

Chương 9

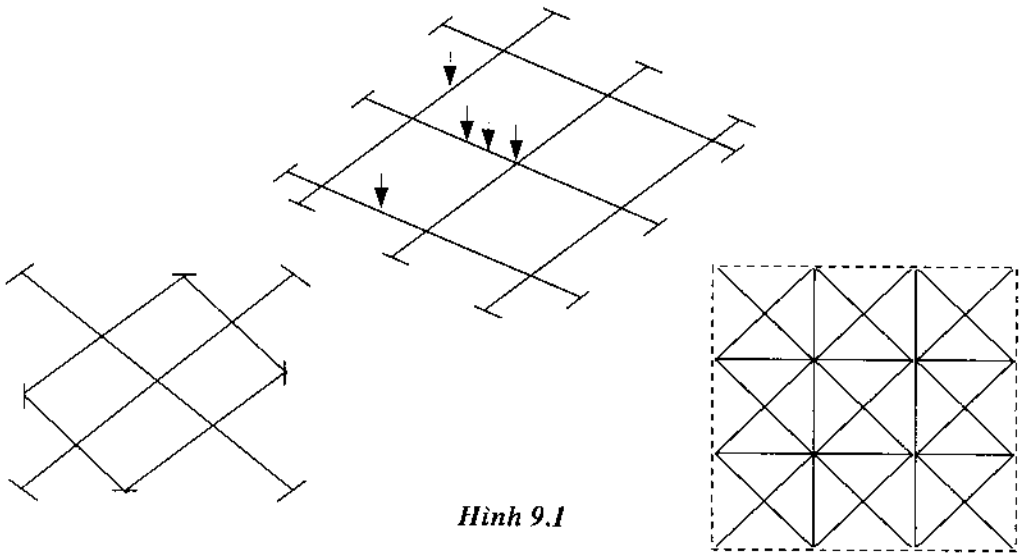
HỆ DẦM GIAO NHAU

Hệ dầm giao nhau là hệ trong đó các dầm trực giao hoặc không trực giao cùng nằm trong một mặt phẳng, còn tải trọng thì vuông góc với mặt phẳng đó (hình 9.1). Khác với hệ phẳng có nút cứng, sự làm việc của hệ dầm giao nhau có tính chất không gian.

Hệ dầm giao nhau thường thấy trong sàn nhà, mái nhà, sàn cầu.

Mỗi phần tử của hệ dầm giao nhau có các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và mômen xoắn. Bậc tự do gồm có góc xoay, góc xoắn và chuyển vị trên phương vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Cách tính hệ dầm giao nhau tương tự như cách tính hệ khung. Trước hết, ta thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của mỗi phần tử, sau đó xuất phát từ điều kiện cân bằng của từng nút để thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút.



Hình 9.1

§9.1 HỆ THỨC MA TRẬN GIỮA VECTƠ NGOẠI LỰC VÀ VECTƠ CHUYỂN VỊ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA PHẦN TỬ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG

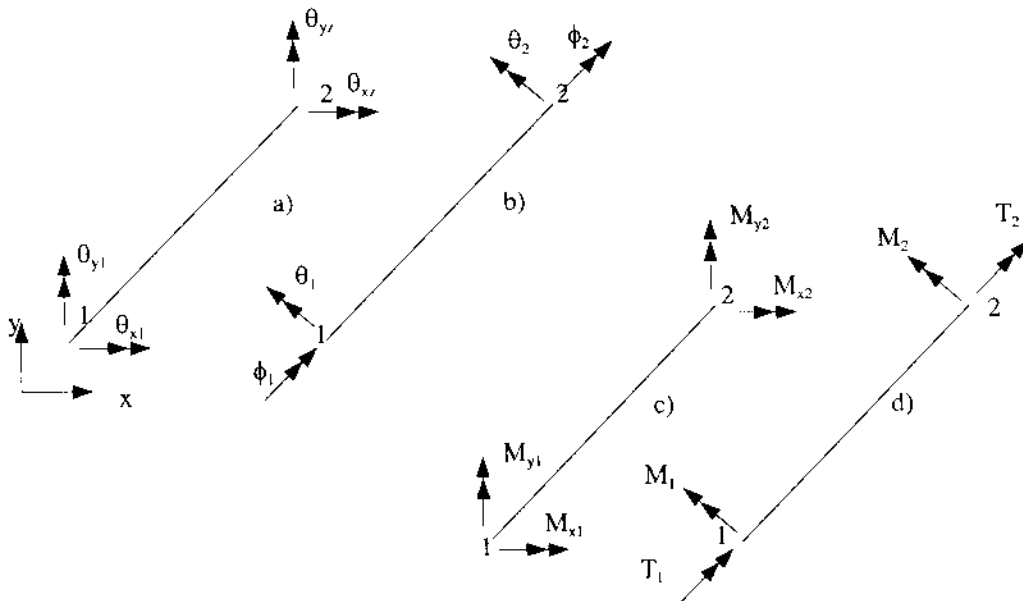
Giả sử một phần tử bất kỳ có 2 đầu 1 và 2 liên kết với 2 nút nào đó của hệ (hình 9.2). Ta chọn hệ tọa độ chung X, Y, Z trong đó các trục X và Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Trong hệ tọa độ riêng (hình 9.2b và 9.2d), ta có các thành phần nội lực.

M_1, M_2 - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2; T_1, T_2 - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 trên phương của trục Z (không biểu thị trên hình vẽ). Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_1, θ_2 - góc xoay tại đầu 1 và đầu 2; ψ_1, ψ_2 - góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 - thành phần chuyển vị tại đầu 1 và đầu 2 trên phương trục Z (không biểu thị trên hình vẽ).

Trong hệ tọa độ chung (hình 9.2a và 9.2c) ta có các thành phần nội lực:

M_{x1}, M_{x2} - mômen quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; M_{y1}, M_{y2} - mômen quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} như trên. Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_{x1}, θ_{x2} - góc xoay quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; θ_{y1}, θ_{y2} - góc xoay quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 như trên.



Hình 9.2

Đối với mômen xoắn, ta có các hệ thức:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= GJ(\psi_2 - \psi_1) \\ T_1 &= -T_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Trong đó: G - môđun trượt;

J - mômen quán tính xoắn.

Bây giờ ta tìm cách đưa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị về tọa độ chung X, Y, Z. Từ hình (9.2), ta có các công thức:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \theta_{x1} \cdot l + \theta_{y1} \cdot m & \psi_2 &= \theta_{x2} \cdot l + \theta_{y2} \cdot m \\ \theta_1 &= -\theta_{x1} \cdot m + \theta_{y1} \cdot l & \theta_2 &= -\theta_{x2} \cdot m + \theta_{y2} \cdot l \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Trong đó: l, m - cosin định hướng của phân tử 1 - 2.

Căn cứ vào công thức (9.2), ta có hệ thức ma trận giữa các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận xoay R có dạng:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 1 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Căn cứ vào (8.33) (chương 8) và công thức (9.1), ta có hệ thức ma trận giữa nội lực và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ T_1 \\ M_1 \\ F_{z2} \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Vậy ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ cục bộ có dạng:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Theo (1.39) (chương một), ta có ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ chung như sau:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{R} \quad (9.6)$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & -C_1 & C_2 & C_3 \\ & C_4 & C_5 & -C_2 & C_6 & C_7 \\ & & C_8 & -C_3 & C_7 & C_9 \\ & & & C_1 & -C_2 & -C_3 \\ \text{Đối xứng} & & & & C_4 & C_5 \\ & & & & & C_8 \end{bmatrix} \quad (9.6a)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} C_1 &= 12EI/L^3 & C_2 &= \frac{6EI}{L^2} \cdot m \\ C_3 &= \frac{-6EI}{L^2} \cdot l & C_4 &= (4m^2 + \alpha l^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_5 &= (4 - \alpha) \cdot l \cdot m \cdot \frac{EI}{L} & C_6 &= (2m^2 - \alpha l^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_7 &= -(2 + \alpha) \cdot l \cdot m \cdot \frac{EI}{L} & C_8 &= (4l^2 + \alpha m^2) \cdot \frac{EI}{L} \\ C_9 &= (2l^2 - \alpha m^2) \cdot \frac{EI}{L} & \alpha &= \frac{GJ}{EI} \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta có hệ thức ma trận giữa vectơ ngoại lực và vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung ứng với một phần tử như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Các ký hiệu đã được giải thích trong phần đầu.

Phương trình ma trận (9.7) có thể viết dưới dạng:

$$F_e = K_e \cdot Q_e \quad (9.8)$$

Trong đó: F_e - vector ngoại lực của phần tử e;

K_e - ma trận độ cứng tổng thể của phần tử e;

Q_e - vector chuyển vị của phần tử e trong hệ tọa độ tổng thể.

Sau khi ghép các vector F_e và ma trận K_e như đã làm trong các chương trước, ta được hệ phương trình cân bằng trong hệ tọa độ chung:

$$F = K \cdot Q \quad (9.9)$$

Trong đó: F - vector ngoại lực ứng với toàn hệ;

K - ma trận độ cứng tổng thể ứng với toàn hệ;

Q - vector chuyển vị ứng với toàn hệ.

Giải hệ phương trình (9.9), ta được giá trị các thành phần chuyển vị của toàn hệ trong hệ tọa độ chung.

Tính các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng theo công thức sau:

$$q = R \cdot Q \quad (9.10)$$

Cuối cùng, tính nội lực của mỗi phần tử theo hệ thức ma trận (9.4).

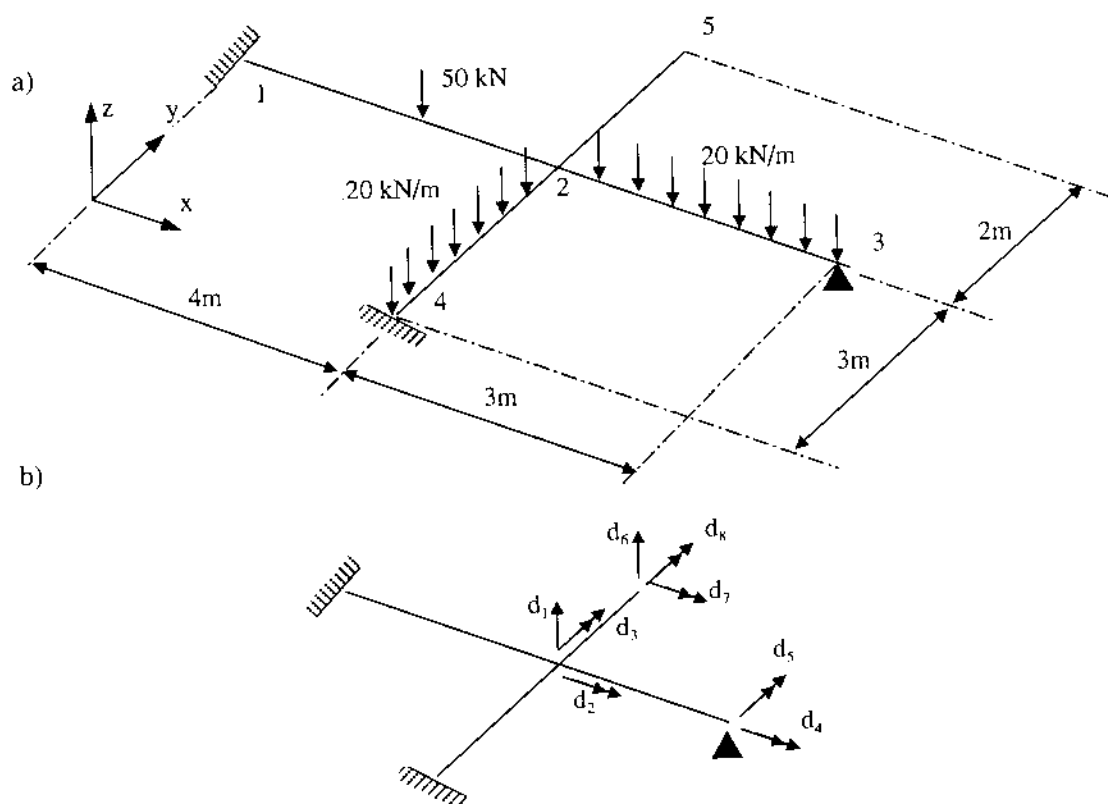
§9.2. TRÌNH TỰ TÍNH TOÁN HỆ DẦM GIAO NHAU

Lấy thí dụ hệ trên hình (9.3). Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:

1. Chọn hệ trục tọa độ X, Y, Z trong đó các trục X, Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm. Thống kê tọa độ của các nút như trong bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	Y	Nút	x	Y
1	0	3	4	4	0
2	4	3	5	4	5
3	7	3			



Hình 9.3

2- Xác định bậc tự do của hệ. Như trên đã trình bày, mỗi nút có 3 bậc tự do (2 góc xoay và 1 thành phần chuyển vị trên phương trục Z). Vậy số bậc tự do.

$$n = 3 \times \text{số nút} - \text{số bậc tự do triệt tiêu ở các gối tựa}$$

Đối với hệ trên hình (9.3a): $n = 3.5 - (6 + 1) = 8$. Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.3b) và thống kê trong bảng sau:

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	d_4	d_5
4	0	0	0
5	d_6	d_7	d_8

3- Xác định vị trí các đầu 1 và 2 của các phần tử. Dùng số thứ tự của các nút để biểu thị vị trí của các đầu 1 và 2 đồng thời tính các cosin định hướng của các phần tử. Đối với các phần tử trên hình (9.3), ta thống kê các số liệu trong bảng sau:

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	1	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	4	2	0	1
4	2	5	0	1

4- Theo (9.6a), thành lập ma trận độ cứng của các phần tử.

5- Khi các phần tử chịu tác dụng trực tiếp của các tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố, cần tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do. Chẳng hạn đối với hệ trên hình (9.3), ta có trạng thái ngàm như trên hình (9.4a). Cần chú ý trong các bảng tính sẵn, người ta chỉ cho biểu thức của các nội lực ở trạng thái ngàm trong hệ tọa độ riêng. Để đưa các nội lực này về hệ tọa độ chung, ta áp dụng các công thức:

$$M_{x1} = T_1 l - M_1 \cdot m;$$

$$M_{y1} = T_1 m + M_1 \cdot l;$$

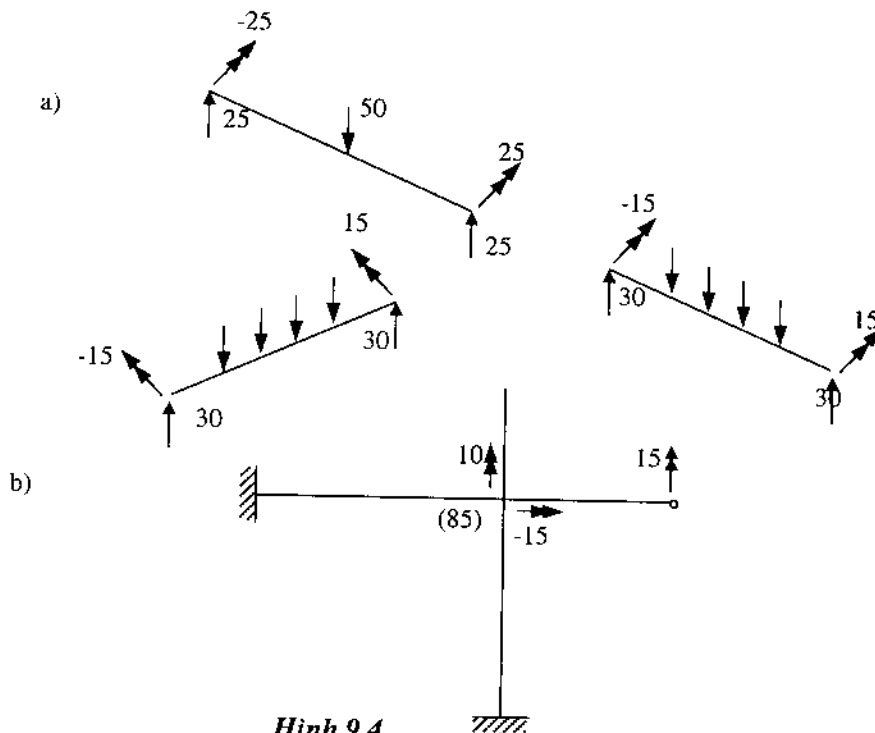
$$M_{x2} = T_2 l - M_2 \cdot m;$$

$$M_{y2} = T_2 m + M_2 \cdot l;$$

Trong đó: T_1, T_2 - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2;

M_1, M_2 - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2.

Vì các nút bị chốt nên sản sinh ra phản lực tại các nút như trên hình (9.4b), số nằm trong dấu ngoặc là phản lực trên phương trục Z.



Hình 9.4

Cần tạo ra trạng thái tự do bằng cách giữ nguyên giá trị tuyệt đối của các phản lực trên hình (9.4b) nhưng đổi chiều của chúng. Như vậy, từ hình (9.4b), ta suy ra các thành phần tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái tự do như sau:

$$\begin{aligned} F_1 &= -(85) = -85; & F_2 &= -(-15) = 15; & F_3 &= -(10) = -10; \\ F_4 &= 0 & F_5 &= -(15) = -15; & F_6 &= F_7 = F_8 = 0 \end{aligned}$$

6- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên, ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}}_F = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_Q$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị của vectơ chuyển vị ($d_1, d_2, \dots, d_n$).

7- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. áp dụng các công thức:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{L} \left[(4\theta_1 + 2\theta_2) - \frac{6}{L}(W_2 - W_1) \right] \\ M_2 &= \frac{EI}{L} \left[(2\theta_1 + 4\theta_2) - \frac{6}{L}(W_2 - W_1) \right] \\ T_1 &= -T_2 = \frac{GJ}{L} (\Phi_2 - \Phi_1) \end{aligned} \quad (9.11)$$

Trong đó: $\theta_1 = -\theta_{x1} \cdot m + \theta_{y1} \cdot l$; $\theta_2 = -\theta_{x2} \cdot m + \theta_{y2} \cdot l$;

$\psi_1 = \theta_{x1} \cdot l + \theta_{y1} \cdot m$; $\psi_2 = \theta_{x2} \cdot l + \theta_{y2} \cdot m$;

8- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do.

Thí dụ: 9.1:

Cho một hệ như trên hình (9.5)

$$E = 14 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$G = 6,36 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$$

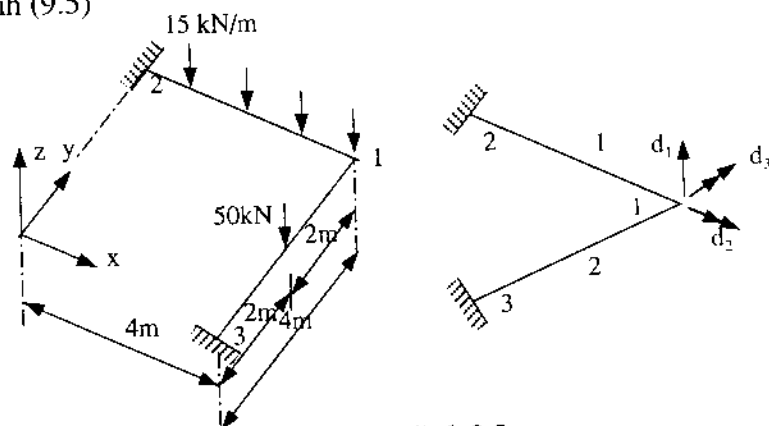
$$I = 2600 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J = 1821 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$L = 4\text{m}$$

$$A = 125000 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Yêu cầu tính nội lực



Hình 9.5

Giải:

1- Xác định bậc tự do của hệ. Số bậc tự do $n = 3.3 - 6 = 3$. Các số liệu ban đầu kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút			Bậc tự do				Vị trí các đầu 1 và 2				
Nút	x	y	Nút	W	θ_x	θ_y	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	0	4	1	0	0	0	1	1	2	1	0
2	4	4	2	d_1	d_2	d_3	2	3	1	0	1
3	4	0	3	0	0	0					

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$k_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & 0 & 13,65 \\ 0 & 2,895 & 0 \\ 13,65 & 0 & 36,40 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$k_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & -13,65 & 0 \\ -13,65 & 36,40 & 0 \\ 0 & 0 & 2,895 \end{bmatrix}$$

3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể K:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{c} 6,83 \\ + \\ 6,83 \\ \hline 13,66 \end{array} & \begin{array}{c} -13,65 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 13,65 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 2,895 \\ + \\ 36,40 \\ \hline 39,295 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \text{Đối xứng} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 2,895 \\ + \\ 36,40 \\ \hline 39,295 \end{array} \end{bmatrix}$$

4- Tạo ra trạng thái ngàm (hình 9.6) và trạng thái tự do. Các thành phần tải trọng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (hình 9.6):

$$F_1 = -(30 + 25) = -55$$

$$F_2 = -(25) = -25$$

$$F_3 = -(20) = -20$$

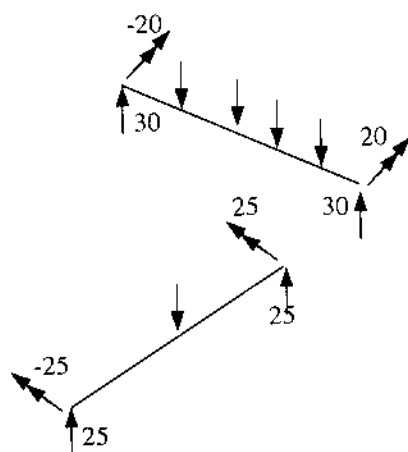
Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-20	20
2	-25	25

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$



Hình 9.6

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(-9,4482, -2,6458, 2,7731)m$$

6- Xác định nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

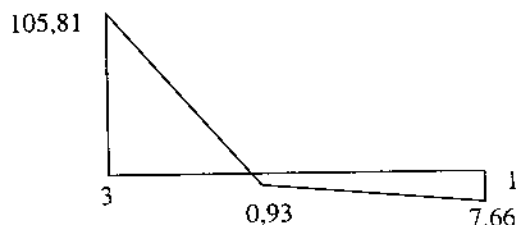
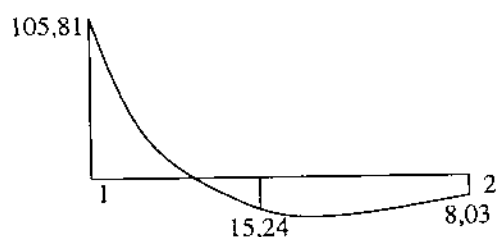
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-78,49	-28,03	-7,66
2	-80,81	-32,66	8,03

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	$-20 - 78,49 = -98,49$	$20 - 28,03 = -8,03$	-7,66
2	$-25 - 80,81 = -105,81$	$25 - 32,66 = -7,66$	-8,03

8- Vẽ biểu đồ mômen (hình 9.7)

Cần chú ý là tại nút 2, các mômen không cân bằng nhau vì 2 phần tử trực giao với nhau.



Hình 9.7

Ví dụ 9.2: Cho một hệ như trên hình (9.8). $E = 14.10^6 \text{ kN/m}^2$, $G = 6,36.10^6 \text{ kN/m}^2$. Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng sau:

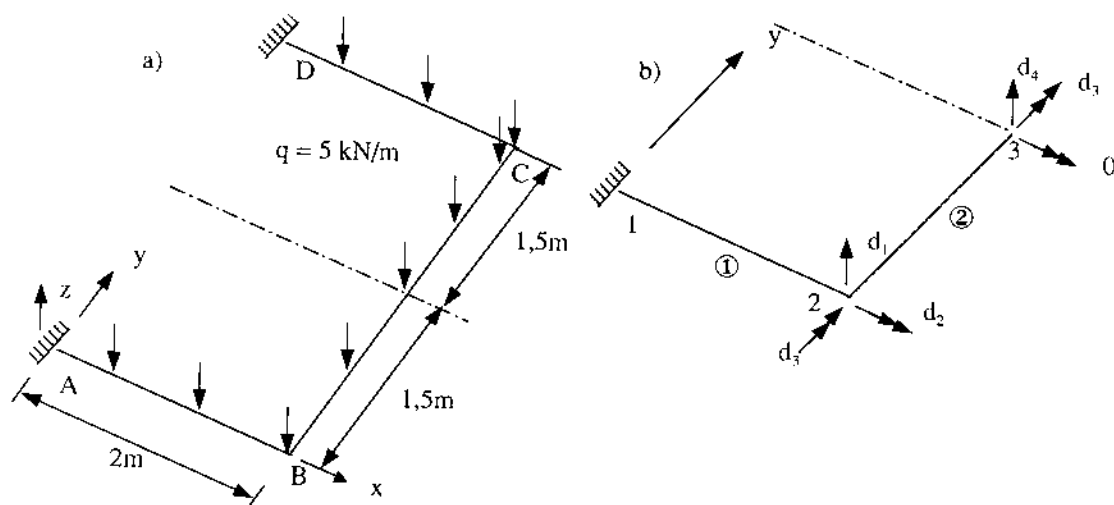
Đặc trưng hình học (đơn vị bằng mét)

Phần tử	L	$I \times 10^{-6}$	$J \times 10^{-6}$	$A \times 10^{-6}$
A - B	2	66,67	46,67	20000
D - C	2	66,67	46,67	20000
B - C	3	27,31	19,12	12800

Yêu cầu tính nội lực.

Giải:

Vì hệ đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (9.8b).



Hình 9.8

1- Xác định bậc tự do. Vì nút 3 nằm trên trục đối xứng nên góc xoay θ_x quanh trục triệt tiêu. Mặt khác, góc xoắn của dầm BC tại điểm B và điểm C bằng nhau nên góc xoay nút 2 bằng góc xoắn tại nút 3. Vậy số bậc tự do $n = 3 + 1 = 4$. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	1.5

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	d_4	0	d_5

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	0	1

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,40 & 0 & 1,40 \\ 0 & 0,149 & 0 \\ 1,40 & 0 & 1,87 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,36 & 1,02 & 0 & -1,36 & 0 \\ 1,02 & 1,02 & 0 & -1,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,08 & 0 & -0,08 \\ -1,36 & -1,02 & 0 & 1,36 & 0 \\ 0 & 0 & -0,08 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}$$

3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 1,40 & & & & & & & & \\ & 1,02 & & & & & & & \\ & & 1,40 & & & & & & \\ & & & -1,36 & & & & & \\ & \frac{1,36}{2,76} & & & & & & & \\ & & & & 0,15 + 0,08 & & 0 & & -1,02 \\ & & & & 1,02 + 0,08 & & & & \\ & & & & & 0,08 & & & \\ & & & & & -0,08 & & & \\ & & & & & & 1,17 & & \\ & & & & & & & 1,87 & 0 \\ & & & & & & & & 1,36 \end{bmatrix}$$

Đối xứng

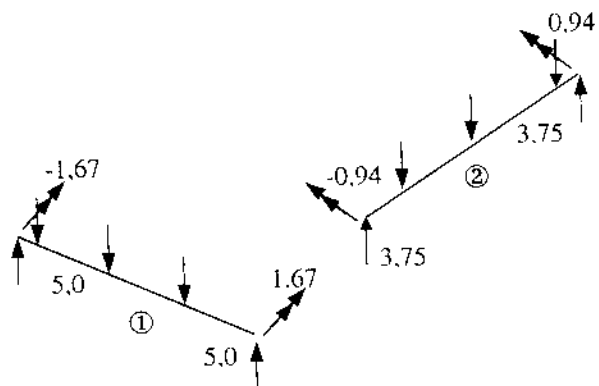
4- Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (9.9). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-1,67	1,67
2	-0,94	0,94

Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau:

$$F_1 = -(5 + 3,75) = -8,75; F_2 = -(-0,97) = 0,94$$



Hình 9.9

$$F_3 = -(1,667) = -1,667; F_4 = -(3,75) = -3,75$$

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên. ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,75 \\ 0,94 \\ -1,67 \\ -3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(-32,14; -9,30; 23,21; -41,87) \text{ m}$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

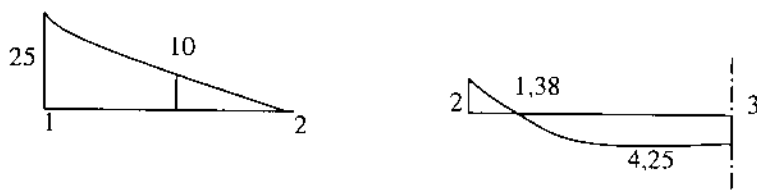
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-23,33	-1,67	-1,38
2	-0,44	-5,18	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	$-1,67 - 23,33 = -25,0$	$1,67 - 1,67 = 0$	-1,38
2	$-0,94 - 0,44 = -1,38$	$0,94 - 5,18 = -4,24$	0

8- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.10)



Hình 9.10

Ví dụ 9.3: Cho một hệ như trên hình (9.11).

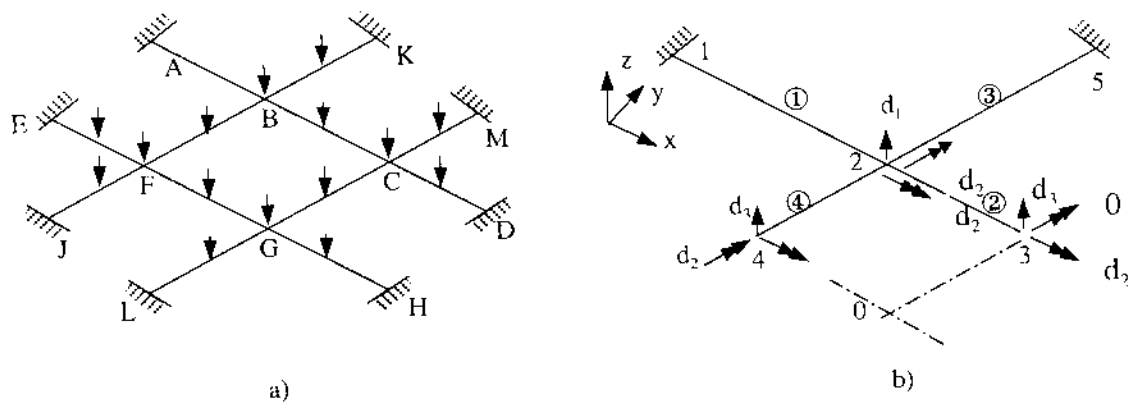
$$E = 14.10^6 \text{ kN/m}^2; G = 6,36.10^6 \text{ kN/m}^2; I = 41666,67.10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J = 29166,67.10^{-6} \text{ m}^4; A = 0,5 \text{ m}^2; L = 4 \text{ m}$$

Tải trọng phân bố đều $q = 2200 \text{ kN/m}$.

Giải:

Vì kết cấu đối xứng và tải trọng đối xứng đối với 2 trục X và Y, ta đưa sơ đồ tính về một phần tư hệ như trên hình (9.11b).



Hình 9.11

1- Xác định bậc tự do. Vì các thành phần chuyển vị trên phương trục Z tại các điểm B, C, F, G bằng nhau nên các thành phần chuyển vị trên tại 2 nút 3 và 4 cũng bằng nhau (hình 9.11b). Các dầm BC và FG xoay như một vật thể tuyệt đối cứng (tức không chịu xoắn) nên các góc xoay θ_x tại 2 nút 2 và 3 bằng nhau. Phân tích một cách tương tự, góc xoay θ_y tại 2 nút 2 và 4 cũng bằng nhau. Vì các nút 3 và 4 nằm trên các trục đối xứng nên $\theta_x = 0$ tại nút 4, $\theta_y = 0$ tại nút 3. Cũng vì tính chất đối xứng, $\theta_x = \theta_y$ tại nút 2. Do sự phân tích trên, số bậc tự do $n = 3$. Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.11b). Các số liệu ban đầu thống kê kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút			Bậc tự do				Vị trí các đầu 1, đầu 2				
Nút	x	y	Nút	w	θ_x	θ_y	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	0	2	1	0	0	0	1	1	2	1	0
2	4	2	2	d_1	d_2	d_2	2	2	3	1	0
3	6	2	3	d_3	d_2	0	3	2	5	0	1
4	4	0	4	d_3	0	d_2	4	4	2	0	1
5	4	6	5	0	0	0					

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 0 & 21,88 \\ 0 & 4,64 & 0 \\ 21,88 & 0 & 58,33 \end{bmatrix}$$

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-266,67	266,67
2	-66,67	66,67
3	-266,67	266,67
4	-66,67	66,67

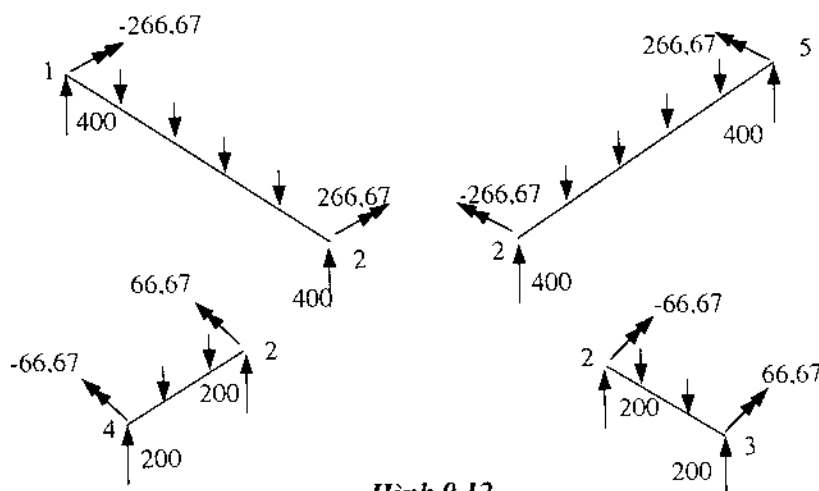
Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (xem hình 9.12):

$$F_1 = -(400 + 200 + 200 + 400) = -1200$$

$$F_2 = -(266,67 - 66,67 - 66,67 + 266,67) = -400$$

$$F_3 = -(200 + 200) = 400$$

Cần chú ý rằng bậc tự do d_2 hoặc d_3 có thể có phương khác nhau hoặc vị trí khác nhau từ nút này sang nút khác (xem hình 9.11b) nhưng khi tính F_2 hoặc F_3 cần phải lấy tổng của các phản lực tương ứng.



Hình 9.12

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận

$$\begin{bmatrix} -1200 \\ -400 \\ -400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(13,93; 3,307; -17,462)\text{m}$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

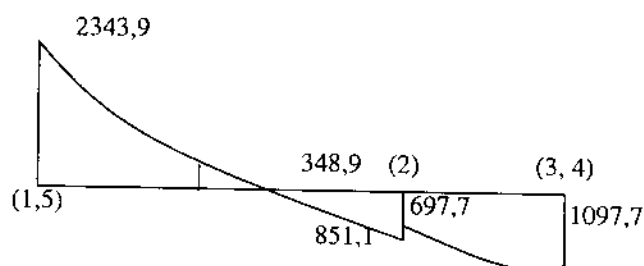
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-2082,19	-1117,81	153,42
2	764,38	-1164,38	0
3	1117,81	2082,19	-153,42
4	1164,38	-764,38	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

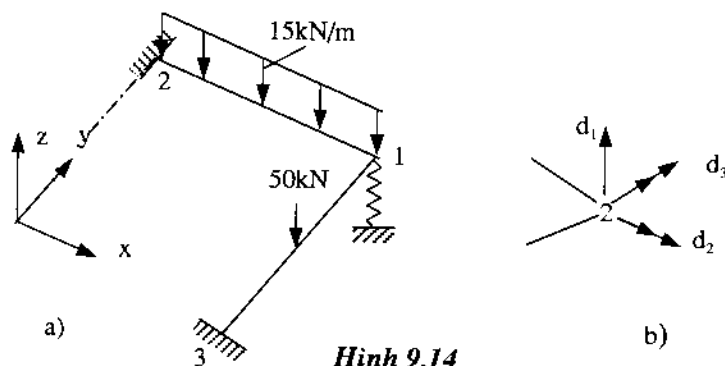
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-2348,56	-851,14	153,42
2	697,71	-1097,71	0
3	851,14	2348,86	-153,42
4	1097,71	-697,71	0

5- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.13)



Hình 9.13

Ví dụ 9.4: Đầu đề giống ví dụ (9.1) nhưng thêm gối tựa đàn hồi vào nút 1 (hình 9.14). Hệ số độ cứng: $40 \cdot 10^3$ kN/m. Tính nội lực.



Hình 9.14

Giải:

Trong ví dụ (9.1), ta đã suy ra phương trình cân bằng:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 13,65 & -13,65 & 13,65 \\ & 39,30 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & 39,30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Vì gối tựa đàn hồi men theo BTD có số thứ tự 1 (hình 9.14b), ta phải cộng thêm vào giá trị hệ số độ cứng (40.10^3) vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng kể **K**:

$$K(1, 1) = (13,65 + 40).10^3$$

Sau khi đã biến đổi ma trận **K**, giải hệ phương trình cân bằng trên. Ta được:

$$Q = [d_1 \ d_2 \ d_3]' = 10^{-3}[-0,891 \ 0,327 \ -0,199]'m$$

Căn cứ vào (9.10) và (9.4), ta được các thành phần nội lực như sau:

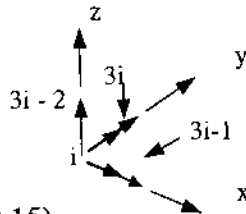
Phần tử	Mômen uốn (kN - m)		Môn xoắn (kN - m)	
1	-35,70	0,58	-0,93	0,93
2	-43,11	0,95	0,58	-0,58

§9.3. THUẬT TOÁN TÍNH HỆ DẦM TRỤC GIAO (CTR 16)

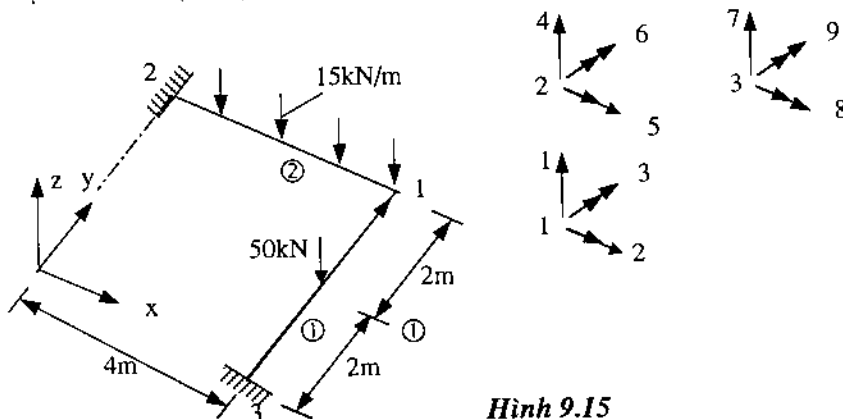
Đối với hệ dầm trục giao, nên chọn hệ tọa độ có các trục X, Y song song với các trục dầm. Chiều của các trục dầm nên chọn sao cho các cosin định hướng đều dương.

Số thứ tự các BTD nên chọn như sau:

Tại nút i



Lấy thí dụ trên hình (9.15)



Hình 9.15

1- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Số BTT có chuyển vị: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 hình (9.15)

Tổng số BTD: 9

Số BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Hệ số độ cứng tương ứng (nếu có)

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng : 0

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2

Cường độ tải trọng: -15kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Tải trọng: -50kN

Vị trí tải trọng tập trung: 2, 2

Dấu của tải trọng quy ước như sau: dương nếu cùng chiều với trục Z của hệ tọa độ chung, âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong bảng (9.1).

Bảng 9.1

Phần tử	Chiều dài (m)	Cosin định hướng		Diện tích (m ²)	Mômen quán tính x (m ⁴)	Mômen quán tính y (m ²)	Môđun đàn hồi kN/m ²	Môđun trượt kN/m ²
		l	m					
1	4	0	1	0,125	1821.10 ⁻⁶	36.10 ⁻⁶	14.10 ⁶	6,36.10 ⁶
2	4	1	0	0,125	1821.10 ⁻⁶	36.10 ⁻⁶	14.10 ⁶	6,36.10 ⁶

Bảng 9.1 (tiếp theo)

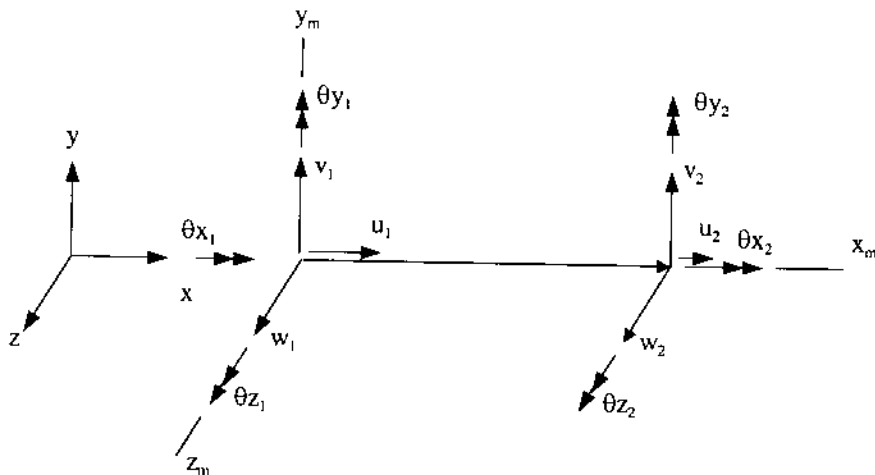
Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆
1	7	8	9	1	2	3
2	4	5	6	1	2	3

- 2- Xác định các ma trận độ cứng riêng theo (9.6a)
- 3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- 4- Biến đổi MTĐC tổng thể nếu có gối tựa đàn hồi (xem ví dụ (9.4))
- 5- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại cát nút
- 6- Ghép các vectơ tải trọng
- 7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình
- 8- Tính nội lực theo (9.10) và (9.4).

Chương 10

DẦM BA CHIỀU VÀ KHUNG KHÔNG GIAN

§10.1. DẦM BA CHIỀU TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỤC BỘ



Hình 10.1: Dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Dầm ba chiều trong hệ tọa độ cục bộ biểu thị trên hình (10.1). Gọi x_m, y_m, z_m là hệ tọa độ cục bộ. Trục x_m trùng với trục của dầm, các trục y_m, z_m nằm trong mặt cắt ngang của dầm. Dầm có 2 đầu 1 và 2 (trong hệ tọa độ cục bộ), chiều dương của trục x_m đi từ đầu 1 đến đầu 2. Dầm có tất cả 12 bậc tự do:

$u_1(q_1), u_2(q_7)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục x_m tại đầu 1 và đầu 2.

$v_1(q_2), v_2(q_8)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục y_m tại đầu 1 và đầu 2.

$w_1(q_3), w_2(q_9)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục z_m tại đầu 1 và đầu 2.

$\theta_{x_1}(q_4), \theta_{x_2}(q_{10})$ - các thành phần góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2.

$\theta_{y_1}(q_5), \theta_{y_2}(q_{11})$ - các thành phần góc xoay quanh trục y_m tại đầu 1 và đầu 2.

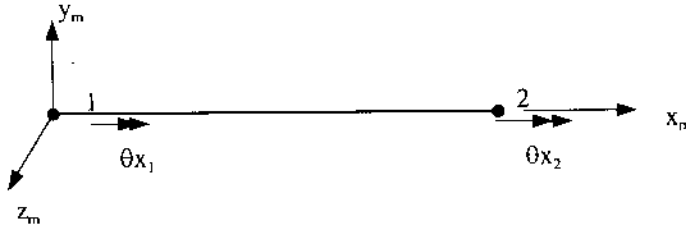
$\theta_{z_1}(q_6), \theta_{z_2}(q_{12})$ - các thành phần góc xoay quanh trục z_m tại đầu 1 và đầu 2.

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị vectơ chuyển vị của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ như sau:

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]^T \quad (10.1)$$

Trước hết, ta sẽ suy ra hệ số độ cứng do xoắn và sau đó, sẽ lợi dụng các hệ số độ cứng do uốn trong mặt phẳng để suy ra ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

10.1.1. Hệ số độ cứng do xoắn



Hình 10.2: Góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2

Xét dầm trên hình (10.2) trong đó θ_{x_1} và θ_{x_2} là các góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2. Góc xoắn biến thiên tuyến tính dọc theo chiều dài của dầm giống như chuyển vị dọc trục đã nghiên cứu trong các phần trước. Góc xoắn tại 1 điểm bất kỳ trên dầm có thể biểu thị bằng hàm nội suy tuyến tính:

$$\theta_x = L_1 \theta_{x_1} + L_2 \theta_{x_2} \quad (10.2)$$

Trong đó: L_1, L_2 là các tọa độ tự nhiên (xem chương hai).

Biến thiên góc xoắn trên đơn vị dài:

$$\alpha = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{1}{L} (\theta_{x_2} - \theta_{x_1}) \quad (10.3)$$

$$\text{Mômen xoắn có thể viết: } M_x = GI_x \alpha = GI_x \frac{1}{L} (\theta_{x_2} - \theta_{x_1}) \quad (10.4)$$

Xem $\theta_{x_2} - \theta_{x_1} / L$ như ε và M_x như σ (trong trường hợp biến dạng dọc trục), ta có:

$$D = G.I_x \quad (10.5)$$

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

Theo (2.79) (chương 2), ma trận độ cứng của dầm do xoắn có thể viết:

$$k_m = \int_0^L B' D B dl \quad (10.7)$$

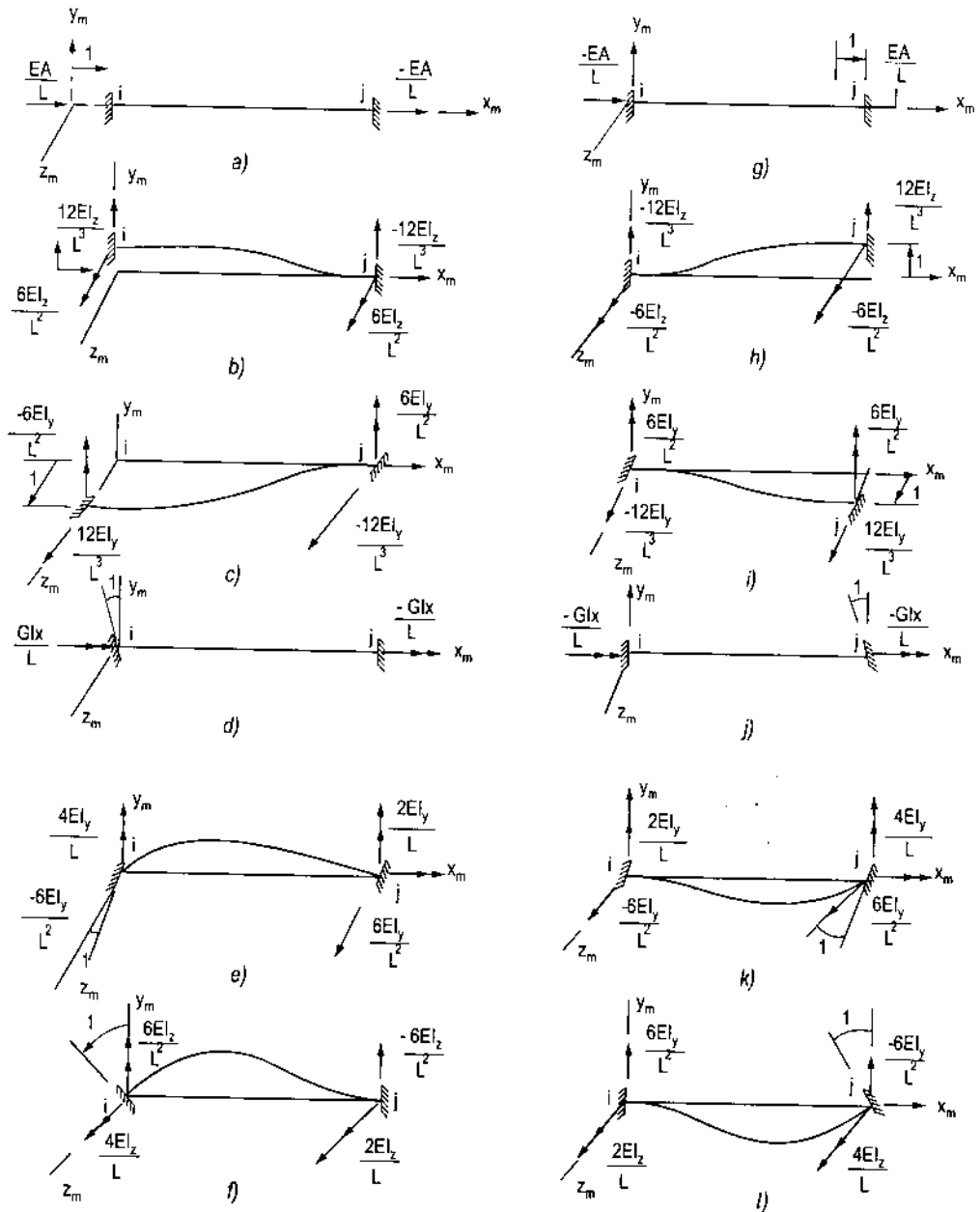
Thay (10.5), (10.6) vào (10.7), ta được:

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{GI_x}{L^2} \int_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dl \\ k_m &= \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.8)$$

10.1.2. Ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Giả sử dầm 3 chiều có 3 trục x_m, y_m, z_m lần lượt song song với 3 trục x, y, z trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.1). Các trục y_m và z_m cần chọn sao cho $x_m - y_m$ và $x_m - z_m$ là những mặt phẳng uốn chính.

Hình (10.3) trình bày công thức các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều, ứng với các chuyển vị bằng đơn vị men theo 12 bậc tự do ở các đầu i và j .



Hình 10.3: Các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều men theo 12 bậc tự do

Bậc tự do cục bộ

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Trên hình (10.3a) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương x_m tại nút i gây ra; trên hình (10.3b) là lực cắt và mômen do chuyển vị bằng đơn vị trên phương y_m tại nút i gây ra (dầm chịu uốn thông thường); trên hình (10.3c) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương z_m tại nút i gây ra (uốn trong mặt phẳng $x_m - z_m$); trên hình (10.3d) là mômen xoắn do góc xoắn bằng đơn vị tại nút i gây ra; trên hình (10.3e) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục z_m tại nút i gây ra (uốn trong mặt phẳng $x_m - z_m$).

Trên hình (10.3f) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục y_m tại nút i gây ra; trên hình (10.3g) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương x_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3h) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương y_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3i) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương z_m tại nút j gây ra (uốn trong mặt phẳng $x_m - z_m$); trên hình (10.3j) là mômen xoắn do góc xoắn quanh trục y_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3k) là mômen uốn và lực cắt do góc xoay bằng đơn vị quanh trục z_m tại nút j gây ra (uốn trong mặt phẳng $x_m - z_m$). Trên hình (10.3l) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục y_m tại nút j gây ra.

Các hệ số độ cứng trong hình (10.3) được sắp xếp theo số thứ tự các bậc tự do cục bộ trong bảng (10.9) để tạo thành ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

Giữa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị tương ứng trong hệ tọa độ riêng, ta có hệ thức ma trận:

$$\mathbf{NL} = \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_{1y} \\ Q_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_2 \\ Q_{2y} \\ Q_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \mathbf{k} \begin{bmatrix} u_1 = q_1 \\ v_1 = q_2 \\ w_1 = q_3 \\ \theta_{1x} = q_4 \\ \theta_{1y} = q_5 \\ \theta_{1z} = q_6 \\ u_2 = q_7 \\ v_2 = q_8 \\ w_2 = q_9 \\ \theta_{2x} = q_{10} \\ \theta_{2y} = q_{11} \\ \theta_{2z} = q_{12} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Trong đó: N_1 - lực dọc tại đầu 1;

N_2 - lực cắt tại đầu 2;

Q_{1y} - lực cắt trên phương y tại đầu 1;

Q_{2y} - lực cắt trên phương y tại đầu 2;
 Q_{1z} - lực cắt trên phương z tại đầu 1;
 Q_{2z} - lực cắt trên phương z tại đầu 2;
 M_{1x} - mômen xoắn tại đầu 1;
 M_{2x} - mômen xoắn tại đầu 2;
 M_{1y} - mômen quanh trục y tại đầu 1;
 M_{2y} - mômen quanh trục y tại đầu 2;
 M_{1z} - mômen quanh trục z tại đầu 1;
 M_{2z} - mômen quanh trục z tại đầu 2;
 u_1 - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 1;
 u_2 - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 2;
 v_1 - thành phần chuyển vị trên phương trục y tại đầu 1;
 v_2 - thành phần chuyển vị trên phương trục y tại đầu 2;
 w_1 - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 1;
 w_2 - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 2;
 θ_{1x} - góc xoắn tại đầu 1;
 θ_{2x} - góc xoắn tại đầu 2;
 θ_{1y} - góc xoắn quay trục y tại đầu 1;
 θ_{2y} - góc xoắn quay trục y tại đầu 2;
 θ_{1z} - góc xoắn quay trục z tại đầu 1;
 θ_{2z} - góc xoắn quay trục z tại đầu 2.

Trong thực tế, dầm 3 chiều có thể có vị trí bất kỳ trong không gian. Vì vậy, ta phải tìm cách chuyển ma trận độ cứng từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể. Để làm điều này, trước hết, ta cần tìm hiểu khái niệm về ma trận xoay.

§10.2. DẦM 3 CHIỀU TRONG KHÔNG GIAN

Gọi x_m, y_m, z_m là hệ tọa độ cục bộ của dầm 3 chiều và x, y, z là hệ tọa độ tổng thể. Trong hệ tọa độ cục bộ, vectơ chuyển vị tại 2 đầu dầm là (hình 10.4a):

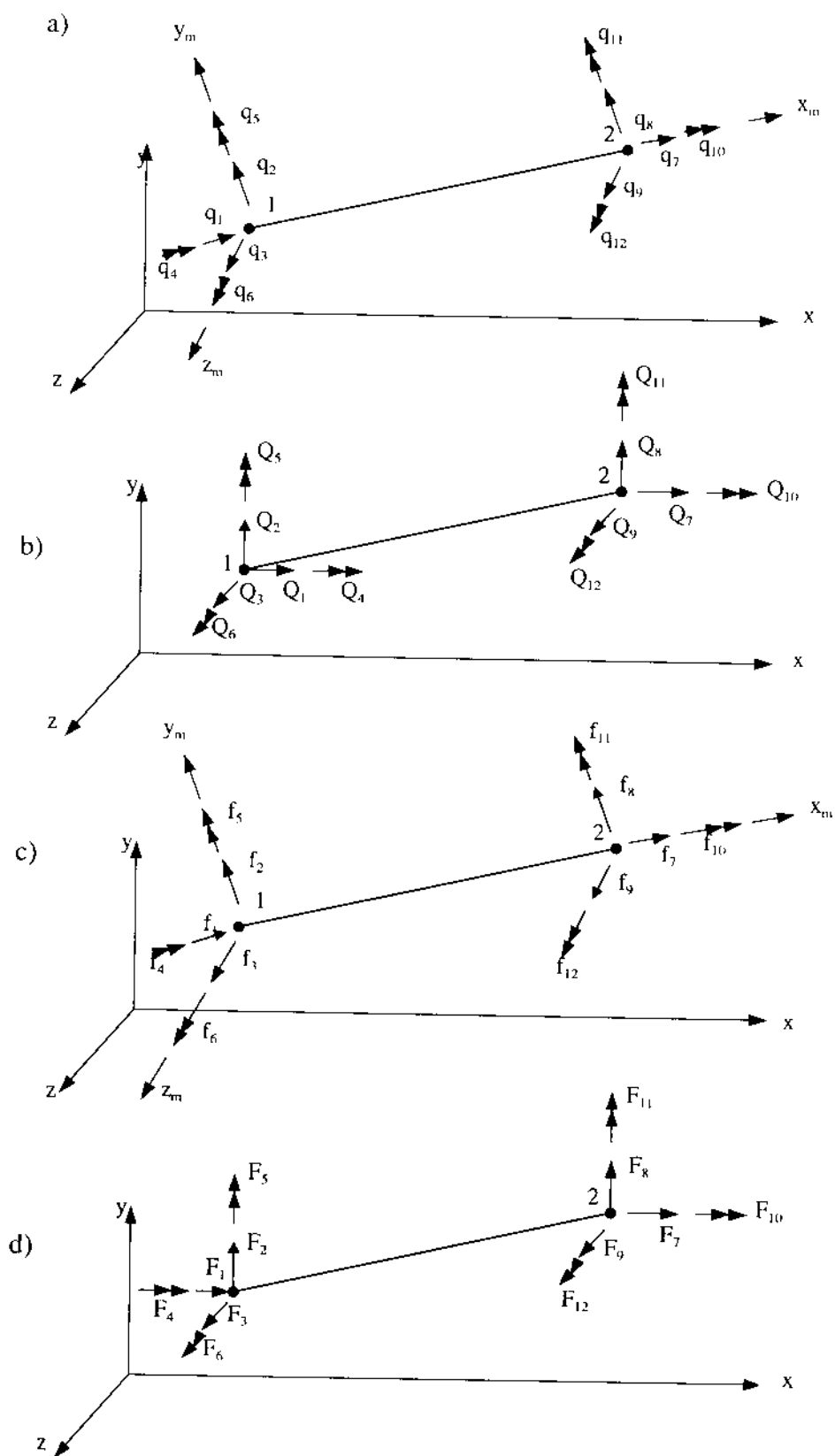
$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' \quad (10.11)$$

Trong hệ tọa độ tổng thể, vectơ chuyển vị (hình 10.4b) là:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6 \ Q_7 \ Q_8 \ Q_9 \ Q_{10} \ Q_{11} \ Q_{12}]' \quad (10.12)$$

Vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ (hình 10.4c) là:

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12}]' \quad (10.13)$$



Hình 10.4: Các thành phần chuyển vị và tải trọng trong dầm 3 chiều

Vector tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.4d) là:

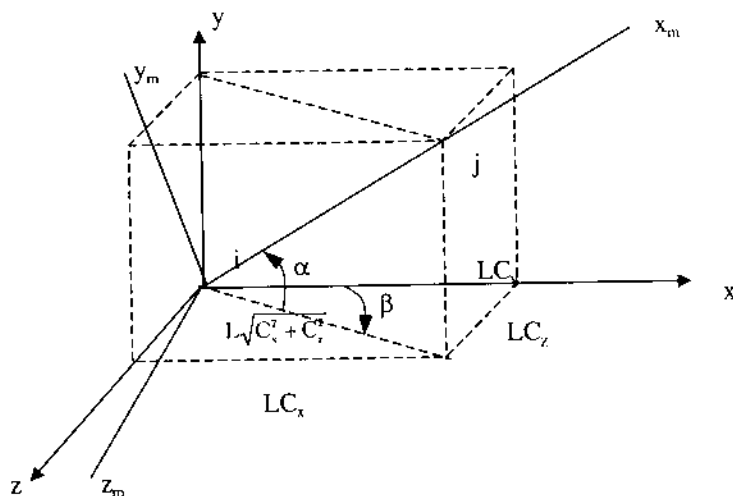
$$\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ F_9 \ F_{10} \ F_{11} \ F_{12}]' \quad (10.14)$$

Cần có sự chuyển đổi từ $\mathbf{q}$ sang $\mathbf{Q}$ và từ $\mathbf{f}$ sang $\mathbf{F}$.

Dưới đây, sẽ suy ra ma trận xoay dùng để thực hiện các chuyển đổi nói trên.

§10.3. MA TRẬN XOAY (HOẶC MA TRẬN BIẾN ĐỔI)

Ta có thể suy ra ma trận xoay bằng cách ứng dụng các nguyên lý về đại số vector hoặc dùng phương pháp xoay dần các trục tọa độ. Ở đây, ta sẽ dùng phương pháp thứ hai.



Hình 10.5: Vị trí bất kỳ của trục 3 chiều trong hệ tọa độ tổng thể

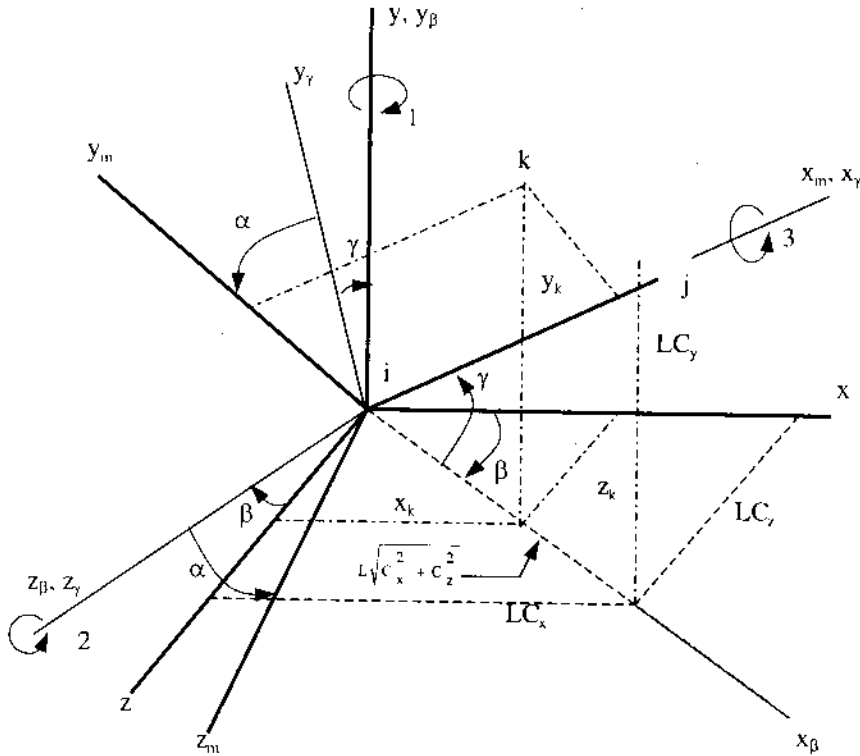
Hình (10.5) trình bày vị trí bất kỳ của trục dầm 3 chiều x_m và các quan hệ hình học trong hệ tọa độ tổng thể x, y, z .

Các trục của hệ tọa độ tổng thể sẽ được xoay dần quanh các trục y, z, x sao cho cuối cùng, hệ tọa độ tổng thể hoàn toàn trùng với hệ tọa độ cục bộ.

Quá trình xoay các trục tọa độ biểu thị trên hình (10.6). Trước hết, ta xoay trục x quanh trục y một góc β . Như vậy, trục x có vị trí mới là trục x_β , trục này là hình chiếu của trục dầm x_m lên mặt phẳng $x - z$. Nói một cách khác, trục x_β bây giờ là giao tuyến giữa mặt phẳng $y - x_m$ và mặt phẳng $x - z$. Bằng cách xoay như vậy, trục z chiếm vị trí trục z_β còn trục y vẫn không thay đổi. Các thành phần vector A_1, A_2, A_3 trong hệ tọa độ x, y, z có thể tổ hợp thành vector $A_{1\beta}, A_{2\beta}, A_{3\beta}$ trong hệ tọa độ mới $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ theo hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Trong đó: $\cos\beta$ và $\sin\beta$ có thể biểu thị bằng các cosin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x, y, z như sau (xem hình 10.6).



Hình 10.6: Phương pháp xoay dần các trục tọa độ

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (10.16)$$

$$\sin\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (10.17)$$

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (10.18)$$

$$C_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (10.19)$$

Trong đó: C_x, C_z - cosin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x và z ;

x_i, x_j - tọa độ của điểm i và j trên trục x ; y_i ;

y_j - tọa độ của điểm i và j trên trục y ;

z_i, z_j - tọa độ của điểm i và j trên trục z ;

L - chiều dài của dầm ij .

Sau khi xoay quanh trục y một góc β , từ (10.15), ta có ma trận biến đổi hoặc ma trận xoay:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

Tiếp tục xoay các trục x_β, y_β quanh trục z_β một góc γ sao cho trục x_β trùng với trục dầm x_m , trục y_β (tức trục y) dời đến vị trí trục y_γ , trục z_β không thay đổi; lúc bấy giờ, mặt phẳng $y_\gamma - z_\gamma$ chứa các trục y_m và z_m của dầm 3 chiều. Các thành phần vector $A_{1\beta}, A_{2\beta}, A_{3\beta}$ trên các trục $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ bây giờ được tổ hợp thành các vector $A_{1\gamma}, A_{2\gamma}, A_{3\gamma}$ trên phương các trục mới $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

Vậy sau khi xoay góc γ , căn cứ vào (10.21), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Các số hạng trong (10.22) là các cosin định hướng của các trục $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ đối với các trục $x_\beta, y_\beta, z_\beta$. Từ hình (10.6), ta có:

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}{L} \quad (10.23)$$

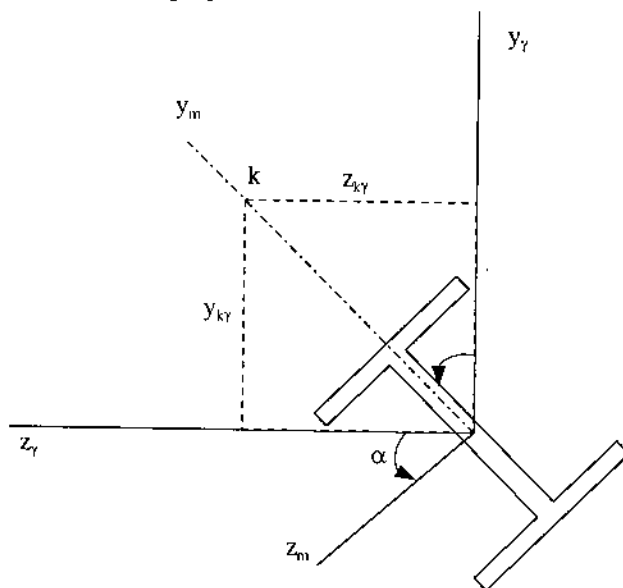
$$\sin \gamma = \frac{C_y}{L}$$

Vậy $\mathbf{T}_\gamma$ có thể viết:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}{L} & \frac{C_y}{L} & 0 \\ -\frac{C_y}{L} & \frac{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Cuối cùng, ta xoay quanh trục x_m các trục y_γ, z_γ một góc α sao cho trục y_γ trùng với trục y_m và trục z_γ trùng với trục z_m (hình 10.6).

Hình (10.7) cho ta thấy mặt cắt ngang của dầm cùng vị trí của trục y_m và z_m , trục x_m vuông góc với mặt phẳng của tờ giấy.



Hình 10.7

Mặt phẳng $x_m - y_m$ là một mặt phẳng thẳng đứng đi qua trục dầm và xác định góc giữa y_γ và y_m hoặc góc giữa z_γ và z_m (tức là góc α được đo từ mặt phẳng đó đến một trong các trục chính của mặt cắt ngang hình 10.7).

Cuối cùng, các thành phần vectơ A_{1m}, A_{2m}, A_{3m} trên các trục x_m, y_m, z_m được biểu thị bằng các thành phần vectơ $A_{1\gamma}, A_{2\gamma}, A_{3\gamma}$ trên các trục $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ A_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

Sau khi xoay góc α , căn cứ vào (10.25), ta có ma trận biến đổi:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Các phần tử trong (10.26) là các cosin định hướng của các trục x_m, y_m, z_m đối với các trục $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ (hình 10.6).

Kết hợp các phương trình (10.20), (10.22), (10.24), các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ x_m, y_m, z_m có thể biểu thị bằng các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$A_m = T_\alpha T_\gamma T_\beta \cdot A \quad (10.27)$$

hay

$$A_m = T \cdot A \quad (10.28)$$

Trong đó: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\gamma \cdot \mathbf{T}_\beta$ (10.29)

$\mathbf{A}_m$ là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ; $\mathbf{A}$ là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể. Các thành phần vectơ ở đây có thể là chuyển vị hoặc tải trọng.

Thay (10.20), (10.22), (10.24) vào (10.29), ta có:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos \alpha - C_z \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos \alpha & \frac{-C_y C_z \cos \alpha + C_x \sin \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \sin \alpha - C_z \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin \alpha & \frac{C_y C_z \sin \alpha + C_x \cos \alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

Từ (10.27), ta có thể viết: $\mathbf{A}_m = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ (10.31)

Trong đó $\mathbf{T}$ là ma trận biến đổi cấp 3×3 .

Đối với dầm 3 chiều, ta có 12 bậc tự do nên cuối cùng, ma trận xoay có thể viết:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (10.32)$$

Trong đó: $\mathbf{T}$, $\mathbf{0}$ là những ma trận con cấp 3×3 .

Từ (10.11), (10.12), (10.13), (10.14), ta có các hệ thức:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q} \quad (10.33)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \quad (10.34)$$

$\mathbf{R}$ gọi là ma trận xoay tổng thể.

Trong ma trận biến đổi $\mathbf{T}$ trong (10.30), chỉ còn góc α là chưa được xác định. Để làm điều này, ta chọn một điểm k nằm trong mặt phẳng chính $x_m - y_m$ nhưng không nằm trên trục x_m (hình 10.6 và 10.7). Giả sử tọa độ của điểm k trong hệ tọa độ tổng thể là x_K, y_K, z_K . Các thành phần của vectơ ik trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$\begin{aligned} x_{Ki} &= x_K - x_i \\ y_{Ki} &= y_K - y_i \\ z_{Ki} &= z_K - z_i \end{aligned} \quad (10.35)$$

Giả sử x_{Ky}, y_{Ky}, z_{Ky} là các hình chiếu của vectơ ik trên các trục x_y, y_y, z_y . Áp dụng 2 phép biến đổi đầu tiên, ta có hệ thức:

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\gamma \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

Sau khi đơn giản hoá:

$$\begin{aligned}
x_{k\gamma} &= C_x x_{ki} + C_y y_{ki} + C_z z_{ki} \\
y_{k\gamma} &= -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cdot y_{ki} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cdot z_{ki} \\
z_{k\gamma} &= \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ki}
\end{aligned} \quad (10.37)$$

Như vậy là đã xác định được tọa độ $y_{k\gamma}$, $z_{k\gamma}$ của điểm k trong mặt phẳng $y_m - z_m$. Từ hình (10.7), ta có:

$$\sin \alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (10.38a)$$

$$\cos \alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (10.38b)$$

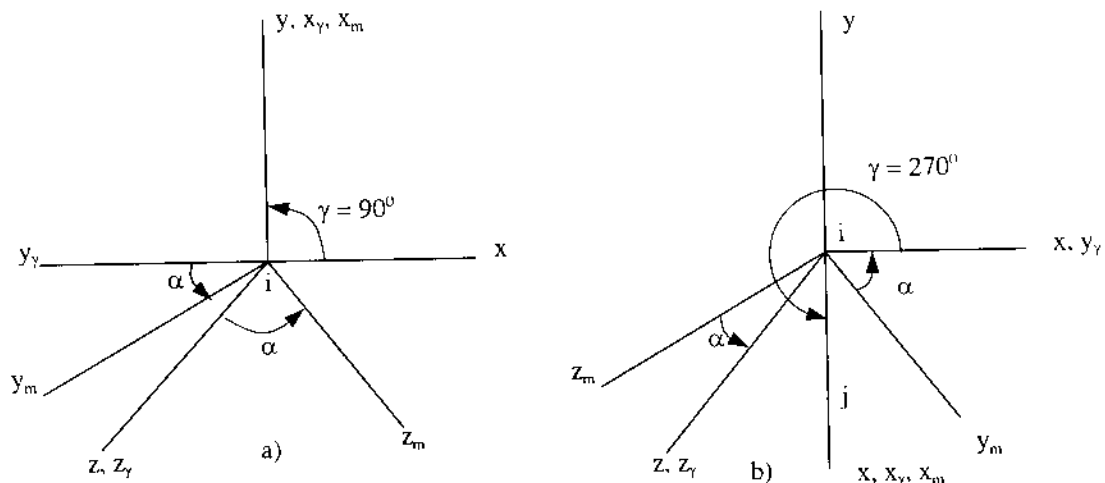
Trong đó, $y_{k\gamma}$ và $z_{k\gamma}$ tính theo (10.37). Vậy là ma trận biến đổi $\mathbf{T}$ trong (10.30) hoàn toàn được xác định.

Cần chú ý rằng các hệ thức nói trên không thể áp dụng cho trường hợp trục của dầm 3 chiều x_m nằm trên phương thẳng đứng nghĩa là song song với trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong trường hợp này (hình 10.8), C_x và C_z đều triệt tiêu, điều này không thể đưa đến những kết quả chính xác.

Sau đây, ta xét 2 trường hợp: trục x_m cùng chiều với trục y và x_m ngược chiều với trục y.

Ta thực hiện 2 phép xoay. Trước hết, xoay 1 góc $\gamma = 90^\circ$ (hình 10.8a) hoặc $\gamma = 270^\circ$ (hình 10.8b). Khi $\gamma = 90^\circ$, trục x trùng với trục x_m (thẳng đứng) và trục y chuyển đến vị trí y_γ , $C_y = 1$ (hình 10.8a). Khi $\gamma = 270^\circ$, trục x trùng với trục x_m (ngược chiều với trục y), trục y chuyển đến vị trí trục y_γ , $C_y = -1$. Tiếp theo, quay 1 góc α quanh trục x_m để trục y_γ trùng với trục y_m và trục z trùng với trục z_m .



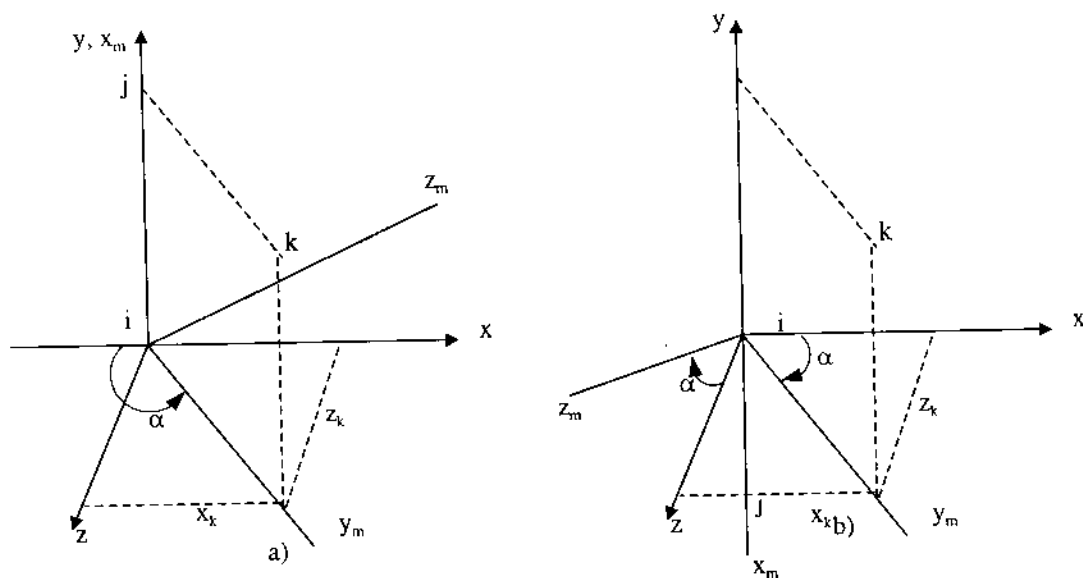
Hình 10.8:

a) Trục dầm cùng chiều với trục y; b) Trục dầm ngược chiều với trục y

Từ hình (10.8), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (10.39)$$

Góc α trong (10.39) được xác định bằng cách tìm vị trí của điểm k nằm trong mặt phẳng uốn chính. Hình (10.9a) biểu thị 1 thanh đứng có nút dưới tại điểm i và nút trên tại điểm j.



Hình 10.9: Cách xác định góc α

Tọa độ của điểm k trên hình (10.9a) đều dương và góc α nằm giữa 90° và 180° . Từ quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad (10.40)$$

Hình (10.9b) biểu thị một thanh đứng có nút trên là i và nút dưới là j . Trong trường hợp này, các tọa độ của điểm k đều dương và góc α nằm giữa 0° và 90° . Từ các quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad (10.41)$$

Kết hợp (10.40) và (10.41), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} C_y \quad (10.42)$$

Trong đó C_y là cosin định hướng của thanh ij đối với trục y . Nó có giá trị bằng $+1$ (hình 10.9a) hoặc bằng -1 (hình 10.9b).

Thay các giá trị $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ từ (10.42) vào (10.39), ta xác định được ma trận biến đổi T cấp 3×3 trong trường hợp đặc biệt trục dầm song song với trục y của hệ tọa độ tổng thể.

§10.4. TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Khung không gian là tập hợp các dầm 3 chiều có vị trí bất kỳ trong không gian. Để tính khung không gian, ta phải thực hiện các bước sau:

1. Xác định ma trận độ cứng k_e của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.9).
2. Xác định ma trận độ cứng K_e của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ tổng thể theo công thức sau:

$$K_e = R' k_e R \quad (10.43)$$

Trong đó: R - ma trận xoay; tính theo (10.32)

Công thức (10.43) chứng minh tương tự như công thức (8.53) trong §8.2.2 (chương 8).

3. Căn cứ vào bảng (8.1) (chương 8), xác định vectơ tải trọng f trong hệ tọa độ cục bộ. Đối với dầm 3 chiều, tại mỗi nút có 6 thành phần tải trọng.
4. Xác định vectơ tải trọng F cho mỗi phần tử của khung theo (10.34):

$$f_e = R_e F_e$$

do đó:

$$F_e = R_e' f_e \quad (10.44)$$

5. Sau khi ghép các ma trận k_e từ (10.43) và các ma trận F_e từ (10.44); ta được phương trình cân bằng tổng thể:

$$KQ = F \quad (10.45)$$

6. Giải hệ phương trình (10.45), ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.

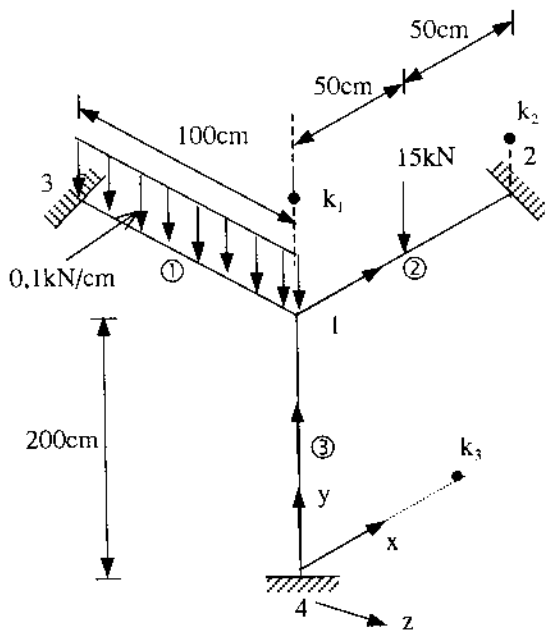
7. Xác định các thành phần chuyển vị của mỗi phần tử của khung theo (10.33).

$$q = RQ \quad (10.46)$$

8. Căn cứ vào công thức (8.54) và bảng (8.1) (chương 8), tính nội lực ở các đầu dầm:

$$S = k_e q + S_0 \quad (10.47)$$

Ví dụ 10.1: Một giàn không gian như trên hình (10.10)



Số BTD có chuyển vị: 6
 Tổng số BTD: 24
 Số thanh: 3
 Số thanh loại 1: 2
 Số thanh loại 2: 1
 Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1
 Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Hình 10.10

Dùng chương trình CTR18 tính nội lực.

Giải:

Đây là bài toán khối lượng tính rất lớn, không thể tích bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính.

Trước hết phải nhập các số liệu:

Nhập số liệu

Một phần đã trình bày trên hình (10.10). Tiếp theo, nhập các số liệu sau:

Số thứ tự thanh loại 1: 1, 2

Số thứ tự thanh loại 2: 3

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

Cường độ tải trọng phân bố: -0,1

Tải trọng tập trung: -15

Vị trí tải trọng tập trung: 50; 50

Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm ²)	Môđun xoắn (kN/cm ²)	Mômen quán tính x (cm ⁴)	Mômen quán tính y (cm ⁴)	Mômen quán tính z (cm ⁴)	Môđun đàn hồi (kN/cm ²)
1	20	8077	4	55	750	21000
2	20	8077	4	55	750	21000
3	30	8077	10	150	2230	21000

Phần tử	Tọa độ (cm)						Tọa độ điểm k (cm)		
	x _j	y _j	z _j	x _i	y _i	z _i	x _k	y _k	z _k
1	0	200	-100	0	200	0	0	250	0
2	0	200	0	100	200	0	100	250	0
3	0	0	0	0	200	0	50	0	0

Phần tử	Số thứ tự các bậc tự do											
	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆	d ₇	d ₈	d ₉	d ₁₀	d ₁₁	d ₁₂
1	13	14	15	16	17	18	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6

Tọa độ điểm k (xem hình (10.10):

Thanh 1: điểm k₁ nằm trên phương trục thanh 3

Thanh 2: điểm k₂ nằm trên phương thẳng đứng tại nút 2

Thanh 3 (cột): điểm k₃ nằm trên phương trục x tại nút 4

Kết quả chạy chương trình

Phân tử Nội lực	1	2
Q_{y1} (kN)	-5,067	-5,067
M_{x1} (kN - cm)	0	0
M_{z1} (kN - cm)	-4,415	-4,46
Q_{y2} (kN)	-10,398	-0,398
M_{x2} (kN - cm)	0	0
M_{z2} (kN - cm)	359,879	26,545

Phân tử Nội lực	3
N_1 (kN)	0
M_{y1} (kN - cm)	18900
M_{z1} (kN - cm)	164,434
N_2 (kN)	0
M_{y2} (kN - cm)	18900
M_{z2} (kN - cm)	-4,465

§10.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Về thuật toán này, nên kết hợp xem ví dụ 10.1.

Khối lượng tính rất lớn, hơn nữa do sự hạn chế của bộ nhớ trong máy tính, nên trong thuật toán này chỉ xét các trường hợp sau:

1. Chỉ xét 2 loại thanh

- Thanh có trục không song song với trục Y của hệ tọa độ tổng thể
- Thanh có trục song song và cùng chiều với trục Y của hệ tọa độ tổng thể.

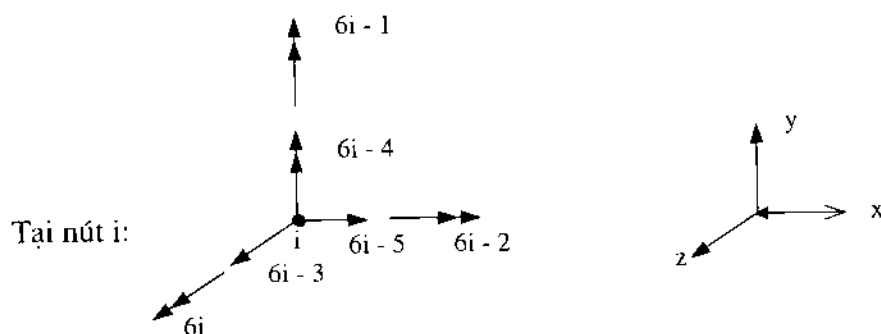
2. Tải trọng tác dụng trên dầm và nằm trong mặt phẳng thẳng đứng $x - y$ trong hệ tọa độ cục bộ.

Để thuận tiện cho việc lập trình, số thứ tự các thanh nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên 1, 2, 3... Các dầm chịu tải trọng phân bố đều xếp trước, sau đó đến các dầm chịu tải trọng tập trung, cuối cùng là các cột.

Số thứ tự các bậc tự do cũng nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên, các bậc tự do có chuyển vị triệt tiêu nên xếp ở phần cuối.

Vì khối lượng tính quá lớn, chương trình được chia ra nhiều chương trình con (Procedure) để khi cần thì gọi đến.

Mỗi nút có 6 bậc tự do, được ký hiệu như sau:



Về các cosin định hướng, ở đây xét đến trường hợp tổng quát nhất: thanh có thể nằm ở vị trí bất kỳ trong không gian. Đối với các lực N , Q_y , Q_z các cosin định hướng có thể mang dấu dương hoặc âm, nhưng đối với các mômen M_x , M_y , M_z các cosin định hướng cần lấy giá trị tuyệt đối để giữ nguyên dấu của bản thân mômen.

Trong chương trình này, dấu của mômen quy ước là dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ, quy ước là âm trong trường hợp ngược lại.

Vị trí của điểm k có thể chọn tùy ý nhưng phải nằm trong mặt phẳng quán tính chính $x - y$ của dầm và không nằm trên trục x của nó (xem ví dụ 10.1). Đối với cột, điểm k nằm trong mặt phẳng $x - z$ của hệ tọa độ tổng thể và nằm trên phương song song với trục x hoặc trục z tùy theo phương của trục y của nó. Trong ví dụ (10.1) điểm k_1 nằm trên phương trục x của hệ tọa độ tổng thể.

Thuật toán được tiến hành theo các bước.

- Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (10.9)
- Xác lập các ma trận xoay theo (10.30), (10.32)
- Xác lập các MTĐC riêng trong hệ tọa độ tổng thể theo (10.43)
- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- Xác lập vectơ tải trọng như đã làm đối với khung phẳng
- Gọi chương trình con để tính giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.
- Xác định các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.33).
- Xác định các thành phần nội lực theo (10.47)

Chương 11

BÀI TOÁN BA CHIỀU

§11.1. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN BA CHIỀU

Trong các chương trước, ta đã nghiên cứu bài toán một chiều, bài toán hai chiều, hệ thanh gồm dầm và khung. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu bài toán 3 chiều thường gặp trong thực tế. Mô hình phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút sẽ được đề cập đến.

Cần nhắc lại rằng (xem lại chương 1) trong bài toán ba chiều, ta có các hệ thức sau đây.

Véc tơ các thành phần chuyển vị trong FTHH

$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T \quad (11.1)$$

Trong đó: u, v, w - các thành phần chuyển vị trên phương các trục x, y, z tại 1 điểm trong FTHH.

Vectơ ứng suất σ và vectơ biến dạng ϵ :

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \quad (11.2)$$

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (11.3)$$

Hệ thức ứng suất - biến dạng

$$\sigma = D\epsilon \quad (11.4)$$

Trong đó: D là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 6×6 . Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, D tính theo (1.17) (chương một).

Hệ thức biến dạng - chuyển vị:

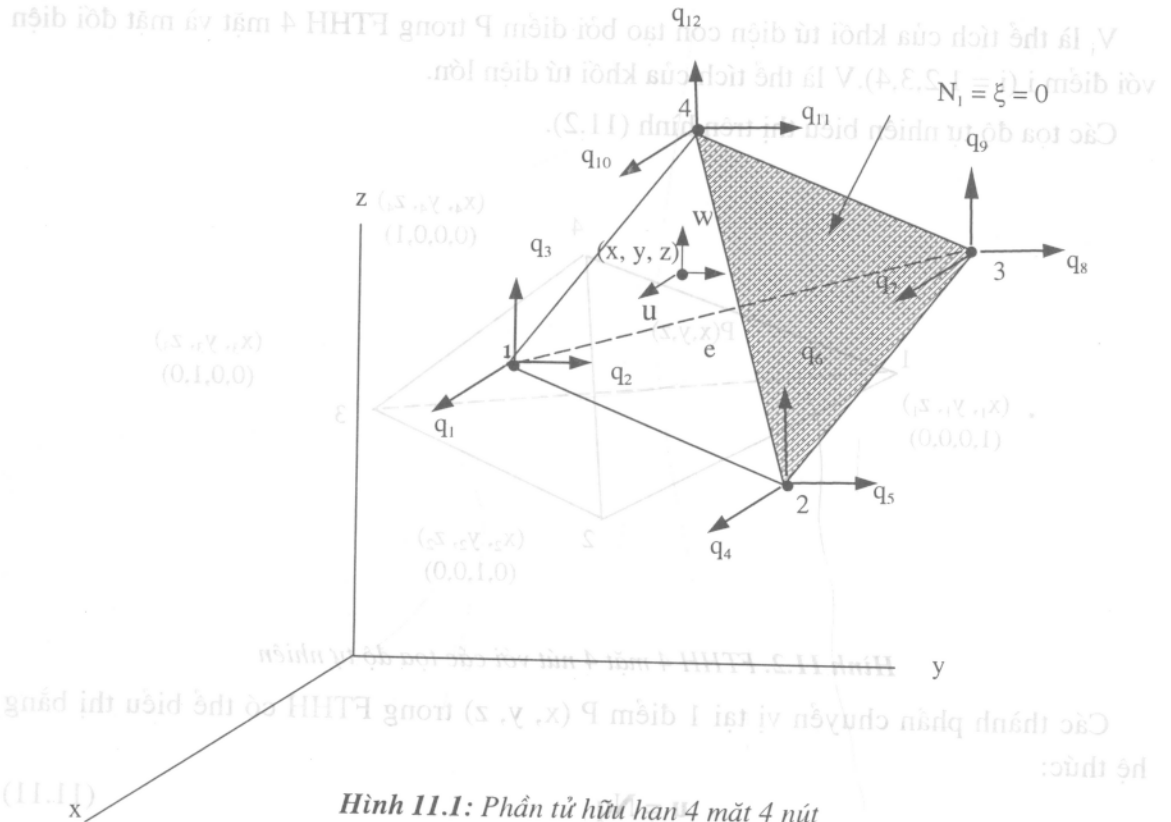
$$\epsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (11.5)$$

Vectơ lực thể tích f và vectơ lực biên T

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \\ \mathbf{T} &= [T_x \quad T_y \quad T_z]^T \end{aligned} \quad (11.7)$$

§11.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN

Ta chia vật thể thành các FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.1).



Hình 11.1: Phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút

Tại điểm có tọa độ (x, y, z) trong FTHH, có 3 thành phần chuyển vị u, v, w trên các phương x, y, z . Mỗi nút i của FTHH có 3 thành phần chuyển vị $q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}$. Chẳng hạn tại nút 3, có 3 thành phần chuyển vị q_7, q_8, q_9 . Ta gọi các thành phần chuyển vị này là các chuyển vị cục bộ. Các chuyển vị tổng thể tại nút I là $Q_{3I-2}, Q_{3I-1}, Q_{3I}$. Vậy vector chuyển vị cục bộ $\mathbf{q}$ và vector chuyển vị tổng thể $\mathbf{Q}$ là:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_{12}]^T \quad (11.8)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_N]^T \quad (1.9)$$

11.2.1. Hàm hình dạng. Hệ thức biến dạng - chuyển vị

Ta định nghĩa 4 hàm hình dạng Lagrange N_1, N_2, N_3, N_4 như sau. Hàm hình dạng N_i tại nút i bằng đơn vị tại nút đó và triệt tiêu tại các nút còn lại. Chẳng hạn, hàm hình dạng N_1 bằng đơn vị tại nút 1 và triệt tiêu tại các nút 2, 3, 4.

Hàm hình dạng được xác định bằng các tọa độ tự nhiên

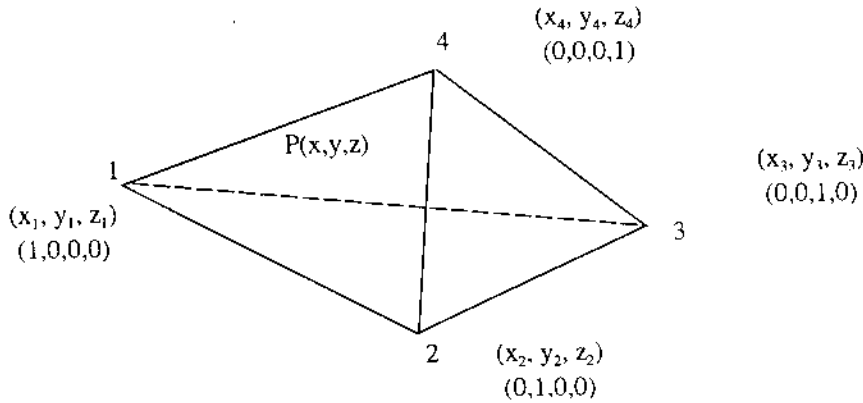
$$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3 \quad N_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3 \quad (11.10)$$

Trong đó:

$$L_i = \frac{V_i}{V}$$

V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P trong FTHH 4 mặt và mặt đối diện với điểm i ($i = 1, 2, 3, 4$). V là thể tích của khối tứ diện lớn.

Các tọa độ tự nhiên biểu thị trên hình (11.2).



Hình 11.2. FTHH 4 mặt 4 nút với các tọa độ tự nhiên

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm P (x, y, z) trong FTHH có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \quad (11.11)$$

Trong đó:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

$\mathbf{q}$ - vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút.

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, tọa độ của điểm P (x, y, z) trong phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng tọa độ của các nút (hình 11.2):

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 \end{aligned} \quad (11.13)$$

Thay N_i từ (11.10) vào (11.13) và áp dụng các ký hiệu $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$, ta có:

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14} L_1 + x_{24} L_2 + x_{34} L_3 \\ y &= y_4 + y_{14} L_1 + y_{24} L_2 + y_{34} L_3 \\ z &= z_4 + z_{14} L_1 + z_{24} L_2 + z_{34} L_3 \end{aligned} \quad (11.14)$$

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm ẩn:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

Trong đó, $\mathbf{J}$ là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} & \frac{\partial z}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} & \frac{\partial z}{\partial L_2} \\ \frac{\partial x}{\partial L_3} & \frac{\partial y}{\partial L_3} & \frac{\partial z}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

Định thức của $\mathbf{J}$:

$$\det \mathbf{J} = x_{14}(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}z_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24}) \quad (11.17)$$

Thể tích FTHH tứ diện:

$$V_e = \left| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \det \mathbf{J} \, dL_1 dL_2 dL_3 \right| \quad (11.18)$$

$$V_e = |\det \mathbf{J}| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} dL_1 dL_2 dL_3 \quad (11.18a)$$

Công thức tích phân đa thức có dạng như sau:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} L_1^m \cdot L_2^n \cdot L_3^p dL_1 dL_2 dL_3 = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)!} \quad (11.19)$$

Áp dụng (11.19), ta được:

$$V_e = \frac{1}{6} |\det \mathbf{J}| \quad (11.20)$$

Hệ thức nghịch đảo của (11.15):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial L_1} \\ \frac{\partial u}{\partial L_2} \\ \frac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

Trong đó A là nghịch đảo của ma trận Jacobian:

$$\Lambda = J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} (y_{24} \cdot z_{34} - y_{34} \cdot z_{24}) & (y_{34} z_{14} - y_{14} \cdot z_{34}) & (y_{14} z_{24} - y_{24} \cdot z_{14}) \\ (z_{24} \cdot x_{34} - z_{34} \cdot x_{24}) & (z_{34} x_{14} - z_{14} \cdot x_{34}) & (z_{14} \cdot x_{24} - z_{24} \cdot x_{14}) \\ (x_{24} \cdot y_{34} - x_{34} \cdot z_{24}) & (x_{34} y_{14} - x_{14} \cdot y_{34}) & (x_{14} \cdot y_{24} - x_{24} \cdot y_{14}) \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Theo (11.5) và (11.21), ta có:

$$\varepsilon = B \cdot q \quad (11.23)$$

Trong đó, ma trận B có dạng:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\tilde{A}_3 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\tilde{A}_2 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

Trong đó: A_{ij} là các phần tử của ma trận A trong (11.22)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ \tilde{A}_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} \\ \tilde{A}_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned} \quad (11.25)$$

11.2.2. Ma trận độ cứng-Vectơ tải trọng

Ma trận độ cứng:

Theo (2.79) (chương hai), ta có ma trận độ cứng

$$k = \iiint B' D B dv \quad (11.26a)$$

Vì các ma trận B và D chứa các hằng số nên

$$k = B' D B \int dv$$

do đó:

$$k = V_e B' D B$$

Trong đó, V_e là thể tích của FTHH tứ diện, tính theo công thức (11.20).

Véc tơ lực thể tích:

Theo (2.80) (chương hai), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{F}_t = \iiint \mathbf{N}' \mathbf{f} dV \quad (11.27a)$$

Vì lực thể tích tác dụng tại trọng tâm của FTHH tứ diện, trọng tâm này lại chia hình tứ diện thành 4 khối tứ diện con có thể tích bằng nhau nên theo (11.10).

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$$

Vì $\mathbf{N}$ và $\mathbf{f}$ chứa các hằng số, $\mathbf{f}_t$ có thể viết

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{N}' \mathbf{f} \int dV = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{f} \cdot V \quad (11.27b)$$

Thay $\mathbf{N}$ từ (11.12) và $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}$ vào (11.27b) ta được:

$$\mathbf{f}_t = V \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (11.27c)$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$, ta có công thức cuối cùng:

$$\mathbf{f}_t = \frac{V_e}{4} \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

Vectơ lực biên:

Theo (2.80) (chương 2), ta có vectơ lực biên:

$$\mathbf{f}_b = \iint \mathbf{N}'^s \mathbf{T} dA \quad (11.29)$$

Chẳng hạn, lực biên phân bố đều trên diện tích tam giác 1-2-3 có gạch chéo trên hình 11-3. Trên diện tích này, rõ ràng là $N_4 = 0$. Vì tổng lực biên tác dụng tại trọng tâm của tam giác 1-2-3, trọng tâm này lại chia tam giác 1-2-3 thành 3 tam giác con có diện tích như nhau nên:

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \\ N_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

Vì ma trận $\mathbf{N}$ và $\mathbf{T}$ chứa các hằng số nên (11.29) có thể viết:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &= \mathbf{N}^s \cdot \mathbf{T} \cdot dA \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^s \cdot \mathbf{T} \end{aligned} \quad (11.31a)$$

Thay $\mathbf{N}$ từ (11.12) và

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}$$

vào (11.31a):

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (11.31b)$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$, $N_4 = 0$ vào (11.31b), ta được công thức cuối cùng:

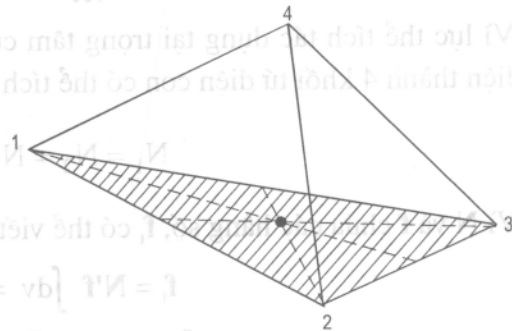
$$\mathbf{f}_b = \frac{A_c}{3} \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z & T_x & T_y & T_z & T_x & T_y & T_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

Trong đó: A_c - diện tích mặt tam giác 1-2-3.

Trong phần trên, ta đã suy ra ma trận độ cứng, vectơ lực thể tích, vectơ lực biên đối với phần tử hữu hạn hình 4 mặt, 4 nút. Sau khi ghép các ma trận độ cứng và các vectơ tải trọng như thường lệ, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (11.32)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị.



Hình 11.3: Lực biên tác dụng trên mặt tam giác 1-2-3

11.2.3. Tính ứng suất

Vì $\sigma = D.\varepsilon$ và $\varepsilon = B.q$ nên ứng suất có thể viết:

$$\sigma = D.B.q \quad (11.34)$$

Các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ được tính theo các hệ thức sau. Ba bất biến của tenxơ ứng suất là:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (11.34)$$

Đặt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\ b &= -2\left(\frac{I_1}{3}\right)^3 + \frac{I_1 I_2}{3} - I_3 \\ c &= 2\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \theta &= \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-\frac{3b}{ac} \right) \end{aligned} \quad (11.35)$$

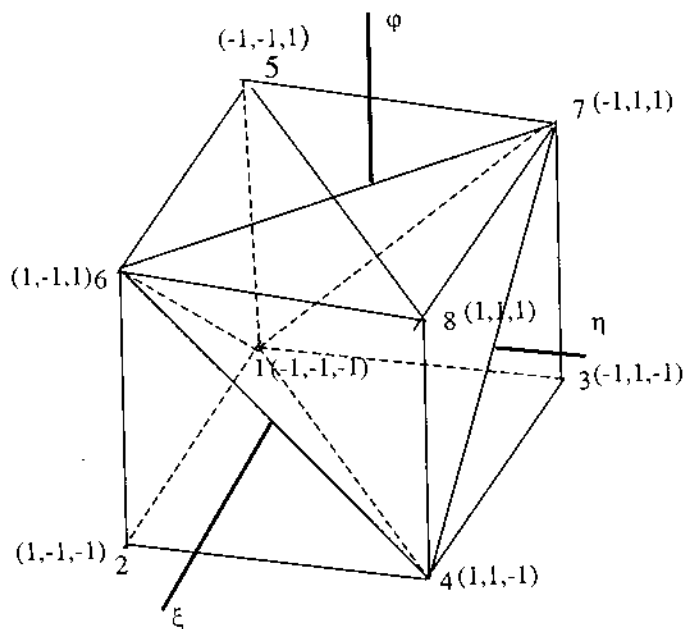
Các ứng suất chính:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \theta \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + c \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (11.36)$$

§11.3. CÁCH BỐ TRÍ MẠNG FTHH 4 MẶT 4 NÚT

Trong miền 2 chiều, cách bố trí mạng FTHH tam giác hoặc tứ giác có thể thực hiện một cách tùy ý, nhưng trong miền 3 chiều thì việc bố trí mạng FTHH tứ diện có tính chất phức tạp hơn. Dưới đây, giới thiệu một số cách bố trí mạng FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Trên hình (11.4) là cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông. Sơ đồ liên kết giữa các nút biểu thị trong bảng 11.1. Trong cách bố trí trên, 4 tứ diện đầu tiên có thể tích như nhau còn tứ diện thứ 5 thì có thể tích gấp đôi thể tích của phần tử khác.



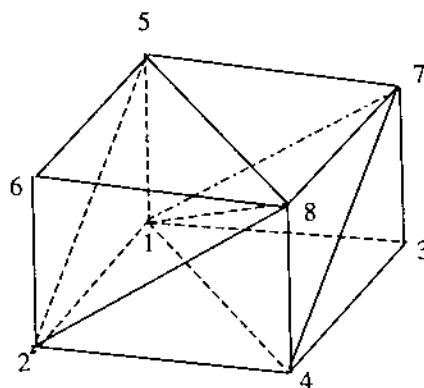
Hình 11.4: Cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Bảng 11.1. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và các nút

FTHH số	Nút cục bộ				
	1	2	3	4	
1	1	4	2	6	Nút tổng thể
2	1	4	3	7	
3	6	7	5	1	
4	6	7	8	4	
5	1	4	6	7	

Cũng có thể bố trí 6 FTHH tứ diện trong một miền khối vuông như trên hình (11.5).

Trong cách chia này, một nửa khối vuông được chia thành 3 tứ diện có thể tích bằng nhau (hình 11.5). Sơ đồ liên kết giữa các tứ diện và giữa các nút như trên bảng (11.2) và hình (11.5).



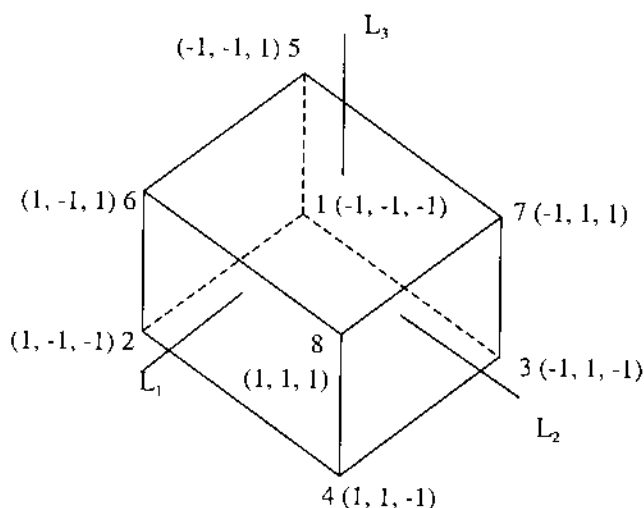
Hình 11.5: Cách bố trí 6 tứ diện trong miền khối vuông.

Bảng 11.2. Sơ đồ liên kết giữa các nút trên hình (11.6)

FTHH số	Nút cục bộ: 1, 2, 3, 4			
	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

§11.4. PHẦN TỬ HỮU HẠN 6 MẶT VÀ CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN BẬC CAO HƠN

Hình 11.6 biểu thị một phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút có dạng khối vuông với kích thước mỗi cạnh bằng 2 đơn vị trong hệ tọa độ tự nhiên L_1, L_2, L_3 .



Hình 11.6: Phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút

Đối với FTHH khối vuông (hình 11.6), các hàm hình dạng Lagrange có thể viết:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + L_{1i} L_{1i}) (1 + L_{2i} L_{2i}) (1 + L_{3i} L_{3i}) \quad (11.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

Trong đó: L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} là các tọa độ tự nhiên L_1, L_2, L_3 tại nút i trong hệ tọa độ (L_1, L_2, L_3) .

Mỗi nút của FTHH 6 mặt 8 nút có 3 thành phần chuyển vị nên có tất cả 24 thành phần chuyển vị tại các nút. Vectơ chuyển vị:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \dots \dots q_{24}]' \quad (11.38)$$

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút như sau:

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_4 + \dots + N_8 q_{22} \\ v &= N_1 q_2 + N_2 q_5 + \dots + N_8 q_{23} \end{aligned} \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} w &= N_1 q_3 + N_2 q_6 + \dots + N_8 q_{24} \\ x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_8 y_8 \end{aligned} \quad (11.40)$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots + N_8 z_8$$

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, các tọa độ tại 1 điểm trong FTHH có thể biểu thị bằng tọa độ tại các nút như trong (11.40).

Giống như các bước trình bày trong chương 7 đối với FTHH tứ giác, ta có các hệ thức nhau sau:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad (11.41)$$

Ma trận độ cứng của FTHH:

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} |\det \mathbf{J}| dL_1 dL_2 dL_3 \quad (11.42)$$

Trong đó: $dV = |\det \mathbf{J}| dL_1 dL_2 dL_3$;

$\mathbf{J}$ - ma trận Jacobian.

Việc tính tích phân (11.42) thực hiện theo phép cầu phương Gauss.

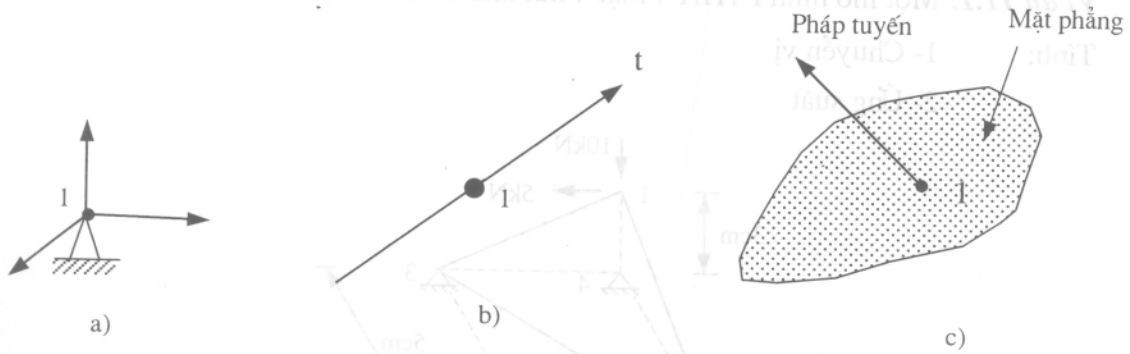
Đối với các FTHH tứ diện bậc cao hơn, chẳng hạn như loại 10 nút, 20 nút, 27 nút, cũng có thể thực hiện các bước như đã trình bày trong chương 7.

§11.5. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Về cách xử lý các điều kiện biên, ta làm như đối với các bài toán 1 chiều hoặc 2 chiều.

Ràng buộc điểm (hình 11.7a) là ràng buộc tại đó một điểm hoàn toàn cố định. Trong trường hợp này, ta thêm một số C khá lớn vào phần tử có bậc tự do tương ứng trên đường chéo chính của ma trận độ cứng.

Ràng buộc đường thẳng là một ràng buộc trong đó 1 điểm chỉ được phép chuyển vị trên phương đường thẳng t (hình 11.7b).



Hình 11.7: Ràng buộc tại các nút

a) Ràng buộc điểm; b) Ràng buộc trên đường thẳng; c) Ràng buộc mặt phẳng.

Giả sử t có các cosin định hướng (l, m, n) . Xuất phát từ điều kiện $\mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$ ta thêm các số hạng độ cứng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng:

3I - 2	3I - 1	3I	← BTD của nút 1
$\uparrow$			
BTD			

$$\begin{bmatrix}
 3I-2 & 3I-1 & 3I \\
 C l^2 & C l m & C l n \\
 & C m^2 & C m n \\
 & & C n^2
 \end{bmatrix}$$

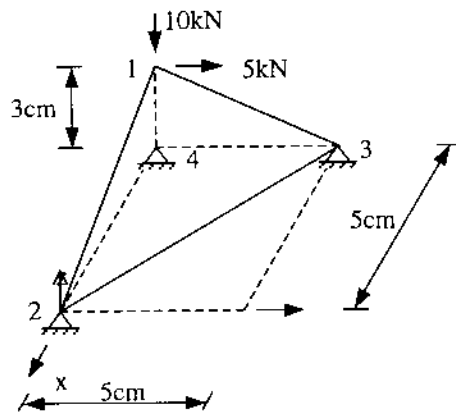
Đối với ràng buộc mặt phẳng (hình 11.7c), một nút chỉ được di chuyển trong mặt phẳng có pháp tuyến t . Giả sử t có các cosin định hướng (l, m, n) . Xuất phát từ điều kiện $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0$, ta thêm vào các số hạng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng.

3I - 2	3I - 1	3I	← BTD của nút 1
$\uparrow$			
BTD			

$$\begin{bmatrix}
 3I-2 & 3I-1 & 3I \\
 C(1-l^2) & -C l m & -C l n \\
 & C(1-m^2) & C m n \\
 & & C(1-n^2)
 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 11.1: Một mô hình FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.8).

Tính: 1- Chuyển vị
2- Ứng suất



Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số Poisson: 0,3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	3	4

Hình 11.8

Giải:

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.17)

$$D = \begin{bmatrix} 4523,077 & 1938,462 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & 4523,077 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4523,077 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1292,308 & 0 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 1292,308 & 0 \\ & & & & & 1292,308 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận **B** theo (11.24):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & -0,33 & -0,2 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -0,33 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận độ cứng riêng theo (11.26)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
143,589	0	0	0	0	86,154	0	0	0	-143,589	0	-86,154
	143,589	0	0	0	0	0	0	86,154	0	-143,589	-86,154
		502,654	129,231	0	0	0	129,231	0	-129,231	-129,231	-502,564
			180,923	0	0	0	77,538	0	-180,923	-77,538	-129,231
				51,692	0	51,692	0	0	-51,692	-51,692	0
					51,692	0	0	0	-86,154	0	-51,692
						51,692	0	0	-51,692	-51,692	0
							180,923	0	-77,538	180,923	-129,231
								51,692	0	-86,154	-51,692
									376,205	129,231	215,385
										376,205	215,385
											605,949

$k_j =$

Xác lập ma trận độ cứng tổng thể:

Vì chỉ có một phần tử, từ ma trận độ cứng riêng k_1 , ta dùng phương pháp loại trừ để xác lập MTĐC tổng thể:

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \leftarrow \text{Số thứ tự BTĐ tổng thể} \\ \begin{bmatrix} 143,589 & 0 & 0 \\ & 143,589 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & 502,654 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính:

$$[Q_1 \ Q_2 \ Q_3] = [0 \quad 0,0348 \quad -0,0199]' \text{ cm}$$

Tính ứng suất theo (11.33)

Các thành phần chuyển vị của phần tử là:

$$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]' = [0 \quad 0,035 \quad -0,019 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Các thành phần ứng suất:

$$\begin{aligned} US1 &= -12,857 \text{ kN/cm}^2 & US2 &= -12,857 \text{ kN/cm}^2 \\ US3 &= -30 \text{ kN/cm}^2 & US4 &= 14,999 \text{ kN/cm}^2 \\ US5 &= 0 & US6 &= 0 \end{aligned}$$

§11.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 3 CHIỀU (CTR17)

1. Nhập số liệu (lấy thí dụ trên hình (11.9))

Số phần tử: 1

Số BTĐ có chuyển vị: 3

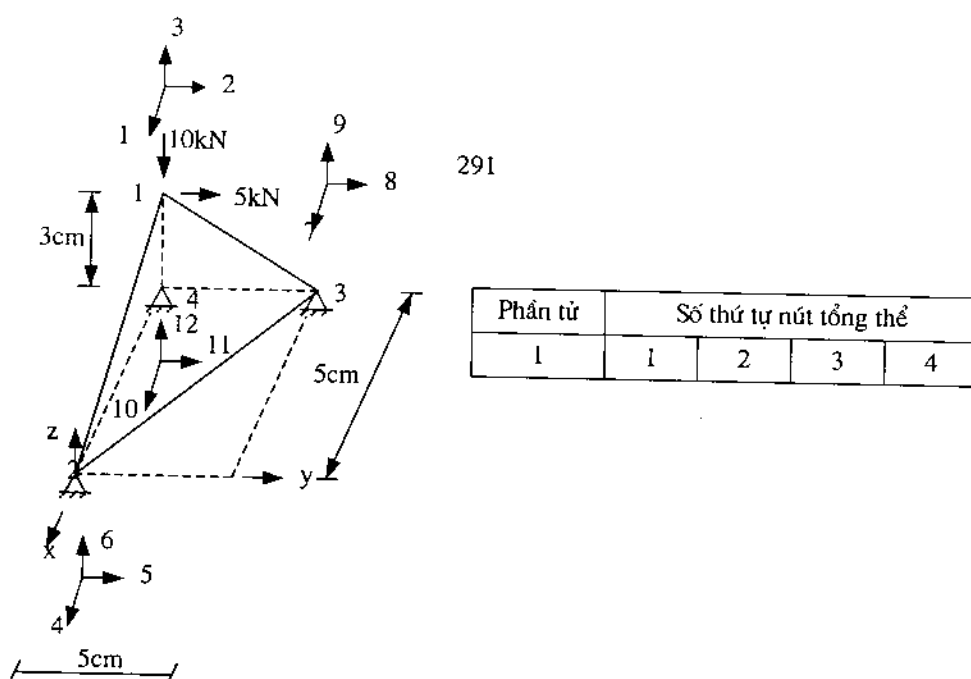
Tổng số BTĐ : 12

Số BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 9

Số thứ tự BTĐ có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Hệ số Poisson: 0,3



Hình 11.9

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)											
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4
1	-5	0	-5	-5	0	0	5	0	3	0	0	0

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do											
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (11.26)
3. Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
4. Ghép các vector tải trọng theo (11.28), (11.31) và các tải trọng nhập vào.
5. Gọi chương trình con để giải hệ phương trình cân bằng
6. Căn cứ vào các giá trị chuyển vị tìm được ở trên, tính ứng suất theo (11.33).

Chương 12

BÀI TOÁN DAO ĐỘNG

§12.1. KHÁI NIỆM

Trong các chương 3 - 10, ta đã phân tích ứng suất và biến dạng của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng tĩnh. Ta gọi là tải trọng tĩnh khi nó được đặt lên kết cấu một cách chậm chạp và từ từ. Ta gọi là *tải trọng động* khi nó tác dụng lên kết cấu một cách đột ngột hoặc thay đổi theo thời gian. Tải trọng động gây ra gia tốc và dẫn đến sự dao động của kết cấu. Đối với một vật rắn biến dạng đàn hồi, khi cất tải trọng một cách đột ngột, nó có xu hướng dao động quanh vị trí cân bằng của nó. Chuyển động có tính chu kỳ do năng lượng biến dạng phục hồi gây ra, gọi là *dao động tự do*. Số chu kỳ trong đơn vị thời gian gọi là *tần số*. Chuyển vị lớn nhất kể từ vị trí cân bằng gọi là *biên độ*. Trong thực tế, dao động sẽ giảm dần nếu có lực cản. Tuy nhiên, nếu lực cản không lớn, sự khác nhau giữa tần số dao động tự do không có lực cản và tần số dao động tự do có lực cản, có thể bỏ qua. Ở đây, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cản khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu dao động tự do của kết cấu.

§12.2. CÔNG THỨC CƠ BẢN

Ta định nghĩa hàm *Lagrange* L như sau:

$$L = T - TN \quad (12.1)$$

Trong đó: T - động năng;

TN - thế năng.

Nguyên lý Haminton:

Trong khoảng thời gian bất kỳ từ t_1 đến t_2 , trạng thái chuyển động của vật thể, cực trị hóa hàm:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (12.2)$$

Nếu hàm L được biểu thị bằng các biến khái quát $(q_1, q_2, q_3 \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \dots \dot{q}_n)$ thì phương trình chuyển động có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12.3)$$

Trong đó: $\dot{q}_i = dq_i/dt$

Ví dụ sau sẽ minh họa nguyên lý Haminton.

Ví dụ 12.1: Cho một hệ lò xo và khối lượng như trên hình (12.1).

Động năng và thế năng có thể viết;

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$TN = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

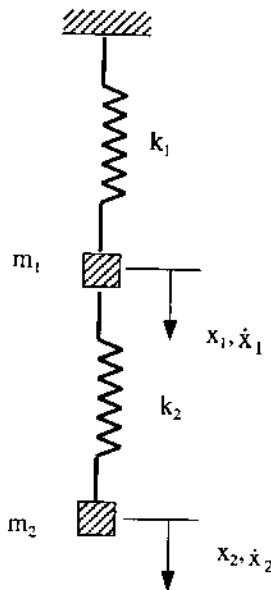
Vì $L = T - TN$, ta có phương trình chuyển động:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$



Hình 12.1

Phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận rút gọn:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (12.4)$$

Trong đó: $\mathbf{M}$ - ma trận khối lượng;

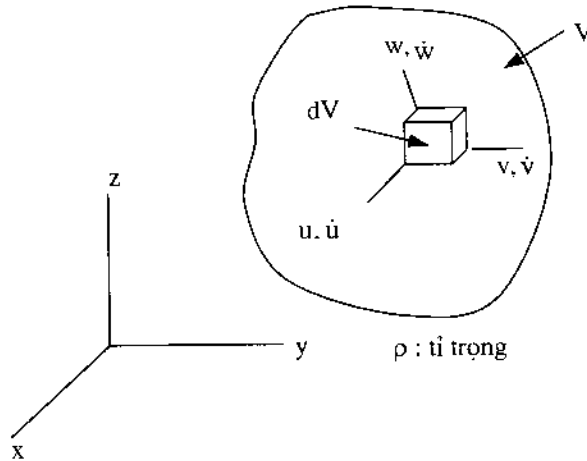
$\mathbf{K}$ - ma trận độ cứng;

$\vec{x}$ - véc tơ gia tốc;

$\vec{x}$ - véc tơ chuyển vị.

Vật rắn có khối lượng phân bố

Xét một vật rắn có khối lượng phân bố như trên hình (12.2)



Hình 12.2. Vật rắn có khối lượng phân bố

Thế năng đã được trình bày trong chương 1. Động năng có dạng

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\vec{u}}' \cdot \dot{\vec{u}} \cdot \rho \, dV \quad (12.5)$$

Trong đó: ρ - tỉ trọng (khối lượng trên đơn vị thể tích) của vật liệu; $\dot{\vec{u}}$ - véc tơ vận tốc tại điểm (x, y, z) với các thành phần $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ (hình 12.2)

$$\dot{\vec{u}} = [\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}] \quad (12.6)$$

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta chia vật thể thành các phần tử, véc tơ chuyển vị trong mỗi phần tử được biểu thị bằng hàm hình dạng và các thành phần chuyển vị tại các nút:

$$\vec{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (12.7)$$

Trong động lực học, các thành phần chuyển vị phụ thuộc vào thời gian, do đó, véc tơ vận tốc có dạng:

$$\dot{\vec{u}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} \quad (12.8)$$

Thay (12.8) vào (12.5), ta có:

$$T_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}' \left[\int \rho \mathbf{N}' \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (12.9)$$

Trong đó, số hạng trong dấu ngoặc vuông là ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{m}_c = \int \rho \mathbf{N}' \mathbf{N} dV \quad (12.10)$$

Ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau sẽ được suy ra trong phần sau.

Tổng động năng cho toàn hệ có thể viết:

$$T = \sum T_c = \sum \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}' \cdot \mathbf{m}_c \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}' \mathbf{M} \mathbf{Q} \quad (12.11)$$

Như trong chương hai đã trình bày, thế năng có dạng:

$$TN = \frac{1}{2} \mathbf{Q}' \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}' \mathbf{F} \quad (12.12)$$

Theo (12.1) và (12.3), ta có phương trình chuyển động:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (12.13)$$

Đối với dao động tự do, lực $\mathbf{F} = 0$ nên:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = 0 \quad (12.14)$$

Xuất phát từ trạng thái cân bằng, ta đặt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \sin \omega t \quad (12.15)$$

Trong đó: $\mathbf{U}$ - vec tơ biên độ dao động tại các nút;

ω (radian/s) là tần số vòng ($= 2\pi.f$, f = số chu kỳ/s hoặc Hz).

Thay (12.15) vào (12.14), ta có:

$$\mathbf{kU} = \omega^2 \mathbf{MU} \quad (12.16)$$

Đây là bài toán giá trị riêng khái quát:

$$\mathbf{kU} = \lambda \mathbf{MU} \quad (12.17)$$

Trong đó: $\mathbf{U}$ là vector riêng, nó biểu thị *một dao động* và ứng với giá trị riêng λ . Giá trị riêng λ là bình phương của tần số vòng ω . Tần số f bằng heztz (số chu kỳ trên giây) tính theo công thức $f = \omega/2\pi$.

Các phương trình trên cũng có thể suy ra từ nguyên lý D' Alembert hoặc công ảo.

§12.3. MA TRẬN KHỐI LƯỢNG CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Dưới đây, căn cứ vào các hàm hình dạng đã trình bày trong các chương trước, ta suy ra biểu thức ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau. Giả sử tỷ trọng không thay đổi trong FTHH, ta có:

$$m_c = \rho \int \mathbf{N}' \mathbf{N} dV \quad (12.18)$$

12.3.1. Thanh 1 chiều (chương 3)

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2] \quad (12.19)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2]$$

Trong đó: $N_1 = \frac{1-\xi}{2}$ $N_2 = \frac{1+\xi}{2}$

$$m_e = \rho \int_{-1}^{+1} N' N A d\xi = \frac{\rho A_c L_e}{2} \int_{-1}^{+1} N' N d\xi$$

Sao khi tính tích phân:

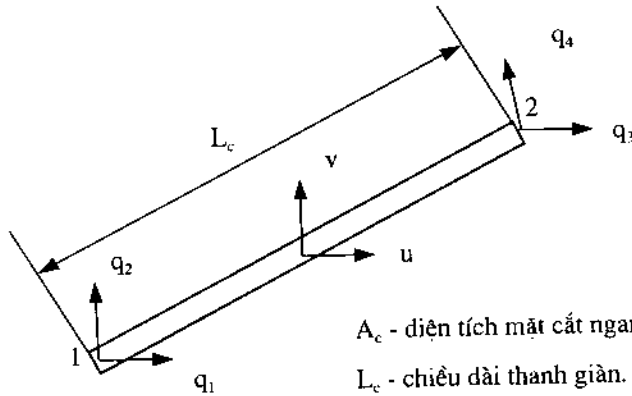
$$m_e = \frac{\rho A_c L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

12.3.2. Giàn (chương 4)

$$\mathbf{u}' = [u \quad v]$$

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$



Hình 12.3: Giàn

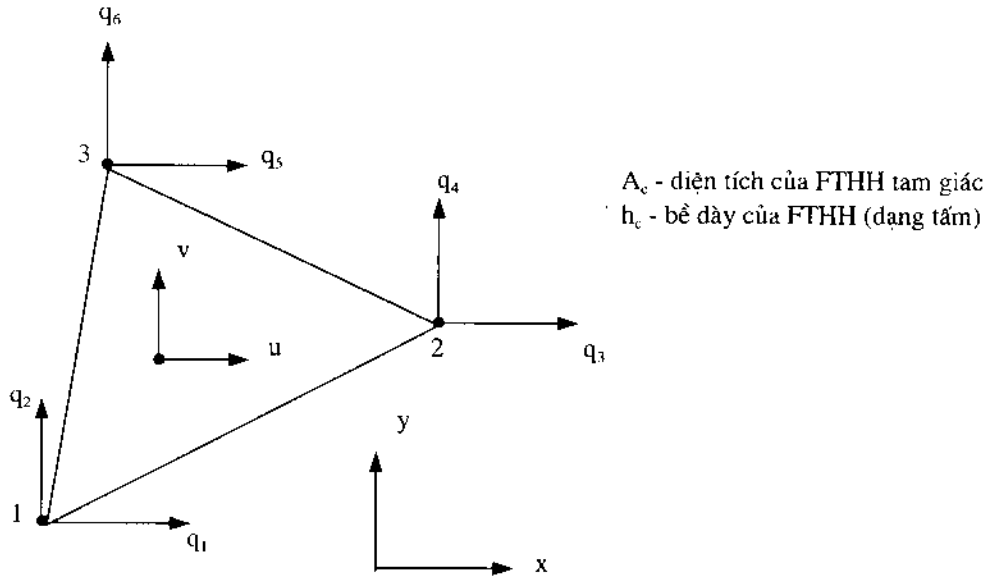
Cận tích phân lấy từ - 1 đến + 1 :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

$$m_e = \frac{\rho A_e L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

12.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút (chương 5)

Trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng từ chương 5, ta có:



Hình 12.4: FTHH tam giác 3 nút

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= [u \quad v] \\ \mathbf{q}' &= [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_6] \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.23)$$

Ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn

$$\mathbf{m}_e = \rho \int \mathbf{N}' \mathbf{N} dA$$

Do $\int_e N_i^2 dA = \frac{1}{6} A_e$, $\int_e N_i N_j dA = \frac{1}{12} A_e \dots$ ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho h_e A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (12.24)$$

12.3.4. Phần tử hữu hạn trong vật thể tròn xoay (chương 6)

Ta có: $\mathbf{u}' = [u \quad w]$

Trong đó: u, w là các thành phần chuyển vị trên phương xuyên tâm và phương dọc trục. Các vectơ $\mathbf{q}$ và $\mathbf{N}$ tương tự như đối với FTHH tam giác trong (12.23). Ta có:

$$\mathbf{m}_e = \int \rho \mathbf{N}' \mathbf{N} dV = \int \rho \mathbf{N}' \mathbf{N} 2\pi r dA \quad (12.25)$$

Vì $\mathbf{r} = N_1 \mathbf{r}_1 + N_2 \mathbf{r}_2 + N_3 \mathbf{r}_3$ (chương 6) nên:

$$\mathbf{m}_e = 25\pi\rho \int (N_1 \mathbf{r}_1 + N_2 \mathbf{r}_2 + N_3 \mathbf{r}_3) \mathbf{N}' \mathbf{N} dA$$

$$\text{Vì } \int N_1^2 dA = \frac{20A_e}{20}; \int N_1^2 N_2 dA = \frac{2A_e}{60}; \int N_1 N_2 N_3 dA = \frac{2A_e}{120}, \text{ v.v...}$$

ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\pi\rho A_e}{10} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\bar{r}_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} & 0 \\ & \frac{4}{3}\bar{r}_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} \\ & & \frac{4}{3}\bar{r}_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} & 0 \\ & & & \frac{4}{3}\bar{r}_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} \\ & & & & \frac{4}{3}\bar{r}_3 + 2\bar{r} & 0 \\ & & & & & \frac{4}{3}\bar{r}_3 + 2\bar{r} \end{bmatrix} \quad (12.26)$$

$$\text{Trong đó: } \bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \quad (12.27)$$

12.3.5. Phần tử hữu hạn tứ giác (chương 7)

Đối với FTHH tứ giác trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng, ta có:

$$\mathbf{u}' = [u \quad v]$$

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_8]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

Ma trận khối lượng có dạng:

$$\mathbf{m}_e = \rho L_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}' \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (12.29)$$

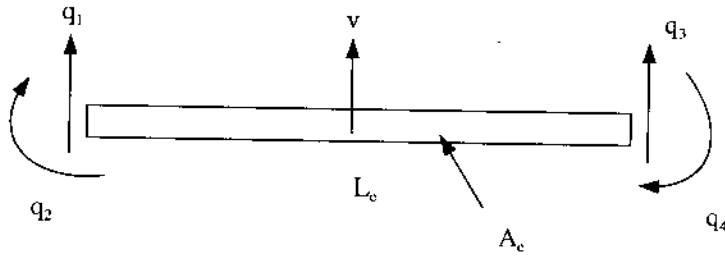
Tích phân trong (12.29) tiến hành theo phép cầu phương Gauss (xem chương 7).

12.3.6. Dầm (chương 8)

Đối với dầm trên hình (12.5), ta dùng các hàm hình dạng Hecmit trong chương 8.

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q} \quad (12.30)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}' \mathbf{H} \rho A_e = \frac{L_e}{2} d\xi \quad (12.31)$$



Hình 12.5: Dầm

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ \text{đối xứng} & & 156 & -22L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

12.3.7. Phần tử của khung phẳng (chương 8)

Phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ (hình 8.14a,b) là sự kết hợp của dầm và thanh 1 chiều. Vậy kết hợp (12.20) với (12.32), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ cục bộ:

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ & 156b & 22L_e b & 0 & 54b & -13L_e b \\ & & 4L_e^2 b & 0 & 13L_e b & -3L_e^2 b \\ & & & 2a & 0 & 0 \\ & & & & 156b & -22L_e b \\ & & & & & 4L_e^2 b \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

Dùng ma trận xoay $\mathbf{R}$ trong (8.49) (chương 8), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{m}_e = \mathbf{R}' \mathbf{m}_e \mathbf{R} \quad (12.34)$$

12.3.8. Phần tử hữu hạn tứ diện (chương 11)

Theo chương 11, vector chuyển vị $\mathbf{u}$ và ma trận hàm hình dạng $\mathbf{N}$ có dạng:

$$\mathbf{u}' = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (12.35)$$

Ma trận khối lượng

$$m_e = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (12.36)$$

Đối xứng

§12.4. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

Trước hết, ta nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính dưới dạng tổng quát:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad (12.37)$$

Trong đó: $\mathbf{A}$ - ma trận vuông;

$\mathbf{X}$ - véc tơ riêng;

λ - giá trị riêng.

Đối với bài toán dao động tự do, từ (12.17), ta có:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{U} \quad (12.38)$$

Để đưa phương trình (12.38) về dạng (12.37), ta nhân bên trái 2 vế của nó với nghịch đảo của ma trận khối $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U} \quad (12.39)$$

$$\text{Đặt:} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad (12.40)$$

và:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} \quad (12.41)$$

ta trở về dạng phương trình (12.37)

$\mathbf{M}$ là ma trận khối;

$\mathbf{K}$ là ma trận độ cứng.

12.4.1. Các tính chất của vectơ riêng và một số định lý liên quan

Phương trình (12.37) có thể đưa về dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Dưới dạng ma trận, phương trình trên có thể viết:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (12.42)$$

Hệ phương trình thuần nhất (12.42) có nghiệm duy nhất khi định thức của ma trận $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ triệt tiêu, nghĩa là:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (12.43)$$

Khai tính định thức trên, ta có đa thức bậc n của λ :

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \cdots + b_n$$

Nếu cho vế phải bằng không, ta có phương trình đặc trưng của ma trận $\mathbf{A}$:

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

Khi cấp của ma trận $\mathbf{A}$ bằng n , phương trình đặc trưng trên cho n giá trị riêng ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$)

Các nghiệm này có thể là số thực, số phức hoặc nghiệm bội (có từ 2 nghiệm bằng nhau trở lên).

Thay một giá trị riêng, chẳng hạn giá trị λ_i vào hệ phương trình (12.37) ta được *véc tơ riêng* tương ứng X_i . X_i là một véc tơ cột được ký hiệu như sau:

$$X_1 = [x_{11} \quad x_{21} \cdots x_{n1}]' \text{ ứng với } \lambda_1.$$

$$X_2 = [x_{12} \quad x_{22} \cdots x_{n2}]' \text{ ứng với } \lambda_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_n = [x_{1n} \quad x_{2n} \cdots x_{nn}]' \text{ ứng với } \lambda_n$$

Các vectơ riêng thường được biểu thị dưới dạng chuẩn hóa nghĩa là các phần tử X_i được chọn sao cho:

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2 + \dots + x_{ni}^2 = 1$$

Ma trận vuông tạo thành bởi các vectơ riêng gọi là *ma trận các mô đơ*:

$$\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_n] \quad (12.44)$$

Ma trận chéo tạo thành bởi các giá trị riêng gọi là *ma trận phổ*:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (12.45)$$

Thay $\bar{\mathbf{X}}$ từ (12.44) vào (12.37) sau khi đã xác định được toàn bộ các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$, ta được:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}.\mathbf{D} \quad (12.46)$$

do đó:

$$\bar{\mathbf{X}}^{-1}.\mathbf{A}.\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{D} \quad (12.47)$$

Sau đây là một số định lý liên quan đến giá trị riêng và vec tơ riêng, không chứng minh:

Định lý 1: Nếu ma trận vuông $\mathbf{A}$ có các giá trị riêng λ_i và các vectơ riêng tương ứng $\mathbf{X}_i$ thì các giá trị riêng của chuyển vị của $\mathbf{A}$ (tức $\mathbf{A}'$) bằng các giá trị riêng tương ứng nhưng các vectơ riêng $\mathbf{Y}_i$ thì lại trực giao với vectơ riêng $\mathbf{X}_i$ của $\mathbf{A}$ nghĩa là:

$$\mathbf{Y}'_j \mathbf{X}_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \quad (12.48)$$

Trong đó, các vectơ $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ đều được chuẩn hóa.

Định lý 2: Nếu ma trận $\mathbf{A}$ đối xứng và toàn bộ các phần tử của nó đều là những số thực thì toàn bộ các giá trị riêng và vectơ riêng của nó cũng là những số thực. Hơn nữa, các vectơ riêng trực giao với nhau nghĩa là:

$$\mathbf{X}'_i \mathbf{Y}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \quad (12.49)$$

Định lý 3: Một ma trận đối xứng $\mathbf{A}$ có thể được biến đổi thành một ma trận chéo trong đó các phần tử là các giá trị riêng của nó bằng phép biến đổi trực giao $\bar{\mathbf{X}}'.\mathbf{A}.\bar{\mathbf{X}}$, $\bar{\mathbf{X}}$ là ma trận các mô đơ của $\mathbf{A}$.

Định lý 4: Nếu các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $\mathbf{A}$ là λ_i và $\mathbf{X}_i$ thì các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T}.\mathbf{A}.\mathbf{T}^{-1}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của $\mathbf{A}$ còn các vectơ riêng bằng $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}_i$, $\mathbf{T}$ là một ma trận vuông không suy biến.

Định lý 5: Nếu gọi vết của ma trận $\mathbf{A}$ là tổng các phần tử trên đường chéo chính của nó thì tổng các giá trị riêng của $\mathbf{A}$ bằng vết của nó nghĩa là:

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad (12.50)$$

Định lý 6: Định thức của ma trận $\mathbf{A}$ bằng tích toàn bộ các giá trị riêng của nó nghĩa là:

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (12.51)$$

Định lý 7: Cho ma trận $\mathbf{A}$ và ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T}$ là một ma trận vuông bất kỳ không suy biến. Định thức và vết của 2 ma trận $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ hoàn toàn như nhau nghĩa là:

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{B}| \\ a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} &= b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (12.52)$$

Dưới đây, trình bày cách tính các giá trị riêng và vectơ riêng của một ma trận.

12.4.2. Một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng

Sau đây là một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng.

12.4.2.1. Phương pháp đa thức đặc trưng

Như trong phần trước đã trình bày, giải hệ phương trình (12.43), ta sẽ được các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$. Lần lượt thay các giá trị riêng λ_i vào phương trình (12.37), ta sẽ được các vectơ riêng tương ứng. Phương pháp này khá phức tạp.

12.4.2.2. Phương pháp thương số Rayleigh để xác định giá trị riêng lớn nhất

Như trong phần trước đã trình bày, đối với ma trận cấp n , ta có n giá trị riêng được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (12.53)$$

Trong đó: λ_1 - giá trị riêng bé nhất;

λ_n - giá trị riêng lớn nhất.

Phương pháp thương số Rayleigh là phương pháp tính lặp. Quá trình tính chia thành nhiều vòng cho đến khi nào giá trị riêng và vectơ riêng ở vòng sau xấp xỉ với các giá trị tương ứng ở vòng trước.

Trước hết, ta gán cho vectơ riêng những giá trị bất kỳ, chẳng hạn:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thay vào (12.37) ta được: $\mathbf{A}\mathbf{X}^{(1)} = \lambda\mathbf{X}^{(1)}$

Trong vòng tính đầu tiên, ta được giá trị ban đầu gần đúng $\lambda^{(1)}$ bằng cách chia phần tử đầu tiên của ma trận cột $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(1)}$ cho phần tử đầu tiên của vectơ riêng:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{Phần tử đầu tiên của } \mathbf{AX}^{(1)}}{\mathbf{x}_1^{(1)}} \quad (12.54)$$

Trong đó, chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự của vòng tính. Giá trị gần đúng thứ hai của vector riêng được xác định theo công thức:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \frac{\mathbf{AX}^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \quad (12.55)$$

Một cách tổng quát, ta có hệ thức:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^{(m)} = \lambda^{(m)} \cdot \mathbf{X}^{(m+1)} \quad (12.56)$$

Trong đó, m biểu thị số thứ tự của vòng tính. Ta tiếp tục các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56) cho đến khi giá trị của vector riêng trong vòng tính cuối cùng xấp xỉ với giá trị tương ứng của nó trong vòng tính trước thì kết thúc.

Khi giá trị riêng chỉ cần độ chính xác vừa phải và vector riêng là một đại lượng không quan trọng, ta tính giá trị riêng bằng công thức gần đúng sau đây gọi là *thương số Rayleigh*.

$$\lambda_0 = \frac{\mathbf{X}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}}{\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}} \quad (12.57)$$

Ví dụ 12.2: Tìm giá trị riêng lớn nhất λ_3 và vector riêng tương ứng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Giải:

Trước hết, ta gán cho vector riêng những giá trị bất kỳ chẳng hạn bằng đơn vị:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56), ta lần lượt được các kết quả sau:

	$\mathbf{AX}^{(m)}$	$\lambda^{(m)}$	$\mathbf{X}^{(m+1)}$
m = 1	$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
m = 2	$\begin{bmatrix} 11 \\ -18 \\ 19 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1,63 \\ 1,72 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
 m = 3 & \begin{bmatrix} 13,24 \\ -20,63 \\ 19,54 \end{bmatrix} & 13,24 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,56 \\ 1,48 \end{bmatrix} \\
 m = 7 & \begin{bmatrix} 12,29 \\ -18,26 \\ 16,28 \end{bmatrix} & 12,29 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix} \\
 m = 8 & \begin{bmatrix} 12,265 \\ -18,21 \\ 16,21 \end{bmatrix} & 12,265 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Sau 8 vòng tính, ta thấy 2 vectơ riêng cuối cùng bằng nhau. Vậy giá trị riêng lớn nhất là:

$$\lambda_3 = 12,265 \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Trong vòng tính thứ 3, nếu áp dụng (12.57), ta được kết quả:

$$m = 3 \quad X'AX = 68,87 \quad X'X = 5,63$$

Vậy $\lambda_3 = 68,87/5,63 = 12,33$. So với kết quả vừa tính ở trên, sai số không lớn.

12.4.2.3. Phương pháp thương số Rayleizh xác định giá trị riêng bé nhất.

Giả sử λ_n là giá trị riêng lớn nhất của ma trận **A**. Theo (12.37) ta có:

$$AX = \lambda_n X$$

Nhân bên trái 2 vế của phương trình trên với A^{-1} , ta có:

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda_n} X = \lambda_1 X \quad (12.58)$$

Trong đó, λ_1 là giá trị riêng bé nhất của **A**.

Vậy ta có quy tắc tìm giá trị riêng bé nhất của ma trận **A**: giá trị riêng bé nhất của **A** bằng nghịch đảo của giá trị riêng lớn nhất của A^{-1} .

12.4.2.4. Phương pháp khử dần giá trị riêng đã biết để tính các giá trị riêng tiếp theo.

Giả sử xuất phát từ giá trị riêng lớn nhất λ_n và vectơ riêng tương ứng X_n , ta tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo bằng cách khử nghiệm λ_n trong phương trình đặc trưng.

$$|A - \lambda I| = 0$$

Theo định lý 4, các giá trị riêng của ma trận $B = T^{-1}.A.T$ bằng các giá trị riêng tương ứng của **A** còn các vectơ riêng $Y_i = T^{-1}.X_i$ trong đó **T** là một ma trận vuông không suy biến.

Giả sử dùng phép biến đổi sao cho ma trận **B** có dạng:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

Ta có:

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow (\lambda_n - \lambda) |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Trong đó:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (12.60)$$

Vậy các giá trị riêng của **C** cũng là các giá trị riêng của **B** đồng thời cũng là giá trị riêng của **A**.

Ma trận **T** thoả mãn điều kiện (12.59) có dạng như sau:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{n2} & 1 & \dots & 0 \\ x_{n3} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ x_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x_{n2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x_{n3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ -x_{nn} & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad (12.61)$$

Trong đó, cột đầu tiên của **T** biểu thị vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_n . Xác định giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} theo các bước sau:

Lập ma trận biến đổi **T** và nghịch đảo của nó theo (12.61);

Tính ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$

Chia khối ma trận **B** như sau:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array} \right] \quad (12.62)$$

Trong đó: $b_{11} = \lambda_n$;

B_{12} là hàng đầu tiên của ma trận $\mathbf{A}$ sau khi loại bỏ phần tử thứ nhất.

Tính giá trị riêng lớn nhất của ma trận $\mathbf{C} = \mathbf{B}_{22}$ theo phương pháp tính lặp. Giá trị này chính là giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} của ma trận $\mathbf{A}$.

Vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_{n-1} được tính như sau:

Véc tơ riêng $\mathbf{Y}_{n-1}$ ứng với giá trị riêng λ_{n-1} thỏa mãn hệ thức:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot \mathbf{Y}_{n-1}$$

Thay $b_{11} = \lambda_n$ và $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{C}$ vào (12.62) ta có:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_n & B_{12} \\ \hline 0 & C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ Y'_{n-1} \end{array} \right] = \lambda_{n-1} \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ Y'_{n-1} \end{array} \right] \quad (12.63)$$

Trong đó: y_{12} là phần tử đầu tiên của vectơ riêng $\mathbf{Y}_{n-1}$;

$\mathbf{Y}'_{n-1}$ là vectơ riêng của ma trận $\mathbf{C}$ vì $\mathbf{C}\mathbf{Y}_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot \mathbf{Y}_{n-1}$.

Thực hiện phép nhân ma trận:

$$\lambda_n y_{12} + B_{12} \mathbf{Y}'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{12}$$

do đó

$$y_{12} = \frac{B_{12} \cdot \mathbf{Y}'_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \quad (12.64)$$

Vectơ riêng $\mathbf{X}_{n-1}$ ứng với giá trị riêng λ_{n-1} của ma trận $\mathbf{A}$ tính theo công thức:

$$\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}_{n-1} \quad (12.65)$$

Giá trị riêng tiếp theo λ_{n-2} và vectơ giá trị riêng tương ứng $\mathbf{X}_{n-2}$ của ma trận $\mathbf{A}$ được xem như giá trị riêng thứ hai và vectơ riêng thứ hai của ma trận $\mathbf{C}$. Cứ như vậy, ta tiếp tục tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo cách trình bày trên.

Ví dụ 12.3: Xác định các giá trị riêng tiếp theo của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ nếu } \lambda_3 = 12,265$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Giải:

Theo (12.61) ta có:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,485 & 1 & 0 \\ -1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\mathbf{AT}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ -18,21 & 6 & -4 \\ 16,21 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ 0 & 0,06 & -2,515 \\ 0 & 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy theo (12.60): $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,06 & -2,515 \\ 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$

Sau khi dùng phương pháp tính lặp đối với ma trận $\mathbf{C}$, ta được kết quả:

$$\lambda_2 = 5,01 \quad \mathbf{Y}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Vì $\mathbf{B}_{12} = [-4 \quad 1]$ nên sau khi áp dụng (12.64) ta được kết quả:

$$y_{12} = \frac{\mathbf{B}_{12} \mathbf{Y}'_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{5,97}{12,265 - 5,01} = \frac{5,97}{7,255} = 0,825$$

Vậy vectơ riêng thứ hai của $\mathbf{B}$ là:

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Theo định lý 4:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,224 \\ -0,878 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,371 \\ -1,062 \end{bmatrix}$$

Giá trị riêng cuối cùng được xác định bằng cách khử λ_2 từ phương trình đặc trưng:

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Căn cứ vào giá trị $\mathbf{Y}'_2$ và (12.61), ta được kết quả:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,97 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,515 \\ 9,88 & 5,675 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } \mathbf{D} = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,512 \\ 0 & 0,725 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phương pháp tính lặp đối lập với ma trận $\mathbf{D}$, ta được kết quả:

$$\lambda_1 = 0,725 \quad Z'_3 = 1. \text{ Theo (12.64)}$$

$$z_{23} = \frac{(-2,512).1}{5,01 - 0,725} = 0,586$$

$$\text{Vậy: } \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Y}'_1 = \mathbf{T}_2 \mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,586 \\ -0,154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$$

Theo (12.64):

$$y_{13} = \frac{-[-4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}}{12,265 - 0,725} = \frac{4,263}{11,54} = 0,369$$

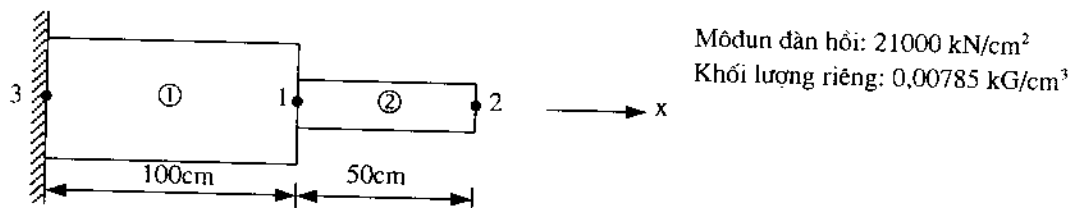
$$\text{Vậy: } \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, vector tải ứng với giá trị riêng λ_1 của ma trận $\mathbf{A}$ là:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 0,452 \\ 0,226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,221 \\ 0,612 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 12.4:

Hệ một chiều như trên hình (12.6)



Hình : 12.6

- Tính :
- 1- Giá trị riêng lớn nhất;
 - 2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.20), xác lập các ma trận độ cứng riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.
Ta có ma trận khối lượng.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,793 & 0,262 \\ \text{Đối xứng} & 0,523 \end{bmatrix}$$

Nghịch đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,602 & -0,301 \\ -0,301 & 2,063 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (3.19), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2940 & -1680 \\ \text{Đối xứng} & 1680 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận A theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1926,115 & -1284,076 \\ -4173,248 & 3852,229 \end{bmatrix}$$

Tính lập giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận A theo (12.54), (12.55), (12.56).

Kết quả: GTRLN: 5396,411

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 -2,703]'

Ví dụ 12.5:

Hệ một chiều như trong ví dụ (12.4). Tính:

- 1- Giá trị riêng bé nhất;
- 2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, tính nghịch đảo của ma trận A (đã tính trong ví dụ (12.4)).

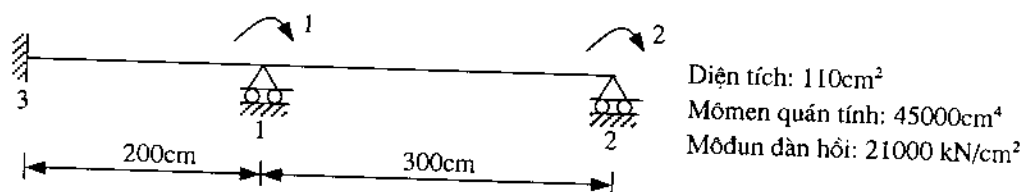
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,869 \times 10^{-3} & 6,231 \times 10^{-4} \\ 2,025 \times 10^{-3} & 9,345 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Tính lập giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng theo (12.54), (12.55), (12.56).

$$\text{GTRBN} = 1/\text{GTRLN} = 382,03$$

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 1,203]'

Ví dụ 12.6: Một dầm liên tục như trên hình (12.7)



Khối lượng riêng: 0,00785 kg/cm³

Hình 12.7

- Tính :
- 1- Giá trị riêng lớn nhất;
 - 2- Vector riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 28783313,33 & -166522,14 \\ -166532,14 & 222042,86 \end{bmatrix}$$

Ngược đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 6,137 \times 10^{-6} & 4,603 \times 10^{-6} \\ 4,603 \times 10^{-6} & 7,956 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 315 \times 10^5 & 63 \times 10^5 \\ \text{Đối xứng} & 126 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Tính ma trận A theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 222,329 & 96,665 \\ 195,120 & 192,244 \end{bmatrix}$$

Tính lập theo (12.54), (12.55), (12.56). Kết quả:

GTRLN: 320,795

Vector riêng tương ứng: [1,0 1,019]'

Ví dụ 12.7:

Dầm liên tục như trong ví dụ (12.6)

- Tính:
- 1- Giá trị riêng bé nhất
 - 2- Vectơ riêng tương ứng

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, nghịch đảo ma trận A (đã tính trong ví dụ 12.6) và tiến hành tính lập.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0131 & -0,0098 \\ -0,0198 & 0,0225 \end{bmatrix}$$

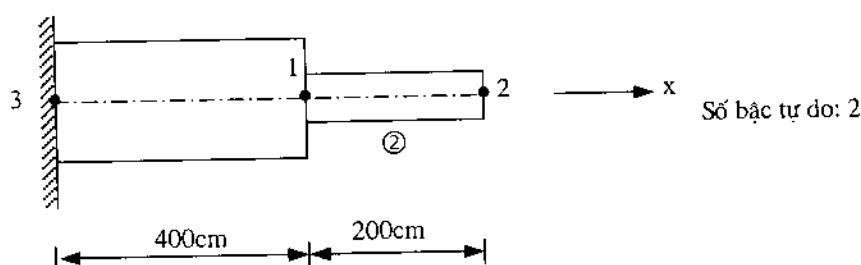
Kết quả: GTRBN: $1/GTRLN = 30,982$

Vectơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad -1,982]'$

§12.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÁ TRỊ RIÊNG LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG BÉ NHẤT CHO MỘT SỐ KẾT CẤU

12.5.1. Thuật toán lập trình tính GTRLN cho hệ một chiều (CTR19)

Lấy thí dụ trên hình (12.8)



Hình 12.8

Nhập số liệu theo bảng dưới:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm ²)	Môđun đàn hồi (kN/cm ²)	Khối lượng riêng (kg/cm ³)	Số thứ tự BTĐ	
					d ₁	d ₂
1	400	4	21000	0,00785	3	1
2	200	2	21000	0,00785	1	2

2- Xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể M theo (12.20).

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể K theo (3.19)

5- Tính ma trận A theo (12.40).

6- Thực hiện phương pháp tính lập theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vector riêng tương ứng.

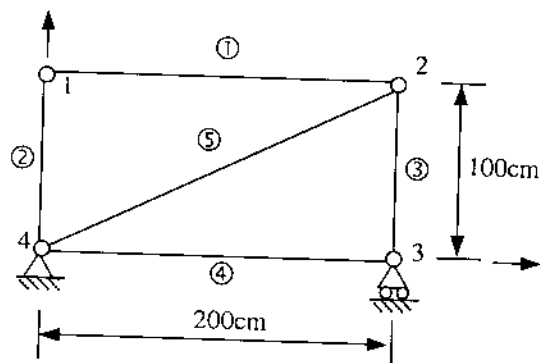
12.5.2. Thuật toán tính GTRBN và vector riêng tương ứng cho hệ một chiều (CTR20)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.1 (CTR19)

Chỉ khác là nghịch đảo ma trận A và thực hiện phương pháp tính lập.

12.5.3. Thuật toán tính GTRLN và vector riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR21)

Lấy ví dụ trên hình (12.9):



Số BTĐ : = 4

Hình 12.9

Nhập số liệu như trong bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm ²)	Môđun đàn hồi (kN/cm ²)	Khối lượng riêng (kg/cm ³)	Tọa độ (cm)				Số thứ tự bậc tự do			
				x ₁	x ₂	y ₁	y ₂	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄
1	12	21000	0,00785	0	200	100	100	1	2	3	4
2	12	21000	0,00785	0	0	0	100	7	8	1	2
3	12	21000	0,00785	200	200	0	100	5	6	3	4
4	12	21000	0,00785	0	200	0	0	7	8	5	6
5	12	21000	0,00785	0	200	0	100	7	8	3	4

2- Căn cứ vào (12.22), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể M.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (4.10), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể K.

5- Tính ma trận A theo (12.40)

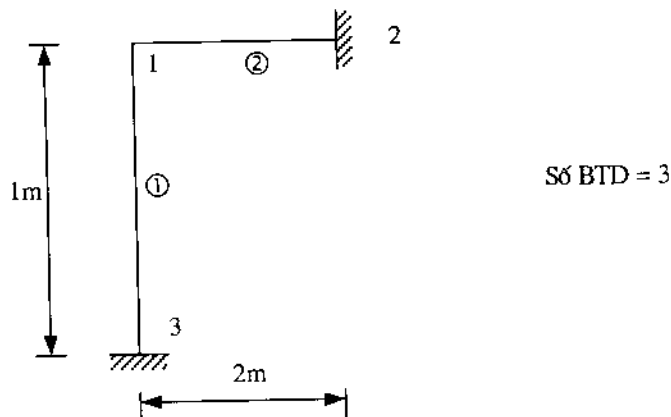
6- Thực hiện phương pháp tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.4. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR22)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.3 (CTR21) chỉ khác là nghịch đảo ma trận A và thực hiện phương pháp tính lặp để được GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.5. Thuật toán tính GTRLN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR23)

Lấy ví dụ trên hình (12.10)



Hình 12.10

Phần tử	Tọa độ (m)				Diện tích m^2	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)
	x_1	x_2	x_3	x_4			
1	0	0	0	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}
2	0	2	1	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

2- Căn cứ vào (12.34), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể M.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (8.53a), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể K.

5- Tính ma trận A theo (12.40)

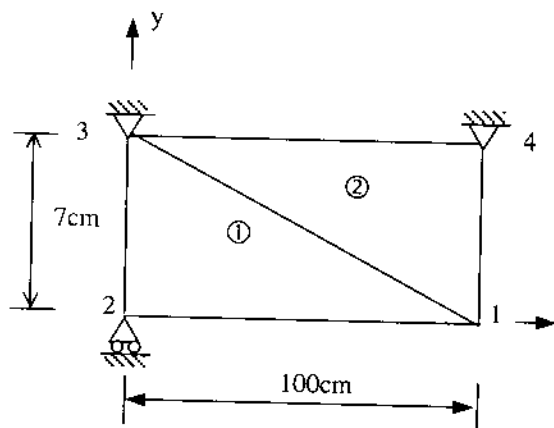
6- Thực hiện phương pháp lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.6. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR24)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.5 (CTR23). Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận A để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.7. Thuật toán tính GTRLN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR25)

Lấy ví dụ trên hình (12.11):



Phần tử	Số thứ tự tổng thể		
1	1	3	2
2	1	4	3

Số BTĐ có chuyển vị: 3

Hình 12.11

1- Nhập số liệu

Phần tử	Tọa độ (m)						Môđun đàn hồi (kN/cm ²)	Bề dày tấm (cm ²)
	x ₁	x ₂	x ₃	y ₁	y ₂	y ₃		
1	10	0	0	0	7	0	21000	0,5
2	10	10	0	0	7	7	21000	0,5

Phần tử	Hệ số thoát xong	Số thứ tự bậc tự do					
		d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆
1	0,3	1	2	5	6	3	4
2	0,3	1	2	7	8	5	6

2- Căn cứ vào (12.24), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể M.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (5.30), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể K.

5- Tính ma trận A theo (12.40)

6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

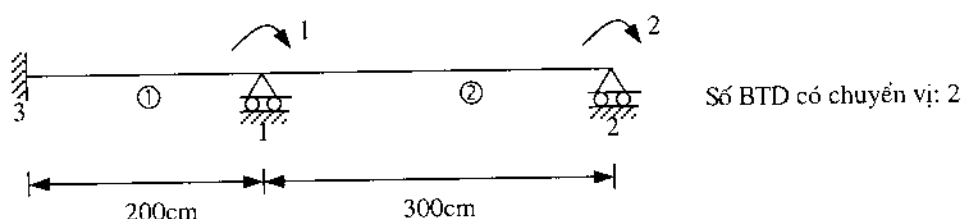
12.5.8. Thuật toán tính GTRBN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR26)

Các bước như đã trình bày trong § 12.5.7 (CTR25).

Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận A và thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vector riêng tương ứng.

12.5.9. Thuật toán tính GTRLN cho hệ dầm liên tục (CTR27)

Lấy ví dụ trên hình 12.12.



Hình 12.12

1- Nhập số liệu trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm ²)	Mômen quán tính (cm ⁴)	Môđun đàn hồi (kN/cm ²)	Khối lượng riêng (kG/cm ³)	Số thứ tự bậc tự do			
						d ₁	d ₂	d ₃	d ₄
1	200	110	45000	21000	0,00785	5	6	3	1
2	300	110	45000	21000	0,00785	3	1	4	2

2- Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể M.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể K.

5- Tính ma trận A theo (12.40)

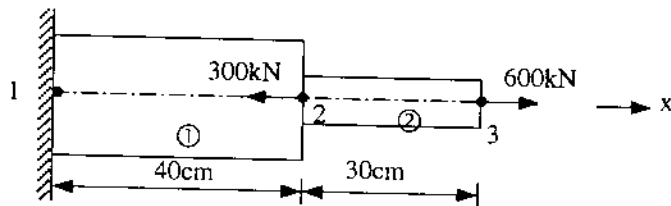
6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vector riêng tương ứng.

12.5.10. Thuật toán tính GTRBN cho hệ dầm liên tục(CTR28)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.9. Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận A và được thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vector riêng tương ứng.

BÀI TẬP

Bài 1:



Diện tích:

Thanh 1: 4cm^2

Thanh 2: $2,5\text{cm}^2$

Môđun đàn hồi:

Hình: B₁

Cho thanh 1 chiều như trên hình B₁. Dùng phương pháp loại trừ tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Biến dạng

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[-0,1429 \quad -0,4857]'\text{cm}$
- 2- Ứng suất: $[75 \quad 240]'\text{ kN/cm}^2$
- 3- Phản lực: -300kN

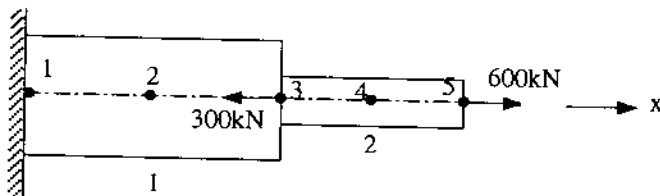
Bài 2: Đầu đề như trên hình B₁. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Phản lực

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[-7,79 \cdot 10^{-6} \quad -0,1429 \quad -0,485]'\text{ cm}$
- 2- Ứng suất: $[75 \quad 240]'\text{ kN/cm}^2$
- 3- Phản lực: -300kN

Bài 3:



Diện tích:

Thanh 1: 4cm^2

Thanh 2: $2,5\text{cm}^2$

Môđun đàn hồi: 21000 N/cm^2

Hình: B₂

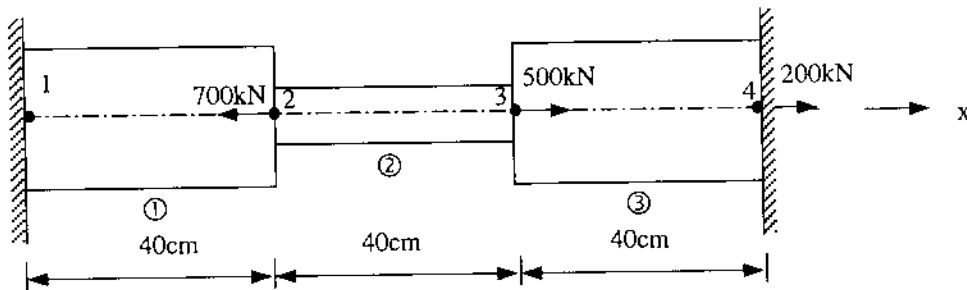
Đầu đề như trên hình B₂. Dùng phương pháp mô hình phân tử hữu hạn bậc 2 tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Phản lực

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[-0,0714 \quad -0,1429 \quad -0,3143 \quad -0,4857]' \text{cm}$
- 2- Ứng suất: giống bài 1 và bài 2
- 3- Phản lực: giống bài 1 và bài 2

Bài 4:



Diện tích:

Thanh 1: 4cm^2

Thanh 2: 2cm^2 Mô đun đàn hồi: 21000kN/cm^2

Thanh 3: 4cm^2

Hình: B₃

Đầu đề như trên hình B₃. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Phản lực

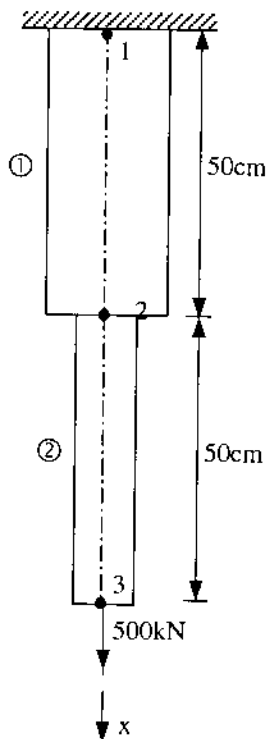
Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[-1,2698 \cdot 10^{-5} \quad -0,1905 \quad 0,0952 \quad 1,2698 \cdot 10^{-5}]' \text{cm}$
- 2- Ứng suất: $[-99,997 \quad 150 \quad -49,997]' \text{kN/cm}^2$
- 3- Phản lực:

Điểm 1: 400 kN

Điểm 4: -400kN

Bài 5: Đầu đề như trên hình B₄



Diện tích:

Thanh 1: 6cm^2

Thanh 2: 2cm^2

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số giãn nở: $20 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$

Gia số nhiệt độ: 40°C

Tỷ trọng: $785 \cdot 10^{-5}\text{ kN/cm}^3$

Hình: B₄

Thanh chịu tác dụng của tải trọng, của nhiệt độ và trọng lượng bản thân. Dùng phương pháp loại trừ tính:

1- Chuyển vị

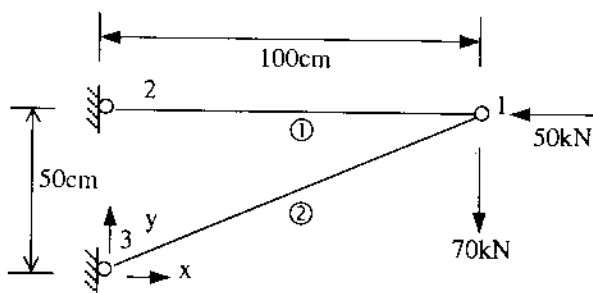
2- Ứng suất

Đáp án:

1) Chuyển vị: $[0,2306\ 0,8612]'\text{cm}$

2) Ứng suất: $[96,86\ 264,84]'\text{ kN/cm}^2$

Bài 6: Cho một giàn như trên hình B₅



Diện tích:

Thanh 1: 8cm^2

Thanh 2: 8cm^2

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hình: B₅

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Phản lực

So sánh với kết quả tách nút

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[0,0536 \ -0,34]^T$ cm

2- Ứng suất: $[11,25 \ 19,57]^T$ kN/cm²

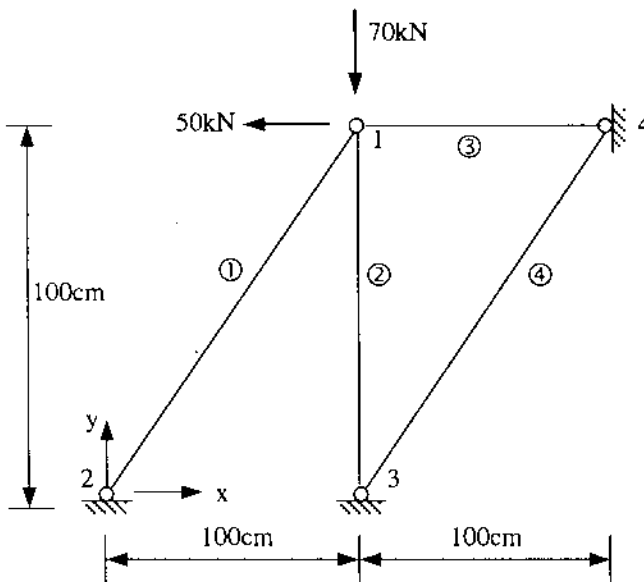
3- Phản lực

$$f_l(3) = -90\text{kN} \quad f_l(4) = 0 \quad f_l(5) = 140\text{kN} \quad f_l(6) = 70\text{kN}$$

4- Kết quả hoàn toàn giống với phương pháp tách nút.

Bài 7:

Cho 1 giàn như trên hình B₆.



Diện tích toàn bộ các thanh 1: 12cm²
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Hình: B₆

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất
- 3- Phản lực

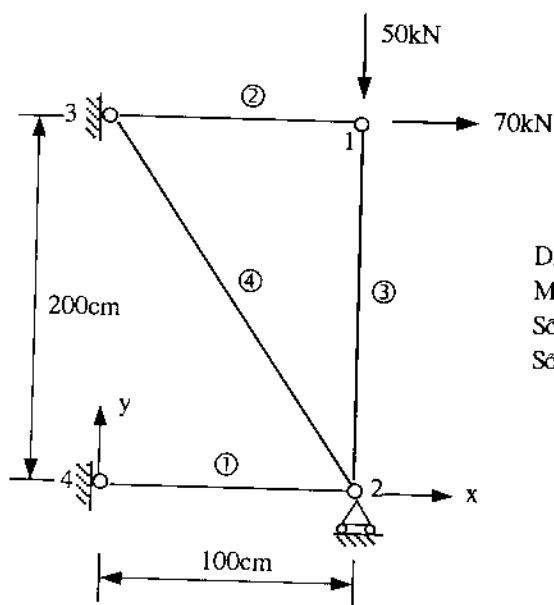
Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-0,0099 \ 0,0179]^T$ cm

2- Ứng suất: $[-2,93 \quad -3,76 \quad 2,09 \quad 0]^T \text{ kN/cm}^2$

3- Phản lực: $fl(3) = 2485 \text{ kN} \quad fl(4) = 2485 \text{ kN} \quad fl(5) = 0$
 $fl(6) = 4515 \text{ kN} \quad fl(7) = 2515 \text{ kN} \quad fl(8) = 0$

Bài 8: Một giàn phẳng như trên hình B₇.



Diện tích toàn bộ các thanh 1 : 12 cm^2
 Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình B₇

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[0,028 \quad -0,04 \quad 0]^T \text{ cm}$

2- Ứng suất: $[0 \quad 5,83 \quad -4,16 \quad 0]^T \text{ kN/cm}^2$

3- Phản lực

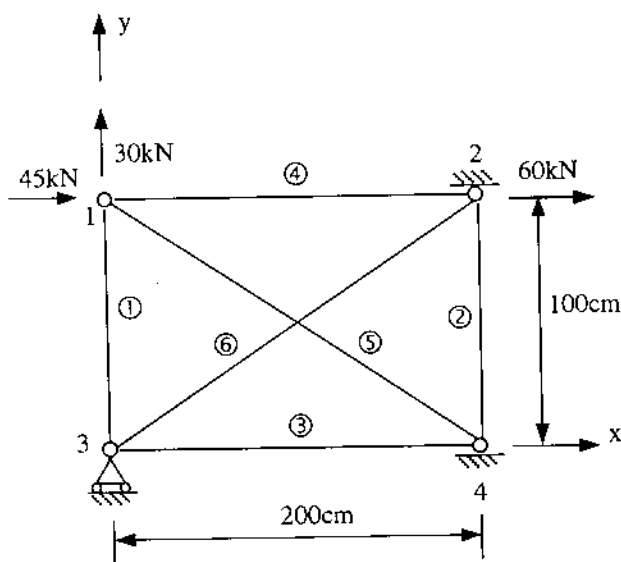
$fl(4) = 50 \text{ kN} \quad fl(5) = -70 \quad fl(6) = 0 \text{ kN} \quad fl(7) = 0 \text{ kN} \quad fl(8) = 0$

Bài 9: Cho một giàn phẳng như trên hình B₈

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Diện tích toàn bộ các thanh 1: 12cm^2
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
 Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

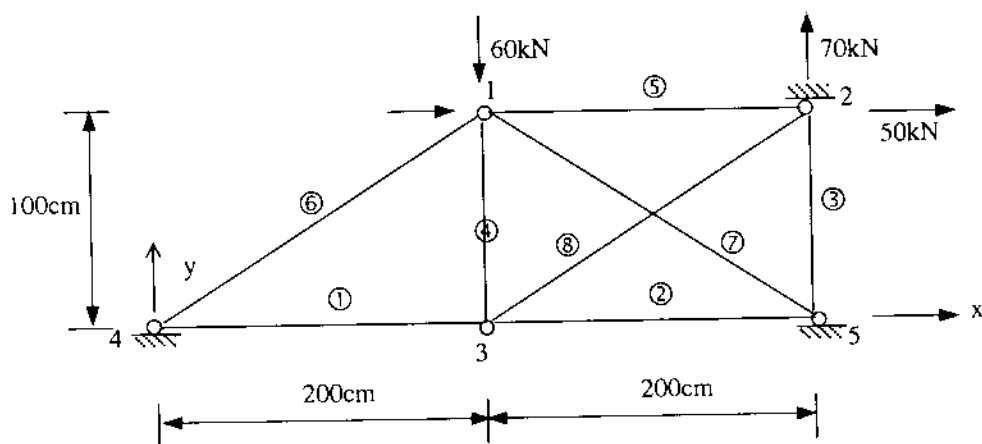
Hình: B_8

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[0,048 \quad 0,019 \quad 0,039 \quad 0,0005 \quad 0]^T\text{cm}$

2- Ứng suất: $[3,93 \quad -3,28 \quad 0 \quad -0,88 \quad -3,20 \quad 3,31]^T\text{ KN/cm}^2$

Bài 10: Cho một giàn phẳng như trên hình B_9 .



Diện tích toàn bộ các thanh : 4cm^2

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_9

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

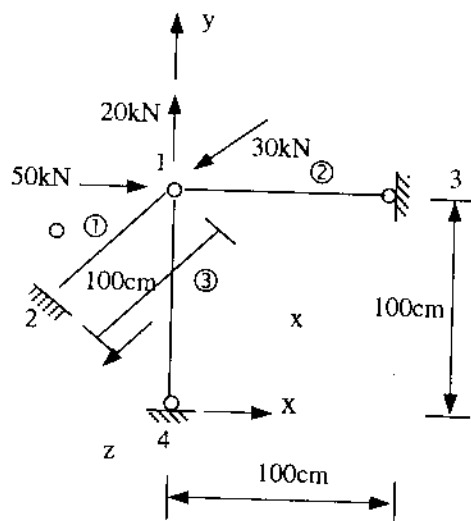
Đáp án:

1- Chuyển vị: $[0,053 \quad -0,103 \quad 0,093 \quad 0,13 \quad -0,007 \quad -0,12]^T \text{cm}$

2- Ứng suất: $[-0,72 \quad 0,72 \quad 6,56 \quad 4,05 \quad 4,17 \quad -5,21 \quad -8,78 \quad -1,62]^T \text{KN/cm}^2$

Bài 11:

Cho một giàn không gian như trên hình B₁₀.



Diện tích toàn bộ các thanh : 1 cm^2
 Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₁₀

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

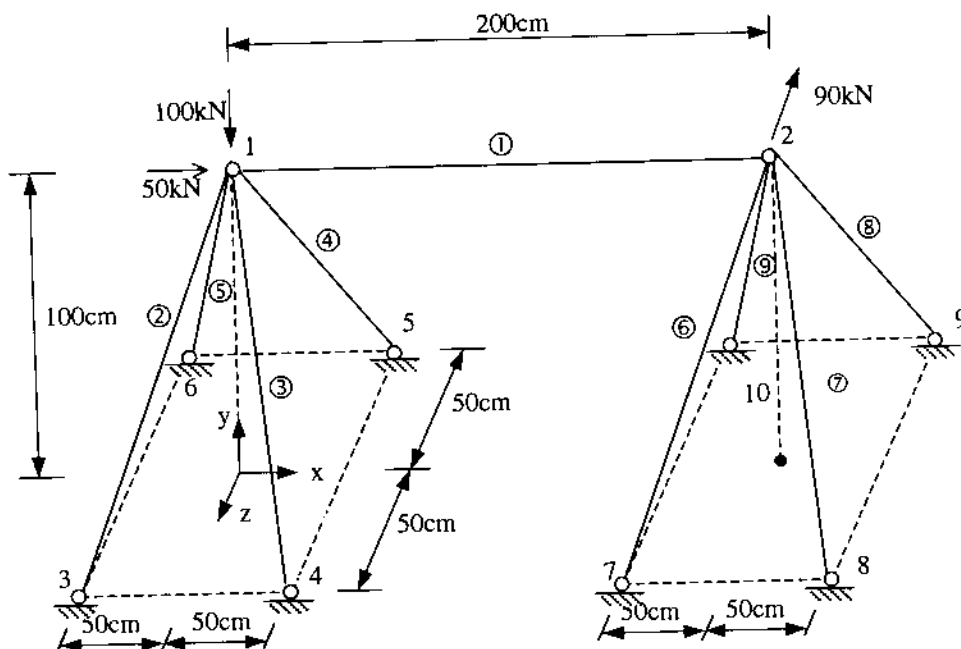
1- Chuyển vị: $[0,016 \quad 0,006 \quad 0,01]^T \text{cm}$

2- Ứng suất: $[-2,00 \quad -3,33 \quad 1,33]^T \text{ kN/cm}^2$

3- Phản lực

$fl(4) = 0$	$fl(5) = 0$	$fl(6) = -30 \text{ kN}$
$fl(7) = -50 \text{ kN}$	$fl(8) = 0$	$fl(9) = 0$
$fl(10) = 0$	$fl(11) = -20 \text{ kN}$	$fl(12) = 0$

Bài 12: Cho 1 giàn không gian như trên hình B₁₁.



Diện tích toàn bộ các thanh : 20cm^2
 Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₁₁

Dùng hươg pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất

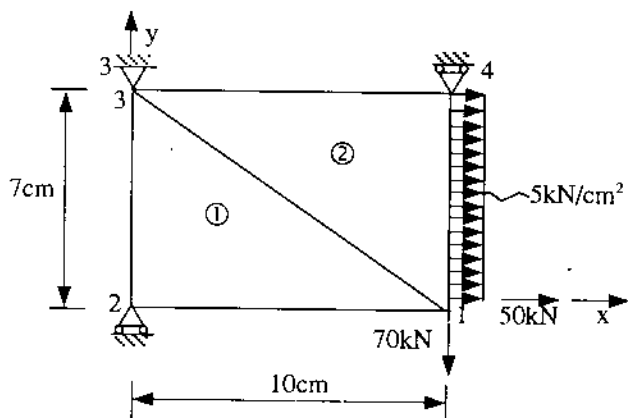
Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[0,01 \quad -0,01 \quad 0 \quad 0,007 \quad -0,079 \quad 0,591]' \text{cm}$
- 2- Ứng suất: $[-51,86 \quad -52,85 \quad 29,82 \quad 30,81 \quad -0,50 \quad -51,86 \quad -52,85 \quad 29,82 \quad 30,81]' \text{ kN/cm}^2$

Bài 13: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B₁₂.

Yêu cầu tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất



Hình: B₁₂

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
 Hệ số Poátxong: 0,3

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,0048 -0,032 0,019]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [6,82 3,20 2,05]' kN/cm²

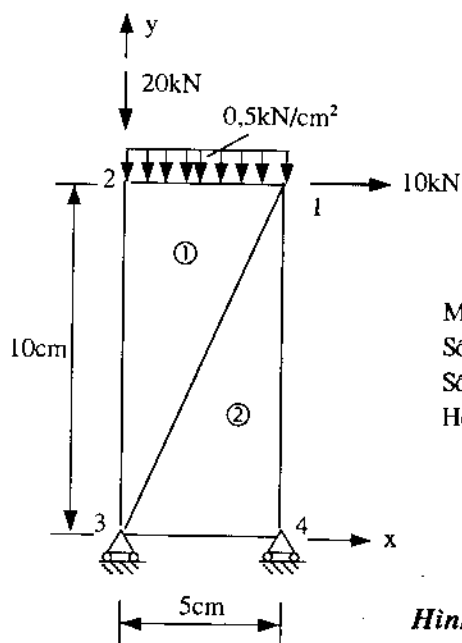
Phần tử 2: [10,66 -4,78 -5,57]' kN/cm²

Bài 14:

Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B₁₃. Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
 Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B₁₃

Đáp án:

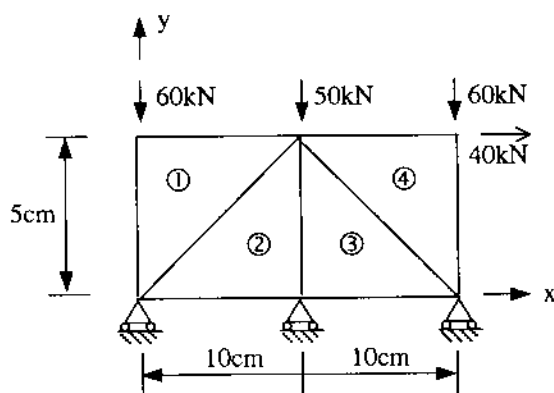
1- Chuyển vị: $[0,0025 \ -0,002 \ 0,0019 \ -0,0023]^T \text{cm}$

2- Ứng suất:

Phần tử 1: $[1,009 \ -1,361 \ -4,462]^T \text{kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-4,538 \ 2,019 \ 1,981]^T \text{kN/cm}^2$

Bài 15: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B₁₄



Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B₁₄

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-0,0010 \ -0,0029 \ 0,0072 \ -0,0078 \ 0,0050 \ -0,0039]^T \text{cm}$

2- Ứng suất:

Phần tử 1: $[0,0527 \ -11,983 \ 0,0264]^T \text{kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-1,076 \ -3,587 \ 1,153]^T \text{kN/cm}^2$

Phần tử 3: $[-1,076 \ -3,587 \ 1,153]^T \text{kN/cm}^2$

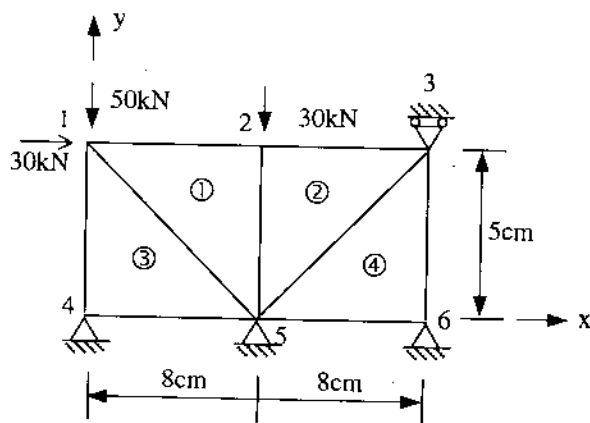
Phần tử 4: $[4,663 \ -14,830 \ 5,669]^T \text{kN/cm}^2$

Bài 16: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B₁₅

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn
 Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B₁₅

Đáp án:

1) Chuyển vị: $[0,0022 \quad -0,0024 \quad 0,0003 \quad -0,0007 \quad 0,0034]'$ cm

2) Ứng suất:

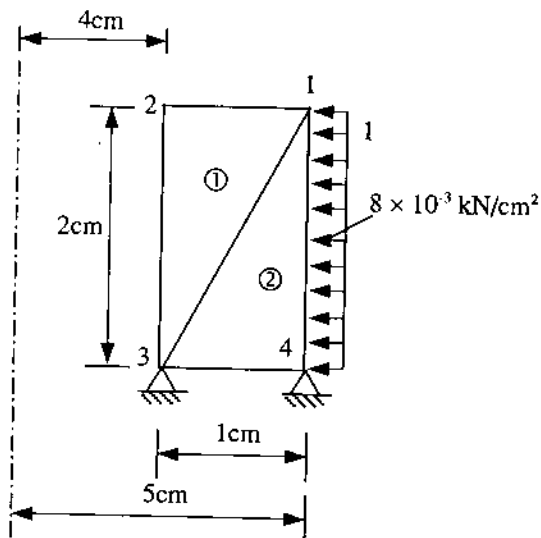
Phần tử 1: $[-6,371 \quad -4,886 \quad 2,215]'$ kN/cm²

Phần tử 2: $[-0,884 \quad -3,239 \quad 1,214]'$ kN/cm²

Phần tử 3: $[-3,335 \quad -11,115 \quad 3,518]'$ kN/cm²

Phần tử 4: $[0 \quad 0 \quad 0,5528]'$ kN/cm²

Bài 17: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B16



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Hệ số Poátxong: 0,3
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B₁₆

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

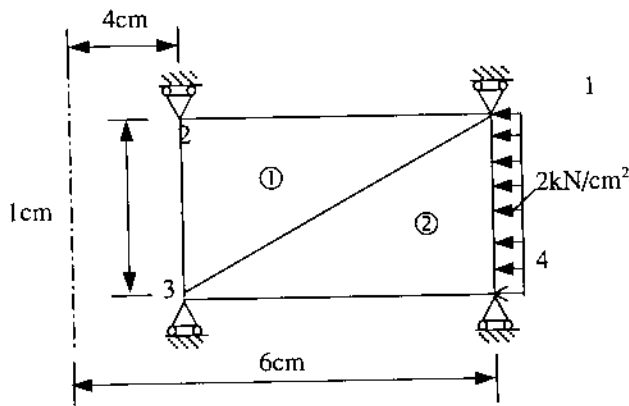
1- Chuyển vị: $[0,1625 \quad 0,0689 \quad 0,0937 \quad 0,128]^T \text{ cm}$

2- Ứng suất:

Phần tử 1: $[-0,007 \quad -0,0023 \quad -0,0122 \quad 0,0141]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-0,0061 \quad 0,0406 \quad -0,0568 \quad -0,0114]^T \text{ kN/cm}^2$

Bài 18: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B17.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình : B₁₇

Đáp án:

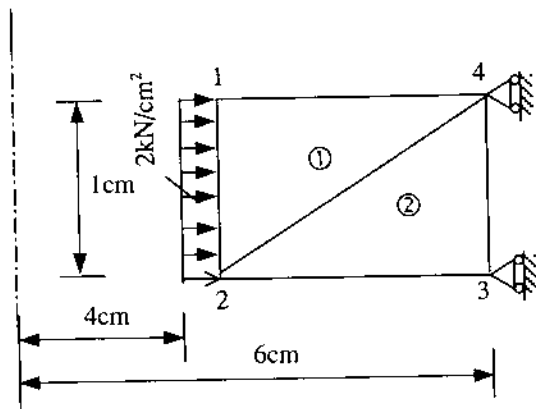
1- Chuyển vị: $[-1,112 \quad -1,246 \quad -1,229 \quad -1,131]^T \cdot 10^{-3} \text{ cm}$

2- Ứng suất:

Phần tử 1: $[-1,204 \quad -2,290 \quad -0,143 \quad -0,428]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-1,246 \quad -2,036 \quad -0,153 \quad -5,540]^T \text{ kN/cm}^2$

Bài 19: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B₁₈.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B₁₈

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

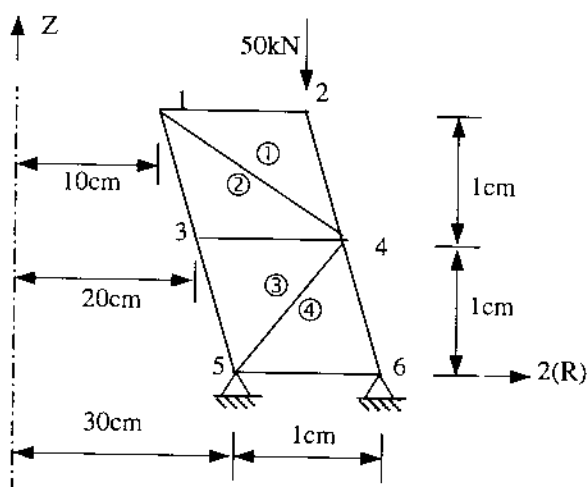
1- Chuyển vị: $[-9,842 \cdot 10^{-5} \quad 3,043 \cdot 10^{-4} \quad -9,278 \cdot 10^{-16} \quad 2,799 \cdot 10^{-4} \quad 1,964 \cdot 10^{-4} \quad 2,02 \cdot 10^{-4}]^T \text{cm}$

2- Ứng suất:

Phần tử 1: $[-1,01 \quad 0,1797 \quad 0,3593 \quad -0,1014]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-0,067 \quad -0,157 \quad -0,314 \quad -0,067]^T \text{ kN/cm}^2$

Bài 20: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B₁₉.



Hệ số Poátxong: 0,3

Thứ tự các nút: không khoanh tròn

Thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B₁₉

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-0,0722 \cdot 10^{-5} \quad 0,03 \cdot 10^{-4} \quad -0,0538 \cdot 10^{-5} \quad 0,0239 \cdot 10^{-4} \quad 0,0684 \cdot 10^{-5} \quad -0,0430 \cdot 10^{-4} \quad 0,0732 \cdot 10^{-5} \quad -0,0442 \cdot 10^{-4}]^T \text{cm}$

2- Ứng suất:

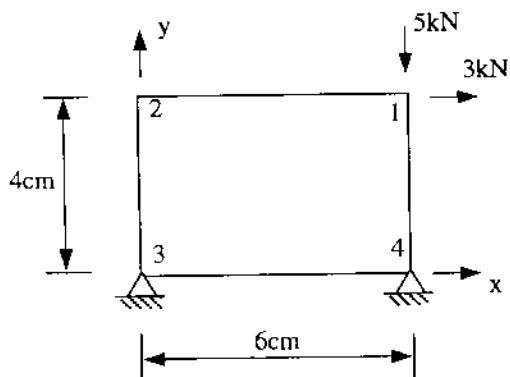
Phần tử 1: $[0,0129 \quad 0,0214 \quad -0,0021 \quad 0,0100]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[0,0760 \quad 0,1745 \quad -0,0084 \quad 0,0754]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 3: $[-0,0645 \quad -0,1535 \quad 0,0085 \quad -0,0650]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 4: $[-0,0534 \quad -0,1248 \quad 0,0059 \quad -0,0533]^T \text{ kN/cm}^2$

Bài 21: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B₂₀.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
 Bề dày tấm: 0,5cm
 Hệ số Poátxong: 0,3
 Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B₂₀

Dùng phương pháp FTHH tính:

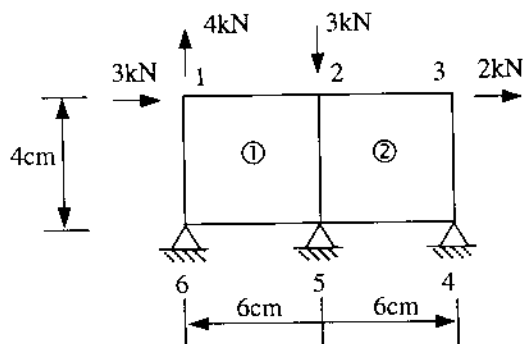
- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất

Đáp án:

Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (0,218; -9,774; -2,243; 7,116) \times 10^{-3}$ cm

Ứng suất: $US1 = 303,559$ kN/cm²; $US2 = -779,787$ kN/cm²
 $US3 = 1673,925$ kN/cm²

Bài 22: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B21



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
 Bề dày tấm: 0,5cm
 Hệ số Poátxong: 0,3
 Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B₂₁

Số thứ tự các nút cục bộ và nút tổng thể thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	6	5	2
2	1	2	3	4	2	5	4	3

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

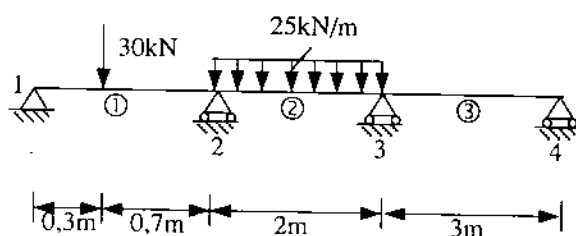
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0,452; -4,786;$

$-0,584; 2,313; 3,092; 5,741) \times 10^{-4} \text{cm}$

2- Ứng suất (xem bảng dưới)

Phần tử	US1 (kN/cm ²)	US2 (kN/cm ²)	US3 (kN/cm ²)
1	-29,877	-89,972	46,590
2	175,200	316,433	60,396

Bài 23: Cho 1 dầm liên tục như trên hình B₂₂.



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$

Mômen quán tính: $23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₂

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

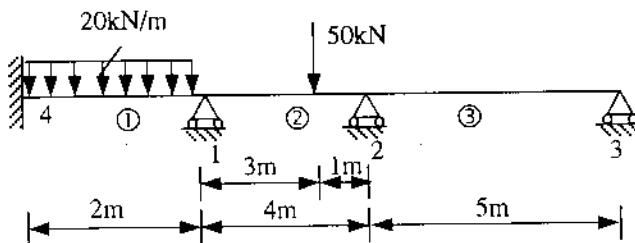
1- Chuyển vị: $[7,26.10^{-5} \quad 3,11.10^{-4} \quad -6,79.10^{-4} \quad 3,39.10^{-4}]'$ radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	8,6054	14,915	15,085
2	-8,6054	3,2789	27,663	22,337
3	-3,2789	0	1,093	-1,093

Bài 24: Một dầm liên tục như trên hình B₂₃.



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$

Mômen quán tính: $25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₃

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

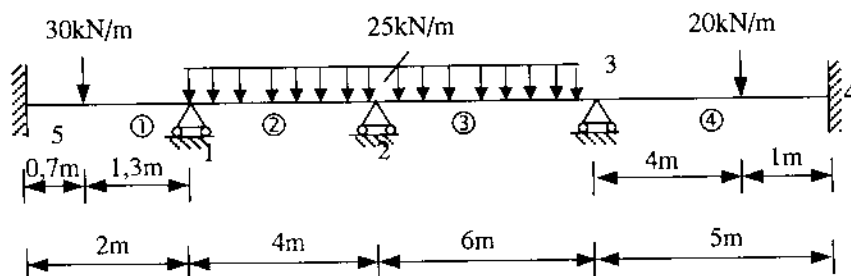
1- Chuyển vị: $[7,701 \cdot 10^{-4} \quad -3,589 \cdot 10^{-3} \quad 1,794 \cdot 10^{-3}]'$ radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-2,624	14,753	13,935	26,065
2	-14,753	11,305	8,674	41,326
3	-11,305	0	2,261	-2,261

Bài 25: Một dầm liên tục như trên hình B₂₄



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$

Mômen quán tính: $30 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₄

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

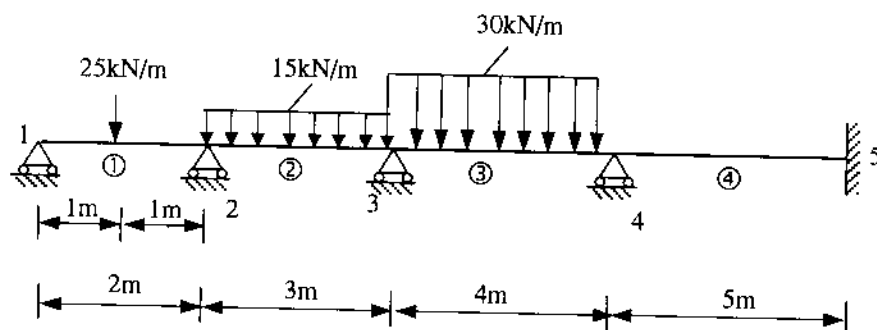
- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 2- Lực cắt

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $[5,769.10^{-4} \quad -5,604.10^{-3} \quad -9,044.10^{-3}]'$ radian
- 2- Mômen (xem kết quả dưới)
- 3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN. m)		Lực cắt (kN)	
1	-5,238	12,046	18,143	11,857
2	-12,046	70,456	35,398	64,602
3	-70,456	48,783	76,612	71,388
4	-48,783	-9,991	13,835	6,165

Bài 26: Một dầm liên tục như trên hình B₂₅



Mô đun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Mômen quán tính: $35 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₅

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Đáp án:

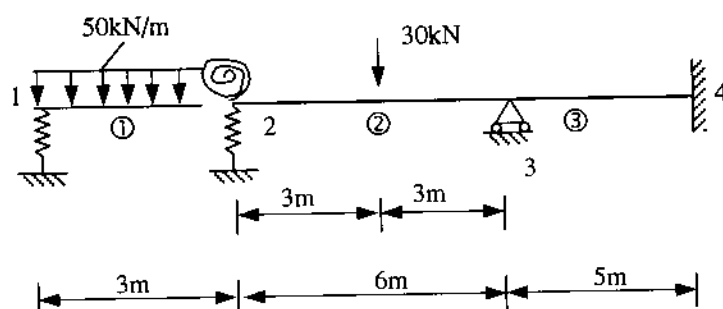
- 1- Chuyển vị: $[0,689 \quad -0,526 \quad 2,621 \quad 3,704]'$ rad

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	3,569	10,715	14,285
2	-3,569	34,352	12,239	32,761
3	-34,352	22,404	62,987	57,013
4	-22,404	-11,202	6,721	-6,721

Bài 27: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B₂₆



Độ cứng thẳng đứng (nút 1): 10×10^4 kN/m;

Độ cứng xoay (nút 2): 4×10^4 kN-m/rad;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₆

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-5,814 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad 1,035 \text{ rad} \quad -4,185 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad -5,137 \cdot 10^{-4} \text{ rad}]'$

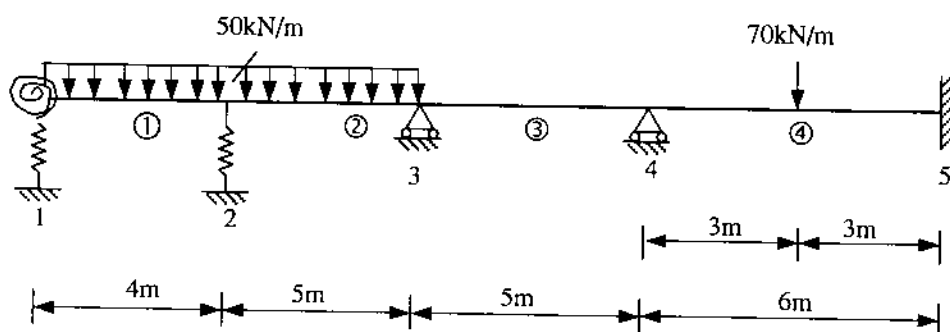
2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	50,587	58,138	97,862
2	-33,846	10,355	18,915	11,085
3	-10,355	-5,178	3,107	-3,107

Bài 28: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B₂₇. Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$;

Độ cứng xoay (nút 1): $4 \cdot 10^4 \text{ kN-m/rad}$;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Mômen quán tính: $120 \times 10^{-6} \text{ m}^4$;

Độ cứng thẳng (nút 2): $10 \cdot 10^4 \text{ kN/m}$;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

Hình: B₂₇

Đáp án:

1- Chuyển vị: [1,072rad -2,470m 1,599rad 1,599rad -3,980rad]

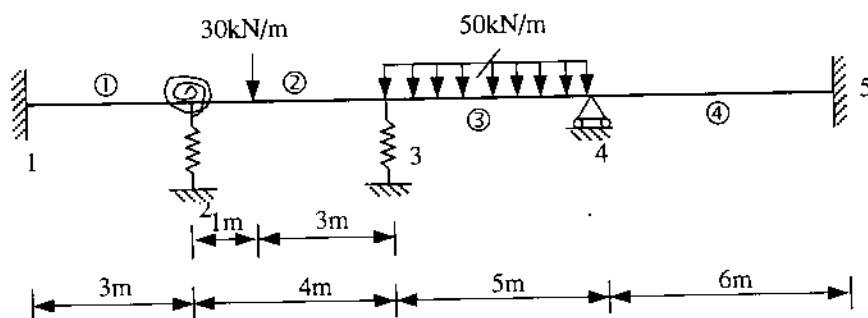
2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	42,860	97,117	86,436	113,564
2	-97,117	54,980	133,427	116,573
3	-54,980	10,340	8,916	-8,916
4	-10,340	73,550	24,475	45,525

Bài 29: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B₂₈. Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$;

Mômen quán tính: $120 \times 10^{-6} \text{ m}^4$;

Độ cứng xoay (nút 2): $= 4.10^4 \text{ kN-m/rad}$;

Độ cứng thẳng (nút 3): 10.10^4 kN/m ;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

Hình: B₂₈

Đáp án:

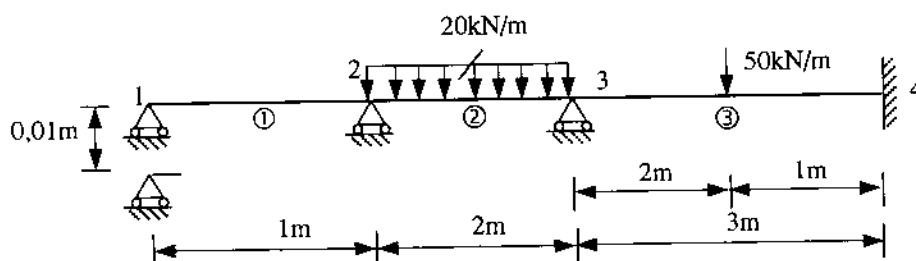
1- Chuyển vị: $[-8,965.10^{-5} \text{ rad} \quad -1,526.10^{-3} \text{ m} \quad 3,187.10^{-3} \text{ rad} \quad 0 \quad -3,937.10^{-3} \text{ rad}]$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,501	-3,012	1,506	-1,506
2	6,598	70,380	6,068	23,932
3	-70,380	66,144	125,847	124,153
4	-66,144	-33,072	16,536	-16,536

Bài 30: Một dầm liên tục trên gối tựa bị lún như trên hình B₂₉.



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$

Mômen quán tính: $23 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn; Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₂₉

Dùng phương pháp FTHH tính:

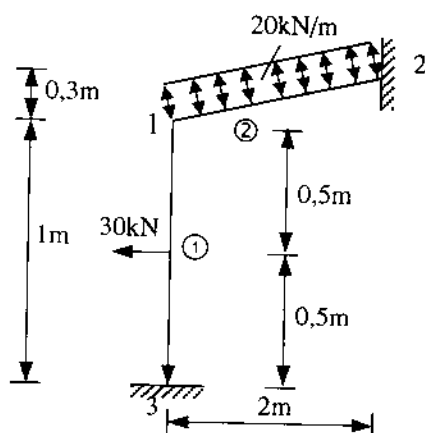
- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0,01\text{m}; 0,012\text{rad}; 0; 0,006\text{rad}; 0; -0,001\text{rad})'$
- 2- Mômen (xem bảng dưới)
- 3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	0	-50,795
2	50,795	27,492
3	-27,492	0

Bài 31: Một khung phẳng như trên hình B₃₀.



Diện tích: $8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
 Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
 Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
 Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₃₀

Dùng phương pháp FTHH tính:

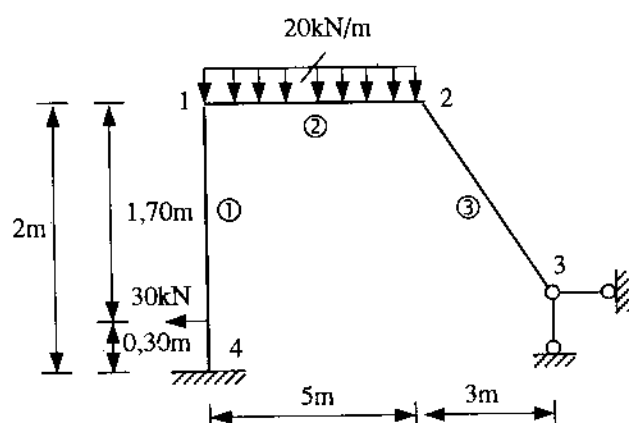
- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3) = (-0,115\text{m}; -0,997\text{m}; 3,856\text{rad})' \times 10^{-5}$
- 2- Mômen (xem bảng dưới)
- 3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN. m)		Lực cắt(kN. m)	
1	7,278	3,017	-25,294	-4,706
2	-3,017	9,015	17,258	23,190

Bài 32: Một khung phẳng như trên hình B₃₁.



Diện tích: $7 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^2 \text{ kN/m}^2$
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₃₁

Dùng phương FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Đáp án:

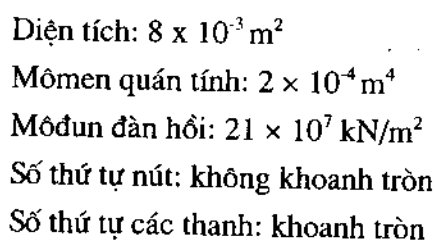
- 1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7)' = (-2,023\text{m}; -0,602\text{m}; 1,851\text{rad}; -3,207\text{m}; -7,396\text{m}; -3,616\text{rad}; -1,492\text{rad})' \times 10^{-4}$
- 2- Mômen (xem bảng sau)
- 3- Lực cắt (xem bảng sau)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	37,288	41,302	-67,473	37,473
2	-41,302	7,420	44,276	30,724
3	-7,420	0	2,058	-2,058

Bài 33: Một khung phẳng như trên hình B₃₂.

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

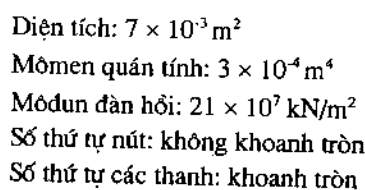


Đáp án:

- 1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)' = (-0,012\text{m}; -2,154\text{m}; 4,139\text{rad}; -2,122\text{m}; -10,53\text{m}; -3,144 \text{ rad})' \times 10^{-4}$
- 2- Mômen (xem bảng dưới)
- 3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	5,867	21,415	-12,201	12,201
2	-21,415	2,35	23,253	6,747
3	-2,35	31,003	14,656	32,778

Bài 34: Một khung phẳng như trên hình B₃₃.



Hình: B₃₃

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Mômen
- 3- Lực cắt

Đáp án:

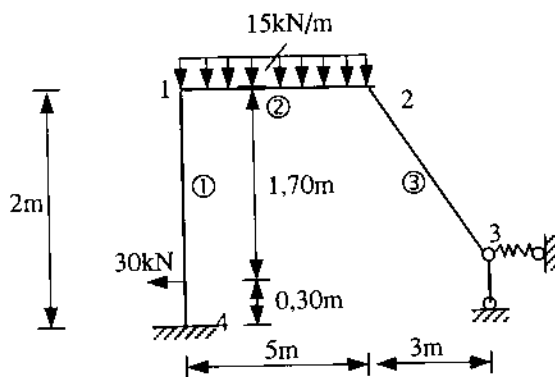
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9) = (1,416\text{m}; -2,027\text{m}; 6,947\text{rad}; 0,653\text{m}; -21,240\text{m}; -0,207\text{rad}; -0,124\text{m}; -2,054\text{m}; -6,075\text{rad}) \times 10^{-5}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,011	14,042	10,490	19,510
2	-14,042	-8,274	26,202	4,134
3	8,274	14,843	3,737	26,598
4	-14,843	-7,188	22,030	-22,030

Bài 35: Một khung phẳng có gối tựa đàn hồi như trên hình B₃₄.



Diện tích: $7 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
 Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
 Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
 Độ cứng lò xo (nút 3): $10 \times 10^4 \text{ kN/m}$
 Số thứ tự nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B₃₄

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

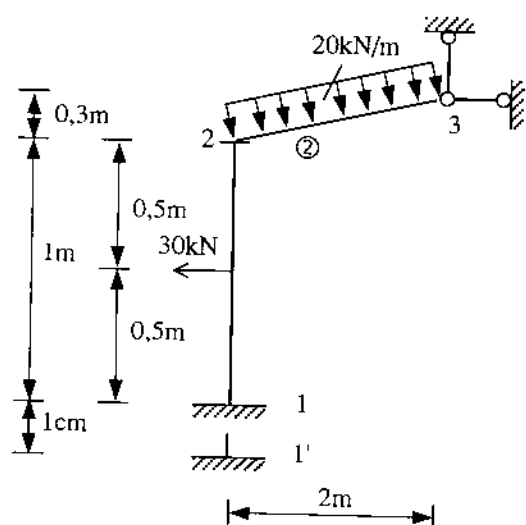
Đáp án:

1) Chuyển vị: $[6,945 \times 10^{-4} \text{ m} \quad -3,446 \times 10^{-6} \text{ m} \quad 7,138 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad 6,945 \times 10^{-4} \text{ m} \quad -1,009 \times 10^{-3} \text{ m} \quad -5,028 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad 1,372 \times 10^{-3} \text{ m} \quad -2,543 \times 10^{-4} \text{ rad}]$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)	
1	-14,158	23,158
2	-23,158	8,684
3	-8,684	0

Bài 36: Một khung phẳng có gối tựa bị lún như trên hình B₃₅.



Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/cm}^2$
 Diện tích: $8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
 Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
 Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
 Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
 Độ lún tại nút 1: 1 cm

Hình: B₃₅

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

Đáp án:

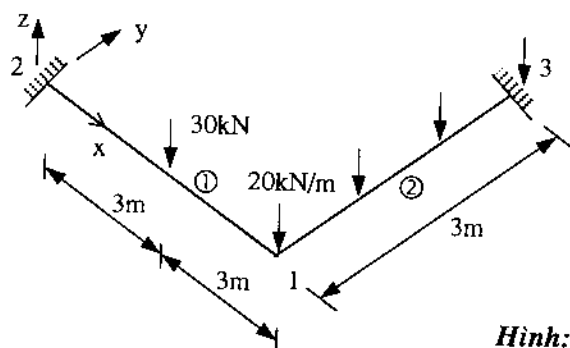
Chuyển vị: $[d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9]'$

$[0 \ -0,01\text{m} \ 0 \ 0,0023\text{m} \ -0,0004\text{m} \ -0,008\text{rad} \ 0 \ 0 \ 0,003\text{rad}]'$

Mômen (xem bảng sau):

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	131,995	57,689
2	-57689	0

Bài 37: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B₃₆:



Diện tích: $0,125 \text{ m}^2$
 Mômen quán tính x: $1821 \times 10^{-6} \text{ m}^4$
 Mômen quán tính y: $26 \times 10^{-4} \text{ m}^4$
 Môđun trượt: $6,36 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
 Mômen đàn hồi: $21 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$

Hình: B₃₆

- Tính: 1- Chuyển vị
2- Mômen uốn và mômen xoắn

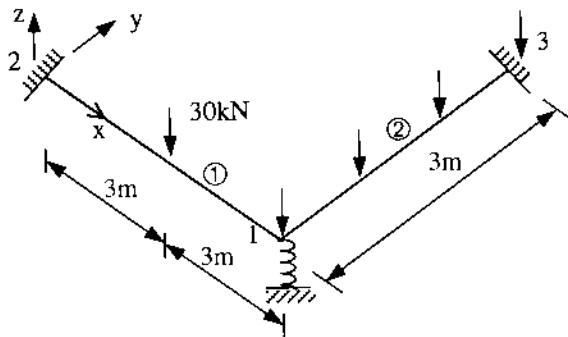
Đáp án:

$$(d_1, d_2, d_3) = (-6,802\text{m}; 3,598\text{rad}; 1,271\text{rad}) \times 10^4$$

Xem bảng dưới

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-3,006	61,486	0,694	-0,694
2	-276,904	-116,593	-0,413	0,413

Bài 38: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B₃₇



Diện tích: $0,135\text{m}^2$
Mômen quán tính x: $1821 \times 10^{-6}\text{m}^4$
Mômen quán tính y: $26 \times 10^{-4}\text{m}^4$
Môđun trục: $6,36 \times 10^6\text{kN/m}^2$
Mômen đàn hồi: $21 \times 10^7\text{kN/m}^2$
Hệ số độ cứng (gối đàn hồi): 10^5kN/m

Hình: B₃₇

- Tính: 1- Chuyển vị
2- Mômen uốn
3- Mômen xoắn

Đáp án:

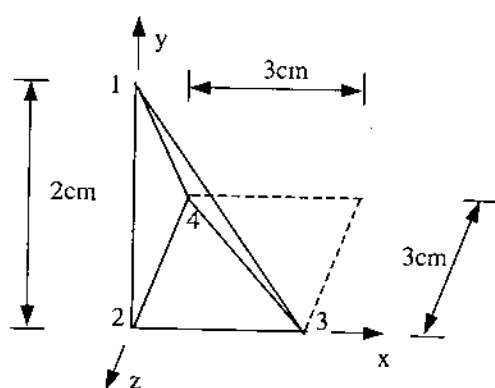
1- Chuyển vị $(d_1, d_2, d_3) = (-4,389\text{m}; 4,244\text{rad}; -5,031\text{rad}) \times 10^{-5}$

2- Mômen uốn (xem bảng dưới)

3- Mômen xoắn (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-31,656	4,188	0,082	-0,082
2	-45,893	-44,662	0,194	-0,194

Bài 39: Một phần tử hữu hạn tứ diện 1234 như trên hình B₃₈



Hình: B₃₈

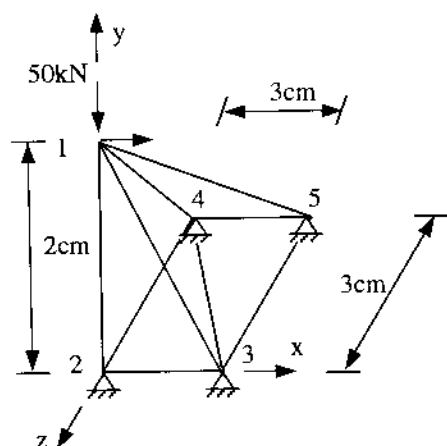
Lập ma trận độ cứng tổng thể S.

Đáp án:

Ma trận S có tính đối xứng

$S(1,1) = 646,15$	$S(1,2) = 0$	$S(1,3) = 0$	$S(1,4) = -538,46$
$S(1,5) = -215,38$	$S(1,6) = 215,38$	$S(1,7) = 0$	$S(1,8) = -215,38$
$S(1,9) = 107,69$	$S(1,10) = 0$	$S(1,11) = 0$	$S(1,12) = 215,38$
$S(2,2) = 1453,85$	$S(2,3) = -807,69$	$S(2,4) = -323,08$	$S(2,5) = -1346,15$
$S(2,6) = 323,077$	$S(2,7) = 323,07$	$S(2,8) = 0$	$S(2,9) = 0$
$S(2,10) = -107,69$	$S(2,11) = 161,54$	$S(2,12) = 0$	$S(3,3) = 1543,846$
$S(3,4) = 323,28$	$S(3,5) = 700$	$S(3,6) = -753,85$	$S(3,7) = -323,08$
$S(3,9) = 0$	$S(3,10) = 107,69$	$S(3,11) = -376,92$	$S(3,12) = 0$
$S(4,4) = 969,23$	$S(4,5) = 538,46$	$S(4,6) = 358,97$	$S(4,7) = -502,56$
$S(4,8) = 143,59$	$S(4,9) = 71,79$	$S(4,10) = 0$	$S(4,11) = -107,69$
$S(4,12) = -215,38$	$S(5,5) = 1417,95$	$S(5,6) = -323,08$	$S(5,7) = -323,08$
$S(5,8) = 0$	$S(5,9) = 0$	$S(5,10) = 71,79$	$S(5,11) = 161,54$
$S(5,12) = -143,59$	$S(6,6) = 646,154$	$S(6,7) = 215,38$	$S(6,8) = 143,59$
$S(6,9) = -71,79$	$S(6,10) = 0$	$S(6,11) = 0$	$S(6,12) = 0$
$S(7,7) = 502,56$	$S(7,8) = 0$	$S(7,9) = 0$	$S(7,10) = 0$
$S(7,11) = 107,69$	$S(8,8) = 143,59$	$S(8,9) = 71,79$	$S(8,10) = 0$
$S(8,11) = 0$	$S(8,12) = 0$	$S(9,9) = 35,90$	$S(9,10) = 0$
$S(9,11) = 0$	$S(9,12) = 0$	$S(10,10) = 35,90$	$S(10,11) = 0$
$S(10,12) = 0$	$S(11,11) = 125,64$	$S(11,12) = 0$	$S(12,12) = 143,59$

Bài 40: Một hình FTHH tứ diện 12345 như trên hình B₃₉.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	2	3	4
2	1	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B₃₉

Dùng phương pháp FTHH tính:

- 1- Chuyển vị
- 2- Ứng suất

Đáp án:

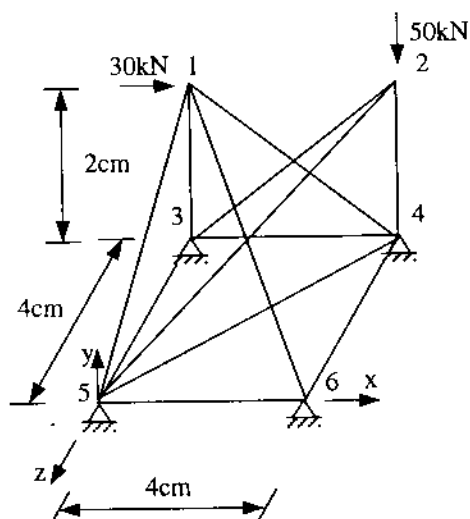
1- Chuyển vị: $[2,321 \quad -2,487 \quad -1,382] \times 10^{-2} \text{cm}$

2- Ứng suất

Phần tử 1: $[-10,714 \quad -42,857 \quad 7,143 \quad 7,143 \quad -15 \quad 15] \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-10,714 \quad -42,857 \quad 7,143 \quad 7,143 \quad -15 \quad 15] \text{ kN/cm}^2$

Bài 41: Một hình FTHH tứ diện gồm 3 phần tử như trên hình B₄₀.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	5	4	3
2	1	6	4	5
3	2	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B₄₀

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[4,536 \times 10^{-8} \quad 1,451 \times 10^{-10} \quad -1,152 \times 10^{-15}$
 $0 \quad -2,264 \times 10^{-7} \quad 0]^T \text{ cm}$

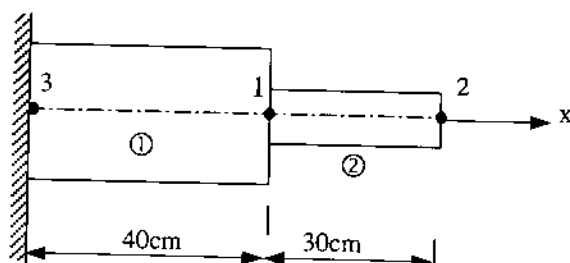
2) Ứng suất

Phần tử 1: $[-6,40 \times 10^{-2} \quad 6,40 \times 10^{-2} \quad -6,40 \times 10^{-2} \quad -5,08 \times 10^{-7}$
 $0 \quad 20]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 2: $[-6,40 \times 10^{-2} \quad 6,40 \times 10^{-2} \quad -6,40 \times 10^{-2}$
 $-5,08 \quad 0 \quad 20]^T \text{ kN/cm}^2$

Phần tử 3: $[99,31 \quad 6,40 \times 10^{-2} \quad 99,81$
 $0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ kN/cm}^2$

Bài 42: Tính giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng cho hệ một chiều trên hình B₄₁.



Diện tích thanh 1: 4 cm^2
 Diện tích thanh 2: $2,5 \text{ cm}^2$
 Mô đun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Khối lượng riêng: $785 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$

Hình: B₄₁

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất: 17719,24

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad -0,4951]^T$

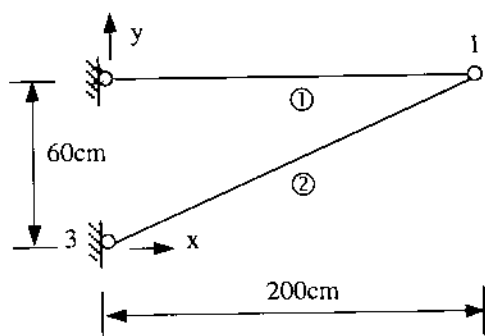
Bài 43: Đầu đề trên hình B₄₁. Tính giá trị riêng bé nhất và vectơ riêng tương ứng.

Đáp án:

Giá trị riêng bé nhất: 1864,12

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad 0,7158]^T$

Bài 44: Tính giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn trên hình B₄₂.



Diện tích toàn bộ các thanh: 4cm^2
 Môđun đàn hồi: 7200 kN/cm^2
 Khối lượng riêng: $28 \times 10^{-4}\text{ kg/cm}^3$

Hình: B_{42}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 48,214

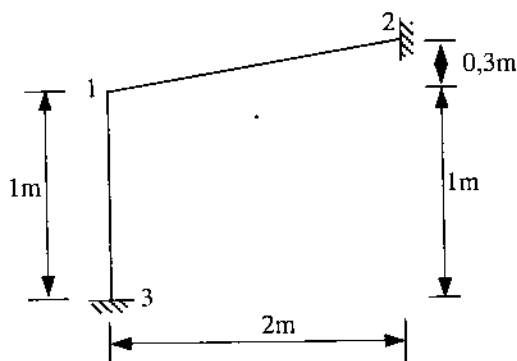
Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad 0,002]'$

Bài 44: Đầu đề như trên hình B_{42} . Tìm giá trị riêng bé nhất và véc tơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 48,214

Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad 493,829]'$

Bài 45: Tìm giá trị riêng lớn nhất cho hệ khung trên hình B_{43} .



Diện tích toàn bộ các thanh: $8 \times 10^{-3}\text{ m}^2$
 Mômen quán tính toàn bộ các thanh: $2 \times 10^{-4}\text{ m}^4$
 Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\text{ kN/m}^2$
 Khối lượng riêng: 7850 kg/m^3

Hình: B_{43}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 3382040,28

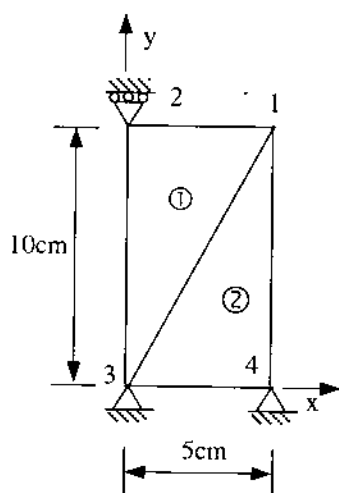
Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad 0,058 \quad -0,098]'$

Bài 46: Đầu đề như trên hình B_{43} . Tính giá trị riêng bé nhất và véc tơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 560537,56

Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad 0,369 \quad 3,289]'$

Bài 47: Tìm giá trị riêng lớn nhất và véc tơ riêng tương ứng cho hệ có mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi biểu thị trên hình B_{44} .



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
 Bề dày tấm: 1 cm
 Hệ số Poátxong: $0,3$
 Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
 Số thứ tự phần tử: khoanh tròn
 Khối lượng riêng: $785 \times 10^{-5} \text{ kg/cm}^3$

Hình: B₄₄

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 780694,49

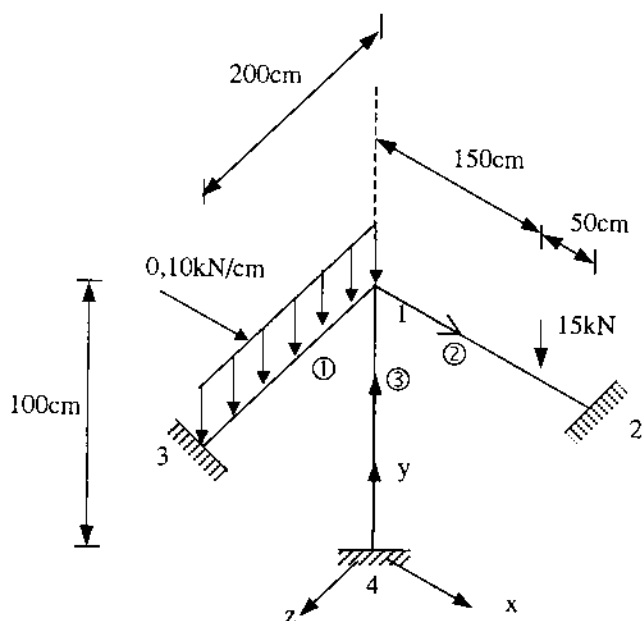
Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad -5,931 \quad -5,466]^T$

Bài 48: Đầu đề như trên hình B₄₄. Tính giá trị riêng bé nhất và véc tơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 0,113

Véc tơ riêng tương ứng: $[1,0 \quad -0,281 \quad 0,965]^T$

Bài 49: Một khung không gian như trên hình B₄₅.



Hình: B₄₅

Diện tích:

Thanh 1: 20cm^2

Thanh 2: 20cm^2

Thanh 3: 30cm^2

Môđun đàn hồi : 21000kN/cm^2

Môđun xoắn: 8077cm^4

Mômen quán tính x:

Thanh 1: 4cm^4

Thanh 2: 4cm^4

Thanh 3: 10cm^4

Môđun quán tính y:

Thanh 1: 53cm^4

Thanh 2: 53cm^4

Thanh 3: 150cm^4

Môđun quán tính z

Thanh 1: 720cm^4

Thanh 2: 720cm^4

Thanh 3: 2230cm^4

Dùng chương trình CTR18 tính các nội lực:

- Q_y , M_x , M_z cho các thanh 1, 2

- N , M_y , M_z cho thanh 3

Đáp án:

Phần tử Nội lực	1	2
Q_{y1} (kN)	-5,067	-5,067
M_{x1} (kN.cm)	0	0
M_{z1} (kN.cm)	-4,465	-4,465
Q_{y2} (kN)	-10,398	-0,398
M_{x2} (kN.cm)	0	0
M_{y2} (kN.cm)	359,879	26,545

Phần tử Nội lực	3
N_1 (kN)	0
M_{y1} (kN.cm)	18900
M_{z1} (kN.cm)	164,434
N_2 (kN)	0
M_{y2} (kN.cm)	18900
M_{z2} (kN.cm)	-4,465

Bài 50: Tìm giá trị riêng liên tiếp và các vectơ riêng tương ứng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất: 38,802

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad 0,648 \quad 2,955]'$

Giá trị trung gian : 6,429

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad -18,310 \quad -12,430]$

Giá trị riêng bé nhất: -2,150

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad -1,011 \quad 1,558]$

PHỤ LỤC

Sau đây là 22 chương trình soạn theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0

1. Chương trình **CTR1**: Bài toán một chiều dùng phương pháp loại trừ
2. Chương trình **CTR2**: Bài toán một chiều dùng phương pháp mô hình lò xo
3. Chương trình **CTR3**: Bài toán một chiều kiểu hàm hình dạng bậc hai
4. Chương trình **CTR4**: Tính giàn phẳng
5. Chương trình **CTR5**: Tính giàn không gian
6. Chương trình **CTR6**: Tính giàn phẳng chịu tác dụng của nhiệt độ
7. Chương trình **CTR7**: Tính giàn phẳng chế tạo không chính xác
8. Chương trình **CTR8**: Bài toán 2 chiều kiểu phần tử hữu hạn tam giác biến dạng không đối.
9. Chương trình **CTR9**: Tính gần đúng vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng
10. Chương trình **CTR10**: Tính dầm liên tục trên gối tựa thông thường
11. Chương trình **CTR11**: Tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi
12. Chương trình **CTR12**: Tính dầm liên tục trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo.
13. Chương trình **CTR13**: Giải gần đúng bài toán ứng suất phẳng kiểu FTHH 4 cạnh 4 nút.
14. Chương trình **CTR14**: Tính khung phẳng trên gối tựa thường và gối tựa đàn hồi.
15. Chương trình **CTR15**: Tính khung phẳng trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo.
16. Chương trình **CTR16**: Tính hệ dầm trực giao
17. Chương trình **CTR17**: Giải bài toán 3 chiều kiểu FTHH 4 mặt 4 nút
18. Chương trình **CTR18**: Tính khung không gian
19. Chương trình **CTR19**: Tính giá trị riêng lớn nhất cho hệ giàn
20. Chương trình **CTR20**: Tính giá trị riêng bé nhất cho hệ giàn
21. Chương trình **CTR21**: Tính giá trị riêng lớn nhất cho hệ khung
22. Chương trình **CTR22**: Tính giá trị riêng bé nhất cho hệ khung

```

Program CTRL1_Bai_toan_mot_chieu_dung_ff_loai_tru;
Uses crt;
type mt1= array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
      mt3= array[1..20] of integer;
Var i,j,k,n,x,ss,tbt,st,sbt,rr,y:integer; a,d1,d2,u:mt3;
    c1,c2,c3,c4,c5,c6,cv,f,fc,fe,fl,fn,t,cd,dt,e,tg,qq,us,qc,b:mt2;
    s,sc,sr:mt1;
    al,del,q,r,tt:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1 downto 1 do
          Begin
            r :=0;
            for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
            if(a[i,i]<>0) then
              x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
            End;
          End;
        end;
      Begin clrscr;

      (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
      writeln('nhap tong so  BTĐ');
      readln(tbt);
      writeln('nhap so thanh');
      readln(st);
      writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi');
      readln(sbt);
      writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi triet tieu');
      readln(y);

```

```

writeln('nhap so thu tu BTDC co chuyen vi triet tieu');
if (y<>0) then for i:=1 to y do
readln(u[i]);
writeln('nhap chieu dai ');
for i:=1 to st do readln(cd[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap BTDC d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTDC d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);
writeln('nhap cuong do luc bien');
for i:=1 to st do readln(tf[i]);
writeln('nhap he so gian no');
readln(al);
writeln('nhap so gia nhiet do');
readln(del);
writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to tbt do readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
c1[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i];
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]-c1[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];
(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c2[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/2; c3[i]:=t[i]*cd[i]/2; c4[i]:=e[i]*dt[i]*al*del;
c5[i]:=c2[i]+c3[i]-c4[i]; c6[i]:=c2[i]+c3[i]+c4[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c5[i]; f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to tbt do f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

```



```

(*Tnh ung suat*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(qq[d2[i]]-qq[d1[i]]);

(*Tnh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do   sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
  fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k]-f[i];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR2_Bai_toan_mot_chieu_dung_ff_mo_hinh_lo_xo;
Uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j,k,n,x,ss,st,sbt,tbt,rr,y:integer; d1,d2,u:mt3;
c1,c2,c3,c4,c5,c6,cv,f,fc,fe,fl,fn,t,cd,dt,e,tg,qq,us,max,a:mt2;
ke,s,sc:mt1;
al,del,q,r,c,maxx,tt:real;

```

```

procedure gtcddt(a:mt1;n:integer);
begin
  max[i]:=abs(a[i,1]);
  for i:=1 to n do
    for j:=2 to n do
      begin
        if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i])) then
          max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
        end;
        maxx:=max[1];
        for i:=2 to n do
          begin
            if(max[i]>maxx) then
              maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
            end;
          end;
        end;

```

```

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1 downto 1 do
          Begin
            r :=0;

```

```

        for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
            x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
        End;
    end;

```

```

Begin   clrscr;
(*Nguoi lap trinh : Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTĐ có chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap tong so BTĐ ');
readln(tbt);
writeln('nhap so BTĐ có chuyen vi cho truoc ');
readln(y);
writeln('nhap so thu tu BTĐ có chuyen vi cho truoc ');
if(y<>0) then for i:=1 to y do
    readln(u[i]);
    writeln('nhap gia tri cac chuyen vi cho truoc');
    if(y<>0) then for i:=1 to y do
        readln(a[i]);
        writeln('nhap chieu dai');
        for i:=1 to st do readln(cd[i]);
        writeln('nhap dien tích');
        for i:=1 to st do readln(dt[i]);
        writeln('nhap modulun dan hoi');
        for i:=1 to st do readln(e[i]);
        writeln('nhap BTĐ d1');
        for i:=1 to st do readln(d1[i]);
        writeln('nhap BTĐ d2');
        for i:=1 to st do readln(d2[i]);
        writeln('nhap ti trong');
        readln(tt);
        writeln('nhap cuong do luc bien');
        for i:=1 to st do readln(t[i]);
        writeln('nhap he so gian no');
        readln(al);
        writeln('nhap so gia mhiệt độ');
        readln(del);
        writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
        for i:=1 to tbt do readln(fn[i]);
        (*Ghep cac MTĐC riêng vào MTĐC tong the*);
        for i:=1 to st do

```

```

begin
c1[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i];
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]-c1[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do  s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh GTTD max cua cac fan tu MT*);
GTCDDTD(s,tbt);
c:=(maxx)*10E+08;
if(y<>0) then for i:=1 to y do  s[u[i],u[i]]:=s[u[i],u[i]]+c;
(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c2[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/2; c3[i]:=t[i]*cd[i]/2; c4[i]:=e[i]*dt[i]*a*del;
c5[i]:=c2[i]+c3[i]-c4[i]; c6[i]:=c2[i]+c3[i]+c4[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c5[i]; f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to tbt do  f[i]:=f[i]+fn[i];
if (y<>0) then for i:=1 to y do  f[u[i]]:=f[u[i]]+c*a[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,tbt);

(*Tnh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(qq[d2[i]]-qq[d1[i]]);

(*Tnh fan luc*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do
fl[u[i]]:=-c*(qq[u[i]]-a[i]);

(*Doc ket qua*);
writeln('chuyen vi');
for i:=1 to tbt do
writeln(qq[i]);
writeln('ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln('fan luc');
for i:=1 to y do
writeln(fl[u[i]]);
readln;
end.

```

```

Program CTR3_Bai_toan_mot_chieu_kieu_ham_hinh_dang_bac_hai;
Uses crt;
type mt1= array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
      mt3= array[1..20] of integer;
Var i,j,k,n,x,ss,tbt,st,sbt,rr,y:integer; a,d1,d2,d3,u:mt3;
    c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,f,fl,fn,cd,dt,e,qq,us1,us2,us3:mt2;
    s,sc,sr,ke:mt1; q,r,tt,t:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1 downto 1 do
          Begin
            r :=0;
            for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
            if(a[i,i]<>0) then
              x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
            End;
          end;
        end;

  Begin clrscr;
  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap tong so BTĐ');
  readln(tbt);
  writeln('nhap so thanh');
  readln(st);
  writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi');
  readln(sbt);
  writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi triet tieu');
  readln(y);
  writeln('nhap so thu tu BTĐ co chuyen vi triet tieu');

```

```

if(y<>0) then for i:=1 to y do
readln(u[i]);
writeln('nhap chieu dai ');
for i:=1 to st do readln(cd[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap BTĐ d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTĐ d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTĐ d3');
for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);
writeln('nhap cuong do luc bien');
readln(t);
writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to tbt do readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTĐC riêng vao MTĐC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
c1[i]:=7*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]); c2[i]:=dt[i]*e[i]/(3*cd[i]);
c3[i]:=-8*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]); c4[i]:=16*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]);
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
s[d2[i],d1[i]]:=s[d2[i],d1[i]]+c2[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c3[i];
s[d3[i],d1[i]]:=s[d3[i],d1[i]]+c3[i];
s[d3[i],d2[i]]:=s[d3[i],d2[i]]+c3[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c4[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c5[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/6; c6[i]:=t*cd[i]/6; c7[i]:=c5[i]+c6[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c7[i]; f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c7[i];

```

```

f[d3[i]]:=f[d3[i]]+c7[i];
end;
for i:=1 to tbt do   f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tnh ung suat*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to st do
begin
us1[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(-1.5*qq[d1[i]]-0.5*qq[d2[i]]+2*qq[d3[i]]);
us2[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(0.5*qq[d1[i]]+1.5*qq[d2[i]]-2*qq[d3[i]]);
us3[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(-0.5*qq[d1[i]]+0.5*qq[d2[i]]);
end;

(*Tnh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do   sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k]-f[i];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
begin
writeln(us1[i]);
writeln(us2[i]);
writeln(us3[i]);
end;
writeln('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR4_Tinh_gian_phang;
uses crt;
Type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3= array[1..20]of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr:integer; q,r:real;
    a,cd,b,c,d,f,qq,us,fl,l,m,dt,e,x1,x2,y1,y2:mt2;
    n1,n2,d1,d2,d3,d4:mt3;
    s,sr:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
    s:=0;
    REPEAT
        s:=s+1;
        for i:= s+1 to n do
            Begin
                if(a[s,s]<>0) then
                    q:=a[s,i]/a[s,s];
                    for j:=i to n do
                        a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
                    End
            UNTIL(s= n -1);
            x[n]:=b[n]/a[n,n];
            for i:= n -1 downto 1 do
                Begin
                    r :=0;
                    for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
                    if(a[i,i]<>0) then
                        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
                    End;
            end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap ngoai luc');
for i :=1 to sbt do

```



```

readln(f[i]);
writeln('nhap toa do x1'); for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2'); for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1'); for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2'); for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modulun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d2'); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);

(* Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
  cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
  l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
  b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
  d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:= 1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh chuyen vi*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do fl[i]:=0; fl[i]:= fl[i]+sr[i,j]*qq[j];

```

```

(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]));

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri ung suat la');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR5_Tinh_gian_khong_gian;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
      mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,tbt,st,sbn,sbt,ss,rr:integer;
x1,x2,y1,y2,z1,z2,md,a,b,c,d,x,y,f,qq,fl,us,l,m,n,cd,dt,e:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6:mt3;
s,sr:mt1; q,r:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1); if(a[n,n]<>0) then
          x[n]:=b[n]/a[n,n];
          for i:= n -1 downto 1 do
            Begin
              r :=0;
              for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
              if(a[i,i]<>0) then
                x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
              End;
            end;
          end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh: Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD ');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap ngoai luc');
for i :=1 to sbt do
  readln(f[i]);

```

```

writeln('nhap x1'); for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap x2'); for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('nhap y1'); for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('nhap y2'); for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap z1'); for i:=1 to st do readln(z1[i]);
writeln('nhap z2'); for i:=1 to st do readln(z2[i]);
writeln('nhap dien tich'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do');
writeln('nhap d1[i]'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2[i]'); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap d3[i]'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap d4[i]'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap d5[i]'); for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap d6[i]'); for i:=1 to st do readln(d6[i]);

(*Ghep cac ma tran do cung rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i])+sqr(z2[i]-z1[i]));
if(cd[i]<>0) then
begin
l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
n[i]:=(z2[i]-z1[i])/cd[i];
a[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; b[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
c[i]:=l[i]*n[i]*e[i]*dt[i]/cd[i]; d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
x[i]:=m[i]*n[i]*e[i]*dt[i]/cd[i]; y[i]:=sqr(n[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
end;
end;
for i:=1 to st do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+a[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+b[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+x[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+y[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-a[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-b[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+a[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-b[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-d[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]-x[i];

```

```

s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+b[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+d[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]-c[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-x[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]-y[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+x[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+y[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do      s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat*);
for i :=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(l[i]*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d5[i]]-
qq[d2[i]])+n[i]*(qq[d6[i]]-qq[d3[i]]));

(*Doc ket qua*)
writeln ('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln (qq[i]);
writeln ('ung suat');
for i:=i to st do
writeln (us[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR6_Tinh_gian_phang_chiu_tac_dung_cua_nhiet_do;
uses crt;
Var i,j, k,st,sbt,tbt,ss,rr:integer;
e,dt,cd,b,c,d,f,ft,fn,qq,fl,ff,us,l,m,eal:array[1..10] of real;
d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
s,sc,sr,ke:array[1..20,1..20] of real; q,r,hg,del:real;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap chieu dai'); for i:=1 to st do readln(cd[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tích tiết diện'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap he so gian no'); readln(hg);
writeln('nhap so gia nhiet do'); readln(del);
writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc'); for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);

(*Tinh cac thanh fan tai trong tuong duong do nhiet do*);
for i:= 1 to st do
begin
ff[i]:=-dt[i]*e[i]*hg*del; ft[d1[i]]:=ft[d1[i]]+ff[i]*l[i];
ft[d2[i]]:=ft[d2[i]]+ff[i]*m[i]; ft[d3[i]]:= ft[d3[i]]-ff[i]*l[i];
ft[d4[i]]:=ft[d4[i]]-ff[i]*m[i];
end;
for i:=i to sbt do f[i]:=ft[i]+fn[i];
(*Ghep cac MTDC riengvao MTDC tong the *);
for i:=1 to st do
begin
b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do

```

```

begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
s[d1[i],d3[i]]:= s[d1[i],d3[i]]-b[i];
s[d2[i],d3[i]]:= s[d2[i],d3[i]]-c[i];
s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+b[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do      s[i,j]:=s[j,i];

(*Chia khoi ma tran*);
for i := 1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
    sc[i,j]:=s[i,j];
(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
        Begin
            if(sc[ss,ss]<>0) then
                q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
                for j:=i to sbt do
                    sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
                End
        UNTIL(ss= sbt -1);
        if(sc[sbt,sbt]<>0) then
            qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
            for i:= sbt -1  downto 1 do
                Begin
                    r :=0;
                    for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];

```

```

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do    sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin

```

```

    fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

```

```

(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]])-e[i]*hg*del;

```

```

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

```



```

Program CTR7_Tinh_gian_phang_che_tao_khong_chinh_xac;
uses crt;
Type mt1=array[1..20,1..20] of real;   mt2=array[1..10] of real;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x:integer;
e,cd,dt,b,c,d,f,ft,qq,fl,ff,us,l,m,det,t:mt2;
g,d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
s,sc,sr:mt1;  q,r,hg:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var  i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
        Begin
            if(a[s,s]<>0) then
                q:=a[s,i]/a[s,s];
                for j:=i to n do
                    a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
                End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1  downto 1 do
            Begin
                r :=0;
                for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
                if(a[i,i]<>0) then
                    x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
                End;
        end;
begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln (sbt);
writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap chieu dai'); for i:=1 to st do  readln(cd[i]);

```

```

writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich tiet dien'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap he so gian no tuong duong'); readln(hg);
writeln('nhap so thanh che tao khong chinh xac'); readln(x);
writeln('nhap so thu tu thanh che tao khong chinh xac');
for i:=1 to x do readln(g[i]);
writeln('nhap do dai doi ra hoac do ngan hut');
for i:=1 to x do readln(det[i]);

```

```

(*Tinh cac thanh fan tai trong do che tao khong chinh xac*);
for i:= 1 to x do
begin
t[i]:=det[i]/(hg*cd[g[i]]); ff[i]:=-e[g[i]]*dt[g[i]]*hg*t[i];
ft[d1[g[i]]]:=ft[d1[g[i]]]+ff[i]*l[g[i]];
ft[d2[g[i]]]:=ft[d2[g[i]]]+ff[i]*m[g[i]];
ft[d3[g[i]]]:=ft[d3[g[i]]]-ff[i]*l[g[i]];
ft[d4[g[i]]]:=ft[d4[g[i]]]-ff[i]*m[g[i]];
end;
for i:=1 to sbt do f[i]:=ft[i];

```

```

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

```

```

(*Chia khoi ma tran*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
  sc[i,j]:=s[i,j];

(*Goi chuong trinh con de giai he fuong trinh*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do  sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]);

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.

```

```

Program TR8_Bai_toan_hai_chieu_kieu_FTHH_tam_giac_bien_dang_khong_doi;
Uses crt;
type mt1=array[1..10,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3= array[1..20] of integer;
Var   d1,d2,d3,d4,d5,d6,u: mt3;
      f,fl,fb,ft,fn,e,x1,x2,x3,y1,y2,y3,qq,px,py,dt,det,c1,c2,c3,c4,
      c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,e1,e2,
      e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10,e11,e12,e13,e14,e15,e16,e17,e18,y23,y31,y12,
      y13,x32,x13,x21,x23,h1,h2,us1,us2,us3:mt2;
      i,j,k,ss,sn,sf,sbt,tbt,rr,x:integer; q,r,hp,h,tx,ty:real;
      s:mt1;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var   i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1  downto 1 do
          Begin
            r :=0;
            for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
            if(a[i,i]<>0) then
              x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
            End;
          end;

        begin clrscr;
        (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
        writeln('nhap so nut');
        readln(sn);
        writeln('so fan tu');
        readln(sf);
        writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
        readln(sbt);
        writeln('nhap tong so so BTD ');

```

```

readln(tbt);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu ');
readln(x);
writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
if(x<>0) then for i:=1 to x do
readln(u[i]);
writeln('btd d1'); for i:=1 to sf do readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i:=1 to sf do readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i:=1 to sf do readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i:=1 to sf do readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i:=1 to sf do readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i:=1 to sf do readln(d6[i]);
writeln('toa do x1'); for i:=1 to sf do readln(x1[i]);
writeln('toa do x2'); for i:=1 to sf do readln(x2[i]);
writeln('toa do x3'); for i:=1 to sf do readln(x3[i]);
writeln('toa do y1'); for i:=1 to sf do readln(y1[i]);
writeln('toa do y2'); for i:=1 to sf do readln(y2[i]);
writeln('toa do y3'); for i:=1 to sf do readln(y3[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to sf do readln(e[i]);
writeln('nhap be day tam');
readln(h);
writeln('nhap he so Poatxong');
readln(hp);
writeln('nhap ti trong tren fuong x');
readln(tx);
writeln('nhap ti trong tren fuong y');
readln(ty);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
y23[i]:=y2[i]-y3[i]; y31[i]:=y3[i]-y1[i]; y12[i]:=y1[i]-y2[i];
y13[i]:=-y31[i]; x32[i]:=x3[i]-x2[i]; x13[i]:=x1[i]-x3[i];
x21[i]:=x2[i]-x1[i]; x23[i]:=-x32[i];
det[i]:=x13[i]*y23[i]-x23[i]*y13[i]; dt[i]:=det[i]/2;
h1[i]:=dt[i]*h*e[i]/((1-sqr(hp))*sqr(det[i]));
c1[i]:=h1[i]*(sqr(y23[i])+sqr(x32[i]))*(1-hp)/2;
c2[i]:=h1[i]*(y23[i]*x32[i]*hp+x32[i]*y23[i]*(1-hp)/2);
c3[i]:=h1[i]*(y23[i]*y31[i]+x32[i]*x13[i]*(1-hp)/2);
c4[i]:=h1[i]*(y23[i]*x13[i]*hp+x32[i]*y31[i]*(1-hp)/2);

```

```

c5[i]:=h1[i]*(y23[i]*y12[i]+x32[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c6[i]:=h1[i]*(y23[i]*x21[i]*hp+x32[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c7[i]:=h1[i]*(sqr(x32[i])+sqr(y23[i]))*(1-hp)/2);
c8[i]:=h1[i]*(x32[i]*y31[i]*hp+y23[i]*x13[i]*(1-hp)/2);
c9[i]:=h1[i]*(x32[i]*x13[i]+y23[i]*y31[i]*(1-hp)/2);
c10[i]:=h1[i]*(x32[i]*y12[i]*hp+y23[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c11[i]:=h1[i]*(x32[i]*x21[i]+y23[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c12[i]:=h1[i]*(sqr(y31[i])+sqr(x13[i]))*(1-hp)/2);
c13[i]:=h1[i]*(y31[i]*x13[i]*(1+hp)/2);
c14[i]:=h1[i]*(y31[i]*y12[i]+x13[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c15[i]:=h1[i]*(y31[i]*x21[i]+x13[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c16[i]:=h1[i]*(sqr(x13[i])+sqr(y31[i]))*(1-hp)/2);
c17[i]:=h1[i]*(x13[i]*y12[i]*hp+y31[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c18[i]:=h1[i]*(x13[i]*x21[i]+y31[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c19[i]:=h1[i]*(sqr(y12[i])+sqr(x21[i]))*(1-hp)/2);
c20[i]:=h1[i]*(y12[i]*x21[i]*(1+hp)/2);
c21[i]:=h1[i]*(sqr(x21[i])+sqr(y12[i]))*(1-hp)/2);
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c7[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c8[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c12[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c9[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c13[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c16[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c10[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c14[i];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+c17[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c19[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c11[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c15[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c18[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c20[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c21[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sf do

```

```

begin
px[i]:=tx*h*dt[i]; py[i]:=ty*h*dt[i]; ft[d1[i]]:=px[i]; ft[d2[i]]:=py[i];
ft[d3[i]]:=px[i]; ft[d4[i]]:=py[i]; ft[d5[i]]:=px[i]; ft[d6[i]]:=py[i];
end;
for i:=1 to sbt do f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];
(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat*);
if(x<>0) then for i:=1 to x do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
h2[i]:=e[i]/((1-sqr(hp))*det[i]);
e1[i]:=h2[i]*y23[i]; e2[i]:=h2[i]*hp*x32[i]; e3[i]:=h2[i]*y31[i];
e4[i]:=h2[i]*hp*x13[i]; e5[i]:=h2[i]*y12[i]; e6[i]:=h2[i]*hp*x21[i];
e7[i]:=h2[i]*hp*y23[i]; e8[i]:=h2[i]*x32[i]; e9[i]:=h2[i]*hp*y31[i];
e10[i]:=h2[i]*x13[i]; e11[i]:=h2[i]*hp*y12[i]; e12[i]:=h2[i]*x21[i];
e13[i]:=h2[i]*x32[i]*(1-hp)/2; e14[i]:=h2[i]*y23[i]*(1-hp)/2;
e15[i]:=h2[i]*x13[i]*(1-hp)/2; e16[i]:=h2[i]*y31[i]*(1-hp)/2;
e17[i]:=h2[i]*x21[i]*(1-hp)/2; e18[i]:=h2[i]*y12[i]*(1-hp)/2;
us1[i]:=e1[i]*qq[d1[i]]+e2[i]*qq[d2[i]]+e3[i]*qq[d3[i]]+e4[i]*qq[d4[i]]+
e5[i]*qq[d5[i]]+e6[i]*qq[d6[i]];
us2[i]:=e7[i]*qq[d1[i]]+e8[i]*qq[d2[i]]+e9[i]*qq[d3[i]]+e10[i]*qq[d4[i]]+
e11[i]*qq[d5[i]]+e12[i]*qq[d6[i]];
us3[i]:=e13[i]*qq[d1[i]]+e14[i]*qq[d2[i]]+e15[i]*qq[d3[i]]+e16[i]*qq[d4[i]]+
e17[i]*qq[d5[i]]+e18[i]*qq[d6[i]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do writeln (qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to sf do writeln (us1[i]);
for i:=1 to sf do writeln (us2[i]);
for i:=1 to sf do writeln (us3[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR9_Tinh_gan_dung_vat_ran_tron_xoay_chiu_tai_trong_doi_xung;
Uses crt;
type  mt1=array[1..20,1..20] of real;mt2= array[1..20] of real;
      mt3= array[1..20] of integer;
Var   d1,d2,d3,d4,d5,d6,u:mt3;
      f,fl,fb,ft,fn,r1,r2,r3,z1,z2,z3,rt,qq,pr,pz,dt,det,c1,c2,c3,c4,
      c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,
      z23,z31,z12,z13,r32,r13,r21,r23,h,us1,us2,us3,us4,b1,b2,b3,b4,b5,b6,
      b7:mt2;
      i,j,k,ss,sn,sf,sbt,tbt,rr,x:integer; q,r,hp,tr,tz,e,e1,e2,e3:real;
      s:mt1;

```

```

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);

```

```

var   i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
  s:=s+1;
  for i:= s+1 to n do
    Begin
      if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
        End
      UNTIL(s= n -1);
      x[n]:=b[n]/a[n,n];
      for i:= n -1  downto 1 do
        Begin
          r :=0;
          for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
          if(a[i,i]<>0) then
            x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
          End;
        end;
      begin clrscr;
      (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
      writeln('nhap tong so BTD');
      readln(tbt);
      writeln('so fan tu');
      readln(sf);
      writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
      readln(sbt);
      writeln('nhap tong so so BTD ');
      readln(tbt);

```



```

writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu ');
readln(x);
writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
if(x<>0) then for i:=1 to x do
readln(u[i]);
writeln('btd d1'); for i:=1 to sf do readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i:=1 to sf do readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i:=1 to sf do readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i:=1 to sf do readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i:=1 to sf do readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i:=1 to sf do readln(d6[i]);
writeln('toa do r1'); for i:=1 to sf do readln(r1[i]);
writeln('toa do r2'); for i:=1 to sf do readln(r2[i]);
writeln('toa do r3'); for i:=1 to sf do readln(r3[i]);
writeln('toa do z1'); for i:=1 to sf do readln(z1[i]);
writeln('toa do z2'); for i:=1 to sf do readln(z2[i]);
writeln('toa do z3'); for i:=1 to sf do readln(z3[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
readln(e);
writeln('nhap he so Poatxong');
readln(hp);
writeln('nhap ti trong tren fuong r');
readln(tr);
writeln('nhap ti trong tren fuong z');
readln(tz);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
z23[i]:=z2[i]-z3[i]; z31[i]:=z3[i]-z1[i]; z12[i]:=z1[i]-z2[i];
z13[i]:=-z31[i]; r32[i]:=r3[i]-r2[i]; r13[i]:=r1[i]-r3[i];
r21[i]:=r2[i]-r1[i]; r23[i]:=-r32[i];
det[i]:=r13[i]*z23[i]-r23[i]*z13[i]; dt[i]:=det[i]/2;
rt[i]:=(r1[i]+r2[i]+r3[i])/3; h[i]:=2*3.1416*rt[i]*dt[i];
b1[i]:=z23[i]/det[i]; b2[i]:=z31[i]/det[i]; b3[i]:=z12[i]/det[i];
b4[i]:=r32[i]/det[i]; b5[i]:=r13[i]/det[i]; b6[i]:=r21[i]/det[i];
b7[i]:=1/(3*rt[i]); e1:=(e*(1-hp))/((1+hp)*(1-2*hp)); e2:=e1*hp/(1-hp);
e3:=e1*(1-2*hp)/(2*(1-hp));
c1[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b1[i]+(b4[i]*e3)*b4[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c2[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b4[i]+(b4[i]*e3)*b1[i])*h[i];

```

```

c3[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b2[i]+(b4[i]*e3)*b5[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c4[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b5[i]+(b4[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c5[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b4[i]*e3)*b6[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c6[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b4[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c7[i]:=((b4[i]*e1)*b4[i]+(b1[i]*e3)*b1[i])*h[i];
c8[i]:=((b4[i]*e2)*b2[i]+(b1[i]*e3)*b5[i]+(b4[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c9[i]:=((b4[i]*e1)*b5[i]+(b1[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c10[i]:=((b4[i]*e2)*b3[i]+(b1[i]*e3)*b6[i]+(b4[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c11[i]:=((b4[i]*e1)*b6[i]+(b1[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c12[i]:=((b2[i]*e1+b7[i]*e2)*b2[i]+(b5[i]*e3)*b5[i]+
(b2[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c13[i]:=((b2[i]*e2+b7[i]*e2)*b5[i]+(b5[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c14[i]:=((b2[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b5[i]*e3)*b6[i]+
(b2[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c15[i]:=((b2[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b5[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c16[i]:=((b5[i]*e1)*b5[i]+(b2[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c17[i]:=((b5[i]*e2)*b3[i]+(b2[i]*e3)*b6[i]+(b5[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c18[i]:=((b5[i]*e1)*b6[i]+(b2[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c19[i]:=((b3[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b6[i]*e3)*b6[i]+
(b3[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c20[i]:=((b3[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b6[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c21[i]:=((sqrt(b6[i]))*e1+(sqrt(b3[i]))*e3)*h[i];
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c7[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c8[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c12[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c9[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c13[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c16[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c10[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c14[i];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+c17[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c19[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c11[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c15[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c18[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c20[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c21[i];
end;

```

```

for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do  s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sf do
begin
pr[i]:=tr*2*3.1416*rt[i]*dt[i];  pz[i]:=tz*2*3.1416*rt[i]*dt[i];
ft[d1[i]]:=pr[i]; ft[d2[i]]:=pz[i];
ft[d3[i]]:=pr[i];  ft[d4[i]]:=pz[i]; ft[d5[i]]:=pr[i]; ft[d6[i]]:=pz[i];
end;
for i:=1 to sbt do  f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat*);
if (x<>0) then for i:=1 to x do  qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
us1[i]:=(e1*b1[i]+e2*b7[i])*qq[d1[i]]+(e2*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e1*b2[i]+e2*b7[i])*qq[d3[i]]+(e2*b5[i])*qq[d4[i]]+(e1*b3[i]+
e2*b7[i])*qq[d5[i]]+(e2*b6[i])*qq[d6[i]];
us2[i]:=+(e2*b1[i]+e2*b7[i])*qq[d1[i]]+(e1*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e2*b2[i]+e2*b7[i])*qq[d3[i]]+(e1*b5[i])*qq[d4[i]]+
(e2*b3[i]+e2*b7[i])*qq[d5[i]]+(e1*b6[i])*qq[d6[i]];
us3[i]:=e3*b4[i]*qq[d1[i]]+e3*b1[i]*qq[d2[i]]+e3*b5[i]*qq[d3[i]]+
e3*b2[i]*qq[d4[i]]+e3*b6[i]*qq[d5[i]]+e3*b3[i]*qq[d6[i]];
us4[i]:=(e2*b1[i]+e1*b7[i])*qq[d1[i]]+(e2*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e2*b2[i]+e1*b7[i])*qq[d3[i]]+(e2*b5[i])*qq[d4[i]]+(e2*b3[i]+
e1*b7[i])*qq[d5[i]]+(e2*b6[i])*qq[d6[i]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do writeln (qq[i]);
writeln('gia tri us1 ');
for i:=1 to sf do writeln (us1[i]);
writeln('gia tri us2 ');
for i:=1 to sf do writeln (us2[i]);
writeln('gia tri us3 ');
for i:=1 to sf do writeln (us3[i]);
writeln('gia tri us4 ');
for i:=1 to sf do writeln (us4[i]);
readln;
end.

```

```

Program CTR10_Tinh_dam_lien_tuc_goi_tua_thong_thuong;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w:integer;
a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,lc1,lc2,m1x,m2x,
m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,e1,e11,e12,e13,mb1,mb2,ma,la,lb1,
lb2,z1,z2,z3:mt2;
n1,n2,a,b,c,d,d1,d2,k1,k2,k3,k4:mt3;
s:mt1; q,r:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
s:=s+1;
for i:= s+1 to n do
Begin
if(a[s,s]<>0) then
q:=a[s,i]/a[s,s];
for j:=i to n do
a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1 downto 1 do
Begin
r :=0;
for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
if(a[i,i]<>0) then
x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
End;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi triet tieu ');

```

```

readln(w);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
if(w<>0) then for i:=1 to w do readln(d[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i:=1 to st do readln(cd[i]);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln(x);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:= 1 to y do readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:= 1 to y do readln (a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
if (z<>0)then for i:=1 to z do readln(c[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh'); for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTĐ d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTĐ d2 '); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
(*Ghep cac MTĐC riêng vao MTĐC tong the*);
if(cd[i]<>0) then
begin
for i:=1 to st do
begin
c1[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];
c2[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];

```

```

    s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
    s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
    s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do  s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vec to tai trong*);
if (x<>0)then
begin
for i:=1 to x do
begin
el[i]:=cd[a[i]]; k1[i]:=d1[a[i]]; k2[i]:=d2[a[i]];
ma[i]:=(q1[i]*sqr(el[i])/12);
end;
for i:=1 to x do
begin
f[k1[i]]:=f[k1[i]]-ma[i];
f[k2[i]]:=f[k2[i]]+ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
k3[i]:=d1[b[i]]; k4[i]:=d2[b[i]]; el1[i]:=cd[b[i]];
mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(el1[i]));
mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(el1[i]));
end;
for i:=1 to y do
begin
f[k3[i]]:=f[k3[i]]-mb1[i];
f[k4[i]]:=f[k4[i]]+mb2[i];
end;
end;

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh mo men*);
for i:=1 to w do  qq[d[i]]:=0;
if(cd[i]<>0) then
begin

```

```

for i:=1 to st do
begin
z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d1[i]]+2*qq[d2[i]]);
z2[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d1[i]]+4*qq[d2[i]]);
m1[i]:=z1[i];
m2[i]:=z2[i];
end;
end;
(*tinh tong mo men*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin if(sqr(e11[i])<>0) then
m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];    m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;
l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
l2x[i]:=(m1x[i]-m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then

```

```

begin
for i :=1 to y do
begin
cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
l2y[i]:= (m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
end;
end;
(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;

```



```

writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.

```

```

Program CTR11_Tinh_dam_lien_tuc_tren_goi_tua_dan_hoi;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,v:integer;
a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,c4,lc1,lc2,m1x,m2x,
m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,hc:mt2;
n1,n2,a,b,c,d,dd,e1,d1,d2,d3,d4,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4:mt3;
s:mt1; q,r:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
        Begin
            if(a[s,s]<>0) then
                q:=a[s,i]/a[s,s];
                for j:=i to n do
                    a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
                End
            UNTIL(s= n -1);
            x[n]:=b[n]/a[n,n];
            for i:= n -1 downto 1 do
                Begin
                    r :=0;
                    for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
                    if(a[i,i]<>0) then
                        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
                    End;
                end;
            end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
readln(w);

```

```

writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
if(w<>0) then for i:=1 to w do readln(d[i]);
writeln('nhap so goi tua dan hoi');
readln(v);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co goi tua dan hoi');
if(v<>0) then for i:=1 to v do readln(e1[i]);
writeln('nhap he so do cung');
if(v<>0) then for i:=1 to v do readln(hc[i]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i:=1 to st do readln(cd[i]);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln(x);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln(a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln(q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do readln(b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:= 1 to y do readln(p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:= 1 to y do readln(a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:= 1 to y do readln(b1[i]);
end;
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
if (z<>0) then for i:=1 to z do readln(c[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh'); for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2 '); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);

```

```

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
  cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
  begin
    c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; c2[i]:=-6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
    c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i]; c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
end;
for i:=1 to st do
begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c1[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c2[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c4[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c2[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c3[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];
for i:=1 to v do s[e1[i],e1[i]]:=s[e1[i],e1[i]]+hc[i];
(*Ghep cac vecto tai trong*);
if (x<>0)then
begin
  for i:=1 to x do
  begin
    la[i]:= q1[i]*cd[a[i]]/2; ma[i]:=(q1[i]*sqr(cd[a[i]]))/12;
    x1[i]:=d1[a[i]]; x2[i]:=d2[a[i]]; x3[i]:=d3[a[i]];
    x4[i]:=d4[a[i]];
    f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
    f[x2[i]]:=f[x2[i]]-ma[i];
    f[x3[i]]:=f[x3[i]]+la[i];
    f[x4[i]]:=f[x4[i]]+ma[i];
  end;
end;
if (y<>0) then
begin
  for i:=1 to y do

```

```

begin
  cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
    lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
    mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]));
    mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]));
    y1[i]:=d1[b[i]];      y2[i]:=d2[b[i]];      y3[i]:=d3[b[i]];
    y4[i]:=d4[b[i]];
    if (cd3[i]<>0) then
      f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
      f[y2[i]]:=f[y2[i]]-mb1[i];
      f[y3[i]]:=f[y3[i]]+lb2[i];
      f[y4[i]]:=f[y4[i]]+mb2[i];
    end;
  end;

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh mo men*);
if (W<>0) then for i:=1 to w do qq[d[i]]:=0;
for i:=1 to st do
begin
  if (sqr(cd[i])<>0) then
    z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]]);
    if(cd[i]<>0) then
      m1[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d2[i]]+2*qq[d4[i]]);
      m2[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d2[i]]+4*qq[d4[i]]);
    end;
  (*tinh tong mo men*);
  if (x<>0) then
    begin
      for i:=1 to x do
        begin
          m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
          m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
        end;
      end;
    if (y<>0) then
      begin
        for i:=1 to y do
          begin
            m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
            m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];    m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
l2x[i]:=(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
l2y[i]:=(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
end;
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;

```

```

writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.

```

```

Program CTR12_Tinh_dam_lien_tuc_tren_goi_tua_lun_theo_FF_mo_hinh_lo_xo;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,v,sgc:integer;
a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,c4,lc1,lc2,m1x,m2x,
m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,hc,
max,cv:mt2;
n1,n2,a,b,c,d,dd,e1,d1,d2,d3,d4,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,tgc:mt3;
s:mt1; q,r,cc,maxx:real;

procedure gtcdd(a:mt1;n:integer);
begin
    max[i]:=abs(a[i,1]);
    for i:=1 to n do
        for j:=2 to n do
            begin
                if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i])) then
                    max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
            end;
            maxx:=max[1];
            for i:=2 to n do
                begin
                    if(max[i]>maxx) then
                        maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
                end;
            end;
end;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
    s:=0;
    REPEAT
        s:=s+1;
        for i:= s+1 to n do
            Begin
                if(a[s,s]<>0) then
                    q:=a[s,i]/a[s,s];
                    for j:=i to n do
                        a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
                    End
            UNTIL(s= n -1);
            x[n]:=b[n]/a[n,n];
            for i:= n -1 downto 1 do

```



```

Begin
  r :=0;
  for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
  if(a[i,i]<>0) then
    x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
  End;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTĐ');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi cho truoc');
readln(sgc);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do readln(tgc[i]);
writeln('nhap gia tri chuyen vi cho cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do readln(cv[tgc[i]]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i :=1 to st do readln(cd[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:= 1 to y do readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:= 1 to y do readln (a1[i]);

```

```

writeln('nhap b1');
for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
if (z<>0) then for i:=1 to z do readln(c[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh'); for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTĐ d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTĐ d2 '); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTĐ d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTĐ d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);

(*Ghep cac MTĐC rieng vao MTĐC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
  cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
  begin
    c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; c2[i]:=-6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
    c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i]; c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
end;
for i:=1 to st do
begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c1[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c2[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c4[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c2[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c3[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh tdmax cua cac fan tu MT*);
GTCDTD(s,tbt);
cc:=(maxx)*10E+08;
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
s[tgc[i],tgc[i]]:=s[tgc[i],tgc[i]]+cc;
(*Ghep cac vecto tai trong*);
if (x<>0)then

```

```

begin
  for i:=1 to x do
    begin
      la[i]:= q1[i]*cd[a[i]]/2;   ma[i]:=(q1[i]*sqr(cd[a[i]]))/12;
      x1[i]:=d1[a[i]];           x2[i]:=d2[a[i]];           x3[i]:=d3[a[i]];
      x4[i]:=d4[a[i]];
      f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
      f[x2[i]]:=f[x2[i]]-ma[i];
      f[x3[i]]:=f[x3[i]]+la[i];
      f[x4[i]]:=f[x4[i]]+ma[i];
    end;
  end;
  if (y<>0) then
    begin
      for i:=1 to y do
        begin
          cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
            lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
            mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]));
            mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]));
            y1[i]:=d1[b[i]];           y2[i]:=d2[b[i]];           y3[i]:=d3[b[i]];
            y4[i]:=d4[b[i]];
            if (cd3[i]<>0) then
              f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
              f[y2[i]]:=f[y2[i]]-mb1[i];
              f[y3[i]]:=f[y3[i]]+lb2[i];
              f[y4[i]]:=f[y4[i]]+mb2[i];
            end;
          end;
        if (sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
          f[tgc[i]]:= f[tgc[i]]+cc*cv[tgc[i]];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,tbt);

(*Tinh mo men*);
if (W<>0) then for i:=1 to w do qq[d[i]]:=0;
for i:=1 to st do
  begin
    if (sqr(cd[i])<>0) then
      z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]]);
    if(cd[i]<>0) then
      m1[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d2[i]]+2*qq[d4[i]]);
      m2[i]:=z1[i]+(c[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d2[i]]+4*qq[d4[i]]);
    end;
  end;

```

```

(*tinh tong mo men*);
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];    m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
begin
l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
l2x[i]:=(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
begin
l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
l2y[i]:= (m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do

```

```

begin
l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
end;
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to tbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.

```

```

Program CTR13_Giai_gan_dung_bai_toan_us_fang_kieu_FTTHH_bon_canh_bon_nut;
Uses crt;
Type  mt1=array [1..15,1..15] of real; mt2=array [1..15] of real;
      mt3= array[1..15] of integer;
Var   d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,u:mt3;
      f,fl,fb,ft,fn,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,qq,dt,det1,det2,det3,det4,

us1,us2,us3,k11,k12,k21,k22;z1,z1a,z1b,z1c,z1d,z3,z3a,z3b,z3c,z3d,z5,z5a,z5b,z5c,z5d,
      z7,z7a,z7b,z7c,z7d:mt2;
      i,j,k,ss,sf,sbt,tbt,x,p:integer; q,hp,tx,ty,e,e1,e2,e3,et,kx,w,
      t:real;
      s,b1,b2,b3,b4,bfc,b2c,b3c,b4c,d,h1,h2,h3,h4,l1,l2,l3,l4,a1,a2,a3,a4,
      g1,g2,g3,g4,r,ja,jb,jc,jd:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var   i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
      UNTIL(s= n -1);
      if(a[n,n]<>0) then
        x[n]:=b[n]/a[n,n];
        for i:= n -1  downto 1 do
          Begin
            r :=0;
            for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
            if(a[i,i]<>0) then
              x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
            End;
          end;
        procedure tinh11;
        begin
          for k:=1 to sf do
            begin
              for i:=1 to 2 do
                for i:=1 to 2 do

```

```

begin
ja[1,1]:=(-(1-w)*x1[k]+(1-w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]-(1+w)*x4[k])/4;
ja[1,2]:=(-(1-w)*y1[k]+(1-w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]-(1+w)*y4[k])/4;
ja[2,1]:=(-(1-w)*x1[k]-(1+w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]+(1-w)*x4[k])/4;
ja[2,2]:=(-(1-w)*y1[k]-(1+w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]+(1-w)*y4[k])/4;
end;
det1[k]:=ja[1,1]*ja[2,2]-ja[1,2]*ja[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g1[1,1]:=-(1-w)/4; g1[1,2]:=0; g1[1,3]:=(1+w)/4; g1[1,4]:=0;
g1[1,5]:=(1+w)/4; g1[1,6]:=0; g1[1,7]:=-(1+w)/4; g1[1,8]:=0;
g1[2,1]:=-(1-w)/4; g1[2,2]:=0; g1[2,3]:=-(1+w)/4; g1[2,4]:=0;
g1[2,5]:=(1+w)/4; g1[2,6]:=0; g1[2,7]:=(1-w)/4; g1[2,8]:=0;
g1[3,1]:=0; g1[3,2]:=-(1-w)/4; g1[3,3]:=0; g1[3,4]:=(1-w)/4;
g1[3,5]:=0; g1[3,6]:=(1+w)/4; g1[3,7]:=0; g1[3,8]:=-(1+w)/4;
g1[4,1]:=0; g1[4,2]:=-(1-w)/4; g1[4,3]:=0; g1[4,4]:=-(1+w)/4;
g1[4,5]:=0; g1[4,6]:=(1+w)/4; g1[4,7]:=0; g1[4,8]:=(1-w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a1[1,1]:=ja[2,2]/det1[k]; a1[1,2]:=-ja[1,2]/det1[k];
a1[1,3]:=0; a1[1,4]:=0;
a1[2,1]:=0; a1[2,2]:=0;
a1[2,3]:=-ja[2,1]/det1[k]; a1[2,4]:=ja[1,1]/det1[k];
a1[3,1]:=-ja[2,1]/det1[k]; a1[3,2]:=ja[1,1]/det1[k];
a1[3,3]:=ja[2,2]/det1[k]; a1[3,4]:=-ja[1,2]/det1[k];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 8 do
begin
b1[i,j]:=0; for p:=1 to 4 do
b1[i,j]:=b1[i,j]+a1[i,p]*g1[p,j];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=i to 3 do
begin d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:=e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to i-1 do d[i,j]:=d[j,i];
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do b1c[i,j]:=b1[j,i];

```

```

for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do
begin h1[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
h1[i,j]:=h1[i,j]+b1c[i,p]*d[p,j];
end;
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 8 do
begin
l1[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
l1[i,j]:=l1[i,j]+(h1[i,p]*b1[p,j])*t*det1[k];
end;
end;
end;
procedure tinhl2;
begin
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 2 do
for j:=1 to 2 do
begin
jb[1,1]:=(-(1-w)*x1[k]+(1-w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]-(1+w)*x4[k])/4;
jb[1,2]:=-((1-w)*y1[k]+(1-w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]-(1+w)*y4[k])/4;
jb[2,1]:=-((1+w)*x1[k]-(1-w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]+(1+w)*x4[k])/4;
jb[2,2]:=-((1+w)*y1[k]-(1-w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]+(1+w)*y4[k])/4;
end;
det2[k]:=jb[1,1]*jb[2,2]-jb[1,2]*jb[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g2[1,1]:=-(1-w); g2[1,2]:=0; g2[1,3]:=(1-w)/4; g2[1,4]:=0;
g2[1,5]:=1+w; g2[1,6]:=0; g2[1,7]:=-(1+w)/4; g2[1,8]:=0;
g2[2,1]:=-(1+w); g2[2,2]:=0; g2[2,3]:=-(1-w)/4; g2[2,4]:=0;
g2[2,5]:=1-w; g2[2,6]:=0; g2[2,7]:=(1+w)/4; g2[2,8]:=0;
g2[3,1]:=0; g2[3,2]:=-(1-w)/4; g2[3,3]:=0; g2[3,4]:=(1-w)/4;
g2[3,5]:=0; g2[3,6]:=(1+w)/4; g2[3,7]:=0; g2[3,8]:=-(1+w)/4;
g2[4,1]:=0; g2[4,2]:=-(1+w)/4; g2[4,3]:=0; g2[4,4]:=-(1-w)/4;
g2[4,5]:=0; g2[4,6]:=(1-w)/4; g2[4,7]:=0; g2[4,8]:=(1+w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a2[1,1]:=jb[2,2]/det2[k]; a2[1,2]:=-jb[1,2]/det2[k];
a2[1,3]:=0; a2[1,4]:=0;
a2[2,1]:=0; a2[2,2]:=0;

```



```

a2[2,3]:=-jb[2,1]/det2[k];   a2[2,4]:=jb[1,1]/det2[k];
a2[3,1]:=-jb[2,1]/det2[k];   a2[3,2]:=jb[1,1]/det2[k];
a2[3,3]:=jb[2,2]/det2[k];   a2[3,4]:=-jb[1,2]/det2[k];
end;
  for i:=1 to 3 do
    for j:=1 to 8 do
      begin
        b2[i,j]:=0; for p:=1 to 4 do
          b2[i,j]:=b2[i,j]+a2[i,p]*g2[p,j];
        end;
        for i:=1 to 3 do
          for j:=i to 3 do
            begin d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
              d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
            end;
            for i:=1 to 3 do
              for j:=1 to i-1 do d[i,j]:=d[j,i];
            end;
            for i:=1 to 8 do
              for j:=1 to 3 do b2c[i,j]:=b2[j,i];
            end;
            for i:=1 to 8 do
              for j:=1 to 3 do
                begin h2[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
                  h2[i,j]:=h2[i,j]+b2c[i,p]*d[p,j];
                end;
              end;
            end;
            for i:=1 to 8 do
              for j:=1 to 8 do
                begin
                  l2[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
                    l2[i,j]:=l2[i,j]+(h2[i,p]*b2[p,j])*t*det2[k];
                  end;
                end;
              end;
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
procedure tinhl3;
begin
  for k:=1 to sf do
    begin
      for i:=1 to 2 do
        for j:=1 to 2 do
          begin
            jc[1,1]:=-((1+w)*x1[k]+(1+w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]-(1-w)*x4[k])/4;
            jc[1,2]:=-((1+w)*y1[k]+(1+w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]-(1-w)*y4[k])/4;
            jc[2,1]:=-((1-w)*x1[k]-(1+w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]+(1-w)*x4[k])/4;
            jc[2,2]:=-((1-w)*y1[k]-(1+w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]+(1-w)*y4[k])/4;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

```

det3[k]:=jc[1,1]*jc[2,2]-jc[1,2]*jc[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g3[1,1]:=-(1+w); g3[1,2]:=0; g3[1,3]:=(1+w)/4; g3[1,4]:=0;
g3[1,5]:=1-w; g3[1,6]:=0; g3[1,7]:=-(1-w)/4; g3[1,8]:=0;
g3[2,1]:=-(1-w); g3[2,2]:=0; g3[2,3]:=-(1+w)/4; g3[2,4]:=0;
g3[2,5]:=1+w; g3[2,6]:=0; g3[2,7]:=(1-w)/4; g3[2,8]:=0;
g3[3,1]:=0; g3[3,2]:=-(1+w)/4; g3[3,3]:=0; g3[3,4]:=(1+w)/4;
g3[3,5]:=0; g3[3,6]:=(1-w)/4; g3[3,7]:=0; g3[3,8]:=-(1-w)/4;
g3[4,1]:=0; g3[4,2]:=-(1-w)/4; g3[4,3]:=0; g3[4,4]:=-(1+w)/4;
g3[4,5]:=0; g3[4,6]:=(1+w)/4; g3[4,7]:=0; g3[4,8]:=(1-w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a3[1,1]:=jc[2,2]/det3[k]; a3[1,2]:=-jc[1,2]/det3[k];
a3[1,3]:=0; a3[1,4]:=0;
a3[2,1]:=0; a3[2,2]:=0;
a3[2,3]:=-jc[2,1]/det3[k]; a3[2,4]:=jc[1,1]/det3[k];
a3[3,1]:=-jc[2,1]/det3[k]; a3[3,2]:=jc[1,1]/det3[k];
a3[3,3]:=jc[2,2]/det3[k]; a3[3,4]:=-jc[1,2]/det3[k];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 8 do
begin
b3[i,j]:=0; for p:=1 to 4 do
b3[i,j]:=b3[i,j]+a3[i,p]*g3[p,j];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=i to 3 do
begin d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:=e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to i-1 do d[i,j]:=d[j,i];
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do b3c[i,j]:=b3[j,i];
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do
begin h3[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
h3[i,j]:=h3[i,j]+b3c[i,p]*d[p,j];
end;
for i:=1 to 8 do

```

```

for j:=1 to 8 do
begin
l3[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
l3[i,j]:=l3[i,j]+(h3[i,p]*b3[p,j])*t*det3[k];
end;
end;
end;
procedure tinhl4;
begin
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 2 do
for j:=1 to 2 do
begin
jd[1,1]:=(-(1+w)*x1[k]+(1+w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]-(1-w)*x4[k])/4;
jd[1,2]:=(-(1+w)*y1[k]+(1+w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]-(1-w)*y4[k])/4;
jd[2,1]:=(-(1+w)*x1[k]-(1-w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]+(1+w)*x4[k])/4;
jd[2,2]:=(-(1+w)*y1[k]-(1-w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]+(1+w)*y4[k])/4;
end;
det4[k]:=jd[1,1]*jd[2,2]-jd[1,2]*jd[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g4[1,1]:=-(1+w); g4[1,2]:=0; g4[1,3]:=(1+w)/4; g4[1,4]:=0;
g4[1,5]:=1-w; g4[1,6]:=0; g4[1,7]:=-(1-w)/4; g4[1,8]:=0;
g4[2,1]:=-(1+w); g4[2,2]:=0; g4[2,3]:=-(1-w)/4; g4[2,4]:=0;
g4[2,5]:=1-w; g4[2,6]:=0; g4[2,7]:=(1+w)/4; g4[2,8]:=0;
g4[3,1]:=0; g4[3,2]:=-(1+w)/4; g4[3,3]:=0; g4[3,4]:=(1+w)/4;
g4[3,5]:=0; g4[3,6]:=(1-w)/4; g4[3,7]:=0; g4[3,8]:=-(1-w)/4;
g4[4,1]:=0; g4[4,2]:=-(1+w)/4; g4[4,3]:=0; g4[4,4]:=-(1-w)/4;
g4[4,5]:=0; g4[4,6]:=(1-w)/4; g4[4,7]:=0; g4[4,8]:=(1+w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a4[1,1]:=jd[2,2]/det4[k]; a4[1,2]:=-jd[1,2]/det4[k];
a4[1,3]:=0; a4[1,4]:=0;
a4[2,1]:=0; a4[2,2]:=0;
a4[2,3]:=-jd[2,1]/det4[k]; a4[2,4]:=jd[1,1]/det4[k];
a4[3,1]:=-jd[2,1]/det4[k]; a4[3,2]:=jd[1,1]/det4[k];
a4[3,3]:=jd[2,2]/det4[k]; a4[3,4]:=-jd[1,2]/det4[k];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 8 do

```

```

begin
b4[i,j]:=0; for p:=1 to 4 do
b4[i,j]:=b4[i,j]+a4[i,p]*g4[p,j];
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=i to 3 do
begin d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to i-1 do      d[i,j]:=d[j,i];
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do      b4c[i,j]:=b4[j,i];
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 3 do
begin h4[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
h4[i,j]:=h4[i,j]+b4c[i,p]*d[p,j];
end;
for i:=1 to 8 do
for j:=1 to 8 do
begin
l4[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
l4[i,j]:=l4[i,j]+(h4[i,p]*b4[p,j])*t*det4[k];
end;
end;
end;
procedure tinhS;
begin
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+r[1,1];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+r[1,2];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+r[1,3];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+r[1,4];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+r[1,5];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+r[1,6];
s[d1[i],d7[i]]:=s[d1[i],d7[i]]+r[1,7];
s[d1[i],d8[i]]:=s[d1[i],d8[i]]+r[1,8];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+r[2,2];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+r[2,3];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+r[2,4];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+r[2,5];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+r[2,6];

```

```

s[d2[i],d7[i]]:=s[d2[i],d7[i]]+r[2,7];
s[d2[i],d8[i]]:=s[d2[i],d8[i]]+r[2,8];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+r[3,3];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+r[3,4];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+r[3,5];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+r[3,6];
s[d3[i],d7[i]]:=s[d3[i],d7[i]]+r[3,7];
s[d3[i],d8[i]]:=s[d3[i],d8[i]]+r[3,8];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+r[4,4];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+r[4,5];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+r[4,6];
s[d4[i],d7[i]]:=s[d4[i],d7[i]]+r[4,7];
s[d4[i],d8[i]]:=s[d4[i],d8[i]]+r[4,8];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+r[5,5];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+r[5,6];
s[d5[i],d7[i]]:=s[d5[i],d7[i]]+r[5,7];
s[d5[i],d8[i]]:=s[d5[i],d8[i]]+r[5,8];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+r[6,6];
s[d6[i],d7[i]]:=s[d6[i],d7[i]]+r[6,7];
s[d6[i],d8[i]]:=s[d6[i],d8[i]]+r[6,8];
s[d7[i],d7[i]]:=s[d7[i],d7[i]]+r[7,7];
s[d7[i],d8[i]]:=s[d7[i],d8[i]]+r[7,8];
s[d8[i],d8[i]]:=s[d8[i],d8[i]]+r[8,8];
end;
end;
procedure tinhus;
begin
(*Tinh ung suat tai trong tam cua FTHH*);
if(x<>0) then for i:=1 to x do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
k11[i]:=-x1[i]+x2[i]+x3[i]-x4[i]; k12[i]:=-y1[i]+y2[i]+y3[i]-y4[i];
k21[i]:=-x1[i]-x2[i]+x3[i]+x4[i]; k22[i]:=-y1[i]-y2[i]+y3[i]+y4[i];
us1[i]:=e1*(-k22[i]+k12[i])*qq[d1[i]]+e2*(k21[i]-k11[i])*qq[d2[i]]+
e1*(k22[i]+k12[i])*qq[d3[i]]-e2*(k21[i]+k11[i])*qq[d4[i]]+
e1*(k22[i]-k12[i])*qq[d5[i]]+ e2*(-k21[i]+k11[i])*qq[d6[i]]-
e1*(k22[i]+k12[i])*qq[d7[i]]+ e2*(k21[i]+k11[i])*qq[d8[i]];
us2[i]:=e2*(-k22[i]+k12[i])*qq[d1[i]]+e1*(k21[i]-k11[i])*qq[d2[i]]+
e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d3[i]]-e1*(k21[i]+k11[i])*qq[d4[i]]-
e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d5[i]]+ e1*(-k21[i]+k11[i])*qq[d6[i]]-
e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d7[i]]+ e1*(k21[i]+k11[i])*qq[d8[i]];
us3[i]:=e3*(k21[i]-k11[i])*qq[d1[i]]+e3*(-k22[i]+k12[i])*qq[d2[i]]+
e3*(k21[i]-k11[i])*qq[d3[i]]+e3*(k22[i]+k12[i])*qq[d4[i]]+
e3*(-k21[i]+k11[i])*qq[d5[i]]+e3*(k22[i]-k12[i])*qq[d6[i]]+

```

```

e3*(k21[i]+k11[i])*qq[d7[i]]-e3*(k22[i]+k12[i])*qq[d8[i]];
end;
end;

```

```

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh: Vo nhu Cau*);
writeln('so fan tu');
readln(sf);
writeln('nhap so BTĐ có chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap tong so so BTĐ ');
readln(tbt);
writeln('nhap so BTĐ có chuyen vi triet tieu ');
readln(x);
writeln('nhap so thu tu BTĐ có chuyen vi triet tieu ');
if(x<>0) then for i:=1 to x do
readln(u[i]);
writeln('btd d1'); for i:=1 to sf do readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i:=1 to sf do readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i:=1 to sf do readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i:=1 to sf do readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i:=1 to sf do readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i:=1 to sf do readln(d6[i]);
writeln('btd d7'); for i:=1 to sf do readln(d7[i]);
writeln('btd d8'); for i:=1 to sf do readln(d8[i]);
writeln('toa do x1'); for i:=1 to sf do readln(x1[i]);
writeln('toa do x2'); for i:=1 to sf do readln(x2[i]);
writeln('toa do x3'); for i:=1 to sf do readln(x3[i]);
writeln('toa do x4'); for i:=1 to sf do readln(x4[i]);
writeln('toa do y1'); for i:=1 to sf do readln(y1[i]);
writeln('toa do y2'); for i:=1 to sf do readln(y2[i]);
writeln('toa do y3'); for i:=1 to sf do readln(y3[i]);
writeln('toa do y4'); for i:=1 to sf do readln(y4[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
readln(e);
writeln('nhap be day tam');
readln(t);
writeln('nhap he so Poatxong');
readln(hp);
writeln('nhap ti trong tren fuong x');
readln(tx);
writeln('nhap ti trong tren fuong y');
readln(ty);
writeln('nhap luc bien');

```

```

for i:=1 to sbt do readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);
w:=0.5773502691; e1:=e/(1-hp); e2:=e1*hp; e3:=e1*(1-hp)/2;
tinhl1;
tinhl2;
tinhl3;
tinhl4;
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 8 do
for j:=i to 8 do r[i,j]:=l1[i,j]+l2[i,j]+l3[i,j]+l4[i,j];
end;
tinhs;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

for k:=1 to sf do
begin
z1a[k]:=(1-w)*(1-w)*det1[k];
z1b[k]:=(1+w)*(1-w)*det2[k];
z1c[k]:=(1-w)*(1+w)*det3[k];
z1d[k]:=(1+w)*(1+w)*det4[k];

z3a[k]:=(1+w)*(1-w)*det1[k];
z3b[k]:=(1-w)*(1-w)*det2[k];
z3c[k]:=(1+w)*(1+w)*det3[k];
z3d[k]:=(1-w)*(1+w)*det4[k];

z5a[k]:=(1+w)*(1+w)*det1[k];
z5b[k]:=(1-w)*(1+w)*det2[k];
z5c[k]:=(1+w)*(1-w)*det3[k];
z5d[k]:=(1-w)*(1-w)*det4[k];
z7a[k]:=(1-w)*(1+w)*det1[k];
z7b[k]:=(1+w)*(1+w)*det2[k];
z7c[k]:=(1-w)*(1-w)*det3[k];
z7d[k]:=(1+w)*(1-w)*det4[k];

z1[k]:=z1a[k]+z1b[k]+z1c[k]+z1d[k];
z3[k]:=z3a[k]+z3b[k]+z3c[k]+z3d[k];
z5[k]:=z5a[k]+z5b[k]+z5c[k]+z5d[k];
z7[k]:=z7a[k]+z7b[k]+z7c[k]+z7d[k];
end;
for i:=1 to sf do

```

```

begin
ft[d1[i]]:=ft[d1[i]]+z1[i]*tx*t/4; ft[d2[i]]:=ft[d2[i]]+z1[i]*ty*t/4;
ft[d3[i]]:=ft[d3[i]]+z3[i]*tx*t/4; ft[d4[i]]:=ft[d4[i]]+z3[i]*ty*t/4;
ft[d5[i]]:=ft[d5[i]]+z5[i]*tx*t/4; ft[d6[i]]:=ft[d6[i]]+z5[i]*ty*t/4;
ft[d7[i]]:=ft[d7[i]]+z7[i]*tx*t/4; ft[d8[i]]:=ft[d8[i]]+z7[i]*ty*t/4;
end;
for i:=1 to sbt do f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Goi chuong trinh con de tinh ung suat*);
tinhus;

(*Doc ket qua*);
writeln ('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('ung suat1');
for i:=1 to sf do
writeln(us1[i]);
writeln ('ung suat2');
for i:=1 to sf do
writeln(us2[i]);
writeln ('ung suat3');
for i:=1 to sf do
writeln(us3[i]);
readln;
end.

```



```

Program CTR14_Tinh_khung_phang_tren_goi_tua_thuong_va_goi_tua_dan_hoi ;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,sgd,ss,rr,x,y,w,z:integer;
a1,b1,p,q1,e,dt,f,fn,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,m1q,m2q,m1p,m2p,c1,c2,c3,c4,c5,c6,
c7,cd,cd3,cd4,e11,e12,g1,g2,g3,g4,ma,la,mb1,mb2,lb1,lb2,l1w,l2w,m1w,m2w,
lc1,lc2,l1q,l2q,l1p,l2p,u,v,z1,z2,z3,qq1,qq2,qq3,qq4,qq5,qq6,xx1,xx2,yy1,
yy2,hc:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgd:mt3;
s:mt1; q,r:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
s:=s+1;
for i:= s+1 to n do
Begin
if(a[s,s]<>0) then
q:=a[s,i]/a[s,s];
for j:=i to n do
a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1 downto 1 do
Begin
r :=0;
for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
if(a[i,i]<>0) then
x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
End;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('tong so BTĐ');
readln(tbt);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so BTĐ khong co chuyen vi');

```

```

readln(z);
writeln('nhap so so thu tu BTD khong co chuyen vi');
for i :=1 to z do
readln(d[i]);
writeln('nhap tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i :=1 to st do readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i :=1 to st do readln(xx2[i]);
  writeln('nhap toa do y1');
for i :=1 to st do readln(yy1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i :=1 to st do readln(yy2[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to st do readln(d6[i]);
writeln('nhap so BTD co goi tua dan hoi');
readln(sgd);
writeln('nhap so thu tu BTD co goi tua dan hoi');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(tgd[i]);
writeln('nhap he so do cung');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(hc[tgd[i]]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');
for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do
readln (fn[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(w);
if(x<>0) then
begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');

```

```

for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:=1 to y do
readln (a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:=1 to y do
readln (b1[i]);
end;
if(w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
for i:=1 to w do
readln (c[i]);
end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqrt(xx2[i]-xx1[i])+sqrt(yy2[i]-yy1[i]));
l[i]:=(xx2[i]-xx1[i])/cd[i]; m[i]:=(yy2[i]-yy1[i])/cd[i];
cd3[i]:= sqrt(cd[i])*cd[i];
if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqrt(cd[i])<>0)) then
begin
g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqrt(cd[i]);
g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
end;
c1[i]:=g3[i]*sqrt(l[i])+g1[i]*sqrt(m[i]);
c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*m[i]; c3[i]:=g3[i]*sqrt(m[i])+g1[i]*sqrt(l[i]);
c4[i]:=g2[i]*m[i]; c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i]; c7[i]:=2*g4[i];
end;
for i:=1 to st do

```

```

begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
  s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];
  if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do
    s[sgd[i],sgd[i]]:=s[sgd[i],sgd[i]]+hc[sgd[i]];

(*Ghep cac vec to tai trong*);
if(x<>0) then
begin
  for i:=1 to x do
  begin
    x1[i]:=d1[a[i]];    x2[i]:=d2[a[i]];    x3[i]:=d3[a[i]];
    x4[i]:=d4[a[i]];    x5[i]:=d5[a[i]];    x6[i]:=d6[a[i]];
    la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;    ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
  end;
  for i:=1 to x do
  begin
    f[x1[i]]:=f[x1[i]]-(la[i])*m[a[i]];
    f[x2[i]]:=f[x2[i]]+(la[i])*l[a[i]];
    f[x3[i]]:=f[x3[i]]-ma[i];
    f[x4[i]]:=f[x4[i]]-(la[i])*m[a[i]];
    f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(la[i])*l[a[i]];

```

```

    f[x6[i]]:=f[x6[i]]+ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
    for i:=1 to y do
    begin
        cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; y1[i]:=d1[b[i]]; y2[i]:=d2[b[i]];
        y3[i]:=d3[b[i]]; y4[i]:=d4[b[i]]; y5[i]:=d5[b[i]];
        y6[i]:=d6[b[i]]; mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
        mb2[i]:=p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
        if(cd3[i]<>0) then
        begin
            lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
            lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
        end;
    end;
    for i:=1 to y do
    begin
        if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
        begin
            f[y1[i]]:=f[y1[i]]-(lb1[i])*m[b[i]];
            f[y2[i]]:=f[y2[i]]+(lb1[i])*l[b[i]];
            f[y3[i]]:=f[y3[i]]-mb1[i];
            f[y4[i]]:=f[y4[i]]-(lb2[i])*m[b[i]];
            f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(lb2[i])*l[b[i]];
            f[y6[i]]:=f[y6[i]]+mb2[i];
        end;
    end;
end;
end;
for i:=1 to sbt do f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

for i:=1 to st do
begin
    qq1[i]:=qq[d1[i]]; qq2[i]:=qq[d2[i]]; qq3[i]:=qq[d3[i]];
    qq4[i]:=qq[d4[i]]; qq5[i]:=qq[d5[i]]; qq6[i]:=qq[d6[i]];
end;

(*Tinh mo men o trang thai tu do*);
for i:=1 to z do qq[d[i]]:=0;
for i:=1 to st do

```

```

begin
if(cd[i]<>0) then
begin
z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*((qq1[i]-qq4[i])*m[i]+(qq5[i]-
qq2[i])*l[i]); z2[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq3[i]+qq6[i]);
z3[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(qq3[i]+2*qq6[i]);
end;
m1[i]:=z1[i]+z2[i];
m2[i]:=z1[i]+z3[i];
end;
(*Tinh tong momen*);
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
end;
if(w<>0) then
begin
for i:=1 to w do
begin
m1w[i]:=m1[c[i]];
m2w[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
la[i]:=q1[i]*(cd[a[i]])/2;
l1q[i]:=-(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
l2q[i]:=(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;

```

```

if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
l1p[i]:=-(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
l2p[i]:=(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
end;
end;
if(w<>0) then
begin
for i:=1 to w do
begin
l1w[i]:=-(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
l2w[i]:=(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
end;
end;
(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri mo men w');
if (w<>0) then
begin
for i:=1 to w do
writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
end;
writeln ('gia tri mo men x');
if (x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men y');
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat w');
if (w<>0) then

```

```

begin
for i :=1 to w do
writeln (l1w[i],l2w[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (l1q[i],l2q[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (l1p[i],l2p[i]);
end;
readln;
end.

```



```

Program CTR15_Tinh_khung_phang_co_goi_tua_lun_theo_FF_mo_hinh_lo_xo;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,w,z,sgc:integer;
a1,b1,p,q1,e,dt,f,fn,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,m1q,m2q,m1p,m2p,c1,c2,c3,c4,c5,c6,
c7,cd,cd3,cd4,e11,e12,g1,g2,g3,g4,ma,la,mb1,mb2,lb1,lb2,l1w,l2w,m1w,m2w,
lc1,lc2,l1q,l2q,l1p,l2p,u,v,z1,z2,z3,qq1,qq2,qq3,qq4,qq5,qq6,xx1,xx2,yy1,
yy2,cv,max:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgc:mt3;
s:mt1; q,r,cc,maxx:real;

procedure gtcdd(a:mt1;n:integer);
begin
  max[i]:=abs(a[i,1]);
  for i:=1 to n do
    for j:=2 to n do
      begin
        if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i])) then
          max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
        end;
        maxx:=max[1];
        for i:=2 to n do
          begin
            if(max[i]>maxx) then
              maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
            end;
          end;
        end;
      end;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  s:=0;
  REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
            a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
          End
        UNTIL(s= n -1);
        x[n]:=b[n]/a[n,n];

```

```

for i:= n -1 downto 1 do
  Begin
    r :=0;
    for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
    if(a[i,i]<>0) then
      x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
  end;
begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi cho truoc');
readln(sgc);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do readln(tgc[i]);
writeln('nhap gia tri chuyen vi cho cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do readln(cv[tgc[i]]);
writeln('nhap toa do x1');
for i :=1 to st do readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i :=1 to st do readln(xx2[i]);
  writeln('nhap toa do y1');
for i :=1 to st do readln(yy1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i :=1 to st do readln(yy2[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to st do readln(d6[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');
for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do
  readln (fn[i]);
  writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');

```

```

readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(w);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:=1 to y do
readln (a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:=1 to y do
readln (b1[i]);
end;
if(w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
for i:=1 to w do
readln (c[i]);
end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the *);
for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqrt(xx2[i]-xx1[i])+sqrt(yy2[i]-yy1[i]));
l[i]:=(xx2[i]-xx1[i])/cd[i]; m[i]:=(yy2[i]-yy1[i])/cd[i];
cd3[i]:= sqrt(cd[i])*cd[i];
if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqrt(cd[i])<>0)) then
begin
g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqrt(cd[i]);

```

```

g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
end;
c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(m[i]);
c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*m[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(m[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
c4[i]:=g2[i]*m[i]; c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i]; c7[i]:=2*g4[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri tuyet doi max cua cac fan tu MT*);
GTCDDT(s,tbt);
cc:=(maxx)*(10E+08);
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
s[tgc[i],tgc[i]]:=s[tgc[i],tgc[i]]+cc;

(*Ghep cac vec to tai trong*);
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
x1[i]:=d1[a[i]]; x2[i]:=d2[a[i]]; x3[i]:=d3[a[i]];

```

```

x4[i]:=d4[a[i]];    x5[i]:=d5[a[i]];    x6[i]:=d6[a[i]];
la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;    ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]]/12);
end;
for i:=1 to x do
begin
f[x1[i]]:=f[x1[i]]-(la[i])*m[a[i]];
f[x2[i]]:=f[x2[i]]+(la[i])*l[a[i]];
f[x3[i]]:=f[x3[i]]-ma[i];
f[x4[i]]:=f[x4[i]]-(la[i])*m[a[i]];
f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(la[i])*l[a[i]];
f[x6[i]]:=f[x6[i]]+ma[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; y1[i]:=d1[b[i]]; y2[i]:=d2[b[i]];
y3[i]:=d3[b[i]]; y4[i]:=d4[b[i]]; y5[i]:=d5[b[i]];
y6[i]:=d6[b[i]]; mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
mb2[i]:=p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
if(cd3[i]<>0) then
begin
lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
end;
end;
for i:=1 to y do
begin
if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
begin
f[y1[i]]:=f[y1[i]]-(lb1[i])*m[b[i]];
f[y2[i]]:=f[y2[i]]+(lb1[i])*l[b[i]];
f[y3[i]]:=f[y3[i]]-mb1[i];
f[y4[i]]:=f[y4[i]]-(lb2[i])*m[b[i]];
f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(lb2[i])*l[b[i]];
f[y6[i]]:=f[y6[i]]+mb2[i];
end;
end;
end;
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
f[tgc[i]]:=f[tgc[i]]+cc*cv[tgc[i]];
for i:=1 to tbt do f[i]:=f[i]+fn[i];

```

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);

GHFT(s,f,qq,tbt);

for i:=1 to st do

begin

qq1[i]:=qq[d1[i]]; qq2[i]:=qq[d2[i]]; qq3[i]:=qq[d3[i]];

qq4[i]:=qq[d4[i]]; qq5[i]:=qq[d5[i]]; qq6[i]:=qq[d6[i]];

end;

(*Tinh mo men o trang thai tu do*);

for i:=1 to z do qq[d[i]]:=0;

for i:=1 to st do

begin

if(cd[i]<>0) then

begin

z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*((qq1[i]-qq4[i])*m[i]+(qq5[i]-
qq2[i])*l[i]); z2[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq3[i]+qq6[i]);

z3[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(qq3[i]+2*qq6[i]);

end;

m1[i]:=z1[i]+z2[i];

m2[i]:=z1[i]+z3[i];

end;

(*Tinh tong momen*);

if(x<>0) then

begin

for i:=1 to x do

begin

m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];

m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];

end;

end;

if(y<>0) then

begin

for i:=1 to y do

begin

m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];

m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];

end;

end;

if(w<>0) then

begin

for i:=1 to w do

begin

m1w[i]:=m1[c[i]];

```

    m2w[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if(x<>0) then
begin
    for i:=1 to x do
    begin
        la[i]:=q1[i]*(cd[a[i]])/2;
        l1q[i]:=-(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
        l2q[i]:=(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
    end;
end;
if(y<>0) then
begin
    for i:=1 to y do
    begin
        cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
        lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
        lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
        l1p[i]:=-(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
        l2p[i]:=(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
    end;
end;
if(w<>0) then
begin
    for i:=1 to w do
    begin
        l1w[i]:=-(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
        l2w[i]:=(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
    end;
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men w');
if (w<>0) then
begin
    for i:=1 to w do
    writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
end;
end;

```

```

writeln ('gia tri mo men x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat w');
if (w<>0) then
begin
for i :=1 to w do
writeln (l1w[i],l2w[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (l1q[i],l2q[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (l1p[i],l2p[i]);
end;
readln;
end.

```



```

Program CTR16_Tinh_he_dam_truc_giao;
uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
mt3=array[1..10] of integer;
Var i,j, k,sn,sbn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,sgd:integer;

a1,b1,p,q1,e,dt,f,fc,mq,qq,l,m,m1q,m2q,m1p,m2p,m1z,m2z,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,e11
,e12,g1,g2,g3,g4:mt2;
cd,cd3,mt,mqx,e1,m1,m2,t1,t2,la,ma,lb1,lb2,mb1,mb2,z1,z2,xx1,xx2,yy1,yy2,
hc,mqy,r1,r2,r3,r4:mt2;
d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgd:mt3;
s:mt1; q,r:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
s:=s+1;
for i:= s+1 to n do
Begin
if(a[s,s]<>0) then
q:=a[s,i]/a[s,s];
for j:=i to n do
a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1 downto 1 do
Begin
r :=0;
for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
if(a[i,i]<>0) then
x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
End;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh: Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);

```

```

writeln('nhap tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('nhap so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(w);
if (w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu bac tu do khong co chuyen vi');
for i:=1 to w do
readln(d[i]);
end;
writeln('nhap so bac tu do co goi tua dan hoi');
readln(sgd);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co goi tua dan hoi');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(tgd[i]);
writeln('nhap he so do cung');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(hc[tgd[i]]);
writeln('nhap so thu tu bac tu do');
writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap d5'); for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap d6'); for i:=1 to st do readln(d6[i]);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do readln(xx2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do readln(yy1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do readln(yy2[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh y');
for i:=1 to st do readln(mqy[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh x');
for i:=1 to st do readln(mqx[i]);
writeln('nhap mo dun truo');
for i:=1 to st do readln(mt[i]);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln(x);
writeln('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');

```

```

readln(y);
writeln('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:=1 to y do
readln (a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:=1 to y do
readln (b1[i]);
end;
if(z<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
for i:=1 to z do
readln (c[i]);
end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqrt(x2[i]-x1[i])+sqrt(y2[i]-y1[i]));
l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i];
m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
cd3[i]:= sqrt(cd[i])*cd[i];
if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqrt(cd[i])<>0)) then
begin
g1[i]:=c[i]*mq[i]/cd[i]; g2[i]:=e[i]*mq[i]/sqrt(cd[i]);

```

```

g3[i]:=e[i]*mq[i]/cd3[i]; g4[i]:=mt[i]*mqx[i]/cd[i];
end;
c1[i]:=12*g3[i]; c2[i]:=6*g2[i]*m[i]; c3[i]:=6*g2[i]*l[i];
c4[i]:=4*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]); c5[i]:=(4*g1[i]-g4[i])*l[i]*m[i];
c6[i]:=2*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]); c7[i]:=(2*g1[i]+g4[i])*l[i]*m[i];
c8[i]:=4*g1[i]*sqr(l[i])+g4[i]*sqr(m[i]); c9[i]:=2*g1[i]*sqr(l[i])-
g4[i]*sqr(m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c4[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c3[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c8[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c3[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c2[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c6[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]-c7[i];
s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]-c2[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c4[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]-c3[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c7[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c9[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c3[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]-c5[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c8[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
x1[i]:=d1[a[i]]; x2[i]:=d2[a[i]]; x3[i]:=d3[a[i]];
x4[i]:=d4[a[i]]; x5[i]:=d5[a[i]]; x6[i]:=d6[a[i]];
la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2; ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]]/12;
r1[i]:=(ma[i])*m[a[i]]; r2[i]:=(ma[i])*l[a[i]];
end;

```

```

for i:=1 to x do
begin
  f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
  f[x2[i]]:=f[x2[i]]-r1[i];
  f[x3[i]]:=f[x3[i]]-r2[i];
  f[x4[i]]:=f[x4[i]]+la[i];
  f[x5[i]]:=f[x5[i]]+r1[i];
  f[x6[i]]:=f[x6[i]]+r2[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
  for i:=1 to y do
  begin
    y1[i]:=d1[b[i]];   y2[i]:=d2[b[i]];   y3[i]:=d3[b[i]];
    y4[i]:=d4[b[i]];   y5[i]:=d5[b[i]];   y6[i]:=d6[b[i]];
    cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];
    mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
    mb2[i]:= p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
    if(cd3[i]<>0) then lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+
    2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i]; r3[i]:=(mb1[i])*m[b[i]];
    r4[i]:=(mb1[i])*l[b[i]];
  end;
  for i:=1 to y do
  begin
    if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
    begin
      f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
      f[y2[i]]:=f[y2[i]]-r3[i];
      f[y3[i]]:=f[y3[i]]-r4[i];
      f[y4[i]]:=f[y4[i]]+lb2[i];
      f[y5[i]]:=f[y5[i]]+r3[i];
      f[y6[i]]:=f[y6[i]]+r4[i];
    end;
  end;
end;

```

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh mo men uon*);
for i:=1 to st do
begin
e1[i]:=6*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])/cd[i];

```

z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*((4*qq[d3[i]]+2*qq[d6[i]])*l[i]-(4*qq[d2[i]]+
2*qq[d5[i]])*m[i]);
z2[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*((2*qq[d3[i]]+4*qq[d6[i]])*l[i]-(2*qq[d2[i]]
+4*qq[d5[i]])*m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
m1[i]:=z1[i]-e1[i];
m2[i]:=z2[i]-e1[i];
end;

(*Tinh tong momen*);
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
begin
m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
end;
end;
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
begin
m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];
m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*tinh momen xoan*);
for i:=1 to st do
begin
t1[i]:=(mt[i]*mqx[i]/cd[i])*((qq[d5[i]]-qq[d2[i]])*l[i]+(qq[d6[i]]
-qq[d3[i]])*m[i]); t2[i]:=-t1[i];
end;

```

```

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
  writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri mo men mz');
if (z<>0) then
  begin
    for i:=1 to z do
      writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
    end;
  writeln ('gia tri mo men mq');
  if (x<>0) then
    begin
      for i :=1 to x do
        writeln (m1q[i],m2q[i]);
      end;
    writeln ('gia tri mo men mp');
    if (y<>0) then
      begin
        for i :=1 to y do
          writeln (m1p[i],m2p[i]);
        end;
      writeln ('gia tri mo men tx');
      for i :=1 to st do
        writeln (t1[i],t2[i]);
      readln;
    end.

```

Program CTR17_Giai_bai_toan_3_chieu_kieu_FTHH_4_mat_4_nut;

Uses crt;

Type mt1=array [1..20,1..20] of real;

mt2=array [1..20] of real;

Var d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,v:array[1..20] of integer;

f,fl,fb,ft,fn,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,qq,dt,det,c1,c2,c3,
c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,
c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30,c31,c32,c33,c34,c35,c36,c37,c38,
c39,c40,c41,c42,c43,c44,c45,c46,c47,c48,c49,c50,c51,c52,c53,c54,c55,
c56,c57,c58,c59,c60,c61,c62,c63,c64,c65,c66,c67,c68,c69,c70,c71,c72,
c73,c74,c75,c76,c77,c78,x14,x34,x24,y24,y34,y14,z34,z24,z14,
a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,an1,an2,an3,us1,us2,us3,us4,us5,
us6,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11,m12,h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,
h8,h9,h10,h11,h12,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,bb1,bb2,bb3,
bb4,bb5,bb6,bb7,bb8,bb9,bb10,bb11,bb12,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,
n11,n12,s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10,s11,s12:mt2;
p,i,j,k,ss,sf,sbt,tbt,u:integer; q,hp,tx,ty,c,e1,e2,e3,e4,r:real;
s,sc,b,d,g,h,l,bcv:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);

var i,j,k,s:integer; q,r:real ;

begin

s:=0;

REPEAT

s:=s+1;

for i:= s+1 to n do

Begin

if(a[s,s]<>0) then

q:=a[s,i]/a[s,s];

for j:=i to n do

a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;

End

UNTIL(s= n -1);

x[n]:=b[n]/a[n,n];

for i:= n -1 downto 1 do

Begin

r :=0;

for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];

if(a[i,i]<>0) then

x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];

End;

end;

procedure nhapdulieu;


```

begin
  clrscr;
  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap tong so BTĐ');
  readln(tbt);
  writeln('so fan tu');
  readln(sf);
  writeln('nhap so BTĐ co chuyen vi');
  readln(sbt);
  writeln('nhap tong so so BTĐ ');
  readln(tbt);
  writeln('nhap cac BTĐ co chuyen vi triet tieu ');
  readln(u);
  writeln('nhap so thu tu BTĐ co chuyen vi triet tieu ');
  if (U<>0) then for i:=1 to u do readln(v[u]);
  writeln('btd d1'); for i:=1 to sf do readln(d1[i]);
  writeln('btd d2'); for i:=1 to sf do readln(d2[i]);
  writeln('btd d3'); for i:=1 to sf do readln(d3[i]);
  writeln('btd d4'); for i:=1 to sf do readln(d4[i]);
  writeln('btd d5'); for i:=1 to sf do readln(d5[i]);
  writeln('btd d6'); for i:=1 to sf do readln(d6[i]);
  writeln('btd d7'); for i:=1 to sf do readln(d7[i]);
  writeln('btd d8'); for i:=1 to sf do readln(d8[i]);
  writeln('btd d9'); for i:=1 to sf do readln(d9[i]);
  writeln('btd d10'); for i:=1 to sf do readln(d10[i]);
  writeln('btd d11'); for i:=1 to sf do readln(d11[i]);
  writeln('btd d12'); for i:=1 to sf do readln(d12[i]);
  writeln('toa do x1'); for i:=1 to sf do readln(x1[i]);
  writeln('toa do x2'); for i:=1 to sf do readln(x2[i]);
  writeln('toa do x3'); for i:=1 to sf do readln(x3[i]);
  writeln('toa do x4'); for i:=1 to sf do readln(x4[i]);
  writeln('toa do y1'); for i:=1 to sf do readln(y1[i]);
  writeln('toa do y2'); for i:=1 to sf do readln(y2[i]);
  writeln('toa do y3'); for i:=1 to sf do readln(y3[i]);
  writeln('toa do y4'); for i:=1 to sf do readln(y4[i]);
  writeln('toa do z1'); for i:=1 to sf do readln(z1[i]);
  writeln('toa do z2'); for i:=1 to sf do readln(z2[i]);
  writeln('toa do z3'); for i:=1 to sf do readln(z3[i]);
  writeln('toa do z4'); for i:=1 to sf do readln(z4[i]);
  writeln('nhap modun dan hoi');
  readln(e);
  writeln('nhap he so Poatxong');
  readln(hp);
  writeln('nhap ti trong tren fuong x');

```

```

readln(tx);
writeln('nhap ti trong tren fuong y');
readln(ty);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);
end;

procedure part1;
begin
  for i:=1 to sf do
    begin
      x14[i]:=x1[i]-x4[i]; x34[i]:=x3[i]-x4[i]; x24[i]:=x2[i]-x4[i];
      y24[i]:=y2[i]-y4[i]; y34[i]:=y3[i]-y4[i]; y14[i]:=y1[i]-y4[i];
      z34[i]:=z3[i]-z4[i]; z24[i]:=z2[i]-z4[i]; z14[i]:=z1[i]-z4[i];
      det[i]:=x14[i]*(y24[i]*z34[i]-y34[i]*z24[i])+ y14[i]*(z24[i]*x34[i]-
      z34[i]*x24[i])+z14[i]*(x24[i]*y34[i]-x34[i]*y24[i]);
      a11[i]:=(y24[i]*z34[i]-y34[i]*z24[i])/det[i];
      a12[i]:=(y34[i]*z14[i]-y14[i]*z34[i])/det[i];
      a13[i]:=(y14[i]*z24[i]-y24[i]*z14[i])/det[i];
      a21[i]:=(z24[i]*x34[i]-z34[i]*x24[i])/det[i];
      a22[i]:=(z34[i]*x14[i]-z14[i]*x34[i])/det[i];
      a23[i]:=(z14[i]*x24[i]-z24[i]*x14[i])/det[i];
      a31[i]:=(x24[i]*y34[i]-x34[i]*z24[i])/det[i];
      a32[i]:=(x34[i]*y14[i]-x14[i]*y34[i])/det[i];
      a33[i]:=(x14[i]*y24[i]-x24[i]*y14[i])/det[i];
      an1[i]:=a11[i]+a12[i]+a13[i];
      an2[i]:=a21[i]+a22[i]+a23[i];
      an3[i]:=a31[i]+a32[i]+a33[i];
      e1:=e/(1+hp)*(1-2*hp);
      e2:=e1*(1-hp); e3:=e1*hp; e4:=e1*(0.5-hp);
    end;
  for i:=1 to 6 do
    for j:=1 to 6 do
      begin
        d[1,1]:=e2; d[1,2]:=e3; d[1,3]:=e3; d[1,4]:=0; d[1,5]:=0; d[1,6]:=0;
        d[2,2]:=e2; d[2,3]:=e3; d[2,4]:=0; d[2,5]:=0; d[2,6]:=0;
        d[3,3]:=e2; d[3,4]:=0; d[3,5]:=0; d[3,6]:=0;
        d[4,4]:=e4; d[4,5]:=0; d[4,6]:=0; d[5,5]:=e4; d[5,6]:=0; d[6,6]:=e4;
      end;
    for i:=1 to 6 do
      for j:=1 to i-1 do d[i,j]:=d[j,i];
      for k:=1 to sf do

```

```

begin
  for i:=1 to 6 do
    for j:=1 to 12 do
      begin
        b[1,1]:=a11[k]; b[1,2]:=0; b[1,3]:=0; b[1,4]:=a12[k]; b[1,5]:=0;
        b[1,6]:=0; b[1,7]:=a13[k]; b[1,8]:=0; b[1,9]:=0; b[1,10]:=-an1[k];
        b[1,11]:=0; b[1,12]:=0;
        b[2,1]:=0; b[2,2]:=a21[k]; b[2,3]:=0; b[2,4]:=0; b[2,5]:=a22[k];
        b[2,6]:=0;
        b[2,7]:=0; b[2,8]:=a23[k]; b[2,9]:=0; b[2,10]:=0; b[2,11]:=-an2[k];
        b[2,12]:=0;
        b[3,1]:=0; b[3,2]:=0; b[3,3]:=a31[k]; b[3,4]:=0; b[3,5]:=0;
        b[3,6]:=a32[k]; b[3,7]:=0; b[3,8]:=0; b[3,9]:=a33[k]; b[3,10]:=0;
        b[3,11]:=0; b[3,12]:=-an3[k];
        b[4,1]:=0; b[4,2]:=a31[k]; b[4,3]:=a21[k]; b[4,4]:=0; b[4,5]:=a32[k];
b[4,6]:=a22[k];
        b[4,6]:=0; b[4,7]:=0; b[4,8]:=a33[k]; b[4,9]:=a23[k]; b[4,10]:=0;
        b[4,11]:=-an3[k]; b[4,12]:=-an2[k];
        b[5,1]:=a31[k]; b[5,2]:=0; b[5,3]:=a11[k]; b[5,4]:=a32[k]; b[5,5]:=0;
        b[5,6]:=a12[k]; b[5,7]:=a33[k]; b[5,8]:=0; b[5,9]:=a13[k];
        b[5,10]:=-an3[k]; b[5,11]:=0; b[5,12]:=-an1[k];
        b[6,1]:=a21[k]; b[6,2]:=a11[k]; b[6,3]:=0; b[6,4]:=a22[k];
        b[6,5]:=a12[k]; b[6,6]:=0; b[6,7]:=a23[k]; b[6,8]:=a13[k];
        b[6,9]:=0; b[6,10]:=-an2[k]; b[6,11]:=-an1[k]; b[6,12]:=0;
      end;
    end;
    for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 6 do bcv[i,j]:=b[j,i];
    end;
    for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 6 do
        begin
          g[i,j]:=0;
          for p:=1 to 6 do g[i,j]:=g[i,j]+bcv[i,p]*d[p,j];
        end;
      end;
    end;
    for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
        begin
          h[i,j]:=0;
          for p:=1 to 6 do h[i,j]:=h[i,j]+g[i,p]*b[p,j];
        end;
      end;
    end;
    c1[k]:=h[1,1]; c2[k]:=h[1,2]; c3[k]:=h[1,3]; c4[k]:=h[1,4]; c5[k]:=h[1,5];
    c6[k]:=h[1,6]; c7[k]:=h[1,7]; c8[k]:=h[1,8]; c9[k]:=h[1,9]; c10[k]:=h[1,10];
    c11[k]:=h[1,11]; c12[k]:=h[1,12]; c13[k]:=h[2,2]; c14[k]:=h[2,3];
    c15[k]:=h[2,4]; c16[k]:=h[2,5]; c17[k]:=h[2,6]; c18[k]:=h[2,7];
    c19[k]:=h[2,8]; c20[k]:=h[2,9]; c21[k]:=h[2,10]; c22[k]:=h[2,11];

```

```

c23[k]:=h[2,12]; c24[k]:=h[3,3]; c25[k]:=h[3,4]; c26[k]:=h[3,5];
c27[k]:=h[3,6]; c28[k]:=h[3,7]; c29[k]:=h[3,8]; c30[k]:=h[3,9];
c31[k]:=h[3,10]; c32[k]:=h[3,11]; c33[k]:=h[3,12]; c34[k]:=h[4,4];
c35[k]:=h[4,5]; c36[k]:=h[4,6]; c37[k]:=h[4,7]; c38[k]:=h[4,8];
c39[k]:=h[4,9]; c40[k]:=h[4,10]; c41[k]:=h[4,11]; c42[k]:=h[4,12];
c43[k]:=h[5,5]; c44[k]:=h[5,6]; c45[k]:=h[5,7]; c46[k]:=h[5,8];
c47[k]:=h[5,9]; c48[k]:=h[5,10]; c49[k]:=h[5,11]; c50[k]:=h[5,12];
c51[k]:=h[6,6]; c52[k]:=h[6,7]; c53[k]:=h[6,8]; c54[k]:=h[6,9];
c55[k]:=h[6,10]; c56[k]:=h[6,11]; c57[k]:=h[6,12]; c58[k]:=h[7,7];
c59[k]:=h[7,8]; c60[k]:=h[7,9]; c61[k]:=h[7,10]; c62[k]:=h[7,11];
c63[k]:=h[7,12]; c64[k]:=h[8,8]; c65[k]:=h[8,9]; c66[k]:=h[8,10];
c67[k]:=h[8,11]; c68[k]:=h[8,12]; c69[k]:=h[9,9]; c70[k]:=h[9,10];
c71[k]:=h[9,11]; c72[k]:=h[9,12]; c73[k]:=h[10,10]; c74[k]:=h[10,11];
c75[k]:=h[10,12]; c76[k]:=h[11,11]; c77[k]:=h[11,12]; c78[k]:=h[12,12];
end;
end;
begin
nhapdulieu;
part1;
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
s[d1[i],d7[i]]:=s[d1[i],d7[i]]+c7[i];
s[d1[i],d8[i]]:=s[d1[i],d8[i]]+c8[i];
s[d1[i],d9[i]]:=s[d1[i],d9[i]]+c9[i];
s[d1[i],d10[i]]:=s[d1[i],d10[i]]+c10[i];
s[d1[i],d11[i]]:=s[d1[i],d11[i]]+c11[i];
s[d1[i],d12[i]]:=s[d1[i],d12[i]]+c12[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c13[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c14[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c15[i];
s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c16[i];
s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c17[i];
s[d2[i],d7[i]]:=s[d2[i],d7[i]]+c18[i];
s[d2[i],d8[i]]:=s[d2[i],d8[i]]+c19[i];
s[d2[i],d9[i]]:=s[d2[i],d9[i]]+c20[i];
s[d2[i],d10[i]]:=s[d2[i],d10[i]]+c21[i];
s[d2[i],d11[i]]:=s[d2[i],d11[i]]+c22[i];

```

$s[d2[i],d12[i]]:=s[d2[i],d12[i]]+c23[i];$
 $s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c24[i];$
 $s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c25[i];$
 $s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c26[i];$
 $s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c27[i];$
 $s[d3[i],d7[i]]:=s[d3[i],d7[i]]+c28[i];$
 $s[d3[i],d8[i]]:=s[d3[i],d8[i]]+c29[i];$
 $s[d3[i],d9[i]]:=s[d3[i],d9[i]]+c30[i];$
 $s[d3[i],d10[i]]:=s[d3[i],d10[i]]+c31[i];$
 $s[d3[i],d11[i]]:=s[d3[i],d11[i]]+c32[i];$
 $s[d3[i],d12[i]]:=s[d3[i],d12[i]]+c33[i];$
 $s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c34[i];$
 $s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+c35[i];$
 $s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c36[i];$
 $s[d4[i],d7[i]]:=s[d4[i],d7[i]]+c37[i];$
 $s[d4[i],d8[i]]:=s[d4[i],d8[i]]+c38[i];$
 $s[d4[i],d9[i]]:=s[d4[i],d9[i]]+c39[i];$
 $s[d4[i],d10[i]]:=s[d4[i],d10[i]]+c40[i];$
 $s[d4[i],d11[i]]:=s[d4[i],d11[i]]+c41[i];$
 $s[d4[i],d12[i]]:=s[d4[i],d12[i]]+c42[i];$
 $s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c43[i];$
 $s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c44[i];$
 $s[d5[i],d7[i]]:=s[d5[i],d7[i]]+c45[i];$
 $s[d5[i],d8[i]]:=s[d5[i],d8[i]]+c46[i];$
 $s[d5[i],d9[i]]:=s[d5[i],d9[i]]+c47[i];$
 $s[d5[i],d10[i]]:=s[d5[i],d10[i]]+c48[i];$
 $s[d5[i],d11[i]]:=s[d5[i],d11[i]]+c49[i];$
 $s[d5[i],d12[i]]:=s[d5[i],d12[i]]+c50[i];$
 $s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c51[i];$
 $s[d6[i],d7[i]]:=s[d6[i],d7[i]]+c52[i];$
 $s[d6[i],d8[i]]:=s[d6[i],d8[i]]+c53[i];$
 $s[d6[i],d9[i]]:=s[d6[i],d9[i]]+c54[i];$
 $s[d6[i],d10[i]]:=s[d6[i],d10[i]]+c55[i];$
 $s[d6[i],d11[i]]:=s[d6[i],d11[i]]+c56[i];$
 $s[d6[i],d12[i]]:=s[d6[i],d12[i]]+c57[i];$
 $s[d7[i],d7[i]]:=s[d7[i],d7[i]]+c58[i];$
 $s[d7[i],d8[i]]:=s[d7[i],d8[i]]+c59[i];$
 $s[d7[i],d9[i]]:=s[d7[i],d9[i]]+c60[i];$
 $s[d7[i],d10[i]]:=s[d7[i],d10[i]]+c61[i];$
 $s[d7[i],d11[i]]:=s[d7[i],d11[i]]+c62[i];$
 $s[d7[i],d12[i]]:=s[d7[i],d12[i]]+c63[i];$
 $s[d8[i],d8[i]]:=s[d8[i],d8[i]]+c64[i];$
 $s[d8[i],d9[i]]:=s[d8[i],d9[i]]+c65[i];$
 $s[d8[i],d10[i]]:=s[d8[i],d10[i]]+c66[i];$

```

s[d8[i],d11[i]]:=s[d8[i],d11[i]]+c67[i];
s[d8[i],d12[i]]:=s[d8[i],d12[i]]+c68[i];
s[d9[i],d9[i]]:=s[d9[i],d9[i]]+c69[i];
s[d9[i],d10[i]]:=s[d9[i],d10[i]]+c70[i];
s[d9[i],d11[i]]:=s[d9[i],d11[i]]+c71[i];
s[d9[i],d12[i]]:=s[d9[i],d12[i]]+c72[i];
s[d10[i],d10[i]]:=s[d10[i],d10[i]]+c73[i];
s[d10[i],d11[i]]:=s[d10[i],d11[i]]+c74[i];
s[d10[i],d12[i]]:=s[d10[i],d12[i]]+c75[i];
s[d11[i],d11[i]]:=s[d11[i],d11[i]]+c76[i];
s[d11[i],d12[i]]:=s[d11[i],d12[i]]+c77[i];
s[d12[i],d12[i]]:=s[d12[i],d12[i]]+c78[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sbt do   f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat tai trong tam cua FTHH*);
if(u<>0) then for i:=1 to u do qq[v[u]]:=0;
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 12 do
begin l[i,j]:=0;
for p:=1 to 6 do l[i,j]:=l[i,j]+d[i,p]*b[p,j];
end;

m1[k]:=l[1,1]; m2[k]:=l[1,2]; m3[k]:=l[1,3]; m4[k]:=l[1,4]; m5[k]:=l[1,5];
m6[k]:=l[1,6]; m7[k]:=l[1,7]; m8[k]:=l[1,8]; m9[k]:=l[1,9]; m10[k]:=l[1,10];
m11[k]:=l[1,11]; m12[k]:=l[1,12]; h1[k]:=l[2,1]; h2[k]:=l[2,2];
h3[k]:=l[2,3]; h4[k]:=l[2,4]; h5[k]:=l[2,5]; h6[k]:=l[2,6];
h7[k]:=l[2,7]; h8[k]:=l[2,8]; h9[k]:=l[2,9]; h10[k]:=l[2,10];
h11[k]:=l[2,11]; h12[k]:=l[2,12]; b1[k]:=l[3,1]; b2[k]:=l[3,2];
b3[k]:=l[3,3]; b4[k]:=l[3,4]; b5[k]:=l[3,5]; b6[k]:=l[3,6];
b7[k]:=l[3,7]; b8[k]:=l[3,8]; b9[k]:=l[3,9]; b10[k]:=l[3,10];
b11[k]:=l[3,11]; b12[k]:=l[3,12]; bb1[k]:=l[4,1]; bb2[k]:=l[4,2];
bb3[k]:=l[4,3]; bb4[k]:=l[4,4]; bb5[k]:=l[4,5]; bb6[k]:=l[4,6];
bb7[k]:=l[4,7]; bb8[k]:=l[4,8]; bb9[k]:=l[4,9]; bb10[k]:=l[4,10];
bb11[k]:=l[4,11]; bb12[k]:=l[4,12]; n1[k]:=l[5,1]; n2[k]:=l[5,2];

```

```

n3[k]:=l[5,3]; n4[k]:=l[5,4]; n5[k]:=l[5,5]; n6[k]:=l[5,6];
n7[k]:=l[5,7]; n8[k]:=l[5,8]; n9[k]:=l[5,9]; n10[k]:=l[5,10];
n11[k]:=l[5,11]; n12[k]:=l[5,12]; s1[k]:=l[6,1];
s2[k]:=l[6,2]; s3[k]:=l[6,3]; s4[k]:=l[6,4]; s5[k]:=l[6,5];
s6[k]:=l[6,6]; s7[k]:=l[6,7]; s8[k]:=l[6,8]; s9[k]:=l[6,9];
s10[k]:=l[6,10]; s11[k]:=l[6,11]; s12[k]:=l[6,12];
us1[k]:=m1[k]*qq[d1[k]]+m2[k]*qq[d2[k]]+m3[k]*qq[d3[k]]+m4[k]*qq[d4[k]]+
m5[k]*qq[d5[k]]+m6[k]*qq[d6[k]]+m7[k]*qq[d7[k]]+m8[k]*qq[d8[k]]+
m9[k]*qq[d9[k]]+ m10[k]*qq[d10[k]]+m11[k]*qq[d11[k]]+ m12[k]*qq[d12[k]];

us2[k]:=h1[k]*qq[d1[k]]+h2[k]*qq[d2[k]]+h3[k]*qq[d3[k]]+h4[k]*qq[d4[k]]+
h5[k]*qq[d5[k]]+h6[k]*qq[d6[k]]+h7[k]*qq[d7[k]]+h8[k]*qq[d8[k]]+
h9[k]*qq[d9[k]]+ h10[k]*qq[d10[k]]+h11[k]*qq[d11[k]]+ h12[k]*qq[d12[k]];

us3[k]:=b1[k]*qq[d1[k]]+b2[k]*qq[d2[k]]+b3[k]*qq[d3[k]]+b4[k]*qq[d4[k]]+
b5[k]*qq[d5[k]]+b6[k]*qq[d6[k]]+b7[k]*qq[d7[k]]+b8[k]*qq[d8[k]]+
b9[k]*qq[d9[k]]+ b10[k]*qq[d10[k]]+b11[k]*qq[d11[k]]+ b12[k]*qq[d12[k]];

us4[k]:=bb1[k]*qq[d1[k]]+bb2[k]*qq[d2[k]]+bb3[k]*qq[d3[k]]+bb4[k]*qq[d4[k]]+
bb5[k]*qq[d5[k]]+bb6[k]*qq[d6[k]]+bb7[k]*qq[d7[k]]+bb8[k]*qq[d8[k]]+
bb9[k]*qq[d9[k]]+ bb10[k]*qq[d10[k]]+bb11[k]*qq[d11[k]]+bb12[k]*qq[d12[k]];

us5[k]:=n1[k]*qq[d1[k]]+n2[k]*qq[d2[k]]+n3[k]*qq[d3[k]]+n4[k]*qq[d4[k]]+
n5[k]*qq[d5[k]]+n6[k]*qq[d6[k]]+n7[k]*qq[d7[k]]+n8[k]*qq[d8[k]]+
n9[k]*qq[d9[k]]+ n10[k]*qq[d10[k]]+n11[k]*qq[d11[k]]+ n12[k]*qq[d12[k]];

us6[k]:=s1[k]*qq[d1[k]]+s2[k]*qq[d2[k]]+s3[k]*qq[d3[k]]+s4[k]*qq[d4[k]]+
s5[k]*qq[d5[k]]+s6[k]*qq[d6[k]]+s7[k]*qq[d7[k]]+s8[k]*qq[d8[k]]+
s9[k]*qq[d9[k]]+ s10[k]*qq[d10[k]]+s11[k]*qq[d11[k]]+ s12[k]*qq[d12[k]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('us1');
for k:=1 to sf do
writeln(us1[k]);
writeln('us2');
for k:=1 to sf do
writeln(us2[k]);
writeln('us3');
for k:=1 to sf do
writeln(us3[k]);

```

```
writeln ('us4');  
for k:=1 to sf do  
  writeln(us4[k]);  
writeln ('us5');  
for k:=1 to sf do  
  writeln(us5[k]);  
writeln ('us6');  
for k:=1 to sf do  
  writeln(us6[k]);  
readln;  
end.
```


Program CTR18_Tinh_khung_khong_gian;

Uses crt;

Type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;

mt3=array[1..20] of integer;

var k1,k2,l1,l2,l3,m,m1,m2,s,t,t1,t2,r,r1,r2,rc1,rc2,aa1:mt1;

cx,cy,cz,x1,y1,z1,xk,yk,zk,xj,yj,zj,xkj,ykj,zkj,xkg,ykg,zkg,s1,s2,

c1,c2,c3,d,x1,dt,cd,cd2,cd3,mqx,mqy,mqz,mx,aa,b,c,nl,q,qc,qt,f,fn,b1,b2,

p1,o,cf,ct,pt,pf,v1,v2,v3,v4,v5,v6:mt2;

g,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,n:mt3;

i,j,k,p,st,sbt,tbt,sbk,x,y,z,w,ss,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,

z1,z2,z3,z4,z5:integer; h,e:real;

Procedure TS(var m:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:integer);

begin s[a1,a1]:= s[a1,a1]+m[1,1]; s[a1,a2]:= s[a1,a2]+m[1,2];

s[a1,a3]:= s[a1,a3]+m[1,3]; s[a1,a4]:= s[a1,a4]+m[1,4];

s[a1,a5]:= s[a1,a5]+m[1,5]; s[a1,a6]:= s[a1,a6]+m[1,6];

s[a1,a7]:= s[a1,a7]+m[1,7]; s[a1,a8]:= s[a1,a8]+m[1,8];

s[a1,a9]:= s[a1,a9]+m[1,9]; s[a1,a10]:= s[a1,a10]+m[1,10];

s[a1,a11]:= s[a1,a11]+m[1,11]; s[a1,a12]:= s[a1,a12]+m[1,12];

s[a2,a2]:= s[a2,a2]+m[2,2]; s[a2,a3]:= s[a2,a3]+m[2,3];

s[a2,a4]:= s[a2,a4]+m[2,4]; s[a2,a5]:= s[a2,a5]+m[2,5];

s[a2,a6]:= s[a2,a6]+m[2,6]; s[a2,a7]:= s[a2,a7]+m[2,7];

s[a2,a8]:= s[a2,a8]+m[2,8]; s[a2,a9]:= s[a2,a9]+m[2,9];

s[a2,a10]:= s[a2,a10]+m[2,10]; s[a2,a11]:= s[a2,a11]+m[2,11];

s[a2,a12]:= s[a2,a12]+m[2,12];

s[a3,a3]:= s[a3,a3]+m[3,3]; s[a3,a4]:= s[a3,a4]+m[3,4];

s[a3,a5]:= s[a3,a5]+m[3,5]; s[a3,a6]:= s[a3,a6]+m[3,6];

s[a3,a7]:= s[a3,a7]+m[3,7]; s[a3,a8]:= s[a3,a8]+m[3,8];

s[a3,a9]:= s[a3,a9]+m[3,9]; s[a3,a10]:= s[a3,a10]+m[3,10];

s[a3,a11]:= s[a3,a11]+m[3,11]; s[a3,a12]:= s[a3,a12]+m[3,12];

s[a4,a4]:= s[a4,a4]+m[4,4]; s[a4,a5]:= s[a4,a5]+m[4,5];

s[a4,a6]:= s[a4,a6]+m[4,6]; s[a4,a7]:= s[a4,a7]+m[4,7];

s[a4,a8]:= s[a4,a8]+m[4,8]; s[a4,a9]:= s[a4,a9]+m[4,9];

s[a4,a10]:= s[a4,a10]+m[4,10]; s[a4,a11]:= s[a4,a11]+m[4,11];

s[a4,a12]:= s[a4,a12]+m[4,12];

s[a5,a5]:= s[a5,a5]+m[5,5]; s[a5,a6]:= s[a5,a6]+m[5,6];

s[a5,a7]:= s[a5,a7]+m[5,7]; s[a5,a8]:= s[a5,a8]+m[5,8];

s[a5,a9]:= s[a5,a9]+m[5,9]; s[a5,a10]:= s[a5,a10]+m[5,10];

s[a5,a11]:= s[a5,a11]+m[5,11]; s[a5,a12]:= s[a5,a12]+m[5,12];

s[a6,a6]:= s[a6,a6]+m[6,6]; s[a6,a7]:= s[a6,a7]+m[6,7];

s[a6,a8]:= s[a6,a8]+m[6,8]; s[a6,a9]:= s[a6,a9]+m[6,9];

```

s[a6,a10]:= s[a6,a10]+m[6,10];  s[a6,a11]:= s[a6,a11]+m[6,11];
s[a6,a12]:= s[a6,a12]+m[6,12];

s[a7,a7]:= s[a7,a7]+m[7,7];  s[a7,a8]:= s[a7,a8]+m[7,8];
s[a7,a9]:= s[a7,a9]+m[7,9];  s[a7,a10]:= s[a7,a10]+m[7,10];
s[a7,a11]:= s[a7,a11]+m[7,11];  s[a7,a12]:= s[a7,a12]+m[7,12];

s[a8,a8]:= s[a8,a8]+m[8,8];  s[a8,a9]:= s[a8,a9]+m[8,9];
s[a8,a10]:= s[a8,a10]+m[8,10];  s[a8,a11]:= s[a8,a11]+m[8,11];
s[a8,a12]:= s[a8,a12]+m[8,12];

s[a9,a9]:= s[a9,a9]+m[9,9];  s[a9,a10]:= s[a9,a10]+m[9,10];
s[a9,a11]:= s[a9,a11]+m[9,11];  s[a9,a12]:= s[a9,a12]+m[9,12];

s[a10,a10]:= s[a10,a10]+m[10,10]; s[a10,a11]:= s[a10,a11]+m[10,11];
s[a10,a12]:= s[a10,a12]+m[10,12];

s[a11,a11]:= s[a11,a11]+m[11,11]; s[a11,a12]:= s[a11,a12]+m[11,12];

s[a12,a12]:= s[a12,a12]+m[12,12];
end;
procedure tinhm1;
begin
if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xl[k]-xj[k])+sqr(yl[k]-yj[k])+
sqr(zl[k]-zj[k]));
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
begin
k1[1,1]:=e*dt[k]/cd[k]; k1[1,2]:=0; k1[1,3]:=0;k1[1,4]:=0;k1[1,5]:=0;
k1[1,6]:=0;k1[1,7]:=-k1[1,1]; k1[1,8]:=0; k1[1,9]:=0; k1[1,10]:=0;
k1[1,11]:=0; k1[1,12]:=0;
cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k]; cd2[k]:=sqr(cd[k]);
k1[2,2]:=12*e*mqz[k]/cd3[k];k1[2,3]:=0; k1[2,4]:=0; k1[2,5]:=0;
k1[2,6]:=-6*e*mqz[k]/cd2[k]; k1[2,7]:=0; k1[2,8]:=-k1[2,2];
k1[2,9]:=0;k1[2,10]:=0; k1[2,11]:=0; k1[2,12]:=-k1[2,6];
k1[3,3]:=12*e*mqy[k]/cd3[k]; k1[3,4]:=0; k1[3,5]:=-6*e*mqy[k]/cd2[k];
k1[3,6]:=0;k1[3,7]:=0;k1[3,8]:=0; k1[3,9]:=-k1[3,3]; k1[3,10]:=0;
k1[3,11]:=-k1[3,5]; k1[3,12]:=0;
k1[4,4]:=mx[k]*mqx[k]/cd[k];k1[4,5]:=0; k1[4,6]:=0; k1[4,7]:=0;
k1[4,8]:=0; k1[4,9]:=0; k1[4,10]:=-k1[4,4]; k1[4,11]:=0; k1[4,12]:=0;
k1[5,5]:=4*e*mqy[k]/cd[k];k1[5,6]:=0; k1[5,7]:=0; k1[5,8]:=0;
k1[5,9]:=-6*e*mqy[k]/cd2[k]; k1[5,10]:=0;k1[5,11]:=2*e*mqy[k]/cd[k];

```

```

k1[5,12]:=0;
k1[6,6]:=4*e*mqz[k]/cd[k]; k1[6,7]:=0; k1[6,8]:=-6*e*mqz[k]/cd2[k];
k1[6,9]:=0;k1[6,10]:=0;k1[6,11]:=0; k1[6,12]:=2*e*mqz[k]/cd[k];
k1[7,7]:=k1[1,1];k1[7,8]:=0; k1[7,9]:=0; k1[7,10]:=0; k1[7,11]:=0;
k1[7,12]:=0;
k1[8,8]:=k1[2,2]; k1[8,9]:=0;k1[8,10]:=0;k1[8,11]:=0; k1[8,12]:=-k1[6,8];
k1[9,9]:=k1[3,3]; k1[9,10]:=0; k1[9,11]:=k1[5,9]; k1[9,12]:=0;
k1[10,10]:=k1[4,4]; k1[10,11]:=0; k1[10,12]:=0;
k1[11,11]:=k1[5,5]; k1[11,12]:=0;
k1[12,12]:=k1[6,6];
end;
for i:=1 to 12 do
  for j:=1 to i-1 do k1[i,j]:=k1[j,i];
  cx[k]:=(x1[k]-xj[k])/cd[k];
  cy[k]:=(y1[k]-yj[k])/cd[k];
  cz[k]:=(z1[k]-zj[k])/cd[k];
  xkj[k]:=xk[k]-xj[k];
  ykj[k]:=yk[k]-yj[k]; zkj[k]:=zk[k]-zj[k];
  aa[k]:=sqrt(sqrt(cx[k])+sqrt(cz[k])); xkg[k]:=cx[k]*
  xkj[k]+cy[k]*ykj[k]+cz[k]*zkj[k];
  ykg[k]:=(cx[k]*cy[k]*xkj[k])/aa[k]+aa[k]*ykj[k]-
  (cy[k]*cz[k]*zkj[k])/aa[k]; zkg[k]:=-(cz[k]*
  xkj[k])/aa[k]+(cx[k]*zkj[k])/aa[k];
  b[k]:=sqrt(sqrt(ykg[k])+sqrt(zkg[k])); s1[k]:=zkg[k]/b[k];
  c1[k]:=ykg[k]/b[k];
  for i:=1 to 3 do
    for j:=1 to 3 do
      begin
        t1[1,1]:=cx[k]; t1[1,2]:=cy[k]; t1[1,3]:=cz[k];
        t1[2,1]:=-(cx[k]*cy[k]*c1[k]-cz[k]*s1[k])/aa[k];
        t1[2,2]:=aa[k]*c1[k];
        t1[2,3]:=-(cy[k]*cz[k]*c1[k]+cx[k]*s1[k])/aa[k];
        t1[3,1]:=(cx[k]*cy[k]*s1[k]-cz[k]*c1[k])/aa[k];
        t1[3,2]:=-aa[k]*s1[k];
        t1[3,3]:=(cy[k]*cz[k]*s1[k]+cx[k]*c1[k])/aa[k];
      end;
    end;
  for i:=1 to 12 do
    for j:=1 to 12 do
      begin
        r1[1,1]:=t1[1,1]; r1[1,2]:=t1[1,2]; r1[1,3]:=t1[1,3]; r1[1,4]:=0; r1[1,5]:=0;
        r1[1,6]:=0; r1[1,7]:=0; r1[1,8]:=0; r1[1,9]:=0; r1[1,10]:=0;
        r1[1,11]:=0; r1[1,12]:=0;
        r1[2,1]:=t1[2,1]; r1[2,2]:=t1[2,2]; r1[2,3]:=t1[2,3];r1[2,4]:=0;r1[2,5]:=0;

```

```

r1[2,6]:=0; r1[2,7]:=0; r1[2,8]:=0; r1[2,9]:=0; r1[2,10]:=0; r1[2,11]:=0;
r1[2,12]:=0;
r1[3,1]:=t1[3,1]; r1[3,2]:=t1[3,2]; r1[3,3]:=t1[3,3]; r1[3,4]:=0; r1[3,5]:=0;
r1[3,6]:=0; r1[3,7]:=0; r1[3,8]:=0; r1[3,9]:=0; r1[3,10]:=0; r1[3,11]:=0;
r1[3,12]:=0;
r1[4,1]:=0; r1[4,2]:=0; r1[4,3]:=0; r1[4,4]:=abs(t1[1,1]);
r1[4,5]:=abs(t1[1,2]); r1[4,6]:=abs(t1[1,3]); r1[4,7]:=0; r1[4,8]:=0;
r1[4,9]:=0; r1[4,10]:=0; r1[4,11]:=0; r1[4,12]:=0;
r1[5,1]:=0; r1[5,2]:=0; r1[5,3]:=0; r1[5,4]:=abs(t1[2,1]);
r1[5,5]:=abs(t1[2,2]); r1[5,6]:=abs(t1[2,3]); r1[5,7]:=0; r1[5,8]:=0;
r1[5,9]:=0; r1[5,10]:=0; r1[5,11]:=0; r1[5,12]:=0;
r1[6,1]:=0; r1[6,2]:=0; r1[6,3]:=0; r1[6,4]:=abs(t1[3,1]);
r1[6,5]:=abs(t1[3,2]); r1[6,6]:=abs(t1[3,3]); r1[6,7]:=0; r1[6,8]:=0;
r1[6,9]:=0; r1[6,10]:=0; r1[6,11]:=0; r1[6,12]:=0;
r1[7,1]:=0; r1[7,2]:=0; r1[7,3]:=0; r1[7,4]:=0; r1[7,5]:=0; r1[7,6]:=0;
r1[7,7]:=t1[1,1]; r1[7,8]:=t1[1,2]; r1[7,9]:=t1[1,3]; r1[7,10]:=0; r1[7,11]:=0;
r1[7,12]:=0;
r1[8,1]:=0; r1[8,2]:=0; r1[8,3]:=0; r1[8,4]:=0; r1[8,5]:=0; r1[8,6]:=0;
r1[8,7]:=t1[2,1]; r1[8,8]:=t1[2,2]; r1[8,9]:=t1[2,3]; r1[8,10]:=0;
r1[8,11]:=0; r1[8,12]:=0;
r1[9,1]:=0; r1[9,2]:=0; r1[9,3]:=0; r1[9,4]:=0; r1[9,5]:=0; r1[9,6]:=0;
r1[9,7]:=t1[3,1]; r1[9,8]:=t1[3,2]; r1[9,9]:=t1[3,3]; r1[9,10]:=0;
r1[9,11]:=0; r1[9,12]:=0;
r1[10,1]:=0; r1[10,2]:=0; r1[10,3]:=0; r1[10,4]:=0; r1[10,5]:=0; r1[10,6]:=0;
r1[10,7]:=0; r1[10,8]:=0; r1[10,9]:=0; r1[10,10]:=abs(t1[1,1]);
r1[10,11]:=abs(t1[1,2]); r1[10,12]:=abs(t1[1,3]);
r1[11,1]:=0; r1[11,2]:=0; r1[11,3]:=0; r1[11,4]:=0; r1[11,5]:=0; r1[11,6]:=0;
r1[11,7]:=0; r1[11,8]:=0; r1[11,9]:=0; r1[11,10]:=abs(t1[2,1]);
r1[11,11]:=abs(t1[2,2]); r1[11,12]:=abs(t1[2,3]);
r1[12,1]:=0; r1[12,2]:=0; r1[12,3]:=0; r1[12,4]:=0; r1[12,5]:=0; r1[12,6]:=0;
r1[12,7]:=0; r1[12,8]:=0; r1[12,9]:=0; r1[12,10]:=abs(t1[3,1]);
r1[12,11]:=abs(t1[3,2]); r1[12,12]:=abs(t1[3,3]);
end;
for i:=1 to 12 do
  for j:=1 to 12 do
    begin
      rc1[i,j]:=r1[j,i]; ll[i,j]:=0; for p:=1 to 12 do
        ll[i,j]:=ll[i,j]+rc1[i,p]*k1[p,j];
      end;
    end;
  for i:=1 to 12 do
    for j:=1 to 12 do
      begin
        m1[i,j]:=0; for p:=1 to 12 do

```

```

        m1[i,j]:=m1[i,j]+l1[i,p]*r1[p,j];
    end;
end;
end;
procedure tinhm2;
begin
    if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
    begin
        cd[k]:=sqrt(sqr(xl[k]-xj[k])+sqr(yl[k]-yj[k])+
        sqr(zl[k]-zj[k]));
        for i:=1 to 12 do
        for j:=i to 12 do
        begin
            k2[1,1]:=e*dt[k]/cd[k]; k2[1,2]:=0; k2[1,3]:=0;k2[1,4]:=0;k2[1,5]:=0;
            k2[1,6]:=0;k2[1,7]:=-k2[1,1]; k2[1,8]:=0; k2[1,9]:=0; k2[1,10]:=0;
            k2[1,11]:=0; k2[1,12]:=0;
            cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k]; cd2[k]:=sqr(cd[k]);
            k2[2,2]:=12*e*mqr[k]/cd3[k];k2[2,3]:=0; k2[2,4]:=0; k2[2,5]:=0;
            k2[2,6]:=6*e*mqr[k]/cd2[k]; k2[2,7]:=0; k2[2,8]:=-k2[2,2];
            k2[2,9]:=0;k2[2,10]:=0; k2[2,11]:=0; k2[2,12]:=k2[2,6];
            k2[3,3]:=12*e*mqr[k]/cd3[k]; k2[3,4]:=0; k2[3,5]:=-6*e*mqr[k]/cd2[k];
            k2[3,6]:=0;k2[3,7]:=0;k2[3,8]:=0; k2[3,9]:=-k2[3,3]; k2[3,10]:=0;
            k2[3,11]:=k2[3,5]; k2[3,12]:=0;
            k2[4,4]:=mx[k]*mqr[k]/cd[k];k2[4,5]:=0; k2[4,6]:=0; k2[4,7]:=0;
            k2[4,8]:=0; k2[4,9]:=0; k2[4,10]:=-k2[4,4]; k2[4,11]:=0; k2[4,12]:=0;
            k2[5,5]:=4*e*mqr[k]/cd[k];k2[5,6]:=0; k2[5,7]:=0; k2[5,8]:=0;
            k2[5,9]:=6*e*mqr[k]/cd2[k]; k2[5,10]:=0;k2[5,11]:=2*e*mqr[k]/cd[k];
            k2[5,12]:=0;
            k2[6,6]:=4*e*mqr[k]/cd[k]; k2[6,7]:=0; k2[6,8]:=-6*e*mqr[k]/cd2[k];
            k2[6,9]:=0;k2[6,10]:=0;k2[6,11]:=0; k2[6,12]:=2*e*mqr[k]/cd[k];
            k2[7,7]:=k2[1,1];k2[7,8]:=0; k2[7,9]:=0; k2[7,10]:=0; k2[7,11]:=0;
            k2[7,12]:=0;
            k2[8,8]:=k2[2,2]; k2[8,9]:=0;k2[8,10]:=0;k2[8,11]:=0; k2[8,12]:=-k2[6,8];
            k2[9,9]:=k2[3,3]; k2[9,10]:=0; k2[9,11]:=k2[5,9]; k2[9,12]:=0;
            k2[10,10]:=k2[4,4]; k2[10,11]:=0; k2[10,12]:=0;
            k2[11,11]:=k2[5,5]; k2[11,12]:=0;
            k2[12,12]:=k2[6,6];
        end;
        for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to i-1 do k2[i,j]:=k2[j,i];
        b1[k]:=sqrt(sqr(xk[k])+sqr(zk[k])); s2[k]:=zk[k]/b1[k];
        c2[k]:=xk[k]/b1[k];
        for i:=1 to 3 do
        for j:=1 to 3 do

```

```

begin
t2[1,1]:=0; t2[1,2]:=1; t2[1,3]:=0;
t2[2,1]:=-c2[k];t2[2,2]:=0; t2[2,3]:=s2[k]; t2[3,1]:=s2[k];
t2[3,2]:=0; t2[3,3]:=c2[k];
end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r2[1,1]:=t2[1,1]; r2[1,2]:=t2[1,2]; r2[1,3]:=t2[1,3]; r2[1,4]:=0; r2[1,5]:=0;
r2[1,6]:=0; r2[1,7]:=0; r2[1,8]:=0; r2[1,9]:=0; r2[1,10]:=0;
r2[1,11]:=0; r2[1,12]:=0;
r2[2,1]:=t2[2,1]; r2[2,2]:=t2[2,2]; r2[2,3]:=t2[2,3];r2[2,4]:=0;r2[2,5]:=0;
r2[2,6]:=0; r2[2,7]:=0; r2[2,8]:=0; r2[2,9]:=0; r2[2,10]:=0; r2[2,11]:=0;
r2[2,12]:=0;
r2[3,1]:=t2[3,1]; r2[3,2]:=t2[3,2]; r2[3,3]:=t2[3,3];r2[3,4]:=0;r2[3,5]:=0;
r2[3,6]:=0; r2[3,7]:=0; r2[3,8]:=0; r2[3,9]:=0; r2[3,10]:=0; r2[3,11]:=0;
r2[3,12]:=0;
r2[4,1]:=0;r2[4,2]:=0;r2[4,3]:=0; r2[4,4]:=abs(t2[1,1]);
r2[4,5]:=abs(t2[1,2]);r2[4,6]:=abs(t2[1,3]); r2[4,7]:=0; r2[4,8]:=0;
r2[4,9]:=0; r2[4,10]:=0;r2[4,11]:=0; r2[4,12]:=0;
r2[5,1]:=0;r2[5,2]:=0;r2[5,3]:=0; r2[5,4]:=abs(t2[2,1]);
r2[5,5]:=abs(t2[2,2]); r2[5,6]:=abs(t2[2,3]); r2[5,7]:=0; r2[5,8]:=0;
r2[5,9]:=0; r2[5,10]:=0;r2[5,11]:=0; r2[5,12]:=0;
r2[6,1]:=0;r2[6,2]:=0;r2[6,3]:=0; r2[6,4]:=abs(t2[3,1]);
r2[6,5]:=abs(t2[3,2]);r2[6,6]:=abs(t2[3,3]); r2[6,7]:=0; r2[6,8]:=0;
r2[6,9]:=0; r2[6,10]:=0; r2[6,11]:=0; r2[6,12]:=0;
r2[7,1]:=0;r2[7,2]:=0;r2[7,3]:=0;r2[7,4]:=0;r2[7,5]:=0;r2[7,6]:=0;
r2[7,7]:=t2[1,1];r2[7,8]:=t2[1,2];r2[7,9]:=t2[1,3];r2[7,10]:=0; r2[7,11]:=0;
r2[7,12]:=0;
r2[8,1]:=0;r2[8,2]:=0;r2[8,3]:=0;r2[8,4]:=0;r2[8,5]:=0;r2[8,6]:=0;
r2[8,7]:=t2[2,1]; r2[8,8]:=t2[2,2];r2[8,9]:=t2[2,3];r2[8,10]:=0;
r2[8,11]:=0; r2[8,12]:=0;
r2[9,1]:=0;r2[9,2]:=0;r2[9,3]:=0; r2[9,4]:=0;r2[9,5]:=0;r2[9,6]:=0;
r2[9,7]:=t2[3,1]; r2[9,8]:=t2[3,2];r2[9,9]:=t2[3,3]; r2[9,10]:=0;
r2[9,11]:=0; r2[9,12]:=0;
r2[10,1]:=0;r2[10,2]:=0;r2[10,3]:=0;r2[10,4]:=0; r2[10,5]:=0;r2[10,6]:=0;
r2[10,7]:=0;r2[10,8]:=0;r2[10,9]:=0; r2[10,10]:=abs(t2[1,1]);
r2[10,11]:=abs(t2[1,2]);r2[10,12]:=abs(t2[1,3]);
r2[11,1]:=0;r2[11,2]:=0;r2[11,3]:=0;r2[11,4]:=0;r2[11,5]:=0; r2[11,6]:=0;
r2[11,7]:=0;r2[11,8]:=0;r2[11,9]:=0; r2[11,10]:=abs(t2[2,1]);
r2[11,11]:=abs(t2[2,2]);r2[11,12]:=abs(t2[2,3]);
r2[12,1]:=0; r2[12,2]:=0;r2[12,3]:=0; r2[12,4]:=0;r2[12,5]:=0;r2[12,6]:=0;
r2[12,7]:=0;r2[12,8]:=0;r2[12,9]:=0; r2[12,10]:=abs(t2[3,1]);

```

```

r2[12,11]:=abs(t2[3,2]);r2[12,12]:=abs(t2[3,3]);
end;
  for i:=1 to 12 do
    for j:=1 to 12 do
      begin
        rc2[i,j]:=r2[j,i]; l2[i,j]:=0; for p:=1 to 12 do
          l2[i,j]:=l2[i,j]+rc2[i,p]*k2[p,j];
        end;
      for i:=1 to 12 do
        for j:=1 to 12 do
          begin
            m2[i,j]:=0; for p:=1 to 12 do
              m2[i,j]:=m2[i,j]+l2[i,p]*r2[p,j];
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
  Procedure tinhvt;
  begin
    if(y<>0) then for k:=1 to y do
      begin
        v1[k]:=cf[k]*cd[k]/2; v2[k]:=cf[k]*sqr(cd[k])/12;
        f[d1[k]]:=f[d1[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
        f[d2[k]]:=f[d2[k]]+((t1[2,2])*cf[k]);
        f[d3[k]]:=f[d3[k]]+((t1[2,3])*v1[k]);
        f[d4[k]]:=f[d4[k]]+(abs(t1[3,1])*v2[k]);
        f[d5[k]]:=f[d5[k]]+(abs(t1[3,2])*v2[k]);
        f[d6[k]]:=f[d6[k]]+(abs(t1[3,3])*v2[k]);
        f[d7[k]]:=f[d7[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
        f[d8[k]]:=f[d8[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
        f[d9[k]]:=f[d9[k]]+((t1[2,3])*v1[k]);
        f[d10[k]]:=f[d10[k]]-(abs(t1[3,1])*v2[k]);
        f[d11[k]]:=f[d11[k]]-(abs(t1[3,2])*v2[k]);
        f[d12[k]]:=f[d12[k]]-(abs(t1[3,3])*v2[k]);
      end;
    if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
      begin
        v3[k]:=ct[k]*sqr(pf[k])*(2*pt[k]+cd[k])/cd3[k];
        v4[k]:=ct[k]*pt[k]*sqr(pf[k])/sqr(cd[k]);
        v5[k]:=ct[k]*sqr(pt[k])*(cd[k]+2*pf[k])/cd3[k];
        v6[k]:=ct[k]*pf[k]*sqr(pt[k])/sqr(cd[k]);
        cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k];
        f[d1[k]]:=f[d1[k]]+((t1[2,1])*v3[k]);
        f[d2[k]]:=f[d2[k]]+((t1[2,2])*v3[k]);
        f[d3[k]]:=f[d3[k]]+((t1[2,3])*v3[k]);

```

```

f[d4[k]]:=f[d4[k]]+(abs(t1[3,1])*v4[k]);
f[d5[k]]:=f[d5[k]]+(abs(t1[3,2])*v4[k]);
f[d6[k]]:=f[d6[k]]+(abs(t1[3,3])*v4[k]);
f[d7[k]]:=f[d7[k]]+((t1[2,1])*v5[k]);
f[d8[k]]:=f[d8[k]]+((t1[2,2])*v5[k]);
f[d9[k]]:=f[d9[k]]+((t1[2,3])*v5[k]);
f[d10[k]]:=f[d10[k]]-(abs(t1[3,1])*v6[k]);
f[d11[k]]:=f[d11[k]]-(abs(t1[3,2])*v6[k]);
f[d12[k]]:=f[d12[k]]-(abs(t1[3,3])*v6[k]);
end;
end;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
s:=0;
REPEAT
s:=s+1;
for i:= s+1 to n do
Begin
if(a[s,s]<>0) then
q:=a[s,i]/a[s,s];
for j:=i to n do
a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1 downto 1 do
Begin
r :=0;
for j:= n downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
if(a[i,i]<>0) then
x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
End;
end;
Procedure Tinhcv(var qc,qt:mt2;r:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:
integer);
begin
qc[a1]:=r[1,1]*qt[a1]+r[1,2]*qt[a2]+r[1,3]*qt[a3]+r[1,4]*qt[a4]+
r[1,5]*qt[a5]+r[1,6]*qt[a6]+r[1,7]*qt[a7]+r[1,8]*qt[a8]+
r[1,9]*qt[a9]+r[1,10]*qt[a10]+r[1,11]*qt[a11]+r[1,12]*qt[a12];

qc[a2]:=r[2,1]*qt[a1]+r[2,2]*qt[a2]+r[2,3]*qt[a3]+r[2,4]*qt[a4]+
r[2,5]*qt[a5]+r[2,6]*qt[a6]+r[2,7]*qt[a7]+r[2,8]*qt[a8]+
r[2,9]*qt[a9]+r[2,10]*qt[a10]+r[2,11]*qt[a11]+r[2,12]*qt[a12];

```


$$qc[a3]:=r[3,1]*qt[a1]+r[3,2]*qt[a2]+r[3,3]*qt[a3]+r[3,4]*qt[a4]+$$

$$r[3,5]*qt[a5]+r[3,6]*qt[a6]+r[3,7]*qt[a7]+r[3,8]*qt[a8]+$$

$$r[3,9]*qt[a9]+r[3,10]*qt[a10]+r[3,11]*qt[a11]+r[3,12]*qt[a12];$$

$$qc[a4]:=r[4,1]*qt[a1]+r[4,2]*qt[a2]+r[4,3]*qt[a3]+r[4,4]*qt[a4]+$$

$$r[4,5]*qt[a5]+r[4,6]*qt[a6]+r[4,7]*qt[a7]+r[4,8]*qt[a8]+$$

$$r[4,9]*qt[a9]+r[4,10]*qt[a10]+r[4,11]*qt[a11]+r[4,12]*qt[a12];$$

$$qc[a5]:=r[5,1]*qt[a1]+r[5,2]*qt[a2]+r[5,3]*qt[a3]+r[5,4]*qt[a4]+$$

$$r[5,5]*qt[a5]+r[5,6]*qt[a6]+r[5,7]*qt[a7]+r[5,8]*qt[a8]+$$

$$r[5,9]*qt[a9]+r[5,10]*qt[a10]+r[5,11]*qt[a11]+r[5,12]*qt[a12];$$

$$qc[a6]:=r[6,1]*qt[a1]+r[6,2]*qt[a2]+r[6,3]*qt[a3]+r[6,4]*qt[a4]+$$

$$r[6,5]*qt[a5]+r[6,6]*qt[a6]+r[6,7]*qt[a7]+r[6,8]*qt[a8]+$$

$$r[6,9]*qt[a9]+r[6,10]*qt[a10]+r[6,11]*qt[a11]+r[6,12]*qt[a12];$$

$$qc[a7]:=r[7,1]*qt[a1]+r[7,2]*qt[a2]+r[7,3]*qt[a3]+r[7,4]*qt[a4]+$$

$$r[7,5]*qt[a5]+r[7,6]*qt[a6]+r[7,7]*qt[a7]+r[7,8]*qt[a8]+$$

$$r[7,9]*qt[a9]+r[7,10]*qt[a10]+r[7,11]*qt[a11]+r[7,12]*qt[a12];$$

$$qc[a8]:=r[8,1]*qt[a1]+r[8,2]*qt[a2]+r[8,3]*qt[a3]+r[8,4]*qt[a4]+$$

$$r[8,5]*qt[a5]+r[8,6]*qt[a6]+r[8,7]*qt[a7]+r[8,8]*qt[a8]+$$

$$r[8,9]*qt[a9]+r[8,10]*qt[a10]+r[8,11]*qt[a11]+r[8,12]*qt[a12];$$

$$qc[a9]:=r[9,1]*qt[a1]+r[9,2]*qt[a2]+r[9,3]*qt[a3]+r[9,4]*qt[a4]+$$

$$r[9,5]*qt[a5]+r[9,6]*qt[a6]+r[9,7]*qt[a7]+r[9,8]*qt[a8]+$$

$$r[9,9]*qt[a9]+r[9,10]*qt[a10]+r[9,11]*qt[a11]+r[9,12]*qt[a12];$$

$$qc[a10]:=r[10,1]*qt[a1]+r[10,2]*qt[a2]+r[10,3]*qt[a3]+r[10,4]*qt[a4]+$$

$$r[10,5]*qt[a5]+r[10,6]*qt[a6]+r[10,7]*qt[a7]+r[10,8]*qt[a8]+$$

$$r[10,9]*qt[a9]+r[10,10]*qt[a10]+r[10,11]*qt[a11]+r[10,12]*qt[a12];$$

$$qc[a11]:=r[11,1]*qt[a1]+r[11,2]*qt[a2]+r[11,3]*qt[a3]+$$

$$r[11,4]*qt[a4]+r[11,5]*qt[a5]+r[11,6]*qt[a6]+$$

$$r[11,7]*qt[a7]+r[11,8]*qt[a8]+r[11,9]*qt[a9]+$$

$$r[11,10]*qt[a10]+r[11,11]*qt[a11]+r[11,12]*qt[a12];$$

$$qc[a12]:=r[12,1]*qt[a1]+r[12,2]*qt[a2]+r[12,3]*qt[a3]+$$

$$r[12,4]*qt[a4]+r[12,5]*qt[a5]+r[12,6]*qt[a6]+r[12,7]*qt[a7]+$$

$$r[12,8]*qt[a8]+r[12,9]*qt[a9]+r[12,10]*qt[a10]+r[12,11]*qt[a11]+$$

$$r[12,12]*qt[a12];$$

end;

Procedure Tinhnl(var nl,qc:mt2;k:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:
integer);

begin

nl[a1]:=k[1,1]*qc[a1]+k[1,2]*qc[a2]+k[1,3]*qc[a3]+k[1,4]*qc[a4]+
k[1,5]*qc[a5]+k[1,6]*qc[a6]+k[1,7]*qc[a7]+k[1,8]*qc[a8]+
k[1,9]*qc[a9]+k[1,10]*qc[a10]+k[1,11]*qc[a11]+k[1,12]*qc[a12];

nl[a2]:=k[2,1]*qc[a1]+k[2,2]*qc[a2]+k[2,3]*qc[a3]+k[2,4]*qc[a4]+
k[2,5]*qc[a5]+k[2,6]*qc[a6]+k[2,7]*qc[a7]+k[2,8]*qc[a8]+
k[2,9]*qc[a9]+k[2,10]*qc[a10]+k[2,11]*qc[a11]+k[2,12]*qc[a12];

nl[a3]:=k[3,1]*qc[a1]+k[3,2]*qc[a2]+k[3,3]*qc[a3]+k[3,4]*qc[a4]+
k[3,5]*qc[a5]+k[3,6]*qc[a6]+k[3,7]*qc[a7]+k[3,8]*qc[a8]+
k[3,9]*qc[a9]+k[3,10]*qc[a10]+k[3,11]*qc[a11]+k[3,12]*qc[a12];

nl[a4]:=k[4,1]*qc[a1]+k[4,2]*qc[a2]+k[4,3]*qc[a3]+k[4,4]*qc[a4]+
k[4,5]*qc[a5]+k[4,6]*qc[a6]+k[4,7]*qc[a7]+k[4,8]*qc[a8]+
k[4,9]*qc[a9]+k[4,10]*qc[a10]+k[4,11]*qc[a11]+k[4,12]*qc[a12];

nl[a5]:=k[5,1]*qc[a1]+k[5,2]*qc[a2]+k[5,3]*qc[a3]+k[5,4]*qc[a4]+
k[5,5]*qc[a5]+k[5,6]*qc[a6]+k[5,7]*qc[a7]+k[5,8]*qc[a8]+
k[5,9]*qc[a9]+k[5,10]*qc[a10]+k[5,11]*qc[a11]+k[5,12]*qc[a12];

nl[a6]:=k[6,1]*qc[a1]+k[6,2]*qc[a2]+k[6,3]*qc[a3]+k[6,4]*qc[a4]+
k[6,5]*qc[a5]+k[6,6]*qc[a6]+k[6,7]*qc[a7]+k[6,8]*qc[a8]+
k[6,9]*qc[a9]+k[6,10]*qc[a10]+k[6,11]*qc[a11]+k[6,12]*qc[a12];

nl[a7]:=k[7,1]*qc[a1]+k[7,2]*qc[a2]+k[7,3]*qc[a3]+k[7,4]*qc[a4]+
k[7,5]*qc[a5]+k[7,6]*qc[a6]+k[7,7]*qc[a7]+k[7,8]*qc[a8]+
k[7,9]*qc[a9]+k[7,10]*qc[a10]+k[7,11]*qc[a11]+k[7,12]*qc[a12];

nl[a8]:=k[8,1]*qc[a1]+k[8,2]*qc[a2]+k[8,3]*qc[a3]+k[8,4]*qc[a4]+
k[8,5]*qc[a5]+k[8,6]*qc[a6]+k[8,7]*qc[a7]+k[8,8]*qc[a8]+
k[8,9]*qc[a9]+k[8,10]*qc[a10]+k[8,11]*qc[a11]+k[8,12]*qc[a12];

nl[a9]:=k[9,1]*qc[a1]+k[9,2]*qc[a2]+k[9,3]*qc[a3]+k[9,4]*qc[a4]+
k[9,5]*qc[a5]+k[9,6]*qc[a6]+k[9,7]*qc[a7]+k[9,8]*qc[a8]+
k[9,9]*qc[a9]+k[9,10]*qc[a10]+k[9,11]*qc[a11]+k[9,12]*qc[a12];

nl[a10]:=k[10,1]*qc[a1]+k[10,2]*qc[a2]+k[10,3]*qc[a3]+
k[10,4]*qc[a4]+k[10,5]*qc[a5]+k[10,6]*qc[a6]+
k[10,7]*qc[a7]+k[10,8]*qc[a8]+k[10,9]*qc[a9]+
k[10,10]*qc[a10]+k[10,11]*qc[a11]+k[10,12]*qc[a12];

nl[a11]:=k[11,1]*qc[a1]+k[11,2]*qc[a2]+k[11,3]*qc[a3]+
k[11,4]*qc[a4]+k[11,5]*qc[a5]+k[11,6]*qc[a6]+

```

k[11,7]*qc[a7]+k[11,8]*qc[a8]+k[11,9]*qc[a9]+
k[11,10]*qc[a10]+k[11,11]*qc[a11]+k[11,12]*qc[a12];

```

```

nl[a12]:=k[12,1]*qc[a1]+k[12,2]*qc[a2]+k[12,3]*qc[a3]+
k[12,4]*qc[a4]+k[12,5]*qc[a5]+k[12,6]*qc[a6]+
k[12,7]*qc[a7]+k[12,8]*qc[a8]+k[12,9]*qc[a9]+
k[12,10]*qc[a10]+k[12,11]*qc[a11]+k[12,12]*qc[a12];
end;

```

```

Begin Clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('so bac tu do');
readln(sbt);
writeln('tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(sbk);
writeln('so thu tu BTĐ không có chuyen vi');
if(sbk<>0) then for i:=1 to sbk do
readln(g[i]);
writeln('modun đản hoi');
readln(e);
writeln('so thanh loai 1');
readln(x);
writeln('so thanh loai 2');
readln(w);
writeln('so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln(y);
writeln('so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(z);
if(y<>0) then for i:=1 to y do
begin
writeln('cuong do tai trong');
readln(cf[i]);
end;
if(z<>0) then for i:=z1 to z2 do
begin
writeln('tai trong tap trung');
readln(ct[i]);
writeln('a1');
readln(pt[i]);
writeln('b1');

```

```

readln(pf[i]);
end;
writeln('dien tich');
for i:=1 to st do
readln(dt[i]);
writeln('modun xoan');
for i:=1 to st do
readln(mx[i]);
writeln('momen quan tinh x');
for i:=1 to st do
readln(mqx[i]);
writeln('momen quan tinh y');
for i:=1 to st do
readln(mqy[i]);
writeln('momen quan tinh z');
for i:=1 to st do
readln(mqz[i]);
writeln('xj');
for i:=1 to st do
readln(xj[i]);
writeln('yj');
for i:=1 to st do
readln(yj[i]);
writeln('zj');
for i:=1 to st do
readln(zj[i]);
writeln('xl');
for i:=1 to st do
readln(xl[i]);
writeln('yl');
for i:=1 to st do
readln(yl[i]);
writeln('zl');
for i:=1 to st do
readln(zl[i]);
writeln('toa do diem xk');
for i:=1 to st do
readln(xk[i]);
writeln('toa do diem yk');
for i:=1 to st do
readln(yk[i]);
writeln('toa do diem zk');
for i:=1 to st do
readln(zk[i]);

```

```

writeln('BTD d1');
for i:=1 to st do
  readln(d1[i]);
writeln('BTD d2');
for i:=1 to st do
  readln(d2[i]);
writeln('BTD d3');
for i:=1 to st do
  readln(d3[i]);
writeln('BTD d4');
for i:=1 to st do
  readln(d4[i]);
writeln('BTD d5');
for i:=1 to st do
  readln(d5[i]);
writeln('BTD d6');
for i:=1 to st do
  readln(d6[i]);
writeln('BTD d7');
for i:=1 to st do
  readln(d7[i]);
writeln('BTD d8');
for i:=1 to st do
  readln(d8[i]);
writeln('BTD d9');
for i:=1 to st do
  readln(d9[i]);
writeln('BTD d10');
for i:=1 to st do
  readln(d10[i]);
writeln('BTD d11');
for i:=1 to st do
  readln(d11[i]);
writeln('BTD d12');
for i:=1 to st do
  readln(d12[i]);
writeln('thanh fan tai trong');
for i:=1 to sbt do
  readln(fn[i]);

```

```

z1:=y+1; z2:=y+z; z3:=z2+1; z4:=x+1; z5:=x+w;
tinhm1;
if(x<>0) then for k:=1 to x do

```

```

begin
a1:=d1[k];a2:=d2[k];a3:=d3[k]; a4:=d4[k]; a5:=d5[k];
a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k]; a9:=d9[k];
a10:=d10[k];a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
for k:=1 to x do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do m[i,j]:=m1[i,j];
end;
TS(m1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,10,a11,a12);
end;
tinhm2;
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
begin
a1:=d1[k];a2:=d2[k];a3:=d3[k]; a4:=d4[k]; a5:=d5[k];
a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k]; a9:=d9[k];
a10:=d10[k];a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
for k:=z4 to z5 do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do m[i,j]:=m2[i,j];
end;
TS(m2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,10,a11,a12);
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];
tinhhvt;

(*Goi chuong trinh con giai he FT*);
GHFT(s,f,qt,sbt);

(*Tinh chuyen vi 2 loai thanh*);
if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
a9:=d9[k]; a10:=d10[k]; a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
tinhecv(qc,qt,r1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);;
end;
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
begin
a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
a9:=d9[k]; a10:=d10[k];a11:=d11[k]; a12:=d12[k];

```

```

    tinhcv(qc,qt,r2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);
end;

(*Tinh noi luc trong 2 loai thanh*);
if(sbk<>0) then for i:=1 to sbk do qc[g[i]]:=0;
if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
a9:=d9[k]; a10:=d10[k]; a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
tinhnl(nl,qc,k1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);;
end;
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
begin
a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
a9:=d9[k]; a10:=d10[k]; a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
Tinhnl(nl,qc,k2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);
end;
if(y<>0) then for k:=1 to y do
begin
nl[d2[k]]:=nl[d2[k]]-(cf[k]*cd[k]/2);
nl[d6[k]]:=nl[d6[k]]-(cf[k]*sqr(cd[k])/12);
nl[d8[k]]:=nl[d8[k]]-(cf[k]*cd[k]/2);
nl[d12[k]]:=nl[d12[k]]+(cf[k]*sqr(cd[k])/12);
end;
if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
begin
nl[d2[k]]:=nl[d2[k]]-(ct[k]*sqr(pf[k])*(2*pt[k]+
cd[k])/cd3[k]);
nl[d6[k]]:=nl[d6[k]]-(ct[k]*pt[k]*sqr(pf[k])/sqr(cd[k]));
nl[d8[k]]:=nl[d8[k]]-(ct[k]*sqr(pt[k])*(cd[k]+
2*pf[k])/cd3[k]);
nl[d12[k]]:=nl[d12[k]]+(ct[k]*pf[k]*sqr(pt[k])/sqr(cd[k]));
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qt[i]);
writeln('noi luc fb');
if(y<>0) then for k:=1 to y do
begin
writeln(nl[d2[k]]);

```

```

writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc tt');
if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
begin
writeln(nl[d2[k]]);
writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc ktt ');
for k:=z3 to x do
begin
writeln(nl[d2[k]]);
writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc trong cot');
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
begin
writeln(nl[d1[k]]);
writeln(nl[d5[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d7[k]]);
writeln(nl[d11[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
readln;
end.

```



```

Program CTR19_Tinh_gia_tri_rieng_lon_nhat_cho_he_gian;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
     c1,c2,b1,e1,d,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,x1,x2,y1,y2:mt2;
     s,m,a,u,b,x:mt1;
     tt,gtrln,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
  Var  i,j,p :integer;  c:real;
begin
  p:=0;
  REPEAT
    p:=p+1;
    if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
        if(i<>p) then
          begin
            c:=a[i,p];
            for j:=1 to n do
              begin
                a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
              end;
            end;
          end;
      UNTIL(p=n);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
begin
  k:=0;
  REPEAT
    k:=k+1;
    for i:=1 to n do
      begin
        B[i,k]:=0;
        for p:=1 to n do
          B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
        end;
      end;

```

```

    if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
    for i:=1 to n do
    begin
        if(Y[k]<>0) then
            X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
        end;
    UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
    for i:=1 to sbt do VTRN[i]:=X[i,k+1];
    GTRLN:=Y[k];
end;
Begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('toa do x1');
for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('toa do x2');
for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('toa do y1');
for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('toa do y2');
for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
for i:=1 to st do
begin
    cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(x2[i]-x1[i]));
    l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];

```

```

    b1[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c1[i]:=l[i]*mm[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
    d[i]:=sqr(mm[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
    s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+e1[i];
    s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
    s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b1[i];
    s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-e1[i];
    s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-e1[i];
    s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
    s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+e1[i];
    s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *);
for i:=1 to st do
begin
    c1[i]:=tr*dt[i]*cd[i]/3; c2[i]:=c1[i]/2;
    m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+0;
    m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+c2[i];
    m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+0;
    m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+0;
    m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+c2[i];
    m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+0;
    m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do m[i,j]:=m[j,i];

(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
    if(i=j) then u[i,j]:=1;
    if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(m,u,sbt);

(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to sbt do

```

```

for j:=1 to sbt do
begin
  a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
    a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;
(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri rieng lon nhat*);
for i:=1 to sbt do x[i,1]:=1;
TGTRLN(a,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng n');
for i:=1 to sbt do
  writeln(VTRn[i]);
writeln('Gia tri rieng lon nhat');
writeln(GTRLN);
readln;
end.

```

```

Program CTR20_Tinh_gia_tri_rieng_be_nhat_cho_he_gian;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
    c1,c2,b1,e1,d,cd,dt,e,y,vtr1,l,mm,x1,x2,y1,y2:mt2;
    s,m,a,u,b,x:mt1;
    tt,gtrbn,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
  Var  i,j,p :integer;  c:real;
begin
  p:=0;
  REPEAT
    p:=p+1;
    if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
        if(i<>p) then
          begin
            c:=a[i,p];
            for j:=1 to n do
              begin
                a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
              end;
            end;
          end;
      UNTIL(p=n);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
begin
  k:=0;
  REPEAT
    k:=k+1;
    for i:=1 to n do
      begin
        B[i,k]:=0;
        for p:=1 to n do
          B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
        end;
      end;
end;

```

```

    if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
    for i:=1 to n do
    begin
        if(Y[k]<>0) then
            X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
        end;
    UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
    for i:=1 to sbt do VTR1[i]:=X[i,k+1];
    GTRBN:=1/Y[k];
end;
Begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTĐ có chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('toa do x1');
for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('toa do x2');
for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('toa do y1');
for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('toa do y2');
for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tích');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modulun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap BTĐ d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTĐ d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTĐ d3');
for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTĐ d4');
for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTĐC riêng*);
for i:=1 to st do
begin
    cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(x2[i]-x1[i]));
    l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];

```

```

    b1[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c1[i]:=l[i]*mm[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
    d[i]:=sqr(mm[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
    s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+e1[i];
    s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
    s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b1[i];
    s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-e1[i];
    s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-e1[i];
    s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
    s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+e1[i];
    s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *);
for i:=1 to st do
begin
    c1[i]:=tt*dt[i]*cd[i]/3; c2[i]:=c1[i]/2;
    m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+0;
    m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+c2[i];
    m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+0;
    m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+0;
    m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+c2[i];
    m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+0;
    m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do m[i,j]:=m[j,i];

(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
    if(i=j) then u[i,j]:=1;
    if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(m,u,sbt);

(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to sbt do

```

```

for j:=1 to sbt do
begin
  a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
    a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;

(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT a*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
  if(i=j) then u[i,j]:=1;
  if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(a,u,sbt);

(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri rieng be nhat*);
for i:=1 to sbt do x[i,1]:=1;
TGTRLN(u,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng 1');
for i:=1 to sbt do
  writeln(VTR1[i]);
writeln('Gia tri rieng be nhat');
writeln(GTRBN);
readln;
end.

```



```

Program CTR21_Tinh_gia_tri_rieng_lon_nhat_cho_he_khung;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
  a1,b1,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,
  x1,x2,y1,y2:mt2;
  s,m,me,mc,r,a,u,b,t,tc,x:mt1;
  tt,gtrln,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1);
  Var i,j,p:integer; c:real;
begin
  p:=0;
  REPEAT
    p:=p+1;
    if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
        if(i<>p) then
          begin
            c:=a[i,p];
            for j:=1 to n do
              begin
                a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
              end;
            end;
          end;
      end;
  UNTIL(p=n);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
begin
  k:=0;
  REPEAT
    k:=k+1;
    for i:=1 to n do
      begin
        B[i,k]:=0;
        for p:=1 to n do

```

```

        B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
    end;
    if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
    for i:=1 to n do
        begin
            if(Y[k]<>0) then
                X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
            end;
        UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
        for i:=1 to n do VTRn[i]:=X[i,k+1];
        GTRLN:=Y[k];
    end;
Begin   clrscr;
(*Nguoi lap trinh : Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tích');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap momen quan tinh');
for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap BTD d5');
for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap BTD d6');
for i:=1 to st do readln(d6[i]);

```

```

writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
for i:=1 to st do
begin
  cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
  l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
  cd3[i]:= sqrt(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
    g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
    g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
  c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(mm[i]);
  c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*mm[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(mm[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
  c4[i]:=g2[i]*mm[i]; c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i]; c7[i]:=2*g4[i];
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
  s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do  s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *)
for k:=1 to st do

```

```

begin
  for i:=1 to sbt do
    for j:=1 to sbt do
      begin t[1,1]:=l[k]; t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k]; t[2,2]:=l[k];
        t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k]; t[6,6]:=1;
      end;
      a1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/6; b1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/420;
      for i:=1 to sbt do
        for j:=i to sbt do
          begin me[1,1]:=2*a1[k]; me[1,4]:=a1[k]; me[1,5]:=2*a1[k];
            me[2,2]:=156*b1[k]; me[2,3]:=22*cd[k]*b1[k]; me[2,5]:=54*b1[k];
            me[2,6]:=-13*cd[k]*b1[k]; me[3,3]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
            me[3,5]:=13*cd[k]*b1[k]; me[3,6]:=-3*sqr(cd[k])*b1[k];
            me[4,4]:=2*a1[k]; me[5,5]:=156*b1[k]; me[5,6]:=-22*cd[k]*b1[k];
            me[6,6]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
          end;
          for i:=1 to sbt do
            for j:=1 to i-1 do me[i,j]:=me[j,i];
            for i:=1 to sbt do
              for j:=1 to sbt do tc[i,j]:=t[j,i];
              for i:=1 to sbt do
                for j:=1 to sbt do
                  begin
                    r[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
                  end;
                  for i:=1 to sbt do
                    for j:=1 to sbt do
                      begin
                        mc[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
                      end;
                    end;
                    m[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+mc[1,1];
                    m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+mc[1,2];
                    m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+mc[2,2];
                    m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+mc[1,3];
                    m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+mc[2,3];
                    m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+mc[3,3];
                    m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+mc[1,4];
                    m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+mc[2,4];
                    m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+mc[3,4];
                    m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+mc[4,4];
                    m[d1[i],d5[i]]:=m[d1[i],d5[i]]+mc[1,5];
                    m[d2[i],d5[i]]:=m[d2[i],d5[i]]+mc[2,5];
                    m[d3[i],d5[i]]:=m[d3[i],d5[i]]+mc[3,5];
                    m[d4[i],d5[i]]:=m[d4[i],d5[i]]+mc[4,5];

```

```

    m[d5[i],d5[i]]:=m[d5[i],d5[i]]+mc[5,5];
    m[d1[i],d6[i]]:=m[d1[i],d6[i]]+mc[1,6];
    m[d2[i],d6[i]]:=m[d2[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d3[i],d6[i]]:=m[d3[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d4[i],d6[i]]:=m[d4[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d5[i],d6[i]]:=m[d5[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d6[i],d6[i]]:=m[d6[i],d6[i]]+mc[6,6];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do  m[i,j]:=m[j,i];

(*Nghich dao MT khoi luong*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
if (i<>j) then u[i,j]:=0;
if(i=j) then u[i,j]:=1;
end;
NDMT(m,u);
(*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri rieng lon nhat va vec to rieng*);
for i:=1 to sbt do  (X[i,1]):=1;
TGTRLN(a,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng n');
for i:=1 to sbt do
writeln(VTRn[i]);
writeln('gia tri rieng lon nhat');
writeln(GTRLN);
readln;
end.

```

```

Program CTR22_Tinh_gia_tri_rieng_be_nhat_cho_he_khung;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
  a1,b1,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtr1,l,mm,
  x1,x2,y1,y2:mt2;
  s,m,me,mc,r,a,u,b,t,tc,x:mt1;
  tt,gtrbn,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;sbt:integer);
var i,j,p:integer; c:real;
begin
  p:=0;
  REPEAT
    p:=p+1;
    if(a[p,p]<>0)then
      begin
        c:=1/a[p,p];
        for j:=1 to sbt do
          begin
            a[p,j]:=a[p,j]*c;
            U[p,j]:=U[p,j]*c;
          end;
        for i:=1 to sbt do
          if(i<>p) then
            begin
              c:=a[i,p];
              for j:=1 to sbt do
                begin
                  a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
                  U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
                end;
              end
            end;
          end;
        UNTIL(p=sbt);
      end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
begin
  k:=0;
  REPEAT
    k:=k+1;
    for i:=1 to n do
      begin
        B[i,k]:=0;
        for p:=1 to n do

```

```

        B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
    end;
    if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
    for i:=1 to n do
        begin
            if(Y[k]<>0) then
                X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
            end;
        UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
        for i:=1 to n do  VTR1[i]:=X[i,k+1];
        GTRBN:=1/Y[k];
    end;
Begin  clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
    begin
        if (i<>j) then u[i,j]:=0;
        if(i=j) then u[i,j]:=1;
    end;
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tích');
for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modulun dan hoi');
for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap momen quan tinh');
for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');

```

```

for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap BTĐ d5');
for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap BTĐ d6');
for i:=1 to st do readln(d6[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTĐC rieng*);
for i:=1 to st do
begin
  cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
  l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
  cd3[i]:= sqrt(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
    g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
    g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
  c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(mm[i]);
  c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*mm[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(mm[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
  c4[i]:=g2[i]*mm[i]; c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i]; c7[i]:=2*g4[i];
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
  s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to sbt do

```



```

for j:=1 to i-1 do s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *)
for k:=1 to st do
begin
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
begin t[1,1]:=l[k]; t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k]; t[2,2]:=l[k];
t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k]; t[6,6]:=1;
end;
a1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/6; b1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/420;
for i:=1 to sbt do
for j:=i to sbt do
begin me[1,1]:=2*a1[k]; me[1,4]:=a1[k]; me[1,1]:=2*a1[k];
me[2,2]:=156*b1[k]; me[2,3]:=22*cd[k]*b1[k]; me[2,5]:=54*b1[k];
me[2,6]:=-13*cd[k]*b1[k]; me[3,3]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
me[3,5]:=13*cd[k]*b1[k]; me[3,6]:=-3*sqr(cd[k])*b1[k];
me[4,4]:=2*a1[k]; me[5,5]:=156*b1[k]; me[5,6]:=-22*cd[k]*b1[k];
me[6,6]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do me[i,j]:=me[j,i];
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do tc[i,j]:=t[j,i];
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
r[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
mc[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
end;
m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+mc[1,1];
m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+mc[1,2];
m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+mc[2,2];
m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+mc[1,3];
m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+mc[2,3];
m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+mc[3,3];
m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+mc[1,4];
m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+mc[2,4];
m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+mc[3,4];
m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+mc[4,4];
m[d1[i],d5[i]]:=m[d1[i],d5[i]]+mc[1,5];

```

```

m[d2[i],d5[i]]:=m[d2[i],d5[i]]+mc[2,5];
m[d3[i],d5[i]]:=m[d3[i],d5[i]]+mc[3,5];
m[d4[i],d5[i]]:=m[d4[i],d5[i]]+mc[4,5];
m[d5[i],d5[i]]:=m[d5[i],d5[i]]+mc[5,5];
m[d1[i],d6[i]]:=m[d1[i],d6[i]]+mc[1,6];
m[d2[i],d6[i]]:=m[d2[i],d6[i]]+mc[1,1];
m[d3[i],d6[i]]:=m[d3[i],d6[i]]+mc[1,1];
m[d4[i],d6[i]]:=m[d4[i],d6[i]]+mc[1,1];
m[d5[i],d6[i]]:=m[d5[i],d6[i]]+mc[1,1];
m[d6[i],d6[i]]:=m[d6[i],d6[i]]+mc[6,6];
end;
  for i:=1 to sbt do
    for j:=1 to i-1 do m[i,j]:=m[j,i];

NDMT(m,u,sbt);

(*Tich MT mgich dao M va MTDC tong the*);
for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin
    a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
      a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
  end;

(*Goi chuong trinh con ngich dao MT a*);
for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin
    if(i=j) then u[i,j]:=1; if(i<>j) then u[i,j]:=0;
  end;
  NDMT(a,u,sbt);

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri rieng be nhat *);
  for i:=1 to sbt do (X[i,1]):=1;
  TGTRLN(u,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
  writeln('vecto rieng');
  for i:=1 to sbt do
    writeln(VTR1[i]);
  writeln('Gia tri rieng be nhat');
  writeln(GTRBN);
  readln;
end.

```

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Argyric, T. H. *Energy Methods in Structural Analysis*. Butterworth, London, 1960 (reprinted from Aircraft Engineering, 1954 - 1955)
2. Zienkiewicz, O. C, and Y. K, Cheung. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. London McGraw - Hill, 1967.
3. Felippa, C.A. *Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two - Dimensional Structures*. Ph. D. Dissertation. University of California. Berkeley, 1966.
4. Eisenberg, M. A and L. E Malvern. *On finite Element Integration in Natural Corordinates*, *Int. Journal for Num. Method in Engg* Vol.7 No. 4 pp. 574-75. 1973.
5. Though, R. W. *Comparison of Three - Dimensional Finite Element*, *Proc. Symposium on Application of Finite Element in Civil Engineering*. Vanderbilt University, Nashville, Tenn. Nov. 1969, pp. 1-26.
6. Tirupathi R. Chandrupatla. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. 1991 by Prentice Hall.
7. Melosh. *Structural engineering anlysis by finite elements*.
8. P. Bhalt. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. 1983
9. Richards, T. H. *Energy Methods in Structural Analysis with an Introduction to Finite Element Techniques*. Ellis Horwood Ltd., 1977.
10. Stran, G. and G. J. Fix. *An an alysis of the Finite Element Method*. Prentice, Hall, 1973.
11. Võ Như Cầu. *Đại số ma trận, Khái niệm cơ bản*. NXB Trẻ, 2004.
12. Võ Như Cầu. *Tính kết cấu theo phương pháp ma trận*. NXB Xây dựng, 2004
13. Nguyễn Mạnh Yên. *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1996.

MỤC LỤC

	Trang
<i>Lời nói đầu</i>	3
Chương 1	
KHÁI NIỆM VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT PHẦN TỬ HỮU HẠN	
§1.1. Khái niệm về phương pháp phần tử hữu hạn	5
§1.2. Các điều kiện cân bằng	6
§1.3. Các điều kiện biên	8
§1.4. Hệ thức biến dạng - chuyển vị	10
§1.5. Hệ thức ứng suất - biến dạng	10
§1.6. Nguyên lý thế năng cực tiểu	13
§1.7. Nguyên lý công ảo	15
§1.8. Nguyên lý bảo toàn năng lượng	18
Chương 2	
TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN	
§2.1. Mô hình chuyển vị	20
§2.2. Hệ thức giữa bậc tự do của các nút và các tọa độ khái quát	21
§2.3. Hệ tọa độ tự nhiên	22
§2.4. Hàm định dạng (hàm nội suy)	27
§2.5. Ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn	37
§2.6. Ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn	39
Chương 3	
BÀI TOÁN MỘT CHIỀU	
§3.1. Đặc điểm của bài toán một chiều	42
§3.2. Mô hình phần tử hữu hạn áp dụng cho kết cấu một chiều	43
§3.3. Tọa độ tự nhiên và hàm hình dạng	44
§3.4. Ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn	48
§3.5. Các tính chất của ma trận độ cứng tổng thể K	53
§3.6. Hệ phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu. Cách xử lý các điều kiện biên	54

§3.7. Hàm hình dạng bậc 2	67
§3.8. Tác dụng của nhiệt độ	71
§3.9. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều	76

Chương 4

HỆ GIÀN

§4.1. Khái niệm	80
§4.2. Giàn phẳng	81
§4.3. Giàn không gian	93
§4.4. Thuật toán lập trình tính giàn phẳng (CTR4)	107
§4.5. Thuật toán lập trình tính giàn không gian (CTR 5)	109
§4.6. Thuật toán lập trình tính giàn chịu tác dụng của nhiệt độ và giàn chế tạo không chính xác (CTR6, CTR7)	111

Chương 5

BÀI TOÁN HAI CHIỀU DÙNG TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỐI

§5.1. Đặc điểm bài toán hai chiều	112
§5.3. FTHH tam giác có biến dạng không đối	115
§5.4. Cách biểu thị cùng tham số. Biểu thức biến dạng	116
§5.5. Ma trận độ cứng của FTHH	121
§5.6. Vectơ tải trọng. Ứng suất	
§5.7. Tác dụng của nhiệt độ	127
§5.8. Một số thí dụ về cách xử lý các điều kiện biên	128
§5.9. Thuật toán lập trình giải bài toán hai chiều kiểu FTHH tam giác biến dạng không đối (CTR8)	130

Chương 6

VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG

§6.1. Khái niệm	132
§6.2. Phân tích ứng suất và biến dạng trong vật thể tròn xoay	133
§6.3. Mô hình FTHH tam giác. Hệ thức biến dạng - chuyển vị	135
§6.4. Ma trận độ cứng của FTHH. Vectơ tải trọng. Tác dụng của nhiệt độ	137
§6.5. Một số thí dụ về cách xử lý các điều kiện biên trong vật rắn tròn xoay	144
§6.6. Thuật toán lập trình tính vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng (CTR9)	147

Chương 7

PHẦN TỬ HỮU HẠN CÙNG THAM SỐ HAI CHIỀU - PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

§7.1. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 4 nút	150
§7.2. Phương pháp tích phân bằng số	157
§7.3. Các phần tử hữu hạn có bậc cao hơn	163
§7.4. Thuật toán lập trình giải bài toán 2 chiều kiểu FTHH cùng tham số 4 cạnh 4 nút (CTR 13)	168

Chương 8

DẦM HAI CHIỀU VÀ KHUNG PHẪNG

§8.1. Dầm hai chiều có trục song song với hệ tọa độ tổng thể	170
§8.2. Dầm hai chiều có trục không song song với hệ tọa độ tổng thể khung phẳng	187
§8.3. Thuật toán lập trình tính dầm liên tục trên gối tựa thông thường (CRT 10)	204
§8.4. Thuật toán tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi (CTR 11)	205
§8.5. Thuật toán tính dầm liên tục trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo (CTR 12)	207
§8.6. Thuật toán lập trình tính khung phẳng trên gối tựa thông thường hoặc gối tựa đàn hồi (CTR 14)	208
§8.7. Thuật toán lập trình tính khung phẳng trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo (CTR 15)	211

Chương 9

HỆ DẦM GIAO NHAU

§9.1. Hệ thức ma trận giữa vectơ ngoại lực và vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung. Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ chung	213
§9.2. Trình tự tính toán hệ dầm giao nhau	217
§9.3. Thuật toán tính hệ dầm trực giao (CTR 16)	230

Chương 10

DẦM BA CHIỀU VÀ KHUNG KHÔNG GIAN

§10.1. Dầm ba chiều trong hệ tọa độ cục bộ	233
§10.2. Dầm 3 chiều trong không gian	238

§10.3. Ma trận xoay (hoặc ma trận biến đổi)	240
§10.4. Tính khung không gian	247
§10.5. Thuật toán lập trình tính khung không gian	250
Chương 11	
BÀI TOÁN BA CHIỀU	
§11.1. Khái niệm về bài toán ba chiều	252
§11.2. Mô hình phần tử hữu hạn	252
§11.3. Cách bố trí mạng phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút	
§11.4. Phần tử hữu hạn 6 mặt và các phần tử hữu hạn bậc cao hơn	261
§11.5. Cách xử lý các điều kiện biên	262
§11.6. Thuật toán lập trình giải bài toán 3 chiều (CTR17)	266
Chương 12	
BÀI TOÁN DAO ĐỘNG	
§12.1. Khái niệm	268
§12.2. Công thức cơ bản	268
§12.3. Ma trận khối lượng của các phần tử hữu hạn	271
§12.4. Giá trị riêng và vectơ riêng	276
§12.5. Thuật toán lập trình tính giá trị riêng lớn nhất và giá trị riêng bé nhất cho một số kết cấu	288
Bài tập	293
Phụ lục	326
Tài liệu tham khảo	451

TÍNH KẾT CẤU THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chịu trách nhiệm xuất bản:

BÙI HỮU HẠNH

<i>Biên tập:</i>	TRẦN CƯỜNG
<i>Chế bản:</i>	TRẦN KIM ANH
<i>Sửa bản in:</i>	HUY HOÀNG
<i>Vẽ bìa:</i>	VŨ BÌNH MINH

In 1000 cuốn khổ 19 × 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng kí kế hoạch xuất bản số 1844/XB-QLXB-105 ngày 01-12-2004. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3-2005.

$\frac{6X6 - 6X2}{XD - 2005}$	1844 - 2004
-------------------------------	-------------

Giá : 68.000^d