

## PHẦN 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TOÁN HỆ THANH

Mục đích của phần hai là nghiên cứu các phương pháp phân tích kết cấu dạng khung, dàn. Như đã nói ở phần nhập môn đối tượng của phần này là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang. Đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, khung ngang và khung không gian như trên hình 1 ở phần nhập môn.

Lưu ý khi phân tích hệ thanh ta vẫn chấp nhận các giả thiết

- Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng có nghĩa chúng tỷ lệ với lực tác dụng
- Biến dạng nhỏ có nghĩa các chuyển vị không làm thay đổi hình học của kết cấu do vậy không thay đổi lực tác dụng lên kết cấu
- Từ hai giả thiết trên ta có nguyên lý cộng tác dụng: Dưới tác động của tổ hợp lực ta có thể cộng dồn ứng suất, biến dạng và chuyển vị gây ra bởi từng lực riêng biệt
- Ứng xử của vật liệu là đàn hồi tuân thủ định luật Hooke

Các hệ thanh mà ta sẽ khảo sát chủ yếu là các hệ siêu tĩnh. Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp mà ta lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay ta có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chỉnh dần để làm giảm số phép tính. Trong khuôn khổ của giáo trình này, các phương pháp lực, phương pháp chuyển vị và phương pháp công ảo được trình bày lần lượt trong chương 11, 12 và 13

Đối với hệ lớn và phức tạp ta sử dụng máy tính sử dụng các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Vì vậy phương pháp phần tử hữu hạn cũng được giới thiệu trong chương 14.

## CHƯƠNG 10

### Hệ siêu tĩnh

---

#### 10.1 Siêu tĩnh

Xét vật thể tự do chịu lực trong không gian. Khái niệm lực bao gồm lực tập trung và cặp ngẫu lực (hay mô men).

Vật thể ở trạng thái cân bằng khi tổng các lực tác dụng thỏa mãn phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (10.1)$$

Trong không gian trực giao ba chiều ta có sáu phương trình cân bằng. Khi ta xét trong mặt phẳng còn lại ba phương trình

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (10.2)$$

Khi kết cấu ở trạng thái cân bằng thì các thành phần tạo thành cũng ở trạng thái cân bằng. Có nghĩa tại mỗi phần tử, nút hay một phần của kết cấu cũng ở trạng thái cân bằng.

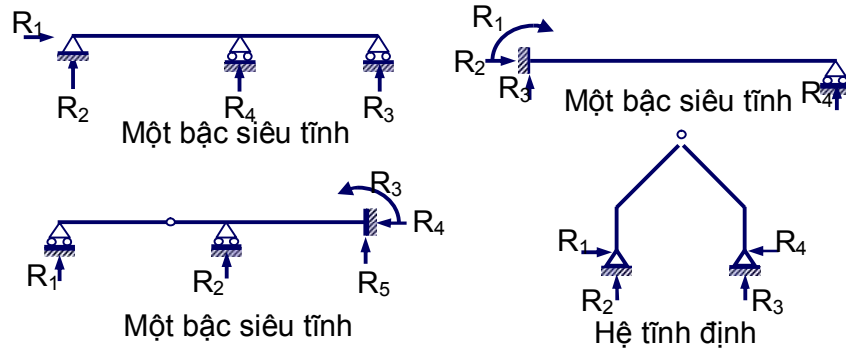
Phân tích kết cấu là xác định phản lực tại các gối đỡ và ứng suất do nội lực gây ra. Khi số phương trình cân bằng đủ để xác định các lực cần tìm thì kết cấu (hệ) được gọi là *tĩnh định*. Khi số lực cần tìm lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học thì kết cấu (hệ) được gọi là *siêu tĩnh*, phần lớn các kết cấu trong thực tế là hệ siêu tĩnh.

#### **Phân loại hệ siêu tĩnh**

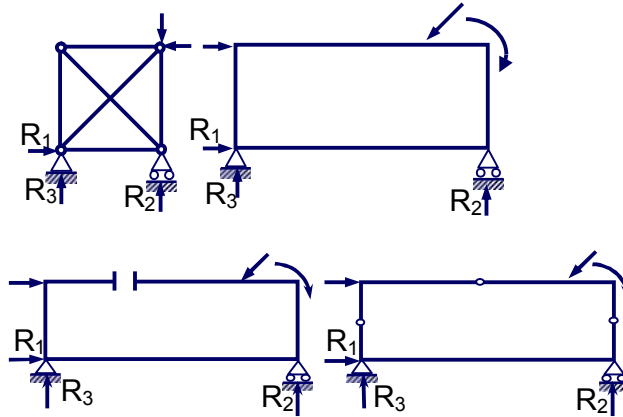
Hệ có thể là siêu tĩnh ngoại, siêu tĩnh nội hoặc cả hai.

- Siêu tĩnh ngoại là khi số phản lực cần xác định lớn hơn số phương trình cân bằng. Bậc siêu tĩnh ngoại bằng số phản lực trừ đi số phương trình cân bằng (hình 10.1).
- Siêu tĩnh nội là khi số phương trình cân bằng vẫn đủ để xác định phản lực, nhưng nội lực không thể tìm được nếu chỉ sử dụng phương trình cân bằng

Giải phóng nội lực bằng cách cắt thanh hay đặt khớp nối ta có thể đưa hệ về hệ tĩnh định (Hình 10.2). Số nội lực cần giải phóng bằng bậc siêu tĩnh nội.

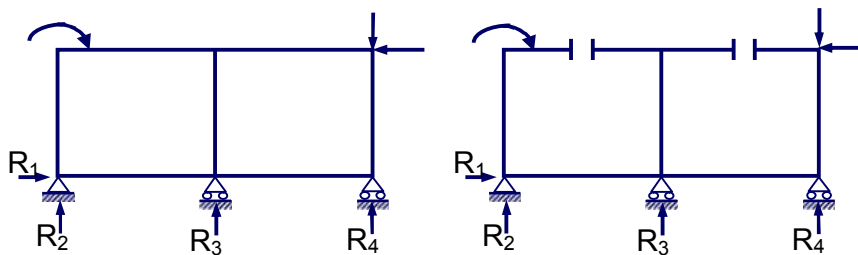


Hình 10.1. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh nội



Hình 10.2. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh ngoại

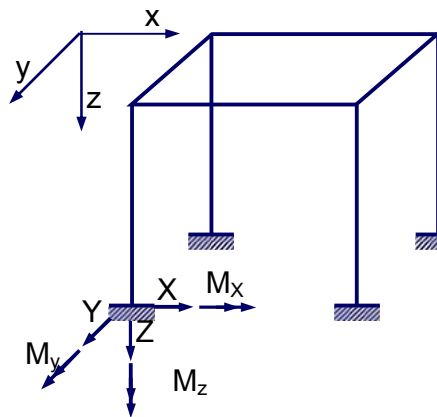
- Siêu tĩnh cả ngoại và nội. Xét ví dụ về hệ khung phẳng trên Hình 11.3 hệ có bốn phản lực như vậy ta có một bậc siêu tĩnh ngoại. Nhưng để xác định nội lực cần giải phóng nội lực tại hai mặt cắt suy ra ta có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng 7 bậc siêu tĩnh



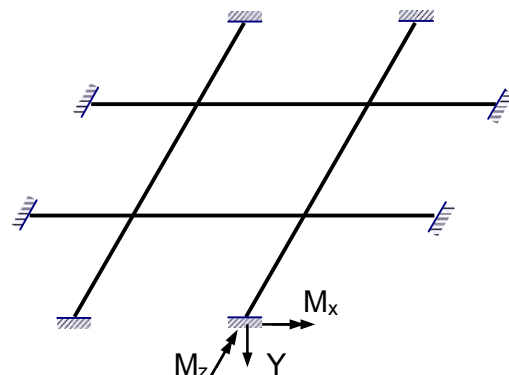
Hình 10.3. Kết cấu siêu tĩnh cả nội và ngoại

Tương tự ta xét hệ khung không gian trên Hình 11.4. Tại mỗi ngàm có sáu thành phần phản lực như vậy tổng cộng có 24 phản lực. Có sáu phương trình cân bằng vậy bậc siêu tĩnh ngoại là 18. Để xác định nội lực ta cần giải phóng một mặt cắt vậy ta có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh.

Ta xét hệ lưới trên Hình 11.5, do chỉ chịu lực vuông góc với mặt phẳng xz nên các thành phần phản lực X, Z,  $M_y$  tại gối đỡ và các nội lực X, Z,  $M_y$  tại các phần tử sẽ triệt tiêu. Như vậy tổng cộng ta có 24 phản lực và ba phương trình cân bằng suy ra hệ có 21 bậc siêu tĩnh ngoại. Để tìm nội lực ta cần giải phóng nội lực ở một trong bốn thanh như vậy ta có ba bậc siêu tĩnh nội. Hệ có tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh. Trường hợp các thanh của hệ lưới không chịu xoắn có nghĩa là liên kết các thanh là liên kết khớp các mô men xoắn sẽ bị triệt tiêu nên hệ sẽ chỉ còn 12 bậc siêu tĩnh.



Hình 10.4. Hệ khung không gian



Hình 10.5. Hệ lưới ngang

**Xác định bậc siêu tĩnh**

- Xét dàn phẳng có r phản lực, m phần tử và j nút khớp
- + Lực cần tìm gồm m nội lực tại từng thanh, r phản lực, tổng cộng có m+r
- + Tại mỗi nút có hai phương trình cân bằng

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0;$$

vậy tổng là 2j phương trình

- + Vậy số bậc siêu tĩnh sẽ là:

$$i = (m+r) - 2j \tag{10.3}$$

- Với dàn không gian có  $r$  phản lực,  $m$  phần tử và  $j$  nút khớp ta có
- + Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng

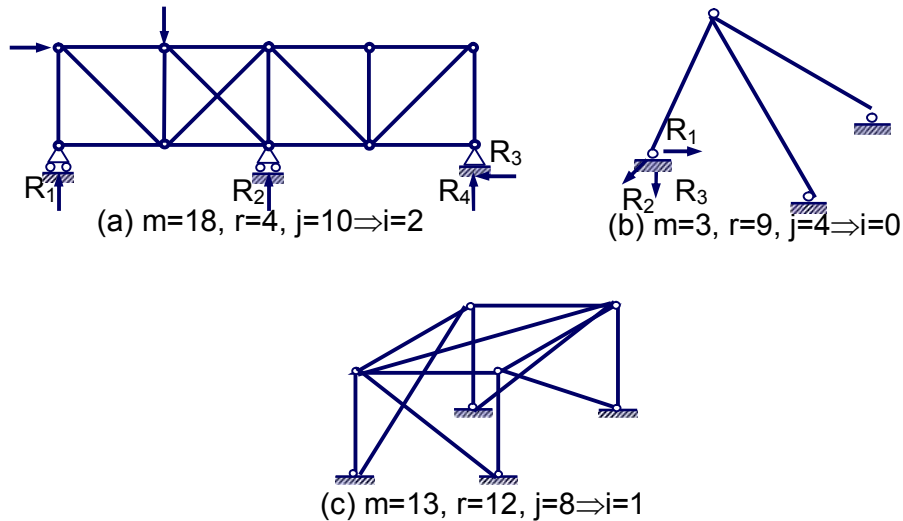
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0,$$

- + Vậy số bậc siêu tĩnh sẽ là

$$i = (m + r) - 3j \quad (10.4)$$

Ví dụ tìm bậc siêu tĩnh cho các kết cấu trên Hình 11.6

- dàn phẳng (a)  $r=4$ ,  $m=18$ ,  $j=10$  vậy  $i=2$ ,
- dàn không gian (b)  $m=3$ ,  $r=9$ ,  $j=4$ , vậy  $i=0$  dàn tĩnh định,
- dàn (c)  $m=13$ ,  $r=12$ ,  $j=8$  vậy  $i=1$ .



Hình 10.6. Tính bậc siêu tĩnh cho hệ dàn

- Xét khung phẳng có  $m$  phần tử,  $r$  phản lực và  $j$  nút liên kết cứng
- + Nội lực trong thanh (Hình 10.7a) có thể tìm được nếu ta biết ba trong sáu lực đầu phần tử vậy mỗi thanh có ba nội lực cần tìm, tổng lực cần tìm là  $3m+r$
- + Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng gồm hai phương trình lực và một phương trình mô men

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0,$$

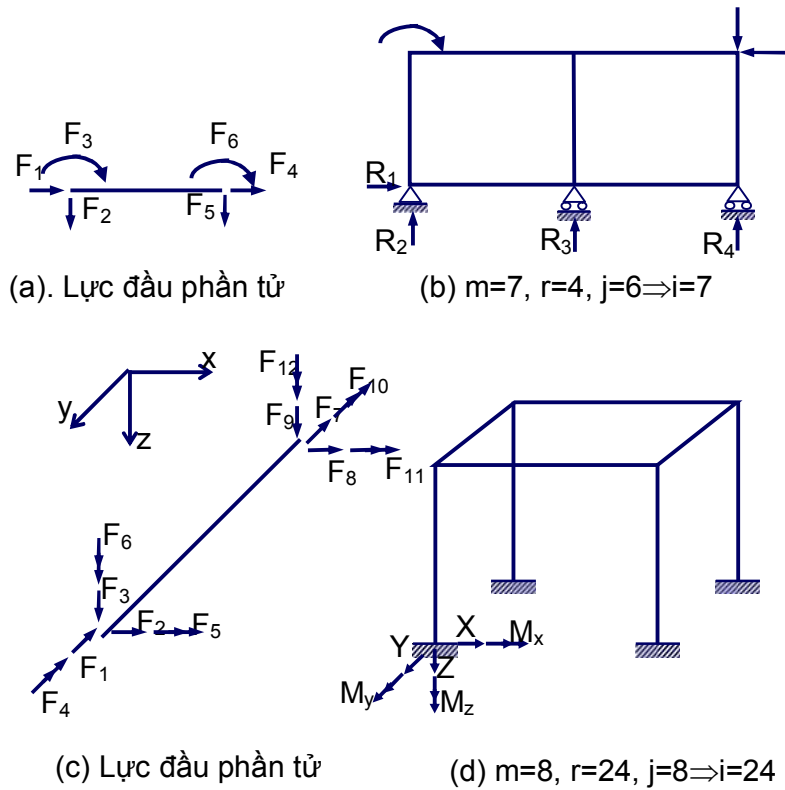
- + Như vậy số bậc siêu tĩnh:

$$i = (3m+r) - 3j \tag{10.5}$$

- Khung không gian với  $m$  phần tử,  $j$  nút,  $r$  phản lực
  - + Nội lực trong thanh (Hình 10.7c) có thể tìm được nếu ta biết sáu trong 12 lực đầu phần tử vậy mỗi thanh có sáu nội lực cần tìm, tổng lực cần tìm là  $6m+r$
  - + Phương trình: tại mỗi nút có đủ cả sáu phương trình cân bằng gồm ba phương trình lực và ba phương trình mô men (10.1)
  - + Số bậc siêu tĩnh:

$$i = (6m+r) - 6j \tag{10.6}$$

Ví dụ khung phẳng (Hình 10.7b) có bảy thanh  $m=7$ , bốn phản lực  $r=4$ , sáu nút  $j=6$  vậy có bậc siêu tĩnh là  $i = (3 \times 6 + 4) - 3 \times 6 = 7$ . Còn khung không gian (Hình 10.7d) có tám thanh  $m=8$ , có bốn nút bị ngàm chặt nên số phản lực  $r=24$ , có tổng cộng tám nút  $j=8$ , như vậy bậc siêu tĩnh  $i = (6 \times 8 + 24) - 6 \times 8 = 24$



Hình 10.7 Tính bậc siêu tĩnh cho khung phẳng và khung không gian

## 10.2 Bậc tự do

### **Các phương pháp chung giải bài toán siêu tĩnh**

Mục đích của phân tích kết cấu là tìm ngoại lực (các thành phần phản lực) và nội lực thỏa mãn điều kiện cân bằng, điều kiện liên kết. Biến dạng do các lực này gây ra đảm bảo tính tương thích, tính liên tục và các điều kiện tại các gối đỡ.

Như đã biết để phân tích hệ siêu tĩnh ngoài phương trình cân bằng ta cần đưa thêm các liên hệ hình học giữa biến dạng - gọi là điều kiện hình học (hay điều kiện tương thích). Các liên hệ này đảm bảo tính tương thích của chuyển vị với hình học của kết cấu.

Có hai cách tiếp cận để phân tích kết cấu

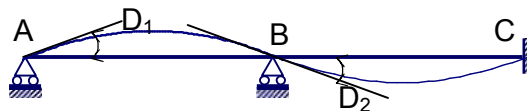
- Phương pháp lực (hay phương pháp độ mềm): ta giải phóng một số liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Sẽ xuất hiện sự không tương thích về chuyển vị. Sự không tương thích sẽ được điều chỉnh bằng cách đặt thêm các lực.
- Phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng) ta thêm các ràng buộc hạn chế chuyển vị, xác định các phản lực tại ràng buộc đó, sau đó cho các phản lực đó bằng không để xác định chuyển vị tại các điểm bị hạn chế.

Phương pháp lực: ta chọn ẩn là các lực cần để đảm bảo tính tương thích về hình học, thường dẫn đến giải hệ phương trình với số ẩn bằng số lực cần xác định.

Phương pháp chuyển vị: ta chọn ẩn là chuyển vị tại các nút, số lực ràng buộc thêm vào bằng số chuyển vị tại nút. Như vậy các chuyển vị cần tìm chính là sự không xác định động học. được gọi là bậc tự do

### **Xác định bậc tự do của hệ**

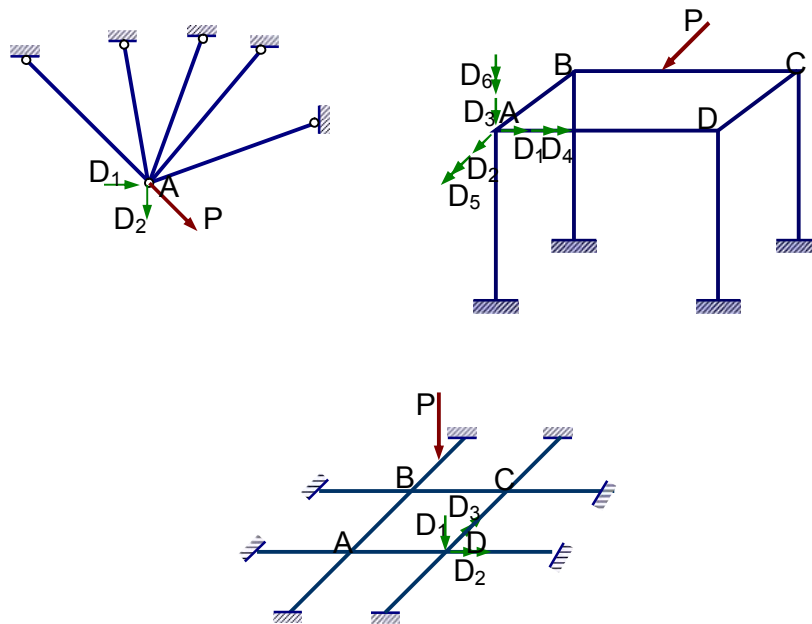
Như vậy chuyển vị tại các nút là các ẩn trong phương pháp chuyển vị. Ví dụ trên Hình 10.8 tại ngàm C không có chuyển vị, tại gối đỡ A, B, không có chuyển vị thẳng nhưng có góc xoay. Vậy số chuyển vị chưa biết là hai gồm  $D_1$  và  $D_2$ .



Hình 10.8. Ví dụ về bậc tự do

Chuyển vị nút độc lập là các chuyển vị thay đổi độc lập, không phụ thuộc vào sự thay đổi của các chuyển vị khác. Số các chuyển vị nút độc lập là số bậc tự do (bậc không xác định động học) của hệ.

Chú ý phân biệt giữa bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Hệ trên Hình 10.6b bậc siêu tĩnh là không những bậc tự do là ba. Còn hệ trên hình 10.6c bậc siêu tĩnh là một, bậc tự do là 12.



Hình 10.9. Ví dụ bậc tự do của một số kết cấu

Trên Hình 10.9 là các ví dụ về xác định bậc tự do của hệ. Hệ dàn phẳng (Hình 10.9c) có hai bậc tự do là chuyển vị ngang và chuyển vị dọc của nút A. Hệ khung không gian (Hình 10.9b) có 24 bậc tự do. Mỗi nút tự do của khung có thể thực hiện 3 chuyển vị thẳng và 3 chuyển vị xoay tổng số sáu bậc tự do. Hệ có bốn nút A, B, C và D nên hệ có 24 bậc tự do. Hệ lưới ngang (Hình 10.9c) có 12 bậc tự do, mỗi nút tự do của lưới thực hiện một chuyển vị thẳng đứng và hai chuyển vị quay tổng số là 3 bậc tự do. Hệ có bốn nút A, B, C và D nên hệ có 12 bậc tự do

### 10.3 Đường ảnh hưởng

Khi thiết kế ta quan tâm đến nội lực dưới tác động của tải cố định và hoạt tải. Ví dụ tải cố định là tải trọng bản thân, còn hoạt tải có thể là máy móc đặt trên sàn,



tải của bánh xe tác động lên cầu. Khi phân tích hoạt tải thường được biểu diễn như tải phân bố hay tổ hợp các tải tập trung

Khi thiết kế ta quan tâm đến giá trị cực đại của nội lực tại mặt cắt khác nhau. Do vậy hoạt tải có thể được đặt tại đúng vị trí làm cho nội lực đạt cực đại. Để xác định vị trí của tải di động gây ra nội lực cực đại người ta dùng đường ảnh hưởng.

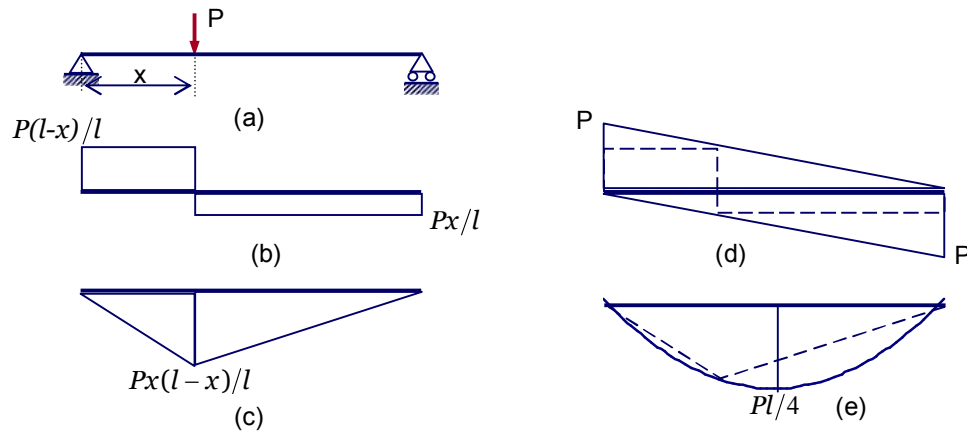
Đầu tiên ta xét ảnh hưởng của tải di động lên dầm đơn giản

### 10.3.1. Ảnh hưởng của lực tập trung

Xét ảnh hưởng của một lực tập trung chuyển động dọc trên dầm đơn giản như trên Hình 10.13a. Tại mặt cắt  $n$  bất kỳ trên dầm biểu đồ lực cắt và moment như Hình 10.13b và c. Công thức tính lực cắt và moment cực đại có dạng

$$V_{n \max+} = P \frac{l-x}{l}; \quad V_{n \max-} = -P \frac{x}{l}; \quad M_{n \max+} = P \frac{x(l-x)}{l} \quad (10.7)$$

Đường bao của lực cắt cực đại biểu diễn trên Hình 10.13d là các đường thẳng, đường bao của moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.13e là đường parabol bậc hai. Chúng được gọi là biểu đồ lực cắt cực đại và biểu đồ moment cực đại, chúng biểu diễn nội lực cực đại mà mặt cắt phải chịu khi thiết kế.



Hình 10.13

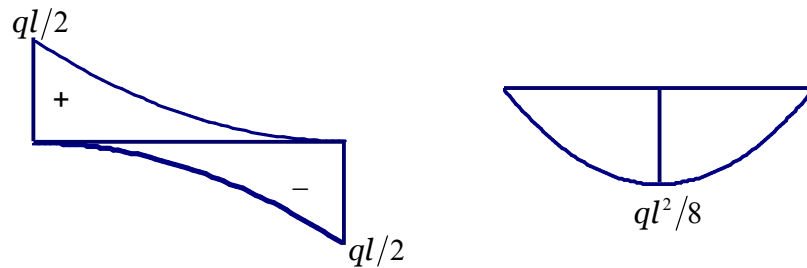
### 10.3.2 Ảnh hưởng của lực phân bố đều

Dầm chịu lực phân bố đều đặt trên toàn bộ hoặc một phần của độ dài. Moment cực đại xuất hiện khi lực phân bố trên toàn bộ độ dài của dầm. Còn lực cắt dương (âm) đạt cực đại khi lực phân bố nằm trên toàn bộ phân bên phải (bên

trái) của mặt cắt. Công thức tính lực cắt và moment cực đại tại mặt cắt bất kỳ có dạng

$$V_{n\max+} = q \frac{(l-x)^2}{2l}; \quad V_{n\max-} = -q \frac{x^2}{2l}; \quad M_{n\max+} = q \frac{x(l-x)}{2} \quad (10.8)$$

Biểu đồ lực cắt cực đại và moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.14, chúng đều là các parabol bậc hai



Hình 10.14

### 10.3.3 Ảnh hưởng của hai lực tập trung

Hai lực tập trung  $P_1 \geq P_2$ , khoảng cách giữa hai lực  $s$  chuyển động dọc treo độ dài của dầm. Công thức tính lực cắt và moment cực đại tại mặt cắt bất kỳ có dạng

$$M_{n\max+} = \frac{x(l-x)}{l} \left( P_1 + P_2 \frac{l-x-s}{l-x} \right) \quad \text{khi } 0 \leq x \leq l-s \quad (10.9)$$

$$M_{n\max+} = \frac{x(l-x)}{l} \left( P_2 + P_1 \frac{l-x-s}{l-x} \right) \quad \text{khi } s \leq x \leq l \quad (10.10)$$

$$V_{n\max+} = P_1 \frac{l-x}{l} + P_2 \frac{l-x-s}{l} \quad \text{khi } 0 \leq x \leq l-s \quad (10.11)$$

$$V_{n\max+} = P_1 \frac{s-x}{l} - P_2 \frac{x}{l} \quad \text{khi } s \leq x \leq l \quad (10.12)$$

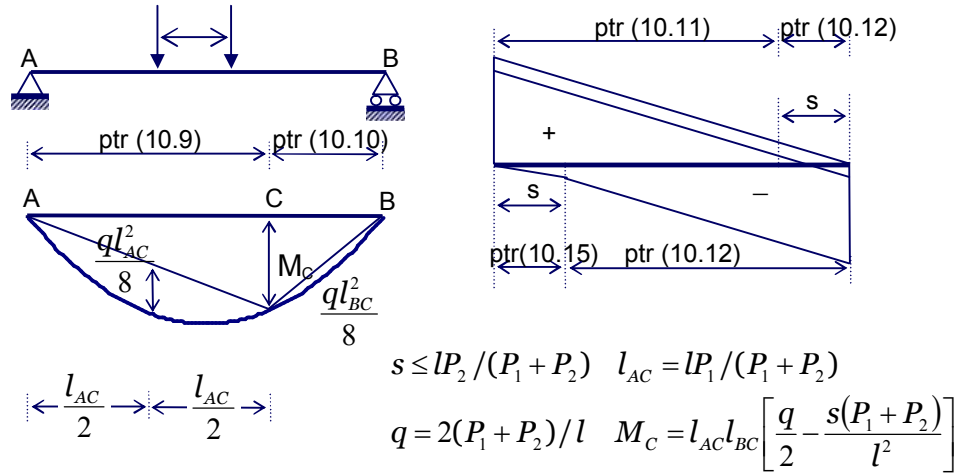
Biểu đồ lực cắt cực đại và moment cực đại biểu diễn trên Hình 10.15,

Khi trên dầm chỉ có lực  $P_1$  hoặc  $P_2$  thì

$$M_{n\max+} = P_1 \frac{x(l-x)}{l} \quad \text{khi } (l-s) \leq x \leq l \quad (10.13)$$

$$V_{n\max+} = P_1 \frac{l-x}{l}; \quad \text{khi } (l-s) \leq x \leq l \quad (10.14)$$

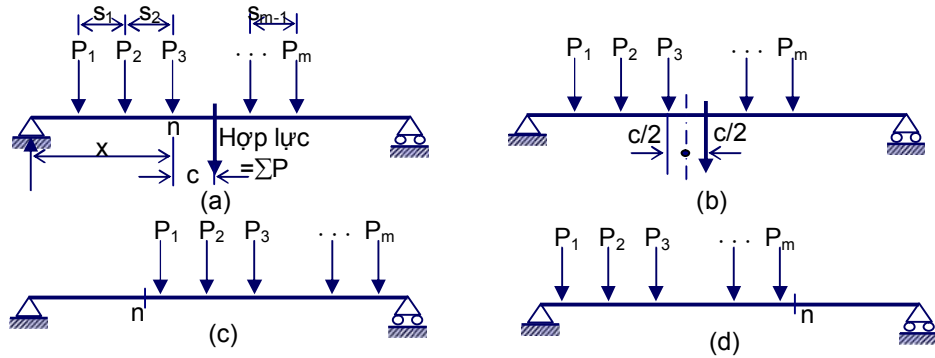
$$V_{n \max-} = -P_2 \frac{x}{l}; \text{ khi } s \leq x \leq l \quad (10.15)$$



Hình 10.15

**10.3.4 Ảnh hưởng của nhiều lực tập trung**

Xét tại mặt cắt n (Hình 10.16a), moment sẽ đạt cực đại khi một trong các lực tập trung di động đặt vào mặt cắt đó.



Hình 10.16

Ta thử tính cho từng lực sẽ tìm ra lực nào gây ra moment cực đại \$M\_{n+\max}\$. Còn lực cắt dương sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên phải của \$n\$ (10.16c). Tương tự lực cắt âm sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên trái của \$n\$ (10.16d).

Ta xét ví trí mà ở đó moment đạt cực đại tuyệt đối trong biểu đồ moment cực đại. Thường ví trí đó ở gần ví trí của hợp lực. Ta giả thiết moment cực đại tuyệt

đổi đạt được do lực  $P_3$ . Ta cần xác định vị trí  $x$  sao cho moment uốn  $M_n$  đạt cực đại

$$M_n = R_A x - P_1(s_1 + s_2) - P_2 s_2 \quad (10.16)$$

$$R_A = \frac{l-x-c}{l} \sum P \quad (10.17)$$

Giá trị cực đại đạt được khi  $\frac{\partial M_n}{\partial x}$  nên

$$\frac{dM_n}{dx} = \frac{\sum P}{l} (l - 2x - c) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} \quad (10.18)$$

### 10.3.5 Đường ảnh hưởng đối với dầm đơn giản và dàn

Trong các mục 10.3.1-10.3.4 ta đã xét ảnh hưởng của tải di động đối với dầm đơn giản. Trong phần này xem xét đường ảnh hưởng của lực cắt, moment uốn trên dầm và các lực dọc trục trong hệ dàn gối tựa đơn giản. Đường ảnh hưởng được xây dựng để biểu diễn giá trị của một phản ứng nào đó tại một mặt cắt nhất định khi lực đơn vị di động trên dầm. Hình 10.17a biểu diễn các đường ảnh hưởng của lực cắt  $V_n$ , moment  $M_n$ , phản lực gối tựa  $R_A$  và  $R_B$  tại mặt cắt  $n$  của dầm đơn giản.

Tung độ  $\eta$  tại mặt cắt  $x$  bất kỳ bằng giá trị của  $V_n$  và  $M_n$  khi lực đơn vị đặt đúng ở tọa độ  $x$  này. Tung độ dương vẽ xuống dưới. Ta có thể xây dựng đường ảnh hưởng cho dầm đơn giản từ bài toán tĩnh học đơn giản sau. Khi lực đơn vị đặt ở tọa độ  $x$  thì phản lực

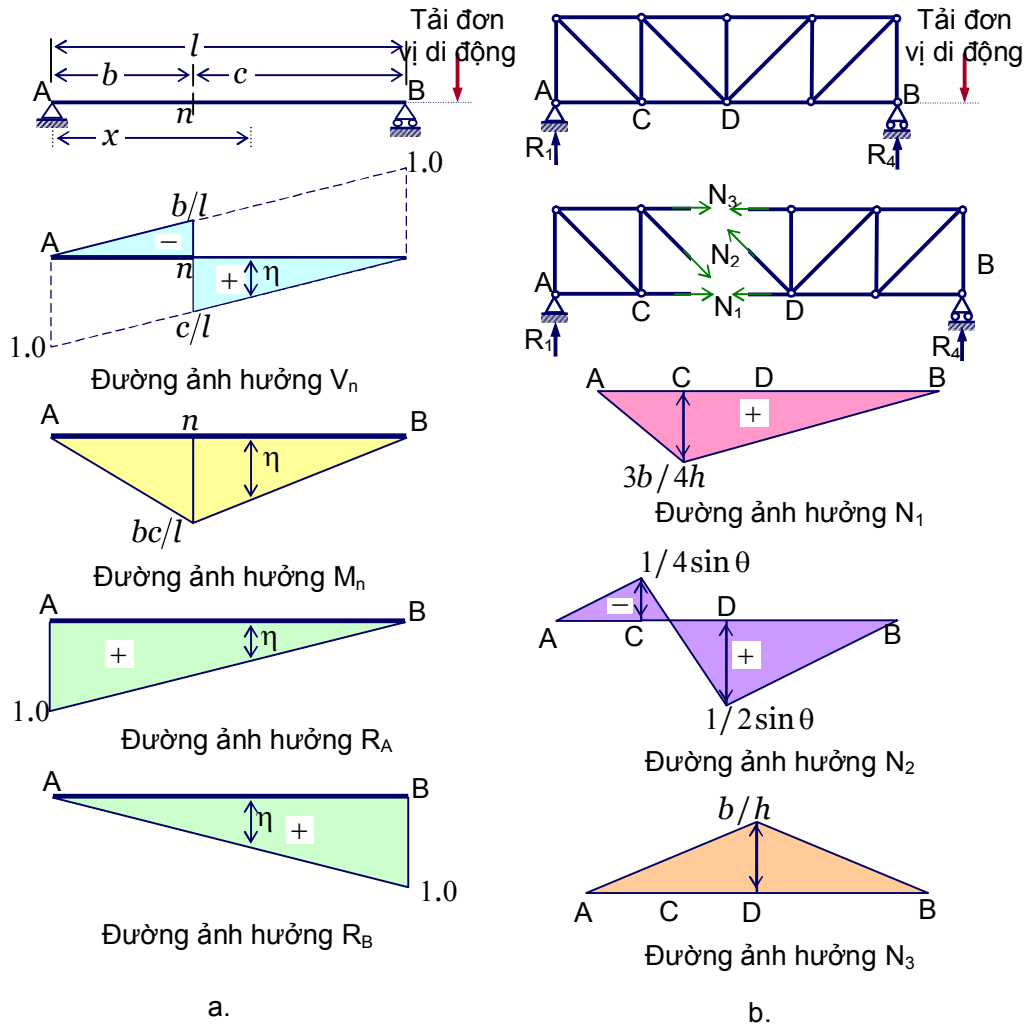
$$R_A = \frac{l-x}{l}$$

Vậy tung độ của các đường ảnh hưởng của  $R_A$  và  $R_B$  là

$$\eta_{R_A} = \frac{l-x}{l} \quad \eta_{R_B} = \frac{x}{l}$$

Lực cắt tại  $n$  bằng với  $R_A$  khi lực đơn vị nằm ở vị trí bất kỳ trong đoạn bên phải từ  $n$  đến  $B$ . Tương tự  $V_n = -R_B$  khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ  $A$  đến  $n$ .

Đối với moment khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên phải từ  $B$  đến  $n$  thì  $M_n = R_A b$ , tương tự khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ  $A$  đến  $n$  thì  $M_n = R_B c$ .



Hình 10.17

Đối với dàn ta xây dựng đường ảnh hưởng cho nội lực của từng thanh. Ta cũng dựng các đường ảnh hưởng của lực dọc trục từ đường ảnh hưởng của phản lực tại gối đỡ. Khi lực nằm trong đoạn B và D ta có

$$N_1 = R_A \frac{b}{h} \quad N_2 = \frac{R_A}{\sin \theta} \quad N_3 = -R_A \frac{2b}{h}$$

Còn khi lực nằm trong khoảng từ C và A

$$N_1 = R_A \frac{3b}{h} \quad N_2 = -\frac{R_A}{\sin \theta} \quad N_3 = -R_A \frac{2b}{h}$$

Đường ảnh hưởng của ba lực dọc trục biểu diễn trên Hình 10.17 b

*Ví dụ*

Tìm moment lớn nhất và lực cắt lớn nhất tại mặt cắt  $x=0.4l$  cho trường hợp ba tải di động như trên Hình 10.18a

Ta dùng phép thử tính cho lần lượt lực  $P_1$ ,  $P_2$  và  $P_3$  đặt vào n ta được

$$M_{n1} = Wl(0,24 \times 0,2 + 0,16 \times 0,8 + 0,08 \times 0,8) = 0,24Wl$$

$$M_{n2} = Wl(0,12 \times 0,2 + 0,24 \times 0,8 + 0,16 \times 0,8) = 0,344Wl$$

$$M_{n3} = Wl(0 \times 0,2 + 0,12 \times 0,8 + 0,24 \times 0,8) = 0,288Wl$$

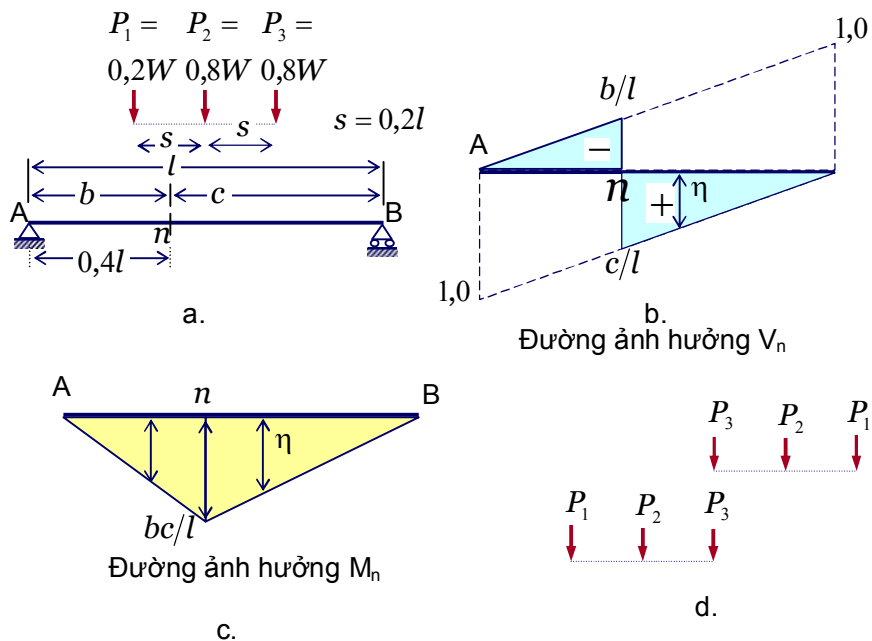
$$M_{n4} = Wl(0,24 \times 0,8 + 0,16 \times 0,8 + 0,08 \times 0,2) = 0,336Wl$$

$$M_{n5} = Wl(0,16 \times 0,8 + 0,24 \times 0,8) = 0,32Wl$$

Như vậy trường hợp thứ hai khi lực  $P_2$  đặt vào điểm n moment đạt cực đại. Lực cắt đạt cực đại tại các trường hợp đặt tải như trên Hình 11.18d

$$V_{\max+} = W(0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2) = 0.84W$$

$$V_{\max-} = W(0 \times 0.2 - 0.2 \times 0.8 - 0.4 \times 0.2) = -0.48W$$



Hình 10.18

### Kết luận chương 10

Phần lớn các kết cấu trong thực tế là siêu tĩnh, cần phải xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu khi ta sử dụng phương pháp độ mềm. Bậc siêu tĩnh phân ra làm các loại sau: siêu tĩnh nội, siêu tĩnh ngoại và hỗn hợp. Những kết cấu đơn giản ta có thể xác định bậc siêu tĩnh dựa vào hình vẽ. Đối với kết cấu phức tạp ta có công thức (10.4), (10.6), (10.7) và (10.8) để xác định bậc siêu tĩnh của hệ dàn phẳng, dàn không gian (khớp nối tại nút), khung phẳng và khung không gian (nối cứng ở nút).

Có hai phương pháp phân tích kết cấu. Phương pháp thứ nhất là phương pháp lực hay còn gọi là phương pháp độ mềm. Phương pháp này giải phóng các liên kết để kết cấu trở thành tĩnh định, sau đó tính tổng chuyển vị và sự sai lệch về chuyển vị sẽ được hiệu chỉnh bằng cách đặt các lực dư vào đúng hướng của các liên kết đã giải phóng. Như vậy ta có được các phương trình tương thích, lời giải của chúng là các lực cần tìm.

Trong phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng) ta đưa vào các ràng buộc tại các nút. Sau đó tính những lực ràng buộc hạn chế các chuyển vị này. Tiếp theo cho phép chuyển vị tại các hướng có lực ràng buộc sao cho lực ràng buộc triệt tiêu. Như vậy ta có một hệ các phương trình cân bằng, lời giải của hệ là các chuyển vị cần tìm. Nội lực trong kết cấu cũng được xác định bằng phép tổ hợp các tác động của các chuyển vị vừa tính được và của các chuyển vị do lực ngoại lực trên kết cấu đã bị hạn chế dịch chuyển.

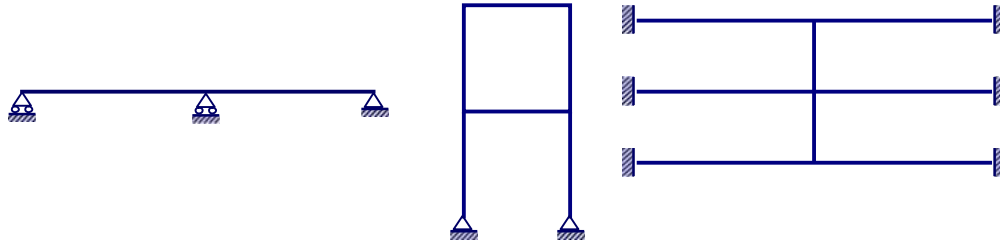
Số các ràng buộc trong phương pháp độ cứng bằng với số chuyển vị nút độc lập của kết cấu. Số chuyển vị nút độc lập này được gọi là bậc không xác định động học hay đơn giản hơn là bậc tự do của kết cấu. Ta cần phân biệt bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Chuyển vị ở đây phải hiểu là cả chuyển vị thẳng và cả góc xoay.

Trong cả hai phương pháp phân tích kết cấu ta đều sử dụng nguyên lý cộng tác dụng cho phép cộng chuyển vị (đáp ứng) do từng tải trọng (chuyển vị) riêng biệt. Nguyên lý này chỉ áp dụng khi vật liệu là đàn hồi (tuân thủ định luật Hooke). Ngoài ra, chuyển vị phải nhỏ so với kích thước của kết cấu để không làm méo mó hình học ban đầu của kết cấu.

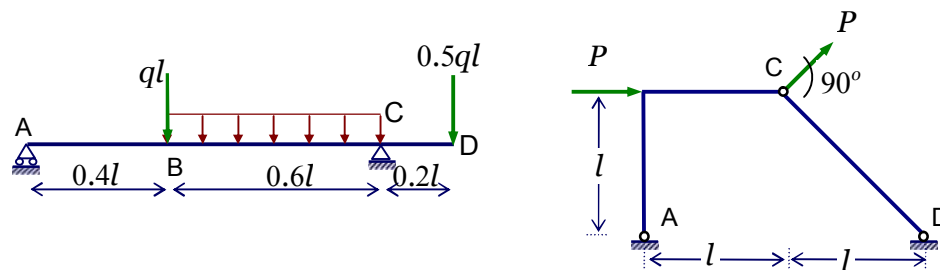
**Bài tập chương 10**

10.1. Với các kết cấu dưới đây

- Xác định bậc siêu tĩnh và đưa ra các giải phóng liên kết thích hợp để kết cấu trở thành tĩnh định
- Xác định bậc tự do và chỉ ra các chuyển vị



10.2. Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ moment cho các dầm và khung dưới đây.



10.3. Xác định moment uốn cực đại và vị trí của nó trên dầm đơn giản có khẩu độ  $l$  khi chịu các trường hợp tải trọng di động sau

- a) Hai lực  $P_1=P_2=W$ , khoảng cách giữa hai lực là  $s=0.2l$
- b) Hai lực  $P_1=P_2=W$ , khoảng cách giữa hai lực là  $s=0.55l$
- c) Ba lực  $P_1=P_2=W$ ,  $P_3=0.5W$  khoảng cách giữa các lực là  $s=0.2l$
- d) Ba lực  $P_1=0.2W$ ,  $P_2=P_3=0.8W$  khoảng cách giữa các lực là  $s=0.2l$



## CHƯƠNG 11

### Phương pháp lực

---

#### 11.1 Mô tả phương pháp

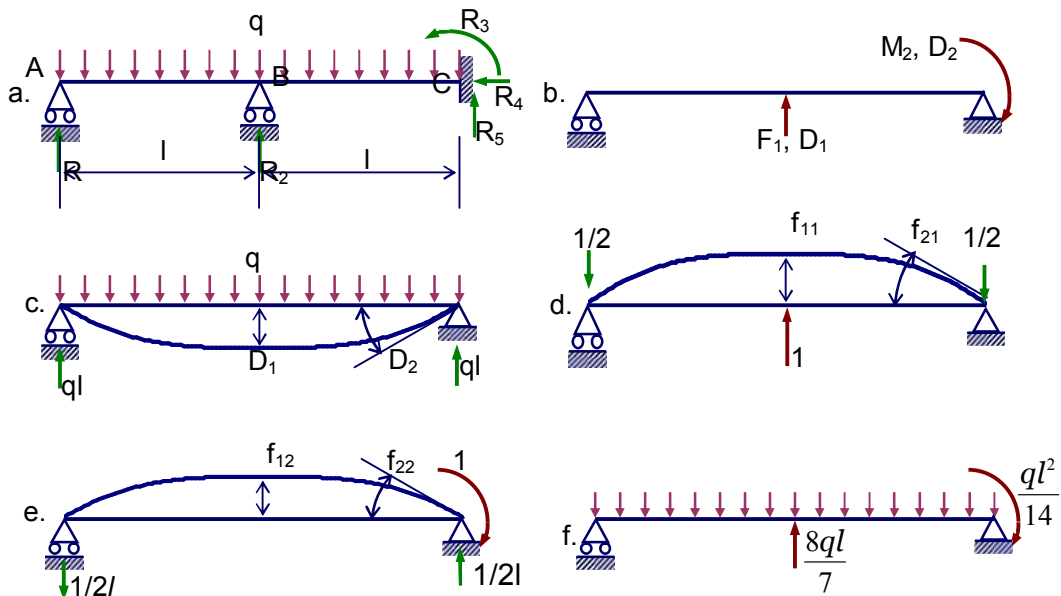
1. Đầu tiên xác định bậc siêu tĩnh. Đưa hệ siêu tĩnh về hệ tĩnh định bằng cách giải phóng một số liên kết, có nghĩa bỏ đi một số phản lực hay nội lực (phải đảm bảo kết cấu ổn định). Số liên kết cần giải phóng bằng số bậc siêu tĩnh. Nói chung những lực cần giải phóng (được gọi là lực dư) cần lựa chọn sao cho hệ kết cấu đã giải phóng thành tĩnh định để phân tích nhất. *Chú ý việc lựa chọn này không duy nhất.*
2. Khi giải phóng các liên kết sẽ dẫn đến sự không tương thích về chuyển vị. Do vậy bước thứ hai phải xác định những sai lệch về chuyển vị ở hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết). Ta tính sai lệch về chuyển vị chính ở tọa độ ứng với lực dư đã chọn. Những sai lệch này có thể do ngoại lực, do lún của gối đỡ hay do biến dạng nhiệt.
3. Bước thứ 3 ta cho hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết) chịu lực dư đơn vị, sau đó xác định chuyển vị. Những chuyển vị này có cùng vị trí và hướng như chuyển vị xác định ở bước 2.
4. Ta thấy các lực dư ở những tọa độ đã chọn phải có giá trị sao cho những sai lệch về chuyển vị bị triệt tiêu. Như vậy, ta có các phương trình tổng hợp các chuyển vị do từng lực dư riêng biệt (xác định ở bước thứ 3) cộng với chuyển vị tương ứng của hệ tĩnh định (xác định ở bước thứ 2).
5. Từ đây ta tìm lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu: chúng là tổng các lực dư và lực trên hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết).

Quy trình này được trình bày qua ví dụ dưới đây

Ví dụ 11.1. Xét ví dụ trên Hình 11.1a dầm ABC ngàm cứng ở đầu C tựa trên hai gối di động tại A và B chịu tải phân bố đều  $q$  trên toàn dầm. Độ cứng uốn của dầm là hằng số và bằng  $EI$ .

Hệ này có hai bậc siêu tĩnh như vậy cần giải phóng hai lực dư. Có một số lựa chọn: bỏ lực phản lực thẳng đứng ở A và B (Hình 11.2a); hoặc bỏ mô men ở C và thêm khớp nối ở B (Hình 11.2b). Dưới đây ta chọn phương án giải phóng phản lực thẳng đứng ở B và mô men uốn tại C đưa hệ về dầm đơn giản như trên Hình 11.1.b. Ta gọi vị trí và hướng của lực dư và chuyển vị là hệ tọa độ.

Hướng của lực dư  $F_1, F_2 \dots$  có thể tùy chọn. Sau đó hướng của chuyển vị phải tương ứng với lực dư. Để thuận tiện ta dùng ký hiệu chỉ số dưới 1, 2, ...n.



Hình 11.1. Ví dụ mô tả phương pháp lực

Trong ví dụ này lực dư và chuyển vị là  $F_1, M_2$  và  $D_1, D_2$  (Hình 11.1.b).

Trên sơ đồ hệ tĩnh định này ta xác định chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  dưới tác động của lực phân bố đều (Hình 11.1.c). Chúng chính là sai lệch về chuyển vị, vì trên thực tế (Hình 11.1a) các chuyển vị này phải bằng không. Sử dụng phụ lục 1 ta tính được giá trị của chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$ .

Sau đó tìm chuyển vị gây ra do tác động của các lực dư đơn vị (như trên Hình 11.1.d và 8.1.e). Cũng sử dụng phụ lục 1 ta có

$$f_{11} = \frac{l^3}{6EI} \quad f_{12} = \frac{l^2}{4EI} \quad f_{21} = \frac{l^3}{4EI} \quad f_{22} = \frac{2l}{3EI} \quad (11.2)$$

Tổng quát  $f_{ij}$  là chuyển vị tại tọa độ thứ i do lực đơn vị tại tọa độ thứ j gây ra.

Điều kiện *hình học* trong bài toán này chính là điều kiện chuyển vị thẳng đứng tại điểm B ( $D_1$ ) và chuyển vị xoay tại điểm C ( $D_2$ ) bị triệt tiêu.

Chuyển vị tổng cộng tại các tọa độ đã chọn là tổ hợp các tác động của ngoại lực và các lực dư trên hệ tĩnh định đã được giải phóng. Như vậy điều kiện hình học được viết

$$\begin{cases} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

Thế các biểu thức (11.1) của  $D_1$ ,  $D_2$ , và (11.2) của  $f_{11}$ ,  $f_{21}$ ,  $f_{12}$ ,  $f_{22}$  vào (11.3) ta có thể tìm được lực dư  $F_1$  và  $F_2$ .

## 11.2 Ma trận độ mềm

Phương trình (11.3) có thể viết dưới dạng ma trận

$$[f]\{F\} = \{-D\} \quad (11.4)$$

trong đó  $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$   $[f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$   $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Véc tơ  $\{D\}$  phụ thuộc vào ngoại lực. Ma trận  $f$  là các chuyển vị do lực dư đơn vị gây ra, do vậy ma trận  $f$  chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu và được gọi là ma trận độ mềm, các phần tử của ma trận này gọi là hệ số ảnh hưởng mềm.

Các thành phần của vectơ lực dư  $\{F\}$  xác định từ phương trình sau

$$\{F\} = [f]^{-1} \{-D\} \quad (11.5)$$

Trong ví dụ ở Hình 11.1

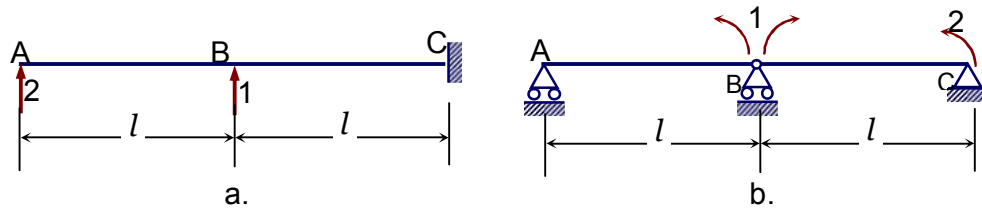
$$\{D\} = \frac{ql^3}{24EI} \begin{Bmatrix} -5l \\ -8 \end{Bmatrix} \quad [f] = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{6EI} & \frac{l^2}{4EI} \\ \frac{l^2}{4EI} & \frac{2l}{3EI} \end{bmatrix} \quad [f]^{-1} = \frac{12EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

Giải phương trình (11.5) ta được các lực dư

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \{-D\} = \frac{12EI}{7l^3} \frac{ql^3}{24EI} \begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5l \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{14} \begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix}$$

Kết quả ta được hệ lực tác động lên hệ tĩnh định như trên hình (11.1.f). Sau đó bằng phương pháp thông thường ta có thể tìm được nội lực và phản lực trong thanh.

Chú ý ma trận độ mềm phụ thuộc vào hệ lực dư ta chọn. Cũng với Ví dụ 11.1 này ta chọn hệ lực dư khác



Hình 11.2. Hệ lực dư khác nhau cho cùng một kết cấu siêu tĩnh

Với trình tự như đã trình bày cho hai hệ tọa độ này ta có véc tơ chuyển vị và ma trận độ mềm và lực dư như sau

$$(a) \{D\} = -\frac{ql^4}{24EI} \begin{Bmatrix} 48 \\ 17 \end{Bmatrix}; [f] = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; [f]^{-1} = \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}; F = \frac{ql}{28} \begin{Bmatrix} 11 \\ 32 \end{Bmatrix}.$$

$$(b) \{D\} = \frac{ql^3}{24EI} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}; [f] = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; [f]^{-1} = \frac{6EI}{7l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; F = -\frac{ql^2}{28} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Đáp ứng của kết cấu (phản lực và nội lực) xác định bằng tổ hợp ảnh hưởng của ngoại lực và lực dư

$$A_i = A_{si} + (A_{ui1}F_1 + A_{ui2}F_2 + \dots + A_{uin}F_n) \tag{11.6}$$

trong đó  $A_i$  – đáp ứng bất kỳ (có thể là phản lực tại gối đỡ, lực cắt, lực dọc trục, mô men xoắn và mô men uốn) tại mặt cắt nào đó của kết cấu thực.

$A_{si}$  - cũng là đáp ứng trên nhưng tính cho kết cấu đã giải phóng liên kết dưới tác động của ngoại lực.

$A_{ui1}, A_{ui2}, \dots, A_{uin}$ , - đáp ứng tương ứng do lực đơn vị tác động tại các tọa độ 1, 2, ..., n với kết cấu đã giải phóng liên kết.

$F_1, F_2, \dots, F_n$  – các lực dư tác động vào kết cấu đã giải phóng.

Dưới dạng ma trận

$$\{A\}_{m \times 1} = \{A_s\}_{m \times 1} + [A_u]_{m \times n} \{F\}_{n \times 1} \quad (11.7)$$

$$\text{trong đó } \{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \Lambda \\ A_n \end{Bmatrix}, \{A_s\} = \begin{Bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ \Lambda \\ A_{sn} \end{Bmatrix} \quad [A_u] = \begin{bmatrix} A_{u11} & A_{u12} & A_{u1n} \\ A_{u21} & A_{u22} & A_{u2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{um1} & A_{um2} & A_{umn} \end{bmatrix}$$

Chú ý đơn vị của các thành phần của ma trận độ mềm không nhất thiết đồng nhất vì chúng có thể đại diện cho chuyển vị thẳng có thể là góc xoay.

Ta tính phản lực tại gối đỡ cho Ví dụ 11.1. Từ Hình 11.1 c,d và e ta có được các vectơ  $A_s$  và ma trận  $A_u$  như sau

$$R_{As} = R_{Cs} = ql \Rightarrow \{R_s\} = \begin{Bmatrix} R_{As} \\ R_{bs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix}$$

$$R_{A1} = R_{C1} = -\frac{1}{2}; \quad R_{A2} = -R_{C2} = -\frac{1}{2l};$$

$$\Rightarrow [R_u] = \begin{bmatrix} R_{Au1} & R_{Au2} \\ R_{Bu1} & R_{Bu2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix};$$

Sử dụng (11.7) ta tính được

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_A \\ R_C \end{Bmatrix} = \{R_s\} + [R_u]\{F\} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix} - \frac{ql}{28} \begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix} = \frac{ql}{28} \begin{Bmatrix} 11 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

$$R_A = \frac{11ql}{28}; \quad R_C = \frac{13ql}{28}$$

### 11.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác nhau

Khi có p trường hợp tải khác nhau tác động lên kết cấu ta có thể sử dụng phương trình (11.3) để tìm lực dư mà không cần tính lại ma trận độ mềm, ta tổ hợp thành phương trình ma trận

$$[F]_{n \times p} = [f]_{n \times n}^{-1} [\Delta - D]_{n \times p} \quad (11.8)$$

Mỗi cột của [F] và [D] ứng với mỗi trường hợp tải. Đáp ứng của hệ (phản lực và nội lực) có thể tìm từ phương trình ma trận tương đương với phương trình (11.7)

$$[A]_{m \times p} = [A]_{m \times p} + [A_u]_{m \times n} [F]_{n \times p} \quad (11.9)$$

### 11.3.1 Ảnh hưởng của chuyển vị tại nút: ảnh hưởng của môi trường

Phương pháp lực có thể dùng để giải các kết cấu chịu những ảnh hưởng khác ngoài lực tác động. Ví dụ như sự di chuyển của gối đỡ (do gối đỡ bị lún, hay do sự thay đổi nhiệt không đều của gối đỡ) gây ra nội lực.

Nếu kết cấu bị hạn chế chuyển vị cũng gây ra nội lực. Ví dụ như khi nhiệt độ thay đổi trong dầm không đồng đều.

Co ngót của bê tông cũng gây ra nội lực trong kết cấu như hiệu ứng thay đổi nhiệt. Hiệu ứng của bê tông dư ứng lực cũng gây ra nội lực.

### 11.3.2 Ảnh hưởng của chuyển vị tại tọa độ

Khi gối đỡ chuyển vị theo những tọa độ lực dư mà ta đã chọn thì hệ phương trình (11.3) sẽ thay đổi. Điều kiện hình học có dạng

$$\left. \begin{aligned} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 &= \Delta_1 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 &= \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Để tìm lực dư ta có phương trình ở dạng ma trận

$$\{F\} = [f]^{-1} \{\Delta - D\}, \text{ với } \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Lambda \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (11.11)$$

Khi đó phương trình (11.8) sẽ thành

$$[F]_{n \times p} = [f]_{n \times n}^{-1} [\Delta - D]_{n \times p} \quad (11.12)$$

## 11.4 Năm bước giải của phương pháp lực

Bước 1. Chọn liên kết cần giải phóng và xác định hệ tọa độ. Đồng thời xác định  $[A]_{m \times n}$  của các đáp ứng cần tìm và quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định  $[D]_{n \times p}$   $[\Delta]_{n \times p}$  và  $[A_s]_{m \times p}$  do ngoại lực tác động lên hệ tĩnh định (hệ kết cấu đã giải phóng liên kết).

Bước 3. Thiết lập ma trận  $[f]_{n \times n}$  và  $[A_u]_{m \times p}$  do các lực dư đơn vị tác động lên hệ tĩnh định.

Bước 4. Tìm lực dư  $[F]_{n \times p}$  từ phương trình hình học.

$$[f]_{n \times n} [F]_{n \times p} = [\Delta - D]_{n \times p}$$

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ tổ hợp.

$$[A]_{m \times p} = [A_s]_{m \times p} + [A_u]_{m \times n} [F]_{n \times p}$$

Ở đây có các ký hiệu:

$n, p, m$  - số lực dư, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực)

$[A]$  – đáp ứng cần xác định - lời giải của bài toán

$[A_s]$  – đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu đã giải phóng liên kết

$[A_u]$  – đáp ứng do lực dư đơn vị tác động riêng biệt tại các tọa độ lên kết cấu đã giải phóng liên kết

$[D]$  - chuyển vị do lực tác động gây ra tại các tọa độ. Chuyển vị này cần được triệt tiêu bằng các lực dư

$[\Delta]$  - chuyển vị cho trước

$[f]$  – ma trận độ mềm

Sau bước thứ 3 các ma trận cần thiết để giải bài toán đã được xác định. Hai bước còn lại đơn thuần là các phép tính đại số.

Ví dụ 11.2. Xét ví dụ ở Hình 11.1 cho 2 trường hợp gối đỡ di chuyển Hình 11.3:

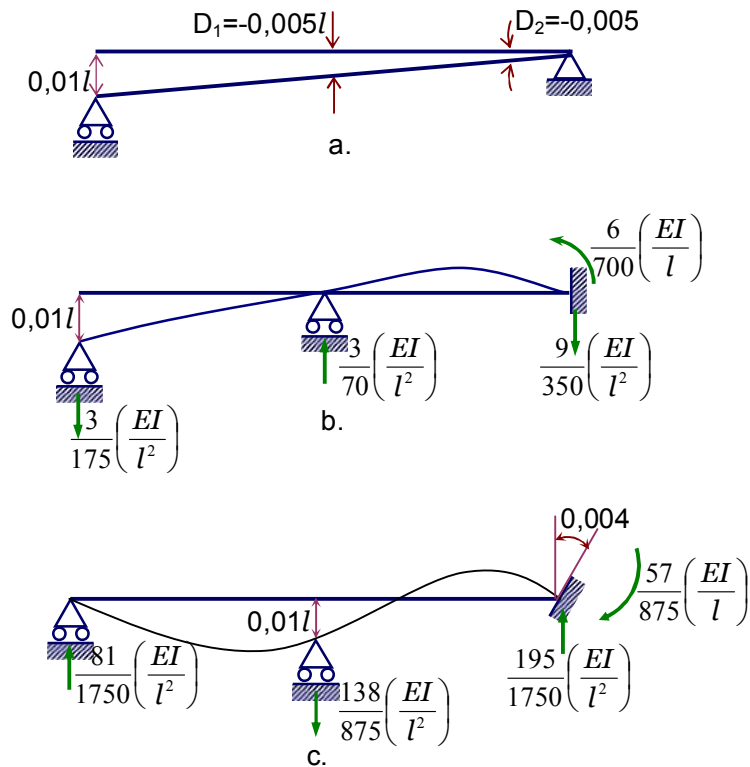
(a) Điểm A lún xuống một đoạn là  $l/100$ ; (b) Điểm B lún xuống một đoạn là  $l/100$  và điểm C xoay theo chiều kim đồng hồ một góc  $= 0,004$  rad.

*Lời giải:* Trường hợp (a) với hệ tọa độ như Hình 11.1b sự lún của gối A không ứng với tọa độ lực dư nên  $\Delta=0$ , sai lệch về chuyển vị (Hình 11.3a) xác định dễ dàng:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} -0,005l \\ -0,005 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Trường hợp (b) chuyển vị cho trước này không gây ra sai lệch  $D=0$ , các chuyển vị cho trước này trùng với tọa độ lực dư nên

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} -0,01l \\ 0,004 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\Delta - D] = \begin{Bmatrix} 0,005l & -0,01l \\ 0,005 & 0,004 \end{Bmatrix}$$



Hình 11.3. Ví dụ tính toán với chuyển vị cho trước

Thế vào phương trình (11.12) ta có

$$\begin{aligned}
 [F] &= \frac{12EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,005l & -0,01l \\ 0,005 & 0,004 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{12EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 0,025l & -0,092l \\ -0,005l^2 & 0,038l^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Để tính phản lực tại gối đỡ ta sử dụng ma trận  $R_u$  đã tính ở ví dụ 1 vì ta vẫn giữ nguyên hệ tọa độ đã chọn. Còn ma trận  $R_s=0$ , nên ta có

$$\begin{aligned}
 [R] &= \begin{bmatrix} R_{Aa} & R_{Ab} \\ R_{Ca} & R_{Cb} \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{12EI}{7l^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{l} \\ 1 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,025 & -0,092 \\ -0,005l & 0,038l \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{12EI}{7l^2} \begin{bmatrix} 0,01 & -0,027 \\ 0,015 & 0,065 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$R_{A(a)} = -\frac{3}{175} \frac{EI}{l^2}; R_{A(b)} = \frac{81}{1750} \frac{EI}{l^2}; R_{C(a)} = -\frac{9}{350} \frac{EI}{l^2}; R_{C(b)} = \frac{195}{1750} \frac{EI}{l^2}$$

Ví dụ 11.3. Phân tích dầm liên tục độ cứng không đổi EI (Hình 11.4) với các trường hợp tải: a. Tải phân bố đều q (a); b. Gối A lún một đơn vị (d). c. Gối B lún một đơn vị (e).

Để đưa kết cấu thành tĩnh định ta có thể giải phóng liên kết bằng cách đưa vào các khớp ở các gối đỡ ở giữa. Bằng cách này ta giải phóng hai mô men bằng nhau về độ lớn nhưng ngược hướng tác động tại hai phía của gối đỡ đưa kết cấu về một loạt các dầm đơn giản. Những mô men uốn đó được gọi là mô men liên kết.

Sự sai lệch về chuyển vị là các góc xoay tại các điểm nối của các dầm liên kế -góc giữa các đường tiếp tuyến của hai dầm liên kế (Hình 11.4.b).

Bước 1. Thực hiện trên Hình 11.4b. Phản lực gối đỡ có:  $R_A, R_B, R_C, R_D, R_E$ .

Bước 2. Sử dụng phương trình 11.12 tìm sai lệch chuyển vị cho cả 3 trường hợp

– Trường hợp (a) tải phân bố (Hình 11.4c) sử dụng Phụ lục 1 ta tính được

$$\{D\} = \frac{ql^3}{12EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{và} \quad \{R_{sa}\}^T = \left\{ \frac{ql}{2} \quad ql \quad ql \quad ql \quad \frac{ql}{2} \right\}$$

– Trường hợp gối A lún xuống một đơn vị (Hình 11.4c) và trường hợp gối B lún xuống 1 đơn vị (Hình 11.4d) đều không ứng với tọa độ của lực dư đã chọn nên vectơ  $\Delta$  bằng không, ta tính được chuyển vị sai lệch như sau

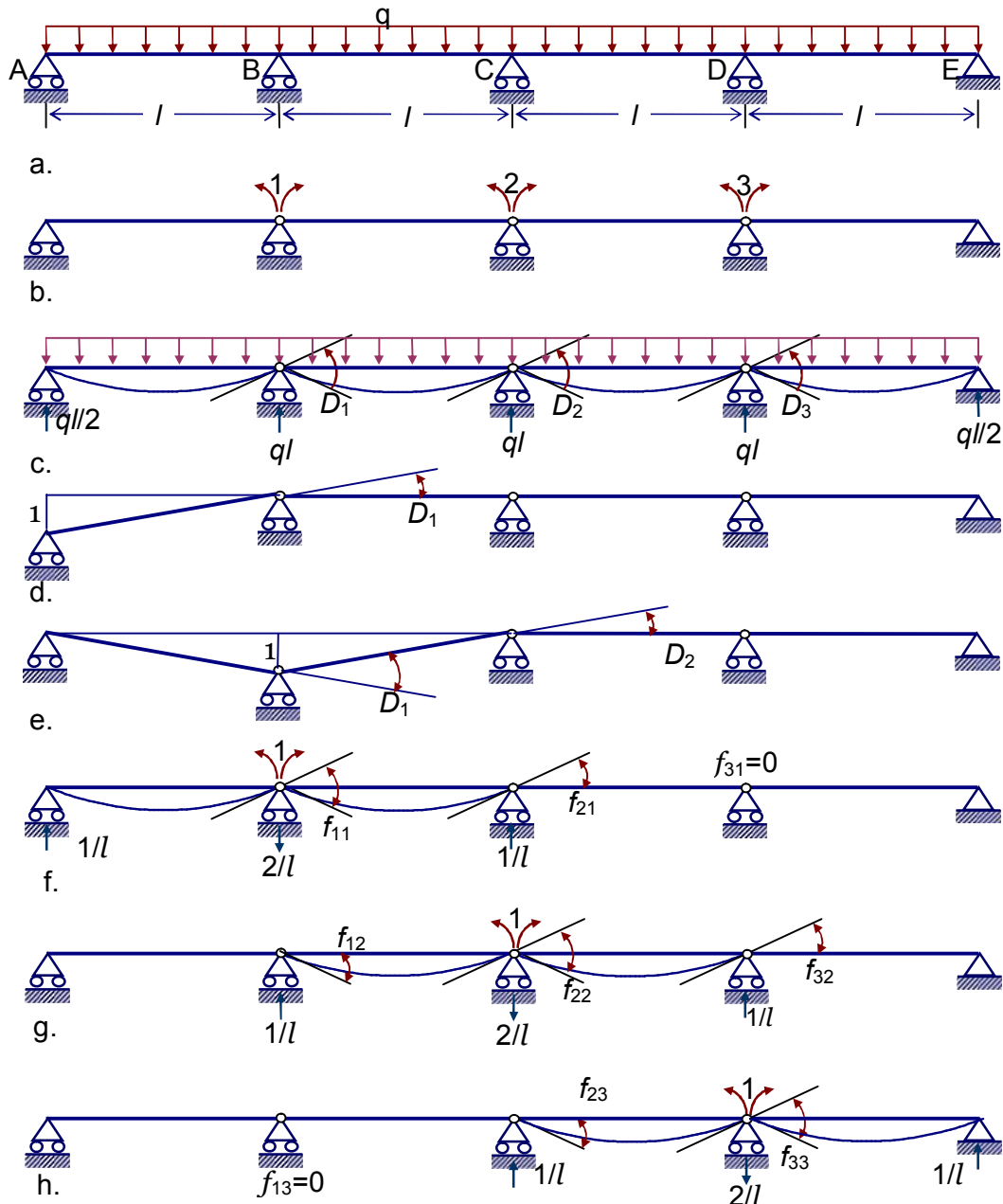
$$\text{a. } \{D\} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\text{b. } \{D\} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cả hai trường hợp b, c vectơ phản lực  $\{R_{sb}\}=0$  và  $\{R_{sc}\}=0$

Vậy ma trận  $[\Delta-D]$  và ma trận  $[A_s]$  có dạng

$$[\Delta - D] = - \begin{bmatrix} \frac{ql^3}{12EI} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & \frac{1}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A_s] = \begin{bmatrix} ql/2 & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 11.4. Giải phóng liên kết cho hệ dầm liên tục bằng các khớp

Bước 3. Thiết lập ma trận  $[f]$  và ma trận  $[A_u]$ . Đặt từng cặp lực dư là cặp mô men có độ lớn bằng 1 và ngược hướng vào các điểm B, C, D tương ứng, sử dụng Phụ lục 1 ta tính các thành phần của ma trận độ mềm (Hình 11.4 f,g,h)

$$[f] = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [f]^{-1} = \frac{3EI}{28l} \begin{bmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{bmatrix}$$

Cũng trên hình (11.4f,g,h) ta thiết lập ma trận  $[A_u]$

$$[A_u] = \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ -2/l & 1/l & 0 \\ 1/l & -2/l & 1/l \\ 0 & 1/l & -2/l \\ 0 & 0 & 1/l \end{bmatrix}$$

Bước 4. Từ phương trình (11.12) ta tính được các mô men uốn tại các gối B, C, D. Mỗi cột trong ma trận F ứng từng trường hợp tải đã nêu trong ví dụ

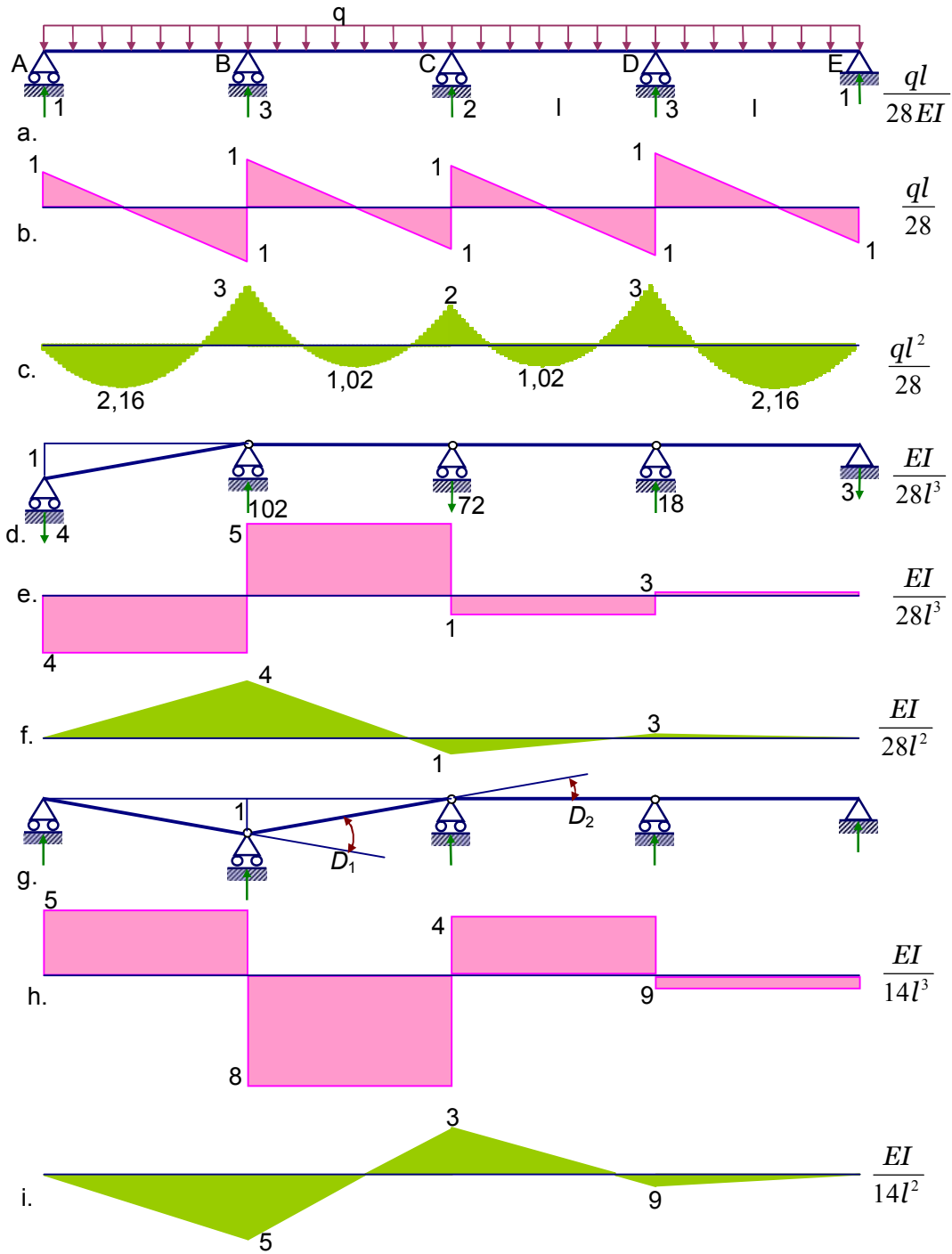
$$[F] = -\frac{3EI}{28l} \begin{bmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ql^3}{12EI} \frac{1}{l} - \frac{2}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} 0 \frac{1}{l} \\ \frac{ql^3}{12EI} 0 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3ql^2}{28} - \frac{45EI}{28l^2} & \frac{51EI}{14l^2} \\ \frac{ql^2}{14} & \frac{3EI}{7l^2} - \frac{18EI}{7l^2} \\ -\frac{3ql^2}{28} - \frac{3EI}{28l^2} & \frac{9EI}{14l^2} \end{bmatrix}$$

Bước 5. Tính phản lực tại các gối  $R_A, R_B, R_C, R_D, R_E$  sử dụng phương trình (11.9)

$$[A] = \begin{bmatrix} ql/2 & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql & 0 & 0 \\ ql/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ -2/l & 1/l & 0 \\ 1/l & -2/l & 1/l \\ 0 & 1/l & -2/l \\ 0 & 0 & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3ql^2}{28} - \frac{45EI}{28l^2} & \frac{51EI}{14l^2} \\ \frac{ql^2}{14} & \frac{3EI}{7l^2} - \frac{18EI}{7l^2} \\ -\frac{3ql^2}{28} - \frac{3EI}{28l^2} & \frac{9EI}{14l^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{A1} & R_{A2} & R_{A3} \\ R_{B1} & R_{B2} & R_{B3} \\ R_{C1} & R_{C2} & R_{C3} \\ R_{D1} & R_{D2} & R_{D3} \\ R_{E1} & R_{E2} & R_{E3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{28}ql & -\frac{45EI}{28l^3} & \frac{51EI}{14l^3} \\ \frac{32}{28}ql & \frac{102EI}{28l^3} & -\frac{138EI}{14l^3} \\ \frac{26}{28}ql & -\frac{72EI}{28l^3} & \frac{132EI}{14l^3} \\ \frac{32}{28}ql & \frac{18EI}{28l^3} & -\frac{54EI}{14l^3} \\ \frac{11}{28}ql & -\frac{3EI}{28l^3} & \frac{9EI}{14l^3} \end{bmatrix}$$

Phản lực, biểu đồ lực cắt và mô men cho trên Hình 11.5.

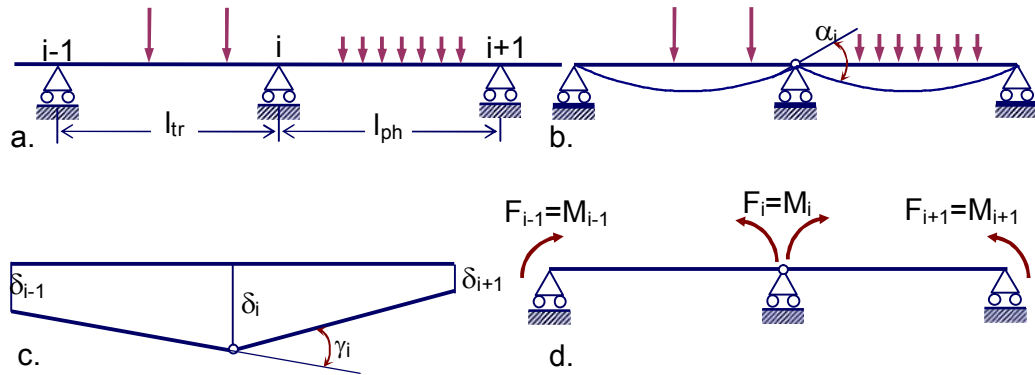


Hình 11.5. Biểu đồ nội lực cho dầm liên tục ví dụ 11.2

### 11.5 Phương trình ba mô men

Trong thực tế thiết kế ta thường gặp bài toán phân tích dầm liên tục chịu lực cắt với các gối đỡ bị lún. Đơn giản hóa phương pháp lực áp dụng cho trường hợp cụ thể này dẫn đến phương trình ba mô men.

Trên Hình 11.6 ta xét 2 nhịp dầm liên kế của dầm liên tục. Ta xét nhịp dầm bên trái và bên phải của gối đỡ thứ  $i$  với độ dài  $l_{tr}$  và  $l_{ph}$ , độ cứng  $EI_{tr}$  và  $EI_{ph}$ . Các gối đỡ là  $i-1, i, i+1$  độ lún của chúng ký hiệu là  $\delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$ .



Hình 11.6. Thiết lập phương trình cho gối  $i$

Ta đưa về hệ tĩnh định bằng cách đưa các khớp tại gối đỡ sao cho mỗi nhịp dầm làm việc như một dầm đơn giản (Ví dụ 11.3). Qui ước dấu như trong Ví dụ 11.3.

Sự sai lệch về chuyển vị là góc xoay tương đối của các nhịp dầm liên kế, như trên Hình 11.6b và c.

$$D_i = \alpha_i - \gamma_i \quad (11.13)$$

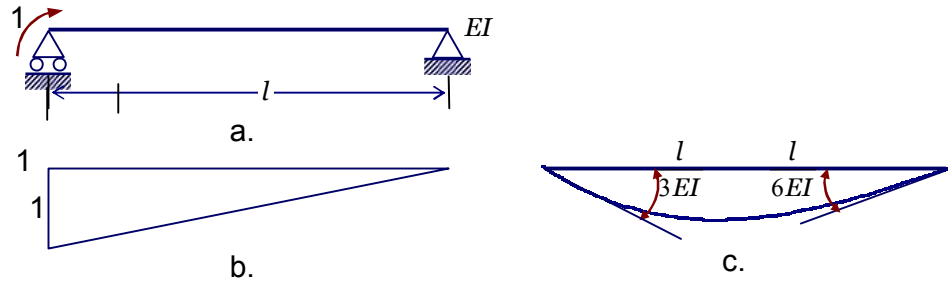
Các lực dư  $\{F_i\}$  chính là các mô men liên kết  $\{M_i\}$ , giá trị của chúng phải đảm bảo làm sao cho góc xoay bị triệt tiêu. Ta có phương trình thỏa mãn điều kiện liên tục tại điểm  $i$ .

$$D_i + f_{i,i-1}F_{i-1} + f_iF_i + f_{i,i+1}F_{i+1} = 0 \quad (11.14)$$

các hệ số  $f_i$  là các hệ số độ mềm của kết cấu đã giải phóng. Trên Hình 11.7a trình bày dầm đơn giản chịu mô men đơn vị tại một đầu và 11.7b là biểu đồ mô men còn 11.7c là đường cong chuyển vị và các góc xoay tại A và B (Phụ lục 1).

Áp dụng kết quả này ta có được các hệ số độ mềm

$$f_{i,i-1} = \frac{l_{tr}}{6EI_{tr}}, \quad f_{i,i} = \frac{l_{tr}}{3EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{3EI_{ph}}, \quad f_{i,i+1} = \frac{l_{ph}}{6EI_{ph}}.$$



Hình 11.7. Các hệ số độ mềm

Như vậy phương trình 11.14 có dạng

$$M_{i-1} \frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + 2M_i \left( \frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{EI_{ph}} \right) + M_{i+1} \frac{l_{ph}}{EI_{ph}} = -6D_i \quad (11.15)$$

Khi độ cứng trên toàn dầm không đổi ta có phương trình ba mô men

$$M_{i-1}l_{tr} + 2M_i(l_{tr} + l_{ph}) + M_{i+1}l_{ph} = -6EID_i \quad (11.16)$$

Viết phương trình này cho từng gối đỡ được hệ phương trình, lời giải của nó là các mô men cần tìm. Góc xoay  $D_i$  có thể tính từ phương trình (11.13) với góc  $\gamma_i$  xác định từ Hình 11.6c

$$\gamma_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_l} + \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{l_r} \quad (11.17)$$

và góc  $\alpha_i$  có thể xác định bằng phụ lục 1.

Ví dụ 11.4. Tìm biểu đồ mô men cho dầm trên Hình 11.8a với hai trường hợp tải

- a. Lực thẳng đứng như trên Hình 11.8a.
- b. Gối đỡ B và C lún xuống các  $b/100$  và  $b/200$ .

Độ cứng của dầm không đổi và bằng  $EI$ .

Phương trình ba mô men áp dụng cho nút A và B để tìm mô men tại đó, tại điểm C ta có thể dễ dàng tìm được trường hợp a.  $M_C = \frac{qb^2}{2}$ , trường hợp b.  $M_C = 0$ .

Đầu tiên ta tìm sai lệch về chuyển vị theo công thức (11.13).

Chú ý trường hợp a.  $\gamma=0$ , còn trường hợp b.  $\alpha=0$ . Dùng phụ lục 1 và công thức 8.17 ta tìm được

$$D_a = \begin{Bmatrix} 5,208 \frac{qb^3}{EI} \\ 5,208 \frac{qb^3}{EI} \end{Bmatrix}; D_b = \begin{Bmatrix} 0,002 \\ -0,00325 \end{Bmatrix}$$

Dùng phương trình 8.15 ta có đối với trường hợp a

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 5,208 \frac{qb^3}{EI}$$

$$\frac{b}{EI} \left( 5M_1 + 18M_2 - 4 \frac{qb^2}{2} \right) = -6 \times 5,208 \frac{qb^3}{EI}$$

và cho trường hợp b

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 0,002$$

$$\frac{b}{EI}(5M_1 + 18M_2) = 6 \times 0,00325$$

Có thể viết chung dưới dạng ma trận

$$\frac{b}{EI} \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 18 \end{bmatrix} [M] = \begin{bmatrix} -31,25 \frac{qb^3}{EI} & -0,0120 \\ -29,25 \frac{qb^3}{EI} & 0,0195 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} -2,686qb^2 & -2,02 \frac{EI}{1000b} \\ -0,879qb^2 & 1,65 \frac{EI}{1000b} \end{bmatrix}$$

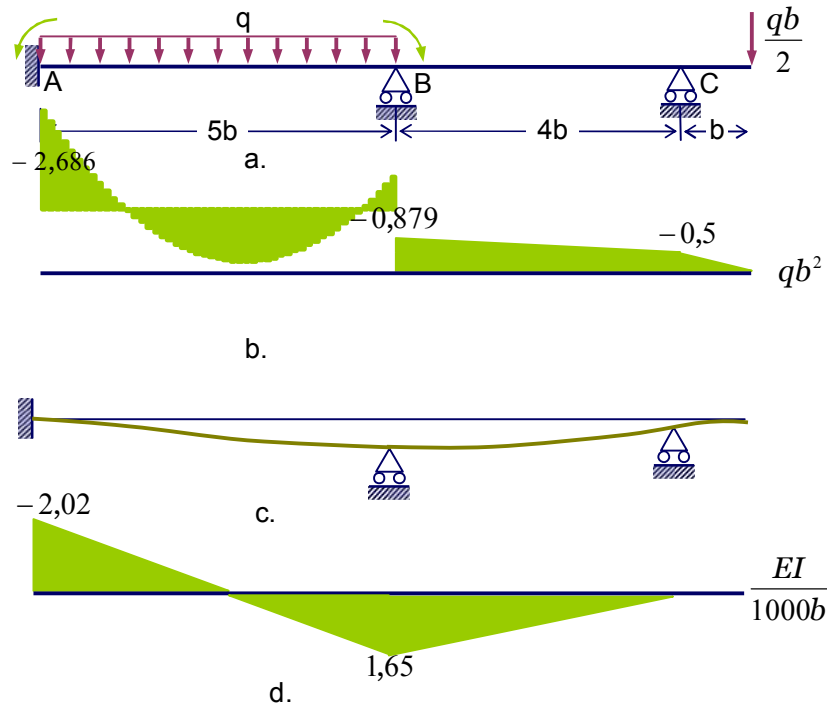
Biểu đồ mô men cho trên Hình 11.8 b và c.

Chú ý trường hợp (a) khi vẽ biểu đồ mô men để tìm phương trình của đường parabol cho đoạn dầm chịu lực phân bố ta phải tìm phản lực tại điểm A. Phản lực đó có thể tìm được vì ta đã biết mô men tại A và tại B, cụ thể ta có phương trình

$$M_B = M_A + \frac{q(5b)^2}{2} - 5bR_A \Rightarrow R_A = \frac{M_A}{5b} - \frac{M_B}{5b} + \frac{5}{2}qb$$

Và phương trình parabol biểu diễn biểu đồ mô men trong đoạn AB có dạng

$$M = -M_A + \frac{qx^2}{2} - R_A x$$



Hình 11.8. Biểu đồ nội lực cho dầm trong ví dụ 11.4

Có thể vẽ theo cách đơn giản hơn: ta đặt giá trị mô men tại A và B tạm thời nói lại bằng đường thẳng, trên đoạn AB có lực phân bố đều nên tại điểm giữa của đoạn thẳng vừa nói ta hạ xuống một đoạn là  $ql^2/8$ , nối ba điểm bằng một đường parabol ta được biểu đồ mô men cho đoạn AB.

Đoạn BC và CD có thể dễ dàng vẽ được biểu đồ mô men vì không có lực tập trung cũng như lực phân bố nên biểu đồ mô men là các đường thẳng nối các điểm mà ta đã có giá trị mô men. Tương tự như vậy trường hợp b nội lực sinh ra do sự lún của các gối đỡ. Ta đã tính được mô men tại A và B, còn tại C mô men bằng không. Biểu đồ mô men là những đường thẳng nối các điểm với giá trị mô men đã biết.

### Kết luận chương 11

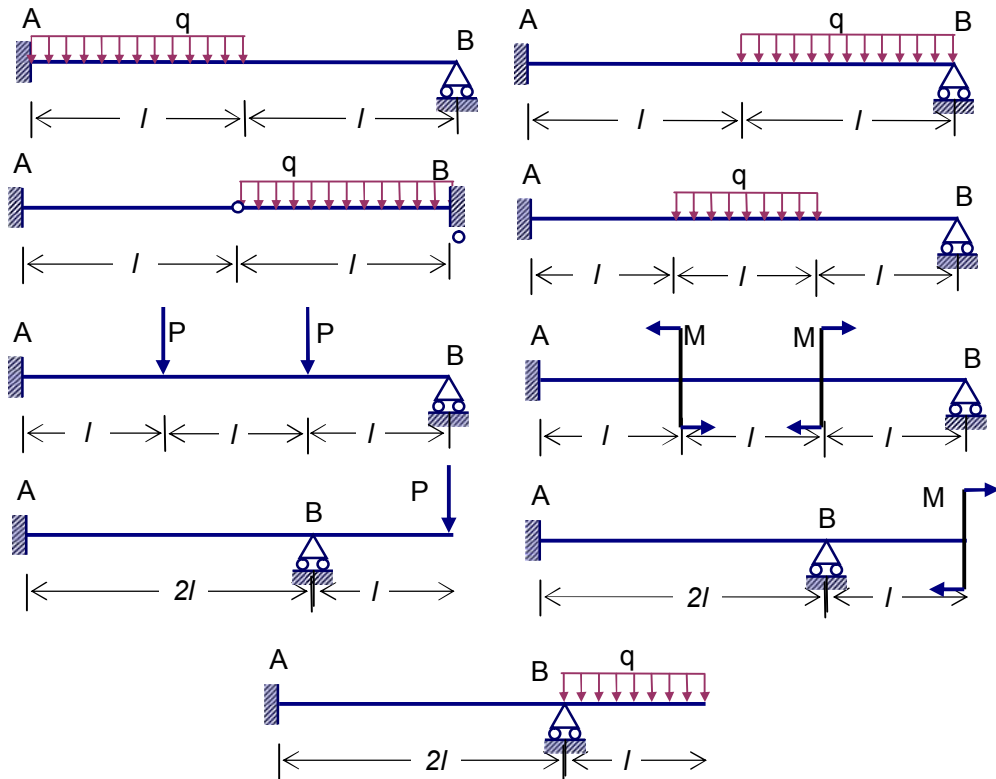
Phương pháp lực có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ chịu tải trọng môi trường.



- Lời giải của phương trình tương thích được xây dựng một cách trực tiếp cho ta các lực cần tìm.
- Số phương trình bằng với số lực dư bằng với bậc siêu tĩnh
- Phương pháp lực không thích hợp khi dùng máy tính vì việc lựa chọn lực dư làm ẩn số không duy nhất.

**Bài tập chương 11**

11.1. Dùng phương pháp lực tìm phản lực tại các liên kết và vẽ biểu đồ M và Q cho các trường hợp dầm siêu tĩnh trong các hình vẽ sau. Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI

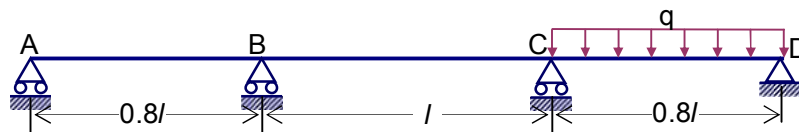


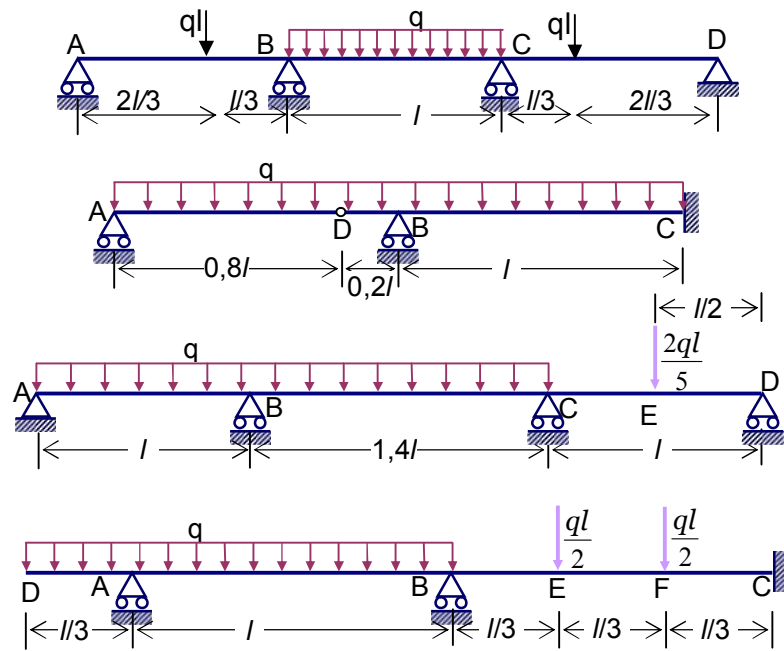
Bài 11.1

2.2. Dùng phương trình ba moment vẽ biểu đồ moment và biểu đồ lực cắt của các dầm liên tục như trên các hình vẽ sau với hai trường hợp tải trọng

- Chịu tải trọng bên ngoài như trên hình vẽ.
- Gối đỡ B lún xuống một đoạn bằng  $l/2000$ .

Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI





Bài 11.2

## CHƯƠNG 12.

### Phương pháp chuyển vị

#### 12.1 Mô tả phương pháp

1. Đầu tiên cần xác định bậc tự do của hệ. Thiết lập hệ tọa độ để xác định vị trí và hướng của các chuyển vị nút. Số lực hạn chế bằng với số bậc tự do được đặt vào các tọa độ để ngăn cản chuyển vị tại các nút. Chú ý ở đây khác với phương pháp lực là ta không phải lựa chọn. Chính điều này là ưu điểm khi lập chương trình tính toán phân tích kết cấu.
2. Sau đó các lực hạn chế được xác định như tổng các lực đầu phần tử của tất cả các phần tử nối vào nút. Phụ lục 2 và 3 cho ta bảng lực đầu phần tử cho các trường hợp chịu lực thường gặp.

Chú ý lực hạn chế cần ngăn cản chuyển vị do mọi tác động ví dụ như ngoại lực, thay đổi nhiệt độ hay dư ứng lực. Các hiệu ứng có thể xem xét riêng biệt hay đồng thời.

Trường hợp kể đến tác động do sự di chuyển của các nút trong kết cấu ví dụ như sự lún của gối đỡ thì các lực gây nên sự di chuyển đó phải được kể đến trong lực hạn chế.

Nội lực tại các vị trí cần tìm của phần tử cũng được xác định cho cấu hình đã bị hạn chế.

3. Bước này kết cấu được giả thiết là biến dạng theo cách sau: một tọa độ được giả thiết là có chuyển vị đơn vị, còn các tọa độ khác cho chuyển vị bằng không. Sau đó xác định lực hạn chế để kết cấu ở cấu hình giả định trên. Các lực áp đặt vào các tọa độ đại diện cho bậc tự do. Đồng thời ứng với cấu hình giả định này ta xác định các nội lực tại các vị trí cần tìm. Bước tính này được lặp lại cho từng tọa độ.
4. Tiếp theo ta xác định giá trị của các chuyển vị sao cho các lực hạn chế bị triệt tiêu. Ta có các phương trình tổng hợp cộng dồn các tác động của từng chuyển vị lên lực hạn chế.

5. Cuối cùng xác định lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu bằng cách cộng các lực trên kết cấu đã bị hạn chế với lực do chuyển vị gây ra được xác định trong bước 4.

Ví dụ 12.1. Xét giàn phẳng trên Hình 12.1a gồm  $m$  phần tử nối bằng khớp tại điểm A. Tìm nội lực trong các thanh dưới tác động của tổ hợp tải trong sau:

(1) Ngoại lực  $P$  đặt tại điểm A.

(2) Thanh thứ  $k$  giãn dài một đoạn là  $\Delta_k$  do nhiệt độ tăng trong thanh đó.

Bậc tự do của hệ này là 2: chuyển dịch thẳng của nút A trong mặt phẳng theo hai trục  $x$  và  $y$ , ta ký hiệu chúng là  $D_1$  và  $D_2$ . Hướng của chuyển vị tùy chọn, ở đây chọn như Hình 12.1b.

Trường hợp (1) ta hạn chế chuyển dịch của điểm A bằng cách đặt lực có độ lớn như lực  $P$  nhưng có hướng ngược lại. Các thành phần  $F_{11}$ ,  $F_{12}$  theo các hướng 1, 2:

$$F_{11} = -P \cos \alpha$$

$$F_{21} = -P \sin \alpha$$

Ký hiệu  $E_i$ ,  $l_i$  và  $a_i$  là module đàn hồi, độ dài và diện tích mặt cắt của thanh thứ  $i$  và đặt  $\theta_i$  là góc với trục  $x$  của thanh thứ  $i$ .

Xét trường hợp (2) độ giãn dài  $\Delta_k$  của thanh thứ  $k$  được hạn chế bằng một lực đặt vào điểm A gây ra sự nén của thanh cùng giá trị như sự giãn. Do vậy lực nén này cần có giá trị là  $(a_k E_k / l_k) \Delta_k$ . Các thành phần của lực nén này trên hai hướng 1 và 2 là

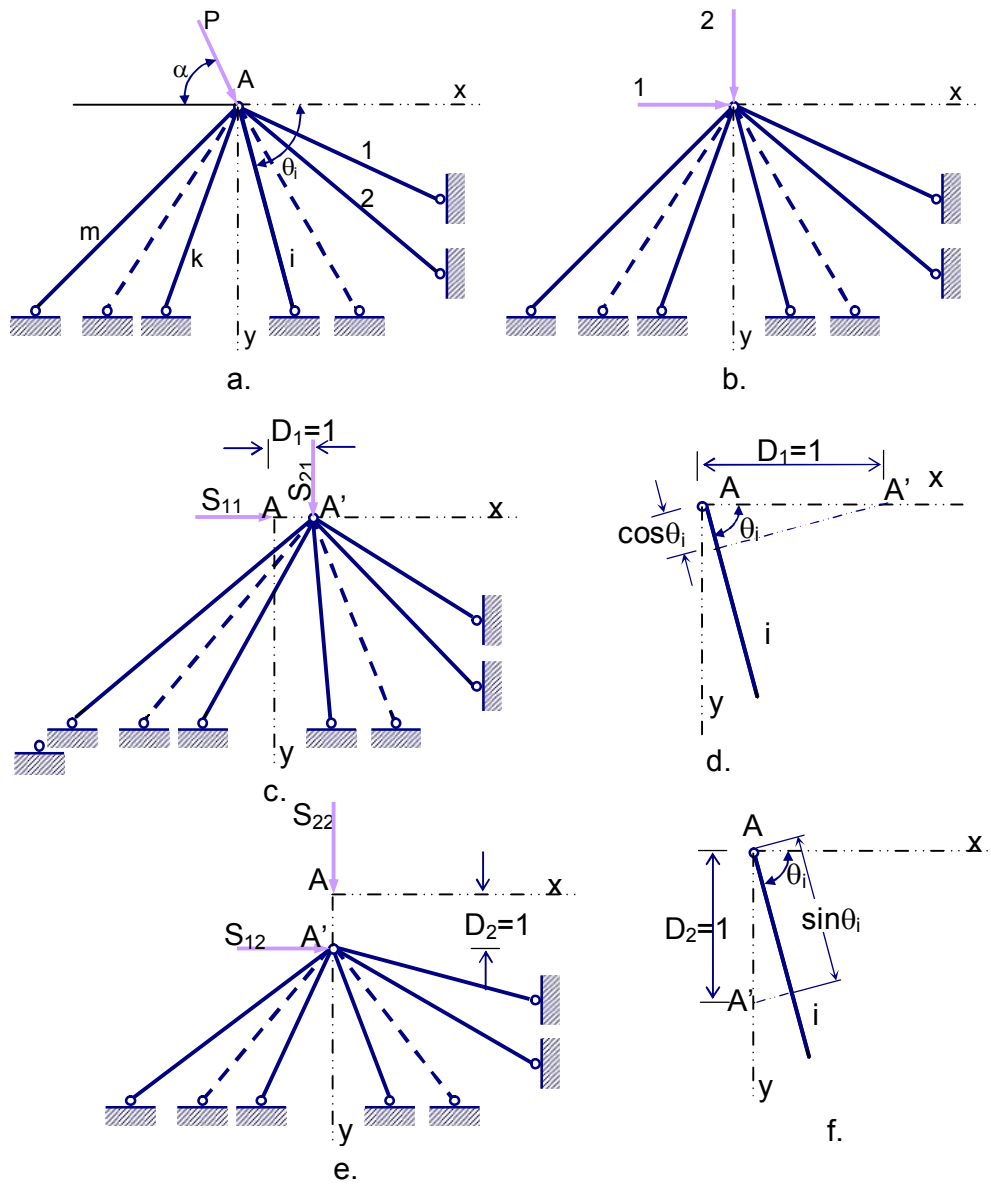
$$F_{12} = \frac{a_k E_k}{l_k} \Delta_k \cos \theta_k$$

$$F_{22} = \frac{a_k E_k}{l_k} \Delta_k \sin \theta_k$$

Như vậy tổng lực hạn chế là

$$F_1 = F_{11} + F_{12}$$

$$F_2 = F_{21} + F_{22}$$



Hình 12.1. Mô tả phương pháp chuyển vị

Ta có thể thấy khi chuyển vị bị ngăn cản, sẽ không có nội lực ở các thanh trong trường hợp (1), còn trường hợp (2) chỉ có thanh thứ k có lực nén, các thanh còn lại không có nội lực. Ký hiệu  $\{A_r\}$  là vectơ lực dọc trục trong các thanh trong điều kiện kết cấu bị hạn chế chuyển vị, ta có

$$A_{r,1} = 0$$

$$A_{r,2} = 0$$

$\Lambda$

$$A_{rk} = -\frac{a_k E_k}{l_k} \Delta_k$$

$\Lambda$

$$A_{rm} = 0$$

Trên Hình 12.1c biểu diễn các lực cần để kết cấu biến dạng ở cấu hình mà  $D_1=1$  và  $D_2=0$ . Từ Hình 12.1d ta thấy chuyển vị sang ngang một đơn vị làm thanh  $i$  bất kỳ ngắn đi một đoạn  $\cos\theta_i$  và gây ra lực nén  $(a_i E_i / l_i) \cos\theta_i$  dọc thanh  $i$ . Do vậy để giữ điểm A ở cấu hình này ta cần đặt các lực  $(a_i E_i / l_i) \cos^2 \theta_i$  và  $(a_i E_i / l_i) \cos\theta_i \sin\theta_i$  theo hướng 1 và 2. Vậy tổng lực cần để tất cả các thanh ở đúng cấu hình này là

$$S_{11} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i E_i}{l_i} \cos^2 \theta_i$$

$$\text{và } S_{21} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i E_i}{l_i} \cos\theta_i \sin\theta_i$$

Tương tự, như vậy để giữ điểm A ở cấu hình mà  $D_1=0$  và  $D_2=1$  (Hình 12.1e và f) ta cần đặt các lực sau

$$S_{12} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i E_i}{l_i} \cos\theta_i \sin\theta_i$$

$$\text{và } S_{22} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i E_i}{l_i} \sin^2 \theta_i$$

Các phần tử  $S_{ij}$  có 2 chỉ số: chỉ số thứ nhất biểu diễn tọa độ của lực hạn chế, chỉ số thứ hai là thành phần của chuyển vị có giá trị đơn vị.

Trong thực tế điểm A dịch chuyển đi các đoạn  $D_1$  và  $D_2$  theo hướng 1 và 2, và không có lực hạn chế nào cả. Do vậy tổ hợp của lực hạn chế và tác động của chuyển vị thật phải bằng không. Ta có quan hệ tĩnh học thể hiện sự thật là khi điểm A có chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  thì các lực hạn chế bằng không. Ta có biểu thức

$$\left. \begin{aligned} F_1 + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 &= 0 \\ F_2 + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

### 12.2 Ma trận độ cứng

Phương trình (12.1) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\begin{aligned} \{F\} + [S]\{D\} &= 0 \\ [S]\{D\} &= \{-F\} \end{aligned} \quad (12.2)$$

trong đó  $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$   $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$   $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

(có thể so sánh với phương trình quan hệ hình học (11.4) của phương pháp lực).

Véc tơ  $\{F\}$  phụ thuộc vào tải trọng của kết cấu. Thành phần của ma trận  $[S]$  là các lực ứng với chuyển vị đơn vị. Do vậy ma trận  $[S]$  chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu, chúng thể hiện độ cứng của kết cấu. Vì vậy  $[S]$  được gọi là ma trận độ cứng và các thành phần của nó được gọi là các hệ số độ cứng.

Các thành phần của vectơ chuyển vị  $\{D\}$  xác định từ

$$\{D\} = [S]^{-1} \{-F\} \quad (12.3)$$

Trường hợp chung, khi hệ có  $n$  bậc tự do ta có kích cỡ của  $\{D\}_{n \times 1}$ ,  $[S]_{n \times n}$ ,  $\{F\}_{n \times 1}$ . Ma trận  $[S]$  là ma trận vuông đối xứng.

Nội lực trong thanh  $i$  bất kỳ được xác định bằng tổ hợp của các điều kiện hạn chế và tác động của các chuyển vị nút

$$A_i = A_{ri} + (A_{ui1}D_1 + A_{ui2}D_2 + \dots + A_{uin}D_n) \quad (12.4)$$

Dưới dạng ma trận

$$\{A\}_{m \times 1} = \{A_r\}_{m \times 1} + [A_u]_{m \times n} \{D\}_{n \times 1}$$

trong đó thành phần của  $\{A\}$  là tổng lực trong các thanh, thành phần của  $\{A_r\}$  là lực trong các thanh dưới điều kiện hạn chế, và thành phần của  $[A_u]$  lực trong các thanh ứng với các chuyển vị đơn vị. Cột  $j$  của  $[A_u]$  là lực trong các thanh khi chuyển vị  $D_j=1$  còn các chuyển vị còn lại bằng không. Dạng tổng quát



$$\{A\} = \{A_r\} + [A_u]\{D\} \quad (12.5)$$

trong đó thành phần của  $\{A\}$  là tổng lực trong các thanh, thành phần của  $\{A_r\}$  là lực trong các thanh dưới điều kiện hạn chế, và thành phần của  $[A_u]$  lực trong các thanh ứng với các chuyển vị đơn vị.

Trong ví dụ ở Hình 12.1

$$[A_u] = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 E_1}{l_1} \cos \theta_1 & -\frac{a_1 E_1}{l_1} \sin \theta_1 \\ -\frac{a_2 E_2}{l_1} \cos \theta_2 & -\frac{a_2 E_2}{l_2} \sin \theta_2 \\ -\frac{a_m E_m}{l_m} \cos \theta_m & -\frac{a_m E_m}{l_m} \sin \theta_m \end{bmatrix}$$

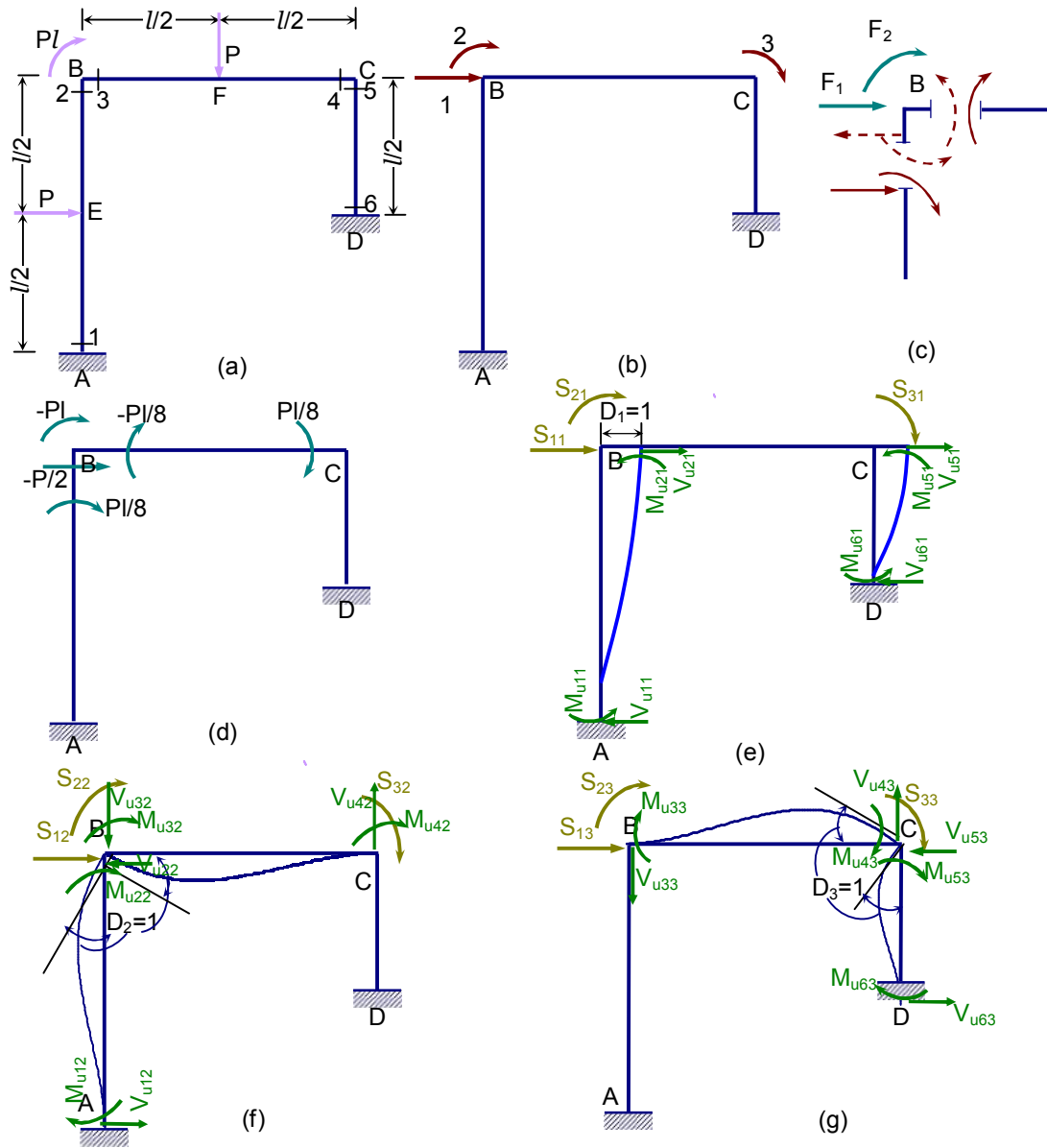
Khi xét khung với các ngàm ở nút ta cần tìm nội lực ở mặt cắt hay ở gối đỡ. Chính vì vậy ta có phương trình ở dạng tổng quát (12.5), ở đây  $\{A\}$  có thể là đáp ứng bất kỳ - lực cắt, lực dọc trục, mô men uốn hay mô men xoắn.

Ví dụ 12.2. Xét khung phẳng trên Hình 12.2a gồm các phần tử có cùng độ cứng  $EI$  được nối cứng với nhau. Xác định biểu đồ mô men cho khung dưới tác động của lực  $P$  ở  $E$  và  $F$  và ngẫu lực  $Pl$  tại điểm  $B$ . Bỏ qua sự thay đổi độ dài của thanh.

Hệ có ba bậc tự do như Hình 12.2b đó là chuyển vị ngang (nút  $B$  và  $C$  như nhau vì coi độ dài thanh không đổi), góc xoay tại  $B$  và tại  $A$ . Ta có hệ tọa độ như Hình 12.2b. Lực hạn chế là tổng các lực đầu phần tử ở các thanh tính được dùng phụ lục 3.

Hình 12.2.c biểu diễn quan hệ giữa lực đầu phần tử và lực hạn chế chuyển vị. Các lực tác động là ở nút biểu diễn bằng các mũi tên liền, còn lực có giá trị bằng và hướng ngược lại bằng mũi tên ngắt quãng. Như vậy cần đặt vào điểm  $B$  các lực  $F_1$  và  $F_2$  cùng hướng với các mũi tên ngắt quãng để ngăn cản chuyển vị. Do vậy để có được các lực hạn chế này ta chỉ cần thêm các lực đầu phần tử như Hình 12.2d.

Các lực hạn chế chuyển vị tại điểm  $B$  và điểm  $C$  cho dưới đây



Hình 12.2. Lập ma trận độ cứng cho ví dụ 12.2

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -0,5P \\ 0,125Pl - 0,125Pl - Pl \\ 0,125Pl \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -0,5 \\ -l \\ 0,125l \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Để vẽ biểu đồ nội lực ta cần tính xác định mô men và lực cắt tại các mặt cắt ở hai đầu thanh. Ký hiệu 1, 2, 3, 4, 5, 6 là các mặt cắt tại các đầu thanh như trên Hình 12.1a. Với quy ước dấu mô men dương quay theo chiều kim đồng hồ, lực

cắt dương làm thanh võng xuống. Các giá trị của 6 mô men và lực cắt ứng với điều kiện hạn chế chuyển vị sẽ là

$$\{M_r\} = \frac{Pl}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{V_r\} = -\frac{P}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận độ cứng chính là các lực ở các tọa độ cần để đưa kết cấu đến vị trí như Hình 12.2e, f, d. Các lực này bằng tổng các lực đầu phần tử tính theo phụ lục 3.

$$\begin{aligned} D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0 & & D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0 & & D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0 \\ S_{11} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{(l/2)^3} = \frac{108EI}{l^3} & & S_{12} = -\frac{6EI}{l^2} & & S_{13} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2} \\ S_{21} = -\frac{6EI}{l^2}; & & S_{22} = \frac{8EI}{l}; & & S_{23} = \frac{2EI}{l}; \\ S_{31} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2} & & S_{32} = \frac{2EI}{l} & & S_{33} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l/2} = \frac{12EI}{l} \end{aligned}$$

Ma trận độ cứng [S] có dạng

$$[S] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 108 & -6l & -24l \\ -6l & 8l^2 & 2l^2 \\ -24l & 2l^2 & 12l^2 \end{bmatrix} \quad [S]^{-1} = \frac{l^2}{1368EI} \begin{bmatrix} 23l & 6 & 45 \\ 6 & 108/l & -18/l \\ 45 & -18/l & 207/l \end{bmatrix} \quad (b)$$

Ta thế (a) và (b) vào phương trình 12.3 nhận được

$$\{D\} = [S]^{-1} \{-F\} = \frac{Pl^2}{1368EI} \begin{bmatrix} 23l & 6 & 45 \\ 6 & 108/l & -18/l \\ 45 & -18/l & 207/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ l \\ -0.125l \end{Bmatrix} = \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0087l \\ 0,1355 \\ -0,0156 \end{Bmatrix}$$

Để viết ma trận nội lực đầu thanh gây ra do chuyển vị đơn vị ta đặt các giá trị mô men (lực cắt) tại các mặt cắt 1, 2, ..., 6 vào cột 1, 2 và 3 cho trường hợp chuyển vị đơn vị như trên Hình 12.2 e, f, g.

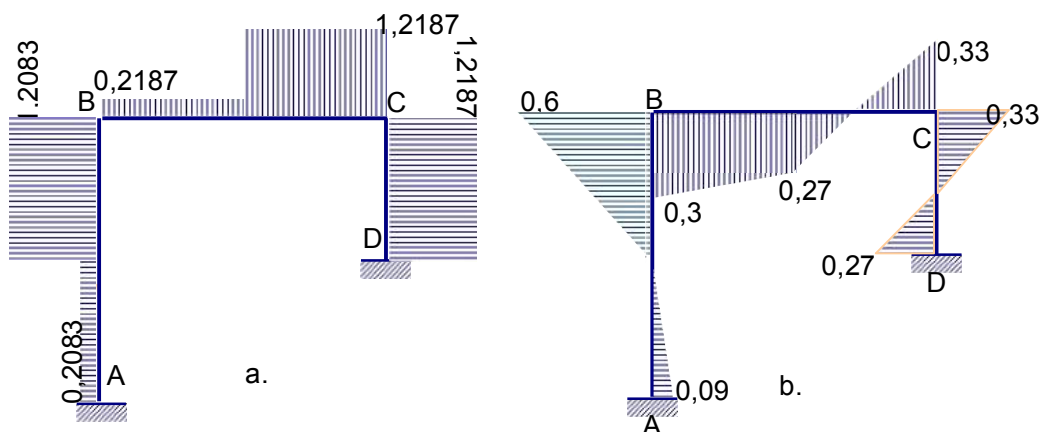
$$[M_u] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -6/l & 2 & 0 \\ -6/l & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -24/l & 0 & 8 \\ -24/l & 0 & 4 \end{bmatrix}; [V_u] = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -12/l & 6 & 0 \\ 12/l & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \\ 96/l & 0 & -24 \\ -96/l & 0 & 24 \end{bmatrix};$$

Moment (lực cắt) tại các mặt cắt đầu thanh sẽ được tính từ phương trình 12.5:

$$\{M\} = \frac{Pl}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -6/l & 2 & 0 \\ -6/l & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -24/l & 0 & 8 \\ -24/l & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0087l \\ 0,1355 \\ -0,0156 \end{Bmatrix} = Pl \begin{Bmatrix} 0,09375 \\ 0,61458 \\ 0,38542 \\ 0,33333 \\ -0,33333 \\ -0,27083 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = \frac{P}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -12/l & 6 & 0 \\ 12/l & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \\ 96/l & 0 & -24 \\ -96/l & 0 & 24 \end{bmatrix} \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0087l \\ 0,1355 \\ -0,0156 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 0,20833 \\ -1,20833 \\ 0,21875 \\ -1,21875 \\ 1,20833 \\ -1,20833 \end{Bmatrix};$$

Biểu đồ lực cắt và mô men trình bày trong Hình 12.3. a và b.

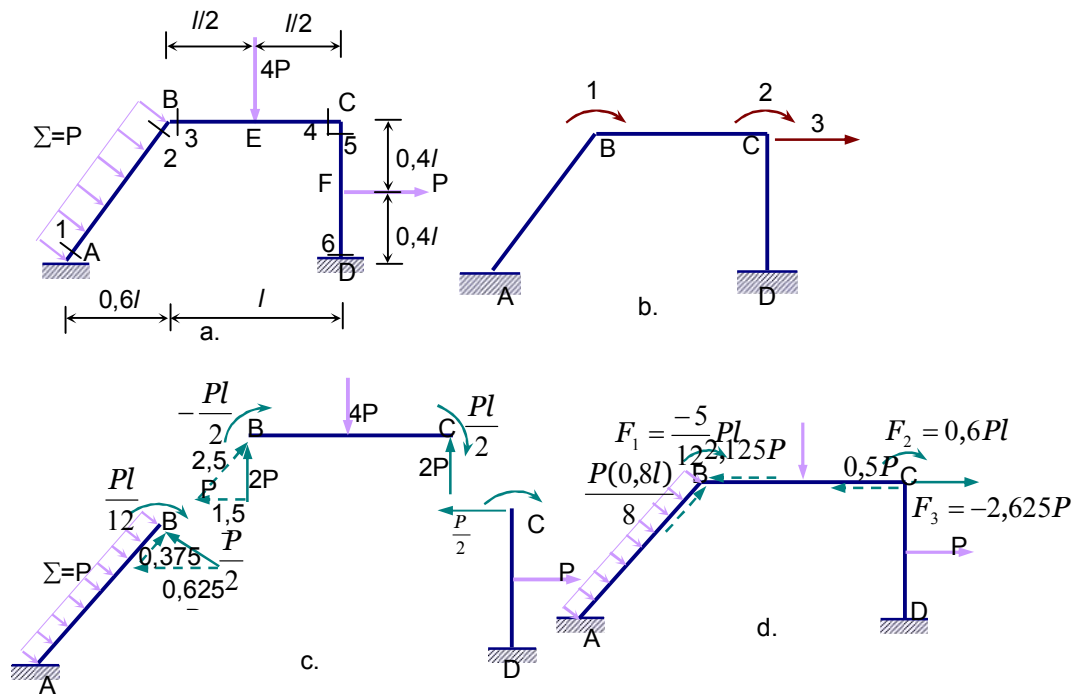


Hình 12.3 Biểu đồ lực cắt và mô men cho ví dụ 12.2

Chú ý: Khi sử dụng các chương trình tính toán nói chung không bỏ qua biến dạng dọc trục. Lúc đó đối với khung phẳng tại mỗi nút ta có ba chuyển vị gồm: hai dịch chuyển thẳng và một góc xoay. Tại mỗi mặt cắt ta có lực dọc trục, lực cắt và mô men. Phương trình (12.5) được áp dụng để tính cả ba nội lực này.

Khung với các thanh nghiêng được xét trong Ví dụ 12.3.

Ví dụ 12.3. Vẽ biểu đồ mô men cho khung trên Hình 12.4a. Độ cứng của thanh không đổi bằng  $EI$ . Bỏ qua biến dạng dọc trục.



Hình 12.4

Trên Hình 12.4b. biểu diễn ba bậc tự do ứng với ba tọa độ: hai góc xoay và một dịch chuyển thẳng. Lực đầu phần tử do ngoại lực xác định trên Hình 12.4c. Lực hạn chế  $F_1$  và  $F_2$  xác định bằng cách cộng mô men. Để tính lực  $F_3$ , ta phân các lực cắt tại nút B và nút C ra thành các thành phần dọc theo trục của phần tử (Hình 12.4d), sau đó ta cộng các thành phần theo hướng của tọa độ thứ 3.

Như vậy ta có

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \frac{Pl}{12} - \frac{Pl}{2} \\ \frac{Pl}{2} + \frac{P(0,8l)}{8} \\ -0,625P - 1,5P - \frac{P}{2} \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -\frac{5}{12}l \\ 0,6l \\ -2,625 \end{Bmatrix}; \{M_r\} = Pl \begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{Bmatrix}; \{V_r\} = -\frac{P}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

Để xác định các nội lực tại đầu phần tử ứng với từng trường hợp chuyển vị đơn vị ta dùng phụ lục 3, xem trên Hình 12.5.

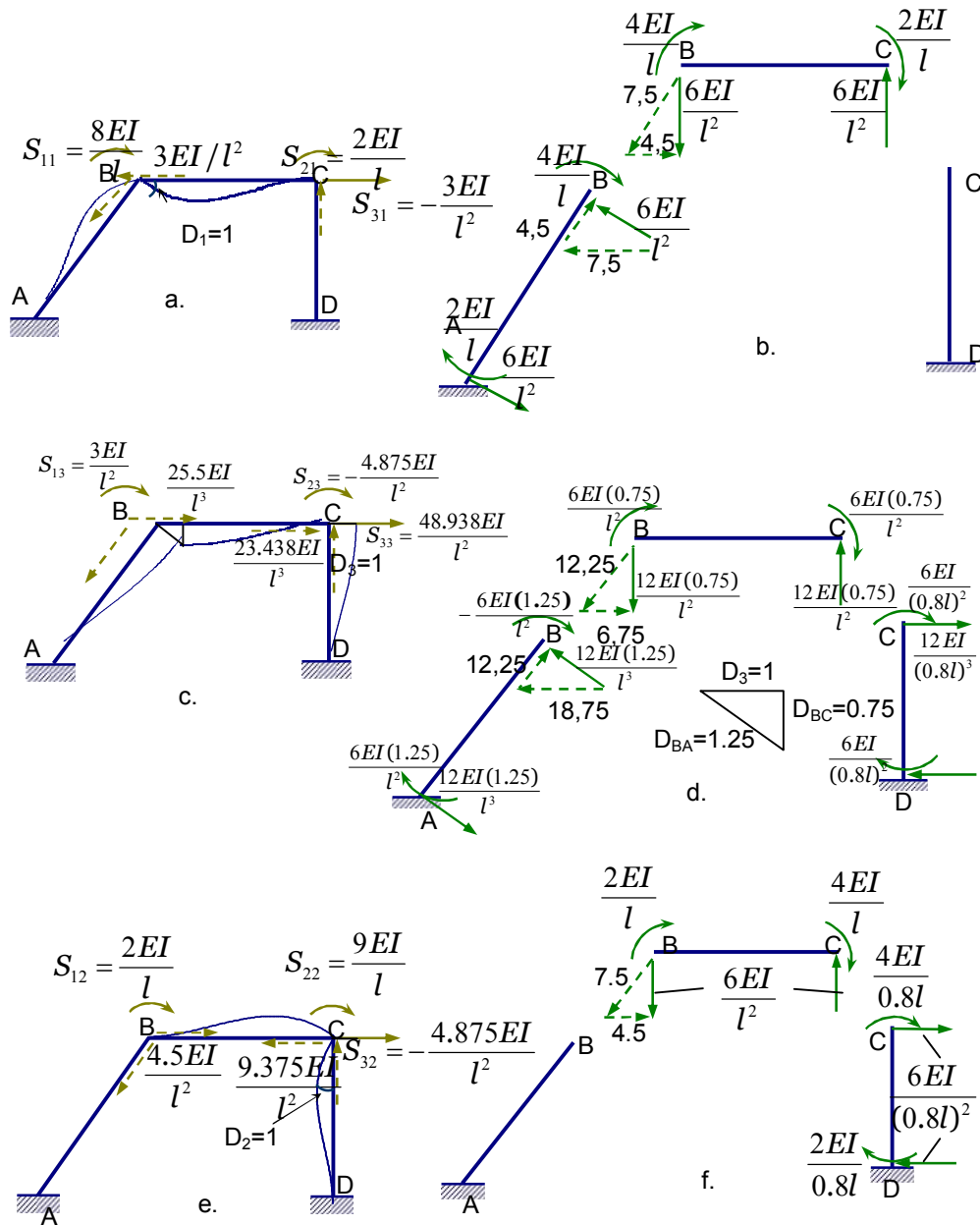
Khi  $D_3=1$  dịch chuyển tương đối của các thanh AB và BC là  $D_{BA}=1.25$ ,  $D_{BC}=0.75$ . Ta có ma trận  $M_u$  và  $V_u$ .

$$[M_u] = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 2l & 0 & -7,25 \\ 4l & 0 & -7,25 \\ 4l & 2l & 4,5 \\ 2l & 4l & 4,5 \\ 0 & 5l & -9,375 \\ 0 & 2,5l & -9,375 \end{bmatrix}; [V_u] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23,4375 \\ 0 & -6l & -23,4375 \end{bmatrix};$$

Để thiết lập ma trận độ cứng  $[S]$  ta tính lực đầu phần tử như trên Hình 12.3e, g và i ta được

$$\begin{aligned} D_1 &= 1; D_2 = 0; D_3 = 0 & D_1 &= 0; D_2 = 1; D_3 = 0 \\ S_{11} &= \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l} = \frac{8EI}{l} & S_{12} &= \frac{2EI}{l} \\ S_{21} &= \frac{2EI}{l} & S_{22} &= \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{0,8l} = \frac{9EI}{l}; \\ S_{31} &= -\frac{7,5EI}{l^2} + \frac{4,5EI}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2} & S_{32} &= \frac{4,5EI}{l^2} - \frac{6EI}{(0,8l)^2} = -\frac{4,875EI}{l^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 0; D_2 = 0; D_3 = 1 \\ S_{13} &= -\frac{6EI(1,25)}{l^2} + \frac{6EI(0,75)}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2} \\ S_{23} &= \frac{6EI(0,75)}{l^2} - \frac{6EI}{(0,8l)^2} = -\frac{4,875EI}{l^2}; \\ S_{33} &= \frac{18,75EI}{l^3} + \frac{6,75EI}{l^3} + \frac{12EI}{(0,8l)^3} = \frac{48,9375EI}{l^3} \end{aligned}$$



Hình 12.5. Thiết lập ma trận độ cứng cho hệ khung có thanh chéo

Ta có ma trận độ cứng [S] như sau

$$[S] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4,875l \\ -3l & -4,875l & 48,9375 \end{bmatrix} \quad [S]^{-1} = \frac{l}{24921EI} \begin{bmatrix} 3333,375 & -666 & 138l \\ -666 & 3060 & 264l \\ 138l & 264l & 544l^2 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 12.2 ta có

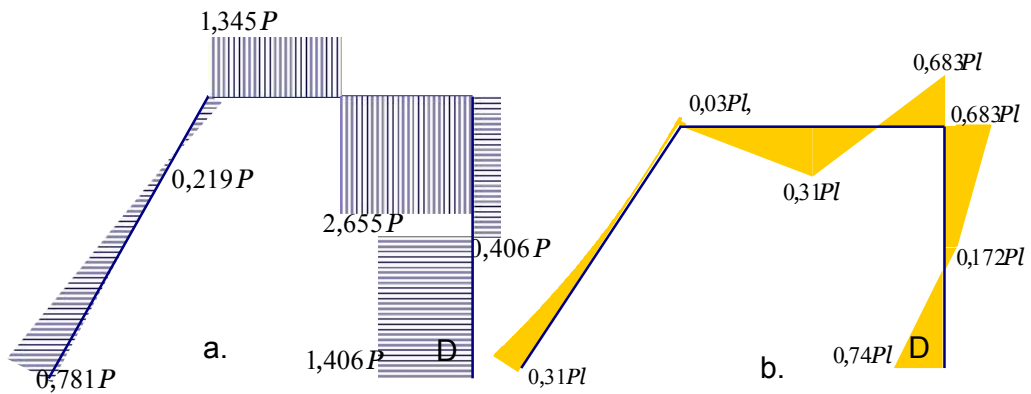
$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4,875l \\ -3l & -4,875l & 48,9375 \end{bmatrix} \{D\} = P \begin{Bmatrix} \frac{5}{12}l \\ -0,6l \\ 2,625 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{D\} = \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0863 \\ -0,057 \\ 0,05325l \end{Bmatrix}$$

Để vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men ta phải tính nội lực tại các mặt cắt ở đầu các thanh. Sử dụng ma trận  $[M_u]$ ,  $[V_u]$ ,  $\{M_r\}$ ,  $\{V_r\}$  và  $\{D\}$  đã tính được thế vào phương trình (10.5) ta được

$$\{M\} = Pl \begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ -0,1 \\ 0,1 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 2l & 0 & -7,5 \\ 4l & 0 & -7,5 \\ 4l & 2l & 4,5 \\ 2l & 4l & 4,5 \\ 0 & 5l & -9,375 \\ 0 & 2,5l & -9,375 \end{bmatrix} \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0863 \\ -0,057 \\ 0,05325l \end{Bmatrix} = Pl \begin{Bmatrix} -0,31012 \\ 0,029153 \\ -0,02915 \\ 0,684241 \\ -0,68424 \\ -0,74174 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = P \begin{Bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -2 \\ -2 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23,4375 \\ 0 & -6l & -23,4375 \end{bmatrix} \frac{Pl^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0863 \\ -0,057 \\ 0,05325l \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} -0,780966 \\ -0,219034 \\ -1,344912 \\ -2,655088 \\ 0,4061 \\ -1,4061 \end{Bmatrix};$$

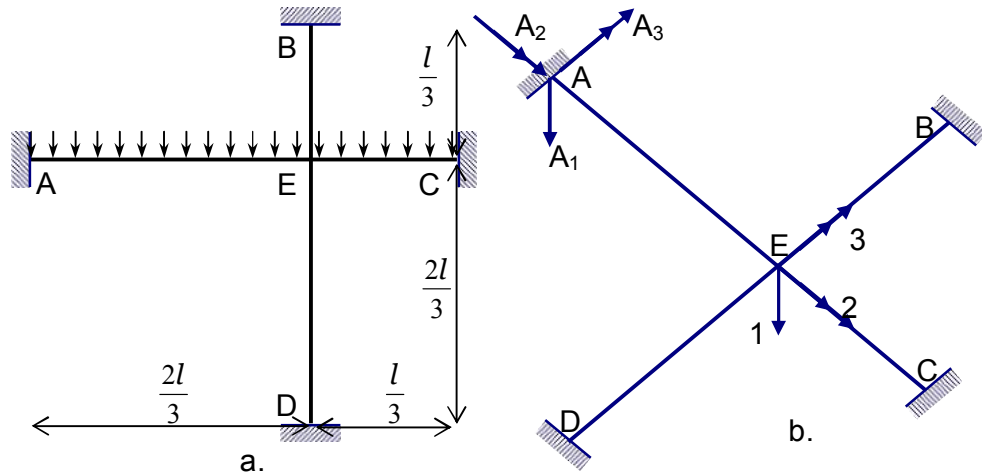
Trên Hình 12.6 biểu diễn biểu đồ lực cắt (Hình 12.4a) và biểu đồ mô men (12.4b)



Hình 12.6. Biểu đồ nội lực



Ví dụ 12.4. Tìm ba thành phần phản lực (lực thẳng đứng, mô men uốn và momnet xoắn) tại điểm A của khung ngang như trên Hình 12.7 chịu tải trọng phân bố đều  $q$  trên đoạn AC. Tất cả các thanh có cùng diện tích mặt cắt ngang, và tỷ lệ giữa độ cứng xoắn và độ cứng uốn  $GJ/EI=0.5$ .



Hình 12.7. Khung ngang

Hệ có 3 bậc tự do là các chuyển vị tại điểm E, có tọa độ như trên Hình 12.7b. Trên Hình 12.7b biểu diễn các lực hạn chế chuyển dịch, và phản lực tại A  $\{A_r\}$  khi bị hạn chế. Những lực này được tính sử dụng phụ lục 2.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q}{2} \frac{2l}{3} - \frac{q}{2} \frac{l}{3} \\ 0 \\ \frac{q}{12} \left(\frac{2l}{3}\right)^2 - \frac{q}{12} \left(\frac{l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ \frac{l^2}{36} \end{Bmatrix} \quad \{A_r\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q}{2} \frac{2l}{3} \\ 0 \\ -\frac{q}{12} \left(\frac{2l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix} = q \begin{Bmatrix} -\frac{l}{3} \\ 0 \\ -\frac{l^2}{27} \end{Bmatrix}$$

Để thiết lập ma trận độ cứng phần tử cũng như ma trận phản lực tại đầu A, ta cho từng chuyển vị bằng đơn vị (còn các chuyển vị khác bằng không) và sử dụng phụ lục 3.

Ma trận phản lực tại điểm A do từng chuyển vị đơn vị gây ra được tính như sau

$$[A_u] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -40,5 & 0 & 13,5l \\ 0 & -0,75l^2 & 0 \\ -13,5l & 0 & 3l^2 \end{bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận độ cứng cho từng cấu hình được tính dưới đây

$$D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0$$

$$S_{11} = \frac{12EI}{l_{AE}^3} + \frac{12EI}{l_{EC}^3} + \frac{12EI}{l_{DE}^3} + \frac{12EI}{l_{EB}^3} = \frac{12EI}{l^3} \left( 2 \cdot \frac{3^3}{2^3} + 2 \cdot 3^3 \right) = 729 \frac{EI}{l^3}$$

$$S_{21} = -\frac{6EI}{l_{BE}^2} + \frac{6EI}{l_{ED}^2} = -\frac{6EI}{l^2} \left( 3^2 - \frac{3^2}{2^2} \right) = -40,5 \frac{EI}{l^2};$$

$$S_{31} = -\frac{6EI}{l_{AE}^2} + \frac{6EI}{l_{EC}^2} = \frac{6EI}{l^2} \left( 3^2 - \frac{3^2}{2^2} \right) = 40,5 \frac{EI}{l^2}$$

$$D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$$

$$S_{12} = \frac{6EI}{l_{DE}^2} - \frac{6EI}{l_{EB}^2} = \frac{6EI}{l^2} \left( \frac{3^2}{2^2} - 3^2 \right) = -40,5 \frac{EI}{l^2}$$

$$S_{22} = \frac{GJ}{l_{AE}} + \frac{GJ}{l_{EC}} + \frac{4EI}{l_{DE}} + \frac{4EI}{l_{EB}} = \frac{EI}{l} \left( \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 3 \right) = 20,25 \frac{EI}{l};$$

$$S_{32} = 0$$

$$D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$$

$$S_{12} = \frac{6EI}{l_{EC}^2} - \frac{6EI}{l_{AE}^2} = \frac{6EI}{l^2} \left( 3^2 - \frac{3^2}{2^2} \right) = 40,5 \frac{EI}{l^2}$$

$$S_{23} = 0$$

$$S_{33} = \frac{GJ}{l_{DE}} + \frac{GJ}{l_{EB}} + \frac{4EI}{l_{AE}} + \frac{4EI}{l_{EC}} = \frac{EI}{l} \left( \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot 3 \right) = 20,25 \frac{EI}{l};$$

Ma trận độ cứng có dạng

$$[S] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 729 & -40,5l & 40,5l \\ -40,5l & 20,25l^2 & 0 \\ 40,5l & 0 & 20,25l^2 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 12.2 ta tìm được vectơ chuyển vị

$$\{D\} = \frac{ql^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0010l \\ 0,0020 \\ -0,0034 \end{Bmatrix}$$

Phản lực tại đầu A tìm được từ phương trình 12.5

$$\{A\} = q \begin{Bmatrix} -\frac{l}{3} \\ 0 \\ -\frac{l^2}{27} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -40,5 & 0 & 13,5l \\ 0 & -0,75l^2 & 0 \\ -13,5l & 0 & 3l^2 \end{bmatrix} \frac{ql^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0010l \\ 0,0020 \\ -0,0034 \end{Bmatrix} = ql \begin{Bmatrix} -0,4197 \\ -0,0015l \\ -0,0611l \end{Bmatrix}$$

### 12.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác

Như đã nói ở mục 12.2 ma trận độ cứng chỉ phụ thuộc vào tính chất của kết cấu không phụ thuộc vào ngoại lực. Vì vậy khi xem xét các trường hợp tải khác nhau ta không cần tính lại ma trận độ cứng. Nếu ta có  $p$  trường hợp tải lời giải (phương trình 12.3) có thể viết gọn dưới dạng phương trình ma trận

$$[D]_{n \times p} = [S]_{n \times n}^{-1} [-F]_{n \times p} \quad (12.6)$$

Mỗi cột của  $[D]$  và  $[-F]$  ứng với mỗi trường hợp tải.

#### **Ảnh hưởng của môi trường**

Trong chương 10 ta dùng phương pháp lực để tích toán các ảnh hưởng của thay đổi nhiệt độ, co ngót hay dư ứng lực. Tương tự phương pháp chuyển vị cũng xem xét đến các hiệu ứng trên. Có thể áp dụng phương trình 12.3 nhưng vector  $\{F\}$  khi đó là vector lực hạn chế chuyển vị nút gây ra bởi những hiệu ứng trên.

Trường hợp hiệu ứng di chuyển của gối đỡ ta vẫn dùng phương trình 12.3 khi sự di chuyển này không ứng bậc tự do của hệ. Trường hợp di chuyển này ứng với bậc tự do ta cần biến đổi phương trình 12.3. Ví dụ 12.5 sẽ giải thích rõ cách biến đổi.

### 12.4 Năm bước giải của phương pháp chuyển vị

Bước 1. Xác định hệ tọa độ biểu diễn các chuyển vị nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính  $[A]_{m \times p}$  và xác định quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định lực hạn chế  $[F]_{n \times p}$  và  $[A_r]_{m \times p}$  do ngoại lực tác động lên kết cấu.

Bước 3. Thiết lập  $[S]_{n \times n}$  và  $[A_u]_{m \times p}$  bằng cách đưa các chuyển vị đơn vị tại từng tạo độ một.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng

$$[S]_{n \times n} [D]_{n \times p} = [-F]_{n \times p}$$

để tìm [D].

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ

$$[A]_{m \times p} = [A_r]_{m \times p} + [A_u]_{m \times n} [D]_{n \times p}$$

Cũng như phương pháp lực sau khi bước thứ ba đã xong ta có các ma trận cần thiết bước 4 và 5 chỉ là thuần túy các phép tính đại số.

Ở đây các ký hiệu:

$n, p, m$  - số bậc tự do, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực) cần xác định.

[A] – đáp ứng cần xác định - lời giải của bài toán.

[A<sub>r</sub>] – giá trị đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu khi hạn chế chuyển vị.

[A<sub>u</sub>] – đáp ứng do ta đưa chuyển vị đơn vị lần lượt tại từng tọa độ.

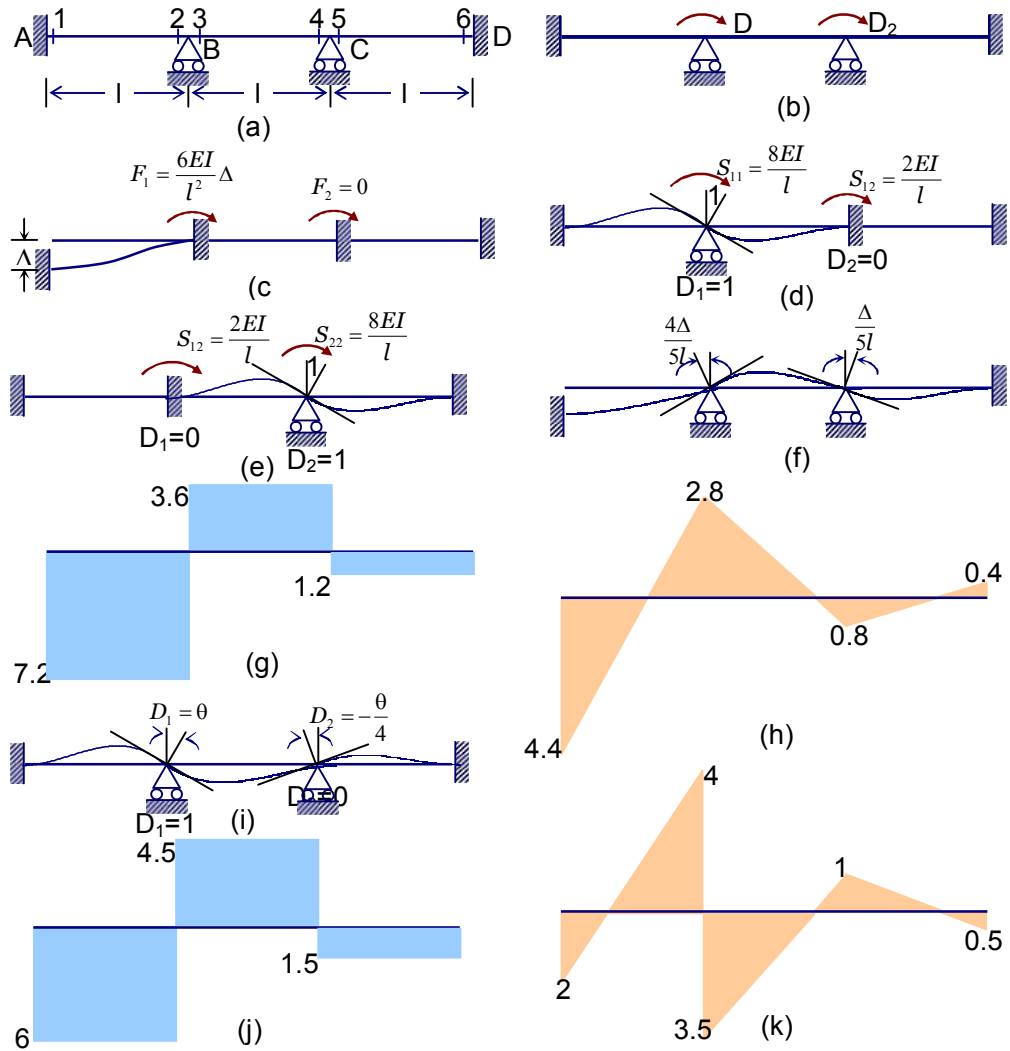
[F] - lực tại các tọa độ để ngăn cản các chuyển vị do lực tác động gây ra .

[S] – ma trận độ cứng.

Ví dụ 12.5. Dầm liên tục như trên Hình 12.6a có độ cứng uốn EI không đổi, có hai ngàm tại A và D và hai gối đỡ di động tại B và C. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm với hai trường hợp tải: a) Điểm A lún xuống một đoạn là  $\Delta$ ; b) Khi dầm quay đi một góc  $\theta$  theo chiều kim đồng hồ tại gối B.

Số bậc tự do của hệ là 2, đó là góc xoay  $D_1$  và  $D_2$  tại B và C (Hình 12.6b). Dịch chuyển của điểm A không ứng với bậc tự do. Lúc này lực hạn chế có nhiệm vụ giữ cho chuyển vị  $D_1=D_2=0$  như biểu diễn trên Hình 12.6c. Dùng phụ lục 3 ta tính được

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Hình 12.8. Biểu đồ nội lực của ví dụ 12.5

Quy ước mô men dương theo chiều kim đồng hồ, lực dương hướng lên trên ta có các mô men và lực cắt tại các mặt cắt 1,2,...,6 (Hình 12.8a) điều kiện hạn chế (Hình 12.8b) là

$$\{M_r\} = \begin{Bmatrix} M_{r1} \\ M_{r2} \\ M_{r3} \\ M_{r4} \\ M_{r5} \\ M_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{V_r\} = \begin{Bmatrix} V_{r1} \\ V_{r2} \\ V_{r3} \\ V_{r4} \\ V_{r5} \\ V_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \Delta \begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Lực đầu phần tử cần để giữ các phần tử ở cấu hình với  $D_1$  hoặc  $D_2$  bằng đơn vị (Hình 12.8d và e) được xác định từ phụ lục 3 và từ đó ta có ma trận độ cứng

$$[S] = -\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}; [S]^{-1} = \frac{l}{60EI} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Giải phương trình 12.3 ta được

$$\{D\} = \frac{l}{60EI} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{60l} \begin{Bmatrix} -48 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{5l} \begin{Bmatrix} -4 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow D_1 = -\frac{4\Delta}{5l}; D_2 = \frac{\Delta}{5l}$$

Moment và lực cắt tại các mặt cắt 1,2,...6 gây ra do từng chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  bằng đơn vị được tính theo phụ lục 3.

$$[M_u] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; [V_u] = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Đường cong biến dạng của dầm do dịch chuyển  $\Delta$  của điểm A biểu diễn trên Hình 12.8f. Nội lực tại các mặt cắt tính được từ phương trình 12.5. Biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men biểu diễn trên Hình 12.8g và h.

$$\{M\} = \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{\Delta}{l} \begin{Bmatrix} -0,8 \\ 0,2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} 4,4 \\ 2,8 \\ -2,8 \\ -0,8 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = \frac{EI}{l^3} \Delta \begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \frac{\Delta}{l} \begin{Bmatrix} -0,8 \\ 0,2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \Delta \begin{Bmatrix} -7,2 \\ 7,2 \\ 3,6 \\ -3,6 \\ -1,2 \\ 1,2 \end{Bmatrix}.$$

Để kiểm tra kết quả tính toán ta dùng điều kiện cân bằng tại điểm B và C, ở đó tổng mô men phải bằng không.

Xét trường hợp tải (b) như trên Hình 12.7i. Để tạo ra chuyển vị xoay tại điểm B ta cần có một mô men  $F_1^*$  (cặp ngẫu lực) tác động vào điểm B. Ta gọi vector ngoại lực là  $\{F\} = \{F_1^*, 0\}$ . Khi đó quan hệ giữa lực và chuyển vị được biểu diễn qua

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ cứng S đã xác định trong trường hợp tải (a). Ta có  $D_1=0$ , từ phương trình thứ hai ta xác định được  $D_2$

$$D_2 = -\frac{S_{21}}{S_{22}} D_1 = -\frac{2EI/l}{8EI/l} \theta = -\frac{\theta}{4}$$

Trong trường hợp này nội lực tại các mặt cắt trong điều kiện hạn chế bằng không  $\{M_r\}=0$ ;  $\{V_r\}=0$ . Dùng phương trình 12.5 với các ma trận  $M_u$  và  $V_u$  đã tính được từ trường hợp (a) ta tính được nội lực tại các mặt cắt

$$\{M\} = +\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3,5 \\ 1 \\ -1 \\ -0,5 \end{Bmatrix};$$

$$\{V\} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l^2} \begin{Bmatrix} -6 \\ 6 \\ -4,5 \\ 4,5 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{Bmatrix}.$$

## 12.5 Ảnh hưởng của chuyển vị tại các tọa độ

Trường hợp tải (b) trong Ví dụ 12.5 sẽ được tổng quát hóa trong mục này. Giả thiết hệ có n bậc tự do.

Mục đích của ta tìm ảnh hưởng của m chuyển vị cho trước  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  tại m tọa độ. Ta viết ma trận độ cứng sao cho tọa độ ứng với các chuyển dịch cho trước sẽ nằm ở m dòng và cột đầu

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \Lambda & S_{1m} & S_{1,m+1} & \Lambda & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ S_{m1} & S_{m2} & \Lambda & S_{mm} & S_{m,m+1} & \Lambda & S_{11} \\ S_{m+1,1} & S_{m+1,2} & \Lambda & S_{m+1,m} & S_{m+1,m+1} & \Lambda & S_{11} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ S_{n1} & S_{n2} & \Lambda & S_{n,m} & S_{n,m+1} & \Lambda & S_{m} \end{bmatrix}; \quad (12.7)$$

Ma trận này có thể viết dưới dạng

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

ở đây  $[S_{ij}]$  là các ma trận con.

Chúng có kích cỡ như sau  $[S_{11}]_{m \times m}$ ,  $[S_{11}]_{m \times (n-m)}$ ,  $[S_{11}]_{(n-m) \times m}$ ,  $[S_{11}]_{(n-m) \times (n-m)}$ .

Cần phải có m lực  $F_1^*, F_2^*, \dots, F_m^*$  tác động vào các tọa độ từ 1 đến m để có được các chuyển vị  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ . Vì không có ngoại lực nên tại n-m tọa độ còn lại sẽ xuất hiện chuyển vị  $D_{m+1}, D_{m+2}, \dots, D_n$ . Quan hệ giữa lực và chuyển vị được viết

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1^*\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (12.9)$$

ở đây  $\{D_1\}$  là vector các chuyển vị cho trước  $\Delta$ ,  $\{D_2\}$  là vector các chuyển vị chưa biết  $D_{m+1}, D_{m+2}, \dots, D_n$  và vector  $\{F_1^*\}$  là vector các lực chưa biết tại các tọa độ 1, 2, ..., m.

Từ dòng thứ hai của phương trình ma trận (12.8) ta tìm được

$$\{D_2\} = -[S_{22}]^{-1}[S_{21}]\{D_1\} \quad (12.10)$$

Khi đã biết chuyển vị tại n tọa độ ta có thể tìm đáp ứng tại mặt cắt bất kỳ bằng phương trình

$$\{A\} = [A_u]\{D\} \quad (12.11)$$



Phương trình này như phương trình (12.5) với vector  $\{A_r\}=0$ , vì đáp ứng chỉ do ảnh hưởng của chuyển vị  $\{D\}$  thôi.

Nếu cần tính vector lực  $\{F_1^*\}$  ta có phương trình

$$\{F_1^*\} = \left[ [S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] \right] \{D_1\} \quad (12.12)$$

## 12.6 Sử dụng phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

### 12.6.1 Quan hệ giữa ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Ta sẽ tìm quan hệ giữa ma trận độ cứng và ma trận độ mềm. Trên Hình 12.7 biểu diễn hệ tọa độ với  $n$  tọa độ ứng với vị trí và hướng của các chuyển vị  $D_1, D_2, \dots, D_n$  và các lực  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Các thành phần của vector chuyển vị  $\{D\}$  có thể biểu diễn qua các thành phần của vector lực  $\{F\}$  bằng hệ phương trình

$$\begin{aligned} D_1 &= f_{11}F_1 + f_{12}F_2 + \Lambda + f_{1n}F \\ D_2 &= f_{21}F_1 + f_{22}F_2 + \Lambda + f_{2n}F \\ \Lambda & \quad \Lambda \\ D_n &= f_{n1}F_1 + f_{n2}F_2 + \Lambda + f_{nn}F \end{aligned}$$

Hệ số  $f_{ij}$  là hệ số ảnh hưởng độ mềm, chúng là chuyển vị đơn vị tại tọa độ thứ  $i$  khi chỉ có một lực đơn vị tác động tại tọa độ  $j$ . Có thể viết dưới dạng ma trận:

$$[f]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} = \{D\}_{n \times 1} \quad (12.13)$$

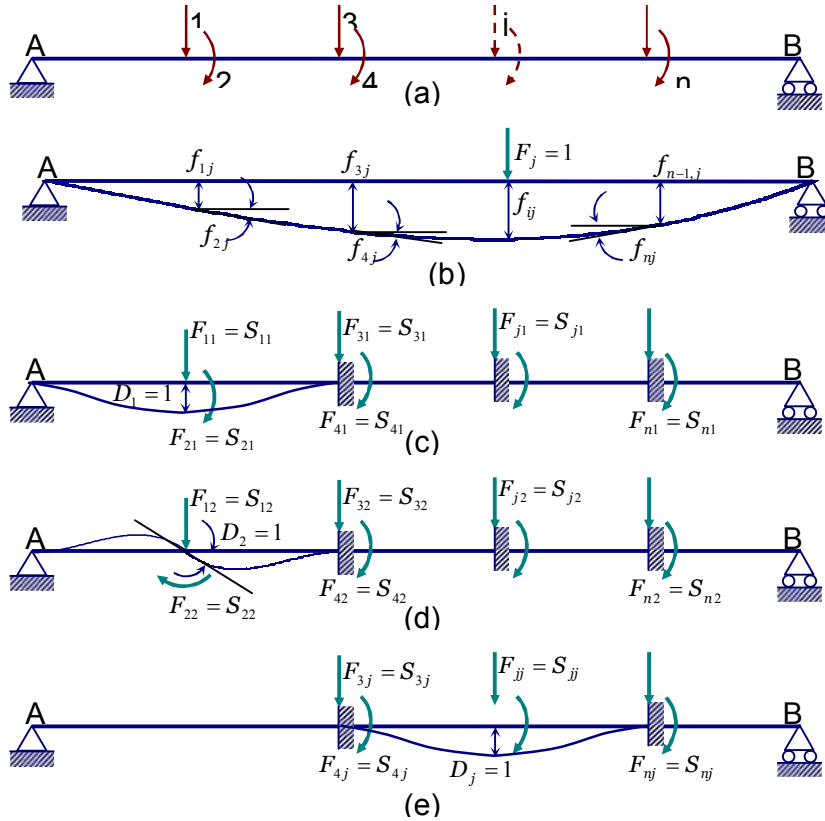
Không nên nhầm lẫn phương trình này với phương trình 10.4  $[f]\{F\}=\{-D\}$  dùng trong phương pháp lực để tìm giá trị của lực dư  $\{F\}$  gây ra chuyển vị  $\{-D\}$  điều chỉnh sai lệch chuyển vị  $\{D\}$  gây ra do giải phóng liên kết.

Lực  $\{F\}$  có thể biểu diễn qua chuyển vị khi giải phương trình 12.13

$$\{F\}_{n \times 1} = [f]_{n \times n}^{-1} \{D\}_{n \times 1} \quad (12.14)$$

Phương trình 12.14 có thể dùng để xác định lực tạo thành các phần tử của ma trận độ cứng của cùng kết cấu đang xét. Nếu ta cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà  $D_1=1$  còn các thành phần chuyển vị khác  $D_2=D_3=\dots=D_n=0$  (Hình 12.9c) ta được

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ \Lambda \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \Lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Hình 12.9. Hệ tọa độ của phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Tương tự ta cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà  $D_2=1$  còn các thành phần chuyển vị khác  $D_1=D_3=\dots=D_n=0$  (Hình 12.9d) ta được

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ \Lambda \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \Lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tổng quát ta cho kết cấu biến dạng ở cấu hình mà  $D_j=1$ , còn các thành phần chuyển vị khác bằng không (Hình 12.9e), ta nhận được hệ phương trình giống như hai phương trình vừa viết ở trên. Tất cả phương trình này có thể gộp lại trong một phương trình ở dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \Lambda & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & & F_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & & \\ F_{n1} & F_{n2} & \Lambda & F_{nn} \end{bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & & \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{Bmatrix}$$

Các lực  $F_{ij}$  trong ma trận bên trái thực chất là các phần tử của ma trận độ cứng cần tính. Ma trận cuối là ma trận đơn vị, do vậy

$$[S] = [f]^{-1} \quad (12.15)$$

ở đây  $[S]$  là ma trận độ cứng ứng với tọa độ đã cho. Nghịch đảo cả hai vế ta được

$$[S] = [f]^{-1} \quad (12.16)$$

Phương trình 12.15 và 12.16 chỉ ra rằng ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm và ngược lại ứng với cùng hệ tọa độ lực và chuyển vị dùng để thiết lập hai ma trận này.

Tuy nhiên ta biết phương pháp lực ta giải phòng liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Hệ tọa độ thể hiện vị trí và hướng của các lực dư. Còn trong phương pháp chuyển vị ta đưa vào các lực để hạn chế chuyển vị nút. Hệ tọa độ trong trường hợp này biểu diễn vị trí và hướng của chuyển vị chưa biết. Suy ra hai hệ tọa độ không thể như nhau. Do vậy nghịch đảo của ma trận độ mềm trong phương pháp lực là ma trận độ cứng nhưng không thể dùng trong phương pháp chuyển vị. Tương tự như vậy, nghịch đảo của ma trận độ cứng trong phương pháp chuyển vị là một ma trận độ mềm nhưng không thể dùng cho phương pháp lực.

### 12.6.2 Lựa chọn phương pháp

Việc lựa chọn phương pháp phân tích kết cấu chủ yếu xem xét việc thiết lập ma trận độ cứng và ma trận độ mềm, nếu việc thiết lập ma trận nào dễ hơn ta chọn phương pháp tương ứng. Ví dụ trên Hình 12.10a ma trận độ cứng có thể thiết lập dễ dàng dùng phụ lục 3. Các chuyển vị đơn vị tại nút  $j$  chỉ gây ra các lực tại  $j$  và hai nút  $j-1, j+1$  liền kề. Ví dụ như trên Hình 12.10c, ta chỉ cần tính  $S_{11}, S_{21}, S_{31}, S_{41}$  còn các thành phần khác bằng không. Mặt khác nếu sử dụng phương pháp lực khi thiết lập cột thứ  $j$  của ma trận độ mềm ta phải đặt một lực đơn vị và tính tất cả các chuyển vị. Trong ví dụ này ta thấy việc lập ma trận độ mềm nặng

nhọc hơn lập ma trận độ cứng. Nhưng không phải lúc nào việc thiết lập ma trận cứng cũng dễ hơn thiết lập ma trận độ mềm, như Ví dụ 12.6.

Xem xét một cách tổng quát ta thấy trong phương pháp lực việc lực chọn liên kết để giải phóng có thể ảnh hưởng đến số phép tính cần tính. Ví dụ như dầm liên tục nếu ta đặt các khớp ở gối đỡ đưa hệ về các dầm đơn giản khi đó lực dư đơn vị chỉ ảnh hưởng đến hai dầm liền kề. Những kết cấu khác không thể tìm được lực dư mà chỉ gây ảnh hưởng địa phương. Thông thường dưới từng lực dư đơn vị riêng biệt có tác động đến chuyển vị ở tất cả các tọa độ.

Trong phương pháp chuyển vị, tất cả các chuyển vị bị hạn chế không phụ thuộc vào việc lực chọn chuyển vị cần tìm. Thiết lập ma trận độ cứng nói chung là dễ vì các hiệu ứng địa phương thường đã được xem xét từ trước. Chuyển vị đơn vị ở một nút chỉ ảnh hưởng đến các phần tử nối vào nút đó. Hai tính chất này làm cho phương pháp chuyển vị dễ thiết lập hơn, và cũng là hai lý do rằng phương pháp chuyển vị thích hợp cho lập trình tính toán bằng máy tính.

Khi tính toán bằng tay, việc giảm bớt số phương trình cần tính toán rất quan trọng. Việc lựa chọn phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị phụ thuộc vào bậc siêu tĩnh hay bậc tự do nhỏ hơn. Không có nguyên tắc tổng quát.

Trong phương pháp chuyển vị ta có thể giảm số phương trình bằng cách chỉ hạn chế một số chuyển vị đủ để có thể phân tích kết cấu (xem Ví dụ 12.9).

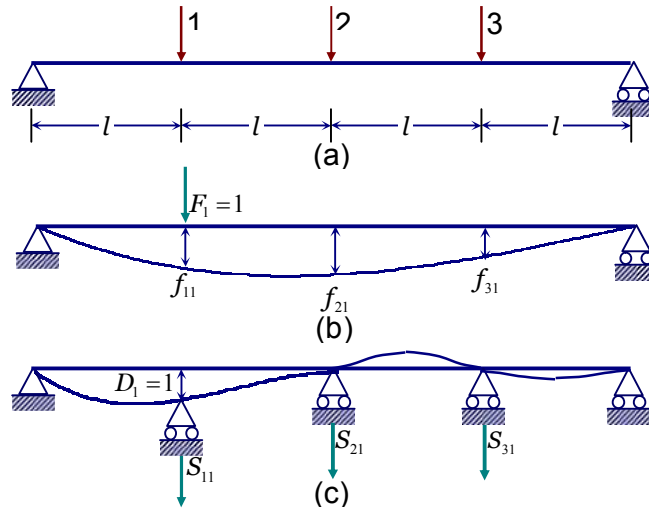
Ví dụ 12.6. Xét dầm trên Hình 12.10a, với ba tọa độ.

Từng cột của ma trận độ mềm được xác định dùng phụ lục 3 tính chuyển vị khi đặt lực dư đơn vị (Hình 12.10b), ta được

$$[f] = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

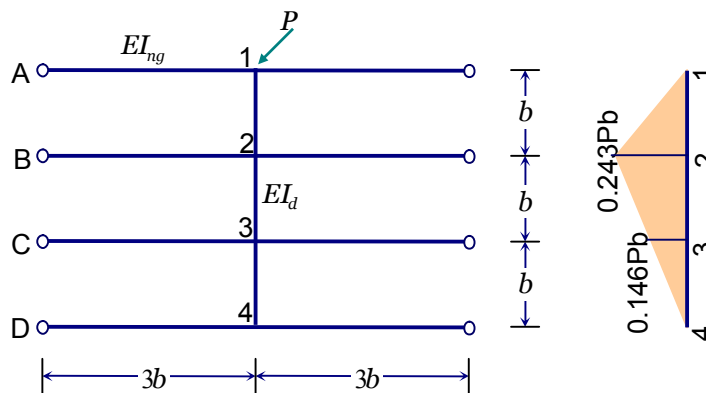
Để thiết lập ma trận độ cứng mỗi cột của [S] đòi hỏi phải phân tích một kết cấu siêu tĩnh. Ví dụ như khi thiết lập cột thứ nhất ta phải xem xét kết cấu ở biến dạng ở cấu hình như trên Hình 12.10c – là hệ có ba bậc siêu tĩnh. Ta được

$$[S] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 9,857 & -9,429 & 3,857 \\ -9,429 & 13,714 & -9,429 \\ 3,857 & -9,429 & 9,857 \end{bmatrix} = [f]^{-1}$$



Hình 12.10. So sánh giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Ví dụ 12.7. Khung ngang trên Hình 12.11 gồm 4 dầm ngang chính và một dầm dọc trên mặt cầu có độ cứng  $EI_{ngang}:EI_{dọc}=3:1$ . Độ cứng xoắn bỏ qua. Vẽ biểu đồ mô men của dầm dọc dưới tác động của lực dọc tập trung tại nút 1.



Hình 12.11. Hệ khung ngang và biểu đồ nội lực

Tại mỗi nút có 3 bậc tự do gồm: một chuyển vị dọc và hai góc xoay quay trục trong mặt phẳng của khung ngang. Tuy nhiên nếu ta hạn chế chuyển vị dọc thì hệ trở thành hệ các dầm liên tục, dùng Phụ lục 4 ta có tính toán ảnh hưởng của dịch chuyển nút không cần biết góc xoay.

Ta xét hệ tọa độ gồm 4 chuyển vị thẳng đứng tại nút 1, 2, 3 và 4, quy ước dấu dương hướng xuống. Ma trận độ cứng có thể thiết lập sử dụng các giá trị ở các bảng trong phụ lục 4 cho trường hợp dầm hai nhịp đối với dầm chính và trường hợp dầm ba nhịp cho dầm dọc. Cột đầu tiên của ma trận độ cứng được tính toán như sau.

Cho chuyển vị  $D_1=0$  còn  $D_2=D_3=D_4=0$ , khi đó chỉ có dầm chính A và dầm dọc biến dạng còn các dầm khác không bị biến dạng. Các nút cho phép quay tự do. Sau đó đặt các lực dọc để giữ cho dầm A và dầm dọc ở cấu hình này. Xem Bảng PL4.1 ở trường hợp dầm hai nhịp, tìm trong bảng phản lực tại dòng 2 và cột hai (vì gối đỡ thứ hai lún 1 đơn vị và xét phản lực tại gối đỡ thứ hai) ta được

$$S_{11} = 6 \frac{EI_{ng}}{(3b)^3} = \frac{2}{3} \frac{EI_d}{b^3}$$

Đối với dầm dọc ta tìm trường hợp dầm ba nhịp xem trong bảng phản lực lấy toàn bộ các phần tử trên hàng thứ nhất ta được

$$S_{11} = 1,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{21} = -3,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{31} = 2,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{41} = -0,4 \frac{EI_d}{b^3}$$

Như vậy cột thứ nhất của ma trận độ cứng có dạng

$$S_{11} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{21} = -3,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{31} = 2,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{41} = -0,4 \frac{EI_d}{b^3}$$

Tương tự, cho các trường hợp cấu hình biến dạng khác ta vẫn dùng bảng PL4.1 trong Phụ lục 4. Dầm ngang chính vẫn dùng phần tử thứ 2 trong dòng thứ 2 của bảng phản lực cho trường hợp dầm hai nhịp. Còn đối với dầm dọc lần lượt dùng dòng thứ 2, 3 và 4 của bảng phản lực cho trường hợp dầm ba nhịp. Ta có

$$S_{12} = -3,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{22} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{32} = -8,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{42} = 2,4 \frac{EI_d}{b^3}$$

$$S_{13} = 2,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{23} = -8,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{33} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{43} = -3,6 \frac{EI_d}{b^3}$$

$$S_{14} = -0,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{24} = 2,4 \frac{EI_d}{b^3}; S_{34} = -3,6 \frac{EI_d}{b^3}; S_{44} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1,6 \frac{EI_d}{b^3}$$

$$[S] = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 2,267 & -3,6 & 2,4 & -0,4 \\ -3,6 & 10,267 & -8,4 & 2,4 \\ 2,4 & -8,4 & 10,267 & -3,6 \\ -0,4 & 2,4 & -3,6 & 2,267 \end{bmatrix}$$

Với tải trọng P tác động vào điểm 1, ta cần lực hạn chế chuyển vị có hướng ngược tại với P, vậy  $\{F\} = \{-P, 0, 0, 0\}$ . Giải phương trình 12.2. ta tìm được chuyển vị

$$\{D\} = \frac{Pb^3}{EI_d} \begin{Bmatrix} 1,133 \\ 0,511 \\ 0,076 \\ -0,221 \end{Bmatrix}$$

Moment uốn trên dầm dọc bằng không tại điểm 1 và 4 do vậy cần xác định mô men tại điểm 2 và 9. Quy ước mô men uốn dương nếu làm cho sợi ở đáy bị kéo. Trong trường hợp này lực P tác động vào nút nên vector  $\{A_r\} = 0$ . Khi tải trọng tác động vào vị trí khác thì cần phải xác định  $\{A_r\}$  bằng cách tính toán các dầm liên tục với các nhịp bằng nhau qua các gối đỡ cố định.

Phần tử của ma trận  $[A_u]$  xác định từ Bảng PL4.1 trong phụ lục 4 cho trường hợp dầm 3 nhịp xem phản lực tại gối đỡ.

$$[A_u] = \frac{EI_d}{b^2} \begin{bmatrix} -1,6 & 3,6 & -2,4 & 0,4 \\ 0,4 & -2,4 & 3,6 & -1,6 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta tính được dùng (12.5)

$$\{A\} = \frac{EI_d}{b^2} \begin{bmatrix} -1,6 & 3,6 & -2,4 & 0,4 \\ 0,4 & -2,4 & 3,6 & -1,6 \end{bmatrix} \frac{Pb^3}{EI_d} \begin{Bmatrix} 1,133 \\ 0,511 \\ 0,076 \\ -0,021 \end{Bmatrix} = Pb \begin{Bmatrix} -0,243 \\ -0,146 \end{Bmatrix}$$

Biểu đồ mô men cho trên Hình 12.11

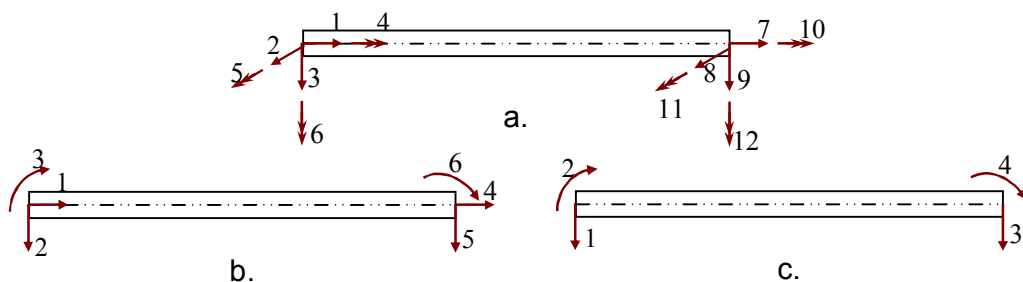
### 12.6.3. Ma trận độ cứng cho dầm thẳng

Trong chương 3 ta dùng phụ lục 3 tìm các lực đầu phần tử của từng thanh riêng biệt, sau đó cộng lực đầu của tất cả các phần tử nối vào từng nút. Ở đây ta thiết lập ma trận độ cứng cho một thanh thẳng riêng biệt, vì ta sẽ dùng thường

xuyên trong phân tích hệ khung. Ta xét phần tử dầm với 12 tọa độ tại hai đầu nút gồm các chuyển vị thẳng và góc xoay theo các trục x, y và z Hình 12.10a. Ký hiệu độ dài thanh là l, diện tích mặt cắt là a, mô men bậc hai của diện tích đối với trục z và trục y là  $I_z, I_y$ , hằng số đàn hồi là E, và độ cứng xoắn là GJ.

Khi bỏ qua biến dạng trượt và hiệu ứng vụn, mọi phần tử của ma trận độ cứng có thể thiết lập nhờ phụ lục 3. Phần tử thứ i bất kỳ tại cột j bằng lực tại tọa độ i đó do chuyển vị đơn vị tại tọa độ j gây ra. Ma trận độ cứng sẽ có dạng

$$[S]=\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} \frac{Ea}{l} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & & & & & & \\ \hline -\frac{Ea}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ea}{l} & & & & & \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{array} \right] \quad (12.17)$$



Hình 12.11 Phần tử phẳng

Nếu xét bài toán trong mặt phẳng x-y, thì ma trận độ cứng chỉ xét cho 6 tọa độ là các tọa độ 1, 2, 6, 7, 8, và 12 Hình 12.11b. Xóa các cột và các hàng 3, 4, 5, 9, 10 và 11 ta được ma trận



$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Ea}{l} & & & & & \\ & 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & \\ & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ & & & & sym & \\ -\frac{Ea}{l} & & & 0 & \frac{Ea}{l} & \\ & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} \\ & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

Nếu bỏ qua lực dọc trục ta sẽ không xét tọa độ 1 và 4 nữa Hình 12.11c vậy ma trận độ cứng của dầm thẳng chỉ còn kích cỡ là 4x4

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ & & & sym & \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & & \\ & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

Những ma trận độ cứng này được thiết lập cho trục tọa độ với trục x trùng với trục của dầm. Khi hệ trục này gọi là hệ trục tọa độ địa phương, khi xét trong hệ tọa độ tổng thể thì ta phải dùng ma trận chuyển để chuyển ma trận độ cứng về hệ tọa độ tổng thể.

#### 12.6.4. Giảm lược ma trận độ cứng

Ta có quan hệ giữa chuyển vị  $\{D\}$  và lực  $\{F\}$  đặt ở cùng một tọa độ

$$[S]\{D\} = \{F\} \quad (12.20)$$

Nếu chuyển vị tại một số tọa độ bị ngăn cản do có các liên kết và ma trận  $[S]$  bố trí sao cho phương trình ứng với các tọa độ này nằm ở phía dưới ta có

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} \quad (12.21)$$

trong đó  $\{D_2\}=0$  đại diện cho các chuyển vị đã bị hạn chế. Từ đây ta có thể viết

$$[S_{11}]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.22}$$

$$[S_{21}]\{D_1\} = \{F_2\} \tag{12.23}$$

Từ phương trình 12.22 ta nhận thấy ma trận độ cứng của những tọa độ còn lại có thể nhận được bằng cách xóa các cột và các dòng ứng với tọa độ đã bị hạn chế chuyển dịch. Ma trận độ cứng nhận được sẽ có bậc nhỏ đi. Từ phương trình 12.23 nếu ta biết các chuyển vị  $\{D_1\}$  ta có thể tính được phản lực tại các gối đỡ ngăn cản chuyển vị  $\{D_2\}$ .

Ví dụ trên Hình 12.11c ta giả thiết hai chuyển vị thẳng đứng 1 và 3 bị hạn chế, như vậy ma trận độ cứng ứng với hai tọa độ còn lại (2 và 4) sẽ nhận được bằng cách xóa các dòng và các cột thứ nhất và thứ ba trong ma trận (12.19)

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & sym \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{12.24}$$

Phản lực  $\{F_1, F_3\}$  tìm được từ phương trình

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{12.25}$$

Nếu ta biết lực bằng không ở một số tọa độ, có nghĩa tại tọa độ đó tự do chuyển động. Ma trận độ cứng ứng với các tọa độ còn lại có thể tính được từ các ma trận con trong phương trình 12.21. Cho  $\{F_2\}=0$  trong phương trình 12.21 ta có

$$\left. \begin{aligned} [S_{11}]\{D_1\} + [S_{12}]\{D_2\} &= \{F_1\} \\ \text{and} \\ [S_{21}]\{D_1\} + [S_{22}]\{D_2\} &= \{0\} \end{aligned} \right\} \tag{12.26}$$

Từ phương trình thứ hai ta giản ước  $\{D_2\}$  trong phương trình thứ nhất và có

$$[[S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}]]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.27}$$

phương trình này giống phương trình 12.12. Ta viết lại thành

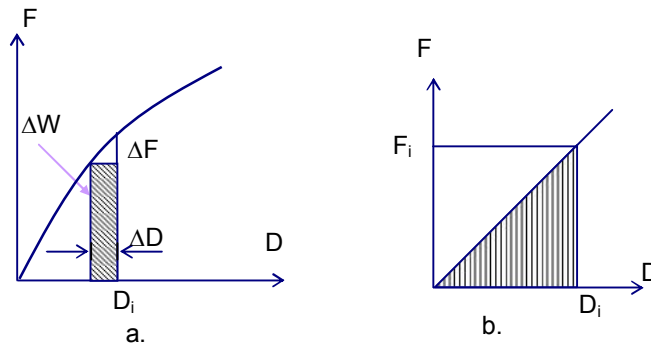
$$[S^*]\{D_1\} = \{F_1\} \tag{12.28}$$

ở đây ma trận  $[S^*]$  là ma trận độ cứng gián lược liên hệ giữa lực  $\{F_i\}$  với chuyển vị  $\{D_i\}$ , và có dạng

$$[S^*] = [S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] \quad (12.29).$$

### 12.6.5 Tính chất của ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Xét lực  $F_i$  tác dụng từ từ lên kết cấu, sao cho động năng của khối lượng bằng không. Ký hiệu  $D_i$  là chuyển vị do lực  $F_i$  gây ra tại chính điểm đặt lực và có cùng hướng với lực  $F_i$ . Nếu kết cấu đàn hồi thì quan hệ giữa lực và chuyển vị là đường cong (gia tải và cắt tải như nhau) trên Hình 12.12a.



Hình 12.12

Tại một thời điểm nào đó lực  $F_i$  tăng lên  $\Delta F_i$  và chuyển vị tăng tương ứng lên  $\Delta D_i$  thì công thực hiện bởi  $\Delta F_i$  là

$$\Delta W \approx F_i \Delta D_i$$

Là hình chữ nhật gạch chéo trên Hình 12.12a. Nếu gia tải đủ nhỏ thì công ngoại lực thực hiện bởi  $F_i$  sẽ bằng phần diện tích bên dưới đường cong giữa 0 và  $D_i$ .

Khi vật liệu tuân thủ định luật Hooke thì đường cong trên Hình 12.12a thay bằng đường thẳng trên Hình 12.12b. Khi đó công thực hiện bởi lực  $F_i$  có biểu thức

$$W = \frac{1}{2} F_i D_i$$

Nếu kết cấu chịu tác dụng của một hệ lực  $F_1, F_2, \dots, F_n$  tăng từ từ và chúng gây ra các chuyển vị tương ứng  $D_1, D_2, \dots, D_n$  tại các điểm và hướng như lực tác động thì công ngoại lực (công ngoại) biểu diễn qua

$$W = \frac{1}{2}(F_1 D_1 + F_2 D_2 + \dots + F_n D_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i D_i \quad (12.30)$$

Viết lại dưới dạng ma trận ta có

$$[W]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \{F\}_{n \times 1}^T \{D\}_{n \times 1} \quad (12.31)$$

Thay chuyển vị bằng lực qua ma trận độ mềm ta có

$$[W]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \{F\}_{n \times 1}^T [f]_{n \times n} \{F\}_{n \times 1} \quad (12.32)$$

Ta làm phép chuyển đổi cả hai vế, vế trái không đổi, với vế phải ta có nguyên tắc sau phép chuyển đổi một tích sẽ là tích của các ma trận đã chuyển đổi nhưng thứ tự ngược lại nên

$$[W]_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \{F\}_{n \times 1}^T [f]_{n \times n}^T \{F\}_{n \times 1} \quad (12.33)$$

Từ phương trình 12.32 và 12.33 ta thấy ma trận độ mềm và ma trận chuyển đổi của nó bằng nhau

$$[f] = [f]^T \Rightarrow f_{ij} = f_{ji} \quad (12.34)$$

*Ma trận độ mềm là ma trận đối xứng.* Đây là tính chất quan trọng của ma trận độ mềm.

Phương trình 12.15 chỉ ra rằng ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm nên suy ra *ma trận độ cứng cũng đối xứng*

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (12.35)$$

Tính chất quan trọng thứ hai của ma trận độ cứng và độ mềm là *các phần tử đường chéo  $S_{ii}$  và  $f_{ii}$  phải dương.*  $f_{ii}$  là chuyển vị tại tọa độ  $i$  dưới tác động của lực đơn vị cũng vào điểm  $i$  nên chuyển vị phải cùng hướng với lực nên  $f_{ii}$  dương. Còn

$S_{ii}$  là lực cần đặt vào tọa độ  $i$  sao cho gây nên chuyển vị đơn vị tại điểm  $i$ , do vậy  $S_{ii}$  có cùng hướng.

Phương trình 12.32 biểu diễn công ngoại lực qua lực và ma trận độ mềm, nếu thế lực bằng biểu thức 12.20 vào phương trình 12.31 ta được biểu diễn công ngoại lực qua chuyển vị và ma trận độ cứng

$$W = \frac{1}{2} \{F\}^T [f] \{F\} \quad (12.36)$$

và

$$W = \frac{1}{2} \{D\}^T [S] \{D\} \quad (12.37)$$

Đây là các dạng toàn phương theo biến  $F$  hay  $D$ . Dạng toàn phương là xác định dương nếu chúng dương với mọi vectơ khác không của biến, hơn nữa chúng bằng không khi và chỉ khi các vectơ biến bằng không. Định thức của các ma trận đối xứng xác định dương phải dương.

Như vậy ma trận độ cứng và ma trận độ mềm là *ma trận xác định dương*. Hệ phương trình

$$[S] \{D\} = \{F\}$$

và

$$[f] \{F\} = \{D\}$$

cũng sẽ xác định dương. Như vậy đối với một vectơ vé phải khác không hai hệ phương trình trên có *một nghiệm duy nhất*.

## Kết luận chương 12

Phương pháp chuyển vị có thể dùng cho kết cấu bất kỳ đặc biệt có lợi khi hệ có bậc siêu tĩnh cao. Qui trình tính toán chuẩn có thể áp dụng dễ dàng cho hệ giàn, khung, khung ngang và các loại kết cấu khác dưới tác động của ngoại lực hay biến dạng cho trước. Như đã nói phương pháp lực rất thích hợp cho chương trình máy tính.

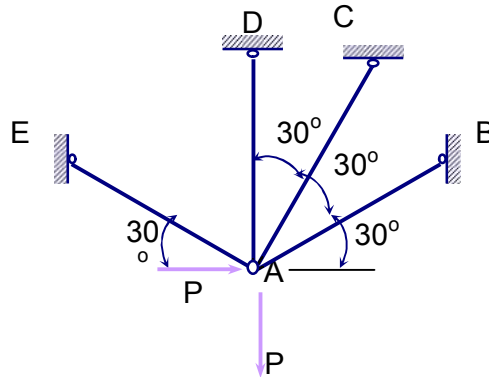
Ma trận độ cứng và ma trận độ mềm có quan hệ với nhau theo nghĩa chúng là nghịch đảo của nhau khi sử dụng cùng một hệ tọa độ của lực và chuyển vị. Tuy nhiên tọa độ lựa chọn trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị không cùng nhau nên quan hệ đó không đúng trong phân tích.

Lựa chọn phương pháp phân tích phụ thuộc vào bài toán và cả vào việc có dùng máy tính hay không. Phương pháp chuyển vị thích hợp cho việc lập trình để tính toán.

Ma trận độ cứng và độ mềm đối xứng, có các phần tử trên đường chéo lớn hơn không và chúng xác định dương. Như vậy lời giải của hệ phương trình trong phương pháp lực cũng như phương pháp chuyển vị là duy nhất.

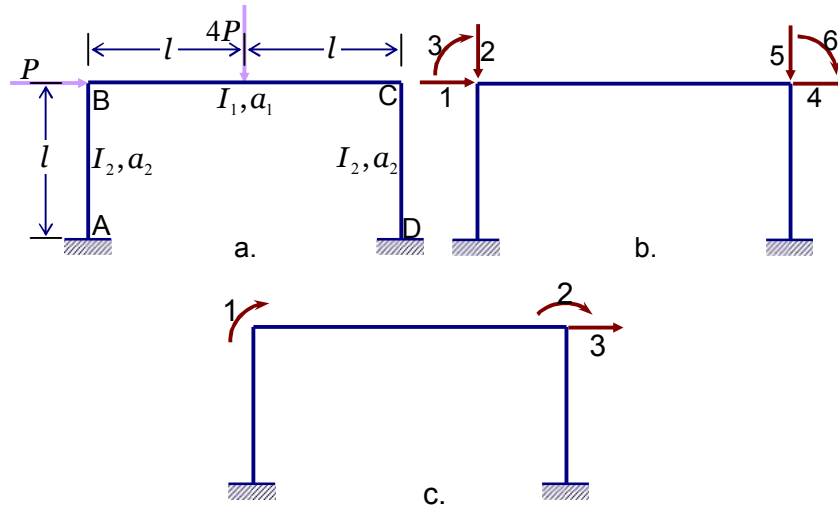
**Bài tập chương 12**

12.1. Dùng phương pháp chuyển vị tìm nội lực tại các phần tử của hệ giàn phẳng trên hình dưới. Giả thiết tất cả các phần tử có cùng giá trị  $l/aE$ .



Bài 12.1

12.2. Cho khung phẳng chịu lực ngang bằng  $P$  tác dụng vào điểm B từ phải sang và lực dọc  $4P$  từ trên xuống tại điểm giữa của thanh BC (hình (a)).



Bài 12.2

Thiết lập ma trận độ cứng cho khung phẳng như trên hình vẽ với hai trường hợp

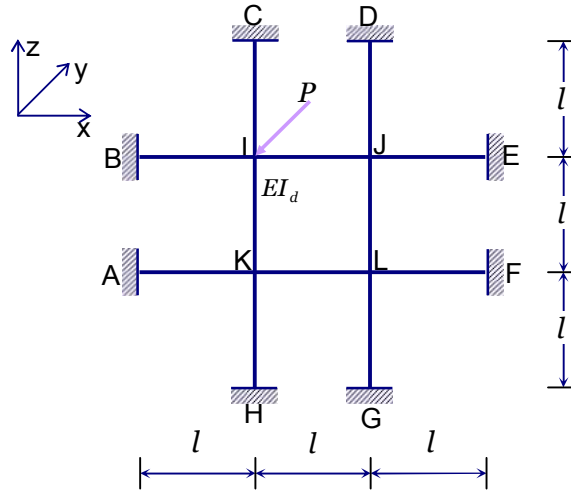
a. Sáu chuyển vị cần tìm (tại 2 nút B và C mỗi nút có 3 tọa độ) (hình (b)).

b. Bỏ qua biến dạng dọc trục (hình (c)).

c. Dùng phép giản lược tìm ma trận độ cứng  $S^*$  cho tọa độ 3 trên hình (c).

và tìm moment nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử ( $M_{AB}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CB}, M_{CD},$  và  $M_{DC}$ ) trong trường hợp b. Cho  $I_1=4I_2$ .

12.3. Cho khung ngang như trên hình vẽ với lực thẳng đứng  $P$  tác dụng vào điểm I.



Bài 12.3

Thiết lập ma trận độ cứng cho hai trường hợp

a. Tại mỗi nút I, J, K, L có 3 bậc tự do: chuyển vị thẳng đứng hướng xuống dưới theo trục y và hai góc xoay quanh hai trục x và z. Lấy  $GJ/EI=0.5$  cho tất cả các dầm.

b. Bỏ qua biến dạng xoắn (chỉ xét chuyển vị thẳng đứng)

và tìm moment nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử ở hai thanh BE và AF trong trường hợp b.

12.4. Trên hình vẽ là ba hệ tọa độ của dầm có độ cứng không đổi EI.

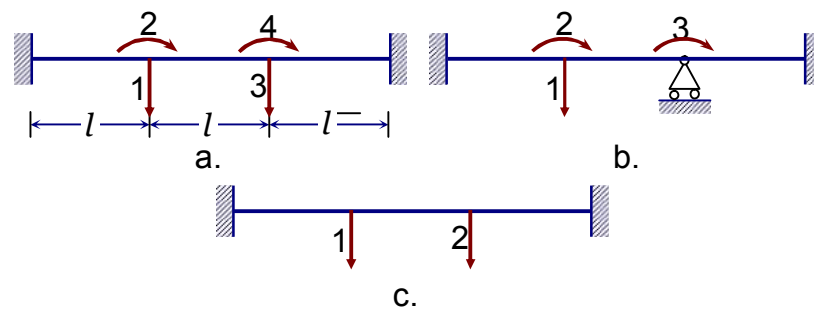
Thiết lập ma trận độ cứng

a. Cho 4 tọa độ (hình (a)).

b. Giản lược ma trận độ cứng cho 3 tọa độ (hình (b)).

b. Giản lược ma trận độ cứng cho 2 tọa độ (hình (c)).





Bài 12.4

## CHƯƠNG 13.

### Phương pháp công ảo

#### 13.1. Thế năng biến dạng

Trong chương 3 ta đã nhắc đến khái niệm thế năng biến dạng và trong các bài toán thanh ta cũng đã xem xét thế năng biến dạng của từng loại nội lực. Trong mục này trước khi đi vào chi tiết nguyên lí công ảo ta hệ thống lại các biểu thức thế năng biến dạng của từng loại nội lực.

Ta có công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát (3.2)

$$dU = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dv$$

##### 13.1.1. Thế năng biến dạng lực dọc trục

Xét đoạn  $dl$  có diện tích mặt cắt ngang  $a$  và độ dài  $l$  chịu một lực dọc trục  $N$ . Trong trường hợp này ứng suất pháp  $\sigma = N/Ea$ , biến dạng  $\varepsilon = \sigma/E$ . Như vậy từ phương trình (3.2) ta có tổng thế năng biến dạng

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{Ea} dl \quad (13.1)$$

Khi thanh thẳng ta có

$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{Ea} \quad (13.2)$$

##### 13.1.2. Thế năng biến dạng do mô men uốn

Xét đoạn  $dl$  chịu mô men uốn  $M$  quanh trục  $z$ , một trục chính của mặt cắt ngang (hình 13.1b). Ứng suất pháp tại phần tử  $da$  có khoảng cách  $\bar{y}$  đến trục  $z$  là  $\sigma = M\bar{y}/I$ , biến dạng tương ứng  $\varepsilon = \sigma/E = M\bar{y}/EI$ . Như vậy từ phương trình (3.2) ta có thế năng biến dạng của phần tử

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2 \bar{y}^2}{EI^2} dv = \frac{1}{2} \frac{M^2 \bar{y}^2}{EI^2} da dl$$

Lấy tích phân trên toàn bộ mặt cắt ngang của đoạn  $dl$ , ta tìm được Thế năng biến dạng

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI^2} dl \int_a \bar{y}^2 da$$

Tính phân bên vế phải chính là  $I$ , vậy

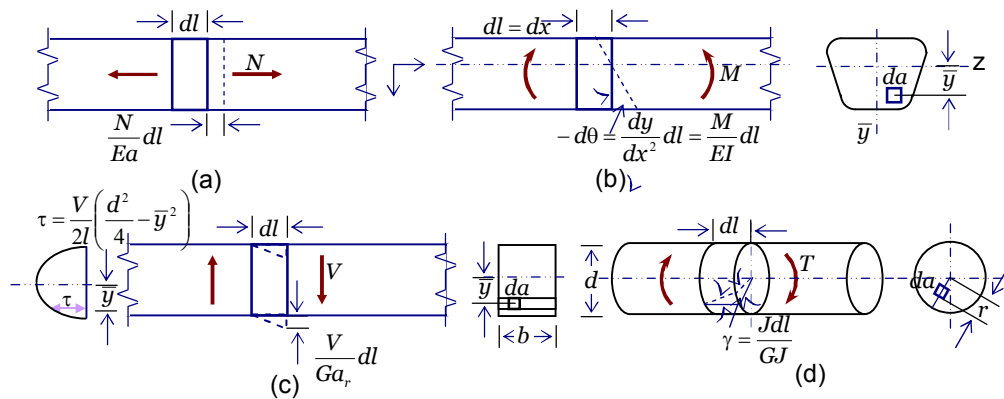
$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dl \quad (13.3)$$

Từ đó ta có tổng thế năng biến dạng do uốn

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dl \quad (13.4)$$

tích phân được lấy trên toàn bộ độ dài của phần tử kết cấu.

Trên hình 13.4b ta thấy hai mặt cắt chận hai đầu của đoạn  $dl$  xoay đi so với nhau một góc  $-d\theta = -(d^2y/dx^2)dl$  ở đây trục  $y$  hướng xuống dưới. Công ngoài do ngẫu lực  $M$  thực hiện để xoay đi một góc  $-d\theta$  là



Hình 13.1.

$$\Delta W = -\frac{1}{2} Md\theta \quad (13.5)$$

Vì ngẫu lực dương (làm căng các sợi bên dưới) làm giảm góc nghiêng  $\theta = dy/dx$  của trục biến dạng của dầm nên phương trình này mang dấu âm. Sự chênh lệch giữa góc nghiêng của đầu trái và đầu phải của đoạn  $dx$  chính là  $-d\theta = -(d^2y/dx^2)$ .

Vì công ngoài phải bằng công nội lực nên ta có  $\Delta W = \Delta U$ , từ phương trình (13.3) và (13.5) ta có

$$d\theta = -\frac{M}{EI} dl \quad (13.6)$$

Thế (13.4) vào ta nhận được tổng thế năng biến dạng do mô men uốn

$$U = -\frac{1}{2} \int M d\theta \quad (13.7)$$

### 13.1.3. Thế năng biến dạng do lực cắt

Xét đoạn  $dl$  chịu lực cắt  $V$  (hình 13.1c). Nếu lực cắt gây ra ứng suất tiếp  $\tau$ , thì biến dạng trượt  $\varepsilon$  tại phần tử có diện tích  $da$  có dạng  $\tau/G$ . Như vậy từ phương trình (3.2) ta có Thế năng biến dạng của đoạn  $dl$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \frac{\tau^2}{G} dl \cdot da \quad (13.8)$$

Tích phân lấy trên toàn bộ mặt cắt ngang, sao cho giá trị của  $dU$  phụ thuộc sự thay đổi của lực cắt trên tọa bộ mặt cắt ngang. Ví dụ nếu mặt cắt ngang là hình chữ nhật thì

$$\tau = \frac{V}{2I} \left( \frac{d^2}{4} - \bar{y}^2 \right) \quad (13.9)$$

ở đây  $b$  là bề rộng,  $d$  là chiều cao của hình chữ nhật còn  $\bar{y}$  là khoảng cách của thớ sợi đến trục trung hòa và  $I = bd^3/12$ .

Thế (13.9) vào (13.8)

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \frac{V^2 dl}{4GI^2} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{d^2}{4} - \bar{y}^2 \right)^2 b d\bar{y}$$

Ta nhận thấy  $bd = a$  là diện tích mặt cắt ngang, ta có

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \left( 1.2 \frac{V^2 dl}{Ga} \right) dl \quad (13.10)$$

Công thức này cho thanh có tiết diện hình chữ nhật. Đối với tiết diện bất kỳ ta có công thức tổng quát

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left( \frac{V^2}{Ga_r} \right) dl \quad (13.11)$$

Ở đây  $a_r$  là diện tích thu nhỏ cho trong các bảng trong các sách sức bền cho từng loại tiết diện thường gặp.

Từ phương trình 13.11 ta có tổng thế năng biến dạng do trượt

$$U = \frac{1}{2} \int \left( \frac{V^2}{Ga_r} \right) dl \quad (13.12)$$

ở đây tích phân lấy trên toàn bộ độ dài của từng phần tử kết cấu

### 13.1.13.. Thế năng biến dạng do xoắn

Hình 13.1d biểu diễn đoạn  $dl$  của một thanh có tiết diện tròn chịu tác động của mô men xoắn  $T$ . Ứng suất trượt tại điểm có khoảng cách  $r$  đến tâm là  $\tau = Tr/J$ , ở đây  $J$  là mô men quán tích cực. Biến dạng tương ứng là  $\varepsilon = \tau/G$ . Từ phương trình (3.2) ta có thế năng biến dạng của đoạn  $dl$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \frac{T^2 r^2}{GJ^2} dl \cdot da = \frac{1}{2} \frac{T^2 dl}{GJ^2} \int r^2 da$$

Tích phân  $\int r^2 da = J$  là mô men quán tích cực. Như vậy  $\Delta U = \frac{1}{2} \frac{T^2 dl}{GJ}$  suy ra tổng thế năng biến dạng do xoắn sẽ là

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{T^2 dl}{GJ} \quad (13.13)$$

Biểu thức này có thể áp dụng cho thanh có tiết diện khác với hình tròn. Trong trường hợp đó  $J$  là hằng số xoắn (đơn vị  $m^4$ ) phụ thuộc vào hình dáng của tiết diện. Biểu thức của  $J$  có thể tìm trong phụ lục 5.

### 13.1.5. Tổng thế năng biến dạng

Nếu kết cấu chịu cả bốn loại nội lực như trên, khi đó thế năng biến dạng tổng thể sẽ là tổng của các năng lượng biến dạng cho trong các phương trình 13.1, 13.4, 13.12 và 13.13

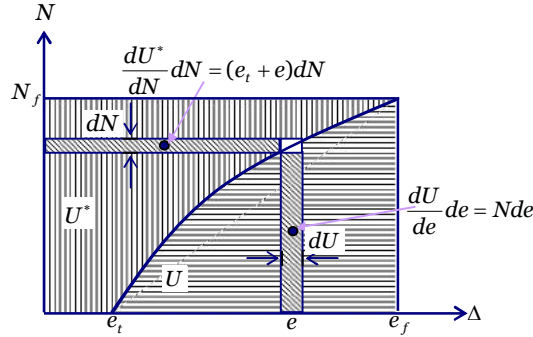
$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dl}{Ea} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dl}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{V^2 dl}{Ga_r} + \frac{1}{2} \int \frac{T^2 dl}{GJ} \quad (13.14)$$

Tích phân lấy trên toàn bộ chiều dài của từng phần tử kết cấu. Cần chú ý mỗi nội năng là tích của nội lực  $N$ ,  $M$ ,  $V$  và  $T$  tác động lên đoạn  $dl$  và thực hiện trên chuyển dịch tương ứng tại hai đầu nút của đoạn  $dl$ .

### 13.1.6. Năng lượng bù và công bù (bổ xung)

Khái niệm này có thể áp cho kết cấu bất kỳ. Nhưng ở đây ta sẽ xem xét trường hợp thanh chịu kéo nén của hệ dàn với các liên kết khớp. Giả sử thanh bị dãn một đoạn là  $e$  do lực kéo  $N$ , và một đoạn  $e_i$  do thay đổi của môi trường (ví dụ

như nhiệt độ, hay co ngót v.v). Đặt  $\Delta=e+e_t$ . Giả thiết ta có quan hệ giữa  $\Delta$  và  $N$  như trên hình 13.2. Vậy khi ta đặt lực từ từ để đạt đến giá trị  $N_f$  và gây ra biến dạng  $e_f$  sao cho  $\Delta_f=e_t+e_f$  thì thế năng biến dạng là  $U = \int_0^{e_f} Nde$ , chính bằng diện tích của phần gạch ngang trong hình 13.2.



Hình 13.2

Ta định nghĩa năng lượng bù là

$$U^* = \int_0^{N_f} \Delta dN \tag{13.15}$$

hoặc

$$U^* = N_f e_t + \int_0^{N_f} e dN \tag{13.14a}$$

là diện tích phần gạch dọc trong hình 13.2.

Chú ý: khái niệm năng lượng bù không có ý nghĩa vật lý, ta sử dụng thuật ngữ này đơn thuần vì sự thuận tiện.

Từ hình 13.2. ta thấy tổng năng lượng bù và thế năng biến dạng bằng diện tích của hình chữ nhật  $N_f(e_t+e_f)=U+U^*$

Khi độ dẫn dài tăng từ  $e$  đến  $(e+de)$ ,  $U$  sẽ tăng một lượng  $Nde$ , sao cho

$$\frac{dU}{de} = N \tag{13.16}$$

Đạo hàm tương ứng của  $U^*$  theo  $N$  sẽ bằng độ dẫn dài  $\Delta$ , vậy

$$\frac{dU^*}{dN} = e_t + e = \Delta \tag{13.17}$$

Nếu theo biểu đồ lực-chuyển vị (tương tự như biểu đồ lực-độ dẫn dài trên hình 13.2) thì diện tích bên trái của đường cong là công bù  $W^*$  vậy

$$W^* = \int_0^{N_f} DdF \quad (13.18)$$

ở đây  $F_f$  là giá trị sau cùng của lực  $F$  và  $D=d_t+d$  là tổng chuyển vị,  $d$  là chuyển vị do tác động của lực  $F$ , và  $d_t$  là chuyển vị do tác động của môi trường như nhiệt độ, co ngót, v.v.

Nếu lực  $F_1, F_2, \dots, F_n$  tác động từ từ lên kết cấu và tổng chuyển vị tại các vị trí và hướng ứng với các lực này là  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , thì công bù sẽ là

$$W^* = \sum_{i=1}^n \int_0^{F_{if}} D_i dF_i \quad (13.19)$$

ở đây  $F_{if}$  là giá trị sau cùng của  $F_i$ .

Công bù sẽ bằng công ngoại lực khi kết cấu đàn hồi tuyến tính và chuyển vị  $D$  chỉ do ngoại lực sinh ra ( $d_t=0$ ) thì

$$W^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i D_i \quad (13.20)$$

## 13.2. Nguyên lý công ảo

### 13.2.1. Phát biểu chung

Nguyên lý công ảo liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích trong kết cấu tuyến tính cũng như phi tuyến. Thực chất ta cho hệ lực giả tưởng (ảo) cân bằng hay chuyển vị ảo nhỏ tác động lên kết cấu và liên hệ với chuyển vị thực hay lực thực tương ứng. Có thể sử dụng hệ lực ảo hoặc chuyển vị ảo bất kỳ, sao cho hệ lực này thỏa mãn điều kiện cân bằng hay các chuyển vị này đảm bảo điều kiện tương thích. Điều này có nghĩa chuyển vị ảo là chuyển vị hữu hạn bất kỳ khả dĩ về mặt hình học có thể xảy ra. Chúng phải liên tục trong kết cấu và thỏa mãn các điều kiện trên biên. Với sự lựa chọn lực ảo và chuyển vị ảo thích hợp ta có thể dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị và nội lực.

Xét kết cấu biến dạng dưới tác động của ngoại lực và môi trường như nhiệt độ hay co ngót. Ta gọi tổng năng lượng biến dạng thực tại một điểm bất kỳ là  $\epsilon$ , và chuyển vị (thực) tương ứng tại  $n$  tọa độ đã chọn là  $D_1, D_2, \dots, D_n$ . Giả thiết trước khi có tải trọng thực và biến dạng thực, kết cấu chịu hệ lực ảo là  $F_1, F_2, \dots, F_n$  tại  $n$  tọa độ gây ra ứng suất  $\sigma$  tại điểm bất kỳ. Hệ lực ảo này cân bằng nhưng không nhất thiết phải ứng với chuyển vị thực  $\{D\}$ . Nguyên lý công ảo phát biểu: *tích của*

*chuyển vị thực và lực ảo tương ứng (chính là công bù ảo) sẽ bằng với tích của chuyển vị nội thực với nội lực ảo tương ứng (chính là năng lượng bù ảo). Vậy*

Công bù ảo = Năng lượng bù ảo

Có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát

$$\sum_{i=1}^n F_i D_i = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (13.21)$$

ở đây  $\sigma$  là ứng suất ứng với lực ảo  $F$ , và  $\varepsilon$  là biến dạng thực tương thích với chuyển vị thực  $\{D\}$ . Tích phân lấy trên toàn bộ thể tích của kết cấu và tổng theo tất cả lực ảo  $\{F\}$ . Phương trình 13.21 phát biểu: *công bù của ngoại lực ảo và năng lượng bù của nội lực ảo khi chuyển động dọc theo chuyển vị thực bằng nhau*

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \text{lực ảo} \\ \text{tại } i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị thực} \\ \text{tại } i \end{pmatrix} = \int_v \begin{pmatrix} \text{nội lực} \\ \text{ảo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị} \\ \text{nội thực} \end{pmatrix} dv$$

Nguyên lý công ảo dưới dạng này được áp dụng trong mục 13.2.2 để tính chuyển vị tại tọa độ bất kỳ khi qua biến dạng do nội lực thực gây ra. Nguyên lý này còn dùng để xác định ngoại lực tại một tọa độ từ nội lực. Khi đó ta cần chuyển vị ảo  $\{D\}$  tương thích với biến dạng ảo  $\varepsilon$  tại mọi điểm. Tích của ngoại lực thực  $\{F\}$  và chuyển vị ảo bằng với tích của nội lực thực và chuyển vị nội ảo tương thích với  $\{D\}$ . Quan hệ

Công ảo = Năng lượng ảo

Có thể biểu diễn theo 13.21

$$\sum_{i=1}^n F_i D_i = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv$$

ở đây  $\sigma$  là ứng suất thực ứng với lực thực và  $\varepsilon$  là biến dạng ảo tương thích với chuyển vị ảo  $\{D\}$ . Trong trường hợp này ta phát biểu: *công ảo của ngoại lực và nội lực thực khi chuyển động dọc theo chuyển vị ảo bằng nhau*

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \text{lực thực} \\ \text{tại } i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị ảo} \\ \text{tại } i \end{pmatrix} = \int_v \begin{pmatrix} \text{nội lực} \\ \text{thực} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chuyển vị} \\ \text{nội ảo} \end{pmatrix} dv$$

Khi áp dụng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị (hay lực) lực ảo (hay chuyển vị ảo) chọn sao cho vế bên phải của phương trình (13.21) cho ta định lượng cần thiết. Ta có thể làm được điều này khi dùng định lý lực đơn vị hay định lý chuyển vị đơn vị để tính chuyển vị hay lực tương ứng.



### 13.2.2. Định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị

Khi dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị  $D_j$  tại tọa độ thứ  $j$ , ta sẽ chọn hệ lực ảo  $\{F\}$  sao cho nó chỉ chứa có một lực đơn vị tại tọa độ  $j$ . Khi đó 13.21 có dạng

$$1 \times D_j = \int_v \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} dv \Rightarrow D_j = \int_v \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (13.22)$$

ở đây  $\sigma_{uj}$  là ứng suất ảo ứng với lực ảo đơn vị tại  $j$ , và  $\varepsilon$  là biến dạng thực do tải trọng thực gây ra. Phương trình này chính là định lý lực đơn vị, và là dạng tổng quát (không giới hạn ở tuyến tính) của phương trình (5.4) xây dựng cho hệ tuyến tính.

Nguyên lý công ảo còn dùng để tính lực tại tọa độ thứ  $j$ , nếu ta biết phân bố của ứng suất thực hay của nội lực. Ta chọn chuyển vị ảo  $D_j$  tại tọa độ thứ  $j$ , nhưng chuyển vị tại các điểm đặt lực khác không thay đổi. Ta sẽ xác định chuyển vị nội tương thích. Công ảo của nội lực và ngoại lực thực thực hiện trên chuyển vị ảo có dạng

$$F_j \times D_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \quad (13.23)$$

Vì  $\sigma$  là ứng suất thực ứng với lực thực, và  $\varepsilon$  là biến dạng ảo tương thích với cấu hình của chuyển vị ảo.

Trong kết cấu đàn hồi tuyến tính, các thành phần biến dạng  $\varepsilon$  tại điểm bất kỳ tỷ lệ với giá trị của chuyển vị tại  $j$ , sao cho

$$\varepsilon = \varepsilon_{uj} D_j \quad (13.24)$$

ở đây  $\varepsilon_{uj}$  là biến dạng tương thích với chuyển vị đơn vị tại  $j$ , vì không có chuyển vị tại các điểm đặt lực khác. Phương trình 13.25 sẽ có dạng

$$F_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{uj}\} dv \quad (13.25)$$

Phương trình này chính là định lý lực đơn vị,

Định lý này không áp dụng cho hệ phi tuyến vì ta đã sử dụng quan hệ 13.24, quan hệ tỉ lệ này chỉ đúng khi hệ là tuyến tính.

Định lý chuyển vị đơn vị là cơ sở để tính các đặc trưng độ cứng của phần tử kết cấu được áp dụng trong phần tử hữu hạn, khi kết cấu liên tục (bản, vật thể ba

chiều) được chia làm những phần tử với các biên giả tưởng (hình tam giác, hình nón ba cạnh).

### 13.3. Tính chuyển vị bằng công ảo

#### 13.3.1. Mô tả phương pháp

Xét kết cấu đàn hồi tuyến tính trên hình 13.3 chịu hệ lực  $F_1, F_2, \dots, F_n$  gây nên ứng lực  $N, M, V$  và  $T$  tại mặt cắt bất kỳ. Công ngoại lực và công nội lực bằng nhau từ phương trình 3.2 và 13.14 ta có

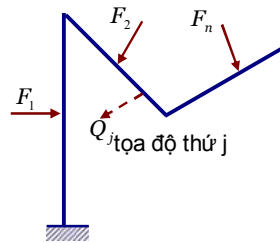
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i D_i = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{Ea} dl + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dl + \frac{1}{2} \int \frac{V^2}{Ga_r} dl + \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{GJ} dl \quad (13.26)$$

ở đây  $D_i$  là chuyển vị tại vị trí và hướng của lực  $F_i$ , và  $N, M, V$  và  $T$  là ứng lực tại mặt cắt bất kỳ do hệ lực  $\{F\}$ .

Giả thiết tại thời điểm khi lực  $\{F\}$  tác động đã có lực ảo  $Q_j$  tác động vào vị trí và hướng của tọa độ thứ  $j$  (hình 13.6). Lực này gây ra ứng lực  $N_{Q_j}, M_{Q_j}, V_{Q_j}$  và  $T_{Q_j}$ . Công ngoại lực và công nội lực lúc này cũng phải bằng nhau

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i D_i + Q_j D_j = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{N^2}{Ea} dl + \int \frac{M^2}{EI} dl + \int \frac{V^2}{Ga_r} dl + \int \frac{T^2}{GJ} dl \right] + \left[ \int \frac{N_{Q_j} N}{Ea} dl + \int \frac{M_{Q_j} M}{EI} dl + \int \frac{V_{Q_j} V}{Ga_r} dl + \int \frac{T_{Q_j} T}{GJ} dl \right] \quad (13.27)$$

ở đây  $D_j$  là chuyển vị tại  $j$  do hệ lực  $\{F\}$  tại hướng của lực ảo  $j$ . Số hạng thứ hai trong cả hai vế biểu diễn công của lực  $Q_j$  thực hiện khi chuyển động dọc theo chuyển vị gây ra bởi hệ lực  $\{F\}$ .



Hình 13.3

Lấy 13.27 trừ đi 13.26 ta được

$$Q_j D_j = \int \frac{N_{Q_j} N}{Ea} dl + \int \frac{M_{Q_j} M}{EI} dl + \int \frac{V_{Q_j} V}{Ga_r} dl + \int \frac{T_{Q_j} T}{GJ} dl \quad (13.28)$$

Để xác định chuyển vị tại vị trí và hướng bất kỳ do hệ lực  $\{F\}$  gây ra ta chia 13.28 cho  $Q_j$ . Vậy ta có chuyển vị tại  $j$  là

$$D_j = \int \frac{N_{uj}N}{Ea} dl + \int \frac{M_{uj}M}{EI} dl + \int \frac{V_{uj}V}{Ga_r} dl + \int \frac{T_{uj}T}{GJ} dl \quad (13.29)$$

ở đây

$$N_{uj} = \frac{N_{Qj}}{Q_j} \quad M_{uj} = \frac{M_{Qj}}{Q_j} \quad V_{uj} = \frac{V_{Qj}}{Q_j} \quad \text{và} \quad T_{uj} = \frac{T_{Qj}}{Q_j}$$

đây là nội lực tại mặt cắt bất kỳ do lực ảo đơn vị ( $Q_j=1$ ) tại tọa độ  $j$  gây ra. Phương trình 13.29 là một trường hợp của định lý lực đơn vị áp dụng cho hệ khung.

Để sử dụng phương trình 13.29 để tính chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ, nội lực tại mọi mặt cắt của kết cấu có thể xác định do: (i) lực thực và (ii) lực ảo đơn vị. Lực thứ hai là lực giả tưởng, tải trọng giả đưa ra chỉ đơn thuần để tính toán. Cụ thể, nếu chuyển vị cần tính toán là dịch chuyển thẳng thì lực giả tưởng là lực tập trung đặt vào điểm và hướng của dịch chuyển phải tìm. Nếu chuyển vị phải tìm là góc xoay, thì lực đơn vị là một ngẫu lực tác động vào cùng hướng và cùng vị trí của góc xoay. Nếu cần xác định dịch chuyển tương đối giữa hai điểm, thì cần hai lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó dọc theo đường thẳng nối các điểm đó. Tương tự, nếu cần xác định góc xoay tương đối, thì cần hai ngẫu lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó.

Nội lực  $N_{uj}$ ,  $M_{uj}$ ,  $V_{uj}$  và  $T_{uj}$  là lực trên lực ảo đơn vị. Nếu chuyển vị cần tính là dịch chuyển thẳng và đơn vị là  $N$  và  $m$  thì  $N_{uj}$ ,  $M_{uj}$ ,  $V_{uj}$  và  $T_{uj}$  có đơn vị lần lượt là  $N/N$ ,  $Nm/N$ ,  $N/N$  và  $Nm/N$ . Nếu lực ảo là ngẫu lực thì  $N_{uj}$ ,  $M_{uj}$ ,  $V_{uj}$  và  $T_{uj}$  có đơn vị lần lượt là  $N/Nm$ ,  $Nm/Nm$ ,  $N/Nm$  và  $Nm/Nm$ . Ta có thể kiểm tra phép tính bằng cách kiểm tra đơn vị của các phép tính.

Mỗi số hạng trong 13.29 thể hiện sự đóng góp của từng loại nội lực. Trong thực tế không phải lúc nào cũng có cả bốn loại nội lực, vậy một số số hạng sẽ không cần tính. Có thể bỏ qua các số hạng có đóng góp không đáng kể.

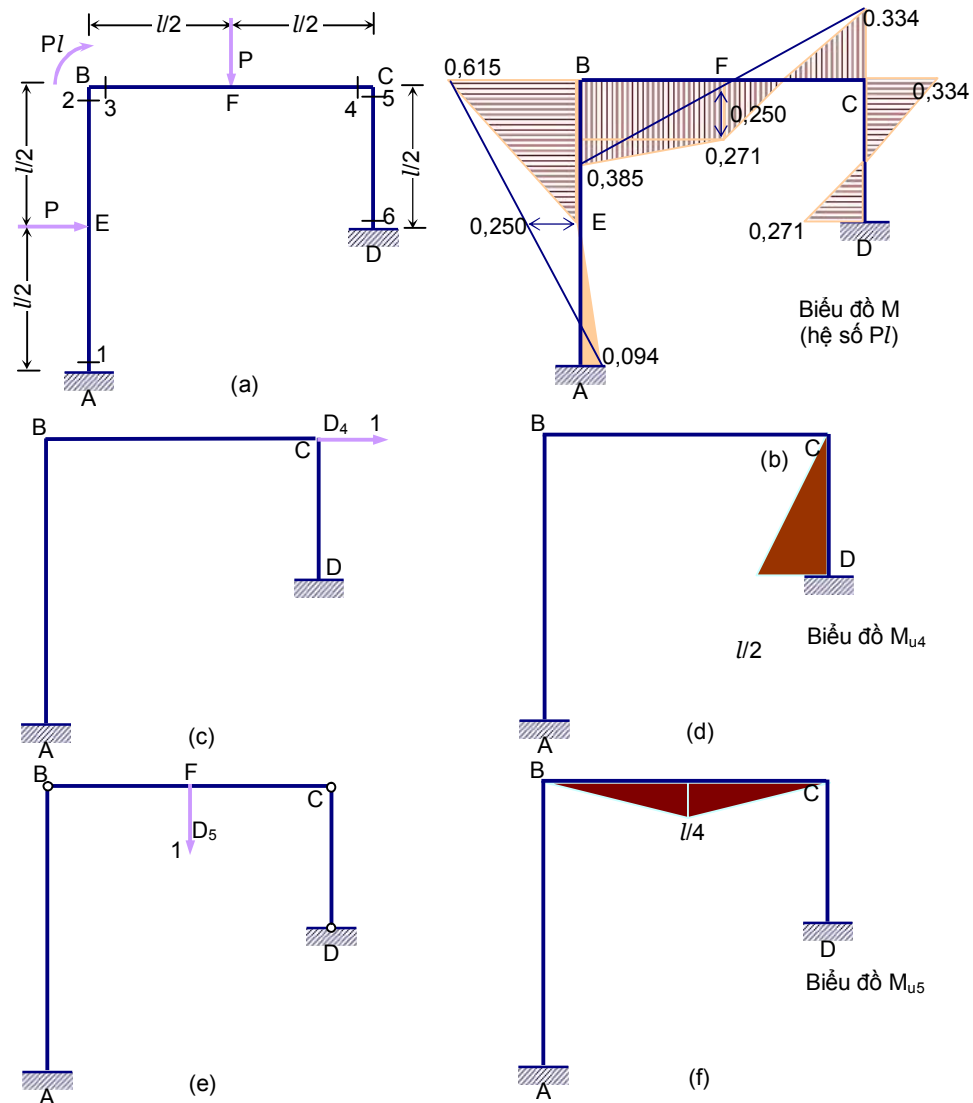
### 13.3.2. Chuyển vị của kết cấu siêu tĩnh

Như trong mục 13.2 đã trình bày nguyên lý công khả dĩ có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ, tĩnh định hay siêu tĩnh. Tuy nhiên trường hợp siêu tĩnh cần tính nội lực gây ra do tải trọng thực bằng phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị.

Sau đó, ta cần tìm nội lực  $N_{uj}$ ,  $M_{uj}$ ,  $V_{uj}$  và  $T_{uj}$  do lực ảo đơn vị tác dụng tại  $j$ . Những lực này có thể xác định cho kết cấu đã giải phóng liên kết (bất kỳ) miễn thỏa mãn điều kiện cân bằng với lực ảo đơn vị. Ta có thể làm được điều này bằng cách giải phóng một số liên kết đảm bảo kết cấu ổn định. Ta có thể làm vậy vì nguyên lý công ảo liên hệ giữa chuyển vị ảo tương thích của kết cấu thực với hệ lực ảo cân bằng, hệ lực này không nhất thiết phải ứng với hệ lực thực.

Ví dụ 13.1. Xét kết cấu trên hình 13.4a tìm chuyển vị ngang  $D_4$  tại điểm C. Chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng của các thanh không đổi bằng  $EI$ .

Biểu đồ mô men đã có từ ví dụ 3.2 và biểu diễn trên hình 13.4b.



Hình 13.4

Lực đơn vị tác động vào tọa độ 4 vào kết cấu tĩnh định có được bằng cách cắt khung chỉ để lại thanh CD, hình 13.4c. Biểu đồ mô men uốn  $M_{u4}$  biểu diễn trên hình 13.4d.

Sử dụng phương trình 13.29 và chỉ xét uốn ta có

$$D_4 = \int \frac{M_{u4}M}{EI} dl$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn CD vì mô men uốn bằng 0 trên các đoạn còn lại. Sử dụng phụ lục 6 ta có

$$D_4 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{2} \frac{(l/2)}{6} (2 \times 0,271Pl - 0,334Pl) \right] = 0,0087 \frac{Pl^3}{EI}$$

Giả thiết ta cần tìm chuyển vị thẳng đứng tại F, ký hiệu là  $D_5$ . Ta đặt lực ảo đơn vị tác động vào khung có ba liên kết khớp, hình 13.4e. Biểu đồ mô men  $M_{u5}$  biểu diễn trên hình 13.4f. Tương tự như với  $D_4$  ta có

$$D_5 = \int \frac{M_{u5}M}{EI} dl$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn BCD vì mô men uốn bằng 0 trên các đoạn còn lại. Sử dụng phụ lục 6 ta có

$$D_5 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{4} \frac{(l/2)}{6} (0,385Pl + 4 \times 0,25Pl - 0,334Pl) \right] = 0,0240 \frac{Pl^3}{EI}$$

Có thể đưa ra các lực ảo khác để tính  $D_4$  và  $D_5$ .

### 13.3.3. Đánh giá tích phân để tính chuyển vị bằng phương pháp công ảo

Phần trước ta thấy tích phân

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI} dl$$

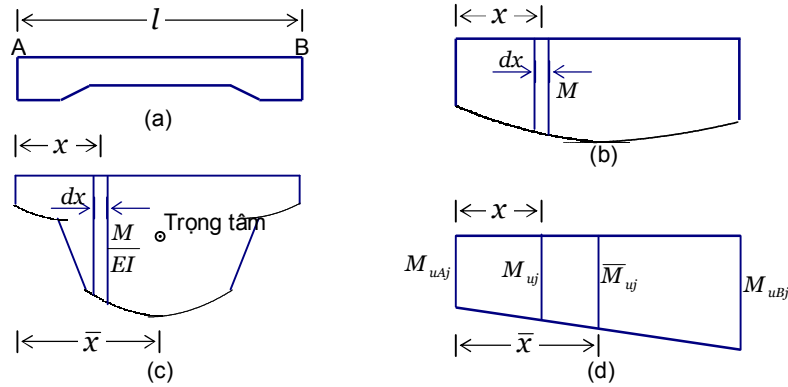
thường xuất hiện trong phương trình công ảo. Ta sẽ xem tính tích phân này như thế nào, sau đó các tích phân khác cũng có thể làm tương tự.

Nếu kết cấu có m phần tử, thì tích phân có thể thay bằng tổng

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI} dl = \sum_{pt} \int M_{uj} \frac{M}{EI} dl \quad (13.30)$$

sao cho bài toán đưa về tính tích phân cho một phần tử.

Ta xét phân tử thẳng AB có độ dài  $l$ , có tiết diện thay đổi chịu uốn (hình 13.5a). Hình 13.5b biểu diễn biểu đồ mô men uốn do tải trọng bất kỳ. Nếu ta chia tung độ của biểu đồ này cho  $EI$  ta nhận được biểu đồ  $M/EI$  trên hình 13.5c.



Hình 13.5

Vì thanh AB thẳng, nên biểu đồ mô men uốn  $M_{uj}$  trên đoạn AB do lực ảo đơn vị tại tọa độ bất kỳ sẽ là đường thẳng (hình 13.5d). Ký hiệu tung độ của biểu đồ này tại A và B là  $M_{uAj}$  và  $M_{uBj}$ . Tung độ tại mặt cắt bất kỳ cách a một đoạn  $x$  là

$$M_{uj} = M_{uAj} + (M_{uBj} - M_{uAj}) \frac{x}{l}$$

Thế biểu thức của  $M_{uj}$  vào tích phân, ta có

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl = M_{uAj} \int_0^l \frac{M}{EI} dx + \left( \frac{M_{uBj} - M_{uAj}}{l} \right) \int_0^l \frac{M}{EI} x dx \quad (13.31)$$

Tích phân trong số hạng thứ nhất là diện tích của biểu đồ  $M/EI$ , ta ký hiệu

$$a_M = \int_0^l \frac{M}{EI} dx$$

Nếu  $\bar{x}$  là khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ  $M/EI$  đến điểm A thì mô men bậc nhất của diện tích  $a_M$  đối với A sẽ là

$$a_M \bar{x} = \int_0^l \frac{M}{EI} x dx$$

Như vậy phương trình 13.31 sẽ có dạng

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl = a_M \left[ M_{uAj} + (M_{uBj} - M_{uAj}) \frac{\bar{x}}{l} \right]$$

Số hạng trong dấu ngoặc vuông chính là tung độ  $\bar{M}_{uj}$  của biểu đồ  $M_{uj}$  tại mặt cắt đi qua trọng tâm của biểu đồ  $M/EI$ . Vậy

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI} dl = a_M \bar{M}_{uj} \quad (13.32)$$

Bằng cách phân tích tương tự ta có thể tính toán

$$\int \frac{V_{uj}V}{Ga_r} dl = a_V \bar{V}_{uj} \quad (13.33)$$

$$\int \frac{T_{uj}T}{GJ} dl = a_T \bar{T}_{uj} \quad (13.34)$$

$$\int \frac{N_{uj}N}{Ea} dl = a_N \bar{N}_{uj} \quad (13.35)$$

Các ký hiệu bên vế phải của các phương trình 13.32-13.35 là

$a_M$ ,  $a_V$ ,  $a_T$  và  $a_N$  diện tích của các biểu đồ  $M/EI$ ,  $V/Ga_r$ ,  $T/GJ$  và  $N/Ea$

$\bar{M}_{uj}$ ,  $\bar{V}_{uj}$ ,  $\bar{T}_{uj}$  và  $\bar{N}_{uj}$  - giá trị của  $M_{uj}$ ,  $V_{uj}$ ,  $T_{uj}$  và  $N_{uj}$  tại trọng tâm của các diện tích  $a$  xét ở trên.

Diện tích và trọng tâm của một số hình thường gặp có thể xem trong phụ lục 5. Với thanh có độ cứng  $EI$  không đổi, giá trị của tích phân  $\int M_{uj}M dl$  cho một số hình thường gặp cho trong phụ lục 6.

Chú ý: giá trị của tích phân không phụ thuộc vào quy ước dấu của nội lực, đảm bảo rằng quy ước dấu cho lực ảo và lực thực như nhau.

### 13.4. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ dàn

#### 13.4.1. Chuyển vị của dàn

Trong dàn phẳng hay dàn không gian từ  $m$  thanh liên kết khớp, chỉ chịu lực tại các nút, nội lực duy nhất là lực dọc trục, vậy phương trình 13.29 có dạng

$$D_j = \sum_{i=1}^m \int_l \frac{N_{uj}N}{Ea} dl \quad (13.36)$$

Nói chung tiết diện không đổi trong từng thanh nên ta có

$$D_j = \sum_{i=1}^m \frac{N_{uj}N}{E_i a_i} l_i \quad (13.37)$$

ở đây  $m$  số phần tử,  $N_{uj}$  là lực dọc trục trong thanh thứ  $i$  do lực ảo tại điểm  $j$ , và  $N_i/(E_i a_i)$  là thay đổi độ dài của thanh  $i$  do lực thực gây ra, giả thiết vật liệu tuân thủ định luật Hooke.

Phương trình 13.37 có thể viết dưới dạng

$$D_j = \sum_{i=1}^m N_{uij} \Delta_i \tag{13.38}$$

trong đó  $\Delta_i$  là thay đổi độ dài thực của thanh thứ  $i$ . Biểu thức này dùng khi thay đổi độ dài là do các nguyên nhân khác ngoài ngoại lực ví dụ như thay đổi nhiệt độ. Sự tăng hay giảm nhiệt độ trong thanh thứ  $i$  đi t độ sẽ gây ra sự thay đổi độ dài là

$$\Delta_j = \alpha t l_i \tag{13.39}$$

trong đó  $l_i$  độ dài của thanh thứ  $i$ , và  $\alpha$  là hệ số giãn nở nhiệt.

Phương trình 13.38 đúng cho cả kết cấu tuyến tính và phi tuyến.

Ví dụ. 13.2. Dàn phẳng như trên hình 13.6a. Chịu tác động của hai lực bằng nhau  $P$  tại E và D. Tiết diện của các thanh 1, 2, 3, 4 và 5 là  $a$ , còn các thanh 6 và 7 là  $1.25a$ . Xác định chuyển vị ngang  $D_1$  của điểm C, và dịch chuyển tương đối  $D_2$ , của hai điểm B và E.

Nội lực được xác định và cho trên hình 13.6b.

Nội lực do lực ảo đơn vị gây ra tại tọa độ  $D_1$  và  $D_2$  được xác định và cho trên hình 13.6c và d. Các giá trị nhân được có thể kiểm tra từ điều kiện cân bằng tại nút.

Quy ước dấu: thanh chịu kéo có lực dọc trục dương.

Tính  $D_1$  và  $D_2$  dùng phương trình 13.37. Trong bảng 13.1. dưới đây là các tính toán cho dưới dạng bảng.

Bảng 13.1. Tính  $D_1$  và  $D_2$  (Ví dụ 13.2.)

| Phần tử | Đặc trưng của thanh |           |                | Tải thực | Tính $D_1$ |                      | Tính $D_2$ |                      |
|---------|---------------------|-----------|----------------|----------|------------|----------------------|------------|----------------------|
|         | Độ dài              | Tiết diện | $\frac{l}{Ea}$ | N        | $N_u$      | $\frac{N_u N l}{Ea}$ | $N_u$      | $\frac{N_u N l}{Ea}$ |
| 1       | 1                   | 1         | 1              | 1,167    | -1         | -1,167               | -0,8       | -0,933               |
| 2       | 1                   | 1         | 1              | 1,167    | -1         | -1,167               | 0          | 0                    |
| 3       | 0,75                | 1         | 0,75           | 0        | 0          | 0                    | -0,6       | 0                    |
| 4       | 0,75                | 1         | 0,75           | 0        | 0          | 0                    | -0,6       | 0                    |
| 5       | 1                   | 1         | 1              | -1       | 0          | 0                    | -0,8       | 0,800                |
| 6       | 1,25                | 1,25      | 1              | -1,458   | 0          | 0                    | 0          | 0                    |
| 7       | 1,25                | 1,25      | 1              | -0,208   | 0          | 0                    | 1          | -0,208               |
| Hệ số   | l                   | a         | $\frac{l}{Ea}$ | P        | -          | $\frac{Pl}{Ea}$      | -          | $\frac{Pl}{Ea}$      |
|         |                     |           |                |          |            | -2,334               |            | -0,341               |

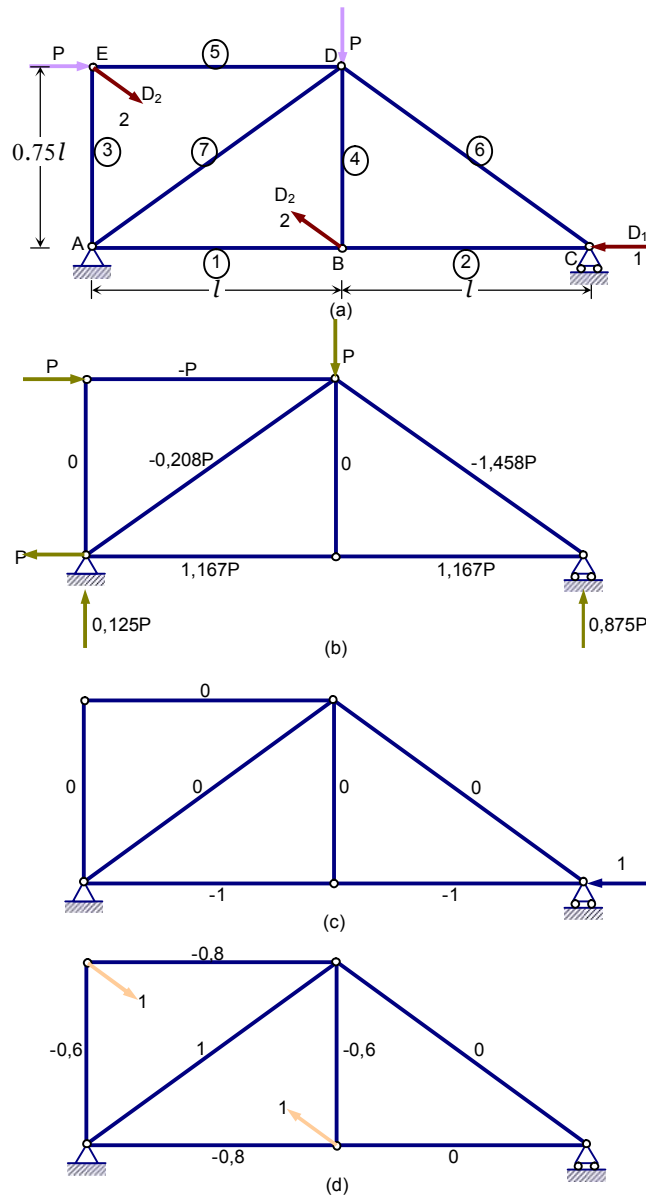


Từ bảng 13.1 ta nhận được chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  là tổng của cột  $\frac{N_u Nl}{Ea}$  tương

ứng. Vậy

$$D_1 = -2,334 \frac{Pl}{Ea} \text{ và } D_2 = -0,341 \frac{Pl}{Ea}.$$

Dấu âm của  $D_1$  chỉ ra rằng chuyển vị ngược với hướng của lực ảo trong hình 13.6c. Có nghĩa điểm C dịch sang bên phải. Tương tự dịch chuyển tương đối của B và E ngược với hướng của lực ảo như vậy chúng tách ra khỏi nhau.



Hình 13.6

Ví dụ 13.3. Cũng với dàn phẳng trong ví dụ 13.2, tìm chuyển vị  $D_2$ , khi phân tử thứ 5 và 6 tăng  $30^0$ . (Trường hợp này không có lực P tác dụng). Giả thiết độ giãn nở nhiệt  $\alpha=0,6 \times 10^{-5}/\text{độ}$ .

Lực ảo đơn vị tác động như trên hình 13.6d.

Thay đổi độ dài thực chỉ xuất hiện ở hai phân tử số 5 và 6, sử dụng 13.39

$$\Delta_5 = 0,6 \times 10^{-5} \times 30 \times l = 18 \times 10^{-5} l$$

$$\Delta_6 = 0,6 \times 10^{-5} \times 30 \times 1,25l = 22,5 \times 10^{-5} l$$

Từ phương trình (13.38) ta có

$$D_2 = \sum_{i=5,6} N_{ui2} \Delta_i = -0,8(18 \times 10^{-5} l) + 0 \times (22,5 \times 10^{-5} l) = -14,4 \times 10^{-5} l$$

### 13.4.2. Chuyển vị của dàn dẹt đại số ma trận

Co dàn có m phần tử, phương trình (13.37) cho ta chuyển vị tại các nút theo các hướng xác định bằng các tọa độ j. Ta có thể biểu diễn dưới dạng ma trận

$$D_j = \{N_u\}_j^T [f_M]_{m \times m} \{N\}_{m \times 1} \quad (13.40)$$

ở đây  $\{N_u\}_j^T$  là ma trận chuyển đổi của ma trận  $\{N_u\}_j$  là các nội lực do lực ảo [n] vị tại tọa độ j gây ra. Các thành phần của  $\{N\}$  là nội lực do lực thực gây ra. Cuối cùng, ma trận  $[f_M]$

$$[f_M] = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{E_1 a_1} & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{E_2 a_2} & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & \frac{l_m}{E_m a_m} \end{bmatrix} \quad (13.41)$$

là ma trận đường chéo, với các phân tử trên đường chéo là độ mềm theo biến dạng dọc trục của từng phần tử, đây chính là thay đổi độ dài do lực đơn vị gây ra. Ma trận này là ma trận độ mềm của kết cấu chưa tập hợp.

Sử dụng ma trận có ưu điểm khi ta sử dụng máy tính để tính toán chuyển vị tại một số nút. Giả sử chuyển vị cần tìm tại n tọa độ. Lực ảo đơn vị tác động riêng biệt vào từng nút và ta có được một tập các lực. ta bố trí các lực này dưới dạng ma trận

$$[N_u]_{m \times n} = \begin{bmatrix} N_{u11} & N_{u12} & \Lambda & N_{u1n} \\ N_{u21} & N_{u22} & \Lambda & N_{u2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ N_{un1} & N_{un2} & \Lambda & N_{unn} \end{bmatrix} \quad (13.42)$$

ở đây phần tử trong cột thứ  $j$  là lực trong phần tử do lực ảo tác động vào tọa độ thứ  $j$ . Chỉ số thứ nhất của  $N_u$  xác định phần tử dàn, chỉ số thứ hai xác định tọa độ  $j$ , tại đó lực ảo đơn vị tác động.

Dùng các biểu thức 13.42 và 13.40 ta có thể mở rộng cho trường hợp xác định chuyển vị tại  $n$  tọa độ như sau

$$\{D\}_{n \times 1} = [N_u]_{m \times n}^T [f_M]_{m \times m} \{N\}_{m \times 1} \quad (13.43)$$

Khi chuyển vị cần xác định cho  $p$  trường hợp tải trọng ta có

$$[D]_{n \times p} = [N_u]_{m \times n}^T [f_M]_{m \times m} [N]_{m \times p} \quad (13.44)$$

Các ký hiệu được dùng là

$D$  - chuyển vị tại các tọa độ

$N_u$  - lực tại các phần tử do lực ảo đơn vị gây ra tại các tọa độ. Phần tử của từng cột trong ma trận  $[N_u]$  là lực do lực ảo đơn vị tác động tại tọa độ tương ứng.

$f_M = 1/(Ea) =$  độ mềm của phần tử

$N$  - lực tại phần tử do tải trọng thực; phần tử của từng cột trong ma trận  $[N]$  là lực ứng với từng trường hợp tải trọng

$n$  - số tọa độ mà tại đó ta cần tính chuyển vị

$m$  - số phần tử

$p$  - số trường hợp tải.

Nếu chuyển vị cần tìm là do sự thay đổi độ dài của các thanh do thay đổi nhiệt độ, hay do nguyên nhân biến dạng khác. Phương trình 13.38 có thể biểu diễn dưới dạng ma trận tương đương như phương trình 13.44

$$[D]_{n \times p} = [N_u]_{m \times n}^T [\Delta]_{m \times p} \quad (13.45)$$

Phần tử của từng cột của  $[\Delta]$  là độ dẫn dài của từng thanh ứng với từng trường hợp.

Ví dụ 13.4. Giải ví dụ 13.2 dùng ma trận. Chuyển vị cần tính tại tọa độ 1 và 2 biểu diễn trên hình 13.6a.

Trong bài toán này ta có  $n=2$ ,  $m=7$  và  $p=1$ . Lực tạo thanh ma trận  $[N]$  và  $[N_u]$  biểu diễn trên hình 13.6b, c và d. Vậy

$$[N_u]_{7 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -0,8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0,6 \\ 0 & -0,6 \\ 0 & -0,8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [N_u]_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} 1,167 \\ 1,167 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1,458 \\ -0,208 \end{bmatrix} \quad [f_M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.43

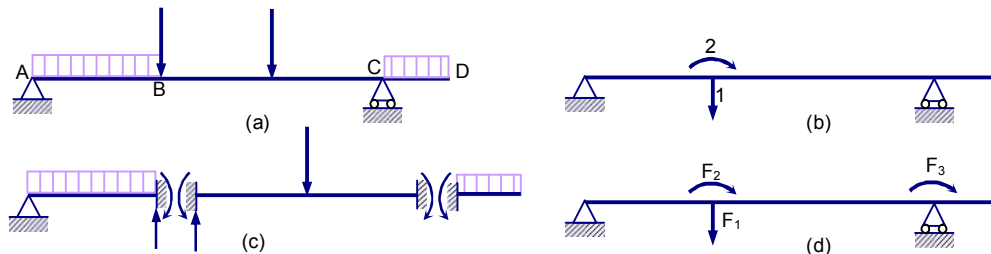
$$[D]_{2 \times 1} = [N_u]_{7 \times 2}^T [f_M]_{7 \times 7} [N]_{7 \times 1} = \frac{Pl}{Ea} \begin{bmatrix} -2,334 \\ -0,341 \end{bmatrix}$$

### 13.5. Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ khung

#### 13.4.1. Tải trọng nút tương đương

Như ta đã thấy khi phân tích kết cấu bằng phương pháp lực chuyển vị được chọn tại một số tọa độ, thường ta chọn tại các nút và ta cũng nhận thấy sẽ rất tiện nếu ta sử dụng ma trận để tính toán. Như vậy đòi hỏi tải trọng phải đặt tại nút. Tuy nhiên tải trọng tác động giữa các nút có thể đưa về tải trọng nút tương đương. Các tải tương đương được chọn sao cho chuyển vị tại nút sẽ bằng với chuyển vị do tải trọng thật gây ra. Chuyển vị tại các điểm không phải là nút không nhất thiết phải bằng với chuyển vị do tải thực gây ra.

Ta xét dầm trên hình 13.7a, cần tìm chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 tại B (hình 13.7b).



Hình 13.7

Ta coi điểm B là một nút nối phần tử AB với BC. Trên hình 13.7c chuyển vị tại nút B và C đã bị hạn chế và ta xác định lực đầu phần tử do tải trọng thực gây

ra. Ta có thể dùng phụ lục 2 để tính. Lực đầu phần tử tại các nút công lại và thành lực nút tương đương đặt vào kết cấu (hình 13.7d). Những lực này tương đương về mặt tĩnh học với tải trọng thực và gây ra chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 giống như tải trọng thực. Góc xoay tại C cũng sẽ giống như góc xoay do tải trọng thực gây ra. Nhưng điều này không đúng cho chuyển vị tại các nút A và D.

Thật vậy, ta xác định chuyển vị tại 1, 2 và góc xoay tại C bằng cách tổ hợp chuyển vị do các trường hợp tải trọng trên hình 13.7c và 13.7d gây ra. Nhưng lực trong trường hợp hình 13.7c không gây ra chuyển vị 1, 2 và góc xoay tại C. Khi bỏ các lực hạn chế bằng cách đặt vào các lực như trên hình 13.7d sẽ gây ra các chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 và góc xoay tại C bằng với chuyển vị do tải trọng thực gây ra.

Trong trường hợp trên ta đưa vào các hạn chế tại những tọa độ ta cần xác định chuyển vị, Tuy nhiên có thể đưa thêm các hạn chế tại các vị trí khác để thuận tiện hơn cho việc tính các lực đầu phần tử.

Tất nhiên, thay thế bằng lực nút tương đương sẽ cũng gây ra phản lực bằng với phản lực trong trường hợp tải thực. Nội lực tại các đầu nút của phần tử do lực tương đương gây ra được cộng với lực đầu phần tử do tải trọng thực cho ta nội lực trong trường hợp tải thực.

Ưu điểm của việc dùng tải trọng nút tương đương là biểu đồ nội lực tương ứng thành đường thẳng. Do vậy, việc tính tích phân trong phương trình 13.43 dễ dàng hơn nhiều.

#### **13.4.2. Chuyển vị của dầm và khung**

Nội lực chính trong dầm và khung là mô men uốn và lực cắt. Lực dọc trục và mô men xoắn hoặc không tồn tại hoặc đóng góp rất nhỏ so với chuyển vị ngang và góc xoay. Vì vậy, trong phương trình 13.43 ta có thể bỏ qua các thành phần kéo nén và xoắn khi tính chuyển vị ngang và góc xoay. Như vậy chuyển vị của dầm chịu lực cắt và mô men uốn có dạng

$$D_j = \int \frac{M_{uj}M}{EI} dl + \int \frac{V_{uj}V}{Ga_r} dl \quad (13.46)$$

Hơn nữa, các tiết diện của dầm dùng trong thực tế được thiết kế sao cho biến dạng do trượt không đáng kể và có thể bỏ qua. Nên chuyển vị sẽ là

$$D_j = \int \frac{M_{uj} M}{EI} dl \quad (13.47)$$

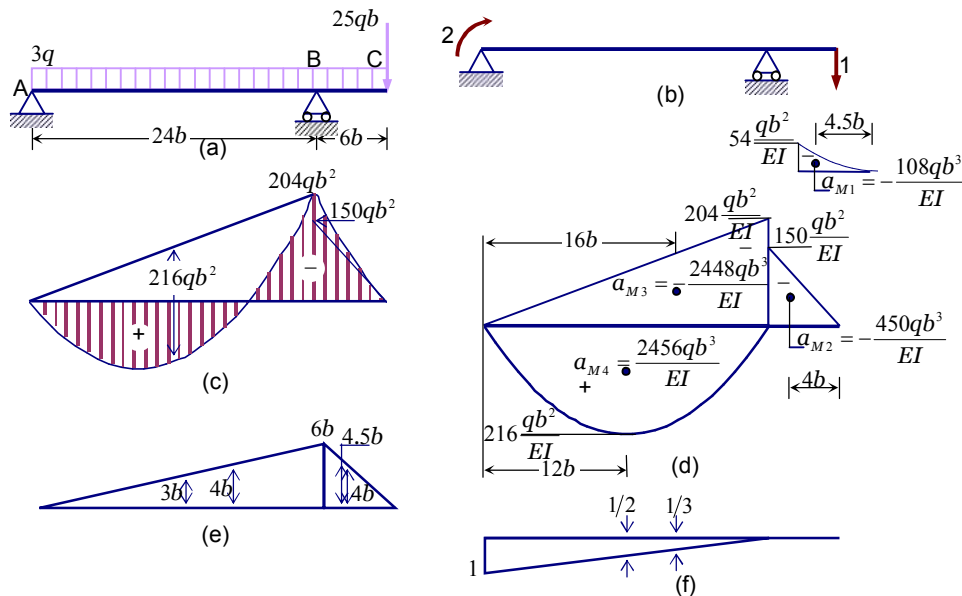
Từ phương trình 13.6 ta có thay đổi độ võng của trục biến dạng của dầm trên một đoạn  $dl$  là  $d\theta = -M / EIdl$ . Thế vào (13.47) ta được

$$D_j = \int M_{uj} d\theta \quad (13.48)$$

Độ võng âm nếu nó có cùng hướng với sự thay đổi góc do mô men dương gây ra. Quy ước dấu của độ võng xem trên hình 13.4b.

Phương trình 13.48 có thể dùng để tìm chuyển vị do các nguyên nhân không phải là ngoại lực gây ra, ví dụ như chênh lệch nhiệt độ của mặt trên và mặt dưới của dầm.

Ví dụ 13.5. Hình 13.8a biểu diễn dầm ABC với một đầu treo tự do. Tìm chuyển vị dọc  $D_1$  tại C và góc xoay  $D_2$  tại A. Dầm có độ cứng uốn không đổi  $EI$ . Chỉ xét biến dạng do uốn.



Hình 13.8

Biểu đồ mô men cho trên hình 13.8c với tung độ vẽ lên mặt chịu kéo. Hình 13.8e và f cho biểu đồ mô men do các lực đ[ư]n vị tại toạ độ 1 và 2. Vì  $EI = \text{const}$  nên ta có thể xác định trọng tâm của biểu đồ M thay vì  $M/EI$ , sau đó lấy giá trị tìm được chia cho  $EI$ . Ta chia biểu đồ M thành các phần để dễ tìm trọng tâm như trên

hình 13.8d. Phần diện tích của biểu đồ dương thì mang dấu dương, và ta chỉ cần tọa độ trọng tâm theo chiều dài của dầm.

Bước tiếp theo xác định tung độ của các biểu đồ mô men  $M_{ij}$  ứng với trọng tâm của từng phần diện tích (xem hình 13.8e và f).

Chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  tính theo 13.32

$$D_j = \sum a_M \bar{M}_{ij}$$

ở đây  $\bar{M}$  là tung độ tại trọng tâm của biểu đồ mô men. Vậy

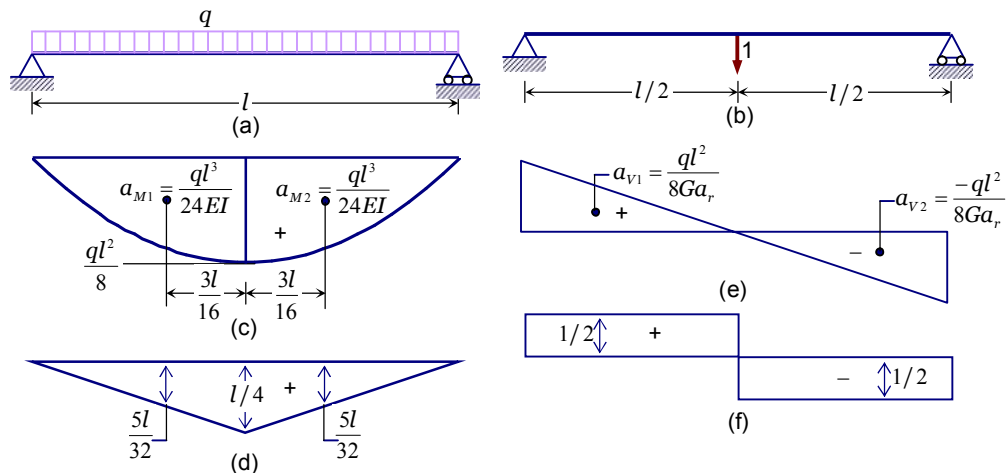
$$D_1 = \frac{qb^4}{EI} (108 \times 4,5 + 450 \times 4 + 2448 \times 4 - 3456 \times 3) = \frac{1710}{EI} qb^4$$

và

$$D_2 = \frac{qb^3}{EI} \left( 2448 \times \frac{1}{3} - 3456 \times \frac{1}{2} \right) = \frac{912}{EI} qb^3$$

Kết quả tính có dấu dương có nghĩa chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  theo hướng của các tọa độ trên hình 13.8b.

Ví dụ 13.6. Tìm tỷ lệ đóng góp của trượt so với đóng góp của mô men uốn lên tổng chuyển vị tại điểm giữa của dầm thép chữ I chịu lực phân bố đều gối tựa đơn giản (Hình 13.9a). Các dữ liệu khác: mô men quán tính chống uốn của dầm là  $I$ , diện tích  $a_r = a_w$  diện tích của cách tiết diện chữ I,  $G/E=0,4$ ; độ dài nhịp  $l$ ; cường độ phân bố lực là  $q$ /đơn vị độ dài.



Hình 13.9

Hình 13.9c và d biểu diễn biểu đồ mô men uốn và lực cắt do tải trọng thực gây nên. Cho lực ảo đơn vị tác động vào tọa độ 1 (hình 13.9b) nơi cần tìm chuyển vị.

Các biểu đồ của  $M_{u1}$  và  $V_{u1}$  cho trên hình 13.9d và f. Ta chia biểu đồ  $M$  và  $V$  là hai phần ứng với hai phần của biểu đồ  $M_{u1}$  và  $V_{u1}$ . Xác định tung độ  $\bar{M}_{u1}$  và  $\bar{V}_{u1}$  ứng với trọng tâm của từng phần biểu đồ. Tổng chuyển vị tại điểm giữa là

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI} dl + \int \frac{V_{u1}V}{Ga_r} dl \quad (13.49)$$

trong đó độ võng do uốn là

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI} dl = \sum a_M \bar{M}_{u1} = 2 \frac{ql^3}{24EI} \frac{5l}{32} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

còn độ võng do lực cắt

$$\int \frac{V_{uj}V}{Ga_r} dl = \sum a_V \bar{V}_{u1} = 2 \frac{ql^2}{8Ga_r} \frac{1}{2} = \frac{ql^2}{8Ga_r}$$

Suy ra

$$\frac{D \text{ do } V}{D \text{ do } M} = \frac{ql^2}{8Ga_r} \frac{384 EI}{5 ql^4} = \frac{48 E}{5 G} \frac{I}{l^2 a_r}$$

Công thức này đúng cho dầm đơn giản tiết diện bất kỳ chịu lực phân bố đều.

Trong trường hợp này ta có  $G=0,4E$  nên

$$\frac{D \text{ do } V}{D \text{ do } M} = \frac{48 E}{5 \cdot 0,4E} \frac{I}{l^2 a_r} = 24 \frac{I}{l^2 a_r} = c \left( \frac{h}{l} \right)^2$$

ở đây  $h$  là chiều cao của tiết diện chữ  $I$  và

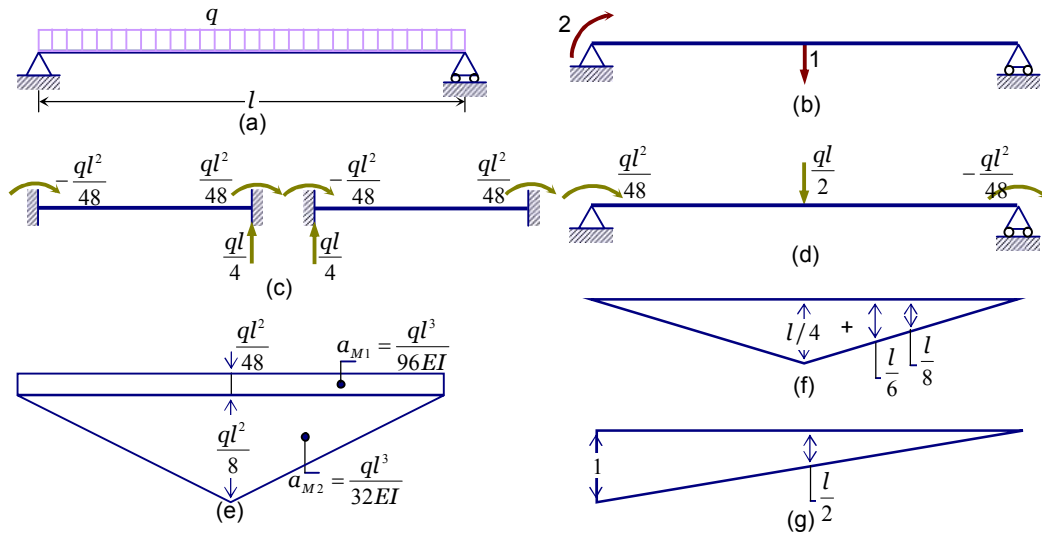
$$c = 24 \frac{I}{h^2 a_w}$$

Ta thấy giá trị  $c$  phụ thuộc vào tỷ lệ của tiết diện, với thép cán nói chung giá trị  $c$  thay đổi từ 7 đến 20. Trong các tài liệu tra cứu ta có thể tìm thấy giá trị  $c$  cho các tiết diện của các loại tiết diện thép cán thường gặp.

Với các thanh chữ  $I$  trên thực tế tỷ lệ  $h/l$  nằm trong khoảng  $1/10$  và  $1/20$ . Dầm đơn giản chịu tải phân bố đều có tiết diện hình chữ nhật với  $G=0,4E$  và  $h/l = 1/5, 1/10$  và  $1/15$ , thì độ võng do lực cắt chiếm 9,6; 1,4 và 1,07% của độ võng do uốn. Nếu là tầm cao như vậy thì tỷ lệ này là 15 đến 25%.

Ví dụ 13.7. Xét dầm đơn giản  $AB$  chịu tải phân bố đều trên hình 13.10a. Xác định độ võng ở giữa dầm và góc xoay tại các gối. Bỏ qua biến dạng trượt.





Hình 13.10

Ta có hệ tọa độ cho các chuyển vị cần tìm như trên hình 13.10b. Hình 13.10c biểu diễn lực đầu phần tử do tải thực gây ra trên kết cấu đã bị hạn chế. Ứng lực này là lực nút tương đương đặt vào kết cấu như trên hình 13.10d. Biểu đồ mô men uốn đối với hệ lực này cho trên hình 13.10e, biểu đồ mô men do lực đơn vị tác dụng vào các tọa độ 1 và 2 vẽ trên hình 13.10f và g.

Từ phương trình 13.46 tính chuyển vị  $D_1$  và  $D_2$  sử dụng phụ lục 6. Ta có

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI} dl = 2 \left( \frac{ql^3}{96EI} \times \frac{l}{8} + \frac{ql^3}{32EI} \times \frac{l}{6} \right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

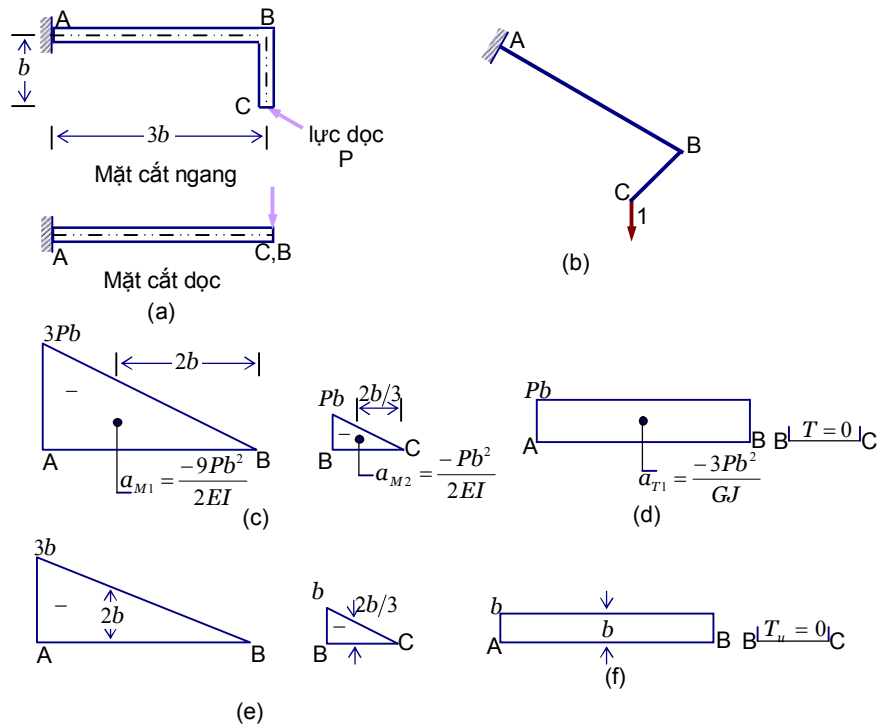
và

$$D_2 = \int \frac{M_{u2}M}{EI} dl = 2 \left( \frac{ql^3}{96EI} + \frac{ql^3}{32EI} \right) \frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI}$$

Các giá trị này giống như giá trị đã cho trong phụ lục 1.

Ví dụ 13.8 Ống ABC như trên hình 13.11a được ngàm một đầu với AB và BC nằm trên mặt phẳng ngang. Một lực thẳng đứng P tác động vào đầu C. Tìm chuyển vị tại C do uốn và xoắn. Ống có tiết diện không đổi. Cho  $G=0,4E$  và  $J=2I$ .

Biểu đồ M và T ứng với tải trọng thực biểu diễn trên hình 13.11c và d với diện tích và trọng tâm cho trên hình vẽ. Lực ảo đặt vào tọa độ 1, là tọa độ thẳng đứng tại C, điểm cần tìm chuyển vị. Biểu đồ của  $M_{u1}$  và  $T_{u1}$  do lực ảo gây nên vẽ trên hình 13.11e và f.



Hình 13.11

Từ phương trình 13.29, chỉ có thành phần uốn và xoắn

$$D_1 = \int \frac{M_{ul} M}{EI} dl + \int \frac{T_{ul} T}{GJ} dl$$

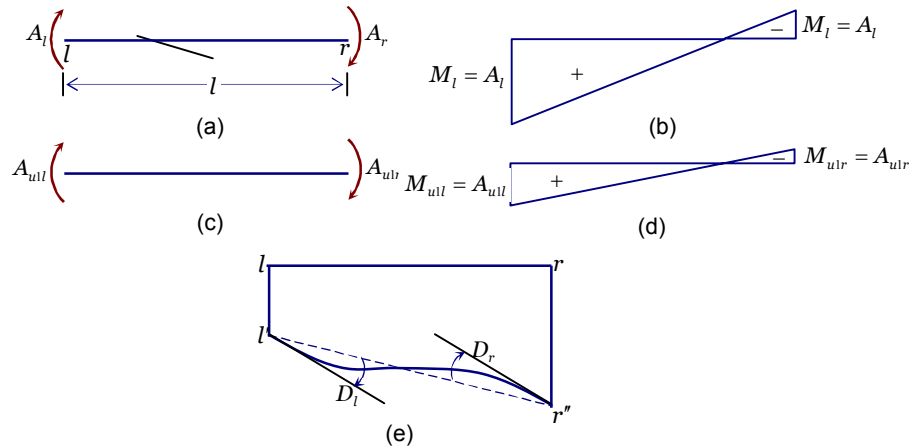
Tính các tích phân theo từng đạo Ab và BC dùng phương trình 13.32 và 13.34 sau đó lấy tổng, ta nhận được

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum a_M \bar{M}_{ul} + \sum a_T \bar{T}_{ul} \\ &= \left( -\frac{4.5Pb^2}{EI} \right) (-2b) + \left( -\frac{0.5Pb^2}{EI} \right) \left( -\frac{2b}{3} \right) + \left( -\frac{3Pb^2}{GJ} \right) (-b) \\ &= \frac{28}{3} \frac{Pb^3}{EI} + \frac{3Pb^3}{GJ} = \frac{Pb^3}{EI} \left( \frac{28}{3} + \frac{3}{0.4 \times 2} \right) = 13,08333 \frac{Pb^3}{EI} \end{aligned}$$

### 13.4.3. Chuyển vị của dầm và khung dùng đại số ma trận

Ở mục 13.4.2 ta thấy khi tải tác động quy về lực tương đương tại nút, chuyển vị tại các nút sẽ giống như khi ta đặt tải thực. Nếu kết cấu chỉ gồm các phần tử thẳng thì lực tương đương sẽ gây ra mô men biến đổi tuyến tính giữa các nút và lực cắt và lực kéo nén là hằng số giữa các nút.

Hình 13.12a biểu diễn phân tử của kết cấu phẳng gồm  $m$  phần tử. Ký hiệu  $A_l$  và  $A_r$  là mô men tại đầu trái và đầu phải của phần tử do tải trọng bất kỳ tác động tại các nút. Ta giả thiết mô men dương nếu quay theo chiều kim đồng hồ. Biểu đồ mô men như trên hình 13.12b.



Hình 13.12

Mô men  $A_{ulj}$  và  $A_{urj}$  do lực ảo tác động vào tọa độ  $j$  chỉ ra trên hình 13.12c, và biểu đồ mô men tương ứng trên hình 13.12d. Nếu chỉ xét biến dạng do uốn, thì từ 13.47 ta xác định chuyển vị cho tất cả các phần tử của kết cấu. Dùng 13.32 để đánh giá tích phân trong 13.47 cho các phần tử trên hình 13.12 hay dùng phụ lục 6 ta có thể chỉ ra phần đóng góp của uốn trong chuyển vị tại nút  $j$

$$\Delta D_j = \int \frac{M_{ul} M}{EI} dl = \frac{l}{6EI} (2A_l A_{ulj} - A_l A_{urj} - A_r A_{ulj} + 2A_r A_{urj})$$

Dưới dạng ma trận

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T [f_M] \{A\} \quad (13.51)$$

ở đây

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} A_{ulj} \\ A_{urj} \end{Bmatrix} \quad (13.52)$$

$$\{A\}_j = \begin{Bmatrix} A_l \\ A_r \end{Bmatrix} \quad (13.53)$$

$$[f_M] = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (13.54)$$

Các số hạng của ma trận  $[f_M]$  là các góc xoay tại đầu dầm  $D_1$  và  $D_r$  so với trục thanh (đường gạch gạch trên hình 13.12e) do các ngẫu lực đơn vị tác động vào một trong các đầu dầm đơn giản (xem Phụ lục 1). Ma trận  $[f_M]$  là ma trận mềm uốn của phần tử.

Ta có thể nhận được phương trình 13.65 bằng phương pháp công ảo. Trong mục 13.2 ta thấy chuyển vị  $D_j$  về mặt giá trị là công của nội lực do lực ảo đơn vị tại nút  $j$  khi dịch chuyển theo chuyển vị do tải trọng thực gây ra. Cấu hình sau biến dạng trên hình 13.12e có thể tạo ra bằng cách dịch chuyển phần tử như một vật rắn tuyệt đối đến vị trí đường gạch gạch  $l'$ , sau đó tác động hai mô men uốn  $M_1$  và  $M_r$  tại hai đầu của thanh  $l'$  gối tựa đơn giản. Nhân hai ma trận 13.53 và 13.54 ta được góc xoay tại hai đầu  $D_1$  và  $D_2$  so với thanh chéo.

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = [f_M]\{A\} \quad (13.55)$$

Tích  $\{A_u\}_j^T \{D\}$  cho ta công của hai mô men  $A_{uj}$  và  $A_{urj}$  khi di chuyển dọc theo  $D_1$  và  $D_2$ . Vậy

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T \{D\} \quad (13.56)$$

Thế  $\{D\}$  từ 13.55 ta nhận được 13.51.

Chuyển vị tại  $j$  có thể xác định bằng cách lấy tổng trên tất cả các phần tử

$$D_j = \sum_{i=1}^m \{A_u\}_{ij}^T [f_M]_{ji} \{A\}_i \quad (13.57)$$

Phương trình này có thể chuyển về dạng

$$D_j = \{A_u\}_{j \ 2m \times 1}^T [f_M]_{2m \times 2m} \{A\}_{2m \times 1} \quad (13.58)$$

trong đó

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} \{A_u\}_{1j} \\ \{A_u\}_{2j} \\ \Lambda \\ \{A_u\}_{mj} \end{Bmatrix} \quad (13.59)$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{A\}_1 \\ \{A\}_2 \\ \Lambda \\ \{A\}_m \end{Bmatrix} \quad (13.60)$$

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_M]_1 & & & \\ & [f_M]_2 & & \\ & & \Lambda & \\ & & & [f_M]_m \end{bmatrix} \quad (13.61)$$

Ma trận  $[f_M]$  chứa các ma trận độ mềm của từng phần tử và được gọi là ma trận độ mềm của kết cấu không ghép nối.

Phương trình 13.57 có lợi thế hơn phương trình 13.58 khi sử dụng máy tính vì các ma trận chiếm ít bộ nhớ hơn ( $4xm$  số hạng so với  $2m \times 2m$  số hạng).

Nếu ta cần tính chuyển vị tại  $n$  tọa độ thì lực ảo đơn vị được đặt vào từng tọa độ riêng biệt và nhận được một tập hợp các mô men đầu phần tử. Các mô men này thiết lập thành ma trận

$$[A_u]_{2m \times 2m} = \begin{bmatrix} \{A_u\}_{11} & \{A_u\}_{12} & \{A_u\}_{1n} \\ \{A_u\}_{21} & \{A_u\}_{22} & \{A_u\}_{2n} \\ & & \Lambda \\ \{A_u\}_{m1} & \{A_u\}_{m2} & \{A_u\}_{mn} \end{bmatrix} \quad (13.62)$$

ở đây chỉ số thứ nhất chỉ số hiệu phần tử, chỉ số thứ hai chỉ số hiệu của tọa độ đặt lực ảo.

Nếu ta cần tính  $n$  chuyển vị do  $p$  trường hợp tải gây ra thì các mô men đầu phần tử được xác định cho từng phần tử với từng trường hợp tải. Các mô men này tạo thành ma trận

$$[A]_{2m \times p} = \begin{bmatrix} \{A\}_{11} & \{A\}_{12} & \{A\}_{1p} \\ \{A\}_{21} & \{A\}_{22} & \{A\}_{2p} \\ & & \Lambda \\ \{A\}_{m1} & \{A\}_{m2} & \{A\}_{mp} \end{bmatrix} \quad (13.63)$$

chỉ số thứ nhất ký hiệu phần tử, chỉ số thứ hai ký hiệu trường hợp tải.

Ta viết dưới dạng ma trận phương trình tương tự như phương trình 13.44

$$[D]_{n \times p} = [A_u]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [A]_{2m \times p} \quad (13.64)$$

Các ký hiệu được dùng là

$D$  – phần đóng góp do biến dạng uốn vào chuyển vị tại một tọa độ

$\{A_u\}$  – ma trận con kích cỡ  $2 \times 1$ , số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra.

$[f_M]_i$  = ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ  $i$  (phương trình 13.61)

$$= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\{A\}$  – ma trận con kích cỡ  $2 \times 1$ , số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do một trường hợp tải thực gây ra

Với giả thiết các phần tử thẳng và tải trọng chỉ đặt tại nút thì lực dọc trục, lực cắt và mô men xoắn sẽ không đổi dọc theo phần tử. Nếu xem xét sự đóng góp của các chuyển vị này ta có thể đưa ra một phương trình tổng quát giống như phương trình 13.58 cho trường hợp chuyển vị của dàn khi chịu lực dọc trục. Vậy

$$[D]_{n \times p} = [A_u]_{m \times n}^T [f_M]_{m \times m} [A]_{m \times p} \quad (13.65)$$

Các ký hiệu được dùng là

$D$  – phần đóng góp của lực dọc trục, lực cắt và mô men xoắn vào chuyển vị tại một tọa độ

$A_u$  – lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra, số hạng tại mỗi cột của ma trận  $[A_u]$  là lực do tải ảo đơn vị tại một tọa độ

$f_M$  = độ mềm của phần,

với lực dọc trục  $f_M = \frac{l}{EI}$ , lực cắt  $f_V = \frac{l}{Ga_r}$ , mô men xoắn  $f_T = \frac{l}{GJ}$

$A$  – lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử do tải trọng thực gây ra, số hạng tại mỗi cột của ma trận  $[A]$  ứng với một trường hợp tải ảo

$n$  - số tọa độ mà tại đó ta cần tính chuyển vị

$m$  - số phần tử

$p$  - số trường hợp tải.

So sánh các phương trình 13.64 và 13.65, ta thấy phần đóng góp của biến dạng uốn, dọc trục, trượt và xoắn có thể biểu diễn qua các phương trình tương tự nhau. Vậy tổng chuyển vị có thể nhận được bằng phép tổng

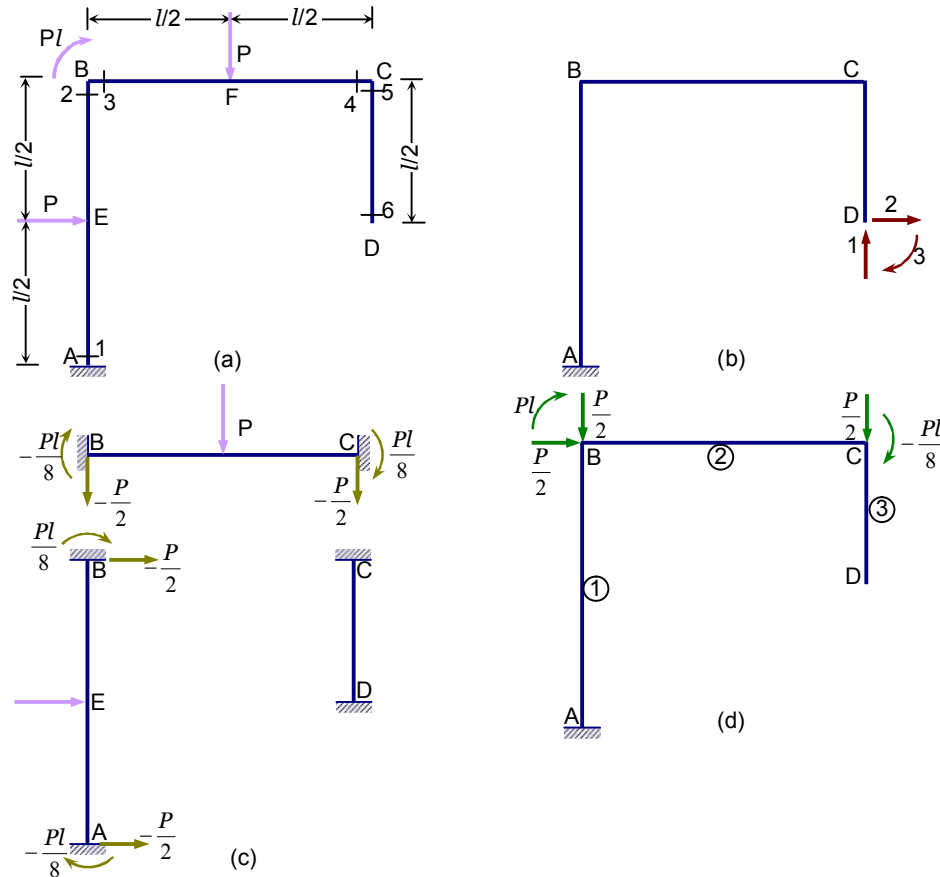
$$[D] = \sum_{s=1}^4 [A_u]_{n \times s}^T [f_M]_s [A]_s \quad (13.66)$$

ở đây  $s$  đại diện cho bốn loại biến dạng. Kích cỡ của các ma trận trong phương trình này sẽ giống như trong 13.64 đối với biến dạng uốn và như trong 13.65 cho

các trường hợp khác. Các ký hiệu  $A_s$  và  $A$  là đáp ứng hai nội lực suy rộng, là lực hay ngẫu lực.

Ví dụ 13.9. Khung như trên hình 13.13a làm từ các dầm chữ I có các đặc trưng hình học như sau:  $a=1,34 \times 10^{-4} l^2$ ,  $a_r=a_{cánh}=0,65 \times 10^{-4} l^2$ ,  $I=5,30 \times 10^{-8} l^4$  và  $G=0,4E$ .

Xác định sự đóng góp của uốn, lực dọc trục và biến dạng trượt vào chuyển vị tại ba tọa độ như trên hình 13.13b.



Hình 13.13

Bước thứ nhất ta thay tải trọng thực bằng các lực tương đương tại các nút A, B, C và D. Bằng cách đặt hạn chế tại các nút (hình 13.13c) ta xác định các lực đầu phần tử theo phụ lục 2 và đặt vào các nút như các lực tương đương (hình 13.13d). Sau đó ta tiến hành tìm chuyển vị do các lực tương đương này.

a) Biến dạng uốn. ta xác định mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị tác động tại từng tọa độ riêng biệt gây ra và do tải trọng nút tương đương trên hình 13.13d. Các mô men đầu phần tử này tập hợp trong ma trận  $[A_u]$  và  $[A]$

$$[A_u]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} l & -0,5l & -1 \\ -l & -0,5l & 1 \\ l & 0,5l & -1 \\ 0 & -0,5l & 1 \\ 0 & 0,5l & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A]_{6 \times 1} = Pl \begin{bmatrix} -1,875 \\ 1,375 \\ -0,375 \\ -0,25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chú ý các mô men đầu phần tử được liệt kê theo đúng thứ tự và cùng quy ước dấu ở cả hai ma trận trên. Lần lượt ta liên kê mô men bên trái đến mô men bên phải của từng phần tử. Mô men dương là mô men theo chiều kim đồng hồ.

Ma trận đồ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{6 \times 6} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.78 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng uốn vào chuyển vị tại các tọa độ

$$[D]_{3 \times 1} = \frac{Pl^3}{6EI} \begin{Bmatrix} -10,375 \\ 0,125 \\ 10,50/l \end{Bmatrix} = \frac{P}{EI} \begin{Bmatrix} -0,3263 \\ 0,0039 \\ 0,3301/l \end{Bmatrix}$$

b) Biến dạng do lực dọc trục. Lực dọc trục của phần tử do tải tác động tập hợp trong ma trận  $[A_u]$  và  $[A]$  dưới đây, quy ước lực kéo là lực dương

$$[A_u]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A]_{3 \times 1} = P \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận đồ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{3 \times 3} = \frac{l}{Ea} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.65 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng dọc trục vào chuyển vị tại các tọa độ



$$[D]_{3 \times 1} = \frac{Pl}{Ea} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El} \begin{Bmatrix} -0,0075 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) Biến dạng trượt. Lực cắt của phần tử do tải tác động tập hợp trong ma trận  $[A_u]$  và  $[A]$  dưới đây

$$[A_u]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [A]_{3 \times 1} = P \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ma trận độ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{3 \times 3} = \frac{l}{Ea} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Thế vào phương trình 13.79 ta tìm được phần đóng góp của biến dạng trượt vào chuyển vị tại các tọa độ

$$[D]_{3 \times 1} = \frac{Pl}{Ga_r} \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El} \begin{Bmatrix} -0,0192 \\ 0,0192 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ta thấy rõ ràng phần đóng góp của biến dạng uốn lớn hơn hẳn so với biến dạng do lực dọc trục và lực cắt. Chính vì vậy người ta thường bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng trượt.

### 13.6 Ma trận độ mềm của kết cấu tổng thể

Ma trận độ mềm có thể thiết lập cho từng phần tử của kết cấu sử dụng phương trình (13.64). Các phần tử của ma trận độ mềm là chuyển vị tại tọa độ do lực đơn vị tác động riêng biệt tại từng tọa độ. Do vậy tải trọng thực và tải trọng ảo sẽ như nhau ta ký hiệu là  $[A]=[A_u]$  và phương trình (13.64) trở thành

$$[f] = \sum_{s=1}^4 [A_u]_s^T [f_M]_s [A_u]_s \quad (13.67)$$

ở đây  $[f]$  là ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể,  $[f_M]$  là ma trận độ cứng của kết cấu chưa ghép nối (xem công thức 13.61) và chỉ số  $s$  ký hiệu 4 nguyên nhân gây ra biến dạng gồm: uốn, dọc trục, trượt(cắt) và xoắn. nếu ta chỉ xét biến dạng do uốn thì (13.67) thành

$$[f] = [A_u]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [A_u]_{2m \times n} \quad (13.68)$$

Các ký hiệu được dùng là

$f$  – phần tử của ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

$\{A_u\}$  – ma trận con kích cỡ  $2 \times 1$ , số hàng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra.

$[f_M]_i$  = ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ  $i$  (phương trình 12.75)

$$= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$m$  - số phần tử;  $n$  - số tọa độ

Phương trình (13.67) còn có thể viết dưới dạng

$$[f] = \sum_i^m \sum_{s=1}^4 [A_u]_{is}^T [f_M]_{is} [A_u]_{is} \quad (13.69)$$

ở đây  $\{A_u\}_{is}$  và  $[f_M]_{is}$  – là các ma trận của phần tử thứ  $i$

Khi đó phương trình (13.68) cho trường hợp chỉ kể đến biến dạng do uốn có dạng

$$[f] = \sum_i^m [A_u]_{i \ 2 \times n}^T [f_M]_{i \ 2 \times 2} [A_u]_{i \ 2 \times n} \quad (13.70)$$

### 13.7 Ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

#### 13.7.1. Chuyển hệ tọa độ của chuyển vị và lực

Xuất phát từ nguyên lý công ngoại lực bằng công nội lực, trường hợp kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có được định lý Betti

Định lý Betti phát biểu, Khi kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có quan hệ

$$\sum_{i=1}^n F_i D_{iQ} = \sum_{i=n+1}^m Q_i D_{iF} \quad (13.71)$$

Có nghĩa tổng các tích của hệ lực  $F$  và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực  $Q$  gây ra bằng tổng các tích của hệ lực  $Q$  và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực  $F$  gây ra.

Ta dùng định lý Betti để chuyển hệ lực bất kỳ tác động lên kết cấu về lực tương đương tại tọa độ (độc lập và là các bậc tự do của hệ).

Xét ví dụ khung trên Hình 13.13a. Khi không kể đến lực dọc trục hệ có 3 bậc tự do (Hình 13.13b). Nếu ta biết ma trận độ mềm  $[f]$  của hệ thì chuyển vị độc lập  $\{D\}$  do lực ngoài  $\{F\}$  gây ra có thể xác định bằng phương trình  $\{D\}=[f]\{F\}$ , lực và chuyển vị đều cho tại ba tọa độ trên.

Nếu hệ chịu tác động của hệ lực bất kỳ, bước đầu tiên ta phải đưa lực về lực tương đương tại nút. Các lực đầu phần tử biểu diễn trên Hình 13.13d được công lại cho ta lực tương đương  $\{F^*\}$  như trên Hình 13.13e. Các lực  $\{F^*\}$  tác động tại các tọa độ này  $\{D^*\}$ , các tọa độ này không độc lập và liên hệ với  $\{D\}$  bằng

$$\{D^*\}=[C]\{D\} \quad (13.72)$$

ma trận  $[C]$  xác định từ hình học của khung. Phần tử của ma trận  $C$  là giá trị của chuyển vị  $D^*$  ứng với dịch chuyển đơn vị tại một trong các tọa độ  $D$ .

$$\{D^*\}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{D\}_{3 \times 1} \quad (13.73)$$

Sử dụng định lý Betti cho hai hệ lực ta được

$$\sum_{i=1}^3 F_i D_i = \sum_{j=1}^6 F_j^* D_j^*$$

Thế  $D^*$  vào phương trình trên và đưa về dạng ma trận ta có

$$\{D\}^T \{F\} = \{D\}^T [C]^T \{F^*\} \quad (13.74)$$

từ đây ta có

$$\{F\} = [C]^T \{F^*\} \quad (13.75)$$

### 13.7.2. Chuyển hệ tọa độ của ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Xét hệ tọa độ trên kết cấu tuyến tính. Xác định vị trí và hướng của lực ngoài  $F$  và chuyển vị  $D$ , xác định ma trận  $[S]$  và  $[f]$ . Trong hệ tọa độ khác ta có các đại lượng tương ứng  $F^*$ ,  $D^*$ ,  $[S^*]$  và  $[f^*]$ . Nếu lực và chuyển vị liên hệ qua

$$\{D\}=[H]\{D^*\} \text{ hoặc } \{F^*\}=[H]^T \{F\} \quad (13.76)$$

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ cứng như sau

$$[S^*]=[H]^T [S] [H] \quad (13.77)$$

Khi lực tại hai hệ tọa độ có liên hệ

$$\{F\} = [L]\{F^*\} \text{ hoặc } \{D^*\} = [L]^T\{D\} \quad (13.78)$$

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ mềm như sau

$$[f^*] = [L]^T [f] [L] \quad (13.79)$$

Các ma trận chuyển đổi [H] và [L] được thiết lập từ quan hệ hình học giữa D và D\*. Hai hệ lực F và F\* tương đương theo nghĩa hệ {F} và {F\*} gây ra chuyển vị {D} và {D} như nhau. Hệ lực {F} và {F\*} thực hiện cùng một công trên các chuyển vị {D} và {D\*}.

### 12.7.3. Ma trận độ cứng của kết cấu tổng thể

Ma trận độ cứng của kết cấu có thể thiết lập bằng cách ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử tạo thành.

Xét kết cấu trên Hình 13.13a trong hệ tọa độ 13.13b. Công ngoại lực bằng năng lượng biến dạng của kết cấu vì

$$W = U = \frac{1}{2} \{D\}^T [S] \{D\} \quad (13.80)$$

ở đây [S] là ma trận độ cứng ứng với tọa độ trên Hình 13.13b.

Năng lượng biến dạng cũng có thể nhận được bằng tổng năng lượng biến dạng của từng phần tử riêng biệt. Tổng này bằng với công của lực đầu phần tử thực hiện trên chuyển vị {D\*} tại tọa độ trên Hình 13.13c.

$$U = \frac{1}{2} \{D^*\}^T [S_M] \{D^*\} \quad (13.81)$$

ở đây [S<sub>M</sub>] là ma trận độ cứng của kết cấu chưa lắp ghép

$$[S_M] = \begin{bmatrix} [S_M]_1 & & & \\ & [S_M]_2 & & \\ & & \Lambda & \\ & & & [S_M]_m \end{bmatrix} \quad (13.82)$$

[S<sub>M</sub>]<sub>i</sub> là ma trận độ cứng của phần tử thứ i ứng với tọa độ {D\*} tại đầu phần tử, m là số hiệu của phần tử.

Chuyển vị {D\*} và {D} liên hệ theo hình học bằng {D\*} = [C]{D}, thế vào phương trình (13.82) ta nhận được

$$U = \frac{1}{2} \{D\}^T [C]^T [S_M] [C] \{D^*\} \quad (13.83)$$

So sánh (12.94) với (12.95) ta thấy

$$[S]_{n \times n} = [C]_{p \times n}^T [S_M]_{p \times p} [C]_{p \times n} \quad (13.84)$$

n số chuyển vị  $\{D\}$  và p số chuyển vị  $\{D^*\}$ . Để thuận tiện ta chuyển (12.98) về dạng

$$[S] = \sum_i^m [C]_i^T [S_M]_i [C]_i \quad (13.85)$$

### Kết luận chương 13

Khái niệm công ảo rất quan trọng trong cơ học kết cấu, rất tiện lợi khi biểu diễn công ảo của ứng suất bất kỳ dưới dạng thích hợp khi đưa bài toán về dạng ma trận. Khi đó ta có thể cùng một lúc xem xét các thành phần của thế năng biến dạng do lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và xoắn gây nên.

Khái niệm năng lượng bù và công bù không có ý nghĩa vật lý nhưng giá trị số của nó dễ dàng biểu diễn các phương trình năng lượng.

Nguyên lý công khả dĩ liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích của kết cấu bất kỳ (tuyến tính hay phi tuyến). Ta dùng lực ảo hay chuyển vị ảo và sử dụng đẳng thức giữa công bù của ngoại lực ảo với năng lượng bù của nội lực ảo thực hiện trên chuyển vị thực. Tương tự ta có thể dùng đẳng thức giữa công ảo của ngoại lực và nội lực thực hiện trên chuyển vị ảo. Các định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị là những công thức tiện dụng. Chú ý định lý thứ hai chỉ áp dụng cho kết cấu tuyến tính

Phương pháp công ảo là phương pháp tổng quát. Có thể sử dụng cho kết cấu phẳng và không gian, siêu tĩnh và tĩnh định. Tuy nhiên, đầu tiên ta phải xác định ứng lực cho mọi trường hợp kết cấu. Cơ sở của phương pháp công ảo là quan hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích.

Tính toán chuyển vị bằng phương pháp công ảo gồm xác định nội lực do tải trọng thực và tải trọng ảo đơn vị tác dụng tại từng điểm (tọa độ) nơi ta cần tìm chuyển vị. Nếu cần tính một vài chuyển vị thì công việc tính toán trở nên khá nặng nề, do vậy cần hệ thống qui trình tính toán lại dưới dạng ma trận và lập chương trình tính toán.

Khi ta áp dụng phương pháp công ảo, nói chung bốn loại ứng lực là lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và mô men xoắn đều tham gia đóng góp vào chuyển vị. Đối với hệ dàn chỉ có lực dọc trục gây ra chuyển vị. Biểu thức của năng lượng là tích phân của tích hai hàm.

Khi áp dụng phương pháp công ảo vào hệ khung với tải trọng đặt vào một điểm bất kỳ của phần tử, nên ta quy về các tải nút tương đương (theo nghĩa chuyển vị do chúng gây ra tại các điểm cần tính như tải thực).

Quy trình tính chuyển vị cho hệ khung bằng phương pháp công ảo rất rõ ràng. Trong hệ khung biến dạng do uốn là phần đóng góp chính trong chuyển vị, do vậy các biến dạng do các lực khác gây ra thường được bỏ qua. Tuy nhiên ta cũng nên kiểm tra xem chúng có thực sự nhỏ hay không. Như trong trường hợp này, các công thức được viết dưới dạng ma trận tiện dụng khi sử dụng chương trình tính để tính chuyển vị tại một số điểm và cho nhiều trường hợp tải.

Các ví dụ trong chương này chỉ trình bày cho các phần tử thẳng với tiết diện không đổi. Tuy nhiên, phương pháp công ảo có thể áp dụng cho kết cấu với các phần tử cong và có tiết diện thay đổi. Một trong những cách gần đúng là ta chia kết cấu thực thành một loạt phần tử thẳng với tiết diện không đổi.

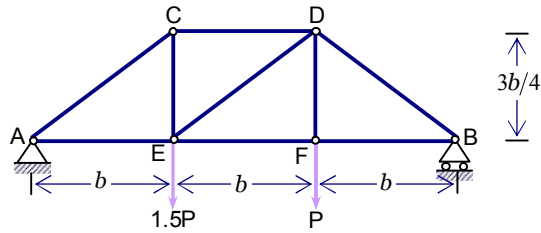
Cuối cùng cần nhấn mạnh lại là phương pháp công ảo cho phép xem xét cả bốn loại nội lực trong khi các phương pháp khác chỉ xem xét một trong số bốn loại.

**Bài tập chương 13**

Bài 13.1. Cho dàn phẳng trên hình vẽ tìm

- Chuyển vị thẳng đứng tại E chịu tải như đã vẽ trên hình;
- Chuyển vị tại E khi dàn không chịu và phần tử CD co lại một đoạn  $\Delta = b/2000$ ;

Các phần tử có cùng độ cứng chống kéo  $Ea = \text{const}$ .

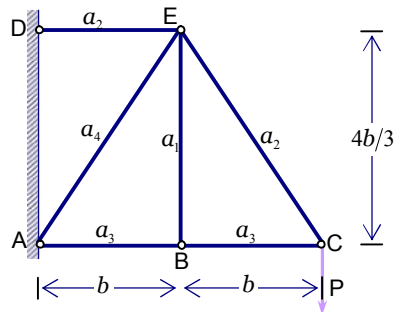


Bài 13.1.

Bài 13.2. Cho dàn phẳng như trên hình vẽ tìm

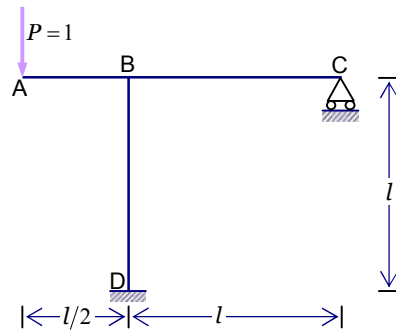
- Chuyển vị tại C chịu tải trọng P như đã vẽ trên hình;
- Chuyển vị thẳng đứng tại C khi dàn không chịu và hai phần tử DE và EC đều co lại một đoạn  $\Delta = 0.3\text{cm}$ ;

Các phần tử có tiết diện như trên hình vẽ. Giả thiết modun đàn hồi  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .



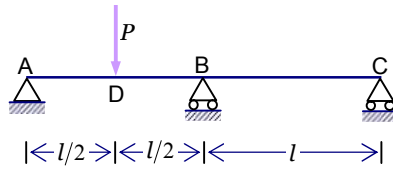
Bài 13.2

Bài 13.3. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm A của khung trên hình vẽ, chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng EI không đổi trên toàn bộ khung.



Bài 13.3

Bài 13.4. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm D và góc xoay tại điểm A của dầm trên hình vẽ, chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng  $EI$  không đổi trên toàn bộ khung.



Bài 13.4



# CHƯƠNG 14

## Phương pháp phần tử hữu hạn

### – Sơ lược

---

#### 14.1 Giới thiệu

Kết cấu là một hệ cơ học có vô số bậc tự do và theo lý thuyết cơ học môi trường liên tục, chuyển động của nó được biểu diễn qua trường chuyển vị  $u(x_1, x_2, x_3, t)$ ;  $v(x_1, x_2, x_3, t)$ ;  $w(x_1, x_2, x_3, t)$  thoả mãn các điều kiện trên biên. Để tìm trường chuyển vị này đòi hỏi phải giải hệ phương trình đạo hàm riêng rất phức tạp, ngay cả trong trường hợp biên đơn giản. Có rất ít trường hợp mà ta có thể nhận được lời giải giải tích của các phương trình chuyển động ở dạng phương trình đạo hàm riêng. Đối với kết cấu dạng khung, dàn, việc thiết lập phương trình chuyển động cho trường chuyển vị nói trên là không thực tế. Với các kết cấu phức tạp, người ta phải có cách tiếp cận riêng, chủ yếu là tìm cách rời rạc hoá chúng và đưa chúng về những hệ đơn giản hơn, có hữu hạn bậc tự do. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một phương pháp cổ điển, đơn giản nhưng vẫn còn đang được sử dụng hiện nay để giải các phương trình đạo hàm riêng.

#### ***Rời rạc hoá bằng phương pháp Rayleigh-Ritz***

Một trong những phương pháp rời rạc hoá được áp dụng rộng rãi là phương pháp Rayleigh-Ritz. Phương pháp này sử dụng nguyên lý biến phân của chuyển dịch để đưa bài toán có vô số bậc tự do về bài toán với  $n$  hữu hạn bậc tự do mô tả bằng hệ phương trình vi phân thường tương tự như hệ rời rạc. Việc rời rạc hoá bắt đầu từ việc chọn cách xấp xỉ gần đúng hàm chuyển vị, để có thể viết  $D$ , dưới dạng

$$\{D(x_1, x_2, x_3, t)\} = [L(x_1, x_2, x_3)]\{q(t)\}, \quad (14.1)$$

trong đó  $\{q(t)\} = \{q_1 \dots q_n\}^T$  - vec tơ các tọa độ suy rộng,  $[L]$  là ma trận nội suy chuyển vị kích cỡ  $(3 \times n)$

$$L_j(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} f_{1j}(x_1, x_2, x_3) \wedge f_{1n}(x_1, x_2, x_3) \\ f_{2j}(x_1, x_2, x_3) \wedge f_{2n}(x_1, x_2, x_3) \\ f_{3j}(x_1, x_2, x_3) \wedge f_{3n}(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

Áp dụng phép biến phân ảo cho các tọa độ suy rộng  $q$ , ta có phương trình chuyển động dưới dạng rời rạc hoá

$$[S]\{q\} + [M]\{\ddot{q}\} = \{p(t)\}, \quad (14.2)$$

trong đó

$$[M] = \int_V \rho [L]^T [L] dV - \text{ma trận khối lượng đối xứng và xác định dương}$$

$$[S] = \int_V [B]^T [d][B] dV - \text{ma trận độ cứng đối xứng và xác định dương}$$

$$\{p\} = \int_{S_e} [L]^T \{\bar{t}\} dA + \int_V [L]^T \{\bar{X}\} dV - \text{vec tơ ngoại lực}$$

$[\bar{L}]$  - ma trận nội suy biến dạng, tính được từ ma trận nội suy chuyển vị qua phép vi phân  $[B] = [\partial][L]$  với  $[\partial]$  là toán tử vi phân có dạng

$$[\partial]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad (14.3)$$

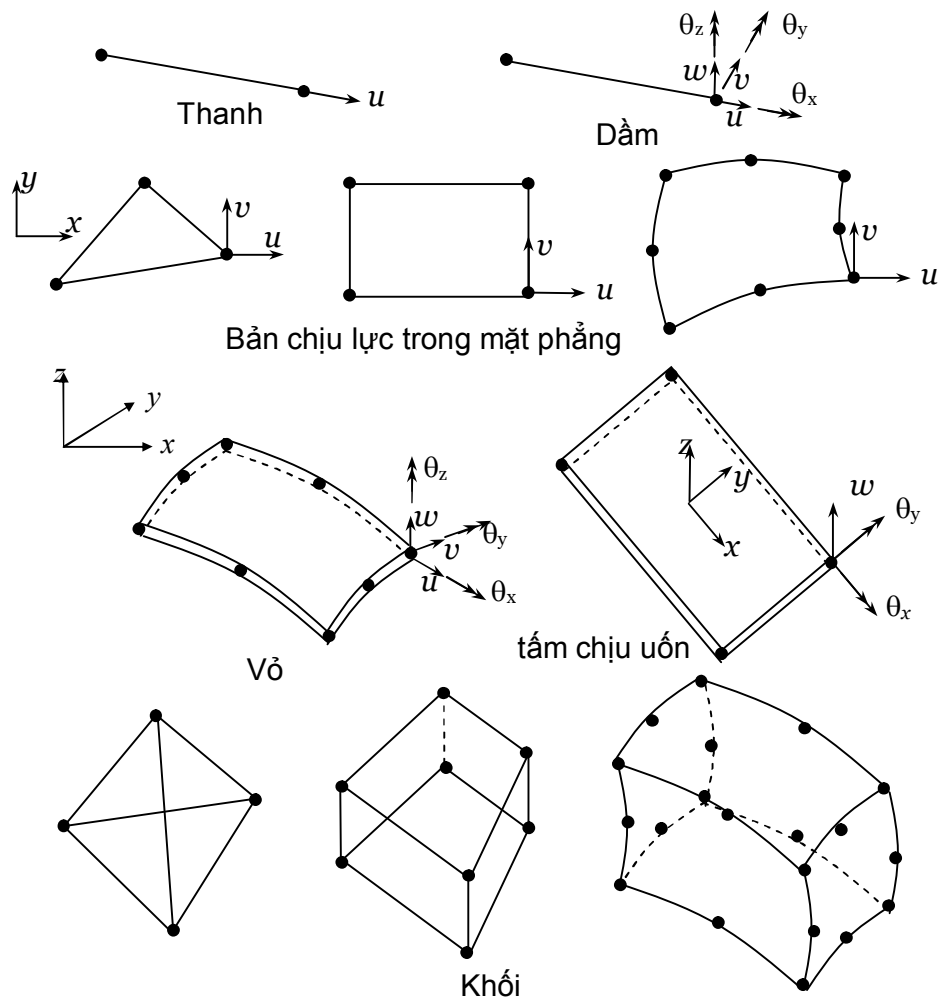
$[d]$ - ma trận quan hệ ứng suất và biến dạng Hook

Như vậy, một hệ liên tục có vô số bậc tự do đã được đưa về hệ hữu hạn bậc tự do, mô tả bằng phương trình vi phân thường (14.2), có thể giải bằng các công cụ đã biết. Tuy vậy, phương pháp này mới chỉ đưa ra ý tưởng rời rạc ở dạng toán học thuần túy, mà không biết được sai số là bao nhiêu. Việc phát triển phương pháp này cho các bài toán của cơ học kết cấu đã dẫn đến sự ra đời của một

phương pháp mới - phương pháp phần tử hữu hạn, một công cụ mà cho đến nay vẫn chưa có sự cạnh tranh nào đáng kể.

## 14.2 Phương pháp phần tử hữu hạn – cơ sở

Phương pháp phần tử hữu hạn được xem như sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz. Tư tưởng chủ yếu của nó là việc chia vật thể biến dạng hay kết cấu thành một số hữu hạn các phần tử có hình học đơn giản (Hình 14.1) với trường chuyển vị giả thiết là đã biết.



Hình 14.1 Ví dụ về các loại phần tử và bậc tự do tại nút.

Đưa vật thể liên tục (kết cấu) với bậc tự do là vô cùng về hệ hữu hạn bậc tự do với các ẩn số là các chuyển vị tại nút. Trong khuôn khổ của cơ học kết cấu ta

có thể nói phương pháp phần tử hữu hạn là một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Hệ khung, dàn hay lưới ngang ta sử dụng phần tử là các thanh nối tại các nút ta có thể gọi thanh là phần tử một chiều. Phần tử hữu hạn hai chiều và ba chiều dùng cho kết cấu tường ngăn, vỏ và các kết cấu có hình khối như móng máy. Phần tử hữu hạn có thể có nhiều loại hình dạng với các nút ở góc hay ở cạnh. Các chuyển vị ẩn có thể là dịch chuyển thẳng hay các góc xoay.

Chuyển vị trong phần tử được biểu diễn qua các chuyển vị nút. Sử dụng trường chuyển vị giả định nào đó (ví dụ là hàm đa thức của các tọa độ  $x$  và  $y$ ). Biến dạng xác định bằng phép vi phân các chuyển vị và sau đó ứng suất xác định từ biến dạng bằng định luật Hooke. Chính việc sử dụng trường chuyển vị giả định là sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz.

Phương pháp phần tử hữu hạn được phát triển do sự phát triển của máy tính. Việc tính toán tiến hành cho các ma trận tổng hợp của tất cả các loại phần tử ta sử dụng khi mô hình hóa. Các ma trận tổng thể này được ghép nối từ các ma trận của từng phần tử. Ma trận phần tử gồm có:

- Ma trận độ cứng liên hệ giữa chuyển vị nút với nội lực tại nút
- Ma trận ứng suất liên hệ giữa ứng suất (nội lực) với chuyển vị tạo nút
- Vec tơ lực đầu phần tử khi tải trọng tác động không vào nút hay khi có dẫn nở nhiệt.

### 14.3 Áp dụng năm bước tính toán của phương pháp chuyển vị

Ta xét hệ khung phẳng như các ví dụ trong chương 12. Nếu ta bỏ qua biến dạng dọc trục chỉ xét đến uốn trong mặt phẳng và giả thiết trục  $x$  trùng với trục thanh, khi đó mỗi phần tử có hai nút với hai bậc tự do tại mỗi nút. Các bậc tự do này là độ võng  $v$  theo phương  $y$  và góc quay  $\theta_y = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Mục đích xác định nội lực tại mặt cắt hai đầu thanh  $\{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}$ . Ngoại lực tại các nút gồm có vec tơ lực tại nút  $\{F_y, M_z\}_i$  và lực phân bố theo đơn vị dài trên thanh, có thể xem xét cả tải do thay đổi nhiệt độ. Áp dụng năm bước của phương pháp chuyển vị

Bước 1. Xác định các bậc tự do bằng các chuyển vị  $v$  và  $\theta_y$  tại mỗi nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính là nội lực tại hai mặt cắt hai đầu thanh  $\{A\}_m = \{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}_m$ .

Bước 2. Với ngoại lực tác dụng thiết lập vec tơ tải hạn chế  $\{F\}$ , đồng thời xác định  $\{A_r\}_m = \{Q_{r1}, M_{r1}, Q_{r2}, M_{r2}\}_m$  là nội lực khi chuyển vị bị hạn chế. Ở đây

$$\{F\} = \{F_a\} + \{F_b\} \quad (14.4)$$

trong đó  $\{F_a\}$  là hợp lực của ngoại lực nhưng ngược dấu còn  $\{F_b\}$  là lực phần tử quy về nút ví dụ như lực phân bố trên thanh, lực tập trung không đặt vào điểm nút của phần tử hay tải nhiệt.

Bước 3. Thiết lập ma trận độ cứng  $[S]$  bằng cách ghép nối tất cả các ma trận độ cứng phần tử. Đồng thời thiết lập ma trận  $[A_u]_m = \{Q_{u1}, M_{u1}, Q_{u2}, M_{u2}\}_m$  là nội lực do các chuyển vị đơn vị tại từng tọa độ một.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng

$$[S]\{D\} = \{-F\} \quad (14.5)$$

để tìm vec tơ  $\{D\}$  có kích cỡ là  $2xm$ .

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ

$$\{A\}_m = \{A_r\}_m + [A_u]_{m \times m} \{D\}_m \quad (14.6)$$

#### 14.4 Phương trình đàn hồi cơ sở

Theo định luật Hooke ta có quan hệ ứng suất và biến dạng

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} \quad (14.7)$$

trong đó  $\{\sigma\}$  và  $\{\varepsilon\}$  là các vec tơ ứng suất và biến dạng suy rộng tương ứng, và ma trận  $[d]$  là ma trận vuông đối xứng gọi là ma trận hệ số đàn hồi.

Các thành phần biến dạng xác định từ chuyển vị bằng phương trình suy rộng sau đây

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{f\} \quad (14.8)$$

trong đó  $[\partial]$  là ma trận các toán tử vi phân và vec tơ  $\{f\}$  là vec tơ các hàm mô tả trường chuyển vị.

*Ví dụ*

- Trạng thái ứng suất đơn ta có

$$\{\sigma\} \equiv \sigma, \{\varepsilon\} \equiv \varepsilon, [d] \equiv E, \{f\} \equiv u, [\partial] \equiv d/dx$$

- Kéo, nén thanh thẳng ta có

$$\{\sigma\} \equiv N, \{\varepsilon\} \equiv \varepsilon, [d] \equiv EA, \{f\} \equiv u, [\partial] \equiv d/dx$$

- Thanh chịu uốn thuần túy ta có

$$\{\sigma\} \equiv M, \{\varepsilon\} \equiv \varepsilon, [d] \equiv EI, \{f\} \equiv v, [\partial] \equiv d^2/dx^2$$

#### 14.5 Nội suy chuyển vị

Để thiết lập ma trận phần tử, ta cần các hàm nội suy để xác định dạng biến dạng của phần tử. Chuyển vị của một điểm bất kì trong phần tử liên hệ với chuyển vị nút bằng công thức

$$\{f\} = [L]\{D^*\} \quad (14.9)$$

trong đó

$\{f\}$  vec tơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kì

$[L]$  ma trận các hàm của tọa độ xác định vị trí của điểm trong phần tử

Hàm nội suy của trường chuyển vị  $[L]$  còn được gọi là hàm dạng được chọn để thoả mãn các yêu cầu:

1. Nội suy biểu diễn bằng các hàm liên tục từng đoạn. Để đơn giản, trường chuyển vị trong mỗi phần tử biểu diễn bằng tổ hợp một số các hàm đã chọn sao cho thể hiện được ứng xử của phần tử kết cấu trong kết cấu tổng thể. Nói chung hàm nội suy có dạng đa thức.

2. Các hàm này được chọn sao cho các tọa độ suy rộng của phương pháp Rayleigh là các giá trị địa phương của trường chuyển vị trong kết cấu (Hình 14.1), hay nói một cách ngắn gọn, tọa độ suy rộng là chuyển vị tại các nút của phần tử.

Nếu cả hai điều kiện này được thoả mãn chặt chẽ thì gần đúng nhận được sẽ là khả dĩ động học theo quan điểm của phương pháp Rayleigh-Ritz. Ngoài ra, trường chuyển vị là khả vi trên toàn bộ miền của từng phần tử, và các tọa độ suy rộng có cùng giá trị tại nơi giao nhau của các phần tử đảm bảo tính liên tục của trường ứng suất ở mức độ tổng thể.

Ví dụ

Trường hợp kéo, nén đúng tâm ta có  $\{f\} \equiv u$ ,  $\{D^*\} = \{u_1, u_2\}$  là dịch chuyển thẳng tại hai đầu nút. Ma trận hàm nội suy  $[L]$  gồm hai hàm nội suy

$$[L] = [1 - \xi, \xi]$$

trong đó  $\xi = x/l$  và  $l$  là độ dài thanh

Trường hợp thanh chịu uốn ta có  $\{f\} \equiv u$  và vec tơ chuyển vị nút

$$\{D^*\} = \left\{ u_1, \left( \frac{dv}{dx} \right)_1, u_2, \left( \frac{dv}{dx} \right)_2 \right\}$$

Ma trận hàm nội suy  $[L]$  gồm bốn hàm nội suy

$$[L] = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, l\xi[\xi - 1]^2, \xi^2(3 - \xi), l\xi^2(\xi - 1)]$$

trong đó  $\xi = x/l$  và  $l$  là độ dài thanh

#### 14.6 Ma trận độ cứng và ma trận ứng suất phần tử

Ta có vec tơ chuyển vị tại một điểm bất kì trong phần tử biểu diễn qua chuyển vị nút như (14.9)

$$\{f\} = [L]\{D^*\}$$

Bằng phép vi phân gần đúng ta có biểu thức của biến dạng

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= [\partial]\{f\} = [\partial][L][D^*] \\ \{\varepsilon\} &= [B][D^*]\end{aligned}\tag{14.10}$$

trong đó

$$[B] = [\partial][L]\tag{14.11}$$

Khi đó định luật Hooke có dạng

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [d]\{\varepsilon\} = [d][B][D^*] \\ \{\sigma\} &= [\sigma_u][D^*]\end{aligned}\tag{14.12}$$

trong đó  $[\sigma_u]$  là ma trận ứng suất của phần tử

$$[\sigma_u] = [d][B]\tag{14.13}$$

Các phần tử của cột thứ  $j$  nào đó trong ma trận  $[\sigma_u]$  là các thành phần ứng suất tại điểm nào đó khi cho chuyển vị  $D_j^* = 1$ .

Phần tử  $S_{ij}^*$  của ma trận độ cứng là lực tại tọa độ  $i$  ứng với chuyển vị đơn vị tại  $j$ .  $S_{ij}^*$  có thể xác định theo định lí chuyển vị đơn vị trong chương 13:

$$S_{ij}^* = \int_V \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon_{ui}\} dV\tag{14.14}$$

ở đây  $\{\sigma_{uj}\}$  là ứng suất thực tại điểm nào đó do dịch chuyển đơn vị tại  $j$ ,  $\{\varepsilon_{ui}\}$  là biến dạng ảo tại chính điểm đó ứng với dịch chuyển ảo đơn vị tại nút  $i$ . Khi xét phần tử hai chiều ta lấy tích phân trên toàn bộ diện tích. Khi xét bài toán thanh ta lấy tích phân trên toàn bộ chiều dài. Như vậy ứng suất và biến dạng trong tích phân này là các ứng suất và biến dạng mở rộng.

Biểu diễn qua hàm dạng ta có phần tử của ma trận độ cứng



$$S_{ij}^* = \int_V \{B\}_j^T [d] \{B\}_i dV \quad (14.15)$$

trong đó  $\{B\}_j$  và  $\{B\}_i$  là cột thứ  $i$  và thứ  $j$  của ma trận

$$[S^*] = \int_V [B]^T [d][B] dV \quad (14.16)$$

#### 14.7 Véc tơ lực phần tử

Xét cân bằng tại nút  $j$  của kết cấu

$$F_{bj} = - \int_V \{B\}_j^T \{p\} dV \quad (14.17)$$

trong đó  $\{p\}$  biểu diễn cường độ ngoại lực phân bố trên phần tử

Vec tơ phần tử có dạng

$$\{F_b\} = - \int_V [L]^T \{p\} dV \quad (14.18)$$

Véc tơ này là véc tơ lực phân bố tương ứng vì nó sử dụng hàm dạng  $[L]$  như khi thiết lập ma trận độ cứng.

Trường hợp biến dạng do sự thay đổi nhiệt ta có

$$\{\sigma_r\} = -[d]\{\varepsilon_0\} \quad (14.19)$$

trong đó

$$\varepsilon_0 = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14.20)$$

Khi đó lực phần tử do dẫn nở nhiệt

$$\{F_b^*\} = - \int_V [B]^T [d][\varepsilon_0] dV \quad (14.21)$$

### 14.8 Phần tử dầm không gian

Hiện nay, trong tính toán kết cấu hệ khung, giàn không gian, phương pháp phần tử hữu hạn chiếm vị trí hàng đầu, trong đó phần tử dầm ba chiều đóng vai trò chủ đạo. Chính vì vậy, chúng ta sẽ mô tả phương pháp phần tử hữu hạn một cách cô đọng trên phần tử dầm.

Phần tử dầm không gian trong phương pháp phần tử hữu hạn được xây dựng dựa trên cơ sở chọn các hàm xấp xỉ là các đa thức Hermit. Những đa thức này thực chất là các hàm ảnh hưởng tĩnh học đối với các chuyển vị dọc trục, xoắn và uốn. Chúng có thể nhận được như lời giải của bài toán biến dạng tĩnh dựa trên các giả thiết sau:

- Các đầu phần tử ngàm chặt với các nút trên lưới phần tử hữu hạn.
- Các đặc trưng cơ lý của phần tử không thay đổi dọc theo chiều dài của nó.

Trong trường hợp chung cho phần tử dầm không gian, chuyển vị tại các nút bao gồm:

$$\{D\}_e^T = \{D_1^e, \dots, D_{12}^e\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_1, w'_1, v'_1, u_2, v_2, w_2, \theta_2, w'_2, v'_2\}, \quad (14.22)$$

trong đó  $u, v, w$  là các chuyển dịch thẳng,  $\theta$  là góc xoắn,  $w', v'$  là các góc xoay quang trục  $y$  và trục  $z$  tương ứng. Trường chuyển vị  $\{D\}_i^T = \{u(x), \theta(x), v(x), w(x)\}$  biểu diễn qua các chuyển vị nút  $\{D\}_o^T$  nhờ các hàm nội suy (hàm dạng)

$$\{D\}_i^T = [L(x)]\{D\}_e, \quad (14.23)$$

trong đó  $[L(x)]$  là ma trận nội suy chuyển vị

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 & \rho_6 & 0 & \rho_8 & 0 & 0 & 0 & \rho_{12} \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & \rho_5 & 0 & 0 & 0 & \rho_9 & 0 & \rho_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (14.24)$$

và hàm  $\rho_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, 12$  được gọi là hàm dạng, chúng là các đa thức

$$\rho_j(x) = \sum_i C_{ij} x^i. \quad (14.25)$$

Ma trận độ cứng nhận được từ tích phân (14.16)

$$S_e = \int_0^L [B^T(x)] [d][B(x)] dx, ,$$

trong đó

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} \rho'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho'_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho'_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \rho''_2 & 0 & 0 & 0 & \rho''_6 & 0 & \rho''_8 & 0 & 0 & 0 & \rho''_{12} \\ 0 & 0 & \rho''_3 & 0 & \rho''_5 & 0 & 0 & 0 & \rho''_9 & 0 & \rho''_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \rho'_j = \frac{\partial \rho_j}{\partial x}; \\ \rho''_j = \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial x^2} \end{matrix}, \quad (14.26)$$

và

$$[d] = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_y \end{pmatrix}. \quad (14.27)$$

trong đó

A - diện tích mặt cắt,

E - modun đàn hồi,

G - môđun trượt và

$J_x$  - moment quán tính độ cứng,

$J_y, J_z$  - các moment quán tính chống uốn trong các mặt phẳng xz và xy tương ứng.

Để nhận được các số hạng của ma trận độ cứng S ta tính tích  $[B]^T(x)[d][B]$  rồi lắp vào tích phân trong (14.7) ta nhận được các số hạng  $S_{ij} \neq 0$  có dạng

$$S_{ii} = \int_0^L EA \rho_i'^2 dx \quad i = 1,7 \quad , \quad S_{ii} = \int_0^L GJ \rho_i'^2 dx \quad i = 4,10 \quad ,$$



nhau để có được ma trận độ cứng của toàn hệ. Như vậy cốt lõi của việc xây dựng ma trận độ cứng là lựa chọn ma trận hàm dạng  $[L(x)]$ .

Trường hợp phần tử dầm không gian hàm dạng là các hàm Hermit:

$$\begin{aligned} \rho_1(x) = \rho_4(x) = \rho_1^o(x) &\equiv 1 - \frac{x}{L}; \quad \rho_7(x) = \rho_{10}(x) = \rho_2^o(x) \equiv \frac{x}{L}; \\ \rho_2(x) = -\rho_3(x) = \rho_3^o(x) &\equiv 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}; \\ \rho_5(x) = \rho_6(x) = \rho_4^o(x) &\equiv x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2; \\ \rho_8(x) = -\rho_9(x) = \rho_5^o(x) &\equiv 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}; \\ \rho_{11}(x) = \rho_{12}(x) = \rho_6^o(x) &\equiv \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right); \end{aligned} \quad (14.30)$$

các hàm  $\rho_i(x)$  là các hàm biểu diễn đường chuyển dịch của dầm với hai đầu ngàm cứng. Chúng thực chất là nghiệm của các bài toán biên sau đây:

1.  $u''(x) = 0$ ;  $u(0) = u_1$ ;  $u(L) = u_2$
2.  $\theta''(x) = 0$ ;  $\theta(0) = \theta_1$ ;  $\theta(L) = \theta_2$
3.  $\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = 0$ ;  $v(0) = v_1$ ;  $v'(0) = v'_1$ ;  $v(L) = v_2$ ;  $v'(L) = v'_2$
4.  $\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = 0$ ;  $w(0) = -w_1$ ;  $w'(0) = w'_1$ ;  $w(L) = -w_2$ ;  $w'(L) = -w'_2$  (14.31)

Nếu đem biểu diễn các hàm dạng dưới dạng hàm bậc ba như sau

$$\rho_j(x) = C_{0j} + C_{1j}x + C_{2j}x^2 + C_{3j}x^3 \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (14.32)$$

thì các hệ số  $C_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$  cho trong bảng 14.1.

Lấy đạo hàm của các hàm dạng  $\rho_j(x)$  để thiết lập các ma trận  $H$  ta có

$$\rho'_1(x) = \rho'_4(x) = -\rho'_7(x) = -\rho'_{10}(x) = \rho_1^o(x) \equiv -\frac{1}{L};$$

$$\rho_2''(x) = -\rho_3''(x) = -\rho_8''(x) = \rho_9''(x) = \rho_3''^o(x) \equiv \frac{6}{L^2} \left( \frac{2x}{L} - 1 \right);$$

$$\rho_5''(x) = \rho_6''(x) = \rho_4''^o(x) \equiv \frac{2}{L} \left( \frac{3x}{L} - 2 \right);$$

$$\rho_{11}(x) = \rho_{12}''(x) = \rho_6''^o(x) \equiv \frac{2}{L} \left( \frac{3x}{L} - 1 \right).$$

Bảng 14.1. Hệ số  $C_{ij}$  đối với phần tử dầm không gian

| j  | $C_{0j}$ | $C_{1j}$       | $C_{2j}$         | $C_{3j}$         |
|----|----------|----------------|------------------|------------------|
| 1  | 1        | $-\frac{1}{L}$ | 0                | 0                |
| 2  | 1        | 0              | $-\frac{3}{L^2}$ | $\frac{2}{L^3}$  |
| 3  | -1       | 0              | $\frac{3}{L^2}$  | $-\frac{2}{L^3}$ |
| 4  | 1        | $-\frac{1}{L}$ | 0                | 0                |
| 5  | 0        | 1              | $-\frac{2}{L}$   | $\frac{1}{L^2}$  |
| 6  | 0        | 1              | $-\frac{2}{L}$   | $\frac{1}{L^2}$  |
| 7  | 0        | $\frac{1}{L}$  | 0                | 0                |
| 8  | 0        | 0              | $\frac{3}{L^2}$  | $-\frac{2}{L^3}$ |
| 9  | 0        | 0              | $-\frac{3}{L^2}$ | $\frac{2}{L^3}$  |
| 10 | 0        | $\frac{1}{L}$  | 0                | 0                |
| 11 | 0        | 0              | $-\frac{1}{L}$   | $\frac{1}{L^2}$  |
| 12 | 0        | 0              | $-\frac{1}{L}$   | $\frac{1}{L^2}$  |

Đặt các biểu thức này vào để tính các tích phân (14.9) ta thiết lập được ma trận độ cứng của phần tử dầm cổ điển có dạng ở dưới đây.

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} \\ -\frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{L} & 0 & -\frac{6EJ_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{L} \end{bmatrix}$$

Dựa trên quy trình này ta có thể chọn hàm dạng cũng sẽ là các hàm đa thức bậc, nhưng các hệ số  $C_{ij}$  sẽ là hàm của các tham số thiết kế tương ứng tùy thuộc vào các giả thiết đưa ra để mô tả các khuyết tật trong kết cấu. Đưa ra các mô hình cụ thể mô tả khuyết tật và tiến hành tìm hàm dạng tương ứng ta có thể xây dựng được các phần tử dầm cải biên mô tả hư hỏng trong kết cấu.

#### Kết luận chương 14

Chương 14 giới thiệu phương pháp phần tử hữu hạn như một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Sử dụng các hàm dạng như trong phương pháp Rayleigh-Ritz ta đưa bài toán vô số bậc tự do về bài toán hữu hạn bậc tự do và thiết lập được các ma trận phần tử.

Phương pháp phần tử hữu hạn thông dụng để mô hình hoá kết cấu công trình trong cơ học kết cấu được tiến hành theo các bước như sau:

1. Chia kết cấu thành các phần tử bằng một lưới gồm các nút đóng vai trò liên kết giữa các phần tử với nhau trong một không gian tổng thể chọn sẵn. Mỗi phần tử được xác định bằng các nút cố định trong một hệ tọa độ địa phương gắn với phần tử đó.
2. Định nghĩa các chuyển vị nút trong hệ tọa độ địa phương cũng như trong hệ tọa độ tổng thể và các liên kết biên giàn buộc lên các chuyển vị nút này.
3. Biểu diễn trường chuyển vị của phần tử như một vật rắn biến dạng thông qua các chuyển vị nút trong hệ tọa độ địa phương và sử dụng biểu diễn này cùng với các nguyên lý, phương trình của cơ học xây dựng các ma trận độ cứng, khối lượng và vec tơ tải trọng nút cho từng phần tử.
4. Ghép nối, liên kết các ma trận, vec tơ chuyển vị, lực nút,... của phần tử thành các ma trận và vec tơ tương ứng của cả kết cấu.

Áp dụng các điều kiện biên vào các đặc trưng vừa xây dựng được ta sẽ được các ma trận  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[S]$ , các vec tơ  $\{D\}$ ,  $\{P\}$  và hệ phương trình

$$[M]\{\dot{D}\} + [C]\{D\} + [S]\{D\} = \{P\},$$

trong đó

$\{D\} = \{D(t)\}$  - vec tơ chuyển vị nút,

$\{P(t)\}$  - vec tơ lực ngoài đã đưa về nút,

$[M]$  - ma trận khối lượng,

$[C]$  - ma trận hệ số cản,

$[S]$  - ma trận độ cứng.

Quy trình này được áp dụng phổ biến trong các phần mềm phân tích kết cấu hiện có như

– SAP2000



- ANSYS
- Abaqus
- SAMCEF
- NASTRAN v.v.

# PHỤ LỤC

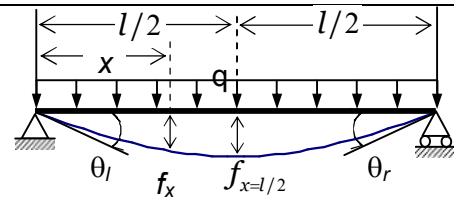
## PHỤ LỤC 1.

### Dịch chuyển của các phần tử thanh thẳng

Thanh có độ cứng uốn là  $EI$  và độ cứng xoắn là  $GJ$ . Chiều dương của dịch chuyển hướng xuống, chiều dương của góc xoay theo chiều kim đồng hồ. Bỏ qua biến dạng trượt

$$f_x = \frac{qx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3);$$

$$f_{x=l/2} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}; \quad \theta_l = -\theta_r = \frac{ql^3}{24EI}$$

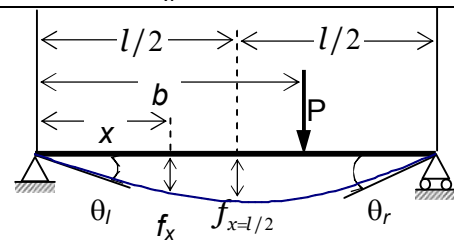


$$f_x = \begin{cases} \frac{P(l-b)x}{6EI} (2lb - b^2 - x^2) & x \leq b \\ \frac{Pb(l-x)}{6EI} (2lx - x^2 - b^2) & x \geq b \end{cases}$$

$$\theta_l = \frac{Pb(l-b)}{6EI} (2l-b); \quad \theta_r = \frac{Pb}{6EI} (l^2 - b^2);$$

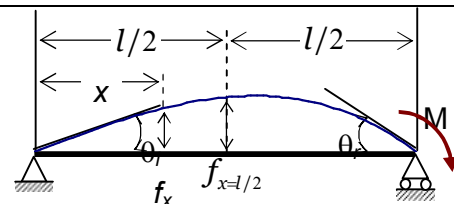
$$b = \frac{l}{2} \Rightarrow \theta_l = -\theta_r = \frac{Pl^2}{16EI};$$

$$f_{x=l/2} = \frac{Pl^3}{48EI}$$



$$f_x = \frac{Mx}{6EI} \left( \frac{x^2}{l} - l \right); \quad f_{x=l/2} = -\frac{Ml^2}{16EI};$$

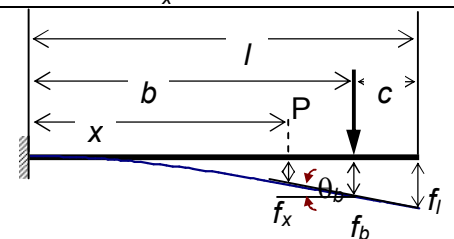
$$\theta_l = -\frac{Ml}{6EI}; \quad \theta_r = \frac{Ml}{3EI}$$



$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI} \left( 3 - \frac{x}{b} \right) \quad 0 \leq x \leq b;$$

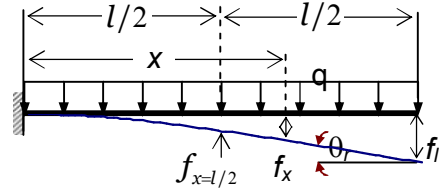
$$f_b = \frac{Pb^3}{2EI}; \quad \theta_b = \frac{Pb^2}{2EI};$$

$$f_x = f_b + \theta_b(l-x) \quad b \leq x \leq l; \quad f_l = f_b + \theta_b c$$



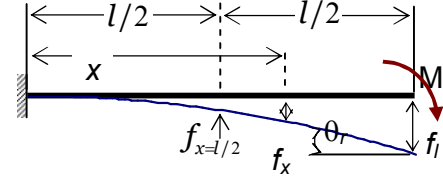
$$f_x = \frac{ql^4}{24EI} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4 - 1 + 4\frac{x}{l} \right]$$

$$f_l = \frac{ql^4}{8EI}; f_{l/2} = \frac{17ql^4}{384EI}; \theta_r = \frac{ql^3}{6EI};$$



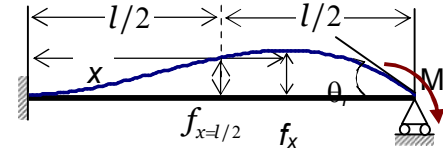
$$f_x = \frac{Mx^2}{2EI}; f_l = \frac{Ml^2}{2EI};$$

$$f_{l/2} = \frac{Ml^2}{8EI}; \theta_r = \frac{Ml}{EI};$$



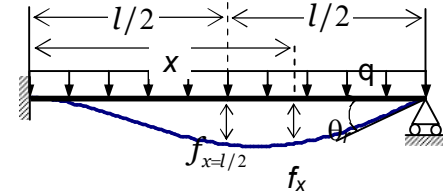
$$f_x = \frac{Mx^2}{4EI} \left( \frac{x}{l} - 1 \right); f_{x=l/2} = -\frac{Ml^2}{32EI};$$

$$\theta_r = \frac{Ml}{4EI}$$



$$f_x = \frac{ql^2x^2}{48EI} \left( 3 - 5\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$f_{x=l/2} = -\frac{ql^4}{192EI}; \theta_r = -\frac{ql^3}{48EI}$$



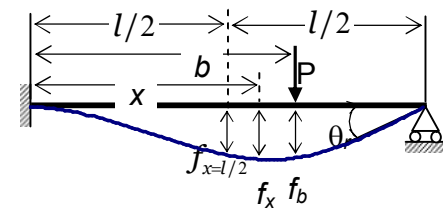
$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI} \left[ \left(3 - \frac{x}{b}\right) - \frac{b}{2l} \left(3 - \frac{b}{l}\right) \left(3 - \frac{x}{l}\right) \right]$$

$$0 \leq x \leq b$$

$$f_b = \frac{Pb^3}{6EI} \left( 2 - \frac{3b}{2l} + \frac{b^2}{2l^2} \right); \theta_r = \frac{-Pb^2}{4EI} \left( 1 - \frac{b}{l} \right);$$

$$f_x = \frac{Pb^2}{6EI} \left[ 3x - b - \frac{x^2}{2l} \left( 3 - \frac{b}{l} \right) \left( 3 - \frac{x}{l} \right) \right]$$

$$b \leq x \leq l$$



$$f_\psi = \frac{ql^4\beta^2\psi}{24EI} (2 - \beta^2 - 2\psi^2) \quad \psi \leq (1 - \beta);$$

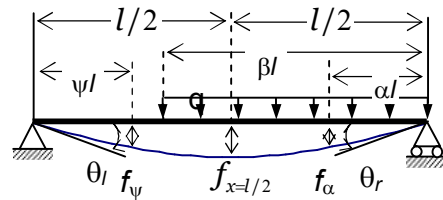
$$f_\alpha = -\frac{ql^4\alpha}{24EI} [2\beta(2 - \beta)\alpha^2 - \alpha^3 + \beta^2(\beta - 2)^2];$$

$$\alpha \leq \beta$$

$$f_\beta = \frac{ql^4\beta^3}{24EI} (1 - \beta)(4 - 3\beta);$$

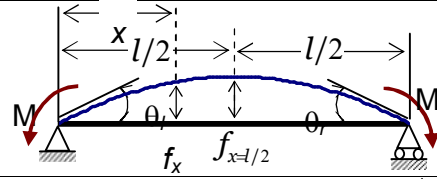
$$f_{\beta/2} = \frac{ql^4\beta^3}{384EI} (32 - 39\beta + 12\beta^2);$$

$$\theta_r = \frac{-ql^3\beta^2}{24EI} (\beta - 2)^2; \theta_l = \frac{ql^3\beta^2}{24EI} (2 - \beta^2);$$



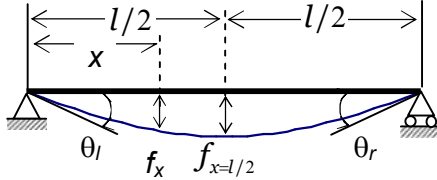
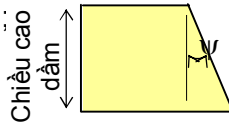
$$f_x = -\frac{Mx(l-x)}{2EI}; \quad f_{x=l/2} = -\frac{Ml^2}{8EI};$$

$$\theta_l = -\theta_r = -\frac{Ml}{2EI};$$



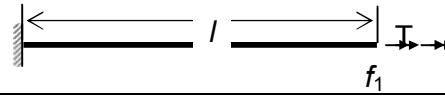
$$f_x = \frac{\psi x(l-x)}{2}; \quad f_{x=l/2} = \frac{\psi l^2}{8};$$

$$\theta_l = -\theta_r = \frac{\psi l}{2};$$



$\psi$  - độ dẫn nở nhiệt theo chiều cao dầm

$$f_1 = \frac{Tl}{GJ}$$



## PHỤ LỤC 2.

### Lực đầu phần tử của các phần tử thanh thẳng

---

Trong bảng cho lực đầu phần tử của dầm có độ cứng uốn và độ cứng xoắn không đổi. Quy ước dấu lực dương hướng lên trên, moment dương theo chiều kim đồng hồ. Khi sử dụng trong phương pháp chuyển vị ta sẽ lấy dấu theo hệ tọa độ đã chọn.

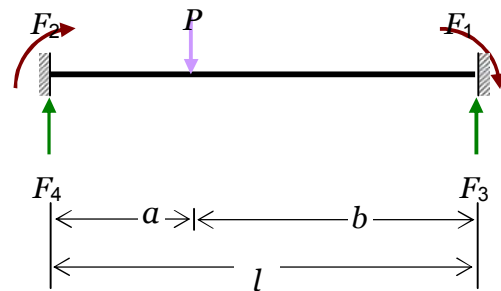
$$F_1 = \frac{Pa^2b}{l^2}; \quad F_2 = \frac{Pab^2}{l^2};$$

$$F_3 = \frac{P}{2} \left[ \frac{a}{l} + \frac{ab}{l^3}(a-b) \right];$$

$$F_4 = \frac{P}{2} \left[ \frac{b}{l} + \frac{ab}{l^3}(b-a) \right];$$

Khi  $a = b = \frac{l}{2}$ ; thì

$$F_1 = -F_2 = \frac{Pl}{8}; \quad F_3 = F_4 = \frac{P}{2};$$



$$F_1 = \frac{qc}{12l^2} [12a^2b + c^2(l-3a)];$$

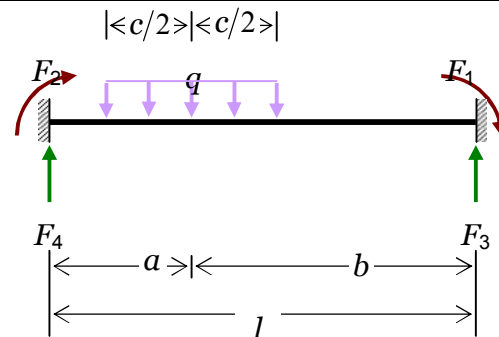
$$F_2 = -\frac{qc}{12l^2} [12ab^2 + c^2(l-3b)];$$

$$F_3 = \frac{qca}{l} + \frac{F_1 + F_2}{l};$$

$$F_4 = \frac{qcb}{l} - \frac{F_1 + F_2}{l};$$

Khi  $a = b = \frac{l}{2}$ ;  $c = l$  thì

$$F_1 = -F_2 = \frac{ql^2}{12}; \quad F_3 = F_4 = \frac{ql}{2};$$



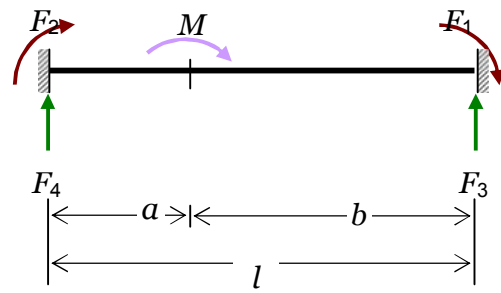
$$F_1 = \frac{Ma}{l} \left( 2 - \frac{3a}{l} \right);$$

$$F_2 = \frac{Mb}{l} \left( 2 - \frac{3b}{l} \right);$$

$$F_3 = -F_4 = \frac{6Mab}{l^3};$$

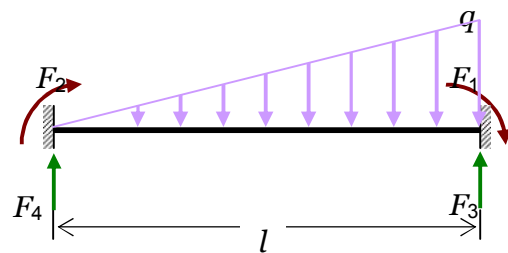
Khi  $a = b = \frac{l}{2}$ ; thì

$$F_1 = F_2 = \frac{M}{4}; \quad F_3 = -F_4 = \frac{3M}{2l};$$

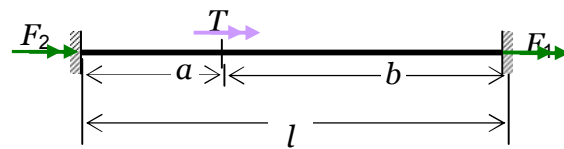


$$F_1 = \frac{ql^2}{20}; \quad F_2 = -\frac{ql^2}{30};$$

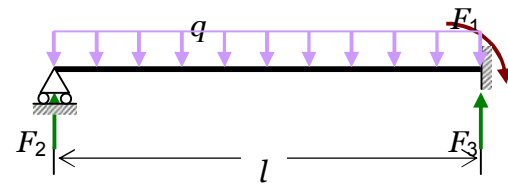
$$F_3 = \frac{7ql}{20}; \quad F_4 = \frac{3ql}{20};$$



$$F_1 = -\frac{Ta}{l}; \quad F_2 = -\frac{Tb}{l};$$



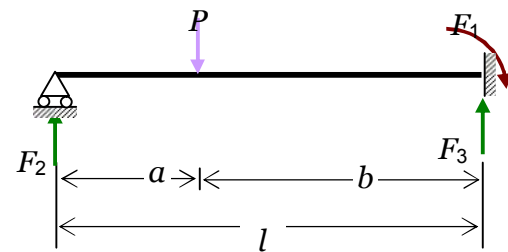
$$F_1 = \frac{ql^2}{8}; \quad F_2 = \frac{3ql}{8}; \quad F_3 = \frac{5ql}{8};$$



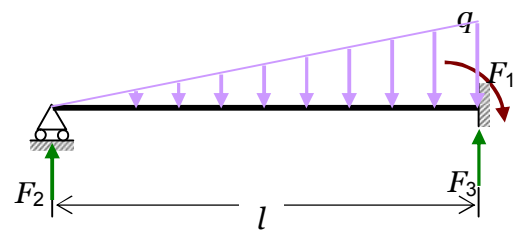
$$F_1 = \frac{Pab}{l^2} \left( a + \frac{b}{2} \right);$$

$$F_2 = P \left[ \frac{b}{l} - \frac{ab}{l^3} \left( a + \frac{b}{2} \right) \right];$$

$$F_3 = P \left[ \frac{a}{l} + \frac{ab}{l^3} \left( a + \frac{b}{2} \right) \right];$$



$$F_1 = \frac{ql^2}{15}; \quad F_2 = \frac{ql}{10}; \quad F_3 = \frac{2ql}{5};$$

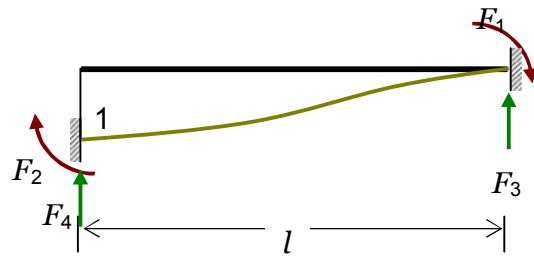


### PHỤ LỤC 3.

## Lực đầu phân tử do chuyển vị tại đầu nút của thanh thẳng

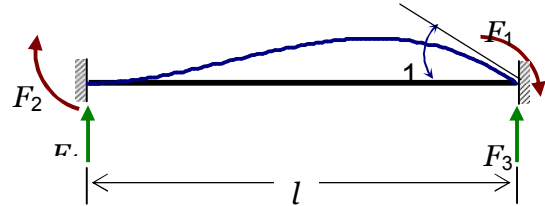
Trogn bảng cho lực đầu phân tử tại đầu dầm khi cho trước chuyển vị là đơn vị. Quy ước dấu lực dương hướng lên, momnet dương quay theo chiều kim đồng hồ. Hiệu ứng của lực cắt bỏ qua. Bỏ qua uốn do lực dọc trục. Độ cứng của dầm không đổi

$$F_1 = F_2 = \frac{6EI}{l^2}; F_3 = -F_4 = \frac{12EI}{l^3};$$

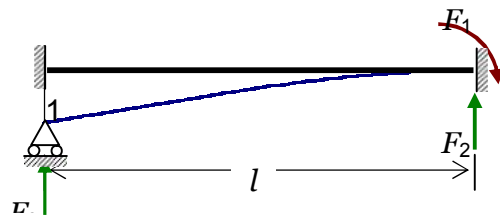


$$F_1 = \frac{4EI}{l}; F_2 = \frac{2EI}{l};$$

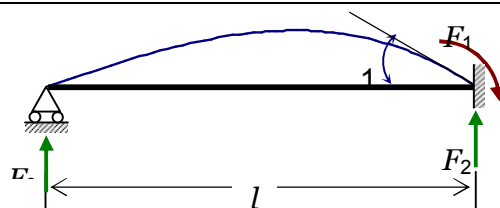
$$F_3 = -F_4 = \frac{6EI}{l^2};$$



$$F_1 = \frac{3EI}{l^2}; F_2 = -F_3 = \frac{3EI}{l^3};$$

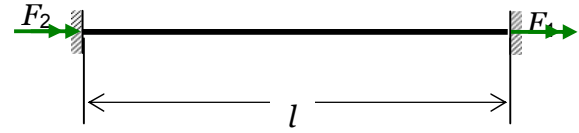


$$F_1 = \frac{3EI}{l}; F_2 = -F_3 = \frac{3EI}{l^2};$$



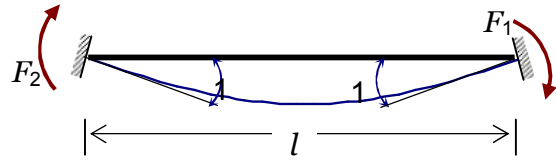
---

Góc xoắn  $D=1$   $F_1 = -F_2 = \frac{GI}{l}$ ;  
(Bỏ qua hiệu ứng vắn)



---

$F_1 = -F_2 = \frac{2EI}{l}$ ;





## PHỤ LỤC 4.

### **Phản lực và moment uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị tại gối đỡ gây ra**

---

Các bảng sau đây cho phản lực và moment uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị lún xuống tại từng gối đỡ gây ra. Tất cả các nhịp có độ dài  $l$  và có độ cứng không đổi. Số nhịp từ 2 (hoặc 1) đến 5. Các gối tại hai đầu liên kết khớp (Bảng PL4.1), hai đầu ngàm (Bảng PL4.2), và ngàm một đầu và khớp một đầu (Bảng PL4.3). Moment uốn tại đầu khớp bằng không và không được kể đến trong bảng.

Các giá trị trong từng dòng là moment uốn hay phản lực lần lượt của từng gối đỡ từ trái sang phải. Dòng đầu sau đề mục là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ nhất kể từ bên trái, dòng thứ hai là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ hai kể từ bên trái, v.v.

Hình PL4.1 biểu diễn ví dụ về cách sử dụng các bảng: số nhịp là 3, gối đỡ thứ hai lún xuống một đơn vị và moment uốn và phản lực tại gối đỡ sẽ lấy ở dòng thứ hai của bảng PL4.1.2.1 và PL4.1.2.2 tương ứng.

Trong các bảng này, quy ước phản lực dương khi chúng tác động hướng lên, và quy ước moment uốn dương khi chúng gây uốn ở thớ dưới của dầm. Khi phản lực dùng để thiết lập ma trận độ cứng thì lấy dấu phù hợp với hệ tọa độ đã chọn.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Bảng PL4.1. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục.  
Hai đầu dầm là gối tựa.  $EI = \text{const}$ . Các nhịp có độ dài  $l$  bằng nhau

PL4.1.1. Dầm hai nhịp

PL4.1.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

-1.50000

3.00000

-1.50000

PL4.1.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-1.50000    3.00000    -1.50000

3.00000    -6.00000    3.00000

-1.50000    3.00000    -1.50000

PL4.1.2. Dầm ba nhịp

PL4.1.2.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

-1.60000    0.40000

3.60000    -2.40000

-2.40000    3.60000

0.40000    -1.60000

PL4.1.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-1.60000    3.60000    -2.40000    0.40000

3.60000    -9.60000    8.40000    -2.40000

- 2.40000    8.40000    -9.60000    3.60000

0.40000    -2.40000    3.60000    -1.60000

## PL4.1.3. Dầm bốn nhịp

PL4.1.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$ 

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| -1.60714 | 0.42857  | -0.10714 |
| 3.64286  | -2.57143 | 0.64286  |
| -2.57143 | 4.28571  | -2.57143 |
| 0.64286  | -2.57143 | 3.64286  |
| -0.10714 | 0.42857  | -1.60714 |

PL4.1.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$ 

|          |          |           |          |          |
|----------|----------|-----------|----------|----------|
| -1.60714 | 3.64286  | -2.57143  | 0.64286  | -0.10714 |
| 3.64286  | -9.85714 | 9.42857   | -3.85714 | 0.64286  |
| -2.57143 | 9.42857  | -13.71428 | 9.42857  | -2.57143 |
| 0.64286  | -3.85714 | 9.42857   | -9.85714 | 3.64286  |
| -0.10714 | 0.64286  | -2.57143  | 3.64286  | -1.60714 |

## PL4.1.4. Dầm năm nhịp

PL4.1.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$ 

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| -1.60765 | 0.43062  | -0.11483 | 0.02871  |
| 3.64593  | -2.58373 | 0.68900  | -0.17225 |
| -2.58373 | 4.33493  | -2.75798 | 0.68900  |
| 0.68900  | -2.75798 | 4.33493  | -2.58373 |
| -0.17225 | 0.68900  | -2.58373 | 3.64593  |
| 0.02871  | -0.11483 | 0.43062  | -1.60765 |

PL4.1.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$ 

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -1.60765 | 3.64593  | -2.58373 | 0.68900  | -0.17225 | 0.02871  |
| 3.64593  | -9.87560 | 9.50239  | -4.13397 | 1.03349  | -0.17225 |

|          |          |           |           |          |          |
|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|
| -2.58373 | 9.50239  | -14.00956 | 10.53588  | -4.13397 | 0.68900  |
| 0.68900  | -4.13397 | 10.53588  | -14.00957 | 9.50239  | -2.58373 |
| -0.17225 | 1.03349  | -4.13397  | 9.50239   | -9.87560 | 3.64593  |
| 0.02871  | -0.17225 | 0.68900   | -2.58373  | 3.64593  | -1.60765 |

---

Bảng PL4.2. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục.  
Hai đầu dầm ngàm.  $EI = \text{const}$ . Các nhịp có độ dài  $l$  bằng nhau

PL4.2.1. Dầm một nhịp

PL4.2.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

6.00000 -6.00000

-6.00000 6.00000

PL4.2.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-12.00000 12.00000

12.00000 -12.00000

PL4.2.2. Dầm hai nhịp

PL4.2.2.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

4.50000 -3.00000 1.50000

-6.00000 6.00000 -6.00000

1.50000 -3.00000 4.50000

PL4.2.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-7.50000 12.00000 -4.50000

12.00000 -23.99998 12.00000

-4.50000 12.00000 -7.50000

PL4.2.3. Dầm ba nhịp

PL4.2.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

4.40000 -2.80000 0.80000 -0.40000

-5.60000 5.20000 -3.20000 1.60000

1.60000 -3.20000 5.20000 -5.60000

-0.40000 0.80000 -2.80000 4.40000

PL4.2.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

|          |           |           |          |
|----------|-----------|-----------|----------|
| -7.20000 | 10.80000  | -4.80000  | 1.20000  |
| 10.80000 | -19.20000 | 13.20000  | -4.80000 |
| -4.80000 | 13.20000  | -19.20000 | 10.80000 |
| 1.20000  | -4.80000  | 10.80000  | -7.20000 |

#### PL4.2.4. Dầm bốn nhịp

##### PL4.2.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số $EI/l^2$

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4.39286  | -2.78571 | 0.75000  | -0.21429 | 0.10714  |
| -5.57143 | 5.14286  | -3.00000 | 0.85714  | -0.42857 |
| 1.50000  | -3.00000 | 4.50000  | -3.00000 | 1.50000  |
| -0.42857 | 0.85714  | -3.00000 | 5.14286  | -5.57143 |
| 0.10714  | -0.21429 | 0.75000  | -2.78571 | 4.39286  |

##### PL4.2.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số $EI/l^3$

|          |           |           |           |          |
|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| -7.17857 | 10.71428  | -4.50000  | 1.28571   | -0.32143 |
| 10.71428 | -18.85713 | 12.00000  | -5.14285  | 1.28571  |
| -4.50000 | 12.00000  | -14.99999 | 12.00000  | -4.50000 |
| 1.28571  | -5.14285  | 12.00000  | -18.85713 | 10.71428 |
| -0.32143 | 1.28571   | -4.50000  | 10.71428  | -7.17857 |

#### PL4.2.5. Dầm năm nhịp

##### PL4.2.5.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số $EI/l^2$

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4.39235  | -2.78469 | 0.74641  | -0.20096 | 0.05742  | -0.02871 |
| -5.56938 | 5.13875  | -2.98564 | 0.80383  | -0.22966 | 0.11483  |
| 1.49282  | -2.98564 | 4.44976  | -2.81339 | 0.80383  | -0.40191 |
| -0.40191 | 0.80383  | -2.81339 | 4.44976  | -2.98564 | 1.49282  |
| 0.11483  | -0.22966 | 0.80383  | -2.98564 | 5.13875  | -5.56938 |
| -0.02871 | 0.05742  | -0.20096 | 0.74641  | -2.78469 | 4.39235  |

---

PL4.2.5.2. Phần lực tại các gổi đờ nhn với hệ số  $EII^3$ 

|          |           |           |           |           |          |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| -7.17703 | 10.70813  | -4.47847  | 1.20574   | -0.34450  | 0.08612  |
| 10.70813 | -18.83252 | 11.91387  | -4.82296  | 1.37799   | -0.34450 |
| -4.47847 | 11.91387  | -14.69856 | 10.88038  | -4.82296  | 1.20574  |
| 1.20574  | -4.82296  | 10.88038  | -14.69856 | 11.91387  | -4.47847 |
| -0.34450 | 1.37799   | -4.82296  | 11.91387  | -18.83252 | 10.70813 |
| 0.08612  | -0.34450  | 1.20574   | -4.47847  | 10.70813  | -7.17703 |

Bảng PL4.3. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục.  
Hai đầu dầm ngàm.  $EI = \text{const}$ . Các nhịp có độ dài  $l$  bằng nhau

PL4.3.1. Dầm một nhịp

PL4.3.1.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

3.00000

-3.00000

PL4.3.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-3.00000      3.00000

3.00000      -3.00000

PL4.3.2. Dầm hai nhịp

PL4.3.2.1 Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

4.28571      -2.57143

-5.14286      4.28571

0.85714      -1.71428

PL4.3.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$

-6.85714      9.42857      -2.57143

9.42857      -13.71428      4.28571

-2.57143      4.28571      -1.71428

PL4.3.3. Dầm ba nhịp

PL4.3.3.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$

4.38462      -2.76923      0.69231

-5.53846      5.07692      -2.76923

1.38461      -2.76923      3.69231

-0.23077      0.46154      -1.61538



PL4.3.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$ 

|          |           |           |          |
|----------|-----------|-----------|----------|
| -7.15385 | 10.61539  | -4.15384  | 0.69231  |
| 10.61539 | -18.46153 | 10.61538  | -2.76923 |
| -4.15384 | 10.61538  | -10.15384 | 3.69231  |
| 0.69231  | -2.76923  | 3.69231   | -1.61538 |

## PL4.3.4. Dầm bốn nhịp

PL4.3.4.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$ 

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 4.39175  | -2.78350 | 0.74227  | -0.18557 |
| -5.56701 | 5.13402  | -2.96907 | 0.74227  |
| 1.48454  | -2.96907 | 4.39175  | -2.59794 |
| -0.37113 | 0.74227  | -2.59794 | 3.64948  |
| 0.06186  | -0.12371 | 0.43299  | -1.60825 |

PL4.3.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^3$ 

|          |           |           |          |          |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|
| -7.17526 | 10.70103  | -4.45361  | 1.11340  | -0.18557 |
| 10.70103 | -18.80411 | 11.81443  | -4.45361 | 0.74227  |
| -4.45361 | 11.81443  | -14.35051 | 9.58763  | -2.59794 |
| 1.11340  | -4.45361  | 9.58763   | -9.89690 | 3.64948  |
| -0.18557 | 0.74227   | -2.59794  | 3.64948  | -1.60825 |

## PL4.3.5. Dầm năm nhịp

PL4.3.5.1. Moment uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EI/l^2$ 

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4.39227  | -2.78453 | 0.74586  | -0.19889 | 0.04972  |
| -5.56906 | 5.13812  | -2.98342 | 0.79558  | -0.19889 |
| 1.49171  | -2.98342 | 4.44199  | -2.78453 | 0.69613  |
| -0.39779 | 0.79558  | -2.78453 | 4.34254  | -2.58563 |
| 0.09945  | -0.19889 | 0.69613  | -2.58563 | 3.64641  |

-0.01657    0.03315    -0.11602    0.43094    -1.60773

PL4.3.5.2. Phân lực tại các gối đỡ nhân với hệ số  $EIII^3$

-7.17680    10.70718    -4.47513    1.19337    -0.29843    0.04972

10.70718    -18.82872    11.90055    -4.77438    1.19337    -0.19889

-4.47513    11.90055    -14.65193    10.70718    -4.17679    0.69613

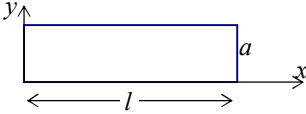
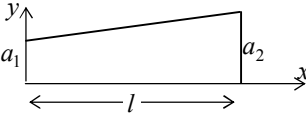
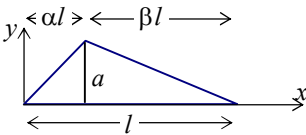
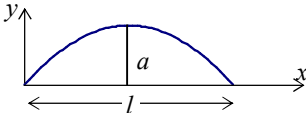
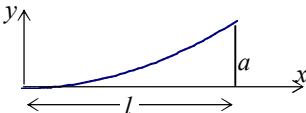
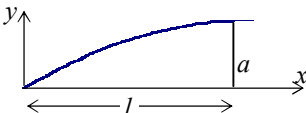
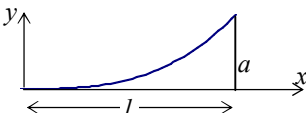
1.19337    -4.77438    10.70718    -14.69856    9.51381    -2.58563

-0.29843    1.19337    -4.17679    9.51381    -9.87845    3.64641

0.04972    -0.19889    0.69613    -2.58563    3.64641    -1.60773

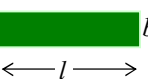
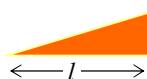

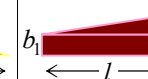
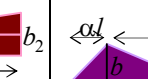
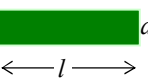
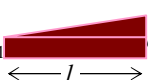
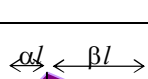
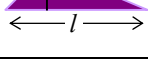
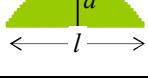

---

## PHỤ LỤC 5. Đặc trưng của các hình

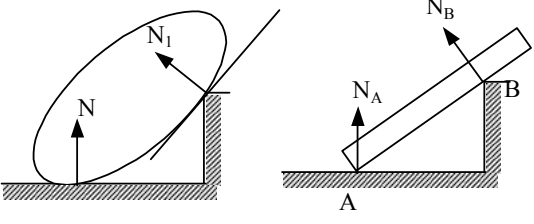
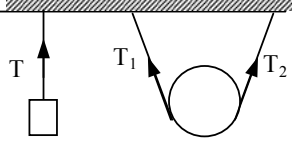
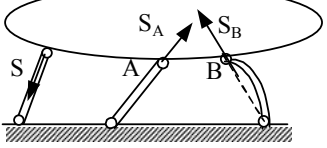
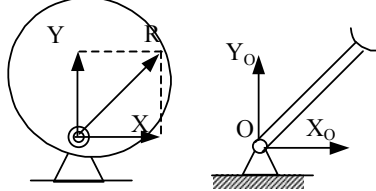
| Hình   | Diện tích                 | Tọa độ trọng tâm  |
|--|---------------------------|---|
|   | $al$                      | $\bar{x} = \frac{l}{2} \quad \bar{y} = \frac{a}{2}$   |
|   | $(a_1 + a_2) \frac{l}{2}$ | $\bar{x} = \frac{l}{3} \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \quad \bar{y} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2}{3(a_1 + a_2)}$ |
|   | $\frac{al}{2}$            | $\bar{x} = \frac{l}{3}(\alpha + 1) \quad \bar{y} = \frac{a}{3}$   |
|  <p style="text-align: center;">Parabol bậc 2</p> | $\frac{2al}{3}$           | $\bar{x} = \frac{l}{2} \quad \bar{y} = \frac{2a}{5}$  |
|  <p style="text-align: center;">Parabol bậc 2</p> | $\frac{al}{3}$            | $\bar{x} = \frac{3l}{4} \quad \bar{y} = \frac{3a}{10}$  |
|  <p style="text-align: center;">Parabol bậc 2</p> | $\frac{2al}{3}$           | $\bar{x} = \frac{5l}{8} \quad \bar{y} = \frac{2a}{5}$   |
|  <p style="text-align: center;">Parabol bậc 3</p> | $\frac{al}{4}$            | $\bar{x} = \frac{4l}{5} \quad \bar{y} = \frac{2a}{7}$   |

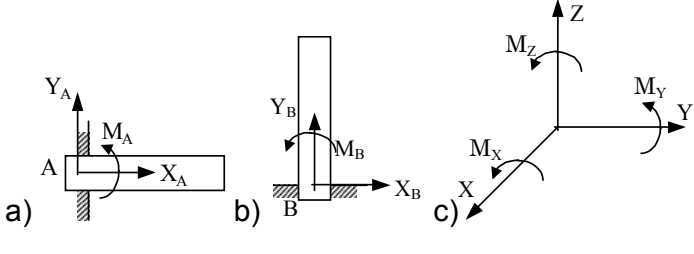
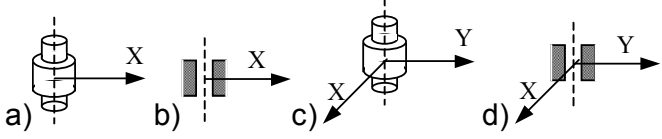
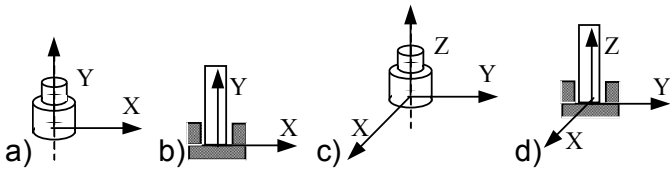
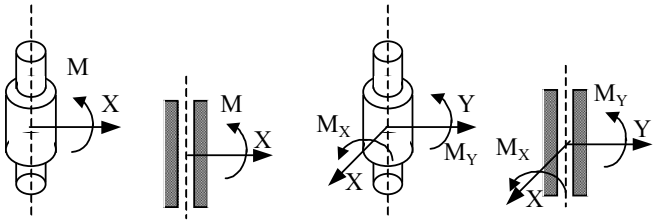
## PHỤ LỤC 6. Các giá trị của tích phân

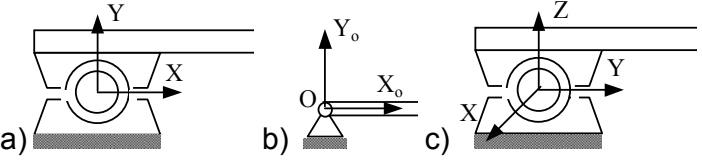
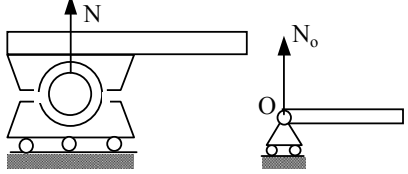
Bảng dưới đây cho các giá trị của tích phân  $\int_l M_u M dl$  dùng để tính chuyển vị của kết cấu khung bằng công ảo (phương trình 4.61). Bảng này có thể dùng để tính các tích phân  $\int_l N_u N dl$ ,  $\int_l V_u V dl$ ,  $\int_l T_u T dl$  hoặc tích phân theo đường l của hai hàm bất kỳ thay đổi theo quy luật như biểu đồ ở dòng trên cùng và dòng đầu bên trái

| <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 5px;">M</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 5px;">M<sub>u</sub></div> </div> |  |  |  |  |  |
|--|---|---|---|---|---|
|   | $abl$   | $\frac{1}{2}abl$  | $\frac{1}{2}abl$  | $\frac{al}{2}(b_1 + b_2)$   | $\frac{1}{2}abl$  |
|   | $\frac{bl}{2}(a_1 + a_2)$   | $\frac{bl}{6}(a_1 + 2a_2)$  | $\frac{bl}{6}(2a_1 + a_2)$  | $\frac{l}{6}(2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2)$                                  | $\frac{bl}{6}[(1 + \beta)a_1 + (1 + \alpha)a_2]$                                    |
|   | $\frac{1}{2}abl$  | $\frac{abl}{6}(1 + \alpha)$   | $\frac{abl}{6}(1 + \beta)$  | $\frac{al}{6}[(1 + \beta)b_1 + (1 + \alpha)b_2]$                                    | $\frac{1}{3}abl$  |
|   | $\frac{2}{3}abl$  | $\frac{1}{3}abl$  | $\frac{1}{3}abl$  | $\frac{al}{3}(b_1 + b_2)$   | $\frac{abl}{3}(1 + \alpha\beta)$  |
|   | $\frac{1}{3}abl$  | $\frac{1}{4}abl$  | $\frac{1}{12}abl$   | $\frac{al}{12}(b_1 + 3b_2)$   | $\frac{abl}{12}(1 + \alpha + \alpha^2)$   |
|   | $\frac{2}{3}abl$  | $\frac{5}{12}abl$   | $\frac{1}{4}abl$  | $\frac{al}{12}(3b_1 + 5b_2)$  | $\frac{abl}{12}(5 - \beta - \beta^2)$   |

## PHỤ LỤC 7. Đặc điểm các phản lực liên kết thường gặp

| Liên kết                        | Biểu diễn   | Đặc điểm phản lực  |
|---------------------------------|---|--|
| Tựa<br>(không ma sát)           |    | Thẳng góc với mặt tựa, mặt tiếp xúc, hướng vào vật khảo sát - phản lực pháp                    |
| Dây<br>(mềm và không co giãn)   |   | Nằm theo dây, hướng ra ngoài vật khảo sát - sức căng   |
| Thanh<br>(chỉ chịu kéo hay nén) |  | Nằm theo thanh (đường nối 2 đầu thanh) hướng vào (ra) thanh khi thanh chịu kéo (nén) - ứng lực |
| Bản lề<br>(trơn nhẵn)           |  | Lực đặt tại bản lề chia ra hai thành phần - phản lực bản lề                                    |

| Liên kết                      | Biểu diễn  | Đặc điểm phản lực  |
|-------------------------------|--|--|
| Ngàm                          |    | <p>Phẳng (a), (b): 2 thành phần lực X, Y và 1 ngẫu lực mô men M</p> <p>Không gian (c): 3 thành phần phản lực ngàm và 3 ngẫu lực mô men</p> |
| Ổ trục ngắn                   |    | <p>Cản trở di chuyển thẳng góc với trục. Phẳng (a,b): như phản lực tựa. Không gian (c,d): 2 phản lực</p>                                   |
| Cối (ổ trục ngắn có mặt chắn) |  | <p>Cản trở di chuyển thẳng góc và dọc trục. Phẳng (a,b): 2 phản lực. Không gian (c,d): 3 phản lực</p>                                      |
| Ổ trục dài                    |  | <p>Cản trở di chuyển thẳng góc và quay. Phẳng (a,b): 1 phản lực và 1 ngẫu phản lực. Không gian (c,d): 2 phản lực và 2 ngẫu phản lực</p>    |

| Liên kết                 | Biểu diễn  | Đặc điểm phản lực   |
|--------------------------|--|---|
| Gối cố định              |  | <p>Cản trở di chuyển thẳng theo 2 phương.</p> <p>Phẳng (a,b): 2 phản lực</p> <p>Không gian(c): 3 phản lực</p> |
| Gối di động (có con lăn) |   | <p>Cản trở di chuyển theo phương thẳng với mặt nền. 1 phản lực.</p>   |

**PHỤ LỤC 8. Bảng hệ số uốn dọc** $\varphi(\lambda)$ 


---

| Độ mảnh $\lambda$ | Thép CT3 | Gang | Gỗ   |
|-------------------|----------|------|------|
| 0                 | 1,00     | 1,00 | 1,00 |
| 10                | 0,99     | 0,97 | 0,99 |
| 20                | 0,96     | 0,91 | 0,97 |
| 30                | 0,94     | 0,81 | 0,93 |
| 40                | 0,92     | 0,69 | 0,87 |
| 50                | 0,89     | 0,54 | 0,80 |
| 60                | 0,86     | 0,44 | 0,71 |
| 70                | 0,81     | 0,34 | 0,60 |
| 80                | 0,75     | 0,26 | 0,48 |
| 90                | 0,69     | 0,20 | 0,38 |
| 100               | 0,60     | 0,16 | 0,31 |
| 110               | 0,52     |      | 0,25 |
| 120               | 0,45     |      | 0,22 |
| 130               | 0,40     |      | 0,18 |
| 140               | 0,36     |      | 0,16 |
| 150               | 0,32     |      | 0,14 |
| 160               | 0,29     |      | 0,12 |
| 170               | 0,26     |      | 0,11 |
| 180               | 0,23     |      | 0,10 |
| 190               | 0,21     |      | 0,09 |
| 200               | 0,19     |      | 0,08 |

---



## Tài liệu tham khảo

---

- [1]. Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Vượng (2001) Cơ học ứng dụng. Nhà Xuất bản Giáo dục, Hà Nội.
- [2]. Lê Ngọc Hồng. (2006) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [3]. Trần Văn Liên (2009) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Xây dựng, Hà Nội.
- [4]. Gere J. M., Timoshenko S. P. (1984), Mechanics of Materials, Second edition, PWS-KENT Publishing Company.
- [5]. Ghali A. and A. M. Neville. (1995) Structural Analysis. A Unified and Matrix Approach. Third Edition. Chapman & Hall, Melbourne.
- [6]. Миролюбов И. Н., С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский, Ф. З. Алмаметов, Н. А. Курицын, К. Г. Смирнов-Васильев, Л. В. Яшина. (1974) Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Издательство “Высшая школа”, Москва.
- [7]. Феодосьев В. И. (1979), Сопротивление материалов. Издательство “Наука”, Москва.