GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU

THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU
THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

- NỘI DUNG TRÌNH BÀY RÕ RÀNG, DỄ HIỂU.
- LÝ THUYẾT ĐƯỢC MINH HOẠ BẰNG NHIỀU VÍ DỤ.
- NHIỀU BÀI TẬP KÈM ĐÁP ÁN, THUẬN TIỆN CHO NGƯỜI TỰ HỌC.
- CÓ MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH SOẠN THEO NGÔN NGỮ TURBO- PASCAL 7.0.
- SÁCH DÙNG CHO SINH VIÊN ĐẠI HỌC, SINH VIÊN CAO HỌC, NGHIÊN CỨU SINH, CÁN BỘ GIẢNG DẠY, KỸ SƯ THUỘC CÁC NGÀNH: XÂY DỰNG; CƠ KHÍ...

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2005

LỜI MỞ ĐẦU

Trong vòng nửa thế kỷ nay, lý thuyết phần tử hữu hạn đã được ứng dụng vào lĩnh vực tính kết cấu trong nhiều ngành KHKT như chế tạo hàng không, chế tạo cơ khí, xây dựng v.v... Nó đã tỏ ra có hiệu lực trong quá trình giải nhiều bài toán cơ học mà riêng lý thuyết đàn hồi không thể giải được.

Cuốn sách này nhằm mục đích trang bị cho sinh viên, cán bộ giảng dạy, kỹ sư, nghiên cứu sinh thuộc các ngành xây dựng, chế tạo cơ khí... những khái niệm cơ bản về lý thuyết phần tử hữu hạn. Sách trình bày theo quan điểm thực dụng, nghĩa là lý thuyết được minh họa bằng nhiều ví dụ cụ thể để bạn đọc dễ tiếp thu. Hơn nữa, có nhiều nguyên lý nhưng tác giả chỉ chọn những nguyên lý dễ hiểu nhất và không đi sâu chứng minh về mặt toán học. Để hiểu được nội dung sách, bạn đọc nên tham khảo các tài liệu (11) và (12) để nắm được các khái niệm về đại số ma trận.

Cuối sách có các bài tập kèm đáp án mang tính chất lý thuyết để rèn luyện kỹ năng tính toán của người học. Ngoài ra, còn có các chương trình tính theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0. Sở dĩ tác giả chọn ngôn ngữ này vì nó gần với cách nói của con người, dễ hiểu, hơn nữa đang được giảng dạy tại các trường đại học.

Nội dung sách gồm có:

Chương một - Khái niệm và nguyên lý cơ bản trong lý thuyết phần tử hữu hạn;

Chương hai - Tính chất của các phần tử hữu hạn;

Chương ba - Bài toán một chiều;

Chương bốn - Hệ giàn;

Chương năm - Bài toán hai chiều dùng tam giác biến dạng không đổi;

Chương sáu - Vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng;

Chương bảy - Phần tử hữu hạn cùng tham số hai chiều - Phương pháp tích phân bằng số;

Chương tám - Dầm hai chiều và khung phẳng;

Chương chín - Hệ dầm trực giao.

Chương mười - Dầm ba chiều và khung không gian;

Chương mười một - Bài toán ba chiều;

Chương mười hai - Bài toán dao động;

Do những nguyên nhân chủ quan và khách quan nên, không tránh được thiếu sót, mong bạn đọc phê bình và góp ý.

Cuối cùng, tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập Nhà xuất bản Xây dựng đã tham gia biên tập và cho xuất bản sách. Đặc biệt, tác giả tỏ lòng cảm ơn biên tập viên Trần Cường đã hết lòng giúp đỡ và cổ vũ để hoàn thành tốt việc biên soạn sách.

Tác giả

Chương 1

KHÁI NIỆM VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chương này trình bày một số khái niệm và nguyên lý làm cơ sở cho lý thuyết phần tử hữu hạn. Trước hết, ta hãy tìm hiểu nội dung khái quát của phương pháp phần tử hữu hạn.

§1.1.KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn là một công cụ có hiệu lực để giải các bài toán cơ học trong nhiều lĩnh lực: Xây dựng, Cơ khí v.v... Nó có thể áp dụng vào bất cứ một hệ nào, từ hệ đơn giản như thanh đến hệ phức tạp như bản, vỏ.

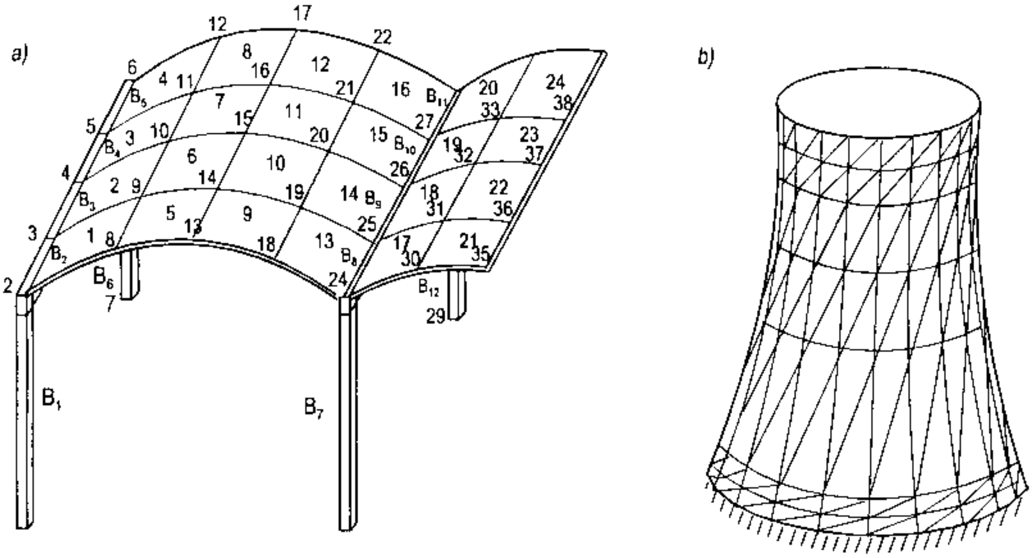
Từ năm 1955, Argyris (1) nêu lên các định lý về năng lượng và phương pháp ma trận, đặt nền tảng cho sự phát triển về sau của phương pháp phần tử hữu hạn. Cuốn sách đầu tiên về phương pháp phần tử hữu hạn được Zienkiewicz (2) và Chung xuất bản vào năm 1967. Về sau, phương pháp đã được áp dụng vào các bài toán phi tuyến và bài toán biến dạng lớn.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là chia vật thể biến dạng thành nhiều phần tử có kích thước hữu hạn gọi là *phần tử hữu hạn*. Các phần tử này được liên kết với nhau bằng các điểm gọi là *nút* hoặc *điểm nút* (hình 1.1).

Các đặc trưng của các phần tử hữu hạn được phối hợp với nhau để đưa đến một lời giải tổng thể cho toàn hệ. Chẳng hạn trong phương pháp chuyển vị, các *hàm hình dạng* được chọn để biểu thị sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn theo các thành phần chuyển vị tại các điểm nút. Ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn cũng được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút. Một số nguyên lý cơ bản như nguyên lý công ảo, nguyên lý thế năng bé nhất được áp dụng để thành lập hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn.

Phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu được suy ra bằng cách phối hợp các phương trình cân bằng của các phần tử hữu hạn riêng rẽ sao cho vẫn bảo đảm được tính liên tục của toàn bộ kết cấu.

Cuối cùng, căn cứ vào các điều kiện biên, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể để xác định giá trị của các thành phần chuyển vị. Các thành phần này sẽ được dùng để tính ứng suất và biến dạng.

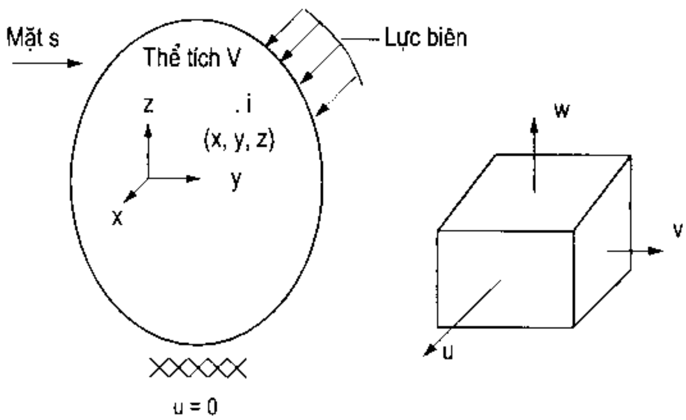


Hình 1.1: a) Mô hình phần tử hữu hạn mái cong
b) Mô hình phần tử hữu hạn tháp làm lạnh

§1.2. CÁC ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG

Một vật thể biến dạng 3 chiều có thể tích V và mặt S biểu thị như trên hình (1.2). Một điểm trong vật thể có các toạ độ x, y, z. Trên biên của nó, có lực T tác dụng trên đơn vị diện tích gọi là lực biên. Dưới tác dụng của các lực, vật biến dạng các thành phần chuyển vị tại điểm có toạ độ x, y, z biểu thị bằng véc tơ chuyển vị:

$$\mathbf{U} = [u \quad v \quad w]'^{*} \tag{1.1}$$



Hình 1.2

---

[*] Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng [ ]' là ma trận chuyển vị.

Lực thể tích (do trọng lượng) phân bố trên đơn vị thể tích và được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{f} = [f_x\ f_y\ f_z)]' \tag{1.2}$$

Trong (1.1) và (1.2):

u - thành phần chuyển vị trên phương trục x.

v - thành phần chuyển vị trên phương trục y.

w - thành phần chuyển vị trên phương trục z.

f_x - lực thể tích trên phương trục x.

f_y - lực thể tích trên phương trục y.

f_z - lực thể tích trên phương trục z.

Các thành phần *lực biên* được biểu thị bằng vectơ.

$$\mathbf{T} = [T_x\ T_y\ T_z\ ]' \tag{1.3}$$

Trong đó: T_x - lực biên trên phương trục x;

T_y - lực biên trên phương trục y;

T_z - lực biên trên phương trục z.

Lực tiếp xúc, áp lực tác dụng trên bề mặt, lực ma sát là một số thí dụ về lực biên.

Tải trọng P tác dụng tại điểm i được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{P_i} = [P_x\ P_y\ P_z)]' \tag{1.4}$$

Trong đó:

P_x - lực P trên phương trục x;

P_y - lực P trên phương trục y;

P_z - lực P trên phương trục z.

Các thành phần ứng suất biểu thị trên hình (1.3) .

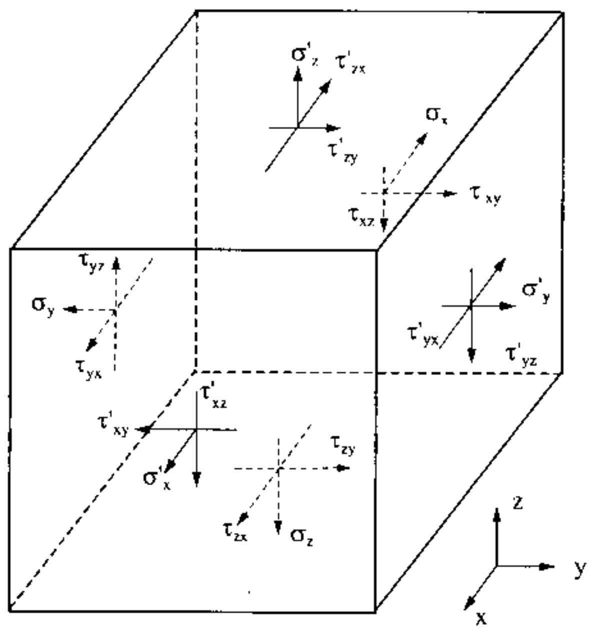
$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \qquad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx \qquad \sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy \qquad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz; \qquad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$$



Hình 1.3. Phân tố thể tích dV ở thế cân bằng

Các thành phần ứng suất được biểu thị bằng vectơ:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \left[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy}\right] \tag{1.5}$$

Trong đó: σ_x, σ_y, σ_z là các thành phần ứng suất pháp trên các phương x, y, z; τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} là các thành phần ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp chỉ có hai chỉ số: chỉ số thứ nhất biểu thị phương pháp tuyến của mặt tác dụng, chỉ số thứ 2 biểu thị phương của ứng suất tiếp. Chẳng hạn τ_{xy} là ứng suất tiếp tác dụng trên mặt có phương pháp tuyến là x và phương của nó là y.

Lực tác dụng trên mặt của phân tố bằng ứng suất nhân với diện tích của mặt tương ứng. Thể tích của phân tố $d_v = d_x d_y d_z$. Lần lượt lập các phương trình hình chiếu trên phương các trục z, y, z, ta được các điều kiện cân bằng như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Lần lượt lập các phương trình mô men đối với các trục x, y, z, ta được:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{1.7}$$

§1.3. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trên hình (1.2), ta có điều kiện biên:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

Cũng có thể có điều kiện biên khác, chẳng hạn như **u = a**; u là véc tơ chuyển vị.

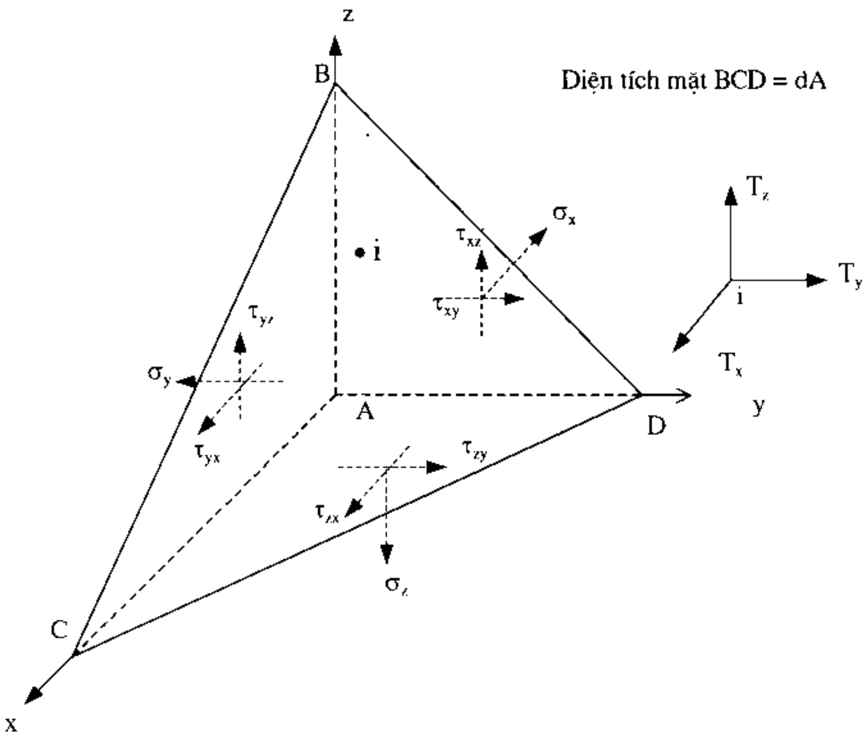
Bây giờ ta hãy xét phân tố thể tích 4 mặt ABCD như trên hình (1.4). Các cạnh AC, AD, AB song song với các trục x, y, z. Diện tích của mặt BCD bằng dA.

Nếu n_x, n_y, n_z là các thành phần pháp tuyến đơn vị của mặt dA (tức mặt BCD), diện tích của mặt ABD bằng $n_x dA$, diện tích của mặt ABC bằng $n_y dA$, diện tích của mặt ACD bằng $n_z dA$. Căn cứ vào các điều kiện cân bằng trên các trục x, y, z, ta có các điều kiện biên:

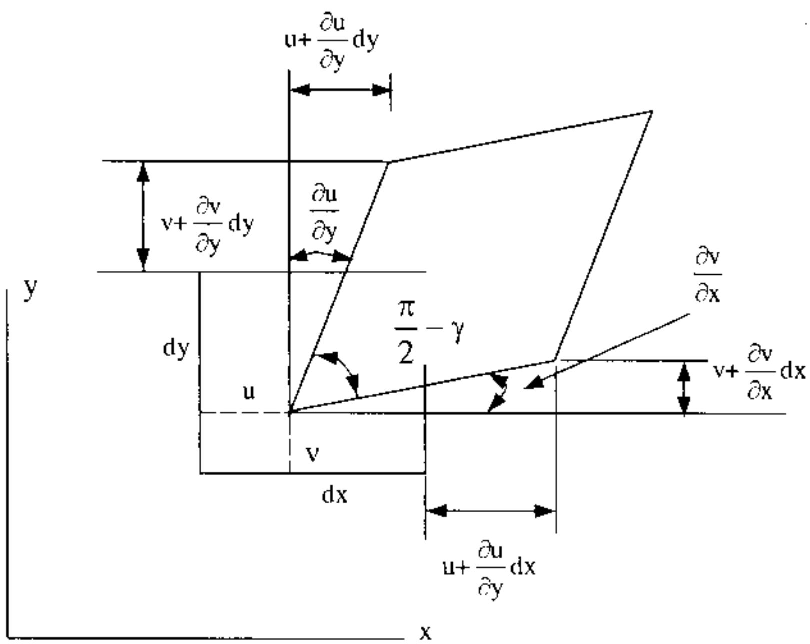
$$\begin{aligned}
&\sigma_z n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = T_x\\
&\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = T_y\\
&\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Các điều kiện trên phải được thỏa mãn trên bề mặt của hình (1.2).

Tải trọng tác dụng tại một điểm được xem như tác dụng trên một diện tích vô cùng bé.



Hình 1.4. *Phân tố thể tích trên bề mặt*



Hình 1.5. *Mặt biến dạng của phân tố (trong mặt phẳng xoy)*

§1.4. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Các thành phần biến dạng ứng với phương trình (1.5) được biểu thị bằng véc tơ:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.10}$$

Trong đó: ε_x, ε_y, ε_z là các thành phần biến dạng trên các phương x, y, z; γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} là các ứng suất tiếp đã được định nghĩa trong phần trước.

Hình (1.5) biểu thị biến dạng của mặt dx - dy trong điều kiện biến dạng bé.

Nếu xét đồng thời các mặt khác, ta có véc tơ biến dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Hệ thức trên gọi là hệ thức biến dạng - chuyển vị.

Cần chú ý rằng hệ thức này có hiệu lực khi biến dạng bé.

§1.5. HỆ THỨC ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, hệ thức ứng suất - biến dạng được suy ra từ định luật Húc tổng quát. Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, có hai đặc trưng vật liệu là mô đun đàn hồi E và hệ số Poatxong. Định luật Húc cho ta các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \nu\frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\ ;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}\ ;\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.13}$$

Trong đó, mô đun trượt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.14}$$

Từ (1.12) ta có:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \tag{1.15}$$

Lần lượt thay $(\sigma_y + \sigma_z)$, $(\sigma_z + \sigma_x)$, $(\sigma_x + \sigma_y)$ vào (1.12), ta được hệ thức nghịch đảo:

$$\sigma = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.16}$$

Trong đó **D** là ma trận cấp 6 × 6.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

D gọi là *ma trận cấu trúc vật liệu* vì nó phụ thuộc vào tính chất của vật liệu (đồng tính hoặc dị tính trên các phương khác nhau).

Từ các hệ thức tổng quát trên, ta có thể suy ra một số trường hợp đặc biệt như sau:

1. Trường hợp một chiều

Trong trường hợp này, ta chỉ có ứng suất pháp σ và biến dạng ε tác dụng trên phương x. Hệ thức (1.16 biến thành).

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.18}$$

2. Trường hợp 2 chiều

a. Ứng suất phẳng

Một vật phẳng và mỏng chịu tải trọng tác dụng trong mặt phẳng (hình 1.6a) có ứng suất phẳng phân bố trong mặt phẳng. Nghĩa là σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} đều triệt tiêu.

Căn cứ vào định luật Húc, ta có các hệ thức:

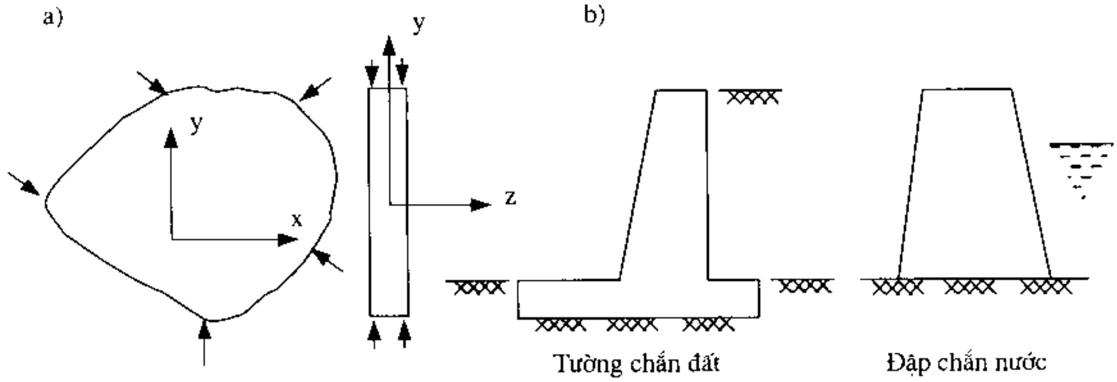
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}.\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Hệ thức nghịch đảo của (1.19) là:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.20a}$$



Hình 1.6. *a) Ứng suất phẳng; b) Biến dạng phẳng.*

Các thành phần biến dạng cũng có thể biểu thị bằng các thành phần ứng suất:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

b. Biến dạng phẳng

Trường hợp này xuất hiện khi vật thể dài và có kích thước, hình dạng, tải trọng không đổi trên phương dọc. Tường chắn đất, đập chắn nước (hình 1.6b) là những kết cấu như vậy. Nếu ta xét một mặt cắt ngang bất kỳ, có thể giả thiết rằng chuyển vị dọc trục w = 0 còn các chuyển vị u và v chỉ là những hàm của x, y không phụ thuộc vào z. Có nghĩa là:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{1.22}$$

Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\upsilon)}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Đồng thời, ta có các hệ thức:

$$\sigma_z = \upsilon(\sigma_x + \sigma_y) \tag{1.24a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \tag{1.24b}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Trong đó, **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 3 x 3. Như trong phần đầu đã trình bày, để thiết lập được hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn, cần phải vận dụng một số nguyên lý cơ bản sau đây.

§1.6. NGUYÊN LÝ THẾ NĂNG CỰC TIỂU

Ta định nghĩa thế năng toàn phần của một vật thể đàn hồi là tổng của năng lượng biến dạng toàn phần và công của ngoại lực và nội lực.

TNT = U (năng lượng biến dạng) + W (công ngoại lực và nội lực)

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, năng lượng biến dạng của vật rắn trên hình (1.2) là:

$$U = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dv \tag{1.26}$$

Công của nội lực và ngoại lực là (hình 1.2)

$$W = -\int_v \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_v \mathbf{u}'\mathbf{T}ds - \sum u_i' P_i \tag{1.27}$$

Vậy thế năng toàn phần của vật thể đàn hồi (hình 1.2) là:

$$TNT = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dV - \int_V \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_s \mathbf{u}'\mathbf{T}d_s - \sum u_i' P_i \tag{1.28}$$

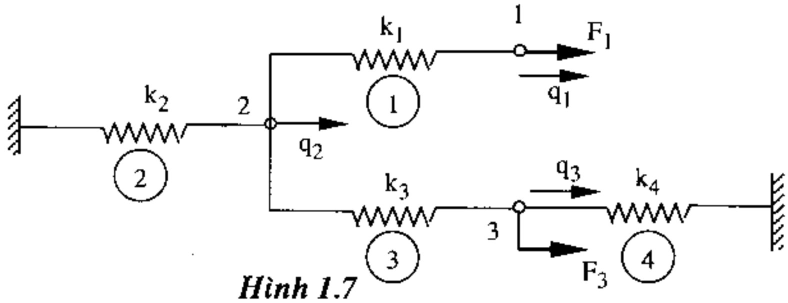
Các ký hiệu **σ, ε, u, f, T, P** đã được định nghĩa trong phần trước. Ở đây, ta chỉ nghiên cứu các hệ bảo toàn trong đó công của ngoại lực không phụ thuộc vào đường đi. Nói một cách khác, nếu hệ chuyển dời từ một điểm nào đó rồi quay về điểm đó thì công của ngoại lực triệt tiêu, dù cho đường đi như thế nào.

Nguyên lý thế năng cực tiểu phát biểu như sau:

Đối với hệ bảo toàn, trong mọi trường chuyển vị cho phép về mặt động học, chỉ có trường chuyển vị làm cho thế năng toàn phần có giá trị cực tiểu mới thỏa mãn được điều kiện cân bằng ổn định của hệ.

Chuyển vị cho phép về mặt động học là chuyển vị thỏa mãn tính chất đơn trị của nó và các điều kiện biên.

Để minh họa nguyên lý trên, ta hãy nghiên cứu ví dụ sau:



Hình 1.7

Ví dụ 1.1: Cho một hệ thống lò xo như trên hình (1.7). Thế năng toàn phần của hệ có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}k_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\delta_2^2 + \frac{1}{2}k_3\delta_3^2 + \frac{1}{2}k_4\delta_4^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Trong đó:

δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 là độ giãn của 4 lò xo; k_1, k_2, k_3, k_4 là các độ cứng tương ứng; q_1, q_2, q_3 là các chuyển vị.

Vì $\delta_1 = q_1 - q_2$, $\delta_2 = q_2$, $\delta_3 = q_3 - q_2$, $\delta_4 = -q_3$ nên

$$TNT = \frac{1}{2}k_1(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 + \frac{1}{2}k_3(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_4q_3^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Để hệ cân bằng ổn định, ta cần cực tiểu hóa thế năng toàn phần nghĩa là phải triệt tiêu đạo hàm của nó đối với các chuyển vị q_i:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.29}$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_1} = k_1(q_1 - q_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_2} = -k_1(q_1 - q_2) + k_2q_2 - k_3(q_3 - q_2) = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_3} = k_3(q_3 - q_2) + k_4q_3 - F_3 = 0$$

Các phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận:

$\mathbf{Kq = F}$ hay

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

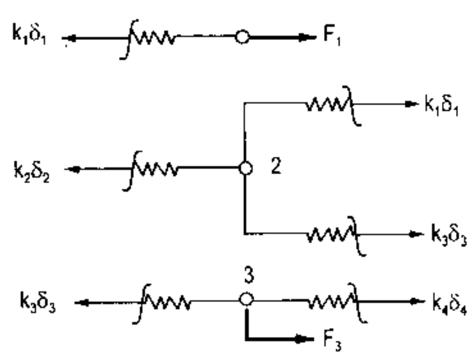
Ta cũng có thể cắt rời các lò xo (hình 1.8) để lập các phương trình cân bằng:

$$k_1\delta_1 = F_1$$

$$k_2\delta_2 - k_1\delta_1 - k_3\delta_3 = 0$$

$$k_3\delta_3 - k_4\delta_4 = F_3$$

Kết quả trên hoàn toàn giống với kết quả khi vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu.



Hình 1.8

§1.7. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

Ta đã biết rằng công là tích của lực nhân với chuyển dời tương ứng:

$$W = P.\, r$$

Khi chuyển dời r không phải do lực P gây ra, ta gọi W là công ảo và r gọi là chuyển vị ảo.

Dưới đây, trình bày nguyên lý về công ảo.

Đối với kết cấu hai chiều, công ảo của ngoại lực có thể viết:

$$\delta W_c = \iint (f_x\delta_u + f_y\delta_v) d_x d_y + \int \left(T_x\delta_u + T_y\delta_v\right) d_s \tag{1.31}$$

Công ảo của nội lực có thể viết:

$$\delta U = \iint \left(\sigma_x\delta_{\varepsilon x} + \sigma_y\delta_{\varepsilon y} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)\ d_x d_y$$

f_x, f_y , f_z - lực thể tích; T_x, T_y - lực biên

δ_u, δ_v - chuyển vị ảo trên phương x và y

$\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\gamma_{xy}$ - biến dạng ảo

Đối với kết cấu 3 chiều, ta có:

$$\delta W_c = \iiint \left(f_x\delta_u + f_y\delta_v + f_z\delta_w\right) dV + \iint_s \left(T_x\delta_u + T_y\delta_v + T_z\delta_w\right) ds \tag{1.33}$$

$$\delta U = \iiint \left(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\right) dV \tag{1.34}$$

Dưới dạng ma trận, các hệ thức trên có thể viết:

$$\delta We = \iiint \boldsymbol{\delta'}_u.\mathbf{f}.dv + \iint_s \boldsymbol{\delta'_u}.\mathbf{T}.ds \tag{1.35}$$

Trong đó: $\delta'_u = [\delta_u\, \delta_v\, \delta_w]$; $\mathbf{f'} = [\ f_x\ f_y\ f_z]$

$$\mathbf{T'} = [T_x\ T_y\ T_z\ ] \tag{1.36}$$

$$\delta U = \iiint\ \boldsymbol{\delta'_\varepsilon}.\sigma\ dV \tag{1.37}$$

Cần chú ý rằng chuyển vị ảo và biến dạng ảo là những đại lượng có giá trị bất kỳ.

Nguyên lý công ảo phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thế cân bằng, công ảo của ngoại lực phải bằng công ảo của nội lực.

Nghĩa là hệ thức sau đây phải được thỏa mãn.

$$\delta W_c = \delta U \tag{1.38}$$

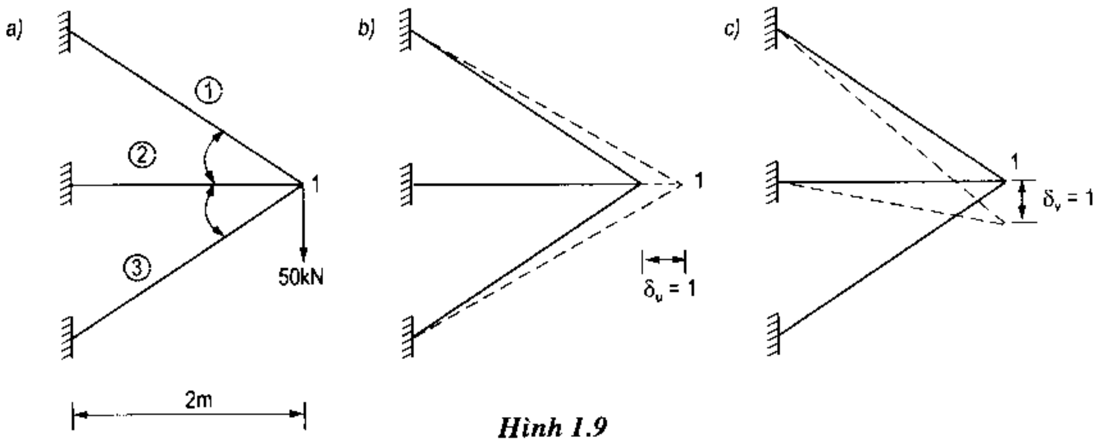
Trong trường hợp tổng quát (hệ 3 chiều), δW_c tính theo (1.35) và δU tính theo (1.37).

Trong các chương sau, nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra biểu thức ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

Sau đây là một thí dụ nhằm minh họa nguyên lý trên.

Ví dụ 1.2:

Cho một kết cấu giàn với kích thước và tải trọng biểu thị trên hình (1.9).



Hình 1.9

Vận dụng nguyên lý công ảo để tính các chuyển vị u, v tại nút 1, ứng suất và biến dạng trong thanh giàn.

Giải:

Với các thành phần chuyển vị thực tế u và v, biến dạng trong các thanh giàn 1,2,3 có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u\cos 45^0 + v\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u+v}{4} \\ \varepsilon_2 &= u/2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{u\cos 45^0 - u\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u-v}{4} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Với chuyển vị ảo $\delta_u = 1$, các biến dạng ảo trong (a) trở thành:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_1' &= 1/4 \\ \delta\varepsilon_2' &= 1/2 \\ \delta\varepsilon_3' &= 1/4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Công ảo của nội lực trong một thanh giàn

$$= \iiint \sigma_x . \sigma_\varepsilon . dV$$

$$= E.\ A.\ L.\ \varepsilon\ .\ \delta'_\varepsilon$$

Kết hợp 2 hệ phương trình (a) và (b), ta có tổng công ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_u = 1$ gây ra bằng:

$$\delta U = E.A.2\sqrt{2}\frac{(u+v)}{4}\frac{1}{4} + EA2\frac{u}{2}.\frac{1}{2} + EA2\sqrt{2}\frac{(u-v)}{4}\frac{1}{4}$$

$$= EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} + EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right\}$$

$$= EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\}$$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 0 \times 1$

Theo (1.38) :

$$\delta W_c = \delta U$$

$$EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\} = 0 \text{ do đó } u = 0 \qquad \text{(c)}$$

Với chuyển vị ảo $\delta v = 1$, tính toán tương tự như trên, ta có:

$$\delta\varepsilon_1^{'} = \frac{1}{4}$$

$$\delta\varepsilon_1^{'} = 0$$

$$\delta\varepsilon_1^{'} = -\frac{1}{4}$$

Tổng cộng ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_v = 1$:

$$\delta U = EA\ 2\sqrt{2}\left(\frac{u+v}{4}\right).\frac{1}{4} + EA\ \ 2\sqrt{2}\ \left(\frac{u-v}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Thay u = 0: $\delta U = EA.v\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} = \frac{EA\ \ v\ \ \sqrt{2}}{4}$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 50 \times 1$

Vì $\delta W_c = \delta U$, ta được :

$$EA\ v\ \frac{\sqrt{2}}{4} = 50, \text{ do đó } v = \frac{200}{\sqrt{2}\ \ AE} \qquad \text{(d)}$$

Cuối cùng, ta được: $u = 0$ và $v = \frac{200}{\sqrt{2}AE}$

Thay các giá trị trên vào (a), ta được biến dạng trong các thanh giàn:

$$\varepsilon_1 = \frac{50}{\sqrt{2}AE}$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{50}{\sqrt{2}.A.E}$$

Lực dọc trong các thanh giàn:

$$F_1 = AE\frac{50}{\sqrt{2}AE} = 25\sqrt{2}\ \text{kN (kéo)}$$

$$F_2 = 0$$

$$F_3 = -25\sqrt{2}\ \text{kN (nén)}$$

§1.8. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

Nguyên lý bảo toàn năng lượng phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thể cân bằng đàn hồi, công của ngoại lực W_{ng} phải bằng công của nội lực W_n.

$$W_{ng} = W_n \tag{1.39}$$

Nguyên lý này được áp dụng cho hệ thanh (giàn, khung) để suy ra ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu.

Trong hệ tọa độ chung, phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu có dạng:

$$\mathbf{F = K.\,Q} \tag{1.40}$$

Trong đó: **F** - vectơ tải trọng;

Q - véc tơ chuyển vị;

K - ma trận độ cứng tổng thể.

Trong hệ tọa độ riêng, hệ thức giữa véc tơ nội lực S và véc tơ chuyển vị q có dạng:

$$\mathbf{S = k_c.q} \tag{1.41}$$

Trong đó: $\mathbf{k_c}$ là ma trận độ cứng riêng.

Vì có hệ toạ độ riêng và hệ toạ độ chung, ta chuyển đổi vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ riêng thành vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung qua hệ thức:

$$\mathbf{q = R.\,Q} \tag{1.42}$$

R gọi là ma trận xoay

Theo (1.39), ta có: $\frac{1}{2}\mathbf{Q'F} = \frac{1}{2}\mathbf{q'S}$

Theo (1.40), (1.41) và (1.42):

$$\mathbf{Q'KQ = Q'R'S = Q'R'.k_c.q = Q'R'k_eR\ Q}$$

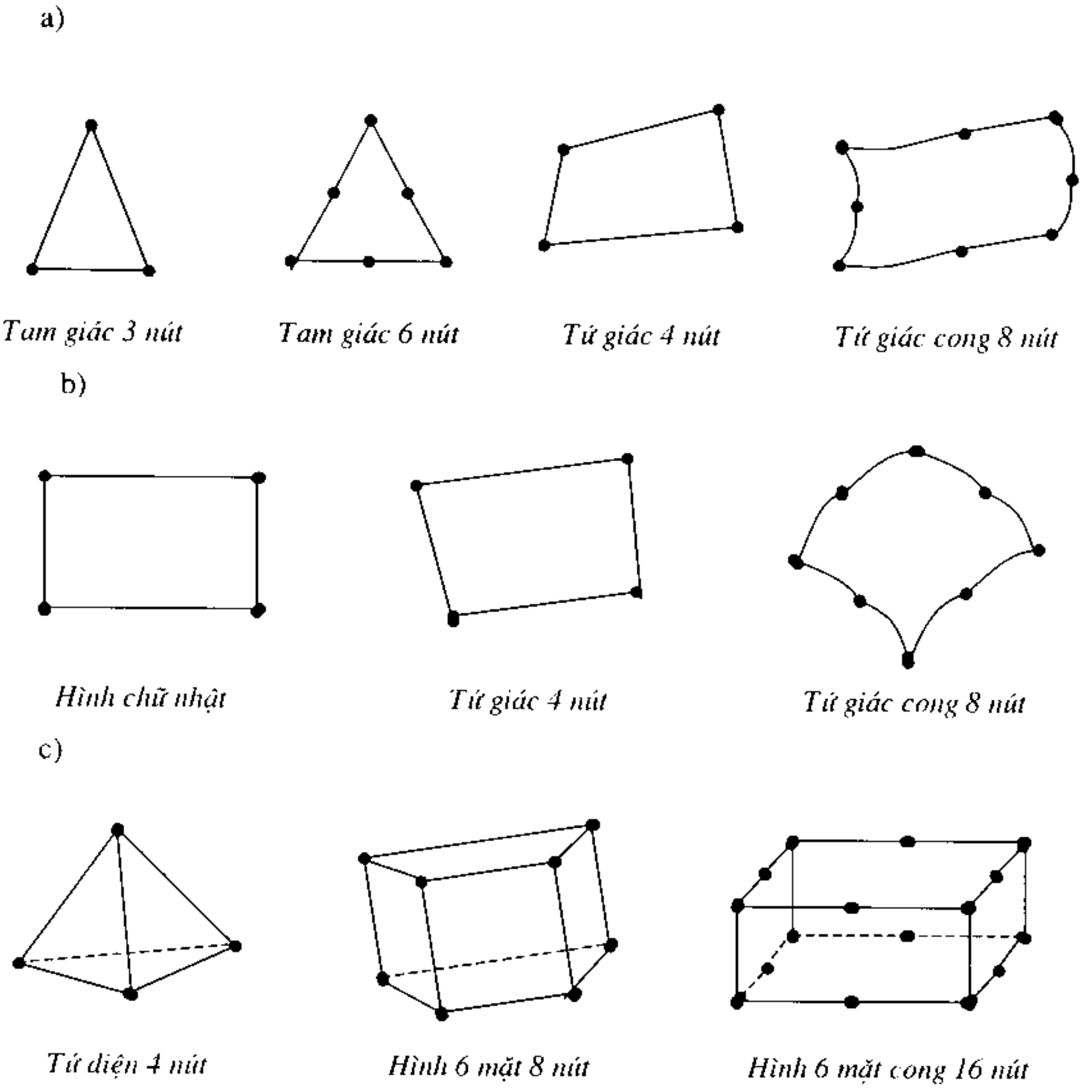
Vậy: $$\mathbf{K = R'.\,k_e\,.\,R} \tag{1.43}$$

Công thức ma trận độ cứng tổng thể **K** ở trên sẽ được áp dụng cho hệ giàn và hệ khung.

Chương 2

TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Như trong chương 1 đã trình bày, phần tử hữu hạn là một mô hình quan trọng để tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu. Chương này tập trung giới thiệu một số phần tử hữu hạn cùng với tính chất của chúng. Các khái niệm về hàm hình dạng, ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn, ma trận độ cứng sẽ được đề cập một cách khái quát.



Hình 2.1. *Một số phần tử hữu hạn có tính chất tiêu biểu.*

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1a) áp dụng cho bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng.

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1b) áp dụng cho bản chịu uốn và vỏ.

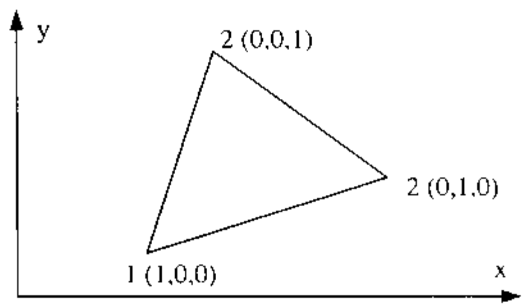
Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1c) áp dụng cho bài toán ứng suất 3 chiều.

Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên giả thiết phân tích sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Một mô hình phân tích như vậy gọi là *mô hình chuyển vị*.

§2.1. MÔ HÌNH CHUYỂN VỊ

Bước đầu tiên là dùng các hàm thích hợp để biểu thị sự biến thiên gần đúng của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Thông thường, các hàm đó có dạng đa thức mà ta sẽ nghiên cứu trong phần sau.

Giả sử phần tử hữu hạn có hình tam giác như trên hình (2.2)



Hình 2.2. *Phần tử hữu hạn tam giác*

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u (trên phương trục x) và v (trên phương trục y) có thể biểu thị bằng các hàm sau:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Trong đó: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ là các hệ số chưa biết mà ta gọi là *tọa độ khái quát*. Biểu thị (2.1) dưới dạng ma trận, ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \qquad (2.2a)$$

hoặc: $$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi}.\boldsymbol{\alpha} \qquad (2.2b)$$

Nói chung, nếu đa thức có bậc n, các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn 2 chiều có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + ... + \alpha_m y^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} .x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + ... + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Viết các phương trình dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2' & 0' \\ 0' & \phi_2' \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u} = \phi' \alpha$$

$$\phi_2' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & ... & y^n \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdots & \alpha_{2m} \end{bmatrix} \tag{2.4b}$$

Trong trường hợp phần tử hữu hạn 3 chiều, các hàm chuyển vị có dạng:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xz + \ldots + \alpha_m z^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+s3} y + \ldots + \alpha_{2m} z^n \\ w &= \alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2} x + \alpha_{2m+s3} y + \ldots + \alpha_{3m} z^n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_3' & 0' & 0' \\ 0' & \phi_3' & 0' \\ 0' & 0' & \phi_3' \end{bmatrix} . \boldsymbol{\alpha}$$

hay $$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.6}$$

Trong đó: $$\phi_3' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & ..... & z & xz & ...... & z^n \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_{3m} \end{bmatrix} \tag{2.6a}$$

§2.2. HỆ THỨC GIỮA BẬC TỰ DO CỦA CÁC NÚT VÀ CÁC TỌA ĐỘ KHÁI QUÁT

Các hệ số chưa biết α trong các đa thức có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn, ta gọi các thành phần chuyển vị này là các *bậc tự do* tại các nút. Lấy ví dụ phần tử hữu hạn có hình tam giác trên hình (2.2). Thay tọa độ của các nút vào phương trình (2.2), ta có:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

hoặc: $$\mathbf{q} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.8}$$

Trong đó: x_1, y_1: tọa độ của nút 1 trên phương x và y;
x_2, y_2: tọa độ của nút 2 trên phương x và y.

x_3, y_3: tọa độ của nút 3 trên phương x và y.

u_1, v_1: các thành phân chuyển vị của nút 1 trên phương x và y.

u_2, v_2: các thành phân chuyển vị của nút 2 trên phương x và y.

u_3, v_3: các thành phân chuyển vị của nút 3 trên phương x và y.

Phương trình trên biểu thị mối quan hệ giữa các bậc tự do tại các nút và các tọa độ khái quát. Ta tính các phần tử của ma trận **A** bằng cách thay tọa độ của các nút của phần tử hữu hạn vào hàm chuyển vị. Nói chung, **A** là một ma trận vuông, tổng số các tọa độ khái quát bằng tổng số tọa độ của các nút.

Giải phương trình (2.8) đối với α, ta được :

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \qquad (2.9)$$

Thay α vào (2.2b):

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \qquad (2.10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}$; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

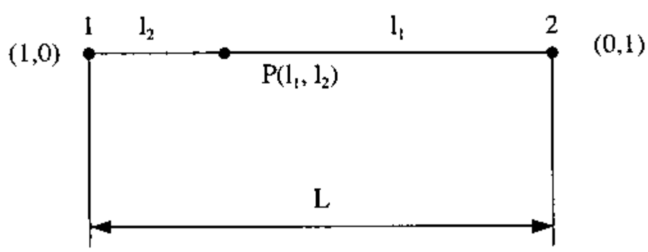
N gọi là *hàm hình dạng*. Phương trình (2.11) biểu thị mối quan hệ giữa các thành phần chuyển vị **u** tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn và các thành phần chuyển vị tại các nút của nó.

§2.3. HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

Hệ tọa độ tự nhiên rất thuận tiện cho việc biểu thị các tính chất của phần tử hữu hạn. Nó là một hệ cục bộ trong đó một điểm trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng các số không có thứ nguyên và có giá trị không bao giờ lớn hơn đơn vị hoặc bằng không. Cách biểu thị tọa độ như vậy làm cho việc tính tích phân được dễ dàng.

2.3.1. Hệ tọa độ tự nhiên một chiều

Hình (2.3) biểu thị hệ tọa độ tự nhiên một chiều.



***Hình 2.3.** Hệ tọa độ tự nhiên một chiều*

Tọa độ tự nhiên của một điểm P bất kỳ (hình 2.3) được định nghĩa như sau:

$$l_1 = 1 - \frac{x}{L}$$
$$l_2 = \frac{x}{L} \tag{2.12}$$

Tọa độ của điểm P bây giờ là l_1, l_2. Hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Theo nguyên tắc tính đạo hàm, có thể viết:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial l_2} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x}$$

Từ (2.12): $\frac{\partial l_1}{\partial x} = -\frac{1}{L}$; $\frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{1}{L}$

Vậy
$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \frac{\partial}{\partial l_2}\right) \tag{1.15}$$

Tích phân trên chiều dài L:

$$\int_L l_1^p . l_2^q dl = \frac{p!q!}{(p+q+1)\ !} L \tag{2.16}$$

Trong đó 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

2.3.2. Phần tử hữu hạn tam giác hai chiều

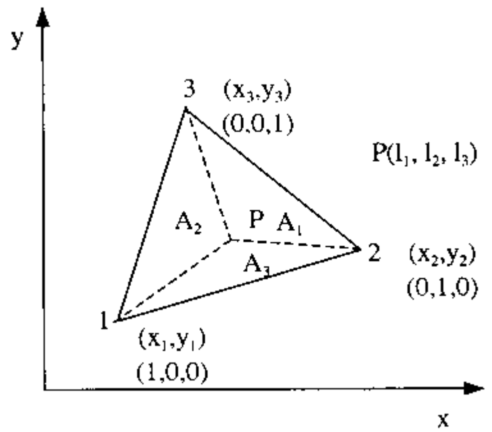
Xét một phần tử hữu hạn tam giác trên hình (2.4). Một điểm P trong hình tam giác được biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

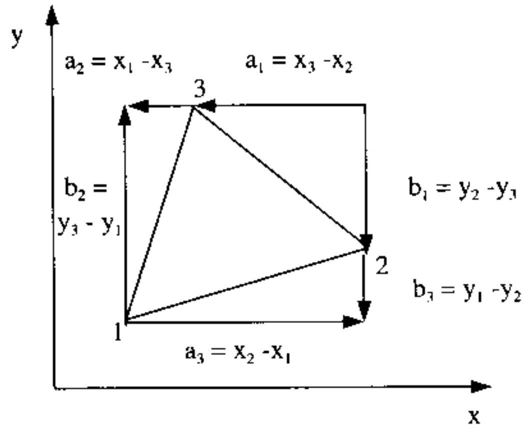
$$l_1 = \frac{A_1}{A} \qquad l_2 = \frac{A_2}{A} \qquad l_3 = \frac{A_3}{A} \tag{2.17}$$

Trong đó: A_1, A_2, A_3 là diện tích của 3 tam giác con tạo thành bởi điểm P và các cạnh đối diện của tam giác (hình 2.4); A là diện tích của tam giác lớn.

Do quan hệ hình học

$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \tag{2.18}$$





Hình 2.4: *Tọa độ cục bộ của phần tử hữu hạn tam giác*

Tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 là:

Nút 1: (1, 0, 0)

Nút 2: (0, 1, 0)

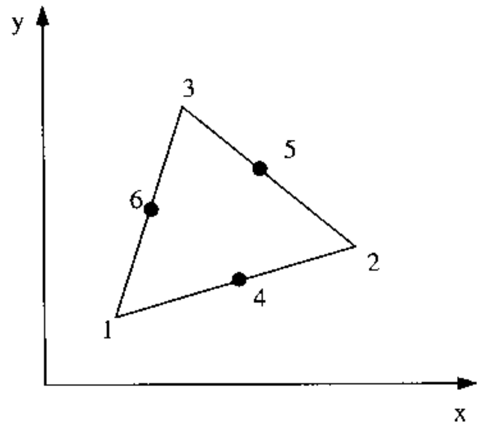
Nút 3: (0, 0, 1)

Tọa độ tự nhiên của các điểm giữa của các cạnh tam giác (hình 2.5) là:

Nút 4: (1/2, 1/2, 0)

Nút 5: (0, 1/2, 1/2)

Nút 6: (1/2, 0, 1/2)



Hình 2.5

Diện tích của tam giác biểu thị bằng hàm của các tọa độ x, y tại các nút 1, 2, 3:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

Diện tích của các tam giác con (hình 2.4) là:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

Trong đó: x,y là tọa độ của một điểm P bất kỳ nằm trong phần tử hữu hạn hoặc nằm trên biên của nó.

Theo tài liệu [3], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

Để xác định các tính chất của phần tử hữu hạn, cần phải tính đạo hàm đối với các tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_2}\cdot\frac{\partial l_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_3}\cdot\frac{\partial l_3}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_1} + \frac{b_2}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_2} + \frac{b_3}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_3}$$

Trong đó: $b_1 = y_2 - y_3$;

$b_2 = y_3 - y_1$;

$b_3 = y_1 - y_2$. (xem hình 2.4)

Tương tự như trên , ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_i} \qquad (2.23b)$$

Trong đó: $a_1 = x_3 - x_2$;

$a_2 = x_1 - x_3$;

$a_3 = x_2 - x_1$. (xem hình 2.4)

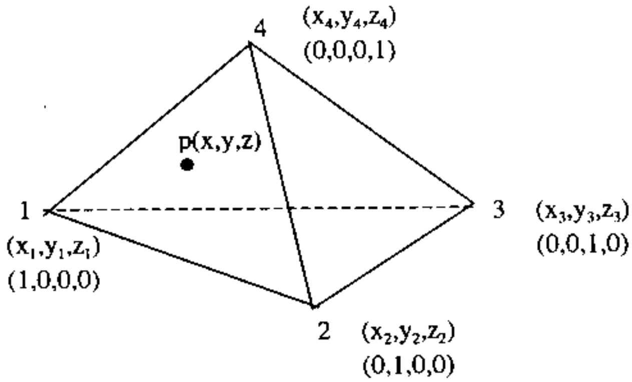
Theo tài liệu [5], tích phân diện tích tính theo công thức:

$$\int_A l_1^p . l_2^q . l_3^r . dA = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)\ !}.2A \qquad (2.24)$$

Trong đó: 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

§ 2.3.3. Phần tử hữu hạn tứ diện 3 chiều

Xét khối tứ diện 3 chiều biểu thị trên hình (2.6)



Hình 2.6. *Khối tứ diện 3 chiều*

Một điểm P bất kỳ trong khối tứ diện (hình 2.6) được xác định bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

$$l_i = \frac{V_i}{V} \tag{2.25}$$

Trong đó: V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm i (i = 1, 2, 3, 4), V là thể tích của khối tứ diện lớn (hình 2.6). Chẳng hạn V_1 là khối tứ diện tạo bởi điểm P và mặt 234 (đối diện với nút 1). l_1 là tỷ số giữa thể tích V_1 và thể tích V. Thể tích V được xác định bằng định thức* của các tọa độ tại các nút như sau:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Theo tài liệu [5], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên của điểm P có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Cần chú ý rằng:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 1$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và toạ độ vuông góc:

---

* Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng ký hiệu | | để biểu thị định thức của ma trận.

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} v_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ v_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Trong đó:

V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm nút i; a_i, b_i, c_i lần lượt là diện tích hình chiếu của mặt đối diện với nút i lên các mặt phẳng tọa độ x y z ; a_i, b_i, c_i có dạng như sau:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(z_j y_k - z_k y_j\right) + \left(z_k y_l - z_l y_k\right) + \left(z_l y_j - z_j y_l\right) \\ b_i &= \left(z_j x_k - z_k x_j\right) + \left(z_k x_l - z_l x_k\right) + \left(z_l x_j - z_j x_l\right) \\ c_i &= \left(y_j x_k - y_k x_j\right) + \left(y_k x_l - y_l x_k\right) + \left(y_l x_j - y_j x_l\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Các chỉ số i, j, k, l theo thứ tự vòng tròn ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$)

Các đạo hàm riêng của tọa độ tự nhiên đối với tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial l_i}{\partial x} = \frac{a_i}{6V} \qquad \frac{\partial l_i}{\partial y} = \frac{b_i}{6V}; \qquad \frac{\partial l_i}{\partial z} = \frac{c_i}{6V} \tag{2.30}$$

Tích phân thể tích của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\int_V l_1^p l_2^q l_3^r l_4^s dV = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)\;!} 6V \tag{2.31}$$

§2.4. HÀM ĐỊNH DẠNG (HÀM NỘI SUY)

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng mô hình chuyển vị và nêu lên giả thiết về sự biến thiên của các thành phần chuyển vị vì ta chưa biết sự biến thiên thực tế của chúng. Về mặt toán học, người ta nêu lên những hàm mà dạng giải tích của nó hoàn toàn chưa biết hoặc gặp phải nhiều khó khăn trong các phép tính. Vì vậy, người ta tìm cách thay các hàm đó bằng hàm đơn giản hơn gọi là *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy*. Có 2 loại hàm nội suy:

1. Hàm nội suy Lagrange.

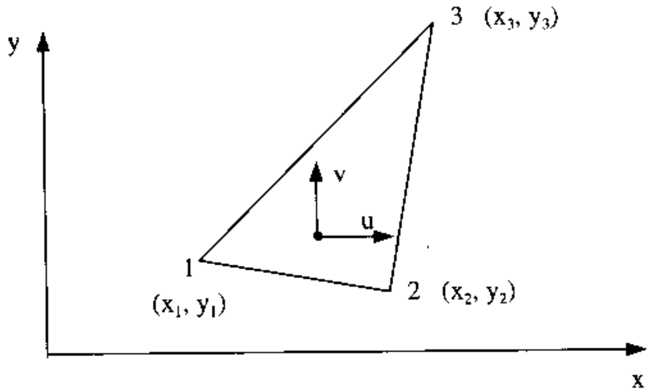
2. Hàm nội suy Hecmit

Trong mục này ta chỉ nghiên cứu hàm nội suy Lagrange còn được gọi là *hàm hình dạng*.

Hàm hình dạng Lagrange có thể suy ra từ các phương trình (2.10) và (2.11). Việc sử dụng hệ tọa độ tự nhiên như đã trình bày trong phần trước, tỏ ra có nhiều ưu điểm trong quá trình tính toán.

2.4.1. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc nhất

Sự biến thiên tuyến tính của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn tam giác (hình 2.7) có thể biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:



Hình 2.7: Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3 của phần tử hữu hạn có thể viết:

$$u = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \tag{2.32}$$

Nếu kết hợp cả 3 thành phần chuyển vị, ta có dạng ma trận:

Dưới dạng ma trận: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_2.\alpha$ (2.33)

Trong đó: $\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 vào hệ thức trên ta có véctơ các thành phần chuyển vị $\mathbf{d}_u$ như sau:

$$\mathbf{d}_u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\boldsymbol{\alpha} \tag{3.34}$$

do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Từ phương trình (2.33) ta có:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\mathbf{d}_u$$

Ma trận trên có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N'_2 d_u} \tag{2.36a}$$

Trong đó:

$$\mathbf{N'_2} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Một cách tương tự, các thành phần chuyển vị trên phương y tại các nút 1, 2, 3 có dạng ma trận:

$$\mathbf{v = N_{2n}.d_V} \tag{2.36b}$$

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u và v trên phương x và y biểu thị trên hình (2.8).

Cuối cùng, ma trận các thành phần chuyển vị tại 1 điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn có dạng:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N'_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N'_2} \end{bmatrix} \cdot \; q \tag{2.38}$$

tức là:

$$\mathbf{u = N.q} \tag{2.39}$$

Trong đó:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_u} \\ \mathbf{d_v} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Trong đó: **u** là vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 trên các phương x và y; **N** là ma trận hàm hình dạng.

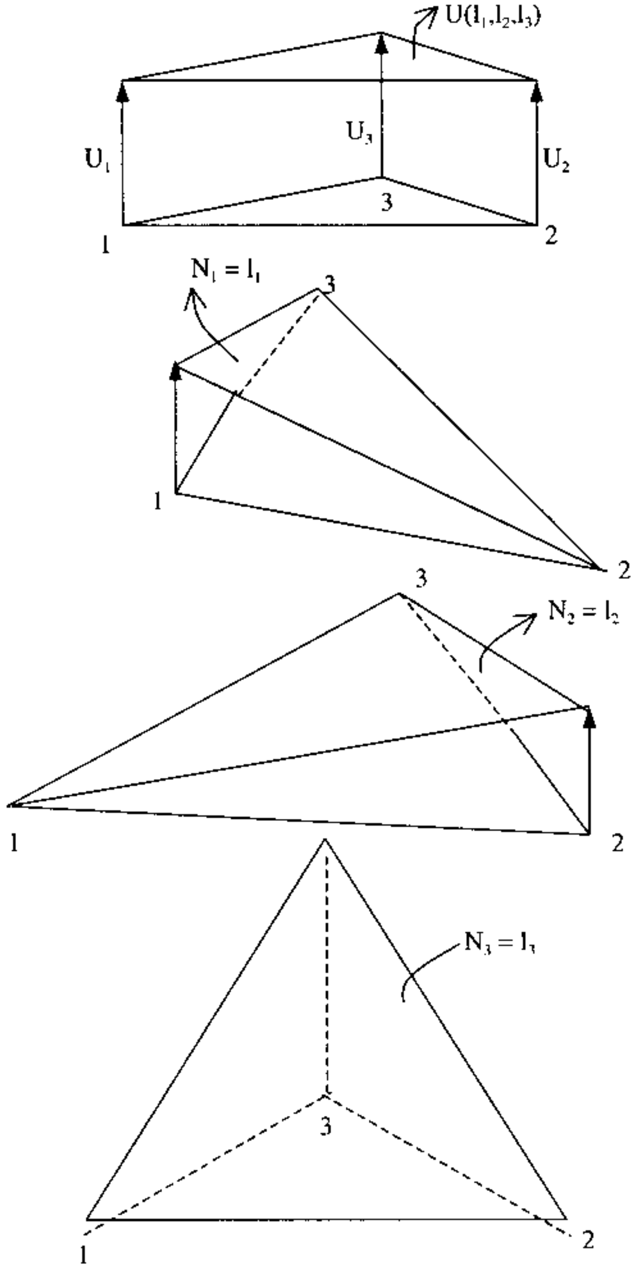
Đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút:

$$N_1 = l_1 \qquad N_2 = l_2 \qquad N_3 = l_3$$

Do đó, các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y, có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \\ v &= N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Cần lưu ý rằng hàm hình dạng N_i (i = 1, 2, 3) có giá trị bằng đơn vị tại nút i và có giá trị bằng không tại những nút còn lại.

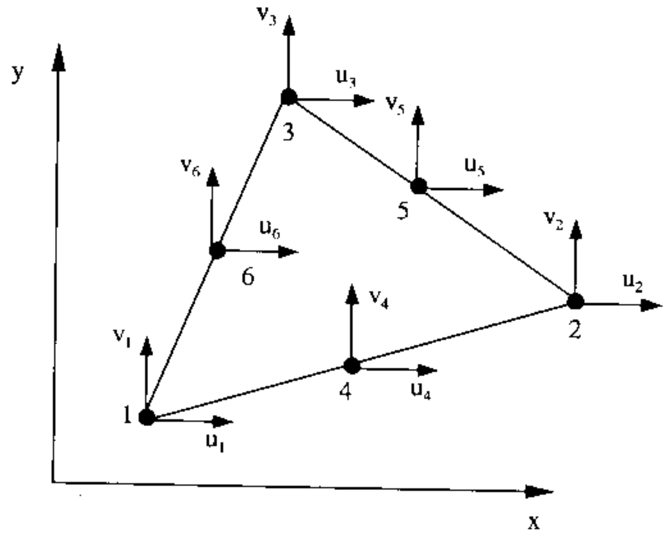


Hình 2.8: *Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút*

2.4.2. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc hai.

Sự biến thiên bậc hai của các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn tam giác 6 nút (hình 2.9) có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$u = \alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 + \alpha_4 l_1 l_2 + \alpha_5 l_2 l_3 + \alpha_6 l_3 l_1 \qquad (2.43)$$



Hình 2.9: *Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút*

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào hệ thức (2.43) ta có:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

tức là:

$$\mathbf{d_u} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A^{-1}}.\mathbf{d_u} \tag{2.46}$$

Nghịch đảo của ma trận A có dạng:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Có thể viết:

$$\mathbf{N}'_2 = \boldsymbol{\phi}_2.\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_1 l_2 & l_2 l_3 & l_3 l_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(l_1^2 - l_1 l_2 - l_3 l_1\right) \quad \left(l_2^2 - l_1 l_2 - l_2 l_3\right) \quad \left(l_3^2 - l_2 l_3 - l_3 l_1\right) \quad 4l_1 l_2 \quad 4l_2 l_3 \quad 4l_3 l_1 \right]$$

(2.48a)

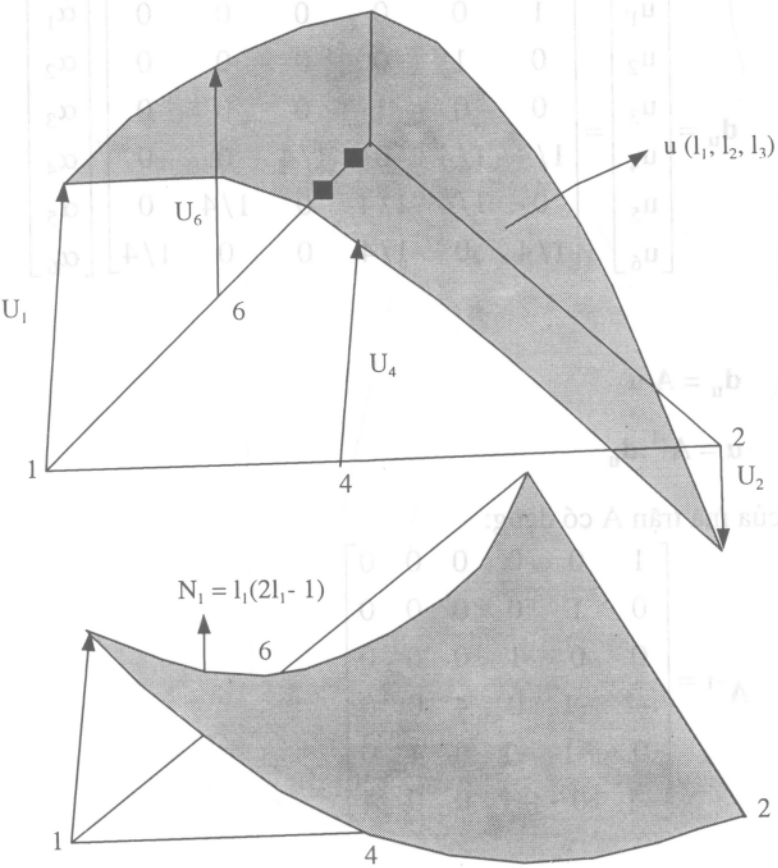
Sau khi đơn giản hoá (căn cứ vào $l_1 + l_2 + l_3 = 1$):

$$\mathbf{N'_2} = \left[l_1(2l_1 - 1) \quad l_2(2l_2 - 1) \quad l_3(2l_3 - 1) \quad 4l_1 l_2 \quad 4l_2 l_3 \quad 4l_3 l_4 \right] \qquad (2.48b)$$

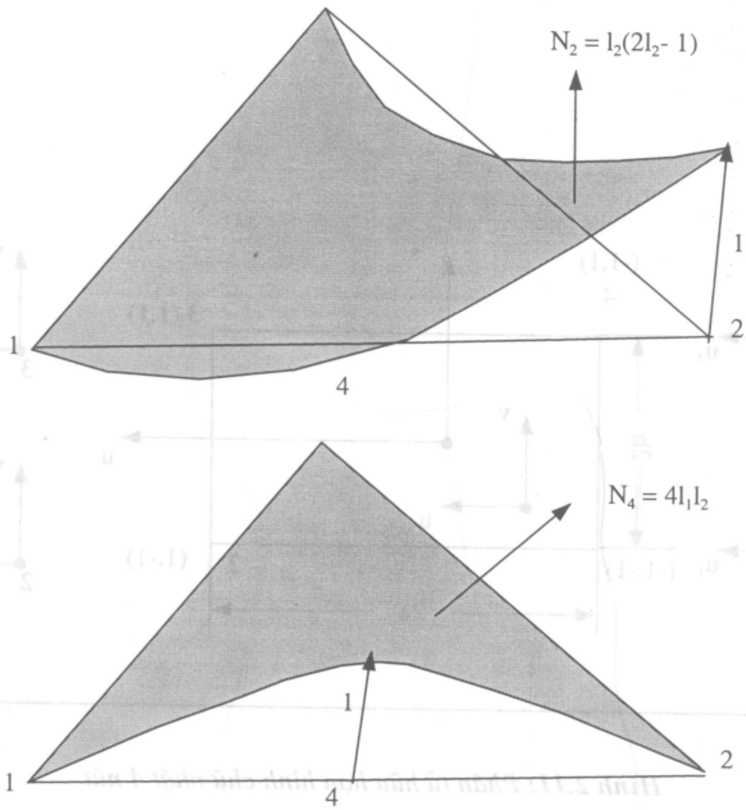
Dưới dạng ngắn gọn:

$$\mathbf{N'_2} = \left[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \right] \qquad (2.48)$$

Trong đó, các hàm hình dạng $N_i(1, 2, 3\ldots6)$ được biểu thị trong (2.48b). Hình (2.10a, b) cho ta thấy sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_4



Hình 2.10



***Hình 2.10b**: Sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng trong phần tử hữu hạn tam giác 6 nút.*

Vậy là các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng hệ thức ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N_2'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N_2'} \end{bmatrix} .\mathbf{q} \tag{2.49a}$$

hay $$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.49}$$

Trong đó: $\mathbf{N_2'}$ tính theo (2.48b)

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

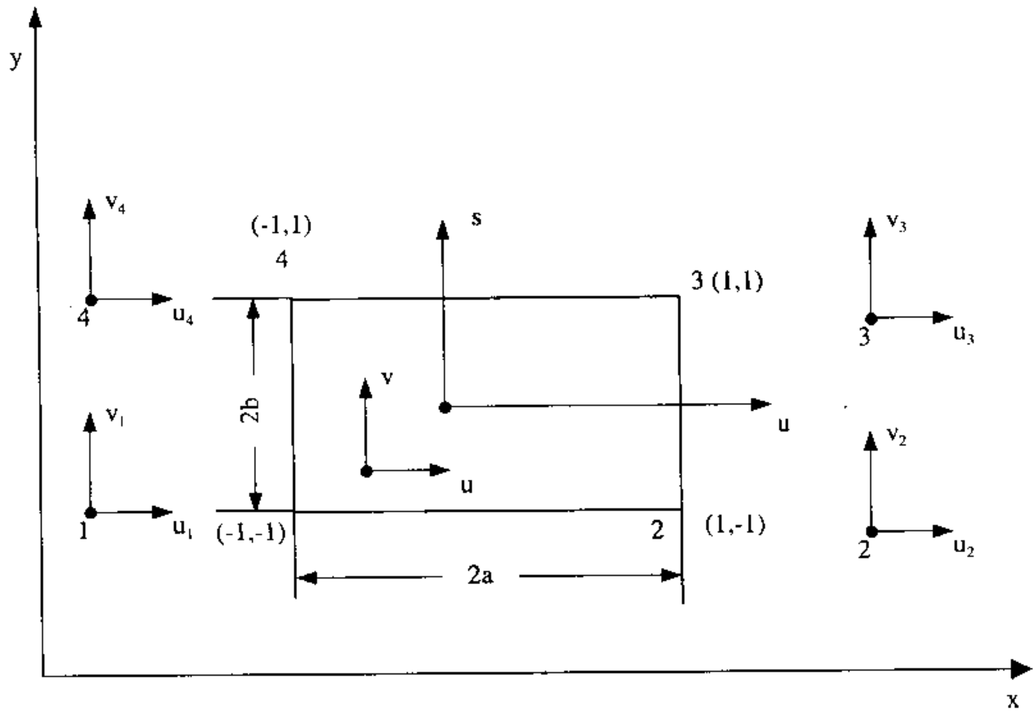
(xem hình 2.9)

2.4.3. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc nhất.

Tọa độ tự nhiên đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật (hình 2.11) được xác định như sau:

$$r = \frac{x - x_c}{a} \qquad s = \frac{y - y_c}{b} \tag{2.51}$$

Trong đó: x_c và y_c là toạ độ của tâm phần tử hữu hạn hình chữ nhật.



***Hình 2.11:** Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút*

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3, 4 có thể biểu thị bằng hàm đa thức:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \tag{2.52}$$

Thay tọa độ tự nhiên tại các nút vào (2.52), ta được vectơ các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút (hình 2.11) như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

Do đó: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u}$

Ma trận nghịch đảo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Vậy:

$$\mathbf{N_2'} = \phi_2 \ .\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} c & r & s & r & s \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

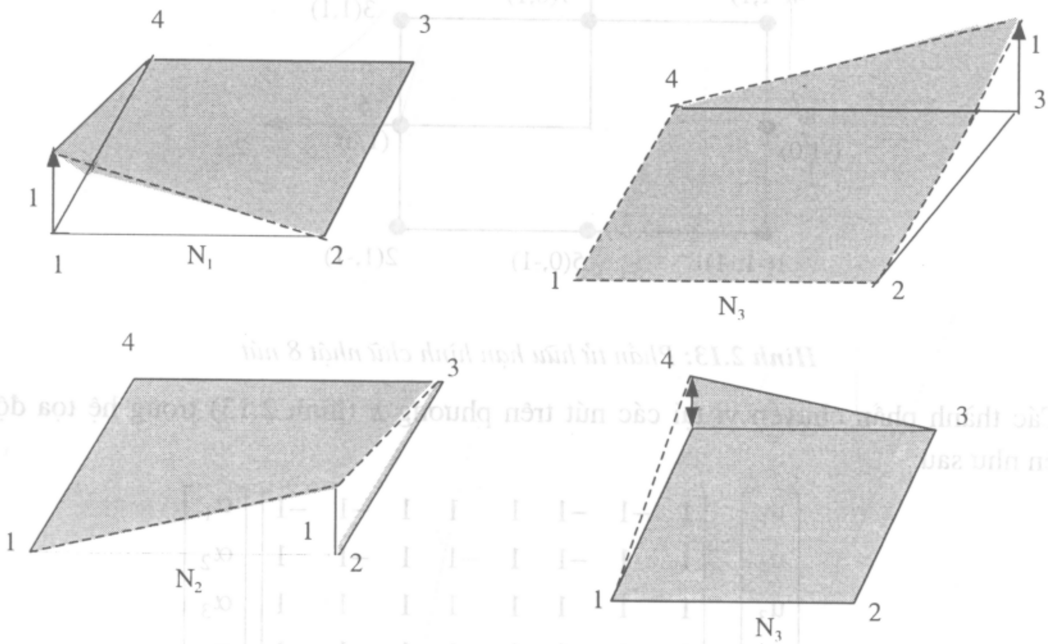
và

$$\mathbf{N_2'} = \left[\frac{(1-r)(1-s)}{4} \quad \frac{(1+r)(1-s)}{4} \quad \frac{(1+r)(1+s)}{4} \quad \frac{(1-r)(1+s)}{4} \right] \quad (2.56a)$$

Hệ thức trên có thể viết:

$$\mathbf{N_2'} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

Trong đó các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 tính theo (2.56a). Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 biểu thị trên hình (2.12).



Hình 2.12: Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút

Ma trận hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút có dạng:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N_2'} & 0 \\ 0 & \mathbf{N_2'} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Trong đó: $\mathbf{N_2'}$ tính theo (2.56) và (2.56a)

Cuối cùng ta có hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.58}$$

Trong đó:

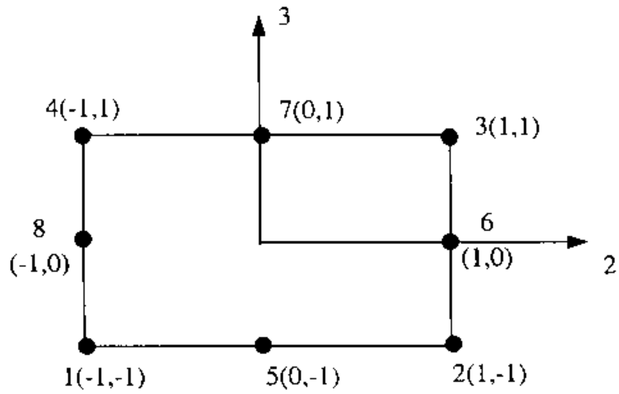
$$\mathbf{q}^t = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

(xem hình 2.11)

2.4.4. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc hai.

Sự biến thiên của một trong các thành phần chuyển vị u (trên phương x) có thể biểu thị bằng đa thức trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 \tag{2.60}$$



Hình 2.13: Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 8 nút

Các thành phần chuyển vị tại các nút trên phương x (hình 2.13) trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u} \tag{2.62}$$

Nghịch đảo của ma trận **A**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Vậy: $$\mathbf{N}_2' = \phi_2 . \mathbf{A}^{-1} \tag{2.64}$$

$$\phi_2' = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2s & rs^2 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Thay (2.65) vào (2.64) và đơn giản hoá, ta có:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(-r-s-1) & \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(r-s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1-s) & \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1+s) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1-s) \end{bmatrix} \tag{2.64b}$$

Ma trận $\mathbf{N'}_2$ có thể viết:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Các hàm hình dạng $N_1, N_2, \ldots, N_8$ tính theo (2.64b)

Cuối cùng, ma trận hàm hình dạng có thể viết:

$$\mathbf{N'} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & \mathbf{0'} \\ \mathbf{0'} & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Ma trận các thành phần chuyển vị tại một điểm trong phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q} \tag{2.67}$$

Trong đó: $$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

§2.5. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG PHẦN TỬ HỮU HẠN

Hệ thức (1.11) trong chương một sẽ giúp ta tính biến dạng tại một điểm trong phần tử hữu hạn thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

Nói chung, hệ thức biến dạng - chuyển vị của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{2.69}$$

Trong đó:

ε là véctơ biến dạng tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

B gọi là ma trận biến dạng - chuyển vị. Theo (1.16) (chương một) và (2.69), ta có hệ thức giữa ứng suất pháp và chuyển vị của phần tử hữu hạn như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\varepsilon = \mathbf{D.B.q} \tag{2.70}$$

Trong đó: **σ** là vectơ các thành phần ứng suất tại một điểm trong phần tử hữu hạn;

D là ma trận cấu trúc vật liệu (xem công thức 1.17);

q đã được định nghĩa ở phần trên.

Ví dụ: Suy ra ma trận **B** đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút biểu thị trên hình (2.7). Ta làm như sau:

Theo (2.39) và (2.41) ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Mặt khác, từ (1.11) đối với bài toán 2 chiều, ta có:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Theo (2.23a) và (2.23b) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}u_1 + \frac{b_2}{2A}u_2 + \frac{b_3}{2A}u_3 = \frac{1}{2A}\left(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3\right)$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(a_1 + a_2 + a_3u_3 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3\right)$$

Vậy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

§2.6. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VECTƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong các phần trước, ta đã suy ra các biểu thức về ma trận hàm hình dạng **N** và ma trận biến dạng - chuyển vị **B**.

Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng. Nguyên lý công ảo trình bày trong chương một sẽ giúp ta làm việc này.

Trong bài toán tổng quát 3 chiều, theo (1.37) công ảo của nội lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \boldsymbol{\delta}_{\varepsilon}'.\boldsymbol{\sigma} dv \qquad (2.71)$$

Theo (1.35) công ảo của ngoại lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{u}}.\mathbf{f} dv + \iint \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{u}}.\mathrm{T} ds \qquad (2.72)$$

Theo (2.39), (2.69) và (2.70), ta có:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \qquad (2.73)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \qquad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.B.q} \qquad (2.75)$$

Từ (2.73) ta suy ra:

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}} = \mathbf{N}.\delta_{\mathbf{q}} \qquad (a)$$

Từ (2.74) ta suy ra:

$$\boldsymbol{\delta}_{\varepsilon} = \mathbf{B}.\delta_{\mathrm{q}} \qquad (b)$$

Thay (b) và (2.75) vào (2.71), ta có:

$$\delta U = \iiint \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}}.\mathbf{D.B.q}.dV = \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}} \iiint \mathbf{B}'.\mathbf{D.B.q}.dV \qquad (2.76)$$

Thay (a) vào (2.72), ta có:

$$\begin{aligned} \delta w_e &= \iiint \boldsymbol{\delta}'\mathbf{q}.\mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \iint \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{q}}'.\mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \\ &= \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{q}}' \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{q}}' \iint \mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \end{aligned} \qquad (2.77)$$

Theo (1.38), ta có:

$$\delta w_e = \delta U \Rightarrow \iiint (\mathbf{B}'.\mathbf{D.B}dv)\mathbf{q} + \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}dV + \iint \mathbf{N}'^{s}.\mathbf{T}.ds$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\mathbf{k.q} = \mathbf{t} \qquad (2.78)$$

Trong đó: $\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B'.D.B}dV$ (2.79)

$\mathbf{t} = \iiint \mathbf{N'.f}.dV + \iint \mathbf{N'^s.T}.ds$ (2.80)

(2.78) là hệ phương trình cân bằng của phần tử hữu hạn.

k gọi là *ma trận độ cứng* của phần tử hữu hạn.

t gọi là *vectơ tải trọng* của phần tử hữu hạn.

$\mathbf{N'^s}$ là ma trận hàm hình dạng ứng với mặt có lực biên T tác dụng.

f véctơ lực thể tích (do trọng lượng)

$$\mathbf{f'} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}$$

T vectơ các lực biên:

$$\mathbf{T'} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}$$

Các công thức (2.79) và (2.80) áp dụng cho bài toán 3 chiều

Trong bài toán 2 chiều, giả sử bề dày h của kết cấu không đổi, ta có:

$$dV = dA.h\ , \qquad ds = h.dl$$

dA - phân tố diện tích;

dl - phân tố đoạn thẳng men theo đó có lực biên T tác dụng

Giả sử **B** chứa các hằng số. Thay các hệ thức trên vào (2.78), ta có:

$\mathbf{k} = h\int \mathbf{B'.D.B}dA = h.\mathbf{B'.D.B}\int_A dA$, do đó:

$$\mathbf{k} = Ah\mathbf{B'.D.B} \tag{2.81}$$

Trong đó: A - diện tích tấm hai chiều.

Một cách tương tự, ta có:

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N'.f}.dA + h\int \mathbf{N'^s T}dl \tag{2.82a}$$

hay

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N'.f}.dx.dy + h\int \mathbf{N'^s T}dl \tag{2.82}$$

Trong bài toán một chiều:

$$dV = Adx, \qquad ds = dx, \qquad \mathbf{D} = E$$

Trong đó: A - diện tích tiết diện của mặt cắt ngang;

dx- phân tố đoạn thẳng trên trục x;

E - môđun đàn hồi.

Vậy ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = \int \mathbf{B'}.E.\mathbf{B}.Adx = \mathbf{B'}.E.\mathbf{B}.A\int_e dx$$

Nếu **B** là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_e E\mathbf{B}'.\mathbf{B} \tag{2.83a}$$

Nếu **B** không phải là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_e E\int \mathbf{B}'.\mathbf{B}\mathbf{dx} \tag{2.83b}$$

Trong đó: L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn;

E - môđun đàn hồi (trong kết cấu một chiều, **D** = E).

Theo (2.80) vectơ tải trọng:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \int \mathbf{N}'.\mathbf{f}.A dx + \int \mathbf{N}'^s.\mathbf{T} dx \Rightarrow \\ \mathbf{t} &= A.\mathbf{f}\int \mathbf{N}' dx + \mathbf{T}\int \mathbf{N}'^s dx \end{aligned} \tag{2.84}$$

Chương 3
BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

§3.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

Trong bài toán một chiều, ứng suất, biến dạng, chuyển vị và tải trọng chỉ phụ thuộc vào một biến là x. Như vậy, chuyển vị u, ứng suất σ, biến dạng ε, véc tơ lực thể tích **f**, véc tơ lực biên **T** là những hàm của x.

$$u = u(x) \qquad \sigma = \sigma(x) \qquad \varepsilon = \varepsilon(x) \tag{3.1}$$
$$f = f(x) \qquad T = T(x)$$

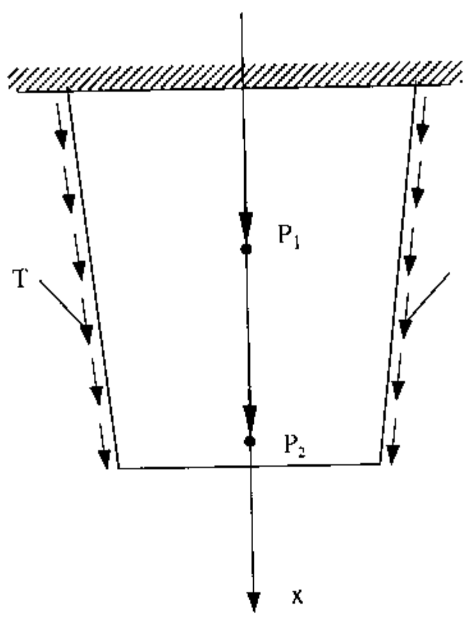
Các hệ thức ứng suất - biến dạng và ứng suất - chuyển vị

$$\sigma = E \,.\, \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{3.2}$$

Thể tích của phần tử hữu hạn:

$$dV = Adx \tag{3.3}$$

Trong đó: A là diện tích tiết diện của phần tử hữu hạn một chiều (thực ra là một đoạn thanh thẳng).



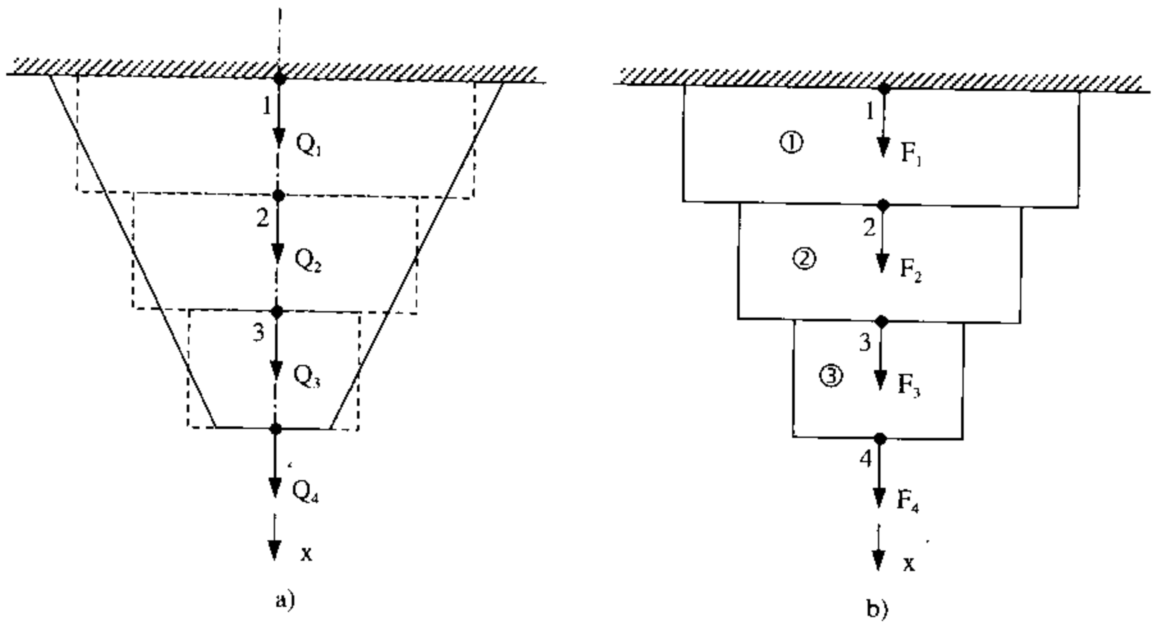
Hình 3.1. Thanh một chiều chịu tác dụng của các lực

Tải trọng gồm có: lực thể tích f không biểu thị trên hình vẽ, lực biên T, tải trọng điểm P_i. Lực thể tích (chẳng hạn như trọng lượng) tác dụng lên thể tích của vật thể và được tính trên đơn vị thể tích. Lực biên T tác dụng trên mặt biên của vật thể và được tính trên đơn vị diện tích. Các lực này biểu thị trên hình (3.1). Lực ma sát, lực nhờn, lực tiếp xúc là những ví dụ về lực biên. Cuối cùng, P_i là lực tác dụng tại điểm i.

Dưới đây, sẽ nghiên cứu mô hình phần tử hữu hạn áp dụng cho kết cấu một chiều.

§3.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN ÁP DỤNG CHO KẾT CẤU MỘT CHIỀU

Ta hãy xét thanh trên hình (3.2a). Trước hết, ta chia nó ra thành một số miền gọi là phần tử hữu hạn, chẳng hạn chia thành 3 miền, mỗi miền có diện tích mặt cắt ngang không thay đổi (hình 3.2b).



Hình 3.2. Mô hình phần tử hữu hạn đối với thanh thẳng

Mô hình phần tử hữu hạn cùng 4 điểm nút biểu thị trên hình (3.2b). Số thứ tự các phần tử hữu hạn được khoanh tròn để phân biệt với số thứ tự các điểm nút. Mặt cắt ngang, lực thể tích và lực biên được xem như không đổi trong mỗi phần tử hữu hạn. Chúng chỉ thay đổi từ phần tử hữu hạn này đến phần tử hữu hạn khác. Cần chú ý rằng, kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng nhiều. Để tiện cho việc tính toán, ta đặt nút tại điểm có tải trọng tập trung tác dụng.

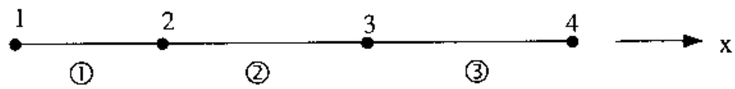
Trong bài toán một chiều, mỗi điểm nút chỉ được phép chuyển vị trên phương x, nghĩa là mỗi điểm nút chỉ có một bậc tự do. Trên hình (3.2b), mô hình phần tử hữu hạn có 4 nút nghĩa là toàn hệ có 4 bậc tự do. Chuyển vị tại các nút được biểu thị bằng các đại lượng Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Véc tơ cột $\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]'$ gọi là véc tơ chuyển vị tổng thể. Véc tơ tải trọng tổng thể:

$\mathbf{F'} = [F_1\ F_2\ F_3\ F_4]$ gồm các tải trọng tác dụng tại các nút (xem hình 3.2)

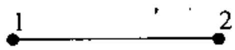
Dấu của chuyển vị và tải trọng quy ước là dương khi cùng chiều với chiều dương của trục x, là âm trong trường hợp ngược lại.

Điều kiện biên: $Q_1 = 0$ tại điểm ngàm

Mỗi phần tử hữu hạn có hai nút. Sơ đồ liên kết giữa các phần tử biểu thị trên hình (3.3).



Số thứ tự các phần tử và số thứ tự nút tổng thể



Số thứ tự nút cục bộ

Số thứ tự nút cục bộ và số thứ tự nút tổng thể (xem bảng dưới)

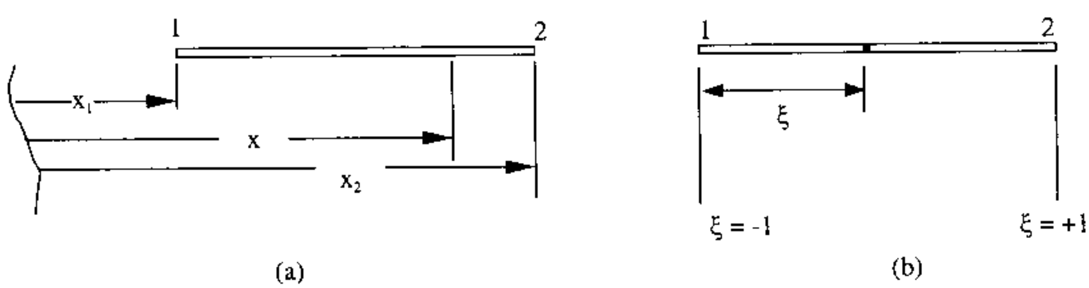
Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ		Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2	1	2
2	1	2	2	3
3	1	2	3	4

***Hình 3.3.** Sơ đồ liên kết giữa các phần tử hữu hạn*

Bảng thống kê các phần tử và các nút tương ứng biểu thị trên hình (3.3). Ở đây, các số thứ tự 1 và 2 tại các nút của mỗi phần tử là những chỉ số có tính chất cục bộ.

§3.3. TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN VÀ HÀM HÌNH DẠNG

Giả sử một phần tử hữu hạn e biểu thị như trên hình (3.4a).



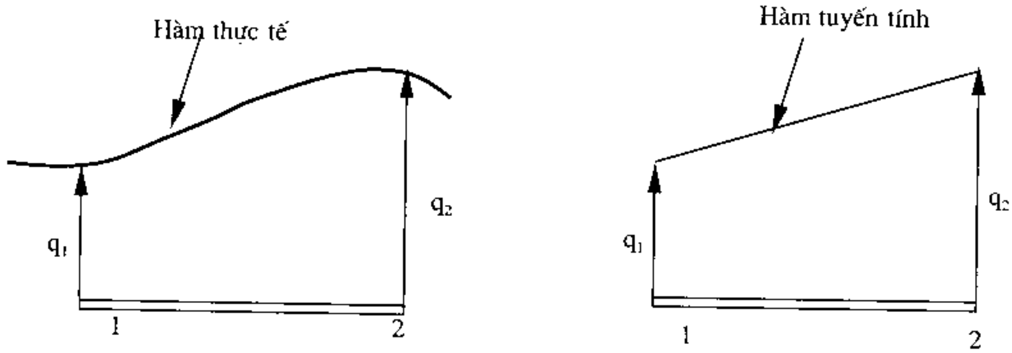
***Hình 3.4.** Phần tử hữu hạn trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự của nút đầu tiên là 1, của nút thứ 2 là 2. Nút 1 có toạ độ x_1, nút 2 có toạ độ x_2. Hệ toạ độ tự nhiên được định nghĩa như sau:

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{3.4}$$

Từ hệ thức trên, ta có $\xi = -1$ tại nút 1 và $\xi = 1$ tại nút 2 (hình 3.4b). Ta sẽ dùng hệ tọa độ tự nhiên này dễ suy ra hàm hình dạng.

Trường chuyển vị chưa biết trong phạm vi phần tử hữu hạn sẽ được nội suy qua sự phân bố tuyến tính (hình 3.5).



Hình 3.5. Hàm nội suy tuyến tính của chuyển vị trong phần tử hữu hạn

Đây là một giả thiết gần đúng nhưng kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng lớn.

Ta đưa vào các hàm biến dạng như sau:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{3.5}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3.6}$$

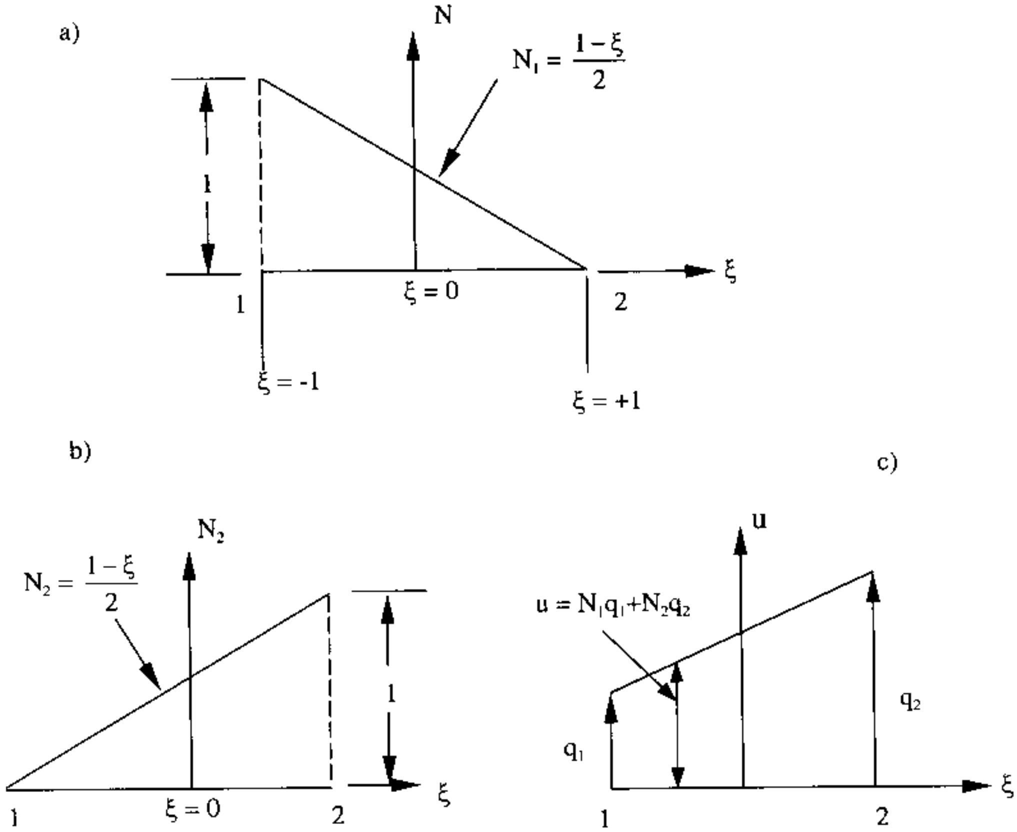
Các hàm hình dạng này biểu thị trên các hình (3.6a) và (3.6b). Khi các hàm hình dạng được xác định, trường chuyển vị tuyến tính trong phạm vi phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị q_1 và q_2 tại các nút.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \tag{3.7a}$$

Dưới dạng ma trận $\quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad$ (3.7b)

Trong đó: $\quad \mathbf{N} = [N_1 \; N_2] \qquad \mathbf{q}' = [q_1 \; q_2] \quad$ (3.8)

Trong các phương trình trên, **q** là véc tơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn. Từ phương triình (3.7a), $u = q_1$ tại nút 1 và $u = q_2$ tại nút 2 và chuyển vị u trong phần tử hữu hạn biến đổi tuyến tính.



Hình 3.6:

a) Hàm hình dạng N_1; b) Hàm hình dạng N_2 ; c) Hàm nội suy tuyến tính.

Cần chú ý rằng từ phương trình (3,4), có thể thực hiện phép biến đổi từ toạ độ tự nhiên ξ sang tọa độ x;

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 \tag{3.9}$$

So sánh (3.7a) với (3.9), ta thấy rằng chuyển vị u và toạ độ x đã được nội suy trong phạm vi phần tử hữu hạn, thông qua các hàm hình dạng hoàn toàn như nhau. Ta gọi phép biến đổi này là *phép biến đổi cùng tham số*.

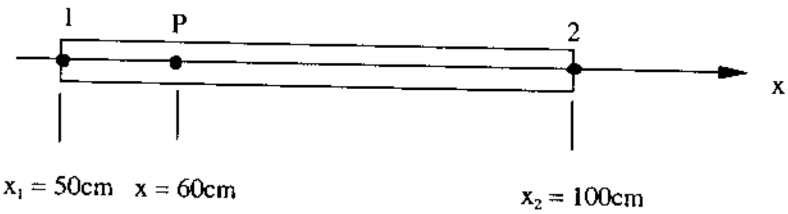
Nói chung, các hàm hình dạng phải thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Đạo hàm bậc nhất phải hữu hạn trong phạm vi phần tử hữu hạn.
2. Chuyển vị phải liên tục trên biên của phần tử hữu hạn.

Ví dụ 3.1. Cho một thanh trên hình (3.7)

a) Tính ξ, N_1 và N_2 tại điểm P.

b) Nếu $q_1 = 0{,}2$cm, $q_2 = 0{,}5$cm, xác định giá trị chuyển vị u tại điểm P.



Hình 3.7

Giải:

a) Theo (3.4), ta có: $$\xi = \frac{2}{(100-50)}(60-50) - 1 = -0,6$$

Theo (3,5) và (3,6) $$N_1 = \frac{1-(-0,6)}{2} = 0,8$$

$$N_2 = \frac{1-0,6}{2} = 0,2$$

b) Theo (3.7a) $$u_p = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 = 0,26 \text{ cm}$$

Theo (3.2), hệ thức biến dạng - chuyển vị:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \tag{3.10}$$

Theo (3.4) $$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \tag{3.11}$$

Do đó: $$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \frac{1-\xi}{2} q_1 + \frac{1+\xi}{2} q_2$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \tag{3.12}$$

Theo (3.10): $$\varepsilon = \frac{1}{x_2 - x_1}(-q_1 + q_2) \tag{3.13}$$

Dưới dạng ma trận: $$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \tag{3.14}$$

Trong đó: $$\mathbf{B} = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{q}' = [q_1 \; q_2] \tag{3.16}$$

B *là ma trận biến dạng - chuyển vị* cấp 1 × 2 đồng thời là ma trận chứa các hằng số.

Theo định luật Húc, ứng suất trong phần tử hữu hạn

$$\sigma = E.\, \varepsilon$$

Thay (3.14) vào hệ thức trên, ta có:

$$\sigma = E\,(\mathbf{B}\,.\,\mathbf{q}) \tag{3.17}$$

Theo (3.17), ứng suất σ là một hằng số trong phạm vi phần tử hữu hạn. Nó được xem như tác dụng tại trọng tâm của tiết diện.

§3.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong phần trên, ta đã suy ra các biểu thức của ứng suất, biến dạng, hàm hình dạng N, ma trận biến dạng - chuyển vị **B**. Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trong của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng.

3.4.1. Ma trận độ cứng

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo đã trình bày trong chương một dễ suy ra ma trận độ cứng.

Áp dụng công thức (2.83a) ta có ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = A.E.\, L_e\, (\mathbf{B'B}) \tag{3.18}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang của thanh;

E - mô đun đàn hồi;

L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn.

Thay (3.15) vào (3.18), ta có:

$$\mathbf{k}_e = AEL_e \frac{1}{L_e}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \times \frac{1}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, hệ thức trên trở thành:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

3.4.2. Vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn

Áp dụng công thức (2.84), ta có vectơ tải trọng:

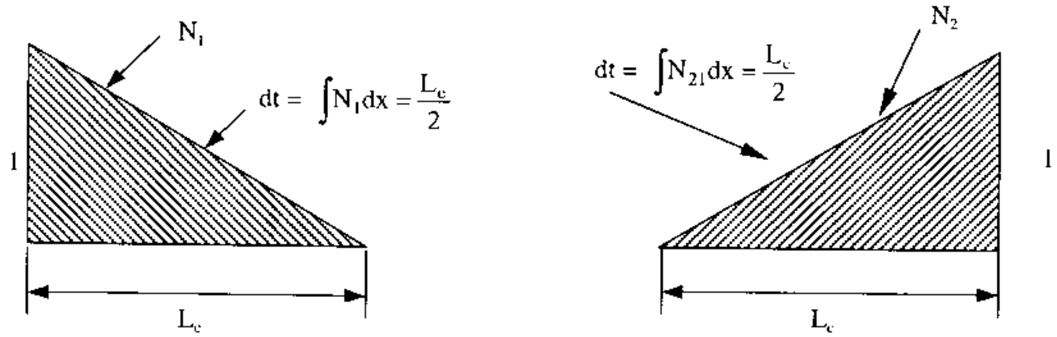
$$\mathbf{t}_e = A_e\, .\, f_e \int \mathbf{N}'dx + T_e \int \mathbf{N}'dx \tag{3.20}$$

Trong đó: f_e - Vectơ lực thể tích của phần tử e;

T_e - Vectơ lực biên của phần tử e;

N - hàm hình dạng.

Các hàm hình dạng N_1 và N_2 biểu thị trên hình (3.8).



Hình 3.8. *Tích phân* $\int N_1 dx$ *và* $\int N_2 dx$

Áp dụng công thức (3.8) vào (3.20), ta có:

$$\mathbf{t}_e = A_e.\ f_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} dx + T_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} dx$$

$$= A_e.f_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix} + T_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào giá trị tích phân trên hình (3.8), ta có:

$$\mathbf{t}_e = \frac{A_e.L_e.f_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T_e L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Ý nghĩa vật lý của công thức (3.21) như sau. Tích $A_e l_e f_e$ biểu thị tổng lực thể tích của phần tử hữu hạn e; tích $T_e.L_e$ biểu thị tổng lực biên tác dụng trên phần tử hữu hạn. Các lực này đều chia đều cho hai đầu của phần tử hữu hạn.

Sau khi tính được ma trận độ cứng và vec tơ tải trọng của các phần tử hữu hạn, ta ghép chúng lại để được *ma trận độ cứng tổng thể* và *vec tơ tải trọng tổng thể.*

Gọi **K** là ma trận độ cứng tổng thể và **F** là vectơ tải trọng tổng thể. Ta có sơ đồ ghép như sau:

$$\mathbf{K} \leftarrow \sum \mathbf{k}_e \tag{3.22}$$

$$\mathbf{F} \leftarrow \sum \mathbf{t}_e + \mathbf{P} \tag{3.23}$$

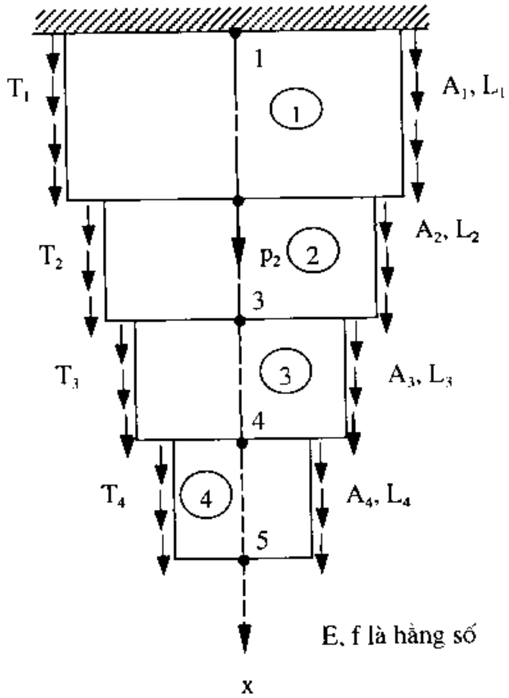
Trong đó: **P** là véc tơ tải trọng tập trung nếu có.

Ví dụ 3.2. Cho 1 thanh biểu thị trên hình (3.9). Mỗi phần tử chịu tác dụng của lực biên T trên đơn vị dài và lực thể tích f trên đơn vị thể tích. Ngoài ra, có tải trọng tập trung P tác dụng tại nút 2. Xác định ma trận độ cứng tổng thể và véc tơ tải trọng tổng thể.

Giải:

Theo (3.19), ta có ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn thứ i (i = 1, 2,3,4) như sau:

$$k_i = \frac{EA_i}{L_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3.9

Bảng 3.1. Sơ đồ liên kết các nút giữa các phần tử

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Ma trận độ cứng tổng thể có thể xác định bằng cách tính tổng của các ma trận.

$$\mathbf{K} = \frac{EA_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cách làm trên bất lợi khi tính trên máy tính điện tử vì phải lưu vào bộ nhớ quá nhiều con số 0.

Cách làm dưới đây thuận lợi cho việc lập trình. Ta đã biết rằng mỗi phần tử hữu hạn có hai bậc tự do mang các chỉ số 1 và 2. Đối với toàn hệ, nó có hai bậc tự do mang các chỉ số biểu thị như trên hình (3.9) và bảng (3.1).

Đặt $\frac{EA_i}{L_i} = e_i\left(i = 1,2,3,4\right)$, ta có các ma trận riêng (tức ma trận của các phần tử hữu hạn) như sau:

Phần tử 1: $$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(11)}{e_1} & \underset{(12)}{-e_1} \\ \underset{(21)}{-e_1} & \underset{(22)}{e_1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 2: $$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & \quad 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(22)}{e_2} & \underset{(23)}{-e_2} \\ \underset{(32)}{-e_2} & \underset{(33)}{e_2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 3: $$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & \quad 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(33)}{e_3} & \underset{(34)}{-e_3} \\ \underset{(43)}{-e_3} & \underset{(44)}{e_3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$$

Phần tử 4: $$\mathbf{k}_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & \quad 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(44)}{e_4} & \underset{(45)}{-e_4} \\ \underset{(54)}{-e_4} & \underset{(55)}{e_4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}$$

Trong các ma trận độ cứng riêng trình bày trên, các số bên ngoài biểu thị số thứ tự của các bậc tự do trong toàn hệ. Các chỉ số (ij) biểu thị vị trí của các phần tử ma trận trong ma trận độ cứng tổng thể. Chẳng hạn - $e_{4\,(54)}$ là phần tử - e_4 của ma trận k_4 nằm ở hàng thứ 5 và cột thứ 4 của ma trận độ cứng tổng thể.

Để xác định ma trận độ cứng tổng thể **k** ta lần lượt đặt các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể ở những vị trí thích hợp. Nguyên tắc ghép các ma trận riêng như sau: nếu các phần tử của các ma trận riêng cùng chỉ số ij thì chúng được cộng với nhau. Chẳng hạn $e_1(22) + e_2(22)$, e_2=(33) + e_3(33), e_3 (44) + c_4(44).

Sau khi thực hiện các bước trên, ta được:

$$\mathbf{K} = E \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \left(\frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2}\right) & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \left(\frac{A_2}{L_2}+\frac{A_3}{L_3}\right) & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{L_3} & \left(\frac{A_3}{L_3}+\frac{A_4}{L_4}\right) & -\frac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{L_4} & \frac{A_4}{L_4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \tag{3.24}$$

Theo (3.21), ta có vectơ tải trọng

$$t_i = \frac{A_iL_if_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{T_iL_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4.$$

Cách ghép các vectơ tải trọng riêng cũng làm tương tự như trên.

Phần tử 1:

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_1L_1f_1}{2} + \dfrac{T_1L_1}{2} \\ \dfrac{A_1L_1f_1}{2} \quad \dfrac{T_1L_1}{2} \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_2L_2f_2}{2} + \dfrac{T_2L_2}{2} + P_2 \\ \dfrac{A_2L_2f_2}{2} \quad \dfrac{T_2L_2}{2} \end{bmatrix}\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$\mathbf{t}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_3L_3f_3}{2} + \dfrac{T_3L_3}{2} \\ \dfrac{A_3L_3f_3}{2} \quad \dfrac{T_3L_3}{2} \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\end{matrix}$$

Phần 4:

$$\mathbf{t}_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{A_4L_4f_4}{2} + \dfrac{T_4L_4}{2} \\ \dfrac{A_4L_4f_4}{2} \quad \dfrac{T_4L_4}{2} \end{bmatrix}\begin{matrix}4\\5\end{matrix}$$

Các số bên phải biểu thị số thứ tự các bậc tự do. Để ghép các vectơ tải trọng, ta cộng với nhau các phần tử trong vectơ tải trọng cùng có bậc tự do (tức số thứ tự của hàng) như nhau.

Chẳng hạn, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_1$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_2$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_2$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_3$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_3$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_4$.

Cuối cùng, vectơ tải trọng tổng thể có dạng như sau:

$$
\left\{\begin{matrix}
\dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2} \\
\left(\dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2}\right)+\left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right) \\
\left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right)+\left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right) \\
\left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right)+\left(\dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2}\right) \\
\dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2}
\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}
$$

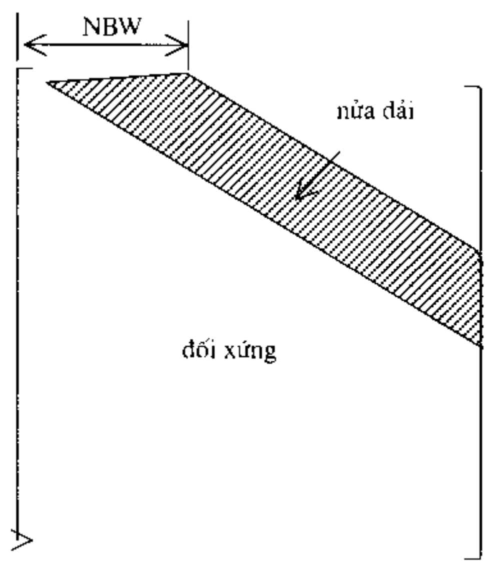
§3.5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA MA TRẬN ĐỘ CỨNG TỔNG THỂ K

Ma trận độ cứng tổng thể **K** trong bài toán một chiều có các tính chất quan trọng sau đây:

1. Ma trận **K** có cấp n × n,trong đó n là số bậc tự do hoặc số nút vì mỗi nút chỉ có một bậc tự do.

2. Ma trận **K** đối xứng (xem 3.24)

4. **K** là ma trận dải (hình 3.10)



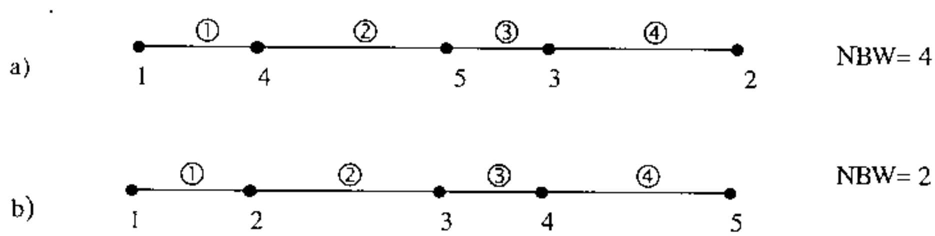
Hình 3.10. *Ma trận dải đối xứng*

Trong ma trận dải, các phần tử của ma trận phân bố trong một dải đối xứng, các phần tử còn lại đều triệt tiêu. Trong ví dụ (3.2), ma trận **K** ở (3.34) là một ma trận dải đối xứng, bề rộng nửa dải NBW = 2. Để tiết kiệm bộ nhớ khi tính trên máy tính điện tử, ta lưu các phần tử của ma trận vào một bảng hình chữ nhật như sau:

$$\begin{array}{c} \xleftrightarrow{\quad \text{NBW} = 2 \quad} \\ \mathbf{K}_d = E \begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{L_1} & -\dfrac{A_1}{L_1} \\ \dfrac{A_1}{L_1}+\dfrac{A_2}{L_2} & -\dfrac{A_2}{L_2} \\ \dfrac{A_2}{L_2}+\dfrac{A_3}{L_3} & -\dfrac{A_3}{L_3} \\ \dfrac{A_3}{L_3}+\dfrac{A_4}{L_4} & -\dfrac{A_4}{L_4} \\ \dfrac{A_4}{L_4} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận $\mathbf{K}_d$ có cấp $\mathbf{n} \times$ NBW trong đó NBW là bề rộng nửa dải tức là số phần tử trong một hàng của nửa dải. Trong các bài toán 1 chiều, mỗi phần tử hữu hạn thứ i có 2 nút i và i + 1 do đó NBW = 2. Bề rộng nửa dải có thể tính theo công thức sau:

NBW = max (hiệu các bậc tự do trong một phần tử hữu hạn)+1 (3.25)



Hình 3.11. Cách đặt số thứ tự các nút và bề rộng nửa dải tương ứng

Chẳng hạn đối với mô hình 4 phần tử hữu hạn trên hình (3.11a), ta có:

NBW = max (4-1, 5-4, 5-3, 3-2) + 1 = 4.

Theo hình (3.11b) NBW = max (2-1, 3-2, 4-3, 5-4) + 1 = 2

Rõ ràng là cách đặt số thứ tự các nút trên hình (3.11b) có tính chất tối ưu vì bề rộng nửa dải bé nhất do đó tiết kiệm được bộ nhớ của máy tính điện tử.

§3.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA TOÀN BỘ KẾT CẤU. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

3.6.1. Hệ phương trình cân bằng tổng thể

Trong chương hai, ta đã thiết lập được hệ phương trình cân bằng của một phần tử hữu hạn thứ i theo công thức (2.78).

$$\mathbf{k}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{t}_i \tag{3.26}$$

Trong đó: $\mathbf{k}_i$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ i;

$\mathbf{q}_i$ - vectơ chuyển vị của phần tử thứ i;

$\mathbf{t}_i$ - vectơ tải trọng của phần tử thứ i.

Trong phần trước, ta đã trình bày cách ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng riêng để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bây giờ ta xếp các thành phần chuyển vị trong toàn hệ theo số thứ tự bậc tự do để được vectơ chuyển vị tổng thể **Q**:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3 \ldots\ldots Q_n]'$$

Trong đó n là số bậc tự do của toàn hệ.

Xuất phát từ (3.26), ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K}.\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{3.27}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị Q_i. Sau khi áp dụng các công thức (3.14), (3.17), ta tính được biến dạng và ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Trong kết cấu nói chung, có thể xảy ra trường hợp chuyển vị tại một điểm nào đó triệt tiêu hoặc có giá trị biết trước. Đây là những điều kiện biên cần phải xét đến trong quá trình giải hệ phương trình cân bằng tổng thể. Vấn đề này sẽ được nghiên cứu trong phần sau.

3.6.2. Cách xử lý các điều kiện biên

3.6.2.1. Các loại điều kiện biên

Có hai loại điều kiện biên.

Đối với loại thứ nhất, chuyển vị tại một điểm nào đó có giá trị cho trước. Chẳng hạn như:

$$Q_{d1} = a_1\ ;\ Q_{d2} = a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots Q_{dr} = a_r \tag{3.28}$$

Trong đó Q_{di} là chuyển vị trên phương bậc tự do d_i của toàn hệ ; a_i là giá trị chuyển vị cho trước (chẳng hạn như độ lún của nền móng); r - số bậc tự do có chuyển vị cho trước.

Các hệ thức (3.28) có thể áp dụng cho bài toán 2 chiều, 3 chiều và hệ thanh.

Loại thứ hai gọi là các *ràng buộc nhiều điểm*.

Nó có dạng:

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0 \tag{3.29}$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là những hằng số cho trước. Loại điều kiện biên này áp dụng cho các gối tựa lăn, liên kết cứng.

Có hai phương pháp xử lý các điều kiện biên:

- Phương pháp loại trừ
- Phương pháp mô hình lò xo.

3.6.2.2. Phương pháp loại trừ

Trước hết, ta hãy suy ra biểu thức của thế năng toàn phần.

Gọi **F** là vectơ tải trọng tổng thể;

Q là vectơ chuyển vị tổng thể.

Năng lượng biến dạng của phần tử hữu hạn có dạng:

$$U_e = \frac{1}{2}\int \sigma'\varepsilon.A.dx$$

Thay σ = E **Bq** vào ε = **Bq** vào hệ thức trên, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e \mathbf{q'B}.E.\mathbf{B.q}Adx$$

Vì **q, B,** E, A là những hằng số nên :

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(A'ELe\mathbf{B'B}\right)\mathbf{q}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang;

L_e - chiều dài của thanh 1 chiều;

E - mô đun đàn hồi.

Theo (2.83):

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q'k_e q}$$

Đối với toàn hệ, ta có năng lượng biến dạng toàn phần:

$$U = \frac{1}{2}\ \mathbf{Q'K.Q}$$

Vậy thế năng toàn phần của hệ kết cấu có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} - \mathbf{Q'.F} \tag{3.30}$$

Ta sẽ vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu để xử lý các điều kiện biên loại một. Giả sử chỉ có một điều kiện biên $Q_1 = a_1$. Đối với kết cấu có N bậc tự do, ta có:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ ......\ Q_N]'$$

$$\mathbf{F} = [\ F_1 \qquad F_2\ ......\ F_N]'$$

Ma trận độ cứng tổng thể có dạng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Cần chú ý rằng **K** là ma trận đối xứng. Thế năng toàn phần trong (3.30) có thể khai triển như sau:

$$\begin{aligned} TNT = \frac{1}{2}(&Q_1K_{11}Q_1 + Q_1K_{12}Q_2 + \cdots + Q_1K_{1N}Q_N \\ &+ Q_2K_{21}Q_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \ldots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &- \\ &+ Q_NK_{N1}Q_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- (Q_1F_1 + Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Thay điều kiện biên $Q_1 = a_1$ vào (3.32)

$$\begin{aligned} TNT = \frac{1}{2}(&a_1K_{11}a_1 + a_1K_{12}Q_2 + \cdots + a_1K_{1N}Q_N \\ &+Q_2K_{21}a_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \cdots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &- \\ &+Q_NK_{N1}a_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- \ (a_1F_1 \ \ +Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N \end{aligned} \tag{3.33}$$

Cần chú ý rằng chuyển vị Q_1 đã bị loại trừ khỏi biểu thức thế năng toàn phần nêu trên. Để cực tiểu hóa thế năng toàn phần, ta triệt tiêu đạo hàm của nó đối với chuyển vị Q_i:

$$\frac{dTNT}{dQ_i} = 0 \qquad i = \ 2,3, \ \cdots, N \tag{3.34}$$

Từ (3.33) và (3.34), ta có:

$$\begin{aligned} &K_{22}Q_2 + K_{23}Q_3 + \cdots + K_{2N}Q_N = F_2 - K_{21}a_1 \\ &K_{32}Q_2 + K_{33}Q_3 + \cdots + K_{3N}Q_N = F_3 - K_{31}a_1 \\ &- \\ &K_{N2}Q_2 + K_{N3}Q_3 + \cdots + K_{NN}Q_N = F_N - K_{N1}a_1 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & & & \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & - & K_{21}a_1 \\ F_3 & - & K_{31}a_1 \\ \vdots & & \\ F_N & - & K_{N1}a_1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Qua trên, ta thấy rằng cấp của ma trận **K** bây giờ là (N-1) × (N-1) vì đã loại trừ hàng thứ nhất và cột thứ nhất (ứng với Q_1) từ ma trận gốc cấp N × N.

Từ hệ phương trình cân bằng tổng thể **KQ = F** với ma trận **K** có cấp (N-1) × (N-1), ta xác định vectơ chuyển vị tổng thể **Q** theo phương pháp Gauss và từ đó tính ứng suất và biến dạng.

Phản lực R_1 tại gối tựa có chuyển vị a_1 tính từ phương trình sau:

$$K_{11}Q_1 + K_{12}Q_2 + ... + K_{1n}Q_n = F_1 + R_1 \tag{3.37}$$

Trong đó: Các chuyển vị Q_1, Q_2, ...Q_N đã biết;

F_1 là lực đặt tại gối tựa (nếu có).

Vậy:

$$R_1 = K_{11}\,Q_1 + K_{12}Q_2 + ...K_{1N}Q_N - F_1 \tag{3.38}$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận K_{11}, K_{12}, ...K_{1N} cần được lưu riêng vào bộ nhớ vì chúng đã bị loại trừ khỏi ma trận gốc **K.**

Phương pháp trên có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát trong đó có nhiều điều kiện biên.

Phương pháp loại trừ có thể tóm tắt như sau:

$$Q_{d1} = a_1;\ Q_{d2} = a_2\ ....Qd_r = a_r$$

Bước 1: Lưu vào bộ nhớ các dòng thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r của ma trận tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bước 2: Loại trừ khỏi ma trận **K** các hàng và cột thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r (d_i là số thứ tự bậc tự do trong toàn hệ). Ma trận **K** bây giờ có cấp (N-r)×(N-r) và vectơ tải trọng có cấp (N-r) × 1. Biến đổi mỗi thành phần của vectơ tải trọng như sau:

$$F_i = F_i - (\,K_{id_1}\,.\,a_1 + K_{id_2}\,a_2 + ...+ K_{idr}.a_r) \tag{3.39}$$

Trong đó, bậc tự do i không phải là gối tựa (tức là ứng với chuyển vị cần phải tìm). Căn cứ vào ma trận $\mathbf{K}^*$ và $\mathbf{F}^*$ đã được biến đổi, giải hệ phương trình.

$$\mathbf{K^*Q = F^*}$$

để xác định vectơ chuyển vị **Q.**

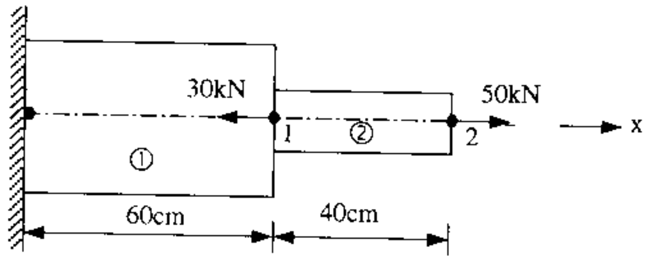
Bước 3: Đối với mỗi phân tử hữu hạn, căn cứ vào vectơ tải trọng **q**, xác định ứng suất và biến dạng.

Bước 4: Căn cứ vào các số liệu lưu trữ ở bước 1, tính các phản lực tại mỗi gối tựa.

$$\begin{aligned}
&R_{d1} = K_{d1,1}\,Q_1 + K_{d1,2}\,Q_2 + ...+ K_{d1,N}\,Q_N - F_{d1}\\
&R_{d2} = K_{d2,1}Q_1 + K_{d2,2}Q_2 + ...+ K_{d2,N}\,Q_N - F_{d2}\\
&..\\
&R_{dr} = K_{dr,1}Q_1 + Q_{dr,2}\,Q_2 + ...+ Q_{dr,n}Q_N - F_{dr}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Trong đó: $K_{i,j}$ là phần tử của ma trận **K** nằm trên hàng thứ i và cột (thứ j (ở đây, có nhiều chỉ số con nên phải dùng dấu phẩy); R_{dj} - phản lực men theo bậc tự do d_j.

Ví dụ 3.3: Cho kết cấu một chiều như trên hình (3.12)



Diện tích:
Thanh 1: 5 cm^2
Thanh 2: 2 cm^2
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm^2

Hình : 3.12

Dùng phương pháp loại trừ tính: - Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & \quad 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \quad 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}$$

2) Ghép các MTDC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\begin{matrix} 1 & \qquad 2 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} 1750 \\ \underline{+1050} \\ 2800 \end{array} & -1050 \\ -1050 & 1050 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \end{matrix}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên kết cấu (không có lực thể tích và lực biên), ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{KQ = F}$$

Ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$(q_1, q_2) = (1,143 \quad 5,905).10^{-2}\ \text{cm}$$

5) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\frac{1}{60}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1,143 \times 10^{-2}\end{bmatrix} = 4\ \text{kN/cm}^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1,143 \times 10^{-2} \\ 5,905 \times 10^{-2}\end{bmatrix} = 25\ \text{kN/cm}^2$

6) Tính phản lực theo (3.38)

$$FL = -1050 \times 1,143 \times 10^{-2} + 1050 \times 5,905 \times 10^{-2} = -20\text{kN}$$

3.6.2.3. Phương pháp mô hình lò xo

Phương pháp mô hình lò xo thuận tiện cho việc lập trình để tính trên máy tính điện tử. Nó đơn giản ngay cả khi được áp dụng vào các ràng buộc nhiều điểm như trong phương trình (3..20). Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong các trường hợp sau:

Trường hợp điều kiện biên với các chuyển vị cho trước.

Giả sử có điều kiện biên:

$$Q_1 = a_1$$

Trong đó: a_1 là chuyển vị cho trước dọc theo bậc tự do 1 ở gối tựa. Phương pháp mô hình lò xo trình bày như sau:

Gối tựa được mô hình là một lò xo có độ cứng C rất lớn. Giá trị độ cứng này sẽ nghiên cứu sau. Một đầu của lò xo chuyển vị một đoạn a_1 như trên hình (3.13). Chuyển vị Q_1 dọc theo bậc tự do 1 tại gối tựa xấp xỉ bằng a_1 do lực cản của kết cấu tương đối bé.

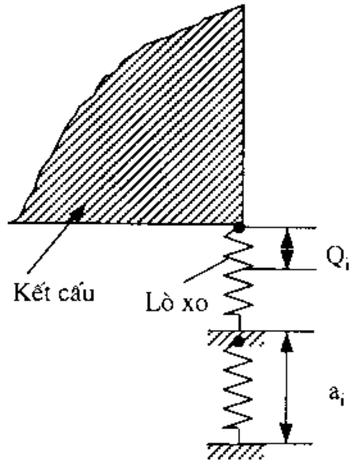
Độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$. Năng lượng biến dạng của lò xo

$$U_1 = \frac{1}{2}C(Q_1 - a_1)^2 \tag{3.41}$$

Thế năng toàn phần TNT bằng thế năng của kết cấu + thế năng của lò xo.

Kết hợp (3.30) và (3.41), ta có:

$$\mathrm{TNT} = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C\left(Q_1 - a_1\right)^2 - \mathbf{Q'F} \tag{3.42}$$



Hình 3.13. Mô hình lò xo tại gối tựa kết cấu

Theo nguyên lý thế năng cực tiểu, ta triệt tiêu đạo hàm của TNT đối với Q_i (i = 1,2, ... N) :

$$\frac{d\mathrm{TNT}}{dQ_i} = 0 \qquad (i = 1,2, ...N)$$

Sau các phép tính, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \quad +C.a_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Qua trên, ta thấy rằng ứng với điều kiện biên $Q_1 = a_1$, độ cứng C rất lớn được cộng vào phần tử đầu tiên trên đường chéo chính của ma trận **K** và tích $C.a_1$ được cộng vào phần tử đầu tiên của vectơ **F**. Ta xác định giá trị các thành phần chuyển vị Q_i bằng cách giải hệ phương trình (3.43).

Phản lực men theo bậc tự do d_1 bằng lực của lò xo tác dụng lên kết cấu. Vì độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$ nên phản lực:

$$R_1 = -C\,(Q_1 - a_1) \tag{3.44}$$

Phương pháp mô hình lò xo có thể tóm tắt như sau:

Giả sử có các điều kiện biên:

$$Q_{d_1} = a_1 \qquad Q_{d_2} = a_2 \ .... \ Q_{d_2} = a_r$$

Bước 1: Thay đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** bằng cách cộng số C rất lớn vào các phần tử thứ d_1, d_2, ...d_r trên đường chéo chính của ma trận **K** (d_i là số thứ tự bậc tự do). Đồng thời, cộng tích $C.a_1$ vào F_{d1}, $C.a_2$ vào F_{d_2} ......, $C.\ a_r$ vào F_{dr} trong vectơ tải trọng **F**. Giải hệ phương trình $\mathbf{K^*Q^* = F^*}$ trong đó $\mathbf{K^*}$ và $\mathbf{F^*}$ là những ma trận đã được biến đổi.

Bước 2: Sau khi đã xác định được các thành phần chuyển vị, tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

Bước 3: Tính phản lực tại gối tựa theo công thức:

$$R_{di} = -C\,(Q_{di} - a_i) \ i = 1,2, ... \tag{3.45}$$

Cần chú ý rằng phương pháp mô hình lò xo có tính chất gần đúng. Độ chính xác, đặc biệt đối với phản lực, phụ thuộc vào cách chọn số C.

Cách chọn số C

Phương trình đầu tiên trong (3.43) có dạng:

$$(K_{11} + C)\, Q_1 + K_{12}\, Q_2 + \dots\dots\dots + K_{1N}\, Q_N = F_1 + C.\, a_1 \tag{3.46a}$$

Chia phương trình trên cho C, ta được:

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1\right) Q_1 + \frac{K_{12}}{C} Q_2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{K_{1N}}{C} Q_N = \frac{F_1}{C} + a_1 \tag{3.46b}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng khi C khá lớn so với các phần tử của ma trận K_{11}, K_{12}, ...K_{1N}, $Q_1 \approx a_1$. Cần chú ý rằng F_1 là tải trọng đặt tại gối tựa (nếu có) và tỷ số F_1/C thường rất bé. Có thể chọn số C như sau:

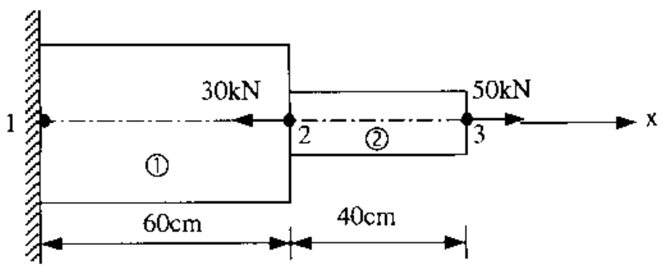
$$C = \max \left|K_{ij}\right| \times 10^8$$

$$1 \le i \le N \tag{3.47}$$

$$1 \le j \le N$$

Kinh nghiệm cho thấy cách chọn thừa số 10^8, nói chung, thỏa mãn yêu cầu của máy tính điện tử.

Ví dụ 3.4: Cho hệ một chiều như trên hình (3.14)



Diện tích:
Thanh 1: 5 cm²
Thanh 2: 2 cm²
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²

Hình 3.14

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \;\;1 & \quad\;\; 2 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \;\;2 & \quad\;\; 3 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

2) Ghép các MTDC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \;1 & \qquad\;\; 2 & \qquad\;\; 3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 & 0 \\ & \begin{array}{c} 1750 \\ +1050 \\ \hline 2800 \end{array} & -1050 \\ & -1050 & 1050 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, xác lập vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Vì số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước bằng 1 (ở đây, chuyển vị cho trước bằng 0) nên phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của ma trận **K** được cộng thêm số C và phần tử thứ nhất của vectơ tải trọng **F** được cộng thêm giá trị (C. chuyển vị tương ứng). Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2800. Chọn $C = 2800 \times 10^8$.

Vậy:

$$k(1, 1) = 1750 + 28 \times 10^{10} \qquad f(1) = 0 + 2800 \times 10^8 \times 0 = 0$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Ta được giá trị các chuyển vị:

$$(q_1, q_2, q_3) = (7{,}14286 \times 10^{-12} \quad 1{,}143 \times 10^{-2} \quad 5{,}905 \times 10^{-2})\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

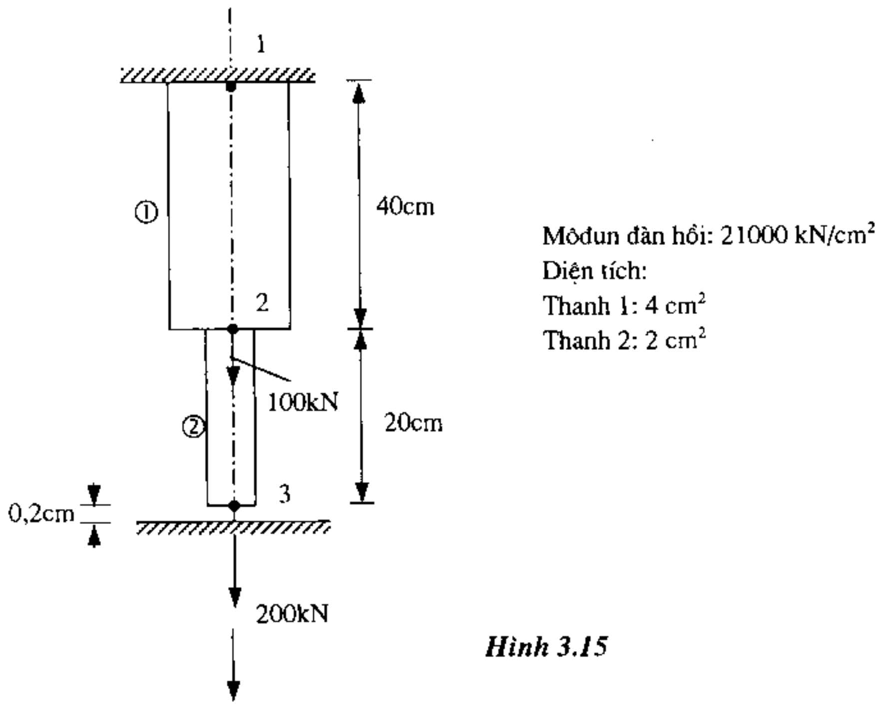
Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\dfrac{1}{60}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 \\ 1{,}143 \times 10^{-2}\end{bmatrix} = 4\ \text{kN/cm}^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\dfrac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1{,}143 \times 10^{-2} \\ 5{,}905 \times 10^{-2}\end{bmatrix} = 25\ \text{kN/cm}^2$

7) Tính phản lực theo (3.38)

Tại nút 1: $fl(1) = -28 \times 10^{10}(7{,}14286 \times 10^{11} - 0) = -20$ kN

Ví dụ 3.5: Cho hệ một chiều như trên hình (3.15)



Hình 3.15

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Tổng số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng (xem hình 3.15): 0; 0,2cm.

1) Căn cứ vào (3.19) tính các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 1 & \quad\quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 2 & \quad\quad 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad 1 & \quad\quad 2 & \quad\quad 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 & 0 \\ & \begin{array}{r} 2100 \\ +\,2100 \\ \hline 4200 \end{array} & -2100 \\ & & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều (không có lực thể tích và lực biên), xác lập vectơ tải trọng:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và **F**

Vì các chuyển vị cho trước xuất hiện tại BTD có số thứ tự 1 và 3 (hình 3.15), ta phải cộng giá trị C vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K**; cộng giá trị (C × chuyển vị cho trước) vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 của ma trận **F**.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận K bằng 4200.

Ta chọn $\quad C = 4200 \times 10^8. = 42 \times 10^{10}.$

Vậy: $\quad k(1,1) = 2100 + 42 \times 10^{10} \qquad k(3,3) = 2100 + 42 \times 10^{10}$

$\quad f(1) = 0 + C.0 \qquad f(3) = 200 + (42 \times 10^{10}.0,2)$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (6,1905 \times 10^{-11}\ ; 0,124\ ; 0,2)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = 21000.\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0,124\end{bmatrix} = 65\ \text{kN/cm}^2$$

Thanh 2:

$$\sigma_2 = 21000.\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0,124\\0,200\end{bmatrix} = 80\ \text{kN/cm}^2$$

7) Tính phản lực theo (3.45)

Tại nút 1: $\quad fl(1) = -42 \times 10^{10}(6,1905 \times 10^{11} - 0) = -260\text{kN}$

Tại nút 3: $\quad fl(3) = -42 \times 10^{10}(0,2 - 0,2) = -40\text{kN}$

3.6.2.4. Trường hợp ràng buộc nhiều điểm

Trong trường hợp gối tựa nằm nghiêng hoặc liên kết cứng, điều kiện biên có dạng.

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là các hằng số đã biết. Phương pháp mô hình lò xo sẽ được áp dụng cho điều kiện này như sau:

Thế năng toàn phần có dạng:

$$\text{TNT} = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} - \beta_0\right)^2 - \mathbf{Q'F} \qquad (3.48)$$

Trong đó: C là một số rất lớn. Vì C rất lớn, để TNT có giá trị cực tiểu, $(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2})$ phải rất bé nghĩa là $\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} \approx \beta_0$ như ta mong muốn. Bằng cách triệt tiêu $\frac{d\text{TNT}}{dQ_i}\left(i = 1,2.........N\right)$, ta được các hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix}K_{d_1d_1} & K_{d_1d_2}\\K_{d_2d_1} & K_{d_2d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}K_{d_1d_1} + C\beta_1^2 & K_{d_1d_2} + C\beta_1\beta_2\\K_{d_2d_1} + C\beta_1\beta_2 & K_{d_2d_2} + C\beta_2^2\end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix}F_{d_1}\\F_{d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}F_{d_1} + C\beta_0\beta_1\\F_{d_2} + C\beta_0\beta_1\end{bmatrix} \qquad (3.50)$$

Từ các phương trình $\partial\text{TNT}/\partial Q_{d_1} = 0$ và $\partial\text{TNT}/\partial Q_{d_2} = 0$ ta có:

$$\sum_j K_{d_{ij}} Q_j - F_{d_1} = R_{d_1} \quad \text{và} \quad \sum_j K_{d_{2j}} Q_j - F_{d2} = R_{d2}$$

Các phản lực R_{d_1} và R_{d_2} dọc theo các bậc tự do d_1 và d_2:

$$R_{d_1} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_1}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51}$$

$$R_{d_2} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_2}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51b}$$

Sau khi đơn giản hóa các phương trình (3.51) ta được:

$$R_{d_1} = -C\beta_1\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52a}$$

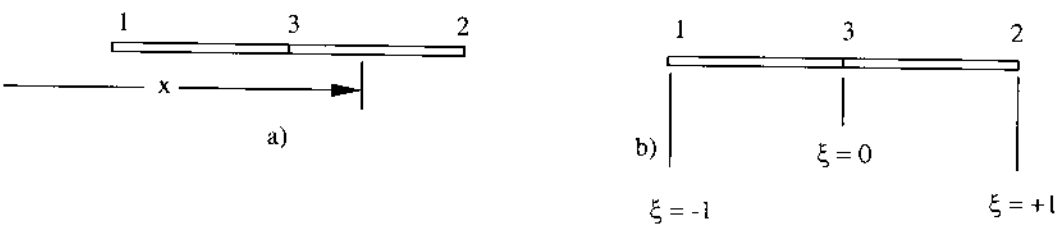
$$R_{d_2} = -C\beta_2\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52b}$$

Các ràng buộc nhiều điểm là loại điều kiện biên tổng quát nhất, vì từ đó có thể suy ra các trường hợp đặc biệt khác.

§3.7. HÀM HÌNH DẠNG BẬC 2

Trong các phần trước, ta đã dùng hàm hình dạng tuyến tính để giải bài toán một chiều. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta có thể dùng hàm hình dạng phi tuyến tính bậc 2 để được những kết quả tính toán chính xác hơn. Cách suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương tự như đã làm trước đây.

Ta hãy xét một phần tử hữu hạn bậc hai 3 nút như trên hình (3.16a).



***Hình 3.16**. Phần tử hữu hạn bậc 2 trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự các nút như sau: nút 1 ở bên trái, nút 2 ở bên phải và nút 3 ở giữa, nút này gọi là nút bên trong. Sở dĩ đưa nó vào để suy ra hàm hình dạng bậc 2. Gọi x là tọa độ của một điểm. Véc tơ chuyển vị $\mathbf{q} = [\ q_1\ q_2\ q_3]$ trong đó q_1, q_2, q_3 là các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 . Tọa độ x tại 1 điểm trong phần tử hữu hạn được biến đổi thành tọa độ tự nhiên như sau:

$$\xi = \frac{2\left(x - x_3\right)}{x_2 - x_1} \tag{3.53}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng $\xi = -1$, 0 và +1 tại các nút tương ứng 1, 3, 2 (hình 3.16b).

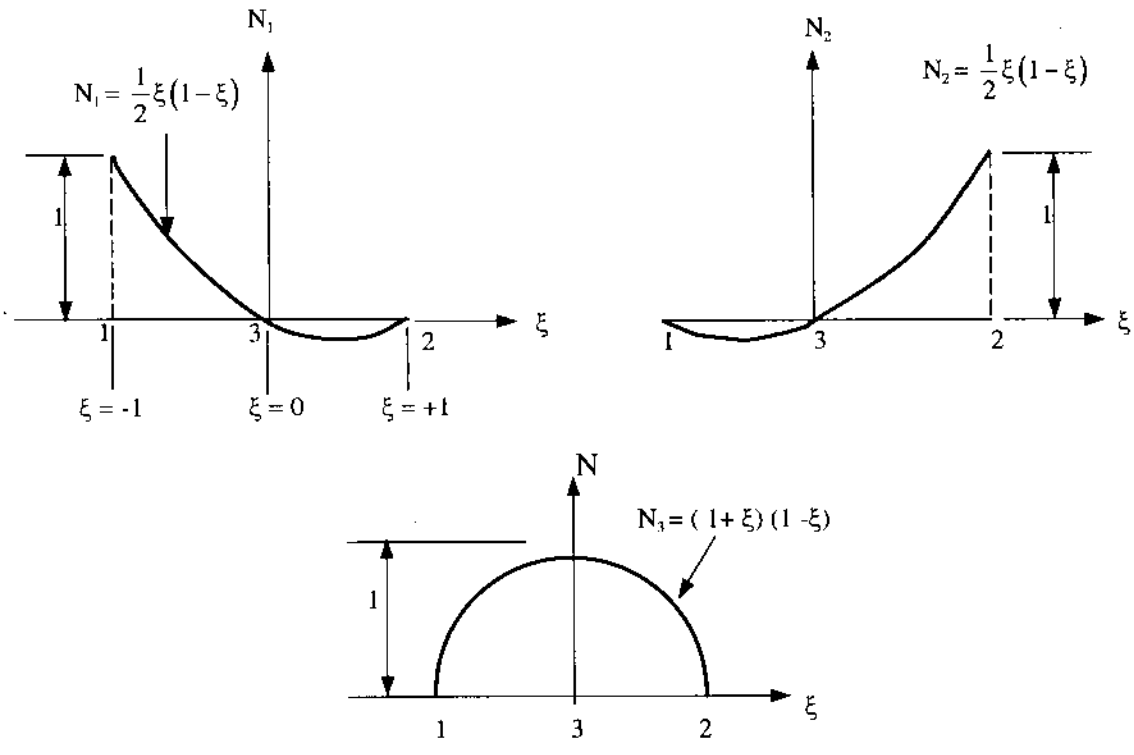
Bây giờ trong tọa độ tự nhiên ξ, ta định nghĩa các hàm hình dạng bậc 2 N_1, N_2, N_3 như sau:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54a}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54b}$$

$$N_3(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \tag{3.54c}$$

Hàm hình dạng N_1 bằng 1 tại nút 1 và bằng 0 tại các nút 2 và 3. Một cách tương tự, N_2 bằng 1 tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3; N_3 bằng 1 tại nút 3 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 2. Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 biểu thị trên hình (3.17).



Hình 3.17. *Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Ta suy ra các hàm hình dạng trên như sau. Chẳng hạn $N_1 = 0$ tại $\xi = 0$ và $N_1 = 0$ tại $\xi = 1$, vậy N_1 phải chứa tích ξ (1-ξ) nghĩa là nó phải có dạng.

$$N_1 = c\xi\,(1-\xi).$$

Hằng số c xác định từ điều kiện $N_1 = 1$ tại $\xi = -1$, do đó $c = -\frac{1}{2}$. Cuối cùng, ta có công thức (3-54a). Các hàm hình dạng trên gọi là *hàm hình dạng Lagrange*.

Các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

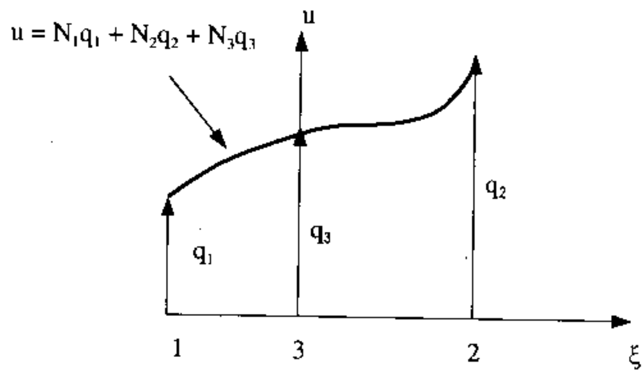
$$u = N_1q_1 + N_2q_2 + N_3q_3 \tag{3.53a}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{3.55b}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = [N_1\ N_2\ N_3\ ]$ là ma trận cấp 1×3;

$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3]'$ là vectơ chuyển vị cấp 3×1. Ta nhận thấy rằng tại nút 1, $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$ do đó $u = q_1$. Một cách tương tự, $u = q_2$ tại nút 2 và $u = q_3$ tại nút 3. Vậy u trong (3.55a) là hàm nội suy bậc 2 đi qua các điểm q_1, q_2 và q_3 (hình 3.18).



Hình 3.18. *Hàm nội suy u*

Căn cứ vào (3.53), (3.54) và (3.55), ta có biểu thức biến dạng như sau:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{du}{dx} \\
&= \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} \\
&= \frac{2}{x_2 - x_1}\frac{du}{d\xi} \\
&= \frac{2}{x_2 - x_1}\left[\frac{dN_1}{d\xi} \quad \frac{dN_2}{d\xi} \quad \frac{dN_3}{d\xi}\right].\mathbf{q}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{2}{x_2 - x_1}\left[-\frac{1-2\xi}{2} \quad \frac{1+2\xi}{2} \quad -2\xi\right].\mathbf{q} \tag{3.56a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{3.56b}$$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{x_2 - x_1}\left[-\frac{1-2\xi}{2} \quad \frac{1+2\xi}{2} \quad -2\xi\right] \tag{3.57}$$

Trong đó: ξ tính theo (3.53)

Theo định luật Húc, ta có ứng suất:

$$\sigma = E\,(\mathbf{Bq}) \tag{3.58}$$

Cần chú ý N_i là hàm hình dạng bậc 2, nên **B** trong (3.57) có tính chất tuyến tính đối với ξ. Điều này chứng tỏ *biến dạng và ứng suất biến đổi tuyến tính trong phần tử hữu hạn*, trong khi chúng là những hằng số nếu hàm hình dạng có tính chất tuyến tính (như trong các phần trước đã trình bày).

Bây giờ, ta xuất phát từ phương trình (2,83b) để suy ra ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{k}_e = A.E\int \mathbf{B}'.\mathbf{B}.dx \tag{a}$$

Theo (3.53):

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L_e} \Rightarrow dx = \frac{L_e d\xi}{2} \tag{b}$$

Trong đó, L_e là chiều dài của phần tử hữu hạn. Thay (b) vào (a) ta có:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A.E.L_e}{2}\int \mathbf{B}'\mathbf{B}\;\, d\xi \tag{c}$$

Thay **B** từ (3.57) vào (c) và tiến hành tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{3L_e}\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \tag{3.59}$$

Theo (2.84), ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{t}_e = A.\,f\int \mathbf{N}'\mathbf{d}x + T\int \mathbf{N}'\mathbf{d}x = \frac{A_e L_e f}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{N}'d\xi + \frac{T.L_e}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{N}'d\xi$$

Thay **N** từ (3.54) vào phương trình trên, ta có vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn trong trường hợp tổng quát.

$$\mathbf{t}_e = A_e L_e f\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} + L_e.T\begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{3.60}$$

Để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**, ta phải ghép các ma trận $\mathbf{k}_e$ và các ma trận $\mathbf{t}_e$ như đa làm trong phần trước.

Cuối cùng, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{K.\,Q = F}$$

để xác định các thành phần chuyển vị và từ đó xác định ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

§3.8. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Trong mục này, ta nghiên cứu cách tính ứng suất do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong một vật liệu đàn hồi tuyến tính đồng tính trên mọi phương. Đây là bài toán ứng suất nhiệt.

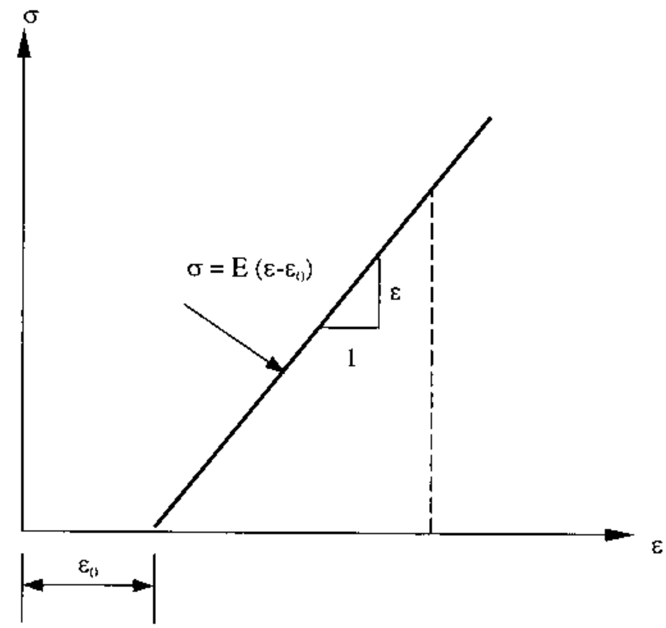
Giả sử đã biết độ biến thiên nhiệt độ Δt (x). Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra có thể viết:

$$\varepsilon_0 = \alpha \,.\, \Delta T \tag{3.61}$$

Trong đó, α là hệ số giãn nở do nhiệt.

Cần chú ý rằng khi $\Delta T > 0$, nhiệt độ tăng và khi $\Delta T < 0$ thì nhiệt độ giảm. Định luật ứng suất - biến dạng trong trường hợp có biến dạng ban đầu ε_0 biểu thị trên hình (3.21). Hệ thức ứng suất biến dạng có thể viết:

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) \tag{3.62}$$



Hình 3.19. *Định luật ứng suất biến dạng khi có ứng suất ban đầu do nhiệt gây ra*

Bây giờ ta suy ra biểu thức ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp có tác dụng của nhiệt độ.

Từ công thức tổng quát (2.71) suy ra cho bài toán 1 chiều:

$$\delta U = \delta_\varepsilon{}'.\sigma.A.dx$$

Trong bài toán một chiều dV = Adx; **D** = E (mô đun đàn hồi).

Thay $\sigma = E\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$ ta có:

$$\delta U = \int \delta_\varepsilon.E\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)Adx = \int \delta_\varepsilon.E\varepsilon Adx - \int \delta_\varepsilon.E.\varepsilon_0 Adx$$

Vì $\varepsilon = \mathbf{B}.\,\mathbf{q}$ nên $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta}_\mathbf{q}$ do đó:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_q\,EA\,\mathbf{B}'.\,\boldsymbol{\varepsilon}.\,\mathbf{q}\int dx - \boldsymbol{\delta}'_\mathbf{q}EA\varepsilon_0\mathbf{B}'\int dx$$

$$= \boldsymbol{\delta}'_\mathbf{q}.(EAL\,\mathbf{B}'.\mathbf{B})\,\mathbf{q} - \boldsymbol{\delta}'_\mathbf{q}.(\mathbf{EA}\,\alpha.\boldsymbol{\Delta}\mathbf{T.LB}') \qquad \text{(a)}$$

Mặt khác, từ (2.72), ta có:

$$\delta W_c = \iiint \boldsymbol{\delta}'_\mathbf{u}.\mathbf{f}\;dv + \iint \boldsymbol{\delta}'_\mathbf{u}.\mathbf{T}\;ds$$

Trong bài toán một chiều: dV = Adx, ds = dx:

Vì $\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q}$ nên $\boldsymbol{\delta}_\mathbf{u} = \mathbf{N}\,.\,\boldsymbol{\delta}_q$ do đó:

$$\delta W_c = \delta'_q\,.\,f\,.\,A\int \mathbf{N}.dx + \delta_q T\int \mathbf{N}'dx \qquad \text{(b)}$$

Áp dụng nguyên lý công ảo, từ (a) và (b) ta có:

$$\delta U = \delta W \text{ do đó}$$

$$(EAL\mathbf{B}'\mathbf{B})\mathbf{q} = EA\,\alpha\Delta T.L\mathbf{B}' + A.f\int \mathbf{N}'dx + T\int \mathbf{N}'dx \qquad \text{(c)}$$

Phương trình trên có thể viết: $\mathbf{k}_e\,.\,\mathbf{q} = \mathbf{f}$

Trong đó: **k** - ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn, đã được suy ra từ (3.18) và (3.19).

f - vectơ tải trọng.

Hai số hạng cuối cùng trong vế phải của (c) đã suy ra từ (3.20) và (3.21). Số hạng đầu tiên ở vế phải của (c).

$$EA\alpha\Delta T.\,L.\,\mathbf{B}' = E.A\alpha.\Delta T.L.\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Từ các kết quả trên, ta có vectơ tải trọng

$$\mathbf{f} = (E_eA_e\alpha\,\Delta T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + \frac{A_eL_ef_e}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{T_eL_e}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (3.63)$$

Trong đó: $$\mathbf{f}_n = E_eA_e\alpha\,\Delta T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \qquad (3.64)$$

$\mathbf{f}_n$ gọi là vectơ tải trọng do nhiệt.

Ta ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ và vectơ tải trọng **f** như đã làm trong các phần trước để được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

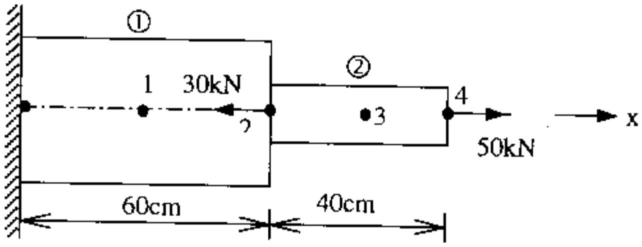
$$\mathbf{K}\,.\,\mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

Giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính biến dạng trong kết cấu. Ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E(\mathbf{B.q} - \alpha.\Delta T)$$

hay $$\sigma_e = \frac{E}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}_e - E\alpha\Delta T \qquad (3.65)$$

Ví dụ 3.6: Cho hệ một chiều như trên hình (3.20)



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²
Diện tích:
Thanh 1: 5 cm²
Thanh 2: 2 cm²

Hình 3.20

Dùng phương pháp hàm hình dạng bậc 2 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 4 (hình 3.20)

Tổng số BTD: 5

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 5 (hình 3.20)

1) Căn cứ vào (3.59), xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 4083,33 & 583,33 & -4666,67 \\ & 4083,33 & -4666,67 \\ & & 9333,33 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2450 & 350 & -2800 \\ & 2450 & -2800 \\ & & 5600 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 4333,33 & -4666,67 & 0 & 0 \\ & 4083,33 & -2800 & 350 \\ & & 5600 & -2800 \\ \text{đối xứng} & & & 2450 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, ta có vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0{,}571\ ;\ 1{,}143\ ;\ 5{,}905) \times 10^{-2}\ \text{cm}$$

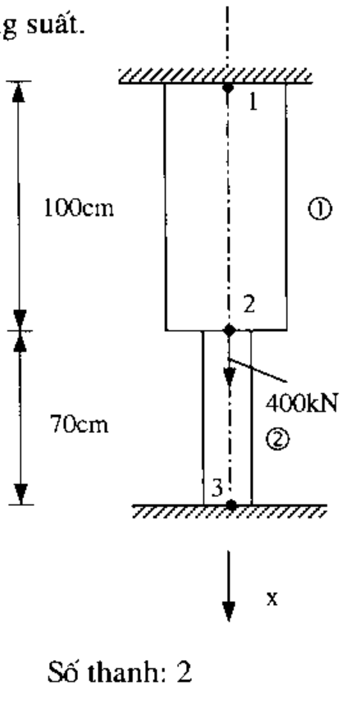
6) Tính ứng suất theo (3.17)

Tại nút 1: $\sigma(1) = 4\ \text{kN/cm}^2$

Tại nút 3: $\sigma(3) = 25\ \text{kN/cm}^2$

Ví dụ 3.7: Hệ một chiều như trên hình (3.21). Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Diện tích:
Thanh 1: 6 cm^2
Thanh 2: 4 cm^2
Tỷ trọng: 0,0785 kN/cm^3
Hệ số giãn nở: 11,7 x 10^{-6}/^{0}C
Số gia nhiệt độ: 60^0

Hình 3.21

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng : 0; 0

1) Xác lập các MTĐC riêng theo (3.19)

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \end{array}$$
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 \\ & 1260 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1200 & -1200 \\ & 1200 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 & 0 \\ & \begin{array}{r} 1260 \\ + \; 1200 \\ \hline 2460 \end{array} & -1200 \\ \text{đối xứng} & & 1200 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

3) Căn cứ vào (3.63) xác lập vectơ tải trọng tổng thể trường hợp xét cả trọng lượng bản thân và tác dụng của nhiệt độ:

Thanh 1:
$$\begin{bmatrix} 23,55 - 88,452 = -64,902 \\ 23,55 + 88,452 = 112,002 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\begin{bmatrix} 10,99 - 58,968 = -47,978 \\ 10,99 + 58,968 = 69,958 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

Sau khi ghép các vectơ tải trọng (xét cả tải trọng tác dụng bên ngoài), ta có vectơ tải trọng tổng thể:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -64,902 \\ 112,002 - 47,978 + 400 = 464,024 \\ 69,958 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2460. Chọn số C = $2460 \times 10^8 = 246 \times 10^9$. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K** cần được cộng thêm vào số C. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trong ma trận **F** cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng) nhưng vì chuyển vị cho trước đều triệt tiêu nên các thành phần của ma trận **F** không thay đổi. Cuối cùng:

$$k(1, 1) = 1260 + 246 \times 10^9 \; ; \qquad k(3,3) = 1200 + 246 \times 10^9$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (0\ ;\ 0{,}189\ ;0)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = \frac{21000}{100}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0{,}189\end{bmatrix} = 39{,}612\ \text{kN/cm}^2$$

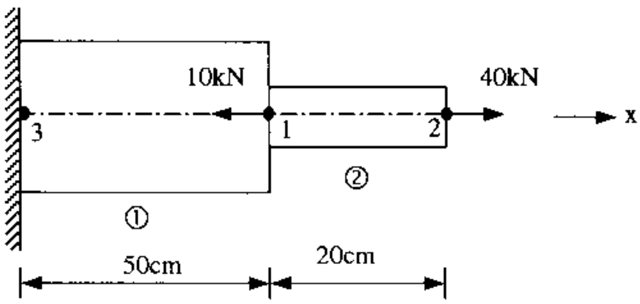
Thanh 2:

$$\sigma_2 = \frac{21000}{70}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}189\\0\end{bmatrix} = -56{,}588\ \text{kN/cm}^2$$

§3.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

3.9.1. Thuật toán giải bài toán một chiều dùng phương pháp loại trừ (CTR1)

Lấy ví dụ trên hình (3.22)



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm^2

Diện tích:

Thanh 1: 5 cm^2

Thanh 2: 2 cm^2

Hình 3.22

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Tổng số BTD: 3

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tải trọng: -10; 40

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	5	21000	3	1
2	20	2	21000	1	2

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng

Nếu có cả lực thể tích và nhiệt độ tác dụng thì dùng công thức (3.63).

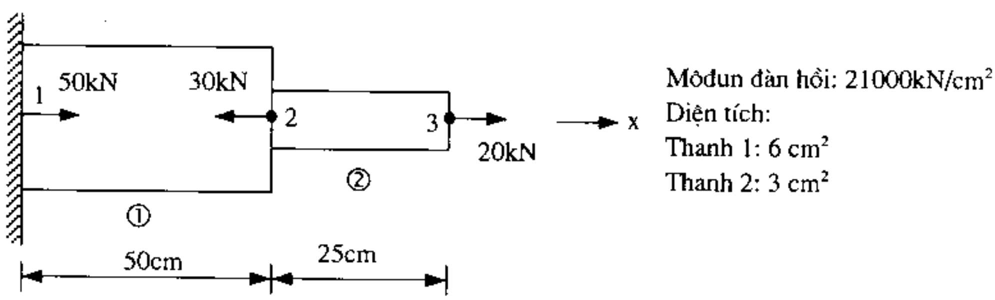
5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)

3.9.2. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng phương pháp mô hình lò xo (CTR2)

Lấy ví dụ trên hình (3.23)



Hình 3.23

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

Chuyển vị cho trước tương ứng: 0

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Cường độ lực thể tích: 0

Thành phần tải trọng: 50; -30; 20

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	6	21000	1	2
2	25	3	21000	2	3

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Biến đổi các ma trận **K** và **F** như đã làm trong ví dụ (3.4)

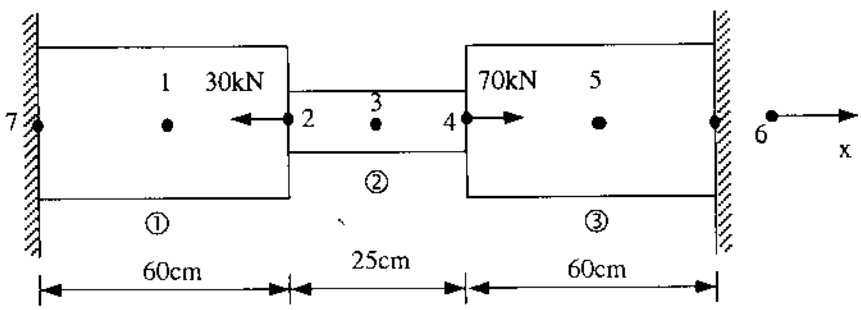
5) Giải hệ phương trình **K*.Q = F***

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.45)

3.9.3. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng hàm hình dạng bậc 2 (CTR3)

Lấy ví dụ trên hình (3.24)



Hình 3.24

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị : 5

Tổng số BTD: 7

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6; 7

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tỷ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 0; -30; 0; 70; 0

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môdun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD		
				d_1	d_2	d_3
1	60	6	21000	7	2	1
2	40	3	21000	2	4	3
3	60	6	21000	4	6	5

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.59)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng. Nếu có lực biên, lực thể tích, nhiệt độ tác dụng thì căn cứ vào (3.63)

5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

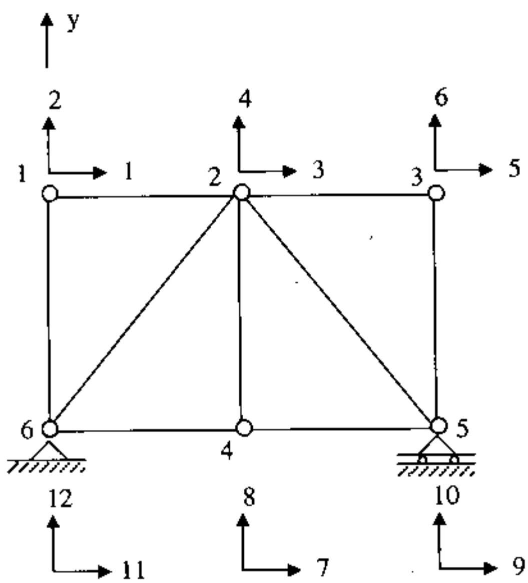
6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)

Chương 4

HỆ GIÀN

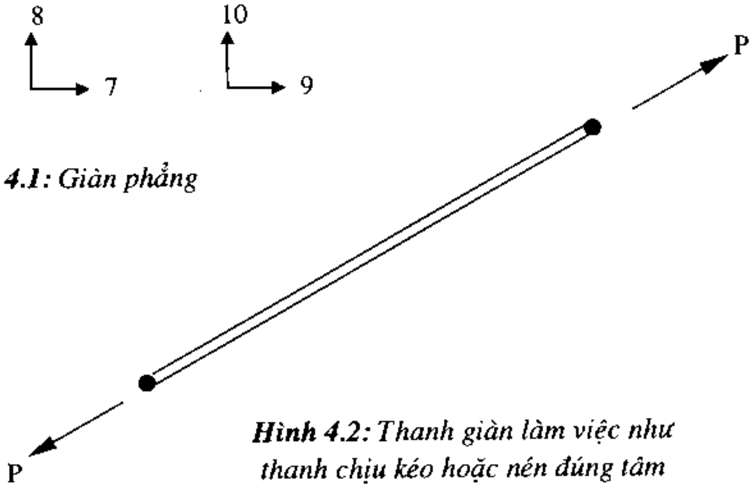
§4.1. KHÁI NIỆM



Hình 4.1: Giàn phẳng

Giàn là kết cấu gồm các thanh được liên kết với nhau bằng 2 khớp ở 2 đầu (hình 4.1). Điểm quy tụ của các thanh giàn gọi là *nút giàn*. Trong tính toán, người ta thường bỏ qua trọng lượng của thanh giàn, đưa ra giả thiết tải trọng đặt tại các nút giàn và nút giàn là một khớp lý tưởng.

Vì những lẽ trên, thanh giàn làm việc như một thanh chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm (hình 4.2).



Hình 4.2: Thanh giàn làm việc như thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm

Nói một cách khác, lực dọc, ứng suất và biến dạng trùng với trục của thanh gian và ta lại trở về bài toán kết cấu một chiều như đã trình bày trong chương 3.

Trong cơ học kết cấu, ta dùng 2 phương pháp tính giàn tĩnh định: phương pháp tách nút và phương pháp mặt cắt. Tuy nhiên, vẫn không tính được chuyển vị tại các nút giàn. Đối với giàn siêu tĩnh thì việc tính toán lại càng phức tạp hơn.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta xem các thanh giàn là những phần tử một chiều (như đã giải thích ở trên). Với phương pháp này, ta vừa xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, vừa xác định được ứng suất và nội lực trong các thanh giàn. Nó có thể áp dụng cho giàn tĩnh định cũng như giàn siêu tĩnh.

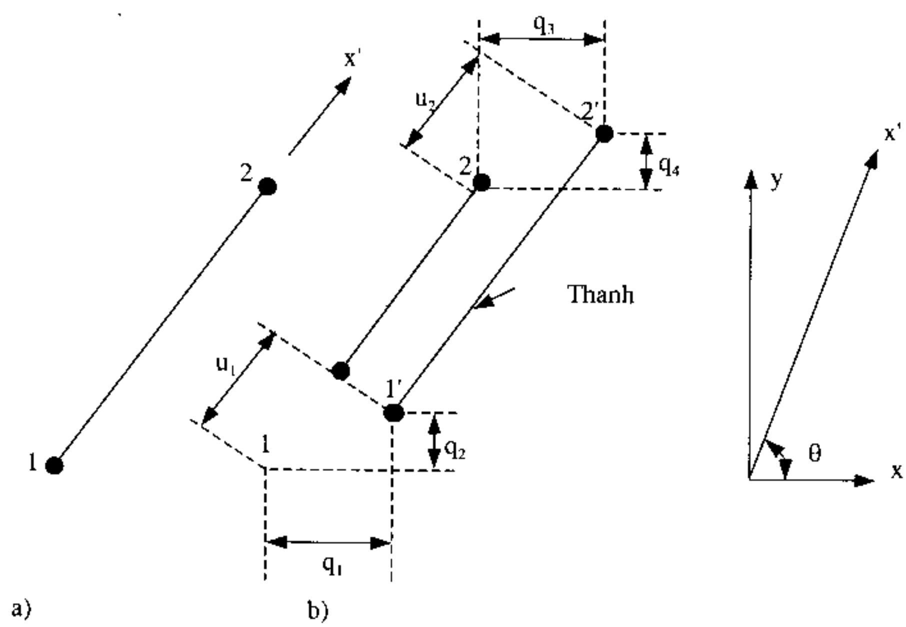
Dưới đây, ta sẽ nghiên cứu cách tính 2 loại giàn: giàn phẳng và giàn không gian.

§4.2. GIÀN PHẲNG

4.2.1. Hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể

Trong giàn phẳng, tải trọng và các thanh giàn cùng nằm trong một mặt phẳng. Ta còn gọi giàn phẳng là *giàn 2 chiều*. Khác với kết cấu 1 chiều đã nghiên cứu trong chương ba, ở đây, các thanh giàn có các hướng khác nhau. Vì vậy, phải đưa vào 2 hệ tọa độ: *hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể.*

Một thanh giàn phẳng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể, biểu thị như trên hình (4.3). Trong hệ tọa độ cục bộ, mỗi thanh giàn có 2 đầu 1 và 2. Gọi x' là trục của thanh giàn (tức hệ trục tọa độ cục bộ), x và y là hệ trục tọa độ tổng thể. Chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2. Trong hệ tọa độ tổng thể, mỗi nút giàn có 2 bậc tự do d_1 (trên phương x) và d_2 (trên phương y). Để tiện cho việc lập trình, số thứ tự bậc tự do tại mỗi nút giàn tính như sau:



Hình 4.3: *a) Thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;*
b) Thanh giàn trước và sau khi biến dạng trong hệ tọa độ tổng thể.

Tại nút i: $d_1 = 2i - 1$ (trên phương x)

$d_2 = 2i$ (trên phương y) (4.1)

Số thứ tự các bậc tự do biểu thị trên hình (4.1)

Các thành phần chuyển vị có các chỉ số như số thứ tự bậc tự do tương ứng. Chẳng hạn tại nút 4 trên hình (4.1), các thành phần chuyển vị.

Men theo bậc tự do 7 là Q_7

Men theo bậc tự do 8 là Q_8

Giả sử u_1 và u_2 là các chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.3b).

Ta có vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.2}$$

Vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.3b) là:

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]' \tag{4.3}$$

Theo quan hệ hình học trên hình (4.3), hệ thức giữa các chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ và chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$U_1 = q_1\cos\theta + q_2\sin\theta \tag{4.4a}$$

$$U_2 = q_3\cos\theta + q_4\sin\theta \tag{4.4b}$$

Đặt côsin định hướng $l = \cos\theta$, $m = \cos\phi$ (= $\sin\theta$); các côsin định hướng này chính là côsin của các góc tạo thành bởi trục x' và các trục x, y. Dưới dạng ma trận, các phương trình (4.4a) và (4.4b) có thể viết:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{q} \tag{4.5}$$

Trong đó, **R** gọi là *ma trận xoay* hoặc *ma trận biến đổi*. Nó có dạng:

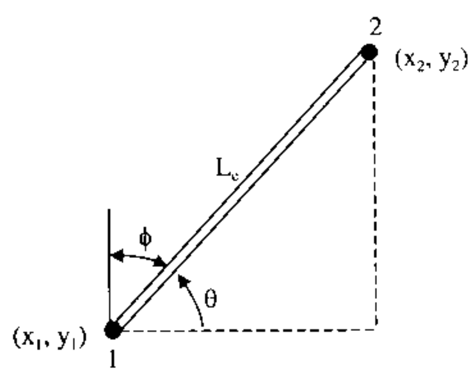
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Các côsin định hướng và chiều dài của thanh giàn tính theo hình (4.4). Giả sử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là tọa độ của các nút 1 và 2. Ta có:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \tag{4.7}$$

Trong đó: L_e là chiều dài của thanh giàn.

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.8}$$



***Hình 4.4:** Các côsin định hướng*

4.2.2. Ma trận độ cứng của thanh giàn

Như trong phần trên đã trình bày, mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều, do đó có thể vận dụng các công thức trong chương một và chương ba để tính ma trận độ cứng của thanh giàn:

Theo (3.19), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e Ee}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Mặt khác, vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể tính theo công thức (1.43):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}^t.\mathbf{k}_e.\mathbf{R} \tag{4.10a}$$

Thay (4.6), (4.9) vào (4.10a), ta được:

$$K_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & m \end{bmatrix} \times \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Đối với giàn, trong vectơ tải trọng, không xét lực thể tích và lực biên, chỉ có các tải trọng đặt tại các nút giàn trên phương x và phương y, số thứ tự của chúng như đã trình bày trong 4.2.1.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{K}_e$ và các tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \tag{4.11}$$

Ta giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, từ đó tính ứng suất trong các thanh giàn.

4.2.3. Tính ứng suất

Vì mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều (chương ba), ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E.\varepsilon \tag{4.12a}$$

Trong đó: ε là biến dạng tỷ đối (trên đơn vị dài) của thanh giàn.

Từ hình (4.3), ta có:

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{L_e}$$

do đó:
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1 \\ U_2\end{bmatrix} \tag{4.12b}$$

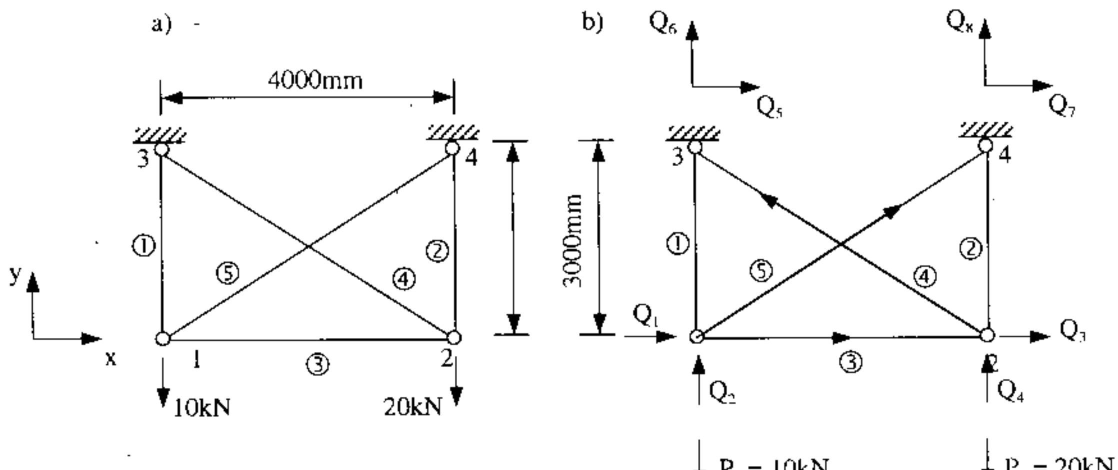
Theo (4.5):
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{R}.\,\mathbf{q} \tag{4.12c}$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.12c):

$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-l & -m & l & m\end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.13}$$

Cần chú ý rằng ứng suất σ có dấu dương khi thanh giàn chịu kéo và có dấu âm khi thanh giàn chịu nén.

Ví dụ 4.1:



Hình 4.5

Cho 1 giàn phẳng với kích thước và tải trọng như trên hình (4.5a). Diện tích tiết diện của các phần tử 1 và 2 bằng $2000m^2$, của các phần tử còn lại là $600mm^2$. $E = 210kN/mm^2$.

Xác định ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn;

Ghép các ma trận độ cứng trên để được ma trận độ cứng tổng thể **K;**

Dùng phương pháp loại trừ, tính chuyển vị tại các nút;

Tính ứng suất trong mỗi thanh giàn;

Tính phản lực tại các gối tựa.

Giải:

Trước hết, căn cứ vào (4.1) ta xếp số thứ tự các bậc tự do tại các nút như trên hình (4.5b). Vectơ chuyển vị tổng thể:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6\ Q_7\ Q_8]'$$

Điều kiện biên: $Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 0.$

Vectơ tải trọng: $\mathbf{F} = [0 \quad P_2 \quad 0 \quad P_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7 \quad R_8]'$

Trong đó: P_2 và P_4 - tải trọng thẳng đứng đặt tại các nút 1 và 2;

R_5, R_6, R_7, R_8 - các phản lực tại các gối tựa 3 và 4.

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y
1	0	0
2	4000	0
3	0	3000
4	4000	3000

Số thứ tự bậc tự do

Nút	u	v
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8

Số thứ tự bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2.

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	3
2	2	4
3	1	2
4	2	3
5	1	4

Đặc trưng hình học của các phần tử.

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	L	l	m	A	$\frac{AE}{L}$
1	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
2	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
3	4000	0	4000	1,0	0	600	31,5
4	-4000	3000	5000	-0,8	0,6	600	25,2
5	4000	3000	5000	0,8	0,6	600	25,2

a) Ma trận độ cứng của các thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

Căn cứ vào (4.10), ta có:

Phần tử 1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ K_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ K_2 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ K_3 = & \begin{bmatrix} 31{,}5 & 0 & -31{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31{,}5 & 0 & 31{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 4:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ K_4 = & \begin{bmatrix} 16{,}13 & -12{,}10 & -16{,}13 & 12{,}10 \\ -12{,}10 & 9{,}07 & 12{,}10 & -9{,}07 \\ -16{,}13 & 12{,}10 & 16{,}13 & -12{,}10 \\ 12{,}10 & -9{,}07 & -12{,}10 & 9{,}07 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 5:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ K_5 = & \begin{bmatrix} 16{,}13 & 12{,}10 & -16{,}13 & -12{,}10 \\ 12{,}10 & 9{,}07 & -12{,}10 & -9{,}07 \\ -16{,}13 & -12{,}10 & 16{,}13 & 12{,}10 \\ -12{,}10 & -9{,}07 & 12{,}10 & 9{,}07 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

b) Sau khi ghép các ma trận trên, ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\mathbf{K} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\left(\begin{array}{cccccccc}
\begin{matrix}0\\31{,}5\\\underline{16{,}13}\\47{,}63\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & -31{,}5 & 0 & 0 & 0 & -16{,}18 & -12{,}10 \\
\begin{matrix}0\\0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\0\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & -140 & -12{,}10 & -9{,}07 \\
-31{,}5 & 0 & \begin{matrix}0\\31{,}5\\\underline{16{,}13}\\47{,}63\end{matrix} & \begin{matrix}0\\-12{,}10\end{matrix} & -16{,}13 & 12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{-12{,}10}\\-12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \\
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 & \begin{matrix}0\\16{,}13\end{matrix} & \begin{matrix}0\\-12{,}10\end{matrix} & 0 & 0 \\
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 & \begin{matrix}0\\\underline{-12{,}10}\\-12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix} & 0 & 0 \\
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{16{,}13}\\16{,}13\end{matrix} & \begin{matrix}0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} \\
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 & 0 & 0 & \begin{matrix}0\\\underline{12{,}10}\\12{,}10\end{matrix} & \begin{matrix}140\\\underline{9{,}07}\\149{,}07\end{matrix}
\end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
$$

Vậy:

$$
K = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} & \leftarrow \begin{array}{l}\text{Số thứ tự}\\ \text{BTD tổng thể}\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
47,63 & 12,10 & -31,5 & 0 & 0 & 0 & -16,13 & -12,10 \\
12,10 & 149,07 & 0 & 0 & 0 & -140 & -12,10 & -9,07 \\
-31,5 & 0 & 47,63 & -12,10 & -16,13 & 12,10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -12,10 & 149,07 & 12,10 & -9,07 & 0 & -140 \\
\hline
0 & 0 & -16,13 & 12,10 & 16,13 & -12,10 & 0 & 0 \\
0 & -140 & 12,10 & -9,07 & -12,10 & 149,07 & 0 & 0 \\
-16,13 & -12,10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16,13 & 12,10 \\
-12,10 & -9,07 & 0 & -140 & 0 & 0 & 12,10 & 149,07
\end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
\tag{4.14}
$$

Để tính chuyển vị và phản lực, ta chia ma trận độ cứng tổng thể **K** trong (4.14) thành 4 khối M_1, M_2, M_3, M_4. Hệ phương trình cân bằng tổng thể của toàn hệ có thể viết:

$$
\begin{array}{cccc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} & & & \\
\left[\begin{array}{c|c}
M_1 & M_2 \\
\hline
M_3 & M_4
\end{array}\right] \times
\left[\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ \hline Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{array}\right] =
\left[\begin{array}{c} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \\ \hline R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & &
\end{array}
\tag{4.15}
$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận chia khối, ta được các hệ thức ma trận sau:

$$
\begin{bmatrix}
47,63 & 12,10 & -31,5 & 0 \\
12,10 & 149,07 & 0 & 0 \\
-31,5 & 0 & 47,63 & -12,10 \\
0 & 0 & -12,10 & 149,07
\end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}
\tag{4.16}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -16,13 & 12,10 \\
0 & -140 & 12,10 & -9,07 \\
-16,13 & -12,10 & 0 & 0 \\
-12,10 & -9,07 & 0 & -140
\end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{bmatrix}
\tag{4.17}
$$

c) Tính chuyển vị tại các nút

Giải hệ phương trình (4.16), ta được giá trị các thành phần chuyển vị.

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]' = 10^{-2}[-1{,}12\quad -6{,}62\quad -4{,}24\quad -13{,}76]\ \text{mm}$$

d) Tính ứng suất trong các thanh giàn theo (4.13)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i - (q_4 - q_2)m_i\right]$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210\ \times\ 10^{-2}}{3000}\left[0-(0+6{,}62)\right] = -4{,}634 \times 10^{-3}\,\text{kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210\ \times\ 10^{-2}}{3000}\left[0-(0+13{,}76)\right] = -9{,}632 \times 10^{-3}\,\text{kN/mm}^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210\times 10^{-2}}{4000}\left[(-4{,}24+1{,}12)\times 1{,}0+0\right] = -1{,}638 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 4:

$$\sigma_4 = \frac{210\times 10^{-2}}{5000}\left[(0+4{,}24)\times(-0{,}8)+(0+13{,}76)\times 0{,}6\right]$$

$$= 2{,}043 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 5:

$$\sigma_5 = \frac{210\times 10^{-2}}{5000}\left[(0+4{,}24)\times 0{,}8+(0+13{,}76)\times 0{,}6\right]$$

$$= 4{,}892\ \text{kN/mm}^2$$

e) Tính phản lực theo (4.17)

$$R_5 = -16{,}13 \times 10^{-2}(-4{,}24) + 12{,}10 \times 10^{-2}(-13{,}76) = -0{,}982\text{kN}$$

$$R_6 = 10^{-2}[-140 \times (-6{,}62) + 12{,}10 \times (-4{,}24) - 9{,}07 \times (-13{,}76)] = 10\text{kN}$$

$$R_7 = 10^{-2}\{-16{,}13 \times (-1{,}12) - 12{,}10 \times (-6{,}62)] = 0{,}982\text{kN}$$

$$R_8 = 10^{-2}[-12{,}10 \times (-1{,}12) - 9{,}07 \times (-6{,}62) - 140 \times (-13{,}76)] = 20\text{kN}$$

4.2.4. Tác dụng của nhiệt độ và sự chế tạo không chính xác

4.2.4.1. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ.

Trong chương 3, ta đã suy ra công thức tính vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp tác dụng của nhiệt độ (công thức 3.64):

$$f_{td}^{*} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (4.18)$$

Trong đó: α - hệ số giãn nở do nhiệt độ;

ΔT - độ biến thiên (tăng hoặc giảm) của nhiệt độ.

Công thức trên áp dụng cho kết cấu một chiều. Đối với giàn, nó chỉ áp dụng cho mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ.

Bây giờ, ta sẽ biểu thị (4.18) trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\mathbf{U'}\,\mathbf{f}_{td}^{*} = \mathbf{q'}\mathbf{f}_{td} \qquad (4.19)$$

Trong đó: **U'** - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{f}_{td}^{*}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ cục bộ;

q - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể;

$\mathbf{f}_{td}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ tổng thể,

Theo (4.5) : $\mathbf{U} = \mathbf{Rq}$

Thay hệ thức trên vào (4.19).

$$\mathbf{q'R'}\,\mathbf{f}_{td}^{*} = \mathbf{q'}\mathbf{f}_{td} \qquad (4.20)$$

do đó:

$$\mathbf{f}_{td} = \mathbf{R'}\,\mathbf{f}_{td}^{*} \qquad (4.21)$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.21) và (4.18):

$$\mathbf{f}_{td}^{*} = E_eA_e\alpha.\Delta T\begin{bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

Vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ sẽ được ghép với các tải trọng khác để được vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Sau khi xác định các thành phần chuyển vị, ta tính ứng suất.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \qquad (4.23)$$

Kết hợp với công thức (4.13), ta có:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -l_i & -m_i & l_i & m_i \end{bmatrix}.q_i - E_i.\alpha.\Delta T \qquad (4.24)$$

Trong đó: chỉ số i ứng với thanh giàn thứ i:

4.2.4.2. Trường hợp chế tạo không chính xác

Một thanh giàn chế tạo không chính xác có nghĩa là khi lắp ráp, thanh đó ngắn hơn hoặc dài hơn so với chiều dài quy định trong thiết kế. Để thanh có chiều dài quy định, ta kéo giãn nó ra hoặc đập co vào một đoạn Δ. Điều này tương đương với việc cho tác dụng lên thanh giàn độ biến thiên nhiệt độ.

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i . L_i} \tag{4.25}$$

Vậy bài toán chế tạo không chính xác được đưa về bài toán tác dụng của nhiệt độ.

Ví dụ 4.2: Đầu đề giống ví dụ (4.1) nhưng ngoài tải trọng, còn có tác dụng của nhiệt độ. Độ biến thiên của nhiệt độ bằng 20^0, $\alpha = 10 \times 10^{-6}/^0C$.

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính ứng suất trong các thanh giàn.

Giải:

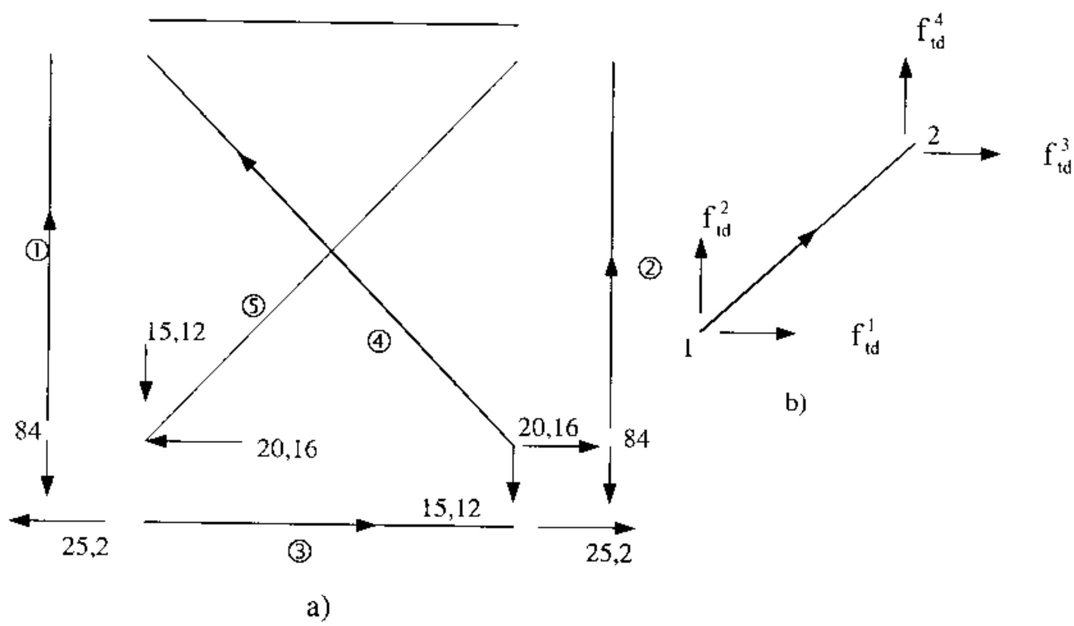
Ta áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để giải bài toán này nghĩa là chuyển vị bằng tổng của chuyển vị đã tính trong ví dụ (4.1) (do tải trọng) và chuyển vị tính trong ví dụ 4.2 (do nhiệt độ). Đối với ứng suất, ta cũng làm tương tự.

Các số liệu ban đầu đã thống kê trong ví dụ (4.1). Đồng thời, ma trận độ cứng tổng thể **K** cũng đã tính trong ví dụ đó.

Bây giờ chỉ xét tác dụng của nhiệt độ. Áp dụng (4.22), ta có:

$$f_{cd}^{i} = E_i A_i . \alpha . \Delta T[-l_i \quad -m_i \quad l_i \quad m_i]'$$

Trong đó: chỉ số i áp dụng cho thanh giàn thứ i.



Hình 4.6: *Tải trọng tương đương do nhiệt độ*

Phần tử 1: $f_{td}^{1} = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times 0 = 0$

$f_{td}^{2} = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times (-1{,}0) = -8{,}4kN$

Phần tử 2: $f'_{td} = 0$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 2000 \times (-1{,}0) = -84kN$

Phần tử 3: $f'_{td} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-1) = -25{,}2kN$

$f_{td}^{2} = 0$

$f_{td}^{3} = 25{,}2kN$

$f_{td}^{4} = 0$

Phần tử 4: $f_{td}^{1} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (0{,}8) = 20{,}16$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0{,}6) = -15{,}12$

Phần tử 5: $f_{td}^{1} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0{,}8) = -20{,}16$

$f_{td}^{2} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0{,}6) = -15{,}12$

Trong đó: 1, 2, 3, 4 là số thứ tự các bậc tự do ở 2 đầu thanh trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.6b). Các tải trọng tương đương ghi trên hình (4.6a).

Ghép các tải trọng tương đương trên phương các bậc tự do tổng thể:

$F_1 = -20{,}16 - 25{,}20 = -45{,}36kN$

$F_2 = -84 - 25{,}12 = -99{,}12kN$

$F_3 = 25{,}20 + 20{,}16 = 45{,}36kN$

$F_4 = -84 - 15{,}12 = -99{,}12kN$

Hệ phương trình cân bằng tổng thể có dạng:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45{,}36 \\ -99{,}12 \\ 45{,}36 \\ -99{,}12 \end{bmatrix}$$

Trong đó: **K** tính theo (4.16)

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị do nhiệt độ:

$\mathbf{Q}^{n} = [-0{,}4775 \quad -0{,}6262 \quad -0{,}4775 \quad -0{,}6262]'$ mm

Tổng chuyển vị do tải trọng và do nhiệt độ:

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{t} + \mathbf{Q}^{n}$

$\mathbf{Q}^{t}$ đã tính trong mục c ví dụ (4.1).

Tính ứng suất

Ứng suất do nhiệt độ tính theo (4.24).

$$\sigma_i^n = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i + (q_4 - q_2)m_i - E\alpha\Delta T\right]$$

Phần tử 1: $\sigma_1^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= 1,834 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 2: $\sigma_2^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= 4,34 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 3: $\sigma_3^n = \frac{210}{4000}\left[(-0,475 + 0,4775) \times 1,0 + 0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -4,187 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 4: $\sigma_4^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (-0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -4,226 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Phần tử 5: $\sigma_5^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$

$= -1,018 \times 10^{-2} kN/mm^2$

Tổng ứng suất pháp do tải trọng và do nhiệt độ là tổng của ứng suất pháp tính trong mục d) của ví dụ (4.1) và ứng suất pháp vừa tính trên.

§4.3. GIÀN KHÔNG GIAN

4.3.1. Ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

Giàn không gian là một kết cấu trong đó các thanh giàn và tải trọng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giàn không gian còn gọi là *giàn 3 chiều.*

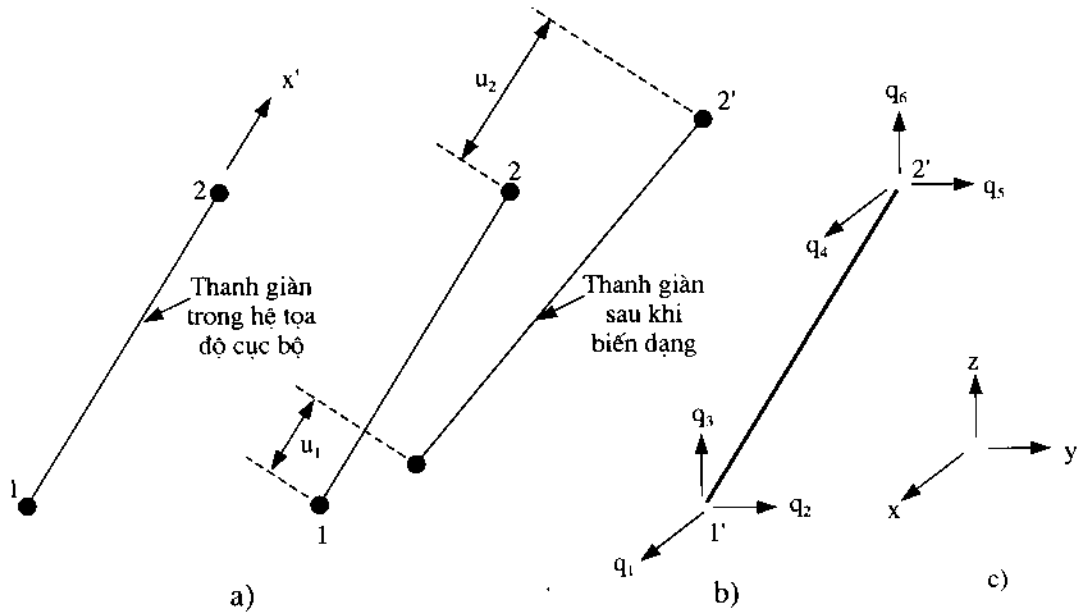
Giống như giàn phẳng, mỗi thanh giàn làm việc như kết cấu 1 chiều. Vì vậy, cần có 2 hệ trục tọa độ: hệ tọa độ cục bộ x' trùng với trục của thanh giàn (hình 4.7a), chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2; hệ trục tọa độ x, y, z biểu thị trên hình 4.7b, 4.7c.

Vectơ chuyển vị của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.7a) là:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.26}$$

Vectơ chuyển vị ở 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể là (hình 4.7b):

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6]' \tag{4.27}$$



Hình 4.7

Tương tự như trong §4.2, hệ thức giữa **u** và **q** như sau:

$$u_1 = q_1 l + q_2 m + q_3 n$$

$$u_2 = q_4 l + q_5 m + q_6 n$$

Dưới dạng ma trận

$$\mathbf{u} = \mathbf{R.q} \tag{4.28}$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

R gọi là trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Trong đó: l, m, n là các côsin định hướng của trục x' đối với các trục x, y, z.

Ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ tính theo công thức (4.9).

$$\mathbf{k_e} = \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Áp dụng công thức (1.43), ta có ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{K_e} = \mathbf{R'.k_e.R} \tag{4.31a}$$

Căn cứ vào (4.29) và (4.30), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận trong (4.31a), ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -lm \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -m.n \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Các côsin định hướng tính như sau:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \qquad n = \frac{z_2 - z_1}{L_e} \tag{4.32}$$

Chiều dài của thanh giàn:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4.33}$$

Công việc tiếp theo là ghép các ma trận độ cứng của các thanh giàn và ghép các vectơ tải trọng để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành chuyển vị.

4.3.2. Ứng suất pháp

Ứng suất pháp trong thanh giàn có thể viết:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.34a}$$

theo (4.28):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R.q} \tag{a}$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \tag{b}$$

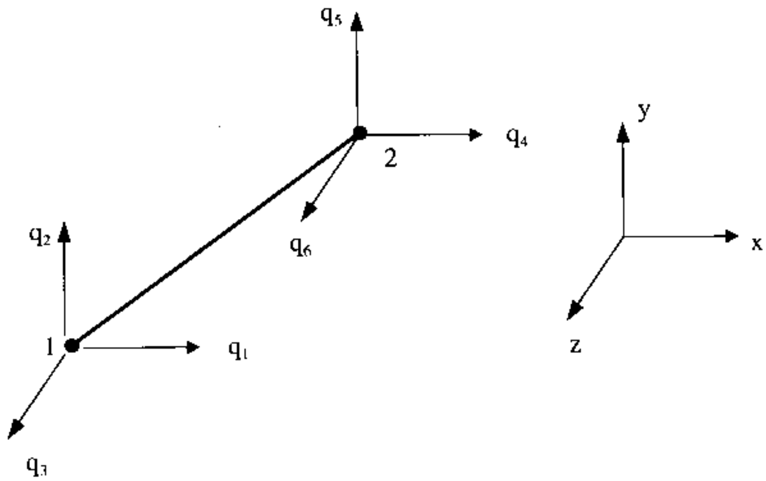
Thay (a) và (b) vào (4.34a), ta được;

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -l & -m & -n & l & m & n \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.34}$$

q là vectơ chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.8).



Hình 4.8: Các thành phần chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

4.3.3. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ và chế tạo không chính xác

Tương tự như trong (4.22, ta có vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ):

$$f_{td}^e = E_e A_e \alpha.\Delta T.\begin{bmatrix}-l_e & -m_e & n_e & l_e & m_e & n_e\end{bmatrix}' \qquad (4.35)$$

Ứng suất do nhiệt độ:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix}-l_i & -m_i & -n_i & l_i & m_i & n_i\end{bmatrix}.\mathbf{q}_i - E_i \alpha \Delta T \qquad (4.36)$$

Trong đó: **q** tính theo (4.27).

Trường hợp chế tạo không chính xác

Ta đưa về trường hợp tác dụng của nhiệt độ bằng cách áp dụng công thức sau:

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} \qquad (4.37)$$

Trong đó: Δ là độ dài hơn hoặc độ ngắn hơn so với chiều dài thiết kế của một thanh giàn trong quá trình chế tạo.

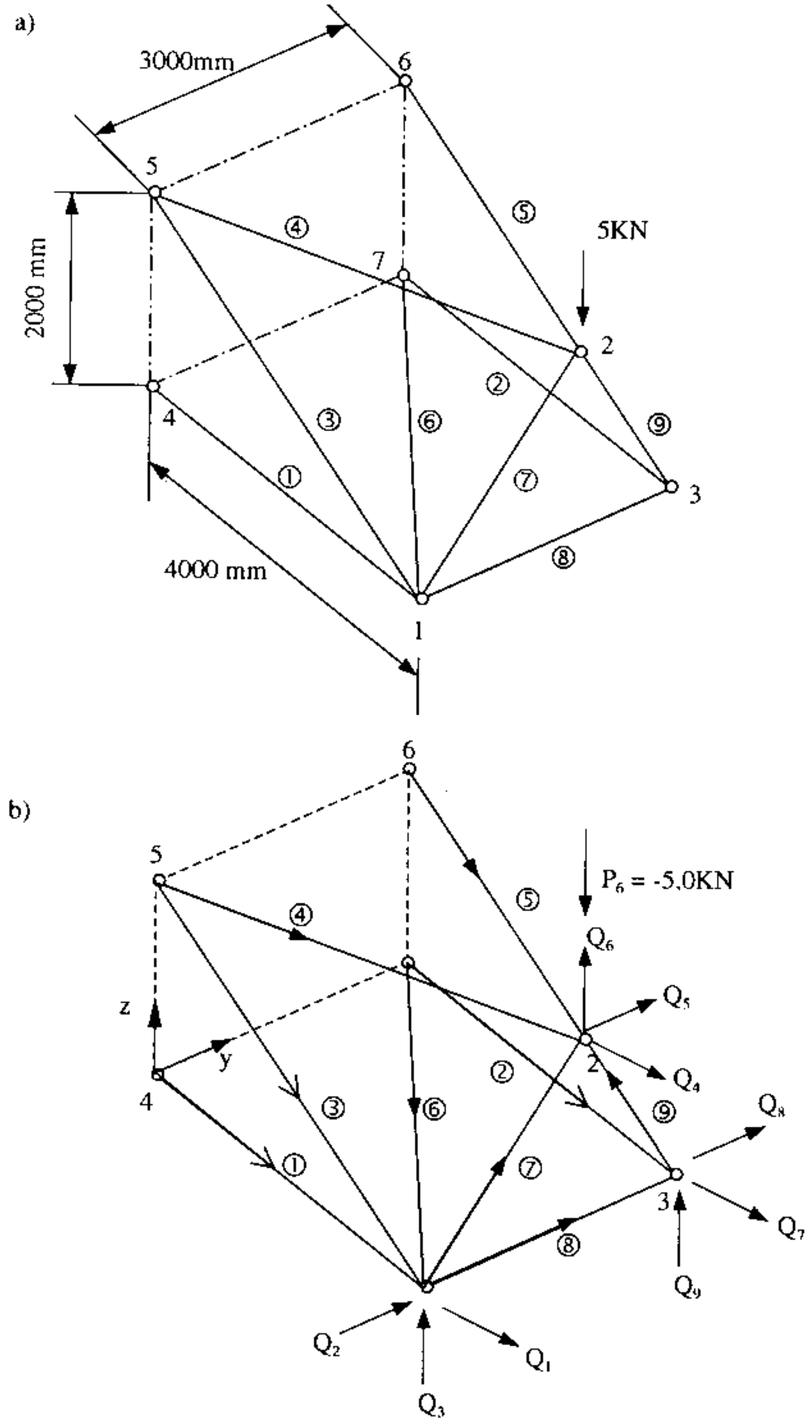
Ví dụ 4.3:

Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.9a). $E = 210 kN/mm^2$

Xác định ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ;

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính lực dọc trong các thanh giàn.



Hình 4.9

Giải:

Số thứ tự các nút và các thanh giàn (được khoanh tròn) biểu thị trên hình (4.9a). Có tất cả 7 nút và 9 thanh. Chiều dương của trục x' biểu thị bằng các mũi tên. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y	z
1	4000	0	0
2	4000	1500	2000
3	4000	3000	0
4	0	0	0
5	0	0	2000
6	0	3000	2000
7	0	3000	0

Số thự tự bậc tự do tại các nút

Nút	u	v	w
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0

Số thứ tự các bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	4	1	5	6	2
2	7	3	6	7	1
3	5	1	7	1	2
4	5	2	8	1	3
			9	3	2

Đặc trưng hình học và cơ học của các thanh giàn

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	$(z_2 - z_1)$	L	l	m	n	AE/L
1	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
2	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
3	4000	0	-2000	4472	0,8944	0	-0,4472	4,025
4	4000	1500	0	4272	0,9363	0,3511	0	4,214
5	4000	-1500	0	4272	0,9363	-0,3511	0	4,214
6	4000	-3000	0	5000	0,8	-0,6	0	3,6
7	0	1500	2000	2500	0	0,6	0,8	7,2
8	0	3000	0	3000	0	1,0	0	6,0
9	0	-1500	2000	2500	0	-0,6	0,8	7,2

a) Theo (4.31), xác định các ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể.

Thanh số 1:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 2:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 3:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 3,22 & 0 & -1,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,61 & 0 & 0,81 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 4:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} 3,69 & 1,39 & 0 \\ 1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 5:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_5 = \begin{bmatrix} 3,69 & -1,39 & 0 \\ -1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 6:
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{k}_6 = \begin{bmatrix} 2,30 & -1,73 & 0 \\ -1,73 & 1,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 7:

$$\mathbf{k}_7 = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}59 & 3{,}46 & 0 & -2{,}59 & -3{,}46 \\ 0 & 3{,}46 & 4{,}61 & 0 & -3{,}46 & -4{,}61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}59 & -3{,}46 & 0 & 2{,}59 & 3{,}46 \\ 0 & -3{,}46 & -4{,}61 & 0 & 3{,}46 & 4{,}61 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 8:

$$\mathbf{k}_8 = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}0 & 0 & 0 & -6{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6{,}0 & 0 & 0 & -6{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Thanh số 9:

$$\mathbf{k}_9 = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}59 & -3{,}46 & 0 & -2{,}59 & 3{,}46 \\ 0 & -3{,}46 & 4{,}61 & 0 & 3{,}46 & -4{,}61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}59 & 3{,}46 & 0 & 2{,}59 & -3{,}46 \\ 0 & 3{,}46 & -4{,}61 & 0 & -3{,}46 & 4{,}61 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{c}4,5\\3,22\\\underline{2,30}\\10,02\end{array} & -1,73 & -1,61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \begin{array}{c}2,59\\6,0\\\underline{1,30}\\9,89\end{array} & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 & 0 & -6,0 & 0 \\
 & & \begin{array}{c}0,81\\\underline{4,61}\\5,42\end{array} & 0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \begin{array}{c}3,69\\\underline{3,69}\\7,38\end{array} & \begin{array}{c}-1,39\\\underline{1,39}\\0\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \begin{array}{c}0,52\\0,52\\2,59\\\underline{2,59}\\6,22\end{array} & \begin{array}{c}3,46\\\underline{-3,46}\\0\end{array} & 0 & -2,59 & 3,46 \\
 & & & & & \begin{array}{c}4,61\\\underline{4,61}\\9,22\end{array} & 0 & 3,46 & -4,61 \\
 & \text{Đối xứng} & & & & & 4,5 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \begin{array}{c}6,0\\\underline{2,59}\\8,59\end{array} & -3,46 \\
 & & & & & & & & 4,61
\end{pmatrix}
$$

b) Ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 & Q_9 \end{bmatrix}' =$$

$$= \begin{bmatrix} -3,3508 & -7,4646 & -1,2833 & 0 & 3,7569 & -2,234 & 0 & -7,4775 & -3,0772 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Ở trên, ta đã dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận K ứng với các bậc tự do tại các nút không có chuyển vị 4, 5, 6, 7 (hình 4.9).

c) Tính lực dọc theo (4.34)

$$Ld_i = \sigma_i A_i = \frac{A_i E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l + (q_5 - q_2)m + (q_6 - q_3)n\right]$$

Phần tử 1: $Ld_1 = 4,5 \times [1,0 \times (-3,3508) + 0] = -15,08\text{kN}$

Phần tử 2: $Ld_2 = 4,5 \times [1,0 \times 0] = 0\text{kN}$

Phần tử 3: $Ld_3 = 4,025 \times [0,8944 \times (-3,3508) + 0 - 0,4472 \times (-1,2833)]$

$= -9,75\text{kN}$

Phần tử 4: $Ld_4 = 4,214 \times [0,9362 \times 0 + 0,3511 \times 3,7569 + 0] = -5,56\text{kN}$

Phần tử 5: $Ld_5 = 4,214 \times [0,9363 \times 0 - 0,3511 \times 3,7569 + 0] = -5,56\text{kN}$

Phần tử 6: $Ld_6 = 3,6 \times [0,8 \times (-3,3508) - 0,6 \times (-7,4646) + 0] = 6,76\text{kN}$

Phần tử 7:

$Ld_7 = 7,2 \times [0 - 0,6 \times (-7,4646 - 0,8 \times (-1,2833) + 0 + 0,6 \times 3,7569 + 0,8 \times (-2,234)]$

$= 43,00\text{kN}$

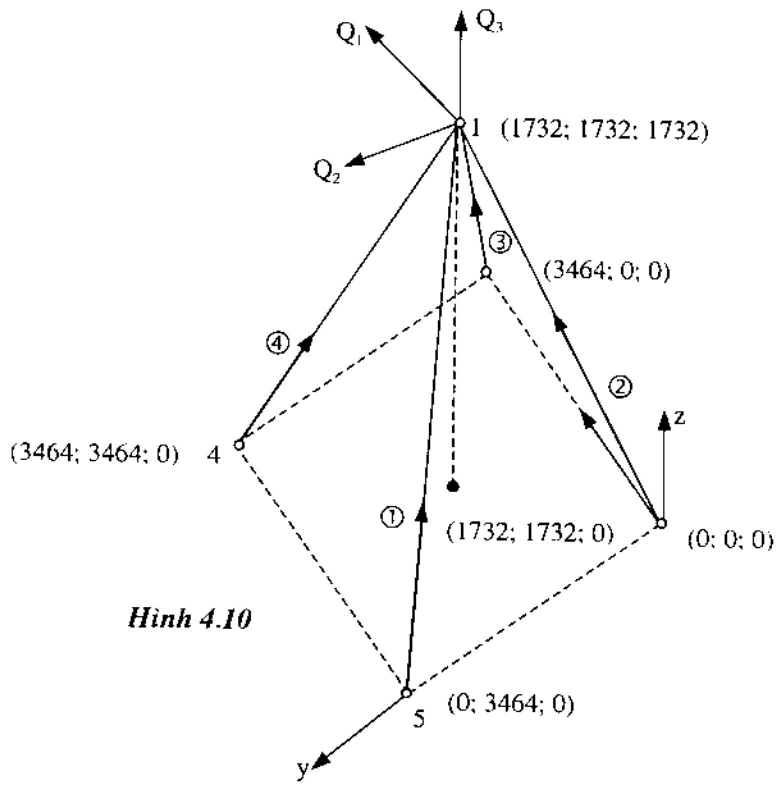
Phần tử 8: $Ld_8 = 6,0 \times [0 - 1,0 \times (-7,4646) + 0 + 0 + 1,0 \times (-7,4775) + 0] = -0,08\text{ kN}$

Phần tử 9:

$Ld_9 = 7,2 \times [0 + 0,6 \times (-7,4775) - 0,8 \times (-3,0772) + 0 - 0,6 \times 3,7569 + 0,8 \times (-2,234)]$

$= -43,68\text{kN}$

Ví dụ 4.4: Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.10).



Hình 4.10

Thanh 1 - 5 dài hơn chiều dài quy định 0,1%. E = 210kN/mm^2, chiều dài mỗi thanh L = 3000mm, diện tích tiết diện A = 230mm^2, hệ số giãn nở do nhiệt độ 10×10^{-6}/°C.

Xác định ma trận độ cứng tổng thể;

Tính chuyển vị;

Tính ứng suất.

Giải:

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y	z
1	1732	1732	1732
2	0	0	0
3	3464	0	0
4	3464	3464	0
5	0	3464	0

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	d_1	d_2	d_3
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Số thứ tự bậc tự do tại 2 đầu thanh

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	5	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1

Tính các côsin định hướng theo (4.32):

Phần tử 1: $$l_1 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_1 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_1 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 2: $$l_2 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_2 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 3: $$l_3 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$n_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 4: $$l_4 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$m_4 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_4 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

a) Xác định ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng công thức (4.31) và dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận ứng với các bậc tự do ở các nút cố định 2, 3, 4, 5.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0{,}5773^2 & -(0{,}5773)^2 & 0{,}5773^2 \\ & (0{,}5773)^2 & -0{,}5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0{,}5773^2 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = \dfrac{EA}{L} & \left[\begin{array}{ccc} 0{,}5773^2 & 0{,}5773^2 & 0{,}5773^2 \\ & 0{,}5773^2 & 0{,}5773^2 \\ \text{đối} \quad \text{xứng} & & 0{,}5773^2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_3 = \dfrac{EA}{L} & \left[\begin{array}{ccc} 0{,}5773^2 & -0{,}5773^2 & -0{,}5773^2 \\ & 0{,}5773^2 & 0{,}5773^2 \\ \text{dx} & & 0{,}5773^2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Phần tử 4:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \mathbf{k}_4 = \dfrac{EA}{L} & \left[\begin{array}{ccc} 0{,}5773^2 & 0{,}5773^2 & -0{,}5773^2 \\ & 0{,}5773^2 & -0{,}5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0{,}5773^2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể:

$$\mathbf{K} = 16{,}1 \times \begin{bmatrix} 4 \times 0{,}3333 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 0{,}3333 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 21{,}4645 & 0 & 0 \\ & 21{,}4645 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 21{,}4645 \end{bmatrix}$$

b) Tính chuyển vị

Tính độ biến thiên nhiệt độ tương đương theo (4.37)

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} = \frac{3000}{1000 \times 10 \times 10^{-6} \times 3000} = 100^0\mathrm{C}$$

Tính vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ gây ra theo (4.35).

$$\mathbf{f}_{td}^{\mathbf{i}} = E_i.A_i\alpha.\Delta T\begin{bmatrix} -l_i & -m_i & -n_i & l_i & m_i & n_i \end{bmatrix}$$

Chỉ có phần tử 1 chế tạo không chính xác nên i = 1.

Các thành phần tải trọng tương đương men theo các bậc tự do 1, 2, 3 (hình 4.10):

$$F_1 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0{,}5773 = 28\text{kN}$$

$$F_2 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{6} \times 100 \times (-0{,}5773) = -28\text{kN}$$

$$F_3 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0{,}5773 = 28\text{kN}$$

Kết hợp ma trận **K** đã cho và vectơ tải trọng vừa tính ở trên, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 21{,}46 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}46 & 0 \\ 0 & 0 & 21{,}46 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = \frac{28}{21{,}46} = 1{,}30\text{mm}$$

$$Q_2 = -\frac{28}{21{,}46} = -1{,}30\text{mm}$$

$$Q_1 = \frac{28}{21{,}46} = 1{,}30\text{mm}$$

b) Tính ứng suất theo (4.36)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l_i + (q_5 - q_2)m_i + (q_6 - q_3)n_i\right] - E_i.\alpha.\Delta T$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210}{3000}\left[(1{,}30 - 0)\times 0{,}577 + (-1{,}30)\times(-0{,}5773) + (1{,}30)\times 0{,}577\right]$$

$$-210 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 = -0{,}0525\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210}{3000}\left[(1{,}30 - 0)\times 0{,}5773 + (-1{,}30)\times 0{,}5773 + 1{,}30 \times 0{,}577\right]$$

$$-0{,}21 = -0{,}1575\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210}{3000}\left[(1{,}30)\times(-0{,}5773) + (-1{,}30)\times 0{,}5773 + (1{,}30)\times 0{,}5773\right]$$

$$-0{,}21 = -0{,}0625\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 4:

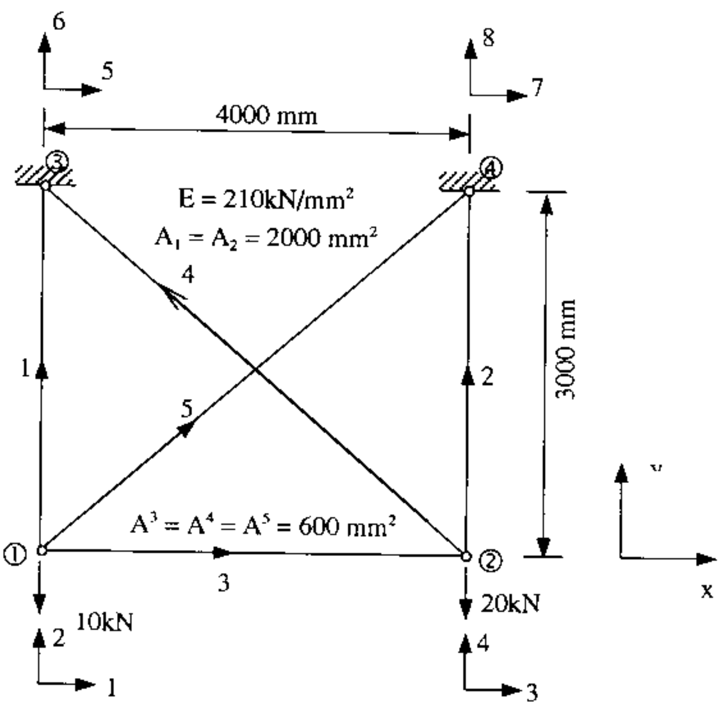
$$\sigma_4 = \frac{210}{3000}\left[(1,30)\times(-0,5773)+(-1,30)\times(-0,5773)+(1,30)\times 0,5773\right]$$
$$-0,21 = -0,1575 \text{ kN/mm}^2$$

§4.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN PHẲNG (CTR4)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ (lấy thí dụ trong hình 4.11)

- Số thứ tự các nút nên xếp theo dãy số tự nhiên (1, 2, 3, ...). Chẳng hạn, trong thí dụ này, có 4 nút 1, 2, 3, 4.
- Số thứ tự các thanh cũng làm như trên.
- Số thứ tự các bậc tự do nên xếp theo dãy số tự nhiên.



Hình 4.11

Theo nguyên tắc chung, số thứ tự bậc tự do tại nút i, xác định như sau:

Trên phương y : 2i

Trên phương x : 2i - 1

Số thứ tự bậc tự do không có chuyển vị nên xếp ở cuối để tiện cho việc chia khối ma trận khi dùng phương pháp loại trừ.

Trong mỗi thanh giàn, số thứ tự BTD của đầu 1 nên bé hơn so với đầu 2. Trong thí dụ này, số thứ tự các BTD là: 1, 2, 3, ..., 7, 8. Trong đó: 5, 6, 7, 8 là số thứ tự các BTD không có chuyển vị. Sắp xếp số thứ tự như trên sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho việc chia khối ma trận nhằm tính chuyển vị và phản lực tại các gối tựa không có chuyển vị.

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau:

Số thanh: 4

Số BTD có chuyển vị: 4

Tổng số BTD: 8

Các thành phần tải trọng: 0; -10; 0; -20

Phần tử	Tọa độ (mm)				Diện tích (mm^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	0	0	0	3000	2000	210	0	0
2	4000	4000	0	3000	2000	210	0	0
3	0	4000	0	0	600	210	0	0
4	4000	0	0	3000	600	210	0	0
5	0	4000	0	3000	600	210	0	0

Phần tử	Số bậc tự do			
	d_1	d_2	d_3	d_4
1	1	2	5	6
2	3	4	7	8
3	1	2	3	4
4	3	4	5	6
5	1	2	7	8

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.10)

4) Giải hệ phương trình **Q** = **F** để được giá trị các thành phần chuyển vị.

5) Tính ứng suất theo (4.13)

6) Tính phản lực theo sơ đồ chia khối ma trận theo (4.15) và (4.17)

§ 4.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN KHÔNG GIAN (CTR 5)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ

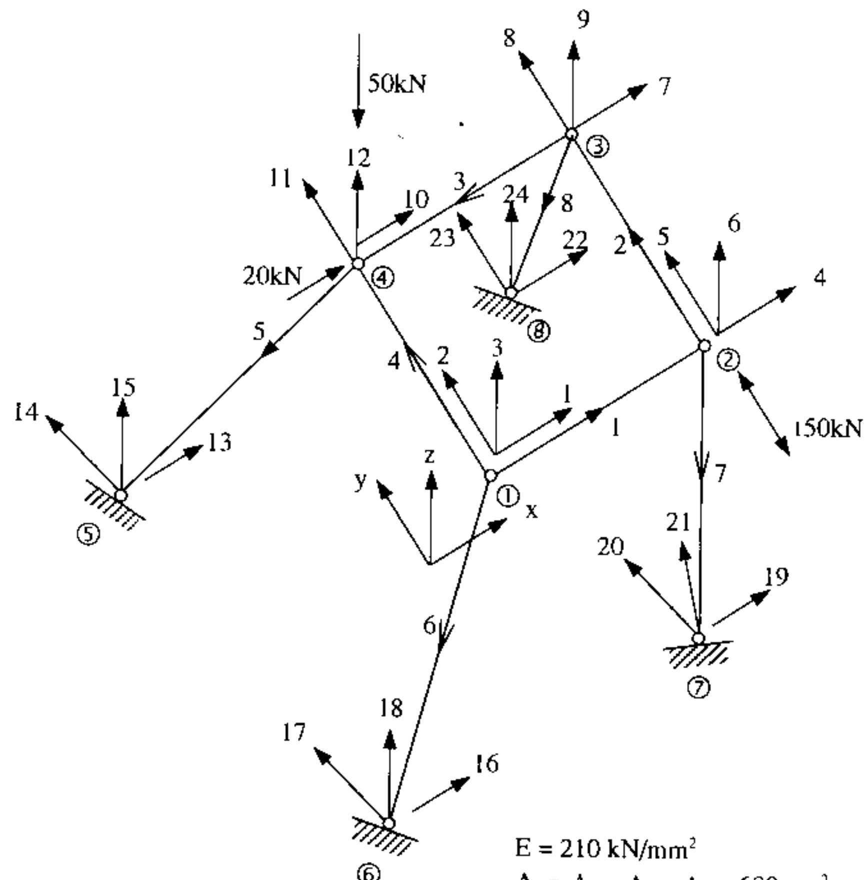
Giống như đã trình bày trong §4.4. Tuy nhiên, mỗi nút có 3 BTD. Số thứ tự các BTD tại nút i, xác định như sau:

Trên phương x : 3i - 2

Trên phương y : 3i - 1

Trên phương z : 3i

Trong ví dụ trên hình (4.12), ta có tất cả 24 BTD trong đó có 12 BTD có chuyển vị và 12 BTD không có chuyển vị, chúng được xếp thứ tự theo dãy số tự nhiên.



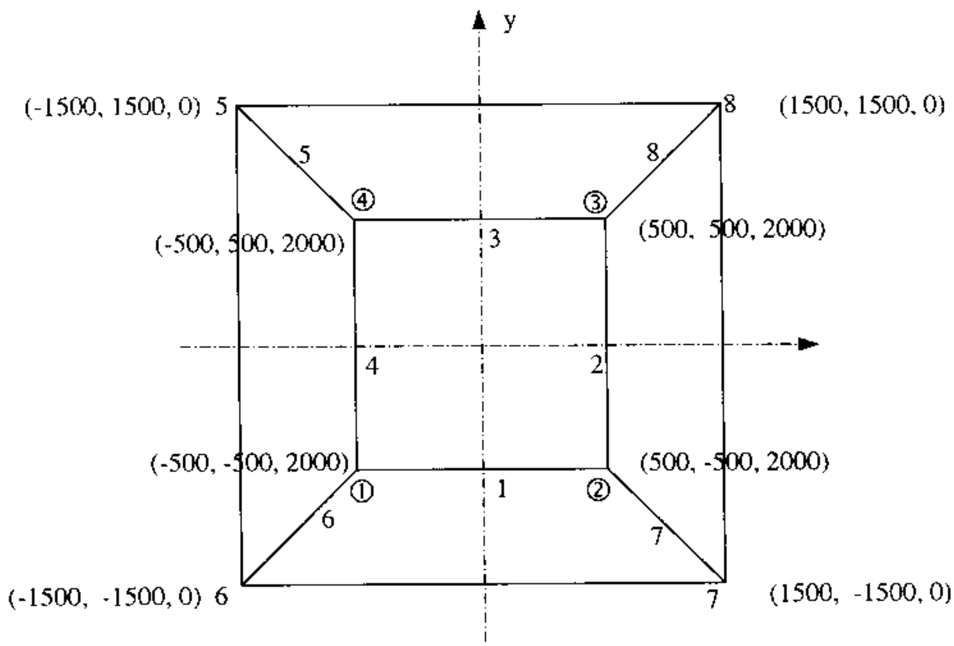
E = 210 kN/mm²

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 600mm^2$

$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 2400mm^2$

Số thứ tự các nút: khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: không khoanh tròn



Hình 4.12

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 4.12)

Số thanh: 8

Số BTD có chuyển vị: 12

Tổng số BTD: 24

Phần tử	Tọa độ (mm)						Diện tích (mm²)	Môđun đàn hồi (kN/m²)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2				
1	-500	-500	2000	500	-500	2000	600	210	0	0
2	500	-500	2000	500	500	2000	600	210	0	0
3	500	500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
4	-500	-500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
5	-500	500	2000	-1500	1500	0	2400	210	0	0
6	-500	-500	2000	-1500	-1500	0				
7	500	-500	2000	1500	-1500	0				
8	500	500	2000	1500	1500	0				

Phần tử	Số bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	1	2	3	10	11	12
5	10	11	12	13	14	15
6	1	2	3	16	17	18
7	4	5	6	19	20	21
8	7	8	9	22	23	24

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.31).

4) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

5) Tính ứng suất theo (4.36)

6) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và sơ đồ chia khối ma trận (như trong thí dụ 4.1).

§4.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN CHỊU TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ VÀ GIÀN CHẾ TẠO KHÔNG CHÍNH XÁC (CTR6, CTR7)

Thuật toán ở đây giống CTR4 và CTR5. Chỉ khác là cần thống kê thêm các số liệu về hệ số giãn nở và số gia nhiệt độ thực tế hoặc số gia nhiệt độ tương đương khi giàn chế tạo không chính xác.

Các thành phần tải trọng tính theo (4.35) và (4.37).

Chương 5

BÀI TOÁN HAI CHIỀU DÙNG TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

§5.1. ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN HAI CHIỀU

Trong bài toán hai chiều, chuyển vị, biến dạng, ứng suất, lực thể tích, lực biên là những hàm của hai biến x và y.

Vectơ chuyển vị u có dạng:

$$\mathbf{U} = [u \quad v]' \tag{5.1}$$

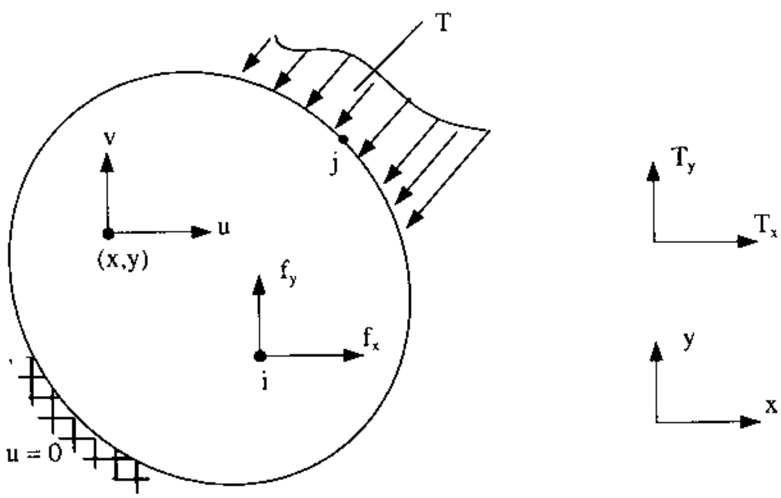
Trong đó: u - thành phần chuyển vị song song với trục x;

v - thành phần chuyển vị song song với trục y.

Ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}' \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}' \tag{5.3}$$



Hình 5.1. *Kết cấu 2 chiều*

Hình 5.1 biểu thị kết cấu hai chiều một cách khái quát, trong đó vectơ lực thể tích **f**, vectơ lực biên **T** và phân tố thể tích dV như sau:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}' \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}' \qquad dV = hdA \tag{5.4}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu hai chiều trên phương z;

fx, fy - các lực thể tích trên đơn vị thể tích trên các phương x, y;

Tx, Ty - các lực biên trên đơn vị diện tích trên các phương x và y;

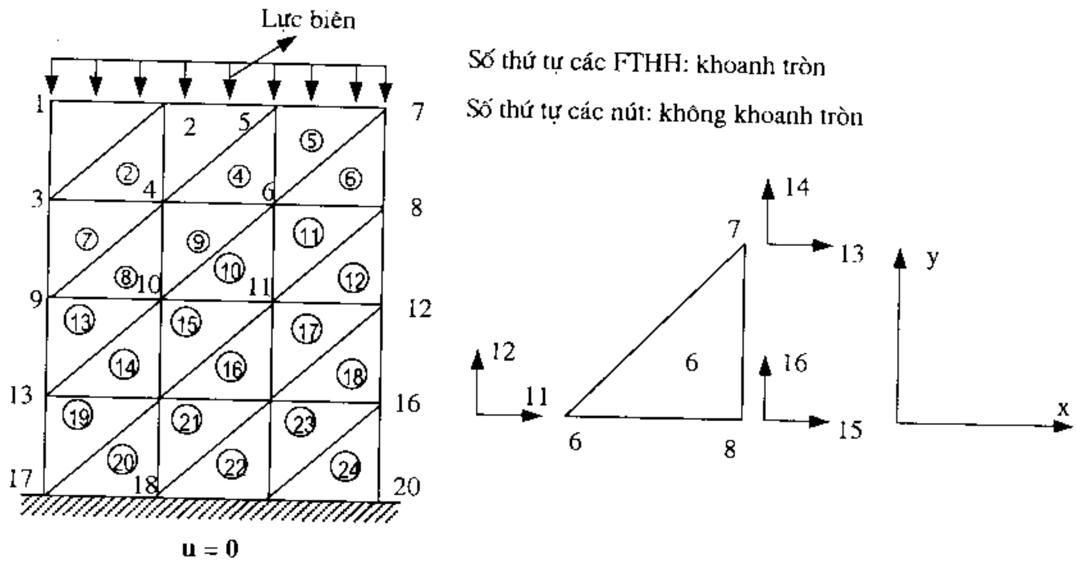
dA - phân tố diện tích; Hệ thức biến dạng chuyển vị

$$\varepsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^{T} \tag{5.5}$$

Hệ thức trên suy ra từ hệ thức tổng quát (1.11) trong bài toán 3 chiều. Theo (1.20) và (1.20a) ta có hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.6}$$

Để giải bài toán hai chiều, trước hết ta dùng mô hình phần tử hữu hạn tam giác. Nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra các biểu thức của ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng



Hình 5.2. Mô hình phần tử hữu hạn trong bài toán 2 chiều

Miền 2 chiều được chia thành các hình tam giác như trên hình (5.2). Các đỉnh tam giác gọi là nút, mỗi tam giác do 3 nút và 3 cạnh tạo thành gọi là một phần tử hữu hạn (viết tắt là FTHH). Các FTHH tam giác lấp đầy miền hai chiều. Nếu có miền rỗng ở biên thì thay nó bằng các FTHH bé hơn hoặc các FTHH có biên cong, do đó bài toán sẽ được giải một cách gần đúng. Trên hình 5.2, số thứ tự của các FTHH được khoanh tròn, số thứ tự các nút biểu thị bên cạnh nút.

Trong bài toán 2 chiều, mỗi nút được phép chuyển vị trên 2 phương x và y. Vậy mỗi nút có 2 bậc tự do (viết tắt là BTD). Để tiện cho việc lập trình trên máy tính điện tử, ta đặt số thứ tự cho mỗi nút như sau:

Tại nút j: BTD trên phương x: $d_1 = 2j - 1$

BTD trên phương y: $d_2 = 2j$ (5.7)

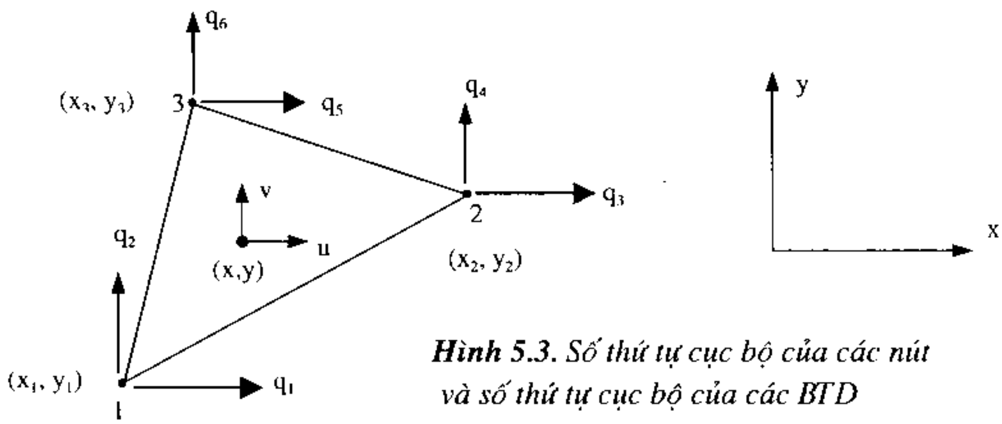
Ví dụ: đối với FTHH số 6 trên hình (5.2), ta có số thứ tự các BTD: 11, 12, 15, 16, 13, 14 (lần lượt ứng với các nút 6, 8, 7).

Véctơ chuyển vị tổng thể có dạng:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_N \end{bmatrix}' \tag{5.8}$$

Trong đó: N là số BTD của toàn hệ.

Trong tính toán, cần biểu thị tọa độ của các nút và sơ đồ liên kết giữa chúng. Tọa độ nút biểu thị trên hình 5.3. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút biểu thị trên hình 5.2. Nếu tách riêng một FTHH, nó có 3 nút 1, 2, 3 (có tính chất cục bộ) và các BTD cục bộ biểu thị như trên hình 5.3.



Hình 5.3. *Số thứ tự cục bộ của các nút và số thứ tự cục bộ của các BTD*

Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ (1, 2, 3) của các nút và số thứ tự tổng thể của chúng biểu thị trên hình 5.2 và bảng 5.1.

Bảng 5.1. Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ và số thứ tự tổng thể của 3 nút FTHH

Số thứ tự FTHH	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	3	2
2	1	2	3	2	3	4
3	1	2	3	2	4	5
4	1	2	3	5	4	6
....	....	....	....	....	....	....
22	1	2	3	15	18	19
23	1	2	3	15	19	16
24	1	2	3	16	19	20

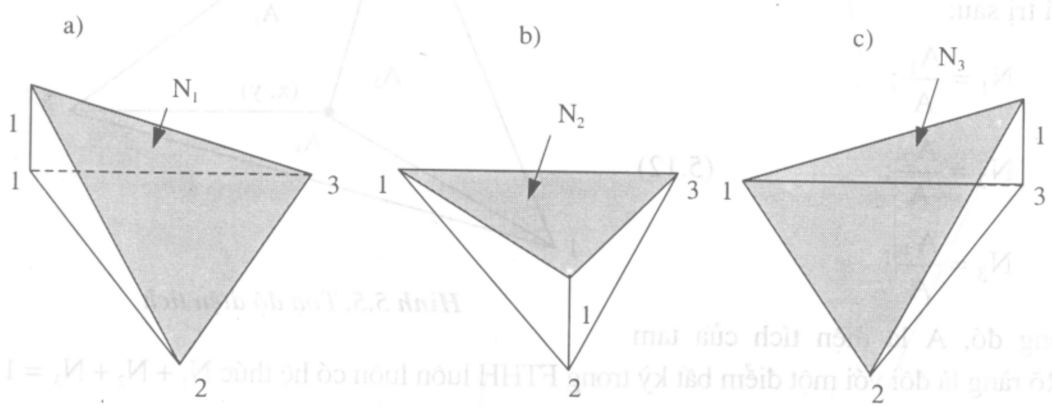
Chẳng hạn đối với FTHH có số thứ tự 4 (hình 5.2), có sự tương quan như sau: nút 1 (cục bộ) → nút 5; nút 2 (cục bộ) → nút 4; nút 3 (cục bộ) → nút 6 Các nút của FTHH tam giác đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ* để tránh diện tích âm (vấn đề này sẽ được đề cập trong phần sau).

Các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH men theo các BTD cục bộ (1, 2, 3) biểu thị như trên hình (5.3). Các thành phần q_1, q_3, q_5 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương x; các thành phần q_2, q_4, q_6 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương y. Vậy vectơ chuyển vị cục bộ của FTHH là:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

§5.3. FTHH TAM GIÁC CÓ BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

Các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH u và v biểu thị trên hình (5.3). Trong đó, u là thành phần chuyển vị trên phương x, v là thành phần chuyển vị trên phương y. Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy* để biểu thị các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH qua các thành phần chuyển vị tại các nút.



Hình 5.4. *Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Đối với FTHH tam giác có biến dạng không đổi, hàm hình dạng có tính chất tuyến tính trong phạm vi FTHH. Khái niệm về hàm hình dạng đối với FTHH đã trình bày trong chương hai. Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 ứng với các nút 1, 2, 3. Sự biến thiên của chúng (xem hình 5.4) như sau. Hàm hình dạng N_1 bằng đơn vị tại nút 1 và bằng 0 tại 2 nút 2 và 3 (hình 5.4a). Hàm hình dạng N_2 bằng đơn vị tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3 (hình 5.4b). Hàm hình dạng N_3 bằng đơn vị tại nút 3 và bằng 0 tại các nút 1 và 2 (hình 5.4c). Các hàm hình dạng nói trên được biểu thị bằng các mặt phẳng. Tổ hợp tuyến tính của các hàm đó cũng biểu thị một mặt phẳng. Đặc biệt tổ hợp của các hàm $N_1 + N_2 + N_3$ là một mặt phẳng đi qua các điểm có chiều cao bằng đơn vị tại các nút

1, 2, 3 nghĩa là mặt phẳng đó song song với tam giác 123. Vậy đối với bất kỳ hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 nào, ta có hệ thức:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \tag{5.10}$$

N_1, N_2, N_3 là những hàm không độc lập tuyến tính. Chỉ có 2 hàm là độc lập tuyến tính. Các hàm hình dạng độc lập tuyến tính được biểu thị bằng các số không thứ nguyên ξ và η như sau:

$$N_1 = \xi \qquad N_2 = \eta \qquad N_3 = 1 - \xi - \eta \tag{5.11}$$

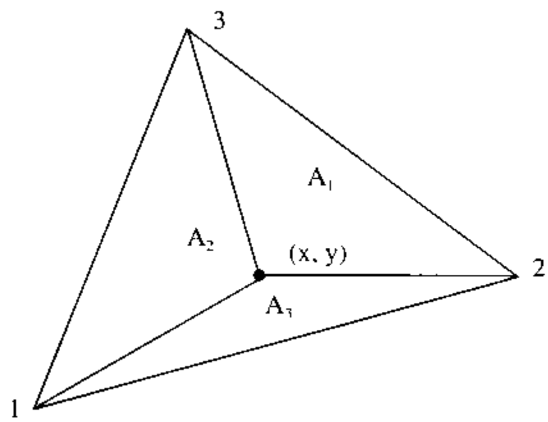
Trong đó ξ và η là các tọa độ tự nhiên. Trong bài toán 1 chiều, ta dùng một tọa độ tự nhiên ξ. Trong bài toán 2 chiều, ứng với tọa độ vuông góc x,y, ta có các tọa độ tự nhiên ξ và η và hàm hình dạng ở đây là hàm của ξ và η.

Ý nghĩa vật lý của các hàm hình dạng như sau:

Một điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trong FTHH tam giác chia nó ra thành 3 miền có các diện tích A_1, A_2, A_3 (hình 5.5).

Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 có các giá trị sau:

$$N_1 = \frac{A_1}{A}; \quad N_2 = \frac{A_2}{A}; \quad N_3 = \frac{A_3}{A}. \tag{5.12}$$



Hình 5.5. Tọa độ diện tích

Trong đó, A là diện tích của tam giác. Rõ ràng là đối với một điểm bất kỳ trong FTHH luôn luôn có hệ thức $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

§5.4. CÁCH BIỂU THỊ CÙNG THAM SỐ. BIỂU THỨC BIẾN DẠNG

5.4.1. Ma trận Jacobian

Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong FTHH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 . q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 . q_4 + N_3 . q_6 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Theo (5.11):

$$\begin{aligned} u &= (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5) + q_5 \\ v &= (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6) + q_6 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dưới dạng ma trận, hệ thức (5.13) có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Đối với FTHH tam giác, cũng có thể dùng các hàm hình dạng nói trên để biểu thị các tọa độ x, y tại 1 điểm trong FTHH qua các tọa độ tại các nút. Cách biểu thị này gọi là *cách biểu thị cùng tham số*. Nó đơn giản và giúp cho việc tính toán sau này được dễ dàng.

Theo trên, có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= N_1.\,x_1 + N_2.x_2 + N_3.x_3 \\ y &= N_1.y_1 + N_2.y_2 + N_3.y_3 \end{aligned} \tag{5.17a}$$

Theo (5.11)

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_3).\xi + (x_2 - x_3).\eta + x_3 \\ y &= (y_1 - y_3).\xi + (y_2 - y_3).\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17b}$$

Đặt $x_{ij} = x_i - x_j$ và $y_{ij} = y_i - y_j$, (5.17b) có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= x_{13}.\xi + x_{23}.\eta + x_3 \\ y &= y_{13}.\xi + y_{23}.\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17c}$$

Các phương trình trên chuyển tọa độ x, y thành các tọa độ tự nhiên ξ, η

Ví dụ 5.1: Tính các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 tại điểm P trong hình tam giác trên hình (5.6).

Giải:

Căn cứ vào các phương trình (5.17), ta có:

$3{,}85 = 1{,}5N_1 + 7N_2 + 4N_3 = -2{,}5\xi + 3\eta + 4$

$4{,}8 = 2N_1 + 3{,}5N_2 + 7N_3 = -5\xi - 3{,}5\eta + 7$

Biến đổi các phương trình trên thành dạng:

$$2{,}5\xi - 3\eta = 0{,}15$$

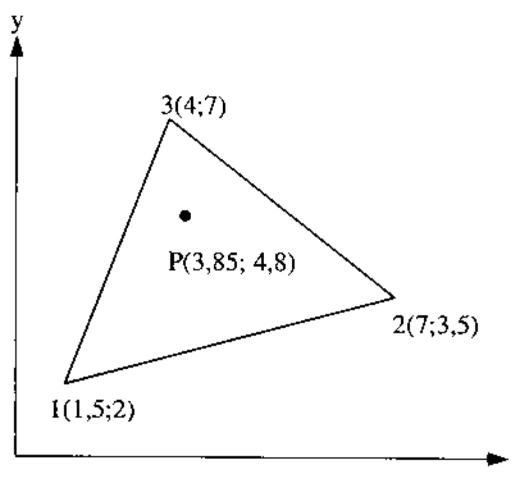
$$5\xi + 3{,}5\eta = 2{,}2$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$N_1 = 0{,}3$$

$$N_2 = 0{,}2$$

$$N_3 = 0{,}5$$



Hình 5.6

Để tính biến dạng, ta phải tính các đạo hàm riêng của u và v đối với x và y. Từ các phương trình (5.12) và (5.17) ta thấy rằng u, v, x, y là những hàm của ξ và η. Nghĩa là $u = u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ và $v = v[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$.

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm riêng của u, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Trong đó, ma trận cấp 2 × 2 sau đây gọi là ma trận Jacobian:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Sau khi lấy đạo hàm của x và y đối với ξ và η, ta được:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Từ (5.18)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

J^{-1} là nghịch đảo của ma trận Jacobi

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} \tag{5.23}$$

Từ kiến thức về diện tích tam giác, ta thấy rằng định thức của **J** tức det**J** bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu các nút của tam giác 1, 2, 3 được xếp theo thứ tự *ngược chiều kim đồng hồ* thì det J có dấu dương. Ta có diện tích:

$$A = \frac{1}{2}\left|\det \mathbf{J}\right| \tag{5.24}$$

Trong đó: ký hiệu | | biểu thị giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5.2: Xác định ma trận Jacobian đối với hình tam giác cho trên hình (5.6)

Giải:

Theo (5.20):

$$J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -5,0 \\ 3,0 & -3,5 \end{bmatrix}$$

Vậy det **J** = 23,75 đơn vị, bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu 3 nút 1, 2, 3 được xếp số thứ tự theo chiều kim đồng hồ, det **J** sẽ mang dấu âm.

5.4.2. Biểu thức biến dạng

Theo (5.21) và (5.22) ta có:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Thay u bằng v ta có hệ thức tương tự:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Thay (5.14), (5.25), (5.26) vào (5.5), ta có:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{5.27a}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) - x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) - x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{pmatrix}$$

Từ định nghĩa của x_{ij} và y_{ij}, ta có thể viết $y_{31} = -y_{13}$, $y_{12} = y_{13} - y_{23}$,..., ta có biểu thức của biến dạng:

$$\varepsilon = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{pmatrix} \tag{5.27b}$$

Dưới dạng ma trận:

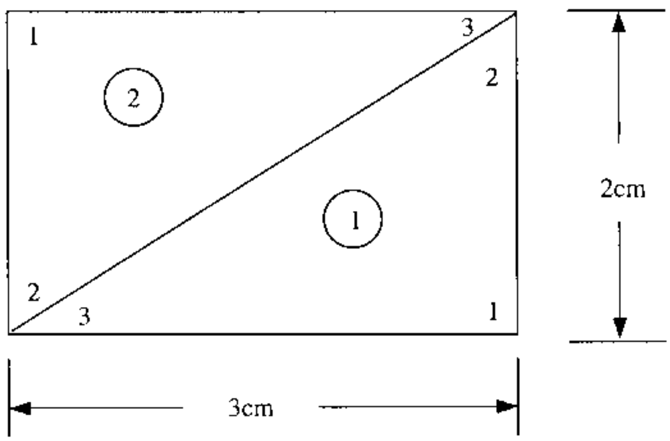
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\,\mathbf{q} \qquad (5.28)$$

Trong đó, ma trận cấp 3 × 6 **B** gọi là *ma trận biến dạng-chuyển vị*, nó biểu thị mối quan hệ giữa 3 thành phần biến dạng trong FTHH và 6 thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{21} & x_{13} & y_{21} & x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \qquad (5.29)$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận **B** là những hằng số, các hằng số này được biểu thị bằng tọa độ tại các nút.

Ví dụ 5.3: Xác định ma trận biến dạng-chuyển vị **B** cho các FTHH biểu thị trên hình (5.7). 1, 2, 3 là số thứ tự nút cục bộ.



Hình 5.7

Giải:

Theo (5.29), ta có:

Phần tử 1:
$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{\det \mathbf{J}}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ở trên, det **J** tính theo công thức $x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13} = 3 \times 2 - 3 \times 0 = 6$.

§5.5. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH

Trong chương hai ta đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra công thức ma trận độ cứng của FTHH trong bài toán 2 chiều. Theo (2.81):

$$k_C = Ah\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B} \tag{5.30}$$

Trong đó: A - diện tích của FTHH;

h - bề dày của FTHH;

B - ma trận biến dạng-chuyển vị theo (5.29);

D - ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.21) (chương 1).

Cần chú ý rằng $\mathbf{k_e}$ đối xứng vì **D** đối xứng. Bằng cách ghép các ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn như đã làm trong các phần trước, ta được ma trận độ cứng tổng thể **K** của toàn hệ. **K** là một ma trận đối xứng mang tính chất dải đối xứng hoặc có tính chất rời rạc. Ta dựa vào sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn như trong bảng 5.1) để ghép các ma trận $\mathbf{k_e}$. Nếu các BTD i và j không được liên kết với nhau trong một phần tử hữu hạn thì phần tử tương ứng trong ma trận **K** triệt tiêu. Nếu các BTD i và j được liên kết với nhiều FTHH thì phần tử tương ứng trong ma trận K có tính chất tích luỹ. Căn cứ vào các BTD tổng thể thống kê trong hình 5.2, ta tính bề rộng của nửa dải đối xứng trong ma trận **K** như sau. Giả sử i_1, i_2, i_3 là số thứ tự các nút của một FTHH, hiệu lớn nhất giữa số thứ tự các nút trong FTHH đó là:

$$m_e = \max\left(|i_1-i_2|, |i_2-i_3|, |i_3-i_1|\right) \tag{5.31}$$

Nửa bề rộng của dải tính theo công thức:

$$NBW = 2\left[\max_{1\le e\le NE}(m_e)+1\right] \tag{5.32}$$

Trong đó: NE - số FTHH;

2 là số BTD tại mỗi nút.

Giá trị m_e trong (5.31) tính cho toàn bộ số FTHH.

Khi xét đến điều kiện biên, có thể áp dụng phương pháp loại trừ hoặc phương pháp mô hình lò xo đã trình bày trong chương 3 để biến đổi ma trận **K**.

§5.6. VECTƠ TẢI TRỌNG, ỨNG SUẤT

Trong chương hai, ta cũng đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra biểu thức véctơ tải trọng trong bài toán 2 chiều. Theo (2.82), ta có vectơ tải trọng:

$$t = h\iint \mathbf{N}'.\mathbf{f}\ dA + h\iint \mathbf{N}'^{s}.\mathbf{T}.dl \tag{5.33}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu;

N - hàm hình dạng;

f - vectơ lực thể tích;

T - vectơ lực biên.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}'$$

Trong đó: f_x, f_y - các thành phần lực thể tích theo phương x và y;

T_x, T_y - các thành phần lực biên theo phương x và y.

Thay hàm hình trạng từ (5.16) và f vào (5.33), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{f_t} = h \iint \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = h \iint \begin{bmatrix} N_1.f_x.dA \\ N_1.f_y.dA \\ N_2.f_x.dA \\ N_2.f_y.dA \\ N_3.f_x.dA \\ N_3.f_y.dA \end{bmatrix}$$

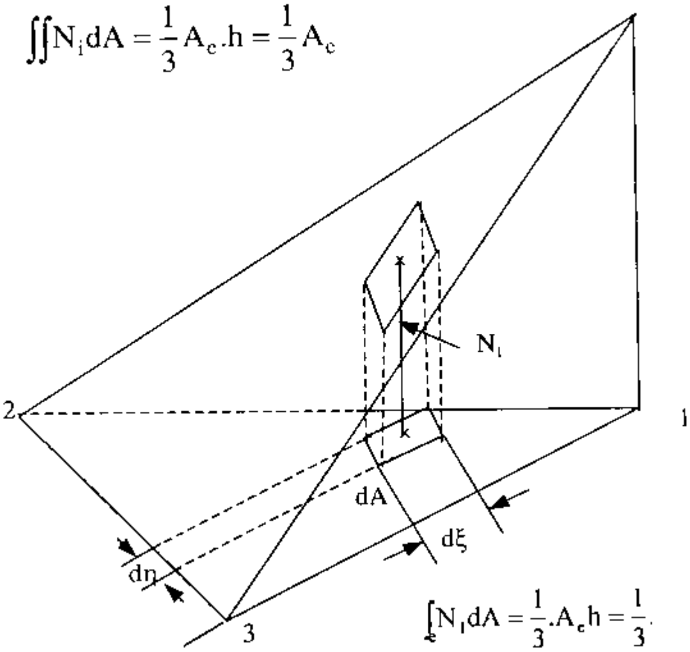
hay:

$$f_t = h \times$$

$$\times \left[f_x \iint N_1 dA + f_y \iint N_1 dA + f_x \iint N_2 dA + f_y \iint N_2 dA + f_x \iint N_3 dA + f_y \iint N_3 dA \right]' \quad \text{(a)}$$

Các tích phân $\iint N_i dA \left(i = 1,2,3\right)$ có thể tính theo hình (5.8)

$$\iint N_i dA = \frac{1}{3} A_e.h = \frac{1}{3} A_e \quad \text{(b)}$$



Hình 5.8: *Tính tích phân* $\int N_i dA$

Thay (b) và (a), ta được vectơ lực thể tích của FTHH:

$$\mathbf{f}_t = \frac{h_e A_e}{3}\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_x & f_y & f_x & f_y \end{bmatrix}' \tag{5.34}$$

Số hạng thứ 2 ở vế phải của (5.33) có thể viết:

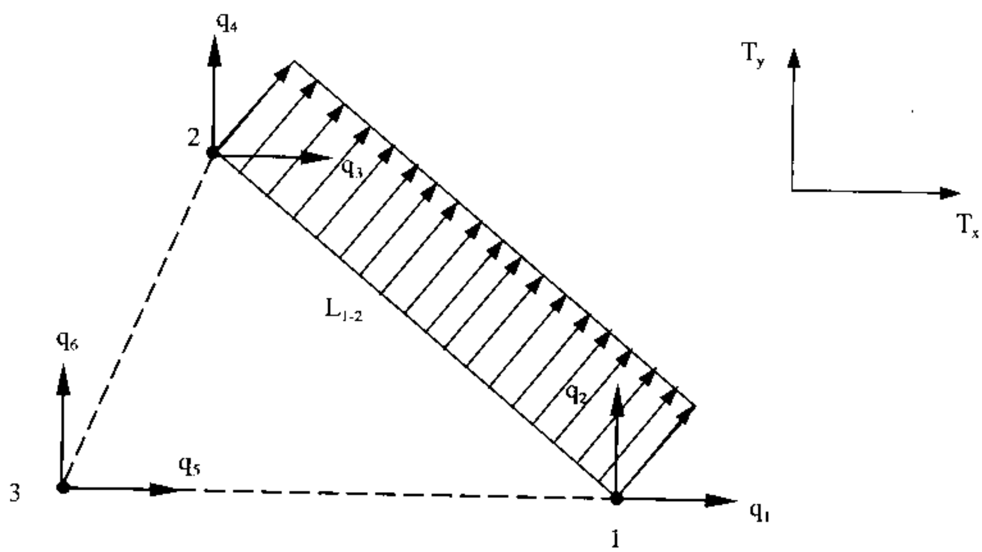
$$\mathbf{f_b} = h\int \mathbf{N}^{s'} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} dl \tag{a}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_b$ - vectơ lực biên của FTHH;

$\mathbf{N}^s$ - hàm hình dạng men theo cạnh chịu tác dụng của tải trọng biên của FTHH (hình 5.9);

dl - phân tố đường thẳng men theo cạnh trên.

Để tính tích phân $\int \mathbf{N}^{s'} dl$, ta làm như sau. Giả sử cạnh 1-2 của FTHH chịu tác dụng của tải trong biên (hình 5.9). Trên cạnh này, $N_3 = 0$, chỉ còn lại 2 hàm hình dạng N_1 và N_2.



Hình 5.9: *FTHH chịu tác dụng của lực biên*

Do đó:

$$f_b = h\int \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} . dl = h. \begin{bmatrix} T_x \int N_1 dl \\ T_y \int N_1 dl \\ T_x \int N_2 dl \\ T_y \int N_2 dl \end{bmatrix} \tag{b}$$

Các tích phân có thể tính theo hình (5.8)

$$\int L_{1-2} N_1 dl = \int L_{1-2} N_2 dl = \frac{1}{2} L_{1-2}.h = \frac{1}{2}.L_{1-2}$$

Ở đây, L_{1-2} là chiều dài của cạnh 1-2 (hình 5.9) nên:

$$\int_{L_{1-2}} N_1 dl = \int_{L_{1-2}} N_2 dl = \frac{L_{1-2}}{2} \tag{c}$$

Thay (c) vào (b), ta có:

$$\mathbf{f_b} = \frac{h.L_{1-2}}{2} \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_x & T_y \end{bmatrix}' \tag{5.35}$$

Vậy là đã suy ra biểu thức của vectơ lực thể tích $\mathbf{f_t}$ và vectơ lực biên $\mathbf{f_b}$. Nếu có tải trọng tập trung **P** thì khi ghép các véctơ tải trọng, ta phải cộng thêm vào tải trọng đó.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Tính ứng suất:

Theo (5.6) và (5.28), ta có ứng suất:

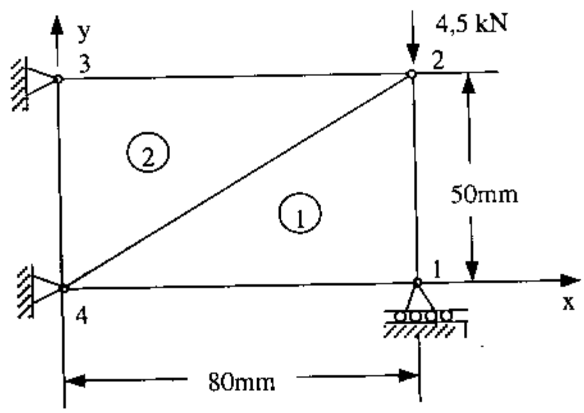
$$\sigma = \mathbf{D.B.q} \tag{5.36}$$

Vì biến dạng là một hằng số trong FTHH tam giác có biến dạng không đổi nên ứng suất cũng là một hằng số. Ta tính ứng suất cho mỗi phần tử hữu hạn. Vì **q** trong (5.36) là vectơ chuyển vị của FTHH nên khi tính ứng suất, cần tách ra các thành phần chuyển vị tương ứng từ vectơ chuyển vị tổng thể **Q**, dựa trên sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn bảng (5.1)).

Các ứng suất tính được xem như tác dụng tại trọng tâm của FTHH. Các ứng suất chính và phương của chúng tính theo vòng tròn M_0.

Sau đây là một ví dụ để minh họa các bước tính toán.

Ví dụ 5.4: Cho một tấm hai chiều chịu tải trọng như trên hình 5-10. Căn cứ vào các điều kiện ứng suất phẳng, xác định các thành phần chuyển vị tại các nút 1 và 2. Bỏ qua trọng lượng bản thân, bề dày của tấm h = 1,25mm; E = 210kN/mm^2, hệ số Poatxong ν = 0,25.



Hình 5.10

Giải:

Trong bài toán ứng suất phẳng, căn cứ vào (1.20), ta có ma trận cấu trúc vật liệu:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như sau:

Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	2	4
2	1	2	3	3	4	2

Tính ma trận biến dạng-chuyển vị **B** theo (5.29)

Phần tử 1:

$$\det \mathbf{J} = 2A_1 = 2.\frac{80\times 50}{2} = 4.000\ \text{mm}^2$$

$Y_{23} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{13} = 0 - 0 = 0$

$Y_{12} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 0 - 80 = -80\text{mm}$

$X_{13} = 80 - 0 = 80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 80 - 80 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ -80 & 50 & 80 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\det \mathbf{J} = 2A_2 = 2\times\frac{80\times 50}{2} = 4000\text{mm}^2$$

$Y_{23} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{31} = 50 - 50 = 0$

$Y_{12} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 80 - 0 = 80\text{mm}$

$X_{13} = 0 - 80 = -80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 0 - 0 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & -80 & 0 & 0 \\ 80 & -50 & -80 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Áp dụng (5.30) và thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn:

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 171,5 & -87,5 & -84 & 35 & -87,5 & 52,5 \\ & 256,813 & 52,5 & -224 & 35 & -32,813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52,5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87,5 & 0 \\ & & & & & 32,813 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 171,5 & -87,5 & -84 & 35 & -87,5 & 52,5 \\ & 256,813 & 52,5 & -224 & 35 & -32,813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52,5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87,5 & 0 \\ & & & & & 32,813 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận riêng và dùng phương pháp loại trừ, ta được phương trình cân bằng:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 171,5 & -84 & 35 \\ & 171,5 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & 256,813 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,5 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = 4,883 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_3 = 2,392 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_4 = -1,819 \times 10^{-2}\,\text{mm}$$

Cuối cùng áp dụng (5.36) để tính ứng suất.

Đối với phần tử 1, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_7 & q_8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4,883\times 10^{-3} & 0 & 2,392\times 10^{-3} & -1,819\times 10^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đối với phần tử 2, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2,392\times 10^{-3} & -1,819\times 10^{-2} \end{bmatrix}'$$

Các thành phần ứng suất tính theo (5.36):

Phần tử 1: $\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[-6,697\times10^{-3} \quad -7,806 \times 10^{-2} \quad -4,186 \times 10^{-3}\right]'$

Phần tử 2: $\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[6,697\times10^{-3} \quad 1,674 \times 10^{-3} \quad -1,909 \times 10^{-2}\right]'$

§5.7.TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Giả sử độ biến thiên nhiệt độ trong bài toán 2 chiều là $\Delta T(x,y)$. Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra là ε_0. Từ lý thuyết cơ học chất rắn, ε_0 tính như sau:

Bài toán ứng suất phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left[\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0\right]' \tag{5.37}$$

Bài toán biến dạng phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\nu)\left[\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0\right]' \tag{5.38}$$

Hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{5.39}$$

Bây giờ ta vận dụng nguyên lý công ảo trình bày trong chương hai để suy ra vectơ tải trọng tương đương do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra. Từ (2.71) và (2.72), ta có:

Công ảo của nội lực: $$\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma} \quad dV \tag{5.40a}$$

Công ảo của nội lực: $$\delta W = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathbf{f} \quad dV + \iint \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathbf{T}ds \tag{5.41}$$

Biến dạng ảo: $$\boldsymbol{\delta}_{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_{q}$$

Thay (5.39) và hệ thức trên vào (5.40a):

$$\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{q}.\mathbf{B}'.\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)dV$$

Trong bài toán 2 chiều dV=dA.h

δU có thể viết:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_{q}.h\iint \mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad dA - \boldsymbol{\delta}'_{q}h\iint \mathbf{B}'.\mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon}_0 dA$$

Vì $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\mathbf{q}$ nên:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_{q}\left[(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} - hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right]$$

Thay $\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}_q$ vào (5.41) và cho $\delta U = \delta W_e$, cuối cùng ta được:

$$(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} = hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.42}$$

hay:

$$\mathbf{k}_e\mathbf{q} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.43}$$

Trong đó: $\mathbf{k}_e$ - ma trận độ cứng của FTHH, tính như trước:

$$\mathbf{f}_n = hA\,\mathbf{B}^t\mathbf{D}.\varepsilon_0 \tag{5.44}$$

$\mathbf{f}_n$ - tải trọng tương đương do sự biến thiên nhiệt độ gây ra.

$\mathbf{f}_t$ và $\mathbf{f}_b$ tính theo các công thức (5.34) và (5.35).

Khai triển công thức (5.44), ta có 6 thành phần tải trọng tương đương như sau:

$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & f_n^3 & f_n^4 & f_n^5 & f_n^6 \end{bmatrix}^t \tag{5.45}$$

Trong đó: các chỉ số 1, 2, 3...là số thứ tự các BTD tại các nút 1, 2, 3 của FTHH tam giác.

Ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn:

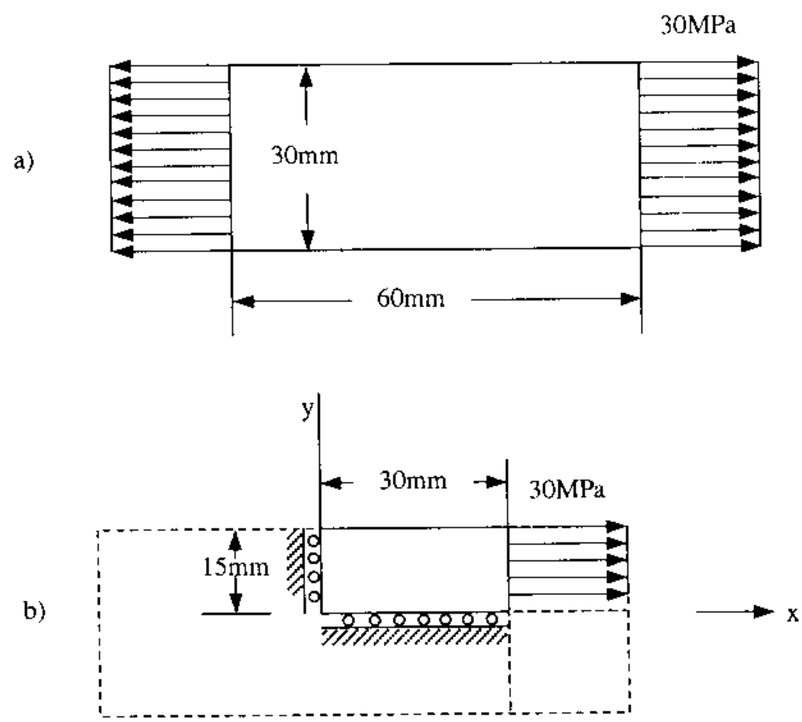
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\left(\mathbf{B}.\mathbf{q} - \varepsilon_0\right) \tag{5.46}$$

§5.8. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trong các phần trước, ta đã xét đến các điều kiện biên một cách tổng quát. Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu cách xử lý các điều kiện biên trong một số trường hợp đặc biệt.

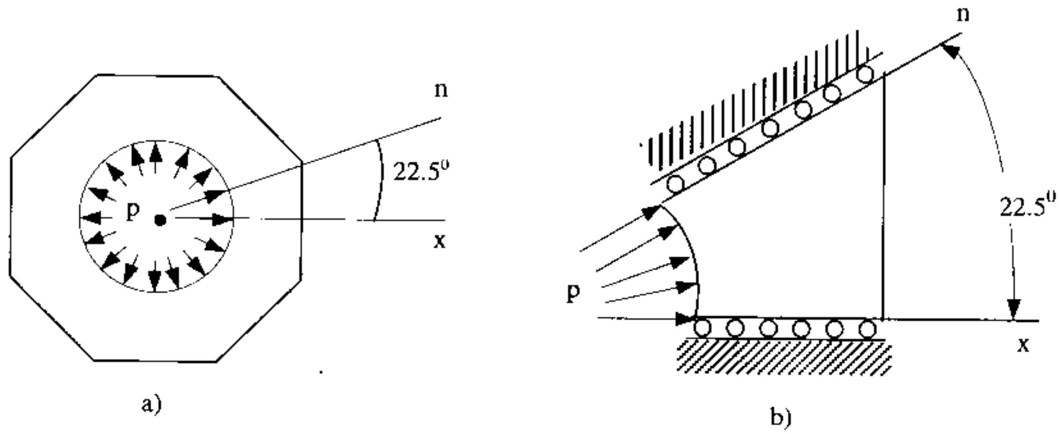
Ví dụ đầu tiên được trình bày trên hình 5.11.

Đây là một tấm đối xứng đối với 2 trục x, y và chịu tác dụng của tải trọng đối xứng. Trên hình vẽ, các trục x và y đi qua tâm của tấm và chia tấm thành 4 phần bằng nhau.



Hình 5.11: Tấm đối xứng chịu tải trọng đối xứng

Vì tính chất đối xứng của tấm và của tải trọng, tấm biến dạng trên phương x nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương y; ngược lại, tấm biến dạng trên phương y nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương x. Vì vậy, sơ đồ tính đưa về 1/4 tấm với các điều kiện biên biểu thị như trên hình 5.11b.

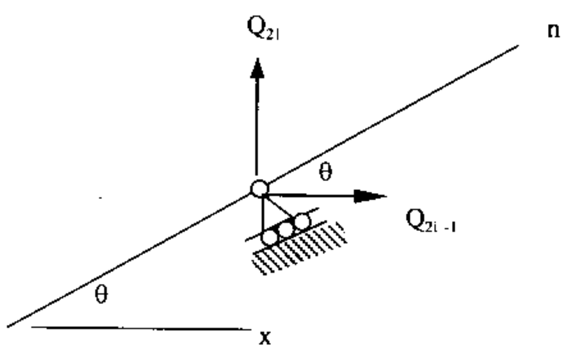


***Hình 5.12:** Ống hình 8 cạnh chịu tải trọng đối xứng*

Ví dụ 2 biểu thị trên hình (5.12). Đây là 1 ống 8 cạnh chịu áp lực đối xứng. Do tính chất đối xứng của kết cấu và của tải trọng, ống chỉ biến dạng trên các phương xuyên tâm. Nói một cách khác, chuyển vị đều triệt tiêu trên các phương vuông góc với phương xuyên tâm. Sơ đồ tính đưa về phần ống nằm trong phạm vi góc $22,5^0$ như trên hình (5.12b). Giả sử n là phương xuyên tâm. Tại nút i với các bậc tự do Q_{2i-1} và Q_{2i} (hình 5.13), ống chỉ biến dạng trên phương n nhưng chuyển vị lại triệt tiêu trên phương vuông góc với phương n. Do đó, ta có điều kiện biên:

$$Q_{2i-1}.\sin\theta - Q_{2i}.\cos\theta = 0 \qquad (5.47)$$

Đây là điều kiện biên có tính chất ràng buộc nhiều điểm mà ta đã thảo luận trong chương ba.



***Hình 5.13:** Gối tựa lăn trên phương nghiêng.*

§5.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN HAI CHIỀU KIỂU FTHH TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI (CTR8)

1. Những điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1, 2, ...); số thứ tự các BTD không có chuyển vị hoặc có chuyển vị cho trước nên xếp ở các vị trí cuối cùng để tiện chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

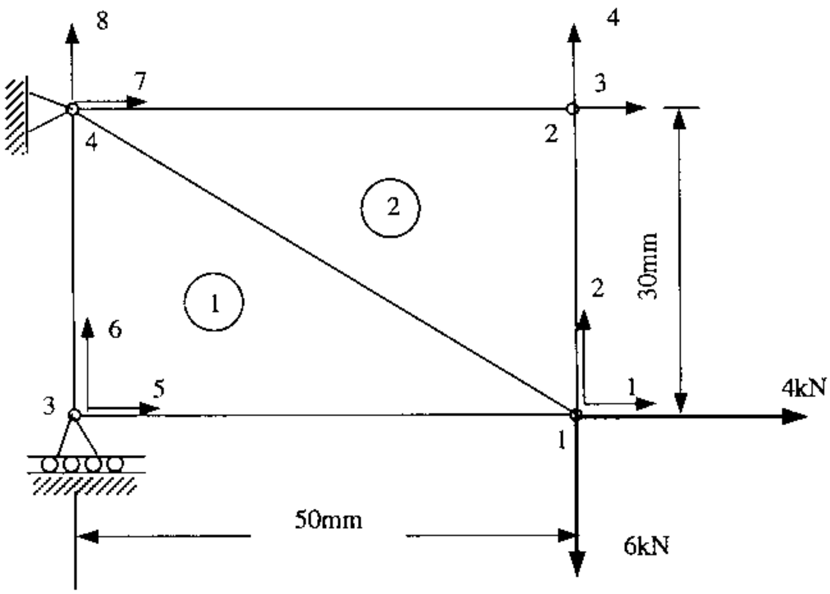
- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút i, xác định như sau:

Tại nút i: Số thứ tự BTD trên phương x: 2i - 1

Số thứ tự BTD trên phương y: 2i

- Số thứ tự BTD theo chiều ngược kim đồng hồ.

2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy ví dụ trên hình 5.14)



Hình 5.14

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 5

Tổng số BTD: 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6, 7, 8

Bề dày tấm = 1,25mm

Hệ số poát xong: 0,25

Tỉ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 4; -6; 0; 0; 0

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	4	3
2	1	2	4

ft	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	e
1	1	2	7	8	5	6	50	0	0	0	30	0	210
2	1	2	3	4	7	8	50	50	0	0	30	30	210

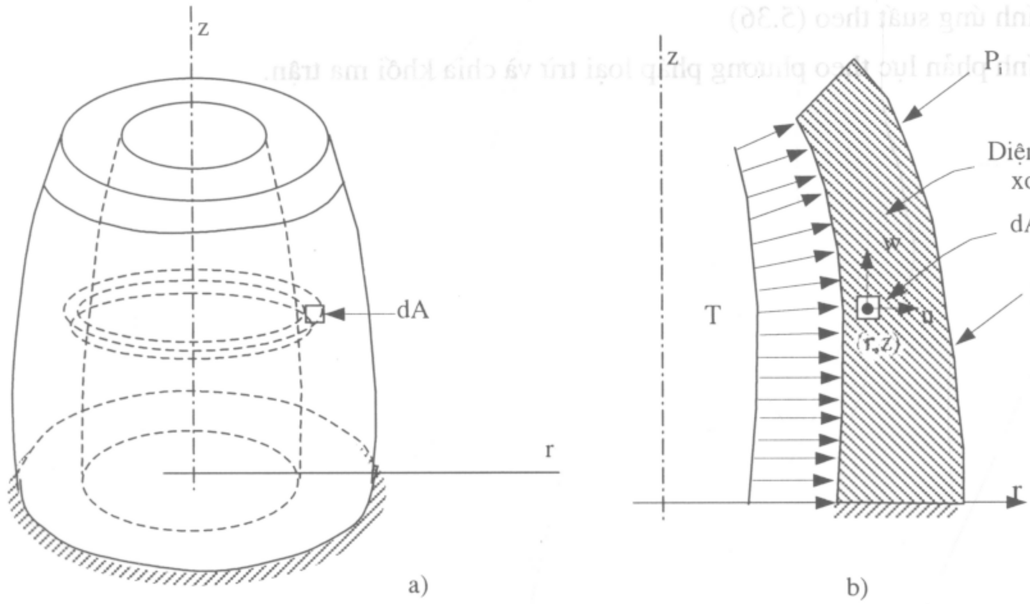
3. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (5.30)
4. Ghép các vectơ tải trọng theo (5.34), (5.35), (5.44) và vectơ tải trọng nhập vào.
5. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị các thành phần chuyển vị.
6. Tính ứng suất theo (5.36)
7. Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.

Chương 6

VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG

§6.1. KHÁI NIỆM

Vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng là một kết cấu đối xứng chịu tải trọng đối xứng. Nói chung, nó làm việc trên 3 chiều, nhưng do tính chất đối xứng về kết cấu và tải trọng, ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay, do đó bài toán 3 chiều có thể đưa về bài toán 2 chiều.



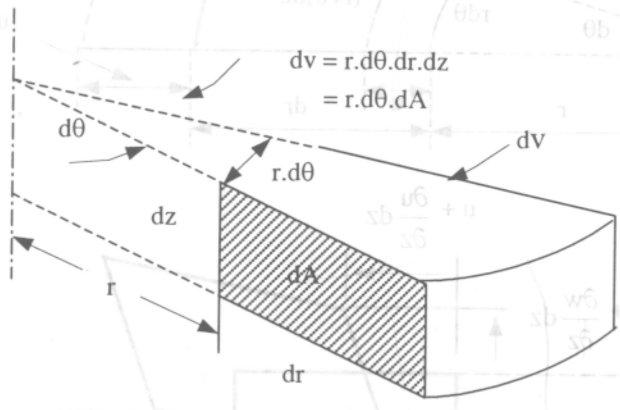
Hình 6.1: *Vật rắn tròn xoay đưa về bài toán 2 chiều*

Chẳng hạn đối với kết cấu trên hình 6.1a, sơ đồ tính toán nằm trong mặt phẳng z-r (hình 6.1b). z là là trục của vật rắn tròn xoay, r là phương nằm ngang xuyên tâm; A là diện tích tròn xoay (gạch chéo), dA là phân tố diện tích; u, w là các thành phần chuyển vị ngang và chuyển vị đứng tác dụng trên phân tố diện tích dA. T là lực biên, P_i là lực tập trung phân bố trên vòng tròn ở mặt ngoài của vật rắn.

Các lực thể tích f, lực biên T và lực tập trung P_i được chia thành 2 thành phần: thành phần nằm ngang song song với phương xuyên tâm r, thành phần thẳng đứng song song với trục z.

Đặc điểm của bài toán này là ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay θ.

§6.2. PHÂN TÍCH ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG VẬT THỂ TRÒN XOAY



Hình 6.2: *Phân tố thể tích trong vật rắn tròn xoay*

Xét phân tố thể tích dV trên hình 6.2. Thế năng toàn phần có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_A \boldsymbol{\sigma}\varepsilon r\, dA\, d\theta - \int_0^{2\pi}\int_A \mathbf{u'\,f}r dA d\theta - \int_0^{2\pi}\int_A \mathbf{u'\,T}r\, d\ell\, d\theta - \sum_i \mathbf{u}_i'\mathbf{P}_i \tag{6.1}$$

Trong đó: rdA dθ = dV là phân tố thể tích trên hình 6.2;

rdldθ - diện tích bề mặt của phân tố trên đó có lực biên tác dụng.

Vì mọi biến dạng trong các tích phân trên không phụ thuộc vào góc xoay θ nên (6.1) có thể viết:

$$TNT = 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\varepsilon}\ r\, dA - \int_A \mathbf{u'\,f}r\, dA - \int_L \mathbf{u}\mathbf{T}r\, d\ell\right) - \sum_i \mathbf{u}_i'\mathbf{P}_i \tag{6.2}$$

Trong đó:

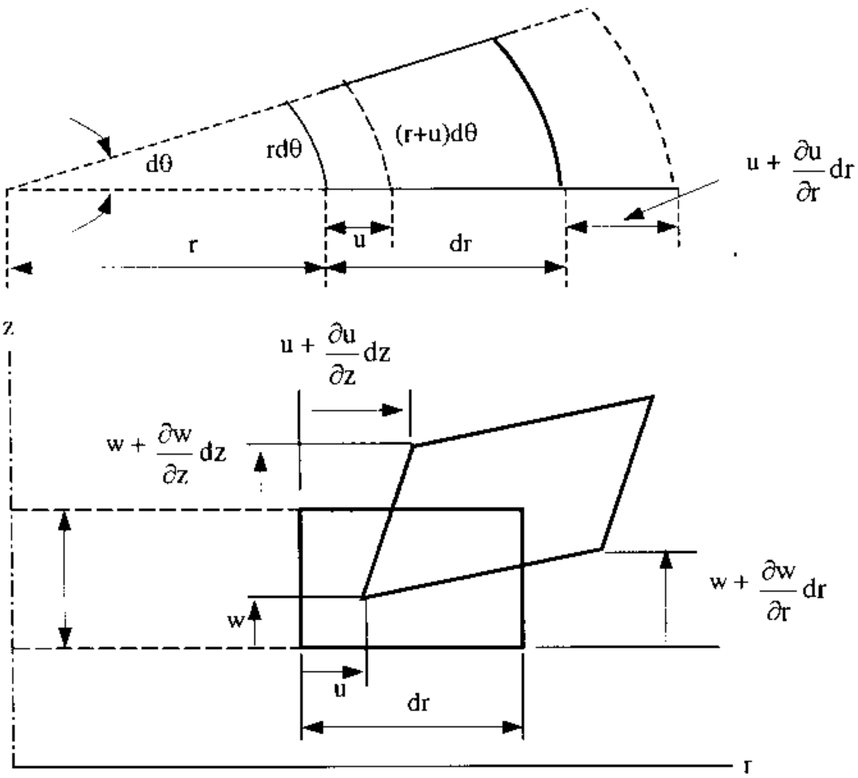
Vectơ chuyển vị $\quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix}'$ (6.3)

Vectơ lực thể tích $\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_r & f_z \end{bmatrix}$ (6.4)

Vectơ lực biên $\quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_r & T_z \end{bmatrix}'$ (6.5)

Từ hình (6.3), ta có hệ thức giữa biến dạng ε và chuyển vị u như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_z & \gamma_{rz} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial w}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r} & \dfrac{u}{r} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.6}$$



Hình 6.3: *Biến dạng của phân tố thể tích*

Vectơ ứng suất tương ứng

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_z & \tau_{rz} & \sigma_0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Trong đó: ε_r , σ_r - biến dạng và ứng suất trên phương ngang xuyên tâm r;

ε_z, σ_z - biến dạng và ứng suất trên phương z;

γ_{rz} - ứng suất tiếp trên phương z; ε_θ - biến dạng trên phương chu vi tròn.

Hệ thức ứng suất - biến dạng

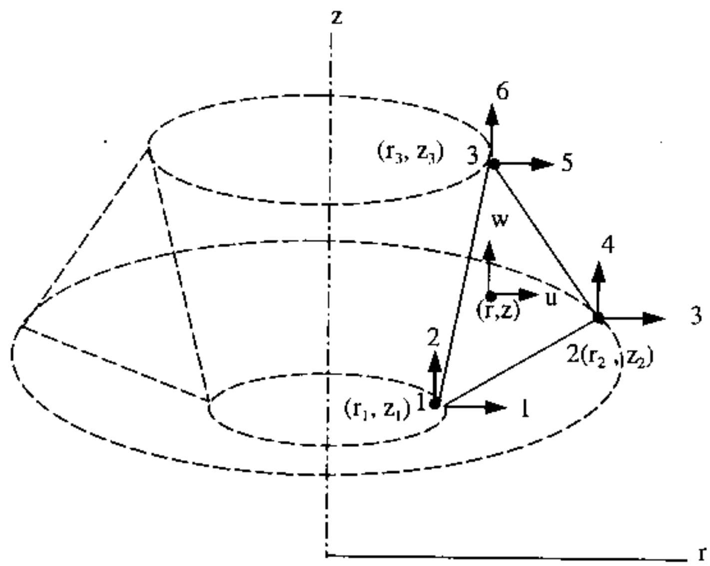
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.8}$$

Trong đó, **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 4 × 4. Ma trận này được suy ra từ (1.17) (chương một) bằng cách bỏ các phần tử không thích hợp.

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

§6.3. MÔ HÌNH FTHH TAM GIÁC. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Miền 2 chiều xác định bởi diện tích xoay được chia thành các FTHH tam giác. Mặc dầu mỗi FTHH được biểu thị trong mặt phẳng rz nhưng trong thực tế nó là vật rắn tròn xoay tạo thành bởi sự xoay tam giác quanh trục z. Một FTHH có tính chất tiêu biểu như trên hình (6.4).



Hình 6.4: *FTHH tam giác trong vật rắn tròn xoay*

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như đã trình bày trong các chương trước. Cần chú ý rằng các tọa độ r, z thay cho các tọa độ x, y.

Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 để biểu thị mối liên hệ giữa vectơ chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH và vectơ chuyển vị tại các nút:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \tag{6.10}$$

Trong đó: **u** tính theo (6.3)

Ma trận hàm hình dạng **N** và vectơ chuyển vị **q** tại các nút của FTHH như sau:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix}' \tag{6.12}$$

Đặt $N_1 = \xi$, $N_2 = \eta$, $N_3 = 1-\xi-\eta$; hệ thức (6.10) có thể viết:

$$u = \xi q_1 + \eta q_3 + (1-\xi-\eta)q_5$$

$$w = \xi q_2 + \eta q_4 + (1-\xi-\eta)q_6 \tag{6.13}$$

Dạng biểu thị cùng tham số:

$$r = \xi r_1 + \eta r_2 + (1-\xi-\eta) r_3$$
$$z = \xi z_1 + \eta z_2 + (1-\xi-\eta) z_3 \qquad (6.14)$$

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (6.15)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (6.16)$$

Trong đó, **J** là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \qquad (6.17)$$

Trong đó: r_1, z_1 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 1;

r_2, z_2 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 2;

r_3, z_3 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 3;

r_{ij}, z_{ij} được định nghĩa như trong chương năm nghĩa là $r_{ij} = r_i - r_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$.

Định thức của ma trận Jacobian

$$\det \mathbf{J} = r_{13} z_{23} - r_{23} z_{13} \qquad (6.18)$$

Cần nhắc lại rằng $|\det \mathbf{J}| = 2A$ nghĩa là giá trị tuyệt đối của định thức ma trận Jacobian bằng 2 lần diện tích của tam giác.

Các hệ thức nghịch đảo của (6.15) và (6.16).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (6.19)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \qquad (6.20)$$

Thay các hệ thức trên vào hệ thức biến dạng - chuyển vị (6.6) và căn cứ vào (6.13), ta được:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \dfrac{z_{23}(q_1 - q_5) - z_{13}(q_3 - q_5)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{-r_{23}(q_2 - q_6) - r_{13}(q_4 - q_6)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{-r_{23}(q_1 - q_5) + r_{13}(q_3 - q_5) + z_{23}(q_2 - q_6) - z_{13}(q_4 - q_6)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5}{r} \end{Bmatrix}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\varepsilon = \mathbf{Bq} \tag{6.21}$$

B là ma trận biến dạng - chuyển vị cấp 4×6

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{12}}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & \dfrac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

§6.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH. VECTƠ TẢI TRỌNG. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

6.4.1. Ma trận độ cứng của FTHH

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo áp dụng cho vật rắn tròn xoay để suy ra biểu thức của ma trận độ cứng và vectơ tải trọng

Căn cứ vào (6.2), công ảo của nội lực có thể viết

$$\delta U = 2\pi \int \boldsymbol{\delta}'_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}.r \quad dA \tag{6.23a}$$

Công của ngoại lực:

$$\delta W = 2\pi \int \boldsymbol{\delta}'_{u} .\mathbf{f}\, r dA + \int \boldsymbol{\delta}'_{u} T r dl \tag{6.24a}$$

Trong đó: $\boldsymbol{\delta}_{\varepsilon}$ - vectơ biến dạng ảo;

δ'_{u} - vectơ chuyển vị ảo.

Vì $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q}$ nên $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\delta_q$; $\sigma = \mathbf{D}.\ \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.B.q}$

Vì $\mathbf{u} = \mathbf{Nq}$ nên $\delta_u = \mathbf{N}\delta_q$

Trong đó: $\boldsymbol{\delta_q}$ - vectơ chuyển vị ảo tại các nút.

Thay các hệ thức trên vào (6.23a):

$$\delta U = \delta'_q \left[(2\pi \quad \mathbf{B'DB} \quad .\mathrm{rdA})\mathbf{q}\right] \tag{6.23b}$$

Thay các hệ thức trên vào (6.24a)

$$\delta W = \delta'_q \left(2\pi \int \mathbf{N'^s f}\ \mathrm{r\ dA} + 2\pi \int \mathbf{N'^s} \mathrm{Trd}\ell\right) \tag{6.24b}$$

Vận dụng nguyên lý công ảo $\delta U = \delta W$, ta được:

$$\left(2\pi \int \mathbf{B'DB}.\mathrm{rdA}\right)\mathbf{q} = 2\pi \int \mathbf{N'.f}\mathrm{rdA} + 2\pi \int \mathbf{N'.T}\mathrm{rd}\ell$$

hoặc $$\mathbf{k_c} \,.\, \mathbf{q} = \mathbf{f_t} + \mathbf{f_b}$$

Trong đó, ma trận độ cứng của FTHH:

$$\mathbf{k_c} = 2\pi \int \mathbf{B'.D.B}\ \mathrm{rdA} \tag{6.25}$$

Véc tơ lực thể tích: $$\mathbf{f_t} = 2\pi \int \mathbf{N'^s}.\mathrm{f.rdA} \tag{6.26a}$$

Vectơ lực biên: $$\mathbf{f_b} = 2\pi \int \mathbf{N'^s}\ \mathrm{Trd}\ell \tag{6.27a}$$

Trong đó, $\mathbf{N'^s}$ là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh có lực biên tác dụng.

Ta chú ý rằng hàng thứ 4 của ma trận **B** (công thức 6.22) có các số hạng N_i/r. Hơn nữa, trong tích phân (6.25), cũng có thừa số r. Một cách gần đúng, ta có thể tính **B** và r tại trọng tâm của FTHH tam giác. Tại đó:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$$

và $$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \tag{6.28}$$

Trong đó, $\bar{r}$ là bán kính của trọng tâm FTHH tam giác. Gọi $\overline{\mathbf{B}}$ là ma trận biến dạng - chuyển vị ứng với trọng tâm của FTHH tam giác, từ (6.25) ta có:

$$\mathbf{k_e} = 2\pi\bar{r} \quad \overline{\mathbf{B}}'. \quad \mathbf{D}.\overline{\mathbf{B}} \int \mathrm{dA}$$

hay $$\mathbf{k_e} = 2\pi\bar{r}A_e\overline{\mathbf{B}}'\mathbf{D}\overline{\mathbf{B}}$$

Ta chú ý rằng $2\pi\ \bar{r}\,A_e$ là thể tích của vật tròn xoay biểu thị trên hình (6.5) và A_e là diện tích của FTHH tam giác:

$$A_e = \frac{1}{2}\left|\det \mathbf{J}\right| \tag{6.30}$$

6.4.2. Vectơ tải trọng

Theo (6.26a), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{f}_t = 2\pi\int \mathbf{N}'\mathbf{f}r \quad dA \tag{6.26b}$$

Thay **N** từ (6.11) và **f** từ (6.4) vào (6.26b), ta được:

$$\mathbf{f}_t = 2\pi\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} rdA$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận

$$\mathbf{f}_t = 2\pi\int [N_1.f_r \quad N_1f_z \quad N_2f_r \quad N_2f_z \quad N_3f_r \quad N_3f_z] \ rdA$$

Một cách gần đúng, ta tính các hàm hình dạng N_1, N_2 , N_3 và bán kính r tại trọng tâm của tam giác. Gọi $\bar{r}$ là bán kính của trọng tâm tam giác. Vì $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$ nên cuối cùng, ta được:

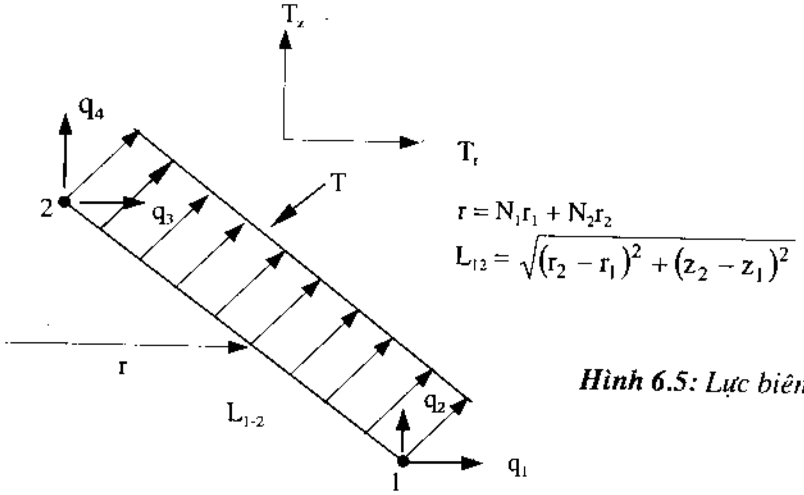
$$\mathbf{f}_t = \frac{2\pi\bar{r}A_e}{3}\left[\bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z\right]' \tag{6.31}$$

Trong đó, $\bar{f}_r, \bar{f}_z$ là các lực thể tích tính tại trọng tâm của tam giác.

Theo (6.27a), ta có vectơ lực biên

$$\mathbf{f}_b = 2\pi\int \mathbf{N}'^s\mathbf{T}rd\ell \tag{6.27b}$$

Trong đó, $\mathbf{N}^s$ là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh của tam giác trên đó có lực biên tác dụng. Chẳng hạn, đó là cạnh 1-2 trên hình (6.5).



Hình 6.5: *Lực biên tác dụng trên cạnh 1-2*

Trong trường hợp này, $N_3 = 0$, $N_1 + N_2 = 1$. Thay ma trận hàm hình dạng **N** từ (6.11), **T** từ (6.5) và $r = N_1r_1 + N_2r_2$ từ (6.14) vào (6.27b), ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix} \left(N_1 r_1 + N_2 r_2\right) d\ell$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và chỉnh lý các kết quả tính toán, ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \begin{bmatrix} \left(r_1 \int N_1^2 d\ell + r_2 \int N_1 N_2 d\ell\right) & 0 \\ 0 & \left(r_1 \int N_1^2 d\ell + r_2 \int N_1 N_2 d\ell\right) \\ \left(r_1 \int N_1 N_2 d\ell + r_2 \int N_2^2 d\ell\right) & 0 \\ 0 & r_1 \int N_1 N_2 d\ell + r_2 \int N_2^2 d\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix} \qquad (6.27c)$$

Có thể chứng minh được rằng $\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \dfrac{L_{12}}{3}$ và $\int N_1 N_2 d\ell = \dfrac{L_{12}}{6}$ *

Thay các kết quả này vào (6.27c) và chỉnh lý kết quả tính toán, cuối cùng ta được:

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \;\; L_{1-2}\left[aT_r \quad aT_z \quad bT_r \quad bT_z\right]' \qquad (6.32)$$

Trong đó: $a = \dfrac{2r_1 + r_2}{6}$ $\qquad b = \dfrac{r_1 + 2r_2}{6}$ $\qquad$ (6.33)

Chiều dài của cạnh 1-2

$$L_{1-2} = \sqrt{\left(r_2 - r_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} \qquad (6.34)$$

Khi cạnh 1-2 song song với trục z, ta có $r_1 = r_2$, do đó $a = b = 0{,}5r_1$.

Ở trên, ta đã suy ra các biểu thức của vectơ lực thể tích $\mathbf{f}_t$ và vectơ lực biên f_b. Nếu có tải trọng phân bố dọc theo chu vi vòng tròn trên bề mặt vật rắn tròn xoay, ta phải cộng thêm lực tập trung đó vào các nút của FTHH tam giác.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{KQ = F} \qquad (6.35)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút.

Căn cứ vào (6.21), ứng suất tính như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}.\overline{\mathbf{B}}.\mathbf{q} \qquad (6.36)$$

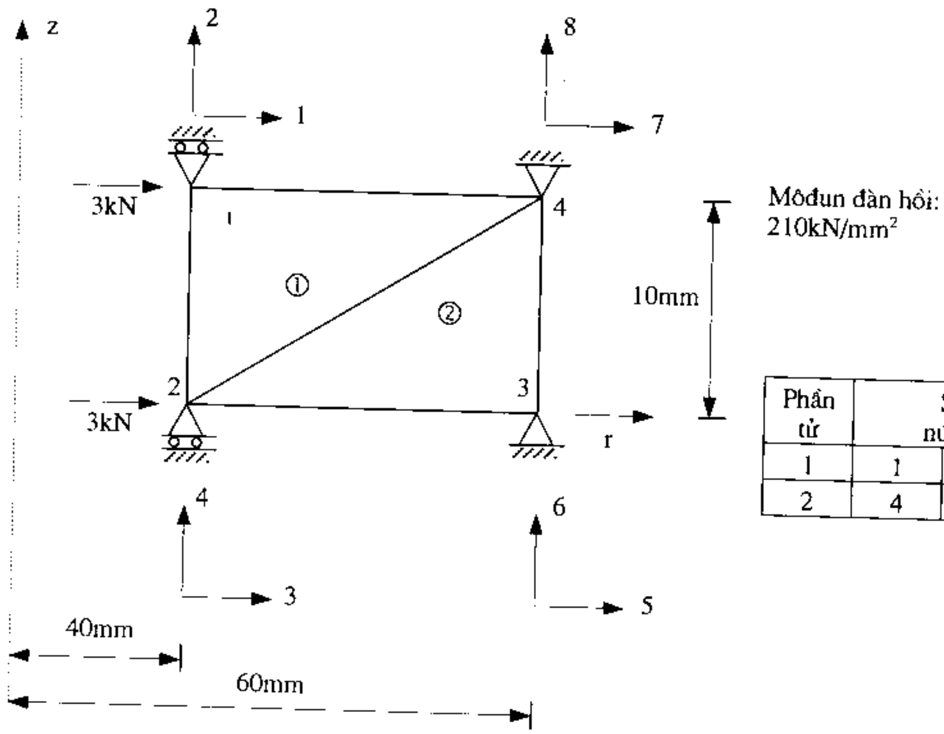
Trong đó: $\overline{\mathbf{B}}$ là ma trận **B** trong (6.22) ứng với trọng tâm của tam giác.

---

* Chứng minh ở cuối chương

Hai ứng suất chính σ_1, σ_2 ứng với σ_r , σ_z, τ_{rz} tính theo vòng tròn M_0.

Ví dụ 6.1: Mô hình FTHH trong 1 vật thể tròn xoay như trên hình (6.6)



Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	4
2	4	2	3

Hình 6.6

Tính: Chuyển vị

Ứng suất

Giải:

Số phần tử : 2

Số BTD : 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Thứ tự số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 2, 4, 5, 6, 7, 8

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (6.9)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 282,692 & 121,154 & 0 & 121,154 \\ & 282,692 & 0 & 121,154 \\ \text{Đối xứng} & & 80,769 & 0 \\ & & & 282,692 \end{bmatrix}$$

Tính các ma trận **B** theo (6.22)

Phần tử 1:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,05 & -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,007143 & 0 & 0,007143 & 0 & 0,007143 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,05 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & -0,1 \\ 0,1 & 0 & 0 & -0,05 & -0,1 & 0,1 \\ 0,00625 & 0 & 0,00625 & 0 & 0,00625 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính các ma trận độ cứng riêng theo (6.29)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad & \quad 6 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 42290,769 & -27066,092 & -24528,646 & 15224,677 & -20299,569 & 11841,415 \\ & 88890,615 & 14378,862 & -82889,908 & 20299,569 & -5920,708 \\ & & 24105,738 & -2537,446 & 1691,631 & -1184,415 \\ & & & 82889,908 & -20299,569 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & & & 23682,831 & 0 \\ & & & & & 5920,708 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 7 \quad & \quad 8 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad & \quad 6 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 27436,137 & 2537,446 & -898,679 & -13533,046 & -25427,325 & 10995,6 \\ & 94731,323 & -17762,123 & 0 & 22837,015 & -94731,323 \\ & & 21515,429 & 0 & -23312,787 & 17762,123 \\ & & & 8766,523 & 13533,046 & -6766,523 \\ \text{Đối xứng} & & & & 53656,413 & -36370,062 \\ & & & & & 101497,846 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array}$$

Dùng phương pháp loại trừ ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad 1 \quad & \quad 3 \quad \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 42290,769 & -24528,646 \\ & 45621,167 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Giải hệ phương trình cân bằng:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính:

$$Q_1 = 1{,}585 \times 10^{-4}\text{m} \qquad\qquad Q_3 = 1{,}510 \text{ x } 10^{-4} \text{ mm}$$

Giá trị các thành phần chuyển vị của các phần tử:

Phần tử 1:

$$[q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_7 \quad q_8]' = [1{,}585 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 1{,}510 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Phần tử 2:

$$[q_7 \quad q_8 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]' = [0 \quad 0 \quad 1{,}510 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Tính ứng suất theo (6.36)

Phần tử 1:

$$\sigma'_1 = [-1{,}973 \times 10^{-3} \quad -6{,}924 \times 10^{-4} \quad 6{,}078 \times 10^{-5} \quad -3{,}353 \times 10^{-4}] \text{ kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma'_2 = [-2{,}02 \times 10^{-3} \quad -8{,}003 \times 10^{-4} \quad 0 \quad -6{,}478 \times 10^{-4}] \text{ kN/mm}^2$$

6.4.3. Tác dụng của nhiệt độ

Độ biến thiên đồng đều trên các phương của nhiệt độ ΔT sản sinh ra biến dạng ban đầu ε_0:

$$\boldsymbol{\varepsilon_0} = \begin{bmatrix}\alpha\Delta T & \alpha\Delta T & 0 & \alpha\Delta T\end{bmatrix}' \tag{6.37}$$

Ứng suất có thể viết (theo 6.36)

$$\boldsymbol{\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)} \tag{6.38}$$

Thay σ từ (6.28) vào (6.23a), ta có công thức của nội lực:

$$\delta U = 2\pi \int \delta'_\varepsilon \, \sigma r dA - 2\pi \int \boldsymbol{\delta'_\varepsilon D \varepsilon_0} r dA \tag{6.39}$$

Công ảo của ngoại lực vẫn tính theo (6.24b)

Sau khi thay $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\delta_\mathbf{q}$ và $\varepsilon = \mathbf{Bq}$ vào (6.39) và cho $\delta U = \delta W$, ta được:

$$(2\pi \int \mathbf{B'DB} \quad r dA)\mathbf{q} = 2\pi \int \mathbf{B'D\varepsilon_0} dA + \mathbf{f_t} + \mathbf{f_b}$$

hoặc

$$\mathbf{k_e} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f_n} + \mathbf{f_t} + \mathbf{f_b} \tag{6.40}$$

Trong đó: $\mathbf{k_e}$ - ma trận độ cứng của FTHH, vẫn tính theo công thức (6.29);

$\mathbf{f_t}$, $\mathbf{f_b}$ vẫn tính theo các công thức (6.31) và (6.32);

$\mathbf{f_n}$ - vectơ tải trọng do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra:

$$\mathbf{f_n} = 2\pi \int \mathbf{B'D\varepsilon_0} r dA \tag{6.41a}$$

Nếu tính $\mathbf{B}$, r, ε_0 tại trọng tâm của FTHH, (6.41a) được đưa về dạng:

$$\mathbf{f_n} = 2\pi \bar{r} A_c \overline{\mathbf{B}}' \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon_0} \tag{6.41}$$

$\mathbf{f}_n$ là một vectơ cột:

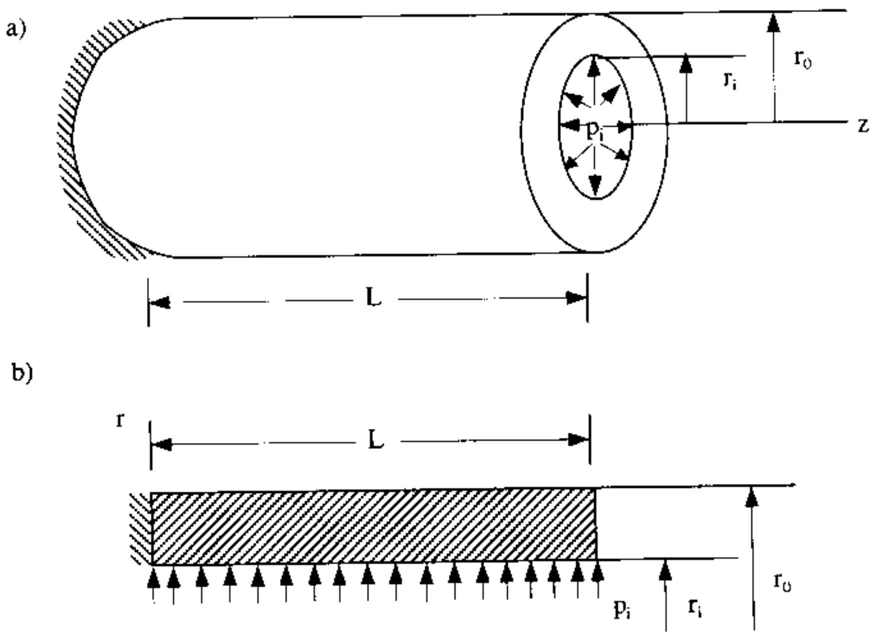
$$\mathbf{f}_n = \left[f_n^1 \quad f_n^2 \quad f_n^3 \quad f_n^4 \quad f_n^5 \quad f_n^6 \right]' \tag{6.42}$$

Trong đó: f_n^i là thành phần tải trọng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra men theo BTD thứ i của FTHH.

§6.5. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN TRONG VẬT RẮN TRÒN XOAY

Như trong phần trước đã trình bày, khi tính vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng, ta chỉ xét mặt phẳng xuyên tâm đi qua trục z vì biến dạng và ứng suất chỉ phát sinh trong mặt đó, chúng không phụ thuộc vào góc xoay. Vì vậy, ở đây, ta cũng chỉ xét các điều kiện biên trong mặt phẳng nói trên.

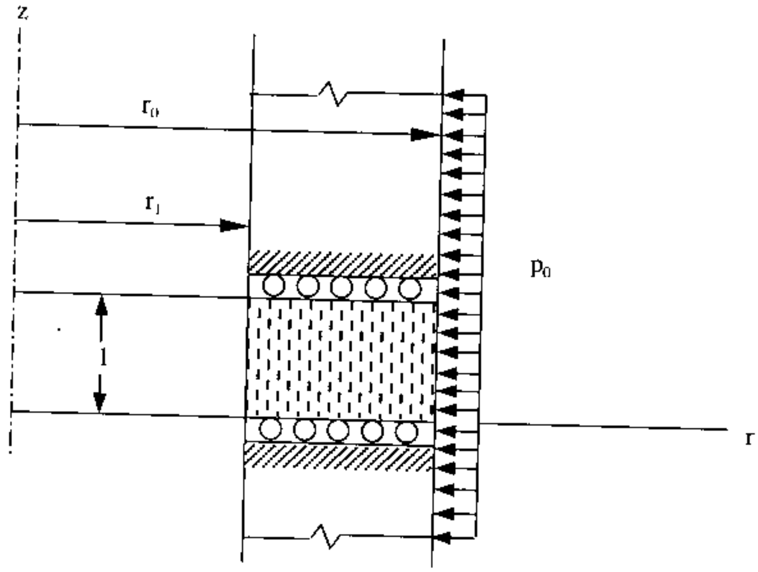
- Hình trụ rỗng chịu áp lực bên trong



Hình 6.7: Hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong

Trên hình (6.7a) là một hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong và có một đầu cố định vào tường. Khi tính toán, ta chỉ xét mặt xuyên tâm hình chữ nhật có gạch chéo giới hạn bởi 2 bán kính r_0 và r_1, một đầu ngàm và chiều dài bằng L (hình 6.7b). Tại đầu ngàm, chuyển vị triệt tiêu trên phương r cũng như trên phương z. Do đó, nếu tính theo mô hình lò xo, ma trận độ cứng và vectơ tải trọng phải được biến đổi ứng với các BTD ở gối tựa ngàm.

Hình trụ rỗng dài vô hạn

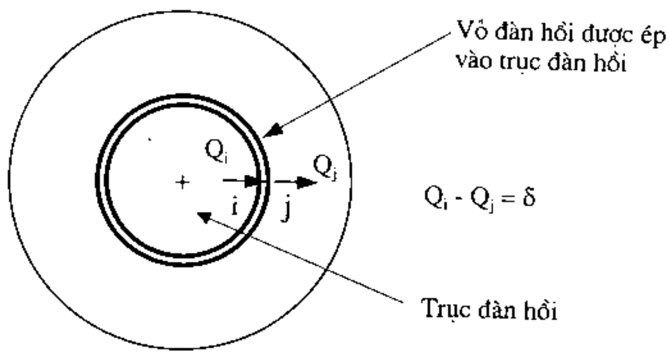


Hình 6.8: Hình trụ rỗng dài vô hạn chịu áp lực bên ngoài

Một hình trụ rỗng dài vô hạn và chịu áp lực bên ngoài biểu thị như trên hình (6.8). Với giả thiết kích thước chiều dài không đổi, bài toán biến dạng phẳng này được đưa về mô hình mặt xuyên tâm hình chữ nhật có chiều bằng đơn vị và có 2 cạnh biên men theo đó chuyển vị triệt tiêu trên phương z (hình 6.8).

Vỏ đàn hồi ép vào trục đàn hồi

Một vỏ đàn hồi được ép vào để tiếp xúc với một trục đàn hồi như trên hình (6.9), khoảng cách giữa vỏ và trục là δ .



Hình 6.9: Vỏ đàn hồi được ép vào trục đàn hồi

Trong trường hợp này, ta đưa về mô hình một cặp nút i và j trên biên tiếp xúc, một nút nằm trên trục, một nút nằm trên ống bao (hình 6.9). Nếu Q_i và Q_j là các chuyển vị men theo các BTD xuyên tâm, ta có điều kiện biên cần được thỏa mãn.

$$Q_j - Q_i = \delta \tag{6.43}$$

Điều kiện biên trên là một ràng buộc nhiều điểm đã được đề cập trong chương ba. Áp dụng phương pháp mô hình lò xo, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C\left(Q_j - Q_i - \delta\right)^2 &= \frac{1}{2}CQ_i^2 + \frac{1}{2}CQ_j^2 - \frac{1}{2}C(Q_iQ_j + Q_jQ_i)\\ &+CQ_i\delta - CQ_j\delta + \frac{1}{2}C\delta^2\end{aligned} \tag{6.44}$$

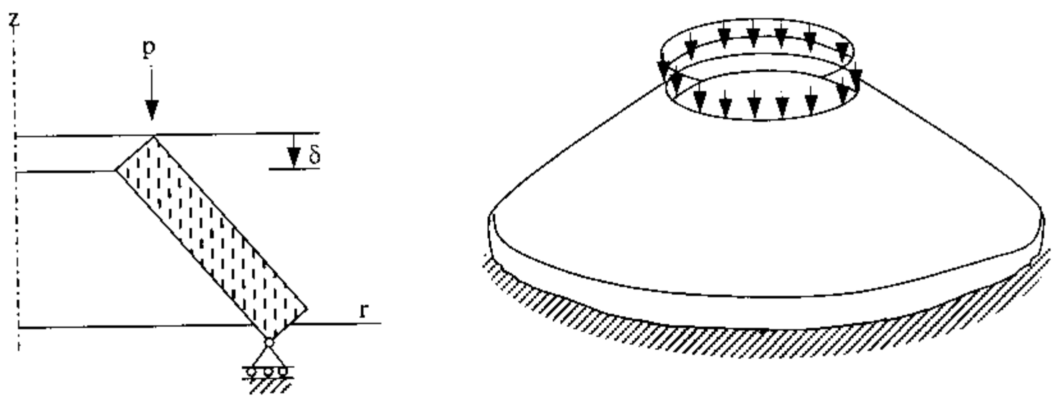
Phương trình trên đưa đến sự biến đổi ma trận độ cứng và vectơ tải trọng:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{ii} + C & K_{ij} - C \\ K_{ji} - C & K_{jj} + C \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F_i - C\delta \\ F_j + C\delta \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

- Lò xo Belleville

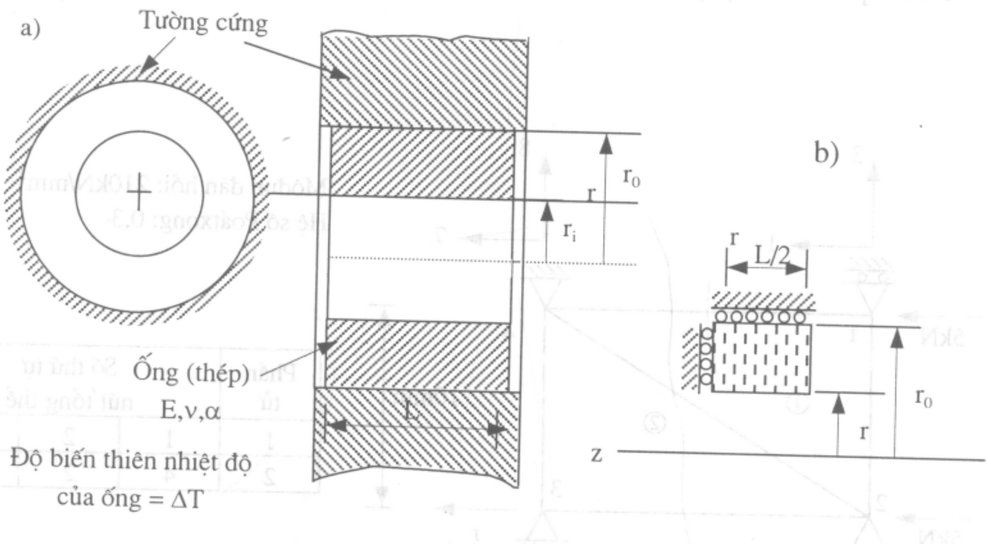
Lò xo Belleville là một loại đĩa hình côn. Nó chịu tác dụng của tải trọng men theo chu vi vòng tròn ở phía trên và tựa lên gối tựa lăn ở phía dưới (hình 6.10). Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật gạch chéo chịu tải trọng đối xứng P ở góc phía trên, góc phía dưới có chuyển vị triệt tiêu trên phương z. Vì tải trọng thẳng đứng, mép của lò xo chuyển vị hướng ra ngoài.



Hình 6.10: *Lò xo Belleville*

Bài toán ứng suất nhiệt

Một ống thép được đút vào một tường cứng như trên hình (6.11). Ống tiếp xúc với tường và nhiệt độ tăng lên ΔT. Do bị tường ngăn cản, ứng suất trong ống tăng lên. Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật có chiều dài bằng $L/2$ và có chiều rộng giới hạn bởi các bán kính r_1 và r_0 (hình 6.11b). Các điểm nằm trên chu vi ngoài không có chuyển vị trên phương xuyên tâm và các điểm ở cạnh bên trái không có chuyển vị trên phương dọc trục. Vectơ tải trọng tương đương do biến thiên nhiệt độ gây ra, cần được xét đến theo (6.11).



Hình 6.11: *Bài toán ứng suất nhiệt*

§6.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG (CTR9)

1. Các điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1,2,3…). Số thứ tự các BTD không có chuyển vị nên bố trí ở các vị trí cuối cùng để tiện cho việc chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

- Số thứ tự các nút trong một FTHH được đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ*.

- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút i, xác định như sau:

Trên phương r: 2i - 1

Trên phương z: 2i

2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 6.12).

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 8

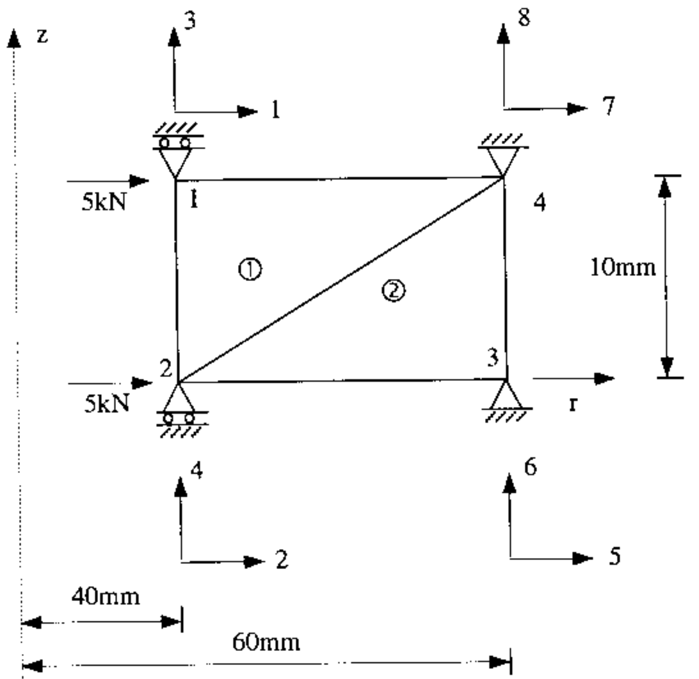
Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 4, 5, 6,7, 8

Môđun đàn hồi: 210 kN/mm^2

Hệ số poátxong: 0,3

Thành phần tải trọng: 5; 5



Môđun đàn hồi: 210kN/mm^2

Hệ số Poátxong: 0,3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	4
2	4	2	3

Hình 6.12

Số thứ tự BTD và các toạ độ thống kê trong bảng sau:

Phần tử	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	r_1	r_2	r_3	z_1	z_2	z_3
1	1	3	2	4	7	8	40	40	60	10	0	10
2	7	8	2	4	5	6	60	40	60	10	0	0

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (6.29).

4) Ghép các vectơ tải trọng theo (6.31) và (6.32).

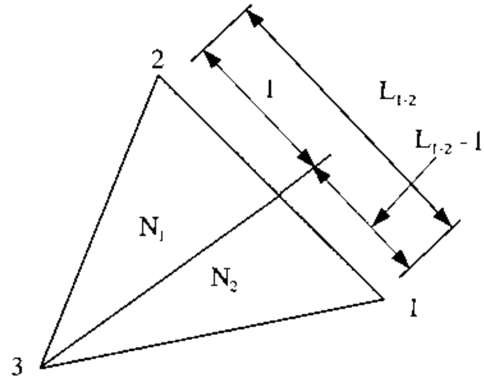
5) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

6) Tính ứng suất theo (6.22), (6.9) và (6.36)

7) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.

* Chứng minh: $\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$

$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$



Trên cạnh 1-2, $N_3 = 0$, $N_1 + N_2 = 1$

Gọi h là chiều cao của tam giác

1 - 2 - 3: Theo định nghĩa:

$$N_1 = \frac{l.h/2}{L_{1-2}.h/2} = \frac{l}{L_{1-2}}$$

$$N_1^2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2}\int_0^{L_{1-2}} l^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$$

Chứng minh một cách tương tự, $\int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$

$$N_1 N_2 = l(L_{1-2} - l)/L_{1-2}^2$$

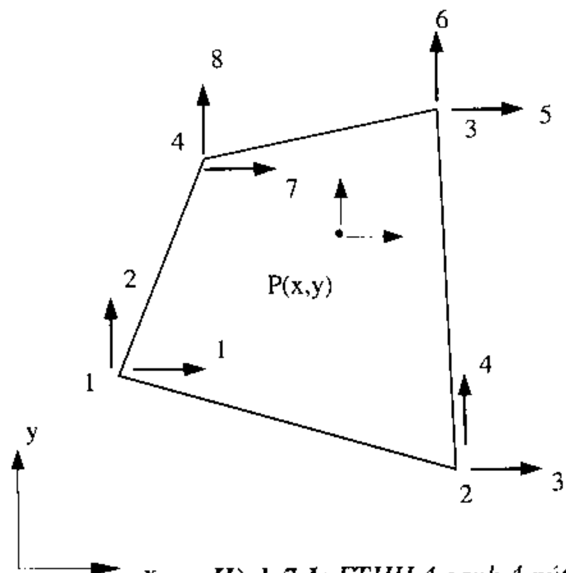
$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2}\int_0^{L_{1-2}} l(L_{1-2} - l) d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$

Chương 7

PHẦN TỬ HỮU HẠN CÙNG THAM SỐ HAI CHIỀU - PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Trong các chương 5 và 6, ta đã đề cập đến phương pháp phân tích ứng suất và biến dạng trong trường hợp FTHH là một tam giác có biến dạng không đổi. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu các FTHH cùng tham số và áp dụng chúng vào việc phân tích ứng suất và biến dạng. Các FTHH thuộc loại này đã tỏ ra có hiệu lực trong nhiều bài toán 2 chiều và 3 chiều. Ta sẽ tập trung nghiên cứu một cách chi tiết loại FTHH 4 cạnh, 4 nút để suy ra ma trận độ cứng riêng. Đối với FTHH bậc cao hơn, ta cũng thực hiện các bước tương tự như đối với FTHH 4 cạnh 4 nút. Phương pháp tích phân bằng số sẽ được trình bày để tính ma trận độ cứng và ứng suất.

§7.1. PHẦN TỬ HỮU HẠN 4 CẠNH 4 NÚT



***Hình 7.1:** FTHH 4 cạnh 4 nút*

Xét hình 4 cạnh 4nút trên hình (7.1). Số thứ tự cục bộ của các nút 1, 2, 3, 4 được đếm theo *chiều ngược kim đồng hồ.*

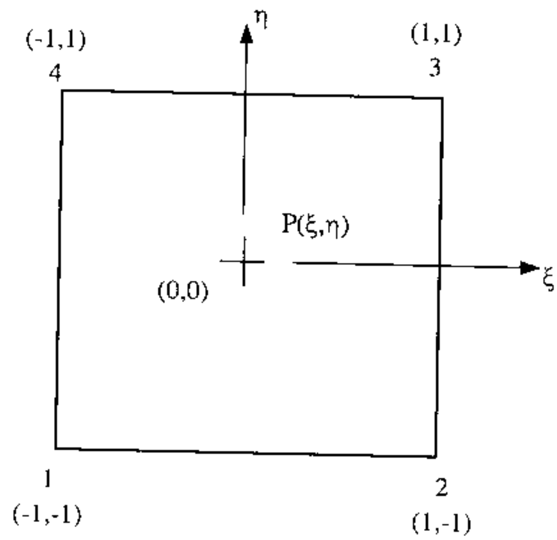
Vec tơ các thành phần chuyển vị men theo các BTD trên hình (7.1) tại các nút là:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8]^T \tag{7.1}$$

Vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm P có tọa độ (x, y) trong FTHH là:

$$u = \begin{bmatrix} u(x,y) & v(x,y) \end{bmatrix}^T \tag{7.2}$$

7.1.1. Hàm hình dạng



***Hình 7.2:** FTHH 4 cạnh trong hệ tọa độ tự nhiên*

Trước hết, ta suy ra hàm hình dạng cho FTHH hình vuông (hình 7.2) trong hệ tọa độ tự nhiên ξ và η. Hàm hình dạng Lagrange N_i (i = 1,2,3,4) được định nghĩa như sau: N_i bằng đơn vị tại nút i và bằng 0 tại các nút còn lại. Chẳng hạn, đối với nút 1:

$$\begin{aligned} &N_1 = 1 \qquad \text{tại nút 1} \\ &N_1 = 0 \qquad \text{tại các nút 2, 3, 4} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Điều kiện $N_1 = 0$ tại các nút 2,3,4 tương đương với điều kiện $N_1 = 0$ dọc theo các cạnh $\xi = +1$ và $\eta = +1$ (hình 7.2). Vậy N_1 phải có dạng:

$$N_1 = C\,(1-\xi)\,(1-\eta) \tag{7.4}$$

Trong đó, C là hằng số . Hằng số này được xác định từ điều kiện $N_1 = 1$ tại nút 1 tại đó $\xi = -1$ và $\eta = -1$. Nghĩa là: $1 = c \times 2 \times 2$

Vậy $c = \dfrac{1}{4}$ và $N_1 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

4 hàm hình dạng có các dạng sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (7.5)$$

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i+\eta\eta_i) \qquad (7.6)$$

Trong đó: (ξ,η) là tọa độ của nút i.

Bây giờ, ta sẽ thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH để biểu thị các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH. Theo hình 7.1 và 7.2, $\mathbf{u} = [u \quad v]'$ là vectơ chuyển vị tại điểm có tọa độ tự nhiên (ξ,η) (hình 7.2) và $\mathbf{q}$ là vectơ chuyển vị cấp 8×1 tại các nút của FTHH. Ta có thể viết:

$$u = N_1q_1 + N_2q_3 + N_3q_5 + N_4q_7$$
$$v = N_1q_2 + N_2q_4 + N_3q_6 + N_4q_8 \qquad (7.7a)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\ \mathbf{q} \qquad (7.7b)$$

Trong đó: $$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

Nếu cũng thông qua các hàm hình dạng trên để biểu thị tọa độ tại một điểm trong FTHH bằng tọa độ của các điểm nút, thì ta có *dạng biểu thị cùng tham số* như sau;

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4$$
$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \qquad (7.9)$$

Trong đó: x, y - tọa độ tại một điểm trong FTHH;

x_i - tọa độ của nút i trên phương x; y_i - tọa độ của nút i trên phương y.

Giả sử f là một hàm bất kỳ của x, y và x, y là những hàm của (ξ,η), nghĩa là f là một hàm ẩn của (ξ,η) do đó $f = f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$. Theo nguyên tắc tính đạo hàm riêng.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (7.10)$$

hay: $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (7.11)$$

Trong đó **J** là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Từ (7.5) và (7.9), ta có:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix} \tag{7.13a}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{7.13b}$$

Từ (7.11):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{7.14a}$$

hoặc:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.14b}$$

Các hệ thức trên sẽ được dùng để suy ra ma trận độ cứng của FTHH. Ngoài các kết quả trên, có thể chứng minh được rằng

$$dxdy = \det \mathbf{J}\, d\xi\, d\eta \tag{7.15}$$

7.1.2. Ma trận độ cứng của FTHH. Vectơ tải trọng

Hệ thức biến dạng - chuyển vị có thể viết:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Đặt f = u, từ (7.14b), ta có:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

Một cách tương tự, khi f = v:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

Căn cứ vào (7.16), (7.17), (7.18), ta có:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

Trong đó:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det\ \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

Từ 7.7a) :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{Gq} \tag{7.21}$$

Trong đó:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

Từ (7.19) và (7.21), hệ thức biến dạng - chuyển vị

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{7.23}$$

Trong đó: $\mathbf{B} = \mathbf{AG}$ (7.24)

Ứng suất: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

Theo (7.23): $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBq}$ (7.25)

Bây giờ, ta vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng.

- Ma trận độ cứng:

Áp dụng (2.79) (chương hai) cho bài toán 2 chiều, ta có ma trận độ cứng

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B'DB}\, dV \tag{a}$$

nhưng dV = hdxdy

Trong đó: h - bề dày của kết cấu.

Theo (7.15) $dxdy = \det \mathbf{J}\, d\xi d\eta$. Thay các đại lượng trên vào (a):

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B'DB} \det\mathbf{J}\}\, d\xi d\eta \tag{7.26}$$

$\mathbf{k}_e$ là ma trận cấp 8 × 8. Cần chú ý rằng điều khác với các chương trước là các ma trận **B** và **J** đều là những hàm của các tọa độ tự nhiên (ξ,η). Việc tính tích phân bằng số ma trận $\mathbf{k}_e$ sẽ được đề cập trong phần sau.

Vectơ tải trọng:

Véc tơ lực thể tích:

Theo (2.80), ta có: $\mathbf{f}_t = \iiint \mathbf{N'f}dV$

Phân tích tương tự như trên, ta có vectơ lực thể tích

$$\mathbf{f}_t = h\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N'}\det \mathbf{J} d\xi d\eta\right]\cdot\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

(7.27) cũng cần được tích phân bằng số như (7.26)

Véctơ lực biên:

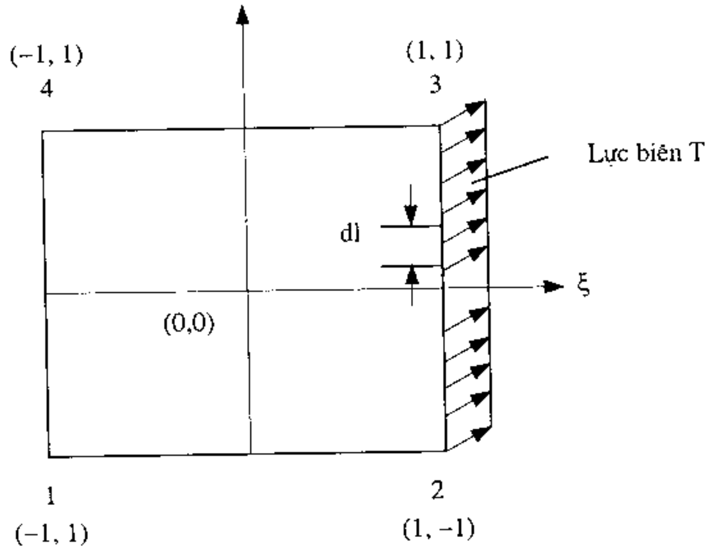
Theo (2.80), ta có vectơ lực biên

$$f_b = \iint \mathbf{N'^s T} ds \tag{7.28a}$$

Trong đó: $\mathbf{N}^s$ - ma trận hàm hình dạng men theo cạnh trên đó có lực biên tác dụng;

ds = hdl, h là bề dày của kết cấu, dl là phân tố đường thẳng men theo cạnh nói trên.

Giả sử lực biên phân bố đều tác dụng trên cạnh 2-3 (hình 7.3).



Hình 7.3: Lực biên tác dụng trên cạnh 2,3

Vectơ lực biên $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}^{'}$ phân bố trên đơn vị diện tích. Dọc theo cạnh (2-3), ta có $\xi = 1$. Căn cứ vào (7.5), ta có:

$$N_1 = N_4 = 0$$

$$N_2 = (1 - \eta)/2$$

$$N_3 = (1 + \eta)/2$$

Theo các kết quả trên, (2.28a) có thể viết:

$$\mathbf{f}_b = h \int_0^{L_{2-3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (1-\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1-\eta)/2 \\ (1+\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1+\eta)/2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times dl \times \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad (7.28b)$$

Vì $\dfrac{1}{2}\int(1 \pm \eta)\,dl = \dfrac{L_{2-3}}{2}$ nên cuối cùng, ta có:

$$\mathbf{f}_b = h.\,\frac{L_{2-3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_x & T_y & T_x & T_y & 0 & 0 \end{bmatrix}^{'} \qquad (7.28)$$

Trong đó: L_{2-3} - chiều dài của cạnh 2-3 trên đó có lực biên tác dụng.

§7.2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Trước hết, ta nghiên cứu bài toán tính bằng số tích phân một chiều có dạng:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \tag{7.29}$$

Phương pháp cầu phương Gauss để tính tích phân I như sau.

Đây là phương pháp rất hữu hiệu trong lý thuyết phần tử hữu hạn. Nó có thể mở rộng cho các tích phân 2 chiều và 3 chiều.

Xét phép xấp xỉ n điểm:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \cdots\cdots + w_n f(\xi_n) \tag{7.30}$$

Trong đó: $w_1, w_2 \ldots\ldots\ldots w_n$ gọi là *trọng lượng*;

$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi_n$ gọi là các *điểm Gauss*.

Vấn đề đặt ra là chọn n điểm Gauss và n trọng lượng sao cho tích phân (7.30) cho lời giải chính xác đối với đa thức $f(\xi)$ có bậc càng cao càng tốt. Nói một cách khác, tích phân (7.30) cần có giá trị chính xác dù bậc của đa thức cao đến bao nhiêu và ngay cả khi f không phải là đa thức. Trước hết, ta hãy nghiên cứu cách tính xấp xỉ trong trường hợp 1 điểm và 2 điểm.

7.2.1. Công thức một điểm

Với n = 1, ta có :

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \tag{7.31}$$

Vì có 2 tham số w_1 và ξ_1, ta yêu cầu công thức (7.31) phải chính xác khi $f(\xi)$ là một đa thức bậc nhất $f(\xi) = a_0 + a_1\xi$. Tức là:

$$\text{Sai số: } = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1\xi) - w_1 f(\xi_1) = 0 \tag{7.32a}$$

hay:

$$\text{Sai số} = 2a_0 - w_1\ (a_0 + a_1\xi) = 0 \tag{7.32b}$$

hay:

$$\text{Sai số} = a_0\ (2 - w_1) - w_1\ a_1\xi_1\ = 0 \tag{7.32c}$$

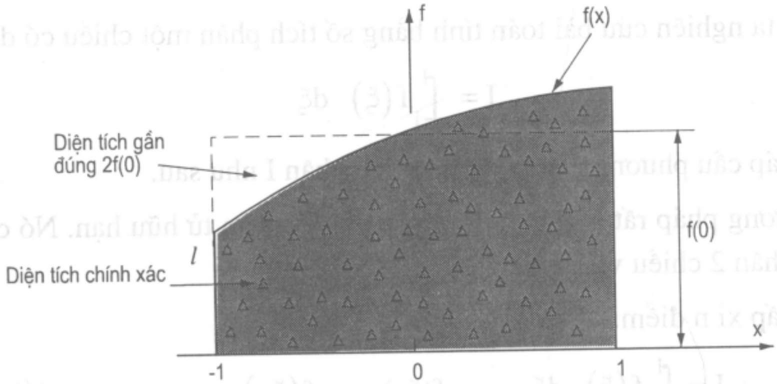
Từ (7.32c), ta thấy rằng sai số triệt tiêu khi

$$w_1 = 2 \qquad \text{và } \xi_1 = 0$$

Vậy:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi\ \approx\ 2.f(0) \tag{7.34}$$

Cách tính trên phù hợp với quy tắc điểm giữa (hình 7.4).



Hình 7.4: Phép cầu phương Gauss

7.2.2. Công thức hai điểm

Ta xét trường hợp 2 điểm Gauss (n = 2)

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\ \ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \tag{7.35}$$

Có 4 tham số: w_1, w_2, ξ_1, ξ_2. Ta yêu cầu công thức (7.35) cho giá trị chính xác đối với đa thức bậc 3 $f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$.

Nghĩa là:

$$\text{Sai số } = \left[\int_{-1}^{1}\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3\right)d\xi\right] - \left[w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)\right] = 0 \tag{7.36}$$

Để thỏa mãn phương trình trên:

$$\begin{aligned} & w_1 + w_2 = 2 \\ & w_1\xi + w_2\xi_2 = 0 \\ & w_1\xi_1^{\,2} + w_2\xi^2{}_2 = 2/3 \\ & w_1\xi^3{}_1 + w_2\xi^3{}_2 = 0 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Các phương trình phi tuyến tính trên có lời giải duy nhất khi

$$w_1 = w_2 = 1 - \xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0{,}5773502691 \tag{7.38}$$

Từ trên, có thể kết luận rằng phép cầu phương Gauss n điểm cho lời giải chính xác khi đa thức có bậc (2n-1) hoặc bé hơn.

Bảng (7.1) cho giá trị của W_i và ξ_i khi số điểm Gauss n bằng 1 đến 6. Cần chú ý rằng các điểm Gauss được đặt đối xứng so với điểm gốc và các điểm đối xứng có trọng lượng như nhau. Hơn nữa, các số có rất nhiều chữ số được dùng trong tính toán để bảo đảm độ chính xác.

Bảng 7.1. Các điểm Gauss và trọng lượng trong phép cầu phương Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$$

Số điểm	Vị trí	Trọng lượng
1	0,0	2,0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1,0
3	±0,7745966692	0,5555555556
	0,0	0,8888888889
4	±0,8611363116	0,.34785548451
	±0,3399810436	0,6521451549
5	±0,9061798459	0,.2369268851
	±0,5384693101	0,4786286705
	0,0	0,5688888889
6	±0,9324695142	0,1713244924
	±0,6612093865	0,3607615730
	±0,2386191861	0,4679139346

Ví dụ 7.1:

Dùng công thức một điểm và công thức hai điểm để tính tích phân sau:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

Giải:

Căn cứ vào bảng (7.1)

$n = 1$: $w_1 = 2$, $x_1 = 0$ nên

$$I = 2f(0)$$
$$= 7$$

$n = 2$: $w_1 = w_2 = 1$; $x_1 = -0,57735$ ....; $x_2 = +0,57735$ ......

$$I \approx 8,7857$$

Giá trị chính xác của tích phân $I = 8,8165$

7.2.3. Tích phân 2 chiều

Phép cầu phương Gauss có thể mở rộng cho tích phân 2 chiều (hoặc tích phân kép).

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) d\xi \quad d\eta \qquad (7.39)$$

Có thể viết một cách gần đúng:

$$I \approx \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i,\eta)\right] d\eta$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n} w_j\left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i,\eta_j)\right]$$

hay

$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j) \tag{7.40}$$

7.2.4. Tích phân ma trận độ cứng

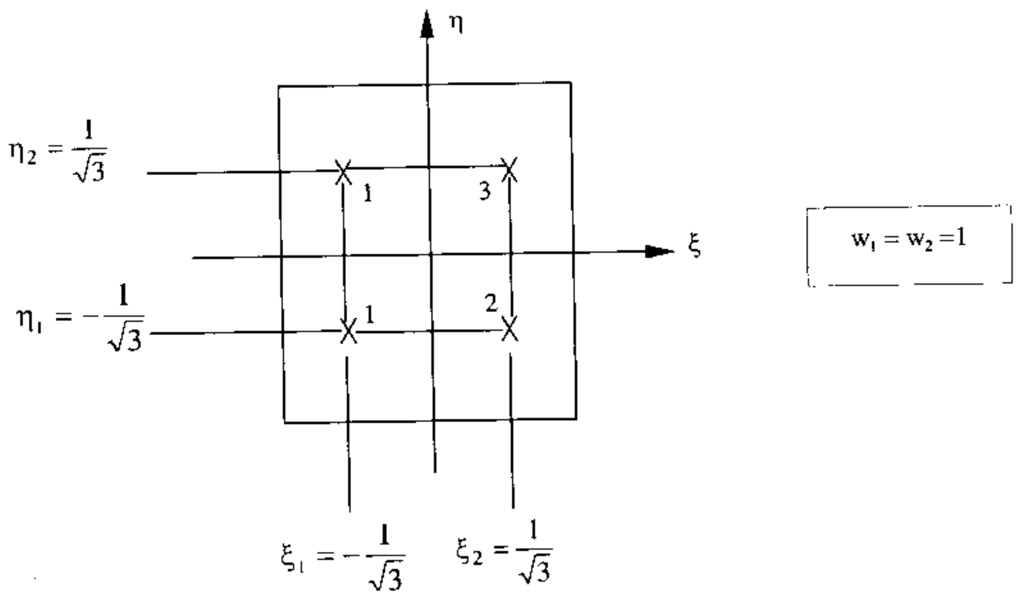
Xét tích phân ma trận độ cứng theo (7.26) :

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B'DB} \;\; \det\mathbf{J} \;\; d\xi d\eta$$

Trong đó **B** và **J** là những hàm của ξ và η. Cần chú ý rằng tích phân trên bao gồm tích phân của mỗi phần tử trong ma trận độ cứng cấp 8×8. Tuy nhiên, do tính chất đối xứng của ma trận $\mathbf{k}_e$, ta chỉ cần tính tích phân cho các phần tử của ma trận từ đường chéo chính trở lên.

Giả sử $\phi(\xi,\eta)$ là hàm thứ ij dưới dấu tích phân trong ma trận $\mathbf{k}_e$;

$$\phi(\xi,\eta) = h_e\,(\mathbf{B'DB}\ \det \mathbf{J})_{ij} \tag{7.41}$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \approx w_1^2 f(\xi_1,\eta_1) + w_2 w_1 f(\xi_2,\eta_1) + w_2^2 f(\xi_2,\eta_2) + w_1 w_2 (\xi_1,\eta_2)$$

Hình 7.5: *Phép cầu phương đối với tích phân 2 chiều (n = 2)*

Theo (7.40), ta có phần tử thứ ij của ma trận $\mathbf{k}_e$:

$$k_{ij} \approx w_1^2\phi(\xi_1,\eta_1) + w_1w_2\phi(\xi_1,\eta_2) + w_2w_1\phi(\xi_2,\eta_1) + w_2^2\phi(\xi_2,\eta_2) \tag{7.42a}$$

Trong (7.42a), ta dùng 2 điểm Gauss (n = 2); $w_1 = w_2 = 1{,}0$; $\xi_1 = \eta_1 = -0{,}57735\ldots$; $\xi_2 = \eta_2 = +0{,}57735\ldots$ (bảng 7.1).

Nếu ta tính k_{ij} cho 4 điểm 1, 2, 3, 4 như trên hình 7.5, (7.42a) có thể viết:

$$k_{ij} = \sum_{IP=1}^{4} W_{IP}\phi_{IP} \tag{7.42b}$$

Trong đó, ϕ_{IP} và W_{IP} là giá trị của ϕ và của W tại các điểm tích phân IP (hình 7.5).

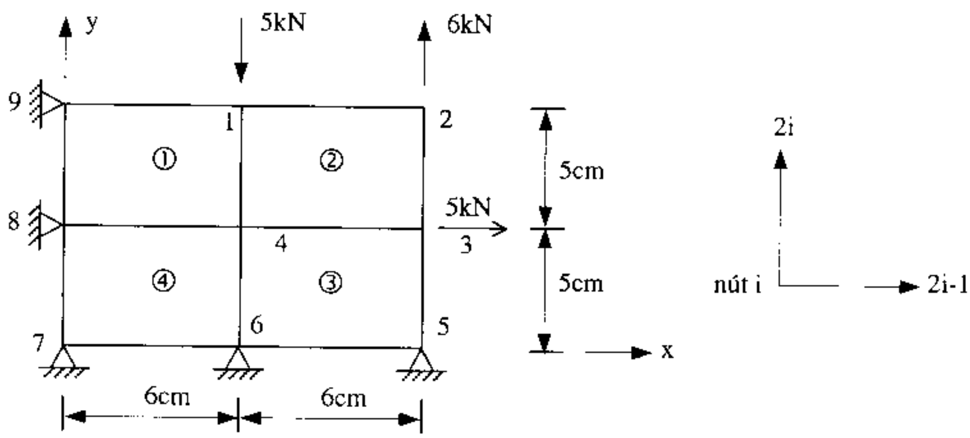
Đối với các tích phân 3 chiều (hoặc tích phân 3 lớp), cách tính cũng tương tự như trên.

7.2.5. Tính ứng suất

Khác với trường hợp FTHH tam giác có biến dạng không đổi đã nghiên cứu trong các chương 5 và 6, ứng suất $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBq}$ lại biến đổi trong phạm vi FTHH 4 cạnh. Nó là hàm của ξ, η, nên cần được tính tại các điểm Gauss như khi tính $\mathbf{k}_e$.

Đối với FTHH 4 cạnh, ta có 4 giá trị ứng suất tại 4 điểm (hình 7.5). Thông thường, để đơn giản, ta tính ứng suất tại điểm $\xi = 0$ và $\eta = 0$.

Ví dụ 7.2: Cho một kết cấu có mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình (7.6).



Hình 7.6

Sơ đồ bố trí các nút cục bộ và các nút tổng thể biểu thị trong bảng (7.2)

Bảng 7.2

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	9	8	4
2	1	2	3	4	1	4	3	2
3	1	2	3	4	4	6	5	3
4	1	2	3	4	8	7	6	4

Dùng chương trình CTR 13 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

Giải:

Bài toán này có khối lượng tính rất lớn, không thể tính bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính điện tử.

Trình tự tính toán như sau:

1) Nhập số liệu

Số phần tử: 4 (hình 7.6)

Số BTD có chuyển vị: 8

Tổng số BTD: $9 \times 2 = 18$

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 10

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Bề dày tấm: 0,5cm

Hệ số poát xong: 0,3

Các thành phần tải trọng: 0; -5; 0; 6; 5; 0; 0; 0

Các số liệu khác thống kê trong bảng (7.3)

Bảng 7.3

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	6	0	0	6	10	10	5	5
2	6	6	12	12	10	5	5	10
3	6	0	0	6	5	5	0	0
4	12	6	6	12	5	5	0	0

2) Xác định ma trận A theo (7.20)

3) Xác định ma trận G theo (7.20)

4) Xác định ma trận B theo (7.24)

5) Xác định ma trận cấu trúc vật liệu D theo (1, 20)

6) Thực hiện phép tính tích phân đối với mỗi phần tử của MTĐC theo phép cầu phương Gauss, căn cứ vào (7.41), (7.42b).

Ở đây, các số ξ và η lần lượt có tập hợp giá trị khác nhau:

$$\xi = 1 \qquad\qquad \eta = 1$$

$\xi = 1$ $\eta = -1$

$\xi = -1$ $\eta = 1$

$\xi = -1$ $\eta = -1$

Tính cho mỗi tập hợp giá trị rồi cuối cùng cộng lại để được giá trị cuối cùng của mỗi phần tử ma trận. Mỗi MTĐC có 36 phần tử, mỗi phần tử phải tính đến 4 lần, tổng số phép tính lên đến 36 x 4 = 144.

7) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

8) Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã nhập vào, gọi chương trình con để giải hệ phương trình.

9) Tính ứng suất tại trọng tâm của mỗi phần tử theo (8.25)

Kết quả chạy chương trình:

1) Chuyển vị:

$q(1) = 2{,}274 \times 10^{-4}$ cm; $q(2) = 1{,}108 \times 10^{-3}$ cm;

$q(3) = -6{,}722 \times 10^{-5}$ cm; $q(4) = -1{,}118 \times 10^{-4}$ cm;

$q(5) = -5{,}278 \times 10^{-5}$ cm; $q(6) = -1{,}847 \times 10^{-4}$ cm;

$q(7) = -5{,}329 \times 10^{-5}$ cm; $q(8) = 9{,}036 \times 10^{-6}$ cm;

2) Ứng suất

US1(1) = 34,489 kN/cm^2; US2(1) = 370,422 kN/cm^2;

US1(2) = 174,794 kN/cm^2; US2(2) = 436,383 kN/cm^2;

US1(3) = -15,009 kN/cm^2; US2(3) = -1,543 kN/cm^2;

US1(4) = -18,816 kN/cm^2; US2(4) = -63,177 kN/cm^2;

US3(1) = 95,363 kN/cm^2;

US3(2) = -185,623 kN/cm^2;

US3(3) = -5,765 kN/cm^2;

US3(4) = 33,702 kN/cm^2;

§7.3. CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN CÓ BẬC CAO HƠN

Các khái niệm về FTHH 4 cạnh 4 nút trình bày trên có thể mở rộng cho các FTHH cùng tham số có bậc cao hơn. Trong FTHH 4 cạnh 4 nút, các hàm hình dạng chứa các số hạng 1, ξ, η và $\xi.\eta$. Các FTHH trình bày trong phần dưới chứa các số hạng $\xi.^2\eta$, $\xi.\eta^2$, làm cho độ chính xác cao hơn. Sau đây, chỉ trình bày các hàm hình dạng N. Như trong phần trước, ma trận độ cứng được suy ra từ các bước sau:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{7.43}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{7.44}$$

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}^t\mathbf{D}\mathbf{B}\det \mathbf{J}\, .\, d\xi . d\eta \qquad (7.45)$$

Trong đó $\mathbf{k}_e$ tính theo phương pháp cầu phương Gauss

7.3.1. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 9 nút

FTHH 4 cạnh 9 nút đã tỏ ra rất hữu hiệu trong tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn. Số thứ tự cục bộ các nút biểu thị trên hình (7.7a). FTHH hình vuông biểu thị trên hình (7.7b). Các hàm hình dạng sẽ được định nghĩa như sau.

Trước hết, hãy xét trục tọa độ tự nhiên ξ trên hình (7.7c). Số thứ tự cục bộ các nút là 1, 2, 3. Chúng tương ứng với các vị trí $\xi = -1$, $\xi = 0$ và $\xi = +1$.

Ta định nghĩa các hàm hình dạng gốc L_1, L_2, L_3 như sau:

$$L_i(\xi) = 1 \text{ tại nút i}$$

$$L_i(\xi) = 0 \text{ tại 2 nút còn lại} \qquad (7.46)$$

Trước hết, ta xét L_1. Vì $L_1 = 0$ tại điểm $\xi = 0$ và điểm $\xi = +1$ nên L_1 có dạng $L_1 = c.\xi(1-\xi)$. Hằng số c được xác định từ điều kiện $L_1 = 1$ tại điểm $\xi = -1$ (hình 7.7c), từ đó c=-1/2. Vậy $L_1(\xi) = -\xi(1-\xi)/2$. L_2 và L_3 cũng được xác định một cách tương tự. Tóm lại, ta có:

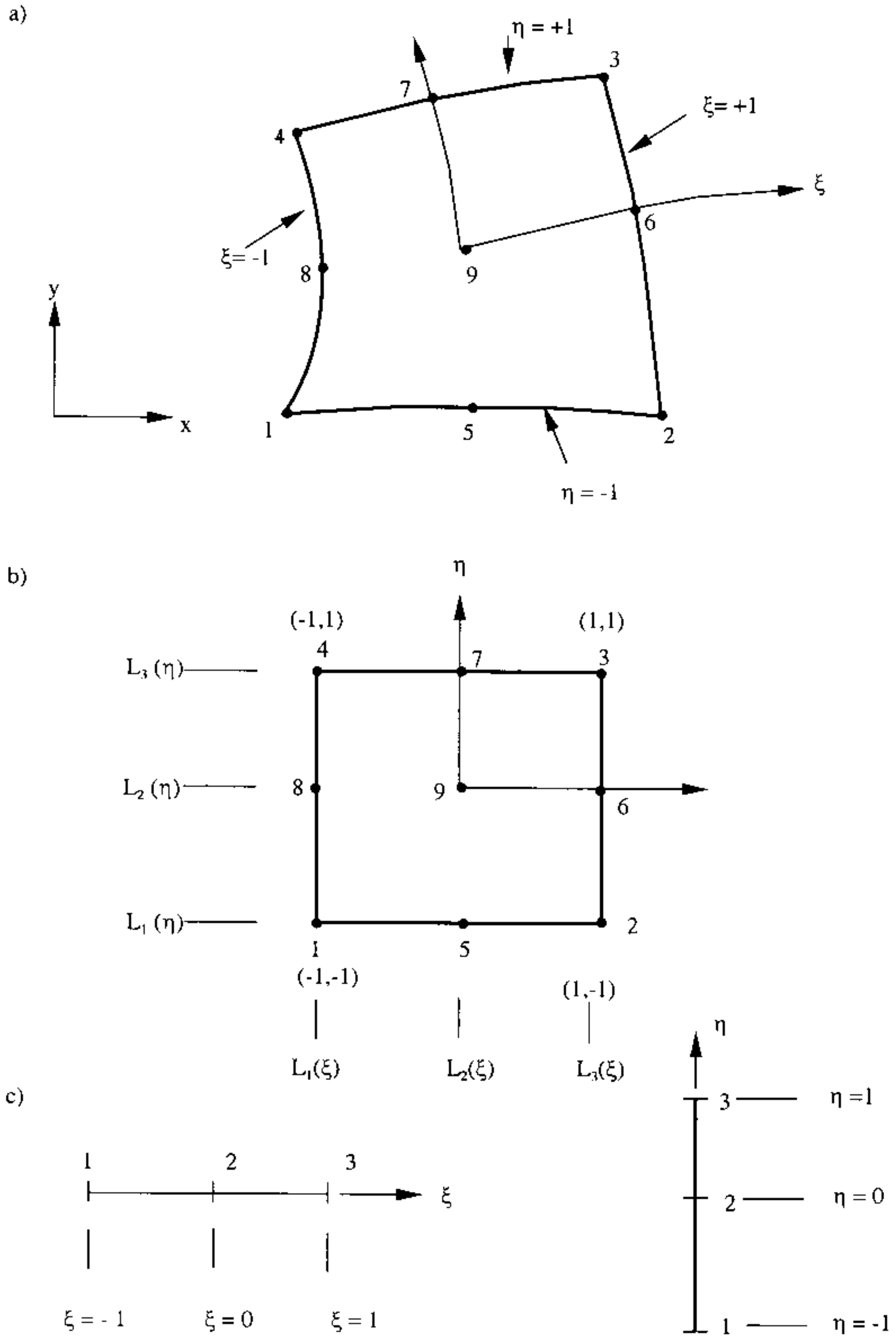
$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \\ L_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ L_3 &= \left(\frac{\xi(1+\xi)}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7.47)$$

Các hàm hình dạng gốc dọc theo trục tọa độ tự nhiên η (hình 7.7c) cũng được xác định một cách tương tự:

$$\begin{aligned} L_1(\eta) &= -\frac{\eta(1-\eta)}{2} \\ L_2(\eta) &= (1+\eta)(1-\eta) \\ L_3 &= \left(\frac{\eta(1+\eta)}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7.48)$$

Trên hình (7.7b) ta thấy rằng mỗi nút đều có các tọa độ tự nhiên như sau: $\xi = -1$, 0 hoặc + 1; $\eta = -1$, 0 hoặc + 1. Các hàm hình dạng $N_1, N_2 \ldots N_9$ tại 9 nút có dạng như sau:

$$\begin{array}{lll} N_1 = L_1(\xi)L_1(\eta) & N_5 = L_2(\xi)L_1(\eta) & N_2 = L_3(\xi)L_1(\eta) \\ N_8 = L_1(\xi)L_2(\eta) & N_9 = L_2(\xi)L_2(\eta) & N_6 = L_3(\xi)L_2(\eta) \\ N_4 = L_1(\xi)L_3(\eta) & N_7 = L_2(\xi)L_3(\eta) & N_3 = L_3(\xi)L_3(\eta) \end{array} \qquad (7.49)$$



***Hình 7.7:** FTHH 4 cạnh 9 nút*

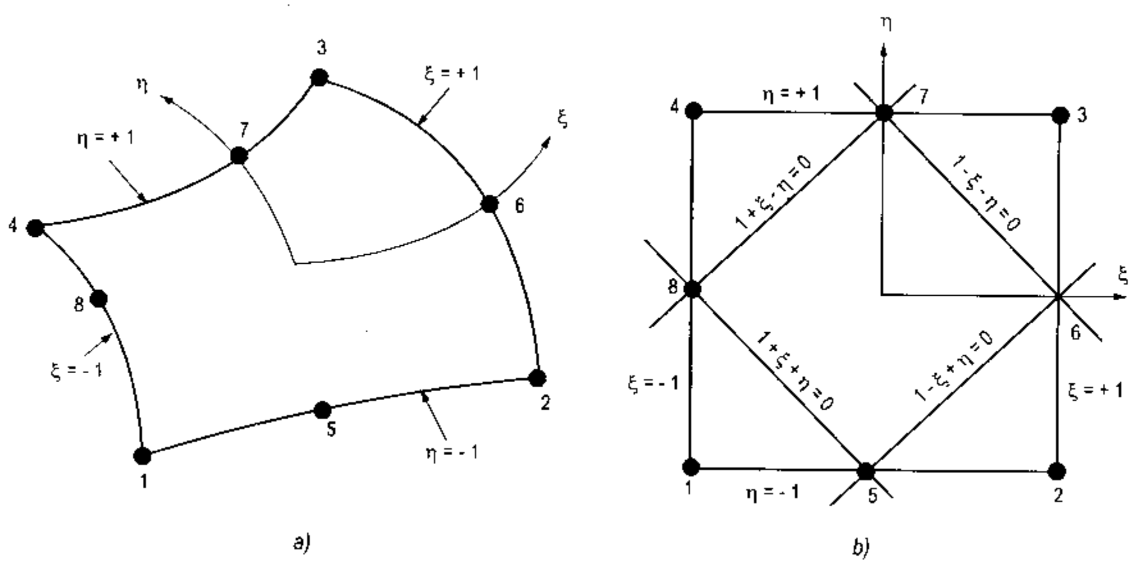
Bằng cách xác định các hàm hình dạng như trên, ta có thể kiểm tra để thấy rằng $N_i = 1$ tại nút i và bằng 0 tại nút j còn lại ($j \neq i$).

Như đã nói trong phần đầu, việc dùng các số hạng có bậc cao hơn trong ma trận hàm hình dạng **N**, đưa đến việc nội suy ở bậc cao hơn trường chuyển vị cho bởi **u= Nq**.

Hơn nữa, vì $x = \sum_i N_i x_i$, $y = \sum_i N_i y_i$, ta có thể dùng các số hạng có bậc cao hơn để xác định kích thước hình học.

Vì vậy, FTHH có thể có biên cong.

7.3.2. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 8 nút



Hình 7.8: *FTHH 4 cạnh 8 nút*

FTHH 4 cạnh 8 nút biểu thị trên hình (7.8). Toàn bộ các nút đều nằm trên biên của FTHH. Ta xác định hàm hình dạng N_i (i =1,2...8) với điều kiện N_i=1 tại nút i và $N_i = 0$ tại các nút j còn lại ($j \neq i$). Khi xác định N_i, ta căn cứ vào FTHH hình vuông trên hình (7.8b). Trước hết, ta xác định $N_1 \div N_4$. Chẳng hạn, đối với N_1, nó phải triệt tiêu trên các đường $\xi = +1$, $\eta = +1$ và $\xi + \eta = -1$ (hình 7.8b). Do đó N_1 phải có dạng:

$$N_1 = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

Nhưng tại nút 1, $N_1 = 1$, $\xi = \eta = -1$ do đó $c = -\frac{1}{2}$

Một cách tương tự, ta có:

$$N_1 = -\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$$

$$N_2 = -\frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$$

$$N_3 = -\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4} \qquad (7.50)$$

$$N_4 = -\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$$

Bây giờ ta xác định N_5, N_6, N_7, N_8. Chẳng hạn đối với N_5, nó triệt tiêu trên các cạnh $\xi = +1$, $\eta = +1$ và $\xi = -1$. Vậy nó phải có dạng:

$$N_5 = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) = c\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)$$

Hằng số c xác định từ điều kiện $N_5 = 1$ tại nút 5 tại đó $\xi = 0, \eta = -1$ do đó $c = \frac{1}{2}$

Tóm lại, ta có:

$$N_5 = \frac{\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)}{2}$$

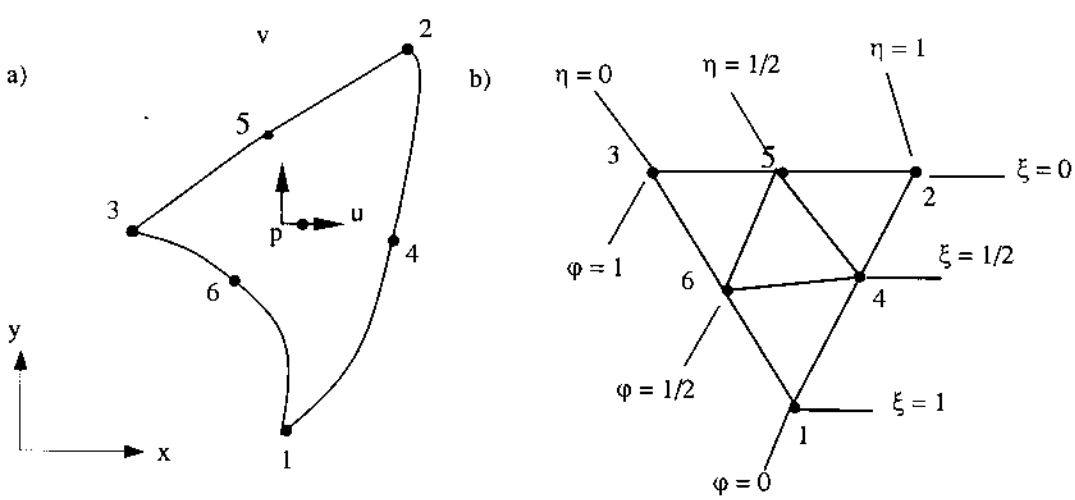
$$N_6 = \frac{(1+\xi)\left(1-\eta^2\right)}{2}$$

$$N_7 = \frac{\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)}{2} \qquad (7.51)$$

$$N_8 = \frac{(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)}{2}$$

7.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút

Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút biểu thị trên hình (7.9)



Hình 7.9: FTHH tam giác 6 nút

Căn cứ vào hình (7.9b), chứng minh tương tự như trong phần trước, ta có:

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \xi(2\xi - 1) \quad N_4 = 4\xi\eta \\
&N_2 = \eta(2\eta - 1) \quad N_5 = 4\varphi\eta \\
&N_3 = \varphi(2\varphi - 1) \quad N6 = 4\zeta\varphi
\end{aligned}
\tag{7.52}
$$

Trong đó: $\varphi = 1 - \xi - \eta$. Vì các hàm hình dạng chứa các số hạng ξ^2, η^2, φ^2 nên FTHH trên gọi là FTHH tam giác bậc 2. Dưới dạng biểu thị cùng tham số, ta có:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{7.53}$$

$$x = \sum_i N_i x_i \qquad y = \sum_i N_i y_i$$

Ma trận độ cứng của FTHH tính theo công thức (như trong các phần trước).

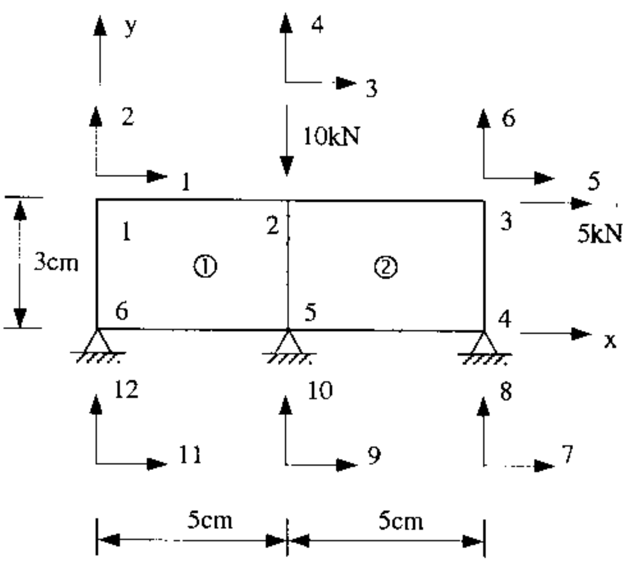
$$\mathbf{k}_e = h_e \iint \mathbf{B'DB} \det \mathbf{J}\, d_\xi d_\eta \tag{7.54}$$

Tích phân trên trong miền tam giác khác với tích phân trong miền 4 cạnh. Cách đơn giản nhất là dùng quy tắc 1 điểm ở trọng tâm tại đó trọng lượng $w_i = \frac{1}{2}$ và $\xi_1 = \eta_1 = \varphi_1 = \frac{1}{3}$. Phương trình (7.54) có dạng:

$$k_e \approx \frac{1}{2} t_e \overline{\mathbf{B}}'\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{B}} \det \overline{\mathbf{J}} \tag{7.55}$$

Trong đó, $\overline{\mathbf{B}}$ và $\overline{\mathbf{J}}$ tính tại điểm Gauss.

§7.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 2 CHIỀU KIỂU FTHH CÙNG THAM SỐ 4 CẠNH 4 NÚT (CTR 13)



Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	6	5	2
2	2	5	4	3

Hình 7.10

Các số liệu còn lại ghi trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	0	0	5	5	3	0	0	3
2	5	5	10	10	3	0	0	3

1. Những điều cần tuân thủ:

Số thứ tự bậc tự do tại nút i biểu thị như sau:

2i trên phương y

2i-1 trên phương x.

2. Nhập các số liệu ban đầu (lấy thí dụ trên hình 7.10)

- Số phần tử: 2
- Số BTD có chuyển vị: 6
- Tổng số BTD : 12
- Số BTD triệt tiêu : 6
- Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 7, 8, 9, 10, 11, 12
- Bề dày tấm: 0,2cm
- Các thành phần tải trọng: 0; 0; 0; -10; 5; 0

3. Thành lập ma trận độ cứng cho mỗi phần tử hữu hạn

Tính tích phân cho mỗi phần tử của ma trận đó theo phép cầu phương Gauss, dựa trên các công thức (7.41), (7.42b).

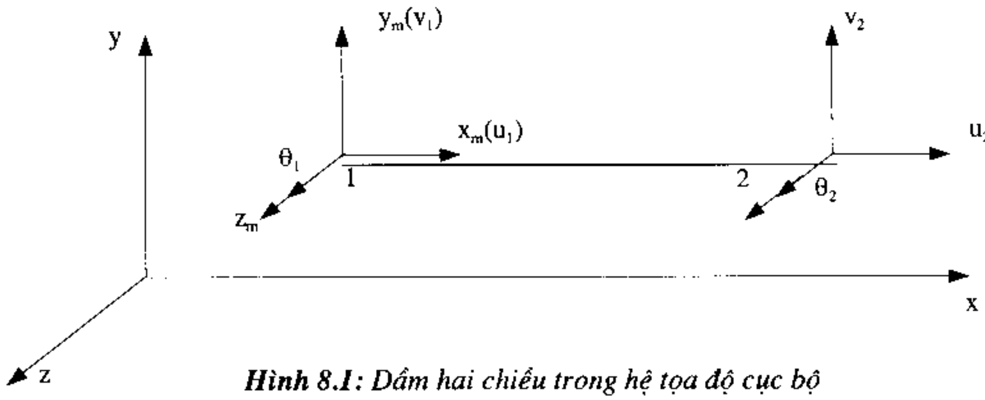
4. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể.
5. Tính các lực thể tích theo phép cầu phương Gauss theo (7.27) nếu có
6. Tính các lực biên theo (7.28) nếu có.
7. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị chuyển vị tại các nút
8. Tính ứng suất tại trung tâm của FTHH theo (7.25)

Chương 8
DẦM HAI CHIỀU VÀ KHUNG PHẲNG

§8.1. DẦM HAI CHIỀU CÓ TRỤC SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ

8.1.1. Khái niệm

Dầm hai chiều trong mặt phẳng x-y có trục song song với trục x biểu thị trên hình (8.1)

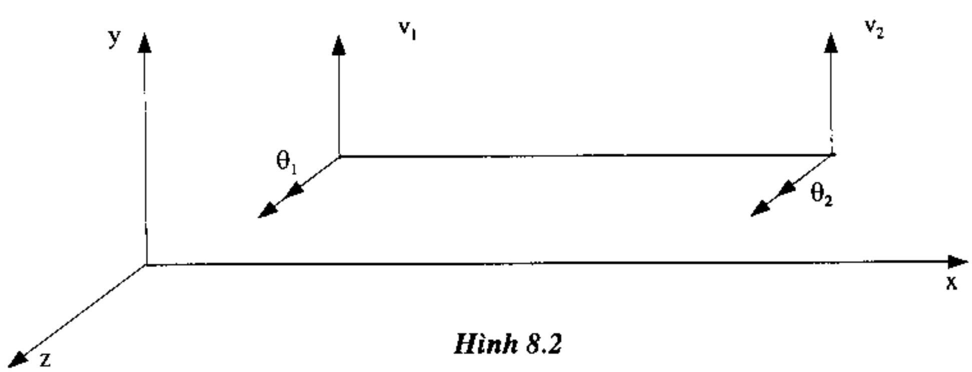


Hình 8.1: Dầm hai chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Hệ tọa độ cục bộ của dầm là x_m, y_m, z_m vuông góc nhau, chúng song song với hệ trục tọa độ tổng thể x, y, z. Trong hệ tọa độ cục bộ, dầm có hai nút 1 và 2, chiều dương của trục dầm quy ước đi từ đầu 1 đến đầu 2. Véctơ chuyển vị của dầm tại 2 nút:

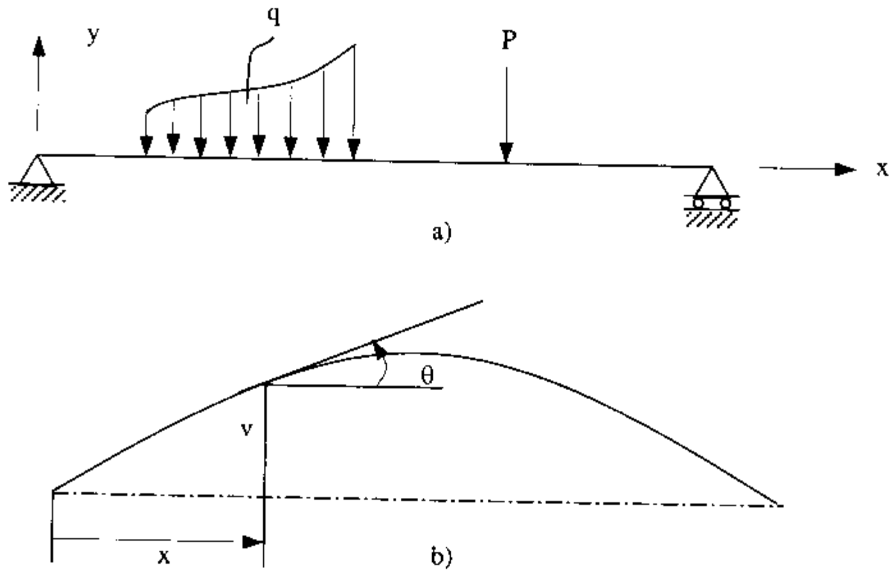
$$q'_m = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Trong đó: u_1 , u_2 là chuyển vị dọc theo trục; u_1 và u_2 đã suy ra trong chương ba. Các hệ số độ cứng do các chuyển vị v_1, θ_1 và v_2, θ_2 sẽ được suy ra trong phần sau (hình 8.2)



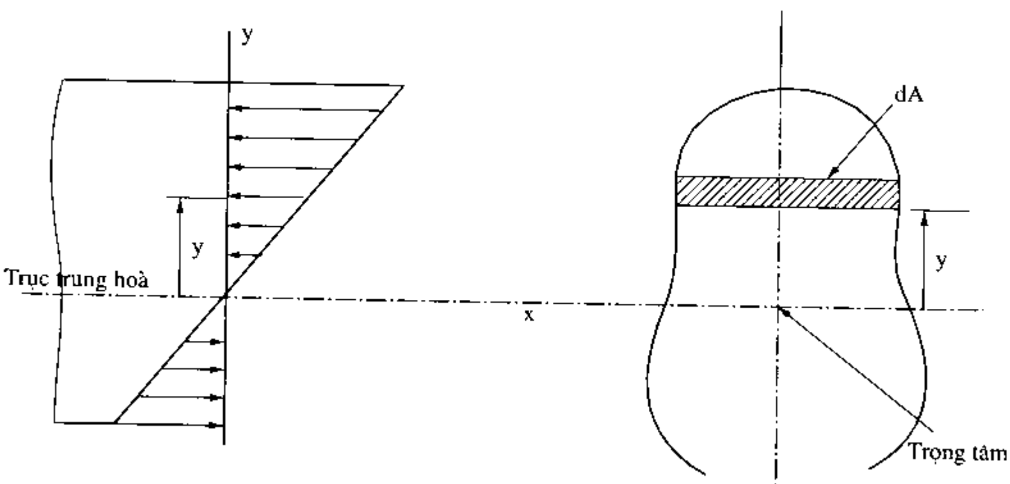
Hình 8.2

Ở đây, ta chỉ xét loại dầm có mặt cắt đối xứng đối với mặt phẳng tải trọng. Trong trường hợp tổng quát, giả sử dầm chịu tải trọng như trên hình (8.3). Đường cong biến dạng như trên hình (3.3b).



Hình 8.3: a) Dầm chịu tải trọng; b) Đường biến dạng của trục trung hoà.

Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố của ứng suất uốn biểu thị trên hình (8.4)



***Hình 8.4:** Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố ứng suất uốn*

Trong trường hợp biến dạng bé, từ môn Sức bền vật liệu, ta có các công thức:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \qquad (8.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{8.3}$$

$$\frac{dv^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{8.4}$$

Trong đó: σ - ứng suất pháp (trên phương trục x);

ε - biến dạng dọc trục;

M - mômen uốn;

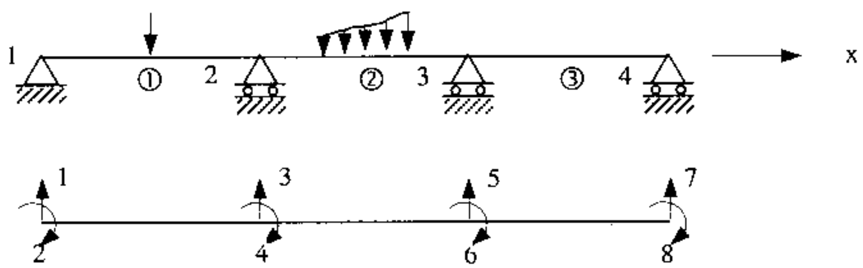
v - chuyển vị (hoặc độ võng) của trục dầm trên phương y;

I - mômen quán tính đối với trục z qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

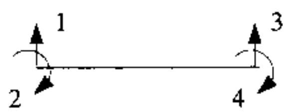
8.1.2. Mô hình phần tử hữu hạn

Trong mô hình phần tử hữu hạn, dầm được chia thành nhiều phần tử như trên hình (8.5a).

a)



b)



Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ				Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	2	3	4	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6	7	8

Hình 8.5: *a) Mô hình phần tử hữu hạn trong hệ tọa độ tổng thể*

b) Phần tử hữu hạn trong hệ toạ độ cục bộ

Nếu bỏ qua chuyển vị dọc trục, mỗi nút của phần tử hữu hạn có hai bậc tự do. Để tiện cho việc lập trình, ta quy ước Q_{2i-1} là thành phần chuyển vị trên phương trục y tại nút i. Q_{2i} là góc xoay tại nút i (hình 8.5a). Véctơ chuyển vị tổng thể trên hình (8.5a) là:

$$\mathbf{Q'} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \cdots\cdots & Q_8 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

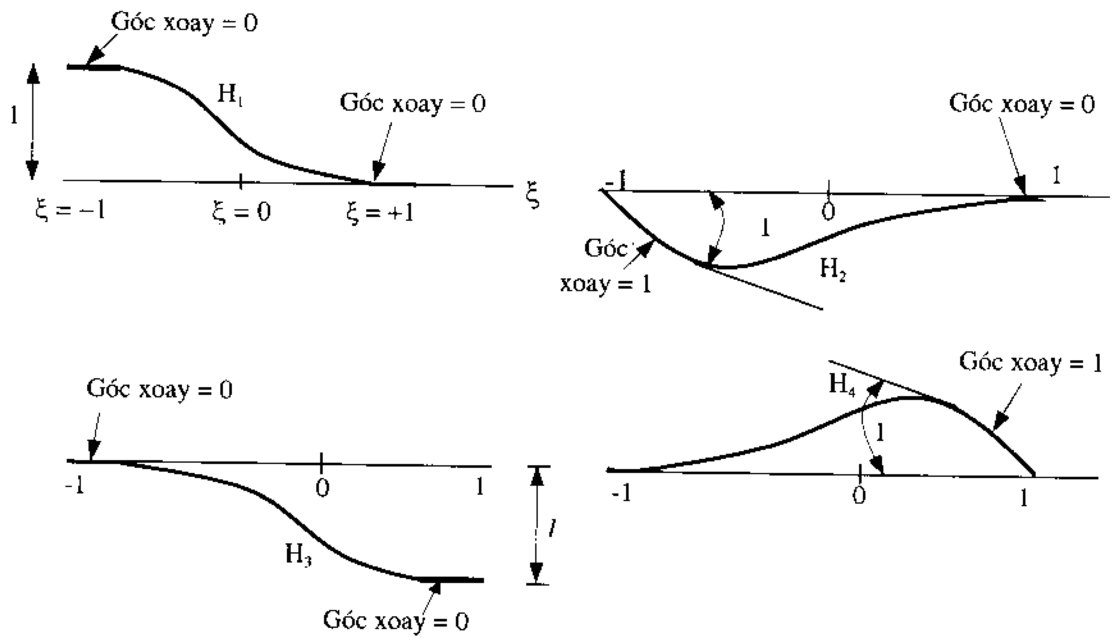
Vectơ chuyển vị men theo các BTD cục bộ (hình 8.5b) là:

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Trong (8.6), q_1, q_2, q_3, q_4 chính là v_1, θ_1 , v_2, θ_2 trên hình (8.2).

Bây giờ, ta sẽ căn cứ vào các hàm hình dạng để suy ra biểu thức chuyển vị v. Các hàm hình dạng ở đây không giống các hàm hình dạng đã thảo luận trong các chương trước. Ta dùng các hàm hình dạng Hecmit bậc 3 được định nghĩa như sau (hình 8.6):

$$H_i = a_i + b_i\xi + c_i\xi^2 + d_i\xi^3 \tag{8.7}$$



Hình 8.6: *Các hàm Hecmit*

Các hàm hình dạng (8.7) phải thỏa mãn các điều kiện trong bảng sau:

	H_1	H_1'	H_2	H_2'	H_3	H_3'	H_4	H_4'
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = 1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Các hệ số a_i, b_i, c_i, d_i xác định từ các điều kiện nói trên:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right)\\
H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)\\
H_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right)\\
H_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Các hàm Hecmit có thể dùng để biểu thị chuyển vị v dưới dạng:

$$v(\xi) = H_1V_1 + H_2\left(\frac{dv}{d\xi}\right)_1 + H_3V_2 + H_4\left(\frac{dv}{d\xi}\right)_2 \tag{8.9}$$

Trong đó: ξ - tọa độ tự nhiên; các chỉ số 1 và 2 ứng với các nút 1 và 2. Hệ thức giữa x và ξ như sau (xem lại chương ba):

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\xi \tag{8.10}$$

Trong đó: $L_e = x_2 - x_1$ là chiều dài của dầm. Ta có:

$$dx = \frac{L_e}{2}d\xi \tag{8.11}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm:

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{d\xi} \tag{8.12}$$

Chú ý rằng $\frac{dv}{dx}$ tính tại nút 1 và 2 chính là q_2 và q_4 do đó:

$$v(\xi) = H_1q_1 + \frac{L_e}{2}H_2q_2 + H_3q_3 + \frac{L_e}{2}H_4q_4 \tag{8.13}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{V} = \mathbf{H.q} \tag{8.14}$$

Trong đó:

$$\mathbf{H} = \left[H_1 \quad \frac{L_e}{2}H_2 \quad H_3 \quad \frac{L_e}{2}H_4 \right] \tag{8.15}$$

8.1.3. Ma trận độ cứng. Vectơ tải trọng

Ma trận độ cứng

Ma trận độ cứng của dầm được suy ra từ nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một). Công nội lực trên đoạn dài dx của dầm:

$$dW_n = \frac{1}{2}\int \sigma.\varepsilon.dA.dx$$

Theo (8.2) và (8.3)

$$dW_n = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI^2}\int_A y^2dA\right)dx$$

Vì $\int_A y^2dA$ chính là mômen quán tính I nên

$$dW_n = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx$$

Đối với toàn bộ dầm, theo (8.4)

$$W_n = \frac{1}{2}EI\int_e\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \tag{8.16}$$

Từ (8.12): $\quad \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{L_e}.\dfrac{dv}{d\xi} \qquad \dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{4}{L_e^2}.\dfrac{d^2v}{d\xi^2}$

Thay **v = H.q**

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = \mathbf{q}'.\frac{16}{L_e^4}.\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right)'\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right).\mathbf{q} \tag{8.17}$$

$$\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[\frac{3}{2}\xi \qquad \frac{-1+3\xi}{2}.\frac{L_e}{2} \qquad \frac{-3}{2}\xi \qquad \frac{1+3\xi}{2}.\frac{L_e}{2}\right] \tag{8.18}$$

Thay $dx = \dfrac{L_e}{2}.d\xi$ vào (8.16):

$$W_n = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\frac{8EI}{L_c^3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}.\xi(-1+3\xi).L_c & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}.\xi(1+3\xi).L_c \\ & \left(\frac{-1+3\xi}{4}\right)^2 L_c^2 & -\frac{3}{8}.\xi(-1+3\xi).L_c & \frac{-1+9\xi^2}{16}L_c^2 \\ & & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3}{8}.\xi(1+3\xi).L_c \\ & \text{Đối xứng} & & \left(\frac{1+3\xi}{4}\right)^2 L_c^2 \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

Trong (8.19): $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\xi^2 d\xi = \frac{2}{3}$; $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\xi d\xi = 0$; $\displaystyle\int_{-1}^{+1}d\xi = 2$ (8.19) có thể viết:

$$W_n = \frac{1}{2}.\mathbf{q}'.\mathbf{k}_e.\mathbf{q} \tag{8.20}$$

Giả sử tải trọng tác dụng lên dầm có tính chất phân bố đều, công của ngoại lực có thể viết:

$$W_{ng} = \frac{1}{2}\int_L p.v.dx$$

Căn cứ vào (8.14) và (8.11)

$$W_{ng} = \left(\frac{1}{2}p\frac{L}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(p\frac{L}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)' \tag{8.21}$$

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng $W_n = W_{ng}$, ta được:

$$\mathbf{k_e}.\mathbf{q} = \left(\left(\frac{pL}{2}\right)\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)' \tag{8.22}$$

Sau khi tính các tích phân trong (8.19), ta được ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k_e} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & \frac{4EI_z}{L} & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

Trong đó: L - chiều dài của dầm

Ma trận độ cứng trên chỉ có 4 bậc tự do (không xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc).

Trong trường hợp xét biến dạng dọc, kết hợp với công thức (3.19) trong chương 3, ta có ma trận độ cứng với 6 bậc tự do như sau:

$$\mathbf{k_e} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

Vectơ chuyển vị ứng với (8.24) như sau:

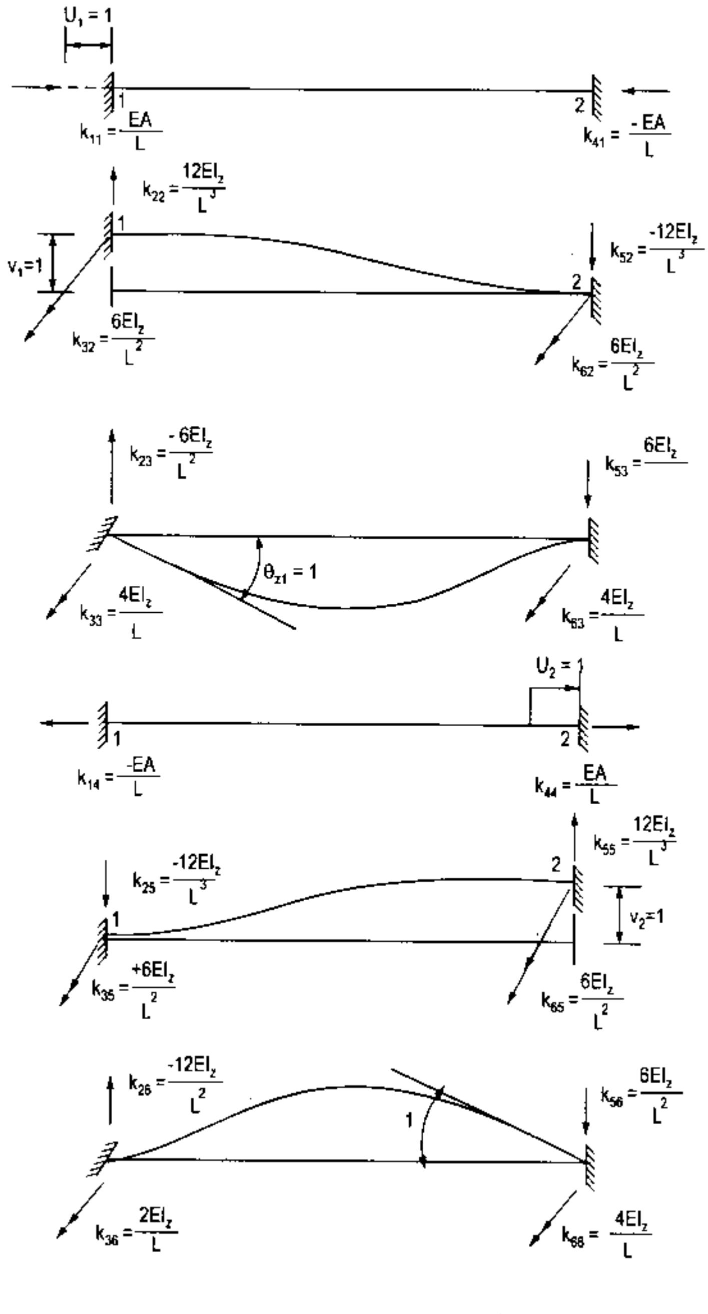
$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

Trong đó: q_1, q_4 chuyển vị trên phương x tại các nút 1 và 2;

q_2, q_5 chuyển vị trên phương y tại các nút 1 và 2;

q_3, q_6 góc xoay tại các nút 1 và 2.

Ý nghĩa vật lý của các hệ số độ cứng giải thích trên hình (8.7):



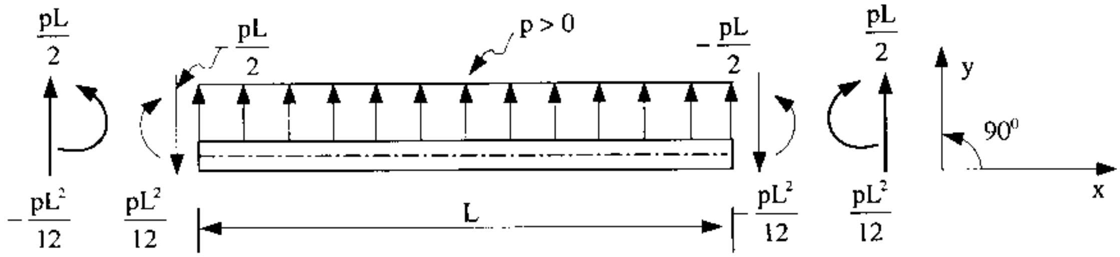
Hình 8.7

Véc tơ tải trọng:

Vế phải trong (8.22) chính là vectơ tải trọng do lực phân bố đều gây ra. Sau khi tính tích phân, ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{pL}{2} & -\frac{pL^2}{12} & \frac{pL}{2} & +\frac{pL^2}{12} \end{bmatrix}^t \tag{8.26}$$

Các lực tương đương trong (8.26) biểu thị trên hình (8.8)



Hình 8.8

Dấu tải trọng quy ước như sau. Từ chiều dương x của trục dần quay một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ. Tải trọng là dương khi cùng chiều với trục y (xem hình 8.8), là âm trong trường hợp ngược lại.

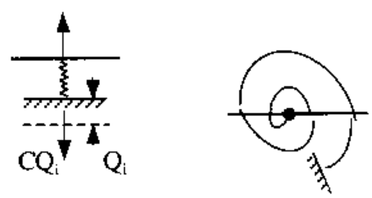
Momen uốn ở đầu dầm quy ước là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ, là âm trong trường hợp ngược lại.

8.1.4. Các điều kiện biên. Nội lực

Điều kiện biên:

Gối tựa của dầm có 3 khả năng:

1. Gối tựa bị lún.
2. Gối tựa đàn hồi.
3. Gối tựa thông thường.



Hình 8.9

Đối với loại thứ nhất, ta dùng phương pháp mô hình lò xo để biến đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** (xem chương 3).

Đối với loại thứ 2, ta thay gối tựa bằng 1 lò xo có độ cứng C (hình 8.9). Men theo BTD i, ta có lực tác dụng F_i - CQ_i. Ta biến đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** như sau. Nhân hàng thứ i của ma trận **K** với vectơ chuyển vị **Q**, ta có:

$$K_{i1}.Q_1 + K_{i2}.Q_2 + \cdots + K_{ii}.Q_i + \cdots + Q_{in}.Q_n = F_i - CQ_i$$

Chuyển CQ_i sang vế trái:

$$K_{i1}.Q_1 + K_{i2}.Q_2 + \cdots + (K_{ii} + C).Q_i + \cdots + Q_{in}.Q_n = F_i \qquad (8.27)$$

Vậy ta biến đổi ma trận **K** bằng cách thêm số C vào phần tử thứ i trên đường chéo chính.

Nội lực

Nội lực trong dầm gồm có lực cắt V và mômen uốn M.

Căn cứ vào các công thức $M = EI\dfrac{d^2v}{dx^2}$ $V = \dfrac{dM}{dx}$ và $v = \mathbf{Hq}$

Ta có:

$$M = \frac{EI}{L^2}\left[6\xi q_1 + (3\xi - 1)Lq_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)Lq_4\right] \tag{8.28}$$

$$V = \frac{6EI}{L^3}\left(2q_1 + Lq_2 - 2q_3 + Lq_4\right) \tag{8.29}$$

Các nội lực ở hai đầu dầm tính theo (8.28) và (8.29). Chúng phải được cộng vào các phản lực ở trạng thái ngàm không tô đậm trên (hình 8.8b) để được nội lực cuối cùng. Gọi S_i là nội lực cuối cùng ta có:

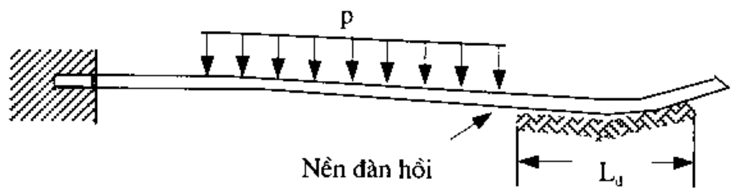
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & +6L & 2L^2 \\ +12 & +6L & 12 & +6L \\ 6L & 2L^2 & +6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-pL}{2} \\ \dfrac{+pL^2}{12} \\ \dfrac{-pL}{2} \\ \dfrac{-pL^2}{12} \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

Trong đó: S_1, S_3 - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 của dầm;

S_2, S_4 - mômen tại đầu 1 và đầu 2 của dầm.

8.1.5. Dầm trên nền đàn hồi

Dầm trên nền đàn hồi biểu thị trên hình (8.10)



Hình 8.10: *Dầm trên nền đàn hồi.*

Giả sử độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi là S - Ngoài công của nội lực theo công thức (8.16), còn có công của nội lực do phản lực từ nền đàn hồi tác dụng lên dầm gây ra. Phản lực phân bố trên đơn vị dài là s.v do đó công của nội lực bổ sung là:

$$W_{ng}^{b} = \frac{1}{2}\int (sv)\,v dx$$
$$= \frac{1}{2}\int sv^2 dx \qquad (8.31)$$

Thay **v = H.q** vào (8.31), ta có:

$$W_n^b = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(s\int_e \mathbf{H}'\mathbf{H}dx \right)\mathbf{q} \qquad (8.32)$$

Căn cứ vào (8.8) và (8.15), ta được

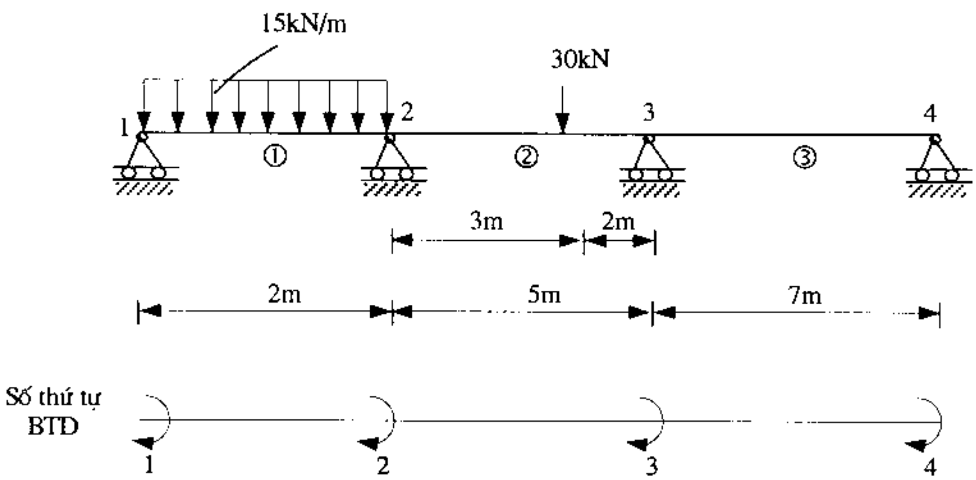
$$\mathbf{k}_e^b = \frac{SL_d}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L_d & 54 & -13L_d \\ 22L_d & 4L_d^2 & 13L_d & -3L_d^2 \\ 54 & 13L_d & 156 & -22L_d \\ -13L_d & -3L_d^2 & -22L_d & 4L_d^2 \end{bmatrix} \qquad (8.33)$$

Trong đó: s là độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi;

L_d là chiều dài của nền đàn hồi.

Ma trận $\mathbf{k}_e^b$ cần được cộng vào ma trận (8.23) trong trường hợp có 4 bậc tự do.

Ví dụ 8.1:



Môđun đàn hồi: 21.10^7 kN/m^2; Mômen quán tính: 23.10^{-6} m^4

Hình 8.11

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

2- Lực cắt

Giải:

Số thanh: 3

số BTD cần tính: 4

Chuyển vị là các góc xoay, nội lực là các mômen uốn.

1- Tính ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

Thanh 1: $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \;\;1 & \;\;\;\;2 \end{array} \\ \mathbf{k}_1 = & \begin{bmatrix} 9660 & 4830 \\ & 9660 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2: $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \;\;2 & \;\;\;\;3 \end{array} \\ \mathbf{k}_2 = & \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 3864 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Thanh 3: $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \;\;3 & \;\;\;\;4 \end{array} \\ \mathbf{k}_3 = & \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 2760 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

2- Ghép các MTĐC riêng thanh MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9660 & 4830 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 9660 \\ +3864 \\ \hline 13524 \end{array} & 1932 & 0 \\ & & \begin{array}{r} 3864 \\ +2760 \\ \hline 6624 \end{array} & 1380 \\ & & & 2760 \end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tác dụng tại nút. Ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9,4 \\ -21,6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4- Giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Ta được các thành phần chuyển vị như sau:

$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (-0,147;\ 1,329;\ -4,073;\ 2,036).10^{-3}$ rad

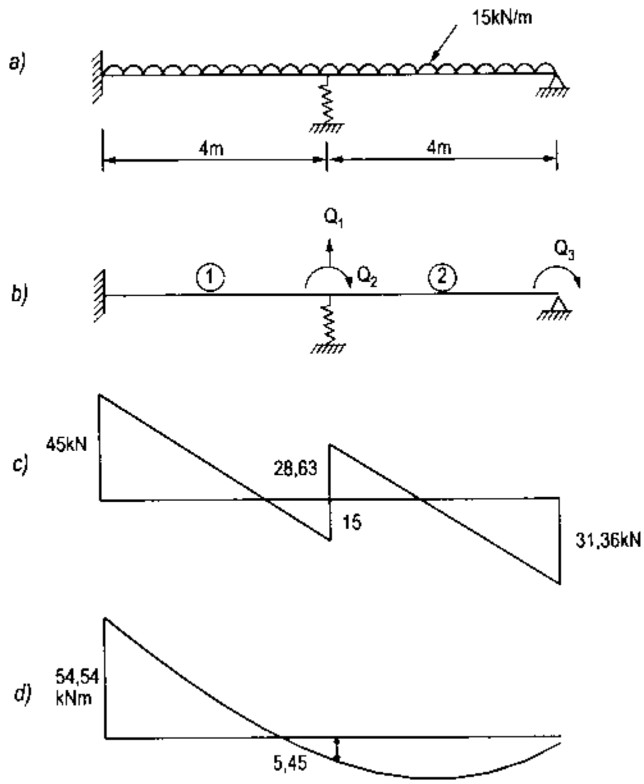
5- Tính nội lực theo (8.30)

Giá trị mômen và lực cắt thống kê trong bảng dưới:

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	0	17,132	6,434	23,566
2	-17,132	8,431	12,300	17,699
3	-8,431	0	1,204	-1,204

Ví dụ 8.2:

Tính dầm liên tục biểu thị trên hình (8.12a). Gối tựa trung gian là 1 lò xo có độ cứng $\frac{24EI}{L^3}$;EI=400 đơn vị. Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen.



Hình 8.12

Giải:

Xác định các ma trận độ cứng:

Bậc tự do cục bộ trong mỗi dầm là q_1, q_2, q_3, q_4. Các bậc tự do tổng thể là Q_1, Q_2, Q_3 như trên hình (8.12b).

Ma trận độ cứng của các phần tử tính theo (8.23) (bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc)

Phần tử 1:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
 & & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \leftarrow \text{BTD cục bộ} \\
\mathbf{k}_1 = & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{BTD tổng thể} & \text{BTD cục bộ} \end{array} & \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix}
\end{array} \tag{a}
$$

Véc tơ tải trọng tính theo (8.26) ($p < 0$)

$$
\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} +\dfrac{WL}{2} \\ -\dfrac{WL^2}{12} \\ +\dfrac{WL}{2} \\ \dfrac{WL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} \tag{b}
$$

Phần tử 2:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \quad \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \leftarrow \text{BTD cục bộ}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ \text{đối xứng} & & 75 & -150 \\ & & & 400 \end{bmatrix} \tag{c}
$$

Véc tơ tải trọng:

$$
\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} \tag{d}
$$

Ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng như đã làm trong các chương trước. Vì gốc tựa trung gian là 1 lò xo có độ cứng bằng $\frac{24\times 400}{4^3} = 150\text{kN}/\text{m}$, ta phải cộng số này vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính (lò xo nằm trên phương BTD Q_1). Cuối cùng, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 300 & 0 & 150 \\ & 800 & 200 \\ \text{Đối xứng} & & 400 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \tag{e}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{2}{11} \\ Q_2 &= -\frac{1}{22} \\ Q_1 &= -\frac{16}{55} \end{aligned} \tag{f}$$

Theo (8.30), nội lực cuối cùng của các phần tử như sau:

Phần tử 1:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16/55 \\ -1/22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.0 \\ 54.54 \\ 15.0 \\ 5.45 \end{pmatrix} \tag{g}$$

Phần tử 2:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16/55 \\ -1/22 \\ 0 \\ 2/11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.63 \\ -5.45 \\ 31.36 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Căn cứ vào các kết quả tính trên, ta vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen như trên hình (8.12c), (8.12d).

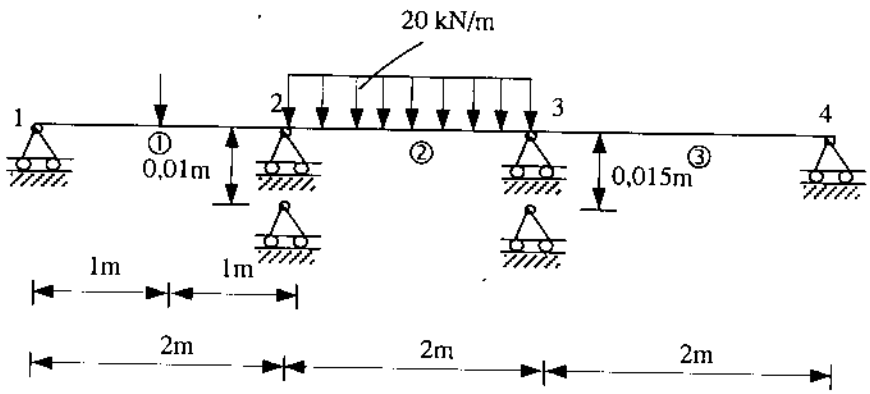
Ví dụ 8.3: Một dầm liên tục như trên hình (8.13)

Độ lún gối tựa 2: 0,01m.

Độ lún gối tựa 3: 0,015m

Môđun đàn hồi: 21.10^7 kN/m^2;

Mômen quán tính: 23.10^{-6}m^4



Hình 8.13

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Trong phương pháp lò xo, cần phải thống kê toàn bộ các bậc tự do. Vì mỗi nút có 2 bậc tự do nên ta có.

Tổng số bậc tự do = $2 \times 4 = 8$

Số bậc tự do có chuyển vị cho trước: 4

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho: 1, 3, 5, 7

Các chuyển vị tương ứng: 0; 0,01 (độ lún); 0,015 (độ lún); 0

Ứng với BTD thứ i có chuyển vị cho trước, phần tử thứ i trên đường chéo chính của ma trận độ cứng tổng thể cần được cộng thêm số c khá lớn, phần tử thứ i của vectơ tải trọng cũng cần được cộng thêm giá trị (c x chuyển vị tương ứng).

Trình tự tính toán như sau:

1) Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Thanh 2:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 & \quad 6 \end{array} \\
S_2 = \left[\begin{array}{cccc}
7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\
 & 9660 & 7245 & 4830 \\
\text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\
 & & & 9660
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh 3:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad 5 & \quad 6 & \quad 7 & \quad 8 \end{array} \\
S_3 = \left[\begin{array}{cccc}
7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\
 & 9660 & 7245 & 4830 \\
\text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\
 & & & 9660
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành MTĐC tổng thể:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
S = \left[\begin{array}{cccccccc}
7245* & -7245 & -7245 & -7245 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 9660 & 7245 & 4830 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 14490* & 0 & -7245 & -7245 & 0 & 0 \\
 & & & 19320 & 7245 & 4830 & 0 & 0 \\
 & & & & 14490* & 0 & -7245 & -7245 \\
 & & & & & 19320 & 7245 & 4830 \\
 & & & & & & 7245* & 7245 \\
 & & & & & & & 9660
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\end{array}
$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tập trung tại các nút. Ta có vectơ tải trọng:

$$
f = \left[\begin{array}{c}
-15* \\ 7,5 \\ -35* \\ -0,83 \\ -20* \\ -6,67 \\ 0* \\ 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$

4- Biến đổi ma trận độ cứng tổng thể và vectơ tải trọng.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể là 19320. Chọn giá trị $c = 19320.10^8$.

Các giá trị của các phần tử có đánh dấu sao trong MTĐC tổng thể cần sửa lại như sau:

$S(1,1) = 7245 + 19320.10^8$ $\quad$ $S(3,3) = 14490 + 19320.10^8$

$S(5,5) = 14490 + 19320.10^8$ $\quad$ $S(7,7) = 7245 + 19320.10^8$

Các phần tử có đánh dấu sao trong vectơ tải trọng cần sửa lại như sau:

$f(1,1) = -15 + c \times 0 = -15$ $\quad$ $f(3,3) = -35 + c \times (-0,01)$

$f(5,5) = -20 + c \times (-0,015)$ $\quad$ $f(7,7) = 0 + c \times 0 = 0$

5- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã được biến đổi, giải hệ phương trình đã được các giá trị thành phần chuyển vị:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (0 \quad -4,137\text{x}10^{-3}\text{ rad} \quad -0,01\text{m}$
$-5,173\text{x}10^{-3}\text{ rad} \quad -0,015\text{m} \quad 2,155 \times 10^{-3}\text{ rad} \quad 0 \quad 1,017 \times 10^{-2}\text{ rad})$

6- Căn cứ vào (8.30), tính mômen và lực cắt. Kết quả thống kê trong bảng (8.2)

Bảng 8.2

Lực / Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	0	10	10	20
2	-10	38,725	5,638	34,362
3	-38,725	0	19,362	-19,362

§.8.2 DẦM HAI CHIỀU CÓ TRỤC KHÔNG SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ KHUNG PHẲNG.

Dầm hai chiều nằm nghiêng biểu thị trên hình (8.14). Bây giờ, trục dầm x_m trong hệ toạ độ cục bộ không còn song song với trục x trong hệ tọa độ tổng thể x, y, z.

8.2.1. Ma trận xoay

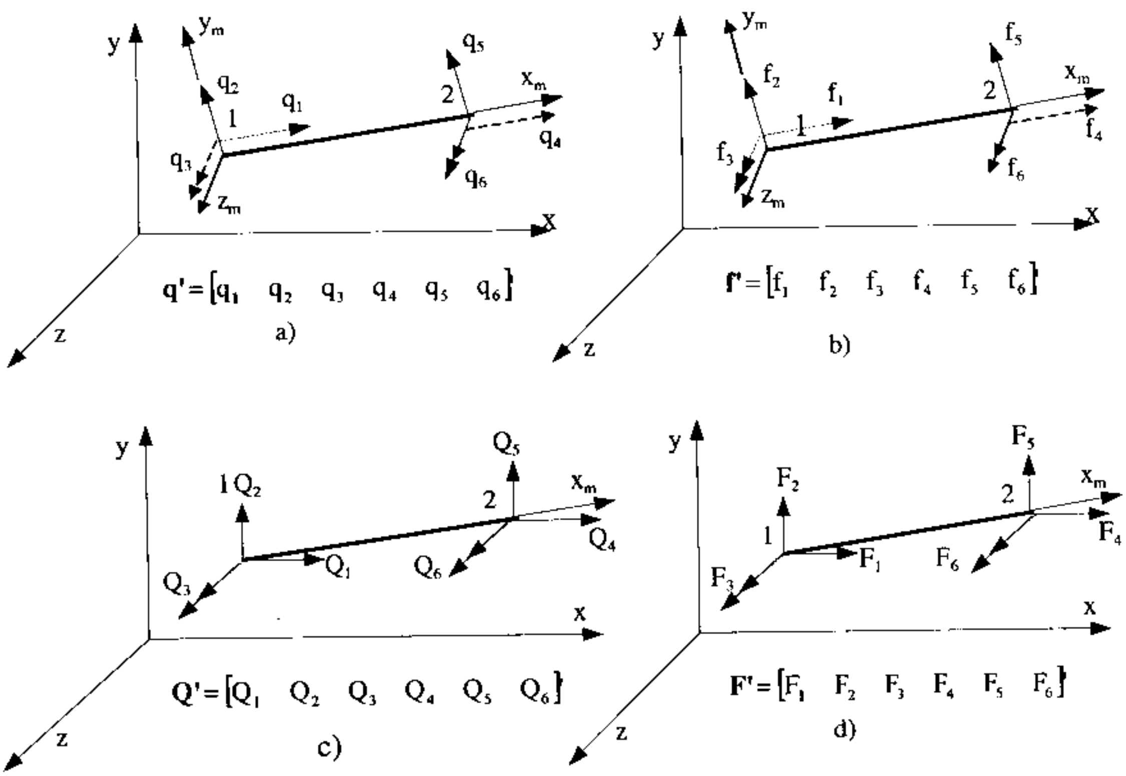
Trong trường hợp dầm hai chiều nằm nghiêng, ta có 2 hệ tọa độ: hệ tọa độ cục bộ x_m, y_m, z_m và hệ tọa độ tổng thể x, y, z. (hình 8.14). Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{q'} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6] \tag{8.35}$$

Trong đó: q_1, q_4 - các thành phần chuyển vị trên phương x_m tại nút 1 và nút 2;

q_2, q_5 - các thành phần chuyển vị trên phương y_m tại nút 1 và nút 2;

q_3, q_6 - các thành phần góc xoay trên phương z_m tại nút 1 và nút 2.



Hình 8.14:

a) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ;
b) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ;
c) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể;
d) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{f'} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} \tag{8.36}$$

Trong đó: f_1, f_4 - các thành phần tải trọng trên phương x_m tại nút 1 và nút 2;

f_2, f_5- các thành phần tải trọng trên phương y_m tại nút 1 và nút 2;

f_3, f_6- các thành phần mômen xoay quanh trục z_m.

Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{Q'} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

Trong đó: Q_1, Q_4 - các thành phần chuyển vị trên phương x tại nút 1 và nút 2;

Q_2, Q_5 - các thành phần chuyển vị trên phương y tại nút 1 và nút 2;

Q_3, Q_6 - các thành phần góc xoay quay trục z tại nút 1 và nút 2.

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể:

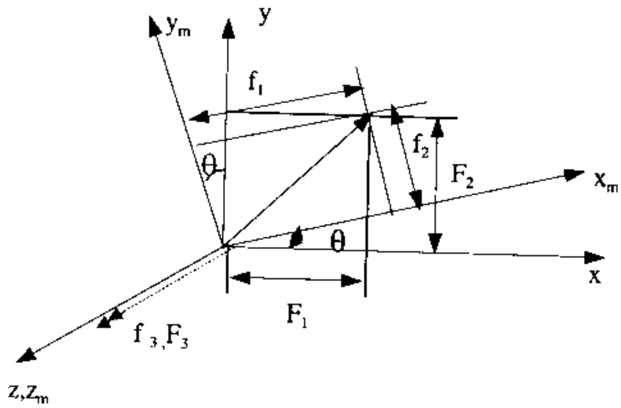
$$\mathbf{F'} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

Trong đó: F_1, F_4- các thành phần tải trọng trên phương x tại nút 1 và nút 2;

F_2, F_5- các thành phần tải trọng trên phương y tại nút 1 và nút 2;

F_3, F_6 - các thành phần mômen xoay quanh trục z tại nút 1 và nút 2.

Nếu cho mặt $x_m y_m$ trùng với mặt xy, ta có hình (8.15)



Hình 8.15

Hệ thức giữa các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 \cos\theta + F_2 \sin\theta = F_1 C_x + F_2 C_y \\ f_2 &= -F_1 \sin\theta + F_2 \cos\theta = -F_1 C_y + F_2 C_x \end{aligned} \tag{8.39}$$

Trong đó: $C_x = \cos\theta \qquad C_y = \sin\theta$ (8.40)

Riêng đối với các thành phần mômen f_3 và F_3, chúng bằng nhau:

$$f_3 = F_3 \tag{8.41}$$

Từ trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{8.42}$$

Vậy là ta đã dùng các thành phần chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể để biểu thị các thành phần chuyển vị tại nút đó trong hệ tọa độ cục bộ (8.42) có thể viết:

$$\mathbf{f}_{(1)} = \mathbf{T}.\mathbf{F}_{(1)} \tag{8.42a}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_{(1)}$ vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{F}_{(1)}$ vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể;

T ma trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Đối với các thành phần chuyển vị, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{q}_{(1)} = \mathbf{T}.\mathbf{Q}_{(1)} \tag{8.43}$$

Trong đó: $\mathbf{q}_{(1)}$ vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{Q}_{(1)}$ vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong thực tế, mỗi dầm có 2 nút (hình 8.13) nên đối với nút 2, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{f}_{(2)} = \mathbf{T}.\mathbf{F}_{(2)} \tag{8.44}$$

$$\mathbf{q}_{(2)} = \mathbf{T}.\mathbf{Q}_{(2)} \tag{8.45}$$

Đối với toàn bộ dầm, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \tag{8.46}$$

Dưới dạng ma trận chia khối, ta có:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_{(1)} \\ \hline \mathbf{f}_{(2)} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} F_{(1)} \\ \hline F_{(2)} \end{array}\right] \tag{8.47}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_{(1)}$, $\mathbf{f}_{(2)}$, $\mathbf{F}_{(1)}$, $\mathbf{F}_{(2)}$ là những ma trận cấp 3 × 1;

T, 0 là các ma trận cấp 3 × 3.

(8.46) có thể viết:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}.\,\mathbf{F} \tag{8.48}$$

Trong đó: **f** - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ cục bộ;

F - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ tổng thể.

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array}\right] \tag{8.49}$$

R gọi là ma trận xoay tổng thể.

Đối với vectơ chuyển vị, ta có hệ thức tương tự:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}.\mathbf{Q} \tag{8.50}$$

Trong đó: **q** và **Q** như đã trình bày trong (8.35) và (8.37)

Ngược lại, ta có thể dùng các thành phần trong hệ tọa độ cục bộ để biểu thị các thành phần trong hệ tọa độ tổng thể. Từ (8.48), ta có:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}.\,\mathbf{f}$$

nhưng $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}'$ nên

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}'.\,\mathbf{f}$$

Từ (8.50):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}'.\mathbf{q} \tag{8.52}$$

8.2.2. Ma trận độ cứng. Vectơ tải trọng của hệ khung phẳng.

Một dầm 2 chiều ở vị trí bất kỳ là một thành phần của hệ khung phẳng.

Ma trận độ cứng:

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), theo (1.43), ta có ma trận độ cứng tổng thể của dầm như sau:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}'.\mathbf{k}_e.\,\mathbf{R} \tag{8.53}$$

Trong đó: **R** - ma trận xoay, tính theo (8.49);

$\mathbf{k}_e$ - ma trận độ cứng trong hệ tọa độ cục bộ tính theo (8.24) (trường hợp tổng quát có 6 bậc tự do).

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận trong (8.53) ta được ma trận độ cứng tổng thể **K** như sau:

Số thứ tự BTD cục bộ :1,2,3,4,5,6.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 & -C_1 & -C_2 & C_4 \\ & C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ & & C_6 & -C_4 & C_5 & C_7 \\ & & & C_1 & C_2 & -C_4 \\ & \text{đối xứng} & & & C_3 & C_5 \\ & & & & & C_6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array} \tag{8.53a}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = \frac{AE}{L}.l^2 + \frac{12EI}{L^3}.m^2; C_2 = \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right).lm; \\ &C_3 = \frac{AE}{L}.m^2 + \frac{12EI}{L^3}.l^2; C_4 = \frac{6EI}{L^2}.m; \\ &C_5 = \frac{6EI}{L^2}.l; C_6 = \frac{4EI}{L}; C_7 = \frac{2EI}{L}; \end{aligned}\right\} \tag{8.53b}$$

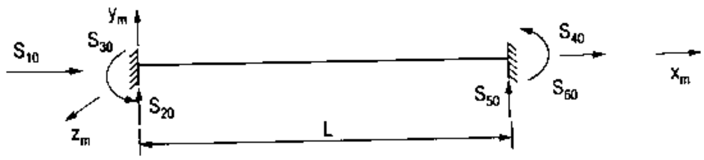
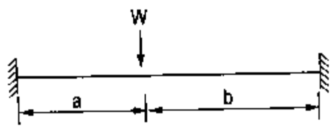
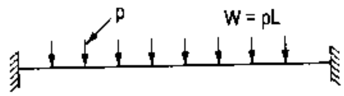
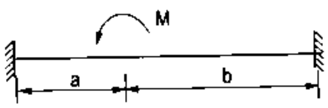
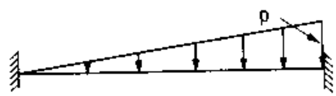
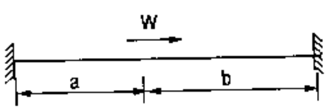
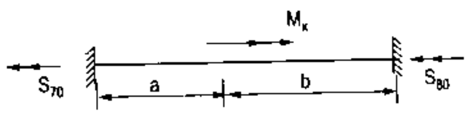
A: diện tích; E: môđun đàn hồi; L: chiều dài

l, m: côsin định hướng

Vectơ tải trọng:

Để tiện cho việc tính toán, người ta lập sẵn bảng (8.1) trong đó đã được thống kê các phản lực ở 2 đầu dầm ở trạng thái ngàm do các loại tải trọng khác nhau gây ra.

Bảng 8.1.Các phản lực ở hai đầu dầm trong trạng thái ngầm do các loại tải trọng khác nhau gây ra

	
 $S_{30} = \frac{Wab^2}{L^2}$ $\quad S_{60} = \frac{Wa^2b}{L^2}$ $S_{20} = \frac{Wb^2}{L^3}(2a+b)$ $\quad S_{50} = \frac{Wa^2}{L^3}(2b+b)$	 $S_{30} = -S_{60} = \frac{-WL}{12}$ $S_{20} = -S_{60} = \frac{W}{2}$
 $S_{30} = \frac{Mb}{L^2}(2a-b)$ $\quad S_{60} = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$ $S_{20} = -S_{60} = \frac{6Mab}{L^3}$	 $S_{30} = \frac{PL}{30}$ $\quad S_{60} = \frac{+PL^2}{20}$ $S_{20} = \frac{3PL}{20}$ $\quad S_{50} = \frac{7PL}{20}$
 $S_{10} = -\frac{Wb}{L}$ $\quad S_{40} = -\frac{Wa}{L}$	 $S_{70} = -\frac{M_xb}{L}$ $\quad S_{80} = -\frac{M_xa}{L}$

Trong bảng (8.1): S_{10}, S_{40} - lực dọc;

S_{20}, S_{50} - lực cắt;

S_{30}, S_{60} - mômen.

Khi tính vectơ tải trọng trong hệ toạ độ cục bộ, ta lấy các giá trị phản lực trong bảng (8.1) nhưng phải đổi dấu toàn bộ. Chẳng hạn dầm chịu tải trọng w, vectơ tải trọng phải tính như sau:

$$[f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] = \left[0 \quad +\frac{Wb^2}{L^3}(3a+b) \quad -\frac{Wab^2}{L^2} \quad 0 \quad +\frac{Wa^2}{L^3}(a+3b) \quad +\frac{Wa^2b}{L^3}\right]$$

Cần chú ý đến dấu của lực và dấu của mômen đã quy ước trong phần trước.

Sau khi xác định được các ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể và các vectơ tải trọng, ta ghép chúng lại như đã làm trong các chương trước để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể. Tiếp theo áp dụng (8.50) để tính các thành phần chuyển vị trong hệ toạ độ cục bộ. Nội lực cuối cùng ở hai đầu dầm tính như sau:

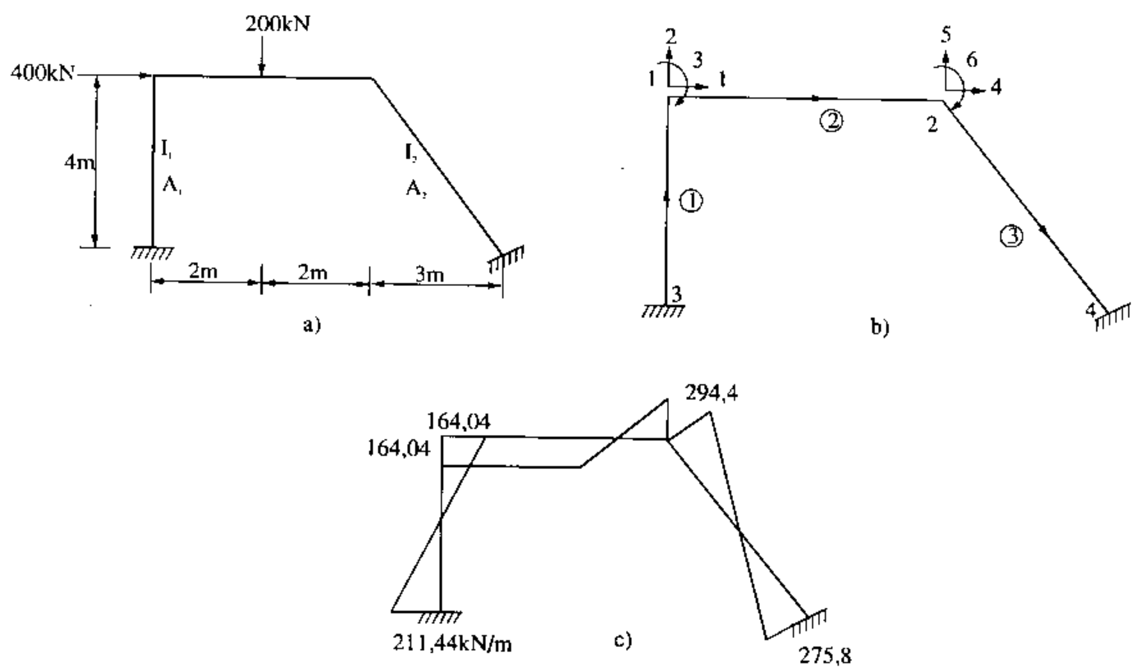
$$\mathbf{S = k_e.q + S_0} \tag{8.54}$$

So tra ở bảng (8.1)

Ví dụ 8.4: Cho 1 khung như trên hình (8.16).

$E = 2\times10^7$ kN/m²; $I_1 = 12\times10^{-5}m^4$; $A_1 = 0{,}03m^2$; $I_2 = 15\times10^{-5}m^4$; $A_2 = 0{,}035m^2$

Vẽ biểu đồ mômen. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.



Hình 8.16

Giải:

Căn cứ vào ma trận xoay **R** ở (8.46) và ma trận độ cứng $\mathbf{k_e}$ trong hệ tọa độ cục bộ ở (8.24), ta tính ma trận độ cứng tổng thể cho từng phần tử. Tiếp theo, căn cứ vào bảng (8.1) để tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ,từ đó, dùng (8.51) để tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k_e} = \begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \quad \text{(a)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)}$$

Ma trận độ cứng tổng thể $\mathbf{K} = \mathbf{R'}.\mathbf{k_e}.\ \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{cc} & \text{BTD tổng thể} \quad 7 \qquad 8 \qquad 9 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \\ \mathbf{K_1} = \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 450 & 0 & -900 & -450 & 0 & -900 \\ 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 2400 & 900 & 0 & 1200 \\ -450 & 0 & 900 & 450 & 0 & 900 \\ 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 1200 & 900 & 0 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(c)}$$

BTD tổng thể →

Phần tử 2:

Trục phần tử 2 x_m song song với trục x trong hệ trục tọa độ tổng thể nên không cần biến đổi ma trận độ cứng.

$$
\begin{array}{cc}
\text{BTD tổng thể} \rightarrow & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\mathbf{K_2} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (d)
$$

Căn cứ vào bảng (8.1), tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (không cần biến đổi):

$$
\mathbf{F}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\dfrac{WL}{2} \\ -\dfrac{WL}{8} \\ 0 \\ +\dfrac{WL}{2} \\ \dfrac{WL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ +100 \\ 0 \\ -100 \\ 100 \end{Bmatrix} \qquad (e)
$$

Phần tử 3:

$$
\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} 14\times10^4 & 0 & 0 & -14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\ 0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\ -14\times10^4 & 0 & 0 & 14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\ 0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400 \end{bmatrix} \qquad (f)
$$

$C_x = 0,6 \qquad C_y = -0.8$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{g}$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{R}^t.\mathbf{k}_3.\mathbf{R}$$

$$\begin{array}{rc} \text{BTD tổng thể} \rightarrow & \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \mathbf{K}_3 = \begin{array}{r} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{bmatrix} 50584 & -67062 & 576 & -50584 & 67062 & 576 \\ -67062 & 89704 & 432 & 67062 & -89704 & 432 \\ 576 & 432 & 2400 & 576 & 432 & 1200 \\ -50584 & 67062 & 576 & 50584 & -67062 & -576 \\ 67062 & -89704 & 432 & -67062 & 89704 & -432 \\ 576 & 432 & 1200 & -576 & -432 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \tag{h}$$

BTD tổng thể →

Sau khi ghép các ma trận độ cứng K_i và các vectơ tải trọng ta được:

$$\begin{bmatrix} 150450 & 0 & 900 & -150000 & 0 & 0 \\ 0 & 150450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 900 & 900 & 4800 & 0 & -900 & 1200 \\ -150000 & 0 & 0 & 200584 & -67062 & 576 \\ 0 & -450 & -900 & -67062 & 90154 & -468 \\ 0 & 900 & 1200 & 576 & -468 & 4800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ -100,0 \\ 100,0 \end{bmatrix} \tag{i}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,2876 \\ 0,00010073 \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix} \qquad \text{(j)}$$

Nội lực ở hai đầu thanh:

Nội lực ở hai đầu của mỗi phần tử tính theo (8.54).

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}_e.\mathbf{q} + \mathbf{S}_0$$

Trong đó: **q** tính theo (8.50):

$$\mathbf{q} = \mathbf{R.Q}$$

S_0 tra ở bảng (8.1)

Phần tử 1:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2876 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,0395 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} \qquad \text{(k)}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,11 \\ 93,87 \\ 211,44 \\ 15,11 \\ -93,87 \\ 164,04 \end{bmatrix} \qquad \text{(l)}$$

Phần tử 2: Vì phần tử 2 song song với trục x nên **q** = **Q**

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix}\times \qquad \text{(m)}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2876 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0,0 \\ 100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ 100,0 \\ +100,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 300,0 \\ -15,1 \\ -164,06 \\ -300,0 \\ 215,1 \\ -296,4 \end{bmatrix}$$

Phần tử thứ 3:

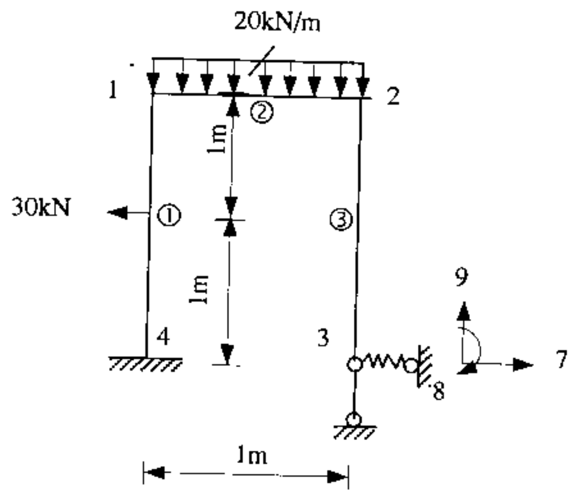
$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,8\times10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \qquad \text{(n)}$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 14\times10^4 & 0 & 0 & -14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\ 0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\ -14\times10^4 & 0 & 0 & 14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\ 0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400 \end{bmatrix}\times \qquad \text{(o)}$$

$$\times\begin{bmatrix} 2,8\times10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +392,0 \\ +114,4 \\ 296,1 \\ -392,0 \\ -114,4 \\ 275,8 \end{bmatrix}$$

Biểu đồ mômen vẽ trên hình (3.16c).

Ví dụ 8.5: Cho 1 khung phẳng như trên hình 8.17.



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\,m^2$
Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\,m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^{7}\,kN/m^2$
Gối tựa đàn hồi men theo BTD thứ 7
Hệ số độ cứng: 10×10^{4} KN/m

Hình 8.17

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Số BTD cần tính: 8

Số BTD triệt tiêu: 4

Số thứ tự BTD triệt: 9, 10, 11, 12

Lập các MTĐC riêng:

Căn cứ vào (8.53a) ta được các MTĐC riêng như sau:

Thanh 1:

BTD tổng thể

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 \\ \text{đối xứng} & & 0 \\ & & 84000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh 2:

$$
S_2 = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1680000 & 0 & 0 & -1680000 & 0 & 0 \\
 & 504000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 \\
 & & 1680000 & 0 & 252000 & 84000 \\
 & & & 1680000 & 0 & 0 \\
 & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 \\
 & & & & & 168000
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh 3:

$$
S_3 = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
63000 & 0 & -63000 & -63000 & 0 & -63000 \\
 & 840000 & 0 & 0 & 840000 & 0 \\
 & & 84000 & 63000 & 0 & 42000 \\
 & & & 63000 & 0 & 63000 \\
 & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 \\
 & & & & & 84000
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \end{array}
\end{array}
$$

2- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$
S = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1743000 & 0 & -63000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1344000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 & 0 & 0 \\
 & & 2520000 & 0 & 252000 & 8400 & 0 & 0 \\
 & & & 1743000 & 0 & -63000 & 0 & -63000 \\
 & & & & 1344000 & 252000 & 0 & 0 \\
 & & & & & 2000 & 0 & 42000 \\
 & \text{đối xứng} & & & & & 840000\,* & 0 \\
 & & & & & & & 840000
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút

Ta có vectơ tải trọng: $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ 9,167 \\ 0 \\ -10 \\ -1,667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4- Biến đổi MTĐC tổng thể

Phần tử thứ 7 trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể cần cộng thêm hệ số độ cứng:

$$S(7, 7) = 840000 + 10^5$$

5- Căn cứ vào MTĐC đã được biến đổi và vectơ tải trọng, giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị.

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (-2,233 \times 10^{-4}m \quad -2,283 \times 10^{-5}m$

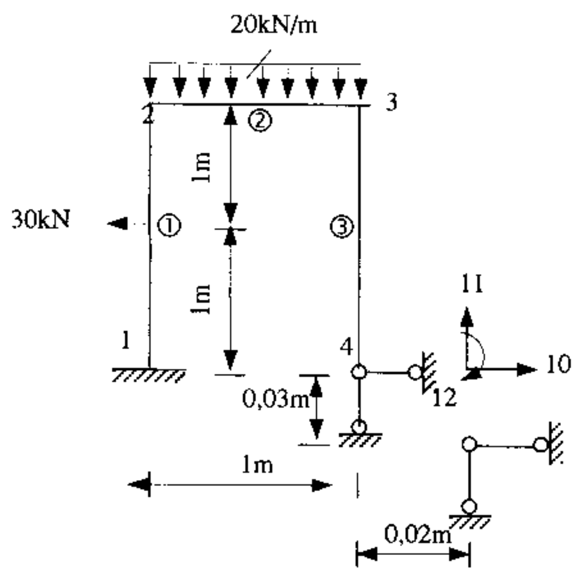
$-1,779 \times 10^{-5}rad \quad -2,221 \times 10^{4}m \quad -9,195 \times 10^{-6}m \quad -4,591 \times 10^{-5}rad$

$-8,217 \times 10^{-6}m \quad -1,436 \times 10^{-4}rad)$

6- Căn cứ vào (8.24), (8.50), (8.54) và các giá trị chuyển vị vừa tính ở trên, ta tính mômen và lực cắt. Kết quả thống kê trong bảng (8.3).

Nội lực / Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-20,822	5,075	-27,948	-2,052
2	-5,075	-4,104	19,178	0,822
3	4,104	0	-2,052	2,052

Ví dụ 8.6: Một khung phẳng như trên hình 8.18.



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\,m^2$
Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\,m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\,kN/m^2$
Độ lún:
Men theo BTD thứ 10: 0,02m
Men theo BTD thứ 11: 0,03m

Hình 8.18

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Trong phương trình mô hình lò xo, phải thống kê toàn bộ các BTD. Ở đây toàn bộ BTD = 12. Số BTD cần tính = 12. Số BTD có chuyển vị cho trước: 5. Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 2, 3, 10, 11. Các chuyển vị cho trước tương ứng: 0 0 0 0,02 -0,03.

Các phần tử trên đường chéo chính ứng các số thứ tự BTD nói trên cần được cộng thêm số C khá lớn. Các phần tử của vectơ tải trọng ứng với các số thứ tự BTD nói trên cũng cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng).

1- Căn cứ vào (8.53a), thành lập các MTĐC riêng:

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 63000 & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 \\ & 840000 & 0 & -840000 & -840000 & 0 \\ & & 840000 & -63000 & 0 & 42000 \\ & & & 63000 & 840000 & -63000 \\ & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 \\ & & & & & 840000 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1680000 & 1680000 & 0 & -1680000 & -1680000 & 0 \\ & 504000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 \\ & & 1680000 & 0 & 252000 & -252000 \\ & & & 1680000 & 1680000 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 \\ & & & & & 84000 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -63000 & 840000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 \\ & -840000 & 0 & -840000 & 840000 & 0 \\ & & 840000 & 63000 & 0 & 42000 \\ & & & -63000 & 840000 & 63000 \\ & \text{đối xứng} & & & -840000 & 0 \\ & & & & & 840000 \end{bmatrix} \end{array}$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng vào MTĐC tổng thể:

$$\begin{bmatrix}
63000^{*} & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 840000^{*} & 0 & -840000 & -840000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 840000^{*} & -63000 & 0 & 42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1743000 & 2520000 & -63000 & -1680000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1344000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 2520000 & 0 & 252000 & -252000 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1617000 & 2520000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 \\
 & & & & & & & -336000 & 252000 & -840000 & 840000 & 0 \\
 & & & & & & & & 1680000 & 63000 & 0 & 42000 \\
 & & & & & & & & & -63000^{*} & 840000 & 63000 \\
 & & & & & & & & & & -840000^{*} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 840000
\end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút (tạo ra trạng thái ngàm). Ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{f} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -15* \\ 0* \\ -7{,}5* \\ -15 \\ -10 \\ 9{,}167 \\ 0 \\ -10 \\ -1{,}67 \\ 0* \\ 0* \\ 12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array}$$

4- Biến đổi MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng. Ứng với các phần tử có dấu ngôi sao trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể S, cần cộng thêm giá trị c.

Giá trị cực đại tuyệt đối của MTĐC tổng thể là $|\max| = 2520000$. Chọn giá trị $c = 2520000 \times 10^8 = 252 \times 10^{12}$.

$S(1,1) = 63000 + 252 \times 10^{12}$ $\quad$ $S(2,2) = 840000 + 252 \times 10^{12}$

$S(3,3) = 840000 + 252 \times 10^{12}$ $\quad$ $S(10,10) = -63000 + 252 \times 10^{12}$

$S(11,11) = -840000 + 252 \times 10^{12}$

Ứng với các phần tử có đánh dấu sao trên véctơ tải trọng, ta cộng thêm giá trị (c x chuyển vị tương ứng):

$f(1) = -15 + c \times 0 = -15$ $\qquad$ $f(2) = 0 + c \times 0 = 0$

$f(3) = -7{,}5 + c \times 0 = -7{,}5$ $\qquad$ $f(10) = 0 + c \times 0{,}02$

$f(11) = 0 + c \text{ x } (-0{,}03)$

5- Căn cứ vào MTĐC **S*** và vectơ tải trong **f*** đã được biến đổi, ta giải hệ phương trình để được các giá trị chuyển vị.

$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}) =$

(0 0 0 -0,028m 0,008m -0,026rad -0,028m 0,029m -0,028rad

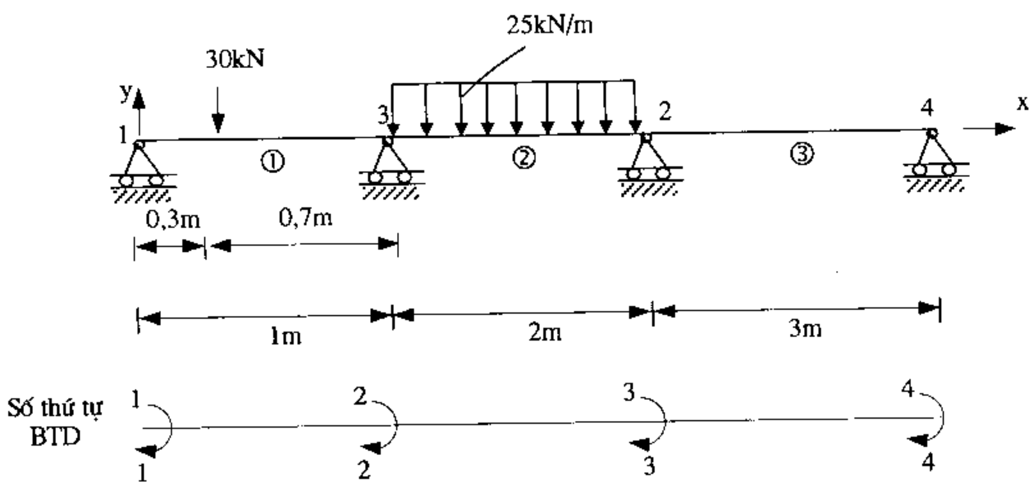
0,02m -0,03m -0,022rad)

6- Căn cứ vào (8,24); (8, 50), (8,54), tính nội lực cho mỗi phần tử của khung. Kết quả ghi trong bảng (8.4).

Nội lực / Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-694,269	416,118	-154,076	124,076
2	-416,118	248,151	-654,269	674,269
3	-248,151	0	124,076	-124,076

§8.3. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG (CRT 10)

Lấy thí dụ trên hình (8.19).



Hình 8.19

1- Nhập số liệu

Số thanh = 3; Số BTD có chuyển vị = 4;

Có 3 loại thanh cần thống kê:

a) Thanh chịu tải trong phân bố đều

b) Thanh chịu tải trọng tập trung

c) Thanh không chịu tải trọng

Trong thí dụ trên:

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều = 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung = 1

Số thanh không chịu tải trọng = 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều = 2

Cường độ tải trọng tương ứng: -25kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng tương ứng: -30kN
- Vị trí tải trọng tương ứng: 0,3m; 0,7m

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng: 3

Ở trên, quy ước dấu của tải trọng như sau:

- Dương nếu cùng chiều với trục tọa độ y
- Âm trong trường hợp ngược lại

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.5)

Bảng 8.5

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	Số TT BTD d_1	Số TT BTD d_2
1	1m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	1	2
2	2m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	2	3
3	3m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	3	4

2- Căn cứ vào các số liệu nhập vào, tính các ma trận độ cứng riêng theo (8.23) (ở đây, chỉ xét đến mômen, không xét đến lực cắt).

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Lập vectơ tải trọng

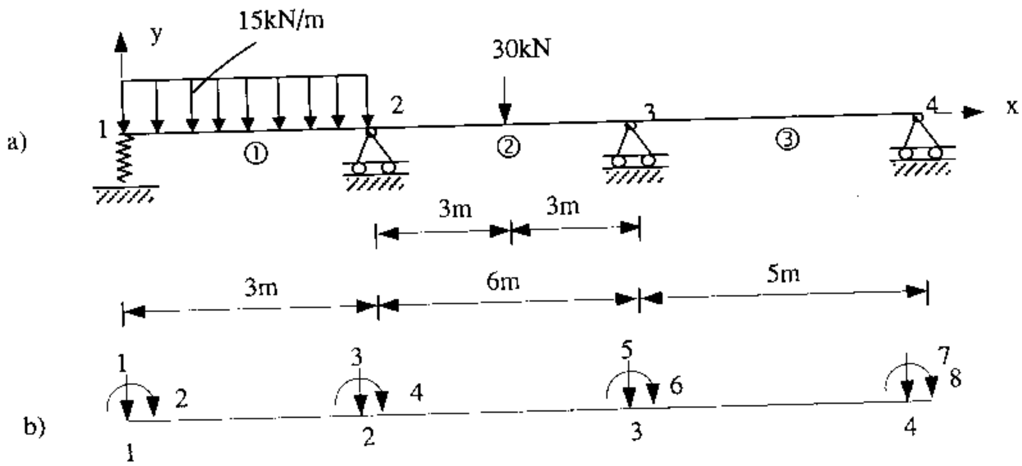
5- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

6- Tính mômen theo (8.30)

7- Tính lực cắt theo giá trị mômen vừa tính trên.

§8.4. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 11)

Lấy thí dụ trên hình (8.20)



Hình 8.20

1- Nhập các số liệu:

Mỗi nút có 2 BTD. Số thứ tự BTD biểu thị như sau:

Tại nút i: - Lực thẳng đứng: 2i - 1

- Mômen: 2i (xem hình (8.20b)

Số thanh: 3

Số bậc tự do có chuyển vị: 5

Số thứ tự BTD có chuyển vị: 1, 2, 4, 6, 8 (hình 8.20b)

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 5, 7

Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 3.20a)

Hệ số độ cứng tương ứng: 10×10^4 kN/m

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Cường độ tải trọng: -50 kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

- Tải trọng: -30kN
- Vị trí tải trọng tập trung: 3, 3 (hình 8.20a)

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng : 3

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.6)

Bảng 8.6

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	d_1	d_2	d_3	d_4
1	3m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	1	2	3	4
2	6m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	3	4	5	6
3	5m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	5	6	7	8

2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể

Cộng vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể số C khá lớn.

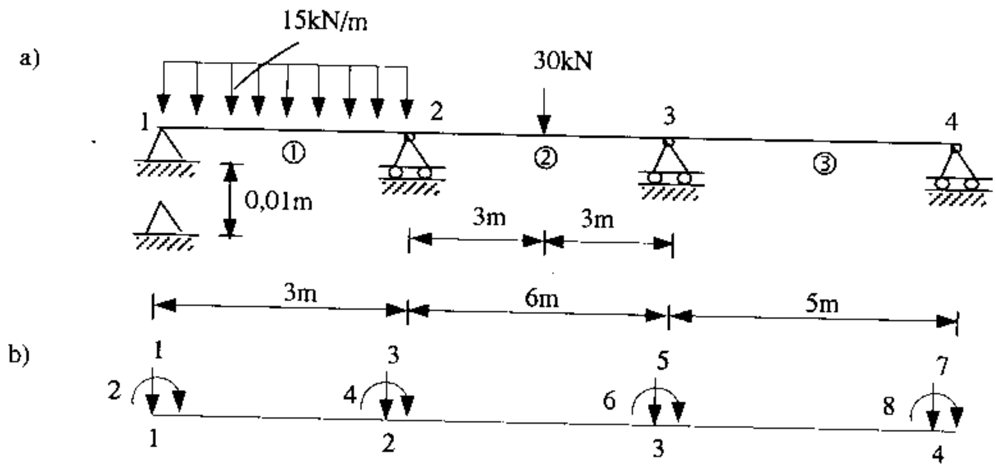
5- Lập vectơ tải trọng

6- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

7- Tính nội lực trung dầm liên tục theo (8.30)

§8.5. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH LÒ XO (CTR 12)

Lấy thí dụ trên hình (8.21).



Hình 8.21

1- Nhập các số liệu

Số thứ tự các BTD thống kê như trong chương trình CTR 11.

Số thanh: 3

Tổng số BTD: 8

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Cường độ tải trọng: -15 kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

- Tải trọng: -30kN
- Vị trí tải trọng tập trung: 3,3 (hình 8.21)

Số BTD có chuyển vị cho trước: 4

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3, 5, 7

Chuyển vị cho trước tương ứng: 0,01; 0; 0; 0

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.7)

Bảng 8.7

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	d_1	d_2	d_3	d_4
1	3m	21×10^7	120×10^{-6}	1	2	3	4
2	6m	21×10^7	120×10^{-6}	3	4	5	6
3	5m	21×10^7	120×10^{-6}	5	6	7	8

2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Gọi chương trình con để tính giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể. Chọn giá trị C.

5- Biến đổi MTĐC tổng thể bằng cách thêm số C vào mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể.

6- Lập vectơ tải trọng. Biến đổi vectơ tải trọng bằng cách thêm vào giá trị (C x chuyển vị tương ứng) cho mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước.

7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình.

8- Tính nội lực theo (8.30).

§8.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẲNG TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG HOẶC GỐI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 14)

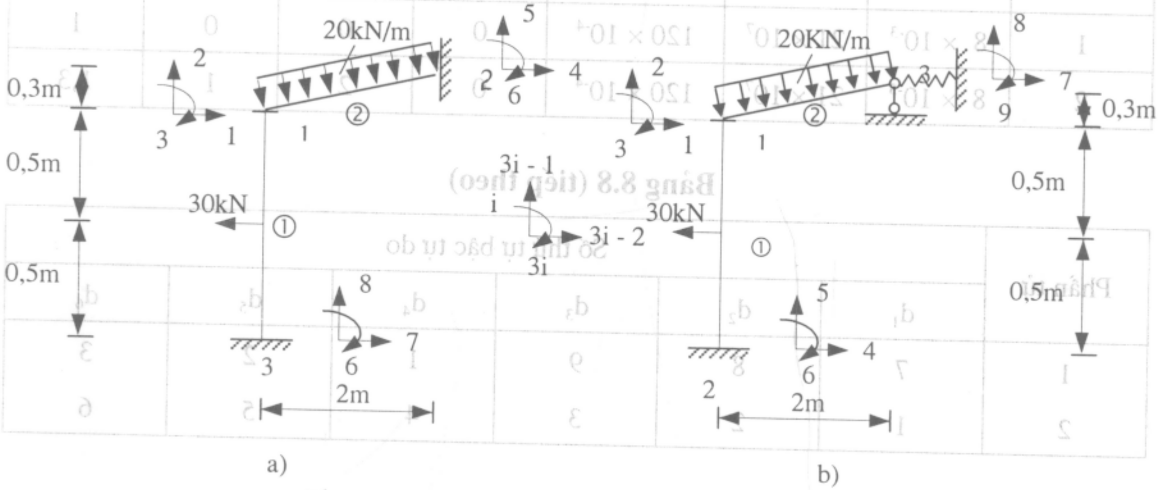
Lấy thí dụ trên hình (8.22)

1- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 3 (hình 8.23a)

Số BTD có chuyển vị: 4 nếu có gối tựa đàn hồi (hình 3.23b)



Hình 8.22

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6 (hình 3.22a)

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 (hình 3.22a)

Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 8.22b)

- Số BTD triệt tiêu : 4, 5, 6, 8 (hình 3.22b)
- Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi : 7 (hình 3.22b)
- Hệ số độ cứng tương ứng: 10×10^4 kN/m

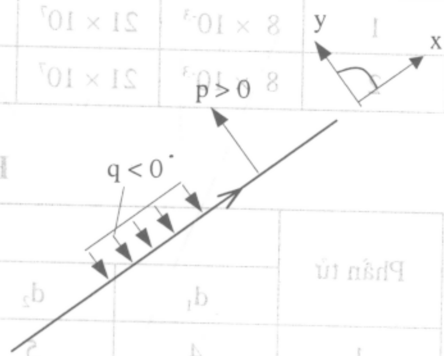
Số thanh chịu tải trọng phân bố: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 0

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2

Cường độ tải trọng: -20 kN/m.



Hình 8.23

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng: 30kN
- Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m; 0,5m (hình 3.22).

Quy ước về dấu của tải trọng (xem hình 8.22) như sau: Từ chiều dương của trục thanh x quay một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ; tải trọng là dương nếu cùng chiều với trục y, là âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng (8.8) và (8.9).

Bảng 8.8

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ x_1	Tọa độ x_2	Tọa độ y_1	Tọa độ y_2
1	8×10^{-3}	21×10^7	120×10^{-4}	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	21×10^7	120×10^{-4}	0	2	1	1,3

Bảng 8.8 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

Bảng 8.9 (trường hợp có gối tựa đàn hồi)

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ (m)			
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-7}	0	2	1	1,3

Bảng 8.9 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	4	5	6	1	2	3
2	1	2	3	7	8	9

2- Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.53a)

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Nếu có gối tựa đàn hồi, biến đổi MTĐC tổng thể như trong ví dụ (8.5)

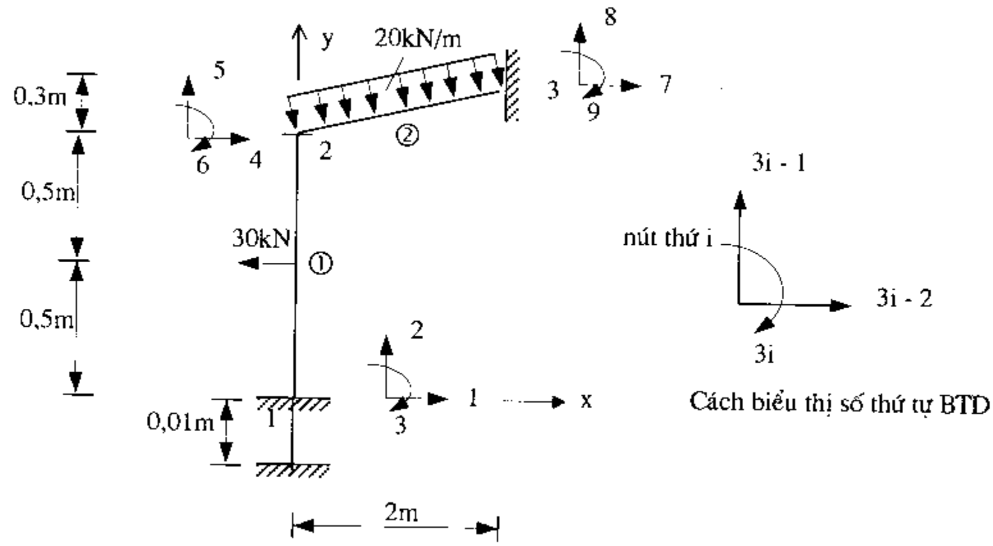
5- Lập vectơ tải trọng

6- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình

7- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54)

§8.7. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẲNG TRÊN GỐI TỰA LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH LÒ XO (CTR 15)

Lấy thí dụ trên hình (8.24)



Hình 8.24

I- Nhập số liệu

Số thanh: 2.

Tổng số BTD: 9.

Số BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Chuyển vị tương ứng: 0; -0,01; 0; 0; 0; 0.

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1.

Số thanh chịu tải tập trung: 1.

Số thanh không chịu tải trọng: 0.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2.

Cường độ tải trọng: -20kN/m.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1.

Tải trọng: 30 kN.

Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m, 0,5m.

Quy ước dấu tải trọng như trong CTR 14.

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.10).

Bảng 8.10

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ (m)			
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	8×10^{-3}	$21x10^7$	$2x10^{-4}$	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	$21x10^7$	$2x10^{-7}$	0	2	1	1,3

Bảng 8.10 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9

2- Lập các MTĐC riêng theo (8.53a)

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể như đã làm trong ví dụ (8.3)

5- Lập vectơ tải trọng

6- Biến đổi vectơ tải trọng như đã làm trong ví dụ (8.3)

7- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã được biến đổi, gọi chương trình con để giải hệ phương trình

8- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54).