

Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU VÀ KẾT CẤU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU VÀ KẾT CẤU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 2011

Lời nói đầu

Sức bền vật liệu là môn học cơ sở quan trọng, cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản nhất để giải các bài toán liên quan đến hệ thanh, tính toán sức bền của vật liệu và kết cấu. Chính vì vậy sức bền vật liệu và cơ học kết cấu được giảng dạy cho sinh viên tất cả các trường đại học kỹ thuật ở Việt Nam cũng như trên thế giới. Tuy nhiên, hiện nay có rất nhiều giáo trình sức bền vật liệu khác nhau, được biên soạn phục vụ phù hợp cho các đối tượng là người học trong các trường đại học khác nhau.

Giáo trình này được biên soạn cho sinh viên ngành Cơ học Kỹ thuật và ngành Công nghệ Cơ điện tử của trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội, với thời lượng giảng dạy từ 2 đến 3 tín chỉ. Giáo trình đề cập đến những nội dung căn bản nhất của môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu, được biên soạn trên cơ sở các bài giảng về Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu trong khung chương trình đào tạo cho sinh viên Khoa Cơ học Kỹ thuật và Tự động hóa trong 5 năm qua, đồng thời có tham khảo kinh nghiệm và nội dung giảng dạy môn học này đã được áp dụng ở một số trường đại học kỹ thuật trong và ngoài nước, với mục đích kịp thời cung cấp cho sinh viên tài liệu phục vụ học tập.

Các tác giả chân thành cảm ơn PGS. TS. Khúc Văn Phú, PGS. TS. Trần Minh Tú, TS Vũ Đỗ Long, TS Lương Xuân Bính vì những đóng góp quý báu cả về nội dung và hình thức cho quyển sách này. Các tác giả bày tỏ sự cảm ơn Trường Đại học Công nghệ, Khoa Cơ kỹ thuật và tự động hóa đã tạo điều kiện về mọi mặt để các tác giả hoàn thành quyển sách này. Quyển sách được viết ra có công không nhỏ của các em sinh viên đã góp ý cho các tác giả trong quá trình giảng dạy.

Vì giáo trình xuất bản lần đầu nên không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc, đặc biệt là của các đồng nghiệp và các em sinh viên để giáo trình ngày càng hoàn thiện tốt hơn.

Mục lục

Lời nói đầu	i
Mục lục	ii
Danh mục các kí hiệu	vii
Đơn vị đo theo SI	ix
NHẬP MÔN	1
Giới thiệu	1
CHƯƠNG 1 Các khái niệm cơ bản	8
1.1 Lực tác dụng	8
1.2 Nội lực	10
1.3 Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng	14
Kết luận của chương 1	16
CHƯƠNG 2 Quan hệ ứng suất và biến dạng	18
2.1 Trạng thái ứng suất	18
2.2 Trạng thái biến dạng	27
2.3 Định luật Hooke	30
Kết luận chương 2	33
CHƯƠNG 3 Các lí thuyết bền	35
3.1 Thế năng biến dạng đàn hồi	35
3.2 Đặc trưng cơ học của vật liệu	39
3.3 Điều kiện bền của vật liệu	43
Kết luận của chương 3	47

PHẦN 1. CÁC BÀI TOÁN THANH	49
CHƯƠNG 4 Các đặc trưng hình học	51
4.1 Mô men tĩnh và trọng tâm	51
4.2 Các mô men quán tính	52
4.3 Công thức chuyển trục song song	54
4.4 Công thức xoay trục	56
Kết luận chương 4	57
CHƯƠNG 5 Thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm	58
5.1 Định nghĩa	58
5.2 Biểu đồ lực dọc	58
5.3 Công thức ứng suất	60
5.4 Biến dạng của thanh	61
5.5 Độ bền và độ cứng	65
5.6 Bài toán siêu tĩnh	66
Kết luận chương 5	69
CHƯƠNG 6 Thanh thẳng chịu xoắn	71
6.1 Định nghĩa	71
6.2 Biểu đồ mô men xoắn	71
6.3 Ứng suất tiếp	73
6.4 Biến dạng và chuyển vị	76
6.5 Độ bền và độ cứng	79
6.6 Thanh chịu cắt	82
6.7 Xoắn thanh tiết diện chữ nhật	84
6.8 Bài toán siêu tĩnh	85
Kết luận chương 6	87

CHƯƠNG 7	Thanh thẳng chịu uốn	88
7.1	Định nghĩa	88
7.2	Biểu đồ lực cắt và mô men uốn	89
7.3	Ứng suất trong bài toán uốn	91
7.4	Biến dạng và chuyển vị của dầm chịu uốn	103
7.5	Độ bền và độ cứng	108
	Kết luận chương 7	112
CHƯƠNG 8	Thanh chịu lực phức tạp	113
8.1	Giới thiệu chung	113
8.2	Trường hợp tổng quát	113
8.3	Các trường hợp chịu lực phức tạp	118
	Kết luận chương 7	124
CHƯƠNG 9	Ổn định của thanh chịu nén	125
9.1	Giới thiệu chung	125
9.2	Lực tới hạn và ứng suất tới hạn	126
9.3	Tính ổn định cho thanh chịu nén	129
9.4	Uốn ngang và uốn dọc đồng thời	131
	Kết luận chương 7	134
PHẦN 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TOÁN HỆ THANH		136
CHƯƠNG 10	Hệ siêu tĩnh	137
10.1	Siêu tĩnh	137
10.2	Bậc tự do	142
10.3	Đường ảnh hưởng	143
	Kết luận chương 10	150
	Bài tập chương 10	151

CHƯƠNG 11 Phương pháp lực	152
11.1 Mô tả phương pháp	152
11.2 Ma trận độ mềm	154
11.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác nhau	156
11.4 Năm bước giải của phương pháp lực	157
11.5 Phương trình ba mô men	164
Kết luận chương 11	167
Bài tập chương 11	169
CHƯƠNG 12. Phương pháp chuyển vị	171
12.1 Mô tả phương pháp	171
12.2 Ma trận độ cứng	175
12.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác	186
12.4 Năm bước giải của phương pháp chuyển vị	186
12.5 Ảnh hưởng của chuyển vị tại các tọa độ	190
12.6 Sử dụng phương pháp lực và phương pháp chuyển vị	192
Kết luận chương 12	204
Bài tập chương 12	206
CHƯƠNG 13. Phương pháp công ảo	209
13.1. Thế năng biến dạng	209
13.2. Nguyên lý công ảo	214
13.3. Tính chuyển vị bằng công ảo	217
13.4. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ dàn	222
13.5. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ khung	227
13.6 Ma trận độ mềm của kết cấu tổng thể	240
13.7 Ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể	241

Kết luận chương 13	244
Bài tập chương 13	246
CHƯƠNG 14 Phương pháp phần tử hữu hạn – Sơ lược	248
14.1 Giới thiệu	248
14.2 Phương pháp phần tử hữu hạn – cơ sở	250
14.3 Áp dụng năm bước tính toán của phương pháp chuyển vị	251
14.4 Phương trình đàn hồi cơ sở	252
14.5 Nội suy chuyển vị	253
14.6 Ma trận độ cứng và ma trận ứng suất phần tử	254
14.7 Véc tơ lực phần tử	256
14.8 Phần tử dầm không gian	257
Kết luận chương 14	262
PHỤ LỤC	265
PHỤ LỤC 1. Dịch chuyển của các phần tử thanh thẳng	265
PHỤ LỤC 2. Lực đầu phần tử của các phần tử thanh thẳng	268
PHỤ LỤC 3. Lực đầu phần tử do chuyển vị tại đầu nút của thanh thẳng	270
PHỤ LỤC 4. Phản lực và moment uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị tại gối đỡ gây ra	272
PHỤ LỤC 5. Đặc trưng của các hình	282
PHỤ LỤC 6. Các giá trị của tích phân	283
PHỤ LỤC 7. Đặc điểm các phản lực liên kết thường gặp	284
PHỤ LỤC 8. Bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$	287
Tài liệu tham khảo	288

Danh mục các kí hiệu

- A diện tích tiết diện
- D đường kính hình tròn hoặc đường kính ngoài của tiết diện hình vành khăn
- d đường kính trong tiết diện hình vành khăn
- b bề rộng của tiết diện hình chữ nhật hoặc bề rộng cánh của tiết diện chữ I, U
- h chiều cao của tiết diện hình chữ nhật hoặc của tiết diện chữ I, U
- E mô đun đàn hồi Young
- F ma trận độ mềm
- f_{ij} hệ số ma trận độ mềm
- I_z, I_y mô men quán tính đối với trục z và trục y tương ứng
- I_p mô men quán tính li tâm đối với một trục
- I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} mô men quán tính tích
- i_z, i_y bán kính quán tính
- K ma trận độ cứng
- k_{ij} hệ số của ma trận độ cứng
- M_{x_0} mô men xoắn
- M_z, M_y mô men uốn trong mặt phẳng yx và mặt phẳng xz tương ứng
- N lực dọc trục
- p véc tơ ứng suất tại một điểm
- P_{th} lực tới hạn ổn định
- q lực ngang phân bố

Q	lực cắt
R	phản lực
W_u, W_z, W_y	mo men quán tính chống uốn
W_{x_0}	mo men quán tính chống xoắn
W	công lực ngoài
U	thế năng biến dạng
δ	biến phân
ε	biến dạng
γ	biến dạng trượt
φ	hệ số uốn dọc (hệ số giảm ứng suất)
λ	hệ số mảnh
ν	hệ số Poisson
ρ	mật độ khối lượng
σ	ứng suất pháp
σ_{ch}	ứng suất chảy
σ_{tl}	ứng suất tỉ lệ
σ_b	ứng suất bền
[σ]	ứng suất pháp cho phép
τ	ứng suất tiếp
[τ]	ứng suất tiếp cho phép
{ }	ngoặc kép chỉ vec tơ (ma trận có một cột)
[]	ngoặc vuông chỉ ma trận chữ nhật hay ma trận vuông

Đơn vị đo theo SI

Độ dài	mét	m	
	mili mét	mm	
Diện tích	mét vuông	m ²	
	mili mét vuông = 10 ⁻⁶ m ²	mm ²	
Thể tích	mét khối	m ³	
	mili mét khối = 10 ⁻⁹ m ³	mm ³	
Tần số	hertz = 1 vòng/giây	Hz	
Khối lượng	kilogram	kg	
Khối lượng riêng	kilogram trên mét khối	kg/m ³	
Lực	newton	N	
	= lực tác động tới vật có khối lượng 1 kg gây ra gia tốc 1 m/s ² , vậy 1N=1kg m/s ²		
Ứng suất	newton trên mét vuông	N/m ²	
	newton trên mili mét vuông	N/mm ²	
Nhiệt độ	độ Celsius	°C	
Thuật ngữ cho các thừa số			
	10 ⁹	giga	G
	10 ⁶	mega	M
	10 ³	kilo	k
	10 ⁻³	mili	m
	10 ⁻⁶	micro	μ
	10 ⁻⁹	nano	n

NHẬP MÔN

Giới thiệu

Trong ngành xây dựng, giao thông hay chế tạo máy sử dụng các vật liệu như thép, gang, bê tông ... là các vật rắn biến dạng. Có nghĩa dưới tác động của ngoại lực các hạt vật chất bên trong vật rắn chuyển động làm cho nó biến dạng.

Khi tính toán thiết kế các cấu kiện công trình hay các chi tiết máy ta phải đảm bảo sao cho kết cấu có khả năng thực hiện các chức năng, nhiệm vụ của mình và không bị phá hủy trong suốt thời gian tồn tại. Đây chính là lí do vì sao môn học sức bền vật liệu và cơ học kết cấu là môn cơ sở trong các chương trình đào tạo kĩ sư các ngành kĩ thuật.

Quyển sách này trình bày các nội dung cơ bản nhất của môn học sức bền vật liệu và kết cấu, thực chất gồm hai phần cơ bản

- Phần *Sức bền vật liệu* nghiên cứu các phương pháp, các nguyên tắc chung để đánh giá khả năng chịu tải (tác động cơ học) của các cấu kiện công trình, các chi tiết máy. Sức bền vật liệu là môn khoa học thực nghiệm xây dựng trên một số kết quả thực nghiệm, các giả thiết cho phép đơn giản hóa nhưng giữ những mô tả bản chất. Trên cơ sở thực nghiệm, đưa ra những chỉ tiêu để đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết nói riêng và cả kết cấu nói chung.
- Phần *Cơ học kết cấu* trình bày các phương pháp cơ bản phân tích kết cấu dạng khung dàn một cách tổng thể.

Mục đích của môn học

Tính toán và thiết kế các cấu kiện công trình, chi tiết máy sao cho đủ độ bền, đủ độ cứng và đủ độ ổn định. Thế nào là đủ độ bền, đủ độ cứng và ổn định?

- **Đủ độ bền:** kết cấu có khả năng chịu được tất cả các tổ hợp lực đặt lên công trình trong thời gian tồn tại (tuổi thọ) – Giàn khoan ngoài khơi không sụp đổ khi có gió bão ở cấp quy định theo tiêu chuẩn, quy phạm thiết kế.
- **Đủ độ cứng:** dưới tác động của lực những thay đổi kích thước hình học của kết cấu không được vượt quá giới hạn cho phép. Ví dụ trong các quy phạm, tiêu chuẩn thiết kế có quy định về độ võng ở giữa dầm không vượt quá giá trị quy định, hay chuyển vị ngang của các công trình như tháp nước, cột điện không được vượt quá giá trị cho trước.
- **Đủ ổn định:** khả năng đảm bảo trạng thái cân bằng ban đầu, không mất đi hình dáng ban đầu.

Từ đây ta có ba bài toán cơ bản

- Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết và các cấu kiện.
- Bài toán thiết kế có nhiệm vụ lựa chọn hình dạng và kích thước tiết diện phù hợp cho từng chi tiết và cấu kiện của kết cấu
- Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu

Đối tượng của môn học:

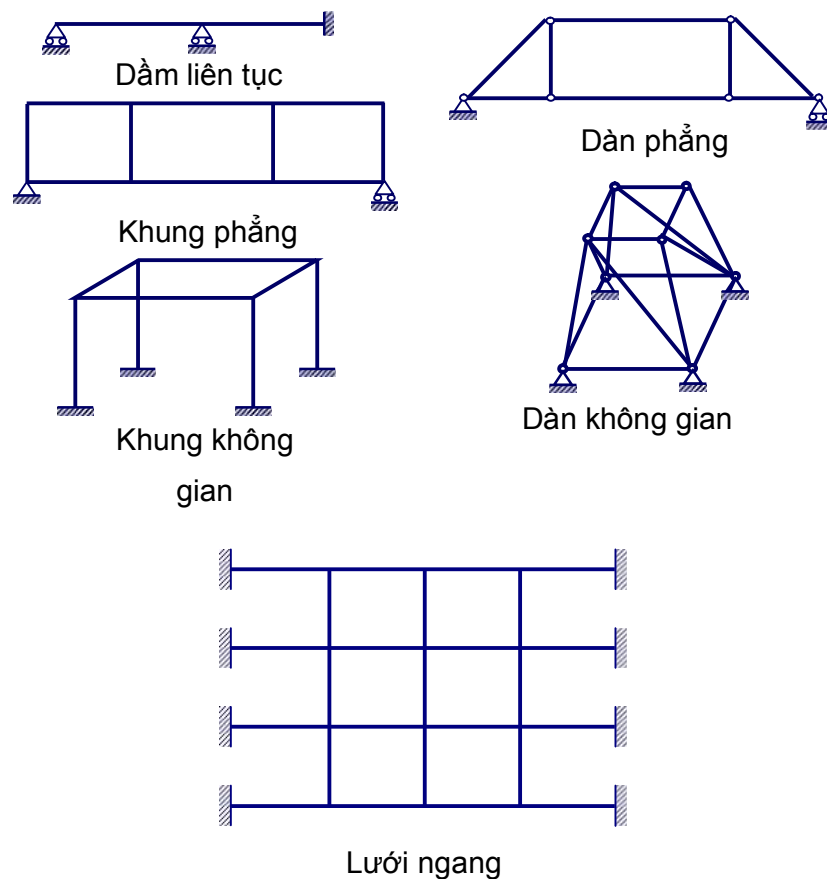
Đối tượng nghiên cứu của sức bền vật liệu là các chi tiết công trình. Theo kích thước hình học các chi tiết này có thể phân làm ba loại

- Thanh là các chi tiết có kích thước theo hai phương (mặt cắt ngang) bé hơn rất nhiều so với kích thước còn lại (chiều dài) - Bài toán một chiều
- Tấm và vỏ là các chi tiết có kích thước theo một phương (độ dày) bé hơn rất nhiều so với hai kích thước còn lại như tấm sàn, tấm tường vỏ bình chứa xăng, bể chứa dầu, mái vòm - Bài toán hai chiều
- Khối là các chi tiết có các kích thước theo ba phương tương đương nhau, ví dụ như móng máy, nền đất, viên bi – Bài toán ba chiều

Thanh thường gặp phổ biến hơn cả trong công trình, chính vì vậy thanh là đối tượng nghiên cứu chính của Sức bền vật liệu.

Định nghĩa về thanh. Thanh là vật thể hình học được tạo bởi một hình phẳng \mathcal{A} có trọng tâm chuyển động dọc theo đường tựa ζ , trong quá trình chuyển động hình phẳng luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường tựa. Hình phẳng \mathcal{A} được gọi là mặt cắt ngang hay tiết diện của thanh, đường tựa ζ được gọi là trục thanh

Đối tượng nghiên cứu trong Cơ học kết cấu là hệ thanh. Hệ thanh là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang. Đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, lưới ngang và khung không gian như trên hình 1.



Hình 1. Các dạng kết cấu

Dàn là hệ thanh liên kết khớp với nhau. Nội lực trong các thanh chỉ có lực dọc trục. Nếu hệ thanh chỉ gồm các thanh nằm trong một mặt phẳng ta gọi là dàn phẳng.

Khung là hệ thanh liên kết cứng với nhau. Nội lực trong từng mặt cắt của thanh gồm có lực dọc trục, hai lực cắt, hai mô men uốn và mô men xoắn. Nếu hệ khung chỉ gồm các thanh nằm trong một mặt phẳng ta gọi là khung phẳng. Khi đó nội lực trong từng mặt cắt chỉ còn lực dọc trục, lực cắt và mô men uốn.

Lưới ngang là một hệ thanh nằm trong một mặt phẳng, nhưng chỉ chịu lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng đó. Do vậy nội lực trong từng thanh chỉ còn lực cắt, mô men uốn và mô men xoắn.

Các giả thiết quan trọng

- Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng có nghĩa chúng tỉ lệ với lực tác dụng
- Biến dạng nhỏ có nghĩa các biến dạng không làm thay đổi hình học của kết cấu do vậy không thay đổi lực tác dụng lên kết cấu
- Từ hai giả thiết trên ta có nguyên lí cộng tác dụng: Dưới tác động của tổ hợp lực ta có thể cộng dồn ứng suất, biến dạng và chuyển vị gây ra bởi từng lực riêng biệt
- Vật liệu được giả thiết là liên tục đồng nhất và đẳng hướng.
 - + Tính liên tục đảm bảo hai điểm vật chất cạnh nhau sau biến dạng vẫn ở cạnh nhau.
 - + Tính đồng nhất nói lên cơ tính của mọi điểm như nhau.
 - + Đẳng hướng có nghĩa các tính chất của vật liệu không phụ thuộc vào hướng.
- Vật liệu có tính đàn hồi, tuân thủ định luật Hooke. Có nghĩa ta chỉ xét các bài toán khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi

Khái niệm siêu tĩnh

Hệ là siêu tĩnh khi các lực cần tìm của hệ không thể tính được chỉ từ phương trình cân bằng mà còn cần đến các điều kiện hình học.

Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp mà ta lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay ta có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chinh dần để làm giảm số phép tính.

Đối với hệ lớn và phức tạp ta sử dụng máy tính sử dụng các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Tuy vậy các phương pháp tính bằng tay không thể bỏ qua.

Các nguyên lí cơ bản

Nguyên lí Saint-Venant được phát biểu như sau "...tại những miền đủ xa điểm đặt lực sự khác biệt giữa hiệu ứng của hai lực khác nhau nhưng tương đương về mặt tĩnh học sẽ rất nhỏ..."

Nguyên lí Saint Venant cho phép thay các phân bố ứng suất phức tạp trên biên bằng phân bố đơn giản hơn, khi về mặt hình học biên đủ ngắn. Nói khác đi sự phân bố ứng suất và biến dạng của vật thể tại những miền xa nơi đặt lực sẽ không thay đổi nếu thay hệ lực đã cho bằng một hệ lực khác tương đương.

Có thể hiểu rằng nếu trên một phần nào đó của vật có tác động của một hệ lực cân bằng thì ứng suất phát sinh sẽ tắt dần rất nhanh ở những điểm xa miền đặt lực. Tại những điểm của vật thể xa điểm đặt lực thì ứng suất phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực

Nguyên lí cộng tác dụng được phát biểu Một đại lượng do nhiều nguyên nhân gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng rẽ

Do vậy các đại lượng như nội lực, biến dạng, chuyển vị của vật thể do một hệ ngoại lực gây ra bằng tổng các kết quả tương ứng do từng thành phần ngoại lực gây ra riêng rẽ

Hệ tiên đề cơ bản của tĩnh học

- *Tiên đề về sự cân bằng của vật rắn.* Điều kiện cần và đủ để một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực này có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau - tiêu chuẩn cân bằng của vật tự do dưới tác dụng của hệ lực đơn giản nhất

- *Tiên đề thêm hoặc bớt một cặp lực cân bằng.* Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu ta thêm (bớt) đi hai lực cân bằng. Tiên đề này cho ta quy định về một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực
 Hệ quả (Định lí trượt lực). Tác dụng của lực không thay đổi khi ta trượt lực trên đường tác dụng của nó
- *Tiên đề hình bình hành lực.* Hai lực tác dụng tại một điểm tương đương với một lực tác dụng tại cùng điểm đó và có véc tơ lực bằng véc tơ chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai véc tơ lực của các lực đã cho
- *Tiên đề tác dụng và phản tác dụng.* Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng cường độ, cùng đường tác dụng và hướng ngược chiều nhau.
- *Tiên đề hoá rắn.* Một vật rắn biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hoá rắn nó vẫn ở trạng thái cân bằng
- *Tiên đề thay thế liên kết.* Vật không tự do cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng bằng cách giải phóng tất cả các liên kết và thay thế tác dụng các liên kết được giải phóng bằng các phản lực thích hợp.

Nội dung

Nội dung quyển sách sẽ gồm ba phần là: nhập môn, các bài toán thanh và cơ học kết cấu. Cuối cùng sẽ là các phụ lục, cụ thể sẽ gồm các chương như sau

- Nhập môn
 - + Chương 1. Các khái niệm cơ bản
 - + Chương 2. Quan hệ ứng suất và biến dạng
 - + Chương 3. Các lí thuyết bền
- Phần 1. Các bài toán thanh
 - + Chương 4 Các đặc trưng hình học của hình phẳng
 - + Chương 5 Thanh thẳng chịu kéo nén đúng tâm
 - + Chương 6 Thanh thẳng chịu xoắn
 - + Chương 7 Thanh thẳng chịu uốn

- + Chương 8 Thanh chịu lực phức tạp
- + Chương 9 Ổn định của thanh thẳng
- Phần 2. Cơ học kết cấu
 - + Chương 10. Hệ siêu tĩnh
 - + Chương 11. Phương pháp lực
 - + Chương 12. Phương pháp chuyển vị
 - + Chương 13. Phương pháp công ảo
 - + Chương 14. Phương pháp phần tử hữu hạn – sơ lược
- Các phụ lục

Ở phần 1 sau các chương không có bài tập, vì sách bài tập sức bền vật liệu rất phong phú nên để dành sự lựa chọn cho giảng viên. Tuy nhiên nội dung phần hai chủ yếu giới thiệu các phương pháp cơ bản nhất của cơ học kết cấu, do vậy sau các chương trình bày các bài tập có chọn lựa để tiện cho giảng viên.

CHƯƠNG 1

Các khái niệm cơ bản

1.1 Lực tác dụng

Ngoại lực

Định nghĩa. Ngoại lực là những lực tác động của môi trường bên ngoài (sóng, gió) hay của những vật thể khác tác động lên vật thể đang xét (lực bánh xe tác động lên đường ray, búa đập).

Ngoại lực gồm

- tải trọng tác động là lực chủ động
- và phản lực liên kết là lực thụ động phát sinh tại các liên kết do có tác dụng của tải trọng

Tải trọng có thể phân loại theo cách thức tác dụng làm hai loại

- lực tập trung là lực hay mô men tác động vào một điểm
- và lực phân bố là lực trải trên một thể tích, một diện tích hay một đường.

Tải trọng cũng có thể phân loại thành

- tải trọng tĩnh (được coi là tĩnh khi nó tăng rất chậm từ không đến giá trị nào đó rồi giữ nguyên giá trị đó), khi đó có thể bỏ qua lực quán tính trong quá trình tăng lực
- và tải trọng động thay đổi theo thời gian khi đó không thể bỏ qua thành phần quán tính.

Liên kết và phản lực liên kết

Vật thể chịu tác động của tải trọng sẽ truyền tác động sang các chi tiết tiếp xúc với chúng. Ngược lại các chi tiết sẽ tác động lên vật thể đang xét những phản

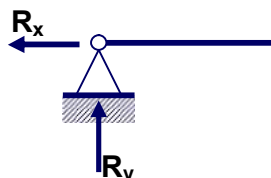
lực. Vật thể chịu liên kết làm cho chuyển động bị ngăn cản. Khi đó sẽ xuất hiện các phản lực, chúng có phương ứng với phương của chuyển động bị ngăn cản

Trường hợp trong mặt phẳng

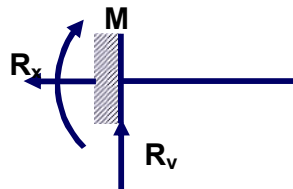
- Gối tựa di động (liên kết đơn) - chỉ ngăn cản chuyển động thẳng dọc theo liên kết. Phản lực là một lực R . Trên hình 1.1a là hai cách biểu diễn liên kết gối di động
- Gối tựa cố định (liên kết khớp) – ngăn cản mọi chuyển động thẳng. Phản lực phân ra hai thành phần R_x và R_y theo phương ngang và phương đứng tương ứng
- Liên kết ngàm: ngăn cản mọi chuyển động (cả quay và thẳng). Phản lực gồm một lực R chia làm hai thành phần R_x và R_y và một mô men chống quay



a. Gối tựa di động hay liên kết đơn



b. Gối tựa cố định hay liên kết khớp



c. Liên kết ngàm

Hình 1.1. Biểu diễn các liên kết thường gặp trong trường hợp phẳng

Trong phụ lục 8 cho bảng các phản lực liên kết thường gặp.

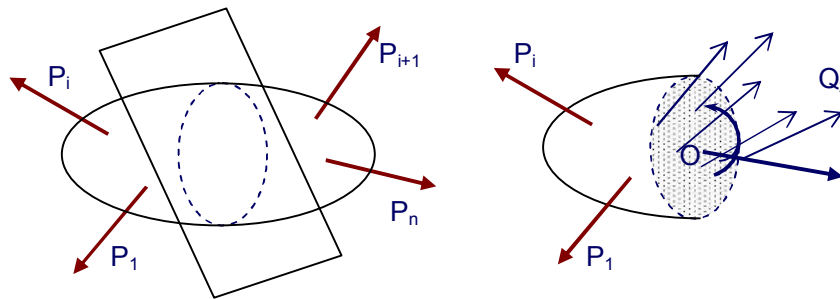
1.2 Nội lực

Giữa các phần tử vật chất luôn có những tương tác. Tại thời điểm ban đầu lực tương tác đảm bảo sự không thay đổi hình dạng của vật thể. Dưới tác động của ngoại lực vật biến dạng kéo theo sự thay đổi lực tương tác bên trong vật thể.

Công nhận giả thiết vật thể ở trạng thái tự nhiên có nghĩa là ở trạng thái cân bằng ban đầu khi chưa có tác động bên ngoài, nội lực trong hệ bằng không. Ta có định nghĩa nội lực là các lực tương tác giữa các phần tử vật chất của vật thể xuất hiện khi vật rắn bị biến dạng dưới tác động của ngoại lực.

Phương pháp mặt cắt

Để xem xét, biểu diễn và xác định nội lực ta dùng phương pháp mặt cắt. Xét vật thể cân bằng dưới tác động của một hệ lực, tưởng tượng mặt S chia vật thể làm hai phần A và B (hình 1.2a). Xét sự cân bằng của một phần ví dụ phần A . Ngoài ngoại lực đặt vào A ta phải đặt hệ lực tương tác của phần B đặt trên mặt cắt S , hệ lực tương tác này chính là nội lực trên mặt cắt đang xét.



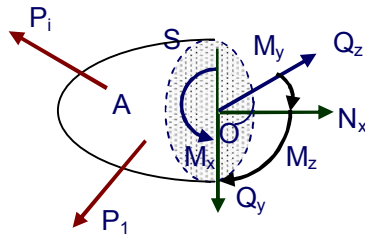
Hình 1.2. Phương pháp mặt cắt

Nội lực tại mặt cắt ngang

Hệ lực tương tác này có thể thu gọn về trọng tâm O của mặt cắt ngang S được vec tơ chính R và mô men ngẫu lực chính M . Vec tơ lực R và mô men ngẫu lực M nói chung có phương chiều bất kì trong không gian. Chọn hệ trục tọa độ vuông góc với trục x vuông góc với mặt cắt ngang S , trục y và z nằm trên mặt phẳng chứa S . Chiếu vec tơ lực R và mô men ngẫu lực M lên hệ trục tọa độ đã chọn ta được các thành phần nội lực tại mặt cắt ngang (hình 1.3)

- N_x là thành phần trên trục x , được gọi là lực dọc trục

- Q_y, Q_z là các thành phần trên trục y và z được gọi là lực cắt
- M_x là thành phần mô men quay quanh trục x, gọi là mô men xoắn
- M_y, M_z là hai thành phần mô men quay quanh trục y và trục z (tác dụng trong mặt phẳng Oxz và Oxy), gọi là các mô men uốn



Hình 1.3. Nội lực tại mặt cắt ngang

N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y và M_z là sáu thành phần nội lực tại mặt cắt ngang, được xác định từ điều kiện cân bằng của phần đang xét dưới dạng sáu phương trình cân bằng sau đây

$$N_x + \sum_i P_{ix} = 0; Q_y + \sum_i P_{iy} = 0; Q_z + \sum_i P_{iz} = 0$$

$$M_x + \sum_i m_x(\vec{P}_i) = 0; M_y + \sum_i m_y(\vec{P}_i) = 0; M_z + \sum_i m_z(\vec{P}_i) = 0$$

Nếu ta xét phần B cũng sẽ thu được sáu thành phần nội lực có cùng trị số nhưng ngược chiều với nội lực tương ứng của phần A

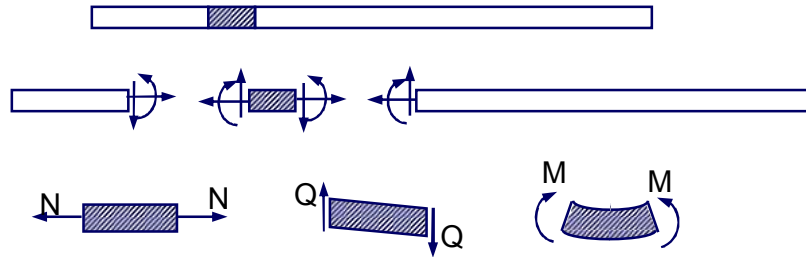
Nội lực tại mặt cắt ngang của thanh trong bài toán phẳng

Thanh được đặc trưng bằng tiết diện (mặt cắt ngang) và trục. Ta xét thanh cân bằng trong mặt phẳng chứa trục và ngoại lực nằm trong mặt phẳng xz

Áp dụng phương pháp mặt cắt, khi đó nội lực tại tiết diện thanh sẽ có 3 thành phần với quy ước dấu biểu diễn trên hình 1.4.

- Lực dọc trục N vuông góc với tiết diện, là dương khi đoạn ta xét chịu kéo
- Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn ta xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt

- Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng xz . là dương khi đoạn ta xét bị cong võng xuống (húng nước) dưới tác động của mô men



Hình 1.4. Quy ước dấu của nội lực trong thanh

Biểu đồ nội lực

Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của nội lực trên các tiết diện dọc theo trục thanh. Từ đó ta tìm được tiết diện nào có nội lực lớn để bố trí vật liệu thích hợp. Để vẽ biểu đồ ta cho mặt cắt biến thiên dọc trục x , viết biểu thức giải tích của các nội lực, vẽ đồ thị các hàm số này theo biến x

Ví dụ 1.1. Biểu đồ lực dọc N , lực cắt Q và mô men uốn M cho ví dụ trên hình 1.5a vẽ trên hình 1.5 b,c,d.

Bước đầu tiên ta xác định phản lực từ điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng bằng các phương trình

$$\begin{aligned} P - R_2 &= 0 \Rightarrow R_2 = P; \\ 3bR_3 - 2bP_1 - 4bP_3 &= 0 \Rightarrow R_3 = 10P/3 \\ R_1 + R_3 &= P_1 + P_2 = 4P \Rightarrow R_1 = 2P/3 \end{aligned}$$

ta được các phản lực $R_1 = 2P/3$, $R_2 = P$, $R_3 = 10P/3$.

Thay liên kết bằng phản lực. Xét mặt cắt 1-1 trong đoạn từ bên trái đến điểm đặt lực P_1 và P_2 . Đặt các nội lực N , Q , M vào mặt cắt cách đầu trái một đoạn x và xét cân bằng của đoạn này

$$\begin{aligned} N - R_2 &= 0 \\ Q + R_1 &= 0 \\ M - R_1x &= 0 \end{aligned}$$

ta nhận được $N = P$, $Q = 2P/3$, $M = 2Px/3$

Tương tự ta xét mặt cắt 2-2 trong đoạn từ bên phải đến điểm có gờ di động. Đặt các nội lực N, Q, M vào mặt cắt cách đầu phải một đoạn x và xét cân bằng của đoạn này

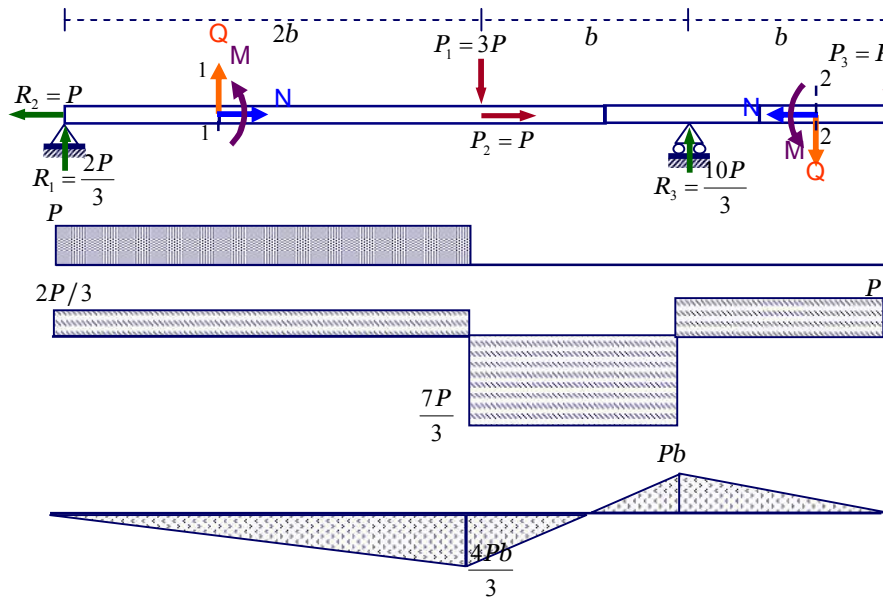
$$N = 0$$

$$Q - P = 0$$

$$M - Px = 0$$

ta nhận được $N = 0, Q = P, M = Px$

Đoạn ở giữa áp dụng trình tự tương tự ta được biểu đồ lực dọc trục, lực cắt và mô men trên các hình (1.5b., c. d.)



Hình 1.5. Biểu đồ nội lực của dầm: a. Dầm chịu lực; b. Biểu đồ lực dọc N ; c. Biểu đồ lực cắt Q ; d. Biểu đồ mô men M

Ví dụ 1.2. Vẽ biểu đồ nội lực của hệ khung trên hình 1.6a.

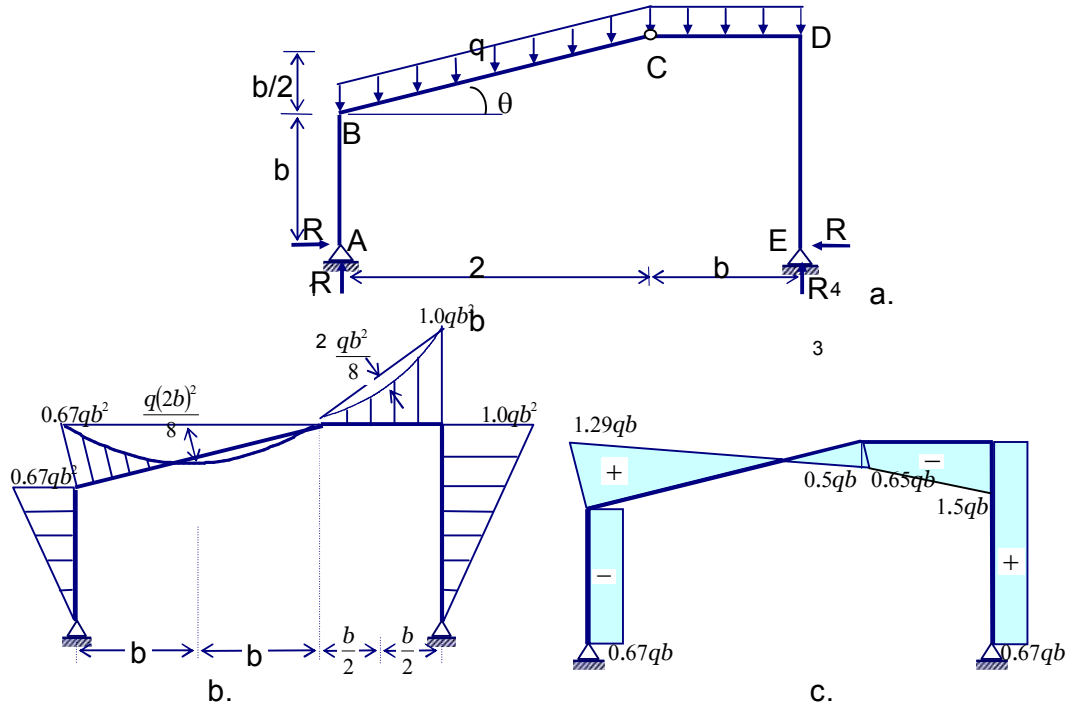
Bước đầu tiên ta tìm phản lực tại gối đỡ từ 3 phương trình cân bằng và một phương trình mô men bằng không tại khớp nối, ta được

$$R_1 = R_4 = \frac{2qb}{3}, R_2 = R_3 = \frac{3qb}{2} \tag{1.9}$$

Lực cắt trên đoạn AB bằng phản lực R_1 . Tại mặt cắt bên phải điểm B và bên trái điểm C tính theo công thức dưới đây

$$\begin{aligned}
 Q_{Br} &= R_1 \cos \theta - R_2 \sin \theta \\
 Q_{Cl} &= (R_1 - 2qb) \cos \theta - R_2 \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

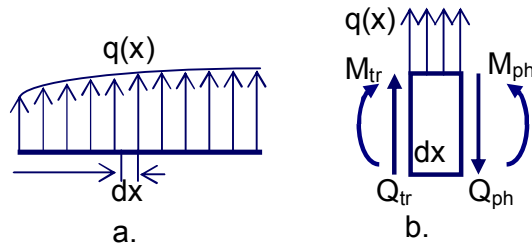
Biểu đồ mô men trên đoạn AB và đoạn DE là đường bậc một, còn trên hai đoạn BC và CD chịu lực phân bố biểu đồ mô men là đường bậc hai.



Hình 1.6. Biểu đồ nội lực cho hệ khung: a. Hệ khung phẳng; b. Biểu đồ mô men M ; c. Biểu đồ lực cắt Q

1.3 Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng

Xét trường hợp thanh chịu uốn dưới tác dụng của tải phân bố $q(x)$ như trên hình 1.7a



Hình 1.7. Phân tử của thanh chịu tải phân bố

Xét một đoạn phân tử dx , kí hiệu Q, M là lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên trái, và $Q+dQ$ và $M+dM$ là lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên phải (hình 1.7b) viết phương trình cân bằng cho một đoạn phân tử đó

$$\sum Y = 0 \rightarrow Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &\rightarrow M + Qdx + q \frac{dx^2}{2} - (M + dM) = 0 \\ \rightarrow \frac{dM}{dx} &= Q, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q \end{aligned} \quad (1.12)$$

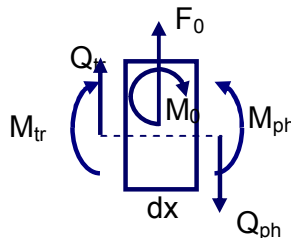
Ta có nhận xét

- Đạo hàm bậc nhất theo trục x của mô men uốn bằng lực cắt.
- Đạo hàm bậc hai theo trục x của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất theo trục x của lực cắt và bằng cường độ lực phân bố

Quan hệ bước nhảy của biểu đồ nội lực và các tải trọng tập trung.

Cho thanh chịu lực ngang tập trung F_0 , mô men tập trung M_0 . Xét phân tử dx chứa điệm có đặt tải tập trung (hình 1.8), viết phương trình cân bằng cho đoạn phân tử đó

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\rightarrow \Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F_0 \\ \sum M = 0 &\rightarrow \Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$



Hình 1.8. Phân tử thanh có đặt tải tập trung

Ta có các nhận xét sau

- Tại tiết diện đặt lực tập trung sẽ có bước nhảy.

- Trị số của bước nhảy bằng trị số của các lực tập trung.
- Bước nhảy của lực cắt dương khi lực hướng lên.
- Bước nhảy của mô men dương khi mô men quay theo chiều kim đồng hồ

Bằng cách làm tương tự ta có các quan hệ giữa nội lực và tải trọng phân bố trong trường hợp thanh chịu kéo dưới tác dụng của tải trọng phân bố dọc thanh $p(x)$ và trường hợp thanh chịu xoắn dưới tác dụng của mô men xoắn phân bố $m_{xo}(x)$

- Đạo hàm của lực dọc bằng cường độ tải trọng phân bố dọc

$$\frac{dN}{dx} = -p(x)$$

- Đạo hàm của mô men xoắn bằng cường độ mô men xoắn phân bố

$$\frac{dM_{xo}}{dx} = m_{xo}(x)$$

Quan hệ bước nhảy của biểu đồ với tải trọng dọc trục tập trung P_0 và mô men xoắn tập trung M_{xo0}

$$\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = P_0$$

$$\Delta M_{xo} = M_{xo,ph} - M_{xo,tr} = M_{xo0}$$

Kết luận của chương 1

Chương 1 trình bày các khái niệm chung như

- Lực tác dụng đưa ra khái niệm ngoại lực, phân biệt lực tác động và phản lực liên kết, phân loại lực tập trung và lực phân bố, định nghĩa tải trọng tĩnh và tải trọng động
- Nội lực đưa ra định nghĩa nội lực, khái niệm nội lực tại mặt cắt ngang, trình bày phương pháp mặt cắt xác định nội lực, quy ước dấu của nội lực tại mặt cắt của thanh và cách biểu diễn nội lực bằng biểu đồ.

- Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng. Trình bày các quan hệ vi phân giữa tải trọng phân bố và nội lực cũng như bước nhảy trong biểu đồ nội lực khi có lực tập trung tác động

CHƯƠNG 2

Quan hệ ứng suất và biến dạng

2.1 Trạng thái ứng suất

2.1.1 Vec tơ ứng suất

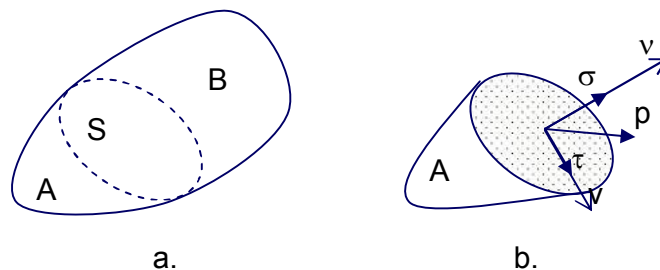
Dùng phương pháp tiết diện để nghiên cứu trạng thái ứng suất của vật thể biến dạng (Hình 2.1a). Xét phân tử diện tích ΔS chứa điểm M có pháp tuyến \vec{v} ở bên trong vật thể. Giả thiết nội lực tác dụng lên diện tích ΔS đưa về lực tương đương Δp tại M và ngẫu lực ΔM . Khi ΔS tiến tới 0 (vẫn chứa M) thì Δp tiến tới dp/dS còn $\Delta M/\Delta S$ tiến tới không. Đại lượng

$$\vec{p}_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta S} = \frac{d\vec{p}}{dS} \quad (2.1)$$

là vectơ ứng suất đối với phần tử tiết diện qua điểm M có pháp tuyến \vec{v} . Vectơ ứng suất biểu thị nội lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tiết diện đi qua một điểm nào đấy của vật thể biến dạng.

Vec tơ ứng suất có thể chiếu lên phương pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt cắt (hình 2.1.b) khi đó ta có biểu diễn

$$\vec{p}_v = \vec{\sigma}_u + \vec{\sigma}_v = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \quad (2.2)$$



Hình 2.1. Vec tơ ứng suất

Thứ nguyên của ứng suất là lực/chiều dài², đơn vị thường dùng N/m^2 (Pa – Pascal), MN/m^2 (MPa – Mega Pascal).

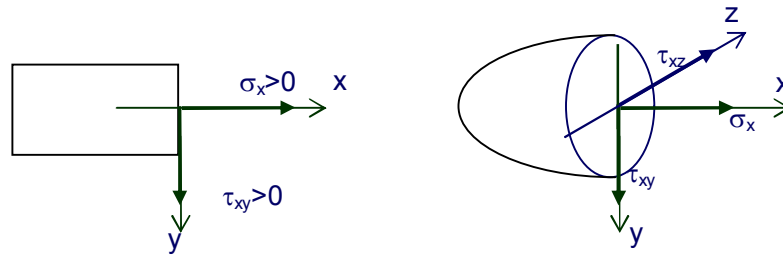
- Thành phần theo phương pháp tuyến, kí hiệu là σ , được gọi là ứng suất pháp
- Thành phần theo phương tiếp tuyến, kí hiệu là τ , được gọi là ứng suất tiếp

Khi đó, ứng suất p

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Quy ước dấu của ứng suất như sau (hình 2.2)

- Ứng suất pháp được gọi là dương khi chiều của nó cùng chiều dương của pháp tuyến ngoài mặt cắt. Ứng suất pháp được kí hiệu cùng với một (hoặc 2) chỉ số ví dụ σ_x (hoặc σ_{xx}) chỉ chiều của pháp tuyến
- Ứng suất tiếp được gọi là dương khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt quay 90° theo chiều kim đồng hồ sẽ trùng với chiều ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp được kí hiệu cùng với hai chỉ số ví dụ τ_{xy} , τ_{xz} chỉ số thứ nhất chỉ chiều của pháp tuyến, chỉ số thứ hai chỉ chiều song song với ứng suất tiếp



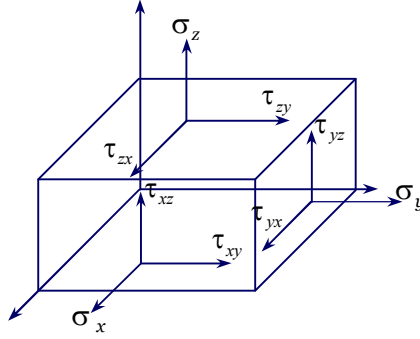
Hình 2.2. Quy ước dấu và chỉ số của các thành phần ứng suất

2.1.2 Tenxơ ứng suất

Để xét trạng thái ứng suất tại một điểm, ta xét một phần tử đủ nhỏ tại điểm đó ta chiếu p_v lên hệ tọa độ để các vuông góc. Khi đó hình chiếu của lên p_v các trục tọa độ X_v, Y_v, Z_v có thể biểu diễn qua vec tơ pháp tuyến $v(l, m, n)$ bằng sáu thành phần $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ và τ_{xz} (hình 2.3)

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_{xx}l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n \\ Y_v &= \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{yz}n \\ Z_v &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sáu thành phần này khái quát hóa tình trạng chịu lực của một điểm, là tập hợp tất cả những ứng suất trên mọi mặt cắt đi qua nó đó chính là trạng thái ứng suất tại một điểm, (hình 2.3)



Hình 2.3. Thành phần ứng suất tại phân tố

Sáu thành phần ứng suất (ba ứng suất pháp và ba ứng suất tiếp) này xác định trong hệ tọa độ lựa chọn. Theo định nghĩa chúng chính là các thành phần của một ten xơ bậc hai đối xứng gọi là ten xơ ứng suất. Ta có thể nói trạng thái ứng suất được biểu diễn bằng ten xơ ứng suất bậc hai đối xứng, được kí hiệu theo các cách sau đây

$$\sigma_{ij} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Theo định nghĩa về ten xơ, ta có thể lựa chọn hệ tọa độ sao cho các thành phần ứng suất tiếp bằng không. Hệ tọa độ này xác định hướng chính của ứng suất, hướng chính tìm từ hệ phương trình

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(\alpha)})v_i = 0. \quad (2.5)$$

Viết dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0, \text{ trong đó } \{v\} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}. \quad (2.5a)$$

Nói cách khác tại điểm bất kì ta có thể tìm được ba mặt vuông góc là các mặt chính, có pháp tuyến là các hướng chính.

Ứng suất pháp trên các mặt chính là ứng suất chính, kí hiệu là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ và được quy ước $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ theo các giá trị đại số. Ứng suất chính được xác định từ phương trình

$$\text{Det}|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(a)}| = 0 \Rightarrow \sigma_{(a)}^3 - J_1\sigma_{(a)}^2 + J_2\sigma_{(a)} - J_3 = 0 \quad (2.6)$$

trong đó J_1, J_2, J_3 là các bất biến của ten xơ ứng suất bậc hai có dạng

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{tb},$$

$$J_2 = \left\{ \begin{vmatrix} \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \sigma_{zx} \\ \sigma_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1),$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \text{Det}|\sigma_{ij}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (2.7)$$

Ở mặt phẳng tạo với các hướng chính một góc 45° ta có trạng thái ứng suất mà các ứng suất tiếp đạt cực trị. Chúng có giá trị tính qua các ứng suất chính như sau

$$\tau_1 = \pm \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|, \quad \tau_2 = \pm \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right|, \quad \tau_3 = \pm \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|. \quad (2.8)$$

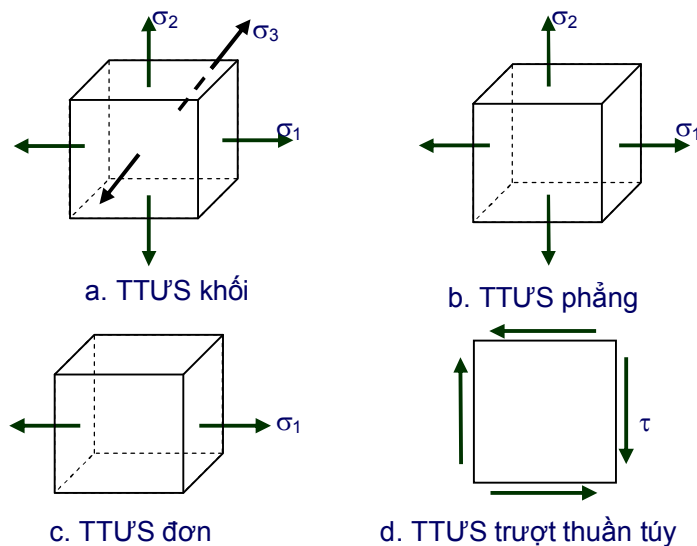
2.1.3 Phân loại trạng thái ứng suất

Phân loại trạng thái ứng suất dựa trên các trường hợp khác nhau của ứng suất chính

- Trạng thái ứng suất khối khi cả ba ứng suất chính khác không, trên cả ba mặt chính đều có ứng suất pháp $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ (hình 2.4a).
- Trạng thái ứng suất phẳng khi hai trong ba ứng suất chính khác không, trên một mặt chính có ứng suất pháp bằng không, hai mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ (hình 2.4b).

- Trạng thái ứng suất đơn khi một trong ba ứng suất chính khác không, trên hai mặt chính có ứng suất pháp bằng không, mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ (hình 2.4c).
- Trạng thái ứng suất trượt thuần túy là trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt khi tìm được hai mặt vuông góc trên hai mặt đó chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp (hình 2.4d)

Khi xem xét các bài toán thanh ta sẽ gặp chủ yếu là trạng thái ứng suất phẳng, nên ta xem xét kĩ hơn trạng thái ứng suất này



Hình 2.4. Các trạng thái ứng suất (TTUS)

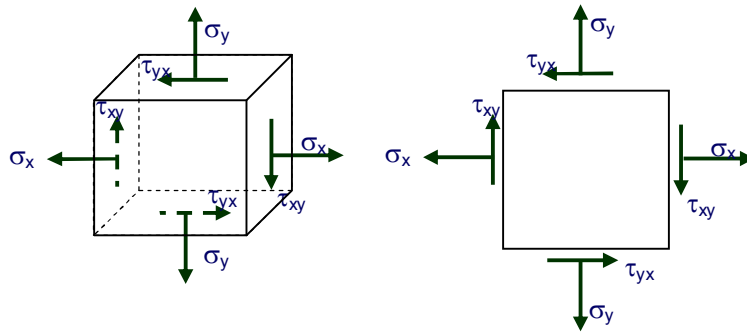
2.1.4 Trạng thái ứng suất phẳng

Trạng thái ứng suất phẳng như đã định nghĩa là trạng thái đảm bảo điều kiện ứng suất pháp tại mặt vuông góc với trục z bằng không,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \quad (2.9)$$

Ứng suất trên các mặt vuông góc với trục x và trục y gồm có $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ và τ_{yx} .

Ten xơ ứng suất là ten xơ đối xứng nên $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



Hình 2.5. Trạng thái ứng suất phẳng.

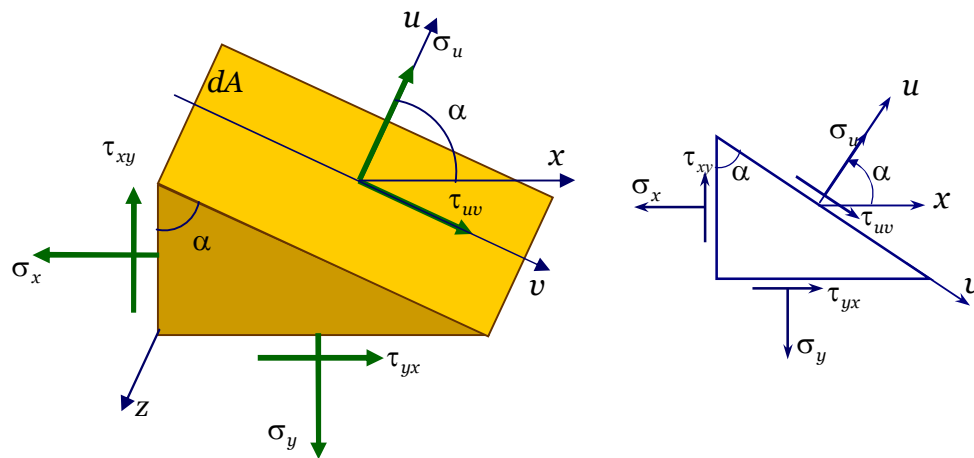
Xét cân bằng của phần phân tố bị cắt bằng mặt cắt nghiêng một góc α . Kí hiệu u, v là pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt nghiêng. Sử dụng quy ước dấu của ứng suất và hình chiếu của diện tích dA lên trục x và trục y

$$dA_x = dA \cos \alpha, \quad dA_y = dA \sin \alpha$$

ta viết điều kiện cân bằng của phần phân tố chiếu lên các trục u và v

$$\sum U = \sigma_u dA + (\tau_{xy} \sin \alpha - \sigma_x \cos \alpha) dA_x + (\tau_{yx} \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha) dA_y = 0$$

$$\sum V = \tau_{uv} dA - (\tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_x \sin \alpha) dA_x + (\tau_{yx} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha) dA_y = 0. \quad (2.10)$$



Hình 2.6. Ứng suất tại mặt nghiêng

Vì $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ từ điều kiện cân bằng trên ta tìm được

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{uv} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Theo định nghĩa về mặt chính nơi chỉ có ứng suất pháp còn ứng suất tiếp bằng không, ta tìm mặt cắt nghiêng mà tại đó $\tau_{uv} = 0$, từ (2.11) ta tìm được góc α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\quad (2.12)$$

Thay góc α vừa tìm được vào (2.11) ta có được ứng suất chính

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\quad (2.13)$$

Tìm mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị từ điều kiện

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_{\max}^{\min}}$$

Điều này có nghĩa góc $2\alpha_0$ vuông góc với góc $2\alpha_{\max}^{\min}$, vậy mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị tạo góc 45° với hướng chính và

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right|\quad (2.14)$$

Các thành phần ứng suất trên mặt nghiêng bất kì có thể biểu diễn qua ứng suất chính

$$\sigma_u = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad \text{và} \quad \tau_{uv} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

Từ các công thức (2.11) ta có

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Đây là phương trình đường tròn trong hệ tọa độ σ_u, τ_{uv} có tâm C ở tọa độ

$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ và bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$. Các điểm trên đường tròn này

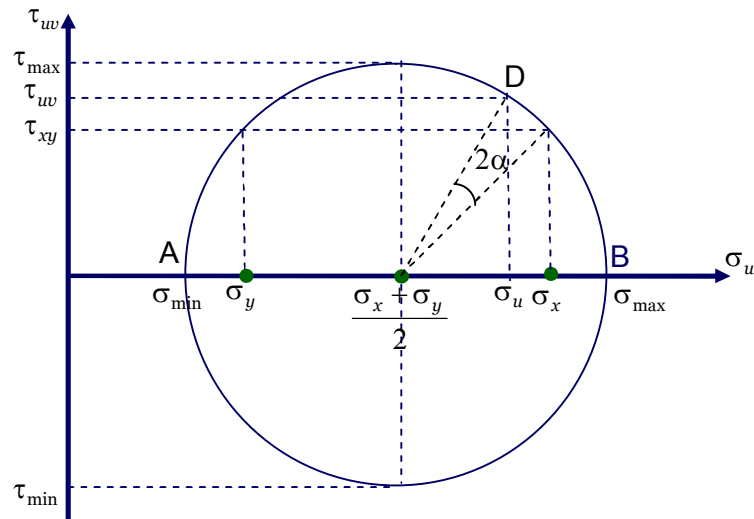
biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt nghiêng được gọi đường tròn Mohr.

Dựng đường tròn Mohr cho điểm có trạng thái ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ như sau

- Dựng hệ trục tọa độ (σ_u, τ_{uv}) , trên trục σ_u lấy hai điểm C_1 và C_2 có tọa độ là σ_y, σ_x tương ứng, khi đó điểm C trung điểm của đoạn C_1C_2 là tâm của đường tròn Mohr

- Từ tâm C vẽ đường tròn có bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$

- điểm A, B là hai điểm đường tròn cắt trục σ_u biểu diễn trạng thái ứng suất tại mặt chính với các giá trị ứng suất pháp cực trị $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ và $\tau_{uv} = 0$ (hình 2.7)



Hình 2.7. Đường tròn Mohr của trạng thái ứng suất phẳng

- điểm M, N là hai điểm đường tròn cắt đường thẳng đi qua tâm C song song với trục τ_u biểu diễn trạng thái ứng suất tại mặt có các giá trị ứng suất tiếp

cực trị $\tau_{\max/\min} = \pm \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right|$ và ứng suất pháp $\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ (hình 2.7)

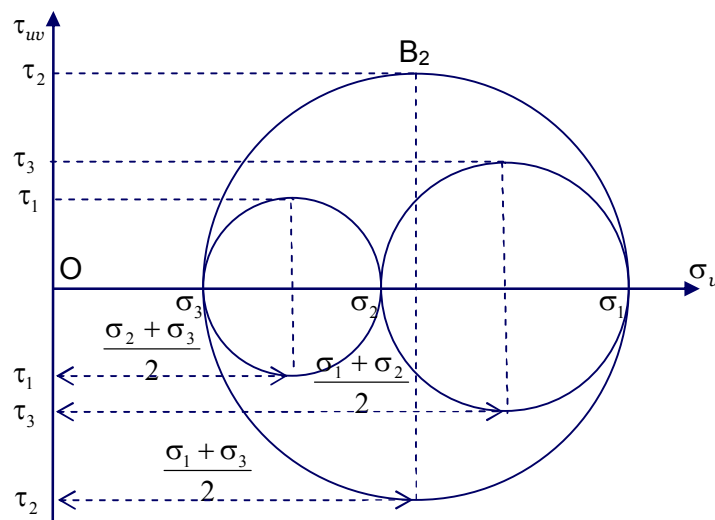
- điểm D là biểu diễn trạng thái ứng suất trên mặt nghiêng góc α so với tọa độ ban đầu

Đối với trạng thái ứng suất khối, với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ta dựng được 3 đường tròn Mohr.

- Đường tròn nhỏ nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_2 có tâm tại điểm $A_1 \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$, bán kính $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)$ cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ nhất

- Đường tròn đi qua hai điểm σ_2 và σ_1 có tâm tại điểm $A_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$, bán kính $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)$ cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng

song song với phương chính thứ ba



Hình 2.8. Ba đường tròn Mohr của trạng thái ứng suất khối

- Đường tròn to nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_1 có tâm tại điểm $A_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$, bán kính $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)$ cho ta biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ hai. Đường tròn to nhất này là đường tròn giới hạn hay đường tròn chính.

Ba điểm B_1 , B_2 và B_3 biểu diễn trạng thái ứng suất tại các mặt nghiêng song song lần lượt với các mặt chính thứ nhất, thứ hai và thứ ba và nghiêng 45° với hai mặt còn lại. Tại đó ứng suất tiếp đạt cực trị

$$A_1B_1 = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad A_2B_2 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad A_3B_3 = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

còn ứng suất pháp tại các mặt đó lần lượt bằng

$$OA_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad OA_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad OA_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

2.1.5 Quan hệ giữa ứng suất và nội lực

Ứng suất của một điểm bất kì trên mặt cắt ngang của thanh chiếu lên thành các thành phần σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . Khi đó ta có quan hệ giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt thanh như sau

$$N = \int_A \sigma_x dA; \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} dA,$$

$$M_{x_0} = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA; \quad M_y = \int_A z\sigma_x dA; \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA.$$

2.2 Trạng thái biến dạng

2.2.1 Chuyển vị và biến dạng

Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của một điểm, hay góc quay của đoạn thẳng nối hai điểm dưới tác động của ngoại lực.

Biến dạng sự thay đổi hình dạng kích thước của vật thể dưới tác dụng của tải trọng. *Biến dạng tại lân cận điểm* là tập hợp hàm tọa độ xác định độ dẫn của đoạn

vật chất vô cùng nhỏ đi qua điểm cho trước và xác định thay đổi góc giữa hai đoạn vật chất vô cùng bé.

Khi xét chuyển vị của thanh ta xét sự thay đổi vị trí của tiết diện trước và sau khi thanh bị biến dạng. Chuyển vị của thanh gồm chuyển động tịnh tiến của trọng tâm tiết diện và chuyển động quay của hình phẳng tiết diện quanh trọng tâm

Biến dạng của thanh là sự thay đổi kích thước và hình dáng của tiết diện, sự thay đổi chiều dài, độ cong, độ xoắn của trục thanh.

Thông thường sức bền vật liệu quan tâm chủ yếu đến biến dạng của trục thanh, theo biến dạng của trục thanh ta có thể phân loại

- Thanh chịu kéo hoặc nén: trục thanh không bị cong, các tiết diện chỉ chuyển động tịnh tiến dọc trục thanh do vậy trục thanh bị co lại hoặc giãn ra
- Thanh chịu cắt: trục thanh không thay đổi độ cong nhưng bị gián đoạn, các tiết diện trượt so với nhau và không biến dạng
- Thanh chịu xoắn: trục thanh không bị cong và cũng không thay đổi độ dài, các tiết diện không có chuyển vị tịnh tiến chỉ có chuyển vị quay quanh trọng tâm trong mặt phẳng của tiết diện
- Thanh chịu uốn: trục thanh bị cong đi, nhưng độ dài trục thanh không đổi. Khi đó tồn tại cả chuyển vị tịnh tiến và chuyển vị quay của tiết diện
- Thanh chịu lực phức tạp là tổ hợp của bốn trường hợp trên. Như đã nói ở chương 1 ta có thể dùng nguyên lí cộng tác dụng để xét biến dạng của tiết diện thanh.

2.2.2 Ten xơ biến dạng

Với giả thiết biến dạng nhỏ ta có quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị (u, v, w) chính là hệ thức Cauchy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ý nghĩa vật lí

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ là độ dẫn của các sợi vật chất khi biến dạng theo các trục

$2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$ là cosin của các góc giữa hai phần tử đường sau biến dạng, độ biến dạng trượt

Như vậy trạng thái biến dạng xác định bằng ten xơ biến dạng, cũng là ten xơ bậc hai đối xứng

$$\varepsilon_{ij} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Ta cũng có thể tìm được hướng chính là hướng chỉ có các thành phần ten xơ trên đường chéo khác không từ phương trình

$$(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)})v_i = 0 \quad (2.17)$$

Biến dạng chính xác định từ phương trình

$$\mathbf{Det}|\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)}| = 0 \Rightarrow \varepsilon_{(\alpha)}^3 - E_1\varepsilon_{(\alpha)}^2 + E_2\varepsilon_{(\alpha)} - E_3 = 0 \quad (2.18)$$

trong đó

$$E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta_e$$

$$E_2 = \left\{ \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) = (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1)$$

$$E_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \mathbf{Det}|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (2.19)$$

là các bất biến của ten xơ biến dạng

Biến dạng trượt chính biểu diễn bằng:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (2.20)$$

Biến dạng góc được định nghĩa

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} \quad (2.21)$$

2.3 Định luật Hooke

Khi vật liệu đồng nhất, đẳng hướng và biến dạng của vật thể là đàn hồi tuyến tính và có trị số bé ta có định luật Hooke biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}, \\ \rightarrow \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

trong đó E là mô đun đàn hồi, ν là hệ số Poisson và mô đun trượt G tính qua E và ν bằng công thức

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.23)$$

Ngược lại, có thể biểu diễn ứng suất qua biến dạng

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \theta_e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \theta_e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \theta_e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Quan hệ (2.22 và 2.24) của định luật Hooke có thể viết dưới dạng ma trận

$$\{\varepsilon\} = [e]\{\sigma\} \quad (2.25)$$

trong đó $\{\varepsilon\}$ là vectơ của sáu thành phần biến dạng

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (2.26)$$

và $\{\sigma\}$ là vectơ của sáu thành phần ứng suất

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (2.27)$$

còn [e] là ma trận vuông đối xứng có dạng

$$[e] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Nghịch đảo của phương trình 2.25 là biểu diễn của ứng suất qua biến dạng hay dạng ma trận của phương trình 2.24

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \quad (2.29)$$

trong đó ma trận [d] là nghịch đảo của ma trận [e] cũng là ma trận vuông đối xứng

$$[d] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

[d] và [e] là các ma trận hệ số đàn hồi

2.3.2 Hệ thức giữa các hằng số đàn hồi

Ngoài môđun đàn hồi Young E, hệ số Poisson ν người ta dùng các hằng số đàn hồi khác như hệ số Lamé λ , môđun nén thể tích K và môđun trượt G.

Ta xem môđun nén thể tích tính qua môđun đàn hồi Young E, hệ số Poisson ν như thế nào

Môđun nén thể tích K

Xét trường hợp nén đều mọi phía $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$; $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Đặt vào phương trình (2.24) ta cộng ba phương trình đầu vào ta được

$$\frac{E}{(1-2\nu)}\theta_e = -3p$$

Suy ra

$$p = -\frac{E}{3(1-2\nu)}\theta_e$$

$$\Rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.31)$$

Trong bảng 2.1 là các liên hệ giữa các hằng số đàn hồi khác nhau.

Bảng 2.1. Liên hệ giữa các hằng số đàn hồi

Hằng số đàn hồi	Đôi chính				
	λ, G	K, G	G, ν	E, ν	E, G
λ		$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
G				$\frac{E}{2(1+\nu)}$	
K	$\lambda + \frac{2}{3}G$		$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2G(1+\nu)$		
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$			$\frac{E}{2G} - 1$

2.3.3. Định luật Hooke với hai hằng số G và K

Với hai hằng số mô đun nén thể tích K và mô đun trượt G ta có các biểu diễn của định luật Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \left(1 - \frac{2G}{3K} \right) \sigma \right], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \left(1 - \frac{2G}{3K} \right) \sigma \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \left(1 - \frac{2G}{3K} \right) \sigma \right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx}. \quad (2.32)$$

$$\sigma_x = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \theta_e + 2G \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \theta_e + 2G \varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \theta_e + 2G \varepsilon_z,$$

$$\tau_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = 2G \varepsilon_{yz} = G \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = 2G \varepsilon_{zx} = G \gamma_{zx}. \quad (2.33)$$

Ma trận độ mềm [e] biểu diễn qua hằng số K và G như sau

$$[e] = \frac{1}{6KG} \begin{bmatrix} 2G & 2G-3K & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G-3K & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6K \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

và tương tự ma trận độ cứng [d] có dạng

$$[d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3K+4G & 3K-2G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K+4G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K-2G & 3K+4G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Kết luận chương 2

Trong chương hai trình bày về trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng. Trạng thái ứng suất phẳng được trình bày kĩ hơn vì trong bài toán thanh chủ yếu ta gặp trạng thái ứng suất này. Giới thiệu cách biểu diễn trạng thái ứng suất phẳng bằng đường tròn Mohr. Mở rộng cách biểu diễn bằng đường tròn Mohr cho trạng thái ứng suất khối.

Quan hệ ứng suất và biến dạng cho vật liệu đồng nhất đẳng hướng và ứng xử đàn hồi tuyến tính được trình bày trong mục 2.3. Định luật Hooke cho vật liệu ứng

xử tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Giới thiệu ma trận độ mềm và độ cứng của vật liệu. Định luật Hooke không chỉ biểu diễn qua hai hằng số là mô đun đàn hồi Young E và hệ số Poisson ν , mà còn có thể biểu diễn qua các hằng số khác như hệ số Lamé λ , mô đun nén thể tích K và mô đun trượt G .

CHƯƠNG 3

Các lí thuyết bền

3.1 Thế năng biến dạng đàn hồi

Công thực hiện bởi hệ lực tác động lên kết cấu được lưu giữ trong kết cấu đàn hồi dưới dạng năng lượng biến dạng đảm bảo không có công nào bị thất thoát dưới dạng động năng gây ra dao động hay nhiệt năng làm tăng nhiệt độ. Nói cách khác, lực tác động từ từ để ứng suất không vượt qua ứng suất giới hạn của vật liệu. Khi ta từ từ cất tải thì nội năng sẽ được phục hồi làm cho kết cấu trở về hình dạng ban đầu. Như vậy, công ngoại lực W và nội năng U bằng nhau

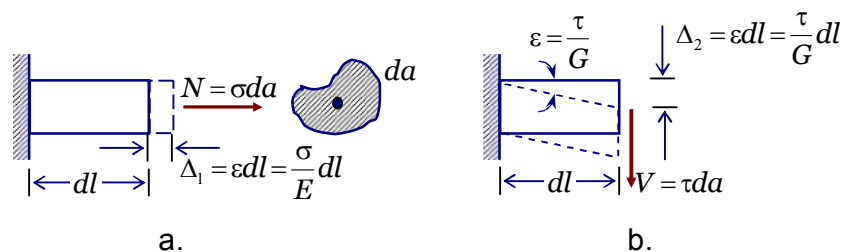
$$W = U \quad (3.1)$$

Liên hệ này có thể dùng để tính chuyển vị hay lực, nhưng đầu tiên ta phải xem xét cách tính nội năng biến dạng (hay còn gọi là thế năng biến dạng đàn hồi).

Từ kết cấu đàn hồi ta xét một phần tử nhỏ dạng thanh với diện tích mặt cắt ngang là da và độ dài là dl . Có thể có ứng suất pháp Hình 3.1a hay ứng suất tiếp Hình 3.1b tác dụng trên bề mặt diện tích da . Giả thiết rằng đầu trái B của phần tử bị ngàm chặt còn đầu phải C tự do. Chuyển vị của C do hai loại ứng suất là

$$\Delta_1 = \frac{\sigma}{E} dl \quad \Delta_2 = \frac{\tau}{G} dl$$

ở đây E hệ số đàn hồi khi kéo nén, G hệ số đàn hồi khi trượt.



Hình 3.1. Phần tử thanh

Nếu tác động từ từ lực σda và τda để gây nên các chuyển vị trên, thì năng lượng lưu trữ trong phần tử sẽ là

$$dU_1 = \frac{1}{2}(\sigma da)\Delta_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} dlda$$

$$dU_2 = \frac{1}{2}(\tau da)\Delta_2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dlda$$

Dùng ε ký hiệu chung cho biến dạng, hai phương trình trên có dạng

$$dU = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dv \quad (3.2)$$

ở đây $dv = dl \cdot da$ là thể tích của phần tử đang xét, σ là ứng suất tổng quát, có thể là ứng suất pháp hay ứng suất tiếp.

Biến dạng ε trong phương trình 3.2 nếu do ứng suất pháp thì có giá trị $\varepsilon = \sigma/E$, nếu do ứng suất tiếp thì $\varepsilon = \tau/G$. G và E có liên hệ với nhau bằng

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ở đây ν là hệ số Poisson, do vậy biến dạng do ứng suất tiếp có thể viết

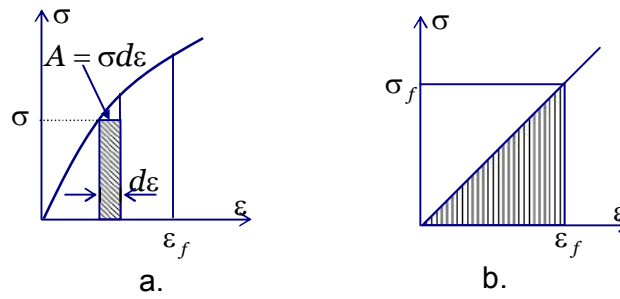
$$\varepsilon = \frac{2\tau(1+\nu)}{E}$$

Gia số của năng lượng biến dạng trong một phần tử đàn hồi với thể tích là dv khi biến dạng thay đổi từ $\varepsilon = 0$ đến $\varepsilon = \varepsilon_f$ là

$$dU = dv \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \quad (3.3)$$

ở đây tích phân bên vế phải được gọi là mật độ năng lượng biến dạng và bằng phần diện tích bên dưới đường cong ứng suất biến dạng của vật liệu (Hình 3.2a). Nếu vật liệu tuân thủ định luật Hooke (Hình 3.2b) ta có mật độ năng lượng biến dạng bằng

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_f \varepsilon_f$$



Hình 3.2. Đường cong ứng suất biến dạng (a) và mật độ năng lượng (b)
 Tổng năng lượng biến dạng trong kết cấu tuyến tính sẽ là

$$U = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 \int_v \sigma_m \varepsilon_m dv \tag{3.4}$$

m biểu diễn dạng ứng suất và dạng biến dạng tương ứng. Có nghĩa tích phân được lấy trên toàn bộ thể tích của kết cấu cho từng loại ứng suất riêng biệt.

Trong một số trường hợp ta dùng liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Quan hệ $\varepsilon = \sigma/E$ cho vật liệu tuyến tính chỉ áp dụng cho ứng suất pháp của mặt phẳng.

Dùng các ký hiệu $\{\varepsilon\}$ là vectơ của sáu thành phần biến dạng

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

và $\{\sigma\}$ là vectơ của sáu thành phần ứng suất

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

ta có biểu thức

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \tag{3.5}$$

hay
$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \tag{3.5a}$$

Sử dụng quan hệ ứng suất biến dạng (2.25) và (2.39) thế vào (3.5) hay (3.5a) ta có

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T [e] \{\sigma\} dv \quad (3.6)$$

và

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [d] \{\varepsilon\} dv \quad (3.6a)$$

Dạng của ma trận [e] và [d] cho trong (2.28) và (2.30).

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng

Trạng thái ứng suất đơn

$$U = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon \quad (3.7)$$

Trạng thái ứng suất khối $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Dùng định luật Hooke biểu diễn biến dạng chính qua ứng suất chính ta có

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (3.8)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng

Ta xem trạng thái ứng suất khối $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ như tổng của hai trạng thái ứng suất:

- trạng thái kéo nén đều theo 3 phương với các ứng suất chính là

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.9)$$

trạng thái này chỉ có biến dạng thể tích ko có biến dạng hình dáng

- trạng thái với ứng suất chính là

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_{tb}, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_{tb}, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_{tb}, \quad (3.10)$$

Ta thấy $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$, trạng thái này chỉ có biến dạng hình dáng

Như vậy

$$U = U_{tt} + U_{hd} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} U_{tt} &= \frac{1}{2E} [\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb})] \\ &= 3 \frac{1-2\mu}{2E} \sigma_{tb}^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} U_{hd} &= U - U_{tt} \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2 Đặc trưng cơ học của vật liệu

Vật liệu có thể phân loại thành hai loại theo biến dạng:

- Vật liệu dẻo là vật liệu bị phá hủy khi biến dạng lớn, như thép, đồng, nhôm và chất dẻo
- vật liệu giòn bị phá hủy khi biến dạng bé, như gang, bê tông, đá

Sự phân loại này chỉ là quy ước và mang tính tương đối.

Để xác định đặc trưng cơ học của vật liệu người ta tiến hành các thí nghiệm kéo, nén mẫu vật liệu trên máy chuyên dụng kéo và nén.

3.2.1 Trình tự thí nghiệm

- Tiến hành đo liên tục các đại lượng: lực kéo (nén) F và độ dẫn dài ΔL của mẫu thí nghiệm
- Với giả thiết ứng suất phân bố đều trên toàn bộ diện tích tiết diện A , ta tính ứng suất $\sigma = F/A$, ở đây A là diện tích ban đầu của tiết diện.
- Tính biến dạng dọc tương ứng $\varepsilon = \Delta L/L$, với L là chiều dài ban đầu của mẫu vật liệu.
- Sau đó vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trên hệ trục $\sigma - \varepsilon$

3.2.2 Mẫu thí nghiệm

Mẫu thí nghiệm phải được chế tạo tuân thủ các tiêu chuẩn và quy phạm đo lường tiêu chuẩn. Thường

- Mẫu chịu kéo có hình dáng là các thanh lăng trụ với hai kiểu tiết diện
 - + có tiết diện tròn với chiều dài L bằng 10 lần đường kính $L=10d$ (mẫu dài) hoặc chiều dài L bằng 5 lần đường kính $L=5d$ (mẫu ngắn)
 - + tiết diện chữ nhật với tỉ lệ cạnh ngắn trên cạnh dài trong khoảng $[0,2 \div 1]$, chiều dài $L = 11,3\sqrt{A}$ cho mẫu dài và $L = 5,65\sqrt{A}$ cho mẫu ngắn
- mẫu chịu nén là các thanh hình trụ tròn với chiều cao h nhỏ hơn hoặc ba lần đường kính để đảm bảo trục thanh thẳng trọng khi làm thí nghiệm. Mẫu nén bê tông thường có hình dạng là khối lập phương các cạnh 15cm, 20cm hoặc trụ tròn ngắn đường kính 10cm

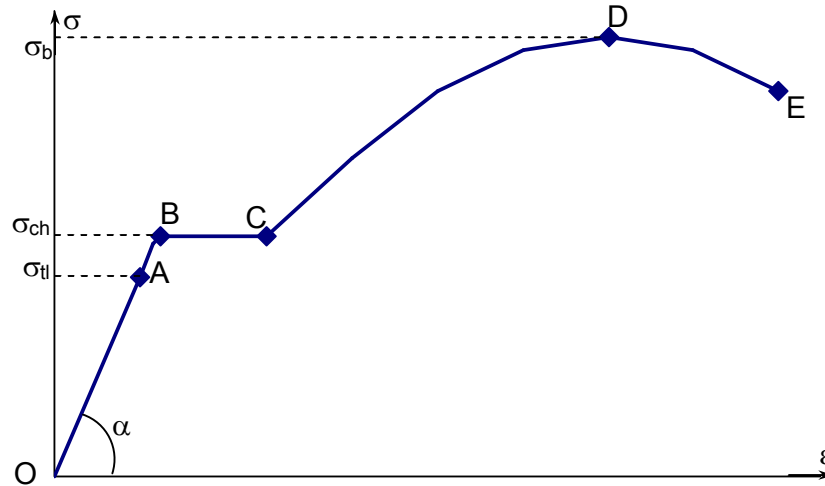
3.2.3 Đồ thị thí nghiệm

Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Đồ thị thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (hình 3.3) gồm ba giai đoạn chính.

- Giai đoạn tỉ lệ là đoạn OA trên đồ thị. Khi đó vật liệu làm việc đàn hồi tuân thủ định luật Hooke với biến dạng bé. σ_H là ứng suất giới hạn tỉ lệ ứng với điểm A. Đoạn AB rất ngắn và trên điểm A vật liệu vẫn đàn hồi, đối với thép CT3 $\sigma_H = 210MPa$
- Giai đoạn chảy là đoạn nằm ngang BC trên đồ thị. Khi đó ứng suất không thay đổi nhưng mẫu vẫn biến dạng. σ_{ch} là ứng suất giới hạn chảy ứng với điểm B. Độ dài đoạn BC tùy thuộc vào vật liệu. $\sigma_{ch} = 240MPa$ đối với thép CT3.
- Giai đoạn tái bền là đoạn CD. Trong giai đoạn này ứng suất tăng làm biến dạng tăng. Đoạn này được gọi là tái bền vì khi ta cất tải đường cong không quay về gốc O mà giảm theo tỉ lệ đến điểm có biến dạng dư. Sau đó lại chất tải tiếp thì đường cong ứng suất biến dạng sẽ có giới hạn tỉ lệ cao hơn. Chính vì tính chất này đoạn CD được gọi là đoạn tái bền. Đến điểm D mẫu thử đã

hình thành chỗ thắt, ứng suất ứng với điểm D được gọi là ứng suất giới hạn bền σ_b và đối với thép CT3 $\sigma_b = 380MPa$

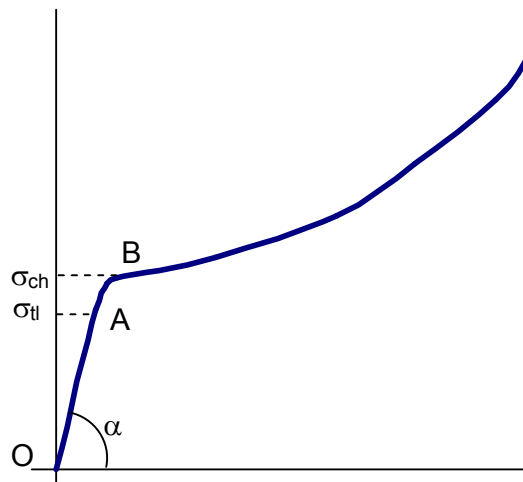


Hình 3.3. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Như vậy, ba giới hạn σ_{tl} , σ_{ch} và σ_b là các đặc trưng cơ học của vật liệu và mô đun đàn hồi E chính là hệ số góc của đoạn OA $E = tg\alpha$.

Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Đồ thị quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo thể hiện trên hình 3.4.

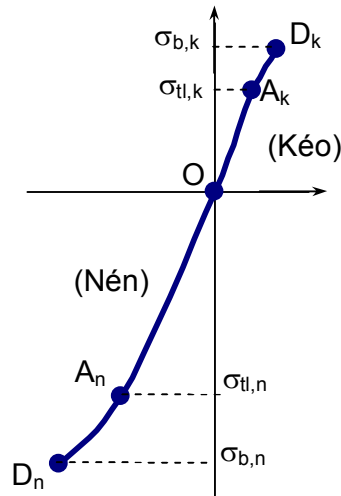


Hình 3.4. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Ta có nhận xét

- Ứng suất giới hạn tỉ lệ σ_{tl} và giới hạn chảy σ_{ch} của vật liệu dẻo là như nhau trong cả trường hợp kéo và nén.
- Tuy nhiên sau giới hạn chảy, ứng suất nén tăng nhưng không làm cho mẫu vỡ, do vậy ứng suất phá hủy không thể xác định được

Thí nghiệm kéo và nén vật liệu dẻo



Hình 3.5. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo và nén vật liệu dẻo

Đồ thị chỉ có một giai đoạn gần như thẳng và kết thúc khi mẫu bị phá hủy (bị kéo đứt hay nén vỡ).

Từ các đặc trưng cơ học của vật liệu ta có được giá trị ứng suất cho phép để kiểm tra điều kiện bền của kết cấu.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (3.14)$$

trong đó khi vật liệu dẻo $\sigma_0 = \sigma_{ch}$, khi vật liệu giòn $\sigma_0 = \sigma_{b,k}$ hay $\sigma_{b,n}$. Còn $n > 1$ là hệ số an toàn theo ứng suất cho phép, do xét đến các yếu tố thực tế ảnh hưởng tới độ bền của kết cấu. Cả hai giá trị ứng suất cho phép $[\sigma]$ và hệ số an toàn n được quy định trong các tiêu chuẩn và quy phạm tính toán thiết kế.

3.3 Điều kiện bền của vật liệu

Trạng thái ứng suất đơn

$$\sigma \leq [\sigma] \quad (3.15)$$

Trạng thái ứng suất khối chỉ là suy diễn hình thức khó áp dụng trong thực tế vì khó làm thí nghiệm để có được các giá trị $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_1 \leq [\sigma_1]; \quad \sigma_2 \leq [\sigma_2]; \quad \sigma_3 \leq [\sigma_3] \quad (3.16)$$

Giả thiết tổng quát về điều kiện bền có thể dưới dạng

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq C \quad (3.17)$$

trong đó σ_1, σ_2 và σ_3 là các ứng suất chính, C là đặc trưng cơ học của vật liệu.

Điều kiện bền tổng quát (3.16), tùy theo từng cách đánh giá và giả thiết ta có thể viết dưới dạng cụ thể và đơn giản hóa hơn. Những giả thuyết về nguyên nhân gây phá hủy cho ta thuyết bền cụ thể. Nguyên nhân này không phụ thuộc vào dạng trạng thái ứng suất, nhờ đó ta có thể viết các điều kiện bền của trạng thái ứng suất phức tạp khi chỉ có kết quả thí nghiệm cho trạng thái ứng suất đơn.

Ta sẽ viết các điều kiện bền dưới dạng

$$\sigma_{td} \leq [\sigma] \quad (3.18)$$

3.2.1 Thuyết bền ứng suất pháp cực đại – Thuyết bền thứ nhất

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới một giới hạn xác định

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_n \quad (3.19)$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ nhất sẽ là

$$\sigma_{td} = \sigma_1 \text{ khi } \sigma_1 > 0 \quad (3.20)$$

Nhận xét: thuyết bền này sơ sài và không phù hợp với thực nghiệm. Chỉ áp dụng cho trường hợp trạng thái ứng suất đơn

3.2.2 Thuyết bền biến dạng dài cực đại – Thuyết bền thứ hai

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số biến dạng dài lớn nhất đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi biến dạng dài giới hạn là $[\varepsilon]$, thì ở trạng thái khối theo định luật Hooke

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon]$$

Ở trạng thái đơn theo định luật Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

sẽ có giới hạn $\Rightarrow \varepsilon \leq \frac{[\sigma]}{E}$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[\varepsilon] \leq \frac{[\sigma]}{E}.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (3.21)$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ hai sẽ là

$$\sigma_{tdII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.22)$$

Các thực nghiệm chỉ ra rằng thuyết bền thứ hai tương đối phù hợp với vật liệu giòn

3.2.3 Thuyết bền ứng suất tiếp cực đại - Thuyết bền thứ ba

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi ứng suất tiếp giới hạn là $[\tau]$ với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ở trạng thái ứng suất khối ta có ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau]$$

Ở trạng thái đơn theo ta có ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$

và sẽ có giới hạn $\frac{[\sigma]}{2}$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[\tau] \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (3.23)$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ ba sẽ là

$$\sigma_{tđtt} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.24)$$

Thuyết bền thứ ba khá phù hợp với vật liệu dẻo, ứng với điều kiện dẻo Tresca-Saint-Venant

3.2.4 Thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại – Thuyết bền thứ tư

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng đạt tới một giới hạn xác định

Nếu gọi thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng giới hạn là $[u]_{hd}$ thì ở trạng thái ứng suất khối

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \leq [u_{hd}]$$

Ở trạng thái đơn theo ta có thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2$$

và sẽ có giới hạn $\frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2$

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên ta có

$$[u_{hd}] = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma]^2.$$

Từ đây ta có điều kiện bền theo

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma] \quad (3.25)$$

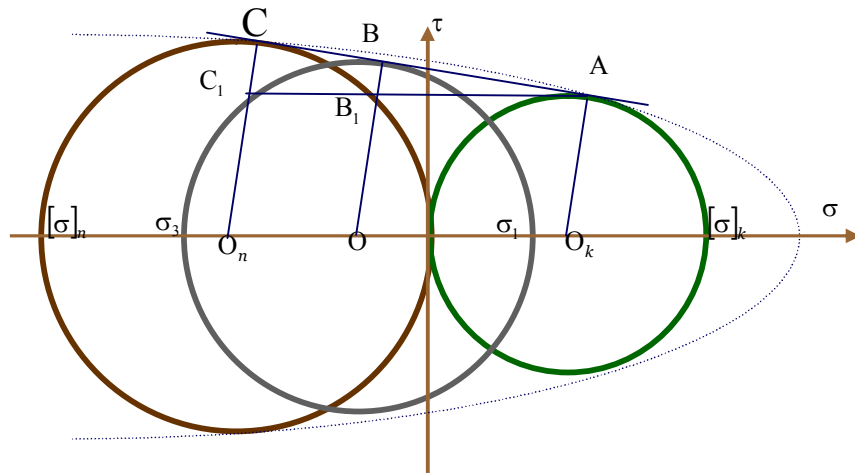
Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ tư sẽ là

$$\begin{aligned} \sigma_{tdIV} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cũng như thuyết bền thứ ba thuyết bền thứ tư tương đối phù hợp với vật liệu dẻo. Điều kiện bền thứ tư ứng với điều kiện dẻo của von-Mises

3.2.5. Thuyết bền Mohr – Thuyết bền thứ năm

Thuyết bền Mohr được xây dựng dựa trên các cơ sở thực nghiệm. Một loạt thí nghiệm phá hủy được tiến hành. Ứng với mỗi thí nghiệm ta được một cặp giá trị $[\sigma]_k, [\sigma]_n$. Như vậy ta nhận được một họ các đường tròn Mohr giới hạn (đường tròn to nhất trong ba đường tròn Mohr của trạng thái ứng suất khối có bán kính $0,5(\sigma_1 - \sigma_3)$) trên mặt phẳng (σ, τ) hình 3.6. Dựng được đường bao các đường tròn Mohr giới hạn chia mặt phẳng làm hai miền: trong và ngoài đường bao.



Hình 3.6.

Với giả thiết đường bao tìm được là duy nhất thuyết bền Morh phát biểu trạng thái ứng suất nào đó có đường tròn Morh giới hạn nằm trong đường bao là trạng thái đủ bền, vật liệu không bị phá hủy. Nếu ngược lại đường tròn Morh giới hạn nằm ngoài đường bao thì trạng thái ứng suất đó không đủ bền và vật liệu bị phá hủy.

Một trong những khó khăn để áp dụng thuyết bền Morh là phải làm một số lớn thí nghiệm. Để tránh khó khăn này Morh đề xuất vẽ đường bao dựa trên đường trionf kéo và nén và đường bao khi đó là đường thẳng (AC trên hình 3.6).

Giả sử ta có trạng thái ứng suất nào đó và dựng đường tròn giới hạn, đường tròn này tiếp xúc với đường AC tại điểm B (hình 3.3). Khi đó từ các điều kiện hình học ta có

$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{AB_1}$$

Biểu diễn độ dài các đoạn thẳng qua các ứng suất ta được

$$\frac{0,5([\sigma]_n - [\sigma]_k)}{0,5([\sigma]_n + [\sigma]_k)} = \frac{0,5(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k)}{0,5([\sigma]_k - \sigma_1 - \sigma_3)}$$

Từ biểu thức trên, rút gọn ta được

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 \leq [\sigma]_k, \Rightarrow \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma]_k$$

Ứng suất tương đương của thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \quad (3.26)$$

trong đó $\alpha = [\sigma]_k / [\sigma]_n$

Kết luận của chương 3

Chương ba trình bày cách tính thế năng biến dạng đàn hồi. Đưa ra biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng. Trình bày thí nghiệm kéo nén để xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu. Mục 3.3 là mục quan trọng nhất của chương này trình bày năm thuyết bền thường dùng. Dùng khái niệm ứng

suất pháp chính trong thuyết bền theo trạng thái ứng suất đơn, ta đưa ra điều kiện bền (3.18) chung cho tất cả các thuyết bền dưới dạng

$$\sigma_{td} \leq [\sigma]$$

Ứng với mỗi thuyết bền ta có công thức của ứng suất tương đương tương ứng.

PHẦN 1. CÁC BÀI TOÁN THANH

Nội dung của phần này xem xét các trường hợp chịu lực cơ bản của thanh. Đó là các trường hợp sau

- Thanh chịu kéo hoặc nén
- Thanh chịu xoắn, xem xét cả thanh chịu cắt
- Thanh chịu uốn
- Thanh chịu lực phức tạp

Như đã nói trong phần nhập môn ta cần xem xét ba bài toán cơ bản

- Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định
- Bài toán thiết kế - lựa chọn hình dạng và kích thước tiết diện phù hợp cho từng bộ phận kết cấu
- Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu

Trình tự giải các bài toán thanh có thể tóm gọn trong các bước sau đây

Bước 1. Vẽ biểu đồ nội lực theo trình tự

- Tìm phản lực tại các liên kết từ các phương trình tĩnh học
- Dùng phương pháp mặt cắt từ điều kiện cân bằng ta có được biểu thức của nội lực.
- Vẽ biểu đồ nội lực

Bước 2. Dựa trên biểu đồ nội lực tính ứng suất lớn nhất σ_{\max}

Bước 3. Kiểm tra bền. Ở đây sẽ phụ thuộc vào loại bài toán.

- Bài toán kiểm tra ta kiểm tra xem $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ để kết luận thanh đủ bền hay không
- Bài toán thiết kế từ điều kiện bền $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ lựa chọn kính thước thanh thỏa mãn điều kiện bền
- Bài toán xác định tải trọng cho phép P_b từ điều kiện $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo bền

Bước 4. Có kích thước và nội lực ta tính dịch chuyển của kết cấu để tìm δ_{\max}

Bước 5. Kiểm tra độ cứng. Cũng như độ bền sẽ tùy thuộc vào dạng bài toán

- Bài toán kiểm tra ta kiểm tra xem $\delta_{\max} \leq [\delta]$ kết luận thanh đủ cứng không.
- Bài toán thiết kế ta kiểm tra xem $\delta_{\max} \leq [\delta]$ nếu không thỏa mãn ta lựa chọn lại kích thước đảm bảo điều kiện cứng này
- Bài toán xác định tải trọng cho phép P_c từ điều kiện $\delta_{\max} \leq [\delta]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo cứng, tải trọng cho phép kết luận $P = \min(P_b, P_c)$

Bước 6. Kiểm tra ổn định của thanh nếu chịu nén

CHƯƠNG 4

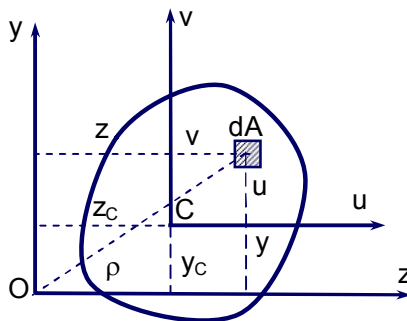
Các đặc trưng hình học

Khả năng chịu lực của thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích của tiết diện mà còn phụ thuộc vào các đặc trưng hình học khác của tiết diện. Trong chương này đưa ra các công thức tính các đặc trưng hình học như mô men tĩnh, mô men quán tính của các tiết diện phẳng

4.1 Mô men tĩnh và trọng tâm

Diện tích của hình phẳng được tính bằng tích phân

$$F = \int_F dF \quad (4.1)$$



Hình 4.1. Tọa độ của phân tố

Công thức tính mô men tĩnh đối với trục y và trục z có dạng

$$S_y = \int_A z dA; \quad S_z = \int_A y dA \quad (4.2)$$

thứ nguyên của mô men tĩnh là (chiều dài)³, ví dụ (m³)

Trục trung tâm là trục có mô men tĩnh bằng không. Trọng tâm của tiết diện là giao điểm của hai trục trung tâm.

Kẻ hai trục u và v vuông góc đi qua trọng tâm C và song song với trục y và z, khi đó tọa độ y và z của phân tố dA biểu diễn qua tọa độ u và v và tọa độ trọng tâm C trong hệ tọa độ Oyz như sau

$$y = y_c + u, \quad z = z_c + v$$

Thế vào (4.2) ta được định lí Varignon

$$S_y = \int_A (z_c + v) dA = z_c \int_A dA + \int_A v dA = z_c A \Rightarrow z_c = \frac{S_y}{A}$$

$$S_z = \int_A (y_c + u) dA = y_c \int_A dA + \int_A u dA = y_c A \Rightarrow y_c = \frac{S_z}{A} \quad (4.3)$$

Từ định lí Varignon ta có nhận xét

- Các trục trung tâm cắt nhau tại một điểm hay bất kì trục nào đi qua trọng tâm là trục trung tâm
- Nếu có một trục đối xứng thì trọng tâm nằm trên trục đối xứng, nếu có hai trục đối xứng vuông góc thì trọng tâm là giao điểm của hai trục
- Trọng tâm của hình ghép xác định bằng công thức (phần rỗng có diện tích âm)

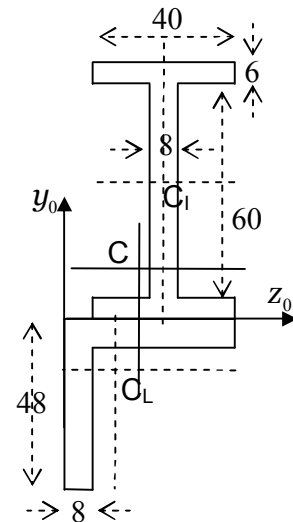
$$y_c = \frac{\sum y_{c_i} A_i}{A}; \quad z_c = \frac{\sum z_{c_i} A_i}{A} \quad (4.4)$$

Ví dụ. xác định trọng tâm của hình ghép trên hình 4.2

Chọn hệ tọa độ $y_0 z_0$ như trên hình vẽ khi đó tọa độ trọng tâm và diện tích của các hình chữ I và chữ L cho trong hàng 2 và 3 của bảng 4.1. Dùng công thức 4.4 ta tính được trọng tâm của hình ghép viết ở dòng 4 của bảng 4.1

Bảng 4.1

	z_c	y_c	A
Chữ I	28	36	960
Chữ L	14,91	-14,91	704
Hình ghép	22,4615	14,4615	1664



Hình 4.2

4.2 Các mô men quán tính

Công thức tính mô men quán tính trục của hình phẳng với trục Oy và Oz

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (4.5)$$

Mô men quán tính li tâm đối với hệ trục vuông góc Oyz

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (4.6)$$

Mô men quán tính cực đối với gốc tọa độ

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = I_y + I_z \quad (4.7)$$

Từ các công thức trên ta có nhận xét

- Mô men quán tính có thứ nguyên chiều dài⁴, ví dụ m⁴
- Mô men quán tính cực là hằng số
- Mô men quán tính trục luôn dương
- Mô men quán tính li tâm I_{yz} dương, âm hoặc bằng không
- Hệ trục có mô men quán tính li tâm I_{yz} bằng không là hệ trục chính
- Hệ trục chứa trục đối xứng của hình phẳng là hệ trục quán tính chính
- Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục quán tính chính có gốc tại trọng tâm khi đó

$$S_y = 0, S_z = 0, I_{yz} = 0 \quad (4.8)$$

Mô men quán tính đối với trục quán tính chính trung tâm được gọi là mô men quán tính chính trung tâm (mô men quán tính chính)

- Mô men quán tính của hình ghép tính qua mô men của các hình thành phần

$$I_y = \sum_i I_{yi}, I_z = \sum_i I_{zi}, I_{yz} = \sum_i I_{yzi} \quad (4.9)$$

Chú ý phần rỗng được tính là có mô men quán tính âm

Bán kính quán tính đối với trục Oy hay Oz

$$r_y = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, r_z = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} \quad (4.10)$$

Ví dụ. Tính các mô men quán tính của hình tròn đường kính D.

Do tính chất đối xứng nên $I_z = I_y = I_p/2$. Ta chọn phần tử dA là hình được giới hạn bởi hai tia α và $\alpha+d\alpha$ và hai đường tròn bán kính ρ và $\rho+d\rho$ (hình 4.3). Khi đó

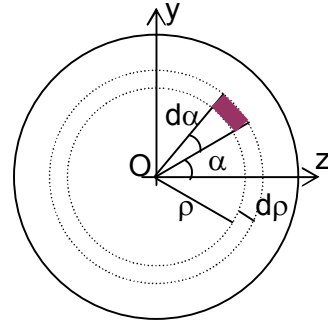
$$dA = \rho d\rho d\alpha$$

Lắp vào công thức tính mô men quán tính cực

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha = \frac{\rho^4 \alpha}{4} \Big|_0^{\frac{D}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi D^4}{4 \cdot 2^4} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Từ đây ta có

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$



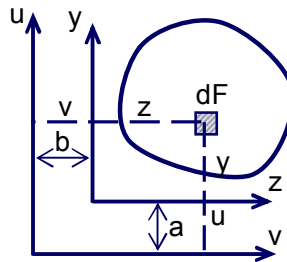
Hình 4.3

Có công thức tính mô men quán tính cho hình tròn, áp dụng công thức tính mô men quán tính cho hình ghép ta có công thức tính mô men quán tính của hình vành khăn với đường kính ngoài D và đường kính d

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4), \quad \text{trong đó } \alpha = \frac{d}{D}.$$

4.3 Công thức chuyển trục song song

Xét hệ trục Ouv song song với hệ trục ban đầu Oyz (hình 4.4)



Hình 4.4. Chuyển trục tọa độ song song

Khoảng cách giữa v và z là a, giữa u và y là b, vậy theo định nghĩa ta có

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b \int_A z dA + b^2 \int_A dA$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (y + a)(z + b) dA = \int_A yz dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA + ab \int_A dA$$

Ta rút ra liên hệ giữa mô men quán tính đối với hệ trục mới O_{uv} và mô men quán tính đối với hệ trục cũ O_{yz}

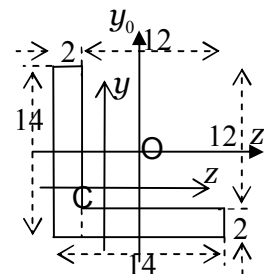
$$\begin{aligned} I_u &= I_y + 2bS_y + b^2 A \\ I_v &= I_z + 2aS_z + a^2 A \\ I_{uv} &= I_{yz} + aS_y + bS_z + abA \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nếu trục Oxy là trục trung tâm thì công thức (4.11) có dạng đơn giản hơn

$$\begin{aligned} I_u &= I_y + b^2 A \\ I_v &= I_z + a^2 A \\ I_{uv} &= I_{yz} + abA \end{aligned} \tag{4.11a}$$

Ví dụ Tính mô men quán tính chính trung tâm của tiết diện thép góc như trên hình 4.5

Thép góc được tạo thành từ hình vuông to có cạnh 14x14cm cắt bỏ đi một hình vuông nhỏ hơn ở góc trên bên phải có cạnh 12x12cm. Chọn hệ trục ban đầu O_{y₀z₀} như trên hình vẽ, tìm trọng tâm của hình ghép theo công thức Vaginion (bảng 4.2). Phần cắt bỏ có diện tích âm



Hình 4.5

Bảng 4.2

	Z _{C0} (cm)	y _{C0} (cm)	A (cm ²)	I _z =I _y tính tại trục trung tâm riêng của hình	Khoảng cách từ trục riêng đến trục của hình ghép	I _z =I _y của hình ghép (cm ⁴)
Hình to	0	0	2304	3201,333	2,769	4704,387
Hình nhỏ	1	1	-1600	-1728	3,769	-3773,82
Hình ghép	-2,769	-2,769	704			930,564

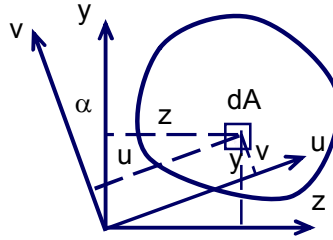
Ta tính mô men quán tính cho từng hình đối với trục trung tâm riêng của từng hình sau đó chuyển trục sang hệ trục trung tâm của hình ghép Cxy Phần cắt bỏ có mô men quán tính âm.

$$I_z = I_y = I_{y1} + (z_c - z_{1c})^2 A_1 + I_{y2} + (z_c - z_{2c})^2 A_2 = -930,564 \text{ cm}^4$$

4.4 Công thức xoay trục

Xét hệ trục Ouv tạo được bằng cách quay Oyz một góc α (hình 4.6). Khi đó tọa độ trong hệ trục Ouv tính qua tọa độ trong hệ trục Oyz theo công thức

$$u = y \sin \alpha + z \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - z \sin \alpha;$$



Hình 4.6. Xoay trục tọa độ đi một góc α

Theo định nghĩa mô men quán tính

$$\begin{aligned} I_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF \\ &= \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yz dF + \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= \int_F u^2 dF = \int_F (y \sin \alpha + z \cos \alpha)^2 dF \\ &= \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F yz dF + \cos^2 \alpha \int_F z^2 dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_F uv dF = \int_F (y \sin \alpha + z \cos \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dF \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_F yz dF + \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_F y^2 dF - \int_F z^2 dF \right) \end{aligned}$$

Từ đây ta công thức tính mô men quán tính khi xoay trục

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (4.12)$$

Trục quán tính chính là trục có mô men quán tính li tâm bằng không. Từ điều kiện này ta tìm góc của trục quán tính chính với trục z

$$I_{uw} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (4.13)$$

Biết góc α , thay vào hai biểu thức đầu tiên của (4.12) ta tính được các mô men quán tính đối với trục quán tính chính (gọi là mô men quán tính chính). Các mô men quán tính chính nhận các giá trị cực trị

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \quad (4.14)$$

Đồng thời cũng tìm được bán kính quán tính chính

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{F}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} \quad (4.15)$$

Kết luận chương 4

Chương bốn trình bày các công thức tính các đặc trưng hình học của hình phẳng như mô men tĩnh, các mô men quán tính.

Đưa ra các định nghĩa về hệ trục trung tâm, hệ trục chính, hệ trục quán tính chính trung tâm.

Trình bày các công thức tính mô men quán tính khi chuyển trục song song và khi xoay trục đi một góc α . Đồng thời cho quy tắc tính các đặc trưng hình học cho hình phẳng là hình ghép.

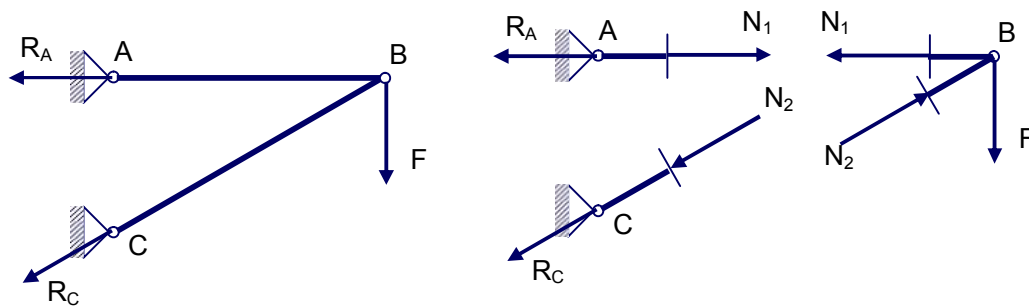
CHƯƠNG 5

Thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm

5.1 Định nghĩa

Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên tiết diện chỉ tồn tại một thành phần nội lực là lực dọc trục. Quy ước dấu của lực dọc trục: Lực dọc dương khi thanh chịu kéo và âm khi thanh chịu nén

Ví dụ. Xét thanh dàn chịu kéo (hình 5.1)



Hình 5.1. Nội lực dọc trục trong hệ dàn

Để tính nội lực trong thanh ta dùng phương pháp mặt cắt cắt thanh AB và BC thay thế liên kết bằng nội lực dọc thanh AB (N_1) và BC (N_2). Xét cân bằng tại điểm B ta có hai phương trình, từ đó ta tìm được nội lực

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_2 \sin \alpha + F = 0 \rightarrow N_2 = -\frac{F}{\sin \alpha}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 + N_2 \cos \alpha = 0 \rightarrow N_1 = -N_2 \cos \alpha = F \cot \alpha$$

Như vậy thanh AB chịu kéo, còn thanh BC chịu nén.

5.2 Biểu đồ lực dọc

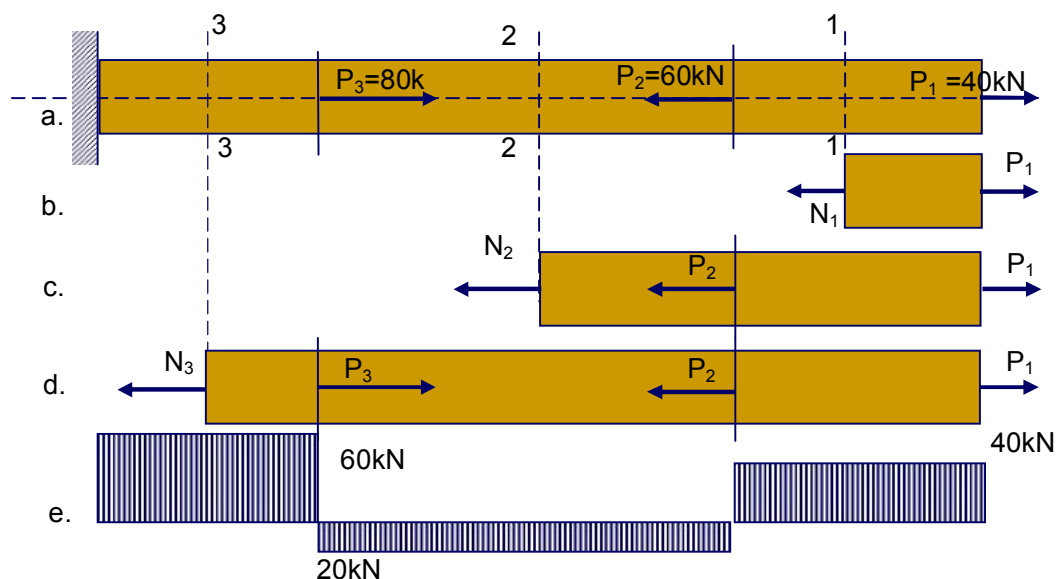
Biểu đồ lực dọc biểu diễn sự biến thiên của lực dọc dọc theo trục của thanh. Để vẽ biểu đồ lực dọc ta dùng phương pháp mặt cắt để xác định lực dọc tại mặt cắt. Giá trị lực dọc N ở một mặt cắt của thanh bằng tổng đại số những ngoại lực dọc trục

thanh (lực tập trung P hay lực phân bố q_x) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Công thức tổng quát để xác định lực dọc trục tại một mặt cắt ngang như sau

$$N_x = \sum P_x + \sum \int q_x dx \quad (5.1)$$

Ta giả định vec tơ N hướng ra phía ngoài của mặt cắt, xét điều kiện cân bằng tại mặt cắt của phần cắt, chính là công thức (5.1) sẽ cho ta cả giá trị và dấu của nội lực dọc trục.

Ví dụ. Xét thanh thẳng chịu lực như trên hình 5.2



Hình 5.2. Ví dụ về biểu đồ nội lực dọc trục

Ta xét từ bên phải sang. vì đầu bên phải tự do không cần xác định phản lực.

Đoạn 1 từ đầu bên phải đến điểm đặt lực P_2 (hình 5.2b), xét cân bằng tại mặt cắt 1-1 với các lực bên phải ta tính được N_1

$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 - P_1 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 = 40kN$$

Đoạn 2 từ điểm đặt lực P_2 đến điểm đặt lực P_3 (hình 5.2c), xét cân bằng tại mặt cắt 2-2 với các lực bên phải ta tính được N_2

$$N_2 - P_1 + P_2 = 0 \rightarrow N_2 = P_1 - P_2 = 40 - 60 = -20kN$$

Tương tự xét đoạn 3 từ điểm đặt lực P_3 đến điểm ngàm (hình 5.2d), xét cân bằng tại mặt cắt 3-3 với các lực bên phải ta tính được N_3

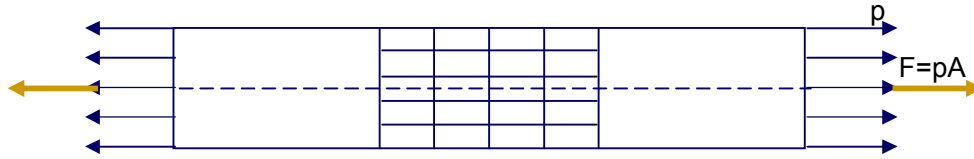
$$N_3 - P_3 + P_2 - P_1 = 0 \rightarrow N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 40 - 60 + 80 = 60$$

Biểu đồ lực dọc N vẽ trên hình 5.2e

5.3 Công thức ứng suất

5.3.1 Giả thiết về biến dạng của thanh

Xét thanh thẳng tiết diện không đổi. Kẻ các đường song song và các đường vuông góc với trục, đường vuông góc đặc trưng cho tiết diện, đường song song đặc trưng cho các lớp vật liệu. Cho thanh chịu kéo bởi hai hệ lực phân bố ở hai đầu có cùng cường độ p nhưng ngược chiều. Hợp lực $F=pA$ nằm trên trục thanh



Hình 5.3. Giả thiết về biến dạng dọc của thanh

Bằng thực nghiệm ta có các nhận xét khi thanh chịu kéo, nén

- Các tiết diện của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tương tác với nhau - bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh
- Các thớ vật liệu dọc trục có biến dạng dài bằng nhau

5.3.2 Biểu thức ứng suất

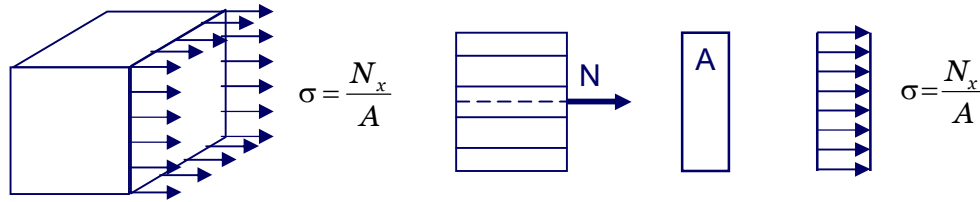
Từ giả thiết các tiết diện vẫn phẳng và vuông góc với trục ta có ứng suất tiếp bằng không chỉ còn ứng suất pháp. Từ giả thiết thứ hai ta chỉ còn ứng suất pháp theo phương của trục thanh. Theo định luật Hook ứng suất tỉ lệ với biến dạng dài

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (5.1)$$

Từ giả thiết thứ ba biến dạng dài như nhau tại mọi thớ dọc, nên ứng suất cũng như nhau trên tiết diện ta có quan hệ ứng suất và nội lực

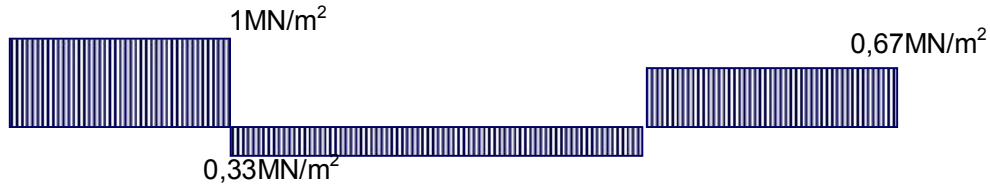
$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A \quad (5.2)$$

$$\rightarrow \sigma_x = \frac{N_x}{A} \tag{5.3}$$



Hình 5.4. Ứng suất dọc trục trường hợp khối và phẳng

Ví dụ thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a, giả thiết thanh có tiết diện không đổi với diện tích 20x30(cm) ta có biểu đồ ứng suất như trên hình 5.5



Hình 5.5. Biểu đồ ứng suất của thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a

5.4 Biến dạng của thanh

5.4.1 Biến dạng dài dọc trục

Theo định luật Hooke biến dạng dài dọc trục của một đơn vị chiều dài thanh là

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{EA} \tag{5.4}$$

Biến dạng dài dọc trục của một đoạn dx của thanh là

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \epsilon_x dx$$

Biến dạng dài dọc trục của thanh độ dài L, ký hiệu ΔL là

$$\Delta L = \int_L \epsilon_x dx = \int_L \frac{N_x}{EA} dx \tag{5.5}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên toàn bộ độ dài thì

$$\Delta L = \frac{N_x L}{EA} \tag{5.6}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên từng đoạn chiều dài L_i thì

$$\Delta L = \sum_i \left(\frac{N_x L}{EA} \right)_i \quad (5.7)$$

Khi EA là hằng số trên toàn bộ độ dài thì

$$\Delta L = \frac{\int N_x dx}{EA} = \frac{\Sigma N}{EA}, \text{ trong đó } \Sigma N \text{ là diện tích của biểu đồ lực dọc.} \quad (5.8)$$

5.4.2 Biến dạng ngang (theo phương ngang)

Trạng thái ứng suất trong bài toán kéo, nén thanh thẳng là trạng thái ứng suất đơn chỉ có thành phần σ_x , do vậy theo định luật Hooke

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x \quad (5.9)$$

Độ biến đổi diện tích mặt cắt ngang

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\nu \varepsilon \quad (5.10)$$

Độ biến đổi thể tích của thanh tính theo công thức

$$\Delta V = \frac{(1-2\nu)}{E} \sum \int N_x dx \quad (5.11)$$

Độ biến đổi thể tích của thanh chịu kéo (nén) bởi lực P ở hai đầu thanh

$$\Delta V = \frac{(1-2\nu)}{E} PL \quad (5.12)$$

5.4.3 Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.2) trong chương 3 ta có thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trạng thái ứng suất khối tổng quát

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Trong bài toán thanh chịu kéo, nén đúng tâm chỉ có ứng suất pháp theo phương dọc trục, như vậy ứng suất chính của trạng thái ứng suất đang xét

$$\sigma_1 = \sigma_x; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (5.13)$$

Thay (5.13) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.2) ta được

$$U = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 \quad (5.14)$$

Thay biểu thức của ứng suất pháp (5.3) vào (5.14) và lấy tích phân ta nhận được công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy sẽ có dạng

$$U = \sum \int \frac{N_x^2}{2EA} dx \quad (5.15)$$

5.4.4 Dịch chuyển tại các tiết diện

Khi thanh chỉ chịu kéo, nén ta chỉ có dịch chuyển dọc trục. Từ quan hệ ứng suất biến dạng và hệ thức Cauchy ta có phương trình vi phân để tìm dịch chuyển

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA}$$

Khi $\frac{N_x}{EA}$ là hằng số trên toàn bộ độ dài thì dịch chuyển dọc trục u là hàm bậc nhất

5.4.5 Dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Trình tự để tìm dịch chuyển đàn hồi các điểm của hệ thanh liên kết khớp như sau

- Xét điều kiện cân bằng tĩnh học để tìm lực dọc trục tại từng thanh
- Tính độ dãn tuyệt đối của từng thanh bằng định luật Hooke (5.5)
- Do các thanh không rời nhau khi biến dạng, bằng phương pháp đường giao nhau ta lập điều kiện chập dịch chuyển - quan hệ hình học giữa các thanh nối vào điểm đang xét
- Xác định các dịch chuyển cần tìm từ quan hệ hình học đã lập ở bước trên

Chú ý: Các thanh trong hệ không chỉ biến dạng dọc trục mà còn có thể quay quanh khớp nào đó. Như vậy mỗi điểm có thể dịch chuyển dọc trục thanh và dịch chuyển trên cung tròn có bán kính tương ứng. Thay cung tròn bằng đường vuông góc với bán kính quay vì biến dạng rất bé so với chiều dài.

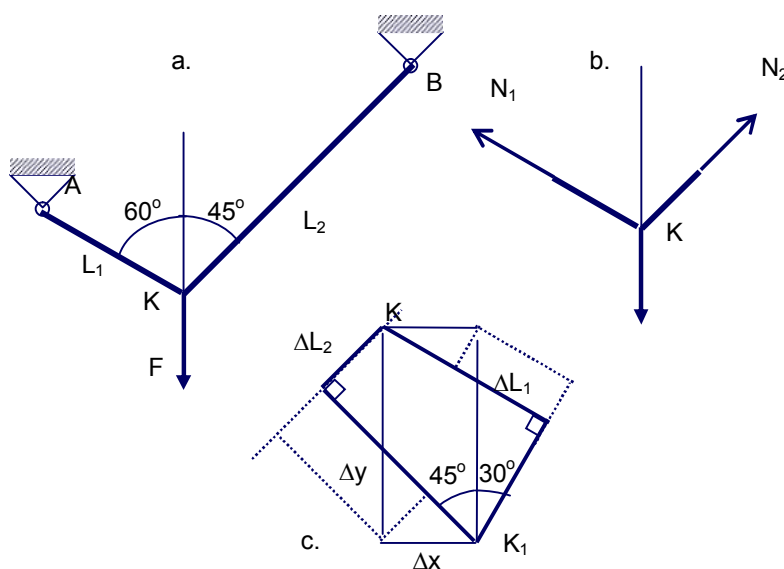
Ví dụ: Tìm dịch chuyển của điểm K trên hệ thanh liên kết khớp cho trên hình 5.6a

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học tại điểm K (hình 5.6b) ta tìm được các lực dọc trục N_1 và N_2

$$\begin{cases} N_1 \sin 60^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0 \\ N_1 \cos 60^\circ + N_2 \cos 45^\circ - F = 0 \end{cases} \rightarrow N_1 = 21,96 \text{ kN}; N_2 = 26,89 \text{ kN}$$

Tính độ dãn tuyệt đối của thanh AK (ΔL_1) và thanh BK (ΔL_2)

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = 5,38 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$



Hình 5.6. Ví dụ tìm dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Kéo dài thanh AK một đoạn ΔL_1 và thanh BK một đoạn ΔL_2 . Kẻ các đường vuông góc với AK và BK tại các điểm đã kéo dài ra. Giao điểm của hai đường vuông góc này sẽ là vị trí của điểm K sau biến dạng. Ta thiết lập điều kiện chấp dịch chuyển (hình 5.6c) nhận được hệ phương trình với ẩn là dịch chuyển của điểm K theo phương x và y

$$\begin{cases} \Delta L_1 = \Delta_x \cos 30^\circ + \Delta_y \sin 30^\circ; \\ \Delta L_2 = -\Delta_x \cos 45^\circ + \Delta_y \sin 45^\circ \end{cases}$$

Thay các giá trị của ΔL_1 và ΔL_2 và giải hệ phương trình trên ta xác định được vị trí của điểm K

$$\begin{cases} 2,2 \cdot 10^{-4} = 0,866\Delta_x + 0,5\Delta_y; \\ 5,38 \cdot 10^{-4} = -0,707\Delta_x + 0,707\Delta_y \end{cases}$$

$$\Delta_x = -0,118mm;$$

$$\Delta_y = 0,644mm$$

5.5 Độ bền và độ cứng

Điều kiện bền của thanh chịu kéo, nén đúng tâm có dạng

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma]_{k(n)} \quad (5.16)$$

Từ điều kiện bền ta có các bài toán

- Bài toán kiểm tra bền – khi có được biểu đồ lực dọc trục ta kiểm tra điều kiện (5.16) xem thanh có đủ bền không.
- Bài toán thiết kế tìm kích thước tiết diện chịu kéo hay chịu nén tính từ công thức

$$A = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]} \quad (5.17)$$

trong đó N_{\max} là giá trị tuyệt đối của lực dọc trục trên thanh, $[\sigma]$ là ứng suất cho phép của vật liệu về kéo hoặc về nén.

- Bài toán xác định trị số an toàn của N tức là xác định tải trọng dọc trục N cho phép tác động lên thanh sao cho đảm bảo điều kiện bền.

$$N_b \leq A[\sigma] \quad (5.18)$$

Ngoài kiểm tra bền ta còn phải kiểm tra độ cứng xem dịch chuyển của điểm nào đó không vượt quá giới hạn cho phép

$$\delta_{\max} \leq [\delta] \quad (5.19)$$

Trong bài toán thiết kế, khi điều kiện cứng không thỏa mãn, ta sẽ phải lựa chọn lại kích thước tiết diện sao cho điều kiện (5.19) thỏa mãn.

Ví dụ. Cho kết cấu chịu lực như trên hình vẽ 5.7. Thanh OAB cứng tuyệt đối. Cho $[\sigma] = 1600kG/cm^2$ và $[\delta_C] = 1,5mm$. Tìm diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền và đủ cứng.

Cắt thanh AB, thay thế bằng nội lực N. Xét cân bằng của thanh OAC ta tìm được nội lực trong thanh AB

$$Na - P \cdot 2a - q \frac{2a}{\cos 30^\circ} \cdot a = 0 \Rightarrow N = 2P + \frac{4a}{\sqrt{3}} q = 12T$$

Tính diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền, theo (5.16)

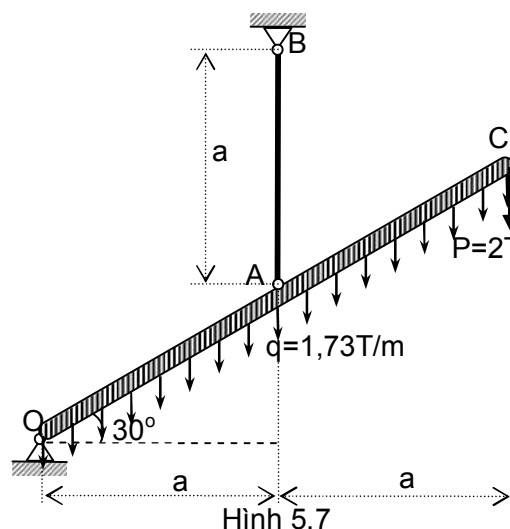
$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{12000}{1600} = 7,5 \text{ cm}^2$$

Tính độ dãn dài của thanh AB

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{NL}{EA} = \frac{12000 \cdot 100}{7,5 \cdot 2 \cdot 10^6} \\ &= 0,08 \text{ cm} = 0,8 \text{ mm} \end{aligned}$$

Tính dịch chuyển tại điểm C và kiểm tra điều kiện cứng (5.19)

$$\delta_c = \frac{2\Delta L}{\cos 30^\circ} = \frac{4 \cdot 0,8}{\sqrt{3}} = 1,847 \text{ mm} > [\delta_c]$$



Như vậy dịch chuyển tại điểm C lớn hơn dịch chuyển cho phép. Ta tính lại diện tích tiết diện sao cho thỏa mãn điều kiện cứng. Đặt

$$\delta_c = [\delta_c]$$

ta tính được độ dãn dài của thanh AB sao cho thỏa mãn điều kiện trên

$$\Delta L = \frac{\sqrt{3}}{4} [\delta_c] \approx 0,65 \text{ mm} = 0,065 \text{ cm}$$

Từ đây ta tính được diện tích tiết diện tương ứng

$$A = \frac{12000 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,065} = \frac{6}{0,65} = \frac{2}{0,25} \approx 9,23 \text{ cm}^2$$

5.6 Bài toán siêu tĩnh

Như đã định nghĩa hệ siêu tĩnh là hệ mà nếu chỉ dùng điều kiện cân bằng tĩnh học ta không thể xác định được nội lực. Ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng các điều kiện chập dịch chuyển. Quy trình giải bài toán như sau

- Bước 1. Lập phương trình cân bằng tĩnh học, xác định bậc siêu tĩnh của hệ

- Bước 2. Lập điều kiện chập dịch chuyển tức là xác định quan hệ hình học giữa các biến dạng của từng thành phần của hệ. Số phương trình hình học cần thiết lập phải bằng với số bậc siêu tĩnh của hệ.
- Bước 3. Dùng định luật Hooke viết biến dạng qua nội lực, thế vào quan hệ hình học đã lập ở bước trên đưa đến hệ phương trình gồm phương trình cân bằng và quan hệ hình học với ẩn là nội lực
- Bước 4. Giải hệ phương trình trên để tìm nội lực

Trường hợp có kể đến tải nhiệt độ ta tuân thủ quy trình trên nhưng trong bước 2 và bước 3 độ dẫn dài được tính không chỉ do tác động của nội lực mà còn do giãn nở nhiệt

$$\Delta l_T = l\alpha\Delta T$$

trong đó l là chiều dài thanh, α là hệ số dẫn nở nhiệt trung bình của vật liệu và ΔT – chênh lệch nhiệt độ.

Hệ siêu tĩnh chịu lực dọc trục, ngoài xác định nội lực còn có các bài toán.

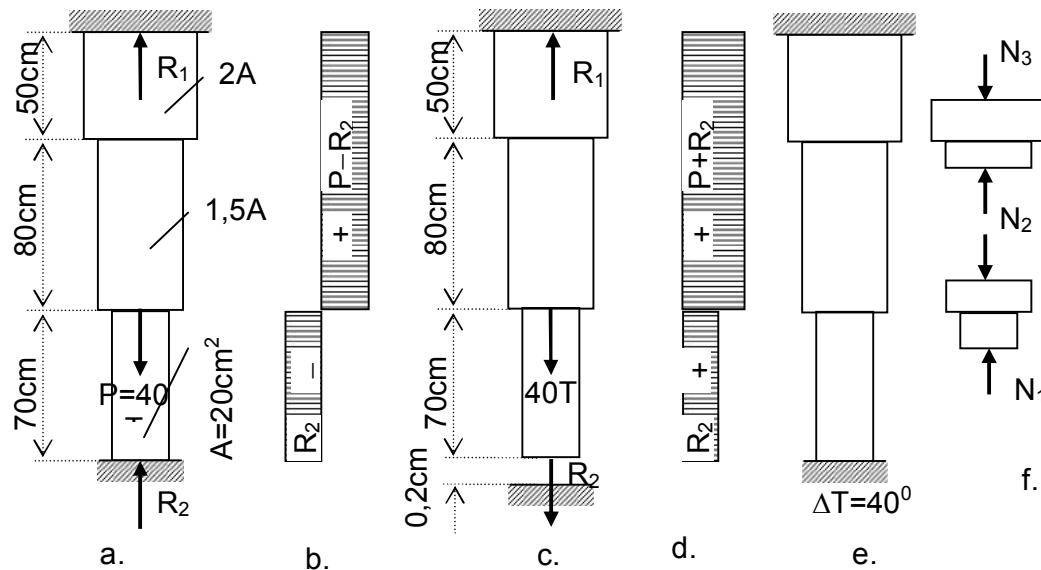
- Tính ứng suất lắp ghép: trong thực tế chiều dài của các thanh khi chế tạo có sai khác so với thiết kế, nên trong các điều kiện chập dịch chuyển ta có tính đến sai lệch này và tính được ứng suất lắp ghép sinh ra do sự sai lệch, này
- Xác định tải trọng tối đa theo ứng suất cho phép: ta chọn ứng suất lớn nhất bằng với ứng suất cho phép từ đó tính ra tải trọng cho phép lớn nhất
- Tính toán theo năng lực chịu tải: ta cho tất cả các ứng suất bằng ứng suất cho phép. Từ phương trình cân bằng tĩnh học ta tính ra tải trọng cực đại cho phép theo năng lực chịu tải. Đây chính là điều kiện chảy dẻo lí tưởng.

Ví dụ. Xét thanh với các sơ đồ chịu lực dọc trục như trên hình 5.8. Lấy $E=2.10^6 \text{ kG/cm}^2$ và hệ số dẫn nở nhiệt $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$

Ở đây ta xét ba trường hợp

- Thanh chịu lực dọc trục chịu ngàm hai đầu, số phản lực cần tìm là hai
- Thanh chịu lực dọc trục, nhưng có sai lệch ở đầu dưới, như vậy ta cần tìm phản lực ở đầu trên và ứng suất lắp ghép ở đầu dưới

- Thanh chịu tải nhiệt chịu ngàm hai đầu, ta cần tìm phản lực tại hai đầu như trường hợp thứ nhất



Hình 5.8

Ta nhận thấy đây là các bài toán siêu tĩnh vì ta chỉ có một phương trình cân bằng đối với lực dọc trục.

$$\sum F_x = 0$$

Ta sẽ xét thêm điều kiện chấp dịch chuyển, cụ thể cho từng trường hợp

- Trường hợp trên hình 5.8a. Ta giải phóng liên kết ngàm hai đầu và thay bằng hai phản lực R_1 và R_2 ta có phương trình cân bằng

$$R_1 - 40 + R_2 = 0$$

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như trên hình 5.8b.

Điều kiện chấp dịch chuyển sẽ là tổng độ dẫn dài của thanh bằng không.

$$\Delta L = 0$$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dẫn dài dựa trên biểu đồ lực dọc trục 5.8b

$$\Delta L = \frac{50(P - R_2)}{E \cdot 2A} + \frac{80(P - R_2)}{E \cdot 1,5A} - \frac{70R_2}{E \cdot A} = 0 \Rightarrow R_2 = 21,124T$$

Từ phương trình cân bằng ta tìm được

$$R_1 = 40 - R_2 = 18,876T$$

- Trường hợp trên hình 5.8c. Ta giải phóng liên kết ngàm thay bằng phản lực R_1 và đặt ở đầu dưới lực lấp ghép R_2 ta có phương trình cân bằng

$$R_1 - 40 - R_2 = 0$$

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như trên hình 5.8d.

Điều kiện chấp dịch chuyển sẽ là tổng độ dẫn dài của thanh bằng độ sai lệch.

$$\Delta L = \delta$$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dẫn dài dựa trên biểu đồ lực dọc trục 5.8d

$$\Delta L = \frac{50(R_2 + P)}{E \cdot 2A} + \frac{80(R_2 + P)}{E \cdot 1,5A} + \frac{70R_2}{E \cdot A} = \delta = 0,2 \Rightarrow R_2 = 32,81T$$

Từ phương trình cân bằng ta tìm được

$$R_1 = 40 + R_2 = 72,81T$$

- Trường hợp trên hình 5.8e. Do tác động của nhiệt độ các thanh đều dẫn nở như vậy xuất hiện nội lực gây nén dọc trục ta có phương trình cân bằng hình 5.8f

$$N_1 = N_2 = N_3 = N$$

Điều kiện chấp dịch chuyển sẽ là tổng độ dẫn dài của thanh bằng không.

$$\Delta L = 0$$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, ta tính tổng độ dẫn dài gồm cả dẫn nở nhiệt

$$\Delta L = l_1 \alpha \Delta t - \frac{Nl_1}{E2A} + l_2 \alpha \Delta t - \frac{Nl_2}{E1,5A} + l_3 \alpha \Delta t - \frac{Nl_3}{EA} = 0 \Rightarrow N \approx 24,27T$$

Kết luận chương 5

Chương năm trình bày bài toán thanh chịu kéo, nén đúng tâm. Với các giả thiết về biến dạng bài toán kéo, nén có trạng thái ứng suất đơn.

Trong hệ thanh dàn không gian chịu kéo, nén dịch chuyển tại các nút liên kết khớp có thể tìm được bằng phương pháp đường giao nhau ta lập được các quan hệ hình học.

Với các điều kiện bền và điều kiện cứng trong bài toán kéo, nén đúng tâm cho phép ta giải quyết ba bài toán cơ bản: kiểm tra bền của thanh chịu kéo, nén; thiết kế kích thước tiết diện ngang của thanh chịu kéo, nén và bài toán tìm tải trọng cho phép

Bài toán siêu tĩnh khi chỉ chịu kéo, nén cũng được xem xét. Khi đó ngoài phương trình cân bằng ta cần thiết lập các điều kiện chập dịch chuyển.

CHƯƠNG 6

Thanh thẳng chịu xoắn

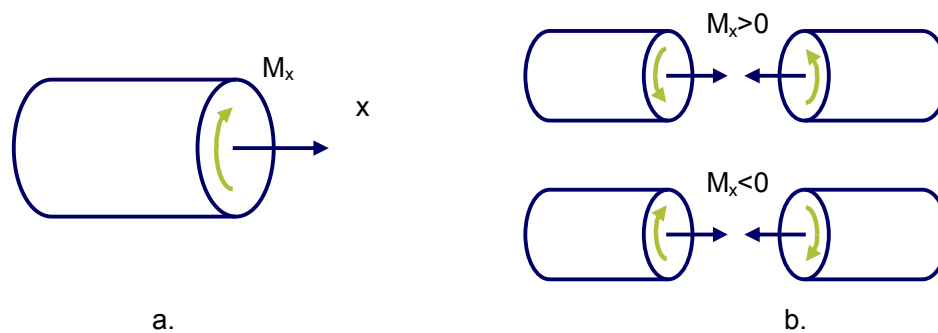
6.1 Định nghĩa

Thanh chịu xoắn thuần túy nếu nội lực trên tiết diện chỉ có một thành phần là mô men nằm trong mặt phẳng tiết diện được gọi là mô men xoắn (hình 6.1a)

Ngoại lực gây xoắn thường là những mô men, những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh

Ta có quy ước dấu nếu nhìn vào mặt cắt đang xét mô men quay ngược chiều kim đồng hồ là mô men dương và ngược lại (hình 6.1.b). Lưu ý đây là quy ước nên có thể có những tài liệu sẽ quy ước khác với ở đây.

Trong các mục đầu ở đây chỉ xét xoắn thanh tiết diện hình tròn.



Hình 6.1. a. Mô men xoắn và b. Quy ước dấu

6.2 Biểu đồ mô men xoắn

Mô men xoắn M_x cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Cắt một mặt cắt sau đó xét cân bằng mô men trên trục thanh của phần đang xét ta có độ lớn của mô men xoắn nội lực tại mặt cắt bằng tổng đại số tất cả các mô men ngoại lực (mô men tập trung M và mô men phân bố dọc theo trục thanh có cường độ m) tác dụng về một phía của mặt cắt. Công thức tổng quát

$$M_x = -\sum M - \sum \int m_x dx \quad (6.1)$$

Quan hệ bước nhảy của mô men xoắn và mô men ngoại lực tập trung

$$M_{x,ph} - M_{x,tr} = M \quad (6.2)$$

Quan hệ vi phân giữa mô men xoắn và mô men xoắn ngoại lực phân bố dọc trục

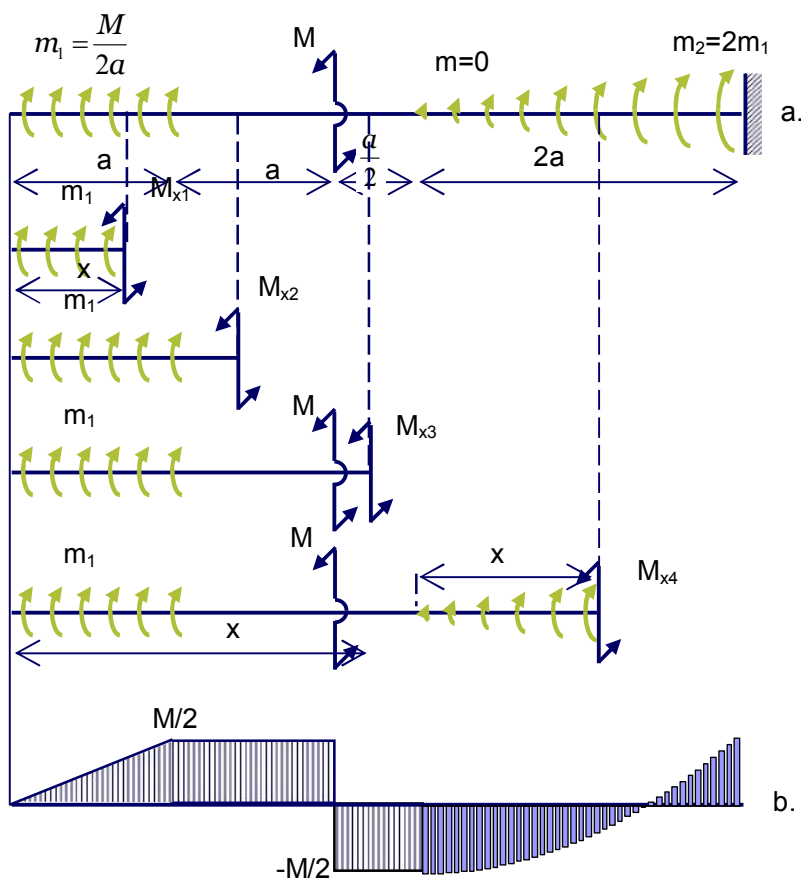
$$\frac{dM_x}{dx} = m_x \quad (6.3)$$

Ví dụ. Thanh chịu lực như trên hình 6.2a. Vẽ biểu đồ mô men xoắn.

- Xét mặt cắt với đoạn bên trái trong khoảng $0 < x < a$ ta có

$$M_{x1} - m_1 x = 0 \Rightarrow M_{x1} = \frac{M}{2a} x$$

suy ra tại $x = 0$, $M_{x1} = 0$ và tại $x = a$, $M_{x1} = \frac{M}{2}$



Hình 6.2. Ví dụ vẽ biểu đồ mô men xoắn

- Xét mặt cắt trong khoảng $a < x < 2a$ ta có

$$M_{x_2} - m_1 a = 0 \Rightarrow M_{x_2} = \frac{M}{2}$$

- Xét mặt cắt trong khoảng $2a < x < 2,5a$ ta có

$$M_{x_3} - m_1 a + M = 0 \Rightarrow M_{x_3} = -\frac{M}{2}$$

- Xét mặt cắt trong khoảng $2,5a < x < 4,5a$ ta có

$$M_{x_4} - m_1 a + M - \int_0^{\xi} \frac{2m_1}{2a} \xi d\xi = 0 \Rightarrow M_{x_4} = -\frac{M}{2} + \frac{M\xi^2}{4a^2} \quad \xi = [0, 2a]$$

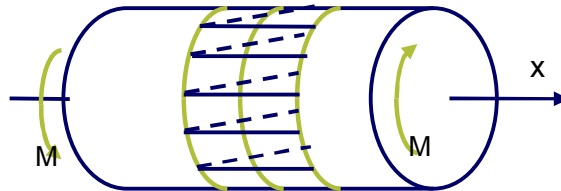
suy ra tại $\xi = 0$, $M_{x_4} = -\frac{M}{2}$, $\xi = 2a$, $M_{x_4} = \frac{M}{2}$ và $M_{x_4} = 0$ khi $\xi = a\sqrt{2} = 1,42a$

Biểu đồ mô men xoắn có dạng như trên hình 6.2b

6.3 Ứng suất tiếp

6.3.1. Giả thiết về biến dạng

Xét thanh tiết diện tròn chịu xoắn. Kẻ các đường sinh và các đường tròn chu tuyến



Hình 6.3. Giả thiết về biến dạng khi thanh chịu xoắn

Cho thanh chịu mô men xoắn M ở hai đầu, với biến dạng bé đàn hồi ta có nhận xét

- Chiều dài thanh và khoảng cách giữa các đường tròn hầu như không đổi. Các góc vuông thay đổi
- Các đường tròn vẫn phẳng, bán kính không thay đổi. Mặt phẳng chứa các đường tròn xoay quanh trục, góc xoay của các vòng tròn khác nhau

Ta chấp nhận các giả thiết

- Thanh không có biến dạng dọc trục

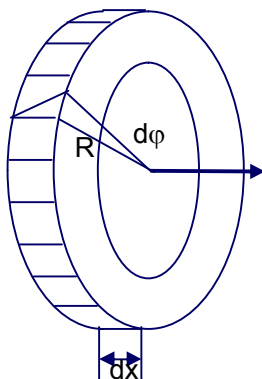
- Tiết diện thanh vẫn phẳng chỉ xoay đi một góc φ và góc xoay là hàm của tọa độ x (Lưu ý tiết diện không là hình tròn thì giả thiết này không phù hợp)
- Bán kính tiết diện vẫn thẳng và không thay đổi chiều dài
- Các lớp vật liệu dọc trục không tác dụng tương hỗ (bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt song song với trục)

Theo các giả thiết trên, tại tiết diện chỉ tồn tại ứng suất tiếp các ứng suất pháp bằng không

6.3.2. Công thức ứng suất tiếp trên tiết diện

Khảo sát biến dạng của một phần tử thanh có chiều dài dx .

Tiết diện bên trái tại tọa độ x có góc quay là φ . Tiết diện bên phải tại tọa độ $x+dx$ góc quay là $\varphi+d\varphi$. Bán kính của tiết diện bên phải cũng quay đi một góc là $d\varphi$. (Hình 6.4)



Hình 6.4. Biến dạng của phần tử thanh chịu xoắn

Xét phần tử trụ tròn bán kính ρ , góc xoắn của bán kính ρ cũng là $d\varphi$ (hình 6.5a).

Biến dạng góc vuông ở mặt bên của phần tử con. (Hình 6.5b)

$$\gamma = \frac{AB}{dx} = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho\theta. \quad (6.5)$$

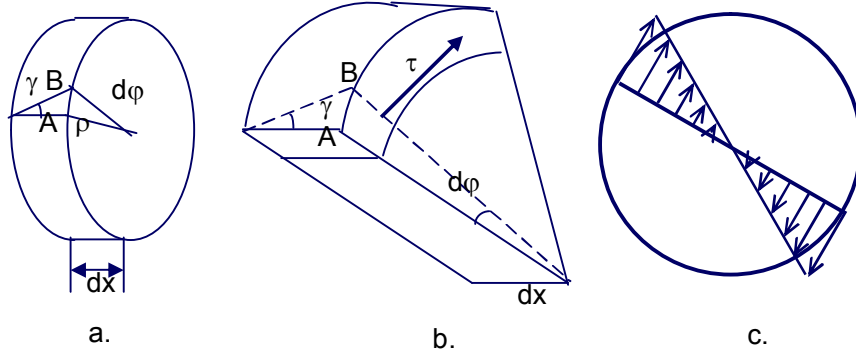
Trị số θ là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (6.6)$$

Theo định luật Hook ứng suất tiếp quan hệ với góc quay tương đối bằng

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta \quad (6.7)$$

trong đó G mô đun đàn hồi trượt



Hình 6.5. Phân tố trụ tròn và biểu đồ ứng suất tiếp

Theo định nghĩa

$$M_x = \int_A \tau \rho dA = \int_A G\theta \rho^2 dA \quad (6.8)$$

Tích $G\theta = \text{const}$, vậy

$$G\theta = \frac{M_x}{\int_A \rho^2 dA} = \frac{M_x}{I_p} \quad (6.9)$$

trong đó $I_p = \int_A \rho^2 dA$ mô men quán tính độ cực của mặt cắt. Như vậy ứng suất tiếp

biểu diễn qua mô men xoắn bằng công thức

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho \quad (6.10)$$

Từ biểu đồ ứng suất tiếp (hình 6.5c) ta có

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_p} R = \frac{M_x}{W_p} \quad (6.11)$$

trong đó $W_p = \frac{I_p}{R}$ mô men chống xoắn của mặt cắt.

Đối với tiết diện tròn bán kính R ta có

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \text{ trong đó } D = 2R \text{ đường kính} \quad (6.12)$$

Đối với tiết diện hình vành khăn bán kính ngoài R và bán kính trong r ta có

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \quad W_p = \frac{\pi R^3}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \quad (6.13)$$

trong đó $\alpha = r/R = d/D$, $d = 2r$.

6.4 Biến dạng và dịch chuyển

6.4.1. Biến dạng

Từ công thức (6.7) và (6.10) góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài bằng

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \quad (6.14)$$

Từ 6.6) và (6.14) ta tính được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện cách nhau dx chiều dài

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_p} dx \quad (6.15)$$

Tích phân (6.15) ta nhận được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai đầu thanh độ dài L gọi là góc xoắn

$$\varphi = \int_L \theta dx = \int_L \frac{M_x}{GI_p} dx \quad (6.16)$$

Khi $\frac{M_x}{GI_p} = const$ trên cả chiều dài ta có

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (6.17)$$

Khi $\frac{M_x}{GI_p} = const$ trên từng đoạn chiều dài L_i

$$\varphi = \sum_i \frac{M_x L_i}{GI_p} \quad (6.18)$$

Người ta gọi GI_p là độ cứng chống xoắn của thanh

6.4.2. Dịch chuyển

Góc xoắn φ xác định từ quan hệ vi phân (6.15)

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_p} dx$$

$$\varphi = \int_L \frac{M_x}{GI_p} dx + C \quad (6.19)$$

trong đó C là hằng số tích phân xác định từ điều kiện liên kết

Ví dụ. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp ở mép ngoài tiết diện τ_{\max} và góc xoắn φ cho thanh tròn đường kính d chịu lực như trên hình 6.7a

– Xét mặt cắt từ bên trái trong khoảng $0 < x < l$ ta có

$$M_{x1} = M = ml; \quad \tau_{\max1} = \frac{M_{x1}}{W_x} = \frac{16ml}{\pi d^3}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $l < x < 2,5l$ ta có

$$M_{x2} = M + 2M = 3ml; \quad \tau_{\max2} = \frac{M_{x2}}{W_x} = \frac{48ml}{\pi d^3}$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2,5l < x < 4,5l$ ta có

$$M_{x3} = M + 2M - 5M + m\xi = m(\xi - 2l) \quad \xi = [0, 2l]$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x3}}{W_x} = \frac{16m(\xi - 2l)}{\pi d^3} \quad \xi = [0, 2l]$$

tại $\xi = 0$, $M_{x3} = -2ml$, $\tau_{\max3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = -\frac{32ml}{\pi d^3}$, $\xi = 2l$, $M_{x3} = 0$, $\tau_{\max3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = 0$. Ta

có biểu đồ τ_{\max} như trên hình 6.7c

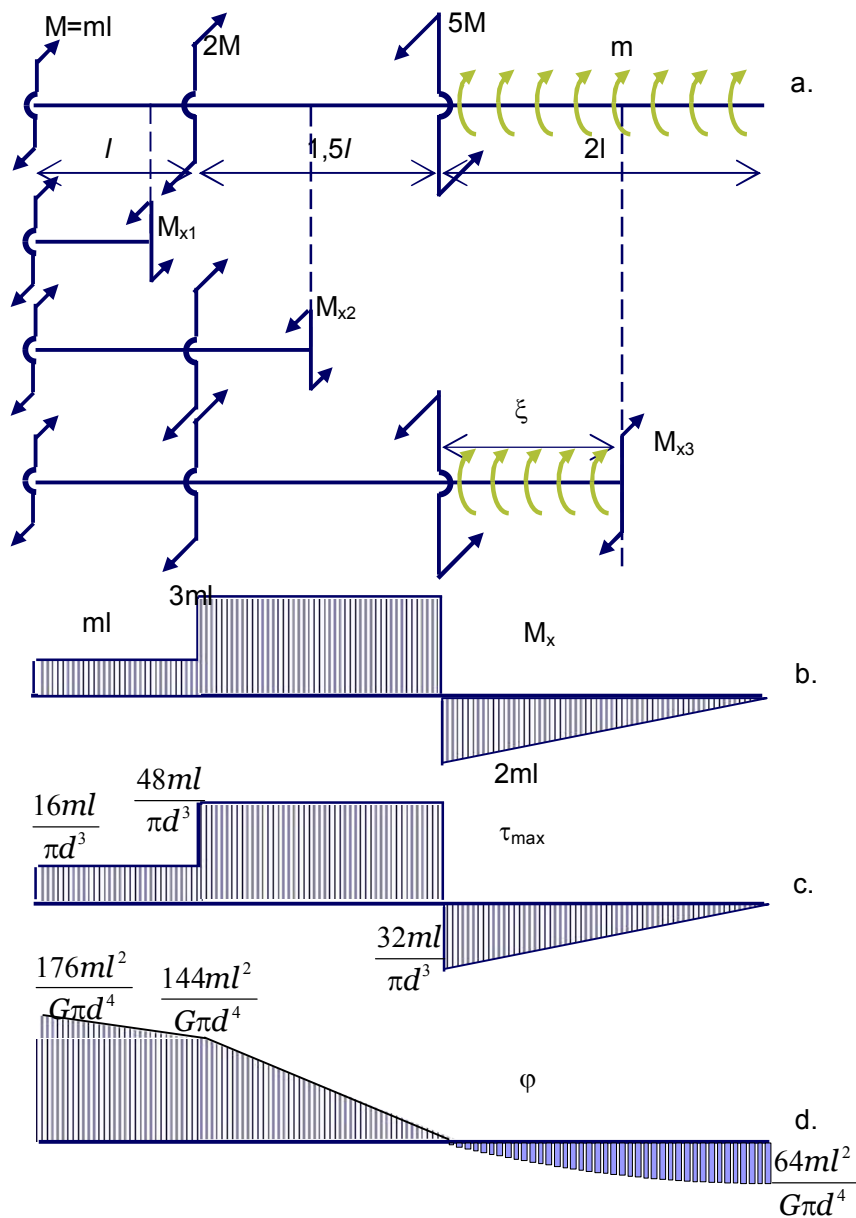
Hai đoạn đầu có $\frac{M_x}{GI_p} = \text{const}$ trên từng đoạn. Góc xoắn giữa tiết diện đầu và

cuối đoạn I là

$$\varphi_I = \frac{M_{x1}L_1}{GI_p} = \frac{ml^2}{GI_p} = \frac{32ml^2}{G\pi d^4}$$

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn II là

$$\varphi_{II} = \frac{M_{x2} L_2}{GI_p} = \frac{4,5ml^2}{GI_p} = \frac{144ml^2}{G\pi d^4}$$



Hình 6.6. Ví dụ tính góc xoắn và ứng suất tiếp

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn III là

$$\varphi_{III} = \frac{m}{GI_p} \int_0^{2l} (\xi - 2l) d\xi = \frac{m}{GI_p} \left(\frac{\xi^2}{2} - 2l\xi \right) \Big|_0^{2l}$$

tại $\xi = 0$ ta có $\varphi_{III} = 0$, tại $\xi = 2l$ ta có $\varphi_{III} = \frac{M_{x1}L_1}{GI_p} = -\frac{2ml^2}{GI_p} = -\frac{64ml^2}{G\pi d^4}$.

Như vậy biểu đồ góc xoắn φ như trên hình 6.7d

6.4.3. Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.2) trong chương 3 ta có thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trạng thái ứng suất khối tổng quát

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Trong bài toán xoắn thuần túy thanh tiết diện tròn ta chỉ có ứng suất tiếp τ trên mặt cắt vuông góc với trục thanh, như vậy ứng suất chính của trạng thái ứng suất đang xét

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_3 = -\tau; \sigma_2 = 0 \quad (6.20)$$

Thay (6.20) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.2) ta được

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 \quad (6.21)$$

Thay biểu thức của ứng suất tiếp (6.10) vào (6.21) và lưu ý đến mô đun trượt $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ta nhận được

$$u = \frac{1}{2G} \frac{M_x^2}{I_p^2} \rho^2 \quad (6.22)$$

Công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy sẽ có dạng

$$U = \sum \int \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (6.23)$$

6.5 Độ bền và độ cứng

6.5.1. Điều kiện bền

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau] \quad (6.24)$$

– Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (6.25)$$

- Theo thuyết bền thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng cực đại

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (6.26)$$

Như đã nói trong phần nhập môn ta có 3 bài toán cơ bản:

- Bài toán kiểm tra: ta kiểm tra điều kiện bền (6.24) xem có thỏa mãn không.
- Bài toán thiết kế: lựa chọn kích thước tiết diện từ điều kiện bền

$$W_p \geq \frac{\max |M_x|}{[\tau]} \quad (6.27)$$

- Bài toán xác định tải trọng cho phép M_b từ điều kiện (6.24) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ bền

6.5.2. Điều kiện cứng

$$\varphi_{\max} = \frac{\max |M_x| l_\varphi}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (6.28)$$

Tương tự đối với từng bài toán

- Bài toán kiểm tra: ta kiểm tra điều kiện cứng (6.28) xem có thỏa mãn không.
- Bài toán thiết kế ta tính góc xoắn φ dựa trên kích thước tiết diện đã chọn từ điều kiện bền (6.24). Ta kiểm tra điều kiện cứng (6.28), nếu thỏa mãn không cần chọn lại kích thước. Nếu điều kiện (6.28) không thỏa mãn ta lựa chọn lại kích thước theo tiêu chuẩn

$$I_p \geq \frac{\max |M_x| l_\varphi}{G[\varphi]} \quad (6.29)$$

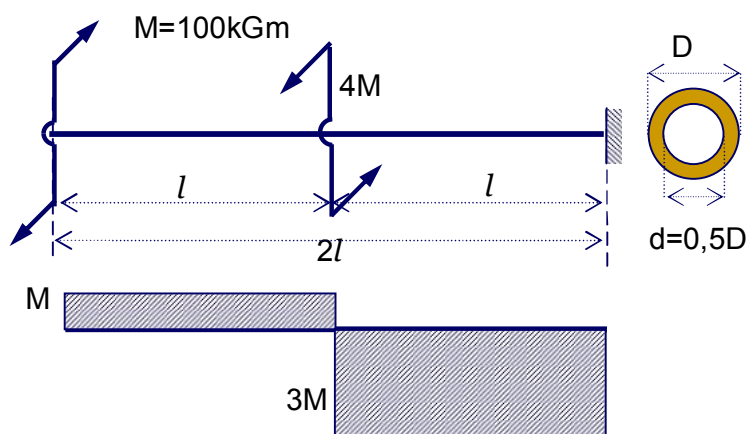
trong đó l_φ là độ dài đoạn thanh người ta cho biết góc xoắn cho phép.

- Bài toán xác định tải trọng cho phép M_c từ điều kiện (6.28) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ cứng. Tải trọng cho phép M sẽ là $\max(M_b, M_c)$

Ví dụ. Thanh tiết diện hình vành khăn chịu xoắn như trên hình 6.7. Ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 500 \text{ kG/cm}^2$

- Bước 1. Vẽ biểu đồ moment xoắn
- Bước 2. Tìm τ_{\max}

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^3}{D^3}\right)} = \frac{300 \cdot 16}{\pi D^3 (1 - 0,5^3)}$$



Hình 6.7

- Bước 3 Từ điều kiện bền (6.27) xác định đường kính ngoài D, theo thông số ban đầu tỉ lệ giữa đường kính trong và đường kính ngoài là 0,5

$$W_{\max} = \frac{M_{\max}}{[\tau]} \rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau]\pi(1-\alpha^3)}} = \sqrt[3]{\frac{480000}{500\pi(1-0,5^4)}} = 6,88\text{cm}$$

- Bước 4 Kiểm tra điều kiện về độ cứng (6.28). Từ kích thước tìm được ta tính mô men quán tính

$$I = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = 206,4\text{cm}^4$$

sau đó tính

$$\frac{M_{\max} l_p}{G[\varphi]} = \frac{30000 \cdot 100 \cdot 180}{800000 \cdot 2 \cdot \pi} = 107,43\text{cm}^4$$

Ta thấy là điều kiện cứng thỏa mãn $I > \frac{M_{\max} l_p}{G[\varphi]}$ suy ra ta chọn kích thước đã tính

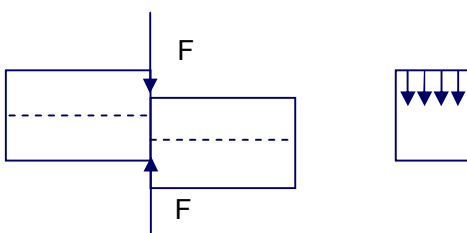
được ở bước 3

$$D = 6,88\text{cm}; \quad d = 3,44\text{cm}$$

6.6 Thanh chịu cắt

Biến dạng cắt hay biến dạng trượt là một trường hợp chịu lực của thanh mà trên tiết diện cũng chỉ có các ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp này có phương chiều của lực cắt F và phân bố đều trên diện tích A của mặt cắt (hình 6.8) ta có công thức tính ứng suất tiếp khi thanh chịu cắt

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (6.30)$$



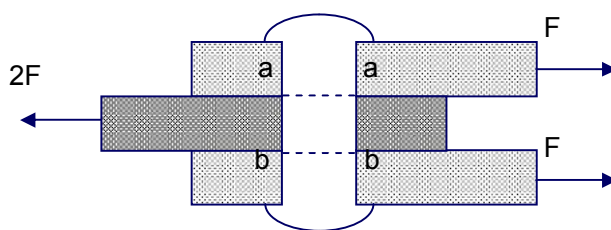
Hình 6.8. Thanh chịu cắt

Điều kiện bền khi cắt

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau]$$

Điều kiện bền này để kiểm tra các liên kết: đinh tán, bu lông, mối hàn

Ví dụ: Xét đinh tán có đường kính d liên kết ba tấm phẳng (hình 6.9)



Hình 6.9. Đinh tán bu lông – kiểm tra biến dạng trượt

Liên kết của đinh tán ở hai mặt cắt a-a và b-b, tại đó đinh tán chịu lực cắt F trên diện tích

$$A = 2\pi d^2 / 4$$

Khi đinh tán có n mặt cắt thì

$$A = n\pi d^2 / 4 \quad (6.31)$$

Một dạng phá hủy khác của đỉnh tán do sự ép trên bề mặt tiếp xúc (hình 6.10). Sự phân bố ứng suất trên bề mặt tiếp xúc rất phức tạp. Đáng giá gần đúng thông qua trị số trung bình

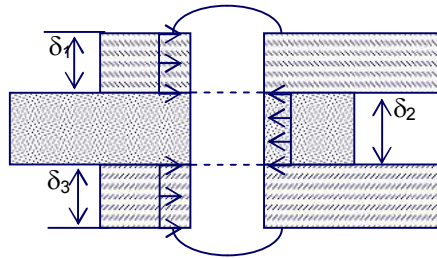
$$\sigma_{em} = \frac{F}{A_{em}} \leq [\sigma]_{em} \quad (6.32)$$

trong đó:

F - tổng lực kéo về một phía

A_{em} - diện tích ép mặt quy ước

σ_{em} - ứng suất ép mặt quy ước.



Hình 6.10. Kiểm tra ứng suất ép tại các mặt tiếp xúc

Diện tích ép mặt quy ước được tính như sau:

- Giữa đỉnh tán và vách lỗ của tấm thứ hai, diện tích ép mặt quy ước bằng

$$A_{em} = d \cdot \delta_2$$

- Giữa đỉnh tán và vách lỗ của tấm thứ nhất và tấm thứ ba có diện tích ép mặt quy ước bằng

$$A_{em} = d(\delta_1 + \delta_3)$$

Tổng quát hóa diện tích ép mặt quy ước được tính bằng

$$A_{em} = \sum d\delta_i = d \sum \delta_i \quad (6.33)$$

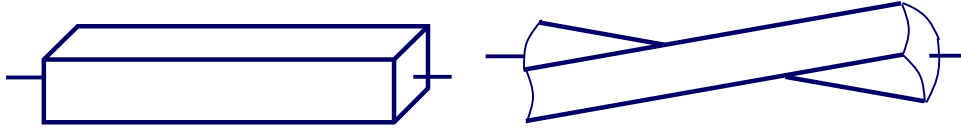
trong đó

d: đường kính lỗ đỉnh,

δ_i : bề dày tấm i.

6.7 Xoắn thanh tiết diện chữ nhật

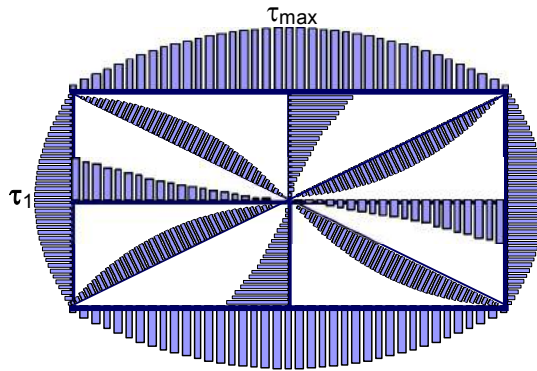
Khi thanh tiết diện hình chữ nhật chịu xoắn, thì mặt phẳng vuông góc với trục của thanh sẽ bị biến dạng vênh khỏi mặt phẳng ban đầu (hình 6.11)



Hình 6.11. Thanh chịu xoắn hình chữ nhật

Lúc này giả thiết về tiết diện phẳng không thỏa mãn, lời giải của bài toán xoắn thanh tiết diện hình chữ nhật đã được Saint-Venant giải dùng phương pháp nửa ngược. Theo Saint-Venant biểu đồ phân bố ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ nhật khi thanh chịu xoắn có dạng như trên hình 6.12. Từ biểu đồ này có các nhận xét sau

- tại trung tâm ứng suất tiếp bằng không $\tau = 0$



Hình 6.12. Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn

- tại trung điểm cạnh dài ứng suất tiếp có giá trị lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_x} \quad (6.34)$$

- tại trung điểm cạnh ngắn ứng suất tiếp tính qua ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_1 = \beta \tau_{\max} \quad (6.35)$$

- góc xoắn trên một đơn vị dài

$$\theta = \frac{M_z}{GI_x} \quad (6.36)$$

trong đó

$$W_x = \alpha hb^2; \quad I_x = \gamma hb^3 \quad (6.37)$$

Các giá trị α , β và γ phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh h và b của hình chữ nhật cho trong bảng 6.1

Bảng 6.1. Các hệ số α , β , γ theo tỉ số các cạnh h/b

h/b	1,0	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,339
β	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742
γ	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	,0313	0,333

Khi tỉ số $h/b \geq 10$ có thể lấy $\alpha = \gamma = 1/3 = 0,333$

6.8 Bài toán siêu tĩnh

Cũng như bài toán thanh chịu kéo hay nén đúng tâm, trong hệ siêu tĩnh chịu xoắn ta cũng phải tìm những điều kiện chấp dịch chuyển (quan hệ hình học giữa các dịch chuyển) để bổ sung vào các phương trình cân bằng tĩnh học. Trong bài toán xoắn để lập các điều kiện chấp ta xem xét các điều kiện liên kết, chúng có các dạng sau

- Thanh có hai đầu ngàm chặt: điều kiện chấp dịch chuyển là tổng đại số các góc xoắn trên tất cả các đoạn thanh phải bằng không
- Thanh có một đầu liên kết đàn hồi thì góc xoay của đầu đàn hồi không bằng không mà tỉ lệ với độ lớn mô men phản lực
- Thanh có hai đầu liên kết đàn hồi thì góc xoắn toàn phần bằng hiệu góc xoay của hai mặt cắt ở hai đầu
- Khi trong hệ có một số thanh chịu xoắn, một số thanh chịu kéo (hay nén) thì dịch chuyển sẽ là góc xoắn đối với thanh chịu xoắn và là dịch chuyển dọc đối với thanh chịu kéo (hay nén)

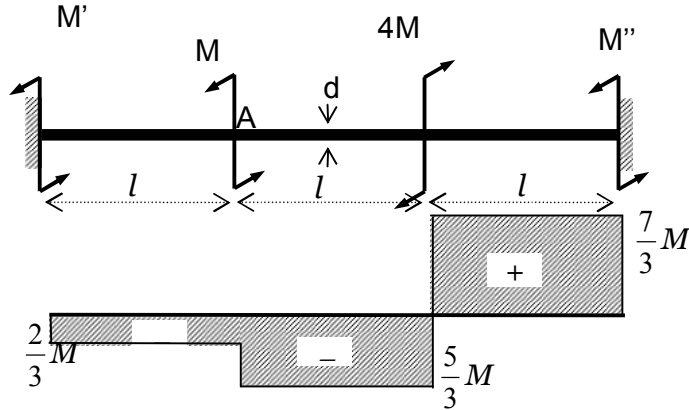
Ví dụ. Cho kết cấu như trên hình 6.13, biết I , M , d , G . Tìm τ_{\max} và φ_A

Thanh chỉ chịu mô men xoắn, nên có thể thay thế ngàm bằng các mô men phản lực M' và M'' . Từ điều kiện cân bằng ta có

$$M' + M'' + M - 4M = 0$$

Điều kiện chấp dịch chuyển chính là tổng đại số góc xoắn của thanh bằng không.

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0$$



Hình 6.13

Ta tính góc xoắn tương đối cho từng đoạn

$$\varphi_I = -\frac{M'l}{I_p G}, \quad \varphi_{II} = -\frac{(M' + M)l}{I_p G}, \quad \varphi_{III} = \frac{(4M - M' - M)l}{I_p G}$$

Thế vào điều kiện tổng đại số các góc xoắn bằng không

$$\frac{l}{I_p G} (-M' - M' - M - M' - M + 4M) = 0 \Rightarrow M' = \frac{2}{3}M$$

Từ điều kiện cân bằng ta tìm được \$M''\$

$$M' + M'' + M - 4M = 0 \Rightarrow M'' = \frac{7M}{3},$$

Như vậy cả hai phản lực đều có chiều như trên hình vẽ. Ứng suất tiếp lớn nhất ở đoạn thứ 3

$$\tau_{\max} = \frac{7M}{3W_p} = \frac{112M}{3\pi d^3}.$$

Góc xoắn tương đối tại điểm A

$$\varphi_A = \frac{2Ml}{3GI_p} = \frac{2Ml}{3\pi G}.$$

Kết luận chương 6

Chương sáu trình bày bài toán xoắn thanh tiết diện tròn. Với các giả thiết về biên dạng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn ta có công thức tính ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp đạt cực đại ở mép ngoài của tiết diện.

Giới thiệu lời giải của bài toán Saint Venant cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn. Ứng suất tiếp lớn nhất ở điểm giữa của cạnh dài. Đưa ra bảng các hệ số phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh để tính toán cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn.

Bài toán thanh chịu cắt và ứng dụng trong kiểm tra bền cho các mối nối cũng được xem xét trong chương này.

Bài toán siêu tĩnh trong trường hợp thanh chịu xoắn được trình bày ngắn gọn. Hướng dẫn cách lập các điều kiện chập chuyển vj trong trường hợp thanh chịu xoắn.

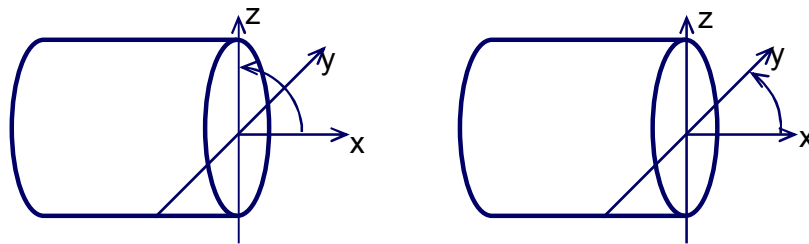
CHƯƠNG 7

Thanh thẳng chịu uốn

7.1 Định nghĩa

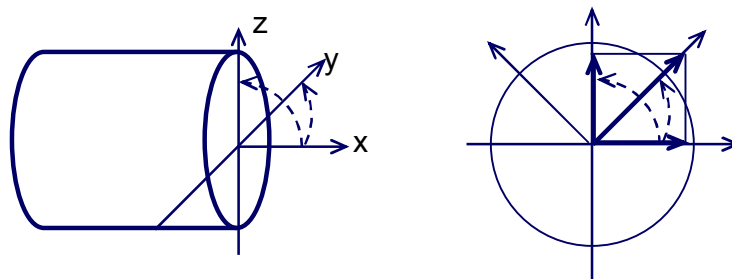
Thanh chịu uốn khi trục thanh thay đổi độ cong. Mặt phẳng uốn là mặt phẳng chứa trục thanh và mô men uốn. Mặt phẳng quán tính chính là mặt chứa trục thanh Ox và trục quán tính chính trung tâm y hoặc z

Nếu mặt phẳng uốn trùng với mặt phẳng quán tính chính ta có trường hợp thanh chịu uốn phẳng



Hình 7.1. Uốn phẳng

Nếu mặt phẳng uốn không trùng với mặt phẳng quán tính chính ta có trường hợp thanh chịu uốn không gian



Hình 7.2. Uốn không gian

Luôn luôn có thể phân tích mô men uốn $M_u = M_y + M_z$ trong hai mặt phẳng quán tính chính, như vậy uốn không gian là tổ hợp của uốn phẳng

Trường hợp thanh chịu uốn có cả lực cắt ta gọi là uốn ngang

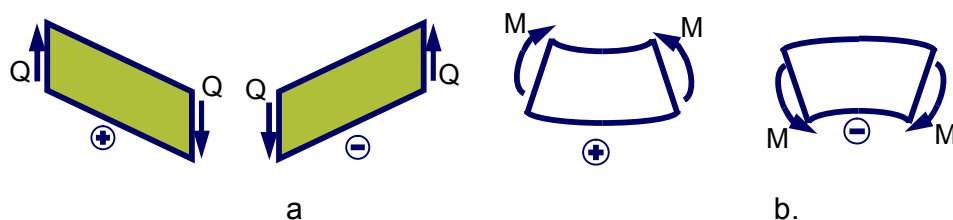
Trường hợp thanh chịu uốn không có lực cắt ta gọi là uốn thuần túy

7.2 Biểu đồ lực cắt và mô men uốn

Tương tự như lực dọc trục trong thanh chịu kéo, nén, mô men xoắn trong thanh chịu xoắn, lực cắt và mô men uốn trong bài toán uốn thanh cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Lực cắt Q_y tại mặt cắt nào đó bằng tổng hình chiếu lên trục y của tất cả ngoại lực (lực tập trung và lực phân bố) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Còn mô men uốn M_z tại mặt cắt đó bằng tổng đại số các mô men của tất cả những ngoại lực (tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt).

Quy tắc dấu của lực cắt và mô men uốn cho trên hình 7.3. Như đã nêu trong chương 1

- Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn ta xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt
- Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng là dương khi đoạn ta xét bị cong võng xuống (hứng nước) dưới tác động của mô men



Hình 7.3. Quy ước dấu. a. Lực cắt và b. mô men uốn

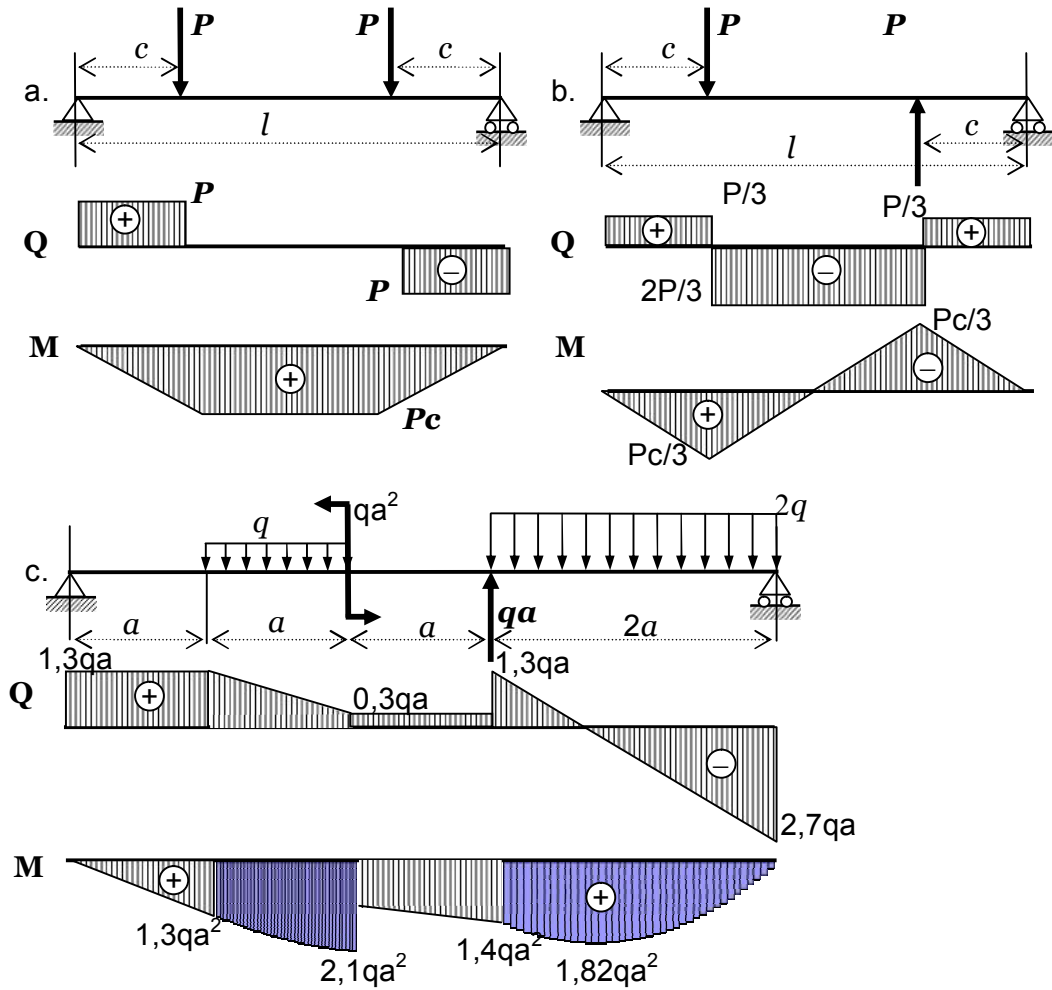
Khi vẽ biểu đồ nội lực ta nên vẽ biểu đồ lực cắt Q trước, biểu đồ mô men uốn M sau. Khi thanh không chịu ngẫu lực uốn phân bố ta có thể sử dụng quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng (1.21)

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

trong đó q là mật độ tải trọng phân bố.

Từ quan hệ vi phân này ta có những nhận xét sau về biểu đồ nội lực Q và M

- Dầm có tải trọng đối xứng và liên kết đối xứng (hình 7.4a) biểu đồ lực cắt Q sẽ phản đối xứng, còn biểu đồ mô men M đối xứng. Ngược lại (hình 7.4b) khi dầm chịu tải phản đối xứng thì biểu đồ Q đối xứng, còn biểu đồ M phản đối xứng



Hình 7.4. Các ví dụ vẽ biểu đồ lực cắt và mô men uốn

- Tại vị trí có đặt lực tập trung, trên biểu đồ Q có bước nhảy mà độ lớn bằng với giá trị của lực tập trung. Tương tự tại vị trí đặt ngẫu lực uốn, biểu đồ mô men uốn M cũng có bước nhảy với độ lớn bằng giá trị của ngẫu lực
- Tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ mô men uốn M với trục thanh sẽ bằng lực cắt Q và cường độ của tải phân bố bằng tăng của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ lực cắt Q với trục thanh
- Nếu trên một đoạn dầm tải trọng phân bố biến đổi theo hàm đại số, thì trên đoạn đó biểu đồ lực cắt biến đổi theo hàm cao hơn một bậc và mô men uốn biến đổi theo hàm cao hơn một bậc so với hàm của lực cắt. Biểu đồ mô men của ví dụ

trên hình 7.4c cho ta thấy đoạn có lực phân bố đều, biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất, còn biểu đồ mô men là hàm bậc hai

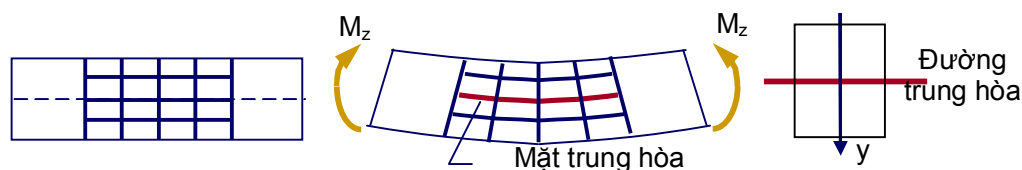
- Tại vị trí mà lực cắt có giá trị bằng không thì mô men uốn có giá trị cực trị. Trong đoạn ngoài cùng bên phải của thanh trong ví dụ 7.4c biểu đồ lực cắt bằng không tại điểm cách gối 1,35a. Tại điểm này biểu đồ mô men đạt cực trị
- Tại vị trí lực cắt có bước nhảy đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn thay đổi độ dốc, như biểu đồ mô men của trường hợp b trên hình 7.4. Nếu lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn bị gãy. Ví dụ trên hình 7.4c tại điểm đặt lực tập trung q_a biểu đồ lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu do vậy biểu đồ mô men bị gãy khúc ở đó
- Nếu xét mặt cắt từ phải sang trái thì $Q = -\frac{dM}{dx}$.

7.3 Ứng suất trong bài toán uốn

7.3.1 Uốn thuần túy

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng quán tính chính



Hình 7.5. Các giả thiết thanh uốn thuần túy

Quan sát biến dạng ta có nhận xét

- Những đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng
 - Các đường kẻ song song với trục bị cong, các đường phía trên co lại, các đường phía dưới dãn ra nhưng vẫn cách đều
 - Các góc vuông vẫn bảo toàn
- Trên cơ sở đó ta giả thiết
- Trước và sau biến dạng tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục

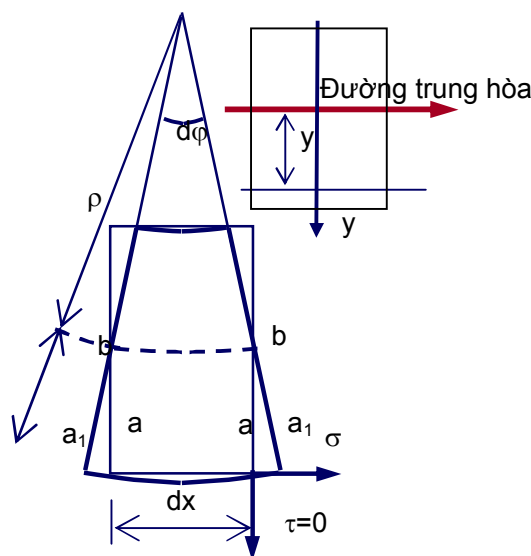
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ lên nhau, có thể bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$
- Tồn tại lớp vật liệu song song với trục thanh có chiều dài không đổi gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với tiết diện là một đường thẳng gọi là đường trung hòa

Hai giả thiết đầu giống trong bài toán thanh chịu kéo và thanh chịu xoắn. Giả thiết thứ ba là giả thiết về sự chấp nhận biến dạng bé.

Công thức tính ứng suất

Xét phân tử có chiều dài dx

- $d\varphi$ góc giữa hai tiết diện
- ρ bán kính cong của lớp trung hòa
- z - đường trung hòa trên tiết diện



Hình 7.6. Phân tử chịu uốn

Biến dạng tỉ đối theo phương x

$$\varepsilon_x = \frac{a_1 a_1 - a a}{a a} = \frac{a_1 a_1 - b b}{b b} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Các góc vuông không đổi nên ứng suất tiếp trên tiết diện đang xét bằng không, vì $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$ nên ứng suất pháp

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ey}{\rho} \quad (7.1)$$

Khi chịu uốn trong mặt phẳng xy chỉ tồn tại mô men uốn M_z còn lực dọc N và moment uốn M_y bằng không

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0; \quad M_y = \int_A z\sigma_x dA = 0; \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA$$

Thay biểu thức của σ_x chú ý $\frac{E}{\rho} = const$ ta có:

$$\int_A y dA = 0; \quad \int_A zy dA = 0$$

Mô men tĩnh đối với trục trung hòa và mô men quán tính ly tâm với hệ trục yz của tiết diện bằng không. Suy ra trục trung hòa z là trục đi qua trọng tâm vuông góc với mặt phẳng uốn, hệ trục yz là hệ trục quán tính chính

Khi xác định vị trí của trục trung hòa, ta tìm được biểu thức của bán kính cong

$$M_z = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (7.2)$$

Ta có biểu thức để tính ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} y \quad (7.3)$$

Dấu của mô men: mô men dương làm căng phía dưới của thanh, mô men âm làm căng phía trên của thanh

Biểu đồ, trị số lớn nhất của ứng suất pháp

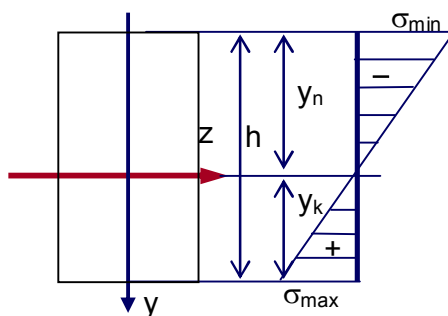
Ứng suất pháp tỉ lệ với khoảng cách đến trục trung hòa. Biểu đồ là đường bậc nhất bằng không tại trục trung hòa và có trị số lớn nhất tại hai mép

Ký hiệu y_k và y_n - tọa độ của mép tiết diện chịu kéo và chịu nén, thì

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_k = \pm \frac{|M_z|}{W_{z,k}} \quad (7.4)$$

trong đó

$$W_{z,k} = \frac{I_z}{y_k}; \quad W_{z,n} = \frac{I_z}{y_n} \text{ là các mô men chống uốn} \quad (7.5)$$



Hình 7.7. Biểu đồ ứng suất pháp

Nếu tiết diện đối xứng qua trục z và có chiều cao là h thì

$$W_{z,k} = W_{z,n} = W_z = \frac{I_z}{h/2} \quad (7.6)$$

và

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|M_z|}{W_z} \quad (7.7)$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} \quad (7.8)$$

Đối với tiết diện hình tròn đặc bán kính R , đường kính $D = 2R$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{12} \quad (7.9)$$

Đối với tiết diện hình vành khăn đường kính ngoài là D , đường kính trong d

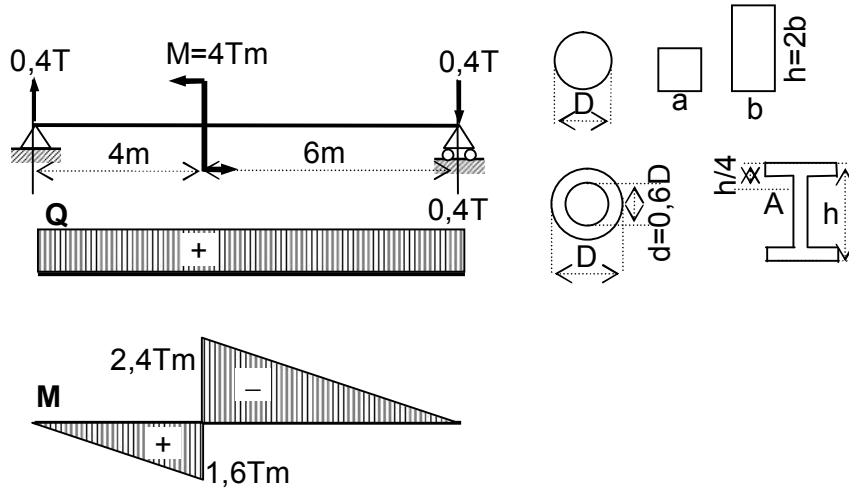
$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4); \quad \alpha = \frac{d}{D}, \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \quad (7.10)$$

Ví dụ. Cho thanh chịu uốn như trên hình 7.8. Tính kích thước của mặt cắt hình tròn, hình vành khăn, hình vuông, hình chữ nhật và thép hình chữ I. Tính ứng suất tại điểm A của mặt cắt chữ I tại vị trí đặt mô men tập trung. Cho $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$

Tính phản lực hai đầu $R_1 = R_2 = 0,4T$ có giá trị bằng nhau nhưng ngược hướng với nhau.

Vẽ biểu đồ mô men uốn như trên hình 7.8. Tìm được $|M|_{\max} = 2,4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ kGcm}$

Ta tìm kích thước từ điều kiện bền với $W = \frac{M}{[\sigma]} = \frac{240000}{1600} = 150 \text{ cm}^3$



Hình 7.8

– Đối với hình tròn ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = 150 \Rightarrow D = \sqrt[3]{32 \cdot 150 / \pi} = 11,518 \text{ cm} \quad A = 104,188 \text{ cm}^2$$

– Đối với hình vuông ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{a^3}{6} = 150 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6 \cdot 150} = 9,655 \text{ cm} \quad A = a^2 = 93,217 \text{ cm}^2$$

– Đối với hình chữ nhật ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 150 \Rightarrow b = \sqrt[3]{3 \cdot 150 / 2} = 6,082 \text{ cm} \quad h = 12,164 \text{ cm} \quad A = 73,986 \text{ cm}^2$$

– Đối với hình vành khăn ta có công thức tính mô men chống uốn

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = 150$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 150}{\pi(1-0.6^2)}} = 12,063 \text{ cm} \quad d = 7,238 \text{ cm} \quad A = 73,145 \text{ cm}^2$$

- Đối với tiết diện chữ I ta chọn thép hình số hiệu 18a từ phụ lục 1 theo TCVN 1655-75

$$W = 159 \text{ cm}^3 \quad h = 180 \text{ mm} \quad b = 100 \text{ mm} \quad d = 5,1 \text{ mm} \quad t = 8,3 \text{ mm} \quad A = 25,4 \text{ cm}^2$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{240000}{159} = 1509,43 \text{ kG/cm}^2$$

Nếu lấy diện tích hình tròn là 1 ta có tỉ lệ giữa các diện tích như sau

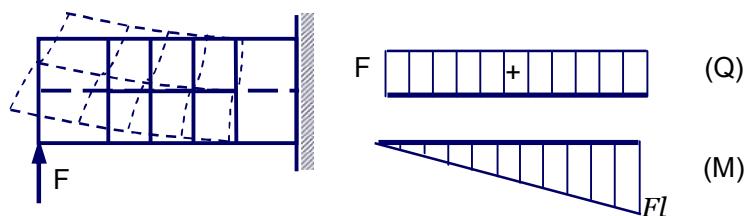
$$A_{\text{tròn}} : A_{\text{vuông}} : A_{\text{chữ nhật}} : A_{\text{vành khăn}} : A_I = 1 : 0,89 : 0,71 : 0,70 : 0,24$$

Ta thấy với cùng một mô men chống uốn, thì tiết diện chữ I có diện tích chỉ bằng khoảng 1/4 so với tiết diện hình tròn. Ta có thể kết luận là thép hình chữ I có khả năng chống uốn tốt nhất.

7.3.2 Uốn ngang phẳng

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn ngang phẳng, có lực cắt Q_y , mô men uốn M_z (hình 7.9). Quan sát biến dạng ta có nhận xét đường kẻ vuông góc với trục không thẳng và các góc vuông cũng bị thay đổi.



Hình 7.9. Giả thiết trong bài toán uốn phẳng

Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng, tồn tại cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp. Biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không thay đổi chiều dài theo phương ngang trục và phương dọc trục nên ứng suất pháp vẫn được tính theo công thức

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$$

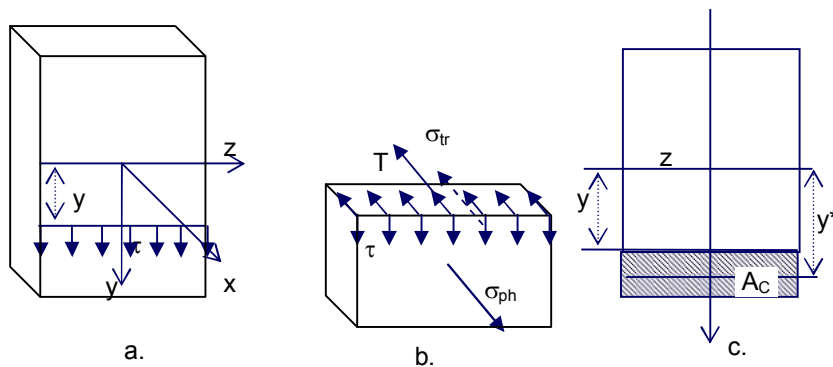
trong đó y là khoảng cách đến trục trung hòa

Để tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra ta xét một phân tố thanh chiều dài dx . Giả thiết chiều rộng nhỏ hơn chiều cao (tiết diện hẹp) ta có thể chấp nhận

- ứng suất tiếp phân bố đều trên tiết diện theo bề rộng
- ứng suất tiếp chỉ có thành phần thẳng đứng theo phương lực cắt

Hai giả thiết này chỉ đúng khi xét tiết diện hình chữ nhật hẹp. Ta xét cân bằng của phân tố trên hình 7.10b. Lực tác động lên phân tố gồm có

- ứng suất pháp tại mặt bên trái $\sigma_{tr} = \frac{M_z}{I_z} y^*$
- ứng suất pháp tại mặt bên phải $\sigma_{ph} = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y^*$
- ứng suất tiếp τ phân bố trên bề mặt có diện tích là bdx



Hình 7.10. Ứng suất tiếp do lực cắt

Phương trình cân bằng của phân tố có dạng

$$\int_{A_c} \sigma_{ph} dA - \int_{A_c} \sigma_{tr} dA - \tau \cdot bdx = \int_{A_c} (\sigma_{ph} - \sigma_{tr}) dA - \tau \cdot bdx = 0$$

Thay biểu thức của ứng suất tại hai mặt cắt trái và phải ta có

$$\sigma_{ph} - \sigma_{tr} = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y^* - \frac{M_z}{I_z} y^* = \frac{dM_z}{I_z} y^*$$

Như vậy ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp

$$\tau = \frac{1}{bdx} \int_{A_c} \frac{dM_z}{I_z} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{1}{bI_z} \int_{A_c} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^c}{bI_z}$$

Từ quan hệ vi phân giữa mô men và lực cắt ta có công thức tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại khoảng cách y^* so với trục trung hòa

$$\tau = \frac{Q_y S_z^C}{b I_z} \text{ - công thức D. J. Juravski} \quad (7.11)$$

trong đó

Q_y là lực cắt tác dụng lên thanh

b là bề rộng thực của tiết diện tại điểm tính phân bố ứng suất tiếp

$S_z^C = \int_{A_c} y^* dA = A_c \bar{y}_c$ là mô men tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng thực

b đi qua điểm tính ứng suất tiếp. Có thể tính bằng cách nhân diện tích của phần tiết diện đang xét với trọng tâm của nó.

Chú ý ta vẫn có thể sử dụng công thức (7.11) cho các tiết diện không hẹp.

Đối với tiết diện hình chữ nhật có kích thước hx

Mô men quán tính đối với trục z có dạng

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn y

$$S_z^C = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11a)

$$\tau_y = \frac{12Q_y}{bh^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.12)$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11a)

$$\tau_{y \max} = \frac{3Q_y}{2bh}; \quad (7.13)$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = h/2$ (hình 7.11a)

$$\tau_y = 0$$

Đối với tiết diện hình tròn bán kính R

Mô men quán tính đối với trục z có dạng

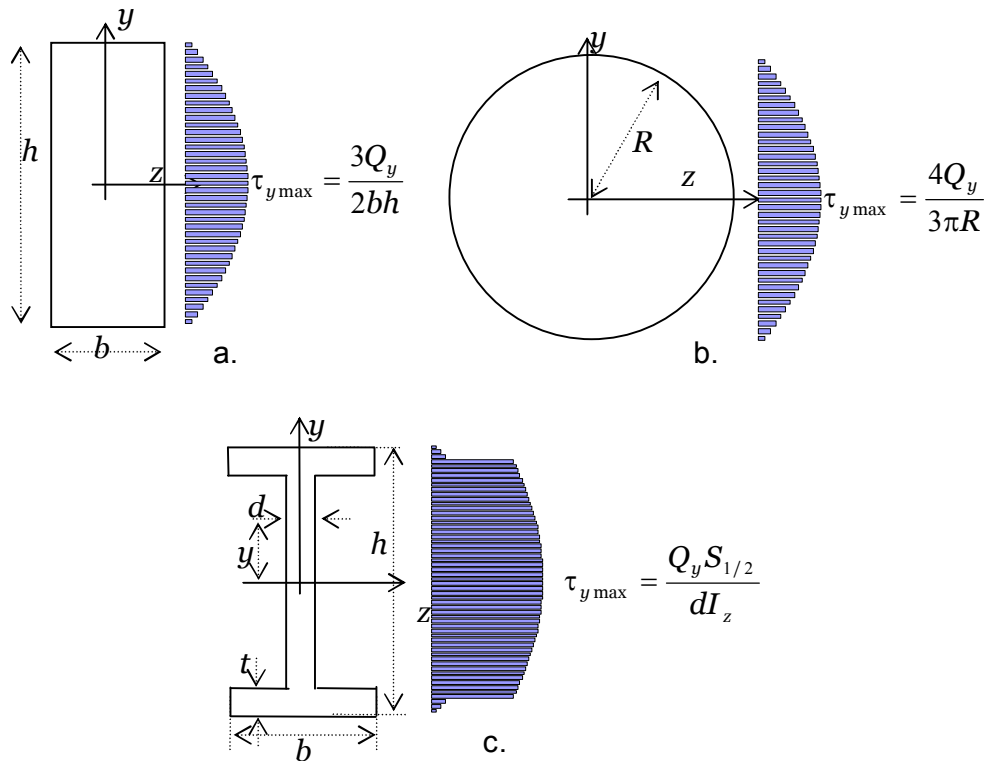
$$I_z = \frac{\pi R^4}{4},$$

Bề rộng thực của tiết diện tại điểm tính phân bố ứng suất tiếp

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn y

$$S_z^C = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$$



Hình 7.11. Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện hình chữ nhật và hình tròn

Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11b)

$$\tau_y = \frac{4Q_y}{\pi R^4} \frac{2}{2\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4} (R^2 - y^2) \quad (7.14)$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11b)

$$\tau_{y \max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} \quad (7.15)$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = R$ (hình 7.11b)

$$\tau_y = 0$$

Đối với tiết diện hình chữ I

Ta coi tiết diện là hình ghép của hai hình chữ nhật hẹp ngang gọi là bản cánh và một hình chữ nhật hẹp thẳng gọi là bản bụng. Kí hiệu $S_{1/2}$ là mô men tĩnh của một nửa diện tích (thường được cho trong các bảng thép hình kí hiệu là S_x).

Đối với các điểm trên bản bụng cách trục z một đoạn y có mô men tĩnh bằng $S_{1/2}$ trừ đi mô men tĩnh của diện tích dxy

$$S_z^C = S_{1/2} - \frac{dy^2}{2}, \quad \tau_y = \frac{Q_y}{dI_z} \left(S_{1/2} - \frac{d \cdot y^2}{2} \right)$$

Ứng suất tiếp cực đại đạt được tại $y=0$

$$\tau_{y \max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{dI_z}$$

Tại điểm trên bản bụng giáp với bản cánh $y = \frac{h}{2} - t$

$$\tau_y = \frac{Q_y}{dI_z} \left(S_{1/2} - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right)$$

Tại điểm trên bản cánh giáp với bản bụng ta có $y = \frac{h}{2} - t$

$$\tau_y = \frac{Q_y}{bI_z} \left(S_{1/2} - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right)$$

Biểu đồ ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ I xem trên hình 7.11c

Đối với tiết diện dạng thành mỏng

Ứng suất tiếp hướng theo tiếp tuyến với đường trung bình và phân bố đều trên bề dày. Ta có công thức tính ứng suất tiếp

$$\tau_y = \frac{Q_y S}{I} \quad (7.16)$$

trong đó l là bề dày của mặt cắt, S là mô men tĩnh đối với đường trung hòa của phần mặt cắt ở về một phía của đường vẽ vuông góc với đường trung bình tại điểm đang xét.

Ví dụ. Ta có thể tính ứng suất tiếp cực trị tại mặt cắt bên phải của điểm đặt mô men tập trung trong ví dụ trên hình 7.8 cho các loại tiết diện khác nhau. Trong trường hợp này lực cắt không đổi trên toàn bộ độ dài thanh $Q = 0,4T$, ta có

– Đối với tiết diện hình tròn

$$\tau_{y \max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4 \cdot 400}{3 \cdot \pi \cdot 11,518^2} \approx 1,28 \text{ kG/cm}^2$$

– Đối với tiết diện hình vuông

$$\tau_{y \max} = \frac{3Q_y}{2a^2} = \frac{3 \cdot 400}{2 \cdot 9,655^2} \approx 6,436 \text{ kG/cm}^2$$

– Đối với tiết diện hình chữ nhật

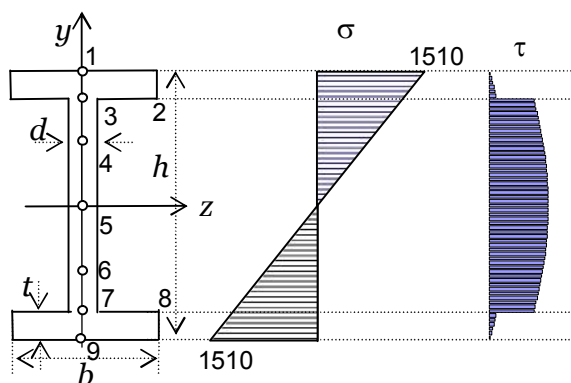
$$\tau_{y \max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{4b^2} = \frac{3 \cdot 400}{4 \cdot 6,082^2} \approx 8,1 \text{ kG/cm}^2$$

– Đối với tiết diện chữ I số hiệu 18a $W_z = 159 \text{ cm}^3$, $I_z = 1430 \text{ cm}^4$, $S_{1/2} = 89,8 \text{ cm}^3$,

$$h = 18 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, d = 0,51 \text{ cm}, t = 0,83 \text{ cm}, A = 25,4 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{y \max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{dI_z} = \frac{400 \cdot 89,8}{0,51 \cdot 1430} = 49,25 \text{ kG/cm}^2$$

Ta tính các ứng suất cho tiết diện chữ I số hiệu 18a với các thông số ở trên tại các điểm 1-9 đã chỉ ra trên hình



Hình 7.12

Bảng 7.1

	y cm	σ kG/cm ²	τ kG/cm ²	σ_1 kG/cm ²	σ_3 kG/cm ²	τ_{\max} τ_{\min} kG/cm ²
1	9	1510,49	0	1510,49	0	$\pm 755,5$
2	8,17	1371,19	2,04	1371,19	-0,003	$\pm 685,6$
3	8,17	1371,19	39,92	1372,35	-1,16	$\pm 686,76$
4	4,5	755,24	46,42	758,09	-2,84	$\pm 380,46$
5	0	0	49,25	49,25	-49,25	$\pm 49,25$
6	-4,5	-755,24	46,42	2,84	-758,09	$\pm 380,46$
7	-8,17	-1371,19	39,92	1,16	-1372,35	$\pm 686,76$
8	-8,17	-1371,19	2,04	0,003	-1371,19	$\pm 685,6$
9	-9	-1510,49	0	0	-1510,49	$\pm 755,5$

7.3.3 Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn

Biểu thức tổng quát thế năng biến dạng đàn hồi riêng (3.2) có dạng

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Trạng thái ứng suất phẳng của dầm chịu uốn ngang phẳng gồm hai thành phần

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_z^C}{b I_z}$$

Ta tính ứng suất chính theo công thức (2.13)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (7.20)$$

Thay vào biểu thức (3.2) ta nhận được

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma^2 + 2(1+\mu)\tau^2] = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G} \quad (7.21)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát nhận được bằng tích phân thế năng biến dạng đàn hồi riêng u trên toàn bộ thể tích

$$\begin{aligned} U &= \int_V u dV = \int_V \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G} \right) dV = \int_l dx \int_A \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G} \right) dA \\ &= \int_l dx \int_A \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dA + \int_l dx \int_A \frac{Q^2}{2GI^2} \frac{S_x^c}{b^2} dA \\ U &= \int_l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_l \frac{kQ^2}{2GA} dx \text{ trong đó } k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_x^{(1/2)}}{b^2} dA \end{aligned} \quad (7.22)$$

7.4 Biến dạng và dịch chuyển của thanh chịu uốn

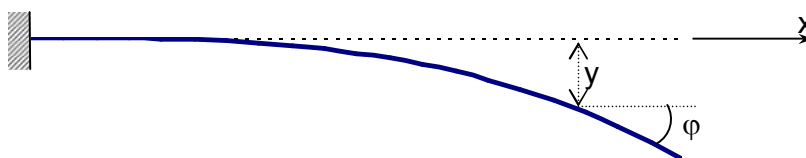
Biến dạng của thanh chịu uốn (gọi là dầm) là sự thay đổi độ cong của trục thanh. Đường cong trục thanh chịu uốn là đường đàn hồi. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt phương trình đường đàn hồi có dạng

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

Dịch chuyển, độ võng và góc xoay

- Dịch chuyển gồm dịch chuyển thẳng của trọng tâm và dịch chuyển xoay của tiết diện
 - dịch chuyển thẳng vuông góc với trục gọi là độ võng y
- $$y = y(x)$$
- dịch chuyển xoay là góc xoay φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$$



Hình 7.13

Phương trình vi phân độ võng

Từ toán học cao cấp ta có phương trình vi phân của độ cong của đường cong phẳng:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Dấu \pm lấy tùy thuộc hệ tọa độ sao cho bán kính độ võng luôn dương. Kết hợp với (7.3) ta có phương trình vi phân của độ võng

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EI_z}$$

Theo quy ước dấu của mô men uốn: mô men uốn dương làm trục dầm võng xuống và mô men uốn âm làm trục dầm lồi lên. Như vậy dấu của mô men uốn và độ võng luôn trái nhau nên khi xét biến dạng nhỏ bỏ qua các thành phần bậc cao ta có phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (7.23)$$

trong đó EI_z là độ cứng chống uốn của tiết diện (uốn trong mặt phẳng xy).

Phương pháp tích phân không xác định

Từ phương trình vi phân độ võng (7.23) ta tích phân một lần được góc xoay

$$\varphi = y' = -\int \frac{M_z}{EI_z} dx + C_1, \quad (7.24)$$

tích phân lần thứ hai ta được độ võng

$$y = -\int \left[\int \frac{M_z}{EI_z} dx \right] dx + C_1 x + C_2, \quad (7.25)$$

trong đó hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định từ điều kiện biên.

- Dầm gối tựa đơn giản ta có điều kiện độ võng ở hai đầu bằng không:

$$\varphi_{x=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \text{ và } \varphi_{x=l} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 0$$

- Dầm công son ta có điều kiện độ võng và góc xoay của đầu ngàm bằng 0:

$$y_{x=0} = 0 \text{ và } \varphi_{x=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Phương pháp tải trọng giả tạo

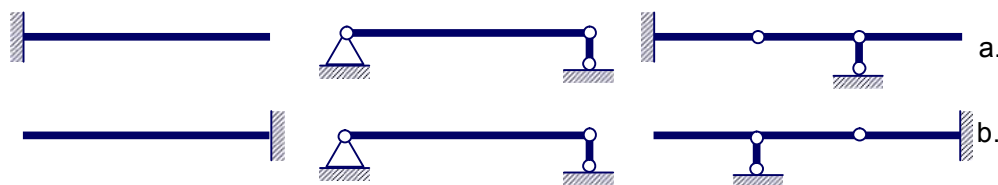
Ta có hai liên hệ cùng dạng

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI} \tag{7.26}$$

Như vậy ta có thể tìm độ võng và góc xoay từ biểu đồ mô men và lực cắt vẽ bằng phương pháp mặt cắt cho dầm giả tạo chịu tải trọng phân bố có cường độ là M/EI . Khi đó ta có mối quan hệ

$$y = M_{gt}; \quad \varphi = Q_{gt}; \quad -\frac{M}{EI} = q_{gt} \tag{7.27}$$

Lập dầm giả tạo theo sơ đồ trên hình (7.13)



Hình 7.14. Sơ đồ dầm giả tạo (b.) ứng với dầm thực (a.)

Sau đó xác định nội lực M_{gt} và Q_{gt} trên dầm giả tạo chịu tải phân bố M/EI .

Xác định độ võng, góc xoay cho dầm giả tạo theo công thức

$$y = M_{gt}, \quad \varphi = Q_{gt}.$$

Phương pháp thông số ban đầu

Thông số ban đầu là độ võng y_0 và góc xoay φ_0 của mặt cắt ngang ở gốc tọa độ.

Hợp lí nhất ta chọn gốc tọa độ là trọng tâm của mặt cắt ở đầu bên trái của dầm.

Phương trình xác định độ võng y_x và góc xoay φ_x ở mặt cắt cách gốc tọa độ một khoảng x có dạng

$$EIy_x = EIy_0 + EI\varphi_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a_m)^2}{2!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^3}{3!} + \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^5}{5!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{5!} \quad (7.28)$$

$$EI\varphi_x = EI\varphi_0 + \sum M \frac{(x-a_m)}{1!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^2}{2!} + \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^3}{3!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^3}{3!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} \quad (7.29)$$

trong đó

E là mô đun đàn hồi Young,

I là mô men quán tính tiết diện đối với trục trung hòa z ,

M – mô men của ngẫu lực ngoại lực,

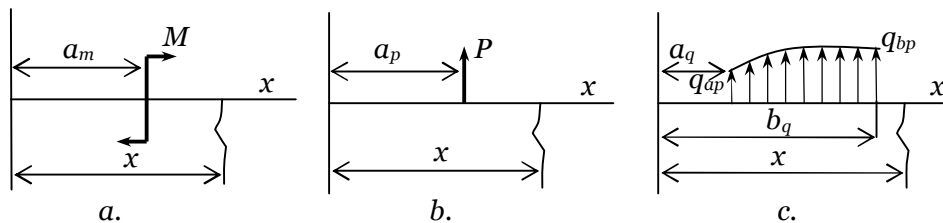
a_m - tọa độ của vị trí đặt ngẫu lực M ,

P – lực ngang tập trung (gồm cả phản lực),

a_p - tọa độ của vị trí đặt lực P ,

q_{a_q}, q'_{a_q} - giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = a_q$ (mặt cắt bắt đầu đoạn lực phân bố),

q_{b_q}, q'_{b_q} - giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = b_q$ (mặt cắt kết thúc đoạn lực phân bố)



Hình 7.15. Giải thích các kí hiệu trong công thức tính độ võng và góc xoay bằng phương pháp thông số ban đầu

Ví dụ. Cho $q=4\text{kN/m}$, $P=4\text{kN}$, $E=2 \cdot 10^8\text{kN/m}^2$, $[\sigma]=160 \cdot 10^3\text{kN/m}^2$.

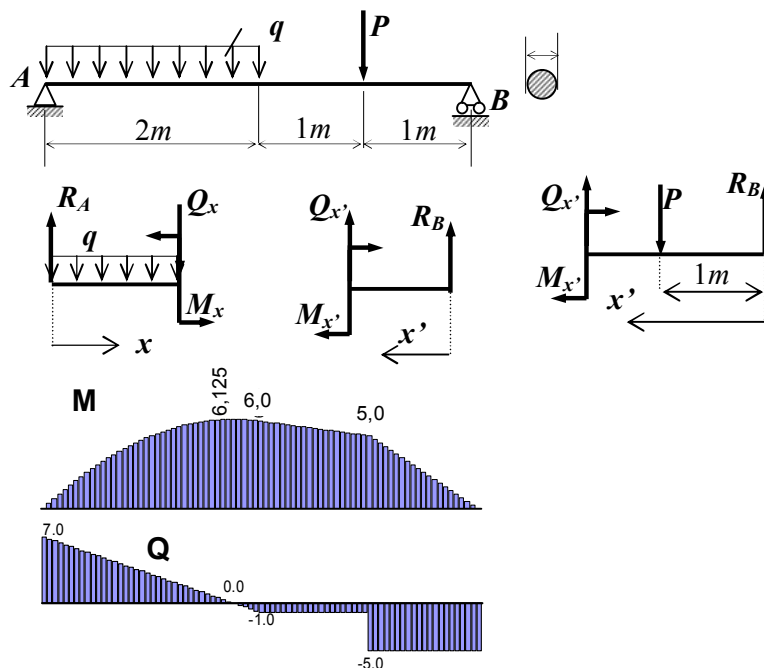
Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện về độ bền ứng suất pháp và tính dịch chuyển tại điểm giữa dầm.

Giải

- Xác định phản lực tại 2 gối R_A và R_B từ các phương trình cân bằng:

$$\sum M_A = 4R_B - 3P - q \frac{2^2}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3P}{4} + \frac{q}{2} = 3 + 2 = 5kN$$

$$\sum F = R_A + R_B - P - 2q = 0 \Rightarrow R_A = 2q + P - R_B = 8 + 4 - 5 = 7kN$$



Hình 7.15

- Vẽ biểu đồ Q và M
- Xét đoạn bên trái $2 \geq x \geq 0$: Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét ta có

$$Q_x + qx - R_A = 0 \Rightarrow Q_x = R_A - qx = 7 - 4x$$

$$M_x - R_A x + q \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = R_A x - q \frac{x^2}{2} = 7x - 2x^2$$

$$x = 0 \Rightarrow Q_x = 7kN; \quad M_{x=0} = 0;$$

$$x = 2 \Rightarrow Q_x = -1kN; \quad M_{x=2} = 6kNm$$

$$Q_x = 0 \text{ khi } x = 7/4 = 1,75m, \quad M_{x=1,75} = 6,125kNm$$

- Xét đoạn bên phải $2 \geq x' \geq 0$ sẽ chia làm 2 đoạn:
 - + Đoạn $1 \geq x' \geq 0$ Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét ta có

$$Q_{x'} + R_B = 0 \Rightarrow Q_{x'} = -R_B = -5kN$$

$$M_{x'} - R_B x' = 0 \Rightarrow M_{x'} = R_B x' = 5x'$$

$$x' = 0 \Rightarrow M_{x'=0} = 0;$$

$$x' = 1 \Rightarrow M_{x'=1} = 5kNm$$

+ Đoạn 2 $\geq x' \geq 1$

$$Q_{x'} + R_B - P = 0 \Rightarrow Q_{x'} = P - R_B = 4 - 5 = -1kN$$

$$M_{x'} - R_B x' + P(x' - 1) = 0 \Rightarrow M_{x'} = (R_B - P)x' + P = x' + 4$$

$$x' = 1 \Rightarrow M_{x'} = 5kNm;$$

$$x' = 2 \Rightarrow M_{x'} = 6kNm$$

Biểu đồ M và Q. Moment cực đại tại điểm lực cắt bằng 0 $x=1,75$ $M_{\max}=6,125kNm$

- Tìm kích thước của mặt cắt ngang từ điều kiện bền theo ứng suất pháp

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{\pi D^3}{32} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\max}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,125}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,073057m = 7,3057cm$$

- Tính độ võng f tại điểm giữa dầm.

Với A là điểm góc, với điều kiện biên độ võng tại A bằng 0 ta có biểu thức

$$EI f(x) = EI \theta_A x + R_A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + q \frac{(x-2)^4}{24} - P \frac{(x-3)^3}{6}$$

$\begin{matrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{matrix}$

Từ điều kiện độ võng ở B bằng 0, ta tìm được góc xoay tại A

$$EI f(4) = EI \theta_A 4 + R_A \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} + q \frac{2^4}{24} - P \frac{1^3}{6} = 0$$

$$\Rightarrow EI \theta_A = \left[4 \frac{1}{6} + \frac{4 \cdot 2^4}{24} (2^4 - 1) - 7 \frac{4^3}{6} \right] \frac{1}{4} = \frac{1 + 4 \cdot 15 - 7 \cdot 16}{6} = -\frac{51}{6} = -8,5$$

Phương trình xác định độ võng trên dầm có dạng

$$EIf(x) = -\frac{51}{6}x + 7\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{(x-2)^4}{6} - 4\frac{(x-3)^3}{6}$$

tại x=2: $EIf(x) = \frac{1}{6}(-51 \cdot 2 + 7 \cdot 2^3 - 2^4) = \frac{-51 + 7 \cdot 4 - 8}{3} = -\frac{31}{3} = 10,33kNm^3$

Độ võng $f_{i2} = \frac{-31}{3EI} = \frac{-31}{3 \cdot 279,6715} = -0,036948m$

7.5 Độ bền và độ cứng

7.5.1 Điều kiện bền khi uốn thuần túy

Khi uốn thuần túy trạng thái ứng suất là trạng thái đơn, nên từ (7.4) đối với mặt cắt không đối xứng ta có

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{I_z} y_k \leq [\sigma]_k$$

$$|\sigma_{\min}| = \frac{|M_z|}{I_z} y_n \leq [\sigma]_n \tag{7.30}$$

trong đó y_k và y_n là khoảng cách từ đường trung hòa đến thớ bị kéo và thớ bị nén xa nhất

Kiểm tra cho các mặt cắt có trị số mô men dương và mô men âm lớn nhất

Khi tiết diện đối xứng qua trục z thì

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]_n \tag{7.31}$$

Đối với vật liệu dẻo khi $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ thì ta kiểm tra

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma] \tag{7.32}$$

Trong bài toán thiết kế từ điều kiện bền ta lựa chọn kích thước thích hợp cho tiết diện ngang theo công thức

$$W = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} \tag{7.33}$$

trong đó $W = I/|y_{\max}|$ - mô men chống uốn của tiết diện ngang đối với đường trung hòa,

7.5.2 Dạng tiết diện hợp lý

Dạng tiết diện hợp lý là dạng tận dụng hết khả năng làm việc của vật liệu. Ta xét dạng hợp lý từ hai khía cạnh

- Khi hai mép cùng đồng thời phá hỏng

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_k = [\sigma]_k$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} y_n = [\sigma]_n \quad (7.34)$$

$$\frac{|y_k|}{|y_n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \frac{W_{zk}}{W_{zn}} = \alpha \leq 1 \quad (7.35)$$

Ta nhận được điều kiện hợp lý

Vật liệu dòn $\alpha < 1 \rightarrow y_k < y_n$ tiết diện không đối xứng qua trục z

Vật liệu dẻo $\alpha = 1 \rightarrow y_k = y_n$ tiết diện đối xứng qua trục z

- Xem xét điều kiện tiết kiệm. Như ta thấy độ bền chống uốn phụ thuộc vào mô men chống uốn W_z , (tăng mô men chống uốn W_z để giảm ứng suất pháp). Trong khi đó trọng lượng của thanh lại tỉ lệ với diện tích nên ta đánh giá mức độ tiết kiệm bằng tỉ số $\xi = W / A^{3/2}$ được gọi là mô men chống uốn riêng. Ví dụ hình hộp chữ nhật, hình ống, chữ U và chữ I là những dạng hợp lý. Ví dụ cùng diện tích nhưng thép chữ I có mô men chống uốn lớn hơn tám lần tiết diện hình vuông.

7.5.3 Ứng suất chính và kiểm tra độ bền tổng thể của dầm

Trong bài toán uốn ngang phẳng ta kiểm tra độ bền cho các trạng thái sau

- Trạng thái ứng suất đơn như bài toán uốn thuần túy

$$\left| \sigma_{\max} \right| = \frac{|M_z|}{I_z} \left| y_k \right|_{\max} \leq [\sigma]_n^k, \quad \left| \sigma_{\min} \right| = \frac{|M_z|}{I_z} \leq [\sigma]_n^k$$

- Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

$$|\tau_0| = \frac{Q_y S_x^{(1/2)}}{I_z b} \leq [\tau] \quad (7.36)$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

Theo thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

- Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt với

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^C}{I_z b}$$

Từ công thức (2.13) ta tính ứng suất chính cho ở dạng công thức (7.20)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Điều kiện bền theo thế năng biến dạng hình dáng cực đại

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Ví dụ. Với trường hợp ví dụ trên hình 7.15, ta kiểm tra điều kiện về độ cứng

$$\left[\frac{f_{l/2}}{l} \right] = \frac{1}{400}$$

- Ta tính moment quán tính

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 6,125}{64 \cdot \pi \cdot 160 \cdot 10^3} \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,125}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = \frac{6,125 \cdot 0,073057}{32 \cdot 10^4} = 1,398 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$\Rightarrow EI = 279,6715 kNm^2$$

- Kiểm tra điều kiện về độ cứng:

$$\left| \frac{f_{l/2}}{l} \right| = \frac{0,036948}{4} = 0,009237 > \frac{1}{400} = 0,0025$$

Điều kiện độ cứng không thỏa mãn

- Ta sẽ tính lại kích thước từ điều kiện độ cứng

- Từ điều kiện độ cứng, ta tính độ võng

$$|f_{l/2}| = \frac{l}{400} = \frac{4}{400} = 0,01$$

- Bên cạnh đó từ sơ đồ đặt lực ta có

$$x = 2 \rightarrow EI|f| = \frac{31}{3} \Rightarrow I = \frac{31}{3E[f_{l/2}]}$$

suy ra

$$D = \sqrt[4]{\frac{31 \cdot 64}{3\pi E[f_{l/2}]}} = \sqrt[4]{\frac{31 \cdot 64}{3\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0,01}} \approx 0,1013m = 10,13cm$$

Kết luận chương 7

Chương bảy xem xét bài toán uốn thanh thuần túy và uốn ngang.

Bài toán siêu tĩnh cho dầm chịu uốn sẽ được xem xét kĩ trong phần 2 Cơ học kết cấu trong chương 10. Phương pháp lực.

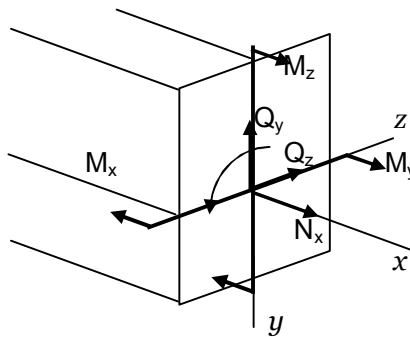
CHƯƠNG 8

Thanh chịu lực phức tạp

8.1 Giới thiệu chung

Chương 5 đến chương 7 ta xem xét các bài toán thanh chịu lực đơn giản: thanh chịu kéo (hoặc nén), thanh chịu xoắn, thanh chịu cắt, thanh chịu uốn. Trong những bài toán này trên tiết diện thanh chỉ tồn tại một thành phần nội lực độc lập: lực dọc trục, mô men xoắn, mô men uốn đi với lực cắt. Ngoại lực cũng chỉ có từng loại riêng biệt: lực tác dụng dọc trục thanh F_x , ngẫu ngoại lực M_x nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh, lực ngang F_y và ngẫu lực mô men M_z (uốn trong mặt phẳng xy) hay lực ngang F_z và ngẫu lực mô men M_y (uốn trong mặt phẳng xz).

Chương 8 xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp. Tổng quát nhất là khi trên tiết diện thanh có đầy đủ sáu thành phần nội lực (hình 8.1)



Hình 8.1. Thanh chịu lực tổng quát

Đó là lực dọc N_x , mô men xoắn M_x , lực cắt Q_y và mô men uốn M_z (uốn trong mặt phẳng xy), lực cắt Q_z và mô men uốn M_y (uốn trong mặt phẳng xz).

8.2 Trường hợp tổng quát

Ta sẽ tính ứng suất và biến dạng trên tiết diện khi chịu lực tổng quát theo nguyên lý cộng tác dụng từ lời giải của các bài toán chịu lực đơn giản.

8.2.1 Công thức tính ứng suất pháp

Từ các bài toán thanh chịu lực đơn giản ta thấy ứng suất pháp chỉ do lực dọc và các mô men uốn gây ra

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y) \\ \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z\end{aligned}\quad (8.1)$$

8.2.2 Đường trung hòa

Định nghĩa. Đường trung hòa của tiết diện là quỹ tích của những điểm có ứng suất pháp bằng không.

Từ định nghĩa trên và công thức tính ứng suất pháp (8.1) ta có phương trình của đường trung hòa

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0\quad (8.2)$$

Phương trình 8.2 là phương trình đường thẳng trên tiết diện mà ta đang xét. Trong đó N , M_z , M_y là nội lực, A , I_z , I_y là các đặc trưng hình học.

Tính chất của đường trung hòa

- Khi lực dọc trục bằng không đường trung hòa đi qua gốc tọa độ.
- Ứng suất pháp tại một điểm P trên tiết diện tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó đến đường trung hòa

$$\sigma_P = Kd\quad (8.3)$$

trong đó

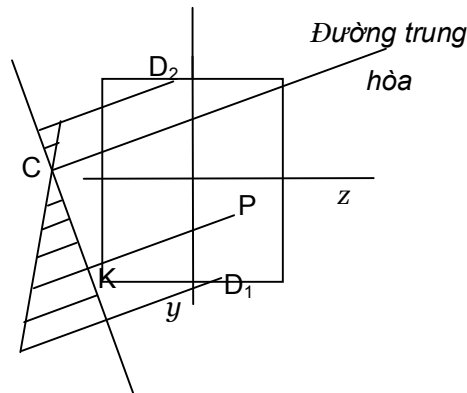
$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}}\quad (8.4)$$

- Những điểm có ứng suất pháp như nhau là những điểm nằm trên đường song song với trục trung hòa. Tại điểm cách xa đường trung hòa nhất ứng suất pháp đạt cực đại

8.2.3 Biểu đồ ứng suất pháp

Từ tính chất của đường trung hòa ta có biểu đồ ứng suất pháp như trên hình 8.2 bằng các bước sau

- Kẻ đường vuông góc với trục trung hòa gọi là đường chuẩn tại điểm C
- Từ điểm P thuộc tiết diện kẻ đường song song với đường trung hòa và cắt đường chuẩn tại K.
- Tính ứng suất pháp σ_p tại P theo công thức (8.1).
- Từ K đặt tung độ bằng σ_p và nối với điểm C. Biểu đồ ứng suất pháp giới hạn bằng hai đường song song với đường trung hòa và tiếp xúc với chu vi tiết diện tại hai điểm cách xa đường trung hòa nhất (hình 8.2)



Hình 8.2. Biểu đồ ứng suất pháp

Ta có biểu thức của ứng suất pháp cực trị

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D \tag{8.5}$$

Ta đặt y_D và z_D tại các điểm (D_1 và D_2) rồi tính các giá trị cực trị

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \tag{8.6}$$

Đối với tiết diện hình tròn

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \quad (8.7)$$

8.2.4 Điều kiện bền theo ứng suất pháp

Nếu chỉ kể đến ứng suất pháp ta có điều kiện bền

$$\left| \sigma_{\min}^{\max} \right| \leq [\sigma]_n^k \quad (8.8)$$

Trường hợp tổng quát

$$\left| \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D \right| \leq [\sigma]_n^k \quad (8.9)$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I

$$\left| \frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \right| \leq [\sigma]_n^k \quad (8.10)$$

Đối với tiết diện hình tròn

$$\left| \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \right| \leq [\sigma]_n^k \quad (8.11)$$

8.2.5 Ứng suất tiếp.

Ứng suất tiếp chỉ do mô men xoắn và các lực cắt gây ra

$$\tau = \tau(M_x) + \tau(Q_y) + \tau(Q_z) \quad (8.12)$$

Các thành phần ứng suất tiếp do lực cắt có phương chiều trùng với lực cắt gồm

$$\tau(Q_y) = \frac{Q_y S_z^c}{I_z b} \quad (8.13)$$

$$\tau(Q_z) = \frac{Q_z S_y^c}{I_y h} \quad (8.14)$$

Còn ứng suất tiếp do mô men xoắn có phương chiều phụ thuộc vào dạng tiết diện. Đối với tiết diện tròn, ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính tiết diện, chiều theo chiều mô men xoắn

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho \tag{8.15}$$

8.2.6 Độ võng

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, ta tìm độ võng f do mô men uốn gây ra

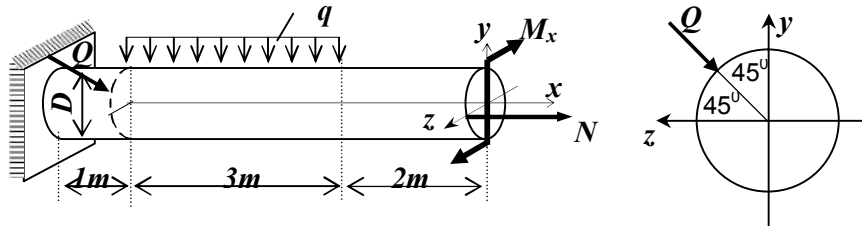
$$\overset{\vee}{f} = \overset{\vee}{f}_z + \overset{\vee}{f}_y, \text{ hay } f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \tag{8.16}$$

trong đó f_z, f_y độ võng do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

Các dịch chuyển thành phần tìm từ phương trình vi phân độ võng

$$f_z'' = -\frac{M_z}{EI_z} \text{ và } f_y'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

Ví dụ. Cho $D = 0,1\text{m}$, $Q = 2\sqrt{2} \text{ kN}$; $N = 6,28\text{kN}$; $q_y = 1\text{kN/m}$, $M_x = 3,14\text{kNm}$; $E=2.10^8\text{kN/m}^2$, $[\sigma] = 160.10^3\text{kN/m}^2$. Kiểm tra độ bền thanh tại mặt cắt ngầm theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại (bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt).



Hình 8.3.

- Đề kiểm tra bền ta tính ứng suất tương đương tại điểm ngầm.
- Ứng suất pháp σ gồm các thành phần do lực dọc trục, lực cắt và lực phân bố
 - + Từ lực dọc trục N đặt lệch tâm với điểm đặt ($y_N=0, z_N=D/2$) là ta có công thức tính ứng suất cho tiết diện hình tròn

$$\begin{aligned} \sigma_{\max N} &= \frac{N}{F} \left(1 + \frac{\sqrt{y_N^2 + z_N^2}}{W/F} \right) = \frac{4N}{\pi D^2} \left(1 + \frac{8\sqrt{(D/2)^2}}{D} \right) \\ &= \frac{4 \cdot 6,28}{3,14 \cdot 0,1^2} (1 + 4) = 4000 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

- + Từ các lực cắt và lực phân bố ta tính được moment uốn M_y và M_z tại đầu A

$$M_z = 1 \cdot Q \cdot \cos 45^\circ + q \cdot 3 \cdot 2,5 = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2,5 = 9,5 \text{ kN}$$

$$M_y = Q \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / 2 = 2kNm$$

Ta có ứng suất pháp do moment uốn M_y và M_z cho tiết diện hình tròn

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} = \frac{32\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi D^3} = \frac{32\sqrt{9,5^2 + 2^2}}{3,14 \cdot 0,1^3} = 98887,6kN / m^2$$

Vậy ứng suất pháp lớn nhất của tiết diện tại đầu A là

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max N} + \sigma_{\max M} = 4000 + 98887,6 = 102887,6kN / m^2$$

- Bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt ta còn ứng suất tiếp do mo men xoắn M_x gây ra

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{16M_x}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 3,14}{3,14 \cdot 0,1^3} = 16000kN / m^2$$

- Tính ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại

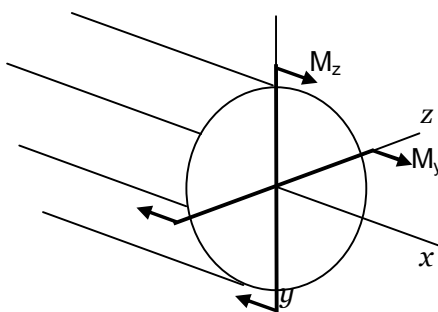
$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{102887,6^2 + 4 \cdot 16000^2} = 107748,8kN / m^2$$

Kết cấu đủ bền vì $\sigma_{td} = 107748,8kN / m^2 < [\sigma] = 160 \cdot 10^3kN / m^2$

8.3 Các trường hợp chịu lực phức tạp

8.3.1 Uốn xiên

Nếu bỏ qua lực cắt nội lực trong tiết diện sẽ gồm các mô men uốn M_z và M_y (hình 8.4)



Hình 8.4. Thanh chịu uốn xiên

Biểu thức ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (8.17)$$

Nếu tiết diện tròn

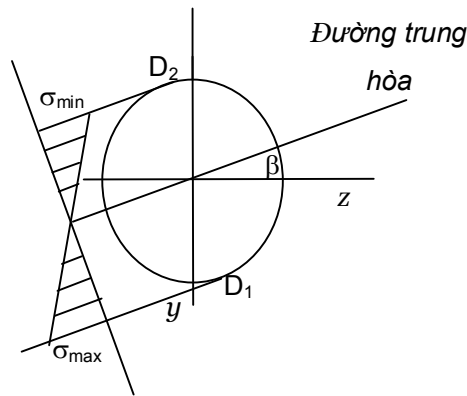
$$\sigma = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \quad (8.18)$$

Phương trình đường trung hòa

$$y = -\frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z} z = -z \operatorname{tg} \beta,$$

trong đó

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z}$$



Hình 8.5. Biểu đồ ứng suất pháp khi uốn xiên

Kiểm tra bền theo công thức (8.10)

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]^k, \quad -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]_n \quad (8.19)$$

Thiết kế kích thước theo phương pháp thử bằng cách lựa chọn từ công thức

$$W_z \geq \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]}$$

trong đó $c = \frac{W_z}{W_y}$.

Độ võng tính theo công thức (8.16)

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \quad \text{và} \quad \varphi = \sqrt{\varphi_z^2 + \varphi_y^2}$$

trong đó $f_z, f_y, \varphi_z, \varphi_y$ độ võng và góc xoay do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

8.3.2 Kéo (nén) và uốn đồng thời

Biểu thức ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z \right) \quad (8.20)$$

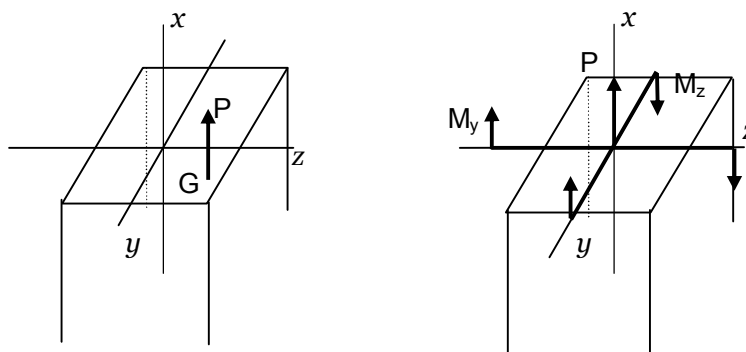
trong đó i_z, i_y bán kính quán tính chính

Phương trình đường trung hòa

$$1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z = 0, \quad (8.21)$$

Ứng suất pháp cực đại tính theo (8.5-8.7). Kiểm tra bền theo (8.9-8.11). Kích thước mặt cắt ngang tính theo ứng suất pháp bằng phương pháp thử dần. Chọn theo mô men uốn cho kích thước lớn. Sau đó kiểm tra với mô men uốn còn lại và lực dọc

8.3.3 Kéo (nén) lệch tâm



Hình 8.6. Thanh kéo lệch tâm

Khi thanh chịu kéo (nén) lệch tâm tại điểm G (y_G, z_G) ta có thể chuyển lực về tâm tiết diện và nhận được

- Lực dọc $N = P$
- các mô men uốn $M_y = Pz_G$ và $M_z = Py_G$

Khi đó ta có thể đưa về trường hợp kéo (nén) và uốn đồng thời. Khi đó ứng suất pháp có dạng

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2} \right) \quad (8.22)$$

Phương trình đường trung hòa

$$1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{y}{-i_z^2 / y_G} + \frac{z}{-i_y^2 / z_G} = 1 \quad (8.21)$$

Khi kéo, nén đúng tâm đường trung hòa có thể các tính chất sau

- Đường trung hòa phụ thuộc vào vị trí đặt tải và không phụ thuộc vào tải trọng
- Khi điểm đặt lực trên trục x thì đường trung hòa song song với trục y và ngược lại
- Khi điểm đặt lực di chuyển trên đường thẳng nn không đi qua trọng tâm thì đường trung hòa quay quanh một điểm có tọa độ

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{n0}}, \quad z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{n0}} \quad (8.21)$$

trong đó y_{n0} , z_{n0} là giao điểm của nn với trục y và trục z.

Lỗi tiết diện

Đường trung hòa chỉ phụ thuộc vào vị trí đặt lực nên có thể xảy ra hai trường hợp

- Đường trung hòa cắt qua tiết diện
- Đường trung hòa nằm ngoài hoặc chỉ tiếp xúp với chu vi của

Định nghĩa: Lỗi tiết diện là miền chứa trọng tâm tiết diện và giới hạn bởi một chu tuyến kín để khi đặt lực vào bên trong lỗi thì đường trung hòa nằm ngoài tiết diện, khi vị trí đặt lực trên chu tuyến thì đường trung hòa tiếp tuyến với chu vi tiết diện – điều này có nghĩa ứng suất tại mọi điểm của mặt cắt chỉ có một dấu.

Các vật liệu như bê tông, gạch đá chịu kéo rất kém, nên khi thiết kế các cấu kiện chịu nén lệch tâm ta chọn điểm đặt lực sao cho trên tiết diện chỉ có ứng suất nén. Có nghĩa ta chọn điểm đặt lực sao đường trung hòa không cắt qua tiết diện. Do vậy điểm đặt lực phải nằm trong miền của lỗi tiết diện.

8.3.4 Kéo (nén) và xoắn đồng thời

Khi thanh chịu mô men xoắn M_x và lực kéo (nén) dọc trục N đồng thời ta có ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

và ứng suất tiếp

$$\tau = \frac{M_x}{W_x}$$

trong đó W_x mô men chống xoắn của mặt cắt

Đối với tiết diện tròn

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}$$

Ứng suất chính theo công thức (2.13)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền.

Đối với vật liệu dẻo ta dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.22)$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.23)$$

Đối với vật liệu kéo, nén khác nhau ta dùng thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]_k \quad (8.24)$$

8.3.5 Uốn và xoắn đồng thời

Ta cộng thêm vào trạng thái uốn xiên ứng suất tiếp khi chịu xoắn.

Tiết diện hình tròn

$$\sigma = \frac{M_u}{I_z} \rho \text{ và } \sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_z}, \text{ trong đó } M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$$

$$\tau = \frac{M_x}{I_p} \rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_x}{2W_z}$$

Ứng suất chính trong trạng thái ứng suất này theo công thức (2.13) có dạng

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền.

Đối với vật liệu dẻo ta dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (8.25)$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{0.75M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (8.26)$$

Đối với vật liệu kéo, nén khác nhau ta dùng thuyết bền Mohr

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \leq [\sigma]_k \quad (8.27)$$

Tiết diện hình chữ nhật

Ứng suất tiếp đạt cực đại tại trung điểm cạnh dài (cạnh dài song với trục z).

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2W_{xo}}$$

Khi đó ứng suất pháp có giá trị

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}$$

Tại trung điểm cạnh ngắn

$$\tau = \gamma\tau_{\max} \text{ và } \sigma = \frac{M_y}{W_y}$$

Điều kiện bền theo ứng suất pháp của uốn xiên cần được kiểm tra

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]^k, \quad -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma]^n$$

Kết luận chương 8

Chương 8 trình bày bài toán thanh chịu lực phức tạp. Xem xét trường hợp tổng quát đưa ra các công thức tính ứng suất và dịch chuyển.

Xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp kết hợp của hai hay nhiều hơn các trường hợp thanh chịu lực cơ bản như: kéo và uốn, kéo, nén lệch tâm, xoắn và uốn.

CHƯƠNG 9

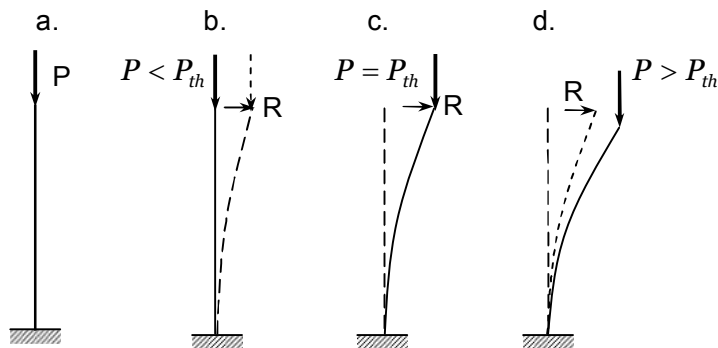
Ổn định của thanh thẳng

9.1 Giới thiệu chung

Như đã nói trong phần nhập môn mục đích của môn học là đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình. Các chương năm đến chương tám đề cập đến việc đánh giá trạng thái ứng suất, biến dạng và dịch chuyển của thanh sau đó đánh giá độ cứng, độ bền của thanh trong các trường hợp chịu lực khác nhau. Trong chương chín này ta quan tâm đến vấn đề ổn định của kết cấu. Cụ thể là ổn định của thanh thẳng chịu nén – bị uốn dọc và nén và uốn đồng thời

Như đã định nghĩa: Độ ổn định là khả năng duy trì, bảo toàn được dạng cân bằng ban đầu trước các tác dụng của các nhiễu động.

Ta xét một thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P (hình 9.1a).



Hình 9.1. Thanh chịu nén dọc trục

Nhiều động được mô hình hóa bằng lực ngang R . Ta cho trị số của lực nén tăng dần bắt đầu từ không. Tác động vào thanh một lực ngang đủ nhỏ để thanh dời khỏi vị trí thẳng (vị trí cân bằng ban đầu) thanh sẽ cong đi. Dạng cong của thanh là dạng cân bằng nhiễu động. Khi ta bỏ lực ngang sẽ xảy ra các trường hợp sau

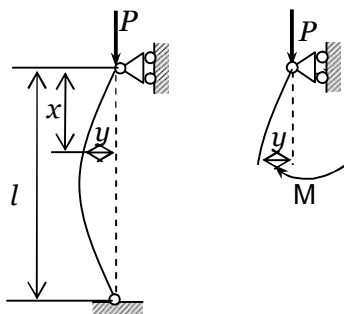
- Khi lực nén dọc trục nhỏ, nhỏ hơn một giá trị tới hạn nào đó $P < P_{th}$, thanh sẽ trở lại vị trí thẳng ban đầu. Trạng thái cân bằng này của thanh là ổn định (hình 9.1b)

- Khi lực nén dọc trục lớn, lớn hơn một giá trị tới hạn $P > P_{th}$, thanh không trở lại vị trí thẳng ban đầu mà còn tiếp tục cong thêm. Trạng thái cân bằng này của thanh là không ổn định hay còn gọi là mất ổn định. Do thanh cong sẽ xuất hiện hiện tượng uốn trong thanh dẫn đến ứng suất và biến dạng tăng và thanh có thể sẽ bị phá hủy (hình 9.1d)
- Khi lực nén dọc trục đạt giá trị tới hạn $P = P_{th}$, thanh không thẳng trở lại và cũng không cong thêm. Trạng thái này được gọi là trạng thái cân bằng tới hạn (hình 9.1c)

Tương tự khi thanh chịu uốn cũng mất ổn định khi lực ngang vượt qua giá trị tới hạn $F > F_{th}$. Khi đó thanh không chỉ chịu uốn mà còn chịu xoắn.

9.2 Lực tới hạn và ứng suất tới hạn

9.2.1 Thanh liên kết khớp



Hình 9.2. Bài toán Euler

Xét thanh liên kết khớp hai đầu, chịu lực nén P đúng tâm. Giả thiết $P = P_{th}$ làm thanh cong đi. Tại tiết diện có tọa độ x khi bị uốn có độ võng là y . Kí hiệu độ cứng chống uốn là EI , mô men uốn tại mặt cắt là M ta có phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad (9.1)$$

Mô men uốn tính qua lực nén dọc trục và độ võng

$$M = Py \quad (9.2)$$

Thế (9.2) vào (9.1) ta được phương trình vi phân

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

trong đó $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ (9.3)

Nghiệm của (9.4) có dạng

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

C_1 và C_2 tìm từ điều kiện biên ta có tại $x=0$ $y=0$ suy ra $C_1=0$, tại $x=l$ $y=0$ suy ra $C_2 \sin \alpha l = 0$ vì độ võng khác không nên $C_2 \neq 0$ và ta có

$$\sin \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = k\pi, \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.4)$$

Thay (9.4) vào (9.3) ta có

$$P = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2}, \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots$$

Đây là điều kiện để độ võng khác không tức là điều kiện mất ổn định của thanh. Giá trị của P với k nhỏ nhất $k=1$ là giá trị tải trọng tới hạn

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (9.5)$$

Đây là công thức Euler xác định tải trọng tới hạn cho trường hợp liên kết là khớp hai đầu. Ở đây ta chọn mô men quán tính nhỏ nhất của tiết diện, P_{th} khi xét uốn quanh trục quán tính chính có mô men quán tính nhỏ nhất cũng là nhỏ nhất.

Các dạng liên kết khác sẽ được xem xét trong mục sau

9.2.2 Thanh thẳng có các liên kết khác

Tương tự như cách làm trong mục 9.2.1 ta xét các điều kiện liên kết khác để tìm tải trọng tới hạn. Công thức Euler (9.7) có thể viết tổng quát hơn như sau

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l_{td}^2} \quad (9.6)$$

trong đó $l_{td} = \mu l$ là chiều dài tương đương của thanh, l chiều dài thực. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết và cách đặt tải cho trên hình 9.3

9.2.3 Ứng suất tới hạn và độ mảnh

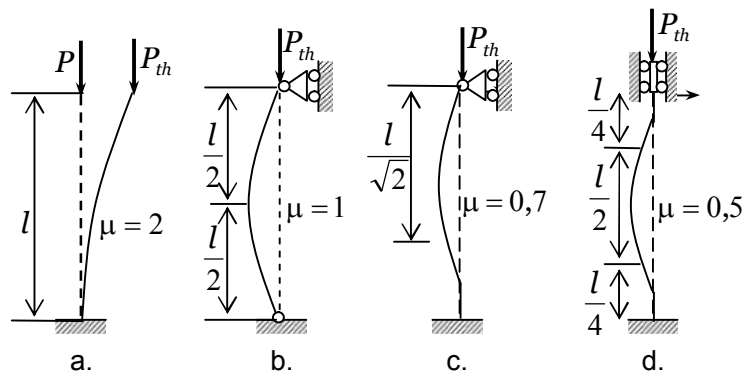
Tính ứng suất tới hạn theo công thức

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\mu^2 l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9.7)$$

trong đó

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{l_{td}}{i} \quad (9.8)$$

là độ mảnh của thanh, $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện.



Hình 9.3. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết

Tải trọng tới hạn Euler được tìm từ phương trình vi phân đường đàn hồi, do vậy chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi. Do vậy ứng suất tới hạn phải nhỏ hơn ứng suất tỉ lệ

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

Từ đây ta rút ra được quan hệ

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$$

Đặt

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (9.9)$$

ta có điều kiện để áp dụng công thức Euler

$$\lambda \geq \lambda_0 \quad (9.10)$$

9.3 Tính ổn định cho thanh chịu nén

Như vậy khi tính toán thanh chịu nén ngoài kiểm tra bền ta cần kiểm tra điều kiện ổn định cho lực dọc trục

$$N \leq \frac{P_{th}}{n_{od}} = [P]_{od} \quad (9.11)$$

hoặc cho ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{n_{od}} \quad (9.12)$$

trong đó A diện tích nguyên của tiết diện

Để tiện cho việc kiểm tra ổn định người ta đưa thêm đại lượng φ

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]} \quad (9.13)$$

Khi đó (9.13) được viết lại thành

$$\frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma]_n \quad (9.14)$$

Đại lượng φ được gọi là hệ số uốn dọc hay hệ số giảm ứng suất cho phép về nén. Từ công thức (9.14) φ sẽ làm hàm phụ thuộc vào độ mảnh λ

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th} n}{\sigma_{ch} n_{od}} = \varphi(\lambda) \quad (9.15)$$

Đại lượng φ được lập thành bảng cho các vật liệu cho trước trong phụ lục 8.

Để kiểm tra ổn định có thể sử dụng hai phương pháp

Phương pháp thứ nhất: cho trước n_{od} . Phương pháp này ít được dùng vì nó thiếu chính xác vì định trước n_{od} khi chưa biết độ mảnh λ . Người ta sử dụng khi vật liệu mới hay thanh có độ mảnh vượt ra ngoài bảng $\varphi(\lambda)$.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

Tính toán ổn định có ba bài toán cơ bản

- Xác định tải trọng cho phép
- Kiểm tra ổn định thanh

- Bài toán thiết kế chọn lựa mặt cắt ngang

9.3.1. Xác định tải trọng cho phép

Phương pháp thứ nhất: Khi cho trước n_{od} xác định tải trọng cho phép theo ba bước sau

- Xác định độ mảnh theo (9.8) $\lambda = \frac{\mu l}{i}$.
- Xác định tải trọng tới hạn Euler theo (9.6) $P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{td}^2}$;
- Tính tải trọng ổn định cho phép theo (9.11) $[P]_{od} = \frac{P_{th}}{n_{od}}$

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

- Xác định độ mảnh theo (9.8) $\lambda = \frac{\mu l}{i}$
- Xác định hệ số uốn dọc φ dựa trên độ mảnh λ theo bảng $\varphi(\lambda)$
- Tính tải trọng cho phép $P = [\sigma]\varphi A$

9.3.2 Kiểm tra ổn định của thanh

Tiến hành theo hai phương pháp trên tương tự như xác định tải trọng cho phép.

9.3.3 Bài toán thiết kế

Phương pháp thứ nhất rất ít dùng do thiếu chính xác.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

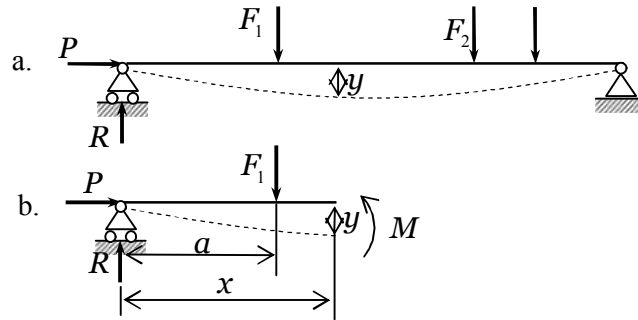
- Cho hệ số uốn dọc $\varphi = 0,6 \div 0,8$
- Tính ứng suất ổn định $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]$,
- tính diện tích tiết diện theo $A = \frac{P}{[\sigma]_{od}} = \frac{P}{[\sigma]\varphi}$ chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu thép hình từ bảng
- Tìm l, i và λ
- Tìm giá trị mới φ từ bảng $\varphi(\lambda)$. Nếu φ_2 khác nhiều so với φ_1 ta lặp lại quy trình với hệ số uốn dọc mới $\varphi_2 = 0,5(\varphi + \varphi_1)$ cho đến khi sai khác không quá 5%

Phương pháp hỗn hợp: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

- Chọn hệ số n_{od} tương ứng với vật liệu (thép $n_{od} \approx 2$, gang $n_{od} \approx 5$ và gỗ $n_{od} \approx 3$)
- Tìm I_{min} từ công thức (9.6)
- Chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu mặt cắt (thép hình) tính A, i, λ
- Xác định φ từ bảng $\varphi(\lambda)$ và tính $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]$
- Kiểm tra điều kiện ổn định (9.14). Nếu không thỏa mãn thay đổi φ (theo phương pháp thứ hai) hay thay đổi kích thước mặt cắt

9.4 Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

9.4.1 Phương trình vi phân của đường đàn hồi



Hình 9.4. Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời

Xét thanh chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc trong mặt phẳng xy (hình 9.4a). Bằng phương pháp mặt cắt (hình 9.4b) ta xác định mô men uốn tại mặt cắt có tọa độ x

$$M = Py + [Rx - F_1(x - a)]$$

Ta thấy số hạng Py là uốn dọc do tải trọng dọc P gây ra, nó phụ thuộc vào độ võng. Các số hạng trong dấu ngoặc vuông được xác định như trong bài toán uốn ngang bình thường ta kí hiệu là \bar{M} khi đó ta viết lại

$$M = Py + \bar{M} \tag{9.16}$$

Lắp vào phương trình vi phân độ võng

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

ta nhận được

$$y'' + k^2 y = -\frac{\bar{M}_z}{EI_z} \quad (9.17)$$

trong đó

$$k^2 = \frac{P}{EI_z} \quad (9.18)$$

Nghiệm của (9.17) có dạng

$$y = y^* + \bar{y} \quad (9.19)$$

y^* là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

\bar{y} là nghiệm riêng phụ thuộc vào biểu thức cụ thể của mô men uốn ngang \bar{M} tức là phụ thuộc vào dạng tải trọng tác dụng

9.4.2 Biểu thức gần đúng của độ võng

Thanh có liên kết khớp ở hai đầu

Giả thiết tải trọng ngang hướng về một phía và đối xứng qua mặt cắt giữa dầm. Khi đó độ võng cực trị f sẽ ở vị trí giữa dầm. ta chọn hàm độ võng thỏa mãn các giả thiết trên có dạng

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (9.20)$$

Độ võng \bar{y} cũng viết dưới dạng tương tự

$$\bar{y} = \bar{f} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (9.21)$$

Độ võng \bar{f} do tải trọng ngang ở chính giữa dầm hoàn toàn có thể tìm được bằng các phương pháp quen thuộc khi giải bài toán thanh chịu uốn. \bar{y} vẫn thỏa mãn phương trình vi phân của đường đàn hồi

$$\bar{y}'' = -\frac{\bar{M}}{EI}$$

Thế vào phương trình (9.17) ta được

$$y'' + k^2 y = -\bar{y}'' \quad (9.22)$$

Thay thế (9.20), (9.21) vào (9.22) ta nhận được biểu thức

$$f = \frac{\bar{f}}{1 - \frac{P}{P_{th}}}, \quad P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (9.23)$$

Thay thế (9.23) vào (9.20) ta được

$$y = \frac{\bar{y}}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (9.24)$$

Ta vẫn có thể dùng (9.24) cho các dạng liên kết khác nhưng chú ý biểu thức của lực tới hạn lúc đó tính

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

9.4.3 Biểu thức gần đúng của mô men uốn

Ta thế biểu thức (9.24) của độ võng y vào biểu thức mô men uốn (9.16)

$$M = Py + \bar{M} = \bar{M} + P \frac{\bar{y}}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (9.25)$$

Sử dụng phép gần đúng sau đây. Từ phương trình vi phân đường đàn hồi ta có

$$\frac{M_z}{\bar{M}_z} = \frac{y''}{\bar{y}''}$$

Thay thế biểu thức của độ võng y (9.20) và \bar{y} (9.21) vào quan hệ trên

$$\frac{M_z}{\bar{M}_z} = \frac{f}{\bar{f}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

Ta nhận được biểu thức gần đúng của mô men uốn

$$M_z = \frac{\bar{M}_z}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (9.26)$$

9.4.4 Ứng suất và điều kiện bền

Thanh chịu tải trọng dọc trục và tải trọng ngang ta có biểu thức của ứng suất pháp

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z} y$$

Sử dụng công thức gần đúng của mô men uốn ta có ứng suất pháp cực đại

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} \approx -\frac{P}{A} + \frac{|\bar{M}_z|}{W_z \left(1 - \frac{P}{P_{th}}\right)} \quad (9.27)$$

Ta nhận thấy ứng suất tăng không tỉ lệ với tải trọng, mà tăng nhanh hơn. Như thể hệ số an toàn bé hơn hệ số n , do vậy ta không kiểm tra theo ứng suất cho phép mà kiểm tra theo tải trọng cho phép. Điều kiện bền cho uốn ngang và uốn dọc đồng thời có dạng

$$-\frac{nP}{A} + \frac{|n\bar{M}_z|}{W_z \left(1 - \frac{nP}{P_{th}}\right)} \leq \sigma_y \quad (9.28)$$

Chú ý cần kiểm tra ổn định của thanh

$$\frac{P}{\varphi A} \leq [\sigma] \quad (9.14)$$

trong đó φ là hệ số uốn dọc tra từ bảng $\varphi(\lambda)$ cho từng loại vật liệu như hàm của độ mảnh λ .

Kết luận của chương 9

Chương 9 trình bày ổn định của thanh thẳng. Đưa định nghĩa về trạng thái ổn định, lực tới hạn theo Euler và ứng suất tới hạn.

Xem xét ổn định của thanh chịu nén đúng tâm sử dụng tham số hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$ là hàm của độ mảnh λ của thanh. Hệ số uốn dọc chính là tỉ lệ giữa ứng suất cho phép về ổn định và ứng suất cho phép về nén, do vậy người ta còn gọi $\varphi(\lambda)$ là hệ số suy giảm ứng suất cho phép về nén.

Bài toán ổn định của thanh chịu nén và uốn ngang cũng được xem xét trong chương 9 này.