Chương 7
TÍNH TỔNG CỦA CHUỖI

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu 2 phương pháp để tính tổng một chuỗi bằng bảng tính. Phương pháp đơn giản nhất là tính số hạng chuỗi theo số hạng trong các ô của bảng tính và cộng chúng lại. Phương pháp khác là viết một hàm Macro để tính chuỗi cho số các số hạng bất kỳ. Một hàm Macro không sử dụng nhiều diện tích bảng tính, và chúng ta có thể tăng số các số hạng đã tính đơn giản bằng cách thay đổi một số.

Nhiều hàm số quan trọng trong tính toán khoa học - kỹ thuật chỉ có sẵn dưới dạng các công thức chuỗi. Các phương trình vi phân mà không có các nghiệm giải tích tường minh cũng thường có các nghiệm ở dạng chuỗi. Các hàm Bessel, đa thức Legendre và đa thức Laguerre là những ví dụ về các nghiệm chuỗi của phương trình vi phân.

Với Excel, chúng ta có thể tính toán giá trị của một công thức chuỗi theo hai cách. Cách thứ nhất là tính giá trị mỗi số hạng chuỗi theo từng ô của bảng tính và sau đó cộng chúng lại. Cách thứ hai mạnh hơn là viết một hàm Macro để tính toán các chuỗi cho số lượng các số hạng bất kỳ.

7.1. TÍNH TỔNG MỘT CHUỖI TRONG BẢNG TÍNH

Phương pháp đơn giản nhất mà chúng ta có thể sử dụng để tính tổng một chuỗi là tính toán các số hạng trong những ô liên tiếp, và sau đó cộng chúng lại. Phương pháp này có thể sử dụng nhiều chỗ của bảng tính nếu cần có nhiều số hạng; tuy nhiên, việc có thể nhìn thấy các giá trị của tất cả các số hạng cho chúng ta sự cảm nhận tốt hơn khi chuỗi đã hội tụ, và chúng ta có thể hiểu kết quả tốt hơn.

Hàm tính tổng các chuỗi đã được chuẩn bị sẵn trong Excel là hàm SERIESSUM, nó được giới hạn để tính tổng cho một chuỗi có dạng như sau:

$$ssum = a_1x^n + a_2x^{(n+m)} + a_3x^{(n+2m)} + ...$$

Để sử dụng hàm này, chúng ta phải cung cấp một mảng chứa tất cả các hệ số. Nếu cần tạo một mảng có tất cả các hệ số, chúng ta cũng có thể gộp những luỹ thừa của x và hoàn toàn không sử dụng hàm SERIESSUM. Đối với hầu hết các chuỗi thường gặp trong tính toán kỹ thuật, chúng ta có thể tìm được quan hệ hồi quy cho việc tính toán một số hạng sử dụng số hạng trước. Việc sử dụng quan hệ hồi quy thường làm giảm đáng kể số lượng phép tính mà chúng ta cần thực hiện, đặc biệt khi một chuỗi bao hàm các giai thừa.

7.1.1. Các hàm Bessel

Một hàm Bessel $[J_n(x)]$ là nghiệm cho phương trình vi phân của Bessel:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-n^2\right)y=0 \text{ với } y = J^n(x).$$

Chúng ta thường gặp phương trình của Bessel trong nhiều bài toán vật lý. Chẳng hạn, nghiệm của phương trình sóng trong các tọa độ hình trụ dẫn đến phương trình Bessel. Các hàm Bessel cũng là các nghiệm của một lớp các tính phân xác định:

$$J_n(x)=\frac{1}{\Pi}\int_0^{\pi}\cos\left(nv-x\sin(v)\right)dv$$

Mặc dù các hàm Bessel được xác định với giá trị *n* bất kỳ, nhưng hầu hết các giá trị *n* là những số nguyên. Một nghiệm chuỗi tồn tại với các hàm Bessel có các giá trị nguyên của *n*:

$$J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}=\sum_{s=0}^{\infty}G_s(n,x)$$

Đối với các giá trị *n* không nguyên, ta phải thay thế một hàm gama ($\Gamma(n+s+1)$) cho giai thừa $(n+s)!$

Chúng ta có thể tìm quan hệ hồi quy cho các số hạng ($G_s(n,x)$) của chuỗi bằng cách kiểm tra:

$$G_s(n,x)=G_{s-1}(n,x)\ \frac{(-1)}{s(n+s)}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^n}{2^n n!}$$

Khi sử dụng mối quan hệ hồi quy này, chúng ta chỉ cần tính toán giai thừa cho số hạng đầu tiên (G_0). Sau đó chúng ta có thể tính các số hạng còn lại trong chuỗi mà không cần tính giai thừa khác. Mỗi số hạng được tạo ra từ số hạng trước bằng cách nhân với hệ số hồi quy ở trên.

Trong ví dụ sau đây, chúng ta sẽ tính các giá trị của hàm Bessel với các giá trị tích phân của *n*. Chúng ta chỉ cần tính tổng mười số hạng đầu tiên để có sai số nhỏ hơn sai số 1% đối với các giá trị *x* lên tới khoảng 7 hoặc 8. Thêm nữa, Excel có một hàm bổ sung, hàm Besselj, cũng tính toán giá trị của các hàm Bessel. Hãy sử dụng nó để kiểm tra độ chính xác trong các phép tính của chúng ta. Bây giờ hãy lần lượt thực hiện các thao tác sau:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ.

2. Đặt độ rộng của cột A là 14.

3. Gõ hàm số Bessel; Phương pháp bảng tính trong ô A1.

- Lúc này đưa vào *n*, *n*!, và *x*.

4. Trong các ô A4, B2 và B3, lần lượt gõ các nhãn **x**, **n** và **n!** và căn phải.

5. Đặt tên ô C2 là **N**, C3 là **NF**, và B4 là **X**.

6. Gõ =**FACT(N)** trong ô C3.

- Đưa vào hàm bổ sung Besselj. Nhập vào một công thức lấy tổng để cộng tất cả các số hạng.

7. Trong ô A5, gõ **Besselj(X,N)** và căn phải.

8. Trong ô B5, gõ công thức:

= **Besselj(XN)**

9. Trong ô A6, gõ **Jn(x)** và căn phải.

10 Gõ = **SUM(B8:B18)** trong ô B6. Tính mười số hạng đầu tiên của chuỗi cho các giá trị của biến tổng *s*. Trong ô B8, đưa vào giá trị của số hạng bậc không. Trong các ô B9:B18, sử dụng quan hệ hồi quy để tính toán các số hạng khác nhau.

11. Trong ô A7, gõ **s** và căn phải.

12. Trong ô B7, gõ **Terms** và căn phải.

13. Trong ô B8, gõ công thức:

= **B4^N/(2^N*NF)**

14. Trong ô B9, gõ công thức:

= **B8*(-1)*X^2/(4*$A9*(N+$A9))**

và sao chép nó sang các ô B10:B18.

15. Trong ô A8, gõ **0**, và trong ô A9, gõ **1**.

16. Chọn các ô A8:A9, bôi đen phần dữ liệu cần xử lý và kéo nó xuống ô A18 để tạo mười giá trị *s*.

17. Định dạng các ô B8:B18 là 0.00E + 00.

Để sử dụng bảng tính, đưa giá trị của *x* (chẳng hạn 0,5), lên tới giá trị tối đa là 8 vào trong ô B4, và giá trị đối với *n* (chẳng hạn 1) trong ô C3. Khi bảng tính đã được cập nhật, giá trị của hàm Bessel sẽ ở trong các ô B5 và B6. Chú ý rằng số các số hạng giảm nhanh cho thấy sự hội tụ nhanh của chuỗi. Bảng tính của chúng ta lúc này sẽ giống như hình 7.1.

Sử dụng dạng này, chúng ta có thể tính hàm Bessel cho toàn bộ một tập các giá trị *x*. Lưu ý rằng các phần thích hợp của các tham chiếu ô đã được tạo ra hoàn toàn, để các công thức trong ô B8:B18 có thể được sao chép vào trong các ô bên phải của chúng và vẫn tham chiếu các ô đúng.

18. Sao chép các ô B4:B18 vào trong C4:AB18.

19. Trong ô B4, gõ **0**, và trong ô C4 gõ **0.3**.

20. Chọn các ô B4:C4, bôi đen phần dữ liệu cần xử lý và kéo nó tới ô AB4.

21. Đặt tên các ô B4:AB4 là **x**.

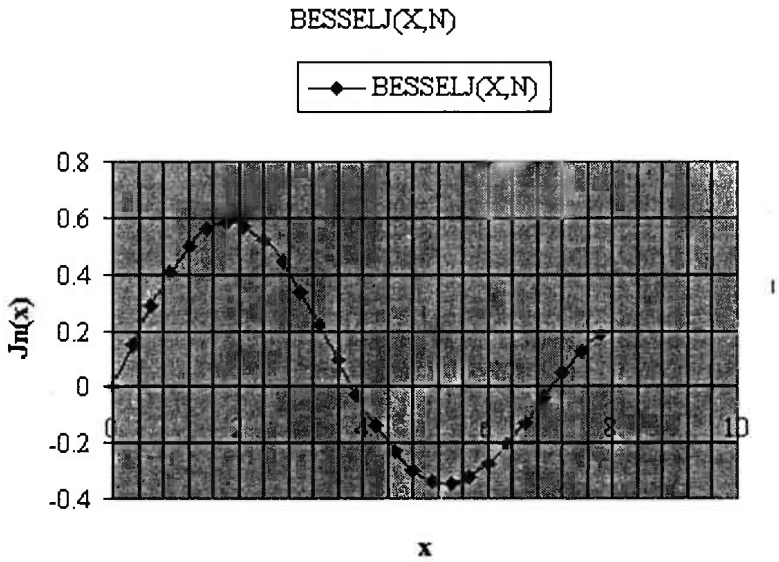
	A	B	C
1	Hàm số Bessel	Phương pháp Bảng tính	
2		n	1
3		n!	1
4	x	0.5	
5	BESSELJ(X,N)	0	
6	Jn(x)	0.24226846	
7	s	Terms	
8	0	2.50E-01	
9	1	-7.81E-03	
10	2	8.14E-05	
11	3	-4.24E-07	
12	4	1.32E-09	
13	5	-2.76E-12	
14	6	4.11E-15	
15	7	-4.58E-18	
16	8	3.98E-21	
17	9	-2.76E-24	
18	10	1.57E-27	

Hình 7.1: *Tính hàm Bessel khi sử dụng phương pháp bảng tính.*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Hàm số Bessel	Phương pháp Bảng tính						
2		n	1					
3		n!	1					
4	x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8
5	BESSELJ(X,N)	0	0.148319	0.286701	0.40595	0.498289	0.5579365	0.581517
6	Jn(x)	0	0.148319	0.286701	0.40595	0.498289	0.5579365	0.581517
7	s	Terms	Terms	Terms	Terms	Terms	Terms	Terms
8	0	0.00E+00	1.50E-01	3.00E-01	4.50E-01	6.00E-01	7.50E-01	9.00E-01
9	1	0.00E+00	-1.69E-03	-1.35E-02	-4.56E-02	-1.08E-01	-2.11E-01	-3.65E-01
10	2	0.00E+00	6.33E-06	2.03E-04	1.54E-03	6.48E-03	1.98E-02	4.92E-02
11	3	0.00E+00	-1.19E-08	-1.52E-06	-2.59E-05	-1.94E-04	-9.27E-04	-3.32E-03
12	4	0.00E+00	1.33E-11	6.83E-09	2.63E-07	3.50E-06	2.61E-05	1.35E-04
13	5	0.00E+00	-1.00E-14	-2.05E-11	-1.77E-09	-4.20E-08	-4.89E-07	-3.63E-06
14	6	0.00E+00	5.36E-18	4.39E-14	8.55E-12	3.60E-10	6.55E-09	7.00E-08
15	7	0.00E+00	-2.15E-21	-7.06E-17	-3.09E-14	-2.31E-12	-6.58E-11	-1.01E-09
16	8	0.00E+00	6.73E-25	8.83E-20	8.70E-17	1.16E-14	5.14E-13	1.14E-11
17	9	0.00E+00	-1.68E-28	-8.83E-23	-1.96E-19	-4.63E-17	-3.21E-15	-1.03E-13
18	10	0.00E+00	3.44E-32	7.22E-26	3.60E-22	1.51E-19	1.64E-17	7.55E-16

Hình 7.2: *Hàm Bessel cho nhiều giá trị của x.*

Lúc này bảng tính của chúng ta sẽ giống như hình 7.2. Ở đây chúng ta đã tính hàm Bessel với $n = 1$ và với một chuỗi các giá trị x lên tới khoảng tám giá trị. Hình 7.3 là một đồ thị của các giá trị đó. Nếu chúng ta muốn tính toán hàm Bessel cho các giá trị x lớn hơn hoặc muốn tăng độ chính xác cho các giá trị x hiện thời, chúng ta phải tăng thêm số lượng các số hạng trong chuỗi.



Hình 7.3: Hàm Bessel $J_1(x)$.

7.2. XẤP XỈ CHUỖI TRONG BẢNG TÍNH

Phương pháp thứ hai để tính chuỗi trong bảng tính là dùng ngay khả năng tính xấp xỉ sẵn có của bảng tính. Trước tiên bạn hãy tắt khả năng tính toán lại tự động và chuyển sang việc xấp xỉ bằng bản tính, rồi thêm khả năng khởi động lại để đặt các giá trị ban đầu cho việc tính tổng.

Thực hiện tính hàm Besselj lần nữa, nhưng dùng khả năng xấp xỉ của bảng tính như sau:

1. Sao chép bảng tính ở hình 7.1 và đặt tên mới là hình 7.4.
2. Chọn và xoá nội dung các ô A10:B18.
3. Chọn các ô A7:B9 và di chuyển chúng vào các ô A9:B11.
4. Trong ô A7, gõ **First Term** rồi căn lề phải
5. Trong ô A8, gõ **Initialize** rồi căn lề phải
6. Trong ô B7, gõ = **B4^N/(2^N*NF)**
7. Trong ô B8 gõ **TRUE**
8. Đặt tên cho các ô B7 và B8 là **Term0** và **INIT**

9. Chọn lệnh *Tools > Options, Calculation tab*; Chọn cách tính bằng tay *Manual*, xoá hộp kiểm tra *Recalculate Before Save*, kiểm tra hộp *Iteration* và đặt trị số *Maximum Interation* bằng 1, rồi nhấn chuột vào OK.

10. Trong ô A10, gõ = **A11**

11. Trong ô A11, gõ = **IF (INIT,0,A10+1)**

12. Trong ô B10, gõ = **B11**

13. Trong ô B11, gõ công thức:

= **IF(INIT,Term0,B10*(-1)*X^2/(4*$A11*(N+$A11)))**

14. Trong ô C9, gõ **Tổng**

15. Trong ô C10 gõ = **C11**

16. Trong ô C11, gõ = **IF(INIT,B7,C10+B11)**

17. Trong ô B6, gõ = **C11**

18. Định dạng các ô B5:B6 và C10:C11 là Number, với 4 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Để dùng bảng tính này: hãy chèn các giá trị cho x và n rồi nhấn F9 để khởi động bảng tính, thay đổi B8 thành FALSE và nhấn F9 lần nữa đối với mỗi giá trị mà bạn muốn thêm vào chuỗi. Số số hạng được ghi trong ô A10, giá trị của số hạng tiếp theo được thêm vào chuỗi tại ô B11, và trị số hiện hành của chuỗi ở trong ô C11 và được chép sang sang ô B6. Hình 7.4 trình bày kết quả của việc gán cho x = 8 và n = 1 rồi tính xấp xỉ bảng tính 14 lần xấp xỉ.

Bảng tính hoạt động bằng cách tạo ra 3 vòng tham chiếu: giữa các ô A10 và A11, giữa B10 và B11 và giữa C10 và C11. Các công thức trong các ô A10:C10 sẽ cất giữ các giá trị hiện hành của công thức, còn các công thức trong các ô A11:C11 sẽ dùng trị số đó để tính số xấp xỉ mới, số hạng mới và tổng mới. Hàm IF trong ô A11:C11 khởi động tính toán bất cứ lúc nào mà INIT(B8) là TRUE.

Để tính trị số mới ứng với lần khởi động này: hãy thay đổi x và n, đổi B8 thành True, nhấn F9, đổi B8 thành FALSE, lại nhấn F9 lần nữa cho đến khi mà tính xong Tổng.

	A	B	C
1	Hàm số Bessel	Phương pháp	Bảng tính
2		n	1
3		n!	1
4	X	8	
5	BESSELJ(X,N)	0.2346	
6	Jn(x)	0.2346	
7	So hang thu 1	4.00E+00	
8	Khoi dong	FALSE	
9	s	Terms	Tong
10	13	3.32E-05	0.2346
11	14	2.50E-06	0.2346

***Hình 7.4:** Tính chuỗi hàm Bessel khi sử dụng xấp xỉ của bảng tính.*

7.3. SỬ DỤNG VISUAL BASIC ĐỂ TÍNH TỔNG CHUỖI

Chúng ta cũng có thể viết một thủ tục Visual Basic của Excel để tính giá trị của phép tính tổng chuỗi. Thuật toán cũng gần tương tự như thuật toán mà chúng ta đã sử dụng để tính phép tính tổng chuỗi bằng một ngôn ngữ bậc cao như Basic, Pascal, C hoặc Fortran.

7.3.1. Các đa thức Legendre

Các đa thức Legendre ($P_n(x)$) thường gặp trong bài toán lực xuyên tâm (chẳng hạn như điện từ) được xác định theo các tọa độ cầu. Ví dụ, một lưỡng cực điện gồm hai điện tích có độ lớn $+q$ và $-q$, được định vị tại $+a$ và $-a$ trong một hệ tọa độ cầu. Điện thế (ϕ) do lưỡng cực này ở khoảng cách lớn (r >> a) xa lưỡng cực đã được mô tả bằng một đa thức Legendre:

$$\Phi = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon}\frac{P_1(\cos(\theta))}{r^2}$$

Ở đây ε là hằng số điện môi không gian tự do, r và θ là những tọa độ trong một hệ tọa độ cực cầu. Những đa thức Legendre là các nghiệm của phương trình vi phân:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{d^2y}{dx^2} + n(n+1)y = 0 \text{ với } y = P_n(x).$$

Sự biểu diễn dạng chuỗi của những đa thức Legendre là:

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n/2}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2)!}x^{n-2s}$$

với hữu hạn các số hạng trong phép tính tổng.

Trong ví dụ dưới đây, chúng ta sẽ tạo một hàm Visual Basic để tính công thức chuỗi trên. Chúng ta cũng sẽ tính các giai thừa cho mỗi số hạng một cách chính xác hơn so với khi dùng một quan hệ hồi quy số hạng. Hãy thực hiện các thao tác sau đây:

1. Bắt đầu với một bảng module mới, đặt tên là *Functions*.

2. Gõ nội dung dưới đây:

```
Option Explicit
' Function to calculate Legendre Polynomials.
Funtion Legendre(dblX As Double, intN As Integer) As Variant
Dim intS As Integer ' The summation counter.
'Zero the summation variable.
Legendre = 0
```

```
'Loop over the number of terms needed to calculate the sum.
For intS = 0 to intN/2
Legendre = Legendre + (((-1) ^ intS) * Fact(2 * intN - 2 * intS) * dblX ^ (intN-2*intS))/ (2^intN Fact(intS) Fact(intN-intS) * Fact(intN-2*intS))
Next intS
End Function
' Function to calculate the factorial of the argument.
Function Fact(intM As Integer) As Double
Dim intCtr As Integer
' Innitialize the product.
Fact = 1
' Loop over the terms, multi[lying out each.
For intCtr = 1 To intM
    Fact = Fact * intCtr
Next intCtr
End Function
' A Short Sub to use while testing
Sub test1
Dim intN As Integer
Dim dblX As Double
' Pick some test values
intN = 3
dblX = 0.3
' Print the values and the results in the debug window.
Debug.Print dblX, intN, Legemdre(dblX, intN),0.5 * ( 5* dblX ^ 3 - 3 * dblX )
Stop
End Sub
```

Xin bạn đọc lưu ý rằng trong module trên có 3 thủ tục:

- Một thủ tục tính toán đa thức Legendre.
- Một thủ tục tính giai thừa.
- Một thủ tục tính kiểm tra nhỏ để dùng trong lúc sửa lỗi chương trình. Thủ tục này cần thiết bởi vì các lỗi cú pháp sẽ không được phát hiện trong bảng tính khi chúng thực

hiện các hàm được gọi, chúng chỉ tạo ra các giá trị sai. Nhờ việc thử kiểm tra ngay trong cùng module với hàm số mà chúng ta sẽ có thể phát hiện sai sót cú pháp. Thủ tục này viết các giá trị của x, n, Legendre(x,n) và giá trị giải tích cho n = 2.

Trong trường hợp ở đây, các chuỗi có hữu hạn số hạng, với giới hạn trên cố định là n/2. Như vậy chúng ta sẽ biết bao nhiêu số hạng được tính toán để đạt được trị số chính xác đủ mức cần thiết. Đối với các chuỗi mà có vô số số hạng, chúng ta cần phải quyết định khi nào thì dừng việc cho thêm số hạng vào. Bạn có thể tự chọn số lượng số hạng cố định sao cho các thủ tục đưa ra được kết quả chính xác hơn mức của các đối số mà bạn quan tâm, giống như cách mà bạn đã làm đối với hàm Bessel. Một cách khác là bạn có thể đặt vài biến lôgic trong hàm số nhằm theo dõi kích cỡ của mỗi số hạng khi nó được thêm vào và sẽ can thiệp chấm dứt tính toán khi mà kích cỡ đó đã quá nhỏ đến mức có thể bỏ qua được.

Bây giờ, chúng ta hãy tạo một bảng tính để gọi hàm với một vài giá trị của *n* và *x*. Để dễ so sánh, sau đây cho sẵn những nghiệm giải tích cho sáu đa thức Legendre đầu tiên:

P0(x) = 1

P1(x) = x

P2(x) = (1/2)(3×2 - 1)

P3(x) = (1/2)(5×3 -3x)

P4(x) = (1/8)(35×4 - 30×2 + 3)

P5(x) = (1/8)(63×5 - 70×3 +15x)

Chúng ta sẽ dùng Excel để tính cũng những nghiệm này và so sánh chúng với những kết quả từ hàm của Visual Basic.

Trước tiên đưa vào một số giá trị *x* và *n* để tính toán.

1. Chọn lệnh *New* trên bảng chọn *File* và tạo một bảng tính mới đặt tên là hình 7.5.
2. Gõ các đa thức Legendre: **Hàm Visual Basic trong ô A1.**
3. Gõ **n** trong ô A3.
4. Trong các ô B3:G3, gõ các số nguyên từ **0** đến **5**.
5. Đặt tên các ô B3:G3 là N.
6. Gõ **x** trong ô A4.
7. Trong ô B4, gõ 0.3 và sao chép nó sang các ô C4:G4.

Tiếp theo, đưa những tên gọi vào hàm Visual Basic. Cách đơn giản nhất để đảm bảo rằng chúng ta làm đúng là dùng lệnh *Funtion Wizard* và chọn hàm này trong mục *User Defined* của hộp thoại. Sau nghiệm của hàm Visual Basic, đưa vào những nghiệm giải tích đã trình bày ở phần trên.

8. Gõ **Pn(x)** trong ô A5 rồi căn lề phải.

9. Trong ô B5, gõ (hoặc đưa vào bằng lệnh *Function Wizard*).

= **Legendre(B4,B3)** và sao chép nó sang các ô C5:G5.

10. Gõ **Giải tích** trong ô A6 rồi căn lề phải.

11. Đưa các đề mục sau vào những ô B6:G6

B6: **1** C6: = **C4**

D6: = **0.5*(3*D4^2-1)** E6: = **0.5*(5*x^3-3*x)**

F6: = **0.125*(35*F4^4-30*F4^2+3)** G6:=**0.125*(63*G4^5- 0*G4^3+15*G4)**

Như chúng ta có thể thấy trong hình 7.5, những giá trị nghiệm giải tích và các giá trị nghiệm hàm Visual Basic là tương xứng với nhau.

Bây giờ chúng ta sẽ lập ra một bảng các giá trị như đã trình bày ở phần cuối của hình 7.5 và vẽ đồ thị các kết quả. Đầu tiên đưa vào một miền giá trị của *x*.

1. Gõ **0** vào trong ô A8 và 0.3 vào trong ô A9.

2. Chọn các ô A8:A9, bôi đen phần dữ liệu cần xử lý và kéo nó xuống ô A30. Thay đổi giá trị *x* đầu tiên với một số rất nhỏ nhưng khác không, vì hàm không xác định tại $x = 0$. Sao chép tham chiếu hàm đến hàm Visual Basic trong phần chính của bảng.

3. Thay đổi ô A8 thành **0.001**.

4. Gõ = **Legendre($A8,B$3)** trong ô B8.

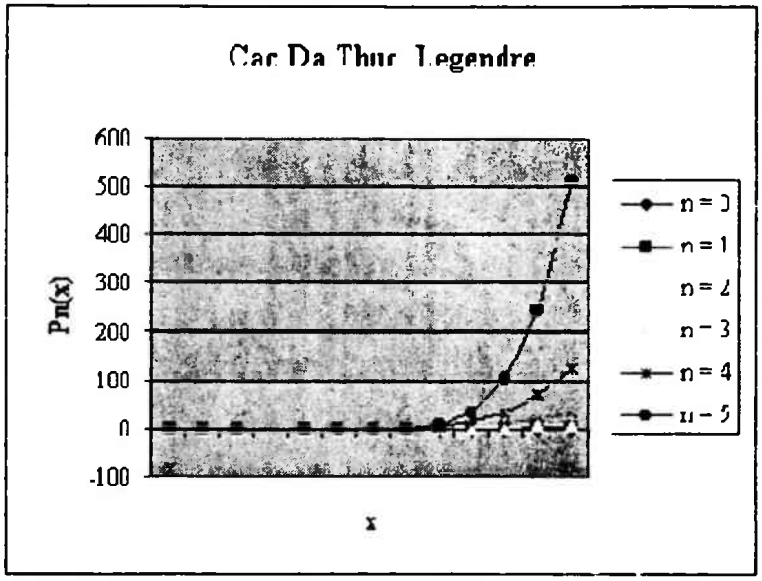
	A	B	C	D	E	F	G
1	CÁC ĐA THỨC LEGENDRE : HÀM VISUAL BASIC						
2							
3	n	0	1	2	3	4	5
4	x	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
5	Pn(x)	1	0.3	-0.365	-0.3825	0.07294	0.34539
6	Giai Tich	1	0.3	-0.365	-0.3825	0.07294	0.34539
7							
8	0.001	1	0.001	-0.5	-0.0015	0.37496	0.00188
9	0.3	1	0.3	-0.365	-0.3825	0.07294	0.34539
10	0.6	1	0.6	0.04	-0.36	-0.408	-0.1526
11	0.9	1	0.9	0.715	0.4725	0.2079	-0.0411
12	1.2	1	1.2	1.66	2.52	4.047	6.72552
13	1.5	1	1.5	2.875	6.1875	14.0859	33.082
14	1.8	1	1.8	4.36	11.88	34.152	101.149
15	2.1	1	2.1	6.115	20.0025	68.9229	244.527
16	2.4	1	2.4	8.14	30.96	123.927	510.597

Hình 7.5: *Tính các đa thức Legendre bằng một chương trình Macro.*

5. Sao chép ô B8 sang các ô B8:G30 trước tiên bằng cách sao chép nó xuống cột B tới B30, sau đó sao chép cột B tới các cột C đến G.

6. Tính toán vẫn đang ở dạng Manual, hãy nhấn F9 để tính toán lại bảng tính.

Bây giờ bảng tính giống như hình 7.5. Bạn có thể vẽ đồ thị như hình 7.6



Hình 7.6: *Sáu bậc đầu tiên của đa thức Legendre.*

Chương 8

PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN

Trong chương này, chúng ta sẽ tính các đạo hàm bằng số của dữ liệu và của các hàm số. Đặc biệt, chúng ta sẽ xem xét phương pháp bảng tính để tính các sai phân tiến, sai phân sai phân lùi và sai phân giữa của dữ liệu bảng tính. Chúng ta sẽ nghiên cứu một số vấn đề trong khi tính toán các đạo hàm bằng số, đó là sự rút ngắn, sự làm tròn, và sự tăng sai số do việc tính sai phân.

Chúng ta cũng sẽ tính tích phân bằng số của các hàm và các dữ liệu trên bảng tính với một hàm Macro. Một vài phương pháp lấy tích phân bằng số chuẩn mà thường được áp dụng bình thường với một ngôn ngữ máy tính bậc cao cũng sẽ được dùng trên bảng tính ở đây. Các phương pháp này bao gồm: quy tắc hình chữ nhật, quy tắc hình thang, phép lấy tích phân Romberg, các quy tắc của Simson và phép cầu phương Gauss.

Nếu bạn đọc nào quan tâm đến cơ sở toán học của các phương pháp này, xin hãy tham khảo một cuốn sách về các phương pháp số. Hầu hết các phương pháp lấy sai phân, tích phân có thể được làm thích ứng với khuôn dạng bảng tính và chỉ gặp có một chút khó khăn mà thôi.

Các phép tính vi phân và tính tích phân thường được thực hiện dựa vào các phương trình giải tích. Tuy nhiên, nếu một hàm số chỉ tồn tại dưới dạng một tập hợp các dữ liệu rời rạc thì chúng ta phải sử dụng phương pháp lấy sai phân và lấy tích phân bằng số để tính đạo hàm và tích phân.

Chúng ta có thể ứng dụng Excel để tính đạo hàm cũng như để lấy tích phân bằng số của dữ liệu và các hàm. Các phương pháp này thường dùng với một chương trình máy tính ngắn, ví dụ được viết trên PASCAL hoặc C, nhưng chúng ta vẫn có thể dễ dàng áp dụng chúng với dữ liệu trong một bảng tính. Trong một bảng tính Excel, chúng ta cũng còn một lợi thế là mọi người đều có thể thấy các kết quả trung gian, mà thường thì nếu tính bằng một chương trình PASCAL chẳng hạn sẽ khó có thể theo dõi quá trình tính toán hơn.

8.1. TÍNH CÁC ĐẠO HÀM BẰNG SỐ

Có thể thực hiện phép lấy vi phân dữ liệu rời rạc (hoặc các hàm số khó giải) bằng các công thức sai phân. Các công thức sai phân giữa là chính xác nhất và thông dụng nhất. Các công thức sai phân tiến hoặc sai phân sai phân lùi thường chỉ được sử dụng trong các tình huống đặc biệt.

8.1.1. Các dạng công thức sai phân

Các công thức "sai phân tiến", "sai phân lùi" và "sai phân giữa" có thể cho chúng ta dự đoán giá trị đạo hàm tại một điểm dựa trên các tập dữ liệu khác nhau. "Sai phân tiến" sử dụng các điểm dữ liệu mà theo sau điểm đang được nói đến để dự đoán đạo hàm tại điểm đó. "Sai phân lùi" cũng tương tự như vậy, chỉ có điều chúng dùng các điểm ở trước điểm đó. Các "sai phân giữa" sử dụng một số lượng các điểm dữ liệu như nhau trước và sau điểm đó. Do vậy, "sai phân giữa" cho dự đoán cân bằng hơn về đạo hàm của dữ liệu tương đối liên tục.

Các sai phân tiến và sai phân lùi thường tỏ ra hữu ích tại các giới hạn của tập dữ liệu, nơi mà sai phân giữa không thể tính được. Các sai phân tiến và sai phân lùi cũng thường chính xác hơn trong dữ liệu có sự thay đổi đột ngột, vì chúng làm giảm sự tác động của sự thay đổi trên đạo hàm đối với các điểm ở gần sự thay đổi đó.

Chúng ta sẽ sử dụng các sai phân lùi khi tính gần đúng một thay đổi đột ngột và sử dụng các sai phân tiến sau khi chúng ta đã vượt qua sự thay đổi đó.

Phương trình đối với đạo hàm bậc nhất đều giống nhau khi chúng ta xét các sai phân tiến, sai phân lùi và sai phân giữa. Điểm khác nhau giữa chúng là giá trị của *x* mà tại đó đang dự đoán đạo hàm. Ví dụ, đạo hàm bậc nhất được tính gần đúng bằng phương trình này:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{h}$$

Trong đó: $h = x_2 - x_1$ là khoảng cách giữa các điểm dữ liệu;

(x_1, y_1) và (x_2, y_2) là các cặp dữ liệu x-y liên tiếp.

Kiểu sai phân được tính phụ thuộc vào giá trị nào sẽ được tính gần đúng:

- Nếu phương trình này là phép tính gần đúng đối với đạo hàm tại x_2 thì nó là sai phân sai phân lùi.

- Nếu phương trình là phép tính gần đúng đối với đạo hàm tại x_1 thì nó là sai phân tiến.

- Nếu phương trình là phép tính gần đúng đối với đạo hàm tại tâm của khoảng giữa x_1 và x_2 thì nó là sai phân giữa.

Dưới đây là các công thức sai phân cho vài đạo hàm bậc nhất và bậc ($O(h^n)$) của sai số liên kết với chúng. Tất cả các công thức đều tính đạo hàm tại điểm x_0.

Có thể biến đổi các công thức sai phân tiến thành các sai phân lùi bằng cách thay đổi điểm mà tại đó tính đạo hàm sang chiều ngược lại của công thức.

Bậc của sai số là luỹ thừa (n) của khoảng cách giữa các điểm dữ liệu (h) với các điểm dữ liệu mà sai số cân xứng với nó. Áp dụng bậc này để kiểm tra sự chính xác tương đối của các công thức. Luỹ thừa của h càng cao, công thức càng chính xác.

Đạo hàm tại x_0	Sai số	Kiểu sai phân
$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{h}$	O(h)	Tiến, sai phân lùi tại x_1
$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_{-1}}{h}$	$O(h^2)$	Giữa
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$	O(h)	Tiến, sai phân lùi tại x_2
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}$	$O(h^2)$	Giữa
$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3}$	O(h)	Tiến, sai phân lùi tại x_3
$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3}$	$O(h^2)$	Giữa

8.1.2. Sai số trong công thức sai phân

Các công thức sai phân có thể có các sai số lược bớt và sai số làm tròn. Bậc của sai số đã biểu diễn bằng các phương trình trên là với sai số lược bớt. Sai số lược bớt do việc dự đoán đạo hàm với một vài điểm dữ liệu rời rạc chứ không phải là từ một hàm liên tục. Vì sai số lược bớt tương ứng với khoảng cách giữa các điểm dữ liệu (h) nên dường như là nếu chúng ta giảm h, chúng ta sẽ làm giảm sai số. Tuy nhiên, điều này chỉ đúng với điểm dữ liệu mà ở đó sai số làm tròn trở nên đáng kể.

Sai số làm tròn do thực tế là một máy tính lưu trữ các số với số lượng các chữ số cố định. Khi thực hiện phép trừ với hai số gần bằng nhau, hiệu số có thể quá nhỏ. Chia hiệu số này thành một trong những số ban đầu và xem có bao nhiêu chữ số ở bên trái số thập phân. Nếu số lượng các chữ số có thể so sánh được với số lượng các chữ số theo số của máy tính thì hiệu đó sẽ vô nghĩa. Ví dụ, nếu thực hiện phép trừ với hai số có các giá trị gần bằng 1 và hiệu số dựa vào bậc của 1×10^{-14} trên máy với độ chính xác 14 chữ số thì hiệu số vô nghĩa. Do đó, sai số làm tròn tăng với việc giảm h. Điều này có nghĩa là chúng ta cần cân nhắc sự cân đối giữa việc giảm h để giảm sai số lược bớt và tăng h để giảm sai số làm tròn. Giá trị tối ưu, giá trị khác 0 nào đó của h sẽ làm giảm đến mức tối thiểu sai số toàn phần.

8.1.3. Sử dụng công thức sai phân trong bảng tính

Các công thức sai phân trình bày ở trên đều tương đối đơn giản, do vậy, cách tốt nhất để áp dụng chúng cho dữ liệu là trong bảng tính, chứ không phải với một Macro. Trong bảng tính, chúng ta có thể để ý tới sự phân tán trong các sai phân để xem liệu sai số làm tròn đang tăng lên hay không.

8.1.3.1. Bài toán về sự rơi tự do

Có một thí nghiệm vật lý kinh điển đối với các sinh viên năm thứ nhất của các trường đại học kỹ thuật là về chuyển động nhanh dần đều trong sự rơi tự do. Thí nghiệm được thực hiện bằng cách thả một quả cầu kim loại dọc theo một mảnh giấy nến. Dòng điện xoay chiều điện áp cao được truyền qua quả cầu và sợi dây phía sau mảnh giấy. Cứ mỗi nửa chu kỳ cung cấp điện năng, một tia lửa phát ra giữa quả cầu và sợi dây. Tia lửa đốt cháy một lỗ nhỏ trên giấy, đánh dấu vị trí của quả cầu khi nó rơi. Biết tần suất cung cấp điện năng và khoảng cách giữa các lỗ trên tờ giấy, chúng ta có thể tính được vận tốc và gia tốc của quả cầu.

Dữ liệu dưới đây rút ra từ thí nghiệm về sự rơi tự do nói trên. Các tia lửa phát ra với tốc độ 60/giây, đánh dấu các lỗ trên giấy cách nhau 1/60 giây. Để tính vận tốc, chúng ta cần tìm đạo hàm bậc nhất của dữ liệu này. Để tìm gia tốc do trọng lực, chúng ta cần tìm đạo hàm bậc hai, nó sẽ là một hằng số.

Các giá trị thể hiện khoảng cách của các lỗ từ một điểm khởi đầu tuỳ ý (tính theo cm):

0,00	13,05	31,30
1,55	16.15	35,75
3,25	19,50	40,55
5,30	23,15	45,55
7,55	27,05	50,80

Đưa vào một số đề mục và thời gian giữa các tia lửa mà tạo ra các lỗ trên giấy. Sau đây là các thao tác cần thực hiện trên bảng tính:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ.
2. Gõ **Free Fall** trong ô A1.
3. Trong ô C1, gõ **DT** = và căn phải.
4. Gõ **=1/60** trong ô D1.
5. Đặt tên cho ô D1 là **DT**.
6. Gõ **sec.** trong ô E1.

Gán nhãn cho các tiêu đề đầu cột.

7. Trong các ô A3:D3, gõ các nhãn **t**, **x**, **dx/dt**, và **d2x/ dt2** và căn phải.
8. Trong các ô A4:D4, gõ các nhãn **(s)**, **(cm)**, **(cm/s)**, và **(cm/s^2)**, và căn phải.

Tính thời gian trong cột A. Chú ý là thời gian 0 trong bảng này không ngụ ý vận tốc bằng 0 tại điểm dữ liệu đầu tiên. Trong thí nghiệm, người ta đã bỏ qua vài điểm dữ liệu đầu tiên vì chúng không đủ rõ ràng để biết được một cách chính xác. Đưa các dữ liệu về sự rơi tự do được trình bày ở trên vào cột B.

9. Gõ **0** trong ô A5.

10. Trong ô A6, gõ = **A5+DT** và sao chép nó sang các ô A7:A20.

11. Trong các ô B5:B20, gõ các dữ liệu về sự rơi tự do đã liệt kê ở trên.

Trong cột C, tính đạo hàm bậc nhất của dữ liệu sử dụng sai phân giữa được định tâm trên khoảng cách giữa hai điểm. Trong cột D, tính đạo hàm bậc hai sử dụng sai phân giữa được định tâm trên mỗi điểm. Tính giá trị trung bình của gia tốc đã tìm ra trong cột D.

12. Trong ô C5, gõ = **(B6-B5)/DT** và sao chép nó sang các ô C6:C19.

13. Trong ô D5, gõ = **(B7-2*B6+B5)/($DT^2)** và sao chép sang các ô D6:D18.

14. Trong ô C2, gõ **Ave.** = và căn phải.

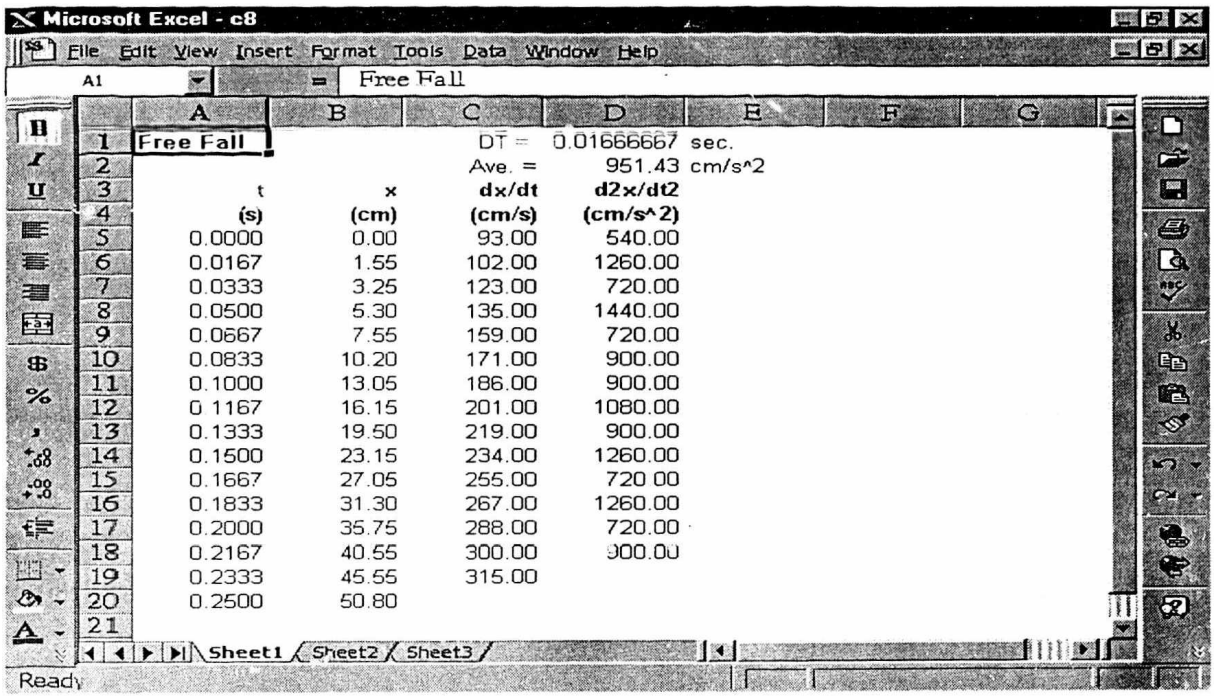
15. Gõ = **AVERAGE(D5:D18)** trong ô D2.

16. Gõ **cm/s^2** trong ô E2.

17. Định dạng các ô B5:D20 và D2 là 0.00, và các ô A5:A20 là 0.0000.

18. Chọn lệnh *Display* trên bảng chọn *Options* và tắt các đường khung viền của bảng tính.

Bây giờ bảng tính của chúng ta sẽ giống như hình 8.1, không có kết quả hồi quy trong các ô F5:G15, mà sẽ được thảo luận sau. Cột C chứa vận tốc của quả cầu mà vận tốc đó được vẽ đồ thị trong hình 8.2. Rõ ràng đây là chuyển động nhanh dần đều, với một đường cong tương đối trơn.

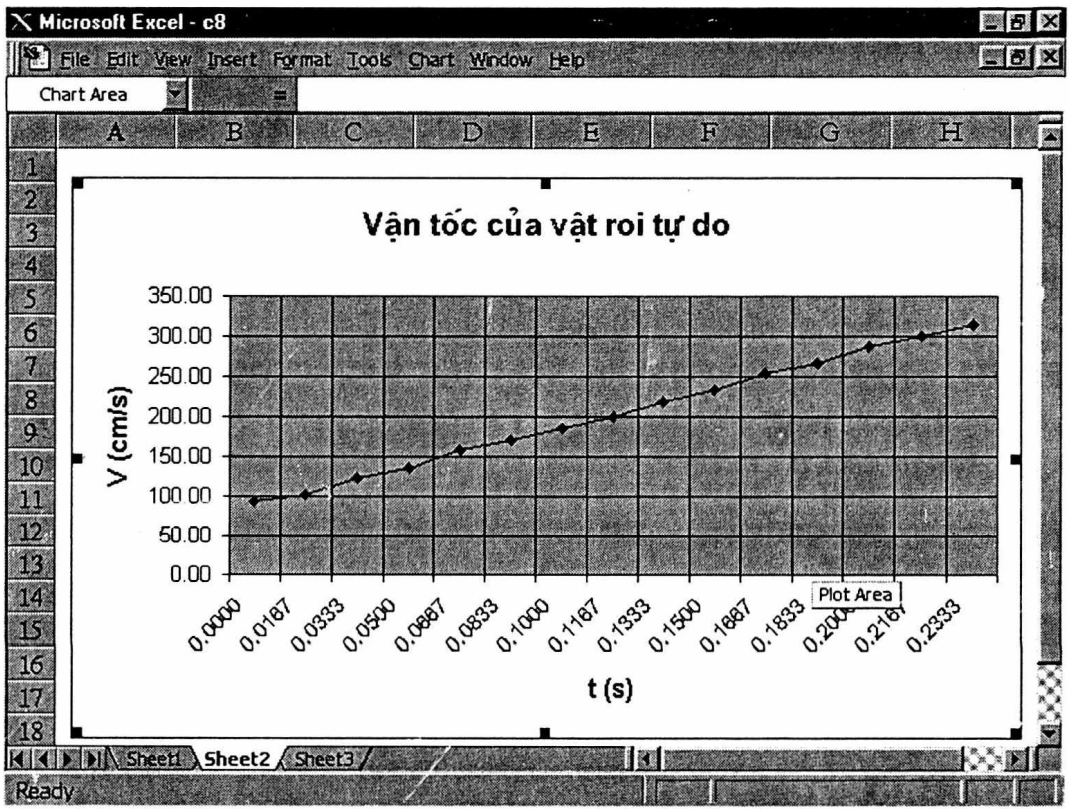


	A	B	C	D	E
1	Free Fall		DT =	0.01666667	sec.
2			Ave. =	951.43	cm/s^2
3	t	x	dx/dt	d2x/dt2	
4	(s)	(cm)	(cm/s)	(cm/s^2)	
5	0.0000	0.00	93.00	540.00	
6	0.0167	1.55	102.00	1260.00	
7	0.0333	3.25	123.00	720.00	
8	0.0500	5.30	135.00	1440.00	
9	0.0667	7.55	159.00	720.00	
10	0.0833	10.20	171.00	900.00	
11	0.1000	13.05	186.00	900.00	
12	0.1167	16.15	201.00	1080.00	
13	0.1333	19.50	219.00	900.00	
14	0.1500	23.15	234.00	1260.00	
15	0.1667	27.05	255.00	720.00	
16	0.1833	31.30	267.00	1260.00	
17	0.2000	35.75	288.00	720.00	
18	0.2167	40.55	300.00	900.00	
19	0.2333	45.55	315.00		
20	0.2500	50.80			
21					

Hình 8.1: Chuyển động nhanh dần đều: lấy vi phân bằng số.

Vì vật đang rơi tự do nên gia tốc trong cột D sẽ là hằng số và bằng gia tốc do trọng lực (980 cm/s^2). Như chúng ta có thể thấy trong bảng tính và trong đồ thị ở hình 8.2, có một lượng phân tán rất lớn trong dữ liệu, mặc dù số trung bình cho ta một giá trị thích hợp (951,43 cm/s^2).

Trong phép tính gia tốc, sai số thực nghiệm ngẫu nhiên tăng lên mỗi lần chúng ta lấy đạo hàm. Chúng ta đang tính sai phân của dữ liệu có chứa sai số ngẫu nhiên. Khi chúng ta trừ hai số có độ lớn gần bằng nhau, kết quả sẽ nhỏ hơn so với các số ban đầu. Độ lớn của sai số không bị phép trừ làm giảm vì nó là ngẫu nhiên. Kết quả là chúng ta có độ lớn của sai số như nhau trong các số nhỏ hơn, mà tạo ra sự tăng phần trăm sai số theo mỗi phép trừ. Để tìm được đạo hàm bậc hai, chúng ta trừ các hiệu số, và điều này thậm chí còn làm tăng độ lớn tương đối của sai số hơn nữa.



Hình 8.2: *Chuyển động nhanh dần đều: vận tốc của vật rơi tự do.*

Chúng ta thường phải làm trơn dữ liệu thực nghiệm trước khi thực hiện một phép tính gần đúng hợp lý của đạo hàm. Cách tốt nhất để làm trơn dữ liệu là làm phù hợp một đường cong đã biết với dữ liệu và lấy đạo hàm của đường cong đó. Nhưng hãy thận trọng đừng làm trơn bất kỳ các chi tiết quan trọng nào. Chúng ta biết rằng đây sẽ là chuyển động nhanh dần đều, và dữ liệu vận tốc cho thấy điều đó, cho nên chúng ta hãy làm phù hợp một đường thẳng với dữ liệu vận tốc. Độ dốc của đường thẳng đó bằng đạo hàm của vận tốc, hoặc gia tốc.

19. Gõ *Regression Output* trong ô F5.

20. Chọn các ô G8:H12, và gõ công thức:

= LINEST(C5:C19, A5:A19, TRUE, TRUE)

21. Đây là một công thức dãy, do vậy hãy đưa nó vào trong toàn bộ phạm vi bằng cách ấn Ctrl-Shift-Enter khi chúng ta kết thúc việc gõ máy.

Thêm một số nhãn vào kết quả hồi quy và đưa vào tham chiếu vùng để chuyển các phần của kết quả hồi quy tới vị trí dễ nhận biết hơn. Chúng ta không thể chuyển các giá trị dễ dàng, vì chúng là một phần của bảng, và chúng ta không thể thay đổi hay chuyển đi một phần của bảng. Ẩn cột H sau khi chúng ta đã hiển thị kết quả hồi quy trong cột G.

22. Gõ **Offset** trong ô F6.

23. Gõ **=H8** trong ô G6.

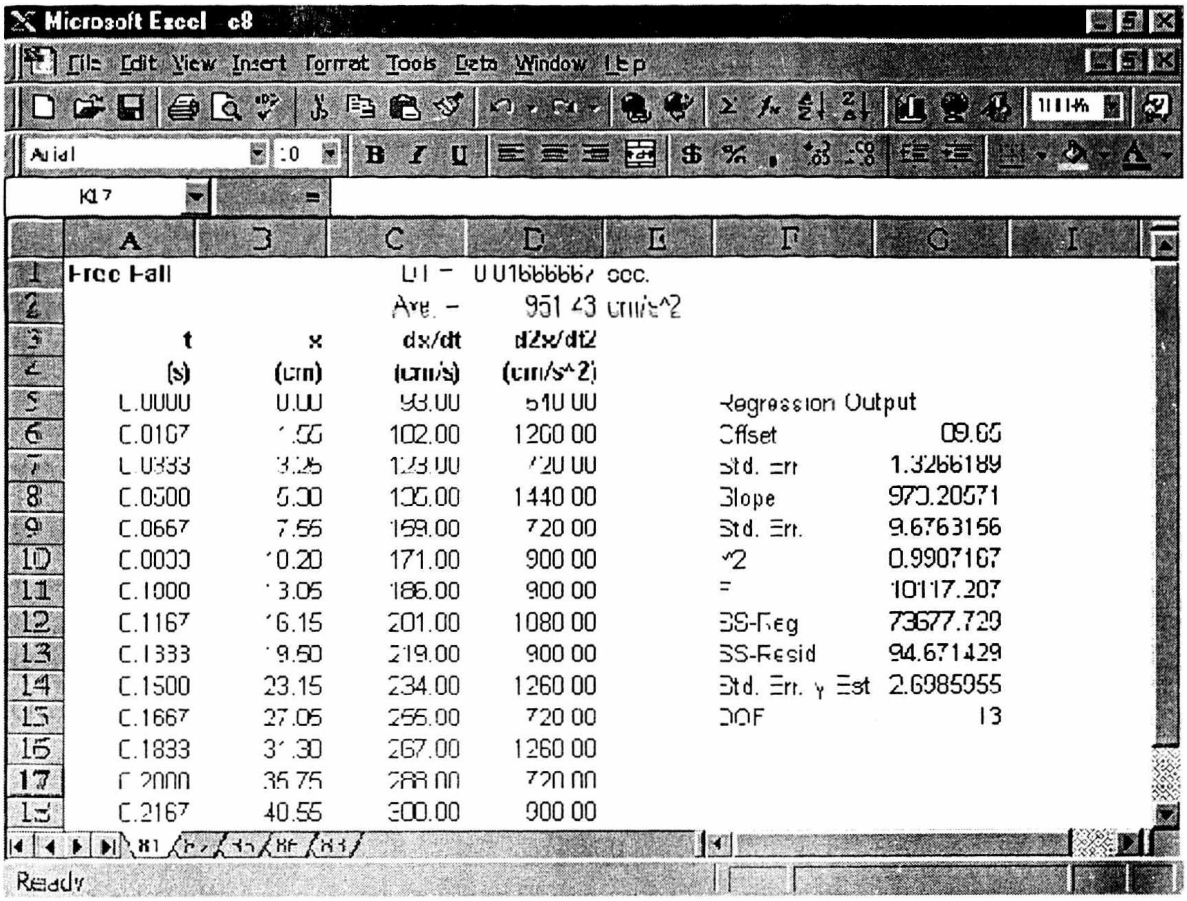
24. Gõ **Std. Err** trong ô F7.

25. Gõ **=H9** trong ô G7.

26. Gõ **Slope** trong ô F8.

27. Gõ **Std. Err.** trong ô F9.

28. Gõ **r^2** trong ô F10.



Hình 8.3

29. Gõ **F** trong ô F11.

30. Gõ **SS-Reg** trong ô F12.

31. Gõ **SS-Resid** trong ô F13.

32. Gõ = **H12** trong ô G13.

33. Gõ **Std. Err. y Est.** trong ô F14.

34. Gõ = **H10** trong ô G14.

35. Gõ **DOF** trong ô F15.

36. Gõ =**H11** trong ô G15.

37. Thay đổi độ rộng của cột H là **0** để ẩn cột này.

38. Lưu bảng tính.

Độ dốc của đường thẳng đi qua dữ liệu vận tốc (973 cm/s^2) ở trong ô G8, và nó khá sát với giá trị đúng bằng 980 cm/s^2.

8.2. LẤY TÍCH PHÂN DỮ LIỆU RỜI RẠC

Việc lấy tích phân dữ liệu rời rạc đòi hỏi phải làm phù hợp hàm số mà gần giống một hàm thực, và tích phân của nó được biết đến là các khoảng giữa các điểm dữ liệu. Vì vậy, chúng ta chỉ cần cộng một trong các tích phân thành phần để có tích phân tổng của đường cong.

8.2.1. Các kiểu công thức tích phân

Các công thức tính tích phân phổ biến nhất đối với dữ liệu rời rạc là quy tắc hình chữ nhật, công thức hình thang, phép lấy tích phân Romberg, các quy tắc của Simson, và các phép cầu phương Gauss. Mỗi công thức này lại chính xác hơn công thức nêu tên trước nó, bởi vì nó đặt một đường cong phức tạp hơn qua dữ liệu để làm gần đúng hàm giữa các điểm dữ liệu.

8.2.1.1. Quy tắc hình chữ nhật

Quy tắc hình chữ nhật điền vào khoảng trống giữa hai điểm dữ liệu một hình chữ nhật có chiều cao bằng giá trị của hàm số tại một trong các điểm dữ liệu, và chiều rộng của nó bằng chiều rộng của khoảng cách. Quy tắc này có vẻ như là phép tính gần đúng rất kém, nhưng nó thực hiện khá tốt. Nó cũng rất dễ thực hiện vì chúng ta chỉ cần nhân từng giá trị dữ liệu với khoảng cách của các giá trị dữ liệu và sau đó cộng lại với nhau. Quy tắc này được viết như sau:

$$I = \sum_{n=1}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

Trong đó I là giá trị của tích phân.

8.2.1.2. Công thức hình thang

Quy tắc hình thang đặt một đường thẳng giữa hai điểm dữ liệu. Diện tích của hình thang được tạo lập bằng số trung bình của hai giá trị dữ liệu nhân với khoảng cách của chúng:

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

8.2.1.3. Phép lấy tích phân Romberg

Có thể phát triển quy tắc hình thang bằng cách sử dụng phép lấy tích phân Romberg. Phép lấy tích phân này kết hợp hai sự ước tính tích phân để có kết quả ước tính tích phân chính xác hơn. Tích phân thứ nhất sử dụng mỗi (mọi) giá trị, và tích phân thứ hai sử dụng mỗi (mọi) giá trị khác:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

$$I_2 = \sum_{i=1,3,5...}^{n-1} \frac{(y_i + y_{i+2})}{2}(x_{i+2} - x_i)$$

$$I = I_1 + \frac{1}{3}(I_1 - I_2)$$

8.2.1.4. Các quy tắc của Simson

Quy tắc 1/3 của Simson đặt một phương trình cầu phương (một đoạn của một parabol) qua 3 giá trị dữ liệu và sau đó tính diện tích. Quy tắc 3/8 của Simson đặt một phương trình bậc ba qua 4 giá trị dữ liệu. Chú ý là các quy tắc của Simson đòi hỏi các điểm dữ liệu cách đều nhau.

$$I = \sum_{i=1,3,5...}^{n-2} \frac{1}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})h$$

$$I = \sum_{i=1,4,7...}^{n-3} \frac{3}{8}(y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3})h$$

Ở đây h là khoảng cách không đổi giữa các điểm dữ liệu

8.2.1.5. Phép cầu phương Gauss

Nếu chúng ta đang tính tích phân một công thức chứ không phải là một tập điểm dữ liệu, chúng ta có thể sử dụng phép cầu phương Gauss. Đây là một công thức tính tích phân, mà trong đó giá trị của một tích phân được tìm bằng cách thêm vào giá trị của hàm tại một vài điểm riêng biệt. Số lượng các điểm cần được xác định theo bậc của đường

cong mà chúng ta muốn làm phù hợp giữa các giới hạn. Với đường cong bậc ba ta có thể tính toán chỉ với hai giá trị của hàm số.

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = f(-05773) + f(+0,5773)$$

Để sử dụng công thức này, với một hàm riêng và các giới hạn riêng của phép lấy tích phân, chúng ta phải đổi các biến số để đưa tích phân của chúng ta về dạng trên. (xem các tài liệu tham khảo về các công thức bậc cao hơn ở cuối chương này).

8.2.1.6. Tích phân phi chính

Thông thường, chúng ta phải tính tích phân các hàm số mà nó có một hoặc cả hai giới hạn vô hạn, hoặc hàm số đó trở nên không xác định ở nơi nào đó giữa các giới hạn. Ví dụ, nhiều hàm đặc biệt trong vật lý và kỹ thuật (hàm Gamma, hàm sai số...) được xác định bằng các tích phân mà chúng có một số vô hạn giống như một trong các giới hạn. Chúng ta có thể giải bài toán này theo vài cách.

Phương pháp đơn giản nhất là biến đổi các biến số của hàm sao cho hàm số không còn có giới hạn trên vô hạn. Ví dụ, xét hàm số sau:

$$I = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

Ta tách nó thành hai tích phân

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx$$

Sau đó biến đổi các biến số của tích phân thứ hai với $y = 1/x$:

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^4} dy$$

Bây giờ chúng ta đã có hai tích phân với các giới hạn hữu tỷ. Giá trị của hàm tại giới hạn dưới là không xác định (0/0), nhưng nếu giới hạn dưới là 0 thì sẽ không có vấn đề gì.

Nhiều phép tính có các giới hạn vô hạn hội tụ nhanh tới 0 khi đối số của hàm tăng dần tới vô cùng. Trên thực tế, chúng phải hội tụ nhanh để giá trị của hàm là hữu hạn. Trong trường hợp này, chúng ta có thể tiếp tục tính tích phân hàm cho tới khi giá trị của số hạng được thêm vào nhỏ hơn nhiều so với giá trị của tích phân, và khi đó chúng ta rút ngắn phép lấy tích phân tại điểm đó.

Hàm trong tích phân thứ hai ở phương trình trên không xác định tại giới hạn dưới. Chúng ta có thể biết được giới hạn của hàm tại giá trị này là 0, vì vậy chúng ta có thể vận dụng thực tế đó để tính tích phân. Nhưng nếu chúng ta không biết giá trị của hàm tại giới hạn này, hoặc nếu nó vô hạn như trong công thức:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

thì chúng ta cần thêm một số ε nhỏ cho giới hạn dưới và sau đó thực hiện lấy tích phân. Sau đó, chúng ta giảm độ lớn của ε cho đến khi giá trị của tích phân hội tụ (giả sử rằng nó hội tụ). Chú ý là điều này cũng đúng với cách mà chúng ta sẽ tính tích phân theo phép lấy tích phân.

8.2.2. Sử dụng các phương pháp lấy tích phân trong bảng tính

Các phương pháp lấy tích phân trong bảng tính đều tương đối dễ thực hiện. Mỗi ô tính giá trị của tích phân giữa hai điểm dữ liệu. Sau đó, ô cuối cùng sẽ cộng chúng lại.

8.2.2.1. Hàm Gamma

Hàm Gamma là một hàm đặc biệt trong khoa học và kỹ thuật. Thỉnh thoảng nó xuất hiện trong các bài toán vật lý, chẳng hạn như phép chuẩn hoá các hàm sóng Coulomb và phép tính xác suất trong cơ học thống kê. Chúng ta đã gặp hàm Gamma ở chương trước trong phần về sự biểu diễn dạng chuỗi của hàm Bessel ($J_n(x)$) đối với các trường hợp khi n không phải là một số nguyên. Khi n là một số nguyên thì hàm Gamma bằng một hàm giai thừa:

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Hàm Gamma được xác định bằng tích phân sau:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

mà tích phân này không có nghiệm giải tích. Hàm Gamma thường được liệt kê trong một bảng với các giá trị x khác nhau. Hình 8.4 là đồ thị của biểu thức dưới dấu tích phân của tích phân hàm Gamma. Lưu ý rằng nó tiến nhanh tới 0, do vậy chúng ta có thể rút ngắn tích phân ở giá trị t khoảng bằng 10, và tốt hơn là độ chính xác đến hàng nghìn.

Trong ví dụ tiếp theo, chúng ta sẽ tính hàm Gamma bằng cách thực hiện phép lấy tích phân trên bằng số. Chúng ta sẽ sử dụng tất cả các phương pháp lấy tích phân đã thảo luận từ các phần trước cho đến phần này. Giá trị của hàm Gamma tại $x = 1,5$ bằng $\pi/2$. Sử dụng giá trị x đó để chúng ta có thể so sánh các kết quả lấy tích phân với kết quả đúng. Sau đây là các thao tác cần thực hiện trên Excel:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ.
2. Đổi độ rộng cột A thành 11.
3. Gõ **Hàm số Gamma** trong ô A1.
4. Đưa giá trị vào và đặt tên giá trị để tính toán cho (x) và khoảng cách khung viền (DT).
5. Trong ô C1, gõ **x** = và căn phải.

6. Gõ **1.5** trong ô D1.

Đặt tên ô D1 là **X**.

7. Trong ô E1, gõ **=dt** và căn phải.

8. Gõ **0.1** trong ô F1.

Đặt tên cho ô F1 là **DT**.

9. Trong các ô B3:G3 gõ các nhãn **'True, Rect., Trap, Trap.2, Romberg,** và **Sim.1/3** và căn giữa.

10. Cộng các nội dung của từng cột để có tích phân tổng đối với mỗi phương pháp. Tính sai số trong mỗi phương pháp bằng cách so sánh tích phân đã tính với giá trị đúng ở ô B4. Ô F4 chứa công thức Romberg để kết hợp hai tích phân công thức hình thang.

11. Gõ **Tích phân** = trong ô A4 và căn phải.

12. Gõ **=SQRT(PI())/2** trong ô B4.

13. Trong ô C4, gõ **=SUM(C8:C102)** và sao chép sang các ô D4:E4.

14. Gõ **=D4+(D4-E4)** trong ô F4.

15. Gõ **=SUM(G8:G102)** trong ô G4.

16. Gõ **Sai số** = trong ô A5 và căn phải.

17. Trong ô C5, gõ **=(C4-$B$4)/$B$4** và sao chép sang các ô D5:G5.

Trong cột B, tính các giá trị của hàm cho mỗi trong 96 giá trị của *t* ở cột A.

18. Trong ô A7, gõ **t** và căn phải.

19. Trong ô B7, gõ **f(x,t)**, và căn phải.

20. Gõ **0** trong ô A8.

21. Trong ô A9, gõ **=A8+DT** và sao chép sang các ô A10:A103.

22. Định dạng các ô A8:A103 là 0.000.

23. Trong ô B8, gõ **=EXP(-A8)*A8^(X-1)** và sao chép sang các ô B9:B103.

Tính công thức hình chữ nhật.

24. Trong ô C8, gõ **=B8*DT** và sao chép sang các ô C9:C103.

Tính công thức hình thang hai lần, một lần với một khoảng cách và một lần với hai khoảng cách, khoảng cách kép). Cần có phép tính công thức hình thang thứ hai để tính công thức Romberg trong ô F4. Lưu ý là phép tính công thức hình thang thứ hai sử dụng hai điểm dữ liệu một lúc, do vậy chúng ta nên chú ý đến mọi công thức khác trong cột E để không tính chúng hai lần.

25. Trong ô D8, gõ **=DT*(B8+B9)/2** và sao chép sang các ô D9:D103.

26. Trong ô E8, gõ =**DT*(B8+B10)** và sao chép sang các ô E9:E103.

27. Trong các hàng xen kẽ ở cột E (E9, E11, E13,..., E103), hãy thay công thức bằng **0**.

Tính quy tắc 1/3 của Simson. Cũng như trước, chúng ta không chú ý đến mọi giá trị khác của công thức trong cột G.

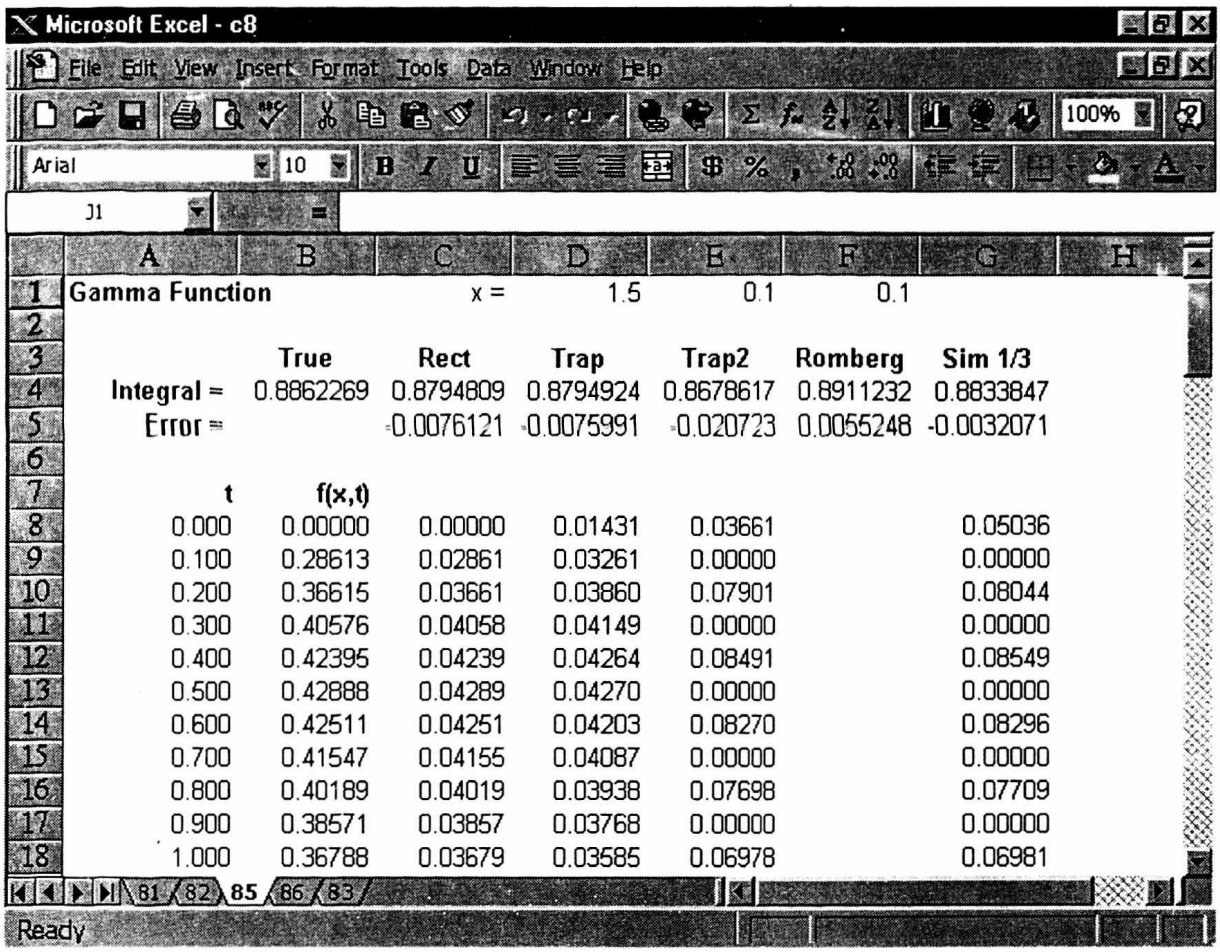
28. Trong ô G8, gõ =**DT*(B8+4*B9+B10)/3** và sao chép sang các ô G9:G103.

29. Trong các hàng xen kẽ ở cột G (G9, G11, G13,..., G103), thay công thức bằng **0**.

30. Dùng lệnh *Display* trên bảng chọn *Option* để tắt các đường khung viền.

31. Lưu bảng tính.

Lúc này bảng tính của chúng ta sẽ giống như hình 8.5. Giá trị đã tính theo quy tắc hình chữ nhật, công thức hình thang là gần như nhau. Phép lấy tích phân Romberg làm giảm sai số trong công thức hình thang xuống còn khoảng 50%, để một giá trị gần bằng giá trị đã tính theo quy tắc của Simson. Trong mỗi phép tính đó, miền giá trị được bao phủ bằng 96 điểm lưới cách đều nhau.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Gamma Function		x =	1.5	0.1	0.1		
2								
3		True	Rect	Trap	Trap2	Romberg	Sim 1/3	
4	Integral =	0.8862269	0.8794809	0.8794924	0.8678617	0.8911232	0.8833847	
5	Error =		-0.0076121	-0.0075991	-0.020723	0.0055248	-0.0032071	
6								
7	t	f(x,t)						
8	0.000	0.00000	0.00000	0.01431	0.03661		0.05036	
9	0.100	0.28613	0.02861	0.03261	0.00000		0.00000	
10	0.200	0.36615	0.03661	0.03860	0.07901		0.08044	
11	0.300	0.40576	0.04058	0.04149	0.00000		0.00000	
12	0.400	0.42395	0.04239	0.04264	0.08491		0.08549	
13	0.500	0.42888	0.04289	0.04270	0.00000		0.00000	
14	0.600	0.42511	0.04251	0.04203	0.08270		0.08296	
15	0.700	0.41547	0.04155	0.04087	0.00000		0.00000	
16	0.800	0.40189	0.04019	0.03938	0.07698		0.07709	
17	0.900	0.38571	0.03857	0.03768	0.00000		0.00000	
18	1.000	0.36788	0.03679	0.03585	0.06978		0.06981	

Hình 8.4

Chúng ta đã không sử dụng công thức cầu phương Gauss trong bảng tính này bởi vì nó chính xác hơn và cần ít các điểm lưới hơn. Chúng ta sẽ tính công thức đó mà chỉ sử dụng 15 điểm lưới thay vì sử dụng 96 điểm lưới. Thực ra, chúng ta sẽ dùng 43 điểm lưới, vì các phép cầu phương Gauss bậc ba tính hơn hai điểm lưới trong mỗi khoảng cách. Cách trình bày bảng tính này cũng giống như bảng tính trước. Để so sánh, ta tính công thức hình thang sử dụng cùng các điểm lưới như nhau.

Để sử dụng phép cầu phương Gauss, trước hết chúng ta phải đổi các biến số để tạo ra giới hạn của phép lấy tích phân -1 tới 1. Thực hiện điều này bằng phép thế sau:

$$t = \frac{(b-a)y + b + a}{2}$$

Trong đó *a* là giới hạn dưới, *b* là giới hạn trên.

Đưa phép thế này vào trong tích phân của hàm Gamma ở trên ta có:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-((b-a)y+b+a)^2} \left(\frac{(b-a)y + b + a}{2} \right)^{x-1} dy$$

Trong trường hợp này, chúng ta đang tính tích phân giữa mỗi cặp điểm lưới, cho nên các giới hạn trên và dưới của phép lấy tích phân đều bằng giá trị của *t* tại các điểm lưới đó. Lưu ý là phương pháp này chỉ có thể áp dụng đối với các trường hợp khi ta biết một hàm hiện, chứ không áp dụng đối với dữ liệu thực nghiệm.

Nhiều bảng tính tiếp theo cũng giống như ví dụ trước. Các bước sau đây bắt đầu với một bảng tính mới, nhưng tự chúng ta có thể bớt được một số công việc bằng cách sửa một bản sao thay vì phải bắt đầu từ đầu:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới (hoặc bản sao của bảng tính trước) mở rộng hết cỡ.
2. Đổi độ rộng cột A thành 11.
3. Gõ **Hàm số Gamma** trong ô A1.
4. Trong ô C1, gõ **x** = và căn lề phải.
5. Gõ **1.5** trong ô D1.
6. Đặt tên cho ô D1 là **X**.
7. Trong ô A4, gõ **Integral** = và căn lề phải.
8. Gõ **Sai số** = trong ô A5 và căn lề phải.

Đưa lưới toạ độ vào để sử dụng cho phép lấy tích phân. Dùng một lưới phi tuyến để đặt thêm một vài điểm lưới ở phần đầu nơi mà hàm số thay đổi đột ngột và đặt thêm ít điểm hơn ở nơi hàm không thay đổi đột ngột nữa.

9. Trong ô A7, gõ **t** và căn phải.
10. Nhập các giá trị dưới đây vào các ô A8:A22:

A8: **0**	A13: **1**	A18: **6**
A9: **0.2**	A14: **2**	A19: **7**
A10: **0.4**	A15: **3**	A20: **8**
A11: **0.6**	A16: **4**	A21: **9**
A12: **0.8**	A17: **5**	A22: **10**

11. Định dạng các ô A8:A22 là 0.000.

Cũng như trước, đưa giá trị đúng vào để so sánh.

12. Trong ô B3, gõ **'True** và căn giữa.

13. Gõ =**SQRT(PI())/2** trong ô B4.

Tính các giá trị của hàm trong các ô B8:B22. Phép tính này không được sử dụng với công thức cầu phương Gauss, nhưng nó được đưa vào đây để tìm xem khi nào rút ngắn phép lấy tích phân. Nó được sử dụng với công thức hình thang trong các ô D8:D21, mà được tính để so sánh.

14. Trong ô B7, gõ **f(x,t)** và căn phải.

15. Trong ô B8, gõ = **EXP(–A8)*A8^(x–1)** và sao chép sang các ô B9:B22.

Tính công thức cầu phương Gauss cho từng cặp điểm dữ liệu và sau đó cộng các ô này với nhau trong ô C4. Các ô C8:C21 tính công thức cầu phương được phát triển cho hàm Gamma.

16. Trong ô C3, gõ **Gaussian** và căn giữa.

17. Gõ = **SUM(C8:C21)** trong ô C4.

18. Gõ = **(C4–$B$4)/$B$4** trong ô C5.

19. Trong ô C8, gõ công thức:

= ((A9-A8)/2)*[EXP(–((A9–A8)*(1/SQRT(3))+A9+A8)/2)*(((A9–A8)*(–1/SQRT(3))+A9+A8)/2)^(X–1)+EXP(–((A9–A8)*(1/SQRT(3))+A9+A8)/2)*(((A9–A8)*(1/SQRT(3))+A9+A8)/2)^(X–1)

sau đó sao chép sang các ô C9:C21.

20. Trong ô D3, gõ **Trap.** và căn giữa.

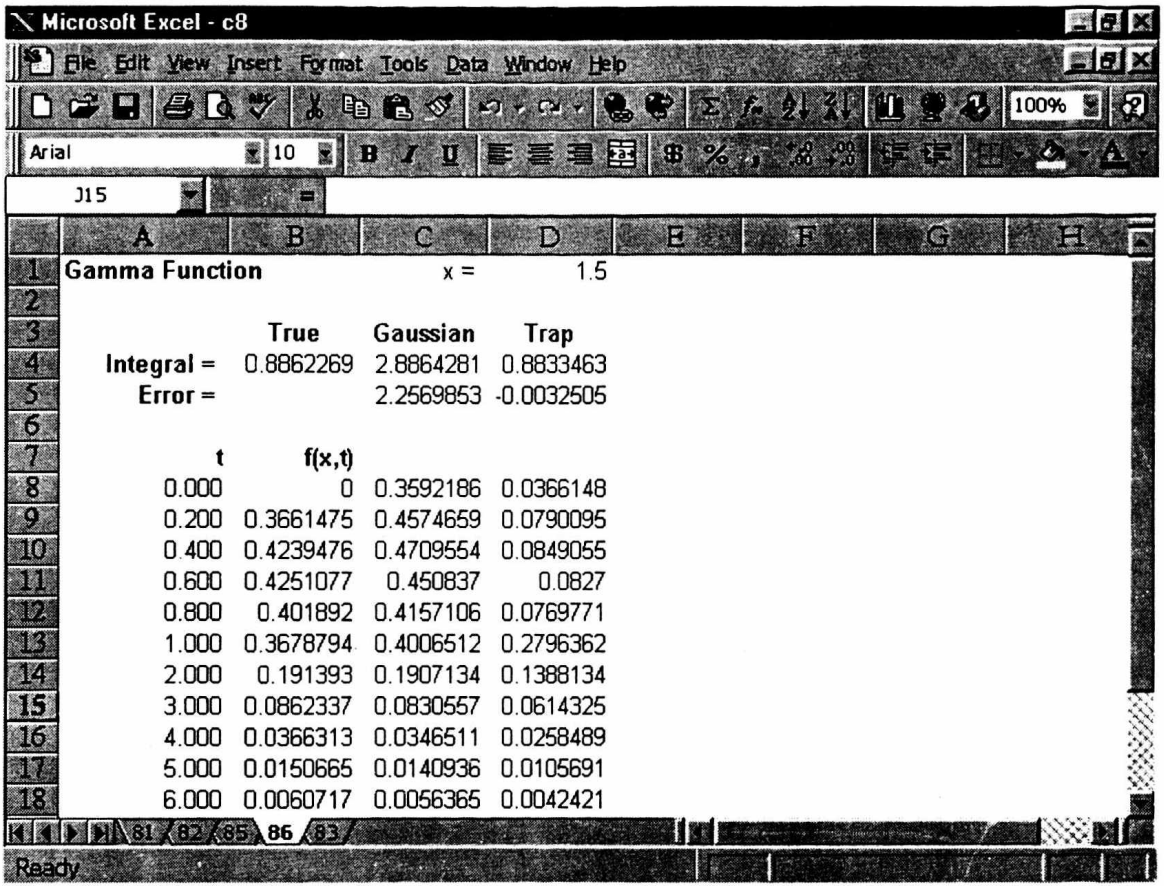
21. Gõ =**SUM(D8:D21)** trong ô D4.

22. Gõ =**(D4–$B$4)/$B$4** trong ô D5.

23. Trong ô D8, gõ =**(A9–A8)*(B9+B8)/2** và sao chép sang các ô D9:D21.

24. Dùng lệnh *Display* trên bảng chọn *Options* để tắt các đường khung viền.

25. Lưu bảng tính.



	A	B	C	D
1	Gamma Function		x =	1.5
2				
3		True	Gaussian	Trap
4	Integral =	0.8862269	2.8864281	0.8833463
5	Error =		2.2569853	-0.0032505
6				
7	t	f(x,t)		
8	0.000	0	0.3592186	0.0366148
9	0.200	0.3661475	0.4574659	0.0790095
10	0.400	0.4239476	0.4709554	0.0849055
11	0.600	0.4251077	0.450837	0.0827
12	0.800	0.401892	0.4157106	0.0769771
13	1.000	0.3678794	0.4006512	0.2796362
14	2.000	0.191393	0.1907134	0.1388134
15	3.000	0.0862337	0.0830557	0.0614325
16	4.000	0.0366313	0.0346511	0.0258489
17	5.000	0.0150665	0.0140936	0.0105691
18	6.000	0.0060717	0.0056365	0.0042421

Hình 8.5: Hàm Gamma: giải công thức tích phân bằng phép cầu phương Gauss.

Lúc này bảng tính của chúng ta sẽ giống như hình 8.6. Lưu ý là phép lấy tích phân cầu phương Gauss chỉ có khoảng 1/5 sai số của phép lấy tích phân theo quy tắc hình thang.

8.2.3. Thực hiện các công thức tích phân với hàm Macro

Như chúng ta đã biết, tất cả các công thức tích phân đều có thể được thực hiện với hàm MACRO. Các phương trình cũng vậy. Chúng ta chỉ dùng một vòng lặp FOR để tính các phần của tích phân và sau đó cộng chúng lại với nhau, hơn là tính chúng trong các ô riêng rẽ và sau đó tổ hợp chúng bằng hàm SUM.

Chương trình Macro linh hoạt hơn nhiều so với bảng tính trong việc lấy tích phân các hàm số. Người sử dụng có thể thay đổi các giới hạn hoặc độ rộng bước một cách dễ dàng bằng cách thay đổi một biến số. Cũng không cần phải thêm hay xoá các ô. Mặt khác, nếu chúng ta đang lấy tích phân dữ liệu thực nghiệm thì các giới hạn và độ rộng bước là cố định, và dữ liệu đã ở trong các ô rồi, do vậy, các phương pháp bảng tính là đơn giản nhất để thực hiện.

8.2.3.1. Hàm Macro để tính hàm Gamma

Chương trình Macro mà chúng ta sẽ tạo ra trong ví dụ tiếp theo tính hàm Gamma áp dụng quy tắc hình thang. Hãy thực hiện các thao tác sau đây:

1. Bắt đầu với một bảng tính mở rộng hết cỡ.

2. Gõ **Hàm số Gamma** trong ô B1.

3. Gõ **Gamma** trong ô A2.

Xác định đối số của hàm như là một số, sau đó xác định và tạo lập vài biến số để sử dụng trong hàm. Biến tổng là *sum*, mà có chứa giá trị của hàm trong khi đang tính nó. Biến số tích phân là *t*. Ba biến số *tstart*, *tend*, và *dt* xác định các giá trị đầu, giá trị cuối và giá trị bước cho vòng lặp. Giá trị của dt càng nhỏ, tích phân càng chính xác hơn, nhưng thời gian tính toán càng lâu.

4. Gõ = **ARGUMENT("x",1)** trong ô B2.

5. Đưa các đề mục sau vào các ô A3:B7:

A3: **sum**	B3: **=0**
A4: **t**	B4: **=0**
A5: **dt**	B5: **=0.01**
A6: **tstart**	B6: **=0**
A7: **tend**	B7: **=20**

Vòng lặp bắt đầu từ đây, nó sắp xếp từ *tstart* tới một bước trước *tend* với một bước *dt*. Vì mỗi bước sắp xếp từ *t* đến *t* + *dt* nên chúng ta phải lấy giới hạn trên trừ đi *dt* để làm cho nó tỏ ra là đúng. Để áp dụng quy tắc hình thang, ta tính diện tích của hình thang giữa *t* và *dt*: tính giá trị của *y* tại *t* (*yone*) và tại *t* + *dt* (*ytwo*), tính số trung bình của hai giá trị *y* đó, và nhân với *dt*. Cộng số hạng mới này vào giá trị của tích phân được lưu giữ trong *sum*.

6. Gõ = **FOR("t",tstart,tend-dt,dt)** trong ô B8.

7. Nhập các đề mục sau vào các ô A9:B11:

A9: **yone**	B9: **=EXP(- t)*t^(x-1)**
A10: **ytwo**	B10: **=EXP(-(t+dt)*(t+dt)^(x-1)**
A11: **fact**	B11: **=dt*(yone+ytwo)/2**

8. Gõ = **SET.VALUE(sum,sum+fact)** trong ô B12.

Lệnh tiếp theo là một hàm IF, nó tách vòng lặp khi số hạng đang được thêm vào tích phân nhỏ hơn giá trị của tích phân 10^{-9} lần. Thiết lập vòng lặp để tính nhiều số hạng hơn lượng số hạng cần thiết, do vậy sử dụng hàm IF cùng với hàm BREAK khi tích phân đã hội tụ một cách đầy đủ. Nếu có gì sai và công thức không hội tụ, vòng lặp kết thúc và một giá trị sai số được đưa trở lại.

9. Nhập các đề mục sau vào các ô B13:B16:

B13: = **IF(fact/sum<1.0E-9,BREAK())**

B14: = **NEXT()**

B15: = **IF(t>=tend,SET.VALUE(sum,#VALUE!))**

B16: = **RETURN(sum)**

10. Chọn các ô A3:B11, chọn lệnh *Create Names* trên bảng chọn *Formula*, chọn *Left Column*, và sau đó nhấn OK để đặt tên cho các ô ở cột B với các tên ở cột A.

11. Chọn ô B2, chọn lệnh *Define Name* trên bảng chọn *Formula*, gõ **Gamma** cho tên, nhấn chuột vào *Function*, và sau đó nhấn OK.

12. Mở rộng cột B thành 12.

13. Lưu bảng **Macro** với tên là **FIG8-7.XLM**.

Để sử dụng hàm mới, hãy mở một bảng tính mới và gọi hàm có giá trị a. Sử dụng lại giá trị 1,5 cho đối số để chúng ta có thể kiểm tra độ chính xác của kết quả. Gọi hàm số với một tham trỏ ngoài tới hàm *Macro*. Chúng ta có thể dùng lệnh *Paste Function* trên bảng chọn *Formula* để bảo đảm rằng chúng ta có cú pháp đúng.

14. Mở một bảng tính mới và mở rộng hết cỡ.

15. Gõ **Hàm số Gamma; Hàm Macro** trong ô A1.

16. Nhập các đề mục sau vào các ô A4:A7.

A4: **x**	B4: **1.5**
A5: **Gamma(x)**	B5: **='FIG8-7.XLM'!Gamma(x)**
A6: **True Value**	B6: **=SQRT(PI( ))/2**
A7: **Sai số**	B7: **=(B6-B5)/B6**

17. Lưu bảng tính.

Sai số sử dụng hàm MACRO này chỉ là 0,02%. Thậm chí có thể tăng độ chính xác lên nhiều hơn bằng cách làm cho giá trị giới hạn nhỏ hơn ở ô B13 và dẫn đến lớn hơn ở ô B7 trên bảng *Macro*. Điều này làm cho thời gian tính toán chậm hơn nhưng có thể chấp nhận được, phụ thuộc vào hoàn cảnh của chúng ta.

Chương 9

GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Trong chương này sẽ nghiên cứu bốn phương pháp dùng để giải các phương trình phi tuyến với một bảng tính: phép xấp xỉ liên tiếp, phương pháp giảm dư trên và dưới, phương pháp của Newton, và phương pháp Solver. Hai phương pháp đầu chắc chắn sẽ giải được hầu hết các bài toán của bạn, còn phương pháp của Newton hay Solver thường sẽ giải những bài toán còn lại. Bạn có thể sử dụng các phương pháp khác, nhưng các phương pháp được đề cập đến ở trên là dễ nhất để thực hiện trên một bảng tính.

Giải một phương trình phi tuyến thường là một công việc làm nản lòng nhiều kỹ sư. Một phương trình có vẻ như đơn giản lại có thể không giải được bằng bất kỳ phương pháp giải tích nào. Loại trừ các đa thức lên đến bậc bốn, và những phương trình siêu việt đơn giản nhất (những loại này bao gồm các hàm số lượng giác hoặc hàm số mũ), còn hầu hết các phương trình phi tuyến không thể giải được theo phép giải tích. Trong thực tế, phép giải những đa thức bậc ba và bốn đều khó sử dụng đến mức mà chúng hiếm khi được sử dụng.

Tất cả các phương pháp bằng số để giải phương trình phi tuyến đều dựa trên việc ước đoán một nghiệm và việc cải tiến có hệ thống ước đoán đó. Bạn đưa một ước đoán vào phương trình, và sử dụng kết quả để cố gắng cải tiến ước đoán. Sau đó, bạn lặp lại quá trình này cho đến khi tìm ra một nghiệm có độ chính xác đầy đủ. Hoặc phương pháp phân kỳ và bạn chán nản rời bỏ bài toán để lúc khác thử giải lại.

9.1. PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ LIÊN TIẾP

Mặc dù có một số các phương pháp đơn giản để tìm nghiệm của các phương trình phi tuyến, nhưng phương pháp phù hợp nhất với một bảng tính được biết đến là *phép xấp xỉ liên tiếp*. Để thực hiện phép xấp xỉ liên tiếp, trước hết cần viết lại phương trình theo mẫu sau:

$$x = f(x)$$

Bất cứ cách nào trong vài cách để viết lại phương trình gốc của bạn đều có thể sử dụng đối với phương pháp này, mặc dù một cách nào đó có thể không đồng quy tại một nghiệm.

Khi bạn đã viết lại phương trình này, hãy đưa ra một ước đoán ban đầu về giá trị của x. Trong khi giá trị x bất kỳ có thể được ước đoán, thì nếu ước đoán ban đầu của bạn

càng gần nghiệm, bài toán sẽ hội tụ càng nhanh. Chú ý rằng đối với những bài toán có các nghiệm bội, ước đoán ban đầu về giá trị của x xác định nghiệm nào bạn thu được. Để có được các nghiệm khác, bạn sử dụng các ước đoán ban đầu khác.

Đưa giá trị ban đầu của x vào f(x) và tính một giá trị x mới. Đây là ước đoán mới về giá trị của x, mà bạn sẽ đưa vào f(x). Tiếp tục tính toán những giá trị mới của x theo cách này, cho đến khi giá trị của x hội tụ.

x_0 = ước đoán ban đầu.

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

....

$x_n = f(x_{n-1})$

Trên hình này bạn sẽ ví dụ việc tìm nghiệm của phương trình x = cos(x), đó là điểm giao của đường y = x với đường y = cos(x).

Không phải tất cả các hàm số đã biến đổi đều hội tụ tại một nghiệm. Theo quy định để hàm hội tụ tại một nghiệm của phương trình gốc, giá trị tuyệt đối của độ dốc của f(x) phải nhỏ hơn 1:

$$|f'(x)| < 1$$

Mặc dù có thể viết ra đạo hàm các hàm số đang xét và kiểm tra chúng với điều kiện ở trên, nhưng thường nhanh hơn nếu chúng ta viết lại phương trình theo cách đơn giản nhất và kiểm tra nó. Nếu nó không hội tụ, khi đó hãy viết lại phương trình theo một cách khác.

Lấy ví dụ xét phương trình cos(x) - x = 0. Đây là một phương trình siêu việt phi tuyến đơn giản. Nó có thể được viết lại một cách nhanh chóng thành dạng quy định:

$$x = \cos(x)$$

Trong thí dụ tiếp theo này, bạn sẽ sử dụng khả năng lặp của bảng tính để giải phương trình này theo phương pháp xấp xỉ liên tiếp. Để thực hiện phương pháp này, bỏ chế độ tính lại tự động của bảng tính và nhập các công thức với các tham trỏ vòng.

Bình thường, bảng tính tính các ô theo trình tự tính lại tự nhiên. Theo trình tự tính lại tự nhiên, các tiền lệ của một ô (các ô mà một ô phụ thuộc vào) được tính trước khi tính một ô. Trình tự này được áp dụng với tất cả các ô trong một bảng tính, cho đến khi tất cả các ô đều đã được tính. Nếu bạn thay đổi giá trị của một ô thì tất cả các ô mà phụ thuộc vào ô đó, cả theo cách trực tiếp và gián tiếp, đều được tính lại. Một tham trỏ vòng xuất hiện khi một ô phụ thuộc vào chính nó, hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp thông qua các công thức ở những ô khác. Trình tự tính lại tự nhiên không thể tính toán một tham trỏ vòng

bởi vì các tiền lệ của một ô có thể không bao giờ được tính (nó phải tự tính trước khi nó có thể tự tính).

Khi chuyển sang phép lặp, bảng tính tính từng ô không chứa tham trỏ vòng. Sau đó nó tính tất cả các ô có chứa tham trỏ vòng một hoặc nhiều lần, phụ thuộc vào các cài đặt trong hộp thoại *Calculation*. Các ô có chứa tham trỏ vòng được tính một cách đơn giản, sử dụng những giá trị hiện thời của các đối số, trước tiên không cần thử tính tất cả các tiền lệ. Sau khi các ô đã được tính lại số lần đã chỉ rõ trong hộp thoại *Calculation*, việc tính lại dừng lại. Khi bạn ấn phím F9, tất cả các ô lại được tính lại. Bạn sẽ sử dụng khả năng này để tính theo trình tự một công thức, và sau đó đưa giá trị của phép tính đó trở lại công thức.

Trong ví dụ này sẽ thiết lập số phép lặp là 1, để có thể theo dõi các giá trị thay đổi khi bảng tính tính lại. Trong công việc thực tế có thể chúng ta phải sử dụng một số phép lặp nhiều lần hơn để tìm ra nghiệm nhanh hơn.

1. Bắt đầu với một bảng tính mới, đặt tên là hình 9.1.

2. Vào *Tools > Options*, chọn *Calculation tab*, kiểm tra *hộp Manual*.

3. Nhấn chuột trên *Iteration* và đặt *Maximum Iteration* là **1**.

4. Xoá hộp kiểm tra *Recalculate Before Save* nhấn OK.

5. Trong ô A1, gõ:

x = cos(x); phép xấp xỉ dần đúng.

Tạo một bảng có giá trị ban đầu và ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu. Ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu buộc bảng tính ở trong trạng thái ban đầu đã xác định trước.

6. Trong ô A3, gõ **giá trị ban đầu** và căn phải.

7. Gõ **0** trong ô B3.

8. Trong ô A4, gõ **Init Flag** và căn phải.

9. Gõ **1** trong ô B4.

10. Đặt tên các ô B3 và B4 là INIT_VALUE và INIT.

11. Trong ô B6, kiểm tra giá trị của INIT để xem liệu nó đã bằng 0 chưa. Nếu INIT bằng 0, đặt *x* bằng giá trị ban đầu, nếu không ta đặt nó bằng cosin của *x* trong ô B7. Trong ô B7, tính cosin của giá trị trong ô B6, tạo một tham trỏ vòng.

12. Trong ô A6, gõ **x** và căn phải.

13. Trong ô B6, gõ:

IF(INIT=0,INIT_VALUE,B7)

14. Trong ô A7, gõ **cos(x)** và căn phải.

15. Gõ **=COS(B6)** trong ô B7.

16. Tính hiệu số giữa x và cos(x), nhằm xác định khi nào phép tính hội tụ một cách đầy đủ.

17. Trong ô A9, gõ **Hiệu số** và căn phải.

18. Gõ =**B7-B6** trong ô B9.

19. Định dạng ô B9 là 0.0E+000.

Thiết lập tham trỏ vòng thứ hai để tính số lần phép lặp.

20. Trong ô A11, **xấp xỉ** lặp và căn phải.

21. Trong ô B11, gõ:

=IF(INIT=0,0,B12+1)

22. Gõ = **B11** trong ô B12.

23. Tắt đường khung viền.

24. Lưu bảng tính.

Để thực hiện phép tính, đặt giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu trong ô B4 là 0 và ấn F9, để bắt đầu bài toán.

Thay đổi giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 1 và ấn lại F9. Mỗi lần bạn ấn F9, phép tính được lặp lại một lần, tính toán giá trị tiếp theo của x.

Tiếp tục ấn F9 cho đến khi giá trị của *x* hội tụ với độ chính xác đầy đủ.

Bạn có thể kiểm tra độ chính xác bằng cách so sánh giá trị của *x* với giá trị của hiệu số giữa x và f(x) trong ô B9. Lúc này bảng tính sẽ giống như hình 9.2, với giá trị x đã hội tụ ở các ô B7 và B8.

Nếu phép tính này không hội tụ, khi đó bạn sẽ viết lại phương trình ở dạng tương đương (arccos): $x = \cos^{-1}(x)$ và thử lại một lần nữa.

Excel có thể theo dõi giúp bạn sự thay đổi trong những giá trị và dừng tự động khi thu được những giá trị có độ chính xác đầy đủ. Để xem điều này thực hiện như thế nào, hãy thay đổi ví dụ đang làm để sử dụng tiêu thức dừng của Excel, thay vì việc theo dõi sự thay đổi trong số hạng trước. Bắt đầu bằng việc xoá các ô B9:B12, vì các giá trị này không bao giờ hội tụ, nhưng lại khác nhau với mỗi phép lặp. Tiếp đó thiết lập phép lặp và tiêu chuẩn ngừng trong hội thoại *Calculation tab* của *Tools > Options*.

	A	B	C	D
1	X = COS(X), PHÉP XẤP XỈ DẦN ĐÚNG			
2				
3	Giá trị ban đầu	0		
4	Init Flag	FALSE		
5				
6	x	0.739085		
7	Cos(x)	0.739085		
8				
9	Hiệu số	-6.15E-08		
10	xấp xỉ lặp			
11		41		
12		41		

Hình 9.1: *Phương pháp phép xấp xỉ liên tiếp để tìm nghiệm của phương trình cos(x) = x.*

- Sao chép bảng tính trong ví dụ ở hình 9.1, đặt tên là **hình 9.2.xls.**

- Xoá nội dung trong các ô B9:B12.

- Chọn lệnh *Tools > Option*, chọn *Calculation tab* trên bảng chọn *Options*.

Trong hộp thoại *Calculation*, thay đổi *Maximum Iterations* thành 100, *Maximum Change* thành 1.0E-7, và *Calculation* thành *Automatic*. Sau đó nhấn chuột vào OK.

Bắt đầu phép tính bằng việc đặt số 0 trong ô B4, và để bảng tính tính lại. Đặt số 1 trong ô B4, và bảng tính tính lại cho đến khi sự thay đổi lớn nhất trong ô nào đó nhỏ hơn $1{,}0\times10^{-7}$.

	A	B	C	D
1	X = COS(X); PHÉP XẤP XỈ DẦN ĐÚNG			
2				
3	Giá trị ban đầu	0		
4	Init Flag	FALSE		
5				
6	x	0.739085		
7	Cos(x)	0.739085		

Hình 9.2: *Phép xấp xỉ lặp dần đúng liên tiếp.*

9.2. PHƯƠNG PHÁP GIẢM DƯ DƯỚI

Trong một số tình huống, một hàm phi tuyến đến mức mà phương pháp xấp xỉ dần đúng liên tiếp sẽ không hội tụ. Tính phi tuyến cực trị thường do các điểm uốn trên đường cong gần nghiệm gây ra. Những điểm này làm cho giá trị của x_i thay đổi quá nhiều tại mỗi lần lặp và ngăn cản phép tính hội tụ. Bạn có thể điều chỉnh đối với bài toán này bằng cách giảm sự thay đổi của x_i giữa các bước còn một lượng rất nhỏ (c). Điều này được biết đến như sự giảm dư dưới. Phép lặp những giá trị liên tiếp của x tiến hành như sau:

x_0 = ước đoán ban đầu

$x_1 = x_0 + c\Delta x_0$

$x_2 = x_1 + c\Delta x_1$

...

$x_n = x_{n-1} + c\Delta x_{n-1}$

Ở đây $\Delta x_n = f(x_n) - x_n$ là sự thay đổi của x trong một phép lặp, và c là hệ số giảm dư ($0 < c < 1$). Việc sử dụng giá trị c = 1 tương ứng với việc sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp. Việc sử dụng những giá trị c lớn hơn 1 được biết như sự giảm dư trên. Sự giảm dư trên được sử dụng để đẩy nhanh tốc độ hội tụ của những bài toán hội tụ chậm. Việc đưa giá trị cho Δx_n vào phương trình đối với x_n sẽ cho:

$$x_n = c_1 (x_n - 1) + (1 - c)\, x_{n-1}$$

đây là phương trình lặp để sử dụng trong phép tính.

9.3. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CÔNG CỤ SOLVER CỦA EXCEL

Có thể sử dụng Solver của Excel để kiểm tra nghiệm của các phương trình phi tuyến. Solver thực hiện bằng cách ước đoán một nghiệm thử, kiểm tra nó, và sử dụng kết quả để lựa chọn một cách thông minh một nghiệm thử mới. Vì Solver đòi hỏi một "mục tiêu", cho nên cần phải bắt đầu bằng việc chuyển toàn bộ vế trái sang vế phải của phương trình để kết quả bằng 0 tại một nghiệm. Hãy thực hiện các thao tác sau:

1. Sao chép bảng tính phép xấp xỉ liên tiếp (hình 9.3), đặt tên là **hình 9.3.xls.**

2. Chọn các ô A7:C8 và xoá chúng bằng lệnh *Clear* trên bảng chọn *Edit*.

3. Chọn lệnh *Tools* > *Options* > *Calculation tab*. Trong hộp thoại, thay đổi phương pháp tính thành *Automatic*, và ngừng phép lặp bằng cách xoá hộp kiểm tra *Iteration*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	NHIỆT ĐỘ ĐIỆN TỬ TRONG GAAS; PP SOLVER						
2							
3	Delt_E	4.96E-20	J	K	1.38E-23	J/K	
4	Tau	1.00E-12	s	Q	1.60E-19	Coul	
5	U	0.85	m^2/V-s	T	300	K	
6				R	94.1		
7							
8					E	Te	f(Te)
9					(V/m)	(K)	(K)
10					1.00E+02	3.00E+02	-1.14E-13
11					1.00E+03	3.00E+02	0.00E+00
12					1.00E+04	3.01E+02	-1.14E-13
13					1.00E+05	3.65E+02	8.75E-07
14					1.00E+06	1.28E+03	-5.54E-04
15					1.00E+07	1.01E+04	-1.07E-08
16					1.00E+08	6.95E+05	1.16E-10

Hình 9.3: *Nhiệt độ election trong GaAs: phương pháp Solver*

4. Thay đổi ô A1 thành **nhiệt độ điện tử trong GaAs; Sử dụng Solver.**

5. Gõ **300** vào các ô F10:F16

6. Thay đổi ô G10 thành công thức sau:

= T+(2/3)*TAU*Q*E10^2*U/(K*(1+R_*EXP(-DELT_E/ (K*F10))))-F10

và sao chép nó sang các ô G11:G16.

Vì bạn có 7 nghiệm riêng biệt nên cần thực hiện *Solver* riêng rẽ cho từng nghiệm lần lượt.

7. Chọn lệnh *Tools > Solver*. Trong hộp thoại, đặt *Target Cell* là **$G$10**, chọn *Equal to Value* bằng **0** và đặt *By Changing Cells* là **$F$10**. Nhấn chuột trên *Solver* và chờ nghiệm.

8. Tính các nghiệm theo 6 công thức khác nhau khi dùng *Solver*, bằng cách thay đổi *Target Cell* và hộp *By changing Cells* một cách thích hợp.

9. Do Solver có thể đạt đến số các thử nghiệm cực đại của nó trước khi các phép tính hội tụ, nên bạn có thể phải chạy *Solver* nhiều hơn một lần để có được nghiệm đúng.

10. Lưu bảng tính.

Bảng tính của bạn sẽ giống hình 9.3. Solver thực hiện thao tác chậm hơn chút ít so với các phương pháp khác, bởi vì bạn phải áp dụng nó riêng rẽ cho từng công thức. Để sử dụng lần nữa, hãy đặt các trị số khởi đầu trong các ô F10:F16 rồi sử dụng lệnh *Solver*.

Chương 10

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRÊN EXCEL

Chương này nghiên cứu năm phương pháp để giải hệ phương trình xét đồng thời phi tuyến và tuyến tính với một bảng tính. Excel có các hàm cài sẵn để nghịch đảo và nhân các ma trận, mà có thể được sử dụng để giải hầu hết các hệ phương trình tuyến tính. Tất cả các phương pháp Gauss-Seidel, Jacobi và phương pháp giảm dư trên/dưới đều được thực hiện với khả năng lặp của bảng tính. Ba phương pháp này có thể được áp dụng cho nghiệm của các phương trình phi tuyến cũng như các phương trình tuyến tính. Ngoài ra, chương trình Solver bổ sung thường có thể được thích ứng để giải cả các phương trình phi tuyến và phương trình tuyến tính.

Nhiều bài toán trong khoa học và kỹ thuật dẫn đến các hệ phương trình mà phải được giải đồng thời. Ví dụ như: bài toán giải bằng số của các phương trình vi phân riêng, bài toán về các điện thế trạng thái ổn định trong các mạng điện; bài toán về các phương trình tập trung đối với các phản ứng phức, phản ứng liên hợp và phản ứng hoá học, các bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán bình sai mạng lưới trắc đạc, v.v... Đó là những ví dụ về các bài toán có nghiệm bao hàm một hệ phương trình xét đồng thời. Hầu hết những bài toán này dẫn đến các hệ phương trình tuyến tính, mà có phương pháp giải đúng. Trong thực tế chúng ta cũng luôn gặp các hệ phương trình phi tuyến, khi đó có thể giải hệ bằng các phương pháp giảm dư mặc dù chúng có thể khó có khả năng hội tụ.

10.1. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Hầu hết những bài toán mà bao gồm các phương trình xét đồng thời có thể dẫn đến các hệ phương trình tuyến tính. Đây là điều may mắn vì các phương trình tuyến tính dễ giải nhất. Bạn có thể giải hầu hết các phương trình đó bằng các hàm ma trận cài sẵn trong Excel, mà các hàm này có thể xử lý phép nghịch đảo và phép nhân các ma trận có kích thước lên đến 60 x 60 phần tử.

Phép lặp Gauss-Seidel và các phương pháp giảm dư trên/dưới cũng thực hiện tốt trên một bảng tính, và có thể sử dụng chúng cho các phương trình tuyến tính và phi tuyến. Phép lặp Gauss-Seidel là dạng đa phương trình của phương pháp xấp xỉ liên tiếp được sử dụng ở các phương trình đơn lẻ trong chương trước. Như bạn có thể trông đợi, phương pháp giảm dư trên/dưới là tương tự đa phương trình của phương pháp giảm dư dưới ở phương trình đơn lẻ.

10.1.1. Sử dụng các phương pháp ma trận

Các nghiệm ma trận của hệ phương trình tuyến tính là đơn giản nhất để thực hiện bằng Excel. Đầu tiên cần phải viết hệ phương trình xét đồng thời ở dạng ma trận:

$$Ax = b$$

Trong đó A là ma trận hệ số, x là véctơ ẩn số, và b là véctơ kết quả. Để giải phương trình ma trận này, hãy nhân cả hai vế từ bên trái với nghịch đảo của A:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Phương trình trở thành:

$$x = A^{-1}b$$

và đó chính là nghiệm. Mặc dù phương trình này có vẻ đơn giản như một phương trình rút gọn, nhưng phép tính nghịch đảo một ma trận thường không phải là một công việc tầm thường. Thật may là Excel có một hàm được cài sẵn tên là hàm MINVERSE để chuyên nghịch đảo ma trận

Ví dụ: Xét hệ 3 phương trình với 3 biến số:

Dưới đây chúng ta xem xét ví dụ giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$-8x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 10$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$$

Nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ và $x_3 = 3$. Phương trình này có thể được đưa vào dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Bạn có thể giải bài toán này một cách dễ dàng trong một bảng tính. Hãy thực hiện các thao tác sau:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới được mở rộng hết cỡ.
2. Gõ **Giải hệ phương trình; Nghịch đảo ma trận** trong ô A1.
3. Gõ **Ax = b** trong ô B3.
4. Trong ô A5, gõ **Ma trận** ban đầu (A).
5. Trong các ô A6:C8, gõ các nội dung của ma trận A:

Hàng 1:	**-8**	**1**	**2**
Hàng 2:	**5**	**7**	**-3**
Hàng 3:	**2**	**1**	**-2**

6. Trong ô E5, gõ **Vectơ** nghiệm (b).

7. Trong các ô E6:E8, gõ các nội dung của véctơ kết quả:

0 10 -2

Nghịch đảo ma trận A và sau đó nhân véctơ b với nghịch đảo của A. Hàm MINVERSE đưa ra một mảng các giá trị, vì vậy hàm này phải được chèn vào trong toàn bộ miền giá trị dưới dạng một mảng.

8. Trong ô A10, gõ **Ma trận nghịch đảo** (1/A).

9. Chọn các ô A11 : C13 và gõ:

=MINVERSE(A6 : C8)

10. Ấn Ctrl-Shift-Enter để chèn công thức này vào trong toàn bộ phần lựa chọn.

11. Trong ô E10, gõ **Vectơ nghiệm x = (1/A)/b.**

12. Chọn các ô E11:E13 và gõ:

=MMULT(A11:C13,E6:E8)

13. Ấn Ctrl-Shift-Enter để chèn công thức vào trong toàn bộ phần lựa chọn.

14. Lưu bảng tính nếu bạn muốn giữ một bản sao.

Bảng tính bây giờ sẽ giống hình 10.1, với các giá trị nghiệm 1, 2 và 3, cho x_1, x_2, và x_3 trong các ô E11:E13.

	A	B	C	D	E	F	G
1	GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH; NGHỊCH ĐẢO MA TRẬN						
2							
3		Ax = b					
4							
5	Ma trận ban đầu (A)				Vec-tơ nghiệm (b)		
6	-8	1	2		0		
7	5	7	-3		10		
8	2	1	-2		-2		
9							
10	Ma trận nghịch đảo (1/A)				Vecto nghiệm x = (1/A)/b		
11	-0.14865	0.054054	-0.22973		1		
12	0.054054	0.162162	-0.18919		2		
13	-0.12162	0.135135	-0.82432		3		

***Hình 10.1:** Giải các phương trình tuyến tính bằng các hàm ma trận của Excel.*

10.1.2. Sử dụng phép lặp Gauss - Seidel

Phép lặp Gauss - Seidel là một dạng của phương pháp Jacobi để giải hệ phương trình. Nó tương tự như phương pháp xấp xỉ liên tiếp đã mô tả trong chương trước. Đầu tiên, ta giải một trong số các phương trình xét đồng thời với một biến số, mà dẫn đến một phương trình cho mỗi biến số. Để giảm độ lớn của sai số làm tròn, hãy thử giải với các

biến số có các hệ số lớn nhất. Chọn một tập các giá trị ước đoán ban đầu của các biến số. Đưa chúng vào trong các phương trình và tính một tập các giá trị mới. Đưa lại các giá trị này vào các phương trình và tính tập giá trị khác. Tiếp tục quá trình này cho tới khi các giá trị hội tụ.

Việc tính tất cả các giá trị biến số mới chỉ sử dụng các giá trị cũ trong phương trình là phép lặp Jacobi. Tuy nhiên, vì các ô đã được tính một lần ở trước cho nên một số giá trị mới là có sẵn trước khi bạn kết thúc tính toán một trong các phương trình. Việc sử dụng các giá trị mới này ngay khi có thể mà không đợi phép lặp tiếp theo gọi là phép lặp Gauss - Seidel.

Để áp dụng phép lặp Gauss - Seidel vào bài toán trên, trước hết ta giải các phương trình đối với một trong các biến số:

$$x_1 = \left(\frac{1}{3}\right)(x_2 + 2x_3)$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{7}\right)(10 - 5x_1 + 3x_3)$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{2}\right)(2 + 2x_1 + x_2)$$

Tạo một bảng tính để giải các phương trình này sử dụng phép lặp Gauss - Seidel. Sau đây là trình tự các thao tác trên Excel:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới được mở rộng hết cỡ

2. Chọn lệnh *Tool > Options > Calculation tab* rồi đổi *Calculation* thành *Manual*. Nhấn chuột vào hộp kiểm tra *Iteration*, đặt *Maximum Iterations* là 1, xoá hộp *Recalculate Before Save* và nhấn OK.

3. Thay đổi độ rộng cột B và cột C thành **11**.

4. Trong ô A1, gõ **Giải hệ phương trình; Xấp xỉ Gauss - Seidel.**

Đưa vào ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu để lập lại sự tính toán cho một trạng thái đã biết. Việc nhập số 0 vào trong ô B3 làm cho các hàm IF trong các ô B8:B10 đưa ra những giá trị ban đầu ở các ô A8:A10.

5. Trong ô A3, gõ **Init Flag.**

6. Gõ **0** trong ô B3.

7. Đặt tên ô B3 là INIT.

8. Nhập trị số ước đoán ban đầu là **0** cho nghiệm.

9. Trong ô A6, gõ **Trị số.**

10. Trong ô A7, gõ **ban đầu.**

11. Gõ **0** trong các ô A8:A10.

Nhập ba phương trình. Khi một bảng tính lặp, các ô có tham trỏ vòng được tính từ trái sang phải, từ trên xuống dưới. Nếu bạn đặt các công thức trong cột C mà cột này sử dụng giá trị chứa trong cột B thì giá trị trong cột B được cân bằng với giá trị của các công thức trước khi tính các công thức, vì vậy cột B chứa các giá trị cũ. Khi tính các công thức trong cột C, chúng sẽ chỉ sử dụng các giá trị cũ ở cột B để tính giá trị mới. Đây là phép lặp Jacobi.

Nếu bạn đảo ngược trình tự đó và đưa các công thức vào cột B và chứa các giá trị ở cột C, thì một công thức được tính trong cột B, và giá trị mới của nó được chứa trong cột C. Khi đó, công thức tiếp theo trong cột B có thể sử dụng giá trị mới này, do vậy các giá trị mới được sử dụng trong phép lặp ngay khi chúng được tính. Đây là phép lặp Gauss - Seidel, là phương pháp mà bạn muốn sử dụng.

12. Trong ô B6, gõ Phương trình.

Gõ **=(C9+2*C10)/8** trong ô B8.

Gõ **=(10-5*C8+3*C10)/7** trong ô B9.

Gõ **=(46-5*C8-7*C9)/9** trong ô B10.

Tham chiếu các phương trình, tạo một tham trỏ vòng, và thực hiện kiểm tra sự thiết lập trạng thái ban đầu.

13. Trong ô C6, gõ **Nghiệm.**

14. Trong ô C8, gõ **công thức =IF(INIT=0,A8,B8)** và sao chép nó sang các ô C9:C10.

15. Định dạng các ô B8:C10 là **0.000.**

16. Lưu bài toán nếu bạn muốn giữ nó.

Để sử dụng bảng tính này, ta lập ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 0 trong ô B3 và ấn F9 để nó tính lại. Khi bảng tính đã khởi động, thay đổi ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 1 và lại ấn F9. Tiếp tục lặp bảng tính bằng cách ấn F9 cho tới khi các giá trị hội tụ.

Bảng tính lúc này sẽ giống như hình 10.2.

	A	B	C	D	E
1	GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH; XẤP XỈ GAUSS-SEIDEL				
2					
3	Init Flag.	FALSE			
4					
5					
6	Trị số	Phương trình	Nghiệm		
7	ban đầu				
8	0	1.000	1.000		
9	0	2.000	2.000		
10	0	3.000	3.000		
11					

Hình 10.2: *Giải các hệ phương trình tuyến tính: phép lặp Gauss - Seidel.*

Nếu giải một hệ phương trình mà nó hội tụ chậm, bạn không cần ấn F9 nhiều lần để lặp các phương trình. Thay vào đó, hãy chọn lệnh *Calculation* trên bảng chọn *Options* và thay đổi cài đặt *Maximum Iterations* thành số các phép lặp mong muốn cho mỗi lần bạn ấn F9.

10.1.3. Sử dụng phương pháp giảm dư trên/dưới

Cũng như với các phương trình đơn lẻ, bạn thường có thể làm cho một bài toán hội tụ nhanh hơn hay ổn định hơn bằng cách thiết lập lượng hiệu chỉnh được áp dụng cho các giá trị trong mỗi phép lặp. Phương pháp giảm dư trên/dưới chỉ thêm phân số Cf của sự hiệu chỉnh đã tính cho các giá trị trong mỗi bước. Phân số Cf có thể lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1. Nếu Cf bằng 1 thì phương pháp này tương đương với phương pháp Jacobi hay phương pháp Gauss - Seidel.

Trước tiên, ta tính một giá trị mới cho một trong các ẩn số như bạn đã làm ở ví dụ về phương pháp Gauss - Seidel. Tiếp theo, thay vì việc sử dụng giá trị này trong phép lặp tiếp theo, ta trừ đi giá trị cũ của một ẩn số để tìm sự thay đổi trong ẩn số. Bước thứ ba, ta nhân lượng thay đổi trong ẩn số với Cf và sau đó cộng nó vào giá trị cũ của ẩn số. Đây là giá trị để sử dụng trong phép lặp tiếp theo:

$$x_1^{n+1} = x_1^n + Cf\left[\left(\frac{1}{8}\right)\left(x_2^n + 2x_3^n\right) - x_1^n\right]$$

$$x_2^{n+1} = x_2^n + Cf\left[\left(\frac{1}{7}\right)\left(10 - 5x_1^n + 3x_3^n\right) - x_2^n\right]$$

$$x_3^{n+1} = x_3^n + Cf\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(2 + 2x_1^n + x_2^n\right) - x_3^n\right]$$

Các chỉ số trên *n* và *n+1* liên quan đến các phép lặp *n* và *n+1*. Tạo một bảng tính sử dụng phương pháp giảm dư trên/dưới. Bảng tính này gần như tương tự với bảng tính ở ví dụ trước, vì vậy bạn có thể bắt đầu với bảng tính đó và tự lưu sự định kiểu nào đó.

1. Bắt đầu với một bảng tính mới được mở rộng hết cỡ (hoặc một bản sao của ví dụ trước).

2. Chọn lệnh *Calculation* trên bảng chọn *Options* và thay đổi *Calculation* thành *Manual*, kiểm tra *Iteration*, đặt *Maximum Iterations* là 1, và nhấn chuột vào OK.

3. Thay đổi độ rộng của cột B và cột C là 11.

4. Trong ô A1, gõ **giải hệ phương trình; PP giảm dư trên/dưới.**

Bảng tính này có cả ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu và hệ số giảm dư. Ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu lập đưa bảng tính về một trạng thái ban đầu đã định trước. Nhân hệ số giảm dư với lượng thay đổi trong các giá trị để tăng hoặc giảm lượng hiệu chỉnh được áp dụng với mỗi phép lặp.

5. Trong ô A3, gõ **Init Flag.**

6. Gõ **0** trong ô C3.

7. Trong ô A4, gõ **Hệ số giảm dư.**

8. Gõ **0.5** trong ô C4.

9. Đặt tên các ô C3 và C4 lần lượt là INIT và Cf.

Nhập số **0** như một ước đoán ban đầu cho các giá trị nghiệm. Bạn có thể đưa vào bất kỳ giá trị thích hợp nào ở đây; nhưng các giá trị càng gần với nghiệm thì phương trình sẽ hội tụ càng nhanh.

10. Trong ô A6, gõ **Trị số.**

11. Trong ô A7, gõ **ban đầu.**

12. Gõ **0** vào các ô A8:A10.

Đưa vào các phương trình giảm dư. Bạn sẽ nhận ra các phương trình này từ phương pháp Gauss - Seidel, với sự phức tạp thêm vào của hệ số giảm dư điều chỉnh lượng thay đổi trong mỗi giá trị. Thực hiện điều này bằng cách trừ đi giá trị cũ từ phương trình, nhân với Cf, và sau đó cộng giá trị cũ vào kết quả.

13. Trong ô B6, gõ **Phương trình.**

14. Gõ các công thức dưới đây vào các ô B8:B10.

B8: **=C8+Cf*(((C9+2*C10)/8)-C8)**

B9: **=C9+Cf*(((10-5*C8+3*C10)/7)-C9)**

B10: **=C10+Cf*(((46-5*C8-7*C9)/9)-C10)**

Tạo các tham trỏ vòng và thực hiện thiết lập trạng thái ban đầu.

15. Trong ô C6, gõ **Nghiệm.**

16. Trong ô C8, gõ công thức:

=IF(INIT=0,A8,B8)

và sao chép nó sang các ô C9:C10.

17. Định dạng các ô B8:C10 là **0.000.**

18. Lưu bài toán nếu bạn muốn giữ nó.

Để sử dụng bảng tính này, đặt giá trị của hệ số giảm dư trong ô C4. Giá trị A bằng 0,5 có vẻ đúng đối với bài toán này.

Các bài toán khác nhau sẽ trả lời khác nhau về giá trị của hệ số giảm dư. Mặc dù bạn có thể dùng bất kỳ giá trị nào, nhưng không chắc rằng bạn có thể có bảng tính hội tụ với một giá trị lớn hơn 2. Các giá trị nhỏ hơn thường ổn định hơn nhưng không hội tụ nhanh bằng. Thông thường, bạn sẽ bắt đầu với một giá trị bằng 1 hoặc 1,5 và xem xem bảng tính có đang hội tụ hay không. Nếu nó đang hội tụ, bạn hãy tăng giá trị; nếu không hãy

giảm giá trị. Bạn không cần khởi động lại bảng tính khi thay đổi giá trị của hệ số giảm dư chừng nào mà các giá trị nghiệm đã tính vẫn hợp lý. Nếu các giá trị nghiệm đã bắt đầu phân kỳ, bạn sẽ cần khởi động lại bảng tính để lấy lại các giá trị gần nghiệm đúng.

Đặt giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu trong ô C3 là 0 và ấn F9. Thay đổi ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 1 và lại ấn F9. Tiếp tục ấn F9 cho tới khi các giá trị hội tụ.

Bảng tính hội tụ giống như hình 10.3. Nên nhớ rằng bạn không cần ngồi trước máy tính của mình và ấn F9 nhiều lần để lặp lại các phương trình. Bạn có thể tăng số lần mà bài toán được lặp bằng cách thay đổi cài đặt *Maximum Iterations* trong hộp thoại *Calculation* tương ứng.

	A	B	C	D	E
1	GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH; PP GIẢM DƯ TRÊN/DƯỚI.				
2					
3	Init Flag		FALSE		
4	Hệ số giảm dư		0.5		
5					
6	Trị số	Phương trình	Nghiệm		
7	ban đầu				
8	0	1.000	1.000		
9	0	2.000	2.000		
10	0	3.000	3.000		

Hình 10.3: *Giải các phương trình tuyến tính xét đồng thời; phương pháp giảm dư trên/dưới.*

10.1.4. Sử dụng Solver với hệ phương trình

Nếu trình bày bảng tính một cách cẩn thận, bạn có thể dùng Solver với các phương trình tuyến tính xét đồng thời. Solver có thể chỉ tối ưu hoá giá trị trong một ô đơn lẻ, vì vậy phải kết hợp kết quả của tất cả các phép tính vào trong một ô. Bạn có thể kết hợp các kết quả bằng cách viết lại để tất cả các phương trình bằng 0 khi đã có một nghiệm, và sau đó cộng các giá trị tuyệt đối của những nghiệm này. Khi tổng bằng 0, bạn đã giải được tất cả các phương trình. Giá trị tuyệt đối đảm bảo rằng các kết quả từ hai phương trình không loại bỏ lẫn nhau bằng cách biểu diễn các kết quả trái dấu bằng nhau thay vì bằng 0. Solver có thể điều chỉnh một vài giá trị để tối ưu hóa kết quả, vì vậy các giá trị đầu vào không đòi hỏi sự xử lý đặc biệt.

Việc trình bày bảng tính trong ví dụ này tương tự như bảng tính ở ví dụ trước nên chúng ta có thể sử dụng một bản sao của bảng tính trước và lưu một vài định kiểu. Hãy thực hiện các thao tác sau:

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ (hoặc một bản sao của bảng tính trước).

2. Thay đổi độ rộng của cột A thành **4.**

3. Thay đổi độ rộng của cột B và C thành **11.**

4. Trong ô A1, gõ **Giải hệ phương trình; Phương pháp SOLVER.**

Bây giờ hãy đưa các công thức vào. Những công thức này giống như trong bài toán trước, ngoại trừ giá trị ở vế trái của phương trình được chuyển sang vế phải của phương trình để tạo kết quả 0. Nếu tất cả công thức này định giá trị bằng 0 thì bài toán giải được.

5. Trong ô B6, gõ **Phương trình.**

6. Trong ô B8, gõ:

=(C9+2*C10)/8-C8

7. Trong ô B9, gõ:

=(10-5*C8+3*C10)/7-C9

8. Trong ô B10, gõ:

=(2+2*C8+C9)/2-C10

Tiếp theo đưa vào ước đoán ban đầu về các nghiệm.

9. Trong ô C6, gõ **Nghiệm.**

10. Trong ô C8, gõ **1** và sao chép nó sang các ô C9:C10.

11. Định dạng các ô B8:C10 là **0.000.**

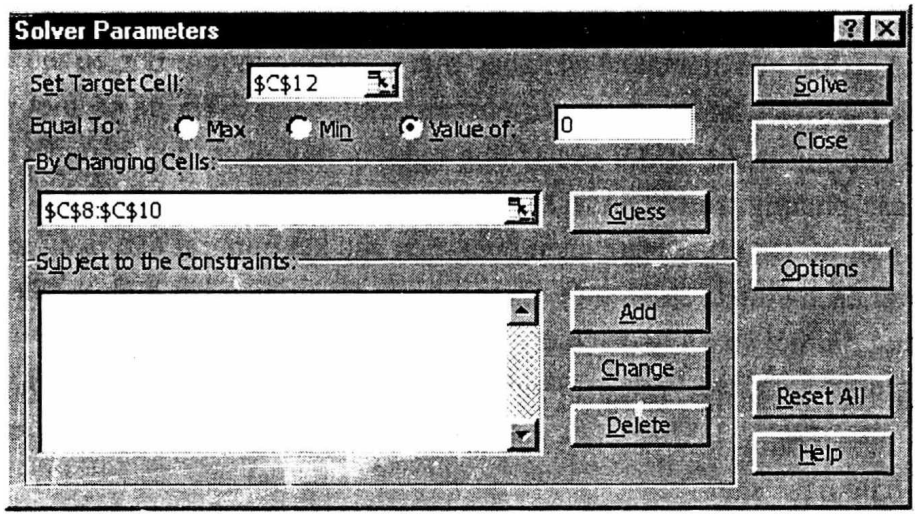
Tính tổng các giá trị tuyệt đối của những nghiệm này để tạo một ô đơn lẻ cho Solver để tối ưu hoá. Ô sẽ tính một công thức dãy, vì thế hãy nhập nó vào bằng Ctrl-Shift-Enter.

12. Trong ô C12 gõ:

=SUM(ABS(B8:B10))

và ấn Ctrl-Shift-Enter.

13. Bây giờ ta giải các công thức bằng *Solver*.



Hình 10.4: *Thiết lập Solver để tìm nghiệm.*

- Chọn lệnh SOLVER trên bảng chọn *Tools*.

- Chọn ô $C$12 cho tuỳ chọn *Set Cell* (ô để tối ưu hoá) và các ô $C$8:$C$10 như các ô để thay đổi, như thể hiện ở hình 10.4. Chọn tuỳ chọn *Value Of* và nhập 0 vào hộp *Value Of*. Nhấn chuột vào *Solver* để tìm một nghiệm.

- Khi Solver định vị một nghiệm cho bài toán, nó hiển thị hộp thoại *Solver Result*. Nếu nó không thể tìm ra một nghiệm, nó sẽ thông báo cho bạn biết. Nếu nó không làm việc, cố gắng chạy *Solver* một lần nữa. Nó có thể đã đạt được số nghiệm thử tối đa và chỉ cần thử thêm ít nữa. Bạn cũng cần phải thử với các giá trị ban đầu khác nhau. Kết quả cuối cùng như hình 10.5

14. Lưu bài toán nếu bạn muốn giữ nó.

	A	B	C	D	E
1	GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH; PHƯƠNG PHÁP SOLVER				
2					
3					
4					
5					
6		Phương trình	Nghiệm		
7					
8		0.000	1.000		
9		0.000	2.000		
10		0.000	3.000		
11					
12			2.82E-06		

Hình 10.5: *Tìm ra một nghiệm bằng Solver.*

10.2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN ĐỒNG THỜI

Trong một số trường hợp, bạn có thể sử dụng phương pháp Gauss - Seidel hoặc Jacobi để giải các phương trình phi tuyến đồng thời. Tuy nhiên, thường thì bạn sẽ cần điều chỉnh bổ sung phương pháp giảm dư trên/dưới để làm cho các phương trình hội tụ. Solver cũng hữu ích nếu có thể đưa vào các phương trình một dạng mà ở đó chỉ một ô đơn lẻ cần được tối ưu hoá, và tất cả các kết quả của các công thức gần như có cùng giá trị. Nếu các kết quả thay đổi lớn thì công thức có giá trị lớn nhất sẽ chi phối nghiệm. Bạn áp dụng các phương pháp này theo cách tương tự như đã áp dụng chúng với phương trình tuyến tính.

Các phương trình phi tuyến có thể có các nghiệm bội, vì vậy giá trị ban đầu có thể quan trọng. Nếu các phương trình cực kỳ phi tuyến, chúng không thể hội tụ nếu các giá trị ban đầu quá xa so với nghiệm. Hãy cố gắng thay đổi các giá trị đó cũng như hệ số giảm dư nếu bạn gặp khó khăn trong việc lấy nghiệm.

10.3. ĐỘ CHÍNH XÁC

Việc sử dụng các phương pháp ma trận và lặp để giải các phương trình đồng thời có một hệ quả không thích hợp là độ chính xác của nghiệm có thể phụ thuộc vào trình tự mà theo đó bạn giải các phương trình. Khi đang chuẩn bị phương trình cho các nghiệm bằng số, bạn phải giải một phương trình đối với mỗi biến số. Để có các kết quả đúng nhất, hãy thử giải mỗi phương trình đối với biến số có hệ số lớn nhất (không tính đến dấu của hệ số). Một cách lý tưởng, bạn sẽ kết thúc với một phương trình được giải đối với mỗi biến số, nhưng nó thường không phải là trường hợp. Hãy vận dụng óc suy xét của mình để quyết định phương trình nào giải đối với biến số nào.

Khi bạn đang sử dụng các phương pháp ma trận, độ lớn tương đối của các giá trị trong ma trận hệ số mà bạn đang giải cũng quan trọng. Tất cả các giá trị trong ma trận hệ số nên có độ lớn xấi xỉ như nhau. Nếu một phương trình có các hệ số mà vài hệ số có độ lớn lớn hơn hoặc nhỏ hơn các hệ số khác thì độ chính xác của nghiệm sẽ kém. Để hiệu chỉnh tình huống này, hãy lấy tỉ lệ mỗi phương trình (một hàng trong ma trận) bằng cách chia một trong các hệ số cho độ lớn của hệ số lớn nhất ở phương trình đó. Khi bạn lấy tỉ lệ một phương trình, cũng đừng quên lấy tỉ lệ kết quả (các giá trị b ở vế phải của các phương trình).

Nếu ma trận là ma trận suy biến (nó có một số 0 trên đường chéo), bạn sẽ không bao giờ nhận được một nghiệm. Để kiểm tra tính đặt biệt, hãy tính định thức của ma trận A sử dụng hàm MDETERM. Nếu định thức bằng 0 thì ma trận là ma trận suy biến. Nếu định thức này rất nhỏ, nhưng không bằng 0 thì nó có thể có một nghiệm, nhưng nghiệm đó có thể rất khó tìm. Sai số làm tròn có thể làm cho một ma trận trở thành suy biến mặc dù nó có một định thức nhỏ nhưng là định thức thực. Nếu định thức này nhỏ, hãy kiểm tra kết quả thật cẩn thận để đảm bảo nó là thực. Nếu như gặp khó khăn trong việc lấy một nghiệm đúng, bạn hãy tham khảo một cuốn sách Toán nói về các phương pháp bằng số ôn lại kiến thức về các phương pháp ma trận.

Chương 11

GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG TRÊN EXCEL

Trong chương này trình bày cách dùng một bảng tính Excel để giải bằng số các phương trình vi phân thường. Các bài toán giá trị ban đầu có thể được giải trên một bảng tính sử dụng các phương pháp chuỗi Taylor, Euler hay Euler cải biên và Runge-Kutta. Mỗi một phương pháp này có các mức độ chính xác và tính khó thực hiện khác nhau.

Chúng ta có thể giải các bài toán giá trị biên sử dụng phương pháp dò tìm, trong đó bạn chọn các giá trị của điều kiện biên ở một phía của bài toán cho tới khi bạn thu được kết quả đúng ở phía kia. Các bài toán giá trị biên còn có thể được viết lại sử dụng các sai phân hữu hạn, và các phương trình sai phân thu được có thể được giải sử dụng các phương pháp lặp hoặc ma trận.

Công cụ Solver trong Excel thực sự không được thiết kế để giải mười phương trình xét đồng thời cùng một lúc, nhưng với việc lập kế hoạch cẩn thận, bạn có thể giải các phương trình này như đã giải các phương trình xét đồng thời trong chương trước. Các phương pháp lặp nhanh hơn so với Solver khi có nhiều phương trình phức tạp. Tuy nhiên, các phiên bản sau này của Solver cũng có thể có khả năng xử lý các loại bài toán này một cách có hiệu quả hơn.

Có lẽ ít người nghĩ đến việc dùng công cụ bảng tính Excel để giải các phương trình vi phân. Tuy nhiên, với các ô liên kết động và với khả năng lặp của một bảng tính, bạn có thể tính các nghiệm của nhiều phương trình vi phân. Hai loại phương trình vi phân thường được giải một cách dễ dàng trên một bảng tính là: bài toán giá trị ban đầu và bài toán giá trị biên. Những phương trình vi phân đối với các loại bài toán này có thể tương tự như nhau, sự khác nhau chỉ là ở điều kiện biên có sẵn.

11.1. GIẢI CÁC BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU

Những bài toán giá trị ban đầu là bài toán mà trong đó đã biết tất cả các điều kiện biên ở một biên của bài toán. Mục đích là để lấy tích phân phương trình vi phân từ biên đã biết tới một biên chưa biết. Các phương trình vi phân có các đạo hàm theo thời gian thường thuộc loại này, trong đó bạn biết giá trị của nghiệm (biên đã biết) và cần lấy tích phân phương trình vi phân với khoảng thời gian nào đó trong tương lai (biên chưa biết). Trong phần này, bạn sẽ xem xét bốn phương pháp phổ biến nhất để giải các loại phương trình này: chuỗi Taylor, Euler, Euler cải biên và Runge-Kutta.

Xem xét phương trình vi phân thường, bậc nhất sau đây:

$$\left(1+x^2\right)^{1/2}\frac{du(x)}{dx}+u(x)=x\,;\quad x>0$$

$$u(0)=0$$

Đây là một bài toán giá trị ban đầu vì điều kiện biên đã biết chỉ ở một vị trí. Thực tế, phương trình vi phân thường, bậc nhất với một biến số chỉ nên có một điều kiện biên. Nếu có nhiều hơn một điều kiện biên thì bài toán sẽ quá rõ ràng và có thể không giải được. Để giải các phương trình vi phân bậc hai và bậc cao hơn đòi hỏi nhiều điều kiện biên hơn.

Bài toán này là tính giá trị của u trên miền giá trị x = 0 tới 0,2. Đối với bài toán này, ta có thể biết nghiệm giải tích là:

$$u(x)=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})}\right]$$

Bạn sẽ dùng nghiệm này để đánh giá hiệu quả của các phương pháp giải khác nhau.

11.1.1. Sử dụng phương pháp chuỗi Taylor

Một trong nhiều phương pháp phổ biến hơn để giải bài toán giá trị ban đầu là phương pháp chuỗi Taylor. Xem xét sự khai triển chuỗi Taylor của hàm u(x) nào đó trong lân cận giá trị x_0:

$$u(x)=u(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}u'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}u''(x_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)^3}{3!}u'''(x_0)+\frac{(x-x_0)^4}{4!}u''''(x_0)+\ldots$$

sử dụng ký hiệu:

$$u'(x)=\frac{du}{dx},\ u''(x)=\frac{d^2u(x)}{dx^2},\ldots$$

Cho h = (x - x_0), và phương trình trở thành:

$$u(x)=u(x_0)+\frac{h}{1!}u'(x_0)+\frac{h^2}{2!}u''(x_0)+\frac{h^3}{3!}u'''(x_0)+\frac{h^4}{4!}u''''(x_0)+\ldots$$

Với x_0 = 0, ta biết được các giá trị của hai số hạng đầu tiên trong chuỗi Taylor. Bạn biết số hạng thứ nhất từ điều kiện biên và số hạng thứ hai từ phương trình vi phân. Những giá trị này là:

$$u(0)=0$$

$$u'(x) = \frac{[x - u(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{1/2}}$$

Bằng cách lấy liên tiếp các đạo hàm của phương trình đối với đạo hàm bậc nhất, bạn sẽ có các phương trình đối với đạo hàm bậc cao hơn:

$$u''(x) = \frac{[x - u'(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{1/2}} - \frac{x[x - u(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$u'''(x) = -\frac{u''(x)}{\left(1 + x^2\right)^{1/2}} - \frac{2x[1 - u'(x)] + x - u(x)}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} + \frac{3x^2[x - u(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{5/2}}$$

$$u''''(x) = -\frac{u'''(x)}{\left(1 + x^2\right)^{1/2}} - \frac{3xu''(x) - 3[1 - u'(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} +$$

$$+\frac{9x^2[1 - u'(x)] + 9x[x - u(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{5/2}} + \frac{15x^2[x - u(x)]}{\left(1 + x^2\right)^{7/2}}$$

Từ đó có:

$u(0) = 0$

$u'(0) = 0$

$u''(0) = 1$

$u'''(0) = -1$

$u''''(0) = -2$

Thay các giá trị vào năm số hạng đầu của phép khai triển Taylor và sau đó rút ngắn phép khai triển sau số hạng thứ năm. Điều này tạo ra hàm gần đúng:

$$u(h) = \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} - \frac{h^4}{12}$$

Ta có thể sử dụng hàm này để tính các giá trị của phương trình vi phân cho các giá trị khác nhau của h, với điều kiện h là nhỏ.

Trong ví dụ sau đây chúng ta sẽ sử dụng phương pháp chuỗi Taylor để tính các giá trị của u(x) với x = 0 tới 0,2. Các bước thao tác lần lượt như sau:

1. Bắt đầu với một bảng tính trống mở rộng hết cỡ.

2. Thay đổi độ rộng các cột A đến D như sau:

A = 7

B = 12

C = 11

D = 11

3. Trong ô A1, gõ **phương trình vi phân thường, phương pháp chuỗi Taylo.**

Nhập dữ liệu miền giá trị x và tính giá trị của nghiệm giải tích cho bài toán để sử dụng như một sự so sánh.

4. Trong ô A3, gõ **x** và căn giữa.

5. Gõ **0** trong ô A5.

6. Gõ **0.01** trong ô A6.

7. Chọn các ô A5:A6 và kéo phần dữ liệu bôi đen tới ô A25.

8. Định dạng các ô A5:A25 là **0.00.**

9. Trong ô B3, gõ **u(x)** và căn giữa.

10. Trong ô B4, gõ **giải tích** và căn giữa.

11. Trong ô B5, gõ **=0.5*(A5-LN(A5+SQRT(1+A5^2)/(A5+SQRT(1+A5^2)))** và sao chép nó sang các ô B6:B25.

Sử dụng phép khai triển chuỗi Taylor để tính nghiệm của phương trình vi phân riêng phần. So sánh những giá trị này với những giá trị đúng ở cột B.

12. Trong ô C3, gõ **u(x)** và căn giữa.

13. Trong ô C4, gõ **Taylor** và căn giữa.

14. Trong ô C5, gõ:

=A5^2/2-A5^3/6-A5^4/12

và sao chép nó sang các ô C6:C25.

15. Định dạng các ô B5:C25 là 0.00E+00.

16. Trong ô D3, gõ **Sai số** và căn giữa.

17. Trong ô D4, gõ **%** và căn giữa.

18. Trong ô D6, gõ **=(B6 - C6)/B6** và sao chép nó sang các ô D7:D25.

19. Định dạng các ô D6:D25 là **0.00000%.**

20. Lưu bảng tính nếu bạn muốn giữ nó.

Bảng tính bây giờ sẽ giống như hình 11.1. Lưu ý rằng nghiệm sẽ cực kỳ chính xác đối với những giá trị nhỏ này của x. Nếu bạn thử với các giá trị x lớn hơn (chẳng hạn 0 tới 2)

thì sai số sẽ khá lớn. Bạn phải sử dụng các giá trị của h (x trong trường hợp này, vì x_0 = 0) nhỏ hơn 1 để phương pháp này chính xác.

Chú ý rằng đối với phương pháp chuỗi Taylor, h được đo từ x_0 và h không phải là kích thước bước mà sẽ được sử dụng trong phần còn lại của các bài toán này. Để tính các giá trị của u trên khoảng cách dài hơn, bạn phải tính lại giá trị của đạo hàm tại điểm cuối của bước hiện thời để có thể lấy bước khác xa hơn điểm đó.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG; PHƯƠNG PHÁP CHUỖI TAYLOR							
2								
3	x	u(x)	u(x)	Sai số				
4		giải tích	Taylor	%				
5	0	0.00E+00	0.00E+00					
6	0.01	4.98E-05	4.98E-05	0.00001%				
7	0.02	1.99E-04	1.99E-04	0.00011%				
8	0.03	4.45E-04	4.45E-04	0.00037%				
9	0.04	7.89E-04	7.89E-04	0.00088%				
10	0.05	1.23E-03	1.23E-03	0.00174%				
11	0.06	1.76E-03	1.76E-03	0.00303%				
12	0.07	2.39E-03	2.39E-03	0.00486%				
13	0.08	3.11E-03	3.11E-03	0.00731%				
14	0.09	3.92E-03	3.92E-03	0.01049%				
15	0.1	4.83E-03	4.83E-03	0.01451%				

Sheet1 Sheet2 Sheet3

Hình 11.1. Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, giải bằng phương pháp chuỗi Taylor.

11.1.2 Sử dụng các phương pháp Euler và Euler cải biên

Trong phương pháp chuỗi Taylor thì một trong những khó khăn lớn là bạn phải tính theo phép giải tích một vài đạo hàm của phương trình. Một số phương trình có thể có những đạo hàm đơn giản, nhưng những phương trình khác (chẳng hạn như phương trình được sử dụng trong ví dụ) thì không có. Phương pháp Euler loại bỏ việc tính toán những đạo hàm này bằng cách rút ngắn chuỗi Taylor tại số hạng bậc nhất của đạo hàm. Để thực hiện phương pháp này, bạn phải dùng những bước nhỏ (h) và tính lại giá trị của đạo hàm bậc nhất tại mỗi bước:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x)$$

Hãy tạo một bảng tính để tính phương trình vi phân sử dụng phương pháp Euler. Bạn có thể sử dụng bảng tính đã thiết lập cho ví dụ về chuỗi Taylor, vì các cách trình bày đều tương tự như nhau.

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ (hoặc một bản sao của bảng tính trước).

2. Thay đổi độ rộng các cột A:F như sau:

A = 7	B = 12
C = 11	D = 11
E = 11	F = 9

3. Trong ô A1, gõ:

Phương trình vi phân thường; Phương pháp Euler và Euler cải tiến.

Đưa vào miền dữ liệu x và tính giá trị của nghiệm giải tích cho bài toán để dùng như một sự so sánh. Hai cột này giống với hai cột ở bài toán chuỗi Taylor, vì vậy bạn có thể sử dụng lại phần của bảng tính đó.

4. Trong ô A3, gõ **x** và căn giữa.

5. Gõ **0** trong ô A5.

6. Gõ **0.01** trong ô A6.

7. Chọn các ô A5:A6 và kéo phần dữ liệu bôi đen tới ô A25.

8. Định dạng các ô A5:A25 là **0.00.**

9. Trong ô B3, gõ **u(x)** và căn giữa.

10. Trong ô B4, gõ **giải tích** và căn giữa.

11. Trong ô B5, gõ:

=0.5*(A5-LN(A5+SQRT(1+A5^2)/(A5+SQRT(1+A5^2)))

và sao chép sang các ô B6:B25.

12. Tính nghiệm của phương trình sử dụng phương pháp Euler.

13. Trong ô C4, gõ **Euler** và căn giữa.

14. Gõ **0** trong ô C5.

15. Trong ô C6, gõ:

=C5+(A6-A5)*(A5-C5)/SQRT(1+A5^2)

và sao chép nó sang các ô C7:C25.

16. Định dạng các ô B5:C25 là **0.00E+00.**

Lúc này, bảng tính của bạn sẽ giống hình 11.2. Qua đây có thể thấy, phương pháp này rất không chính xác.

Vì bạn đang sử dụng độ dốc (đạo hàm) ở điểm đầu của một bước để xác định giá trị tại điểm cuối của bước đó, nên mỗi lần như vậy phương pháp này sẽ có sai số, và sai số là cộng tính và tăng lên khi bạn lấy tích phân xa hơn. Cách tốt hơn để ước tính giá trị của điểm tiếp theo là sử dụng độ dốc trung bình trên toàn bộ một bước:

$$u(x+h) = u(x) + h\frac{[u'(x) + u'(x+h)]}{2}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG; Phương Pháp Euler và EUler cải tiến						
2							
3	x	u(x)	u(x)	Sai số			
4		giải tích	Euler	%			
5	0	0.00E+00	0.00E+00				
6	0.01	4.98E-05	0.00E+00	100.00000%			
7	0.02	1.99E-04	1.00E-04	49.66362%			
8	0.03	4.45E-04	2.99E-04	32.88452%			
9	0.04	7.89E-04	5.96E-04	24.49477%			
10	0.05	1.23E-03	9.90E-04	19.46078%			
11	0.06	1.76E-03	1.48E-03	16.10470%			
12	0.07	2.39E-03	2.06E-03	13.70744%			
13	0.08	3.11E-03	2.74E-03	11.90946%			
14	0.09	3.92E-03	3.51E-03	10.51101%			
15	0.1	4.83E-03	4.37E-03	9.39225%			

Sheet1 Sheet2 Sheet3

Hình 11.2: Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, giải bằng phương pháp Euler.

Trong phương pháp này, khó khăn là ở chỗ bạn không biết giá trị của độ dốc ở điểm cuối của bước. Phương pháp Euler cải biên sẽ sử dụng phương pháp Euler để tạo một ước tính ban đầu về nghiệm. Sau đó, sử dụng ước tính ban đầu này để tính giá trị của độ dốc ở điểm cuối của bước. Sử dụng giá trị độ dốc trung bình, bạn có thể tính giá trị nghiệm chính xác hơn. Bạn có thể áp dụng lại phương pháp này để thử cải tiến nghiệm, nhưng khi bạn dùng nhiều hơn một hoặc hai phép lặp thì sai số trong phương pháp này lớn như sự tăng nào đó trong độ chính xác có được nhờ phép lặp.

Bây giờ hãy dùng phương pháp Euler cải biên để tính lại bảng tính. Đầu tiên ta tính dự đoán ban đầu của nghiệm sử dụng phương pháp Euler.

1. Trong ô E3, gõ **Euler cải tiến.**

Chọn các ô E3:F3 và nhấn chuột trên công cụ cột có dấu gạch chéo ở giữa trên thanh công cụ (biểu tượng giống như chữ *a* với các mũi tên chỉ sang hướng bên trái và bên phải biểu tượng).

2. Trong ô E4, gõ **dự đoán** và căn giữa.

3. Trong ô E6, gõ:

= F5+(A6-A5)*(A5-F5)/SQRT(1+A5^2)

và sao chép nó sang các ô E6:E25.

4. Sử dung dự đoán ban đầu đó để tính độ dốc trung bình và tính giá trị đúng của nghiệm. So sánh giá trị đó với nghiệm giải tích.

5. Trong ô F4, gõ **Chính xác** và căn giữa.

6. Gõ **0** trong ô F5.

7. Trong ô E6, gõ:

=F5+((A6-A5)/2)*((A5-F5)/SQRT(1+A5^2)+(A6-C6)/SQRT(1+A6^2))

và sao chép nó sang các ô F7:F25.

8. Định dạng các ô E5:F25 là **0.00E+00.**

9. Trong ô G3, gõ **Sai số** và căn giữa.

10. Trong ô G4, gõ **%** và căn giữa.

11. Trong ô G6, gõ = **(B6-F6)/B6** và sao chép nó sang các ô G6:G25.

12. Định dạng các ô G6:G25 là **0.00%.**

13. Lưu lại bài toán nếu bạn muốn giữ một bản sao.

Bây giờ bảng tính của bạn sẽ giống như hình 11.3. Lưu ý rằng nghiệm đã được cải tiến rất nhiều, với sai số ở khoảng 1/4 phần trăm. Bạn có thể dùng phương pháp này để tính giá trị của nghiệm với những giá trị x lớn, với điều kiện là bạn lấy các bước nhỏ để hoàn thành bài toán.

	A	B	C	D	E	F	G
1	PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG; Phương Pháp Euler và EUler cải tiến						
2							
3	x	u(x)	u(x)	Sai số	Euler cải tiến		Sai số
4		giải tích	Euler	%	dự đoán	chính xác	%
5	0	0.00E+00	0.00E+00		0.00E+00	0.00E+00	
6	0.01	4.98E-05	0.00E+00	100.00000%	1.49E-04	5.00E-05	-0.33%
7	0.02	1.99E-04	1.00E-04	49.66362%	3.97E-04	1.99E-04	-0.29%
8	0.03	4.45E-04	2.99E-04	32.88452%	7.42E-04	4.47E-04	-0.27%
9	0.04	7.89E-04	5.96E-04	24.49477%	1.18E-03	7.91E-04	-0.26%
10	0.05	1.23E-03	9.90E-04	19.46078%	1.72E-03	1.23E-03	-0.26%
11	0.06	1.76E-03	1.48E-03	16.10470%	2.35E-03	1.77E-03	-0.25%
12	0.07	2.39E-03	2.06E-03	13.70744%	3.07E-03	2.40E-03	-0.25%
13	0.08	3.11E-03	2.74E-03	11.90946%	3.89E-03	3.12E-03	-0.25%
14	0.09	3.92E-03	3.51E-03	10.51101%	4.79E-03	3.93E-03	-0.25%
15	0.1	4.83E-03	4.37E-03	9.39225%	5.78E-03	4.84E-03	-0.24%

Sheet1 Sheet2 Sheet3

***Hình 11.3:** Nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, giải bằng phương pháp Euler và Euler cải biên.*

11.1.3. Sử dụng phương pháp Runge-Kutta

Phương pháp khá thông dụng cho hầu hết những bài toán giá trị ban đầu là phương pháp Runge-Kutta bậc bốn. Phương pháp này sử dụng sự phối hợp của bốn công thức ước lượng nghiệm để tính giá trị chính xác của nghiệm. Đề nghị bạn đọc tham khảo sách về các phương pháp bằng số nếu bạn quan tâm đến cơ sở lý thuyết của phương pháp này. Việc khai triển một bước với phương pháp Runge-Kutta tiến hành như sau:

$$u(x + h) = u(x) + \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Ở đây:

$$k_1 = hu'[x,u(x)]$$

$$k_2 = hu'\left[x + \frac{h}{2}, u(x) + \frac{k_1}{2}\right]$$

$$k_3 = hu'\left[x + \frac{h}{2}, u(x) + \frac{k_2}{2}\right]$$

$$k_4 = hu'[x+h,u(x)+k_3]$$

Ở đây u'(x,u(x)) là đạo hàm bậc nhất của u(x) đối với *x*, mà là hàm của x và u(x).

Bây giờ hãy tính lại bảng tính bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta. Bài toán này sử dụng phương trình vi phân và cách bố trí tương tự như hai ví dụ trước.

1. Bắt đầu với một bảng tính mới mở rộng hết cỡ (hoặc bản sao của ví dụ bảng tính trước).

2. Thay đổi độ rộng của các cột từ A đến H như sau:

A = 7	B = 11
C = 10	D = 10
E = 10	F = 10
G = 10	H = 11

3. Trong ô A1, gõ **Phương trình vi phân thường; Phương Pháp Runge-Kutta.**

Nhập vào miền dữ liệu *x* và tính giá trị của nghiệm giải tích cho bài toán để dùng như một sự so sánh. Hai cột này giống với hai cột trong những bài toán phương pháp Euler và chuỗi Taylor, vì vậy bạn có thể sử dụng lại phần cột này của bảng tính đó cũng được.

4. Trong ô A3, gõ **x** và căn giữa.

5. Gõ **0** trong ô A5.

6. Gõ **0.01** trong ô A6.

7. Chọn các ô A5:A6 và kéo phần bôi đen tới ô A25.

8. Định dạng các ô A5:A25 là **0.00.**

9. Trong ô B3, gõ **u(x)** và căn giữa.

10. Trong ô B4, gõ **giải tích** và căn giữa.

11. Trong ô B5, gõ:

=0.5*(A5-LN(A5+SQRT(1+A5^2))/(A5+SQRT(1+A5^2)))

và sao chép nó sang các ô B6:B25.

Tính các giá trị của bốn công thức ước lượng. Những công thức ước lượng này sẽ được sử dụng để chuyển tới bước tiếp theo.

12. Trong ô C3, gõ **k1** và căn giữa.

13. Trong ô C6, gõ:

=(A6-A5)*(A5-G5)/SQRT(1+A5^2)

và sao chép nó sang các ô C7:C25.

14. Trong ô D3, gõ **k2** và căn giữa.

15. Trong ô D6, gõ:

=(A6-A5)*((A5+(A6-A5)/2)-(G5+C5/2))/SQRT(1+(A5+(A6-A5)/2)^2)

và sao chép nó sang các ô D7:D25.

16. Trong ô E3, gõ **k3** và căn giữa.

17. Trong ô E6, gõ:

=(A6-A5)*((A5+(A6-A5)/2)-(G5+D5/2))/SQRT(1+(A5+(A6-A5)/2)^2)

và sao chép nó sang các ô E6:E24.

18. Trong ô F3, gõ **k4** và căn giữa.

19. Trong ô F6, gõ:

=(A6-A5)*(A6-(G5+E5))/SQRT(1+A6^2)

và sao chép nó sang các ô F7:F25.

Tính nghiệm của bài toán bằng cách kết hợp các giá trị của các công thức ước lượng. So sánh nghiệm với kết quả giải tích.

20. Trong ô G3, gõ **u(x)** và căn giữa.

21. Gõ **0** trong ô G5.

22. Trong ô G6, gõ:

=G5+(1/6)*(C6+2*D6+2*E6+F6)

và sao chép nó sang các ô G7:G25.

23. Định dạng các ô B5:G25 là **0.00E+00.**

24. Trong ô H3, gõ **Sai số** và căn giữa.

25. Trong ô H4, gõ **%** và căn giữa.

26. Trong ô H6, gõ =**(B6-G6)/B6** và sao chép nó sang các ô H7:H25.

27. Định dạng các ô H6:H25 là **0.0E+00%.**

Bảng tính sẽ giống như hình 11.4. Chúng ta có thể nhận thấy rõ là độ chính xác của nghiệm tăng lên rất nhiều. Mặc dù phương pháp này chiếm 5 cột của bảng tính, nhưng sai số lớn nhất là $-1{,}3\times10^{-6}$ (%). Đây là phương pháp có độ chính xác tốt hơn mọi phương pháp khác.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG; Phương Pháp Euler và EUler cải tiến							
2								
3	x	u(x)	k1	k2	k3	k4	u(x)	Sai số
4		giải tích						%
5	0	0.00E+00	0.00E+00				0	
6	0.01	4.98E-05	0.00E+00	5.00E-05	4.97E-05	9.95E-05	4.98E-05	-1.26E-06
7	0.02	1.99E-04	9.95E-05	1.49E-04	1.49E-04	1.98E-04	1.99E-04	-6.27E-07
8	0.03	4.45E-04	1.98E-04	2.47E-04	2.47E-04	2.95E-04	4.45E-04	-4.17E-07
9	0.04	7.89E-04	2.95E-04	3.44E-04	3.44E-04	3.92E-04	7.89E-04	-3.12E-07
10	0.05	1.23E-03	3.92E-04	4.40E-04	4.39E-04	4.87E-04	1.23E-03	-2.49E-07
11	0.06	1.76E-03	4.87E-04	5.34E-04	5.34E-04	5.81E-04	1.76E-03	-2.07E-07
12	0.07	2.39E-03	5.81E-04	6.28E-04	6.28E-04	6.74E-04	2.39E-03	-1.77E-07
13	0.08	3.11E-03	6.74E-04	7.21E-04	7.20E-04	7.66E-04	3.11E-03	-1.54E-07
14	0.09	3.92E-03	7.66E-04	8.12E-04	8.12E-04	8.57E-04	3.92E-03	-1.37E-07
15	0.1	4.83E-03	8.57E-04	9.02E-04	9.02E-04	9.47E-04	4.83E-03	-1.23E-07

Sheet1 / Sheet2 / Sheet3

Hình 11.4: *Nghiệm bài toán giá trị ban đầu, giải bằng phương pháp Runge-Kutta.*

11.1.4. Giải các phương trình bậc cao hơn

Các bài toán giá trị biên thường không luôn luôn là các phương trình vi phân bậc nhất, chúng thường là các phương trình bậc hai hay bậc ba. Để giải các phương trình bậc cao hơn này, ta chia chúng thành hai hay nhiều phương trình vi phân xét đồng thời bằng cách thay các biến số mới cho các đạo hàm. Ví dụ, xem xét phương trình sau:

$$au'' + bu' + cu + d = 0$$

Hãy thay y = u', và bạn có hai phương trình vi phân bậc nhất xét đồng thời:

$$u' - y = 0$$

$$ay' + by + cu + d = 0$$

Để giải các phương trình này, nên sử dụng các phương pháp đã mô tả trước đây cho việc giải một phương trình đơn lẻ. Đối với mỗi bước, tính nghiệm cho cả hai phương trình một cách độc lập sử dụng các phương trình đơn lẻ. Ở cuối mỗi bước, bạn có các nghiệm cho cả hai phương trình. Sử dụng các nghiệm này để tính nghiệm ở cuối bước tiếp theo.

11.2. GIẢI CÁC BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN

Các bài toán giá trị biên thuộc loại thứ hai của các phương trình vi phân thường. Trong khi các bài toán giá trị ban đầu có tất cả các điều kiện biên nằm ở một phía của khoảng nghiệm, thì các bài toán giá trị biên có một phần các điều kiện biên ở một phía và phần còn lại ở một phía khác. Do vậy, chúng phải thoả mãn các điều kiện biên ở cả hai biên của bài toán chứ không phải một biên.

Hai phương pháp được nhiều người biết đến để giải các bài toán giá trị biên là phương pháp dò tìm và phương pháp sai phân hữu hạn.

11.2.1. Sử dụng phương pháp dò tìm

Phương pháp dò tìm giải các bài toán giá trị biên có nội dung là sử dụng chính các phương pháp đã được sử dụng để giải bài toán giá trị ban đầu. Bạn cần phải ước đoán các giá trị cho các điều kiện biên chưa biết ở một trong các biên (phía 1) để biến đổi bài toán thành bài toán giá trị ban đầu. Sau đó bạn lấy tích phân các phương trình từ phía 1 tới phía khác (phía thứ 2), ví dụ, với phương pháp Euler cải biên. Khi đã hoàn thành phép giải, hãy so sánh các giá trị biên mà bạn đã tính ở phía thứ 2 với những giá trị biên cần có cho điều kiện biên này. Nếu chúng có cùng các giá trị như nhau tức là bạn đã giải được bài toán; nếu không, bạn cần thay đổi ước đoán tại giá trị biên chưa biết ở phía thứ 1 và lấy tích phân bài toán một lần nữa. Như vậy, bạn đang dò tìm tại các giá trị biên ở phía thứ 2 của khoảng nghiệm bằng cách đoán các giá trị của các điều kiện biên ở phía thứ 1.

Ví dụ, để giải một phương trình vi phân bậc hai, bạn cần hai điều kiện biên. Nếu đây là một bài toán giá trị ban đầu, bạn sẽ nhận được giá trị của nghiệm và đạo hàm của nó ở một trong các biên. Đối với bài toán giá trị biên điển hình, bạn sẽ nhận được chỉ giá trị này của nghiệm ở cả hai phía của khoảng nghiệm. Để lấy tích phân nghiệm này theo phía khác của khoảng nghiệm sử dụng phương pháp bài toán giá trị ban đầu, bạn cũng cần một ước tính nữa về đạo hàm của nghiệm tại một biên. Căn cứ vào giá trị đó, bạn có thể lấy tích phân nghiệm theo biên khác và sau đó so sánh giá trị nghiệm của bạn với giá trị yêu cầu từ điều kiện biên. Nếu chúng giống nhau thì tức là bạn đã hoàn thành công việc, còn không thì bạn phải thử một ước tính khác về giá trị đạo hàm của nghiệm. Hãy tiếp tục quá trình này cho tới khi bạn tìm được giá trị ở biên.

Ví dụ tính độ võng do uốn của một dầm chịu tải rải đều:

Xét một dầm gối tự do ở cả hai đầu mút của nó. Dầm sẽ võng không đáng kể dưới trọng lượng bản thân. Ta có thể tính tổng số độ võng đó bằng cách sử dụng phương trình vi phân dưới đây:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m}{EI}$$

Ở đây:

y : sự chuyển dịch hoặc võng tại điểm x;

I : mômen quán tính;

E : hệ số đàn hồi (2100000 kG/ cm^2 đối với thép);

m : mômen uốn.

Đối với một dầm có tiết diện ngang cố định m bằng:

$$m = \frac{w}{2} \times (l - x)$$

Trong đó w là trọng lượng trên chiều dài đơn vị và l là chiều dài. Tính độ võng trong một thanh dài 600 cm của một dầm bằng thép hình I-550, bản cánh dầm rộng 21,5 cm, trọng lượng rải đều là 0,1 T/m. Mômen quán tính I = 62220 cm^4. Với những sự chuyển vị nhỏ, thì nghiệm giải tích của phương trình vi phân này là:

$$y = \frac{wx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

với độ võng lớn nhất tại giữa nhịp là:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5wl^4}{384EI}$$

phương trình vi phân này có hai điều kiện biên, một ở mỗi đầu mút của dầm nơi mà nó được tựa:

$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$

Để giải nó chúng ta sẽ sử dụng phương pháp bài toán giá trị ban đầu, bạn cần có giá trị và đạo hàm tại một phía. Bạn phải ước tính giá trị của đạo hàm tại x = 0, giải bài toán và sau đó xem liệu y(l) = 0 hay không. Nếu nó không bằng 0, hãy chọn giá trị khác cho đạo hàm tại x = 0. Chú ý rằng bạn còn có thể lấy tích phân bài toán này từ x = l tới x = 0 và thu được các kết quả như nhau.

Giải bài toán này sử dụng phương pháp Euler cải biên. Đầu tiên tách phương trình bậc hai thành hai phương trình vi phân bậc nhất bằng cách thay thế biến số u cho một trong số các đạo hàm:

$$y'(x) = u(x)$$

$$u'(x) = -\frac{m}{EI}$$

Bình thường, sử dụng phương pháp Euler cải biên, trước tiên bạn sẽ tính các nghiệm sử dụng phương pháp tiêu chuẩn Euler với:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x)$$

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x)$$

và sau đó cải tiến các giá trị sử dụng:

$$u(x + h) = u(x) + h\,\frac{[u'(x) + u'(x + h)]}{2}$$

$$y(x + h) = y(x) + h\,\frac{[y'(x) + y'(x + h)]}{2}$$

Tuy nhiên, trong trường hợp này, bạn có thể thực hiện một cách trực tiếp tới bước cuối cùng vì bạn biết giá trị chính xác của u'(x + h) từ phương trình vi phân. Tạo một bảng tính để giải các phương trình này, đưa ra một ước đoán ban đầu về giá trị của u(0).

1. Bắt đầu với một bảng tính mở rộng hết cỡ.

2. Thay đổi độ rộng của cột F thành 13.

3. Trong ô A1, gõ:

Độ võng dầm chịu uốn, Bài toán giá trị ban đầu; Phương pháp dò tìm.

4. Tạo một bảng chứa các tham số dầm. Trọng lượng của thanh trong ô B5 là 0,1 T/m= 1 kG/cm. Nhập trị số chiều dài dầm **600 cm** vào trong ô B8.

5. Trong ô A4, gõ **Các tham số của dầm I-550**.

6. Trong ô A5, gõ **w** và căn phải.

7. Gõ **1** trong ô B5.

8. Trong ô C5, gõ **kG/cm**.

9. Trong ô A6, gõ **I** và căn phải.

10. Gõ **62220** trong ô B6.

11. Trong ô C6, gõ **cm^4**.

12. Trong ô A7, gõ **E** và căn phải.

13. Gõ **2100000** trong ô B7.

14. Trong ô C7, gõ **kG/cm^2**.

15. Trong ô A8, gõ **L** và căn phải.

16. Gõ **600** trong ô B8.

17. Chọn ô C8, gõ **cm**.

18. Chọn các ô A5:B8 và chọn lệnh *Create Names* trên bảng chọn *Formula*. Chọn *Left Column* và nhấn OK. Như vậy đã đặt tên cho cấc ô B5:B8 theo các ô bên trái chúng.

19. Định dạng ô B7 là 0.00E+00.

Vì bạn biết nghiệm giải tích của phương trình này, nên hãy tạo một bảng thứ hai để trình bày nghiệm giải tích cho một giá trị nào đó của x (ví dụ x = 180cm) và cho trị số độ võng cực đại tại điểm giữa nhịp với x = L/2.

20. Trong ô F3, gõ **Nghiệm giải tích.**

21. Trong ô F4, gõ **x** và căn phải.

22. Gõ **180** trong ô G4.

23. Trong ô H4, gõ **cm**.

24. Đặt tên ô G4 là **x**.

25. Trong ô F5, gõ **y** và căn phải.

26. Trong ô G5, gõ:

=(W*x/(24*E*I))*(L^3-2*L*x^2+x^3)

27. Trong ô H5, gõ **cm**.

28. Trong ô F6, gõ **y(l/2)** và căn phải.

29. Trong ô G6, gõ:

=5*W*L^4/(384*E*I)

30. Trong ô H6, gõ **cm**.

31. Định dạng các ô G5 và G6 là **0.00000**.

32. Mở rộng khoảng nghiệm, từ **0** tới **600 cm**, với một dãy các giá trị **x** đặt cách nhau 20 cm.

33. Trong ô A10, gõ **x** và căn giữa.

34. Trong ô A11, gõ **(cm)** và căn giữa.

35. Gõ **0** trong ô A12.

36. Gõ **600** trong ô A13.

37. Chọn các ô A12:A13 và kéo phần bôi đen xuống đến ô A42.

38. Trong ô B10, gõ **u'(x)** và căn giữa.

39. Trong ô B11, gõ **(1/cm)** và căn giữa.

40. Trong ô B12, gõ:

=-W*A12*(L-A12)/(2*E*I)

sao chép nó sang các ô B13:B42.

41. Định dạng các ô B12:B42 là **0.0E+00**.

Tính giá trị của u(x) tại mỗi bước, sử dụng giá trị đạo hàm trung bình của nó trong khoảng bước giữa các giá trị x. Giá trị đầu tiên của x là điều kiện biên vắng mặt. Nó tham chiếu ô G9, nơi bạn sẽ nhập các ước đoán của mình.

42. Trong ô C10, gõ **u(x)** và căn giữa.

43. Trong ô C11, gõ **(cm/cm)** và căn giữa.

44. Gõ **=G9** trong ô C12.

45. Trong ô C13, gõ:

=C12+(A13-A12)*(B12+B13)/2

và sao chép sang các ô C14:C42.

Tính giá trị của y tại mỗi bước, sử dụng giá trị trung bình của u(x) trong khoảng giữa các giá trị của x. Đặt giá trị đầu tiên của y là 0, mà là điều kiện biên đã biết tại phía này của khoảng nghiệm.

46. Trong ô D10, gõ **y(x)** và căn giữa.

47. Trong ô D11, gõ **(cm)** và căn giữa.

48. Gõ **0** trong ô D12.

49. Trong ô D13, gõ:

=D12+(A13-A12)*(C12+C13)/2

và sao chép nó sang các ô D14:D62.

Tạo một bảng để tổng kết các kết quả bằng số, với giá trị của *y* tại x = l và x = l/2. Đây cũng là nơi mà bạn sẽ nhập các ước đoán của bạn về giá trị của u(0). Giá trị thể hiện trong ô F9 làm cho giá trị của y(l) xấp xỉ bằng 0 với bốn vị trí thập phân (ta có thể phải mất khoảng 5 phút để tìm giá trị đó).

50. Trong ô F8, gõ **Giải bằng phương pháp số**.

51. Trong ô F9, gõ **u(0)** và căn giữa.

52. Gõ **0.0001** trong ô G9.

53. Trong ô H9, gõ **cm/cm.**

54. Trong ô F10, gõ **y(l/2)** và căn giữa.

55. Gõ **=D27** trong ô G10.

56. Gõ **cm** trong ô H10.

57. Trong ô F11, gõ **y(l)** và căn phải.

58. Gõ **=D42** trong ô H13.

59. Trong ô I12, gõ **cm**.

60. Định dạng các ô G10 và G11 là **0.00.**

Để sử dụng bảng tính này, hãy đưa một ước đoán về giá trị của u(0) vào ô F9. Sau khi bảng tính tính lại, kiểm tra giá trị của y(l) mà được lặp lại trong ô H13 để xem liệu nó bằng 0 hay không. Nếu giá trị đó không bằng 0, thử một giá trị khác cho u(0). Tiếp tục thay đổi giá trị của u(0) cho tới khi bạn có y(l) bằng 0 tới nhiều vị trí thập phân như bạn cần. Khi bạn đã hoàn thành quá trình này, giá trị của u(0) trong ô G9 sẽ là 0.0000610, bảng tính kết quả sẽ giống như hình 11.5.

Cách làm thử dần như trên có thể mất thời gian khi chưa quen. Bạn có thể dùng hàm SOLVER thì nhanh hơn, cách làm như sau:

- Chọn lệnh *Tool > Solver*. Đặt *Target Cell* là G11, chọn *Value of 0*, rồi đặt *By Changing Cell* vào G9.

	A	B	C	D	E	F	G	
1	ĐỘ VÕNG DẦM CHỊU UỐN, BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BAN ĐẦU; PHƯƠNG PHÁP DÒ TÌM							
2								
3						Nghiệm Giải tích		
4	Các tham số của dầm I-550.					x	180	cm
5	w	1	kG/cm			y	0.01	cm
6	I	62220	cm4			y(L/2)	0.01	cm
7	E	2.10E+06	kG/cm2					
8	L	600	cm			Giải bằng phương pháp số		
9						u(0)	0.0000610	cm/cm
10	x	u'(x)	u(x)	y(x)		y(L/2)	0.01	cm
11	(cm)	(1/cm)	(cm/cm)	(cm)		y(L)	0.00	cm
12	0	0.0E+00	0.000061	0				
13	20	-4.4E-08	6.1E-05	1.2E-03				
14	40	-8.6E-08	5.9E-05	2.4E-03				
15	60	-1.2E-07	5.7E-05	3.6E-03				
16	80	-1.6E-07	5.4E-05	4.7E-03				
17	100	-1.9E-07	5.1E-05	5.7E-03				
18	120	-2.2E-07	4.7E-05	6.7E-03				
19	140	-2.5E-07	4.2E-05	7.6E-03				
20	160	-2.7E-07	3.7E-05	8.4E-03				
21	180	-2.9E-07	3.1E-05	9.1E-03				
22	200	-3.1E-07	2.5E-05	9.6E-03				

Hình 11.5: *Độ võng do uốn của một dầm gối tự do dưới trọng lượng bản thân: giải bài toán giá trị biên bằng phương pháp dò tìm.*

- Nhấp chuột vào *Solver* để tính toán. Khi *Solver* đã hoàn thành, bảng tính kết quả sẽ giống như hình 11.5.

So sánh các giá trị giải tích của nghiệm trong các ô G5 và G6 lần lượt với các nghiệm bằng số trong các ô G10 và G11. Chú ý rằng cho dù bạn đã có được giá trị biên với độ chính xác đến hàng vạn, nhưng phần còn lại của các giá trị nghiệm chỉ có độ chính xác đến khoảng hàng nghìn. Sự mất chính xác này là do độ chính xác cố hữu của phương pháp. Vì độ chính xác tỉ lệ tới khoảng cách giữa các điểm lưới, nên nếu khoảng cách này giảm thì độ chính xác tăng, cho tới khi sai số làm tròn trở nên đáng kể.

11.2.2. Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn

Một cách khác để giải bài toán này là viết các đạo hàm trong phương trình vi phân như các sai phân giữa. Phương pháp này đã được sử dụng trong chương 8 để tính các đạo hàm. Bằng cách định tâm mỗi trong các sai phân này trên các điểm lưới, sẽ có hệ phương trình kết hợp mà phải được giải đồng thời. Sử dụng các phép thay thế sau đây cho các đạo hàm bậc nhất và bậc hai:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Viết lại đạo hàm bậc hai trong bài toán phương trình vi phân sử dụng các phép thay thế sai phân giữa:

$$\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}=-\frac{m}{EI}$$

Bạn sẽ có một trong các phương trình này cho mỗi điểm lưới ngoại trừ hai điểm tại các biên, nơi mà các giá trị của y là cố định bởi các điều kiện biên.

Ba phương pháp thực hiện tốt trong một bảng tính để giải bài toán theo dạng này là phương pháp lặp, phương pháp lặp có tăng tốc độ và phương pháp ma trận.

11.2.2.1. Phương pháp tính sai phân hữu hạn lặp

Phương pháp lặp là một dạng của phương pháp xấp xỉ liên tiếp mà đã được thảo luận trong chương 9 và chương 10. Giải phương trình sai phân cho bài toán phương trình vi phân đối với y(x):

$$y(x)=\frac{1}{2}\left[y(x+h)+y(x-h)+h^2\frac{m}{EI}\right]$$

Sau đây sẽ sử dụng phương trình này cho tất cả các điểm trong của bài toán, và sử dụng:

$y(0) = 0$

$y(l) = 0$ tại điểm cuối.

Chúng ta sẽ tạo một bảng tính để giải bài toán này sử dụng phương pháp lặp. Phần đầu của bảng tính này giống như phần mà bạn đã sử dụng cho ví dụ phương pháp dò tìm, vì vậy bạn có thể sử dụng lại phần này của bảng tính đó.

1. Tạo ra một bản sao của bảng tính trước (hình 11.5), đặt tên mới là H11-6.

2. Trong ô A1, gõ **Độ võng dầm chịu uốn, giá trị biên; phương pháp sai phân hữu hạn.**

3. Xoá sạnh các ô E3:G10, và B10:D62 .

Tạo một bảng thứ hai để trình bày nghiệm giải tích cho giá trị nào đó của x (ví dụ x = 72 cm) và cho độ võng cực đại tại x = l/2.

4. Trong ô E3, gõ **Nghiệm giải tích**.

5. Trong ô E4, gõ **x** và căn phải.

6. Gõ **72** trong ô F4.

7. Trong ô G4, gõ **cm**.

8. Đặt tên ô F4 là **X**.

9. Trong ô E5, gõ **y** và căn phải.

10. Trong ô F5, gõ:

=(W*X/(24*E*I))*(L^3-2*L*X^2+X^3)

11. Trong ô G5, gõ **cm**.

12. Trong ô E6, gõ **y(l/2)** và căn phải.

13. Trong ô F6, gõ:

=5*W*L^4/(384*E*I)

14. Gõ **cm** trong ô G6.

15. Định dạng các ô F6 và F7 là **0.00000.**

Mở rộng khoảng nghiệm, từ 0 tới 600 cm, với một lưới các giá trị x đặt cách nhau 12cm.

16. Trong ô A10, gõ **x** và căn giữa.

17. Trong A11, gõ **(cm)** và căn giữa.

18. Gõ 0 trong ô A12 và **12** trong ô A13.

19. Chọn các ô A12:A13 và kéo phần bôi đen xuống ô A42.

Đưa vào ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu để bạn có thể lập lại các giá trị trong bảng tính với một giá trị đã biết.

20. Trong ô A3, gõ **Init Flag**.

21. Gõ FALSE trong ô B3 và **0** trong ô C3.

Đặt tên các ô B3 và C3 lần lượt là Init và Init_Val.

Đưa vào phương trình vi phân, và sau đó nhập các giá trị biên vào trong ô đầu tiên và ô cuối cùng của khoảng (B12 và B62). Kiểm tra ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu để xem liệu có cần lập lại bài toán hay không.

22. Trong ô B10, gõ **y(x)** và căn giữa.

23. Trong ô B11, gõ **(cm)** và căn giữa.

24. Gõ **0** trong ô B12.

25. Trong ô B13, gõ:

=IF(INIT=0,INIT_VAL,0.5*(B14+B12+((A14-A12)/2)^2*W*A13*(L-13)/(2*E*I)))

và sao chép nó sang các ô B14:B61.

26. Gõ **0** trong ô B62.

27. Định dạng các ô B12:B62 là **0.00000.**

Sao chép giá trị cực đại của y từ ô B37 tới phần trên cùng của bảng tính để so sánh với giá trị giải tích.

28. Trong ô E8, gõ **Giải bằng phương pháp số.**

29. Trong ô E9, gõ **y(l/2)** và căn phải.

30. Gõ **=B37** trong ô F9.

31. Trong ô G9, gõ **cm**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ĐỘ VÕNG DẦM CHỊU UỐN, BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN;						
2	PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN						
3	Init Flag	FALSE	0		Nghiệm Giải tích		
4	**Các tham số của dầm I-550.**				x	72	cm
5	w	5.58	kG/cm		y	0.43	cm
6	I	271.8	cm4		y(L/2)	1.155	cm
7	E	3.00E+07	kG/cm2				
8	L	600	cm		Giải bằng phương pháp số		
9							
10	x	y(x)			y(L/2)	1.155610	cm
11	(cm)	(cm)					
12	0	0.00000					
13	12	0.07391					
14	24	0.14746					
15	36	0.22034					
16	48	0.29221					

Hình 11.6: *Độ võng do uốn của một dầm gối tự do dưới trọng lượng bản thân: giải bài toán giá trị biên bằng phương pháp lặp sai phân hữu hạn.*

32. Định dạng ô F9 là **0.00000.**

Chuyển sang phép lặp và làm cho nó tiếp tục lặp cho tới khi sự thay đổi trong các giá trị trên bảng tính thu được nhỏ hơn 10^{-6}.

Chọn lệnh *Tool > Option, Calculation tab*. Trong hộp thoại, đặt *Maximum Iterations* tới 10000, đặt *Maximum Change* tới 1E-6, và nhấn OK.

33. Lưu bảng tính nếu bạn muốn giữ một bản sao.

Để sử dụng bảng tính này, đặt giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu (trong ô B3) là 0 và ấn F9. Sau khi phép tính đã lặp lại, thay đổi ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 1, và ấn F9 lần nữa để bắt đầu quá trình lặp.

Bảng tính sẽ tiếp tục tính lại cho tới khi các giá trị thay đổi nhỏ hơn 10^{-6}, tại điểm đó bạn có nghiệm. Sau khi đã hội tụ, bảng tính này sẽ giống như hình 11.6.

11.2.2.2. Phương pháp sai phân hữu hạn có tăng tốc

Một bảng tính mà hội tụ chậm như bảng tính nêu trên đòi hỏi một biện pháp tăng tốc nào đó. Chúng ta có thể sử dụng phương pháp giảm dư trên/dưới ở đây, cũng như đã làm trong chương trước để đẩy nhanh tốc độ giải nghiệm các hệ phương trình. Cần phải viết lại phương trình sai phân để có thể điều chỉnh lượng thay đổi trong nghiệm tại mỗi phép lặp. Sử dụng hệ số không đổi, Cf, để điều chỉnh lượng thay đổi đó:

$$y(x) = y(x) + Cf\left[\frac{1}{2}\left(y(x+h) + y(x-h) + h^2\frac{m}{EI}\right) - y(x)\right]$$

Nhập thay đổi này vào bảng tính hiện có. Đầu tiên, hãy nhập vào hệ số giảm dư.

1. Sao chép bảng tính hình 11.6 rồi đặt tên là bảng tính H11-7.

2. Trong ô A2, gõ **có chùng**.

3. Trong ô A9, gõ **Hệ số chùng**.

4. Gõ **1.9** trong ô B9.

5. Đặt tên ô B9 là Cf.

Thay đổi công thức sai phân để đưa vào hệ số giảm dư nhằm kiểm soát lượng thay đổi của nghiệm trong mỗi phép lặp. Giá trị của nghiệm trong công thức liên quan tới ô có chứa công thức, tạo ra một tham chiếu vòng. Bạn cũng có thể cất nghiệm vào một cột riêng và đạt được hiệu quả tương tự.

6. Trong ô B13, gõ:

=IF(INIT,INIT_VAL,(0.5*(B14+B12+((A14-A12)/2)^2*W*A13(L-A13)/(2*E*I)) - B13)*Cf+B13)

và sao chép nó sang các ô B14:B61.

Bảng tính này thao tác theo cách tương tự như bảng tính trước. Trước tiên ta đặt giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu (B3) là 0 và ấn F9. Sau khi bài toán được khởi động lại, hãy thay đổi giá trị của ký hiệu thiết lập trạng thái ban đầu là 1 và ấn lại F9 để bắt đầu bảng tính tính toán. Phiên bản này của bảng tính hội tụ nhanh hơn gần 15 lần so với các phương pháp khác!

Trên hình 11.7 trình bày bảng tính kết quả thu được.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ĐỘ VÕNG DẦM CHỊU UỐN, BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN,						
2	PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN, CÓ CHÙNG						
3	Init Flag	FALSE	0		Nghiệm Giải tích		
4	**Các tham số của dầm thép.**				x	72	in
5	w	5.5833	lb/in		y	0.43170	in
6	I	271.8	in4		y(L/2)	1.15549	in
7	E	3.00E+07	psi				
8	L	600	in		Giải bằng phương pháp số		
9	H.số chùng	1.9					
10	x	y(x)			y(L/2)	1.155860	in
11	(cm)	(cm)					
12	0	0.00000					
13	12	0.07392					
14	24	0.14750					
15	36	0.22039					
16	48	0.29228					

Hình 11.7: *Độ võng của dầm; giải bài toán giá trị biên với các sai phân hữu hạn được tăng tốc.*

Nếu bạn thử làm cho bảng tính hội tụ nhanh hơn bằng cách sử dụng các giá trị của hệ số giảm dư (Cf) lớn hơn, thì bảng tính lại bị phân kỳ. Với một hệ số giảm dư bằng 2, các giá trị nghiệm nhận được rất lớn sau một vài phép lặp. Nếu có một nghiệm phân kỳ, hãy sử dụng hệ số tăng tốc nhỏ hơn. Đối với những bài toán mà phân kỳ với các sai phân hữu hạn được lặp, hãy sử dụng hệ số tăng tốc nhỏ hơn 1 (hệ số giảm tốc) để làm chậm dần các thay đổi.

11.2.2.3. Sử dụng phương pháp ma trận

Có thể sử dụng các hàm ma trận cài sẵn trong Excel để giải hệ phương trình tuyến tính. Sự hạn chế duy nhất là hệ phương trình đó phải gồm không quá 60 phương trình. Excel không có giới hạn xác định đối với phép nghịch đảo ma trận, nhưng giới hạn thực chừng 60×60, tuỳ theo vào dung lượng bộ nhớ có thể sử dụng được và nội dung của ma trận. Nếu Excel không thể giải được ma trận vì nó quá lớn, thì hàm MINVERSE đưa ra kết quả là #VALUE!.

Đối với các ma trận lớn hơn, cần sử dụng chương trình Macro hoặc một ứng dụng bên ngoài để thực hiện các phép nghịch đảo. Bạn có thể viết một chương trình giải ma trận trong ngôn ngữ thuật toán như Fortran, Pascal hay C rồi lưu giữ nó trong thư viện liên kết động (Dynamic Link Library). Sau đó, bộ giải có thể được ghi với Excel và được gọi bằng hàm CALL.

Để sử dụng bộ giải ma trận, viết lại các phương trình sai phân như các phương trình ma trận. Viết lại các phương trình vi phân mẫu dưới dạng:

$$\frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}=-\frac{m}{EI}$$

$$y(x+h)-2y(x)+y(x-h)=-h^2\frac{m}{EI}$$

với các điều kiện biên: $y(0) = y(l) = 0$

Ta có thể dễ dàng viết lại phương trình này thành một phương trình ma trận:

$$Ax = b$$

tức là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & -2 & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Trong đó :

$$b_0 = b_n = 0$$

$$b_i = h^2 \frac{m}{EI} ; i = 1, 2, 3,..., n-1$$

$$m_i = \frac{wx_i}{2}(1 - x_i)$$

Một khi các phương trình ở dạng này thì phép giải không có gì phức tạp. Hãy nghịch đảo ma trận A và nhân nghịch đảo đó với véctơ b để có véctơ nghiệm x. Chúng ta sẽ tạo một bảng tính để giải bài toán này. Phần trên cùng của bảng tính này cũng giống như ở ví dụ trước, vì vậy bạn có thể sử dụng lại phần bảng tính đó. Các thao tác như sau:

1. Bắt đầu với một bảng tính bản sao của ví dụ trước, đặt tên là H11-8.

2. Chuyển sang tính lại bằng tay với lệnh *Calculation* trên bảng chọn *Tool > Options*.

3. Thay đổi độ rộng của cột F thành 13.

4. Trong ô A1, gõ **Độ võng dầm chịu uốn, giá trị biên; phương pháp sai phân hữu hạn.**

5. Trong ô A2, gõ **Phương pháp ma trận.**

6. Xoá sạch các ô B12:B62.

7. Đánh dấu một khoảng cho véctơ nghiệm.

8. Trong ô C10, gõ **b** và căn giữa.

Nhập b, vế phải của phương trình ma trận, bao gồm cả các điều kiện biên.

9. Gõ 0 trong ô C12.

10. Trong ô C13, gõ:

=-((A13-A12)^2*W*A13*(L-A13)/(2*E*I))

và sao chép nó sang các ô C14:C61.

11. Gõ 0 trong ô C62.

12. Đặt tên các ô C12:C62 là **B**.

Đánh dấu và đặt tên các vùng nhớ của ma trận A và nghịch đảo A^{-1} của nó.

13. Trong ô D11, gõ **A** và căn giữa.

Chọn các ô D12:BB62, đặt tên cho chúng là A, và vẽ đường khung viền.

14. Trong ô D65, gõ **AINV** và căn giữa.

Chọn các ô D66:BB116, đặt tên chúng AINV, và vẽ đường khung viền.

Ma trận hầu như chứa toàn những số 0, với các số 1 và 2 dọc theo đường chéo. Vì chắc chắn bạn không muốn gõ vào máy 2601 giá trị nên hãy tạo một chương trình Visual Basic để điền đầy vào ma trận.

Mở một trang tính modul và đặt tên là MakeMat.

15. Gõ chương trình sau đây vào modul

```
'
' Make a Matrix
' Chương trình để điền đầy ma trận sai phân hữu hạn
'
Sub MakeMatrix
Dim intI As Integer
Const numRows = 51
'Điền đầy ma trận bằng các số 0.
Range ("A").Select
Selection.Formula = "0"
'Chèn điều kiện biên vào góc trái bên trên.
Range("A").Cells(1,1).Select
ActiveCell.Formula = "1"
'Kiểm soát các ô bên trong.
For intI = 2 to numRows -1
    Range("A").Cells(intI,intI).Select
    ActiveCell.Formula = "-2"
    Range("A").Cells(intI,intI + 1).Select
    ActiveCell.Formula = "1"
    Range("A").Cells(intI,intI - 1).Select
    ActiveCell.Formula = "1"
Next intI
'Chèn điều kiện biên vào góc phải bên trên.
Range("A").Cells(numRows,numRows).Select
ActiveCell.Formula = "1"
End Sub
```

Hoạt động của thủ tục nói trên như sau: Đầu tiên nó chọn toàn bộ ma trận rồi điền đầy bằng các số 0 nhờ lệnh:

```
Range ("A"). Select
Selection.Formula = "0"
```

Tiếp theo, chương trình đặt điều kiện biên ở góc trên bên trái. Phương thức Range("A") trả về các ô được đặt tên là A trên bảng tính. Rồi phương thức Cells(1,1) trả về ô trong dòng đầu tiên, cột đầu tiên. Phương thức Select chọn ô nào sẽ làm cho nó trở thành ô hoạt động. Câu lệnh ActiveCell.Formula sẽ chèn trị số 1 vào ô đã chọn.

```
Range("A").Cells(1,1).Select
ActiveCell.Formula = "1"
```

Khối tiếp theo của các ô bắt đầu tìm kiếm qua các dòng (hoặc cột) và chèn 3 giá trị dọc theo đường chéo của ma trận ứng với mỗi lần xấp xỉ tìm kiếm.

```
For intI = 2 to numRows -1
        Range("A").Cells(intI,intI).Select
        ActiveCell.Formula = "-2"
        Range("A").Cells(intI,intI + I).Select
        ActiveCell.Formula = "1"
        Range("A").Cells(intI,intI - 1).Select
        ActiveCell.Formula = "1"
    Next intI
```

Khối cuối cùng chèn điều kiện biên vào góc phải bên dưới của ma trận, theo cách tương tự như ở các góc khác của ma trận.

```
Range("A").Cells(numRows,numRows). Select
ActiveCell.Formula = "1"
```

Chèn một nút bấm lên trang tính và gắn nó với thủ tục MakeMatrix

16. Kích hoạt bảng tính của hình 11.8.

17. Mở thanh công cụ *Drawing* và nhấp vào nút *Drawing* trên thanh công cụ Standard rồi nhấp vào nút *Create Button* và kéo nút lên trang tính.

18. Khi hộp thoại *Assign Macro* xuất hiện, chọn thủ tục *MakeMatrix* và nhấn vào OK.

19. Chọn tên trên nút và đổi nó thành *Fill Matrix*.

20. Đóng thanh công cụ *Drawing*.

21. Nhấn vào bất cứ chỗn ào trên trang tính để bỏ chọn nút, rồi nhấn nchuột vào nút để chạy thủ tục.

Nghịch đảo ma trận trong AINV.

22. Chọn AINV từ hộp *Name*, hoặc chọn lệnh *Edit* > *Goto* và chọn AINV

23. Tại ô trên cùng bên trái của vùng được chọn, gõ =MINVERSE(A) và ấn Ctrl–Shift–Enter để chèn nó dưới dạng mảng vào trong toàn bộ vùng chọn.

Bạn sẽ cần phải đợi vài phút để Excel tính xong ma trận nghịch đảo nếu máy tính là loại cũ. Các máy đời Pentium chỉ tính vài giây là xong. Nếu kết quả mà máy tính đưa ra là #VALUE! thay cho đáng lẽ là các con số, thì có thể là bạn đã gõ máy sai chỗ nào đó, hoặc có thể bài toán của bạn đã vượt quá giới hạn của Excel về kích thước ma trận. Nếu ma trận quá lớn, thì chỉ còn cách là phải giảm độ lớn của ma trận cho tới khi có thể giải được nó. Bạn có thể thực hiện điều này bằng cách tạo khoảng giãn cách giữa các điểm lưới rộng hơn, như thế sẽ làm giảm được tổng số các điểm lưới. Nhưng độ chính xác cũng bị giảm theo đó.

Bây giờ hãy nhân ma trận nghịch đảo với véctơ b, trong các ô C12:C62, và cất kết quả trong các ô B12:B62. Đây chính là nghiệm của bài toán.

24. Chọn các ô B12:B62. Trong ô trên cùng của vùng chọn, gõ =MMULT(AINV,B) và ấn Ctrl-Shift-Enter để chèn nó vào dưới dạng mảng.

25. Nhấn phím F9 để tính-toán lại bảng tính.

Bảng tính bây giờ giống như hình 11.8. Để sử dụng bảng tính, hãy tạo bất kỳ sự thay đổi nào của các giá trị đầu vào và ấn F9 để tính lại ma trận. Sẽ mất vài phút để tính một nghiệm. Phần lớn thời gian đó dùng để nghịch đảo ma trận 51 nhân 51. Khi hoàn thành việc tính toán, kết quả sẽ nằm trong cột B.

ĐỘ VÕNG DẦM CHỊU UỐN, BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN,							
PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN							
Init Flag	FALSE	0		Nghiệm Giải tích			
Các tham số của dầm thép.				x	72	in	
w	5.5833	lb/in		y	0.43170	in	
I	271.8	in4		y(L/2)	1.15549	in	
E	3.00E+07	psi					
L	600	in		Giải bằng phương pháp số			
H số chùng	1.9						
x	y(x)	b		y(L/2)	1.155860	in	
(cm)	(cm)		A				
0	0.00000	0	1	0	0	0	0
12	0.07392	-0.00035	1	-2	1	0	0
24	0.14750	-0.00068	0	1	-2	1	0
36	0.22039	-0.00100	0	0	1	-2	1
48	0.29228	-0.00131	0	0	0	1	-2

Hình 11.8: *Độ võng do uốn dầm: giải bài toán giá trị biên với các sai phân hữu hạn.*

11.2.3. Xử lý các điều kiện biên bậc cao hơn

Bài toán vừa giải có các điều kiện biên Dirichlet; đó là giá trị của hàm được định rõ tại các biên. Bài toán có thể cũng dễ dàng giải nếu như đã có các điều kiện biên Neumann mà ở đó đạo hàm của hàm số được định rõ trên các biên. Hoặc nó có thể đã có

sự kết hợp các điều kiện biên Direchlet và Neumann, với giá trị của hàm được định rõ tại một biên và đạo hàm của hàm số được định rõ tại một biên khác.

Để xử lý các điều kiện biên bậc cao hơn này, hãy đưa một điểm lưới bổ sung vào trong bài toán, ngay bên ngoài biên với điều kiện biên đạo hàm. Lập một sai phân giữa tại biên bằng cách sử dụng điểm bổ sung đó để đặt giá trị của đạo hàm. Ví dụ, trong bài toán của ví dụ trước, nếu điều kiện biên tại điểm x = 0 là:

$$y'(0) = 0{,}00616015$$

thay vì:

$$y(0) = 0$$

thì chúng ta phải sẽ thêm một điểm lưới khác tại x = -h. Sau đó viết sai phân giữa bậc nhất tại x = 0 và đặt nó bằng 0,00616015.

$$\frac{y(h) - y(-h)}{2h} = 0{,}00616015$$

Phương trình này sẽ được dùng để định rõ giá trị của hàm tại điểm lưới bổ sung, y(-h). Tại điểm biên hiện tại, sử dụng phương trình sai phân tương tự cái mà bạn đã sử dụng ở phần trong của bài toán. Các điều kiện biên đạo hàm bậc cao hơn được xử lý theo cách tương tự - nghĩa là chỉ việc chèn phương trình sai phân cho đạo hàm bậc cao hơn. Một cách khác là, bạn có thể kết hợp theo phép đại số phương trình trên với phương trình tại biên, và thu được các kết quả tương tự mà thậm chí không cần bổ sung thêm một điểm lưới khác vào bài toán.

Nên nhớ rằng những bài toán có các điều kiện biên Neumann ở tất cả các phía có thể không có các nghiệm duy nhất. Nếu bạn có thể bổ sung thêm một hằng số tuỳ ý cho hàm số trong phương trình vi phân và không thay đổi phương trình vi phân, thì có thể không có một nghiệm duy nhất. Điều này sẽ xảy ra khi hàm (u(x)) chỉ xuất hiện trong các đạo hàm của phương trình vi phân.

Chương 12

SỬ DỤNG CÁC NÚT ĐIỀU KHIỂN TÙY BIẾN TRONG BẢNG TÍNH

Các sản phẩm bảng tính đã thu hút phần lớn những người sử dụng nhờ việc mở rộng môi trường bảng tính. Tuy nhiên, sự mở rộng này là một trong những trở ngại lớn nhất khi bạn cố gắng dàn rộng các biện pháp bảo vệ. Việc kiểm tra dữ liệu và thực hiện những thao tác nhất định dựa vào dữ liệu của người dùng là những nhiêm vụ thông thường nhất. Chương này giúp cho người không chuyên về lập chương trình biết cách sử dụng các nút điều khiển tuỳ biến như các hộp danh sách và nút tuỳ chọn, để đơn giản hoá việc sử dụng một mẫu Worksheet.

12.1. LÀM VIỆC VỚI CÁC NÚT ĐIỀU KHIỂN TUỲ BIẾN

Nút điều khiển tuỳ biến là một loại đối tượng đặc biệt được đặt trên một Worksheet để tạo thuận tiện cho việc nhập dữ liệu của người sử dụng. Chẳng hạn một hộp danh sách cho phép chọn từ danh sách có sẵn thay vì đánh vào dòng lệnh tương ứng. Bạn đặt các nút điều khiển trên Worksheet bằng cách vẽ chúng như khi vẽ một vật thể đồ hoạ vậy, như một hình chữ nhật chẳng hạn.

Do đó, các nút điều khiển tuỳ biến chia sẻ nhiều thuộc tính chung với các đối tượng vẽ và trong thực tế các nút điều khiển tuỳ biến có thể xem như các đối tượng đồ hoạ tương tác. Chúng được vẽ, di chuyển và xoá đi cũng như các đối tượng đồ hoạ khác. Nhưng có một khác biệt quan trọng là thuật ngữ "user input" (nhập liệu của người sử dụng) không chỉ giới hạn trong việc sử dụng các nút điều khiển tuỳ biến. Chúng không bị giới hạn trong những ứng dụng nhập dữ liệu đơn giản.

Trong thực tế, chức năng quan trọng của các nút điều khiển tuỳ biến là tập hợp dữ liệu của người sử dụng nhằm tính toán lại một mẫu Worksheet. Chẳng hạn người sử dụng có thể vẽ một biểu đồ cho bất cứ vùng nào trong số các vùng, một hộp danh sách có thể hỗ trợ cho việc lựa chọn vùng. Khi bạn nhấp chuột chọn một vùng, những công thức sẵn có của Worksheet sẽ thực hiện những phần việc còn lại.

12.2. THANH CÔNG CỤ FORMS

Các công cụ dùng để vẽ các nút điều khiển nằm trên thanh công cụ *Forms*. Bạn chọn lệnh *View \ Toolbar* để hiển thị thanh công cụ *Forms*.

Hình 12.1

Khi hiển thị thanh công cụ, bạn sẽ thấy có một số nút điều khiển không sẵn sàng hoạt động, những nút điều khiển này chỉ được dùng trong các hộp thoại, đôi khi được xem như những Forms và không thể đưa vào các Worksheet. Bảng 12.1 mô tả những công cụ vẽ đối với các nút điều khiển tuỳ biến trên thanh công cụ Forms, và chỉ ra cái nào trong chúng có thể được sử dụng trên một Worksheet và cái nào không. Nói chung không có tác dụng cho người sử dụng trực tiếp đối với những nút điều khiển thụ động không có gì xẩy ra khi bạn nhấp chuột vào chúng.

12.3. ĐẶT MỘT NÚT ĐIỀU KHIỂN TRÊN MỘT WORKSHEET

Theo những bước sau đây để vẽ một nút điều khiển trên một Worksheet:

- Hiển thị thanh công cụ Forms bằng cách dùng lệnh *View \ Toolbar*.

- Nhấp chuột trên một nút điều khiển trên thanh công cụ Forms (một trong những công cụ có thể sử dụng trên Worksheet được chỉ rõ trong bảng 12.1). Con trỏ chuột sẽ trở thành chữ thập mảnh.

- Dùng chuột để vẽ đối tượng trên Worksheet (giống như bạn vẽ bất cứ một đối tượng đồ hoạ nào).

Bảng 12.1. Các công cụ vẽ trên thanh công cụ

Công cụ	Mô tả	Dùng được trên Worksheet	Thụ động
	Label (text)	Có	Có
	Edit box	Không	Không
	Group box	Có	Có
	Button	Có	Không
	Hộp kiểm tra	Có	Không
	Option box	Có	Không
	Hộp danh sách	Có	Không
	Hộp danh sách động	có	Không

Công cụ	Mô tả	Dùng được trên Worksheet	Thụ động
	Combo list/edit	Không	Không
	Combo drop-down/edit	Không	Không
	Thanh cuộn	Có	Không
	Spinner	Có	Không
	Toggle Gril	Có	Không

Giả sử cần di chuyển hoặc thay đổi kích thước một hộp kiểm tra nút điều khiển. Khi bạn nhấp chuột trên hộp kiểm tra, nó sẽ được chọn hoặc bỏ chọn. Bạn nhấp chuột phải vào nút điều khiển để chọn nó. Sau đó nó có thể di chuyển hoặc thay đổi kích thước cùng cách như bất cứ vật thể đồ hoạ nào.

12.4. LIÊN KẾT CÁC NÚT ĐIỀU KHIỂN VỚI CÁC Ô

Có một thuộc tính quan trọng bị chi phối bởi một số nút điều khiển. Ta có thể liên kết với các ô của Worksheet. Điều này tạo thuận lợi cho việc sử dụng các nút điều khiển này mà không cần đến việc lập trình. Đối với các người muốn phát triển Worksheet, đặc biệt là đối với những người không lập trình hard-core VBA, đây là chìa khoá để rút ra mục đích cao nhất từ các nút điều khiển tuỳ biến.

Đây là các nút điều khiển được liên kết với các ô:

- Hộp danh sách.
- Hộp danh sách di động.
- Hộp kiểm tra.
- Nút tuỳ chọn.
- Thanh cuộn.
- Spinner

Giả sử một trong các nút điều khiển ở trên đã được đặt trên một Worksheet rồi. Để nối một nút điều khiển với một ô, nhấp chuột phải chính điều khiển đó (cách này dùng khá tiện lợi) hoặc chọn *Format \ Control*, rồi chọn tab *Control*. Nhưng trước khi chúng ta giải thích thêm các xác lập hiện có từ tab *Control*, bạn cần hiểu vài điều quan trọng về việc liên kết các nút điều khiển với các ô.

Khi bạn nhấp chuột nên một nút điều khiển được liên kết với một ô, một giá trị được đặt trong ô liên kết.

Việc nhấp chuột vào một nút điều khiển có thể chỉ cung cấp những kết quả cho một ô. Tuy nhiên, một ô có thể liên kết với nhiều nút điều khiển.

Các nút điều khiển không chỉ được liên kết với một ô trong cùng một Workbook mà còn với Workbook khác (trong trường hợp này Workbook phải mở cho nút điều khiển hoạt động).

Các ô được viết từ một nút điều khiển nào đó thì được tham chiếu bởi các ô khác. Việc nhấp chuột vào nút điều khiển tạo ra sự tính toán lại.

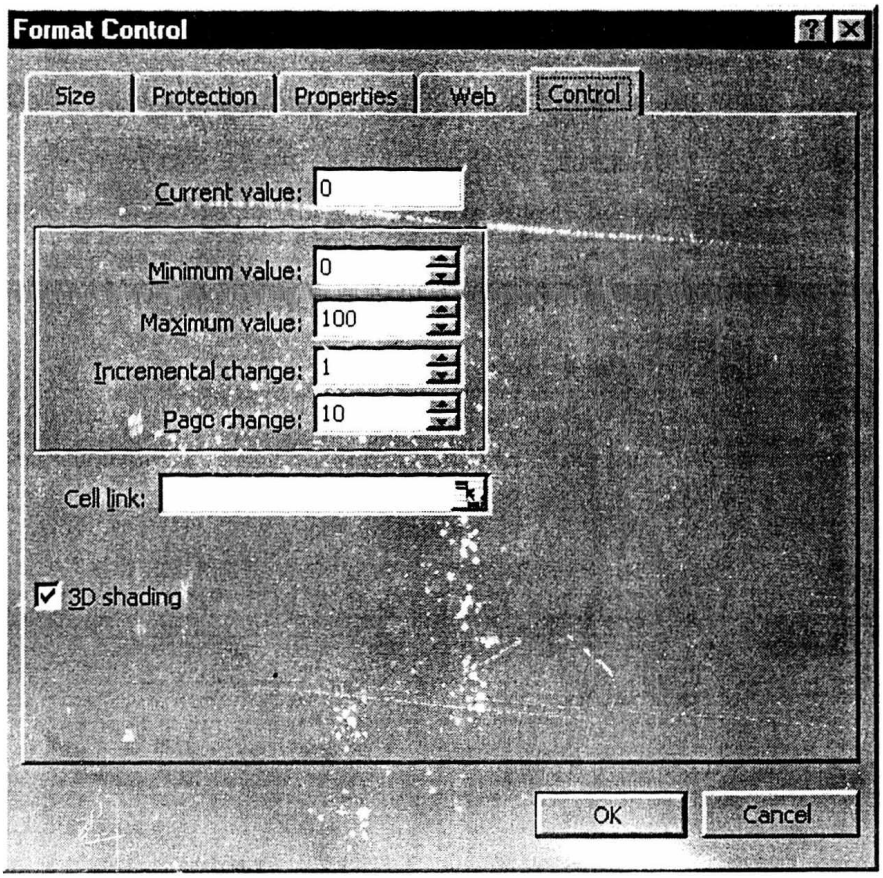
12.5. ĐỊNH DẠNG CÁC NÚT ĐIỀU KHIỂN

Thuật ngữ Format (định dạng), khi được áp dụng với nút điều khiển, bao gồm tất cả những thuộc tính của nút điều khiển, không chỉ định dạng xem một cách đơn thuần. Sau đây là cách truy xuất hộp thoại Formatting đối với các nút điều khiển Worksheet.

- Nhấp nút chuột phải nên nút điều khiển.
- Chọn *Format \ Control* từ trình đơn ngữ cảnh.

Trong các đoạn tiếp theo, dưới đây sẽ giải thích các xác lập có sẵn trong hộp hội thoại này.

12.5.1. Xác lập các tuỳ chọn nút điều khiển



Hình 12.2

Các nút điều khiển đang hoạt động có các *Control Option*. Đây là chỗ sự liên kết ô được xác định, cũng như những xác lập khác. Có hai cách để tiếp cận các tuỳ chọn nút điều khiển:

- Thực hiện theo trình tự để hiển thị hộp hội thoại *Format Control* (đã được mô tả ở trên), sau đó chọn tab *Control*.

- Hoặc chọn nút điều khiển và nhấp chuột trên công cụ *Control Properties* trên thanh công cụ *Forms*.

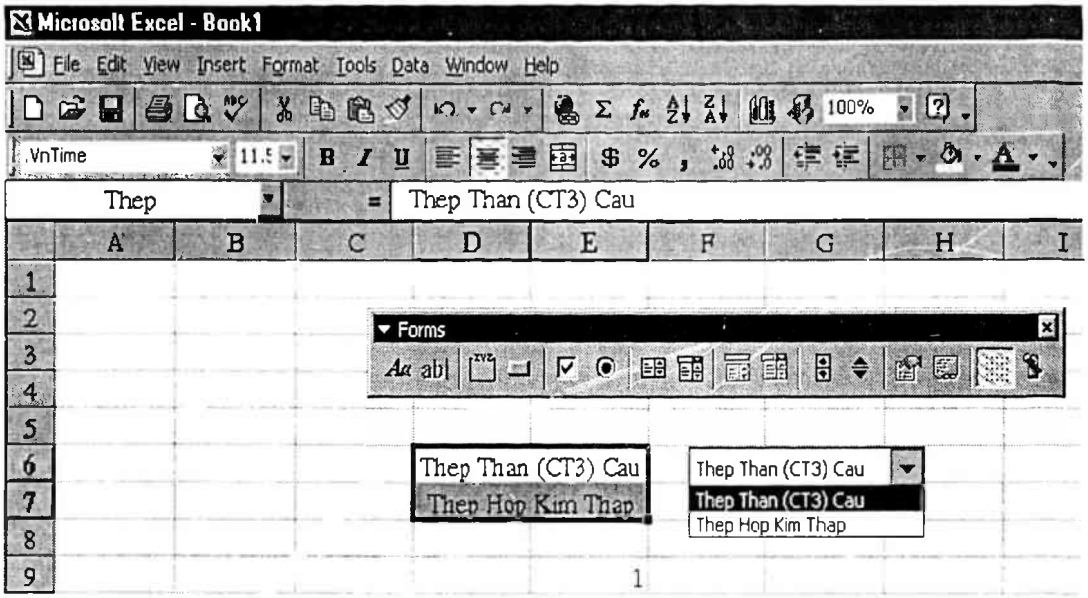
Nội dung của hộp hội thoại này sẽ khác nhau tuỳ theo loại nút điều khiển (Giá trị hiện hành xác lập trong tab Control của hộp hội thoại Format Control không hữu ích cho các nút điều khiển trên các Worksheet, nó được sử dụng nhằm thiết lập các giá trị mặc định cho các nút điều khiển trên các biểu mẫu tuỳ biến theo yêu cầu lập chương trình thực hành. Điều này đúng với tất cả các nút những nút điều khiển cho phép giá trị ban đầu được thiết lập).

12.6. CÁCH SỬ DỤNG TỪNG LOẠI NÚT ĐIỀU KHIỂN VÀ VÍ DỤ MINH HOẠ

Khi bạn sử dụng nút điều khiển tuỳ thuộc vào tình huống cụ thể bạn có thể áp dụng chúng cho linh hoạt.

12.6.1. Hộp danh sách và hộp danh sách di động

Hộp danh sách và hộp danh sách di động về cơ bản đều giống nhau (như các lựa chọn trong tab Control...), tuy nhiên người ta thường sử dụng hộp danh sách di động vì chúng chiếm ít diện tích và sự lựa chọn các lực chọn cũng nhanh hơn (điều này khá quan trọng khi làm các Worksheet phức tạp khi đó việc bố trí các nút điều khiển cho hợp lý cũng là một vấn đề không dễ dàng).



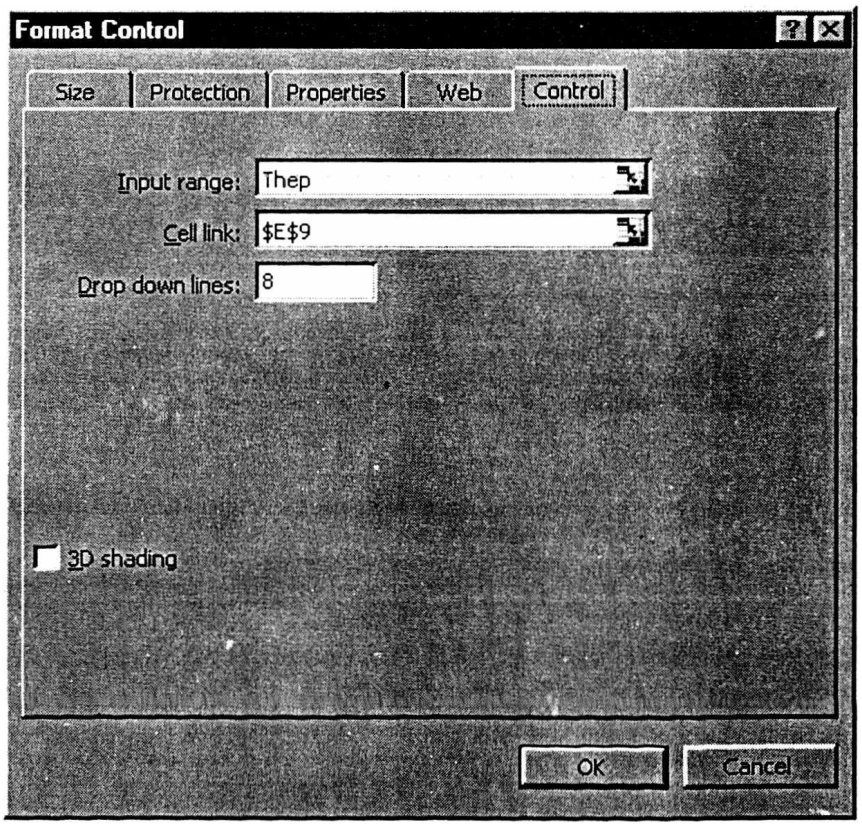
Hình 12.3: *Hộp danh sách và những thuộc tính của nút điều khiển kết hợp với nó.*

Các hộp danh sách cho phép người sử dụng lựa chọn một mục từ danh sách và đặt một số trong ô liên kết dựa vào mục này mà người sử dụng nhấp chuột vào. Ví dụ như nếu nhấp chuột vào mục thứ hai trong danh sách, thì số 2 được đặt trong ô liên kết. Các hộp danh sách là loại duy nhất của nút điều khiển sử dụng hai ô liên kết riêng rẽ.

- Một vùng cung cấp dữ liệu vùng có chứa danh sách được chọn.

- Một ô liên kết - Khi một mục được chọn trong hộp danh sách, ô này chứa vị trí trong danh sách của mục được chọn.

Có thể sử dụng tên trong vị trí của địa chỉ ô đặt cho việc liên kết ô trong hộp danh sách. Ví dụ với hộp danh sách trong hình 12.4. Bạn có thể đặt tên D6:D7 là **Thep**, rồi nhập **Thep** như vùng cung cấp dữ liệu.



Hình 12.4 : *Vùng cung cấp dữ liệu đối với hộp danh sách là thep và ô liên kết là E9. Do mục thứ nhất trong danh sách được chọn nên E9 có giá trị là 1.*

Xác lập *Selection Type* trên tab *Control* cho phép kiểm soát khi người sử dụng chọn lựa các mục.

Single: Cho phép người sử dụng thực hiện một chọn lựa tại một thời điểm.

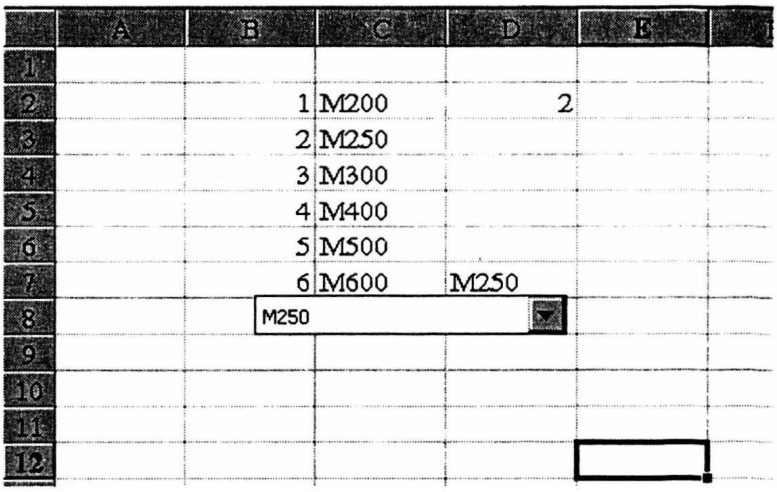
Multi: Cho phép người sử dụng chọn lựa hoặc bỏ trọn nhiều trong danh sách bằng cách nhấp chuột vào chúng. Bạn không thể có một sự liên kết ô khi *Multi* được chọn.

Extend: Cho phép người sử dụng chọn lựa một loạt các mục bằng cách giữ phím *Shift* (như trong lệnh *File\Open* hộp thoại). Bạn không có sự liên kết ô khi *Extend* được chọn.

Đối với tất cả các Control được nối với các ô, một tên ô có thể được nhập cho việc liên kết. Khi Control và ô được liên kết ở trong cùng Workbook, thì lợi ích đó rõ ràng hơn. Nhưng nếu Control và ô liên kết ở trong các Workbook độc lập, thì lợi ích toàn vẹn và trong trường hợp này, điều tối quan trọng là tham chiếu bằng tên.

12.6.2. Ví Dụ

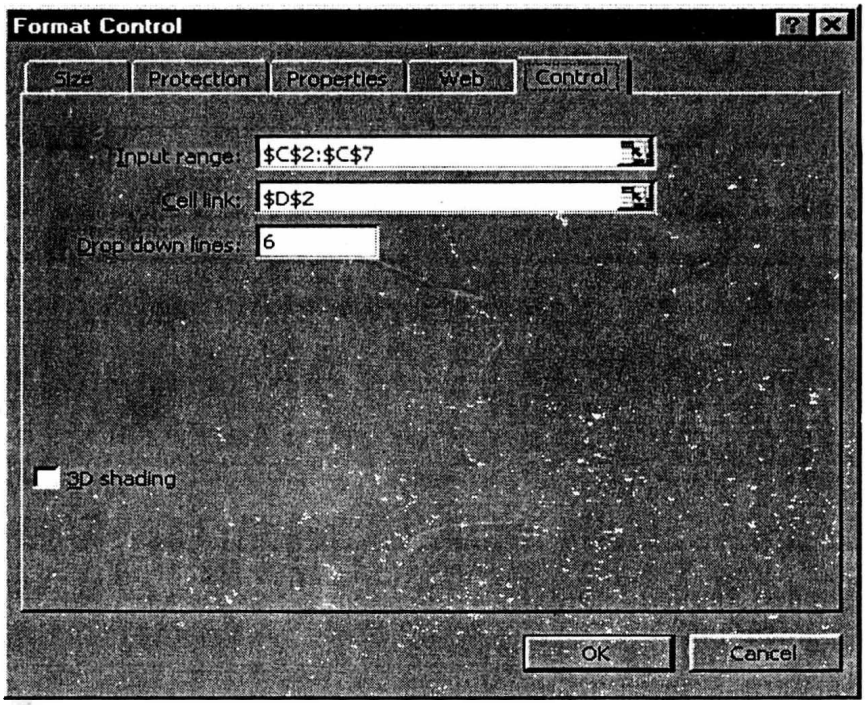
Bạn nên sử dụng *Combo Box* hay *List Box* khi các dữ liệu của bạn muốn đưa ra là dữ liệu không thay đổi (như mác bêtông, đường kính cốt thép hay loại cáp...). Sau đây là một trường hợp bạn có thể sử dụng để đưa vào một số bảng tính, nó sẽ làm tăng tính linh hoạt khi nhập dữ liệu vào bảng tính.



Hình 12.5

Bước 1: Nhập một bảng tính như hình (hình 12.5). Cột C nhập mác bêtông (C2:C7), cột B nhập thứ tự của mác bêtông (B2:B7)

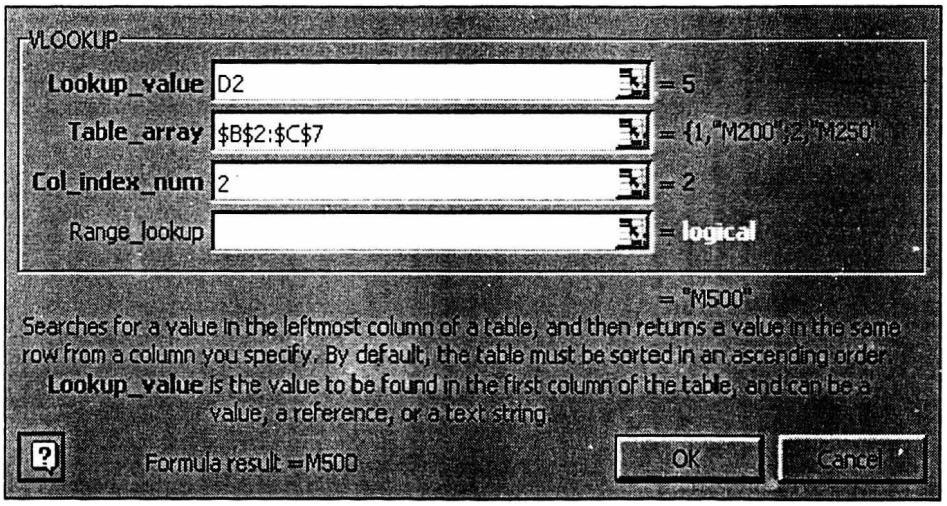
Bước 2: Đưa ra hộp *Format Control* và chọn *Input Range* là ô C2:C7, *Cell link* là ô D2 các lựa chọn khác tuỳ theo ý thích của bạn như đã nói ở trên (hình 12.6).



Hình 12.6

Bước 3: Sau khi hoàn thành bước 2, bạn đã có thể sử dụng được thanh cuộn nhưng dữ liệu đưa ra chỉ là các con số từ 1-6. Để đưa ra được mác BT ở 1 ô khác bạn hãy dùng hàm VLOOKUP (có thể dùng nhiều hàm khác), ở đây không nói lại cách sử dụng hàm mà chỉ đưa ra những lựa chọn để bạn đọc tiện theo dõi (xem hình 12.7).

Trong *Lookup_value* chọn ô D2, *Table_array* chọn mảng $B$2:$C$7 (nên để là địa chỉ tuyệt đối), *Col_index_num* điền số 2.



Hình 12.7

Khi hoàn thành bước 3 bạn được 1 Worksheet như hình 12.5 và bây giờ khi lựa chọn mác bêtông ở thanh cuộn sẽ được mác bêtông ở ô D7 như đã chọn.

12.6.3. Labels

Sử dụng *Labels* là để gõ chữ. Chúng có ít biến đổi trên các Worksheet vì chúng kém linh hoạt hơn *Text Box*. Không như một *Text Box*, bạn không thể định dạng một *Label*, cũng không thể gõ công thức. Tuy nhiên có một đặc điểm đối với các *Label* là việc định dạng văn bản được thực hiện bởi một truy xuất thông qua *Control Panel Display* của Windows.

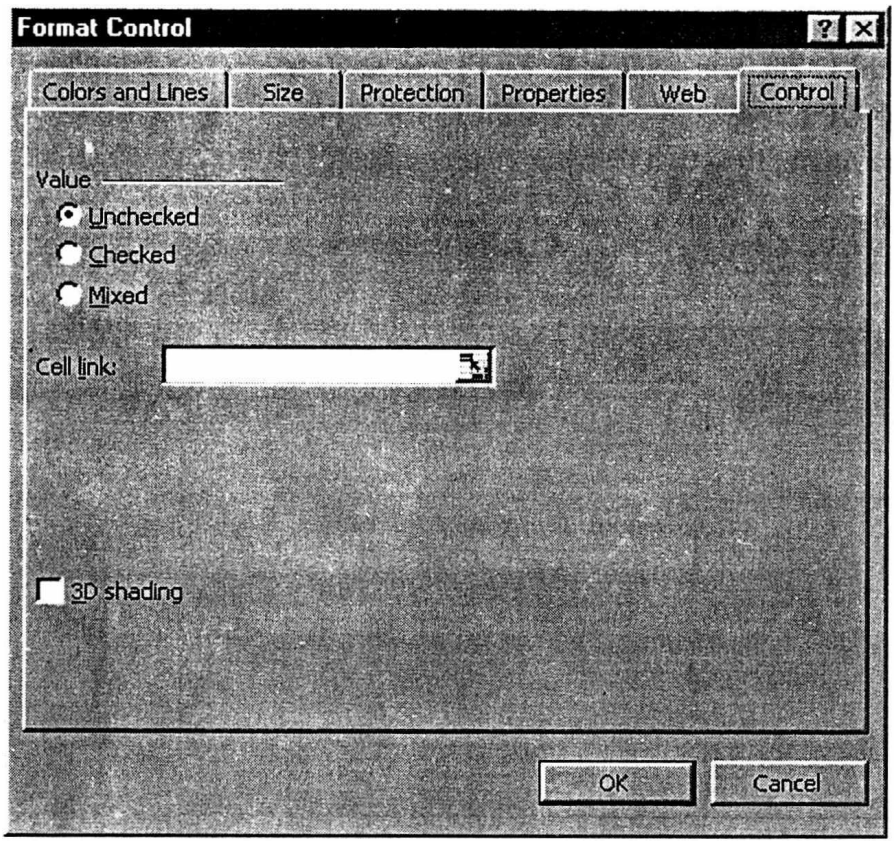
Các hộp kiểm tra để thay đổi giá trị TRUE và FALSE (cho việc nhập dữ liệu có yêu cầu trả lời *Yes/No*). Sau đây là cách liên kết để tạo ra một hộp kiểm tra liên kết với một ô.

- Vẽ một hộp kiểm tra trên một Worksheet.

- Trong lúc đối tượng hộp kiểm tra được chọn, chọn *Format\Control*, rồi chọn Tab *Control*.

- Nhập một địa chỉ ô hoặc tên ô vào hộp *Cell Link* - hoặc có thể nhấp chuột trên Worksheet để xác định ô. Nhấp chuột vào OK.

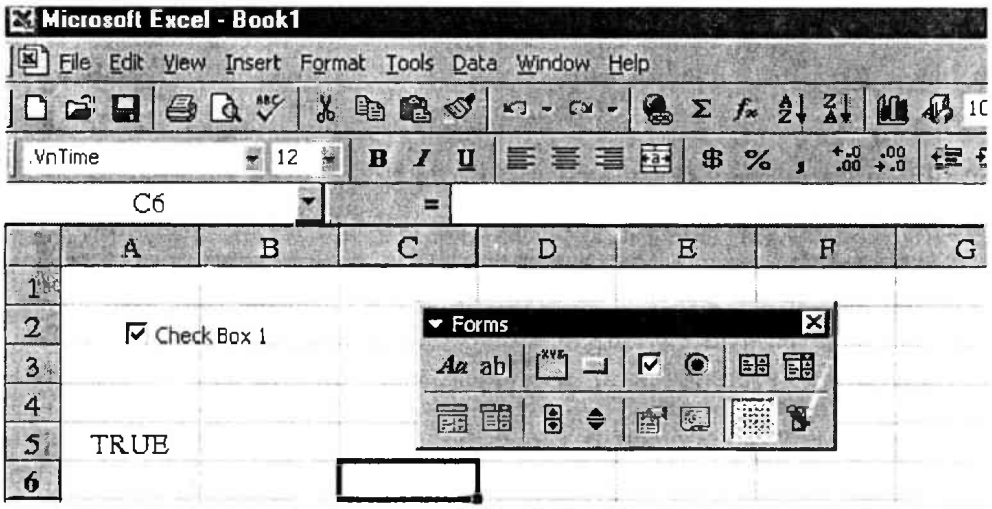
- Tuỳ ý bạn, với nút điều khiển vẫn đang được chọn, thay đổi nội dung bên cạnh hộp kiểm tra bằng cách nhấp chuột bên trong nó và hiệu chỉnh như một *Text Box*.



Hình 12.8

Nhấp chuột vào hộp kiểm tra để kiểm tra, nó sẽ chọn TRUE hoặc FALSE vào ô liên kết.

Nên nhớ rằng, tốt hơn hết là liên kết ô ở một vị trí không xem được thường là một Worksheet riêng trong cùng một Workbook. Hơn nữa, các ô thấy được có thể tham khảo đến ô liên kết, thực hiện việc tính toán lệ thuộc vào việc cung cấp dữ liệu của người sử dụng.



Hình 12.9: *Hộp kiểm được liên kết với ô D11 khi được chọn D11 có giá trị TRUE ngược lại là FALSE.*

12.6.4. Các thanh cuộn và Spinner

Thanh cuộn được sử dụng để kiểm soát giá trị nguyên trong một ô.

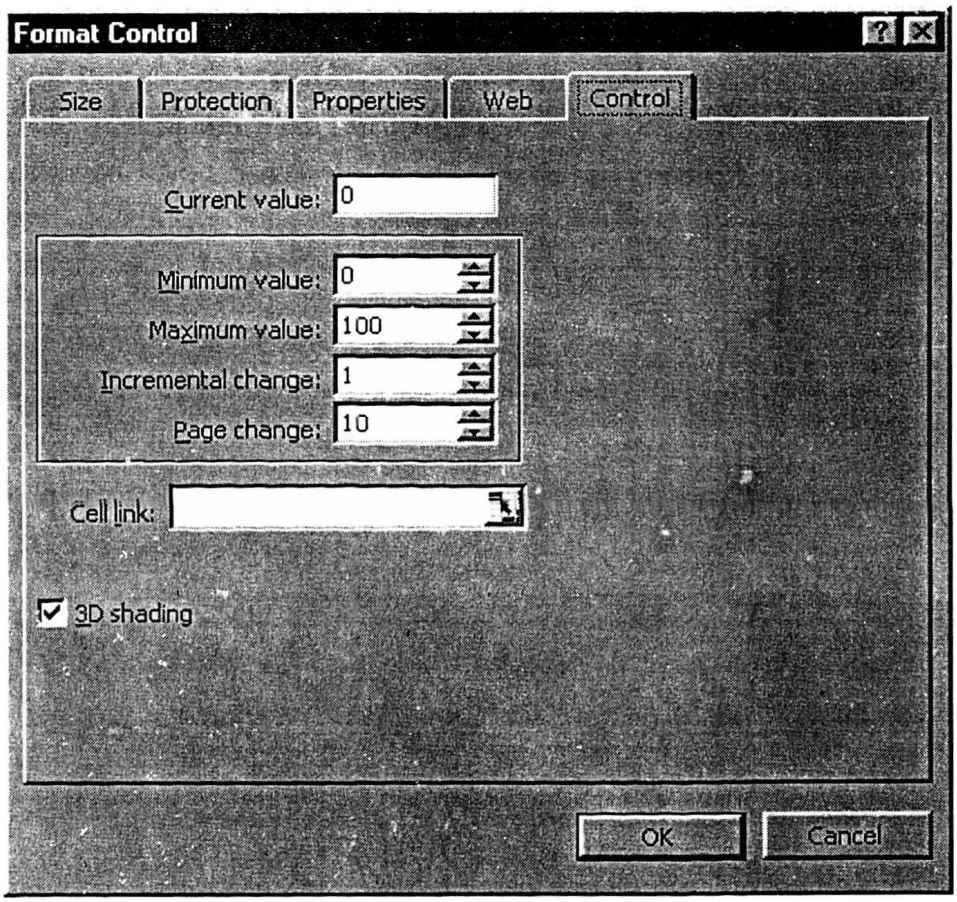
- Những giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong hộp hội thoại *Format Control* giới hạn giá trị ô. Những giá trị này không nhỏ hơn giá trị 0 và không lớn hơn 30000 (nghĩa là ô phải chứa đựng một số từ 0 đến 30000).

- Sự thay đổi hoặc tăng giảm được kiểm soát bằng cách nhấp chuột vào các mũi tên lên hoặc xuống.

- Sự thay đổi trang được được kiểm soát bằng cách nhấp chuột thanh cuộn, hoặc kéo hộp cuộn – hộp giữa mũi tên lên hoặc xuống.

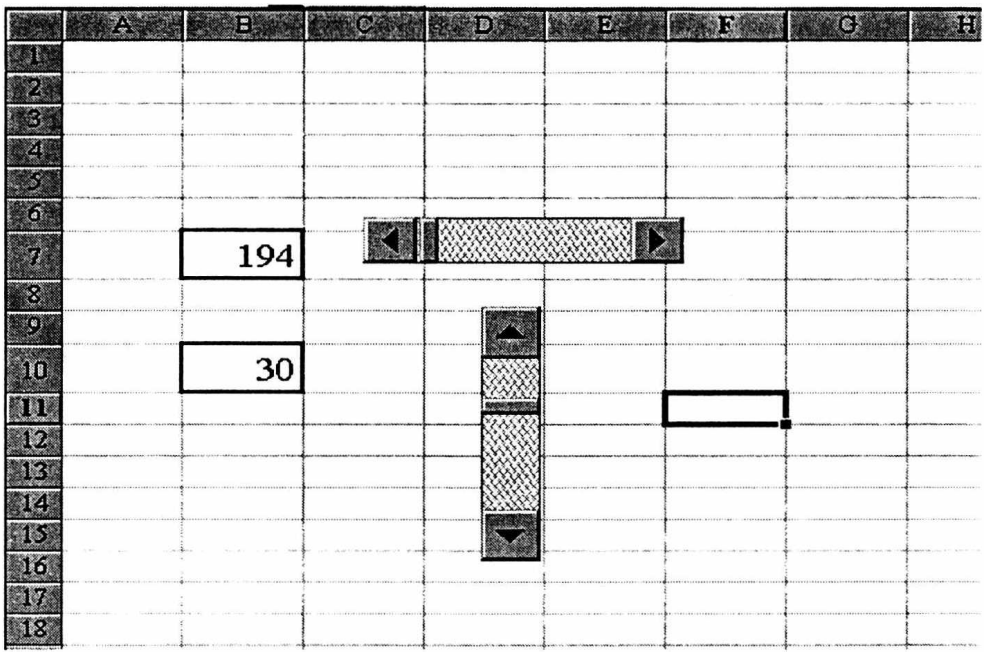
- Nhập địa chỉ ô (hoặc tên ô) trong Cell Link.

Các xác lập thanh cuộn hình 12.10 sẽ cộng hoặc trừ 1 từ một ô nó đã liên kết khi nhấp chuột vào các mũi tên, và cộng hoặc trừ 10 khi nhấp chuột vào thanh.



Hình 12.10: Các thanh cuộn kiểm soát giá trị nguyên trong một ô.

Cell sẽ không di chuyển dưới 0 và trên 100. Thanh cuộn có thể được định hướng theo chiều dọc hoặc chiều ngang (xem hình 12.11).



Hình 12.11: Thanh cuộn có thể được định hướng theo chiều ngang hoặc chiều dọc.

12.6.5. Ví dụ dùng thanh cuộn để lựa chọn đường kính cốt thép thích hợp

Khi thiết kế dầm BTCT thường bạn phải lựa chọn diện tích cốt thép loại đường kính cốt thép cho phù hợp với diện tích thép đã tính và diện tích chọn này không được vượt quá hàm lượng thép theo quy trình, nếu tính tay bạn phải tính đi tính lại nhiều lần công việc

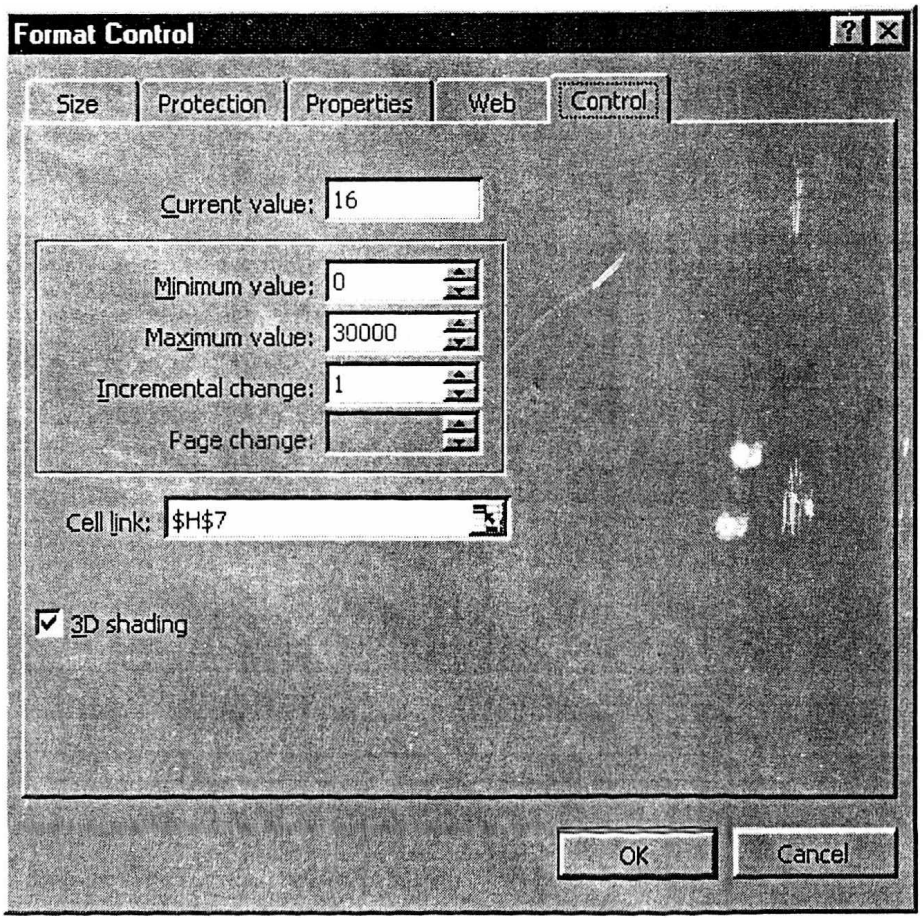
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18	11	Đường Kính 1		4.909		1	0.283	DK=25	
19	12	Đường Kính 2		6.158		2	0.503	DK=28	
20				DK=6		3	0.785	DK=30	
21				DK=8		4	1.131	DK=32	
22				DK=10		5	2.011	DK=22	
23				DK=12		6	2.011	DK=24	
24				DK=14		7	2.545	DK=25	
25				DK=16		8	3.142	DK=28	
26				DK=18		9	3.801		
27				DK=20		10	4.524		
28				DK=22		11	4.909		
29				DK=24		12	6.158		
30				DK=25		13	7.069		
31				DK=28		14	8.043		
32				DK=30		15	9.079		
33				DK=32		16	10.179		
34				DK=34		17	12.561		
35				DK=36					
36				DK=40					
37									
38									

Hình 12.12: Tạo hai hộp danh sách.

này mất khá nhiều thời gian. Bạn hãy thiết kế một Worksheet dùng các thanh cuộn để lựa chọn đường kính cốt thép và số thanh theo các bước sau (nếu chỉ dùng một loại cốt thép thì bạn chỉ cần làm một hộp danh sách cũng như một thanh cuộn):

- Tạo hai hộp danh sách như hình vẽ, cách tạo như ví dụ trên (bạn cũng phải dùng đến hàm VLOOKUP).

- Tạo hai thanh cuộn giống nhau chỉ khác ô liên kết.



Hình 12.13

Trong *tab Control*, đưa địa chỉ ô liên kết H7 và của thanh cuộn kia chọn ô H11.

- Từ đường kính đã chọn và số thanh cốt thép sẽ tính ra được diện tích cốt thép bằng D18*H7. Ô D18 là diện tích một thanh thép sẽ thay đổi khi bạn chọn các đường kính cốt thép khác nhau tronh hộp danh sách.

- Công việc còn lại là bạn đặt các công thức tính diên tích cốt thép đã chọn và diện tích cốt thép cần thiết để đưa ra hàm lượng thép so sánh với quy trình và đưa ra dòng cảnh báo (thường dùng hàm IF làm công việc này). Đưa vào bảng tính các dòng nhắc cho sinh động như hình 12.15.

D18 = =LOOKUP(A18,F18:G35)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3			Chọn Số Thanh thép Với diện tích cốt thép đã tính						
4	Bạn Cho Diện Tích Cốt Thép =			92		Diện Tích Cốt Thép Bạn Chọn =			78.544
5	Chiều cao có hiệu ho=			13.4					
6	Bề dầy bản cánh b=			20					
7	Bạn hay chọn đường kính		DK=25		Cốt thép loại thép thứ nhất với số thanh :			16	
8			DK=28						
9			DK=30						
10			DK=32						
11	Bạn hay chọn đường kính		DK=22		Cốt thép loại thép thứ hai với số thanh :			0	
12			DK=24						
13			DK=25						
14	Diện tích tương ứng :		DK=28	78.544					
15	Diện tích tương ứng :			0					
18	11	Diện tích 1 thanh=		4.909		1	0.283		
19	12	Diện tích 1 thanh=		6.158		2	0.503		
20				DK=6		3	0.785		
21				DK=8		4	1.131		
22				DK=10		5	2.011		
23				DK=12		6	2.011		

Hình 12.14

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help

.VnTime 12 100%

C37 =

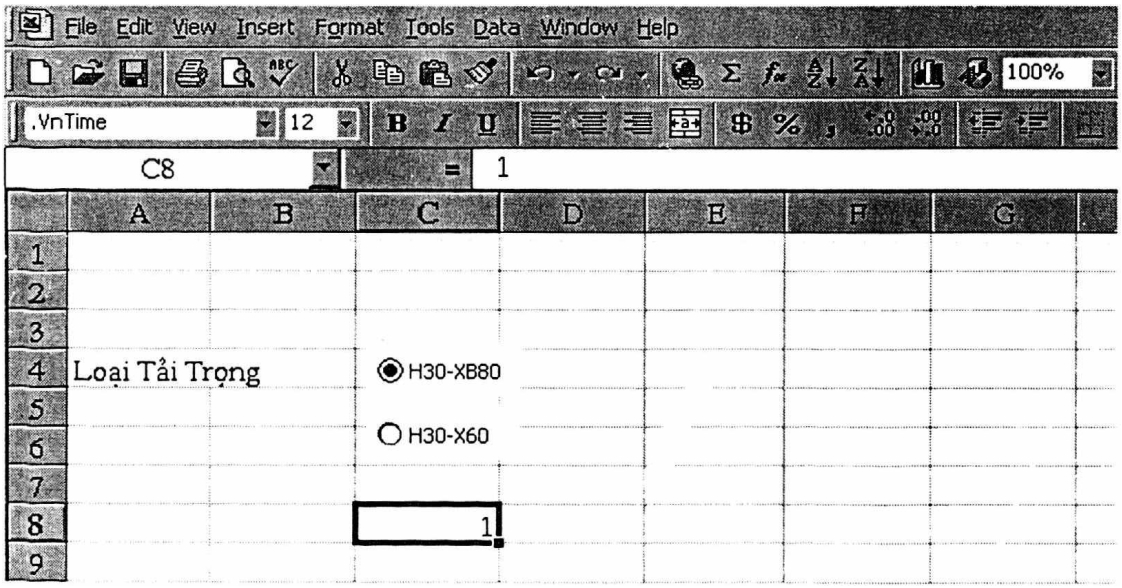
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Chọn Số Thanh thép Với diện tích cốt thép đã tính						
4	Bạn Cho Diện Tích Cốt Thép =			92		Diện Tích Cốt Thép Bạn Chọn =			103.176
5	Chiều cao có hiệu ho=			13.4					
6	Bề dầy bản cánh b=			20					
7	Bạn hay chọn đường kính		DK=22		Cốt thép loại thép thứ nhất với số thanh :			16	
8			DK=24						
9			DK=25						
10			DK=28						
11	Bạn hay chọn đường kính		DK=25		Cốt thép loại thép thứ hai với số thanh :			4	
12			DK=28						
13			DK=30						
14			DK=32						
16	Hàm Lượng Cốt Thép =					0.384985			
17									

Hình 12.15

12.6.6. Các nút tuỳ chọn và Group Boxes

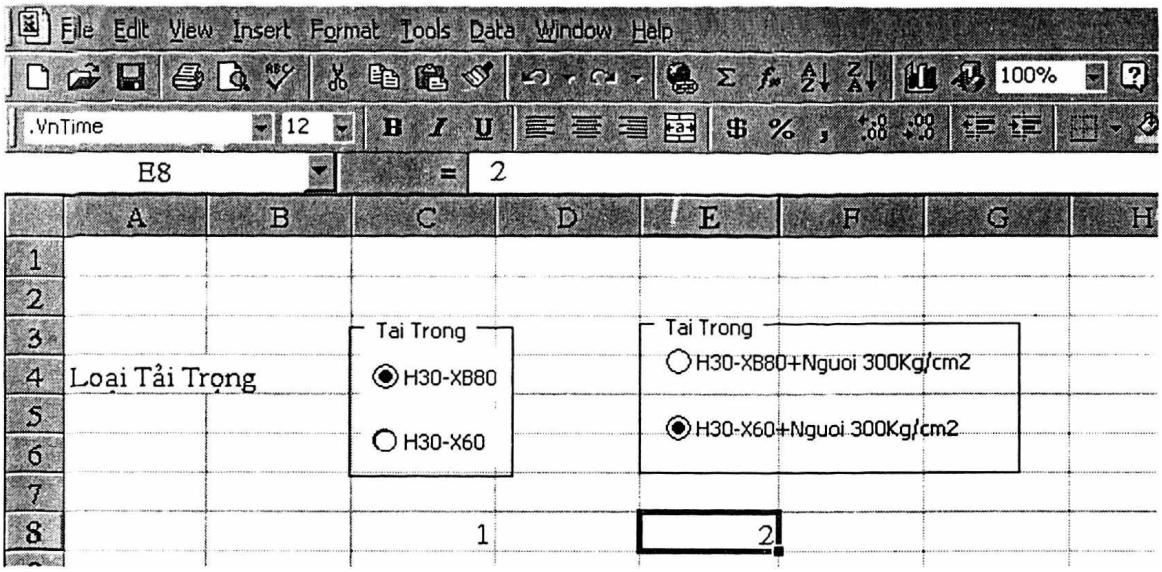
Các nút tuỳ chọn được dùng để chọn một tuỳ chọn từ một danh sách của hai hay nhiều hơn sự chọn lựa có tính độc quyền. Nút tuỳ chọn đôi khi được gọi là nút Radio, bởi vì chúng hoạt động như những nút trên Radio. Bạn chỉ có thể nghe một đài vào một thời điểm. Các lựa chọn này có tác động riêng biệt với nhau.

Worksheet được hiển thị trong hình gồm 3 nút tuỳ chọn, tất cả liên kết với một ô. Tuy nhiên, bạn chỉ cần thiết lập mối liên kết của một trong 3 nút tuỳ chọn. Các nút khác được liên kết một cách tự động.



Hình 12.16: Tất cả các nút tuỳ chọn được liên kết với ô C8.

Nút tuỳ chọn có thể được đặt trong một *Group Box*.



Hình 12.17: Các Option Button trong Group Box Tai Trong được nối với ô C8, còn các nút tuỳ chọn trong Group Box còn lại được nối với ô E8.

Sau đây là vài yếu tố quan trọng để nhớ cách xử lý với các nút tuỳ chọn và các *Group Box*.

- Tất cả các nút tuỳ chọn trên một Worksheet không ở bên trong một Group Box là một bộ phận của cùng nhóm lôgíc. Khi bạn liên kết bất cứ cái nào trong cùng một ô, thì tất cả cái khác sẽ tự động liên kết với ô đó.

- Tất cả các nút tuỳ chọn trong phạm vi *Group Box* là bộ phận của cùng nhóm Lôgic, khi bạn liên kết bất kỳ cái nào trong chúng với một ô, thì tất cả cái khác sẽ tự động liên kết với ô đó.

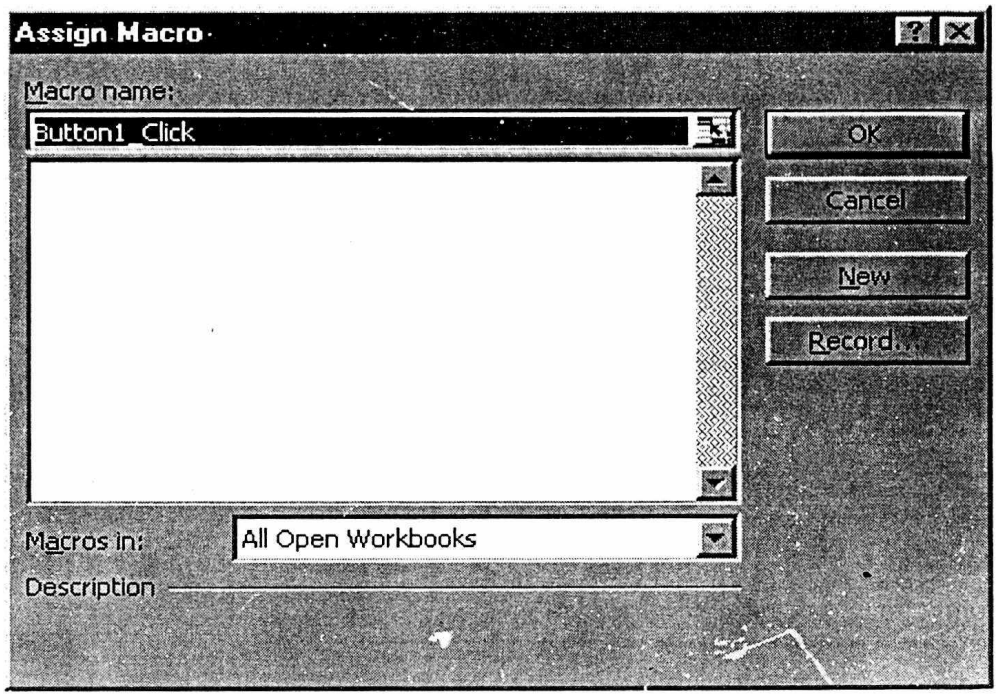
- Có thể có nhiều hơn một *Group Box* trên một Sheet có chứa các nút tuỳ chọn. Và trên cùng một Sheet có thể có các nút tuỳ chọn mà không ở bên trong một *Group Box*.

- Nếu bạn định lại kích thước của một *Group Box* để một nút tuỳ chọn trước đó không ở bên trong *Group Box*, bây giờ lại ở bên trong, thành viên mới tự động trở thành bộ phận của nhóm lôgíc, và ngược lại.

Bạn có thể đặt các nút điều khiển khác, như hộp kiểm tra và hộp danh sách, bên trong một *Group Box* (hình 12.17). Vấn đề là tính thẩm mỹ không có tác động về mặt lôgíc.

12.6.7. Button

Button không được liên kết với các ô. Mục đích của chúng là chạy một Macro. Khi bạn vẽ một Button, hộp thoại *Assign Macro* xuất hiện.



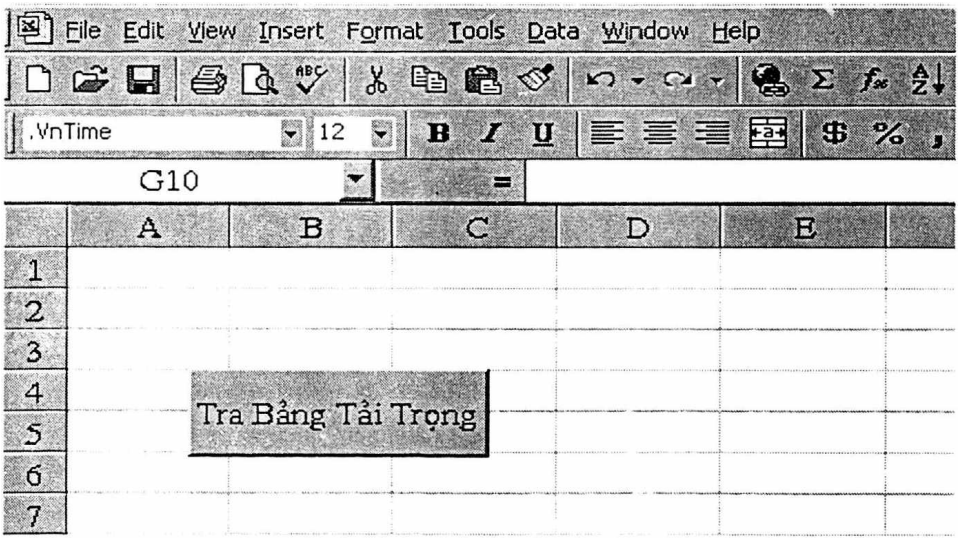
Hình 12.18

Ở phạm vi này, có hai cách để chỉ định một Macro.

- Chọn một Macro đang tồn tại từ danh sách.

- Nhấp chuột vào *Record to record a macro*. Hộp hội thoại *Record New Macro* xuất hiện.

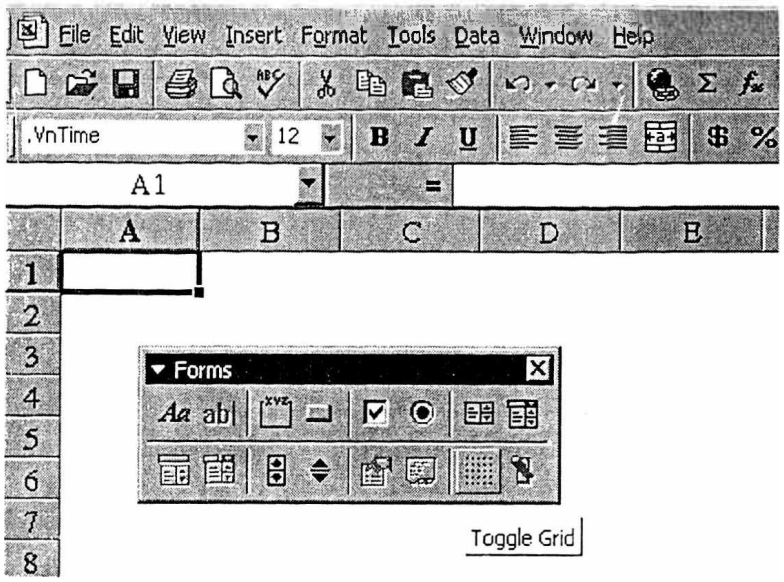
Với *Button* bạn có thể định dạng Font chữ và canh lề văn bản. Theo mặc định, các nút không in. Bạn có thể thay đổi bằng cách kích hoạt *Print Object* trên tab *Propeties* của hộp hội thoại *Format Control*.



Hình 12.19

12.6.8. Toggle Gril

Đôi khi bạn muốn Worksheet của mình sinh động hơn, hãy dùng tính năng *Toggle Gril* để hiện hoặc không hiện lưới trong bảng tính như hình 12.20.



Hình 12.20: *Bỏ chọn Toggle Grid để hiện hoặc không hiện lưới.*

Chương 13

GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH THỰC NGHIỆM VÀ PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI TRÊN EXCEL

13.1. PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI MỘT YẾU TỐ

Phép phân tích phương sai được dùng trong các trắc nghiệm để so sánh các giá trị trung bình của hai hay nhiều mẫu được lấy từ các tập nền. Đây có thể được xem như phần mở rộng của trắc nghiệm t hay z (so sánh hai giá trị trung bình).

Mục đích của sự phân tích phương sai một yếu tố là đánh giá sự ảnh hưởng của một yếu tố (nhân tạo hay tự nhiên) nào đó trên các giá trị quan sát, Y_i (= 1, 2, ..., k).

Mô hình:

	Yếu tố thí nghiệm				
	1	2	...	k	
	Y_{11}	Y_{21}	...	Y_{k1}	
	Y_{12}	Y_{22}	...	Y_{k1}	
	...	...	...	...	
	Y_{1N}	Y_{2N}	...	Y_{kN}	
Tổng cộng	$T_{1.}$	$T_{2.}$	...	$T_{k.}$	$T_{..}$
Trung bình	$\overline{Y}_{1.}$	$\overline{Y}_{2.}$	...	$\overline{Y}_{k.}$	$\overline{Y}_{..}$

Bảng ANOVA:

Nguồn sai số	Bậc tự do	Tổng số bình phương	Bình phương trung bình	Giá trị thống kê
Yếu tố	k-1	$SSF = \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{i.}^2}{N} - \frac{T_{..}^2}{N}$	$MSF = \frac{SSF}{k-1}$	$F = \frac{MSF}{MSE}$
Sai số	N-k	SSE = SST - SSF	$MSE = \frac{SSE}{N-k}$	
Tổng cộng	N-1	$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} Y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$		

Trắc nghiệm:

* Giả thuyết:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k \Leftrightarrow$ "các giá trị trung bình bằng nhau"

H_1: $\mu_i \neq \mu_j \Leftrightarrow$ "ít nhất có hai giá trị trung bình khác nhau"

* Giá trị thống kê: $F = \dfrac{MSF}{MSE}$

* Biện luận:

Nếu $F < F_\alpha$ (k-1; N-k) $\Rightarrow$ chấp nhận giả thuyết H_0.

3.2. PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI HAI YẾU TỐ (KHÔNG LẶP)

Sự phân tích này nhằm đánh giá sự ảnh hưởng của hai yếu tố trên các giá trị quan sát Y_{ij} (i = 1, 2, ..., r: yếu tố A; j = 1, 2, ..., c: yếu tố B).

Mô hình:

	Yếu tố B				Tổng	Trung
Yếu tố A	1	2	...	c	cộng	bình
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1c}	$T_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2c}	$T_{2.}$	$\overline{Y}_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...
r	Y_{r1}	Y_{r2}	...	Y_{rc}	$T_{r.}$	$\overline{Y}_{r.}$
Tổng cộng	$T_{.1}$	$T_{.2}$	...	$T_{.c}$	$T_{..}$	
Trung bình	$\overline{Y}_{.1}$	$\overline{Y}_{.2}$	...	$\overline{Y}_{.c}$	$\overline{Y}_{..}$	

Bảng ANOVA:

Nguồn sai số	Bậc tự do	Tổng số bình phương	Bình phương trung bình	Giá trị thống kê
Yếu tố A (hàng)	(r-1)	$SSB = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_{i.}^2}{c} - \frac{T_{..}^2}{rc}$	$MSB = \frac{SSB}{(r-1)}$	$F_R = \frac{MSB}{MSE}$
Yếu tố B (cột)	(c-1)	$SSF = \sum_{j=1}^{c} \frac{T_{.j}^2}{r} - \frac{T_{..}^2}{rc}$	$MSF = \frac{SSF}{(c-1)}$	$F_C = \frac{MSF}{MSE}$
Sai số	(r-1)(c-1)	SSE = SST - (SSF + SSB)	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	
Tổng cộng	(rc-1)	$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} Y_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N}$		

Trắc nghiệm:

* Giả thuyết:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... \mu_k \Leftrightarrow$ "các giá trị trung bình bằng nhau"

H_1: $\mu_i \neq \mu_j \Leftrightarrow$ "ít nhất có hai giá trị trung bình khác nhau"

* Giá trị thống kê: $F_R = \dfrac{MSB}{MSE}$ và $F_C = \dfrac{MSF}{MSE}$

* Biện luận:

- Nếu $F_R < F_\alpha [b-1, (k-1)(b-1)] \Rightarrow$ Chấp nhận H_0 (Yếu tố A).

- Nếu $F_C < F_\alpha [k-1, (k-1)(b-1)] \Rightarrow$ Chấp nhận H_0 (Yếu tố B).

13.3. PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI HAI YẾU TỐ (CÓ LẶP)

Tương tự như mô hình phân tích phương sai hai yêu tố (ở phần 13.2), chỉ khác là trong mỗi mức (A_i, B_j) có lặp lại k lần thí nghiệm (mỗi hàng sẽ biểu thị một bản sao của dữ liệu) và trong đầu ra sẽ thêm một đại lượng tương tác (interaction term) F_I giữa hai yếu tố A và B.

13.4 PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI BA YẾU TỐ

Sự phân tích này được dùng để đánh giá về sự ảnh hưởng của ba yếu tố trên các giá trị quan sát Y_{ijk} (i = 1, 2, ..., r: yếu tố A; j = 1, 2, ..., r: yếu tố B; k = 1, 2, ..., r: yếu tố C).

Mô hình:

Khi nghiên cứu ảnh hưởng của hai yêu tố, mỗi yếu tố có n mức, thì người ta dùng mô hình vuông latinh (n x n), thí dụ như mô hình vuông latinh (4 x 4):

Mô hình vuông la tinh ba yếu tố được trình bày như sau:

Yếu tố C ($T_{..k}$, thí dụ: $T_{..1} = Y_{111} + Y_{421} + Y_{331} + Y_{241}$)

Yếu tố A	Yếu tố B								
	B1		B2		B3		B4		$T_{i..}$
A1	C1	Y_{111}	C2	Y_{122}	C3	Y_{133}	C4	Y_{144}	$T_{1..}$
A2	C2	Y_{212}	C3	Y_{223}	C4	Y_{234}	C1	Y_{241}	$T_{2..}$
A3	C3	Y_{313}	C4	Y_{324}	C1	Y_{331}	C2	$Y_{34.}$	$T_{3..}$
A4	C4	Y_{414}	C1	Y_{421}	C2	Y_{432}	C3	Y_{443}	$T_{4..}$
$T_{.j.}$		$T_{.1.}$		$T_{.2.}$		$T_{.3.}$		$T_{...}$	

Bảng ANOVA.

Nguồn sai số	Bậc tự do	Tổng số bình phương	Bình phương trung bình	Giá trị thống kê
Yếu tố A (hàng)	(r-1)	$SSR = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_{i..}^2}{r} - \frac{T_{...}^2}{r^2}$	$MSR = \frac{SSR}{(r-1)}$	$F_R = \frac{MSR}{MSE}$
Yếu tố B (cột)	(r-1)	$SSC = \sum_{j=1}^{r} \frac{T_{.j.}^2}{r} - \frac{T_{...}^2}{r^2}$	$MSC = \frac{SSC}{(r-1)}$	$F_C = \frac{MSC}{MSE}$
Yếu tố C	(r-1)	$SSF = \sum_{k=1}^{r} \frac{T_{..k}^2}{r} - \frac{T_{...}^2}{r^2}$	$MSF = \frac{SSF}{(r-1)}$	$F = \frac{MSF}{MSE}$
Sai số	(r-1)(r-2)	SSE = SST - (SSF + SSR + SSC)	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(r-2)}$	
Tổng cộng	(r^2-1)	$SST = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{T_{...}^2}{r^2}$		

Trắc nghiệm:

* Giả thuyết:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... \mu_r \Leftrightarrow$ "các giá trị trung bình bằng nhau"

H_1: $\mu_i \neq \mu_j \Leftrightarrow$ "có ít nhất hai giá trị trung bình khác nhau"

* Giá trị thống kê: $F_R = \frac{MSR}{MSE}$, $F_C = \frac{MSC}{MSE}$ và $F = \frac{MSF}{MSE}$

* Biện luận:

Nếu $F_R < F_\alpha$ [r-1, (r-1)(r-2)] $\Rightarrow$ Chấp nhận H_0 (Yếu tố A).

- Nếu $F_C < F_\alpha$ [r-1, (r-1)(r-2)] $\Rightarrow$ Chấp nhận H_0 (Yếu tố B).
- Nếu $F < F_\alpha$ [r-1, (r-1)(r-2)] $\Rightarrow$ Chấp nhận H_0 (Yếu tố C).

Chương 14

CÁC VÍ DỤ TÍNH TOÁN XÂY DỰNG TRÊN EXCEL

14.1. VÍ DỤ XD-1 : CHƯƠNG TRÌNH TÍNH TOÁN ĐỘ CHỐI CỦA CỌC

Dữ liệu			Nội dung tính toán		
Ký hiệu	Đơn vị	Trị số			
Q_n	T	5	A = n*F*W	28800	
W	T.cm	1200	B = m*p	327,376	
q	T	8,42	C = n*F	24	
F	cm^2	1600	B^2	107175	
P	T	176,96	B*C	7857,024	
n	T/cm^2	0,015	D = B(B+C)	115032,1	
m		1,85	A/D	0,250365	
$		0,2	E = Q+$2*q	5,3368	
			F = Q+q	13,42	
			e = A/D*E/F	**0,099564**	cm

Ghi chú:

- Độ chối tính theo công thức:

$$e = \frac{n*F*W}{m*P(m*P+n*F)} * \frac{Q_n + \$^2 * q}{Q_n + q}$$

Q_n - Trọng lượng bộ phận xung kích của búa T

W - Năng lượng xung kích của búa T.m

q - Trọng lượng đầu đệm cọc T

F - Diện tích mặt cắt ngang cọc m^2

P - Tải trọng tính toán cọc T

14.2. VÍ DỤ XD-2: CHƯƠNG TRÌNH XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LỰC ĐỘNG ĐẤT KHI TÍNH CẦU

Dưới đây là một ví dụ về cách viết một bảng tính dùng để tra bảng lấy ra một giá trị hàm số "Trị số hoạt tải rải đều tương dương", phụ thuộc vào 3 tham số là: "Loại hoạt tải", "Chiều dài nhịp" và "Khoảng cách từ đỉnh ĐAH đến đầu dầm". Mặc dù bài toán này dành riêng cho các kỹ sư thiết kế cầu nhưng bạn đọc dù thuộc chuyên môn nào cũng

có thể rút ra nguyên tắc lập một bảng tính để tra bảng giá trị của 1 hàm số phụ thuộc nhiều biến số.

Trước tiên cần nhập vào nội dung của bảng như đã in dưới đây trong vùng ô A55:H137 của bảng tính, coi là bảng phụ trợ.

Sau đó chỉ cần viết công thức tra bảng là xong. Trong ví dụ này công thức được ghi ở ô J44 và có nội dung là :

=IF(J43<=J42/2,IF(J41=30,D59,IF(J41=10,I59,IF(J41=80,D107,IF(J41=60,H107,"sai tải "))))," sai k/c")

Dữ liệu			Nội dung và kết quả tính		
Ký hiệu	Trị số	Đơn vị	Công thức tính	Kết quả	Đơn vị
K1*A	0,05		BETA1 = 1,1/T1	1,833333	
Kfi	1,5		BETA2 = 1,1/T2	1,571429	
T1	0,6	gy	BETA3 = 1,1/T3	2,444444	
T2	0,7	gy			
T3	0,45	gy	ALFA=(Q1*y1+Q2*y2+Q3*y3	0,107831	
Q1	2	T	+Q4*y4+Q5*y5+Q6*y6)/		
Q2	3	T	Q1*y1^2+Q2*y2^2+Q3*y3^2		
Q3	5	T	+Q4*y4^2+Q5*y5^2+Q6*y6^2)		
Q4	1	T			
Q5	6	T	ETA1=y1*ALFA	0,215661	
Q6	4	T	ETA2=y2*ALFA	0,431322	
y1	2	m	ETA3=y3*ALFA	0,754814	
y2	4	m	ETA4=y4*ALFA	0,970475	
y3	7	m	ETA5=y5*ALFA	1,078306	
y4	9	m	ETA6=y6*ALFA	1,293967	
y5	10	m			
y6	12	m	Trường hợp tháp cầu treo BETA*ETA =	5	

Ghi chú:

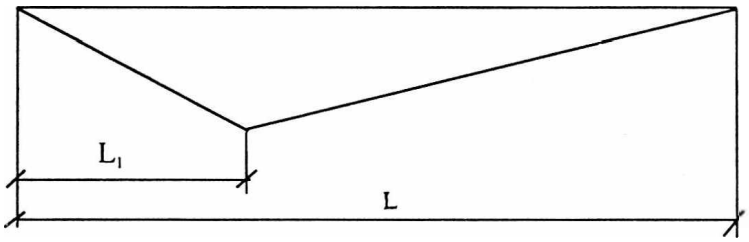
*- Tích số K1*A khi tính cầu = 0,025; 0,05; 0,1 tương ứng với cấp động đất 7, 8, 9.*

- T1, T2, T3 là kỳ dao động tự do của kết cấu ứng với các dạng dao động 1, 2, 3.

- Q1-Q6 là trọng lượng công trình quy về điểm k, trong đó tính cả tải trọng tính toán tác động lên kết cấu.

- y1-y6 là toạ độ các điểm tập trung lực Q.

Kết quả tính các lực động đất				
Cho kết cấu cầu				Cho tháp cầu treo
	Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Sk=K1A*BETA.ETA*Kfi*Qk
S1	0,059307	0,050834	0,079076	0,75
S2	0,17792	0,152503	0,237227	1,125
S3	0,518935	0,444801	0,691913	1,875
S4	0,13344	0,114377	0,17792	0,375
S5	0,889602	0,762516	1,186136	2,25
S6	0,711682	0,610013	0,948909	1,5



Điều kiện vẽ:

$L_1 \leq L/2$

Để sử dụng, chỉ cần nhập 3 tham số nói trên lần lượt vào các ô: J41, J42, J43. Kết quả sẽ hiện ra ngay ở ô J44.

Sau đây là bản in bảng tính này, bạn đọc nào cần file trên đĩa xin liên hệ với Nhà xuất bản để chép miễn phí.

Tra bảng tải trọng rải đều tương đương

Người lập bảng tính : *PGS. PTS. Nguyễn Viết Trung*

Người tính : *KS. Nguyễn Tuệ*

Ngày tính

1. Phạm vi áp dụng

1.1. Bảng tính này dùng để tra bảng và nội suy các giá trị hoạt tải rải đều tương đương của các loại xe ôtô tiêu chuẩn: H10, H13, H30, xe xích X60 và xe bánh XB80 tương ứng với dạng đường ảnh hưởng tam giác .

1.2. Các bảng tra được lấy theo Quy trình thiết kế cầu 1979 của Bộ Giao thông vận tải.

1.3. Kết quả của bảng tính này là số liệu để nhập vào các chương trình thiết kế cầu khác.

2. Cách sử dụng

2.1. Các ô có chữ số mầu xanh là nơi mà các giá trị cần phải nhập vào.

2.2. Trước hết phải nhập tên hoạt tải.

- Ví dụ đối với xe ôtô H10, cần phải nhập số " 10 " vào ô tương ứng.

- Ví dụ đối với xe xích X60, cần phải nhập số " 60 " vào ô tương ứng.

- Ví dụ đối với xe bánh XB 80, cần phải nhập số " 80 " vào ô tương ứng.

2.3. Riêng với xe ôt ô H13 thì phải tra bảng với xe ôtô H10, rồi nhân kết quả với hệ số 1,3.

2.4. Sau đó nhập chiều dài nhịp dầm L và cự ly từ gối trái đến mặt cắt đang xét L1.

2.5. Kết quả giá trị hoạt tải rải đều tương đương sẽ hiên ra chữ số mầu đỏ ở dòng tiếp sau.

- Số liệu nhập và kết quả

- Loại hoạt tải xe ô tô H-30

- Chiều dài nhịp 42 m

- Khoảng cách từ đỉnh ĐAH đến đầu dầm 21 m

- Trị số hoạt tải rải đều tương dương 1,760 T/m

Các bảng phụ trợ của cơ sở dữ liệu để tra bảng

Xe ôtô

Đoàn xe ôtô H-30					Đoàn xe ôtô H-10				
		1		2			1		2
		0,5	0,5	0,25			0,5	0,5	0,25
23	40	1,76		1,9	23	40	1,15		1,16
	42	1,76	1,76	1,88		42	1,14	1,14	1,15
24	50	1,76		1,79	24	50	1,09		1,09
Nhịp	0,5	0,25	0		Nhịp	0,5	0,25	0	
0	1	2	3		0	1	2	3	
4	7,2	8,8	9,6		4	4,75	4,75	4,75	
5	6,53	7,55	8,06		5	3,8	3,8	4,08	
6	5,87	6,58	6,93		6	3,17	3,3	3,56	
7	5,29	5,81	6,07		7	2,71	2,95	3,14	
8	4,8	5,2	5,47		8	2,38	2,67	2,81	
9	4,39	4,7	5,07		9	2,27	2,43	2,65	
10	4,03	4,29	4,7		10	2,16	2,23	2,54	
11	3,73	4,03	4,38		11	2,05	2,05	2,42	
12	3,47	3,8	4,1		12	1,94	1,99	3,31	

Đoàn xe ôtô H-30					Đoàn xe ôtô H-10				
13	3,31	3,59	3,85		13	1,85	1,93	2,2	
14	3,16	3,4	3,62		14	1,76	1,86	2,08	
15	3,02	3,23	3,42		15	1,67	1,76	2	
16	2,89	3,08	3,24		16	1,59	1,73	1,91	
17	2,66	2,8	2,96		17	1,54	1,65	1,78	
20	2,45	2,57	2,87		20	1,48	1,57	1,67	
22	2,27	2,37	2,82		22	1,41	1,49	1,62	
24	2,13	2,22	2,75		24	1,35	1,44	1,57	
26	2,03	2,16	2,67		26	1,33	1,38	1,51	
28	1,93	2,13	2,6		28	1,3	1,34	1,45	
30	1,84	2,09	2,54		30	1,26	1,32	1,41	
32	1,76	2,06	2,46		32	1,23	1,29	1,37	
36	1,76	1,98	2,37		36	1,19	1,22	1,32	
40	1,76	1,9	2,29		40	1,15	1,16	1,27	
50	1,76	1,79	2.17		50	1,09	1,09	1,19	
60	1,76	1,75	2,08		60	1,05	1,05	1,13	
70	1,74	1,74	2,02		70	1,01	1,02	1,08	
80	1,74	1,74	2		80	0,99	1	1,05	
90	1,74	1,74	1,97		90	0,97	0,97	1,03	
100	1,72	1,74	1,93		100	0,96	0,96	1,01	
120	1,72	1,72	1,9		120	0,96	0,96	1,01	
140	1,7	1,71	1,86		140	0,96	0,96	1,01	
160	1,7	1,71	1,86		160	0,96	0,96	1,01	

Xe xích (xe bánh nặng)

Be bánh nặng XB-80					Xe xích X-60		
		1		2			
		0,5	0,5	0,25			
23	40	3,76		3,76	23	40	2,81
	42	3,62	3,62	3,62		42	2,7
24	50	3,05		3,05	24	50	2,28
Nhịp	0,5	0,25	0		Nhịp		
0	1	2	3		0	1	
4	18	18	22		4	12	

Be bánh nặng XB-80					Xe xích X-60		
5	16,6	16,6	20,5		5	12	
6	16	16	18,7		6	11,7	
7	15	15	17		7	11	
8	14	14	15,5		8	10,3	
9	13	13	14,2		9	9,63	
10	12,2	12,2	13,1		10	9	
11	11,4	11,4	12,2		11	8,43	
12	10,7	10,7	11,3		12	7,92	
13	10	10	10,6		13	7,45	
14	9,47	9,47	9,95		14	7,04	
15	8,1	8,1	9,38		15	6,67	
16	8,5	8,5	8,67		16	6,33	
18	7,7	7,7	8		17	5,74	
20	7,04	7,04	7,28		20	5,25	
22	6,48	6,48	6,67		22	4,83	
24	6	6	6,17		24	4,48	
26	5,58	5,58	5,73		26	4,17	
28	5,22	5,22	5,33		28	3,9	
30	4,91	4,91	5,01		30	3,67	
32	4,62	4,62	4,71		32	3,46	
36	4,15	4,15	4,22		36	3,1	
40	3,76	3,76	3,82		40	2,81	
50	3,05	3,05	3,08		50	2,28	
60	2,56	2,56	2,59		60	1,92	
70	2,21	2,21	2,22		70	1,65	
80	1,94	1,94	1,95		80	1,45	

14.3. VÍ DỤ XD-3 : CHƯƠNG TRÌNH TÍNH TOÁN MÓNG CỌC BỆ THẤP

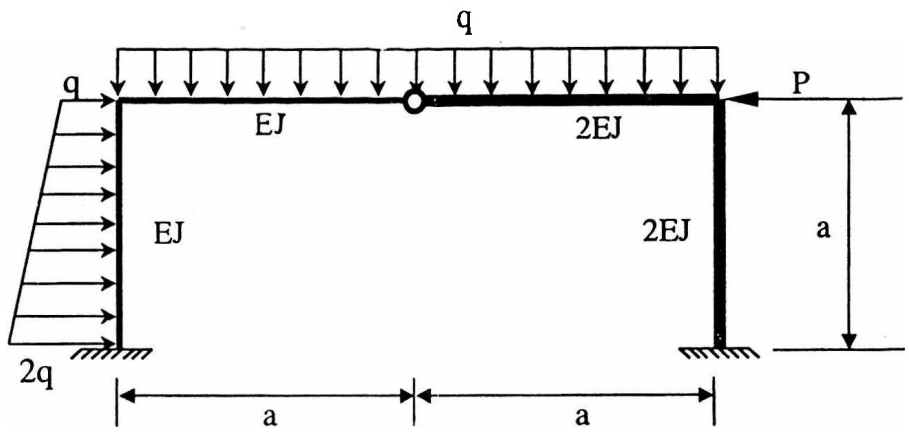
Sau đây là ví dụ về bảng tính dùng để tính toán móng cọc bệ thấp, là loại móng rất thông dụng trong ngành xây dựng. Các công thức tính toán có thể xem ở bất cứ sách nào về Thiết kế nền móng. Bảng tính sẽ gồm 4 trang tính có tên lần lượt là: hướng dẫn, sơ đồ khối, số liệu, tính toán, hình vẽ. Nội dung cụ thể của mỗi trang tính được in ra sau đây:

Trang tính "Hướng dẫn"

Phần1: Phần hướng dẫn						
Hướng dẫn sử dụng chương trình:						
	Người tính toán :			*Nguyễn-Viết-Trung*		
	Ngày tính			*4/9/99*		
Chương trình được lập để tính toán móng cọc bệ thấp và kiểm toán trong các trường hợp:						
	1. Bài toán phẳng, cọc có dạng hình vuông					
	2. Kiểm toán theo trạng thái giới hạn thứ nhất về cường độ đất nền					
	3. Các nhiệm vụ phải thực hiện khi tính toán móng cọc bệ thấp					
	* Chọn kích thước của đài cọc và của cọc					
	* Xác định sức chịu tải của cọc					
	* Xác định số lượng cọc và bố trí cọc trong móng					
	* Tính toán và kiểm tra đáy móng					
Nội dung của chương trình:						
	1. Phần 1: Phần hướng dẫn sử dụng chương trình					
	2. Phần 2: Phần sơ đồ khối					
	3. Phần 3: Phần các công thức và giả thiết tính toán					
	4. Phần 4: Phần tính toán chương trình					
	5. Phần 5: Phần hình vẽ minh hoạ					

14.4. VÍ DỤ XD-4: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH TOÁN HỆ KHUNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Cho hệ kết cấu như hình vẽ dưới đây, chọn hệ toạ độ tổng quát và đánh số nút, phần tử như hình vẽ:



I. Số liệu về bài toán

L	3	m
E	1200000	T/m^2
P	0,002	T
M	1,2	T.m
q	0,5	T/m
b	0,15	m

1. Bước 1: Đánh số hiệu thanh và đánh số thanh

Thanh	Nút đầu	Nút cuối
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

- Thông tin về nút:

Số hiệu nút	1	2	3	4	5
Tọa độ X	0	0	3	6	6
Tọa độ Y	0	3	3	3	0

2. Bước 2: Xác định các đặc trưng của mỗi thanh

- Lập bảng xác định đặc trưng của từng thanh.
- Số liệu trong các cột **b, h, L, cos, sin** được gõ trực tiếp từ bàn phím.
- Riêng số liệu trong cột EJ và EA được tính từ công thức sau:

EJ = (b*c^3/12)*E

EA = b*h*E

Thanh	b	h	L	cos	sin	E J	E A
1	0,15	0,15	3	0	1	50,625	27000
2	0,15	0,15	3	1	0	50,625	27000
3	0,15	0,15	3	1	0	50,625	27000
4	0,15	0,15	3	0	-1	50,625	27000

3. Bước 3: Lập các ma trận chuyển toạ độ.

a) Ma trận chuyển toạ độ thanh 1:

$$T1 = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 & a15 & a16 \\ a21 & a22 & a23 & a24 & a25 & a26 \\ a31 & a32 & a33 & a34 & a35 & a36 \\ a41 & a42 & a43 & a44 & a45 & a46 \\ a51 & a52 & a53 & a54 & a55 & a56 \\ a61 & a62 & a63 & a64 & a65 & a66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} =b(thanh1) & =sin(thanh1) & =0 & =0 & =0 & =0 \\ = - a12 & = a11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & =a11 & =a12 & =a13 \\ 0 & 0 & 0 & =a21 & =a22 & =a23 \\ 0 & 0 & 0 & =a31 & =a32 & =a33 \end{bmatrix}$$

$$T1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lấy ma trận chuyển vị trí của ma trận T theo công thức sau:

$(T1)^T = \{TRANSPOSE(a11:a66)\}$

$$(T1)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Ma trận chuyển toạ độ thanh 4:

Lặp lại các bước tương tự như với thanh 1, sẽ được:

$$T4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T4)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thanh số 2, 3 có hệ toạ độ trùng với hệ toạ độ chung nên không cần lập ma trận chuyển toạ độ.

Các điều kiện biên

- Tại ngàm 1 và ngàm 5 : $u_1 = v_1 = \theta_1 = u_5 = v_5 = \theta_5 = 0$

Số lượng chuyển vị nút và đánh số chuyển vị nút:

u_2	1
v_2	2
q_2	3
u_3	4
v_3	5
q_3^2	6
θ_3^3	7
u_4	8
v_4	9
q_4	10

4. Bước 4: Xác định véctơ phản lực đầu thanh.

a) Véctơ phản lực đầu thanh trong hệ toạ độ địa phương, và trong hệ toạ độ chung:

Lập vectơ phản lực đầu thanh trong các hệ toạ độ theo công thức sau:

Thanh n:

Ngàm	Tự do	Fe'l	Ký hiệu
Ai	= - Ai	=F	u_i

Ghi chú: Nhập số liệu vào ô Ai với i = 1 - 6

Hàm F có công thức: {MMULT(a11:a66, A1:A6)}

- Thanh 1:

Ngàm	Tự do	Fe'l	Ký hiệu
13,00	-13,00	0,00	u_i
0,00	0,00	-13,00	v_i
12,00	-12,00	-12,00	q_i
9,80	-9,80	7,50	u_j
7,50	-7,50	-9,80	v_j
5,30	-5,30	-5,30	q_j

- Thanh 2:

Ngàm	Tự do	Fe '2	Ký hiệu
9,80	-9,80	-9,80	u_i
7,50	-7,50	-7,50	v_i
5,30	-5,30	-5,30	q_i
0,00	0,00	0,00	u_j
7,50	-7,50	-7,50	v_j
3,75	-3,75	-3,75	q_j

- Thanh 3:

Ngàm	Tự do	Fe '3	Ký hiệu
0,00	0,00	0,00	u_i
7,50	-7,50	-7,50	v_i
3,75	-3,75	-3,75	q_i
0,00	0,00	0,00	u_j
7,50	-7,50	-7,50	v_j
3,75	-3,75	-3,75	q_j

- Thanh 4:

Ngàm	Tự do	Fe '4	Ký hiệu
0,00	0,00	-7,50	u_i
7,50	-7,50	0,00	v_i
3,75	-3,75	-3,75	q_i
0,00	0,00	0,00	u_j
0,00	0,00	0,00	v_j
0,00	0,00	0,00	q_i

- Véctơ lực nút tập trung:

Tên	LNtt
U_1	
V_1	
M_1	
U_2	
V_2	
M_2	
U_3	

Tên	LNtt
V_3	
M_3	
U_4	0,002
V_4	
M_4	
U_5	
V_5	
M_5	

b) Véctơ lực nút trong hệ toạ độ chung:

Lập bảng xác định véctơ lực nút trong hệ toạ độ chung:

Tên	Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	LNtt	Tổng
U2	=Fe'1 của Uj	=Fe'2 của Ui			=SUM(Thanh1:3)
V2	=Fe'1 của Vj	=Fe'2 của Vi			=SUM(Thanh1:3)
M2	=Fe'1 của Qj	=Fe'2 của Qi			=SUM(Thanh1:3)
U3		=Fe'2 của Uj	=Fe'3 của Ui		=SUM(Thanh1:3)
V3		=Fe'2 của Vj	=Fe'3 của Vi		=SUM(Thanh1:3)
M3		=Fe'2 của Qj	-3,75		=SUM(Thanh1:3)
M3		-3,75	=-3,75		=SUM(Thanh1:3)
U4			=Fe'3 của Uj	=U4	=SUM(Thanh1:3)
V4			=Fe'3 của Vj		=SUM(Thanh1:3)
M4			=Fe'3 của Qj		=SUM(Thanh1:3)

Tên	Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	LNtt	Tổng	Ký hiệu
U2	7,5	-9,8			-2,3	n1
V2	-9,8	-7,5			-17,3	n2
M2	-5,3	-5,3			-10,6	n3
U3		0	0		0	n4
V3		-7,5	-7,5		-15	n5
M3		-3,75	-3,75		-7,5	n6
M3		-3,75	-3,75		-7,5	n7
U4			0	0,002	0,002	n8
V4			-7,5		-7,5	n9
M4			-3,75		-3,75	n10

II. Lập ma trận độ cứng

1. Ma trận độ cứng phần tử

Lập ma trận độ cứng của phần tử thanh như sau:

- Thanh 1:

EJ	b (thanh1)	12E J/L^3=	=12*b/L^3	E A/L	=h/L
EA	h (thanh1)	6E J/L^2=	=6*b/L^2		
L	L (thanh1)	4E J/L=	=4*b/L		
		2E J/L=	=b/L		

EJ	50,625	12E J/L^3=	22,5	E A/L	9000
EA	27000	6E J/L^2=	33,75		
L	3	4E J/L=	67,5		
		2E J/L=	33,75		

$$K1,2 = \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 & b14 & b15 & b16 \\ b21 & b22 & b23 & b24 & b25 & b26 \\ b31 & b32 & b33 & b34 & b35 & b36 \\ b41 & b42 & b43 & b44 & b45 & a46 \\ b51 & b52 & b53 & b54 & b55 & a56 \\ b61 & b62 & b63 & b64 & b65 & b66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\ 0 & 22,5 & 33,75 & 0 & -22,5 & 33,75 \\ 0 & 33,75 & 67,5 & 0 & -33,75 & 33,75 \\ -9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\ 0 & -22,5 & -33,75 & 0 & 22,5 & -33,75 \\ 0 & 33,75 & 33,75 & 0 & -33,75 & 67,5 \end{bmatrix}$$

$$K3,4 = \begin{bmatrix} c11 & c12 & c13 & c14 & c15 & c16 \\ c21 & c22 & c23 & c24 & c25 & c26 \\ c31 & c32 & c33 & c34 & c35 & c36 \\ c41 & c42 & c43 & c44 & c45 & c46 \\ c51 & c52 & c53 & c54 & c55 & c56 \\ c61 & c62 & c63 & c64 & c65 & c66 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
=EA/L & 0 & 0 & = -EA/L & 0 & 0 \\
0 & =(12*b/L^3)*2 & =(6*b/L^2)*2 & 0 & = -12*b/L^3)*2 & =(6*b/L^2)*2 \\
0 & = a23*2 & =(4*b/L)*2 & 0 & = - b26*2 & =(b/L)*2 \\
= -b11 & 0 & 0 & = b11 & 0 & 0 \\
0 & =b25*2 & =b35*2 & 0 & =b22*2 & =b35*2 \\
0 & =b26*2 & =b26*2 & 0 & =b56*2 & =b66*2
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
0 & 45 & 67,5 & 0 & -45 & 67,5 \\
0 & 67,5 & 135 & 0 & -67,5 & 67,5 \\
-9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
0 & -45 & -67,5 & 0 & 45 & -67,5 \\
0 & 67,5 & 67,5 & 0 & -67,5 & 135
\end{bmatrix}
$$

2. Ma trận độ cứng phần tử trong hệ toạ độ chung:

Lập ma trận độ cứng phần tử trong hệ toạ độ chung theo cách sau:

- Thanh 1:

$(T1)^T*K1$ = {MMULT($(T1)^T$, b1j của K1,2)}

$$
= \begin{bmatrix}
0 & -22,5 & -33,75 & 0 & 22,5 & -33,75 \\
9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
0 & 33,75 & 67,5 & 0 & -33,75 & 33,75 \\
0 & 22,5 & 33,75 & 0 & -22,5 & 33,75 \\
-9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
0 & 33,75 & 33,75 & 0 & -33,75 & 67,5
\end{bmatrix}
$$

K'1 = {MMULT ([$(T1)^T*K1$], T1) }

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
22,5 & 0 & -33,75 & -22,5 & 0 & -33,75 \\
0 & 9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 \\
-33,75 & 0 & 67,5 & 33,75 & 0 & 33,75 \\
-22,5 & 0 & 33,75 & 22,5 & 0 & 33,75 \\
0 & -9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 \\
-33,75 & 0 & 33,75 & 33,75 & 0 & 67,5
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

$$
K'2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
=b11 & b12 & b13 & b14 & b15 & b16 \\
=b21 & =b22 & =b23 & =b24 & =b25 & =b26 \\
=b31 & =b23 & =b24 & =b25 & =b26 & =b27 \\
=b41 & =b42 & =b43 & =b44 & =b45 & =b46 \\
=b51 & =b52 & =b53 & =b54 & =b55 & =b56 \\
=b61 & =b62 & =b63 & =b64 & =b65 & =b66
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
0 & 22,5 & 33,75 & 0 & -22,5 & 33,75 \\
0 & 33,75 & 67,5 & 0 & -33,75 & 33,75 \\
-9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
0 & -22,5 & -33,75 & 0 & 22,5 & -33,75 \\
0 & 33,75 & 33,75 & 0 & -33,75 & 67,5
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

$$
K'3 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
c11 & c12 & c13 & c14 & c15 & c16 \\
c21 & c22 & c23 & c24 & c25 & c26 \\
c31 & c32 & c33 & c34 & c35 & c36 \\
c41 & c42 & c43 & c44 & c45 & c46 \\
c51 & c52 & c53 & c54 & c55 & c56 \\
c61 & c62 & c63 & c64 & c65 & c66
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
0 & 45 & 67,5 & 0 & -45 & 67,5 \\
0 & 67,5 & 135 & 0 & -67,5 & 67,5 \\
-9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
0 & -45 & -67,5 & 0 & 45 & -67,5 \\
0 & 67,5 & 67,5 & 0 & -67,5 & 135
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}
$$

- *Thanh 4:*

Lặp lại thao tác tương tự như ở thanh 1, ta có kết quả cho thanh số 4:

$$
(T4)^T * K4 = \begin{bmatrix}
0 & 45 & 67,5 & 0 & -45 & 67,5 \\
-9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
0 & 67,5 & 135 & 0 & -67,5 & 67,5 \\
0 & -45 & -67,5 & 0 & 45 & -67,5 \\
9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
0 & 67,5 & 67,5 & 0 & -67,5 & 135
\end{bmatrix}
$$

$$
K'4 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 8 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
45 & 0 & 67,5 & -45 & 0 & 67,5 \\
0 & 9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 \\
67,5 & 0 & 135 & -67,5 & 0 & 67,5 \\
-45 & 0 & -67,5 & 45 & 0 & -67,5 \\
0 & -9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 \\
67,5 & 0 & 67,5 & -67,5 & 0 & 135
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
$$

3. Ma trận độ cứng thanh dựa vào vị trí trong ma trận chung:

Lập các ma trận độ cứng của từng thanh dựa vào vị trí trong ma trận chung:

- Thanh 1:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	=i44(K'1)	=i45(K'1)	=i46(K'1)							
2	=i54(K'1)	=i55(K'1)	=i56(K'1)							
3	=i64(K'1)	=i65(K'1)	=i66(K'1)							
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22,5	0	33,75							
2	0	9000	0							
3	33,75	0	67,5							
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

- Thanh 2:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	=i11(K'2)	=i12(K'2)	=i13(K'2)	=i14(K'2)	=i15(K'2)	=i16(K'2)				
2	=i21(K'2)	=i22(K'2)	=i23(K'2)	=i24(K'2)	=i25(K'2)	=i26(K'2)				
3	=i31(K'2)	=i32(K'2)	=i33(K'2)	=i34(K'2)	=i35(K'2)	=i36(K'2)				
4	=i41(K'2)	=i42(K'2)	=i43(K'2)	=i44(K'2)	=i45(K'2)	=i46(K'2)				
5	=i51(K'2)	=i52(K'2)	=i53(K'2)	=i54(K'2)	=i55(K'2)	=i56(K'2)				
6	=i61(K'2)	=i62(K'2)	=i63(K'2)	=i64(K'2)	=i65(K'2)	=i66(K'2)				
7										
8										
9										
10										

$$
= \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & 9000 & 0 & 0 & -9000 & 0 & 0 & & & & \\
2 & 0 & 22,5 & 33,75 & 0 & -22,5 & 33,75 & & & & \\
3 & 0 & 33,75 & 67,5 & 0 & -33,75 & 33,75 & & & & \\
4 & -9000 & 0 & 0 & 9000 & 0 & 0 & & & & \\
5 & 0 & -22,5 & -33,75 & 0 & 22,5 & -33,75 & & & & \\
6 & 0 & 33,75 & 33,75 & 0 & -33,75 & 67,5 & & & & \\
7 & & & & & & & & & & \\
8 & & & & & & & & & & \\
9 & & & & & & & & & & \\
10 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- *Thanh 3:*

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & =i11(K'3) & =i12(K'3) & & =i13(K'3) & =i14(K'3) & =i15(K'3) & =i16(K'3) \\
5 & & & & =i21(K'3) & =i22(K'3) & & =i23(K'3) & =i24(K'3) & =i25(K'3) & =i26(K'3) \\
6 & & & & & & & & & & \\
7 & & & & =i31(K'3) & =i32(K'3) & & =i33(K'3) & =i34(K'3) & =i35(K'3) & =i36(K'3) \\
8 & & & & =i41(K'3) & =i42(K'3) & & =i43(K'3) & =i44(K'3) & =i45(K'3) & =i46(K'3) \\
9 & & & & =i51(K'3) & =i52(K'3) & & =i53(K'3) & =i54(K'3) & =i55(K'3) & =i56(K'3) \\
10 & & & & =i61(K'3) & =i62(K'3) & & =i63(K'3) & =i64(K'3) & =i65(K'3) & =i66(K'3)
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & & & & \\
4 & & & & 9000 & 0 & & 0 & -9000 & 0 & 0 \\
5 & & & & 0 & 45 & & 67,5 & 0 & -45 & 67,5 \\
6 & & & & & & & & & & \\
7 & & & & 0 & 67,5 & & 135 & 0 & -67,5 & 67,5 \\
8 & & & & -9000 & 0 & & 0 & 9000 & 0 & 0 \\
9 & & & & 0 & -45 & & -67,5 & 0 & 45 & -67,5 \\
10 & & & & 0 & 67,5 & & 67,5 & 0 & -67,5 & 135
\end{array}
$$

- Thanh 4:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8								=i11(K'4)	=i12(K'4)	=i13(K'4)
9								=i21(K'4)	=i22(K'4)	=i23(K'4)
10								=i31(K'4)	=i32(K'4)	=i33(K'4)

=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8								45	0	67,5
9								0	9000	0
10								67,5	0	135

4. Ma trận độ cứng tổng thể

Ma trận độ cứng tổng thể được lập theo công thức sau:

K = { Matrận(Thanh1) + Matrận(Thanh2) + Matrận(Thanh3) + Matrận(Thanh4) }

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9022,5	0	33,75	-9000	0	0	0	0	0	0
2	0	9022,5	33,75	0	-22,5	33,75	0	0	0	0
3	33,75	33,75	135	0	-33,75	33,75	0	0	0	0
4	-9000	0	0	8000	0	0	0	-9000	0	0
5	0	-22,5	-33,75	0	67,5	-33,75	67,5	0	-45	67,5
6	0	33,75	33,75	0	-33,75	67,5	0	0	0	0
7	0	0	0	0	67,5	0	135	0	-67,5	67,5
8	0	0	0	-9000	0	0	0	9045	0	67,5
9	0	0	0	0	-45	0	-67,5	0	9045	-67,5
10	0	0	0	0	67,5	0	67,5	67,5	-67,5	270

Nghịch đảo ma trận tổng thể K theo công thức sau:

K^{-1} = { MINVERSE (MatrậnK) }

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0{,}02774 & 0{,}00002 & -0{,}00597 & 0{,}02767 & 0{,}01373 & 0{,}00984 & -0{,}00195 & 0{,}02761 & -0{,}00002 & -0{,}00985 \\
0{,}00002 & 0{,}00011 & -0{,}00001 & 0{,}00002 & 0{,}00005 & -0{,}00002 & -0{,}00002 & 0{,}00002 & 0{,}00000 & -0{,}00001 \\
-0{,}00597 & -0{,}00001 & 0{,}01187 & -0{,}00594 & 0{,}01190 & 0{,}00002 & -0{,}00594 & -0{,}00591 & 0{,}00001 & -0{,}00001 \\
0{,}02767 & 0{,}00002 & -0{,}00594 & 0{,}02772 & 0{,}01381 & 0{,}00986 & -0{,}00198 & 0{,}02765 & -0{,}00002 & -0{,}00988 \\
0{,}01373 & 0{,}00005 & 0{,}01190 & 0{,}01381 & 0{,}11079 & 0{,}04942 & -0{,}04547 & 0{,}01389 & 0{,}00006 & -0{,}01979 \\
0{,}00984 & -0{,}00002 & 0{,}00002 & 0{,}00986 & 0{,}04942 & 0{,}03953 & -0{,}01976 & 0{,}00989 & 0{,}00002 & -0{,}00988 \\
-0{,}00195 & -0{,}00002 & -0{,}00594 & -0{,}00198 & -0{,}04547 & -0{,}01976 & 0{,}02767 & -0{,}00200 & 0{,}00002 & 0{,}00495 \\
0{,}02761 & 0{,}00002 & -0{,}00591 & 0{,}02765 & 0{,}01389 & 0{,}00989 & -0{,}00200 & 0{,}02770 & -0{,}00002 & -0{,}00990 \\
-0{,}00002 & 0{,}00000 & 0{,}00001 & -0{,}00002 & 0{,}00006 & 0{,}00002 & 0{,}00002 & -0{,}00002 & 0{,}00011 & 0{,}00001 \\
-0{,}00985 & -0{,}00001 & -0{,}00001 & -0{,}00988 & -0{,}01979 & -0{,}00988 & 0{,}00495 & -0{,}00990 & 0{,}00001 & 0{,}00989
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

III. Tính nội lực

1. Nghiệm của hệ

Tính toán nghiệm của hệ theo công thức sau:

i = | { MMULT (Matrận K^{-1}, n1:n10) } |

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -0{,}229 \\ -0{,}002 \\ -0{,}246 \\ -0{,}230 \\ -1{,}776 \\ -0{,}875 \\ 0{,}672 \\ -0{,}231 \\ -0{,}002 \\ 0{,}320 \end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{c} \text{Ký hiệu} \\ = e1 \\ = e2 \\ = e3 \\ = e4 \\ = e5 \\ = e6 \\ = e7 \\ = e8 \\ = e9 \\ = e10 \end{array}
$$

2. Chuyển vị của các thanh trong hệ toạ độ chung:

Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
= 0	= e1	= e4	= e8
= 0	= e2	= e5	= e9
= 0	= e3	= e7	= e10
= e1	= e4	= e8	= 0
= e2	= e5	= e9	= 0
= e3	= e6	= e10	= 0

P =

Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
0,000	-0,229	-0,230	-0,231
0,000	-0,002	-1,776	-0,002
0,000	-0,246	0,672	0,320
-0,229	-0,230	-0,231	0,000
-0,002	-1,776	-0,002	0,000
-0,246	-0,875	0,320	0,000

3. Chuyển vị của các thanh trong hệ toạ độ địa phương:

Việc tính toán được thực hiện như sau:

F =

Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
= B	= i12củaP	= i13củaP	= C
= B	= i22củaP	= i23củaP	= C
= B	= i32củaP	= i33củaP	= C
= B	= i42củaP	= i43củaP	= C
= B	= i52củaP	= i53củaP	= C
= B	= i62củaP	= i63củaP	= C

Với B = { MMULT (MatrậnT4, i11:i61củaP) }

và C = { MMULT (MatrậnT4, i41:i46củaP) }

=

Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
0,000	-0,229	-0,230	0,002
0,000	-0,002	-1,776	-0,231
0,000	-0,246	0,672	0,320
-0,002	-0,230	-0,231	0,000
0,229	-1,776	-0,002	0,000
-0,246	-0,875	0,320	0,000

4. Nội lực do chuyển vị:

Việc tính toán được thực hiện như sau:

Thanh 1 = { MMULT ((MatrậnK1,2), i11:i61củaF) }

Thanh 2 = { MMULT ((MatrậnK1,2), i12:i62củaF) }

Thanh 3 = { MMULT ((MatrậnK3,4), i13:i63củaF) }

Thanh 4 = { MMULT ((MatrậnK3,4), i14:i64củaF) }

H =

Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
19,377	11,154	11,154	20,423
-13,454	2,077	-12,923	11,156
-16,029	13,732	-7,500	27,518
-19,377	-11,154	-11,154	-20,423
13,454	-2,077	12,923	-11,156
-24,332	-7,500	-31,268	5,949

5, Nội lực trong hệ thanh

Nội lực trong hệ thanh được tính toán và thể hiện trong bảng sau:

	Thanh 1	Thanh 2	Thanh 3	Thanh 4
N1	= H11+A1(thanh1)	= H12+A1(thanh2)	= H13+A1(thanh3)	= H14+A1(thanh4)
Q1	= H21+A2(thanh1)	= H22+A2(thanh2)	= H23+A2(thanh3)	= H24+A2(thanh4)
M1	= H31 + A3(thanh1)	= H32+ A3(thanh2)	= H33 + A3(thanh3)	= H34+ A3(thanh4)
N2	= H41 + A4(thanh1)	= H42+ A4(thanh2)	= H43+ A4(thanh3)	= H44+ A4(thanh4)
Q2	= H51 + A5(thanh1)	= H52 + A5(thanh2)	= H53+ A5(thanh3)	= H54+ A5(thanh4)
M2	= H61 + A6(thanh1)	= H62 + A6(thanh2)	= H63 + A6(thanh3)	= H64+ A6(thanh4)

IV. Ma trận của các phần tử trong hệ toạ độ chung

1. Phần tử 1:

Nhập số liệu cho các giá trị xi, xj, yi, yj.

Giá trị a được tính theo công thức: a = SRT ((xj-xi)^2 + (yj-yi)^2)

xi	yi	xj	yj	a
3	0	0	3	4,24

$[k']i = [T]^T i\ [k]i\ [T]i$

Tính ma trận $[T]^1$ và $[T]^T_1$ theo cách sau đây:

$$[T]^{I} = \begin{bmatrix} g11 & g12 & g13 & g14 & g15 & g16 \\ g21 & g22 & g23 & g24 & g25 & g26 \\ g31 & g32 & g33 & g34 & g35 & g36 \\ g42 & g42 & g43 & g44 & g45 & g46 \\ g51 & g52 & g53 & g54 & g55 & g56 \\ g61 & g62 & g63 & g64 & g65 & g66 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} =(xj-xi)/a & =(yj-yi)/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ = -g12 & =g11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & =g11 & =g12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & =g21 & =g22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,70711 & 0,70711 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,70711 & -0,7071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,71 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,71 & -0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{T}]^{T}_{I} = \begin{bmatrix} h11 & h12 & h13 & h14 & h15 & h6 \\ h21 & h22 & h23 & h24 & h25 & h26 \\ h31 & h32 & h33 & h34 & h35 & h36 \\ h41 & h42 & h43 & h44 & h45 & h46 \\ h51 & h52 & h53 & h54 & h55 & h56 \\ h561 & h62 & h63 & h64 & h65 & h66 \end{bmatrix}$$

= TRANSPOSE (Matrận $[T]^{I}$)

$$= \begin{bmatrix} -0,71 & -0,71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,71 & -0,71 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,71 & -0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,71 & -0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *Các phần tử khác:*

Thực hiện tương tự với các phần tử 2, 3, 4:

a) Phần tử 2:

xi	yi	xj	yj	a
0	3	3	3	3

$$[T]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]^T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Phần tử 3:

xi	yi	xj	yj	a
6	3	6	0	3

$$[T]^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

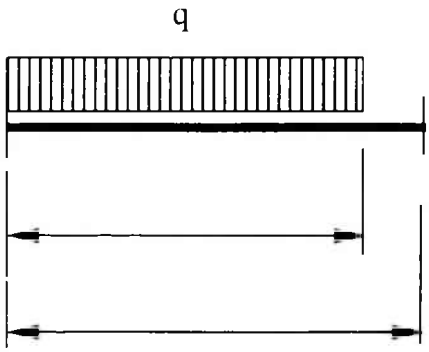
$$[T]^T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V. Tính tải trọng về nút

Nhập số liệu vào các giá trị x, q, l, M, P.

Nhập x =	3	(m)	Nhập l =	3	(m)
Nhập q =	5	(kN)	Nhập M =	50	(kN.m)
Nhập P =	50	(kN)			

1. Trạng thái ngàm 1:



Q1 = qx (1 - x^2/a^2 + x^3/(2a^3))

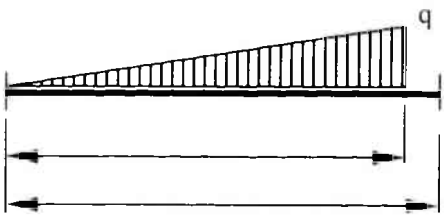
Q2 = qx (x^2/a^2-x^3/(2a^3))

M1 = qx^2/12 (6-8x/a-3x^2/a^2)

M2 = qx^3/(12a) (4-3x/a)

M	Q		M	Q
4	7,5		3,75	7,5

2. Trạng thái ngàm 2:



Q1 = qx/2 (-3x^2/(2a^2)+4x^3/(5a^3)+1)

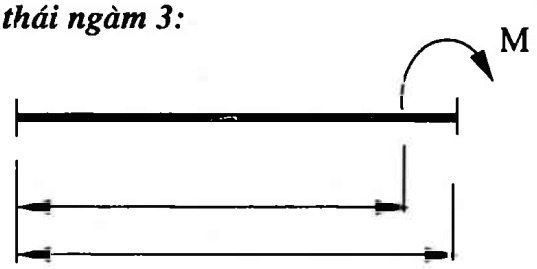
Q2 = qx^3/2 (3/(2a^2)-4x/(5a^3))

M1 = qx^2/30 (10-15x/a+6x^2/a^2)

M2 = qx^3 (1/4a-x/(5a^3))

M	Q		M	Q
1,5	2,25		2,25	5,25

3. Trạng thái ngàm 3:



Q1 = M (6x(a-x)/a^3)

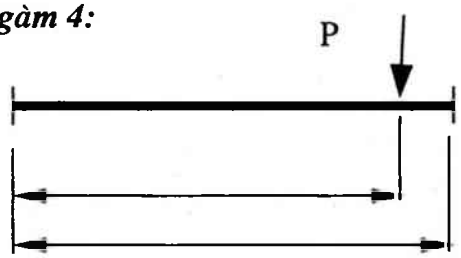
Q2 = M (6x(a-x)/a^3)

M1 = M/a^2 (a-x)(a-3x)

M2 = Mx^2/a^2

M	Q		M	Q
0,0	0,0		50	0

4. Trạng thái ngàm 4:



Q1 = P(1+2x/a)(1-x/a)^2

Q2 = P [1-(1+2x/a)(1-x/a)^2]

M1 = Px (1-x/a)^2

M2 = Px^2 (a-x)/a^2

M	Q		M	Q
0,0	0,0		0	50

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Quy trình thiết kế cầu cống theo các trạng thái giới hạn 22TCN 18-79*. Bộ Giao thông vận tải.
2. *Tiêu chuẩn thiết kế cầu 22TCN 272-01*. Bộ Giao thông vận tải
3. PGS.TS. Nguyễn Viết Trung, TS. Hoàng Hà. *Cầu bêtông cốt thép nhịp giản đơn*. NXB Giao thông vận tải, 2003
4. PGS.TS. Nguyễn Viết Trung, TS. Hoàng Hà, TS. Nguyễn Ngọc Long. *Cầu Bê tông cốt thép, Tập II*. NXB Giao thông Vận tải, 2000.
5. PGS.TS. Nguyễn Viết Trung, KS. Phạm Huy Chính. *Các công nghệ thi công cầu*. NXB Xây dựng, 2003.
6. PGS.TS Nguyễn Viết Trung. *Thiết kế kết cấu bêtông cốt thép hiện đại theo Tiêu chuẩn ACI*. NXB Giao thông vận tải, 2000.
7. PGS.TS. Nguyễn Viết Trung, Ths. Lê Thanh Liêm. *Cọc khoan nhồi trong xây dựng công trình giao thông*. NXB Xây dựng, 2003
8. Võ Văn Huy, Huỳnh Ngọc Liêu. *Máy tính trong kinh doanh*. NXB Khoa học Kỹ thuật, 1998. .
9. *100 bài toán kỹ thuật trong Excel, (biên dịch)*. NXB Khoa học Kỹ thuật, 1998.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

Chương 1: Các phép toán khoa học kỹ thuật thực hiện trên EXCEL

1.1. Độ chính xác của các phép toán trên EXCEL 5

1.2. Khái niệm về tham chiếu ô trong bảng tính EXCEl 7

1.3. Sử dụng các toán tử để tính toán 14

1.4. Sử dụng các hàm bảng tính 16

Chương 2: Lập bảng tính toán khoa học kỹ thuật trên EXCEL

2.1. Thiết kế một ứng dụng kỹ thuật khoa học trên Excel 36

2.2. Giải phương trình đơn giản 45

2.3. Một số thủ thuật bổ sung 48

Chương 3: Vẽ đồ thị theo dữ liệu và các hàm số trên EXCEL

3.1. Các kiểu đồ thị trong EXCEL 50

3.2. Sử dụng Chart Wizard 51

3.3. Vẽ đồ thị một bảng kỹ thuật 56

3.4. Chỉnh sửa các đồ thị 60

3.5. Tạo ra các đồ thị lôgarit và bán lôgarit 63

3.6. Tạo đồ thị không gian ba chiều 63

3.7. Vẽ hình 64

Chương 4: Sử dụng "Macro" và "Visual Basic for Applications"

4.1. Sử dụng các lệnh Macro 66

4.2. Tạo Macro lệnh để tự động hóa các bảng tính 66

4.3. Lập trình với Macro 70

4.4. Tạo ra Macro hàm 73

4.5. Khái niệm về Visual Basic for Applications 74

4.6. Tạo các thủ tục Visual Basic 75

4.7. Truy nhập các đối tượng bằng Visual Basic 76
4.8. Tạo các thủ tục câu lệnh để tự động hoá các bảng tính 77
4.9. Lập trình với Visual Basic for Applications 82
4.10. Tạo các thủ tục hàm 93
4.11. Gỡ rối các chương trình Macro 94

Chương 5: Phân tích các số liệu thí nghiệm

5.1. Nhập số liệu thí nghiệm lên bảng tính 95
5.2. Lưu trữ và khai thác các dữ liệu 103

Chương 6: Lập các đường cong biểu diễn đồ thị

6.1. Sử dụng các hàm cài sẵn 109
6.2. Xử lý các hàm phức 116
6.3. Tra bảng và phép nội suy 124

Chương 7: Tính tổng của chuỗi

7.1. Tính tổng một chuỗi trong bảng tính 126
7.2. Xấp xỉ chuỗi trong bảng tính 130
7.3. Sử dụng Visual Basic để tính tổng chuỗi 132

Chương 8: Phép tính vi phân và tích phân

8.1. Tính các đạo hàm bằng số 137
8.2. Lấy tích phân dữ liệu rời rạc 144

Chương 9: Giải các phương trình phi tuyến

9.1. Phương pháp xấp xỉ liên tiếp 155
9.2. Phương pháp giam dư dưới 159
9.3. Phương pháp sử dụng công cụ Solver của Excel 160

Chương 10: Giải hệ phương trình trên EXCEL

10.1. Giải hệ phương trình tuyến tính 162
10.2. Giải hệ phương trình phi tuyến đồng thời 171
10.3. Độ chính xác 172

Chương 11: Giải các phương trình vi phân thường trên EXCEL

11.1. Giải các bài toán giá trị ban đầu 173
11.2. Giải các bài toán giá trị biên 183

Chương 12: Sử dụng các nút điều khiển tùy biến trong bảng tính

12.1. Làm việc với các nút điều khiển tuỳ biến 200
12.2. Thanh công cụ Forms 200
12.3. Đặt một nút điều khiển trên một Worksheet 201
12.4. Liên kết các nút điều khiển với các ô 202
12.5. Định dạng các nút điều khiển 203
12.6. Cách sử dụng từng loại nút điều khiển và ví dụ minh hoạ 204

Chương 13: giải bài toán quy hoạch thực nghiệm và phân tích phương sai trên EXCEL

13.1. Phân tích phương sai một yếu tố 216
13.2. Phân tích phương sai hai yếu tố (không lặp) 217
13.3. Phân tích phương sai hai yếu tố (có lặp) 218
13.4. Phân tích phương sai ba yếu tố 218

Chương 14: Các ví dụ tính toán xây dựng trên EXCEL

14.1. Ví dụ XD-1 : Chương trình tính toán độ chối của cọc 220
14.2. Ví dụ XD-2: Chương trình xác định giá trị lực động đất khi tính cầu 220
14.3. Ví dụ XD-3 : Chương trình tính toán móng cọc bệ thấp 225
14.4. Ví dụ XD-4: Chương trình tính toán hệ khung bằng phương pháp phần tử hữu hạn 226

Tài liệu tham khảo 245

TÍNH TOÁN
KỸ THUẬT XÂY DỰNG TRÊN EXCEL

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản :
TRỊNH XUÂN SƠN

Biên tập : ĐÀO NGỌC DUY
Chế bản : LÊ THỊ HƯƠNG
Trình bày bìa : NGUYỄN HỮU TÙNG
Sửa bản in : ĐÀO NGỌC DUY

In 300 cuốn khổ 19 x 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 18-2012/CXB/425-160/XD ngày 29-12- 2011. Quyết định xuất bản số 18/QĐ-XBXD ngày 07-02-2012. In xong nộp lưu chiểu tháng 3 -2012.