số phương trình trong hệ.

Việc đặt vectơ ω trong trường tách riêng cho vectơ các chuyển vị nút $\{\delta\}$ là thích hợp. Không tiến hành tính toán theo công thức (2.131), nếu $C_i = 0$, có nghĩa là các chuyển vị đã cho được lưu trong trường vectơ các chuyển vị nút.

Sự có mặt của thừa số C_v trong số hạng thứ hai của tử số ở công thức (2.131) cho phép bỏ qua các thành phần được lưu từ MTDCHT ban đầu, còn các số hạng có các thừa số $(1 - C_v)$ thì sử dụng các thành phần này để bổ sung tích các chuyển vị đã cho với các thành phần tương ứng của MTDCHT vào lực nút F_i . Nếu giới hạn trên của tổng nhỏ hơn giới hạn dưới, thì không làm phép cộng, và khi $i = 1$ thì công thức (2.131) tự động chuyển ra dạng:

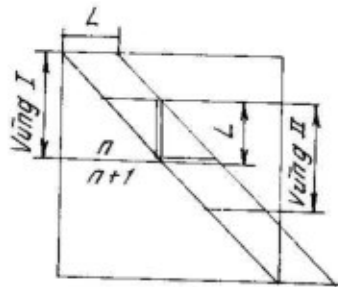
$$\omega_1 = F_1 / r_{11}.$$

Các phần tử của vectơ ban đầu $\{\delta\}$ được xác định bằng quá trình ngược lại từ $i = n$ (n là số phương trình) đến $i = 1$ theo công thức

$$\delta_i = \frac{\omega_i - \sum_{v=i+1}^{i=\min(n, i+1-1)} r_{iv} \delta_v C_v}{|r_{ir}|} \quad (2.132)$$

Không tính δ_i nếu $C_i < 0$; không làm phép cộng nếu giới hạn trên của tổng nhỏ hơn giới hạn dưới. Trong kết quả tính toán, vectơ của các lực nút đã cho luôn được giữ cố định. Ở chương trình nêu trong phụ lục, phần hai của phép giải hệ phương trình (công thức (2.129-2.132)) được tách thành chương trình con "OMEGA".

Nếu ma trận độ cứng không chứa trong bộ nhớ tác nghiệp của MTDĐT, thì phải thiết lập nó bằng các vùng riêng và đưa ra bộ nhớ ngoài. Các vùng cần phải phủ lên nhau theo L phương trình (L là chiều rộng của dải các số hạng khác không của ma trận - xem hình 2-29), vì khi xử lý các hàng tiếp sau trong quá trình giải hệ cần có các hệ số L của các phương trình trước.



Hình 2-29. Sơ đồ vùng khi đưa MTĐCHT vào bộ nhớ ngoài

Phương pháp chính diện giải hệ phương trình là một phương án của phương pháp khử Gauss. Quan điểm cơ bản của phương pháp chính diện là đồng thời lập các phương trình và khử các biến số. Ngay sau khi các hệ số của phương trình được tập hợp một cách đầy đủ từ các ma trận độ cứng của các phần tử bao quanh nút, thì ẩn số tương ứng (chuyển vị của nút đã cho) có thể bị khử. Vì vậy ma trận độ cứng đầy đủ của hệ không hình thành, còn các hệ số của mỗi phương trình bị khử kế tiếp đã bị biến đổi trong quá trình khử các phương trình trước, thì được đưa ra bộ nhớ ngoài. Tại vị trí của phương trình bị khử bắt đầu hình thành phương trình tiếp theo.

Ở bộ nhớ tác nghiệp chỉ lưu giữ đồng thời phần tam giác trên của ma trận vuông bao gồm các phương trình được hình thành trong thời điểm này. Các phương trình ấy, các nút và bậc tự do tương ứng của chúng được gọi là **chính diện**. Số các ẩn ở chính diện được gọi là **bé rộng chính diện**. Kích thước tối đa của bài toán được xác định bởi bé rộng tối đa của chính diện. Trong thời gian của quá trình "ghép-khử", các phần tử được nghiên cứu theo thứ tự.

Khi gọi đến phần tử tiếp theo, các hệ số của ma trận độ cứng của nó được đọc từ đĩa và, hoặc là được cộng vào các phương trình hình thành, hoặc là được diễn vào hàng rỗng của phương trình đã bị khử. Nếu trong phần tử bị gọi có nút nào đó xuất hiện lần cuối cùng, thì các phương trình liên quan đến nó có thể bị khử. Sau khi xử lý tất cả các phần tử và khử liên tiếp tất cả các phương

trình cho đến phương trình cuối cùng, trong đó còn lại một ẩn, thì trên đĩa hình thành hệ phương trình tam giác, từ đó bằng cách ngược lại sẽ tìm được các chuyển vị chưa biết.

Phương pháp chính diện thích hợp với dung lượng bộ nhớ tác nghiệp tương đối không lớn; thực tế, nó yêu cầu khá nhiều lần chuyển đến bộ nhớ ngoài. Vì phương pháp đòi hỏi đánh số cẩn thận các phần tử để đảm bảo bé rộng tối thiểu của chính diện mà thứ tự đánh số các nút lại không phân biệt, cho nên nó đặc biệt thuận tiện khi dùng các phần tử nhiều nút trong việc giải các bài toán ba chiều.

Độ chính xác của phép giải hệ phương trình. Phép giải phần tử hữu hạn tất nhiên là khác phép giải "chính xác". Những nguyên nhân có sự khác nhau là: a - do rời rạc hóa không gian bằng phần tử hữu hạn; b - do xấp xỉ các hàm chuyển vị trong các phần tử bằng các đa thức đơn giản nhất; c - do sai số qui tròn trong MTĐT.

Trị số các sai số của nhóm a có thể giảm xuống bằng cách hợp lý hóa lưới các phần tử, làm dày đặc nó ở các chỗ có gradien cao. Các sai số của nhóm b được xác định bởi kiểu của phần tử sử dụng; trị số các sai số này khi kiểu của phần tử không thay đổi được giảm đi nhờ làm dày đặc lưới các phần tử. Cả hai nhóm sai số đều phụ thuộc đáng kể vào kinh nghiệm của người nghiên cứu trong việc thiết kế lưới các phần tử hữu hạn và có thể giảm rõ rệt tới mức chấp nhận được trong quá trình lập toán.

Các sai số của nhóm c là thuần túy toán học, do đặc điểm biểu diễn bằng máy về các số có dấu phẩy động gây ra.

Để biểu diễn các số thực trong MTĐT người ta sử dụng hệ nhị - bát phân cơ số chữ số hạn chế sau dấu phẩy. Nếu số của thông tin đưa vào hoặc nhận được trong quá trình tác nghiệp của MTĐT, có số chữ số sau dấu phẩy lớn hơn cho phép, thì những chữ số đó sẽ bị lược bỏ: số được qui tròn. MTĐT loạt EC cho phép biểu diễn được các số 4 hoặc 8 byte (dãy nhị phân 32 hoặc 64 chữ số). Đối với phần lớn tính toán chỉ cần sử dụng các số với độ chính xác đơn (4 byte) là đủ; tuy nhiên khi giải các hệ phương trình lớn, thì độ chính xác đó thường là không đủ. Đặc biệt điều này liên quan đến cái gọi là các hệ phương trình ẩn định kém, khi các phần tử trên đường chéo chính của MTĐCHT rất khác nhau. Các ma trận độ cứng ẩn định kém đó hình thành khi dùng trong cùng một

lưới các phần tử có các mô đun đàn hồi rất khác biệt, với trị số hệ số Poisson xấp xỉ 0,5 ; điều này làm cho mẫu số $1 - 2\nu$ trong đây phần tử của ma trận [D] gần tới không.

Thực tế chỉ ra rằng, nếu sự khác biệt của các mô đun phần tử lưới lập thành 4 cấp và cao hơn, thì các sai số qui tròn với độ chính xác đơn sẽ làm cho lời giải bị sai lệch hẳn. Khi số các phần tử là trên 300 - 400 hoặc trị số hệ số Poisson lớn hơn 0,48 thì độ chính xác đơn cũng là không đủ.

Việc sử dụng độ chính xác kép từ đầu đến cuối chương trình làm giảm mạnh hiệu quả của nó : dung lượng của bộ nhớ trong nhỏ đi 2 lần, tốc độ tính toán giảm đi khoảng 4 lần. Theo kinh nghiệm thì có thể lập và lưu MTĐCHT với độ chính xác đơn, còn với độ chính xác kép chỉ nên thực hiện các tác nghiệp liên quan đến việc giải hệ phương trình - các công thức (2.125) - (2.132). Trong đó, ngay cả các phần tử của ma trận [R], tính toán theo các công thức (2.126) - (2.128) với độ chính xác kép, cũng được chuyển đến lưu trong trường của ma trận độ cứng với độ chính xác đơn ; sau đấy, trước khi dùng ở công thức (2.131) chúng mới được chuyển từ trường đến ô công tác với độ chính xác kép.

Biện pháp đó dùng trong chương trình được nêu ở phụ lục. Nó cho phép giải các bài toán địa kỹ thuật có sự khác biệt về các mô đun tới 4 - 5 cấp, cụ thể như sự khác biệt về mô đun của móng bê tông cốt thép và đất ép cơ mạnh. Chi phí thời gian so với độ chính xác đơn tăng lên $\sim 25\%$.

Tóm lại, ảnh hưởng của sai số qui tròn tới độ chính xác của phép giải PPPTHH là vấn đề phức tạp, khó phân tích : Những bình luận hiện hành về vấn đề này cơ bản đều có một đặc trưng chung. Việc tiêu chuẩn hoá các thành phần của MTĐCHT đối với số hạng thuộc đường chéo là có lợi khi giải hệ phương trình ; việc đặt các chuyển vị đã tìm được vào hệ phương trình, kiểm tra theo dõi sự cân bằng của các lực nút cho trước và các lực nút thu được có thể là có ích.

2.10. CẤU TRÚC CHƯƠNG TRÌNH CHUNG CHO MTĐT

Cấu trúc chung của chương trình giải bài toán đàn hồi bằng phương pháp phần tử hữu hạn theo trình tự như ở bảng 2-1. Thông

tin đưa vào MTĐT trong giai đoạn chuẩn bị trực tiếp thông tin (khối 3) phải bảo đảm có thể xác định số hiệu các nút, tọa độ của chúng và đặc trưng đàn hồi của mỗi phần tử ; ở giai đoạn 5 có thể xác định các lực nút, còn ở giai đoạn 6 có thể xác định các chuyển vị cho trước tại các nút cụ thể. Thông tin đơn giản nhất, tổng hợp nhất, nhưng khối lượng cũng lớn nhất bao gồm : tọa độ của tất cả các nút, các lực nút cho trước, các chuyển vị nút cho trước ; số hiệu của ba nút bao quanh từng phần tử, số hiệu kiểu của từng phần tử ; mô đun đàn hồi, hệ số Poisson, trọng lượng thể tích các phần tử của mỗi kiểu.

Khi thành phần của thông tin như trên được đưa vào, khối thứ ba của chương trình - chuẩn bị thông tin trực tiếp - sẽ bao gồm một số toán tử để tuyển chọn số hiệu các nút và các tính chất của phần tử được xử lý tuần tự.

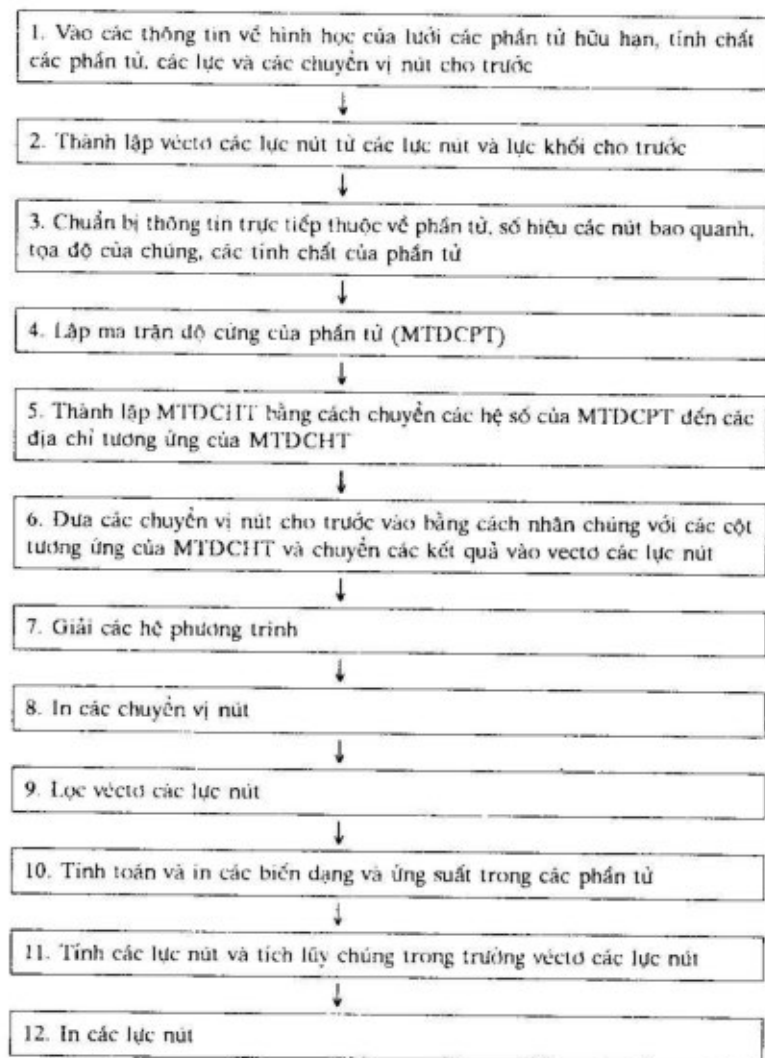
Khi sử dụng chương trình để giải các bài toán cùng kiểu có thể áp dụng những lưới phần tử hữu hạn kiểu mẫu có cấu trúc nào đó. Lúc đó dung lượng thông tin đưa vào được rút gọn nhiều. Chẳng hạn, nếu các nút được phân bố thành các hàng, thì có thể cho số hiệu và tọa độ các nút của một hàng cụ thể chỉ ở bên trái và phải, còn số hiệu và tọa độ của các nút trung gian mô tả ở khối 3 thì được tính bằng các toán tử nhất định. Tuy nhiên thực tế cho thấy rằng, bỏ nhiều nỗ lực vào việc nghiên cứu các biện pháp tự động hóa cấu tạo lưới phần tử hữu hạn khi giải các bài toán phẳng thường không hợp lý. Trong khi đó, chúng lại hoàn toàn cần thiết khi giải các bài toán thể tích hoặc các bài toán hai chiều rất lớn.

Sự hình thành vectơ tải trọng (VT) bắt đầu từ việc gửi các phần tử không vào trường VT. Sau đó gửi tới đó các lực nút đã đưa vào. Tiếp theo, tính diện tích của mỗi phần tử, nhân với trọng lượng thể tích, chia cho ba, và đem kết quả tìm được thêm vào các thành phần lực thẳng đứng của các nút bao quanh phần tử.

Khi lập ma trận độ cứng hệ thống (khối 5) có thể lập tức cho hạng của nó giảm tới số các liên kết chất lên. Tuy nhiên, trong trường hợp này, để tiết kiệm một số dung lượng bộ nhớ của MTĐT dùng lưu MTĐCHT, có thể chỉ tính đến các liên kết có chuyển vị chất lên bằng không. Một cách hợp lý hơn nữa là lập MTĐCHT đầy đủ và bỏ qua các hàng và các cột có liên quan đến các liên kết

cố định trong quá trình giải hệ. Trong trường hợp này có thể giải bài toán với chuyển vị không đã cho bằng cách nhân cột tương ứng các hệ số của MTDCHT với chuyển vị đã cho và chuyển kết quả vào vectơ các lực nút (khối 6).

Bảng 2-1



Khối 9 dự tính lọc trường vectơ các lực nút (mà ở dạng cũ nó không còn cần thiết) để tích lũy vào đó các lực nút được tính theo các ứng suất đã tìm thấy.

Dưới đây sẽ đưa ra thuật toán đơn giản nhất để nhận được lời giải dần hồi khi sử dụng các phần tử hữu hạn tam giác, phù hợp với công cụ toán học của mục 2.2. Thuật toán được viết bằng ngôn ngữ Fortran. Những chú thích trước các toán tử, trong thuật toán được nêu khá ngắn gọn, và để hiểu các thao tác một cách đầy đủ thì cần phải thực hiện chúng bằng tay, ví dụ như đã làm với hệ gồm hai phần tử.

Trong thuật toán được nêu, việc giải hệ phương trình tiến hành bằng phương pháp lập Gauss - Seidell. Thuật toán chỉ dự định dùng cho mục đích học tập, vì thế đã bỏ qua việc mô tả các khối, các Format nhập - xuất, và có một số sai khác với cú pháp của ngôn ngữ Fortran nhằm mục đích dễ tiếp thu.

C : KHỐI 1, NHẬP THÔNG TIN

C : NHẬP SỐ NÚT N , SỐ PHẦN TỬ M ,
SỐ KIỂU PHẦN TỬ L

1. READ (N, M, L)

C : NHẬP TỌA ĐỘ CÁC NÚT $XY(I)$, CÁC DẤU HIỆU CỦA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC $KP(I)$, ($KP(I) = 1$ - LỰC CHO TRƯỚC, $KP(I) = 2$ - CHUYỂN VỊ CHO TRƯỚC), CÁC THÔNG SỐ CHO TRƯỚC $FD(I)$ ($FD(I)$ BẰNG LỰC CHO TRƯỚC KHI $KP(I) = 1$ VÀ BẰNG CHUYỂN VỊ CHO TRƯỚC KHI $KP(I) = 0$).

2 READ ($XY(I), KP(I), FD(I), I = 1, 2 * N$)

C : NHẬP THÔNG TIN VỀ CÁC PHẦN TỬ ($NN(I, 1)$), ($NN(I, 2)$), ($NN(I, 3)$) - BA SỐ HIỆU CÁC NÚT BAO QUANH PHẦN TỬ THỨ I ; $NL(I)$ - SỐ HIỆU KIỂU PHẦN TỬ)

3 READ ($NN(I, 1), NN(I, 2), NN(I, 3), NL(I), I = 1, M$)

C : NHẬP CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC KIỂU PHẦN TỬ ($EA(I)$, $VA(I)$, $GA(I)$) - MÔĐUN ĐÀN HỒI, HỆ SỐ POISSON, DUNG TRỌNG CỦA PHẦN TỬ KIỂU THỨ I)

4 READ ($EA(I), VA(I), GA(I), I = 1, L$)

C : KHỐI 2, LẬP VECTƠ CÁC LỰC VÀ CHUYỂN VỊ NÚT
 C : GÁN KHÔNG VÀO TRƯỜNG VECTƠ CỦA CÁC LỰC NÚT F
 CỦA CÁC CHUYỂN VỊ NÚT D

5 DO 7I = 1, 2 * N
 6 F(I) = 0
 7 D(I) = 0
 C : GỬI CÁC LỰC VÀ CÁC CHUYỂN VỊ NÚT CHO TRƯỚC VÀO
 CÁC TRƯỜNG VF VÀ VD

8 DO 13I = 1, 2 * N
 9 IF (KP(I) . EQ . 0) GO TO 12
 10 F(I) = FD(I)
 11 GO TO 13
 12 D(I) = FD(I)
 13 CONTINUE

C : XÁC ĐỊNH TRONG ĐỊA CHỈ NW CHIỀU RỘNG DÀI CỦA MA
 TRẬN ĐỘ CỨNG

14 NB = 0
 15 DO 29 I = 1, M
 16 MAX = 0
 17 MIN = 2000
 18 DO 25J = 1, 3
 19 IF (NN(I, J) . GT . MAX) GO TO 22
 20 IF (NN(I, J) . LT . MIN) GO TO 24
 21 GO TO 25
 22 MAX = NN(I, J)
 23 GO TO 25
 24 MIN = NN(I, J)
 25 CONTINUE

26 NWA = 2 * (MAX - MIN + 1)
 27 IF (NWA . LT . NB) GO TO 29

28 NB = NWA
 29 CONTINUE
 C : GÁN KHÔNG VÀO TRƯỜNG MTDCHT

30 DO 31 I = 1, 2 * NW * N
 31 S(I) = 0
 C: LẬP MA TRẬN ĐỘ CỨNG PHẦN TỬ VÀ GỬI CHÚNG VÀO
 MTDCHT

32 DO 67 I = 1, M
 C : GÁN KHÔNG VÀO TRƯỜNG CÁC PHÉP TOÁN VỚI MA TRẬN

33 DO 36 J = 1, 6
 34 DO 36 K = 1, 6
 35 RR (J, K) = 0
 36 RL (J, K) = 0
 C : GỌI CHƯƠNG TRÌNH CON CHUẨN BỊ THÔNG TIN TRỰC
 TIẾP VỀ PHẦN TỬ (KHỐI 3)

37 CALL INFORM (I,...)
 C · KHỐI 4, BẮT ĐẦU LẬP MTDCHT

C : LẬP MA TRẬN $2\Delta[A]^{-1}$ TRONG TRƯỜNG RR

38 DO 47 J = 0, 1
 39 RR (1 + 3 * J, 1 + 3 * J) = X(2) * Y(3) - X(3) * Y(2)
 40 RR (1 + 3 * J, 2 + 3 * J) = X(3) * Y(1) - X(1) * Y(3)
 41 RR (1 + 3 * J, 3 + 3 * J) = X(1) * Y(2) - X(2) * Y(1)
 42 RR (2 + 3 * J, 1) = Y(2) - Y(3)
 43 RR (2 + 3 * J, 2) = Y(3) - Y(1)
 44 RR (2 + 3 * J, 3) = Y(1) - Y(2)
 45 RR (3 + 3 * J, 1) = X(3) - X(2)
 46 RR (3 + 3 * J, 2) = X(1) - X(3)
 47 RR (3 + 3 * J, 3) = X(2) - X(1)

C : LẬP MA TRẬN $\frac{1 + \nu(1 - 2\nu)}{E} [B']^T [D] [B']$ TRONG TRƯỜNG RL

$$48 \text{ RL } (2, 2) = 1 - V$$

$$49 \text{ RL } (6, 6) = 1 - V$$

$$50 \text{ RL } (2, 6) = V$$

$$51 \text{ RL } (6, 2) = V$$

$$52 \text{ RL } (3, 3) = (1 - 2 * V)/2$$

$$53 \text{ RL } (3, 5) = (1 - 2 * V)/2$$

$$54 \text{ RL } (5, 3) = (1 - 2 * V)/2$$

$$55 \text{ RL } (5, 5) = (1 - 2 * V)/2$$

C : QUAY VỀ CHƯƠNG TRÌNH NHÂN MA TRẬN

56 CALL MATMU (RR, RL, RES...)

C : LẬP MA TRẬN $2\Delta[A]^{-1T}$ TRONG TRƯỜNG RL BẰNG CÁCH HOÁN VỊ MA TRẬN TỪ TRƯỜNG RR

$$57 \text{ DO } 59 \text{ J} = 1,6$$

$$58 \text{ DO } 59 \text{ K} = 1,6$$

$$59 \text{ RL } (K, J) = \text{RR } (J, K)$$

C : PHÂN PHỐI MA TRẬN $2\Delta \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} [B]^T [D] [B] [A]^{-1}$ TỪ TRƯỜNG RES VÀO TRƯỜNG RR

$$60 \text{ DO } 62 \text{ J} = ,6$$

$$61 \text{ DO } 62, \text{ K} = 1,6$$

$$62 \text{ RR } [J, K] = \text{RES } [J, K]$$

C : QUAY VỀ CHƯƠNG TRÌNH CON

63 CALL MATMU (RR, RL, RES...)

C : TÍNH TOÁN DIỆN TÍCH PHẦN TỬ

$$64 \text{ A} = \text{ABS} ((X(1) - X(2)) * (Y(1) - Y(3)) - (X(1) - X(3)) * (Y(1) - Y(2))) / 2$$

C : KẾT THÚC LẬP MTDCPT TRONG TRƯỜNG RES

$$65 \text{ DO } 67 \text{ J} = 1,6$$

$$66 \text{ DO } 67 \text{ K} = 1,6$$

$$67 \text{ RES } (J, K) = \text{RES } (J, K) * E / (4 * A * (1 + V) * (1 - 2 * V))$$

C : KHỐI 5, BỔ SUNG CÁC THÀNH PHẦN CỦA MTDCPT VÀO CÁC THÀNH PHẦN CỦA MTDCHT, ĐƯỢC THÀNH LẬP TRONG TRƯỜNG S

$$68 \text{ DO } 74 \text{ J} = 1,6$$

$$69 \text{ DO } 74 \text{ K} = 1,6$$

70 IF (NW/K) . LT . NW (J) GO TO 73

$$71 \text{ L} = (\text{NW}(J) - 1) * \text{NB} + \text{NW}(K) - \text{NW}(J) + 1$$

72 GO TO 74

$$73 \text{ L} = (\text{NW}(K) - 1) * \text{NB} + \text{NW}(J) - \text{NW}(K) + 1$$

$$74 \text{ S}(L) = \text{S}(L) + \text{RES } (J, K)$$

C : GỌI CHƯƠNG TRÌNH CON GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH, NÓ PHÂN BỐ CÁC CHUYỂN VỊ NÚT TÌM ĐƯỢC VÀO TRƯỜNG D

75 CALL SOLVE (S, D...)

C : KHỐI 8, IN SỐ HIỆU CÁC NÚT VÀ CHUYỂN VỊ

$$76 \text{ WRITE } (I, D (2 * I - 1), D (2 * I), I = 1, N)$$

C : KHỐI 9, LỌC VECTƠ CÁC LỰC NÚT

$$77 \text{ DO } 78 \text{ I} = 1, 2 * N$$

$$78 \text{ F}(I) = 0$$

C : TÍNH TOÁN BIẾN DẠNG $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ TRONG CÁC ĐỊA CHỈ EX, EY, EXY VÀ CÁC ỨNG SUẤT $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ TRONG CÁC ĐỊA CHỈ SX, SY, SXY VÀ IN CHÚNG

$$79 \text{ DO } 106 \text{ I} = 1, M$$

80 CALL INFORM (I...)

C LẤY RA CÁC CHUYỂN VỊ NÚT

$$81 \text{ DO } 84 \text{ J} = 1, 3$$

$$82 \text{ DO } 84 \text{ K} = 1, 2$$

$$83 \text{ L} = \text{NW} (2 * I + K - 2)$$

$$84 \text{ U } (K, J) = \text{D } (L)$$

$$85 \text{ A} = \text{E} / ((1 + V) * (1 - 2 * V))$$

$$86 \text{ B} = (X (2) - X(1)) * (Y(2) - Y(1)) - (X(1) - X(3)) * (Y(1) - Y(2))$$

$$87 \text{ EX} = (U(1, 1) * (Y(2) - Y(3)) + U(1, 2) * (Y(3) - Y(1)) + (U(1, 3) * (Y(1) - Y(2)))) / B$$

$$88 \text{ EY} = (U(2, 1) * (X(3) - X(2)) + U(2, 2) * (X(1) - X(3)) + U(2, 3) * (X(2) - X(1))) / B$$

$$89 \text{ EXY} = (U(1, 1) * (X(3) - X(2)) + U(1, 2) * (X(1) - X(3)) + U(1, 3) * (X(2) - X(1)) + U(2, 1) * (Y(2) - Y(3)) + U(2, 2) * (Y(3) - Y(1)) + U(2, 3) * (Y(1) - Y(2))) / B$$

$$90 \text{ SX} = A * ((1 - V) * \text{EX} + V * \text{EY})$$

$$91 \text{ SY} = A * (V * \text{EX} + (1 - V) * \text{EY})$$

$$92 \text{ SXY} = A * (1 - 2 * V) * \text{EXY} / 2$$

93 WRITE (I, EX, EY, EXY, SX, SY, SXY)

C : KHỐI 10, TÍNH LỰC NÚT THEO ỨNG SUẤT TRONG CÁC PHẦN TỬ

$$94 \text{ K} = \text{NW} (1)$$

$$95 \text{ F(K)} = (\text{SX} * (Y(2) - Y(3)) + \text{SXY} * (X(3) - X(2))) / 2$$

$$96 \text{ K} = \text{NW} (3)$$

$$97 \text{ F(K)} = (\text{SX} * (Y(3) - Y(1)) + \text{SXY} * (X(1) - X(3))) / 2$$

$$98 \text{ K} = \text{NW} (5)$$

$$99 \text{ F(K)} = (\text{SX} * (Y(1) - Y(2)) + \text{SXY} * (X(2) - X(1))) / 2$$

$$100 \text{ K} = \text{NW} (2)$$

$$101 \text{ F(K)} = (\text{SXY} * (Y(2) - Y(3)) + \text{SY} * (X(3) - Y(2))) / 2$$

$$102 \text{ K} = \text{NW} (4)$$

$$103 \text{ F(K)} = (\text{SXY} * (Y(3) - Y(1)) + \text{SY} * (X(1) - X(3))) / 2$$

$$104 \text{ K} = \text{NW} (6)$$

$$105 \text{ F(K)} = (\text{SXY} * (Y(1) - Y(2)) + \text{SY} * (X(2) - X(1))) / 2$$

106 CONTINUE

C : KHỐI 12, IN SỐ HIỆU NÚT VÀ CÁC LỰC NÚT

107 WRITE (I, VF (2 * I - 1), VF (2 * I), I = 1, N

108 STOP

109 END

C : KẾT THÚC CHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

C : CÁC CHƯƠNG TRÌNH CON TIẾP THEO

C : CHƯƠNG TRÌNH CON CHUẨN BỊ THÔNG TIN TRỰC TIẾP VỀ PHẦN TỬ THỨ I

110 SUBROUTINE INFORM (I,...)

C : ĐÁNH SỐ BẬC TỰ DO CỦA PHẦN TỬ

111 DO 113 J = 1, 3

112 NW (2 * J) = 2 * NN(I, J)

113 NW (2 * J - 1) = NW (2 * J) - 1

C : CHỌN MÔĐUN ĐÀN HỒI E, HỆ SỐ POISSON ν , DUNG TRỌNG G

114 J = NK (I)

115 E = EA (J)

116 V = VA (J)

117 G = GA (J)

C : CHỌN TỌA ĐỘ

118 DO 121 J = 1, 3

119 K = NW (2 * J)

120 Y(J) = XY (K)

121 X(J) = XY (K - 1)

122 RETURN

123 END

C : CHƯƠNG TRÌNH CON NHẬN MA TRẬN HẠNG 6×6 , THỪA SỐ BÊN PHẢI ĐƯỢC VIẾT TRONG TRƯỜNG RR, THỪA SỐ BÊN TRÁI TRONG TRƯỜNG RL, KẾT QUẢ ĐƯỢC ĐƯA VÀO TRƯỜNG RES, CÁC THỪA SỐ ĐƯỢC LƯU GIỮ

124 SUBROUTINE MATMU (RR, RL, RLS,...)

125 DO 129 J = 1, 6

126 DO 129 K = 1, 6

127 RES (J, K) = 0

128 DO 129 L = 1, 6

```

129 RES (J, K) = RES (J, K) + RL (J, L) * RR (L, K)
130 RETURN
131 END
C : KHỐI 6, 7, GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP
    LẬP GAUSS - SEIDELL
132 SUBROUTINE SOLVE (S, D, F, K, P,...)
133 FP = 0
134 ER = 0
135 DO 152 I = 1, 2 * N
136 IF (KP (I), EQ . 1) GO TO 152
137 A = 0
138 DO 144 J = 2, NB
139 IF ((I - J) . LT . 0) GO TO 142
140 A = A + S/NB * (I - J) + J * D(I - J + 1)
141 GO TO 143
142 IF ((I + J) - 1) . GT . 2 * NB) GO TO 144
143 A = A + S(NB * (I - 1) + J) * D(I + J - 1)
144 CONTINUE
145 B = (F (I) - A)/S (NB * (I - 1) + 1)
146 A = B - D (I)
147 D(I) = D(I) + 1.85 * A
148 IF (ABS (A/D(I)) . LT . 0.01) GO TO 150
149 EP = 1
150 IF (ABS (A) . LT . 0.000001) GO TO 152
151 ER = 1
152 CONTINUE
153 IF (EP * ER . NE. 0) GO TO 133
RETURN
END

```

CHƯƠNG 3

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA ĐẤT

Mối liên quan ứng suất - biến dạng ở trong đất thường được nghiên cứu trên máy nén ba trục, và một số ít - trên các thiết bị chuyên môn bảo đảm được các điều kiện biến dạng phẳng, tác dụng độc lập của 3 ứng suất chính hay sự xoay các ứng suất chính. Để mô tả trạng thái ứng suất - biến dạng của mẫu trong các thí nghiệm cơ học khác nhau, nên sử dụng tập các thông số không đổi p, q, v, γ và gán cho chúng một số ý nghĩa khác nhau tùy loại thí nghiệm. Trong tài liệu thường sử dụng 3 tập thông số này là :

$$\begin{aligned}
 1) \quad p &= \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r), & q &= \sigma_a - \sigma_r, \\
 v &= \varepsilon_a + 2\varepsilon_r, & \gamma &= \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r), \quad (3-1)
 \end{aligned}$$

Ở đây $\sigma_a, \sigma_r, \varepsilon_a, \varepsilon_r$ - ứng suất và biến dạng theo phương trục và phương bán kính, khi thí nghiệm trong máy nén 3 trục đối với mẫu hình trụ [40]. Rõ ràng trường hợp này $p = \sigma_v, q = 2\tau_{\max}, v = \varepsilon_v, \gamma = \gamma_{\max}$

$$\begin{aligned}
 2) \quad p &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), & q &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \\
 v &= \varepsilon_1 + \varepsilon_3, & \gamma &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \quad (3-2)
 \end{aligned}$$

Ở đây, $\sigma_1, \sigma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ - ứng suất và biến dạng chính khi chất tải trong điều kiện biến dạng phẳng [48].

$$3) \quad p = \sigma_v, q = \tau_1 = \sqrt{J_2}, v = \varepsilon_v, \gamma = \gamma_1 = 2\sqrt{J_2}\varepsilon, \quad (3.3)$$

Tập thông số này sử dụng khi phân tích trong không gian 3 chiều.

Từ các công thức trên ta thấy, p là áp lực trung bình hay đại lượng tương tự của nó trong trường hợp biến dạng phẳng, q - số đo ứng suất tiếp, v - số đo biến dạng thể tích, γ - số đo biến dạng trượt. Mỗi tập trong 3 tập đều thỏa mãn điều kiện : công của các ứng suất p và q do tăng biến dạng v và γ thì bằng công của các ứng suất chính do tăng biến dạng chính ε [40] :

$$pv + q\gamma = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 \quad (3.4)$$

Đẳng thức (3.4) luôn luôn thỏa mãn các tập thứ nhất và thứ hai ; dễ dàng thấy được điều đó khi thay vào nó các trị số p , q , γ , v . Đối với tập thứ ba, đẳng thức (3.4) thỏa mãn khi tenxơ lệch độ tăng biến dạng tỉ lệ với tenxơ lệch ứng suất, trong mức độ nhất định điều đó xảy ra khi có biến dạng dẻo.

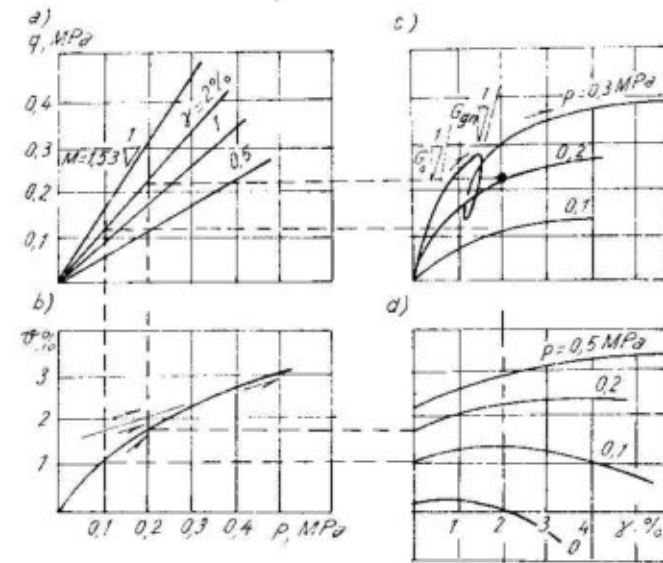
Các ứng suất được nghiên cứu ở đây là ứng suất trong cốt đất (ứng suất hữu hiệu). Chỗ nào nghiên cứu là ứng suất toàn phần thì sẽ có lưu ý riêng.

Nén đẳng hướng là sự chất tải có thoát nước lên mẫu, áp lực đồng đều theo mọi hướng ($q = 0$) ; khi đại lượng p không đổi trong quá trình chất tải thì chất tải đó gọi là *trượt thuần túy*.

Đây là một chương bổ trợ của sách. Vì vậy chỉ xem xét những tính chất chủ yếu của các loại đất đá chính. Những tính chất này đã được đơn giản hóa ít nhiều để thể hiện được chúng trên các mô hình số.

3.1. TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA CÁT

Một đồng cát thạch anh rời rạc và khô là ví dụ đơn giản nhất về môi trường đất. Thành phần hạt của cát và mức độ mài tròn của hạt có ảnh hưởng quyết định đến tính chất cơ học của cát. Tuy nhiên, khi đã hằng định những đặc trưng này, thì độ chặt là thông số duy nhất có tính quyết định.

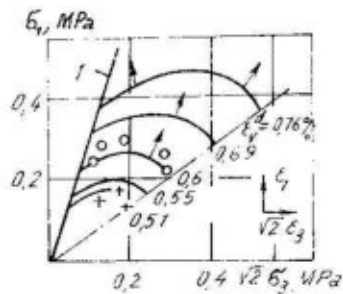


Hình 3-1. Bộ đồ thị đặc trưng cho các tính chất của cát xếp

Hình 3-1 dựa trên kết quả thí nghiệm nén ba trục nêu trong công trình của T.Kokusho [32], có tham khảo các tài liệu gắn gửi với nó, [31] và [34], đã thể hiện các tính chất của cát rời có hệ số rỗng ban đầu $e = 0,73$.

Hình 3-1,b cho thấy sự phụ thuộc của biến dạng thể tích vào áp lực thủy tĩnh khi nén đẳng hướng. Sự dãn tải và chất tải lại sẽ cho những đồ thị khác với đồ thị nén ban đầu. Áp lực thủy tĩnh ban đầu gây nên sự tích lũy biến dạng lên chất thể tích không thuận nghịch (dẻo) ở trong mẫu. Trị số biến dạng đàn hồi cũng như dẻo trong cát rời đều tương đối không lớn, khi nén hệ số rỗng thay đổi vài phần trăm, và khi nén tĩnh thì cát rời vẫn là cát rời.

R.Khosla và T.Wu [31] đã khảo sát cát độ chặt trung bình trong máy nén 3 trục. Hình 3-2 thể hiện mặt giới hạn 1, họ các mặt có biến dạng thể tích bằng nhau (mặt đẳng tích) và các vectơ biến dạng dẻo. Các tác giả [31] nhận thấy các vectơ biến dạng luôn



Hình 3-2. Đường đẳng tích và các vectơ biến dạng dẻo

vuông góc với các mặt đẳng tích và để nghị xem các mặt đẳng tích như những mặt kết hợp của tính chảy và thể dẻo (xem mục 6.2). Theo các tài liệu này, thì như trên hình 3-1d, khi tác dụng lên cát các ứng suất cát thuần túy, với p không đổi, sẽ làm tăng độ chặt. Các môđun nén thể tích tiếp tuyến của cát rời khi chất tải K_n và đỡ tải K_{gn} trong khoảng áp lực 0,05 - 0,4 MPa, có thể tính được khá chính xác

theo các biểu thức : $K_n = 94,5p$; $K_{gn} = 283,5p$.

Nếu mẫu bị nén bởi áp lực thủy tĩnh lại chịu sự chất tải cát thuần túy, tức là với mỗi lượng gia tăng áp lực dọc trục $\Delta\sigma$ sẽ tương ứng với một lượng giảm áp lực theo phương bán kính là $\frac{1}{2}\Delta\sigma$, thì quỹ đạo thay đổi trạng thái ứng suất trong hệ tọa độ p-q (hình 3-1a) sẽ song song với trục q và xuất phát từ một điểm trên trục p tương ứng với áp lực nén đẳng hướng xảy ra trước. Quan hệ giữa biến dạng trượt γ và trị số q nêu trên hình 3-1c. Khi đỡ tải các ứng suất tiếp, môđun trượt G_{gn} sẽ gần bằng trị số môđun trượt lúc đầu khi đặt tải G_0 .

Trị số giới hạn của ứng suất lệch liên hệ với trị số p theo hệ thức :

$$q = Mp \quad (3.5)$$

Trị số giới hạn của ứng suất dọc trục phụ thuộc vào ứng suất theo phương bán kính trong thí nghiệm nén 3 trục đối với cát rời được xác định bằng hệ thức

$$\sigma_a = \sigma_r \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (3.6)$$

Thay trị số σ_a này vào (3.1), sau đó đưa các biểu thức đối với p và q thu được vào phương trình (3.5), sẽ tìm được hệ thức giữa M và $\sin\varphi$:

$$M = 6\sin\varphi / (3 - \sin\varphi) \quad (3.7)$$

Trên hình 3-1a, trị số $M = 1,53$ tương ứng với góc $\varphi = 37^{\circ}40'$. Đó là trị số φ cao đối với cát rời. Cần lưu ý là góc ma sát trong thu được theo thí nghiệm nén 3 trục luôn luôn lớn hơn hẳn khi cát trực tiếp. Trên hình 3-1a, bên dưới đường thẳng giới hạn $q = Mp$ còn vẽ một số đường ; những đường đó đều được đặc trưng bằng phương trình

$$\eta = q/p = \text{const} \quad (3.8)$$

Theo tài liệu [32] thì mỗi trị số η , không phụ thuộc vào p và q, tương ứng với cùng một giá trị biến dạng trượt γ . Đồng thời trên hình 3-1a cũng cho thấy khi p khác nhau nhưng γ giống nhau (ví dụ 2%) thì tương ứng trị số η cũng giống nhau.

Nhiều tác giả nhận thấy [32, 34, 41], nếu biến dạng của cát xảy ra trong trường hợp tăng liên tục biến dạng v và γ (không có những giai đoạn đỡ tải), thì trị số cụ thể của v và γ sẽ tương ứng đơn trị với cặp trị số ứng suất cụ thể của p và q.

Nếu những đường biến dạng trượt như nhau trong tọa độ p-q-đường có phương trình (3.8) - thì các đồ thị trên hình 3-1c chỉ khác nhau về tỉ lệ thẳng đứng.

Nếu trên trục tung độ hình 3-1c ta không đặt q mà đặt η thì các đồ thị sẽ nhập thành một đường. Sức chống trượt của đất với các trị số p và γ đã cho có thể gọi là "sức chống trượt huy động" η_{hd} ; theo (3.7), đại lượng này có thể được đặc trưng bằng góc ma sát trong huy động φ_{hd} . Rõ ràng $\eta_{hd} \leq M$, $\varphi_{hd} \leq \varphi$.

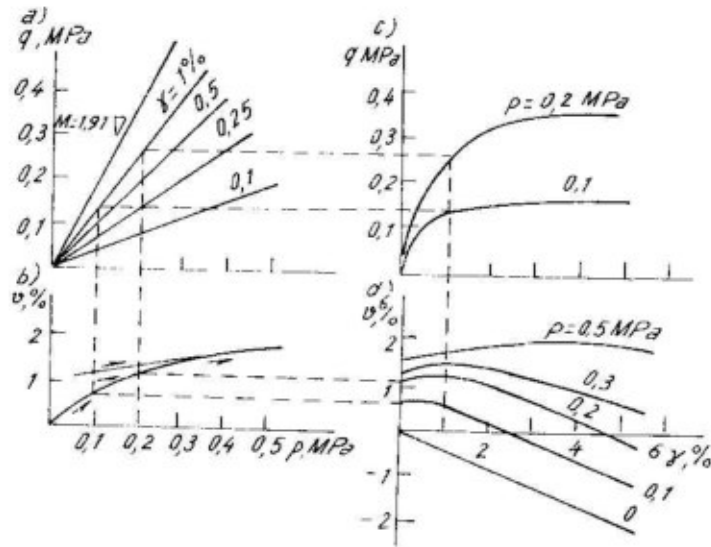
T. Kokusho [32] vẽ những đường trượt bằng nhau không có dạng đường thẳng mà hơi cong, bé lồi hướng về phía trên. Trên đó, các điểm trên đồ thị (hình 3-1c) càng dịch về bên phải thì càng cao hơn, tức là với cùng mức trượt γ thì p sẽ lớn hơn khi η nhỏ hơn.

Trong quá trình biến dạng trượt với trị số áp lực trung bình p không đổi, cát sẽ bị biến dạng thể tích như các đồ thị trên hình 3-1d. Thoạt đầu, mẫu bị nén chặt thêm, thậm chí với trị số p rất nhỏ, nhưng sau đó nó lại bị tơi ra với p nhỏ.

Quá trình nén chặt với p lớn có thể kéo dài đến tận những biến dạng trượt rất lớn, vượt quá giới hạn khả năng của máy nén 3 trục. Nhiều tác giả không phải không có cơ sở khi giả thiết rằng,

trong quá trình trượt độ chặt của cát sẽ đạt tới một trị số tới hạn nào đó, tùy theo áp lực trung bình p , bằng cách chặt thêm hoặc tới ra.

Hình 3-3 là bộ đồ thị tương tự đối với cát chặt ($e = 0,52$) theo chính những nguồn tài liệu đó. Góc ma sát trong bằng $46^{\circ}30'$, độ nén thể tích - khoảng 2 lần thấp hơn so với cát rời.

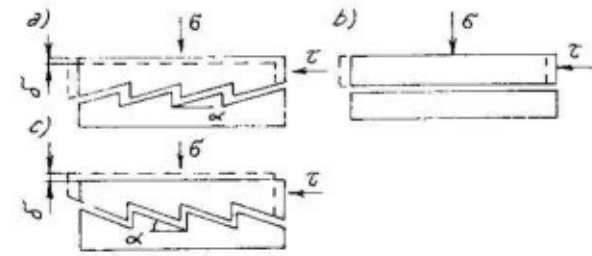


Hình 3-3. Bộ đồ thị đặc trưng cho các tính chất của cát chặt

Môđun nén và giảm nén tiếp tuyến trên đồ thị 3-3b, ở trong khoảng áp lực 0,05 - 0,5MPa, tính được gần đúng nhờ các biểu thức $K_n = 153,5p$ và $K_{gn} = 505p$.

Đặc tính tới ra (hình 3-3d), ngay khi biến dạng trượt không lớn và cả khi trị số p lớn, là đặc tính tiêu biểu nhất của cát chặt. Cơ chế làm tới khối hạt chặt ban đầu đã được giải thích từ lâu. L.Berrum [4] cho đó là do sự thay đổi góc ma sát trong và gọi mối liên quan đó là hiệu ứng α (hình 3-4). Nếu độ chặt của đất thấp hơn độ chặt tới hạn và trong quá trình trượt nó tăng lên, thì năng

lượng $\delta\sigma$ thoát ra sẽ bù đắp cho phần năng lượng tiêu hao khi trượt, được thể hiện ở sự giảm sức chống trượt và góc ma sát trong so với độ chặt tới hạn.



Hình 3-4. Sơ đồ hiệu ứng α của Berrum
a) đất xốp ; b) đất chặt vừa ; c) đất chặt

Trong cát hạt nhỏ rất xốp Berrum quan sát được góc ma sát trong là 12° .

Ngược lại, trong đất bị nén quá chặt, hiện tượng hóa tới thực hiện một công $\delta\sigma$ "âm", công này cộng với công trượt và được thể hiện ở dạng tăng góc ma sát trong. J. Koste và G.Sangler [7] tìm được khoảng biến đổi góc ma sát trong ở cát là $29^{\circ} - 48^{\circ}$, tùy thuộc độ chặt. Họ đưa ra công thức Kako để tính góc ma sát trong phụ thuộc vào hệ số độ rỗng : $\text{tg}\varphi = k/e$. Hệ số độ rỗng $k = 0,55$ tương ứng với cát có thành phần hạt đồng đều, các hạt có bề mặt xù xì ; e - hệ số độ rỗng.

P. Lade và J. Duncan [34] nhấn mạnh là nếu quá trình chất tải đối với cát trong máy nén 3 trục xảy ra với sự tăng liên tục η , thì trị số trượt γ phụ thuộc đơn trị vào ứng suất, không phụ thuộc vào đường chất tải. Nếu thêm cả điều kiện p tăng liên tục, thì có thể nói biến dạng của cát phụ thuộc đơn trị vào ứng suất, với $\eta < M$.

M.V.Malyshev và những người khác [36] đã tiến hành thí nghiệm cát trong điều kiện biến dạng phẳng ($\epsilon_2 = 0$). Thoạt tiên, mẫu được nén bằng áp lực "thủy tĩnh" $\sigma_1 = \sigma_3$ (điểm A trên hình 3-5). Tiếp tục chất tải cho tới khi đạt trạng thái giới hạn bằng ba cách : tăng σ_1 khi $\sigma_3 = \text{const}$ (I trên hình 3-5), tăng σ_1 và giảm σ_3 với cùng mức độ (trượt thuận túy, II trên hình 3-5), giảm σ_3 (III trên

hình 3-5). Góc ma sát trong từ các thí nghiệm của họ lại phụ thuộc vào đường chất tải : nó gần giống nhau khi chất tải theo đường I và III, là 42° , 39° và 37° , tương ứng với cát có chỉ số độ chặt $I = 0,8$; $0,55$; $0,23$, và giảm rõ rệt khi chất tải theo đường II (37° ; $34,5^\circ$; $32,5^\circ$ ở cát có cùng độ chặt).

Sự phụ thuộc của góc ma sát trong vào đường chất tải chưa hẳn được thừa nhận là một tính chất có qui luật của cát. Sự phụ thuộc đó có thể một phần là do khi chất tải theo đường III cho tới lúc tiến đến trạng thái giới hạn thì mẫu đã bị nén quá chặt bởi áp lực nén thủy tĩnh ban đầu cao hơn.

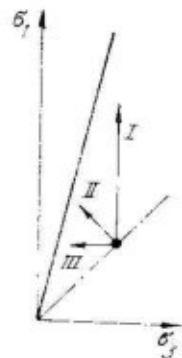
Còn khi chất tải theo đường I, theo thí nghiệm của tác giả, thì nói chung khó ghi được tải trọng giới hạn vì tải trọng giới hạn thường lớn, tới cuối thí nghiệm mẫu bị biến dạng tích lũy lớn, hình dạng mẫu bị biến đổi mạnh, và trên các đồ thị thí nghiệm không thấy rõ thời điểm bước vào trạng thái giới hạn, gây cảm tưởng là mẫu bền vô hạn.

Các tác giả [36] có nhận xét là dưới ứng suất tiếp nhỏ, khi ứng xử của cát gần với vật đàn hồi thuần túy, thì hệ số nở ngang gần bằng không.

K. Roscoe [41] tiến hành thí nghiệm cát trong những dụng cụ cát đặc biệt có dới cát rộng (dụng cụ cát xiên), trong đó có thể thay đổi được hướng của các ứng suất chính. Biến dạng của mẫu được đo theo các môc chỉ đặt vào trong mẫu nhờ tia rơngem. Kết quả thí nghiệm hoàn toàn phù hợp với các nguyên lý của lý thuyết dẻo, các số gia biến dạng dẻo khi tăng ứng suất tiếp thì đồng trục với các ứng suất chính tác dụng, còn các số gia biến dạng khi dỡ tải thì đồng trục với các số gia ứng suất.

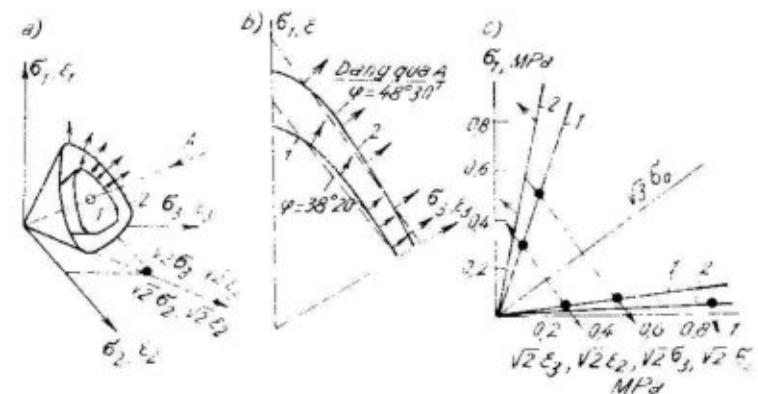
Tính đồng trục của các số gia biến dạng chính với các ứng suất chính tác dụng cho phép biểu diễn chúng trên cùng một hệ trục.

P. Lade và H. Musante [35] đã thí nghiệm cát trong thiết bị có trị số σ_2 thay đổi được trong phạm vi từ σ_1 đến σ_3 . Hình 3-6 thể hiện mặt cắt dọc và ngang của các bề mặt giới hạn của cát xốp



Hình 3-5. Đồ thị các dạng chất tải khác nhau
I. nén ; II. cát thuần túy ;
III. kéo

(1) và cát chặt (2) theo các số liệu thí nghiệm của họ, cùng nhu hướng của các vectơ biến dạng dẻo ở trạng thái giới hạn. Trên hình 3-6b các đường gạch đứt là các mặt cắt của tháp Coulomb với $\varphi = 48^\circ 30'$ và $\varphi = 38^\circ 20'$. Sự gần gũi của các bề mặt giới hạn thực nghiệm với các mặt Coulomb có cùng góc φ cho phép xem các trị số này là góc ma sát trong của cát.



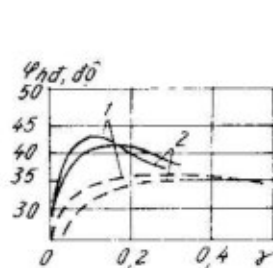
Hình 3-6. Đồ thị biểu diễn bề mặt giới hạn của cát rời (1) và cát chặt (II)

Xem xét các vectơ biến dạng trên hình 3-6b ta thấy phần lớn chúng gần vuông góc với giao tuyến của mặt bất diện với các tháp Coulomb tương ứng. Sự sai khác ít nhiều rõ rệt thấy ở cát rời, ở gần trục σ_1 (tức là khi σ_2 gần với σ_3). Rõ ràng khác với cát chặt, trong cát xốp khi các trị số σ_2 và σ_3 gần nhau, thì biến dạng dẻo phát triển có xuất hiện cả ϵ_2 chứ không chỉ các biến dạng ϵ_1 và ϵ_3 . Trong mặt cắt dọc của các mặt giới hạn (hình 3-6c), các vectơ ở cát xốp hầu như hoàn toàn vuông góc với trục thủy tĩnh, tức là biến dạng của cát xốp ở trạng thái giới hạn xảy ra khi thể tích không đổi. Hướng của các vectơ biến dạng dẻo ở cát chặt chứng tỏ có sự tơi ra ($|\Delta\epsilon_3| > \Delta\epsilon_1$) khi xảy ra trạng thái giới hạn. Tuy nhiên các vectơ biến dạng dẻo trên mặt cắt này của cát chặt lại không vuông góc với đường giới hạn, tức là các mặt thể dẻo dù thế nào đi nữa cũng không trùng với mặt giới hạn.

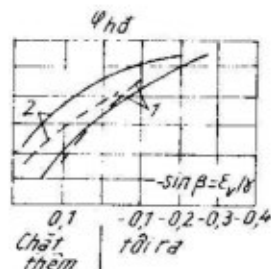
Kết cấu dụng cụ có đới cát rộng đã được đề cập của K. Roscoe cho phép tạo trên mẫu những biến dạng cát lớn nhất. Hình 3-7 (theo [41]) thể hiện quan hệ của góc ma sát trong được huy động và biến dạng trượt của cát xốp ($e = 0,75$) và cát chặt ($e = 0,53$) khi $\sigma = 42$ và 390 kPa. Trước hết, ta thấy sự gần giống nhau của các đồ thị với $\sigma = 42$ và 390 kPa, và có thể biểu diễn chúng bằng một đường cong. Thứ hai là sức kháng khi biến dạng lớn của cát xốp và cát chặt cũng gần giống nhau. Sự giảm sức kháng của cát chặt và tăng độ bền của cát xốp hiển nhiên là do cát chặt bị tơi ra còn cát xốp thì được làm chặt thêm. Tuy nhiên, sức kháng cát cực đại của cát chặt và sự giảm sút của nó thường chỉ xuất hiện khi biến dạng trượt lớn.

K. Roscoe đưa ra khái niệm "góc tơi"; sin của góc này thì bằng tỉ số giữa số gia biến dạng thể tích và số gia biến dạng trượt, trong quá trình trượt dưới ứng suất không đổi σ_0 :

$$\sin \beta = -\frac{dv}{d\gamma} \quad (3.9)$$



Hình 3-7. Sự phụ thuộc của góc ma sát trong vào trị số biến dạng trượt ở cát chặt (đường liền nét) và cát xốp (đường đứt nét) khi ứng suất pháp ở mặt trượt là 32 kPa (1) và 390 kPa (2)



Hình 3-8. Sự phụ thuộc của "góc tơi" vào góc ma sát trong được huy động của cát chặt (đường liền nét) và cát rới (đường đứt nét) khi ứng suất pháp ở mặt phẳng cắt là 42 kPa (1) và 390 kPa (2)

Sự gần gũi của các khái niệm hiệu ứng α của Berrum và góc tơi là rõ ràng, cũng như sự tồn tại mối liên hệ giữa trị số góc ma sát trong được huy động với sự tơi ra. Hình 3-8 là các đồ thị quan

hệ của góc tơi và góc ma sát trong được huy động của cát xốp và cát chặt dưới áp lực p khác nhau. Ý nghĩa của các đồ thị đó như sau. Ở cát chặt, với trị số trượt nhỏ và những biến dạng γ nhỏ (φ_{hd} nhỏ), thì khi tăng γ (tương ứng là φ_{hd}) sẽ thấy nó chặt thêm ($\sin \beta > 0$). Điều này có thể nhận thấy cả ở trên hình 3-7. Bắt đầu từ một mức nào đó, tương ứng với $\varphi_{hd} \approx 31^\circ - 37^\circ$ sự tăng biến dạng trượt sẽ kèm theo hiện tượng tơi ra. Trị số góc tơi β đạt cực đại khi sức kháng của cát chặt là cực đại, ứng với $\gamma \approx 0,1$ (xem hình 3-7), sau đó nó bắt đầu giảm xuống.

Tương tự, ở cát xốp sự lèn chặt xảy ra vào những giai đoạn tăng đầu tiên của γ và φ_{hd} , rồi từ một mức γ nào đó, tương ứng với góc $\varphi_{hd} = 31^\circ - 34^\circ$, cát cũng bắt đầu bị tơi ra.

Vì tất cả những đồ thị thực nghiệm trên hình 3-8 khá gần nhau, K. Roscoe tham khảo các công trình của T. Koula và P. Rowe đã đưa ra công thức:

$$\sin \varphi_{hd} = \frac{(k-1) - (k+1)\sin \beta}{(k+1) - (k-1)\sin \beta} \quad (3.10)$$

Ở đây $k = \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi_c}{2})$, φ_c - giá trị cuối cùng của góc ma sát trong được huy động.

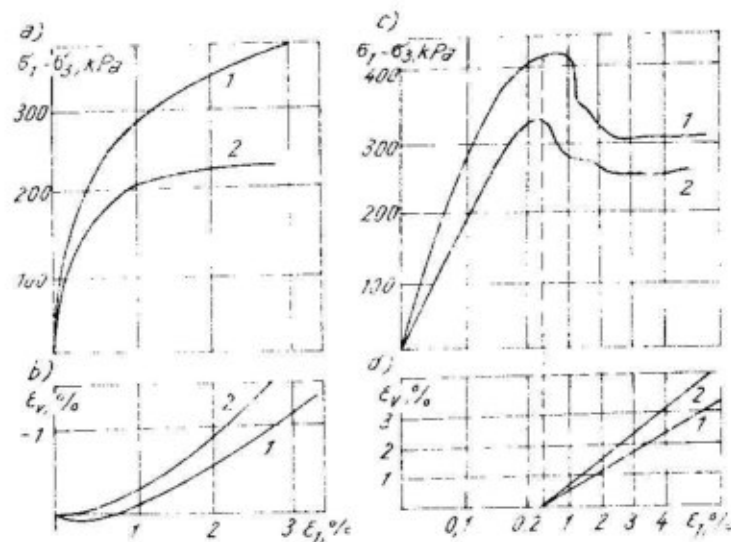
Trên hình 3-7, $\varphi_c \approx 34^\circ$ đối với cả cát xốp lẫn cát chặt. K. Roscoe đưa ra những trị số lớn nhất đã quan sát được ở cát chặt: $\beta = 15^\circ$, thậm chí 23° (trong khi đó $\varphi_{hd} \leq 47,8^\circ$).

Trong điều kiện biến dạng phẳng thì $\sin \varphi_{hd} = (\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)$ và $dv = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3$, $d\gamma = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3$. Sau khi thay những hệ thức đó vào phương trình (3.9) và (3.10), chúng ta được dạng đơn giản hơn của phương trình (3.10) đối với điều kiện biến dạng phẳng của K. Roscoe [41]:

$$\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (3.11)$$

Hình 3-9 là đồ thị thí nghiệm đất nhân tạo mảnh vụn thô (đá dăm balat đường sắt) trên máy nén 3 trục lớn, khi áp lực hông là 35 kN/m^2 , theo tài liệu của G. Raimond và V. Dyaljee [39]. Đường

1 là với đá dăm dolomit, đường 2 là với đá xỉ núi lửa. Vật liệu được chắt vào buồng nén bằng rung động. Giữa đường 1 và 2 trên tất cả hình vẽ, các tác giả [39] vạch được một họ các đường đặc trưng cho sỏi, dăm granit, dăm đá hoa và dăm đá vôi. Hình 3-9a và 3-9b thể hiện tính chất của mẫu chất tải lần đầu, còn hình 3-9c và 3-9d - mẫu bị chắt tải sơ bộ có tính chu kỳ bằng tải trọng dọc trục (10^3 chu kỳ). Đá dăm làm mẫu thí nghiệm phải có thành phần độ hạt tốt nhất. Như đã thấy, tải trọng sơ bộ có tính chu kỳ đã nâng cao độ cứng, độ hóa hơi và sức kháng cắt cực đại của mẫu. Các mẫu bị suy giảm về độ bền sau khi đạt sức kháng đỉnh



Hình 3-9. Đồ thị kết quả thí nghiệm nén trục đối với đá dăm dolomit (1) và đá xỉ núi lửa (2).

3.2. TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA SÉT

Các tính chất của đất sét và sét bão hòa nước được nghiên cứu dựa trên những quan niệm của lý thuyết trạng thái (tới hạn ở sét được đề xuất trong các công trình của M. Hvorslev [27], K. Roscoe và J. Burland [40], A. Schofield và C. Wroth [45], D. Henkel [25] và nhiều nhà nghiên cứu khác.

3.2.1. Tính ép co của sét

Khác với cát, khi bị nén (có thoát nước) sét có thể đạt độ chặt vật lý bất kỳ, chuyển từ trạng thái chảy sang dẻo và thậm chí sang trạng thái rắn.

Đồ thị sự phụ thuộc của hệ số độ rỗng vào áp lực nén của sét trong hệ tọa độ nửa logarit thường có dạng gần đường thẳng (hình 3-10); trong đó phương trình nén thủy tĩnh đẳng hướng và giảm nén (trường nở) có dạng:

$$e = e_A - \lambda \ln(p/p_A); \quad (3.12)$$

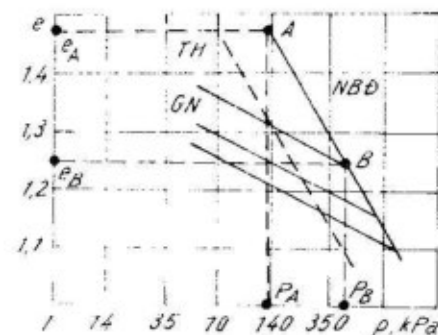
$$e = e_B + \lambda \ln(p/p_B) \quad (3.13)$$

trong đó e_A và e_B - các hằng số cho biết vị trí của đồ thị nén ban đầu; e - hệ số độ rỗng; p - áp lực thủy tĩnh. Điểm có tọa độ e_A và p_A có thể nằm trên khoảng đồ thị thí nghiệm $e - p$ hoặc phần kéo dài của nó. Tốt nhất là lấy p_A bằng áp suất khí quyển hoặc bằng đơn vị áp lực trong hệ đơn vị chọn dùng. Trong phương trình giảm nén (3-13), p_B là áp lực lên mẫu trước khi giảm nén; e_B - hệ số độ rỗng lúc đó.

Đồ thị nén một trục, dựa trên kết quả nén trong dụng cụ nén thông thường (xem hình 3-10), cũng là một đường thẳng, song song với đồ thị nén đẳng hướng ban đầu, nhưng nằm cao hơn.

Biến dạng thể tích của đất dv khi hệ số độ rỗng thay đổi de là

$$dv = de/(1 + e)$$



Hình 3-10. Đồ thị các tính chất khi nén của vữa caolin

NBD - đường nén ban đầu; GN - đường giảm nén; TH - đường trạng thái tới hạn

Nhờ hệ thức này có thể xác định được các môđun nén thể tích tiếp tuyến khi nén và giảm nén từ phương trình (3-12) và (3-13):

$$K_n = dp/dv = p(1 + e)/\lambda ; \quad (3-14)$$

$$K_{gn} = p(1 + e)k \quad (3-15)$$

Các môđun nén thể tích tiếp tuyến ở sét phụ thuộc rất rõ vào áp lực thủy tĩnh ; trong các công thức (3-14) và (3-15) K_n và K_{gn} tỉ lệ thuận với áp lực σ_v .

Theo các kết quả do C.Wroth [48] thu được, thì sét xanh Boston có $\lambda \approx 0,145$, $k = 0,0578$. Theo sự phân tích của Henkel đối với vữa làm từ sét London ($I_p = 0,52$), $\lambda \approx 0,157$, $k \approx 0,0577$; còn đối với vữa từ sét Viald ($I_p = 0,25$), $\lambda \approx 0,091$, $k \approx 0,0302$.

Nếu trạng thái của đất được đặc trưng bằng một điểm trên đồ thị nén ban đầu, thì đất đó gọi là *đất được làm chặt bình thường*. Nếu đất đã trải qua áp lực p_n lớn hơn áp lực mà nó phải chịu hiện nay p , tức là nó đã trải qua quá trình dỡ tải, thì đất đó gọi là đất quá chặt, còn tỉ số p_n/p gọi là *mức độ quá chặt* (MC). Khi chất tải lại đối với đất quá chặt (nén lại) cho tới lúc đạt áp lực cực đại mà đất đã trải qua trước đó, thì quan hệ giữa hệ số độ rỗng và áp lực cũng gần giống với đồ thị giảm nén, mặc dù những phép đo chính xác có thể cho thấy một vòng trễ không lớn. Sự có mặt của vòng trễ này đưa đến những biến dạng nén dưới tải trọng được đặt nhiều lần (theo chu kỳ) lớn hơn là dưới tải trọng tĩnh. Đối với mẫu đất thực tế, tức là mẫu trong quá trình lịch sử địa chất đã trải qua sự cố kết dưới áp lực p_n nào đó, thì khi thí nghiệm nén ở phòng thí nghiệm tới áp lực p_n nó sẽ biểu hiện như đất quá chặt, nghĩa là quan hệ giữa hệ số độ rỗng và áp lực sẽ được đặc trưng bằng đường cong nén lại, và một khi áp lực cao hơn p_n , quá trình trở thành giống quá trình nén ban đầu.

Theo tỉ lệ với áp lực tự nhiên p_{ln} - bằng áp lực do trọng lượng các lớp đất nằm trên trừ đi áp lực thủy tĩnh của nước dưới đất) - đất được gọi là *nén chặt bình thường* khi $p_n/p_{ln} = 1$; khi $p_n/p_{ln} > 1$ - *quá nén chặt*, còn khi $p_n/p_{ln} < 1$ - *nén không đủ chặt*. Trong đất nén chặt bình thường, mức cố kết của đất tương ứng với áp lực của các lớp đất nằm trên. Bất kỳ sự tăng áp lực nào trong đất, do công trình xây dựng, sẽ kèm theo sự làm chặt theo sơ đồ nén ban đầu. Nguyên nhân của trạng thái quá chặt là sự lấy đi một phần áp lực tự nhiên đã gây nên cố

kết, do tan băng hà, do xói mòn các lớp đất đá, v.v... Trên những vùng bị phủ trầm tích hồ băng hà hay trầm tích biển trẻ, thường gặp đất sét nén không đủ chặt ; ở đó quá trình cố kết dưới áp lực tự nhiên vẫn chưa hoàn thành.

Ta hãy nghiên cứu tính chất của đất bão hòa nước khi đặt nhanh (không thoát nước) lên đất một áp lực bổ sung Δp_{lp} . Áp lực này bằng tổng ứng suất hữu hiệu bổ sung trong cốt đất Δp và độ tăng áp lực lỗ rỗng Δp_w

$$\Delta p_{lp} = \Delta p + \Delta p_w \quad (3-16)$$

Biến dạng thể tích tương đối của cốt $\epsilon_v = \Delta V/V$, trong đó ΔV - biến thiên thể tích của đất.

Biến thiên ứng suất trong cốt liên hệ với biến thiên biến dạng của nó qua môđun tiếp tuyến nén thể tích :

$$\Delta p = K_n \epsilon_v \quad (3-17)$$

Môđun nén thể tích của nước ($K_w \approx 2.10^3$ MPa) thấp hơn một bậc so với môđun của các hạt khoáng vật của cốt đất, vì vậy sự giảm thể tích đất ΔV thực tế bằng sự giảm thể tích không gian rỗng nV (n - độ rỗng). Biến dạng thể tích tương đối của nước

$$\epsilon_{v(w)} = \Delta V/nV = \frac{1}{n} \epsilon_v$$

và áp lực lỗ rỗng phát sinh là

$$\Delta p_w = K_w \epsilon_{v(w)} \quad (3-18)$$

Thay (3-17) và (3-18) vào (3-16) ta thu được

$$\epsilon_v = \Delta p / \tilde{K}_{kin} \quad (3-19)$$

trong đó \tilde{K}_{kin} - môđun nén thể tích không thoát nước ; $\tilde{K}_{kin} = K_n + K_w/n$

Nếu tới thời điểm chất tải nhanh đất vẫn ở trạng thái nén chặt bình thường, thì K_n trong công thức (3-17) sẽ bằng môđun tiếp tuyến của sự cố kết ban đầu - có trị số nhỏ so với môđun nén của nước K_w . Ở đất được nén chặt bình thường, thì khi nén nhanh thực tế là toàn bộ áp lực được truyền cho nước lỗ rỗng.

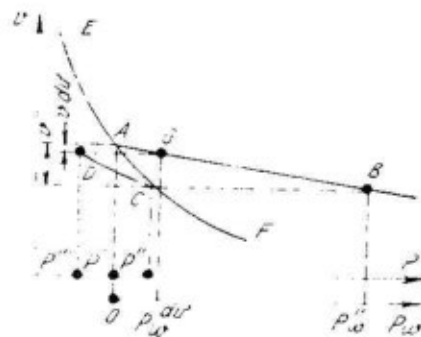
Nếu tới thời điểm chất tải nhanh đất là quá chặt, thì K_n trong (3-17) sẽ bằng môđun tiếp tuyến nên lại. Nếu mức quá chặt cao thì K_n có thể có cùng trị số với K_w , và phần lớn tải trọng sẽ do cốt đất chịu.

Khi dỡ tải nhanh (không thoát nước) thì K_n trong công thức (3-17) sẽ biểu thị môđun giảm nén. Tính toán biến thiên áp lực lỗ rỗng theo công thức (3-18) khi đó có thể dẫn tới những trị số âm. Biểu hiện chân không lỗ rỗng đã ghi nhận được nhiều lần ở cả trong phòng thí nghiệm lẫn ngoài thực địa.

Với đất chặt bình thường bão hòa nước thấm chỉ chỉ sau một lần chất tải và dỡ tải cũng xuất hiện áp lực lỗ rỗng dư, như minh họa trên hình 3-11; EACF là đường cong nén ban đầu của cốt đất, còn AB là đường ép co của nước lỗ rỗng.

Hãy đặc trưng trạng thái ứng suất ban đầu của mẫu là: không có áp lực lỗ rỗng ($P_w = 0$), ứng suất toàn phần p_{1p} tương ứng với ứng suất trong cốt đất $p' (p' = p_{1p})$ - điểm A). Nếu không thoát nước một trị số v sẽ đưa cốt đến trạng thái được biểu diễn bằng điểm C trên đường cong nén ban đầu của cốt, còn nước lỗ rỗng tới điểm B trên đường ép co của nước. Muốn vậy cần có áp lực toàn phần $p''_{1p} = p''_w + p''$. Tiếp tục giảm áp lực toàn phần tới trị số ban đầu p_{1p} , ứng suất trong cốt đất sẽ giảm theo đường dỡ tải CD, còn áp lực lỗ rỗng giảm theo đường đàn hồi AB. Trạng thái cuối cùng của cốt đất và nước lỗ rỗng sẽ được biểu diễn tương ứng bằng điểm D và điểm G, do vậy tổng ứng suất trong cốt p''' và áp lực lỗ rỗng dư p_w^{dl} bằng áp lực toàn phần ban đầu (v và cuối cùng)

$$p''' + p_w^{dl} = p_{1p} \quad (3-20)$$



Hình 3-11. Đồ thị biểu diễn cơ chế phát sinh áp lực lỗ rỗng dư sau một chu kỳ chất tải - dỡ tải ở đất bão hòa nước

Ứng suất trong cốt giảm, còn trong nước lỗ rỗng thì áp lực tăng. Phần tử đất bị biến dạng dư v_{dl} rất nhỏ.

Sự xuất hiện vòng trở khi giảm nén và nén lại sẽ làm phát sinh áp lực lỗ rỗng dư tăng tiến sau nhiều chu kỳ chất tải và dỡ tải, và cuối cùng có thể chiếm một phần đáng kể trong tải trọng tĩnh. Tác dụng tăng áp lực lỗ rỗng như vậy cũng xảy ra ở cát có độ chặt dưới trung bình khi chịu tác dụng của tải trọng biến đổi (rung, biến đổi theo chu kỳ).

3.2.2. Phản ứng của sét chặt bình thường đối với ứng suất tiếp

Đất được nén chặt bình thường dưới tác dụng của ứng suất cát thuận tủy (tăng q khi $p = \text{const}$), trong điều kiện thoát nước, thường làm giảm hệ số độ rỗng và đất chặt thêm. Hiện tượng này được giải thích là sự tăng ứng suất chính σ_1 có kèm theo những biến dạng nén lớn hơn các biến dạng giãn nở theo hướng ứng suất giảm σ_3 , do chênh lệch giữa môđun chất tải theo hướng σ_1 và dỡ tải theo hướng σ_3 .

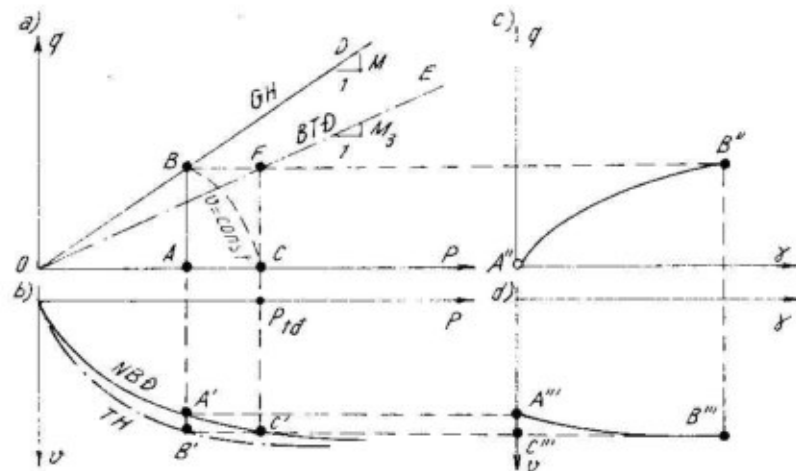
Hình 3-12 là bộ đồ thị đặc trưng cho tính chất của mẫu sét nén chặt bình thường khi chịu cát thuận tủy [42, 49].

Trạng thái xuất phát của mẫu được biểu diễn bằng điểm A trên hình 3-12a ($p \neq 0, q = 0$), điểm A' trên đường cong nén ban đầu (hình 3-12b); điểm A'' trên hình 3-12d biểu thị quan hệ của biến dạng thể tích của mẫu với biến dạng trượt. Theo mức tăng ứng suất tiếp từ điểm A tới điểm giới hạn B (xem hình 3-12a) độ chặt tăng và chuyển từ điểm A' trên hình 3-12b tới điểm B'. Tập hợp các điểm giới hạn kiểu B trên hình 3-12a tạo thành đường giới hạn OD. Theo nhiều nhà nghiên cứu [25, 40, 48] thì đường giới hạn (GH) khi nén 3 trục là một đường thẳng có phương trình

$$q = Mp \quad (3-21)$$

Đối với sét Viald đã nhắc tới ở trên theo [64] $M \approx 0,8575$, với sét Boston [48] $M \approx 1$. K. Roscoe và J. Burland [40] cho rằng, đối với các loại sét khác nhau, M có thể biến đổi trong khoảng từ 0,7 đến 1,2, tương ứng với góc ma sát trong từ $18^{\circ}40'$ đến 30° . Những góc ma sát trong như thế đối với sét mới trông có vẻ lớn khác

thường và chỉ có thể có khi các ứng suất tiếp được chất tải rất chậm và áp lực lỗ rỗng phát sinh phải tiêu tán hết sau mỗi mức tăng nhỏ của ứng suất tiếp.



Hình 3-12. Bộ đồ thị đặc trưng cho các tính chất của sét chặt bình thường

Tập hợp các điểm, tương tự điểm B' và đặc trưng cho mối liên hệ giữa độ chặt của đất với áp lực trung bình ở trạng thái giới hạn, là một đường tương tự đường nén ban đầu và được gọi là *đường trạng thái tới hạn* (TH). Đường TH trong tọa độ nửa logarit sẽ gần như một đường thẳng, song song với đường nén ban đầu (NBD) và có cùng dạng phương trình (hình 3-10). Điểm C' trên hình 3-12b có cùng tung độ với điểm B, nhưng nằm trên đường NBD. Hoành độ p_{1d} của nó xác định áp lực làm cho mẫu trong điều kiện nén đẳng hướng đạt tới độ chặt giống như khi chất tải cát theo AB (hình 3-12a). M. Hvorlev [27] gọi p_{1d} là *áp lực tương đương*. Điểm F trên hình 3-12a có hoành độ bằng áp lực tương đương, còn tung độ bằng sức chống trượt của đất bị nén chặt bình thường. Đường OE là tập hợp các điểm tương tự điểm F có thể gọi là *đường độ bền tương đương* (BTD). Phương trình của nó có dạng

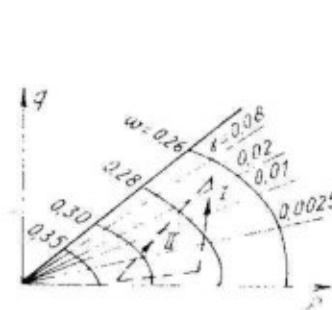
$$q = M_{1d} p \quad (3-22)$$

Trị số của M_{1d} có liên quan với hệ số M của phương trình đường giới hạn (3-21). Theo tài liệu [27], đối với sét Venski, liên hệ đó được biểu diễn bằng hệ thức gần đúng $M_{1d} \approx 0,6M$.

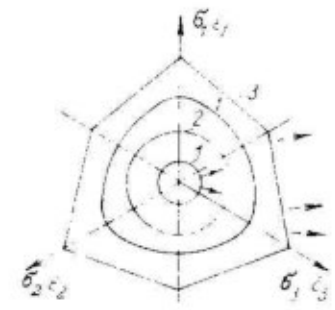
Đường gạch đứt BC trên hình 3-12a là tập hợp các điểm biểu thị trạng thái ứng suất của các mẫu có cùng độ chặt. Tương ứng với đường này là các đường B'C' và B'''C''' trên hình 3-12b và 3-12d.

Hình 3-12d là đồ thị cho thấy sự tang biến dạng nén thể tích theo mức độ trượt (với $p = \text{const}$). Sự làm chặt đất nén chặt bình thường trong quá trình trượt kèm theo sự giảm độ ẩm ở mặt hay vùng trượt, và sự ép thoát nước vào các lớp vẩy quanh. Để tránh xuất hiện áp lực lỗ rỗng, cần chất tải hết sức chậm.

Đồ thị hình 3-12, c biểu thị liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng. Theo các tài liệu của R.Yong và E.Mackyes [49], đồ thị $q - \gamma$ với p khác nhau có thể được biểu diễn bằng một đường cong trong tọa độ $q/q_{gh}, \gamma$ (trong đó q_{gh} - trị số giới hạn của q với p đã cho). Bằng cách đó, cũng như trước đây trên hình 3-1 và 3-3, có thể dựng được một họ những đường tia biểu thị trạng thái ứng suất có cùng trị số trượt γ (hình 3-13), và một họ các mặt có cùng độ ẩm (và tương ứng, có cùng biến dạng thể tích). Các đồ thị ở hình 3-13 xác lập sự tương ứng đơn trị giữa biến dạng và ứng suất với một đường chất tải xác định; sự tương ứng đó ít nhiều vẫn được giữ vững nếu trong suốt quá trình chất tải p và q tăng (đường



Hình 3-13. Các đường đẳng trượt (cắt) và đẳng độ ẩm của sét



Hình 3-14. Đồ thị biến đổi hình dạng mặt chảy khi chất tải
1 - mặt chảy; 2 - giới hạn chảy đẳng hướng; 3 - nút giới hạn

I và II trên hình 3-13). Đối với những đường chất tải phức tạp hơn thì người ta xác lập không phải sự phụ thuộc giữa ứng suất toàn phần và biến dạng, mà là giữa các số gia ứng suất và biến dạng.

Theo các kết quả thực nghiệm đối với sét dẻo được làm chặt bình thường trong công trình nêu trên [49], thì trước khi đạt trị số $\gamma \approx 0,5\%$ ($q \approx \frac{1}{3} q_{gh}$) các vectơ biến dạng dẻo chiếu trên mặt khối bát diện (hình 3-14) sẽ vuông góc với mặt tròn kiểu Mises - Botkin; còn khi mức ứng suất tiếp và biến dạng cao hơn, vào lúc mẫu bắt đầu xuất hiện mặt trượt song song với phương σ_2 , thì hướng của các vectơ biến dạng dẻo gần vuông góc với mặt cắt lục giác của tháp Coulomb.

3.2.3. Sức chống trượt của sét quá nén chặt

Nếu các mẫu sét có các đường đặc trưng GH, BTD, NBD, TH trong lịch sử phải chịu nén đẳng hướng dưới áp lực p_n (điểm A và A' trên hình 3-15a, b), sau đó được dỡ tải tới điểm C và chịu cắt thuần túy dưới áp lực này, thì tải trọng giới hạn (phá hoại) sẽ cao hơn đường giới hạn của mẫu được nén chặt bình thường (GH). Điểm D biểu thị tải trọng giới hạn sẽ thuộc đường DF nào đó. Theo tài liệu [27], đối với vữa quá nén chặt chế biến từ sét Venxki, thì đường DF này (và một loạt các đường họ hàng của nó, tương ứng với những áp lực quá chặt khác) sẽ là một đường thẳng biểu diễn bằng phương trình Coulomb trong tọa độ $\tau - \sigma$

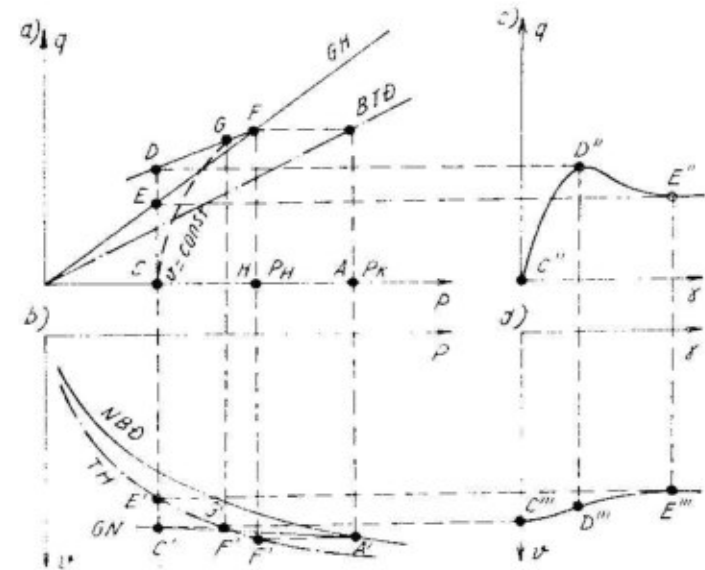
$$\tau = C_{qc} + \sigma \operatorname{tg} \varphi_{qc} \quad (3-23)$$

trong đó C_{qc} và φ_{qc} là lực dính và góc ma sát trong của đất quá chặt.

Điểm F (chỗ tách của đường giới hạn) phải có vị trí sao cho áp lực p là áp lực tương đương đối với F. Điều đó được thể hiện bằng cách dựng hình trên hình 3-15a và 3-15b, tức là ở điểm F một mẫu nén chặt bình thường có độ chặt giống như mẫu ở điểm A.

Đồ thị quan hệ ứng suất - biến dạng (hình 3-15c) ở sét quá nén chặt có trị số cực đại thể hiện rõ. Khi biến dạng trượt tiếp tục

tăng, thì do sự phát triển các vi khe nứt mà sức kháng bị giảm tới mức gần bằng sức kháng của mẫu bị nén chặt bình thường (điểm E, E''), mẫu ở vùng trượt (cát) bị tới ra (điểm E''' trên hình 3-15d) tới mức gần với điểm E' trên đường trạng thái tới hạn. Độ ẩm trong vùng trượt tăng do thu hút nước từ các lớp đất vây quanh. Nếu trượt xảy ra nhanh (trượt không thoát nước) thì trong vùng trượt phát triển áp lực lỗ rỗng âm làm tăng lực nén thủy tĩnh trong cốt đất và sức chống trượt của mẫu, như vậy hiện tượng mất độ bền ngoài giới hạn trong trường hợp này có thể là ẩn.



Hình 3-15. Đồ thị đặc trưng cho các tính chất của sét quá nén chặt

Đường CG (hình 3-15a) là đường đẳng tích, các điểm ở trên đó có biến dạng thể tích giống nhau. Đối với đất bị quá chặt mạnh, đường đẳng tích hướng về bên trong trục p ; khi chất tải mẫu quá chặt bằng ứng suất tiếp từ điểm C tới điểm D thì các đường

đẳng tích có biến dạng thể tích giảm sẽ lần lượt cắt nhau ; điều này biểu thị sự tới ra của mẫu. Cần nhớ là đối với mẫu nén chặt bình thường (xem hình 3-12a) thì các đường đẳng tích lõi và biểu thị sự làm chặt mẫu khi trượt.

Có thể tìm được điểm H, đặc trưng bằng một áp lực p_{11} nào đó, mà tại đó việc đạt ứng suất tiếp sẽ không gây nên cả hiện tượng nén chặt lẫn tới ra, tức là đường đẳng tích sẽ là FH. Một mẫu như thế khi trượt sẽ không tăng độ bền, như đất chặt bình thường, và cũng không giảm độ bền, đó thị quan hệ $q - \gamma$ của nó gắn với tính đàn - dẻo lý tưởng. Theo tài liệu [25] những mẫu như vậy có mức quá chặt $p_n/p_{1n} \approx 2$.

Thí nghiệm chặt tải mẫu trong máy nén 3 trục được tiến hành theo 2 giai đoạn : thoát tiên đạt áp lực đồng đều mọi hướng $\sigma_a = \sigma_r = p$, sau đó thì đạt các ứng suất lệch. Ứng suất lệch thường được tạo ra bằng 4 cách : a) nén - ứng suất dọc trục σ_a tăng, còn áp lực hông không đổi, áp lực trung bình p tăng ; b) kéo - ứng suất dọc trục σ_a giảm, áp lực hông duy trì, p giảm ; c) cắt thuần túy - ứng suất dọc trục tăng, còn áp lực hông giảm sao cho áp lực trung bình là không đổi : $p = \text{const}$; d) cắt thuần túy - áp lực hông σ_r tăng, còn ứng suất dọc trục σ_a giảm sao cho $p = \text{const}$.

Nếu thí nghiệm tiến hành ở chế độ thoát nước và áp lực lỗ rỗng không đổi bằng không, thì ứng suất trong cốt sẽ bằng ứng suất toàn phần đạt vào, và các quỹ đạo thay đổi của nó sẽ tương ứng với đường chặt tải áp dụng (hình 3-16).

Nếu chặt tải lệch tiến hành ở chế độ không thoát nước (nhẹ hoặc đóng đường thoát nước lỗ rỗng), thì quỹ đạo biến đổi ứng suất trong cốt đất sẽ không lặp lại quỹ đạo biến đổi ứng suất toàn phần mà chạy dọc theo đường đẳng tích.

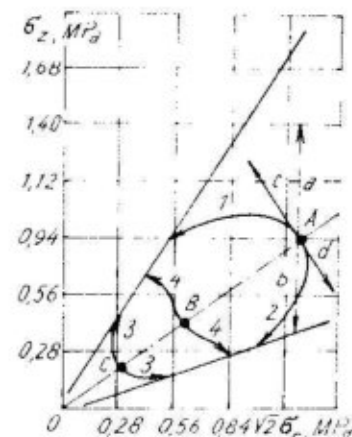
Hình 3-16 theo tài liệu [25] là thể hiện các quỹ đạo thay đổi ứng suất trong cốt khi thí nghiệm không thoát nước mẫu làm từ vữa sét Uildski, được lên chặt ở áp lực 0,84 MPa (điểm A). Các mũi tên a, b, c, d chỉ hướng thay đổi của ứng suất toàn phần theo các phương thức chặt tải đã nêu. Khi thí nghiệm trên mẫu được nén chặt bình thường, các quỹ đạo thay đổi ứng suất trong cốt 1 và 2 lặp lại các đường đẳng tích lõi (hãy so với hình 3-12), không

phụ thuộc vào đường thay đổi ứng suất toàn phần là a, b, c hay d.

Ở mẫu có mức quá chặt lớn hơn 2, các quỹ đạo thay đổi ứng suất trong cốt là đường lõm (hãy so với hình 3-15). Khi đó, vào thời điểm phá hoại, ứng suất trong cốt thậm chí có thể vượt quá ứng suất toàn phần, do áp lực lỗ rỗng âm. Trị số vượt lớn nhất có thể của ứng suất trong cốt so với ứng suất toàn phần là bằng áp lực khí quyển (khi xuất hiện chân không trong lỗ rỗng), như thế các quỹ đạo ứng suất ở trong cốt của mẫu quá chặt mạnh ở gần đường giới hạn có thể bị tách khỏi mặt đẳng tích, khi xuất hiện chân không lỗ rỗng.

Như vậy, khi tăng tốc độ chặt tải sẽ kèm theo giảm mức thoát nước, sức kháng cắt ở mẫu chặt bình thường sẽ giảm do phát sinh áp lực lỗ rỗng ; còn ở mẫu quá chặt thì tăng do chân không lỗ rỗng. Nói chung, tính bền của sét quá chặt rất không ổn định. Điều này thể hiện rõ ở xu hướng trượt mái dốc trên đất sét quá chặt một thời gian nào đó sau khi đào hố móng. Khi giải quyết vấn đề ổn định của sét quá chặt, tính toán sức kháng dư (chứ không phải đỉnh) tương ứng với độ bền của trạng thái làm chặt bình thường của loại sét đó là đáng tin cậy nhất.

Cơ chế làm việc vừa được xem xét của sét cho phép dự báo tính chất của nó trong điều kiện không thoát nước, nếu đã biết các tính chất của cốt đất theo kết quả thí nghiệm có thoát nước. Khả năng



Hình 3-16. Sự phụ thuộc của ứng suất trong cốt đất vào đường chặt tải

1 - quỹ đạo thay đổi ứng suất trong cốt khi thay đổi ứng suất toàn phần theo quỹ đạo a và c ; 2 - cũng vậy, khi thay đổi ứng suất toàn phần theo quỹ đạo b và d ; 3 - cũng vậy, đối với mẫu bị quá chặt mạnh ; 4 - cũng vậy, với mẫu có mức quá chặt 2

tiếp cận chung như vậy đối với chất tải không thoát nước và có thoát nước là điều quan trọng và rất tiện lợi

Ở trên đã nói là trong tự nhiên có thể có sét chưa đủ chất. L.Berrum [4] làm thí nghiệm cát quay ở ngoài trời với sét này thu được góc ma sát trong $\sim 10^\circ$ (cho ứng suất pháp trên diện cát bằng áp lực đất tự nhiên theo phương thẳng đứng ở độ sâu thí nghiệm), trong khi thí nghiệm trong phòng có thoát nước góc ma sát trong là $28 - 32^\circ$. Berrum lưu ý là đôi khi sự thay đổi 1% độ lỗ rỗng có thể kèm theo thay đổi 10° ở góc ma sát trong.

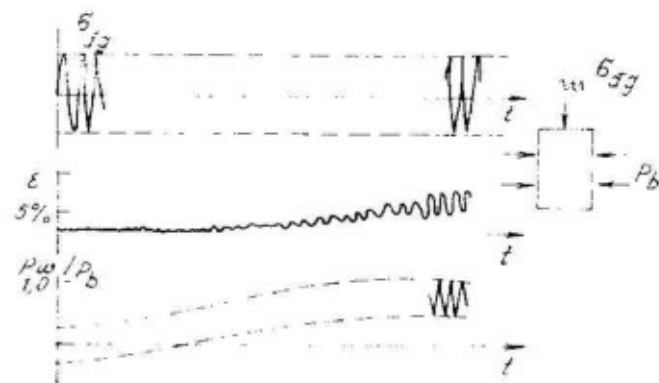
3.3. ĐẤT CHIU TẢI TRỌNG ĐỘNG

Tính chất của đất dưới tác dụng động lực mạnh có tính chất xung kiểu sóng nổ là một vấn đề đặc biệt chưa được quan tâm rộng rãi.

Rất hay gặp trường hợp nền đất phải chịu tải trọng rung, có chu kỳ hoặc tuần hoàn do máy móc hoạt động (máy nén, búa máy, v.v.), động đất. Những năm gần đây sự quan tâm đến vấn đề này tăng mạnh, liên quan đến việc đánh giá độ bền của nền các bộ khoan trọng lực ở thềm lục địa dưới tác dụng của sóng biển.

Như đã nhận xét ở mục 3.2.1, dưới tác dụng của áp lực thủy tĩnh có tính chu kỳ, do các vòng trễ mà trong cốt đất tích tụ biến dạng không thuận nghịch. Nếu sự chất tải này xảy ra trong điều kiện không thoát nước và do sự đối đầu nhanh của ứng suất chất tải có tính tuần hoàn (vì nó mà điều kiện không thoát nước là thực tế không chỉ đối với đất sét mà cả đối với cát), thì cốt đất đang chặt sẽ thoát khỏi tác dụng của tải trọng, và áp lực lỗ rỗng tăng lên.

Cùng tương tự, khi chất tải trọng lệch (xem hình 3-1,c) tuần hoàn lên mẫu đang chịu tải trọng tĩnh τ_1 , thì do hiện tượng trễ trị số biến dạng sẽ tăng từ trị số tĩnh γ_1 đến một giá trị cuối cùng (tuần hoàn) nào đó γ_1 . Ở đất được làm chặt bình thường, trượt kèm theo hiện tượng làm chặt cốt đất, tức là việc đạt các tải trọng tuần hoàn gây trượt sẽ giải phóng cốt đất khỏi ứng suất pháp, và làm tăng áp lực lỗ rỗng.



Hình 3-17. Quan hệ giữa biến dạng ϵ của mẫu ϵ và áp lực lỗ rỗng p_w trong quá trình tác dụng rung động với thời gian t ở tải trọng buồng nén ở trục z .

Trên hình 3-17 [29] là đồ thị điển hình của sự tăng áp lực lỗ rỗng p_w ở mẫu bão hòa nước nén chặt bình thường, sau khi đạt lên mẫu một tải trọng tuần hoàn dọc trục. Sau ba chục chu kỳ, áp lực lỗ rỗng đạt trị số áp lực trong buồng nén 3 trục. Biến dạng của mẫu lúc đó là 10%. Vì áp lực lỗ rỗng bằng với thành phần thủy tĩnh, nên về thực chất mẫu đối với tải trọng đồng ở trong điều kiện nén một trục, và đất bị rão ra. Số chu kỳ cần để làm rão hoàn toàn đất phụ thuộc vào độ chặt của đất và cường độ rung động; thường là 5-10 chu kỳ. Chính sự tăng áp lực lỗ rỗng và sự giảm tương ứng sức chống trượt dưới tải trọng đối đầu là nguyên nhân chính gây trượt đất, làm nền mất khả năng chịu tải khi động đất, khi chịu va đập của sóng biển, chứ không phải do bản thân sự tăng tải trọng ngăn ngùi (và thường tương đối không lớn) của thành phần động lực gây ra.

Hiện tượng trễ dẫn đến làm chất cốt đất khi đạt lên tải trọng tĩnh thành phần đối đầu, chứng tỏ độ tăng bền của đất không phải là đẳng hướng. Trong môi trường tăng bền đẳng hướng, mức ứng suất đạt được sẽ xác định mặt chảy đối xứng đối với trục thủy tĩnh; bên trong mặt này là vùng đàn hồi rỗng lớn. Thực ra, như