

LÝ TRƯỜNG THÀNH (chủ biên)
LÊU MỘC LAN - HOÀNG ĐÌNH TRÍ

CƠ HỌC KẾT CẤU



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

LÝ TRƯỜNG THÀNH (chủ biên)
LÊU MỘC LAN - HOÀNG ĐÌNH TRÍ

CƠ HỌC KẾT CẤU

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2006

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình Cơ học kết cấu lần này được biên soạn theo đề cương “Chương trình giảng dạy môn Cơ học kết cấu” do tiểu ban môn học của Bộ Giáo dục và Đào tạo soạn thảo. So với lần xuất bản trước, giáo trình lần này được viết ngắn gọn, rõ ràng và đã có bổ sung, sửa chữa, điều chỉnh một số phần để thuận tiện hơn cho việc học tập của sinh viên.

Sách có thể dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên các ngành của Trường Đại học Thủy lợi, có thể làm tài liệu tham khảo cho các ngành của các trường Đại học khác, đồng thời cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho các kỹ sư, nghiên cứu sinh và các cán bộ kỹ thuật có liên quan đến tính toán kết cấu công trình.

Phân công biên soạn như sau: TS. Lý Trường Thành viết chương mở đầu, Chương 2 và Chương 3 và là chủ biên; Ths. Lều Mộc Lan viết các Chương 1, 4, 5; PGS.TS. Hoàng Đình Trí viết các Chương 6, 7, 8; Ths. Phạm Viết Ngọc đã giúp đỡ chế bản và sửa chữa bản thảo cuốn sách này.

Tuy đã có nhiều cố gắng trong biên soạn, song khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp, sinh viên và bạn đọc để hoàn thiện hơn trong lần xuất bản sau.

CÁC TÁC GIẢ

MỞ ĐẦU

1. ĐỐI TƯỢNG VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

Một công trình xây dựng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau chịu được lực gọi là kết cấu.

Cơ học kết cấu là môn khoa học thực nghiệm trình bày các phương pháp tính toán kết cấu về độ bền, độ cứng và độ ổn định khi công trình chịu các nguyên nhân tác dụng khác nhau như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị các liên kết tựa.

Tính kết cấu về độ bền nhằm đảm bảo cho công trình có khả năng chịu tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài mà không bị phá hoại.

Tính kết cấu về độ cứng nhằm đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và rung động lớn tới mức có thể làm cho công trình mất trạng thái làm việc bình thường ngay cả khi điều kiện bền vẫn còn bảo đảm.

Tính kết cấu về mặt ổn định nhằm đảm bảo cho công trình bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu trong trạng thái cân bằng biến dạng.

Cơ học kết cấu giống Sức bền vật liệu về nội dung nghiên cứu nhưng phạm vi nghiên cứu thì khác nhau. Sức bền vật liệu nghiên cứu cách tính độ bền, độ cứng và độ ổn định của từng cấu kiện riêng biệt, trái lại Cơ học kết cấu nghiên cứu toàn bộ công trình gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau.

Nhiệm vụ chủ yếu của Cơ học kết cấu là xác định nội lực và chuyển vị trong công trình. Độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình liên quan đến tính chất cơ học của vật liệu, hình dạng và kích thước của cấu kiện và nội lực phát sinh trong công trình. Hơn nữa kích thước của các cấu kiện lại phụ thuộc vào nội lực trong kết cấu đó. Do đó công việc đầu tiên khi tính công trình là xác định nội lực và chuyển vị phát sinh trong công trình dưới tác động bên ngoài. Các môn học tiếp sau như: Kết cấu bê tông cốt thép, kết cấu thép, gỗ.v.v...dựa vào tính năng của các vật liệu nghiên cứu để tiến hành giải quyết ba bài toán cơ bản như đã trình bày trong môn Sức bền vật liệu là: bài toán kiểm tra, bài toán thiết kế và bài toán xác định tải trọng cho phép theo điều kiện bền, cứng và ổn định. Ngoài ra Cơ học kết cấu còn nghiên cứu các dạng kết cấu hợp lý nhằm tiết kiệm vật liệu xây dựng.

Môn Cơ học kết cấu cung cấp cho các kỹ sư thiết kế các kiến thức cần thiết để xác định nội lực và chuyển vị trong kết cấu, từ đó lựa chọn được kết cấu có hình dạng và kích thước hợp lý. Môn học giúp cho các kỹ sư thi công phân tích đúng đắn sự làm việc của kết cấu, nhằm tránh những sai sót trong quá trình thi công cũng như tìm ra các biện pháp thi công hợp lý.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Khi tính toán một công trình thực, nếu xét hết mọi yếu tố liên quan, bài toán sẽ rất phức tạp và hầu như không thể thực hiện được. Để đơn giản tính toán, nhưng phải đảm bảo độ chính xác cần thiết, ta đưa vào một số giả thiết gần đúng. Bởi vậy Cơ học kết cấu là môn khoa học thực nghiệm; nghiên cứu lý luận và thực nghiệm luôn gắn liền với nhau. Các kết quả nghiên cứu lý luận chỉ được tin cậy khi đã được thực nghiệm xác nhận.

A. Các giả thiết - Nguyên lý cộng tác dụng

Cơ học kết cấu cũng sử dụng các giả thiết như trong Sức bền vật liệu là:

1. Giả thiết vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hooke, nghĩa là giữa biến dạng và nội lực có sự liên hệ tuyến tính.

2. Giả thiết biến dạng và chuyển vị trong công trình (kết cấu, hệ...) là rất nhỏ so với kích thước hình học ban đầu của nó. Giả thiết này cho phép xác định nội lực theo sơ đồ kết cấu không có biến dạng.

Nhờ hai giả thiết này chúng ta có thể áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng (hay nguyên lý cộng tác dụng) để tính toán kết cấu. Nguyên lý được phát biểu như sau:

Một đại lượng nghiên cứu nào đó do nhiều nguyên nhân tác dụng đồng thời trên công trình gây ra, bằng tổng đại số (tổng hình học) của đại lượng đó do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra:

Biểu diễn ở dạng toán học:

$$S_{(P_1, P_2 \dots P_n, t, \Delta)} = S_{P_1} + S_{P_2} \dots + S_{P_n} + S_t + S_{\Delta} = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n + S_t + S_{\Delta}$$

Trong đó:

$\bar{S}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) là giá trị của đại lượng S do $P_i = 1$ gây ra.

S_t, S_{Δ} là giá trị của đại lượng S do sự thay đổi nhiệt độ và dịch chuyển gối tựa gây ra.

B. Sơ đồ tính của công trình

Khi xác định nội lực trong công trình nếu xét một cách chính xác và đầy đủ các yếu tố hình học của các cấu kiện thì bài toán sẽ quá phức tạp. Do đó trong tính toán kết cấu người ta có thể thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính của nó.

Sơ đồ tính là hình ảnh của công trình thực đã được đơn giản hóa. Một sơ đồ tính tốt phải thỏa mãn hai yêu cầu: Tính đơn giản và phản ánh tương đối chính xác đối xử thực của công trình. Để đưa công trình thực về sơ đồ tính của nó, thường tiến hành theo 2 bước:

Bước 1: Chuyển công trình thực về sơ đồ công trình, bằng cách:

- + Thay các thanh bằng đường trục của nó và các tấm vỏ bằng mặt trung bình.

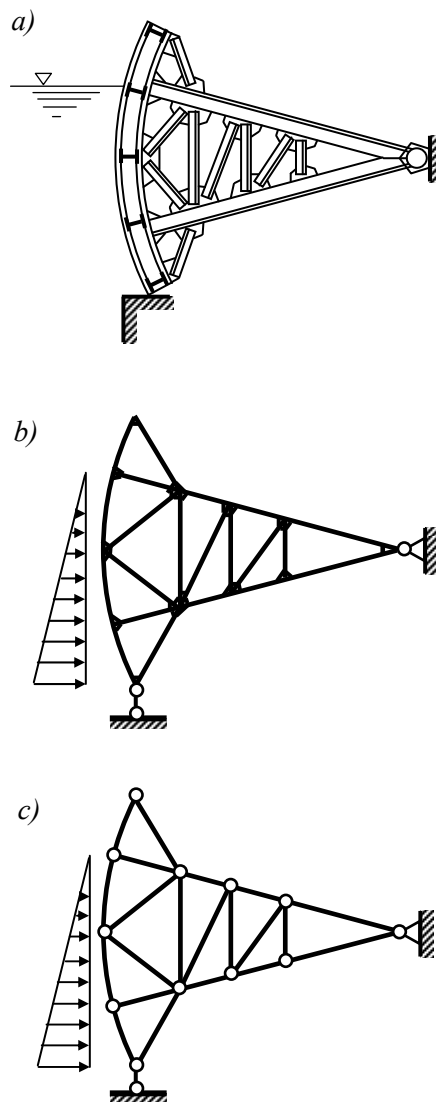
- + Thay các mặt cắt ngang của các cấu kiện bằng các đặc trưng hình học của nó như: diện tích F , mômen quán tính J .v.v...

- + Thay các thiết bị tựa bằng các liên kết tựa lý tưởng.

- + Đưa tải trọng tác dụng trên mặt và bên trong cấu kiện về đặt ở trục hay mặt trung bình của nó.

Bước 2: Chuyển sơ đồ công trình về sơ đồ tính bằng cách bỏ bớt các yếu tố phụ, nhằm làm cho việc tính toán đơn giản phù hợp với khả năng tính toán của người thiết kế.

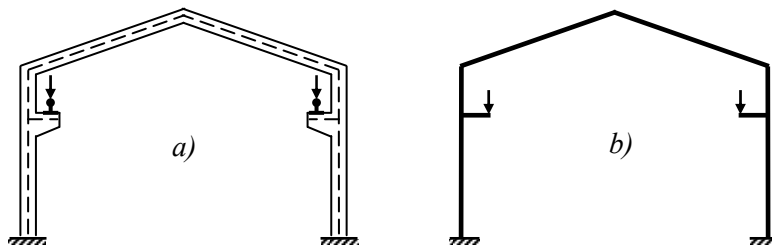
Ví dụ như dàn cửa cống (van cung) cho trên *hình 1a*, sau khi thực hiện các phép biến đổi trong bước thứ nhất ta được sơ đồ công trình như *hình 1b*. Nếu dùng sơ đồ này để tính toán kết quả chính xác nhưng khá phức tạp, do đó nếu coi các mắt dàn là khớp lý tưởng thì bài toán sẽ đơn giản song sai số mắc phải khá nhỏ. Sơ đồ tính của dàn cửa cống (van cung) như trên *hình 1c*.



Hình 1

Nếu sơ đồ công trình đã phù hợp với khả năng tính toán thì có thể dùng nó làm sơ đồ tính mà không cần đơn giản hoá hơn nữa. Ví dụ với hệ khung cho trên *hình 2a*, sau khi thực hiện phép biến đổi ở bước thứ nhất ta có sơ đồ công trình trên *hình 2b*. Sơ đồ này cũng là sơ đồ tính của khung vì đã phù hợp với khả năng tính toán.

Cách chọn sơ đồ tính của công trình là một vấn đề phức tạp và quan trọng vì kết quả tính toán phụ thuộc rất nhiều vào sơ đồ tính. Người thiết kế luôn luôn phải có trách nhiệm tự kiểm tra xem sơ đồ tính toán đã chọn có phù hợp với thực tế không, có phản ánh chính xác sự làm việc thực tế của công trình hay không, để lựa chọn sơ đồ tính ngày một tốt hơn.



Hình 2

3. PHÂN LOẠI SƠ ĐỒ TÍNH CỦA KẾT CẤU

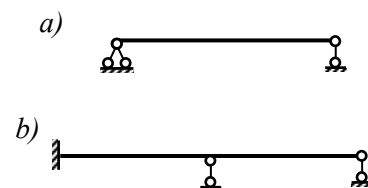
Trong thực tế có nhiều hình thức kết cấu cho nên sơ đồ tính cũng có nhiều loại. Người ta phân loại sơ đồ tính bằng nhiều cách, thường dựa vào cấu tạo hình học và phương pháp tính để phân loại.

A. Phân loại theo cấu tạo hình học

Theo cách này kết cấu được chia thành hai loại: hệ phẳng và hệ không gian.

1. Hệ phẳng: Hệ phẳng là hệ mà các trục cấu kiện và tất cả các loại lực tác động đều nằm trong cùng một mặt phẳng, các hệ không thoả mãn điều kiện trên gọi là hệ không gian.

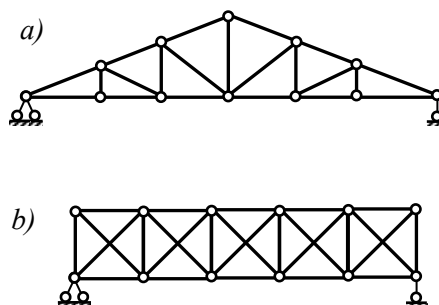
Trong thực tế, các công trình xây dựng hầu hết đều là hệ không gian, song do tính toán hệ không gian thường phức tạp nên gần đúng có thể phân tích đưa về hệ phẳng để tính toán.



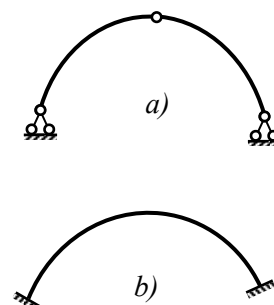
Hình 3

Trong hệ phẳng dựa theo hình dạng công trình, người ta còn chia thành nhiều dạng kết cấu khác nhau:

- + Dầm (Hình 3a,b)
- + Dàn (Hình 4a,b)
- + Vòm (Hình 5a,b)
- + Khung (Hình 6a,b)
- + Hệ liên hợp (hệ treo trên hình 7 là hệ liên hợp giữa dàn và dây xích)



Hình 4



Hình 5

a) b)

Hình 6

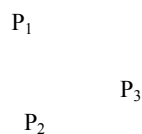
2. Hệ không gian:

Những hệ không gian thường gặp là:

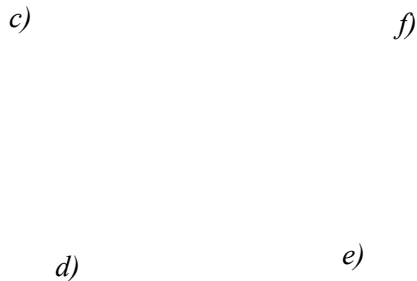
- + Dầm trục giao (Hình 8)
- + Dàn không gian (phần dưới Hình 9a)
- + Khung không gian (phần dưới Hình 9b)
- + Tấm (Hình 9c)
- + Vòm (Hình 9d, e, f)



Hình 7



Hình 8



Hình 9

B. Phân loại theo phương pháp tính

Theo cách này ta có hai loại hệ: Hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh.

1. Hệ tĩnh định: Hệ tĩnh định là hệ chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ để xác định hết phản lực và nội lực trong hệ.

Ví dụ: Dầm cho trên hình 3a; dàn cho trên hình 4a; vòm cho trên hình 5a; khung cho trên hình 6a là hệ tĩnh định.

2. Hệ siêu tĩnh: Hệ siêu tĩnh là hệ mà nếu chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định hết phản lực và nội lực trong hệ. Để tính các hệ

siêu tĩnh, ngoài những điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng thêm các điều kiện động học và các điều kiện biến dạng.

Các kết cấu cho trên *hình 3b, 4b, 5b, 6b* đều là hệ siêu tĩnh.

4. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ.

Các nguyên nhân gây ra nội lực và chuyển vị trong kết cấu thường gặp là tải trọng, sự thay đổi không đều của nhiệt độ, sự dịch chuyển của các gối tựa .vv...

Tải trọng tác dụng vào công trình thường phân ra làm các loại sau:

- Tải trọng lâu dài và tải trọng tạm thời:

+ Tải trọng lâu dài là tải trọng tác dụng trong suốt quá trình làm việc của công trình như: trọng lượng bản thân, áp lực của đất đắp .v.v...

+ Tải trọng tạm thời là tải trọng chỉ tác dụng trong một khoảng thời gian nào đó như: các thiết bị đặt trên công trình, áp lực nước, gió, động đất .v.v...

- Tải trọng bất động và tải trọng di động:

+ Tải trọng bất động là những tải trọng có vị trí không thay đổi trong suốt quá trình tác dụng của nó: thường là tải trọng lâu dài.

+ Tải trọng di động là những tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình như tải trọng đoàn xe lửa, ô tô, đoàn người .v.v...

- Tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động:

+ Tải trọng tác dụng tĩnh là tải trọng tác dụng vào công trình một cách nhẹ nhàng yên tĩnh, giá trị của tải trọng tăng từ từ không làm cho công trình dịch chuyển có gia tốc hay gây ra lực quán tính.

+ Tải trọng tác dụng động là tải trọng khi tác dụng vào công trình có gây lực quán tính như: áp lực gió, bão, động đất .v.v...

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét trường hợp tải trọng tác dụng tĩnh.

Sự thay đổi nhiệt độ và dịch chuyển gối tựa gây ra nội lực và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nhưng không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định. (xem chi tiết trong các Chương 4, 5, 6).

CHƯƠNG 1

PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA CÁC HỆ PHẪNG

Một hệ kết cấu thường được cấu tạo từ nhiều cấu kiện liên kết với nhau để cùng chịu các nguyên nhân bên ngoài. Cách nối các cấu kiện có thể thực hiện dưới nhiều hình thức khác nhau nhưng điều cơ bản là hệ (kết cấu) phải có khả năng chịu lực mà không thay đổi hình dạng hình học ban đầu của nó. Trong chương này sẽ trình bày các quy tắc để cấu tạo một hệ phẳng như vậy.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Để xây dựng các quy tắc cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng ta cần tìm hiểu các khái niệm sau:

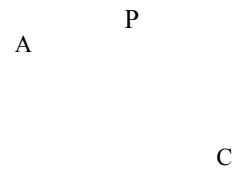
1.1.1. Hệ bất biến hình

Hệ bất biến hình (BBH) là hệ khi chịu tải trọng vẫn giữ nguyên hình dạng hình học ban đầu của nó nếu ta xem biến dạng đàn hồi của các cấu kiện là không đáng kể, hoặc xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Xét hệ trên *hình 1.1*.

Hệ là BBH vì dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện là tuyệt đối cứng thì hệ vẫn giữ nguyên hình dạng hình học ban đầu của nó.

Thực vậy, nếu coi các cấu kiện AB, BC, CA là tuyệt đối cứng (chiều dài của chúng không đổi) thì theo hình học với ba cạnh xác định ta chỉ có thể dựng được một tam giác duy nhất ABC mà thôi.



Hình 1.1

Trừ một vài trường hợp đặc biệt, hầu hết các kết cấu trong xây dựng phải là hệ BBH. Hệ BBH khi chịu lực sẽ phát sinh duy nhất một hệ nội lực cân bằng với ngoại lực.

1.1.2. Hệ biến hình

Hệ biến hình (BH) là hệ khi chịu tải trọng sẽ bị thay đổi hình dạng hình học ban đầu một lượng hữu hạn, dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.



Hệ trên *hình 1.2* là hệ biến hình vì dưới tác dụng của tải trọng hệ ABCD có thể thay đổi hình dạng hình học ban đầu và có thể bị sụp đổ theo đường đứt nét AB'C'D, mặc dù ta xem các thanh AB, BC, CD là tuyệt đối cứng.



Hình 1.2



Hình 1.3

Nói chung hệ biến hình không có khả năng chịu tải trọng, do đó trong các kết cấu công trình người ta không dùng hệ biến hình. Trong thực tế hệ biến hình chỉ được dùng khi tải trọng tác dụng có thể làm cho hệ nằm trong trạng thái cân bằng. Ví dụ hệ dây xích trên hình 1.3.

1.1.3. Hệ biến hình tức thời

Hệ biến hình tức thời (BH TT) là hệ khi chịu tải trọng sẽ bị thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé, mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Sau khi thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé hệ lại trở nên bất biến hình.

Hệ trên hình 1.4a là một ví dụ đơn giản về hệ BH TT, vì dù coi thanh AC và BC là tuyệt đối cứng, điểm C vẫn dịch chuyển một đoạn vô cùng bé về C' trên tiếp tuyến chung (có phương thẳng đứng) của hai cung tròn tâm A và B, bán kính AC và BC tiếp xúc với nhau tại C. Sau khi dịch chuyển về C' hai cung tròn bán kính AC' và BC' cắt nhau tại C' hệ không còn dịch chuyển được nữa, lúc này hệ trở nên bất biến hình.

Hệ BH TT cũng không được sử dụng trong thực tế, vì hoặc là nội lực không xác định được bằng lý thuyết (hệ nội lực là bất định), hoặc là hệ nội lực phát sinh quá lớn sẽ gây bất lợi cho công trình.

Ví dụ trên hệ có sơ đồ như hình 1.4b cho ta thấy lực dọc trong các thanh AC và BC là:

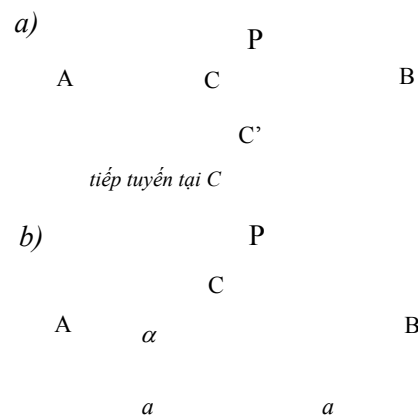
$$N_{C-A} = N_{C-B} = N = -\frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Khi góc $\alpha \rightarrow 0$ thì $N \rightarrow \infty$ làm cho thanh hoặc liên kết bị phá hoại.

1.1.4. Miếng cứng

Trong thực tế hệ BBH có nhiều hình dạng khác nhau nhưng cùng chung tính chất là có khả năng chịu tải trọng. Để thuận tiện trong việc nghiên cứu ta có thể khái quát hóa các hệ BBH bằng cách đưa ra khái niệm miếng cứng.

Miếng cứng là một hệ phẳng bất kỳ bất biến hình một cách rõ rệt. Ví dụ các hệ trên hình 1.5 đều là các miếng cứng. Ta qui ước biểu diễn miếng cứng như hình 1.6.



Hình 1.4



Hình 1.5



Hình 1.6

1.1.5. Bậc tự do

Bậc tự do của hệ là số thông số độc lập cần thiết để xác định vị trí của hệ đối với một hệ khác được xem là bất động.

Đối với một hệ trục tọa độ bất động trong mặt phẳng, một điểm có hai bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương, còn một miếng cứng có ba bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương và một chuyển động quay quanh giao điểm của hai phương đó.

1.2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT

Để nối các miếng cứng với nhau và nối miếng cứng với trái đất thành hệ phẳng bất biến hình, ta phải dùng các liên kết. Sau đây ta nghiên cứu các liên kết được dùng trong hệ phẳng.

1.2.1. Các loại liên kết nối các miếng cứng với nhau

1. Liên kết đơn giản

Liên kết đơn giản là liên kết chỉ dùng để nối hai miếng cứng với nhau. Người ta chia liên kết đơn giản thành ba loại như sau :

a. Liên kết thanh hay liên kết loại một

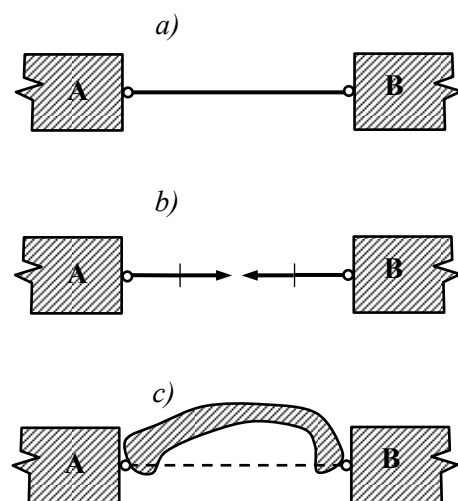
Cấu tạo của liên kết thanh là một thanh có khớp lý tưởng ở hai đầu dùng để nối hai miếng cứng với nhau (Hình 1.7a).

Nghiên cứu tĩnh động học của liên kết thanh ta thấy nếu dùng liên kết thanh để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động, thì nó sẽ khử được một bậc tự do của miếng cứng B đối với miếng cứng A, đó là dịch chuyển theo phương dọc trục thanh.

Về mặt tĩnh học trong liên kết thanh sẽ phát sinh một phản lực liên kết dọc theo trục thanh (Hình 1.7b).

Như vậy, một liên kết thanh khử được một bậc tự do và phát sinh trong đó một phản lực dọc trục thanh.

Căn cứ vào tính chất nói trên ta thấy cấu tạo của liên kết thanh không nhất thiết là một thanh thẳng (Hình 1.7a) mà có thể là một miếng cứng bất kỳ có khớp lý tưởng ở hai đầu (Hình 1.7c). Trong trường hợp này liên kết vẫn khử được một bậc tự do dọc theo phương nối hai khớp và trong liên kết vẫn phát sinh một phản lực hướng theo phương nói trên.



Hình 1.7

b. Liên kết khớp hay liên kết loại hai

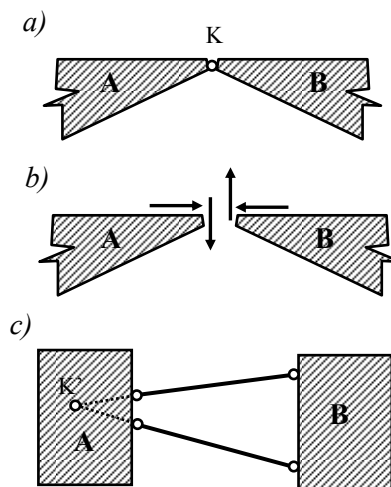
Cấu tạo của liên kết khớp như hình 1.8a.

Khi dùng liên kết khớp để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động thì liên kết này khử được hai bậc tự do của miếng cứng B so với miếng cứng A, vì lúc này miếng cứng B không thể chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ nào trong mặt phẳng đang xét mà chỉ có thể quay quanh miếng cứng A tại khớp K. Trong liên kết sẽ phát sinh một phản lực đặt tại K có phương chưa biết nên có thể phân tích thành hai thành phần theo hai phương như trên hình 1.8b.

Như vậy, một liên kết khớp khử được hai bậc tự do và phát sinh hai thành phần phản lực đi qua khớp.

Về mặt động học một liên kết khớp tương đương với hai liên kết thanh.

Nếu nối miếng cứng B vào miếng cứng A bằng hai thanh thì miếng cứng B bị khử mất hai bậc tự do đó là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương của hai thanh và chỉ có thể quay quanh giao điểm K' của hai thanh như hình 1.8c. Ta gọi giao điểm đó là khớp giả tạo.



Hình 1.8

c. Liên kết hàn hay liên kết loại ba

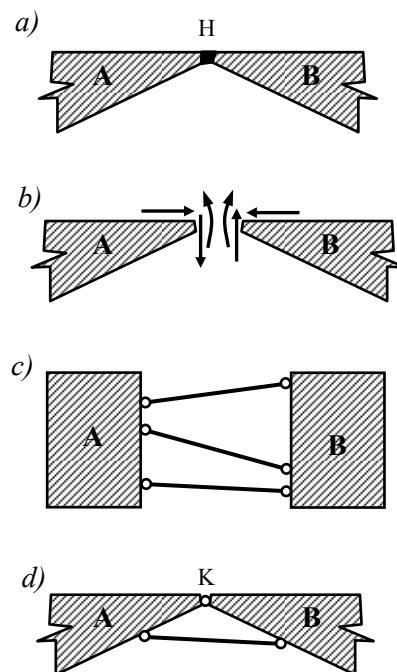
Khi dùng một mối hàn để nối miếng cứng B vào miếng cứng bất động A tức là gắn chặt miếng cứng B vào miếng cứng A (Hình 1.9a).

Lúc này mối hàn khử được ba bậc tự do của miếng cứng B đối với miếng cứng A, vì miếng cứng B không thể dịch chuyển tịnh tiến và cũng không thể quay được so với miếng cứng A.

Do đó trong liên kết hàn phát sinh ba thành phần phản lực như trên hình 1.9b.

Như vậy, một liên kết hàn khử được ba bậc tự do và phát sinh ba thành phần phản lực.

Về mặt động học một mối hàn tương đương với ba liên kết thanh không đồng quy (Hình 1.9c), hoặc tương đương với một khớp và một thanh không đi qua khớp (Hình 1.9d).

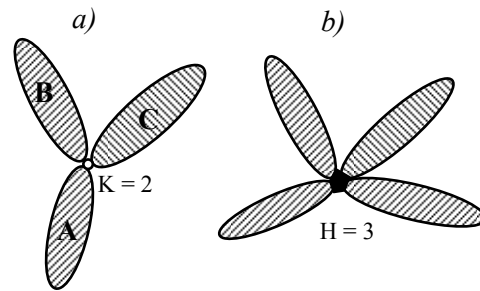


Hình 1.9

2. Liên kết phức tạp

Liên kết phức tạp là liên kết nối đồng thời nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.

Trong thực tế ta có thể gặp các liên kết phức tạp dưới dạng liên kết khớp phức tạp (Hình 1.10a) hoặc liên kết hàn phức tạp (Hình 1.10b).



Hình 1.10

Để tiện cho việc nghiên cứu ta đưa ra khái niệm về độ phức tạp của một liên kết phức tạp. Độ phức tạp của một liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.

Trên hình 1.10 cho ta thấy liên kết khớp phức tạp tương đương với hai liên kết khớp đơn giản vì nếu coi miếng cứng A là miếng cứng cố định, nối miếng cứng B với miếng cứng A bằng khớp K, liên kết sẽ khử được hai bậc tự do của miếng cứng B. Tiếp theo nối miếng cứng C với miếng cứng A bằng khớp K sẽ khử thêm được hai bậc tự do của miếng cứng C. Như vậy khớp K khử được bốn bậc tự do tức là tương đương với hai khớp đơn giản. Lý luận tương tự ta thấy liên kết hàn phức tạp trên hình 1.10b tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.

Từ nhận xét trên ta có thể suy ra: Độ phức tạp của một liên kết phức tạp (p) bằng số lượng miếng cứng (D) quy tụ vào liên kết trừ đi một.

$$p = D - 1 \quad (1-1)$$

Trong đó: p :Độ phức tạp của liên kết phức tạp;

D :Số miếng cứng quy tụ vào liên kết phức tạp.

1.2.2. Các loại liên kết nối các miếng cứng với trái đất

Liên kết nối các miếng cứng với trái đất còn được gọi là liên kết tựa, chúng bao gồm: Gối cố định, gối di động, ngàm cứng và ngàm trượt (Bảng 1-1).

Bảng 1-1

Tên gối tựa	Sơ đồ biểu diễn	Số liên kết thanh tương đương
Gối di động		1
Gối cố định		2
Ngàm cứng		3
Ngàm trượt		2

Nếu coi trái đất là miếng cứng bất động thì lúc này các liên kết tựa sẽ trở thành liên kết nối các miếng cứng với nhau (các liên kết ở phần 1.2.1), nghĩa là có sự tương ứng giữa liên kết thanh - gối di động, liên kết khớp - gối cố định, liên kết hàn - ngàm cứng.

Liên kết tựa ngăn cản chuyển vị theo phương nào sẽ phát sinh phản lực theo phương của chuyển vị đó.

1.3. CÁCH NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH MỘT HỆ PHẪNG BẤT BIẾN HÌNH

Để nối các miếng cứng ta phải dùng các liên kết, vấn đề đặt ra ở đây là: Muốn nối một số lượng xác định các miếng cứng thành hệ bất biến hình thì cần sử dụng bao nhiêu liên kết (điều kiện cần) và phải sắp xếp các liên kết đó như thế nào để bảo đảm cho hệ thu được là bất biến hình (điều kiện đủ). Sau đây ta sẽ lần lượt nghiên cứu hai vấn đề này.

1.3.1. Điều kiện cần

Điều kiện cần biểu thị mối quan hệ giữa số lượng các bậc tự do cần phải khử và số bậc tự do có thể khử được khi dùng các liên kết để nối các miếng cứng với nhau. Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

1. Hệ bất kỳ

Giả sử ta cần nối D miếng cứng với nhau bằng T liên kết thanh, K liên kết khớp và H liên kết hàn (đã quy đổi về liên kết đơn giản) thành một hệ bất biến hình. Điều kiện cần được xét như sau:

Coi một miếng cứng nào đó là bất động thì ta còn phải nối $(D - 1)$ miếng cứng còn lại vào miếng cứng bất động đó, như vậy số bậc tự do cần phải khử là $3(D - 1)$. Xét về khả năng với số lượng các liên kết được dùng như trên ta có thể khử được tối đa $T + 2K + 3H$ bậc tự do. Gọi n là hiệu số giữa số bậc tự do có thể khử được (khả năng) và số bậc tự do cần khử (yêu cầu) ta có :

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$$

Có thể xảy ra ba trường hợp :

a) $n < 0$: Khả năng thấp hơn yêu cầu, như vậy hệ thiếu liên kết, ta có thể kết luận ngay là hệ biến hình.

b) $n = 0$: Khả năng đáp ứng đúng yêu cầu, như vậy hệ đủ liên kết. Để biết hệ có bất biến hình hay không ta cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì gọi là hệ tĩnh định.

c) $n > 0$: Khả năng lớn hơn yêu cầu chứng tỏ hệ thừa liên kết. Để biết hệ có bất biến hình hay không ta cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì gọi là hệ siêu tĩnh. Số n biểu thị số lượng liên kết thừa tương đương với liên kết thanh (liên kết loại một) có trong hệ.

Như vậy điều kiện cần trong trường hợp hệ bất kỳ là :

$$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1) \geq 0 \quad (1-2)$$

2. Hệ nối với đất

Trong thực tế hầu hết các công trình (hay hệ) đều được nối với trái đất. Nếu quan niệm trái đất là một miếng cứng ta có thể khảo sát điều kiện cần cho hệ này bằng công thức (1-2), tuy nhiên hệ nối đất khá phổ biến nên để tiện cho việc sử dụng ta có thể thiết lập điều kiện cần cho trường hợp này như sau:

Giả sử trong hệ có D miếng cứng (không kể trái đất) nối với nhau bằng T liên kết thanh, K liên kết khớp, H liên kết hàn (đã quy ra liên kết đơn giản) và nối với trái đất bằng liên kết tựa tương đương C liên kết thanh.

Lấy trái đất làm miếng cứng bất động rồi xét mối quan hệ giữa khả năng và yêu cầu ta có:

+ Yêu cầu: Cần phải khử 3D bậc tự do

+ Khả năng: Các liên kết có thể khử được tối đa $T + 2K + 3H + C$ bậc tự do.

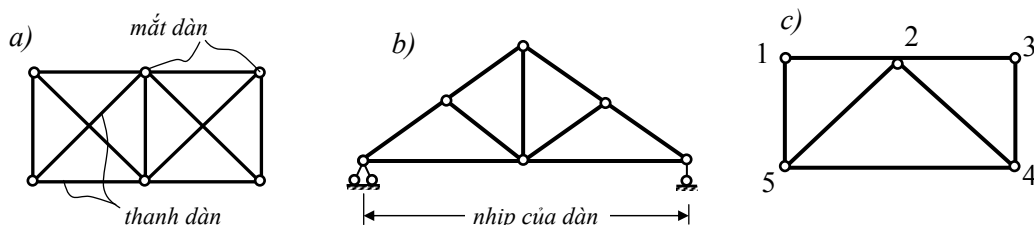
Vậy điều kiện cần cho trường hợp hệ nối đất là:

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0 \quad (1-3)$$

3. Trường hợp riêng: Hệ dàn

Dàn là hệ gồm các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh. Giao điểm của các thanh được gọi là mắt dàn.

Hệ trên *hình 1.11a* là hệ dàn tự do (không nối đất). Hệ trên *hình 1.11b* là hệ dàn nối đất. Hệ trên *hình 1.11c* không phải là hệ dàn vì thanh 1-3 không phải chỉ có khớp ở hai đầu.



Hình 1.11

Đối với hệ dàn ta cũng có thể sử dụng công thức (1-2) hoặc (1-3) để khảo sát điều kiện cần, song cần lưu ý trong hệ dàn các liên kết khớp thường là khớp phức tạp nên cần phải quy đổi ra liên kết đơn giản nên dễ dẫn đến nhầm lẫn. Để thuận tiện và đơn giản cho việc khảo sát, dưới đây ta sẽ thiết lập điều kiện cần áp dụng riêng cho hệ dàn, trong đó không cần quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp trong dàn.

a. Trường hợp hệ dàn tự do (không nối đất)

Giả sử trong hệ dàn có D thanh và M mắt. Giả sử lấy một thanh nào đó làm miếng cứng bất động. Như vậy hệ còn lại $D - 1$ thanh và $M - 2$ mắt cần nối vào miếng cứng bất động. Xét mối quan hệ giữa cung và cầu ta thấy một điểm trong mặt phẳng có hai bậc tự do nên:

+ Yêu cầu: Cần phải khử $2(M - 2)$ bậc tự do
 + Khả năng: Hệ còn lại $(D - 1)$ thanh tương đương với liên kết loại một nên có thể khử được tối đa $(D - 1)$ bậc tự do.

Vậy điều kiện cần cho trường hợp hệ dàn không nối đất là:

$$n = (D - 1) - 2(M - 2) \geq 0$$

Hay

$$n = D + 3 - 2M \geq 0 \quad (1-4)$$

b. Trường hợp hệ dàn nối đất

Giả sử trong hệ dàn có D thanh và M mắt nối với đất bằng liên kết tựa tương đương C liên kết thanh. Ta khảo sát điều kiện cần như sau: Chọn trái đất làm miếng cứng bất động, như vậy ta cần phải nối M mắt vào trái đất bằng D thanh và C liên kết tựa. Quan hệ giữa cung và cầu là:

+ Yêu cầu: Cần phải khử $2M$ bậc tự do

+ Khả năng: Các liên kết có trong hệ có thể khử được tối đa $D + C$ bậc tự do.

Vậy điều kiện cần cho trường hợp hệ dàn nối đất là :

$$n = D + C - 2M \geq 0 \quad (1-5)$$

1.3.2. Điều kiện đủ

Khi điều kiện cần đã thỏa mãn ta nói hệ có đủ hoặc thừa liên kết, tuy nhiên nếu các liên kết không được bố trí một cách hợp lý thì nó sẽ không khử hết được số bậc tự do cần phải khử của hệ và hệ có thể vẫn là biến hình hoặc biến hình tức thời.

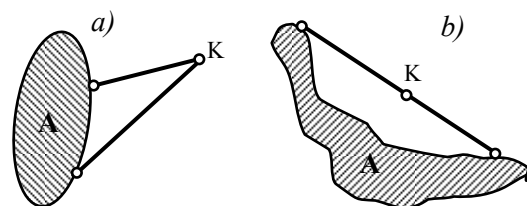
Như vậy, điều kiện đủ để cho hệ bất biến hình là các liên kết cần được bố trí một cách hợp lý để khử hết số bậc tự do của hệ. Để giải quyết vấn đề này ta lần lượt khảo sát một số trường hợp cụ thể sau:

1. Cách nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành hệ phẳng bất biến hình

Xét miếng cứng bất động A và một điểm (mắt) K nằm ngoài miếng cứng đó.

Để nối điểm K vào miếng cứng ta cần phải khử được hai bậc tự do của điểm K , nghĩa là phải dùng hai liên kết thanh như hình 1.12a.

Hai thanh này không được nằm trên cùng một đường thẳng như hình 1.12b, vì trong trường hợp này điểm K sẽ có thể chuyển vị vô cùng bé theo phương vuông góc với hai thanh và hệ sẽ BHTT.



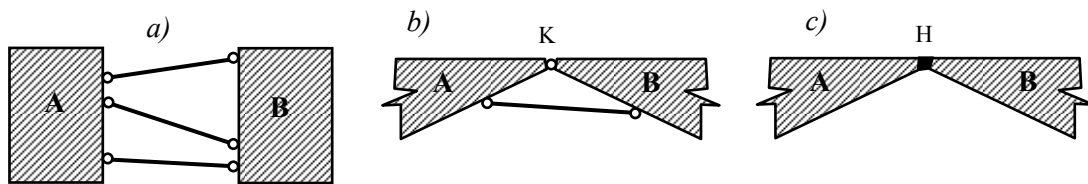
Hình 1.12

Như vậy, điều kiện cần và đủ để nối một điểm vào một miếng cứng thành một hệ phẳng bất biến hình là phải dùng hai thanh không thẳng hàng. Gọi hệ hai thanh không thẳng hàng này là bộ đôi.

Ta có thể vận dụng bộ đôi để phát triển hoặc mở rộng miếng cứng nhỏ thành miếng cứng lớn hơn nhằm đưa hệ gồm nhiều miếng cứng về hệ có ít miếng cứng hơn để khảo sát cho dễ dàng.

2. Cách nối hai miếng cứng thành một hệ phẳng bất biến hình

Muốn nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động thành một hệ BBH ta cần phải dùng 3 thanh, hoặc một khớp và một thanh, hoặc một mối hàn (Hình 1.13)



Hình 1.13

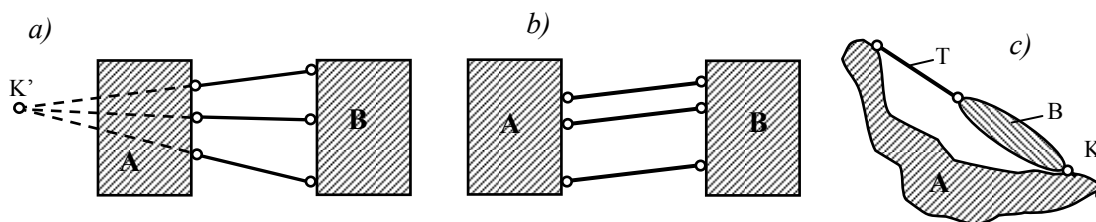
* Dùng một mối hàn (Hình 1.13c) để nối hai miếng cứng với nhau chắc chắn ta được một hệ BBH.

* Dùng 3 thanh để nối 2 miếng cứng thành hệ BBH thì 3 thanh không được đồng quy (Hình 1.13a).

* Dùng một khớp và một thanh để nối hai miếng cứng với nhau thành một hệ BBH thì phương của liên kết thanh không được đi qua khớp (Hình 1.14c).

Thật vậy:

Nếu dùng 3 thanh đồng quy (Hình 1.14a) thì cả 3 thanh đều không ngăn cản được chuyển vị xoay vô cùng bé quanh tâm K' của miếng cứng B quanh miếng cứng A được xem là bất động. Kết quả là hệ BHTT vì sau khi dịch chuyển 3 thanh không còn đồng quy nữa và hệ lại BBH.



Hình 1.14

Khi 3 thanh song song và có chiều dài bằng nhau (Hình 1.14b) chuyển vị xảy ra là hữu hạn, hệ sẽ biến hình.

Nếu dùng một khớp và một thanh có phương đi qua khớp hệ cũng BHTT. Cách chứng minh tương tự như hệ trên (Hình 1.4a).

3. Cách nối ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Từ điều kiện cần ta thấy muốn nối ba miếng cứng A, B, C thành một hệ BBH thì cần phải khử sáu bậc tự do của hai miếng cứng chuyển động so với miếng cứng thứ ba được xem là bất động. Như vậy số liên kết tối thiểu phải dùng là tương đương với sáu liên kết thanh. Chúng có thể được bố trí theo các cách sau :

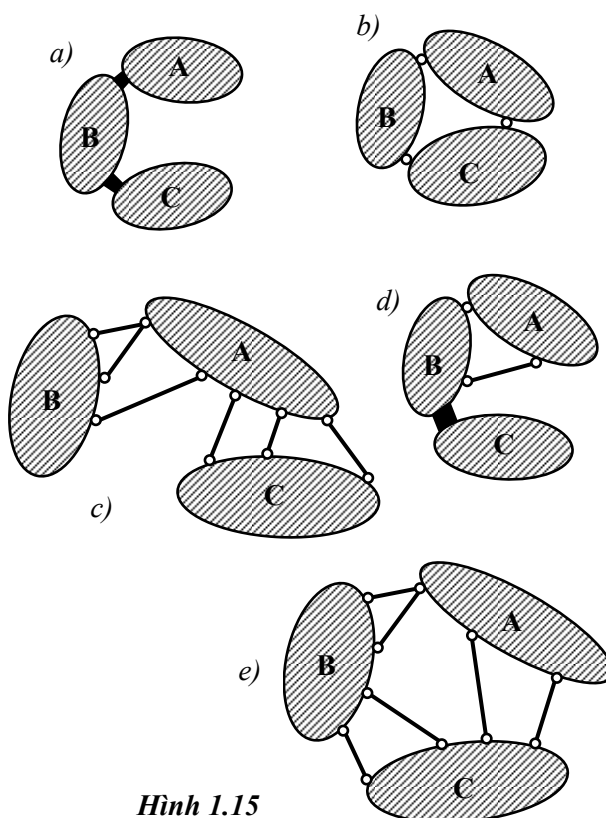
- Dùng hai mối hàn (Hình 1.15a)
- Dùng ba khớp (Hình 1.15b)
- Dùng một mối hàn, một khớp và một thanh (Hình 1.15d)
- Dùng sáu liên kết thanh được bố trí như hình 1.15c, e.
- Dùng hai khớp và hai thanh.
- Dùng một khớp và bốn thanh

Các cách nối ba miếng cứng trên hình 1.15 cho ta thấy trong một số trường hợp ta có thể sử dụng cách nối hai miếng cứng đã biết để phân tích điều kiện đủ như hình 1.15a, c, d, ta có thể nối miếng cứng A và miếng cứng B thành một hệ BBH rồi nối miếng cứng C còn lại với miếng cứng mới hình thành để được một hệ BBH.

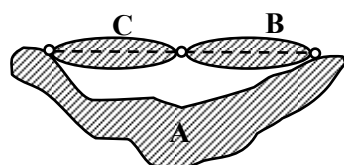
Khi ba miếng cứng được nối từng cặp hai miếng cứng với nhau bằng một khớp hoặc hai thanh như trên hình 1.15b, e ta phải dùng điều kiện nối ba miếng cứng như sau:

Điều kiện cần và đủ để nối ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình là ba khớp thực hoặc giả tạo tương hỗ (giao điểm của hai thanh nối từng cặp miếng cứng) không được nằm trên cùng một đường thẳng.

Nếu ba khớp tương hỗ cùng nằm trên một đường thẳng thì hệ sẽ BHTT. Hệ trên hình 1.16 là BHTT vì cấu tạo của nó tương tự như hệ BHTT được khảo sát trên hình 1.4a.



Hình 1.15



Hình 1.16

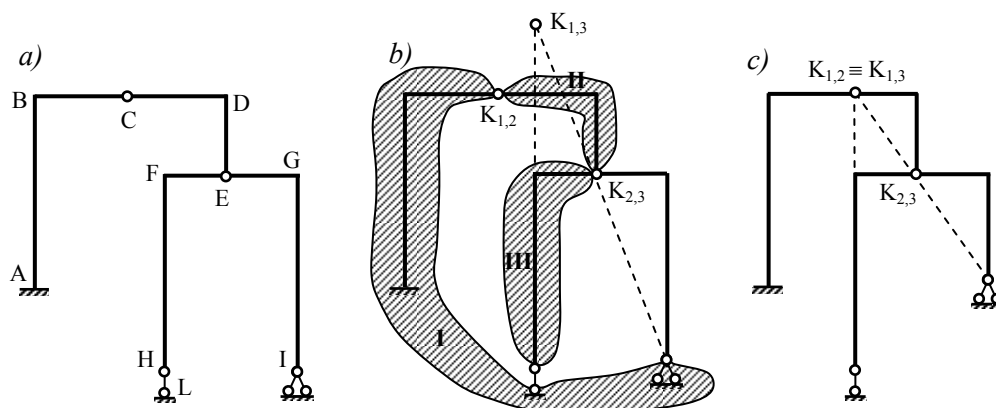
4. Trường hợp tổng quát nối nhiều miếng cứng thành một hệ phẳng bất biến hình

Trong trường hợp này khi điều kiện cần đã thỏa mãn ta có thể phân tích điều kiện đủ theo nhiều cách khác nhau nhưng đường lối chung là vận dụng linh hoạt tính chất của bộ đôi, điều kiện nối hai miếng cứng hoặc ba miếng cứng đã biết để phát triển dần từng miếng cứng của hệ hoặc thu hẹp hệ đã cho đến mức tối đa cho phép. Như vậy, ta sẽ đưa hệ có nhiều miếng cứng về hệ có số lượng miếng cứng ít hơn.

- ◆ Nếu hệ thu về một miếng cứng thì hệ sẽ BBH
- ◆ Nếu hệ thu về hai miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối hai miếng cứng để khảo sát.
- ◆ Nếu hệ thu về ba miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng để khảo sát.

Trong những trường hợp phức tạp, khi không thể dùng các biện pháp trên để phân tích ta có thể dùng các phương pháp khác như phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát.

Ví dụ 1-1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.17a.



Hình 1.17

◆ Điều kiện cần: Đây là hệ nối đất ta dùng công thức (1-3) để xét điều kiện cần. Có nhiều cách quan niệm khác nhau về số lượng miếng cứng và liên kết của hệ:

* Quan niệm mỗi thanh thẳng là một miếng cứng:

Như vậy $D = 8$; $T = 0$; $K = 3$ (khớp E là khớp phức tạp có độ phức tạp $p=2$); $H = 4$; $C = 6$.

Theo (1-3) ta có: $n = 0 + 2.3 + 3.4 + 6 - 3.8 = 0 \rightarrow$ Hệ đủ liên kết.

* Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng:

Như vậy: $D = 4$; $T = 0$; $K = 3$; $H = 0$; $C = 6$.

Theo (1-3) ta có: $n = 0 + 2.3 + 0 + 6 - 3.4 = 0 \rightarrow$ Hệ đủ liên kết.

* Quan niệm trái đất là một miếng cứng: Dùng công thức (1-2) để khảo sát

Như vậy $D = 5$; $T = 1$; $K = 4$; $H = 1$

Theo (1-2) ta có: $n = 1 + 2.4 + 3.1 - 3.(5 - 1) = 0 \rightarrow$ Hệ đủ liên kết.

Như vậy, khi xét điều kiện cần ta có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau song trong mọi trường hợp ta đều có một kết luận thống nhất là hệ đủ liên kết và có khả năng BBH, cần xét tiếp điều kiện đủ.

♦ Điều kiện đủ: Coi trái đất là một miếng cứng, nối với miếng cứng ABC bằng ngàm A, tạo thành miếng cứng mới, ta ký hiệu là (I). Coi thanh CDE là miếng cứng (II) và thanh EFH là miếng cứng (III). Như vậy ta đã dùng cách phát triển dần miếng cứng để đưa hệ về còn ba miếng cứng (Hình 1.17b).

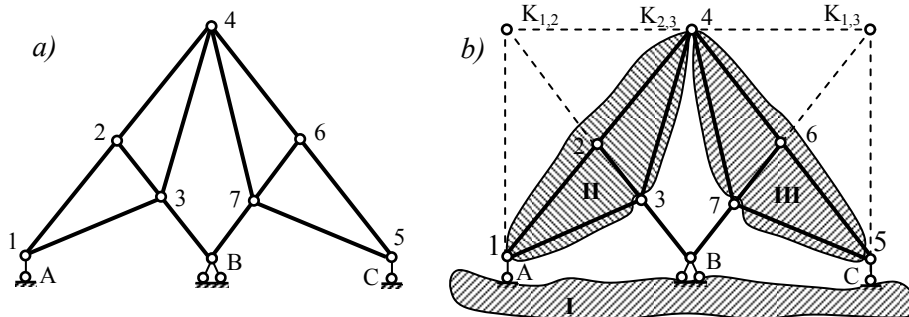
- + Miếng cứng (I) nối với miếng cứng (II) bằng khớp thực $K_{1,2}$;
- + Miếng cứng (I) nối với miếng cứng (III) bằng hai thanh HL và EI cắt nhau tạo thành khớp giả tạo $K_{1,3}$;
- + Miếng cứng (II) nối với miếng cứng (III) bằng khớp thực $K_{2,3}$;

Ba miếng cứng (I), (II), (III) nối với nhau từng cặp bằng ba khớp thực và giả tạo $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,3}$ không cùng nằm trên một đường thẳng nên hệ là bất biến hình.

Điều kiện đủ của hệ trên cũng có thể được xét với cách quan niệm khác, Đưa hệ về gồm hai miếng cứng trong đó miếng cứng (I) bao gồm trái đất và thanh ABC, miếng cứng (II) là thanh HFE nối với nhau bằng ba thanh CE, HL và EI không đồng quy và không song song, nên hệ là bất biến hình.

Bằng cách khảo sát tương tự ta thấy nếu thay đổi vị trí của các liên kết trong hệ như trên hình 1.17c thì hệ sẽ biến hình tức thời.

Ví dụ 1 - 2: Phân tích cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.18a.



Hình 1.18

♦ Điều kiện cần: Đây là hệ dàn nổi đất.

Ta dùng công thức (1 - 5) với $D = 12$, $M = 8$, $C = 4$ ta có: $n = 12 + 4 - 2 \cdot 8 = 0$

Hệ đủ liên kết nên có khả năng BBH.

♦ Điều kiện đủ: (Hình 1.18b).

Ta quan niệm trái đất là miếng cứng (I).

Miếng cứng (II) là hình (1 - 3 - 4) được hình thành từ tam giác khớp 1, 2, 3 nối thêm điểm 4 vào bằng bộ đôi hai thanh 2 - 4 và 3 - 4.

Làm tương tự như vậy miếng cứng (III) là hình (4 - 5 - 7). Hệ gồm ba miếng cứng (I), (II), (III) nối với nhau từng cặp:

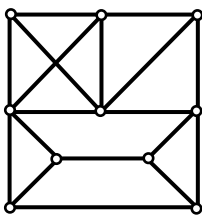
- + Miếng cứng (II) nối với miếng cứng (III) bằng khớp thực $K_{2,3}$.
- + Miếng cứng (I) nối với miếng cứng (II) bằng khớp giả tạo $K_{1,2}$.
- + Miếng cứng (I) nối với miếng cứng (III) bằng khớp giả tạo $K_{1,3}$.

Ba khớp thực và giả tạo thẳng hàng nên hệ BHTT.

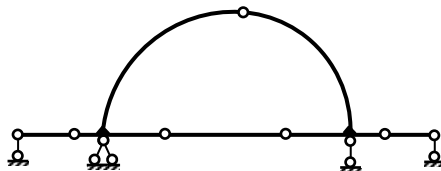
Nếu thay đổi vị trí hoặc phương của các liên kết sao cho ba khớp trên không thẳng hàng thì hệ sẽ bất biến hình.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

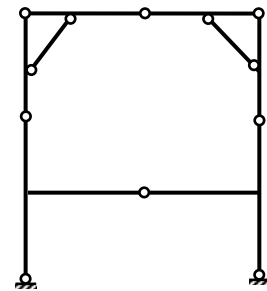
Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng cho trên các hình sau:



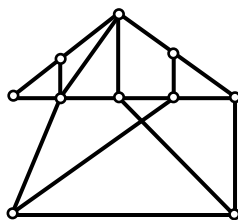
Hình 1.19



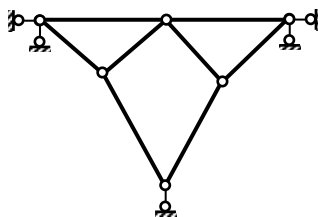
Hình 1.20



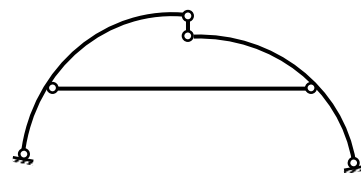
Hình 1.21



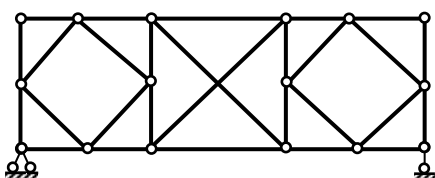
Hình 1.22



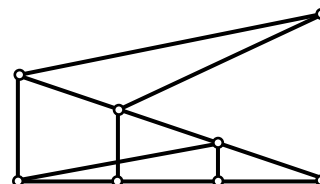
Hình 1.23



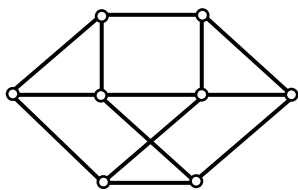
Hình 1.24



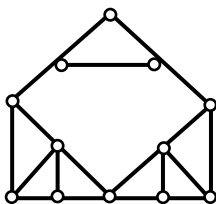
Hình 1.25



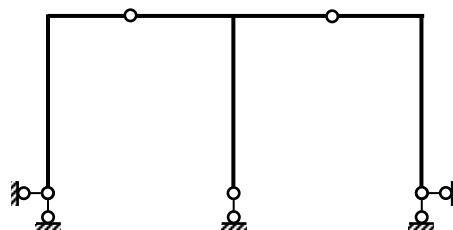
Hình 1.26



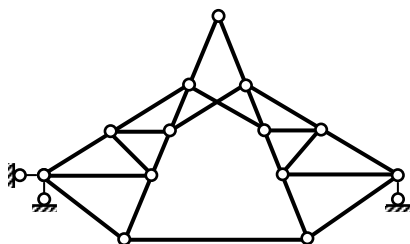
Hình 1.27



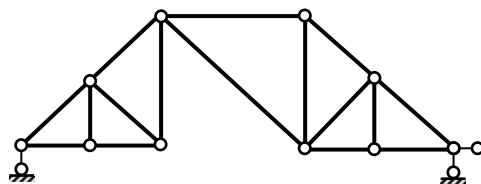
Hình 1.28



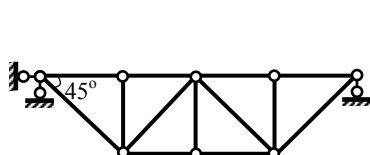
Hình 1.29



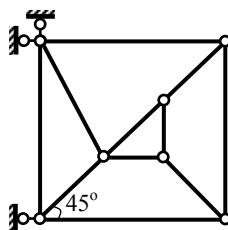
Hình 1.30



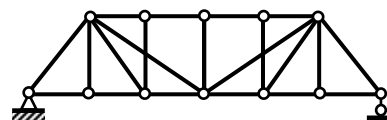
Hình 1.31



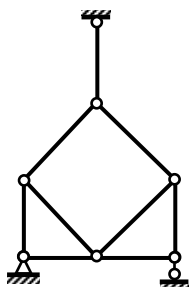
Hình 1.32



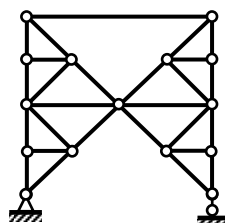
Hình 1.33



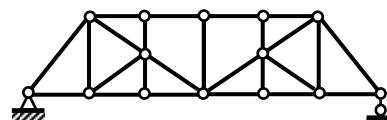
Hình 1.34



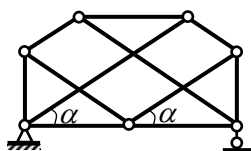
Hình 1.35



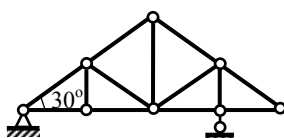
Hình 1.36



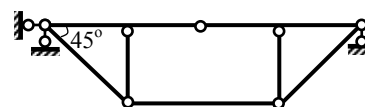
Hình 1.37



Hình 1.38



Hình 1.39



Hình 1.40

CHƯƠNG 2

CÁCH XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC, NỘI LỰC TRONG HỆ THANH PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

Hệ tĩnh định là hệ đủ liên kết và bất biến hình. Nội lực phát sinh trong hệ chỉ do tải trọng gây ra, và chỉ phụ thuộc vào sơ đồ hình học của kết cấu, mà không phụ thuộc vật liệu, kích thước và hình dạng tiết diện ngang của thanh. Với hệ phẳng, nội lực tại mặt cắt ngang nào đó (trong trường hợp tổng quát) có ba thành phần: Mô men uốn (M), lực cắt (Q), và lực dọc (N).

Có nhiều phương pháp xác định các thành phần nội lực này, song có thể nêu ra ba phương pháp cơ bản nhất là:

- Phương pháp mặt cắt (đã biết trong Sức bền vật liệu).
- Phương pháp đồ họa (đã biết trong cơ học cơ sở).
- Phương pháp đường ảnh hưởng (sẽ trình bày ở chương 3).

Các hình thức kết cấu trong xây dựng rất đa dạng. Mỗi loại kết cấu có cách cấu tạo và đặc tính chịu lực riêng. Nếu biết vận dụng các đặc tính như vậy việc tính toán phản lực, nội lực trong hệ thanh phẳng sẽ nhanh và đơn giản hơn nhiều.

2.1. PHÂN TÍCH CẤU TẠO VÀ TÍNH CHẤT CHỊU LỰC CỦA HỆ THANH PHẪNG TĨNH ĐỊNH

Như đã biết đối với hệ tĩnh định, tất cả các phản lực liên kết và nội lực hoàn toàn được xác định từ điều kiện cân bằng của toàn hệ hoặc cân bằng bộ phận của hệ.

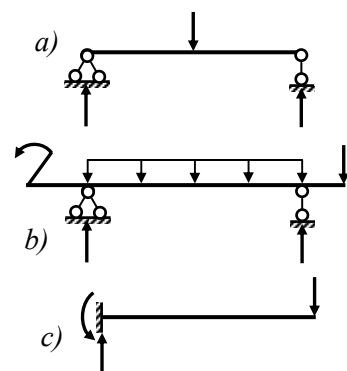
Căn cứ vào cấu tạo và tính chất chịu lực của hệ, người ta chia hệ thanh phẳng tĩnh định thành hai loại: Hệ đơn giản và hệ phức tạp.

2.1.1. Hệ đơn giản

Hệ đơn giản là hệ chỉ gồm một miếng cứng nối với đất với số lượng liên kết tương đương ba liên kết thanh. Tùy theo sự cấu tạo của miếng cứng, hệ đơn giản được phân ra các loại sau:

1. Dầm tĩnh định đơn giản: Khi miếng cứng là một thanh thẳng như: dầm đơn giản (*Hình 2.1a*); dầm đơn giản có đầu thừa (*Hình 2.1b*); dầm một đầu ngàm một đầu tự do (dầm công sôn) (*Hình 2.1c*).

Tải trọng tác dụng lên dầm thường là các lực có phương vuông góc với trục dầm và mô men tập trung. Do vậy, thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh thường bằng không và nội lực phát sinh trong dầm chỉ có mô men uốn và lực cắt.



Hình 2.1

2. Khung tĩnh định: Khi miếng cứng là một thanh gãy khúc (Hình 2.2) nội lực phát sinh trong khung có ba thành phần là mô men uốn, lực cắt, lực dọc.

3. Dàn dầm tĩnh định: Khi miếng cứng được hình thành từ các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh (Hình 2.3).

Khoảng cách giữa các gối tựa của dàn gọi là nhịp. Giao điểm của các thanh gọi là mắt dàn. Những thanh nằm ở phía trên và phía dưới của dàn tạo thành đường biên trên và biên dưới. Các thanh nằm giữa hai đường biên gọi là thanh bụng. Khoảng cách giữa các mắt thuộc đường biên gọi là dốt.

Để tính toán dàn được đơn giản, ta thừa nhận các giả thiết sau:

- 1) Mắt của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng.
- 2) Tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt của dàn.
- 3) Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tác dụng trên dàn.

Để thỏa mãn các giả thiết trên ta phải bố trí hệ thống truyền lực sao cho tải trọng chỉ đặt vào các mắt dàn và là các lực tập trung.

Từ các giả thiết trên ta đi đến kết luận sau:

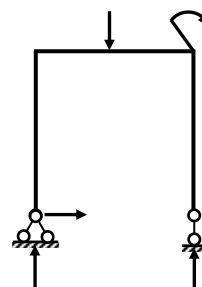
Các thanh dàn chỉ chịu kéo hoặc nén, nghĩa là trong dàn chỉ tồn tại lực dọc N mà không có mô men uốn M và lực cắt Q (mỗi thanh dàn được xem như một liên kết thanh).

Trong thực tế các thanh dàn được nối với nhau tại các mắt bằng đinh tán, bu lông, hoặc các mối hàn .vv...(Hình 1a), ngoài ra các thanh dàn còn có trọng lượng bản thân, nên cách tính như trên chỉ cho kết quả gần đúng. Tuy nhiên sai số mắc phải cũng không lớn và có thể chấp nhận được trong tính toán thực tế.

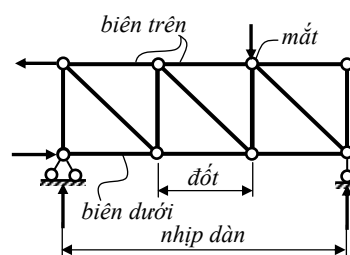
Dàn là loại kết cấu nhẹ, tận dụng được khả năng làm việc của vật liệu (do các thanh dàn chỉ chịu kéo hoặc nén đúng tâm), nên được sử dụng nhiều ở các công trình cần vượt nhịp lớn như: kết cấu mái, dàn cầu, cột điện .v.v...

4. Hệ liên hợp tĩnh định đơn giản: Lúc này, miếng cứng thường là các cấu kiện chịu uốn được gia cường bằng các thanh chịu kéo hoặc nén như trên hình 2.4.

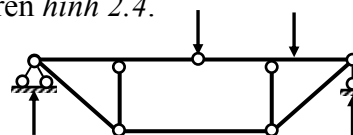
Trong hệ đơn giản chỉ tồn tại ba thành phần phản lực liên kết, nên chúng hoàn toàn được xác định từ hệ ba phương trình cân bằng tĩnh học độc lập của hệ, trong đó tối thiểu phải có một phương trình cân bằng mô men.



Hình 2.2



Hình 2.3



Hình 2.4

2.1.2. Hệ phức tạp

Hệ phức tạp là hệ gồm nhiều miếng cứng nối với nhau bằng các khớp hoặc thanh, và nối với đất bằng số lượng liên kết lớn hơn ba (qui ra liên kết thanh) sao cho hệ là bất biến hình đủ liên kết.

Để xác định phản lực trong hệ phức tạp, vì số lượng phản lực lớn hơn ba, nên ngoài ba phương trình cân bằng của toàn hệ, ta cần phải bổ sung thêm một số phương trình cân bằng bộ phận của hệ, để sao cho số phương trình cân bằng lập được phải bằng số ẩn phản lực cần tìm.

Căn cứ vào cấu tạo và tính chất chịu lực của hệ người ta chia hệ phức tạp ra các loại:

1. Hệ ba khớp

Là hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và nối với đất bằng hai gối khớp cố định (ba khớp A, B, C không thẳng hàng) *Hình 2.5*.

Tuỳ theo sự cấu tạo của hai miếng cứng, hệ ba khớp còn được phân ra:

+ Vòm ba khớp: khi các miếng cứng là thanh cong (*Hình 2.5a*).

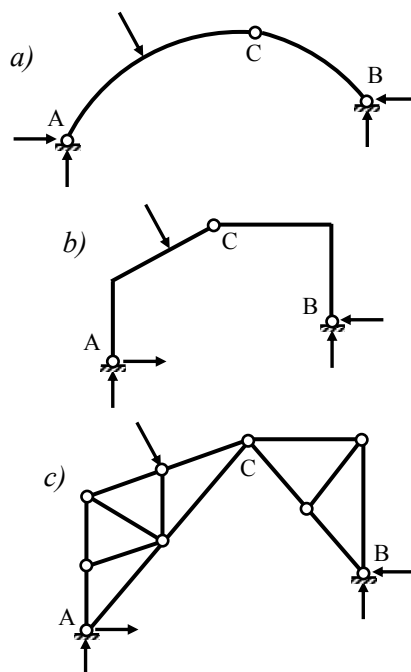
+ Khung ba khớp: khi các miếng cứng là các thanh gãy khúc (*Hình 2.5b*).

+ Dàn ba khớp: khi các miếng cứng là các dàn phẳng (*Hình 2.5c*).

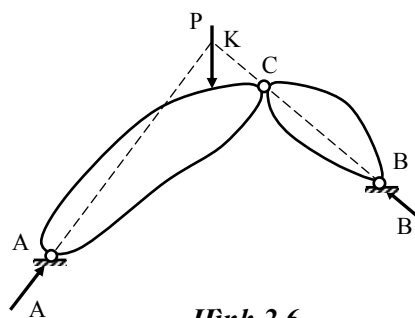
Dưới tác dụng của ngoại lực, trong hệ ba khớp phát sinh bốn thành phần phản lực tại gối tựa A và B. Phản lực toàn phần tại hai gối tựa này luôn có phương nghiêng, ngay cả khi chịu lực thẳng đứng.

Thật vậy, xét hệ ba khớp bất kỳ chịu lực P (*Hình 2.6*). Hệ cân bằng dưới tác dụng của ba lực: lực P và hai phản lực tại gối tựa A và B, nên ba lực này phải đồng quy. Điểm đồng quy K đương nhiên phải nằm trên đường tác dụng của lực P và phương BC của phản lực tại B. Phản lực tại A phải qua K, nghĩa là phương của phản lực A và B nghiêng (trừ trường hợp đặc biệt khi đường thẳng CB song song với phương của lực P).

Bốn thành phần phản lực tại gối A và B được xác định từ bốn phương trình: ba phương trình cân bằng của toàn hệ và một phương trình cân bộ phận nhờ mặt cắt đi qua khớp C. (xem chi tiết trong mục 2.5 của chương này)



Hình 2.5



Hình 2.6

2. Hệ ghép

Hệ ghép là hệ gồm nhiều miếng cứng nối với nhau và nối với trái đất tạo thành một hệ đủ liên kết và bất biến hình.

Hệ ghép trên *hình 2.7* gồm các dầm nối với nhau, gọi là dầm tĩnh định nhiều nhịp. Hệ ghép trên *hình 2.8* gồm hệ ba khớp, khung đơn giản và dầm đơn giản nối với nhau và dễ dàng nhận thấy chúng là hệ bất biến hình đủ liên kết.

Từ sự cấu tạo hệ ta có nhận xét: nếu loại bỏ dầm BC thì dầm AB vẫn bất biến hình, ngược lại, nếu loại bỏ dầm AB thì dầm BC trở thành biến hình. Vì thế ta gọi hệ BC là hệ phụ của hệ AB và gọi hệ AB là hệ chính của hệ BC.

Như vậy, hệ chính là hệ sẽ bất biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận, hệ phụ là hệ sẽ biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận. Với hệ trên *hình 2.8*, hệ ba khớp ABC là hệ chính của hệ DEF và hệ DEF là hệ chính của dầm EG.

Các hệ phụ muốn đứng vững được phải dựa vào hệ chính của nó. Do đó có thể biểu diễn hệ đã cho theo sơ đồ tầng như trên *hình 2.7b* và *hình 2.8b*, trong đó các hệ phụ được đặt trên các hệ chính tương ứng.

Về tính chất chịu lực ta có nhận xét sau:

+ Tải trọng tác dụng trên hệ chính chỉ gây ra phản lực và nội lực trong hệ chính đó mà không gây ra phản lực và nội lực trong hệ phụ. Lúc này do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không bị biến dạng nên không phát sinh nội lực.

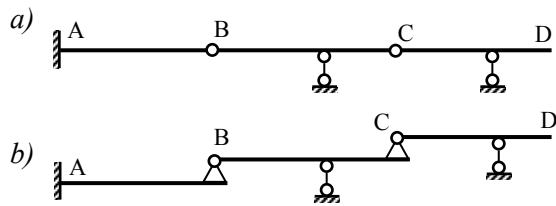
+ Ngược lại tải trọng tác dụng trên hệ phụ thì cả hệ phụ và hệ chính của nó đều phát sinh phản lực và nội lực. Tải trọng truyền áp lực từ hệ phụ vào hệ chính qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính (áp lực này bằng phản lực của hệ phụ nhưng ngược chiều).

3. Hệ liên hợp phức tạp

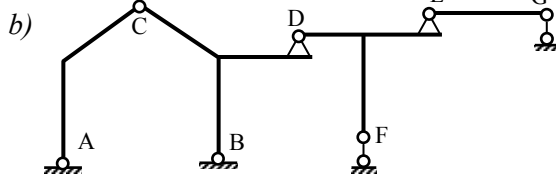
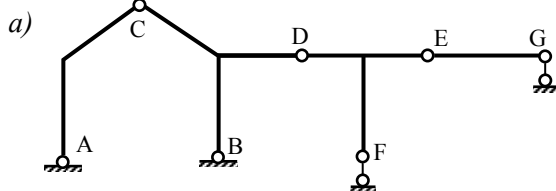
Hệ liên hợp tĩnh định là hệ bất biến hình gồm nhiều hệ liên kết với nhau (như dầm, vòm, dàn, dàn vòm, dây cáp hoặc dây xích) bằng số liên kết vừa đủ để cùng nhau chịu lực.

Hệ liên hợp có các bộ phận dầm hoặc dàn được gia cường bằng dây xích chịu kéo (*Hình 2.9a, b, c*) gọi là hệ treo (có đường biên võng xuống).

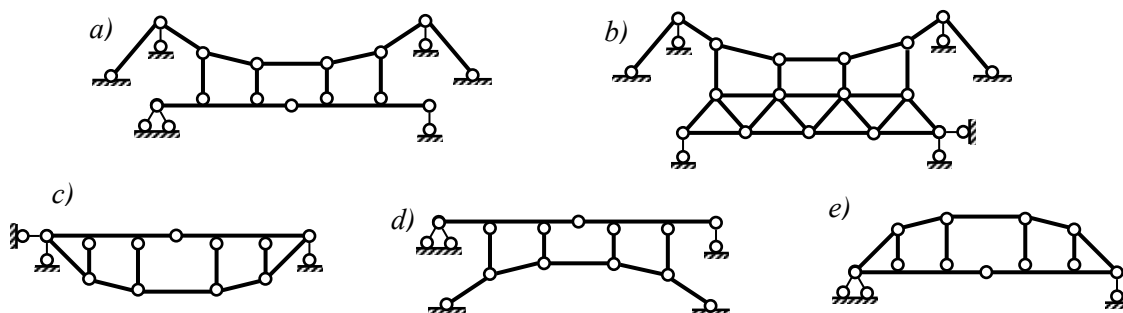
Hệ được gia cường bằng các thanh chịu nén gọi là hệ vòm (*Hình 2.9d, e*).



Hình 2.7



Hình 2.8

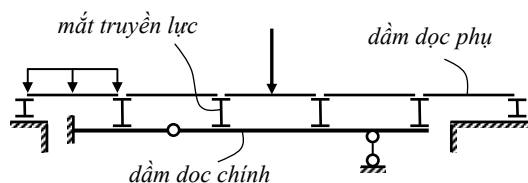


Hình 2.9

4. Hệ có hệ thống truyền lực (hệ có mắt truyền lực)

Hệ có hệ thống truyền lực là hệ mà tải trọng không tác dụng trực tiếp lên kết cấu chịu lực chính (dầm dọc chính) mà tác dụng trên các dầm dọc phụ. Tải trọng truyền từ dầm dọc phụ xuống dầm dọc chính qua hệ thống các dầm ngang gọi là mắt truyền lực. Hình 2.10 mô tả một dầm có hệ thống truyền lực như vậy.

Kết cấu có mắt truyền lực có nhiều ưu điểm: cố định vị trí đặt lực trên kết cấu chính và bảo vệ được nó trong quá trình chịu tải, giảm nhẹ được trọng lượng kết cấu chịu lực chính. Loại kết cấu này được sử dụng nhiều cho sàn nhà, mái nhà và kết cấu mặt cầu...



Hình 2.10

Kết cấu chịu lực chính có thể là bất kỳ (dầm, dàn, vòm, khung...) tĩnh định hoặc siêu tĩnh.

2.2. CÁCH XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC, NỘI LỰC TRONG HỆ THANH PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT

Để xác định phản lực trong các liên kết hoặc nội lực tại một tiết diện nào đó ta sử dụng phương pháp mặt cắt nhằm biến nội lực thành ngoại lực, thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng giải tích từ đó suy ra các phản lực hoặc nội lực cần tìm.

Nội dung phương pháp như sau:

1. Thực hiện các mặt cắt qua các liên kết cần xác định phản lực, hoặc qua các tiết diện cần tìm nội lực. Mỗi mặt cắt phải chia hệ thành hai phần riêng biệt.

2. Xét cân bằng một phần nào đó. Thay thế tác dụng của phần bị loại bỏ bằng phản lực liên kết tương ứng (hoặc các thành phần nội lực tại tiết diện bị cắt), các đại lượng chưa biết này có thể giả thiết hướng theo chiều dương quy ước.

3. Lập các phương trình cân bằng tĩnh học cho phần hệ đang xét, chẳng hạn:

$$a) \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0;$$

(các trục chiều X, Y không được song song với nhau)

$$b) \Sigma X = 0; \quad \Sigma M_A = 0; \quad \Sigma M_B = 0;$$

(A và B không được nằm trên đường thẳng vuông góc với trục X)

$$c) \Sigma M_A = 0; \quad \Sigma M_B = 0; \quad \Sigma M_C = 0;$$

(A, B và C không được nằm trên cùng một đường thẳng)

Trong hệ tĩnh định ta sẽ thiết lập được một hệ phương trình cân bằng độc lập vừa đủ để xác định phản lực liên kết (nội lực) cần tìm trong hệ. Trong quá trình thiết lập các phương trình cân bằng cần viết sao cho mỗi phương trình có chứa số ẩn ít nhất (thường một ẩn).

4. Giải hệ phương trình trên ta xác định được các thành phần phản lực (nội lực) cần tìm. Kết quả mang dấu dương thì chiều của phản lực (nội lực) đúng với chiều giả thiết, còn kết quả mang dấu âm thì ngược với chiều giả thiết.

Ví dụ 2-1: Xác định nội lực tại tiết diện K của khung cho trên hình 2.11a.

Giải:

1. Giả thiết chiều các phản lực liên kết tại A và B như hình vẽ. Xét cân bằng toàn hệ ta có:

$$\Sigma X = H_A - q \cdot 2a = 0$$

$$\Sigma M_A = R_B \cdot a - q \cdot 2a \cdot a + \frac{qa^2}{2} - qa \cdot \frac{3a}{2} = 0$$

$$\Sigma M_B = R_A \cdot a - q \cdot 2a \cdot a + \frac{qa^2}{2} - qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$

Giải ra ta được:

$$H_A = 2qa; \quad R_A = 2qa; \quad R_B = 3qa;$$

Các kết quả đều mang dấu dương chứng tỏ chiều các phản lực đã giả thiết là đúng.

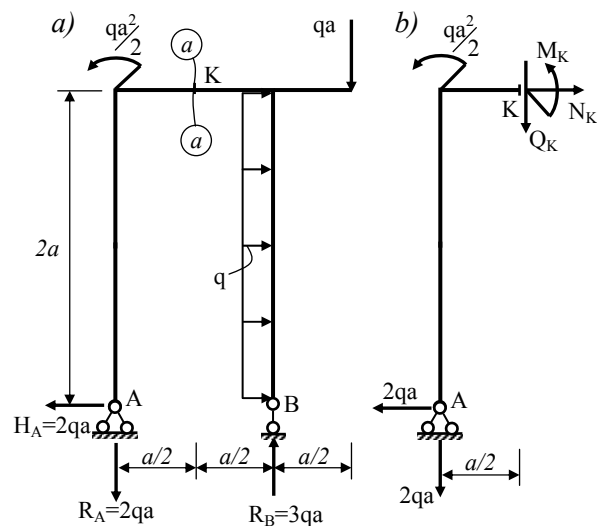
2. Dùng mặt cắt a-a đi qua K chia hệ thành hai phần độc lập. Xét cân bằng phần trái K (nội lực tại tiết diện K và các ngoại lực như hình 2.11b)

3. Viết các phương trình cân bằng đối với phần đang xét

$$\Sigma X = N_K - 2qa = 0$$

$$\Sigma Y = Q_K + 2qa = 0$$

$$\Sigma M_K = M_K + \frac{qa^2}{2} - 2qa \cdot 2a + 2qa \cdot \frac{a}{2} = 0$$



Hình 2.11

4. Giải các phương trình trên ta được:

$$N_K = 2qa; \quad Q_K = -2qa; \quad M_K = 2,5qa^2$$

Vì giả thiết các thành phần nội lực theo qui ước của sức bền vật liệu nên lực dọc tại K là dương (lực kéo), lực cắt tại K là âm, mô men uốn tại K căng thớ dưới của thanh.

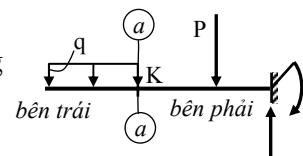
2.3. TÍNH HỆ DÀM, KHUNG ĐƠN GIẢN CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

Yêu cầu cơ bản khi tính toán hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh là vẽ đúng và nhanh các biểu đồ nội lực.

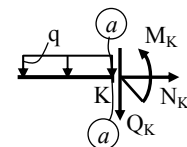
Trong thực hành, khi vẽ biểu đồ nội lực trong những hệ thanh gồm những thanh thẳng, không cần thiết lập các phương trình nội lực (trừ trường hợp thật cần thiết) mà vẽ theo giá trị nội lực tại một số tiết diện đặc trưng cần thiết ở mức độ tối thiểu. Cách vẽ thực hành này được xây dựng trên cơ sở áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và các liên hệ vi phân đã biết giữa ngoại lực và nội lực. Để vẽ nhanh biểu đồ nội lực ta có thể tham khảo *Bảng 3.1*. Trong *Bảng 3.1* giới thiệu dạng biểu đồ nội lực (M , Q , N), số tiết diện đặc trưng cần xác định nội lực và các số liệu cần thiết khác khi vẽ biểu đồ nội lực tương ứng với các dạng tải trọng cơ bản tác dụng trên một đoạn thanh bất kỳ.

Với hệ thanh phẳng, ta biểu diễn và quy ước dấu của các thành phần nội lực như sau:

- + Mô men uốn M_K vẽ đúng thớ căng.
- + Lực cắt Q_K dương khi nó có xu hướng làm cho phần đang xét quay thuận chiều kim đồng hồ.
- + Lực dọc N_K dương khi nó có chiều đi ra khỏi tiết diện.

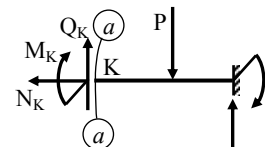


Ví dụ quy ước dương của nội lực tại mặt cắt nào đó trên thanh ngang như *hình 2.12*.



Từ ba phương trình cân bằng tĩnh học đối với phần đang xét ta dễ dàng xác định được giá trị của các thành phần nội lực M_K , Q_K , N_K .

- + Mô men uốn M tại tiết diện K có giá trị được xác định bằng tổng mô men của các lực tác dụng trên phần trái (hay phần phải) đối với trọng tâm của tiết diện K .



- + Lực cắt Q tại tiết diện K có giá trị bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần bên trái (hay bên phải) lên phương vuông góc với trục thanh tại K .

- + Lực dọc N của tiết diện K có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần bên trái (hay bên phải) lên phương trục thanh tại K .

Hình 2.12

Sau khi xác định được nội lực tại một số tiết diện cần thiết trên hệ, dựa vào các liên hệ vi phân giữa tải trọng và nội lực đã biết trong sức bền vật liệu để xác định dạng của biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh trong đó tải trọng tác dụng là liên tục để vẽ biểu đồ nội lực.

Với hệ dầm và khung chỉ gồm các thanh thẳng, khi chia đoạn ta thấy chúng có hai dạng đoạn thanh:

- + Đoạn thanh không có tải trọng tác dụng trên thanh.
- + Đoạn thanh có tải trọng tác dụng trên thanh.

Cách vẽ nhanh biểu đồ nội lực cho các đoạn này như sau:

Với đoạn thanh không có tải trọng tác dụng trên thanh, ta tính giá trị nội lực tại hai đầu thanh, đặt đúng giá trị đó vào hai đầu thanh tương ứng rồi nối chúng lại bằng đường thẳng.

Với đoạn thanh có tải trọng tác dụng trên thanh, ta tính giá trị nội lực tại hai đầu thanh, đặt đúng giá trị đó vào hai đầu thanh tương ứng, rồi nối tạm thời hai giá trị đó bằng đường thẳng, sau đó “treo” biểu đồ cục bộ do tải trọng tác dụng trong thanh khi xem đoạn thanh đó là dầm đơn giản (các tung độ η_M , η_Q , η_N).

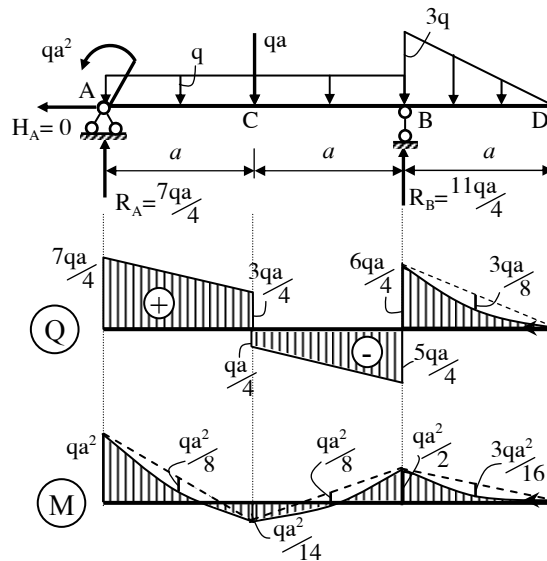
Ví dụ 2-2: Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm trên hình 2.13.

Giải:

a) *Xác định phản lực.* Xét cân bằng toàn hệ:

$$\begin{aligned}\sum Z = H_A = 0 &\Rightarrow H_A = 0 \\ \sum M_A = R_B \cdot 2a + qa^2 - q \cdot 2a \cdot a + qa \cdot a + \\ + \frac{3qa}{2} \left(2a + \frac{a}{3} \right) &= 0; \Rightarrow R_B = \frac{11}{4} qa \\ \sum M_B = R_A \cdot 2a - qa^2 - q \cdot 2a \cdot a - qa \cdot a - \\ - \frac{3qa}{2} \left(\frac{a}{3} \right) &= 0; \Rightarrow R_A = \frac{7}{4} qa.\end{aligned}$$

b) *Vẽ các biểu đồ nội lực:* Do tải trọng vuông góc với trục dầm nên lực dọc bằng không tại mọi tiết diện. Ta chỉ cần vẽ biểu đồ lực cắt và mô men uốn.



Hình 2.13

* Đoạn AC: Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên:

+ Biểu đồ Q có dạng đường thẳng, xác định theo hai giá trị tại A và C.

$$Q_{AC} = R_A = \frac{7}{4} qa; \quad Q_{CA} = R_A - qa = \frac{3}{4} qa$$

+ Biểu đồ M có dạng đường cong parabol bậc 2, ta có:

$$M_{AC} = -qa^2 \text{ (căng trên);} \quad M_{CA} = R_A a - qa^2 - \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^2}{4} \text{ (căng dưới)}$$

$$\text{tung độ treo } \eta_M = \frac{qa^2}{8} \text{ (võng xuống).}$$

* Đoạn BC: Tương tự như đoạn AC ta có:

+ Biểu đồ Q:

$$Q_{CB} = R_A - qa - qa = -\frac{qa}{4}; \quad Q_{BC} = R_A - qa - q2a = -\frac{5qa}{4}$$

+ Biểu đồ M:

$$M_{CB} = R_A a - q \frac{a^2}{2} - qa^2 = \frac{qa^2}{4} \text{ (căng dưới)}$$

$$M_{BC} = R_A \cdot 2a - qa^2 - q \cdot 2a \cdot a - qa \cdot a = -\frac{qa^2}{2} \text{ (căng trên)}$$

$$\text{tung độ treo } \eta_M = \frac{qa^2}{8} \text{ (võng xuống)}$$

* Đoạn BD: Đoạn này có tải trọng phân bố luật bậc nhất nên:

+ Biểu đồ Q có dạng đường cong bậc hai.

$$Q_{DB} = 0; \quad Q_{BD} = 3q \cdot a \frac{1}{2} = \frac{3qa}{2}$$

$$\text{tung độ treo } \eta_Q = \frac{1}{8} 3q \cdot a \text{ (võng xuống)}$$

+ Biểu đồ M có dạng đường cong bậc ba:

$$M_{DB} = -3q \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = -\frac{qa^2}{2} \text{ (căng trên);} \quad M_{BD} = 0$$

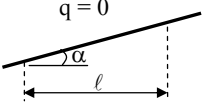
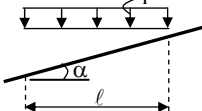
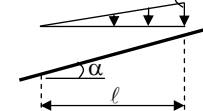
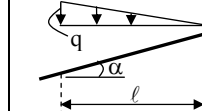
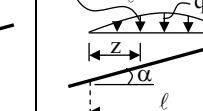
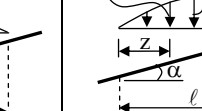
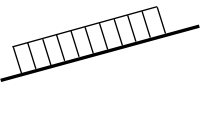
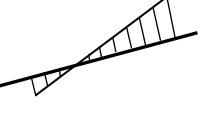
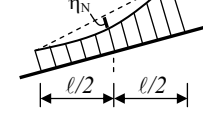
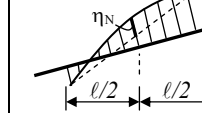
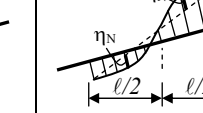
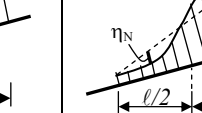
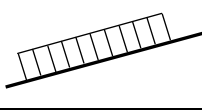
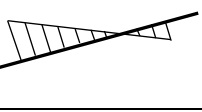
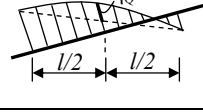
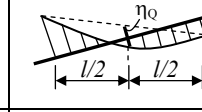
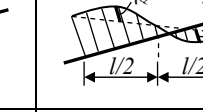
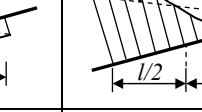
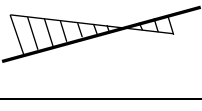
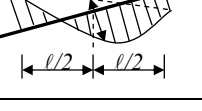
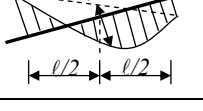
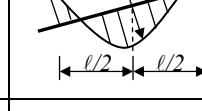
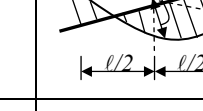
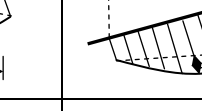
$$\text{tung độ treo } \eta_M = \frac{1}{16} 3q \cdot a = \frac{3}{16} qa^2 \text{ (võng xuống).}$$

Chú ý:

Biểu đồ mô men trong đoạn BD có dạng bậc ba, về nguyên tắc ta phải tính bốn giá trị đặc trưng của biểu đồ mô men, nhưng do biểu đồ Q trong đoạn này đơn điệu (không cắt đường chuẩn) nên chỉ cần ba giá trị như đã tính đủ để xác định biểu đồ mô men của đoạn.

Điều này phù hợp với cách vẽ nhanh biểu đồ như đã nêu ở trên.

Bảng 3-1:

Sơ đồ tải trọng							
N	Dạng biểu đồ						
	Số tiết diện cần tính N	1	2	3	3	5	5
	η_N	0	0	$\frac{1}{8} q l \sin \alpha$	$\frac{1}{8} q l \sin \alpha$	$\frac{1}{16} q l \sin \alpha$	$\frac{q l}{2 \pi} (\sqrt{2} - 1) \sin \alpha$
Q	Dạng biểu đồ						
	Số tiết diện cần tính Q	1	2	3	3	5	5
	η_Q	0	0	$\frac{1}{8} q l \cos \alpha$	$\frac{1}{8} q l \cos \alpha$	$\frac{1}{16} q l \cos \alpha$	$\frac{q l}{2 \pi} (\sqrt{2} - 1) \cos \alpha$
M	Dạng biểu đồ						
	Số tiết diện cần tính M	2	3	3	3	3	3
	η_M	0	$\frac{1}{8} q l^2$	$\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{5}{48} q l^2$	$\frac{q l^2}{\pi^2}$

Ví dụ 2-3: Vẽ biểu đồ nội lực cho khung như hình 2.14. Kiểm tra lại giá trị nội lực tại K bằng đường ảnh hưởng.

Giải:

a) **Xác định phản lực.** Xét cân bằng toàn hệ:

$$\Sigma Y = R_A - q \cdot 2a = 0 \Rightarrow R_A = 2qa$$

$$\Sigma M_A = H_B \cdot a + qa \cdot a - qa^2 - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow H_B = qa$$

$$\Sigma M_F = H_A \cdot a - 2qa^2 - q \cdot 2a \cdot a - qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 3qa$$

b) **Vẽ các biểu đồ nội lực:**

* **Đoạn CD:** Trong đoạn này không có tải trọng tác dụng trong thanh:

- Biểu đồ lực dọc và lực cắt có dạng song song với đường chuẩn.

$$N_{CD} = N_{DC} = 0$$

$$Q_{CD} = Q_{DC} = 0$$

- Biểu đồ mô men uốn có dạng đường thẳng

$$M_{CD} = M_{DC} = qa^2 \text{ (căng dưới)}$$

* **Đoạn BE:** Tương tự đoạn CD:

$$N_{BE} = N_{EB} = 0$$

$$Q_{BE} = Q_{EB} = -2qa$$

$$M_{BE} = 0; \quad M_{EB} = -2qa^2 \text{ (căng phải)}$$

* **Đoạn AD:** Trong đoạn này chịu lực tập trung tại F có phương vuông góc với trục thanh:

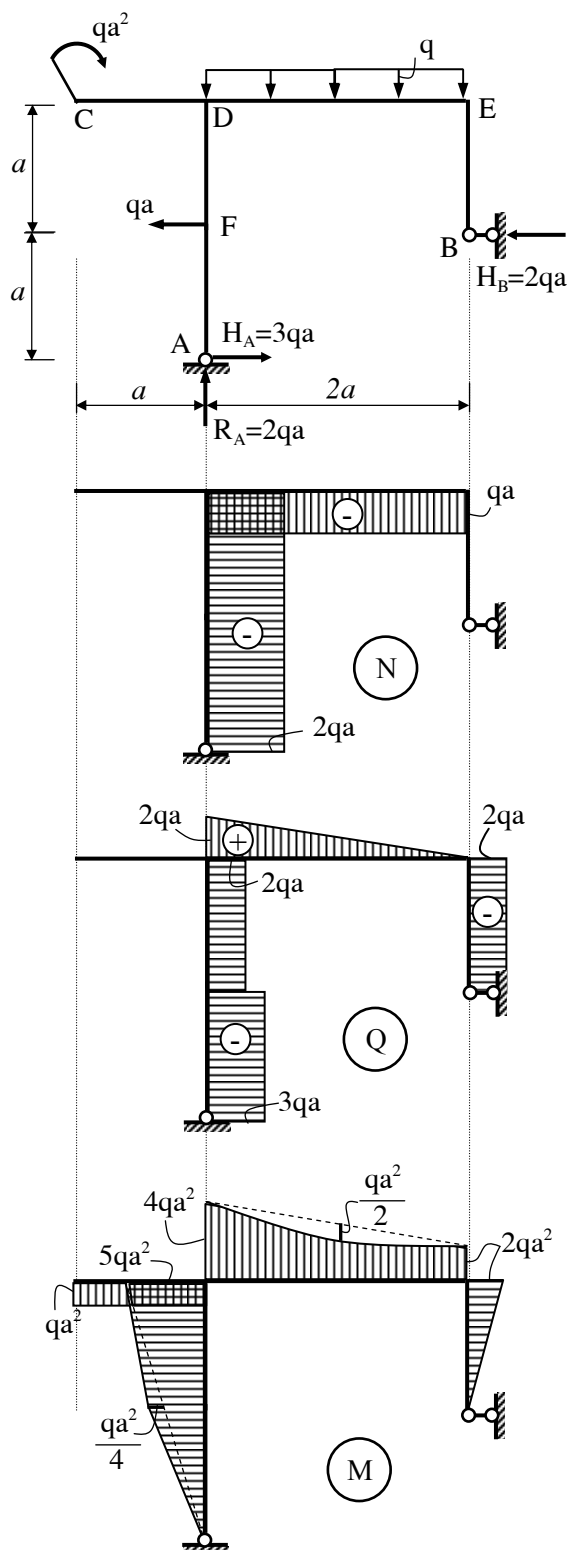
- Biểu đồ lực dọc có dạng song song với đường chuẩn:

$$N_{AD} = N_{DA} = -R_A = -2qa \text{ (nén)}$$

- Biểu đồ lực cắt là hai đoạn có dạng song song với đường chuẩn, bước nhảy tại F có giá trị là qa.

$$Q_{AF} = Q_{FA} = -3qa;$$

$$Q_{FD} = Q_{DF} = -2qa;$$



Hình 2.14

- Biểu đồ mô men uốn là hai đoạn thẳng có mũi gãy tại F

$$M_{AD} = 0; \quad M_{DA} = -3qa \cdot 2a + qa \cdot a = -5qa^2 \text{ (căng trái)}$$

$$\text{Tung độ treo tại F: } \eta_M = \frac{qa^2}{4} \text{ (võng sang trái)}$$

* Đoạn DE: Trong đoạn này chịu tải phân bố đều q vuông góc với trục thanh:

- Biểu đồ lực dọc có dạng song song với đường chuẩn:

$$N_{DE} = N_{ED} = -qa \text{ (nén)}$$

- Biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất:

$$Q_{ED} = 0; \quad Q_{DE} = +2qa;$$

- Biểu đồ mô men uốn có dạng bậc hai:

$$M_{ED} = -2qa^2 \text{ (căng trên)} \quad M_{DE} = -4qa^2 \text{ (căng trên)}$$

$$\text{Tung độ treo: } \eta_M = \frac{qa^2}{2} \text{ (võng xuống)}$$

2.4. TÍNH DÀN CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

Như đã phân tích ở mục 2.1, trong các thanh dàn chỉ tồn tại lực dọc N . Do đó, khi thực hiện mặt cắt qua mỗi thanh dàn ta chỉ cần thay thế tác dụng của phần thanh bị loại bỏ bằng một thành phần nội lực là lực dọc N .

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định lực dọc trong các thanh dàn theo một số phương pháp thông dụng sau đây:

2.4.1. Phương pháp tách mắt

Phương pháp tách mắt là trường hợp riêng của phương pháp mặt cắt, trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy.

Để xác định lực dọc trong các thanh của dàn, có thể thực hiện các bước sau:

- + *Lần lượt tách từng mắt ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh mắt.*
- + *Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Khi chưa biết lực dọc trong thanh thì giả thiết lực dọc có chiều dương, hướng ra ngoài mắt đang xét. Sau khi thay thế, tại mỗi mắt ta có một hệ lực đồng quy cân bằng.*
- + *Khảo sát sự cân bằng của từng mắt. Vì hệ lực là phẳng và đồng quy nên tại mỗi mắt có hai phương trình cân bằng độc lập thường dùng là phương trình hình chiếu theo hai phương bất kỳ không song song, chẳng hạn:*

$$\sum X = 0 \quad \text{và} \quad \sum Y = 0.$$

Từ các phương trình cân bằng đó ta suy ra được nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều đã giả định là đúng, lực dọc là kéo. Nếu kết quả mang dấu âm thì chiều của lực dọc cần tìm ngược với chiều đã giả định, lực dọc là nén.

Về nguyên tắc, có thể tách các mắt theo thứ tự bất kỳ và tại mỗi mắt có thể viết phương trình hình chiếu lên hai phương X, Y bất kỳ không song song, cuối cùng vẫn tìm được đầy đủ các nội lực trong dàn. Tuy nhiên, nếu thứ tự tách mắt và cách chọn trục không khéo thì trong một phương trình cân bằng có thể tồn tại nhiều lực chưa biết, do đó phải giải một hệ phương trình. *Biện pháp tốt nhất là chọn sao cho trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn số.* Muốn vậy, khi áp dụng phương pháp tách mắt ta nên thực hiện theo những chỉ dẫn sau:

+ Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai lực dọc chưa biết.

Tại mỗi mắt ta chỉ có hai phương trình cân bằng cho nên nếu ở đó chỉ có một hoặc hai lực dọc chưa biết thì có thể tìm được ngay. Trong trường hợp hệ cho trên hình 2.15, có thể tách theo thứ tự 1, 2, 3, 4...

+ Tại mỗi mắt, để tìm lực dọc trong thanh chưa biết thứ nhất thì nên lập phương trình hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chưa biết thứ hai.

Làm như vậy thì trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số và các kết quả tìm được sẽ độc lập với nhau, đỡ mắc sai lầm dốt dây.

Ví dụ 2-4: Xác định lực dọc trong các thanh 1-2, 1-3 và 2-3 trong hệ trên hình 2.15a.

Tách mắt 1 (hình 2.15b), để tìm N_{1-3} ta sử dụng phương trình hình chiếu lên phương X vuông góc với thanh 1-2:

$$\sum X = N_{1-3} \cdot \sin \alpha - R_A \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\Rightarrow N_{1-3} = 2P \cdot \cot \alpha \quad (\text{lực kéo}).$$

Để tìm N_{1-2} ta dùng phương trình hình chiếu lên phương Y vuông góc với thanh 1-3:

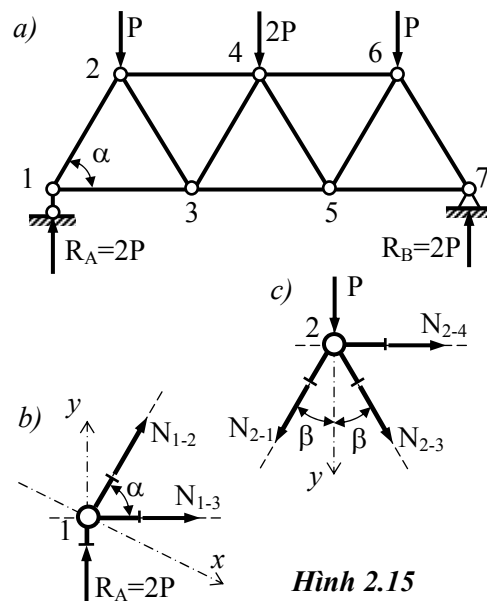
$$\sum Y = N_{1-2} \cdot \sin \alpha + R_A = 0;$$

$$\Rightarrow N_{1-2} = -\frac{2P}{\sin \alpha} \quad (\text{lực nén}).$$

Sau khi biết N_{1-2} ta có thể tách mắt 2 để tìm N_{2-4} và N_{2-3} (hình 2.15c). Chẳng hạn cần tìm N_{2-3} ta chiếu các lực lên phương vuông góc với thanh 2-4:

$$\sum Y = N_{2-3} \cdot \cos \beta + N_{1-2} \cdot \cos \beta + P = 0;$$

$$\text{Nhưng } N_{1-2} = -\frac{2P}{\sin \alpha} \text{ và } \cos \beta = \sin \alpha, \text{ nên: } N_{2-3} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (\text{lực nén}).$$



Hình 2.15

Từ phương pháp tách mắt ta suy ra các hệ quả quan trọng sau:

1) *Tại một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng và không có tải trọng tác dụng thì lực dọc trong hai thanh đó bằng không.*

Ví dụ như trường hợp dàn trên hình 2.16, lực dọc trong các thanh 1-2 và 1-10 bằng không vì mắt 1 thỏa mãn các yêu cầu của hệ quả 1.

Để chứng minh hệ quả 1 ta khảo sát sự cân bằng của một mắt có hai thanh không thẳng hàng và không có lực đặt ở mắt (Hình 2.17a).

$$\sum X = N_2 \cdot \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_2 = 0.$$

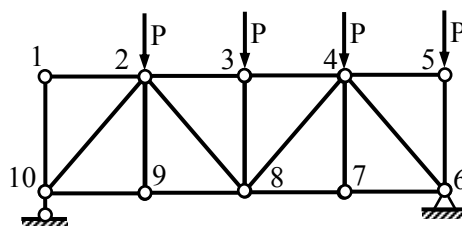
$$\sum Y = N_1 \cdot \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0.$$

Trong trường hợp hệ trên hình 2.16 ta có:

$$+ \text{ Tại mắt 9: } N_{9-2} = 0; \text{ còn } N_{9-10} = N_{9-8}.$$

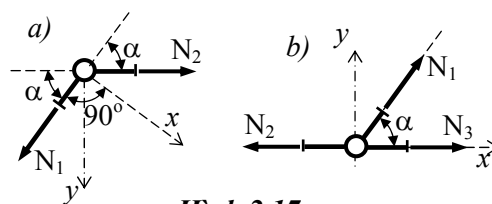
$$+ \text{ Tại mắt 7: } N_{7-4} = 0 \text{ còn } N_{7-8} = N_{7-6}.$$

+ Tại mắt 5 ta thấy chỉ có hai thanh và một lực P, thẳng hàng với thanh 5-6; có thể xem lực P như một thanh đã biết nội lực, do đó: $N_{5-4} = 0$; còn $N_{5-6} = -P$.



Hình 2.16

2) *Tại một mắt có ba thanh trong đó có hai thanh thẳng hàng và nếu tại mắt đó không có tải trọng tác dụng thì thanh không thẳng hàng không làm việc (lực dọc bằng không) còn lực dọc trong hai thanh thẳng hàng bằng nhau.*



Hình 2.17

Để chứng minh hệ quả 2 ta khảo sát sự cân bằng của mắt vẽ trên hình 2.17b,

$$\text{Ta có: } \sum Y = N_1 \cdot \sin \alpha = 0; \text{ vì } \alpha \neq 0 \text{ nên } N_1 = 0.$$

$$\sum X = N_3 - N_2 = 0; \text{ nên } N_3 = N_2.$$

Đó là điều cần chứng minh.

Trước khi tính dàn ta nên chú ý sử dụng các hệ quả trên để phát hiện các thanh không làm việc và loại chúng ra khỏi hệ, như vậy hệ còn lại sẽ đơn giản và dễ dàng tính toán hơn.

Cách tính tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng nhưng cũng có nhược điểm là nếu để xảy ra sai lầm trong một bước tính toán nào đó thì các kết quả tiếp sau cũng bị sai kéo theo.

2.4.2. Phương pháp mặt cắt đơn giản

Phương pháp mặt cắt đơn giản được áp dụng khi chỉ cần dùng một mặt cắt là có thể xác định được nội lực trong thanh cần tìm. Trường hợp này xảy ra khi mặt cắt cắt qua không quá ba thanh chưa biết nội lực.

Để xác định lực dọc trong các thanh dàn, có thể thực hiện các bước sau:

+ Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và qua hai thanh khác chưa biết nội lực, mặt cắt cần phải chia dàn ra thành hai phần độc lập.

+ Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Cũng như phương pháp tách mắt, khi chưa biết lực dọc ta giả thiết là dương nghĩa là hướng ra ngoài mặt đang xét.

+ Lập điều kiện cân bằng của một phần dàn bị cắt (phần phải hoặc phần trái). Trong trường hợp này ta có hệ lực phẳng bất kỳ, nên có ba phương trình cân bằng. Từ các phương trình cân bằng đó suy ra các nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

Để trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn số ta nên làm như sau:

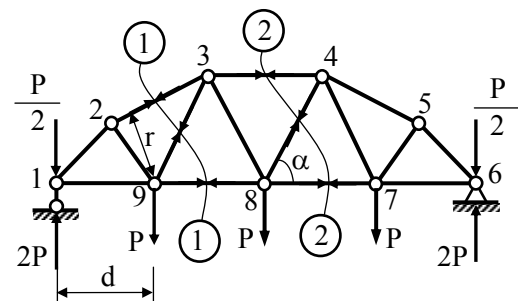
+ Trường hợp ba thanh chưa biết nội lực cắt nhau từng đôi một, để tìm nội lực trong thanh thứ nhất, nên sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng mô men của các lực đối với giao điểm của hai thanh còn lại.

+ Trường hợp trong số ba thanh bị cắt chưa biết nội lực có hai thanh song song, để tìm nội lực trong thanh không song song ta sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu của các lực lên phương vuông góc với hai thanh song song.

Ví dụ 2-5: Xác định lực dọc trong các thanh 2-3 và 4-8 của dàn trên hình 2.18.

Tìm N_{2-3} : thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh 2-3 và hai thanh chưa biết nội lực 3-9 và 9-8. Thay thế các thanh bị cắt bằng lực dọc tương ứng như trên hình 2.18.

Khảo sát cân bằng phần bên trái mặt cắt. Để tìm được ngay N_{2-3} ta lập phương trình cân bằng dưới dạng tổng mô men của các lực thuộc phần đang xét đối với giao điểm của hai thanh 3-9 và 9-8 tức là đối với điểm 9.



Hình 2.18

Khi đó, các lực chưa biết N_{3-9} , N_{9-8} không tham gia phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum M_9^F = -N_{2-3}r - \left(2P - \frac{P}{2}\right)d = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -\frac{3Pd}{2r} \quad (\text{lực nén}).$$

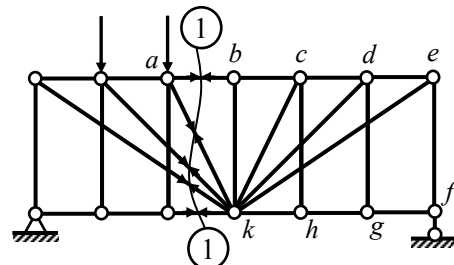
Tìm N_{4-8} : thực hiện mặt cắt 2-2 như trên hình 2.18. Mặt cắt này qua ba thanh chưa biết nội lực, trong đó hai thanh 3-4 và 8-7 song song. Do đó, để tìm N_{4-8} ta lập phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu các lực thuộc phần phải (hoặc phần trái) lên phương vuông góc với hai thanh song song 3-4 và 8-7, ta có:

$$\sum Y^{ph} = -N_{4-8} \sin \alpha - P + \left(2P - \frac{P}{2}\right) = 0 \Rightarrow N_{4-8} = \frac{P}{2 \sin \alpha} \quad (\text{lực kéo}).$$

Chú thích:

Nếu mặt cắt đi qua bốn thanh (hoặc hơn nữa) chưa biết nội lực thì nói chung ta không thể xác định ngay được các lực dọc theo một mặt cắt. Trong trường hợp đặc biệt khi các thanh bị cắt đồng quy tại một điểm K nào đó trừ một thanh thì ta có thể tìm ngay được nội lực trong thanh không đồng quy từ một mặt cắt.

Ví dụ, với hệ trên *hình 2.19*, mặt cắt 1-1 đi qua năm thanh chưa biết nội lực trong đó có bốn thanh đồng quy ở điểm K, để tìm N_{a-b} trong thanh không đồng quy ta có thể sử dụng phương trình cân bằng $\sum M_K = 0$.

**Hình 2.19****2.4.3. Phương pháp mặt cắt phối hợp**

Phương pháp này được áp dụng để tính dàn khi không dùng được phương pháp mặt cắt đơn giản.

Khi mà một mặt cắt phải cắt qua quá ba thanh chưa biết lực dọc, hay các lực dọc không thể xác định được bằng một mặt cắt, khi đó cần phải phối hợp thêm với một số mặt cắt khác (càng ít càng tốt) vừa đủ để lập được một hệ phương trình cân bằng có số phương trình bằng với số ẩn cần xác định.

Để hiểu rõ bản chất của phương pháp này, ta hãy xét ví dụ sau:

Ví dụ 2-6: Xác định lực dọc trong thanh 2-5 và 5-3 của dàn trên *hình 2.20*.

Thực hiện mặt cắt I-I: mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2-5 và 5-3 đồng thời qua hai thanh chưa cần tìm nội lực là 1-2 và 4-3.

Để có được phương trình chỉ chứa N_{2-5} và N_{5-3} ta lập phương trình cân bằng hình chiếu của các lực bên trái mặt cắt lên phương thẳng đứng:

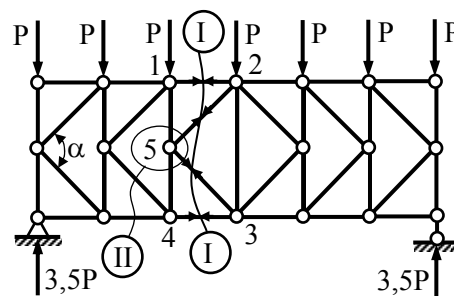
$$\sum Y^{\text{tr}} = N_{2-5} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - N_{3-5} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 3,5P - P - P = 0,$$

$$\text{hay} \quad N_{2-5} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - N_{3-5} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 0,5P = 0 \quad (a)$$

Thực hiện mặt cắt II-II (tách mắt). Mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực 2-5, 3-5 và hai thanh khác chưa cần tìm nội lực là 1-5, 5-4. Để thiết lập phương trình chỉ chứa N_{2-5} và N_{3-5} ta lập phương trình hình chiếu của các lực tác dụng bên trong mặt cắt lên phương ngang:

$$\sum X = N_{2-5} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + N_{3-5} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0. \quad (b)$$

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta được: $N_{3-5} = -N_{2-5} = \frac{0,25P}{\sin(\alpha/2)}$.

**Hình 2.20**

2.4.4. Phương pháp họa đồ - Giải đồ Maxwell- Cremona

Phương pháp họa đồ là phương pháp vẽ để giải bài toán. Phương pháp này đơn giản, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc rất nhiều vào dụng cụ để vẽ và cách vẽ. Khi có đủ dụng cụ và vẽ một cách thận trọng thì kết quả vẽ có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế.

Có thể vận dụng phương pháp họa đồ để xác định phản lực và nội lực trong các hệ tĩnh định nói chung. Trong mục này chỉ giới thiệu cách vận dụng phương pháp họa đồ để tính hệ dàn, đó là trường hợp thường được dùng trong thiết kế sơ bộ.

Cách giải bài toán được thực hiện chỉ trên một hình vẽ gọi là *giản đồ nội lực* hay *giản đồ Maxwell-Cremona* do nhà vật lý học người Anh J. Clerk Maxwell (1831-1879) đề cập và nhà hình học Italia là Luigi Cremona (1830-1903) phát triển, áp dụng vào kết cấu dàn.

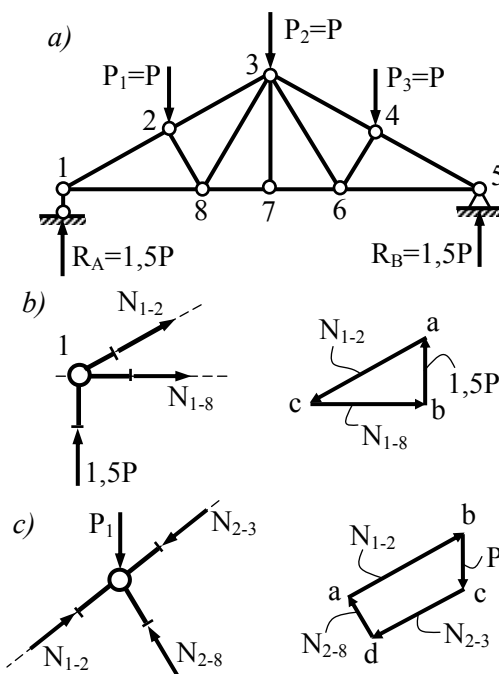
Trước khi đi vào nghiên cứu giản đồ nội lực ta cần tìm hiểu cách xác định nội lực trong các thanh của dàn bằng họa đồ.

Giả sử các phản lực gối tựa đều đã biết (cách xác định phản lực bằng họa đồ đã được đề cập trong Cơ học cơ sở) yêu cầu xác định nội lực trong các thanh của dàn. Từ Cơ học cơ sở ta đã biết: *điều kiện cần và đủ để cho hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực này phải khép kín*. Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng mắt của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương thì ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

Cách thực hiện cũng giống như trong phương pháp tách mắt, nhưng ở đây không dùng điều kiện cân bằng giải tích mà dùng điều kiện cân bằng dưới dạng họa đồ.

Đối với dàn trên *hình 2.21a* nếu tách mắt 1 ta thấy tại mắt này có ba lực: phản lực R_A đã biết, hai lực N_{1-2} và N_{1-8} chưa biết trị số nhưng phương của chúng đã được xác định.

Để vẽ đa giác lực của chúng, trên *hình 2.21b* ta sẽ vẽ vector $\vec{ba}$ cùng phương và cùng chiều với phản lực R_A và có chiều dài biểu thị trị số của R_A theo một tỷ lệ xích nào đó. Từ ngọn và gốc của vector này, kẻ hai đường song song với hai phương của thanh 1-2 và 1-8, hai đường này cắt nhau tại c. Theo điều kiện cân bằng đã nêu ở trên đoạn ac và cb lần lượt biểu thị giá trị của lực N_{1-2} và N_{1-8} .



Hình 2.21

Chiều của vector $\vec{ac}$ hướng vào mắt 1 nên N_{1-2} là lực nén, còn chiều của vector $\vec{cb}$ hướng ra ngoài mắt nên N_{1-8} là lực kéo.

Tiếp đó chuyển sang mắt 2. Tại mắt này có bốn lực: hai lực đã biết là P và N_{1-2} , hai lực chưa biết trị số nhưng có phương xác định là N_{2-3} và N_{2-8} .

Hình 2.21c là đa giác lực của hệ lực này; sau khi vẽ hai vector $\vec{ab}$ và $\vec{bc}$ biểu thị phương chiều và trị số của hai lực đã biết là N_{1-2} và P , từ a và c kẻ hai đường song song với phương của thanh 2-8 và 2-3 cho tới khi cắt nhau tại d .

Từ điều kiện cân bằng ta thấy hai lực cần tìm N_{2-3} và N_{2-8} được biểu thị bằng hai vector $\vec{cd}$ và $\vec{da}$, những lực này hướng vào mắt 2 nên là lực nén.

Cũng tiến hành tương tự như vậy đối với các mắt khác theo thứ tự 8, 7, 3 ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

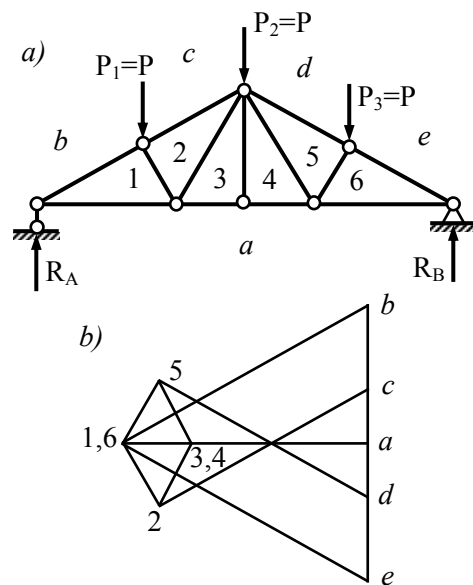
Nếu gộp tất cả các đa giác lực vẽ cho từng mắt trên một hình vẽ chung với cùng một tỷ lệ xích thì ta sẽ được giản đồ nội lực.

Để vẽ giản đồ nội lực ta cần thống nhất một số điều kiện, quy ước và tiến hành theo thứ tự như sau:

1. Xác định các phản lực tựa (có thể sử dụng phương pháp họa đồ hoặc giải tích).

2. Ký hiệu các miền ngoài chu vi dàn bằng các chữ cái a, b, c... Mỗi miền được giới hạn trong phạm vi hai ngoại lực. Quy ước đọc tên các ngoại lực và phản lực bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên do lực đó phân giới. Chú ý phải đọc hai chỉ số theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn. Ví dụ lực P_1 đọc là b-c; phản lực R_B đọc là e-a... (Hình 2.22a).

3. Vẽ đa giác lực cho các ngoại lực và phản lực theo một tỷ lệ xích nào đó. Khi vẽ đa giác lực ta không vẽ chiều mũi tên của lực mà ghi hai chỉ số tương ứng biểu thị lực. Chỉ số đầu biểu thị gốc, chỉ số thứ hai biểu thị ngọn của vector lực tương ứng. Ví dụ, lực P_1 (Hình 2.22a) được biểu thị bằng đoạn b-c trên đa giác lực (Hình 2.22b), vì P_1 hướng xuống nên điểm ngọn c nằm dưới điểm gốc b. Đa giác lực của ngoại lực và phản lực đối với dàn trên hình 2.22a là đường khép kín abcdea (Hình 2.22b).



4. Đánh số các miền ở trong dàn bằng các con số 1, 2, 3... Lúc này nội lực trong mỗi thanh được đọc bằng hai con số biểu thị hai miền ở hai bên thanh. Khi cắt một thanh nào đó ta phải thay thế tác dụng của nó bằng hai lực ngược chiều có giá trị bằng nhau đặt tại hai mắt mà thanh đó nối.

Cách đọc hai lực này cũng có khác nhau, *muốn đọc nội lực đặt tại mắt i nào đó ta đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên thanh tương ứng theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh mắt i*. Ví dụ với lực dọc trong thanh biên trên đầu tiên ở bên trái, khi lực này đặt tại mắt a ta đọc là b-1 còn khi đặt tại mắt có chịu lực P_1 ta đọc là 1-b.

5. Lần lượt vẽ đa giác lực cho từng mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai thanh chưa biết nội lực. Khi vẽ cần chú ý sử dụng cách ký hiệu nói trên, không vẽ các mũi tên, lực đã biết vẽ trước rồi dựa vào điều kiện khép kín của đa giác lực để xác định lực chưa biết. Tất cả các đa giác lực vẽ cho mỗi mắt đều phải được thực hiện trên cùng một hình vẽ của đa giác lực đã vẽ ở bước ba, theo cùng một tỷ lệ xích.

Ví dụ xét mắt A, trên hình 2.22b, đoạn a-b, biểu thị phản lực R_A đã biết, từ b và a lần lượt vẽ các đường song song với các lực chưa biết b-1 và 1-a. Giao điểm của hai đường này xác định vị trí của điểm 1. Đoạn b-1 và 1-a biểu thị giá trị của lực b-1 và 1-a. Chiều 1-a hướng ra ngoài mắt đang xét nên lực 1-a là kéo.

Tiếp tục xét mắt ở dưới lực P_1 ta vẽ được đường khép kín 1bc21. Đối với các mắt khác cũng tiến hành tương tự sẽ được giản đồ nội lực.

Ta thấy mỗi mắt của dàn tương ứng một đa giác lực khép kín, mỗi miền của dàn tương ứng với một điểm của giản đồ nội lực.

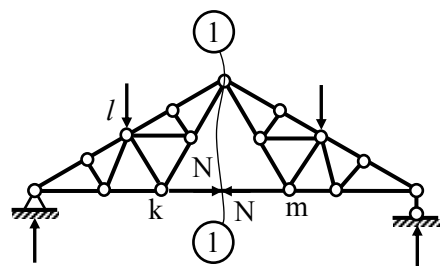
Để xác định giá trị của nội lực trong thanh i-k nào đó của dàn ta đo chiều dài của đoạn i-k tương ứng trên giản đồ nội lực theo tỷ lệ xích đã chọn khi vẽ giản đồ.

Để biết chiều hoặc dấu của nội lực ta thực hiện như đã trình bày ở điểm 4.

Chú ý:

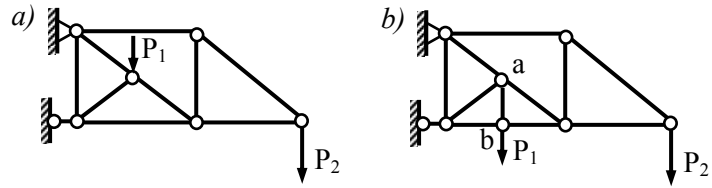
1. Khi gặp những dàn trong đó không thể thực hiện tách mắt để sao cho tại đó chỉ có hai nội lực chưa biết, ta cần kết hợp với cách tính giải tích để giải quyết.

Ví dụ với dàn vẽ trên hình 2.23 khi tách đến mắt k và mắt l ta sẽ gặp phải khó khăn trên. Để giải quyết, trước khi vẽ giản đồ ta cần sử dụng phương pháp mặt cắt (mặt cắt 1-1) để xác định lực dọc N trong thanh k-m; sau đó vẽ giản đồ như thường lệ (vì lực N đã biết).



Hình 2.23

2. Nếu ngoại lực nằm trong chu vi dàn thì trước khi đặt tên các miên ngoài chu vi dàn ta đưa các ngoại lực ra ngoài chu vi bằng cách đặt thêm các thanh quy ước. Tất nhiên thanh quy ước phải đặt sao cho tính chất làm việc của dàn không thay đổi.



Hình 2.24

Ví dụ khi gặp trường hợp dàn vẽ trên hình 2.24a ta có thể đưa lực P_1 ra ngoài chu vi dàn bằng cách đặt thêm thanh quy ước a-b như trên hình 2.24b.

2.5. TÍNH HỆ BA KHỚP CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

2.5.1. Xác định phản lực

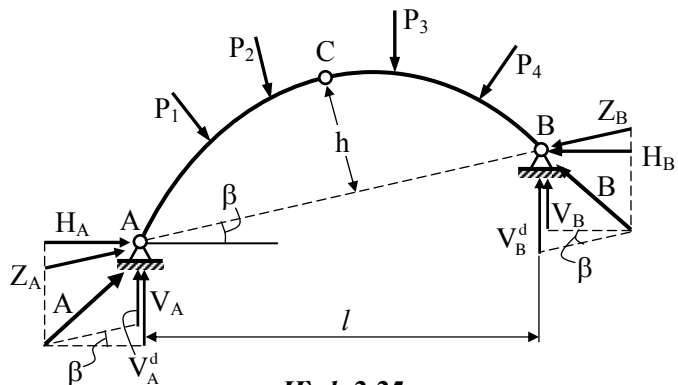
Hệ ba khớp có các loại: Vòm ba khớp, khung ba khớp và dàn ba khớp. Nguyên tắc tính toán các hệ này giống nhau. Dưới đây ta trình bày cách tính phản lực trong vòm ba khớp.

Xét vòm ba khớp cho trên hình 2.25. Gọi A và B là phản lực toàn phần tại gối tựa A và B. Các phản lực này có phương chưa biết nên có thể phân tích thành hai thành phần sau:

Nếu phân tích theo phương AB và phương thẳng đứng, ta có:

$$\vec{A} = \vec{Z}_A + \vec{V}_A^d;$$

$$\vec{B} = \vec{Z}_B + \vec{V}_B^d$$



Hình 2.25

Nếu phân tích theo phương ngang và phương đứng, ta có:

$$\vec{A} = \vec{H}_A + \vec{V}_A;$$

$$\vec{B} = \vec{H}_B + \vec{V}_B$$

Trong đó:

$\vec{V}_A^d, \vec{V}_B^d$: là thành phần phản lực thẳng đứng tại A và B đọc là V_A dầm và V_B dầm, cách tính các thành phần phản lực này giống như phản lực thẳng đứng của dầm đơn giản.

$\vec{Z}_A, \vec{Z}_B$: là thành phần phản lực theo phương đường nối hai khớp A, B gọi là lực vòm

$\vec{V}_A, \vec{V}_B$: là thành phần phản lực thẳng đứng tại A và B.

$\vec{H}_A, \vec{H}_B$: là thành phần lực xô ngang.

Như vậy, muốn xác định các phản lực A, B ta chỉ cần lần lượt xác định các phản lực thành phần của chúng.

1. Xác định các thành phần V_A^d và V_B^d

Để xác định các phản lực V_A^d và V_B^d ta nên dùng các phương trình cân bằng mô men đối với các gối A và B vì lúc này các lực Z_A và Z_B không tham gia vào phương trình cân bằng.

Từ phương trình $\Sigma M_B = 0$, suy ra V_A^d .

Từ phương trình $\Sigma M_A = 0$, suy ra V_B^d .

2. Xác định các thành phần Z_A và Z_B

Các lực này được xác định theo điều kiện mô men uốn tại khớp C bằng không. Nếu khảo sát phần vòm bên trái ta có:

$$M_C = -Z_A \cdot h + M_C^{tr} = 0,$$

Trong đó:

M_C^{tr} - tổng mô men của các lực đặt trên phần vòm bên trái đối với điểm C (không kể lực Z_A);

h - khoảng cách từ khớp C đến đường nối AB.

Từ đó suy ra:
$$Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h}$$

Tương tự, nếu khảo sát phần vòm bên phải, ta có:

$$Z_B = \frac{M_C^{ph}}{h}$$

M_C^{ph} - tổng mô men của các lực đặt trên phần vòm bên phải đối với điểm C (không kể lực Z_B).

Các phần Z_A và Z_B thường chỉ tồn tại trong các hệ ba khớp nên được gọi là các lực vòm.

3. Xác định các thành phần H_A và H_B

Từ Hình 2.25 ta dễ dàng xác định được các thành phần H_A và H_B theo Z_A và Z như sau:

$$H_A = Z_A \cdot \cos\beta; \quad H_B = Z_B \cdot \cos\beta$$

Trong trường hợp hệ chỉ chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng, sau khi viết điều kiện cân bằng hình chiếu của tất cả các lực trên trục nằm ngang, ta có:

$$H_A = H_B = H \quad (H \text{ được gọi là lực xô của vòm})$$

Suy ra:
$$Z_A = Z_B = Z$$

Như vậy, trong trường hợp hệ ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng thì lực vòm và lực xô ở hai gối đều bằng nhau về trị số.

4. Xác định thành phần V_A và V_B

Từ hình 2.25 ta dễ dàng xác định được

$$V_A = V_A^d + Z_A \cdot \sin \beta;$$

$$V_B = V_B^d - Z_B \cdot \sin \beta$$

5. Xác định các phản lực toàn phần $\vec{A}$ và $\vec{B}$

Phản lực toàn phần $\vec{A}$ và $\vec{B}$ là tổng hình học của các thành phần phản lực tương ứng:

$$\vec{A} = \vec{V}_A^d + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A;$$

$$\vec{B} = \vec{V}_B^d + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$$

Do đó, độ lớn của phản lực A và B được xác định theo công thức sau:

$$A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}$$

$$B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}$$

2.5.2. Xác định nội lực

Sau khi biết các thành phần phản lực, ta có thể xác định các thành phần nội lực trong vòm theo phương pháp mặt cắt đã trình bày trong 2.1. Dưới đây ta sẽ thiết lập công thức tính nội lực cho vòm ba khớp khi vòm chỉ chịu tải trọng thẳng đứng.

1. Biểu thức mô men uốn

Giả sử cần thiết lập biểu thức mô men uốn $M_k(z)$ tại tiết diện k có hoành độ z trên vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng như trên hình 2.26.

Dùng mặt cắt qua k và xét cân bằng của một phần vòm, chẳng hạn phần bên trái, ta có:

$$M_k(z) = V_A^d \cdot z - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - Z_A \cdot y_k^*$$

Đối chiếu với dầm đơn giản tương ứng nghĩa là dầm đơn giản có cùng nhịp và chịu tải trọng tác dụng như trên vòm ta thấy đại lượng: $V_A^d \cdot z - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2$ chính là mô men uốn $M_k^d(z)$ trong dầm tại tiết diện k tương ứng có hoành độ z. Do đó có thể viết:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - Z_A \cdot y_k^*$$

Từ hình 2.26 ta thấy $y_k^* = y_k \cos \beta$, mà $H_A = Z_A \cos \beta$, nên biểu thức trên có dạng:

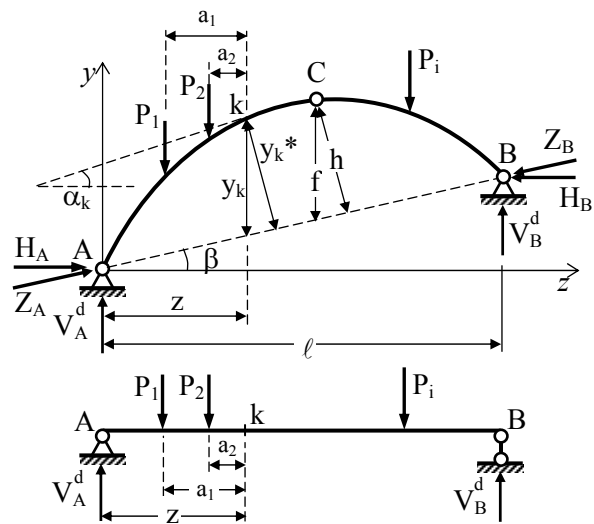
$$M_k(z) = M_k^d(z) - H_A \cdot y_k$$

Vì tải trọng thẳng đứng, nên: $H_A = H_B = H$

Do đó ta có: $M_k(z) = M_k^d(z) - H \cdot y_k$

(2-1)

Trong đó:



Hình 2.26

$M_k(z)$ - mô men uốn tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z trên vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng.

$M_k^d(z)$ - mô men uốn tại tiết diện k tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng tác dụng như trên vòm.

H - lực xô của vòm và bằng $\frac{M_c^d}{f}$

y_k - khoảng cách theo phương thẳng đứng từ tiết diện k đến đường thẳng AB nối hai gối của vòm.

Qua công thức (2-1) ta có thể giải thích được tính ưu việt của kết cấu vòm so với kết cấu dầm như sau: Mô men uốn tại một tiết diện bất kỳ của vòm bằng mô men uốn tương ứng trong dầm có cùng nhịp và có cùng tải trọng trừ đi tích số $H.y_k$. Tích số $H.y_k$ làm cho mô men uốn trong vòm nhỏ hơn mô men uốn trong dầm. Nếu khéo chọn được hình dạng của vòm sao cho tích số $H.y_k$ luôn luôn bằng đúng đại lượng $M_k^d(z)$ thì mô men uốn tại mọi tiết diện của vòm đều bằng không, lúc đó vòm hoàn toàn không chịu uốn mà chỉ chịu nén. Như vậy không những sẽ tiết kiệm được vật liệu mà còn có thể sử dụng được những vật liệu chỉ chịu được nén như gạch, đá để xây vòm.

2. Biểu thức lực cắt

Giả sử cần thiết lập biểu thức lực cắt $Q_k(z)$ tại tiết diện bất kỳ k có hoành độ z trên vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng (Hình 2.26).

Từ định nghĩa về lực cắt, ta có:

$$Q_k(z) = V_A^d \cdot \cos\alpha_k - P_1 \cdot \cos\alpha_k - P_2 \cdot \cos\alpha_k + Z_A \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha_k - Z_A \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha_k$$

$$\text{Với } Z_A = \frac{H_A}{\cos\beta}$$

Ta có thể viết:

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos\alpha_k + \frac{H_A}{\cos\beta} \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha_k - \frac{H_A}{\cos\beta} \cos\beta \cdot \sin\alpha_k$$

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2) \cos\alpha_k + H_A \cdot \tan\beta \cdot \cos\alpha_k - H_A \cdot \sin\alpha_k$$

Đối chiếu với dầm đơn giản có cùng nhịp và có cùng tải trọng ta thấy đại lượng $(V_A^d - P_1 - P_2)$ trong biểu thức trên chính là lực cắt $Q_k^d(z)$ trong dầm tại tiết diện k tương ứng có hoành độ z, cho nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cdot \cos\alpha_k - H_A \cdot (\sin\alpha_k - \tan\beta \cdot \cos\alpha_k)$$

Nhưng do tải trọng tác dụng thẳng đứng $H_A = H_B = H$ nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z) \cos\alpha_k - H(\sin\alpha_k - \tan\beta \cdot \cos\alpha_k) \quad (2-2)$$

Trong đó:

$Q_k(z)$ - lực cắt tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z trong vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng.

$Q_k^d(z)$ - lực cắt tại tiết diện k tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng thẳng đứng tác dụng như trong vòm;

α_k - góc hợp giữa phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k và phương nằm ngang;

β - góc hợp giữa phương nằm ngang với phương AB nối liền hai gối.

H - lực xô của vòm.

3. Biểu thức lực dọc

Tương tự như trên, nếu vẫn quy ước lực dọc kéo là dương thì biểu thức lực dọc $N_k(z)$ tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z của vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng có dạng:

$$N_k(z) = - Q_k^d(z) \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k) \quad (2-3)$$

Trường hợp đặc biệt nếu hai gối cố định A, B có cùng cao độ (nghĩa là nếu góc $\beta = 0$) thì các công thức (2-1), (2-2), (2-3) sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned} M_k(z) &= M_k^d(z) - H \cdot y_k \\ Q_k(z) &= Q_k^d(z) \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k; \\ N_k(z) &= Q_k^d(z) \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k. \end{aligned} \quad (2-4)$$

Ví dụ 2-7: Cho vòm có trục biến thiên theo phương trình $y = \frac{1}{9} \cdot (12 - z)z$.

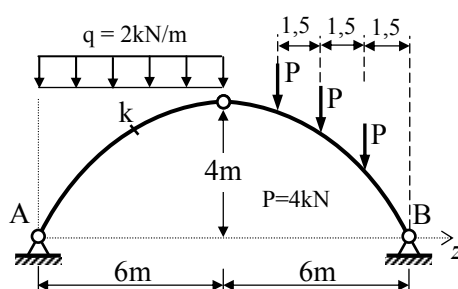
Xác định nội lực tại tiết diện k có hoành độ $z = 3\text{m}$ (Hình 2.27)

Đây là bài toán hệ ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng. Các số liệu của bài toán:

Tương ứng với hoành độ $z_k = 3\text{m}$, ta xác định được tung độ theo công thức:

$$y_k = \frac{1}{9} \cdot (12 - z_k) \cdot z_k = \frac{(12 - 3) \cdot 3}{9} = 3\text{m}$$

Góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k so với đường nằm ngang được các định như sau:



Hình 2.27

$$\operatorname{tg} \alpha_k = y_k' = \frac{1}{9} \cdot (12 - z_k) = \frac{1}{9} \cdot (12 - 2.3) = \frac{2}{3}$$

Từ đó suy ra: $\sin \alpha_k = \frac{\operatorname{tg} \alpha_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 0,555;$

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 0,832.$$

Trong trường hợp này hai gối A, B có cùng cao độ nên góc $\beta = 0$, do đó ta có

$$V_A^d = V_A; \quad V_B^d = V_B; \quad Z_A = H_A; \quad Z_B = H_B.$$

Từ phương trình cân bằng toàn hệ ta tính được các thành phần phản lực:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A^d = V_A = 12 \text{ kN}.$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B^d = V_B = 12 \text{ kN}.$$

$$Z_A = Z_B = Z = H_A = H_B = H$$

$$\text{Với } H = \frac{M_C^{\text{tr}}}{h} = (12.6 - 2.6.3)/4 = 9 \text{ kN}.$$

Vì tải trọng tác dụng thẳng đứng và hai gối cố định có cùng cao độ ($\beta = 0$) nên ta có thể dùng công thức (2-4) để tính các nội lực.

$$M_k = M_k^d - H.y_k = 12.3 - 2.(32/2) - 9.3 = 0$$

$$Q_k = Q_k^d \cos \alpha_k - H.\sin \alpha_k = (12 - 2.3).0,832 - 9.0,555 = 0$$

$$N_k = - Q_k^d .\sin \alpha_k - H.\cos \alpha_k = -(12 - 2.3).0,555 - 9.0,832 = -10,81 \text{ kN}.$$

Ví dụ 2-8: Vẽ biểu đồ nội lực cho khung ba khớp như hình 2.28.

Giải:

a) *Xác định phản lực.* Xét cân bằng toàn hệ và xét cân bằng phần bên trái của khớp C ta lập được 4 phương trình để xác định 4 thành phần phản lực trong khung:

$$\Sigma M_A = V_B.6 + 10.4.2 + 20 - 40.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = V_A.6 - 10.4.4 + 20 - 40.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 50 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^T = H_A.4 - 50.4 + 10.4.2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = H_B + 30 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 10 \text{ kN}$$

b) *Vẽ các biểu đồ nội lực:* Vì đây là hệ khung nên ta phải vẽ biểu đồ mô men uốn, lực cắt và lực dọc. Hệ có 4 đoạn thanh là AD, DC, CE, EB. Kết quả tính toán nội lực:

* Đoạn AD: Trong đoạn này không có tải trọng tác dụng trong thanh:

- Biểu đồ lực cắt và lực dọc có dạng song song với đường chuẩn.

$$N_{AD} = N_{DA} = - 50\text{kN (nén)}$$

$$Q_{AD} = Q_{DA} = - 30\text{kN}$$

- Biểu đồ mô men uốn có dạng đường thẳng

$$M_{AD} = 0;$$

$$M_{DA} = 30.4 = 120\text{kNm (căng trái)}$$

* Đoạn BE: Tương tự đoạn AD:

$$N_{BE} = N_{EB} = + 10\text{kN (kéo)}$$

$$Q_{BE} = Q_{EB} = + 10\text{kN}$$

$$M_{BE} = 0;$$

$$M_{EB} = 10.4 = 40\text{kNm (căng trái)}$$

* Đoạn CE: Tương tự đoạn AD:

$$N_{CE} = N_{EC} = - 30\text{kN (nén)}$$

$$Q_{CE} = Q_{EC} = + 10\text{kN}$$

$$M_{CE} = 0;$$

$$M_{EC} = 20\text{kNm (căng dưới)}$$

* Đoạn CD: Trong đoạn này chịu tải phân bố đều q vuông góc với trục thanh:

- Biểu đồ lực dọc có dạng song song với đường chuẩn:

$$N_{CD} = N_{DC} = - 30\text{kN (nén)}$$

- Biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất:

$$Q_{DC} = 50\text{kN}; \quad Q_{CD} = - 10\text{kN}$$

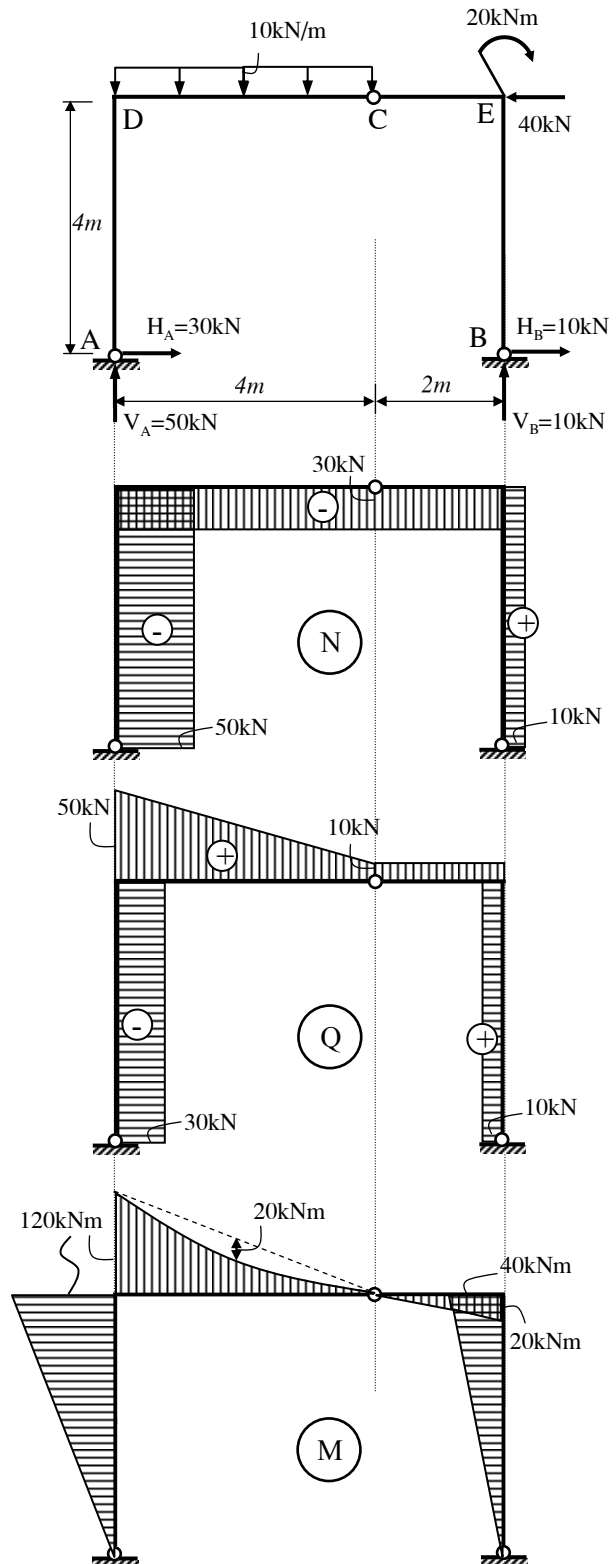
- Biểu đồ mô men uốn có dạng bậc hai:

$$M_{DC} = 120\text{kNm (căng trên)}$$

$$M_{CD} = 0$$

Tung độ treo:

$$\eta_M = \frac{q\ell^2}{8} = \frac{10.4^2}{8} = 20 \text{ (võng xuống)}$$



Hình 2.28

3.5.3. Khái niệm về trục hợp lý của vòm ba khớp

Ở trên đã nhận xét, nếu khéo chọn hình dạng của trục vòm thì có thể làm cho mô men uốn trong vòm ba khớp nhỏ đi thậm chí hoàn toàn bằng không tại mọi tiết diện, như thế sẽ tiết kiệm được vật liệu. Do đó nảy sinh vấn đề: nên chọn trục vòm sao cho hợp lý và trục vòm thế nào là hợp lý?

1. Định nghĩa trục hợp lý của vòm

Về mặt kết cấu, ta gọi trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho thể tích vòm có giá trị nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo điều kiện bền.

Nói chung, dọc theo trục vòm, diện tích tiết diện F của vòm là hàm của các nội lực M , N , Q và khả năng chịu lực $[\sigma]$ của vật liệu dùng làm vòm.

$$F = F(M, N, Q, [\sigma])$$

Do đó, thể tích V của vòm có chiều dài S sẽ là:

$$V = \int_0^S F(M, N, Q, [\sigma]) ds$$

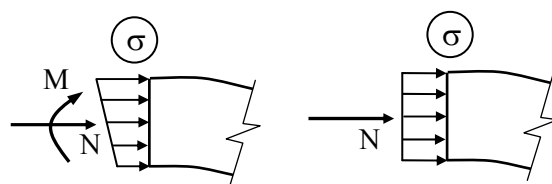
Thường thì các nội lực M , N , Q thay đổi khi trục vòm biến đổi cho nên bài toán xác định trục vòm hợp lý ứng với điều kiện $V_{\min}$ là một bài toán phức tạp.

Ta có thể dựa vào những nhận xét trong thực tế thiết kế dưới đây để đơn giản hóa bài toán: với những vòm có kích thước thông thường, khi biến đổi trục mà vẫn giữ nguyên nhịp và mũi tên vông thì chiều dài trục vòm và lực dọc biến đổi ít, còn mô men uốn và lực cắt biến đổi nhiều. Với những nhận xét đó, ta có thể xem gần đúng là thể tích vòm do mô men uốn và lực cắt quyết định. Do đó, nói một cách gần đúng, thể tích của vòm nhỏ nhất khi mô men uốn trong vòm bằng không và lực cắt là đạo hàm của mô men uốn cũng bằng không.

Có thể minh họa nhận xét gần đúng đó bằng cách so sánh biểu đồ ứng suất pháp trên một tiết diện vòm trong trường hợp M và Q khác không, với biểu đồ ứng suất pháp trong trường hợp M và Q bằng không (Hình 2.29).

Khi M và Q bằng không, ứng suất pháp phân bố đều, vật liệu ở mọi điểm trên tiết diện đều được sử dụng như nhau, nên có thể phát huy hết khả năng của vật liệu.

Dựa vào lý luận gần đúng như trên ta có thể đi đến định nghĩa về trục hợp lý của vòm như sau:



Hình 2.29

Trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho mô men uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không (do đó lực cắt cũng bằng không).

Trong trường hợp vòm chịu tải trọng di động thì trục hợp lý cũng thay đổi tùy theo vị trí của tải trọng. Nếu tải trọng bất động lớn hơn rất nhiều so với tải trọng di động thì khi chọn trục hợp lý có thể chỉ kể tới ảnh hưởng của tải trọng bất động mà bỏ qua ảnh hưởng của tải trọng di động.

Khi xác định trục hợp lý của vòm ba khớp ta phải xét đến tải trọng tác dụng trên vòm trong đó có trọng lượng bản thân vòm. Thông thường thì khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm cũng thay đổi theo. Lúc đó ta gặp trường hợp tải trọng thay đổi phụ thuộc dạng của vòm. Đôi khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm thay đổi không đáng kể, lúc đó ta gặp trường hợp tải trọng không phụ thuộc dạng của vòm. Thực ra trọng lượng bản thân của vòm là một đại lượng phụ thuộc vào hình dạng của vòm. Tuy nhiên, khi tính gần đúng ta có thể ước đoán trọng lượng bản thân vòm, lúc đó tải trọng tác dụng trên vòm (gồm cả trọng lượng bản thân vòm) được xem là độc lập với hình dạng vòm.

Bây giờ ta tìm trục hợp lý của vòm ba khớp trong một vài trường hợp thường gặp trong thực tế.

2. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc dạng trục vòm

Trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm, biểu thức mô men uốn trong dầm tương ứng cũng không phụ thuộc dạng vòm, do đó ta có thể dùng công thức (2-1) để xác định trục hợp lý của vòm:

$$y(z) = \frac{M^d(z)}{H} \quad (2-5)$$

Ta thấy lực xô H không phụ thuộc z nên trục hợp lý của vòm có dạng biểu đồ mô men uốn trong dầm tương ứng (có nhịp và tải trọng như của vòm) với tỷ lệ các tung độ nhỏ hơn H lần.

Ví dụ 2-9: Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài nhịp với cường độ q , cho biết vòm có chiều dài là l , mũi tên f , khớp C ở chính giữa nhịp.

Biểu thức mô men uốn trong dầm chịu tải trọng phân bố đều:

$$M^d(z) = \frac{q}{2} z(\ell - z)$$

Tương tự như ở ví dụ 2-8, ta xác định được: $H = \frac{M_C^u}{f} = \frac{q\ell^2}{8f}$

Do đó, theo (2-5) ta có: $y(z) = \frac{q}{2} z(\ell - z) \frac{8f}{q\ell^2} = \frac{4f}{\ell^2} z(\ell - z)$

Như vậy, trong trường hợp này trục hợp lý có dạng đường parabol bậc hai.

3. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp này, không thể xuất phát từ biểu thức (2-5) để xác định trục hợp lý được vì bản thân hàm $M^d(z)$ cũng phụ thuộc tải trọng. Nếu lấy vi phân hai lần biểu thức (2-5) ta sẽ được phương trình vi phân trục hợp lý biểu thị trực tiếp theo hàm tải trọng q .

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{H} \quad (2-6)$$

Trong đó hàm tải trọng q không những phụ thuộc biến số z mà còn phụ thuộc hàm y cần tìm.

Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân (2-6) bằng phương pháp giải tích chính xác, còn nói chung thì cách giải sẽ gặp nhiều khó khăn và chỉ có thể giải quyết bằng các phương pháp đúng dần.

Dưới đây là một ví dụ có thể giải được bằng phương pháp giải tích.

Ví dụ 2-10: Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp đối xứng cong tròn trụ, chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm (chẳng hạn vật liệu xây hoặc đất đắp bên trên vòm) theo quy luật sau (Hình 2.30)

$$q(z) = q_0 + \gamma y.$$

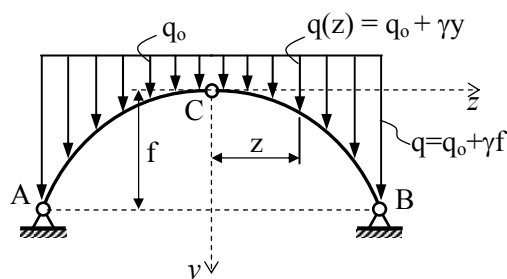
Trong đó:

$q(z)$ - cường độ của tải trọng phân bố tại tiết diện bất kỳ.

q_0 - cường độ của tải trọng tại đỉnh C của vòm.

γ - hệ số tỷ lệ.

y - tung độ của tiết diện bất kỳ trong vòm ứng với hệ trục tọa độ đã chọn;



Hình 2.30

Phương trình vi phân của trục hợp lý trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_0 + \gamma y}{H}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng quen biết như sau:

$$y = A.shkz + B.chkz - \frac{q_0}{\gamma}, \quad \text{với } k = \sqrt{\frac{\gamma}{H}}$$

A, B là các hằng số tích phân được xác định theo các điều kiện biên của bài toán:

* Tại đỉnh C của vòm đối xứng cong tròn trụ, góc nghiêng của tiếp tuyến bằng không, nghĩa là khi $z = 0$ thì $dy/dz = 0$.

* Đỉnh C là gốc tọa độ cho nên tại đó tung độ y của vòm bằng không, nghĩa là khi $z=0$ thì $y = 0$.

Từ các điều kiện này ta được:

Khi $z = 0$: $dy/dz = kA.chkz + kB.chkz = kA.ch0 + kB.sh0 = 0$, nên $kA = 0, \Rightarrow A = 0$.

Khi $z = 0$: $y = A.shkz + B.chkz - \frac{q_0}{\gamma} = B - \frac{q_0}{\gamma} = 0$, suy ra $B = \frac{q_0}{\gamma}$

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có dạng $y = \frac{q_0}{\gamma} (chkz - 1)$.

Đường cong của phương trình này chính là đường dây xích catenôit. Để xác định hệ số k , ta dùng điều kiện:

$$\text{Khi } z = \pm \ell/2: \quad y = f = \frac{q_0}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{\ell} \arg \operatorname{ch} \left(\frac{f \cdot \gamma}{q_0} + 1 \right)$$

$$\text{Để cho tiện ta gọi: } m = \frac{q_0 + \gamma f}{q_0} \Rightarrow \frac{q_0}{\gamma} = \frac{f}{m - 1}$$

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$y = \frac{f}{m - 1} (chkz - 1)$$

Còn hệ số k được xác định theo công thức sau: $k = \frac{2}{\ell} \operatorname{argch} m$

Nếu chú ý rằng $\operatorname{argch} m = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$ thì ta có thể xác định k theo công thức:

$$k = \frac{2}{\ell} \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$$

Nếu cho biết trị số m thì ta có thể xác định được hệ số k và tiếp đó tìm được trục hợp lý của vòm ba khớp.

4. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng vuông góc với trục vòm

Các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng hoặc chất khí thường chịu áp lực vuông góc với trục. Để tìm trục hợp lý của vòm, trước tiên ta cần khảo sát cân bằng của một đoạn vô cùng bé của trục hợp lý của vòm (Hình 2.31).

Lấy tổng mô men của các lực đối với tâm cong O của phân tố

$$\Sigma M_O = N\rho - (N + dN)\rho = 0$$

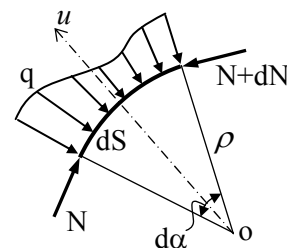
Từ đó ta có $dN = 0$ như vậy $N = \text{const}$.

Viết phương trình hình chiếu theo phương u :

$$\Sigma u = N \sin \frac{d\alpha}{2} + N \sin \frac{d\alpha}{2} - q ds = 0$$

Góc $d\alpha$ vô cùng bé nên có thể xem $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$.

Ta được: $N \cdot d\alpha - q \cdot ds = 0$



Hình 2.31

Nhưng $ds = \rho d\alpha$ nên sau khi thay vào điều kiện này, ta được:

$$\rho = \frac{N}{q} \quad (2-7)$$

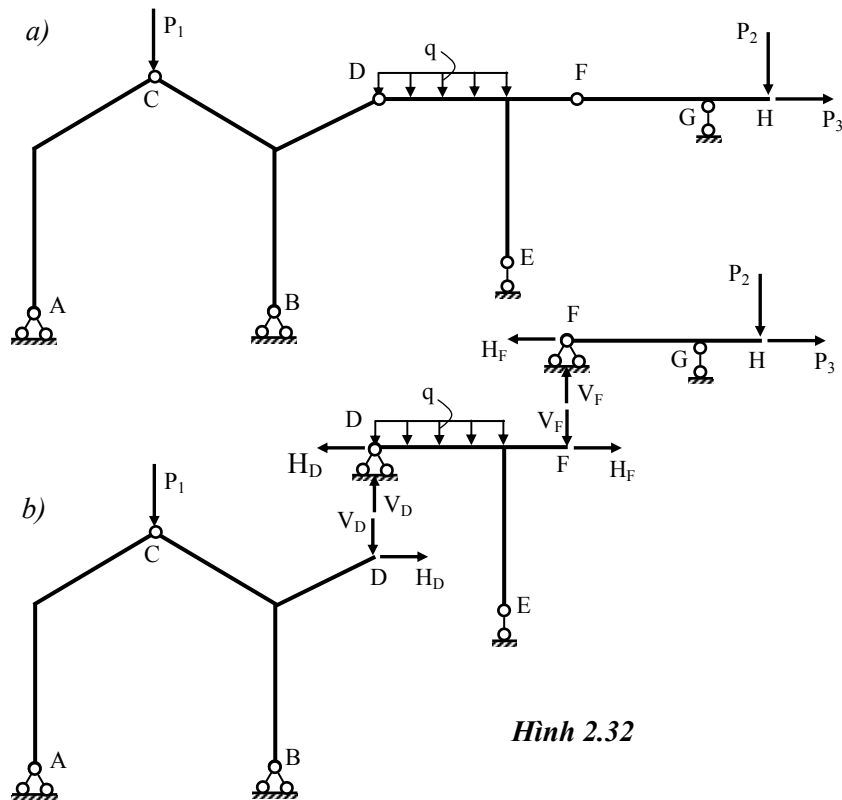
Vì $N = \text{const}$ nên bán kính cong ρ của vòm tỷ lệ nghịch với cường độ của tải trọng phân bố q .

Biểu thức (2-7) là phương trình vi phân của trục hợp lý của vòm chịu tải trọng vuông góc với trục vòm. Giải phương trình này cho trường hợp tải trọng q phân bố bất kỳ rất phức tạp.

Trường hợp đặc biệt, khi $q = \text{const}$ (tải trọng phân bố đều) ta có $\rho = \text{const}$. Như vậy, trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với trục của vòm là đường tròn.

2.6. CÁCH TÍNH HỆ GHÉP TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG

Ta sẽ tìm hiểu hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động thông qua hệ vẽ trên hình 2.32. Thứ tự thực hiện:



Hình 2.32

+ Phân tích cấu tạo của hệ ghép ta thấy:

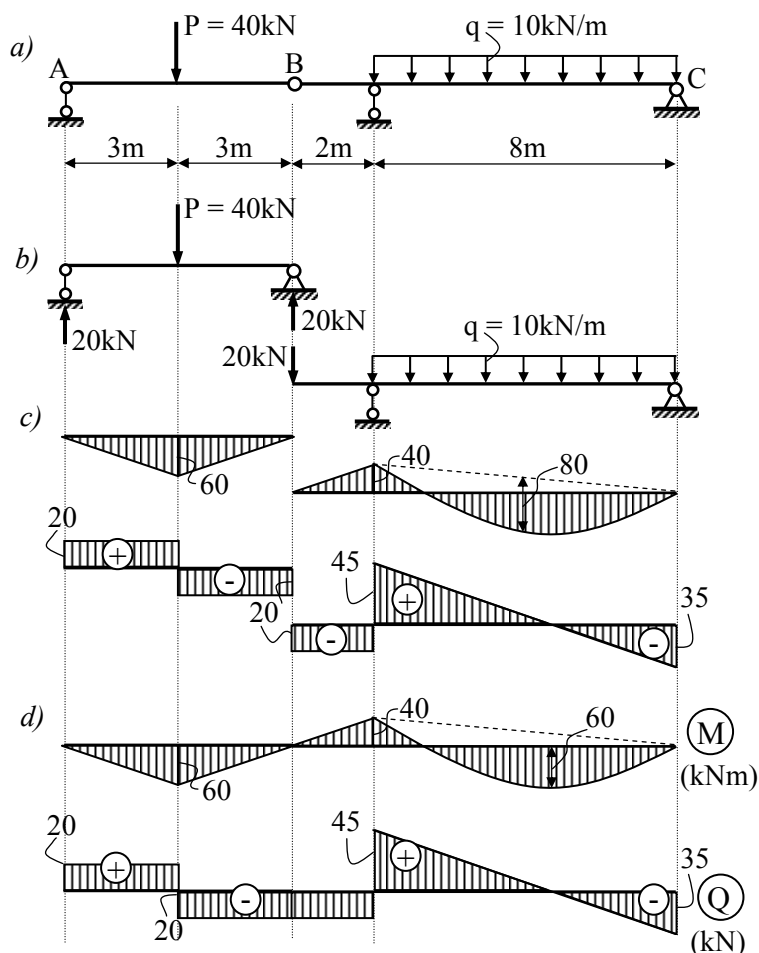
- Khung ba khớp ABCD là hệ khung chính của khung DEF

- Khung DEF là khung phụ của ABCD và là khung chính của dầm FGH.
- Dầm FGH là dầm phụ của khung DEF.
- + Căn cứ vào tính chất chịu lực của hệ chính và hệ phụ đã nêu trong 2.1.2, đưa hệ ghép về sơ đồ tính tách biệt từng hệ riêng biệt như trên *hình 2.32b*.
- + Thực hiện tính toán theo thứ tự: tính hệ phụ trước rồi chuyển sang tính hệ chính.

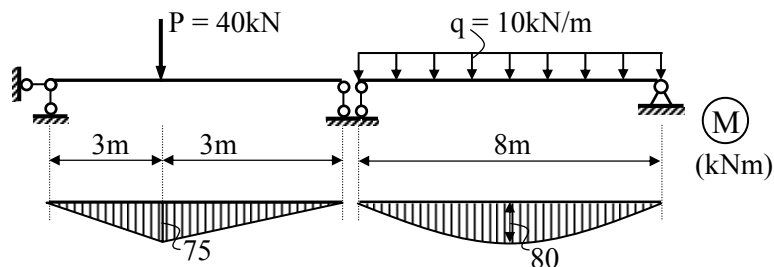
Đối với hệ trên *hình 2.32*, trước hết cần tính hệ phụ FGH chịu tác dụng của các lực P_2, P_3 ; cách xác định phản lực V_F, H_F như đã biết ở các phần trên. Tiếp đó xét hệ EDF, ngoài tải trọng tác dụng lên hệ đó (tải trọng phân bố q) còn phải kể đến lực truyền từ hệ phụ FGH xuống. Những áp lực này có giá trị bằng V_F và H_F đã biết nhưng chiều ngược lại. Thực hiện tính toán hệ DEF với các lực đã biết và xác định được các phản lực V_D, H_D tại khớp D. Sau cùng tính hệ chính ACBD chịu tải trọng tác dụng lên hệ đó (lực P_1) và các áp lực đặt tại D truyền từ DEF xuống. Những áp lực này có giá trị bằng V_D và H_D như đã biết nhưng với chiều ngược lại.

Ví dụ 2-11: Vẽ biểu đồ nội lực trong hệ dầm ghép cho trên *hình 2.33*.

Các kết quả tính toán được trình bày trên *hình 2.33b,c*.



Hình 2.33



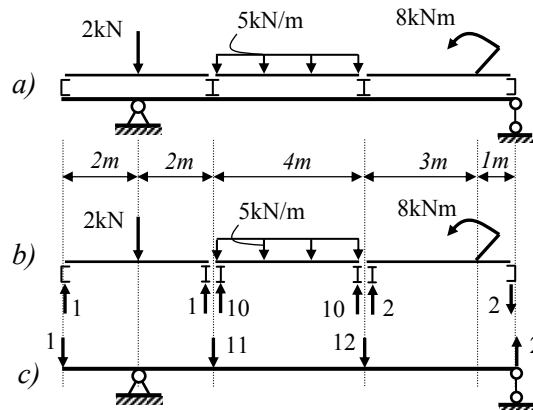
Hình 2.34

Chú thích: So sánh biểu đồ mô men uốn trên *hình 2.33d* của dầm ghép hai nhịp với biểu đồ mô men uốn trên *hình 2.34* của hai dầm đơn giản có cùng nhịp chịu tải trọng tương đương, ta thấy mô men uốn lớn nhất trong dầm ghép là 60kNm, còn mô men uốn lớn nhất trong dầm đơn giản là 80kNm. Điều đó cho ta thấy dùng dầm ghép có thể tiết kiệm vật liệu hơn so với dùng dầm đơn giản có cùng nhịp và tải trọng.

2.7. TÍNH HỆ CỐ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

Nhiệm vụ chủ yếu khi tính hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động là xác định nội lực (hoặc vẽ các biểu đồ nội lực) trong kết cấu chịu lực chính. Để vẽ được biểu đồ nội lực trong kết cấu chịu lực chính (thường là các dầm dọc chính) ta phải truyền tải trọng từ các dầm dọc phụ xuống dầm dọc chính.

Xét hệ có hệ thống truyền lực như *hình 2.35a*. Ta thấy các dầm dọc phụ làm việc như các dầm đơn giản kê trên các gối tựa hay các mắt truyền lực. Dưới tác dụng của tải trọng, trong dầm dọc phụ sẽ phát sinh phản lực và nội lực.



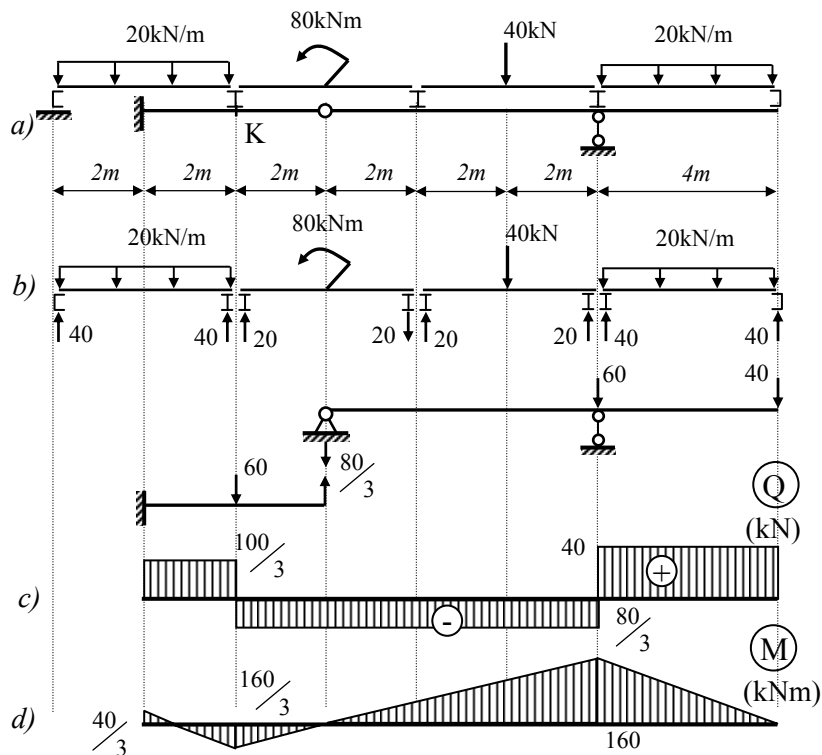
Hình 2.35

Để tính kết cấu chính, ta thay thế tác dụng của tải trọng trên dầm dọc phụ bằng những áp lực của nó xuống kết cấu chịu lực chính tại vị trí phản lực của dầm dọc phụ nhưng ngược chiều. Sơ đồ truyền tải trọng từ dầm dọc phụ xuống kết cấu chịu lực chính như trên *hình 2.35b,c*. Ta thấy các lực tác động trên kết cấu chính của hệ có hệ thống truyền lực là các lực tập trung có vị trí đặt cố định tại các mắt truyền lực.

Ví dụ 2-12: Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm trên *hình 2.36a*.

Giải: Thứ tự tiến hành:

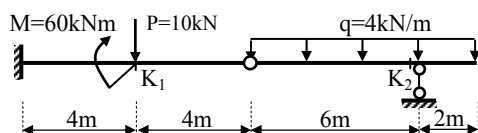
1. Phân tích sơ đồ cấu tạo và truyền lực như *hình 2.36b*.
2. Vẽ biểu đồ nội lực: Biểu đồ lực cắt trên *hình 2.36c*. Biểu đồ mô men trên *hình 2.36d*.



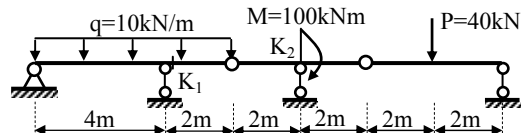
Hình 2.36

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

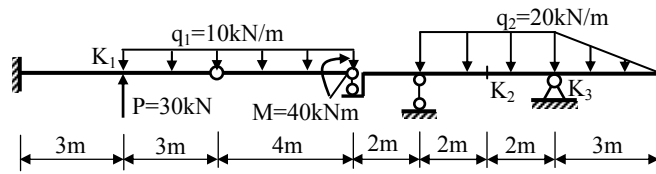
1. Vẽ biểu đồ nội lực các kết cấu cho trên hình 2.37 đến hình 2.40. Dựa vào biểu đồ nội lực, cho biết giá trị nội lực tại các tiết diện K_1 , K_2 , K_3 .
2. Vẽ biểu đồ nội lực cho các khung hình 2.41 đến hình 2.46.
3. Tìm vị trí khớp C và D để sao cho mô men uốn tại tiết diện trên hai gối tựa trung gian bằng nhau và bằng M_E (Hình 2.47).
4. Tính phản lực và nội lực tại tiết diện K của vòm ba khớp cho trên các hình 2.48 đến hình 2.50.
5. Tính nội lực cho các thanh đánh dấu của dàn cho trên các hình 2.51 đến hình 2.58.
6. Vẽ giản đồ Mác xoen - Crêmôna cho các dàn trên hình 2.51, hình 2.56 và hình 2.58 và xác định nội lực trong các thanh có đánh dấu.
7. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ liên hợp tĩnh định trên hình 2.59.



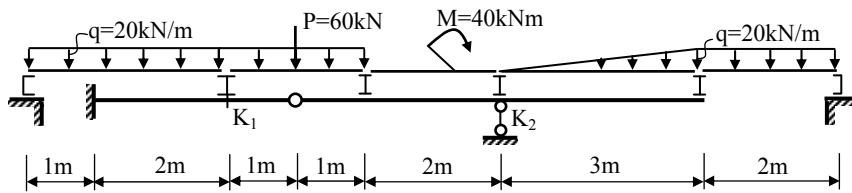
Hình 2.37



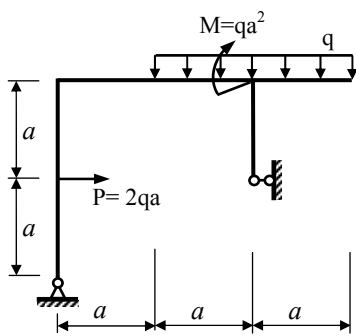
Hình 2.38



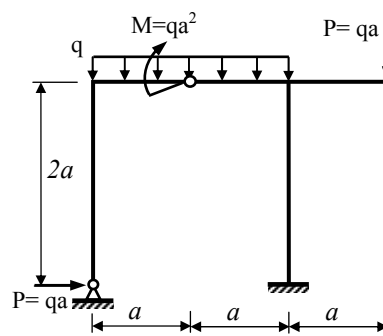
Hình 2.39



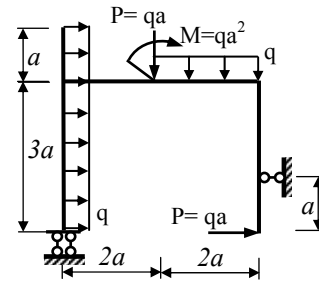
Hình 2.40



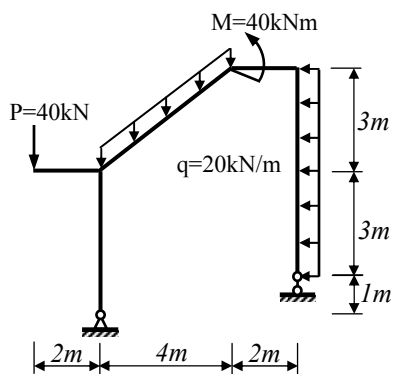
Hình 2.41



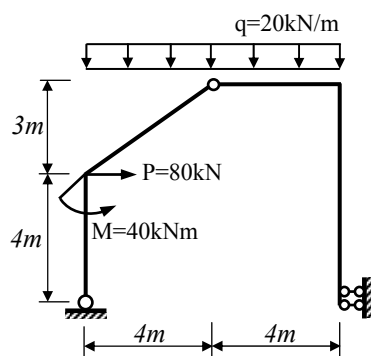
Hình 2.42



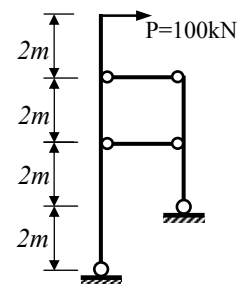
Hình 2.43



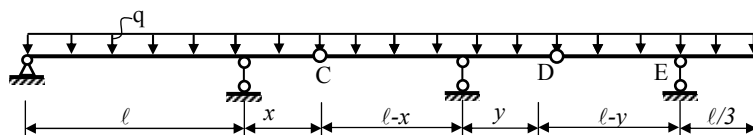
Hình 2.44



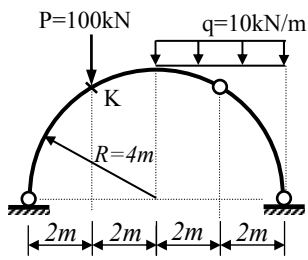
Hình 2.45



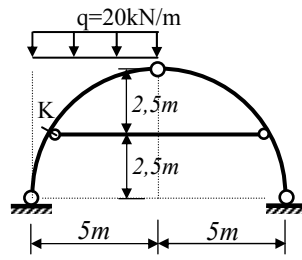
Hình 2.46



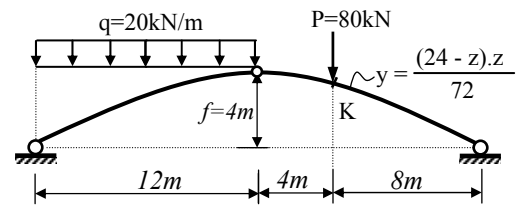
Hình 2.47



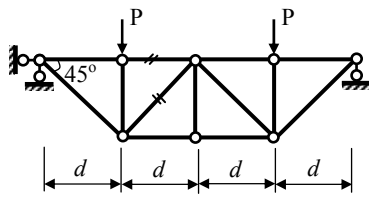
Hình 2.48



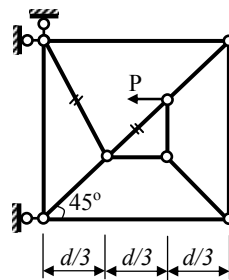
Hình 2.49



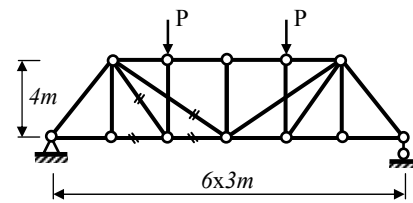
Hình 2.50



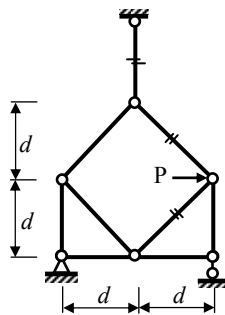
Hình 2.51



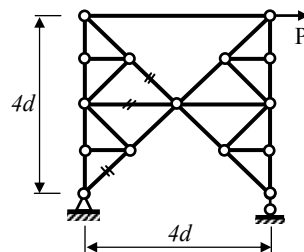
Hình 2.52



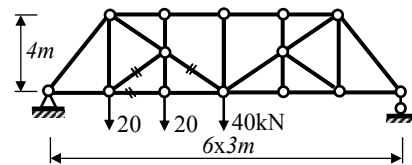
Hình 2.53



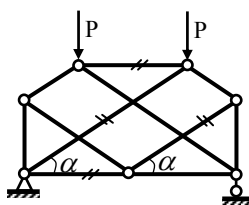
Hình 2.54



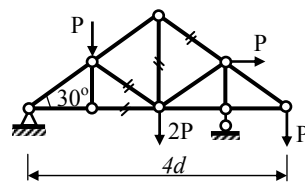
Hình 2.55



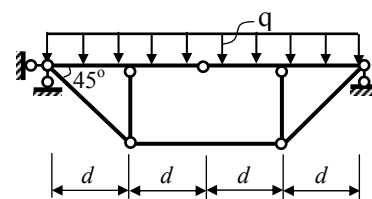
Hình 2.56



Hình 2.57



Hình 2.58



Hình 2.59

CHƯƠNG 3

CÁCH XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC, NỘI LỰC TRONG HỆ THANH PHẪNG TÍNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

3.1. KHÁI NIỆM VỀ TẢI TRỌNG DI ĐỘNG VÀ ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

3.1.1. Khái niệm về tải trọng di động

Tải trọng tác dụng vào công trình, ngoài tải trọng có vị trí cố định (hay bất động), còn có tải trọng có vị trí thay đổi, mà ta gọi là tải trọng di động như đoàn xe lửa, đoàn ô tô, đoàn người đi trên cầu v.v...

Dưới tác dụng của tải trọng di động, mọi đại lượng nghiên cứu (như phản lực, nội lực, chuyển vị v.v...) đều thay đổi theo vị trí của tải trọng. Do đó, khi tính toán công trình chịu tải trọng di động ta phải giải quyết hai vấn đề cơ bản sau:

+ Xác định vị trí của đoàn tải trọng di động, mà khi đoàn tải trọng di động tới vị trí đó, thì đại lượng nghiên cứu có giá trị lớn nhất. Vị trí như vậy gọi là vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng di động đối với đại lượng nghiên cứu.

+ Xác định giá trị của đại lượng nghiên cứu (phản lực, nội lực, chuyển vị v.v...) khi biết vị trí của hệ lực di động.

Trong tính toán ta giả thiết rằng đoàn tải trọng di động trên công trình chậm đến mức có thể coi là tác dụng tĩnh. Ta chỉ xét tải trọng di động có vị trí thay đổi nhưng hướng và trị số không đổi, khoảng cách giữa các tải trọng trong đoàn tải trọng di động là không thay đổi.

Có nhiều phương pháp để giải quyết hai vấn đề trên, song với các trường hợp có thể áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng thì phương pháp đường ảnh hưởng là đơn giản hơn cả.

Nội dung cơ bản của phương pháp đường ảnh hưởng là: để tính một đại lượng nghiên cứu nào đó do nhiều lực tác dụng gây ra (cố định hay di động), trước hết ta tính đại lượng đó do một lực bằng đơn vị gây ra, rồi áp dụng nguyên lý cộng tác dụng.

3.1.2. Định nghĩa đường ảnh hưởng: *Đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S xuất hiện tại một vị trí K xác định trên công trình (viết tắt là $\text{đah}S_K$, ví dụ như phản lực liên kết, nội lực, chuyển vị tại một tiết diện K nào đó) là đồ thị biểu diễn luật biến thiên của S_K do một lực tập trung bằng đơn vị có phương và chiều không đổi di động trên công trình gây ra.*

3.1.3. Nguyên tắc chung để vẽ đường ảnh hưởng:

Từ định nghĩa trên, khi vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S_K ta thực hiện theo thứ tự sau:

1. Lập hệ trục tọa độ rồi cho lực $P = 1$ di động tới vị trí có tọa độ z nào đó.

2. Coi lực $P = 1$ đặt cố định tại tọa độ z , tính S_K là hàm của tọa độ z : $S_K = S_K(z)$.

3. Cho z biến thiên (tức là $P = 1$ di động trên công trình), vẽ đồ thị của hàm $S_K = S_K(z)$, ta được $\text{đah}S_K$ cần tìm.

Khi vẽ đường ảnh hưởng ta quy ước:

- Chọn đường chuẩn vuông góc với phương của lực di động (hoặc song song với trục của thanh)
- Dựng các tung độ vuông góc với đường chuẩn
- Đánh dấu vào đường ảnh hưởng

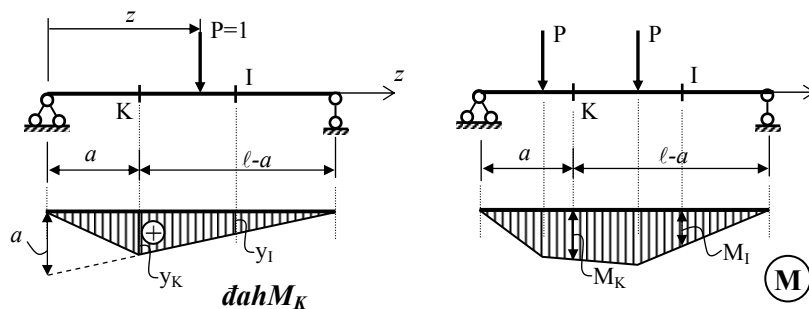
Chú ý: Nếu đại lượng nghiên cứu S_K không phải là một hàm duy nhất liên tục theo tọa độ z trên toàn bộ công trình, thì $\text{đah}S_K$ bao gồm nhiều đoạn với các quy luật biến thiên khác nhau, ta cần phải xác định được các quy luật trong từng đoạn tương ứng với vị trí của lực $P = 1$ khi di động.

3.1.4. Phân biệt đường ảnh hưởng với biểu đồ nội lực

Xét $\text{đah}M_K$ và biểu đồ nội lực mô men uốn của dầm đơn giản cho trên hình 3.1.

+ $\text{đah}M_K$ do lực $P = 1$ di động gây ra còn biểu đồ mô men uốn M do toàn bộ tải trọng tác dụng tĩnh trên dầm gây ra.

+ Xét tung độ tại tiết diện I ta có: y_I là giá trị mô men tại tiết diện K do $P = 1$ đặt tại tiết diện I ($P = 1$ di động đến vị trí I) gây ra, và mọi tung độ trên $\text{đah}M_K$ đều cho giá trị mô men uốn tại tiết diện K , các tung độ khác nhau tương ứng với các vị trí khác nhau của lực $P = 1$. Còn M_I là giá trị mô men tại tiết diện I do toàn bộ tải tác dụng tĩnh lên dầm gây ra và, mỗi tung độ của biểu đồ nội lực cho ta giá trị nội lực tại mặt cắt tương ứng.



Hình 3.1

+ Thứ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng: Khi vẽ $\text{đah}S_K$ ta thiết lập phương trình $\text{đah}S_K$ theo tải trọng tập trung $P = 1$ là một lực không thứ nguyên. Thực tế tải trọng là đại lượng có thứ nguyên, do đó ta có:

$$\text{Thứ nguyên của tung độ } \text{đah}S_K = \frac{\text{Thứ nguyên của Đại lượng } S}{\text{Thứ nguyên của lực}}$$

Như vậy, đường ảnh hưởng của phản lực, của lực cắt và lực dọc là hư số; còn của phản lực mô men và mômen uốn là chiều dài.

3.2. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG PHẢN LỰC VÀ NỘI LỰC TRONG MỘT SỐ KẾT CẤU THƯỜNG GẶP

3.2.1. Đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản

Ở đây ta áp dụng nguyên tắc chung đã trình bày ở trên để vẽ các đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản, các kết quả này sẽ được sử dụng để vẽ nhanh các đường ảnh hưởng trong một số kết cấu phức tạp hơn như: hệ dầm ghép, hệ có hệ thống truyền lực...

1. Đường ảnh hưởng phản lực

Xét dầm có đầu thừa như *hình 3.2a*. Gốc tọa độ chọn tại gối tựa A, lực $P = 1$ đặt cách gối một khoảng là z . Khi $P = 1$ đặt trên dầm thì hoành độ z của lực biến thiên trong khoảng $(-l_1 \leq z \leq l + l_2)$.

Dùng các phương trình cân bằng tĩnh học ta xác định được hàm biểu diễn qui luật biến đổi của phản lực tại các gối tựa:

$$\Sigma M_B = R_A \cdot \ell - 1 \cdot (\ell - z) = 0 \quad \text{ta có:} \quad \text{đường ảnh hưởng } R_A = \frac{\ell - z}{\ell}$$

$$\Sigma M_A = R_B \cdot \ell - 1 \cdot z = 0 \quad \text{ta có:} \quad \text{đường ảnh hưởng } R_B = \frac{z}{\ell}$$

Các biểu thức trên chứng tỏ phản lực R_A và R_B là hàm bậc nhất theo biến số z . Khi z thay đổi trong khoảng $(-l_1, \ell + l_2)$ thì đường ảnh hưởng R_A và R_B là đường thẳng xác định qua hai điểm:

$$\text{Khi } z = 0 \quad \text{ta có:} \quad R_A = 1; R_B = 0;$$

$$\text{Khi } z = \ell \quad \text{ta có:} \quad R_A = 0; R_B = 1;$$

Các đường ảnh hưởng phản lực R_A và R_B vẽ trên *hình 3.2b,c* với quy ước dấu của phản lực hướng lên trên là dương.

2. Đường ảnh hưởng nội lực tại một tiết diện bất kỳ trên dầm

Khi $P = 1$ vuông góc với trục dầm, nội lực trong dầm chỉ có mômen uốn và lực cắt.

Tùy thuộc mặt cắt K nằm ở giữa hai gối tựa hay ở đầu thừa mà cách vẽ nhanh và dạng đường ảnh hưởng có khác nhau. Mặt khác, khi $P = 1$ di động trên phần dầm bên trái và bên phải tiết diện K , nội lực tại tiết diện K biến đổi theo hai qui luật khác nhau. Bởi vậy, để vẽ được các đường ảnh hưởng nội lực ta phải phân biệt xác định hai hàm số đó.

a) Tiết diện trong nhịp:

Ta vẽ $\text{đường ảnh hưởng } M_K$ và $\text{đường ảnh hưởng } Q_K$ tại tiết diện K nằm trong khoảng giữa hai gối tựa (trong nhịp của dầm).

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện K tức là $-l_1 \leq z \leq a$, ta xét cân bằng của phần dầm bên phải tiết diện K (vì có ít lực hơn), kết quả:

$$\text{đường ảnh hưởng } M_K = \frac{z}{\ell} (\ell - a); \quad \text{đường ảnh hưởng } Q_K = -\frac{z}{\ell}$$

Trên Hình 3.2d,e ta vẽ hai đường thẳng biểu thị hai phương trình trên ứng với vị trí của $P = 1$ di động bên trái tiết diện K, gọi là những đường trái. Mỗi đường thẳng đó xác định bằng hai điểm:

Khi $z = 0$

ta có: $M_K = 0$; $Q_K = 0$

Khi $z = \ell$

ta có: $M_K = \ell - a$; $Q_K = -1$

+ Khi $P = 1$ di động trên phần bên phải tiết diện K tức là $a \leq z \leq \ell + \ell_2$. Xét sự cân bằng của phần dầm bên trái tiết diện K, kết quả:

$$\partial M_K = \frac{\ell - z}{\ell} \cdot a;$$

$$\partial Q_K = \frac{\ell - z}{\ell}$$

Trên hình 3.2d,e ta vẽ hai đường thẳng biểu thị hai phương trình trên ứng với vị trí của tải trọng $P = 1$ di động bên phải tiết diện K, gọi là những đường phải. Mỗi đường thẳng đó xác định bằng hai điểm:

Khi $z = 0$

ta có $M_K = +a$; $Q_K = +1$

Khi $z = \ell$

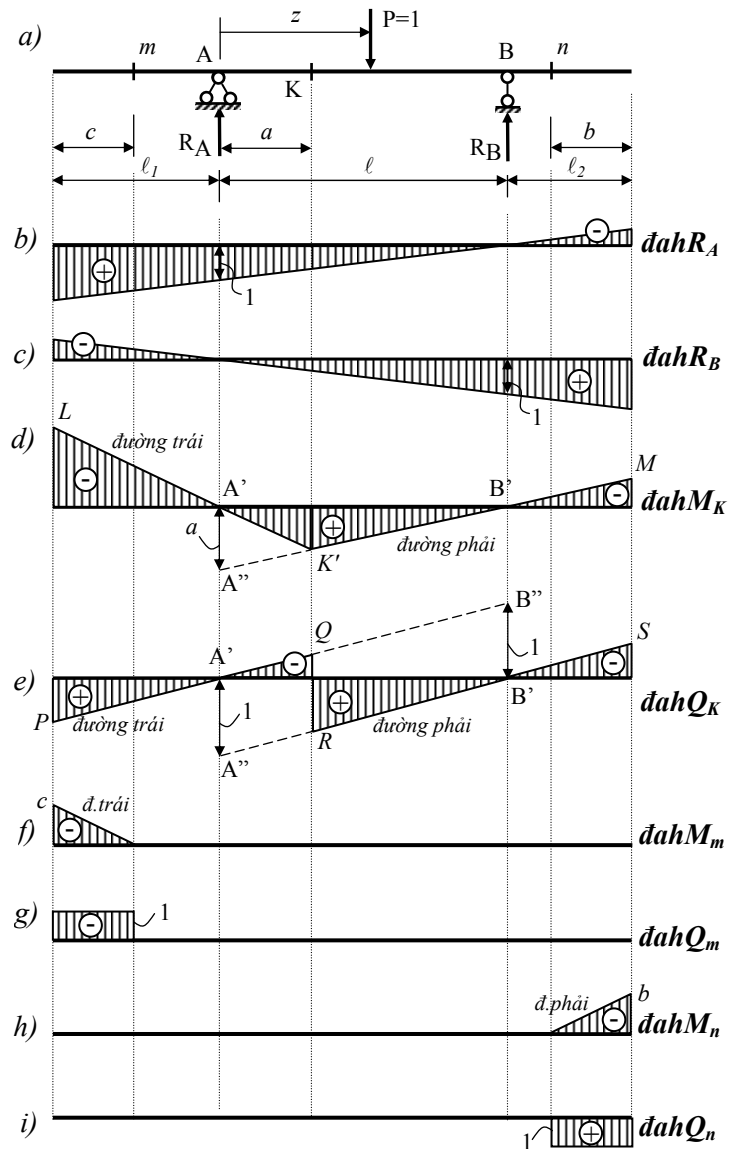
ta có $M_K = 0$; $Q_K = 0$

Hình 3.2d,e lần lượt là ∂M_K và ∂Q_K cần tìm.

Nhận xét:

1) Từ ∂M_K ta thấy đường trái và đường phải giao nhau tại điểm K' ứng dưới tiết diện K và đường kéo dài của đường phải cắt đường dóng thẳng đứng ứng dưới gối tựa A tại điểm A'' với tung độ A'A'' = a là khoảng cách từ gối tựa A đến tiết diện K.

Từ nhận xét trên ta suy ra cách vẽ thực hành ∂M_K của tiết diện bất kỳ trong nhịp:



Hình 3.2

- Đầu tiên vẽ đường phải bằng cách kẻ đường thẳng đi qua hai tung độ dưới gối tựa A có giá trị $A'A'' = a$ và bằng không tại gối tựa B, phần từ K tới hết dầm là đường phải.

- Sau đó vẽ đường trái bằng cách nối tung độ tại K với tung độ bằng không tại gối tựa A, phần từ đầu dầm đến K là đường trái.

2) Từ $\partial ah Q_K$ ta thấy đường trái và đường phải song song với nhau, đồng thời tại gối tựa $\partial ah Q_K$ có tung độ bằng không.

Từ nhận xét ta suy ra cách vẽ thực hành $\partial ah Q_K$ cho tiết diện K bất kỳ trong nhịp như sau:

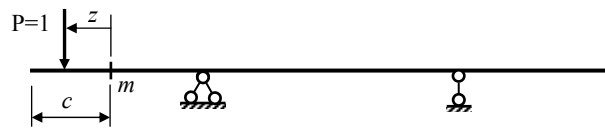
- Trước tiên vẽ đường phải, là đường thẳng đi qua hai tung độ dưới gối tựa A có giá trị bằng -1 và bằng không tại gối tựa B, phần từ K tới hết dầm là đường phải.

- Sau đó vẽ đường trái là đường thẳng đi qua điểm không tại gối tựa B và song song với đường phải, phần từ đầu dầm đến K là đường trái.

b) Tiết diện ở đầu thừa

Ví dụ vẽ $\partial ah M_m$ và $\partial ah Q_m$ tại tiết diện m ở đầu thừa trái của dầm.

+ Khi $P = 1$ di động ở phần trái tiết diện m, ta chọn gốc tọa độ tại tiết diện m, chiều trục z như trên hình 3.3 và xét sự cân bằng phần dầm bên trái tiết diện m, ta có:



Hình 3.3

$$\partial ah M_m = -1 \cdot z = -z$$

$$\partial ah Q_m = -1. \quad \text{với } 0 \leq z \leq c$$

Từ hai biểu thức trên ta có:

$$\text{Khi } z = 0 \quad M_m = 0; \quad Q_m = -1;$$

$$\text{Khi } z = c \quad M_m = -c; \quad Q_m = -1;$$

Trên hình 3.2f,g ta vẽ các đường trái của $\partial ah M_m$ và $\partial ah Q_m$ ứng với $0 \leq z \leq c$.

+ Khi $P = 1$ di động trên phần bên phải tiết diện m, nội lực tại mặt cắt m luôn bằng không nên đường ảnh hưởng trùng đường chuẩn.

Cách vẽ đường ảnh hưởng tại tiết diện n ở đầu thừa bên phải của dầm cũng tương tự như khi vẽ cho tiết diện m. Kết quả như trên hình 3.2h,i, lúc này $\partial ah Q_n$ mang dấu dương.

Nhận xét:

1) Đường ảnh hưởng mô men uốn tại tiết diện K thuộc đầu thừa có dạng hình tam giác trong khoảng từ mút thừa đến tiết diện K và có dấu âm, tung độ lớn nhất tại mút thừa có giá trị bằng khoảng cách từ mút thừa đến tiết diện K.

2) Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện K thuộc đầu thừa có dạng hình chữ nhật với tung độ bằng +1 hoặc -1 phụ thuộc K ở đầu thừa phải hay trái.

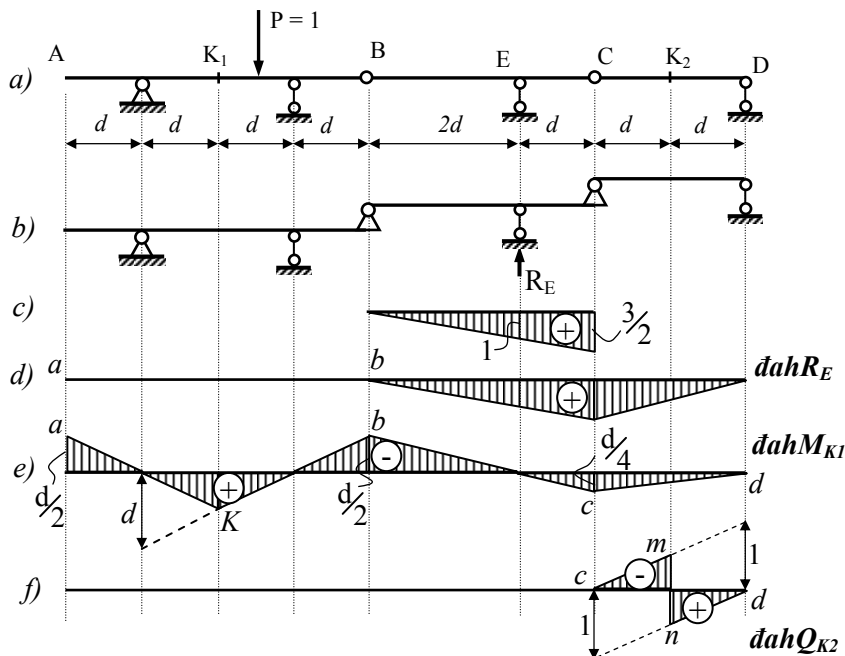
3) Đường ảnh hưởng nội lực trong dầm công son có dạng như đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện ở đầu thừa.

3.2.2. Đường ảnh hưởng trong hệ dầm ghép tĩnh định

Trên cơ sở phân tích hệ ghép thành hệ chính và hệ phụ (sơ đồ tầng), ta có tính chất quan trọng sau:

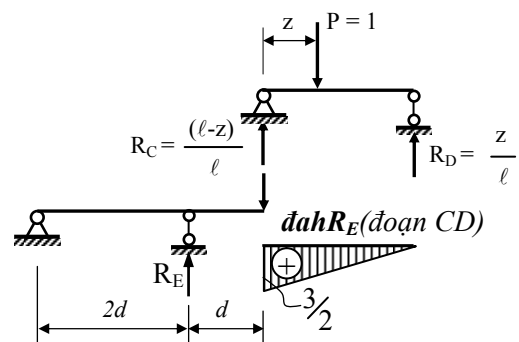
Khi $P = 1$ di động trên hệ chính sẽ không gây ra phản lực và nội lực trên hệ phụ. Ngược lại, khi $P = 1$ di động trên hệ phụ sẽ gây ra phản lực và nội lực trong hệ phụ và cả trong các hệ chính của nó.

Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong dầm ghép tĩnh định thông qua ví dụ vẽ $\text{đah}R_E$ của dầm tĩnh định nhiều nhịp cho trên hình 3.4a.



Hình 3.4

Dầm đã cho có sơ đồ tầng như trên hình 3.4b. Ta nhận thấy, khi $P = 1$ di động trên toàn dầm, sẽ có lúc nó di động trên dầm BC có chứa phản lực R_E cần vẽ đường ảnh hưởng. Lúc này phần $\text{đah} R_E$ trong khoảng dầm BC vẽ được bằng cách tách riêng dầm BC ra mà không liên quan tới các dầm khác. Đây là dầm đơn giản có đầu thừa, cách vẽ các đường ảnh hưởng như đã trình bày ở 3.2.1, kết quả trên hình 3.4c.



Hình 3.5

Tiếp theo, cho $P = 1$ di động trên các dầm còn lại, xảy ra hai trường hợp:

+ Nếu dầm kế tiếp là dầm chính của nó (dầm AB) theo tính chất đã nêu, lực $P = 1$ di động trên dầm này không gây ra đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng, nên $\text{đah}R_E$ trong khoảng dầm chính AB trùng với đường chuẩn (đoạn ab trên hình 3.4d).

+ Nếu dầm kế tiếp là dầm phụ của dầm có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng (dầm CD), với hệ trục tọa độ chọn như hình 3.5.

Ảnh hưởng của $P = 1$ được truyền từ hệ phụ vào hệ dầm chính thông qua phản lực khớp nối $R_C = \frac{(\ell - z)}{\ell}$. Đó là lực tập trung nên $R_E = R_C \cdot y_C = \frac{(\ell - z)}{\ell} \cdot \frac{3}{2}$

Phản lực R_E biến thiên theo qui luật bậc nhất khi $P = 1$ di động từ C tới D. $\text{đah}R_E$ trong khoảng dầm phụ CD được vẽ trên hình 3.5.

Ghép các hình lại trên một đường chuẩn, ta có $\text{đah}R_E$ trên hình 3.4d.

Qua cách vẽ $\text{đah}R_E$ trên đây, ta rút ra cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng phản lực và nội lực trong hệ dầm ghép tĩnh định như sau:

1. Cho $P = 1$ di động trực tiếp trên dầm chứa đại lượng cần vẽ $\text{đah}S_K$. Tiến hành vẽ $\text{đah}S_K$ trong dầm đơn giản như đã trình bày ở 3.2.1.

2. Cho $P = 1$ di động trên các dầm kế tiếp với dầm chứa đại lượng cần vẽ $\text{đah}S_K$:

+ Nếu dầm kế tiếp là dầm chính, thì $\text{đah}S_K$ trùng với đường chuẩn.

+ Nếu dầm kế tiếp là dầm phụ, thì $\text{đah}S_K$ là đoạn thẳng nối tung độ đã biết tại khớp nối với dầm chính và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa còn lại của dầm phụ.

Vận dụng điều này ta có thể vẽ nhanh $\text{đah}M_{K1}$ và $\text{đah}Q_{K2}$ của dầm trên hình 3.4a như sau:

Mặt cắt K_1 thuộc dầm chính AB. Vẽ $\text{đah}M_{K1}$ khi $P = 1$ di động trên dầm AB (đường gãy khúc aKb). Tiếp theo cho $P = 1$ di động trên dầm BC là dầm phụ của dầm AB nên $\text{đah}M_{K1}$ là đoạn thẳng nối tung độ bằng $\frac{d}{2}$ đã biết tại khớp nối B và tung độ bằng không tại gối tựa E của dầm BC. Cuối cùng cho $P = 1$ di động trên dầm CD là dầm phụ của dầm BC nên $\text{đah}M_{K1}$ trong đoạn dầm này là đoạn thẳng cd nối tung độ bằng $\frac{d}{4}$ tại khớp nối C và tung độ bằng không tại gối tựa D (hình 3.4e)

Mặt cắt K_2 thuộc dầm phụ CD. Tách riêng dầm CD ra, là dầm đơn giản, phần $\text{đah}Q_{K2}$ trong đoạn dầm này là đường $cmnd$ trên hình 3.4h. Các dầm kế tiếp dầm CD là dầm BC và AB đều là dầm chính nên $\text{đah}Q_{K2}$ trong các đoạn này đều trùng với đường chuẩn.

3.2.3. Đường ảnh hưởng trong dàn dầm

3.2.3.1. Đường ảnh hưởng phản lực

Ta nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng phản lực trong hệ dàn dầm thông qua ví dụ cho trên *hình 3.6a*. Cũng tương tự như trong dầm, ta xác định vị trí của tải trọng di động $P = 1$ theo tọa độ chạy z từ gối tựa trái, tiếp đó tìm phản lực R_A và R_B tương ứng với vị trí tải trọng đó, ta có:

$$\Sigma M_B = R_A \cdot \ell - P(\ell - z) = 0$$

$$\Sigma M_A = R_B \cdot \ell - Pz = 0$$

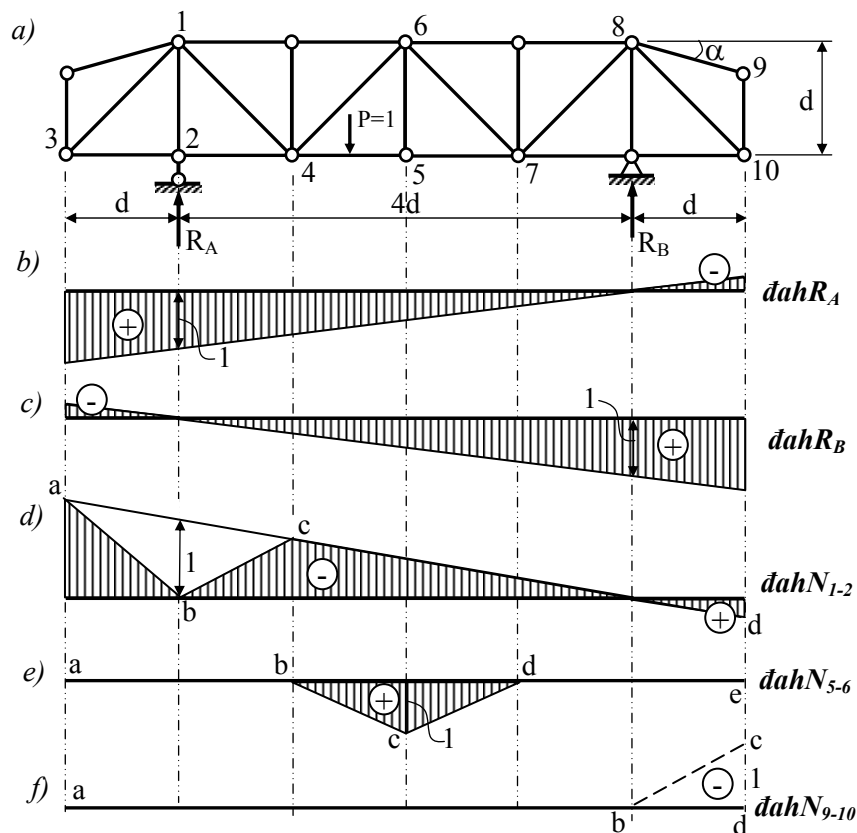
Suy ra: $\text{đah}R_A = \frac{\ell - z}{\ell};$

$$\text{đah}R_B = \frac{z}{\ell}$$

Vẽ đồ thị biến thiên của hai đại lượng trên theo z , ta sẽ được $\text{đah}R_A$ và $\text{đah}R_B$ như trên *hình 3.6* và *hình 3.6c*. Những đường ảnh hưởng này có dạng giống như đường ảnh hưởng phản lực trong hệ dầm đã biết.

3.2.3.2. Đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh dàn

Có thể sử dụng các phương pháp tính đã trình bày ở trên để vẽ đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh dàn.



Hình 3.6

1) Dùng tách mắt

Khi sử dụng phương pháp tách mắt để vẽ $\text{đồ thị } S_K$ ta lần lượt xét các vị trí của lực $P=1$ như sau:

- * Khi $P = 1$ đặt ngay tại mắt bị tách.
- * Khi $P = 1$ di động ngoài các đốt bị cắt
- * Khi $P = 1$ di động trên các đốt bị cắt.

Để thấy rõ cách làm, ta xét một số ví dụ cụ thể đối với dàn trên *hình 3.6a*.

+ Đường ảnh hưởng N_{1-2} . Tách mắt 2 (Hình 3.7a)

* Khi $P = 1$ đặt ngay tại mắt 2 (Hình 3.7a):

Từ phương trình hình chiếu theo phương 1-2 ta có:

$$\Sigma Y = N_{1-2} - 1 + R_A = 0$$

Suy ra $N_{1-2} = -R_A + 1$.

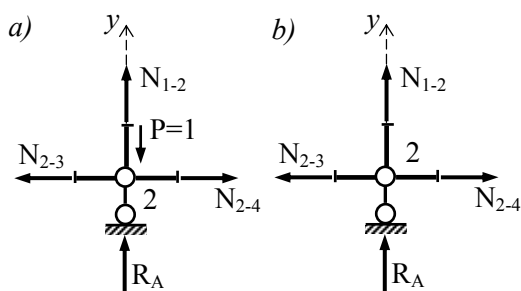
Nhưng tại điểm này $R_A = +1$ nên $N_{1-2} = 0$

Tung độ $\text{đồ thị } N_{1-2}$ tại điểm này bằng không (điểm b trên *hình 3.6d*).

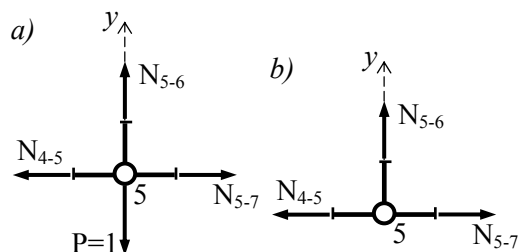
Khi $P = 1$ di động ở ngoài các đốt bị cắt 3-2 và 2-4. Mắt 2 chịu tác dụng của các lực như trên *hình 3.7b*. Từ phương trình hình chiếu:

$$\Sigma Y = N_{1-2} + R_A = 0 \text{ ta được } N_{1-2} = -R_A = -(\ell - z)/\ell.$$

Đường biểu diễn của phương trình này là đường *acd* trên *hình 3.6d*. Phần thích dụng của đường này bao gồm điểm *a* là điểm ứng dưới mắt 3 và đoạn *cd* là đoạn ứng dưới các mắt 4 ÷ 10 vì phương trình này chỉ đúng khi lực $P = 1$ di động ở ngoài hai đốt 3 - 2 và 2 - 4.



Hình 3.7



Hình 3.8

* Khi $P = 1$ di động trên các đốt bị cắt 3-2 và 2-4.

Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền các tung độ đường ảnh hưởng ứng dưới các mắt.

- Khi $P = 1$ di động trên đốt 3-2, đường ảnh hưởng tương ứng là đoạn *ab*.
- Khi $P = 1$ di động trên đốt 2-4, đường ảnh hưởng tương ứng là đoạn *bc*.

Toàn bộ $\text{đồ thị } N_{1-2}$ là đường gãy khúc *abcd* trên *hình 3.6d*.

+ Đường ảnh hưởng N_{5-6} : Tách mắt 5

* Khi $P = 1$ đặt tại mắt 5 (Hình 3.8a)

Từ phương trình cân bằng: $\Sigma Y = N_{5-6} - 1 = 0, \Rightarrow N_{5-6} = 1.$

Tung độ của $\text{đah}N_{5-6}$ tại mắt này bằng +1 (điểm c trên hình 3.6e).

* Khi $P = 1$ di động ở ngoài các chốt bị cắt 4-5 và 5-7 (Hình 3.8b).

Từ phương trình hình chiếu: $\Sigma Y = N_{5-6} = 0 \Rightarrow N_{5-6} = 0.$

Đường biểu diễn của phương trình này là đường thẳng trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng của đường này bao gồm hai đoạn ab và de (Hình 3.6e).

* Khi $P = 1$ di động trên các chốt 4-5 và 5-7. Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới các mắt của mỗi chốt.

- Khi $P = 1$ di động trên chốt 4-5, đường ảnh hưởng tương ứng là đoạn bc .

- Khi $P = 1$ di động trên chốt 5-7, đường ảnh hưởng tương ứng là đoạn cd .

Toàn bộ $\text{đah}N_{5-6}$ là đường gãy khúc $abcde$ trên hình 3.6e.

+ Đường ảnh hưởng N_{9-10} : Tách mắt 9

Trong trường hợp này tải trọng truyền vào dầm qua đường biên dưới (đường xe chạy dưới) nên lực $P = 1$ không tác dụng tại mắt 9. Do đó, sau khi tách mắt 9, ta dễ dàng nhận thấy rằng N_{9-10} luôn luôn bằng không với bất kỳ vị trí nào của tải trọng trên đường biên dưới. Vậy $\text{đah}N_{9-10}$ trùng với đường chuẩn (đường abd trên hình 3.6f).

Nếu giả thiết tải trọng $P = 1$ di động trên đường biên trên (đường xe chạy trên) thì $\text{đah}N_{9-10}$ sẽ có dạng khác đi.

* Khi $P = 1$ đặt tại mắt 9. Khảo sát sự cân bằng của mắt 9 dưới tác dụng của các lực vẽ trên hình 3.9 ta có:

$$\Sigma Y = N_{9-10} \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \cos \alpha = 0$$

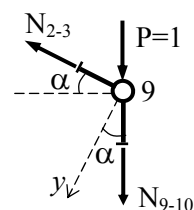
Suy ra: $N_{9-10} = -1$

Tung độ của $\text{đah}N_{9-10}$ tại mắt 9 là đoạn cd trên hình 3.6f.

* Khi $P = 1$ di động ngoài chốt 8-9 bị cắt. Tách mắt 9, ta thấy $N_{9-10} = 0$. Đường biểu diễn trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn ab .

* Khi $P = 1$ di động trên chốt 8-9. Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng là đoạn bc .

Vậy khi tải trọng di động trên đường biên trên, toàn bộ $\text{đah}N_{9-10}$ là đường gãy khúc $abcd$ (Hình 3.6f).



Hình 3.9

2) Dùng mặt cắt đơn giản

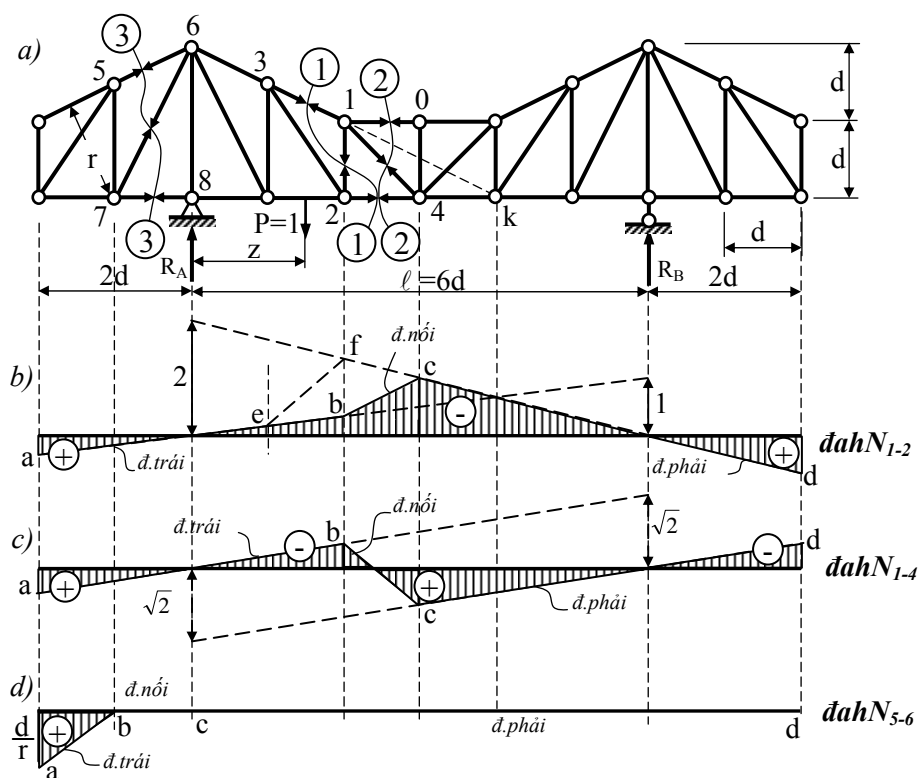
Khi sử dụng cách làm này, cần phân biệt hai loại mặt cắt:

* Mặt cắt ở trong nhịp, khi mặt cắt này chia dàn thành hai phần, mỗi phần đều có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 1-1 trên hình 3.10a.

* Mặt cắt ở đầu thừa, khi mặt cắt này chia dàn thành hai phần, trong đó một phần không có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 3-3 trên hình 3.10a.

① - **Mặt cắt ở trong nhịp:** Giả sử cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 1-2 và 1-4 khi đường xe chạy dưới.

+ **Đường ảnh hưởng N_{1-2} :** Thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh 1-2 và hai thanh khác là 1-3 và 2-4. Để xác định N_{1-2} ta dùng phương trình cân bằng tổng mô men của các lực đối với điểm k là giao điểm của hai thanh 1-3 và 2-4. Gọi điểm k là tâm mô men. Xét ba trường hợp:



Hình 3.10

* Khi $P = 1$ di động ở bên trái mặt cắt: $(-2d \leq z \leq +2d)$, khảo sát sự cân bằng của phần phải, ta có:

$$\sum M_k = N_{1-2} \cdot 2d + R_B \cdot 2d = 0; \quad \Rightarrow \quad N_{1-2} = -R_B = -z/\ell = -z/6d \quad (a)$$

Đó là phương trình của đường trái khi P di động ở phần bên trái mặt cắt. Phương trình này có dạng bậc nhất. Để vẽ đường trái, ta tìm giá trị ở hai điểm:

Khi $z = 0$ ta có $N_{1-2} = 0$;

Khi $z = \ell = 6d$ ta có $N_{1-2} = -1$.

Phần thích dụng của đường trái vẽ bằng đường liền nét trên *hình 3.10b*. Phần này bắt đầu từ mút bên trái của dàn dưới mắt số 2 là mắt cuối cùng của phần bên trái mặt cắt khi đường xe chạy dưới (đoạn *ab*).

* Khi $P = 1$ di động ở bên phải mặt cắt, tức là mắt 4 đến đầu mút bên phải của dàn ($3d \leq z \leq 8d$). Khảo sát sự cân bằng của phần trái, ta có:

$$\Sigma M_k = N_{1-2} \cdot 2d + R_A 4d = 0; \quad \Rightarrow \quad N_{1-2} = -2R_A = (6d - z)/3d \quad (b)$$

Đó là phương trình đường phải, có dạng bậc nhất. Để vẽ đường phải ta cần tìm hai giá trị: khi $z = 0$ ta có $N_{1-2} = -2$;

khi $z = \ell = 6d$ ta có $N_{1-2} = 0$

Phần thích dụng của đường phải bắt đầu từ mắt số 4 tức là mắt đầu tiên của phần bên phải khi đường xe chạy dưới cho đến hết đầu mút bên phải của dàn. Trên *hình 3.10b* ta vẽ đoạn này bằng đường liền nét *cd*.

* Khi $P = 1$ di động trên dốt 2-4 bị cắt.

Trong thực tế tải trọng không đặt vào các thanh của dàn mà thường đặt vào các mắt thông qua hệ thống truyền lực ở phía trên. Bởi vậy khi $P = 1$ di động trong khoảng này thì theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng bc nối liền tung độ ứng dưới mắt 2 của đường trái và tung độ ứng dưới mắt 4 của đường phải.

Hình 3.10b là *đah* N_{1-2} khi xe chạy trên đường biên dưới.

Nhận xét:

- Ta dễ dàng nghiệm thấy: đường trái và đường phải cắt nhau dưới tâm mô men k .

Thật vậy, trong phương trình của đường trái và đường phải, cho $z = 4d$, ta đều tìm được $N_{1-2} = 2/3$. Điều đó chứng tỏ đường trái và đường phải cắt nhau ở dưới điểm k .

- Nếu đường xe chạy ở đường biên trên thì dạng ảnh hưởng N_{1-2} sẽ khác đi. Lúc này phần thích dụng của đường trái là đoạn *ae* (*Hình 3.10b*) tức là bắt đầu từ đầu mút bên trái của dàn và kết thúc dưới mắt 3 là mắt cuối cùng của phần bên trái khi lực $P = 1$ di động ở đường biên trên. Phần thích dụng của đường phải bắt đầu từ mắt 1 cho tới đầu mút phải của dàn (đường *fd*). Đường nối là đoạn *ef* tương ứng dưới dốt 1-3. Toàn bộ *đah* N_{1-2} khi đường xe chạy ở biên trên là đường gãy khúc *acfd* (*Hình 3.10b*).

+ Đường ảnh hưởng N_{1-4} . Thực hiện mặt cắt 2-2 qua thanh 1-4 và hai thanh song song 1-0, 2-4. Để xác định N_{1-4} ta dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên phương Y vuông góc với hai thanh song song nằm ngang.

* Khi $P = 1$ di động ở bên trái mặt cắt 2-2 ($-2d \leq z \leq +2d$), khảo sát sự cân bằng của phần bên phải, ta có:

$$\Sigma Y = N_{1-4} \cdot \cos 45^\circ + R_B = 0, \Rightarrow N_{1-4} = -\frac{R_B}{\cos 45^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{6d} z \quad (c)$$

Đó là phương trình đường trái, có dạng bậc nhất.

Khi $z = 0$ ta có $N_{1-4} = 0$;

Khi $z = \ell = 6d$ ta có $N_{1-2} = -\sqrt{2}$

Phần thích dụng của đường trái là đoạn ab trên hình 3.10c.

* Khi $P = 1$ di động ở bên phải mặt cắt 2-2 ($3d \leq z \leq 8d$), khảo sát sự cân bằng của phần dầm bên trái, ta có:

$$\Sigma Y = N_{1-4} \cdot \cos 45^\circ + R_B = 0, \Rightarrow N_{1-4} = \frac{R_A}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}(6d - z)}{6d} \quad (d)$$

Đó là phương trình đường phải, có dạng bậc nhất.

Khi $z = 0$ ta có $N_{1-4} = \sqrt{2}$;

Khi $z = \ell = 6d$ ta có $N_{1-2} = 0$.

Phần thích dụng của đường phải là đoạn cd trên hình 3.10c.

* Khi $P = 1$ di động trên đốt bị cắt 2-4: áp dụng quy tắc của hệ có hệ thống truyền lực; ta có đường nối bc như trên hình 3.10c. $\text{đánh } N_{1-4}$ cho trên hình 3.10c.

Nhật xét: Khi mặt cắt đi qua ba thanh trong đó có hai thanh song song, đường ảnh hưởng nội lực trong thanh không song song có đường trái và đường phải song song với nhau. Thật vậy, ta dễ dàng nhận thấy các phương trình của đường trái và đường phải có cùng một hệ số góc.

② - Mặt cắt ở đầu thừa: Giả sử cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong thanh 5-6 khi đường xe chạy dưới.

Thực hiện mặt cắt 3-3 qua thanh 5-6 và các thanh 6-7, 7-8. Mặt cắt này chia dầm thành hai phần, trong đó phần bên trái không có phản lực tựa. Với loại mặt cắt này ta chỉ nên khảo sát sự cân bằng của phần không có phản lực, dù tải trọng di động ở phần bên trái hoặc bên phải mặt cắt và làm như vậy thì số lực tham gia phương trình cân bằng sẽ ít nhất.

* Khi $P = 1$ di động ở bên trái mặt cắt, tức là di động từ mút trái của dầm đến mặt 7. Nếu chọn gốc tọa độ tại gối A và chiều dương của trục z hướng về bên trái thì ta tìm được phương trình $\text{đánh } N_{5-6}$ trong khoảng ($d \leq z \leq 2d$):

$$\Sigma M_7^L = N_{5-6} \cdot r - \ell(z - d) = 0; \Rightarrow N_{5-6} = (z - d)/r.$$

Đó là phương trình đường trái.

Khi $z = 2d$; ta có $N_{5-6} = d/r$;

Khi $z = d$, ta có $N_{5-6} = 0$.

Phần thích dụng của đường trái là đoạn ab (Hình 3.10d) ứng dưới đầu mút trái của dàn và mắt 7.

* Khi $P = 1$ di động ở phần bên phải mặt cắt, tức là từ mắt 8 đến đầu mút bên phải của dàn. Lúc này trên phần bên trái chỉ có các nội lực N_{5-6} , N_{7-6} và N_{7-8} ; phương trình cân bằng có dạng:

$$\Sigma M_7^t = N_{5-6} \cdot r = 0; \quad \Rightarrow \quad N_{5-6} = 0$$

Đó là phương trình đường phải. Đường phải trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn cd (Hình 3.10d) ứng dưới mắt 8 và đầu mút phải của dàn.

* Khi $P = 1$ di động trên dốt bị cắt (đốt 7-8), cũng tương tự như trên, theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng trong đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới mắt 7 của đường trái và tung độ ứng dưới mắt 8 của đường phải. Trong trường hợp này đường nối là đoạn bc trùng với đường chuẩn. $\text{đah}N_{5-6}$ cho trên hình 3.10d.

Chú thích:

1. Về nguyên tắc có thể dùng một trong hai phương pháp kể trên để vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong tất cả các thanh của dàn dầm tĩnh định. Trong những bài toán cụ thể, nên chọn phương pháp nào cho phép thiết lập được phương trình đường ảnh hưởng từ một phương trình cân bằng tĩnh học.

2. Trường hợp không thể thiết lập được phương trình đường ảnh hưởng từ một phương trình cân bằng, có thể dùng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan. Ví dụ muốn vẽ $\text{đah}N_{k-d}$ của dàn trên hình 3.14 ta cần vẽ trước $\text{đah}N_{k-e}$ bằng mặt cắt qua ba thanh $d-e$, $k-e$ và $g-f$, sau đó dùng mặt cắt qua các thanh $c-d$, $k-d$, $k-e$ và $g-h$ để vẽ $\text{đah}N_{k-d}$.

3. Trong thực hành, khi gặp những dàn phức tạp, ta có thể vẽ đường ảnh hưởng bằng cách: cho $P = 1$ lần lượt đặt tại từng mắt, xác định lực dọc trong thanh cần vẽ đường ảnh hưởng, dưới mỗi mắt dóng một tung độ bằng giá trị lực dọc tương ứng với khi $P = 1$ đặt tại mắt đó, nối các tung độ lại với nhau bằng những đoạn thẳng (theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực) đường gãy khúc đó chính là đường ảnh hưởng cần tìm.

3.2.4. Đường ảnh hưởng trong vòm ba khớp

3.2.4.1. Đường ảnh hưởng phản lực

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực trong hệ ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng $P = 1$ di động mà không trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các phản lực toàn phần A và B vì lẽ các đường ảnh hưởng đó vừa khó khăn, vừa không cần thiết.

1) Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực V_A^d và V_B^d

Khi trên hệ ba khớp có tải trọng thẳng đứng $P = 1$ di động với vị trí được xác định bằng hoành độ z , ta tìm được biểu thức giải tích của đường ảnh hưởng V_A^d và V_B^d từ các điều kiện cân bằng:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_A^d}{\partial z} = (\ell - z)/\ell.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_B^d}{\partial z} = z/\ell.$$

Lần lượt cho hoành độ z hai giá trị khác nhau ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng các thành phần phản lực này như trên hình 3.11b,c.

Ta thấy các $\frac{\partial V_A^d}{\partial z}$ và $\frac{\partial V_B^d}{\partial z}$ hoàn toàn giống như các đạo hàm phản lực trong dầm.

2) Đường ảnh hưởng lực xô H

Ta đã biết biểu thức giải tích của mô men uốn tại một tiết diện bất kỳ trong vòm khi chịu tải trọng thẳng đứng đứng là:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H \cdot y_k.$$

Áp dụng công thức này cho tiết diện ở khớp C của vòm, ta có:

$$M_C = M_C^d - H \cdot y_c \quad (\text{vì } y_c = f \text{ nên } H = M_C^d / f)$$

Khi lực $P = 1$ di động trên vòm, tung độ f là hằng lượng còn đại lượng M_C^d và H biến đổi nên ta có thể viết

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial M_C^d}{\partial z} \cdot \frac{1}{f}$$

Như vậy, ta vẽ đường ảnh hưởng lực xô H bằng cách vẽ đường ảnh hưởng của mô men uốn trong dầm tương ứng tại vị trí khớp C, rồi chia cho hằng lượng f . Đường ảnh hưởng H vẽ trên hình 3.11d.

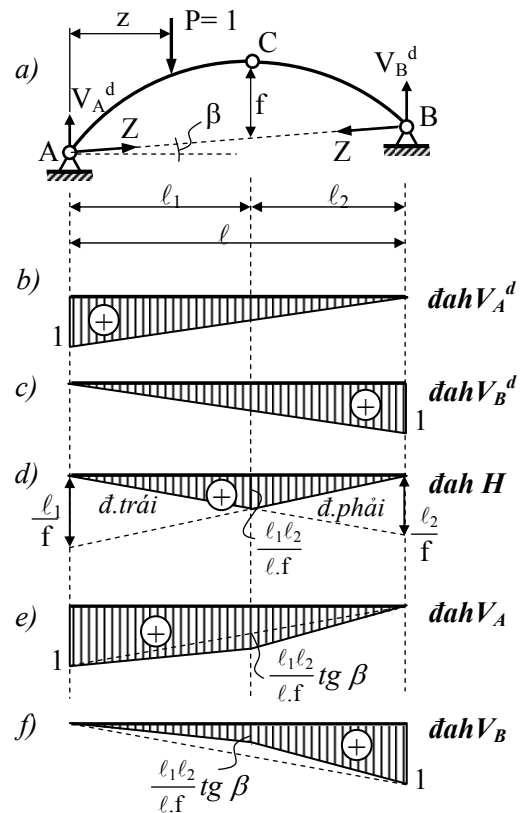
3) Đường ảnh hưởng lực vòm Z

Khi lực thẳng đứng $P = 1$ di động trên hệ ba khớp ta có đẳng thức:

$$H = Z \cdot \cos \beta$$

$$\text{Do đó} \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \cos \beta$$

Như vậy, ta vẽ được đường ảnh hưởng Z bằng cách lấy đường ảnh hưởng H chia cho hằng lượng $\cos \beta$.



Hình 3.11

4) Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực đứng V_A và V_B

Khi tải trọng thẳng đứng $P = 1$ ở bất kỳ vị trí nào trên hệ ba khớp ta có:

$$V_A = V_A^d + H.tg\beta; \quad V_B = V_B^d - H.tg\beta$$

Khi $P = 1$ di động, đại lượng $tg\beta$ không thay đổi, còn các đại lượng khác đều thay đổi cho nên ta có thể viết:

$$\partial V_A = \partial V_A^d + (\partial H).tg\beta$$

$$\partial V_B = \partial V_B^d - (\partial H).tg\beta$$

Như vậy, để vẽ đường ảnh hưởng V_A (hoặc V_B) ta lấy đường ảnh hưởng V_A^d (hoặc đường ảnh hưởng V_B^d) cộng (hoặc trừ) với đường ảnh hưởng H đã nhân với $tg\beta$. Các ∂V_A và ∂V_B vẽ trên hình 3.11e, f.

3.2.4.2. Đường ảnh hưởng nội lực

Cũng lý luận như trên, ta vẽ được các đường ảnh hưởng nội lực theo những công thức sau đây suy ra từ công thức (2-4).

$$\partial M_k = \partial M_k^d - (\partial H).y_k$$

$$\partial Q_k = (\partial Q_k^d).cos\alpha_k - (\partial H).(sin\alpha_k - tg\beta.cos\alpha_k)$$

$$\partial N_k = -(\partial Q_k^d).sin\alpha_k - (\partial H).(cos\alpha_k + tg\beta.sin\alpha_k)$$

1) Đường ảnh hưởng mô men uốn tại tiết diện k

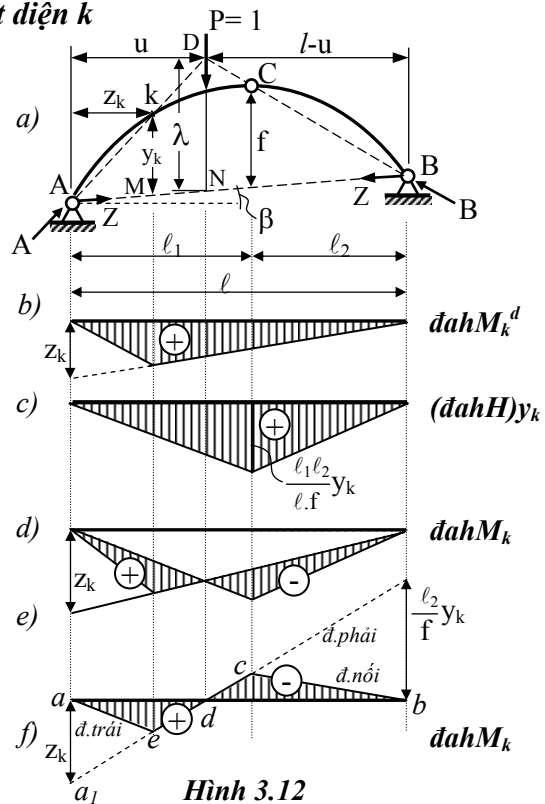
Từ công thức (2-4) ta có:

$$\partial M_k = \partial M_k^d - (\partial H).y_k$$

Ta thấy: để vẽ ∂M_k trong hệ ba khớp (Hình 3.12a) ta cần lấy ∂M_k^d (Hình 3.12b) của dầm đơn giản tương ứng trừ đi ∂H đã được nhân với hằng lượng y_k (Hình 3.12c).

Thực hiện phép trừ bằng cách đặt chồng hai đường ảnh hưởng đó lên nhau, phần gạch gạch trên hình 3.12d chính là kết quả cần tìm. Đem các tung độ kết quả đặt lên đường chuẩn ta có ∂M_k như trên hình 3.12e.

Cách làm như vậy thường tốn khá nhiều thời gian cho nên ở đây ta đặt vấn đề tìm một cách vẽ thực hành nhanh chóng. Từ kết quả vẽ trên hình 3.12 ta có các nhận xét được dùng để làm cơ sở cho cách vẽ thực hành.



Hình 3.12

1) Phần ae của ∂ahM_k gọi là đường trái ứng với trường hợp P di động trên phần bên trái tiết diện k. Phần ec của ∂ahM_k gọi là đường phải ứng với trường hợp P di động trên phần bên phải tiết diện k, từ k đến khớp C. Phần còn lại của ∂ahM_k gọi là đường nối ứng với khi P di động trên phần CB.

Ta nhận thấy nếu vẽ được đường phải thì sẽ tìm được toàn bộ ∂ahM_k , bởi vì đường trái ae bao giờ cũng đi qua điểm a có tung độ bằng không ứng dưới gối A và đi qua điểm e nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện k; đường nối bao giờ cũng đi qua điểm b có tung độ bằng không ứng dưới gối B và đi qua điểm c nằm trên đường phải ứng dưới khớp C.

Đường phải được xác định bằng hai điểm: điểm a_1 với tung độ $aa_1 = z_k$ và điểm không d nằm trên đường chuẩn. Điểm a_1 tìm được dễ dàng, chỉ cần phải tìm điểm không d.

2) Điểm không d của đường phải là điểm ứng dưới vị trí tải trọng $P = 1$ sao cho mô men uốn $M_k = 0$. Nó chính là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm D của đường Ak và đường BC.

Thật vậy, khi $P = 1$ đặt tại điểm D thì phản lực B có phương BCD, còn phản lực A có phương AD đi qua trọng tâm của tiết diện k. Do đó, khi $P = 1$ đặt tại điểm D thì mô men uốn tại tiết diện k được xác định theo phản lực A đi qua k nên có giá trị bằng không. Như vậy điểm không d nằm trên đường chuẩn của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm D của đường BC và đường Ak.

Đó là điều phải chứng minh.

Hai nhận xét trên cho phép ta suy ra cách vẽ thực hành đường ảnh hưởng mô men uốn tại một tiết diện k nằm ở phần bên trái vòm như sau:

+ Xác định điểm không d của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm của đường BC và đường Ak.

+ Ứng dưới gối trái A, dựng đoạn $aa_1 = z_k$. Nối điểm a_1 với điểm không d sẽ được đường phải ec (e là điểm nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện k còn c là điểm nằm trên đường phải ứng dưới khớp C).

+ Nối a với e, được đường trái ae .

+ Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, được đường nối cân bằng.

Đường gãy khúc $aecb$ là ∂ahM_k cần tìm.

Chú thích:

+ Từ hình 3.12 ta thấy tam giác AND đồng dạng với tam giác AkM; tam giác BDN đồng dạng với tam giác BCL, ta tính được:

$$\lambda = \frac{y_k}{z_k} u \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{\ell_2} (\ell - u), \quad \text{do đó: } \lambda = \frac{y_k}{z_k} u = \frac{f}{\ell_2} (\ell - u)$$

với u là khoảng cách theo phương nằm ngang từ gối tựa trái đến điểm không d. Suy ra:

$$u = \frac{f \cdot \ell}{\ell_2 (y_k / z_k) + f}$$

Dùng công thức này ta xác định được dễ dàng vị trí của điểm không d bằng giải tích.

+ Trường hợp tiết diện k ở miềng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ $\bar{M}_k$ cũng có thể quan sát hệ tự phía sau để chuyển tiết diện k về phần bên trái.

2) Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện k

Theo (2-4): $\bar{Q}_k = (\bar{Q}_k^d) \cdot \cos \alpha_k - (\bar{H}) \cdot (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$

Như vậy, để vẽ $\bar{Q}_k$ trong hệ ba khớp (Hình 3.13a) ta cần đem $\bar{Q}_k^d$ của dầm đơn giản tương ứng nhân với hằng lượng $\cos \alpha_k$ (Hình 3.13b) rồi trừ đi $\bar{H}$ đã được nhân với hằng lượng $n = (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$, (Hình 3.13c).

Quá trình thực hiện được trình bày trên hình 3.13.

Từ hình 3.13 ta thấy $\bar{Q}_k$ gồm ba đoạn thẳng: đoạn ae ở bên trái tiết diện k , đoạn e_1c ở bên phải tiết diện k và đoạn nối bc . Đoạn thẳng e_1c đi qua điểm a_1 với $aa_1 = \cos \alpha_k$ và qua điểm không d .

Điểm không d chính là điểm ứng dưới vị trí của tải trọng $P = 1$ di động từ k đến C để sao cho lực cắt Q_k bằng không, nghĩa là sao cho hợp lực bên trái tiết diện k (phần lực A) song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện k .

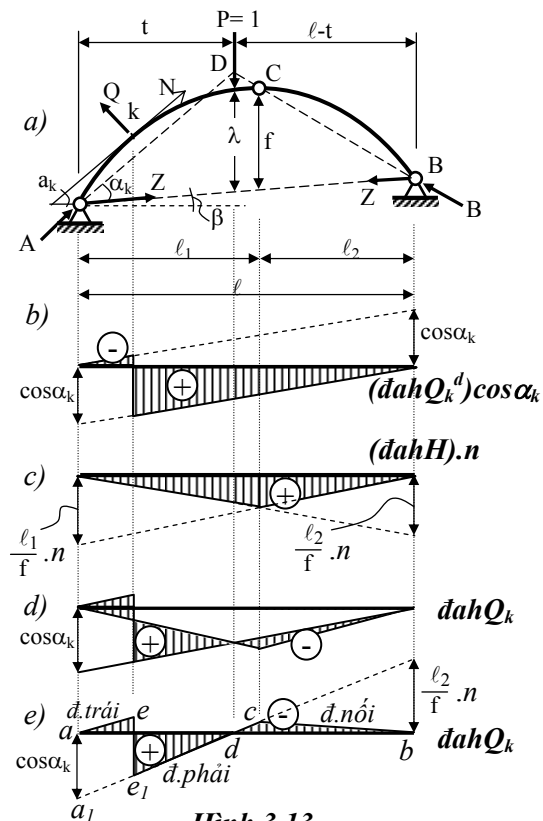
Vị trí đó của tải trọng $P = 1$ chính là giao điểm của đường AD song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện k và đường BC đi qua hai khớp B và C .

Do đó ta suy ra cách vẽ thực hành $\bar{Q}_k$ đối với tiết diện thuộc phần bên trái của vòm như sau:

+ Xác định điểm không d của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm D của hai đường BC và AD . Đường AD là đường kẻ từ A song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện k .

+ Ứng dưới gối trái A dựng tung độ $aa_1 = \cos \alpha_k$. Nối a_1 với d sẽ được đoạn phải e_1c của $\bar{Q}_k$, đoạn này tương ứng với trường hợp $P = 1$ di động trên phần kC .

+ Từ điểm a kẻ đường thẳng song song với a_1d . đường dóng thẳng đứng kẻ từ tiết diện k cắt đường vừa vẽ tại điểm e . Đoạn ae là đường trái của $\bar{Q}_k$. Ứng dưới tiết diện k , $\bar{Q}_k$ bao giờ cũng có bước nhảy bằng $\cos \alpha_k$.



Hình 3.13

+ Từ khớp C kẻ đường dóng thẳng đứng, đường này cắt đường phải tại c . Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, được đoạn nối cb .

Đường aee_1cb là $\text{đah}Q_k$.

Chú thích:

+ Cũng có thể xác định vị trí của điểm không d bằng công thức giải tích. Từ hình 3.13. ta có:

$$\lambda = t(\text{tg}\alpha_k - \text{tg}\beta) \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{\ell_2}(\ell - t) \quad \text{do đó} \quad t(\text{tg}\alpha_k - \text{tg}\beta) = \frac{f}{\ell_2}(\ell - t)$$

$$t = \frac{f\ell}{\ell_2(\text{tg}\alpha_k - \text{tg}\beta) + f}$$

t là khoảng cách theo phương ngang từ điểm không d đến gối trái A của hệ ba khớp.

+ Trường hợp tiết diện k ở phần miềng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ $\text{đah}Q_k$ cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện k về phần miềng cứng bên trái song cần đổi dấu.

3) Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện k

Theo (2-4)

$$\text{đah}N_k = -(\text{đah}Q_k^d) \cdot \sin\alpha_k - (\text{đah}H) \cdot (\cos\alpha_k + \text{tg}\beta \cdot \sin\alpha_k)$$

Như vậy, để vẽ $\text{đah}N_k$ ta cần đem $\text{đah}Q_k$ của dầm đơn giản tương ứng nhân với hằng lượng $-\sin\alpha_k$ (Hình 3.14b) rồi cộng với $\text{đah}H$ đã nhân với hằng lượng u ,

với $u = -(\cos\alpha_k + \text{tg}\beta \cdot \sin\alpha_k)$ (Hình 3.14c).

Phép cộng này được thực hiện trên hình 3.14d. và được kết quả như trên hình 3.14e.

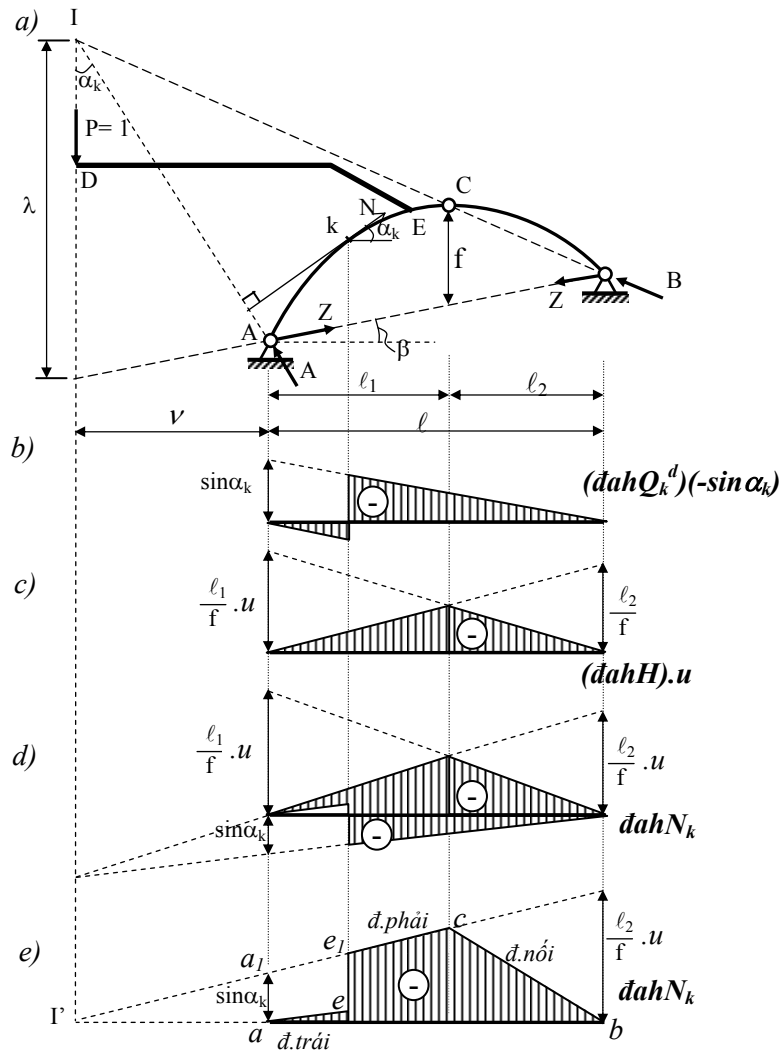
Từ hình vẽ ta thấy $\text{đah}N_k$ gồm ba đoạn thẳng: đường trái ae , đường phải e_1c , và đường nối cân bằng.

Vị trí của đường phải được xác định bằng điểm a_1 và điểm không I' . Để tìm điểm a_1 , từ điểm không a ứng dưới gối trái ta dựng tung độ $aa_1 = \sin\alpha_k$. Điểm I' của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm I của đường BC và đường AI kẻ từ A vuông góc với tiếp tuyến tại k của vòm.

Thật vậy, điểm không I' là điểm ứng dưới một vị trí của điểm đặt lực $P = 1$ khi lực này di động trên đoạn kC thì phản lực B có phương BC, lúc đó thực hiện mặt cắt qua tiết diện k ta sẽ thấy hợp lực bên trái tiết diện chỉ là phản lực A; chính phản lực này gây ra lực dọc N_k bằng thành phần chiếu của lực A lên phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k .

Muốn cho lực dọc N_k bằng không thì tải trọng $P = 1$ ở trên đoạn vòm kC phải có vị trí sao cho phản lực A vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại k , nghĩa là phải có phương AI. Vì hệ nằm trong trạng thái cân bằng nên ba lực $P = 1$, A, B phải đồng quy, do

đó lực $P = 1$ có vị trí trên đoạn kC sao cho nó đi qua giao điểm I của phản lực B và phản lực A.



Hình 3.14

Điểm đặt I của tải trọng $P = 1$ như trên hình vẽ có thể nằm ngoài phần kC.

Nếu tưởng tượng điểm I được gắn với phần kC của hệ bằng thanh DE thì có thể xem như lực $P = 1$ trực tiếp tác dụng lên đoạn kC và giá trị của lực dọc N_k tương ứng tại tiết diện k sẽ phải bằng không. Lúc đó, ứng dưới điểm I sẽ là điểm không I' của đường phải e_1c .

Từ nhận xét trên ta suy ra cách vẽ thực hành $\text{đah}N_k$ như sau:

+ Xác định điểm không I' của đường phải. Điểm này là điểm ứng dưới giao điểm I của đường BC và đường AI đi qua A vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại k.

+ Từ a đặt tung độ $aa_1 = \sin \alpha_k$, nối a_1 với I' sẽ được đường phải e_1c của ∂ahN_k ứng với trường hợp $P = 1$ di động trên đoạn kC .

+ Từ a kẻ đường trái ae song song với e_1c . Dưới tiết diện k bao giờ ∂ahN_k cũng có bước nhảy bằng $\sin \alpha_k$.

+ Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B , được đường nối cb .

Đường gãy khúc ae_1cb là ∂ahN_k của hệ ba khớp.

Chú thích:

+ Từ hình 3.9a. ta có

$$\lambda = v(\operatorname{tg} \beta + \cot \alpha_k) \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{\ell_2}(\ell + v) \quad \text{do đó} \quad v(\operatorname{tg} \beta + \cot \alpha_k) = \frac{f}{\ell_2}(\ell + v)$$

v là khoảng cách theo phương nằm ngang từ điểm không I' đến gối trái A .

Từ đó ta suy ra công thức giải tích để xác định vị trí điểm I' như sau:

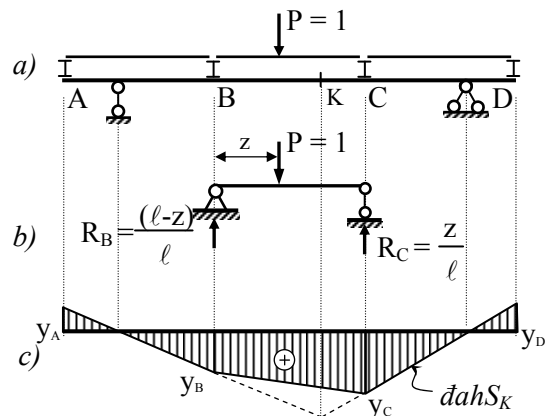
$$v = \frac{f\ell}{\ell_2(\operatorname{tg} \beta + \cot \alpha_k) - f}$$

+ Trường hợp tiết diện k ở phần miềng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ ∂ahN_k cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện k về miềng cứng bên trái.

3.2.5. Đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực

Với hệ có hệ thống truyền lực, $P = 1$ di động trên dầm phụ dọc, trong khi đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng lại thuộc kết cấu chịu lực chính. Nếu so sánh ∂ahS_K nào đó trong hai trường hợp: khi $P = 1$ di động trực tiếp trên kết cấu chịu lực (nơi chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng, đường nét đứt trên hình 3.15c), và khi $P = 1$ di động trên dầm dọc phụ (đường nét liền); Ta thấy trong quá trình di động trên dầm dọc phụ, sẽ có những thời điểm lực $P = 1$ đến đặt đúng trên các mắt truyền lực.

Ở những vị trí đó lực $P = 1$ đặt trên dầm dọc phụ hay trên kết cấu chịu lực chính là hoàn toàn như nhau, vì toàn bộ áp lực sẽ truyền qua mắt truyền lực xuống kết cấu chịu lực chính. Điều này có nghĩa là tung độ ∂ahS_K ứng dưới các mắt truyền lực trong hai trường hợp là như nhau (các tung độ $y_A, y_B, y_C, \dots$ trên hình 3.15b), đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng S_K biến thiên theo qui luật bậc nhất. Thật vậy, lực $P = 1$ truyền áp lực xuống kết cấu chịu lực qua hai phản lực tại các mắt truyền lực B và C theo hàm bậc nhất. Đại lượng S_K tính được:



Hình 3.15

$$S_K = R_B \cdot y_B + R_C \cdot y_C = \frac{(\ell - z)}{\ell} \cdot y_B + \frac{z}{\ell} \cdot y_C.$$

cũng là hàm bậc nhất.

Qua phân tích ở trên, ta suy ra cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực như sau:

Trước hết vẽ $\text{đah}S_K$ với giả thiết $P = 1$ di động trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính (không có mắt truyền lực), sau đó nổi tung độ của đường ảnh hưởng vừa vẽ ứng dưới các mắt truyền lực bằng các đoạn thẳng trong phạm vi giữa hai mắt truyền lực, ta được đường ảnh hưởng cần vẽ.

Chú ý:

- + Ứng dưới các mắt truyền lực đặt vào đất, tung độ đường ảnh hưởng bằng không.
- + Ứng dưới các mắt truyền lực mà $\text{đah}S_K$ có bước nhảy thì: nếu xét mặt cắt K bên trái ta lấy tung độ bên phải, và ngược lại, nếu xét mặt cắt K bên phải, ta lấy tung độ bên trái.

3.3. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC ĐẠI LƯỢNG NGHIÊN CỨU DO TẢI TRỌNG GÂY RA BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

Trong mục này trình bày cách sử dụng $\text{đah}S_K$ để xác định giá trị của S_K do hệ lực bất kỳ tác dụng trên công trình gây ra. Để trình bày được tổng quát ta giả thiết đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S_K là đường cong bất kỳ. Khi vẽ $\text{đah}S_K$, cho $P = 1$ di động có phương cùng phương với hệ lực đã cho.

3.3.1. Tải trọng tập trung

Giả sử trên công trình có có hệ lực tập trung $P_1, P_2, \dots, P_n$ như trên hình 3.16.

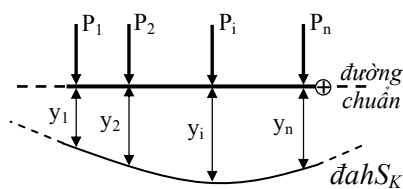
Tung độ y_i là giá trị của đại lượng S_K khi có một lực $P = 1$ đặt tại vị trí của P_i gây ra, vậy nên giá trị của đại lượng S_K do P_i gây ra là $S_{KP_i} = P_i \cdot y_i$

Theo nguyên lý cộng tác dụng thì:

$$S_K = S_{KP_1} + S_{KP_2} + \dots + S_{KP_i} + \dots + S_{KP_n} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \dots + P_i \cdot y_i + \dots + P_n \cdot y_n$$

$$\text{Hay} \quad S_K = \sum_{i=1}^n S_{KP_i} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i \quad (3-1)$$

Như vậy giá trị của đại lượng S_K do các lực tập trung gây ra bằng tổng đại số các tích số giữa giá trị của lực tập trung với tung độ đường ảnh hưởng tại các điểm đặt lực tương ứng.



Hình 3.16

+ Các lực P_i được coi là dương khi nó cùng chiều với lực $P = 1$ khi vẽ đường ảnh hưởng.

+ Dấu của tung độ y_i lấy theo dấu của $\delta a h S_K$.

3.3.2. Tải trọng phân bố

Giả sử công trình chịu tác dụng của tải trọng phân bố biến đổi theo quy luật $q(z)$ như trên *hình 3.17*.

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng trên chiều dài dz (phần gạch chéo trên *hình 3.17*). Có thể xem phân tố tải trọng này như một lực tập trung $dP = q(z)dz$ và hãy xác định giá trị của đại lượng dS_K do lực dP gây ra theo (3-1):

$$dS_K = dP \cdot y(z) = q(z)dz \cdot y(z)$$

Do vậy giá trị của đại lượng S_K do cả đoạn tải trọng phân bố gây ra là:

$$S_{Kq} = \int_{z_a}^{z_b} dS_K = \int_{z_a}^{z_b} q(z)y(z)ds \quad (3-2)$$

Trường hợp tải trọng phân bố đều ($q = \text{const}$) ta có:

$$S_{Kq} = q \int_{z_a}^{z_b} y(z)ds = q \cdot \Omega$$

Khi có nhiều đoạn lực phân bố thì:

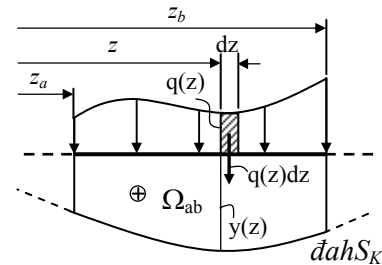
$$S_{Kq} = \sum_{i=1}^n S_{Kq_i} = \sum_{i=1}^n q_i \Omega_i \quad (3-3)$$

Trong đó Ω_i là diện tích của phần $\delta a h S_K$ nằm dưới đoạn tải trọng phân bố đều q_i .

Như vậy, giá trị của đại lượng S_K do tải trọng phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ tải trọng q với diện tích của phần đường ảnh hưởng nằm dưới đoạn tải trọng.

+ Lực phân bố q_i là dương nếu nó cùng chiều với chiều của lực $P=1$ dùng để vẽ $\delta a h S_K$.

+ Dấu của diện tích Ω_i lấy theo dấu của $\delta a h S_K$.



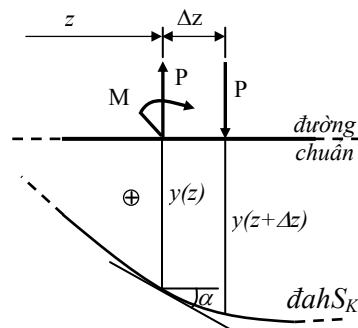
Hình 3.17

3.3.3. Mô men tập trung

Giả sử trên công trình có mô men tập trung M tác dụng như *hình 3.18*.

Thay thế mô men tập trung M đặt tại hoành độ z bằng một ngẫu lực gồm hai lực tập trung P có cánh tay đòn Δz , với Δz tiến tới 0. Theo (3-1) ta xác định được đại lượng S_K do hai lực này gây ra là:

$$S_K = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [P \cdot y(z + \Delta z) - P \cdot y(z)]$$



Hình 3.18

Thay $P = \frac{M}{\Delta z}$ ta có:

$$S_{KM} = M \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} = M \cdot y'(z)$$

Hay $S_{KM} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Khi có nhiều mô men tập trung tác dụng thì:

$$S_{KM} = \sum_{i=1}^n S_{KM_i} = \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad (3-4)$$

Như vậy, ảnh hưởng của mô men tập trung đến đại lượng S_K bằng giá trị của mô men tập trung nhân với giá trị đạo hàm của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mô men hay nhân với tang của góc giữa tiếp tuyến của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mô men với phương của đường chuẩn.

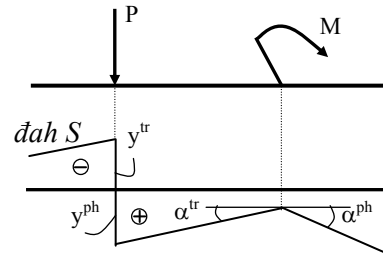
+ Mô men tập trung M_i là dương khi có chiều quay thuận chiều kim đồng hồ.

+ $\operatorname{tg} \alpha_i$ là dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.

Chú ý:

1) Trường hợp đường ảnh hưởng có bước nhảy tại nơi đặt lực tập trung, hoặc có mũi gãy tại nơi đặt mô men tập trung (Hình 3.19), lúc này ta phải tính hai giá trị của đại lượng S_K tương ứng với tiết diện bên trái và bên phải của điểm đặt lực.

$$\begin{aligned} S_K^{\text{tr}} &= P \cdot y^{\text{ph}} & \text{hoặc} & & S_K^{\text{tr}} &= M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{ph}} \\ S_K^{\text{ph}} &= P \cdot y^{\text{tr}} & \text{hoặc} & & S_K^{\text{ph}} &= M \cdot \operatorname{tg} \alpha^{\text{tr}} \end{aligned} \quad (3-5)$$

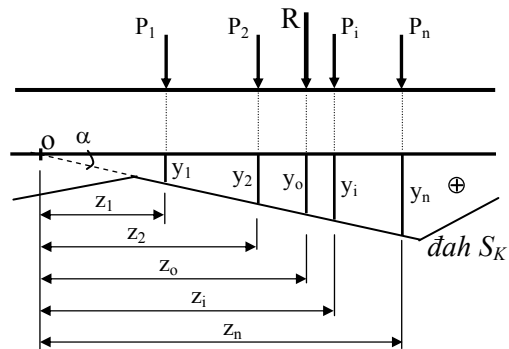


Hình 3.19

2) Trường hợp có nhiều lực tác dụng trên cùng một đoạn thẳng nào đó của $\text{đường } S_K$ như trên hình 3.20, thì trong công thức (3-1) ta có thể thay thế các lực đó bằng hợp lực của chúng.

Giả sử trên phần đường thẳng của $\text{đường } S_K$ có các lực $P_1, P_2, \dots, P_n$ tác dụng và hợp lực của chúng là R .

Gọi α là góc hợp bởi đoạn thẳng này với đường chuẩn và khoảng cách từ các lực tập trung tới giao điểm 0 (xem hình vẽ) là $z_1, z_2, \dots, z_n$ và của hợp lực là z_0 khi đó theo (3-1) ta có:



Hình 3.20

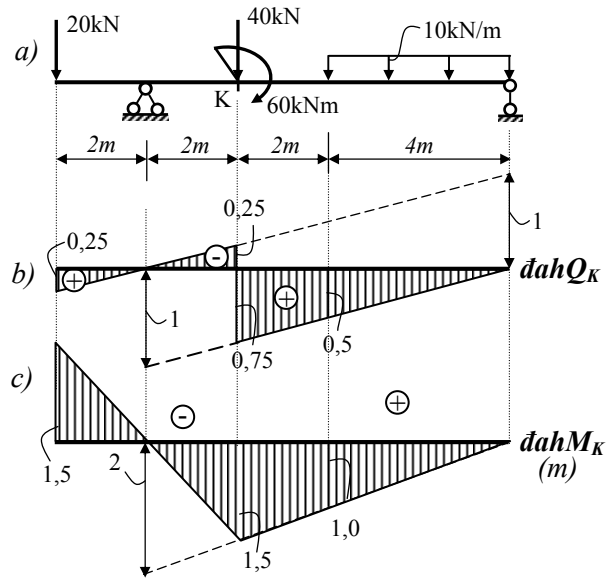
$$\begin{aligned} S_K &= P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = P_1 z_1 \operatorname{tg} \alpha + P_2 z_2 \operatorname{tg} \alpha + \dots + P_n z_n \operatorname{tg} \alpha \\ S_K &= \Sigma (P_i z_i) \operatorname{tg} \alpha = R \cdot z_0 \operatorname{tg} \alpha = R \cdot y_0 \end{aligned} \quad (3-6)$$

(Vì mô men của một hệ lực lấy đối với một điểm bằng mô men của hợp lực của chúng lấy đối với điểm đó), (3-6) là điều phải chứng minh.

Ví dụ 3-1: Tính giá trị mô men uốn và lực cắt tại tiết diện K của dầm cho trên hình 3.21a bằng phương pháp đường ảnh hưởng.

$\text{đah}Q_K$ và $\text{đah}M_K$ do $P = 1$ di động vẽ được như trên hình 3.21b,c. Tại tiết diện K có mô men tập trung và lực tập trung nên cần phải xác định các giá trị của mô men uốn và lực cắt ứng với các tiết diện ở bên trái và bên phải điểm đặt mô men và lực tập trung.

+ Nội lực tại tiết diện bên trái tiết diện K:



Hình 3.21

$$M_K^{\text{tr}} = 60 \cdot \left(-\frac{1,5}{6} \right) + 20 \cdot (-1,5) + 40 \cdot 1,5 + 10 \cdot \left(\frac{1,4}{2} \right) = 35 \text{ kNm (căng dưới)}$$

$$Q_K^{\text{tr}} = 60 \cdot \left(-\frac{0,75}{6} \right) + 20 \cdot (0,25) + 40 \cdot 0,75 + 10 \cdot \left(\frac{0,5 \cdot 4}{2} \right) = +37,5 \text{ kN}$$

+ Nội lực tại tiết diện bên phải tiết diện K:

$$M_K^{\text{ph}} = 60 \cdot \left(\frac{1,5}{2} \right) + 20 \cdot (-1,5) + 40 \cdot (1,5) + 10 \cdot \left(\frac{1,4}{2} \right) = 95 \text{ kNm (căng dưới)}$$

$$Q_K^{\text{ph}} = 60 \cdot \left(-\frac{0,25}{2} \right) + 20 \cdot 0,25 + 40 \cdot (-0,25) + 10 \cdot \frac{0,5 \cdot 4}{2} = -2,5 \text{ kN}$$

Nếu dùng phương pháp mặt cắt ta cũng sẽ tính được các giá trị nội lực như trên.

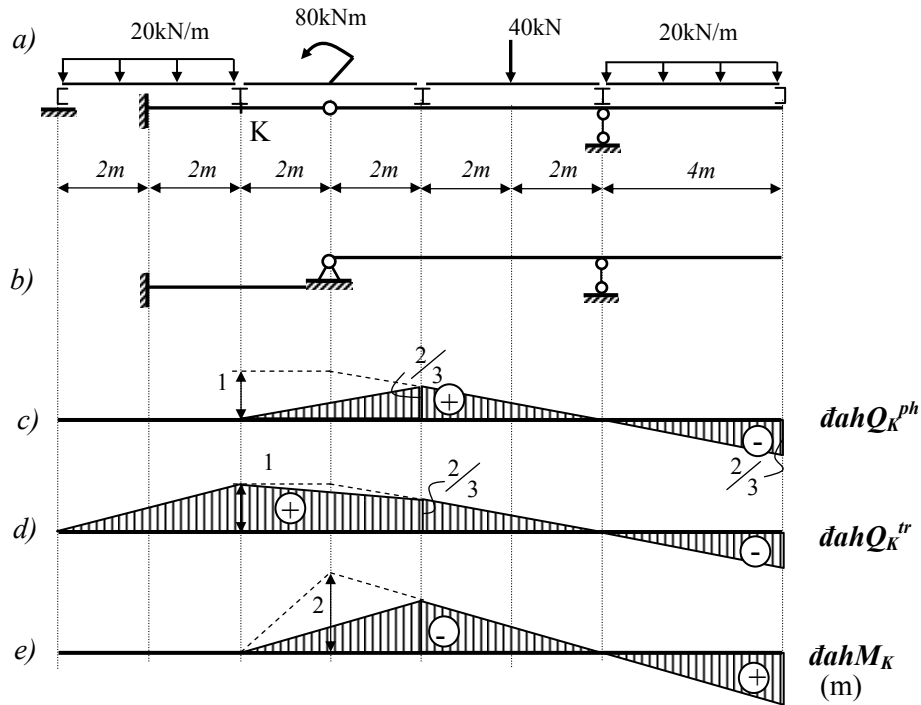
Ví dụ 3-2: Tính giá trị nội lực tại tiết diện K của dầm có mắt truyền lực chịu tải trọng cho như trên hình 3.22a bằng phương pháp đường ảnh hưởng.

Giải: Thứ tự tiến hành:

1. Phân tích sơ đồ tải trọng như hình 3.22b.

2. Vẽ các đường ảnh hưởng nội lực tại K. Với $\text{đah}Q_K$, ta phải vẽ $\text{đah}Q_K^{\text{tr}}$ và $\text{đah}Q_K^{\text{ph}}$ vì tại K có mắt truyền lực đặt vào.

Các đường ảnh hưởng nội lực trên hình 3.22c,d và e.



Hình 3.22

3. Tính các giá trị nội lực tại K:

$$Q_K^{ph} = -80 \cdot \left(\frac{2/3 - 0}{4} \right) + 40 \cdot \frac{1}{3} - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{80}{3} \text{ kN}$$

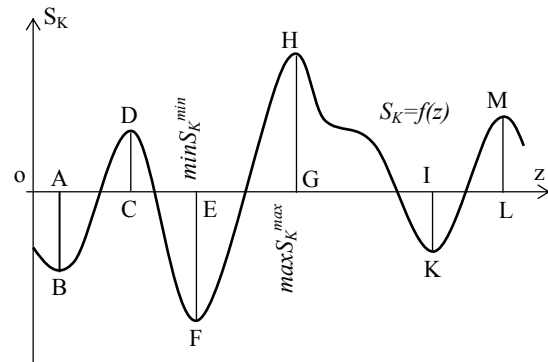
$$Q_K^{tr} = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 1) - 80 \cdot \left(\frac{2/3 - 1}{4} \right) + 40 \cdot \frac{1}{3} - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{2}{3} \right) = +\frac{100}{3} \text{ kN}$$

$$M_K = -80 \cdot \left(\frac{-4/3 - 0}{4} \right) - 40 \cdot \frac{2}{3} + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{160}{3} \text{ kNm.}$$

3.4. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI NHẤT CỦA ĐOÀN TẢI TRỌNG DI ĐỘNG BẢNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

Khi tính toán công trình dưới tác dụng của tải trọng di động, các đoàn tải trọng như: đoàn xe lửa, đoàn ô tô, đoàn người đi lại .v.v... khi di động phải tuân thủ những quy định cụ thể về tải trọng, khoảng cách.v.v.. Những đoàn tải trọng như vậy gọi là đoàn tải trọng tiêu chuẩn. Tùy theo mục đích sử dụng, mỗi công trình được tính toán với một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nhất định. Vị trí của đoàn tải trọng di động được xác định theo tọa độ z của một trong số các tải trọng trong đoàn. Bởi vậy đại lượng nghiên cứu S_K cũng biến đổi phụ thuộc vào tọa độ z, nghĩa là $S_K = f(z)$.

Như trên đã biết, vị trí bất lợi nhất (vị trí để tính) của đoàn tải trọng di động đối với S_K là vị trí gây ảnh hưởng lớn nhất đến đại lượng nghiên cứu S_K . Do đó việc tìm vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng có liên quan đến việc tìm cực trị của hàm $S_K=f(z)$. Nói chung hàm $S_K = f(z)$ đạt cực trị nhiều lần ứng với một số vị trí nào đó của đoàn tải trọng.



Hình 3.23

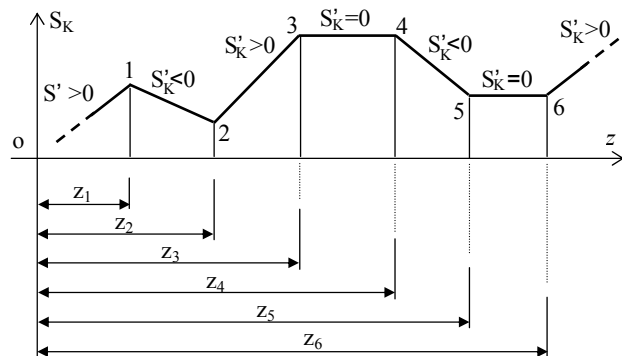
Trong số những cực trị đó có cực trị lớn nhất về trị số tương ứng với từng dấu của nó (đoạn EF và đoạn GH trên hình 3.23), ta ký hiệu là $\max S_{K \max}$ (hoặc $\min S_{K \min}$). Vị trí của đoàn tải trọng ứng với vị trí có $\max S_{K \max}$ (hoặc $\min S_{K \min}$) là các vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng đối với đại lượng S_K .

Như vậy, đường lối chung để tìm vị trí bất lợi nhất là lần lượt cho đoàn tải trọng di động tới mọi vị trí trên công trình, phát hiện hết các vị trí mà ở đó hàm $S_K = f(z)$ đạt cực trị (cho $S_{K \max}$ hay $S_{K \min}$), so sánh các $S_{K \max}$ (hoặc $S_{K \min}$) để tìm ra $\max S_{K \max}$ (hoặc $\min S_{K \min}$), vị trí có $\max S_{K \max}$ (hoặc $\min S_{K \min}$) là vị trí bất lợi nhất cần tìm.

Biểu hiện cực trị về mặt toán học như sau:

+ Nếu hàm $S_K = f(z)$ liên tục và đạo hàm cấp một $S'_K = f'(z)$ cũng liên tục thì điều kiện cực trị xảy ra khi đạo hàm cấp một bằng không ($S'_K = f'(z) = \frac{dS_K}{dz} = 0$). Hàm S_K sẽ đạt cực đại hay cực tiểu tùy theo đạo hàm cấp hai của nó âm hoặc dương. Trong thực hành ta ít gặp trường hợp này vì đạo hàm $S'_K = f'(z)$ thường không liên tục.

+ Nếu hàm $S_K = f(z)$ liên tục nhưng đạo hàm cấp một của nó không liên tục (Hình 3.24) thì khi tìm cực trị ta thường xét dấu của đạo hàm cấp một. Trên hình 3.24 tại các điểm có hoành độ z_1, z_3, z_4 hàm S_K đạt cực đại, còn lại các điểm có hoành độ z_2, z_5, z_6 hoành độ S_K đạt cực tiểu.



Hình 3.24

Ta thấy, tại nơi S_K đạt cực đại (gọi z_1 là hoành độ có cực đại), đạo hàm cấp một khi chuyển từ trái sang phải, phải thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$\begin{array}{ll} \text{Chuyển từ: } \frac{dS_K}{dz} \geq 0 & \text{sang } \frac{dS_K}{dz} \leq 0 \\ \text{(tại } z = z_i - dz) & \text{(tại } z = z_i + dz) \end{array} \quad (3-7)$$

Tại nơi hàm đạt cực tiểu, đạo hàm cấp một phải:

$$\begin{array}{ll} \text{Chuyển từ: } \frac{dS_K}{dz} \leq 0 & \text{sang } \frac{dS_K}{dz} \geq 0 \\ \text{(tại } z = z_i - dz) & \text{(tại } z = z_i + dz) \end{array} \quad (3-8)$$

Vì tải trọng và đường ảnh hưởng có nhiều dạng khác nhau, nên không có một nguyên tắc chung cụ thể nào để tìm vị trí bất lợi. Dưới đây sẽ trình bày một trường hợp hay gặp trong thực tế. Đó là: trường hợp đoàn tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng dạng đa giác.

Trong trường hợp này để phát hiện các vị trí cực trị của S_K , ta dùng cách thử dần. Để giảm nhẹ khối lượng tính toán, ta dựa vào một số tính chất sau:

1) Hàm S_K chỉ có thể đạt cực trị khi có ít nhất một trong số các lực tập trung đặt vào một đỉnh nào đó của $\text{đah}S_K$.

Xét $\text{đah}S_K$ có dạng đa giác một đầu (Hình 3.25), ở đó R_j ($j=1, 2, \dots, m$) là hợp của các lực tác dụng trên đoạn thẳng thứ j của đường ảnh hưởng. Gọi các góc nghiêng của từng đoạn thẳng đường ảnh hưởng với đường chuẩn là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Dưới tác dụng của các tải trọng P ta có thể xác định đại lượng S_K theo công thức (3-6)

$$S_K = \sum_{j=1}^m R_j y_j$$

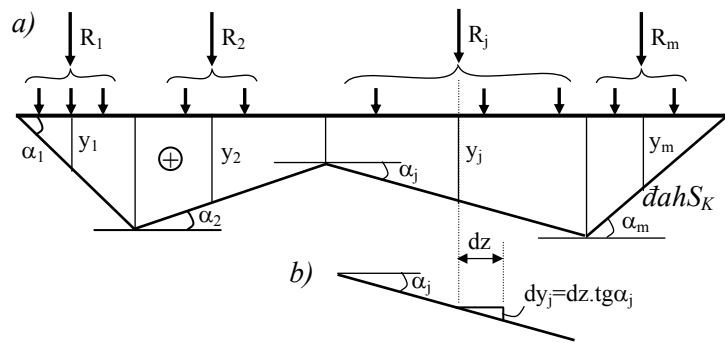
Giả sử cho đoàn tải trọng dịch sang phải một lượng vô cùng bé dz , thì S_K sẽ thay đổi một lượng vi phân

$$dS_K = \sum_{j=1}^m R_j dy_j$$

mà $dy_j = dz \cdot \text{tg} \alpha_j$ (xem hình 2.12b)

$$\text{Nên } dS_K = \sum_{j=1}^m R_j \text{tg} \alpha_j dz \quad \text{hay } \frac{dS_K}{dz} = \sum_{j=1}^m R_j \text{tg} \alpha_j \quad (3-9)$$

(3-9) là biểu thức tính đạo hàm cấp một của S_K dựa vào $\text{đah}S_K$. Muốn S_K đạt cực trị thì đạo hàm cấp một này phải đổi dấu. Điều này chỉ xảy ra khi R_j thay đổi (vì $\text{tg} \alpha_j$ trong (3-9)



Hình 3.25

không đổi), muốn vậy, phải có ít nhất một trong số các tải trọng dịch chuyển từ đoạn thẳng này sang đoạn thẳng khác, nghĩa là phải vượt qua một đỉnh nào đó của ∂ahS_K . Đó là điều phải chứng minh.

Kí hiệu tải trọng đặt ở đỉnh ∂ahS_K làm cho S_K đạt cực trị ($\frac{dS_K}{dz}$ đổi dấu) là P^* . Tính chất trên chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ, vì không phải lực P nào đặt ở đỉnh ∂ahS_K cũng là P^* .

2) Nếu tải trọng P^* đặt ở một đỉnh lồi của đường ảnh hưởng thì đại lượng S_K sẽ có giá trị tuyệt đối cực đại, còn đi qua đỉnh lõm thì S_K sẽ có giá trị tuyệt đối cực tiểu.

Xét ∂ahS_K mang dấu dương và đoàn tải trọng dịch chuyển hướng sang phải như trên hình 3.26.

Giả sử có một lực P^* trùng với một đỉnh nào đó của ∂ahS_K . Theo (3-7) và (3-8) nếu:

$$\left(\frac{dS_K}{dz}\right)^{ph} - \left(\frac{dS_K}{dz}\right)^{tr} = \Delta \frac{dS_K}{dz} < 0$$

thì S_K đạt cực đại, còn nếu $\Delta \frac{dS_K}{dz} > 0$ thì S_K đạt cực tiểu. Mặt khác theo (3-9), khi P^* dịch chuyển từ bên trái sang phải đỉnh ta có:

$$\Delta \frac{dS_K}{dz} = \left(\sum_{j=1}^m R_j \operatorname{tg} \alpha_j + P^* \operatorname{tg} \alpha^{ph} \right) - \left(\sum_{j=1}^m R_j \operatorname{tg} \alpha_j + P^* \operatorname{tg} \alpha^{tr} \right) = P^* (\operatorname{tg} \alpha^{ph} - \operatorname{tg} \alpha^{tr}) = P^* \Delta \operatorname{tg} \alpha.$$

Rõ ràng là nếu đường ảnh hưởng mang dấu dương và đỉnh lồi thì $\Delta \operatorname{tg} \alpha < 0$ ($\operatorname{tg} \alpha^{ph} < \operatorname{tg} \alpha^{tr}$ về trị đại số), còn khi đỉnh lõm thì $\Delta \operatorname{tg} \alpha > 0$ ($\operatorname{tg} \alpha^{ph} > \operatorname{tg} \alpha^{tr}$ về trị đại số).

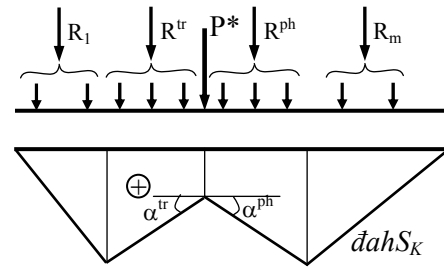
Vậy khi P^* đặt ở đỉnh lồi $\Delta \frac{dS_K}{dz} = P^* \operatorname{tg} \alpha < 0$; S_K có giá trị cực đại. Còn khi P^* đặt ở đỉnh lõm $\Delta \frac{dS_K}{dz} = P^* \operatorname{tg} \alpha > 0$; S_K có giá trị cực tiểu. Đó là điều cần chứng minh.

Đối với ∂ahS_K mang dấu âm chứng minh cũng tương tự.

Từ những tính chất trên rút ra kết luận: Vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác một dấu chỉ có thể xảy ra khi có ít nhất một trong số các tải trọng đó đặt tại một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng.

Dựa vào kết luận này, ta có thể tìm vị trí bất lợi theo cách thử dần như sau: Lần lượt cho từng tải trọng tập trung đặt tại từng đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Mỗi lần đặt thử như vậy cần tiến hành:

+ Tính đạo hàm cấp một $\frac{dS_K}{dz}$ theo công thức (3-9) trong hai trường hợp: Khi đoàn tải trọng ở bên trái và bên phải vị trí vừa giả thiết một đoạn dz .



Hình 3.26

+ Nếu trong hai lần tính, đạo hàm $\frac{dS_K}{dz}$ đổi dấu, đại lượng S_K đạt cực đại (nếu $\frac{dS_K}{dz}$ mang dấu dương), hoặc cực tiểu (nếu $\frac{dS_K}{dz}$ mang dấu âm). Tính $S_{K_{\max}}$ (hoặc $S_{K_{\min}}$) theo công thức (3-1)

Nếu đạo hàm cấp một $\frac{dS_K}{dz}$ không đổi dấu, chứng tỏ lực P giả thiết đặt trên đỉnh lồi của $\frac{dS_K}{dz}$ không phải là P^* , lúc này dịch đoàn tải trọng sang phía khác. Nếu tìm $S_{K_{\min}}$ mà cả hai lần tính $\frac{dS_K}{dz} > 0$ thì cho đoàn tải trọng dịch chuyển theo chiều chuyển động (sang phải); còn nếu cả hai lần tính $\frac{dS_K}{dz} < 0$ thì dịch đoàn tải trọng theo chiều ngược lại. Nếu tìm $S_{K_{\min}}$ thì làm ngược lại.

+ So sánh các $S_{K_{\max}}$ (hoặc $S_{K_{\min}}$) để tìm $\max S_{K_{\max}}$ (hoặc $\min S_{K_{\min}}$), vị trí tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí bất lợi nhất cần tìm.

Về nguyên tắc, nếu có n lực tập trung và m đỉnh lồi của $\frac{dS_K}{dz}$, thì phải thử $(n \times m)$ lần như trên. Song thực tế có thể loại bớt một số lần thử, vì vị trí bất lợi thường xảy ra khi các tải trọng lớn nằm trên phần đường ảnh hưởng có tung độ lớn và càng nhiều tải trọng nằm trong phạm vi đường ảnh hưởng càng tốt.

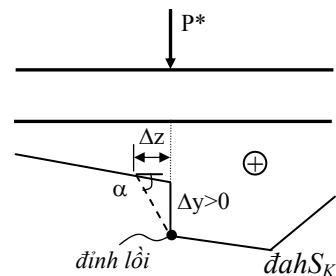
Chú ý:

1) Trường hợp $\frac{dS_K}{dz}$ có bước nhảy, ta coi bước nhảy như một đoạn phụ có:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta z} = \pm \infty \text{ (vì } \Delta z \rightarrow 0 \text{);}$$

dấu (+) hay dấu (-) tùy thuộc vào $\Delta y = y^{\text{ph}} - y^{\text{tr}}$ dương hay âm. Ta thấy:

+ Khi $\Delta y > 0$ (xem hình 3.27) đại lượng sẽ đạt giá trị cực đại nếu $\frac{dS_K}{dz} \leq 0$ ứng với P^* ở bên phải đỉnh lồi (bên phải bước nhảy) một đoạn dz (vì đạo hàm bên trái bằng $+\infty$).



Hình 3.27

+ Khi $\Delta y < 0$, thì S_K đạt cực đại nếu $\frac{dS_K}{dz} \geq 0$, ứng với P^* giả thiết ở bên trái đỉnh lồi (bên trái bước nhảy).

2) Trường hợp $\frac{dS_K}{dz}$ có dạng đa giác hai đầu, lúc này ta phải tìm cả $\max S_{K_{\max}}$ và $\min S_{K_{\min}}$. Xét hai trường hợp:

+ Nếu đoàn tải trọng có thể cắt rời được (chỉ khống chế khoảng cách tối thiểu giữa các tải trọng như đoàn ô tô...) thì tách chúng ra từng nhóm riêng biệt để bố trí chúng trên từng phần đường ảnh hưởng dương (nếu tìm $S_{K_{\max}}$) hoặc âm (nếu tìm $S_{K_{\min}}$), ta trở về trường hợp $\frac{dS_K}{dz}$ có một dấu.

+ Nếu đoàn tải trọng không cắt rời ra được (đoàn xe lửa...), việc tính toán vẫn như khi $\frac{dS_K}{dz}$ có một dấu, nhưng phải kể tới ảnh hưởng của tải trọng đặt ở phần đường ảnh hưởng khác dấu. Các tải trọng này làm giảm giá trị đại lượng nghiên cứu.

3) Trường hợp có tải trọng phân bố di động, ta phân chúng thành nhiều lực tập trung để tính gần đúng.

Ví dụ 3-3: Xác định vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng di động đối với đại lượng S_K có đường ảnh hưởng như trên hình 3.28a.

1. Tính các $\operatorname{tg}\alpha_i$ với giả thiết tải trọng di động hướng sang phải.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0,75; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = 0,25; \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = -0,5;$$

2. Tính số đỉnh lồi của đường ảnh hưởng:

$$\Delta\operatorname{tg}\alpha_{12} = \operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1 = 0,25 - 0,75 = -0,5 < 0 \quad \text{đỉnh lồi.}$$

$$\Delta\operatorname{tg}\alpha_{23} = \operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2 = -0,5 - 0,25 = -0,75 < 0 \quad \text{đỉnh lồi.}$$

3. Phát hiện các vị trí đặt lực ở

đó $\frac{dS_K}{dz}$ đổi dấu.

Hệ có 4 lực tập trung và hai đỉnh lồi, ta phải thử $4 \times 2 = 8$ vị trí đặt lực, nhưng do tìm $S_{K\max}$ nên ta chỉ cần giả thiết 4 vị trí để tính thử như hình 3.28b,c,d và e là đủ.

Thử lần 1: Cho lực P_1 đặt trên đỉnh lồi có tung độ bằng 4 (trên hình vẽ, lực giả thiết là P^* được đánh thêm dấu $\times$) xem hình 3.28b. Xét hai trường hợp.

+ Khi P_1 ở bên trái đỉnh (P_1 nằm trên đoạn 2) ta có:

$$\frac{dS_K}{dz} = 30 \cdot 0,75 + (50 + 30) \cdot 0,25 = 42,5 > 0$$

+ Khi P_1 ở bên phải đỉnh (P_1 nằm trên đoạn 3) ta có:

$$\frac{dS_K}{dz} = 30 \cdot 0,75 + 50 \cdot 0,25 + 30 \cdot (-0,5) = 20 > 0$$

Trong cả hai lần tính $\frac{dS_K}{dz}$ đều dương, lực P_1 đặt trên đỉnh này không phải là P^* . Cho đoàn tải trọng dịch tiếp sang phải.

Thử lần 2: Lúc này lực P_2 trùng đỉnh có tung độ bằng 4, đồng thời lực P_3 trùng đỉnh có tung độ bằng 3 (Hình 3.28c), ta có:

+ Khi đoàn tải trọng nằm bên trái vị trí đang xét, tính:

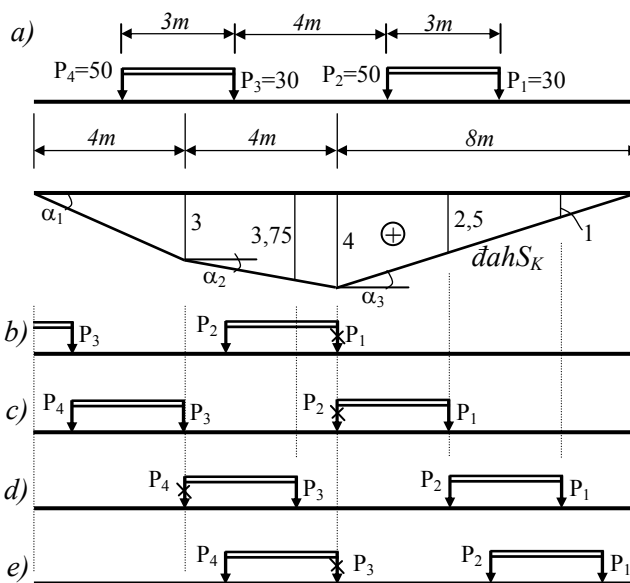
$$\frac{dS_K}{dz} = (50 + 30) \cdot 0,75 + 50 \cdot 0,25 + 30 \cdot (-0,5) = 57,5 > 0$$

+ Khi đoàn tải trọng nằm bên phải vị trí đang xét, tính:

$$\frac{dS_K}{dz} = 50 \cdot 0,75 + 30 \cdot 0,25 + (50 + 30) \cdot (-0,5) = 5 > 0$$

Ở vị trí này đoàn tải trọng không cho S_K đạt cực trị. Tiếp tục dịch sang phải, lực P_4 sẽ gặp đỉnh có tung độ bằng 3.

Thử lần 3: Cho P_4 đặt ở đỉnh lồi có tung độ bằng 3 (Hình 3.28d)



Hình 3.28

+ Khi P_4 ở bên trái đỉnh, tính:

$$\frac{dS_K}{dz} = 50.0,75 + 30.0,25 + (50 + 30).(-0,5) = 5 > 0$$

+ Khi P_4 ở bên phải đỉnh, tính:

$$\frac{dS_K}{dz} = (50 + 30).0,25 + (50 + 30).(-0,5) = -20 < 0$$

Vậy theo điều kiện (3-7), lực P_4 đặt ở đỉnh đang xét là P^* . Đại lượng S_K lúc này đạt cực đại.

Thử lần 4: Tiếp tục dịch đoàn tải trọng sang phải, lực P_3 đặt ở đỉnh có tung độ bằng 4 (Hình 3.28e)

+ Khi lực P_3 ở bên trái đỉnh, tính:

$$\frac{dS_K}{dz} = (50 + 30).0,25 + (50 + 30).(-0,5) = -20 < 0$$

+ Khi lực P_3 ở bên phải đỉnh, tính:

$$\frac{dS_K}{dz} = 50.0,25 + (50 + 30 + 50).(-0,5) = -42,5 < 0$$

Ở vị trí này đoàn tải trọng không cho S_K đạt cực trị. Cả hai lần tính $\frac{dS_K}{dz}$ đều âm, nếu tiếp tục dịch đoàn tải trọng sang phải thì các đạo hàm $\frac{dS_K}{dz}$ càng âm cho đến khi đoàn tải trọng ra khỏi $\text{đanh}S_K$. Như vậy trường hợp này, vị trí của đoàn tải trọng đặt trong lần thứ 3 là duy nhất hàm S_K đạt cực đại, đây là vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng đối với đại lượng S_K đang xét.

4. Tính giá trị $\max S_{K_{\max}}$.

Từ vị trí bất lợi nhất (Hình 3.28d) ta xác định giá trị của đại lượng S_K theo công thức (3-1).

$$\max S_{K_{\max}} = 50.3 + 30.(3 + 0,75.1) + 50.2,5 + 30.1 = 417,5 \text{ đơn vị của } S_K.$$

3.5. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Khi thiết kế công trình dưới tác dụng đồng thời của cả tải trọng bất động và tải trọng di động, ta phải biết được giá trị nội lực lớn nhất và nhỏ nhất có thể xảy ra tại các tiết diện của công trình.

Biểu đồ nội lực, mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị nội lực lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) có thể xảy ra tại tiết diện tương ứng, gọi là biểu đồ bao nội lực.

Rõ ràng, công trình được thiết kế theo biểu đồ bao nội lực sẽ bền vững dưới tác dụng của tải trọng bất kỳ.

Xét tung độ K của biểu đồ bao nội lực S nào đó (ký hiệu là S_K^b), theo nguyên lý cộng tác dụng, sẽ gồm giá trị của S_K do tải trọng bất động gây ra (ký hiệu là S_K^{bd}) là một số xác định không đổi, cộng với giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của S_K do tải trọng di động gây ra (ký hiệu là $\max S_K^{bd}$ và $\min S_K^{dd}$). Có thể biểu diễn dưới dạng toán học:

Một tung độ K của biểu đồ bao $\max$ và $\min$.

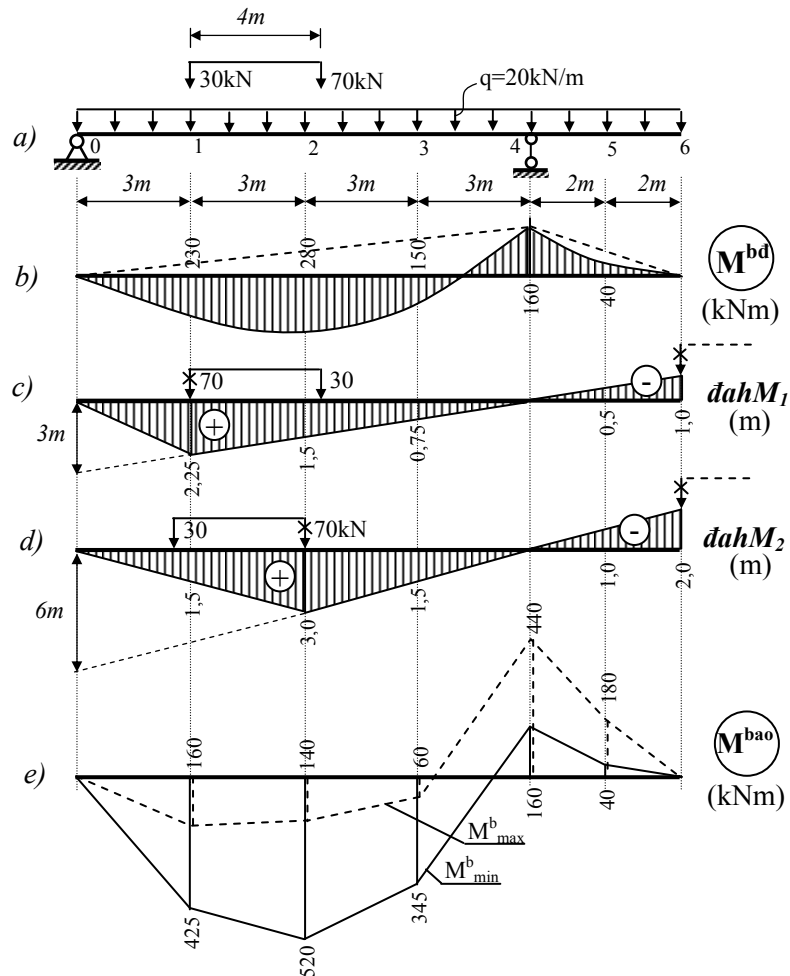
$$S_{K\max}^b = S_K^{bd} + \max S_K^{bd} \quad S_{K\min}^b = S_K^{bd} + \min S_K^{bd} \quad (3-10)$$

Còn cả biểu đồ bao max và min:

$$S_{\max}^b = S^{bd} + \max S^{dd} \quad S_{\min}^b = S^{bd} + \min S^{dd} \quad (3-11)$$

Để xác định giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của S_K do tải trọng di động gây ra ta sử dụng đồ S_K như đã trình bày. Khi vẽ biểu đồ bao nội lực, ta thường chia kết cấu ra làm nhiều đoạn, tính các tung độ biểu đồ bao tại các điểm chia, rồi nối các tung độ bằng các đoạn thẳng.

Ví dụ 3-4: Vẽ biểu đồ bao nội lực mô men uốn của dầm trên hình 3.29 chịu tác dụng của trọng lượng bản thân $q = 20\text{kN/m}$ (tải trọng cố định) và hệ lực di động P_1, P_2 (tải trọng tạm thời).



Hình 3.29

Biểu đồ M^{bd} do $q=20\text{kN/m}$ gây ra vẽ được trên hình 3.29b.

Chia dầm làm sáu đoạn. Để xác định bảy giá trị $\max M_K^{dd}$ và bảy giá trị $\min M_K^{dd}$ ta phải vẽ bảy đường ảnh hưởng mômen cho bảy tiết diện tương ứng với giả thiết lực $P = 1$ di động có phương thẳng đứng và chiều hướng xuống. (Tất nhiên, hai tung độ biểu đồ bao ở hai đầu dầm là đã biết bằng không, nên chỉ còn lại năm tiết diện).

Trên hình 3.29c,d cho ta $\text{đah}M_1$, và $\text{đah}M_2$ (các tiết diện còn lại làm tương tự), và vị trí của tải trọng di động cho $\max M_i^{\text{đđ}}$ (vẽ nét liền), và cho $\min M_i^{\text{đđ}}$ (vẽ nét đứt). Ứng với hai tiết diện 1 và 2 ta có:

$$\max M_1^{\text{đđ}} = 70.2,25 + 30.1,25 = 195 \text{ kNm}; \quad \min M_1^{\text{đđ}} = 70.(-1) = -70 \text{ kNm}$$

$$\max M_2^{\text{đđ}} = 30.1 + 70.3 = 240 \text{ kNm}; \quad \min M_2^{\text{đđ}} = 70.(-2) = -140 \text{ kNm}$$

Tung độ biểu đồ bao mô men tại tiết diện 1 và 2 tính theo công thức (3-10):

$$\max M_1^b = 230 + 195 = 425 \text{ kNm}; \quad \min M_1^b = 230 - 70 = 160 \text{ kNm}$$

$$\max M_2^b = 280 + 240 = 520 \text{ kNm}; \quad \min M_2^b = 280 - 140 = 140 \text{ kNm}$$

Các tiết diện 3, 4, 5 làm tương tự. Cuối cùng ta vẽ được các biểu đồ bao mô men max (đường liền nét) và min (đường nét đứt) trên hình 3.29e.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Vẽ đường ảnh hưởng mô men uốn, lực cắt, lực dọc cho tiết diện K của dầm cho trên hình 3.30 trong hai trường hợp:

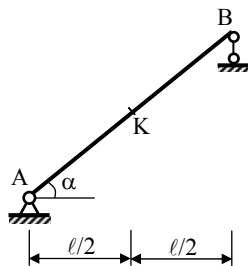
a) $P = 1$ di động có phương thẳng đứng từ A tới B.

b) $P = 1$ di động có phương nằm ngang từ A tới B.

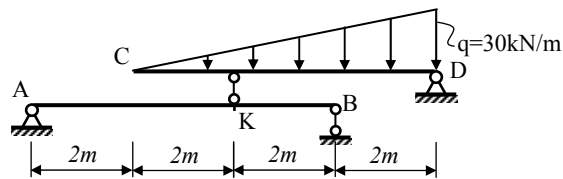
2. Tính nội lực tại tiết diện K của dầm cho trên hình 3.31 bằng phương pháp đường ảnh hưởng khi $P = 1$ di động trên dầm CD.

3. Dùng phương pháp đường ảnh hưởng xác định nội lực tại các tiết diện K_1 , K_2 , K_3 cho các dầm cho trên hình từ hình 2.37 đến hình 2.40 và hình 2.48.

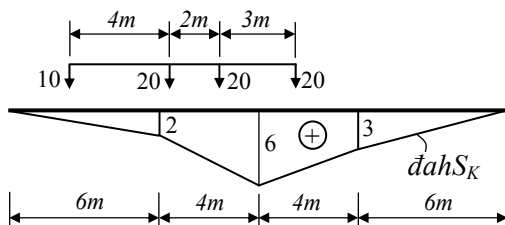
4. Tìm vị trí bất lợi nhất cho đoàn tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác cho trên hình 3.32 và hình 3.33.



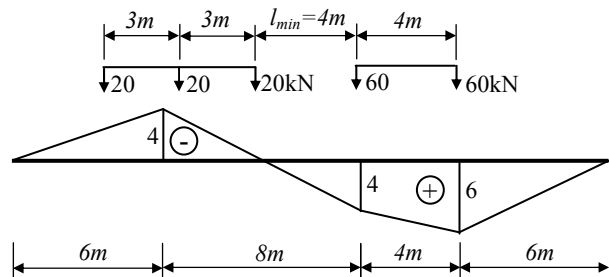
Hình 3.30



Hình 3.31



Hình 3.32



Hình 3.33

CHƯƠNG 4

CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH

Nghiên cứu cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng đàn hồi tuyến tính nhằm giải quyết hai mục đích sau:

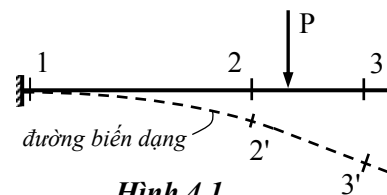
- * Kiểm tra độ cứng của công trình.
- * Chuẩn bị cơ sở cho việc nghiên cứu hệ siêu tĩnh.

Trong Sức bền vật liệu việc tính chuyển vị trong hệ đơn giản được xác định thông qua phương trình đường đàn hồi. Trong Cơ học kết cấu để đạt được hai mục đích trên ta chỉ cần xác định chuyển vị tại các vị trí xác định trên hệ kết cấu mà không cần tìm đường đàn hồi của hệ.

4.1. KHÁI NIỆM

4.1.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị

Xét dầm như hình vẽ. Khi chịu lực, trục dầm bị cong và có vị trí mới. Đường cong của trục dầm khi biến dạng gọi là đường biến dạng của trục dầm. Dưới đây chúng ta sẽ nêu ra khái niệm về biến dạng và chuyển vị.



Hình 4.1

1. Biến dạng

Sự thay đổi hình dạng hình học ban đầu của hệ gọi là biến dạng.

Biến dạng của hệ là do kết quả biến dạng của các phân tố vô cùng bé trong các cấu kiện của hệ tạo thành, hay nói một cách khác đó là kết quả của sự thay đổi kích thước và hình dạng của các phân tố trong hệ.

2. Chuyển vị

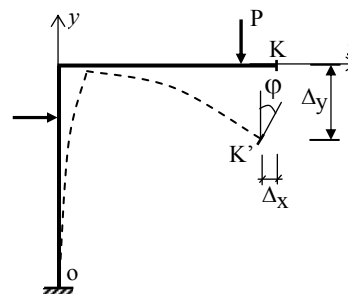
Khi hệ bị biến thì vị trí các tiết diện trong hệ cũng bị thay đổi. Sự thay đổi vị trí của các tiết diện được gọi là chuyển vị. Nói một cách khác nội lực liên quan đến biến dạng của hệ và chuyển vị là hệ quả của biến dạng. Như vậy một phân tố trong hệ có ba khả năng (Hình 4.1):

- + Không chuyển vị nhưng có biến dạng (phân tố 1). Phân tố này ở sát ngàm nên không chuyển vị được nhưng vẫn có biến dạng do tại ngàm vẫn có nội lực.
- + Có chuyển vị và có biến dạng (phân tố 2)
- + Có chuyển vị nhưng không có biến dạng (phân tố 3). Phân tố này không bị biến dạng vì tại đó không có nội lực, nhưng vẫn có chuyển vị do hệ quả biến dạng của các phân tố khác.

Trong thực hành người ta thường dùng khái niệm chuyển vị của tiết diện thay cho chuyển vị của phân tử

Xét khung trên *hình 4.2*, khi chịu tải đường biến dạng là đường nét đứt. Sau biến dạng, tại tiết diện K có các chuyển vị:

- * Chuyển vị thẳng theo phương x kí hiệu là Δ_x
- * Chuyển vị thẳng theo phương y kí hiệu là Δ_y
- * Chuyển vị góc xoay kí hiệu là φ



Hình 4.2

Để cho tổng quát các thành phần chuyển vị trên được ký hiệu chung bằng chữ Δ kèm theo hai chỉ số k và m (Δ_{km}), trong đó:

- + Chỉ số thứ nhất: “k” chỉ vị trí và phương của chuyển vị.
- + Chỉ số thứ hai: “m” chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Ta gọi δ_{km} là chuyển vị đơn vị để chỉ chuyển vị tại vị trí K, theo phương K do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra.

4.1.2. Các giả thiết áp dụng và các phương pháp tính

Khi tính toán chuyển vị của hệ thanh thẳng phẳng ta thừa nhận các giả thiết sau:

1. Vật liệu của hệ là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Húc.
2. Các chuyển vị và biến dạng của hệ là rất nhỏ so với kích thước hình học ban đầu của chúng.

Từ các giả thiết trên ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng khi tính chuyển vị của hệ do nhiều nguyên nhân tác dụng đồng thời.

Để xác định chuyển vị trong hệ thanh ta có thể đi theo một trong hai hướng sau:

- * Xuất phát từ nguyên lý bảo toàn năng lượng. Xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi.
- * Xuất phát từ nguyên lý công khả dĩ của hệ đàn hồi.

Cách xác định chuyển vị theo thế năng chỉ áp dụng được cho hệ chịu tác dụng của tải trọng, trong tính toán còn gặp nhiều bất tiện và chưa giải quyết được việc xác định chuyển vị trong những hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị gối tựa. Cách xác định chuyển vị theo nguyên lý công khả dĩ cho phép ta có thể thiết lập được công thức tính tổng quát để tính chuyển vị của hệ khi chịu nhiều nguyên nhân khác nhau. Ta chọn cách thứ hai.

4.2. CÔNG KHẢ DĨ CỦA HỆ ĐÀN HỒI

4.2.1. Định nghĩa công khả dĩ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực thực hiện trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé mà ta tưởng tượng ra, hoặc do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra. Chuyển vị và biến dạng vô cùng bé đó phải phù hợp với các điều kiện liên kết ngoại và nội của hệ, tức là thỏa mãn điều kiện động học và được gọi là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

Để phân biệt sự khác nhau giữa công thực và công khả dĩ ta xét ví dụ sau:

+ Dầm trên *hình 4.3a* chịu tác dụng của lực P_1 bị biến dạng theo đường đứt nét, tiết diện ở đầu thừa có chuyển vị Δ_{11} do chính lực P_1 gây ra gọi là chuyển vị thực.

+ Sau đó ta tác dụng tiếp thêm lực P_2 dầm bị biến dạng thêm như *hình 4.3b*. Tiết diện ở đầu thừa có thêm chuyển vị Δ_{12} theo phương của lực P_1 nhưng do lực P_2 gây ra gọi là chuyển vị khả dĩ đối với lực P_1 .

Xét mối quan hệ giữa lực (P) và chuyển vị ($\Delta\ell$) trên *hình 4.3c* ta thấy:

+ Công thực T_{11} là công do lực P_1 sinh ra trên chuyển vị thực Δ_{11} , trong quá trình biến dạng lực P_1 tăng từ 0 đến P_1 nên:

$$T_{11} = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11}$$

(là diện tích hình tam giác OAB trên *hình 4.3c*).

+ Công khả dĩ T_{12} là công do lực P_1 sinh ra trên chuyển vị khả dĩ Δ_{12} , trong quá trình biến dạng lực P_1 không thay đổi nên:

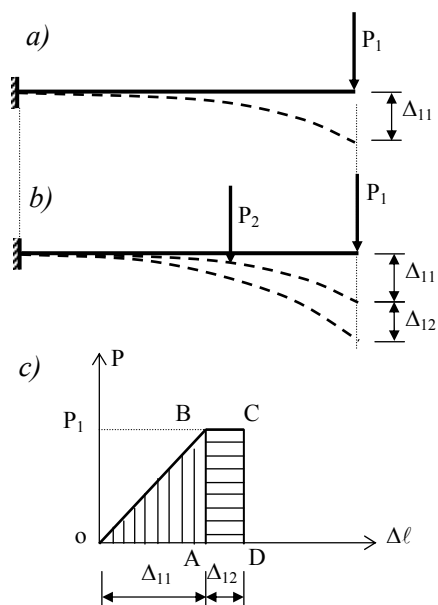
$$T_{12} = P_1 \cdot \Delta_{12}$$

(là diện tích hình chữ nhật ABCD).

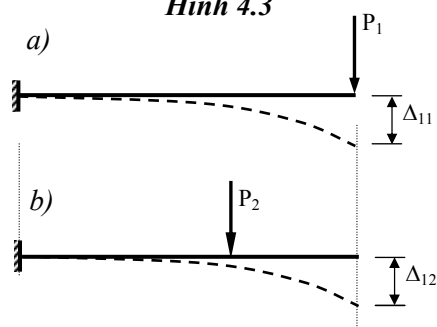
Do chuyển vị Δ_{12} không phụ thuộc vào lực P_1 nên trạng thái cân bằng biến dạng (TTCB - BD) của hệ do lực P_2 tác dụng có thể tách riêng với TTCB - BD của hệ do lực P_1 tác dụng (*Hình 4.4*).

♦ Trạng thái thứ nhất: Trạng thái lực do lực P_1 tác dụng (*Hình 4.4a*), tổng quát ta gọi là trạng thái “k” do lực P_K tác dụng (*Hình 4.5a*).

♦ Trạng thái thứ hai: Trạng thái chuyển vị khả dĩ Δ_{12} do lực P_2 tác dụng gây ra (*Hình 4.4b*), tổng quát ta gọi là trạng thái “m” (*Hình 4.5b*).



Hình 4.3



Hình 4.4

4.2.2. Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi (S.D.Poisson 1833)

Trong Cơ học lý thuyết ta đã biết nội dung nguyên lý công khả dĩ của Lagrange áp dụng cho hệ rắn tuyệt đối là:

“Điều kiện cần và đủ để một hệ chất điểm (của vật rắn) cân bằng dưới tác dụng của các lực là tổng công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng phải bằng không”.

$$T_{km} = 0 \quad (4-1)$$

Trong trường hợp hệ biến dạng đàn hồi thì ngoài công khả dĩ của các ngoại lực ta còn phải kể đến công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ. Nguyên lý được phát biểu như sau:

“Điều kiện cần và đủ để một hệ đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của các lực là tổng công khả dĩ của các ngoại lực T_{km} trên các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực V_{km} trên các biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không”.

$$T_{km} + V_{km} = 0 \quad \text{Hay} \quad T_{km} = - V_{km} \quad (4-2)$$

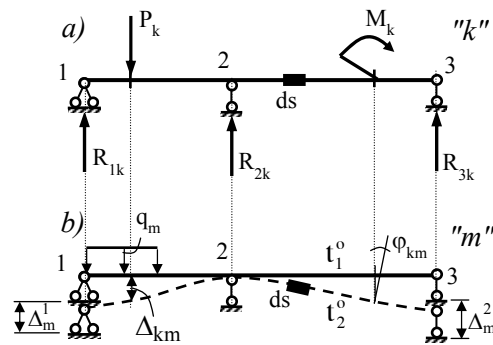
4.2.3. Công khả dĩ của ngoại lực

Khái niệm về công khả dĩ trình bày ở trên có thể mở rộng cho trường hợp hệ chịu tác dụng của nhiều lực như sau:

Xét một hệ đàn hồi cân bằng ở hai trạng thái “k” và “m” như hình 4.5.

♦ Trạng thái “k” hệ chịu tác dụng của một nhóm lực gồm: Lực tập trung P_k ; Mô men tập trung M_k và các phản lực tại các gối tựa R_k^i như hình 4.5a.

♦ Trạng thái “m” hệ bị biến dạng do nhiều nguyên nhân tác dụng đồng thời nào đó: tải trọng; sự thay đổi nhiệt độ dọc theo trục trên t_1^o , trục dưới t_2^o ; chuyển vị cưỡng bức của gối tựa Δ_m^i (Hình 4.5b).



Hình 4.5

Công khả dĩ T_{km} của các ngoại lực đặt tĩnh ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km} + M_k \cdot \varphi_{km} - R_k^1 \cdot \Delta_m^1 - R_k^2 \cdot 0 - R_k^3 \cdot \Delta_m^3$$

Có thể viết dưới dạng tổng quát như sau:

$$T_{km} = \sum_{i=1}^n P_k^i \cdot \Delta_{km}^i + \sum_{j=1}^n R_k^j \cdot \Delta_m^j \quad (4-3)$$

Trong đó:

P_k^i là lực tổng quát thứ i ở trạng thái “k”, trong đó lấy i từ 1 đến n lực.

Δ_{km}^i là chuyển vị khả dĩ tổng quát tương ứng với lực tổng quát thứ i do các nguyên nhân ở trạng thái “m” gây ra.

R_k^j là phản lực tại liên kết tựa thứ j trong trạng thái “k”, trong đó lấy j từ 1 đến n liên kết.

Δ_m^j là chuyển vị của liên kết tựa thứ j trong trạng thái “m”.

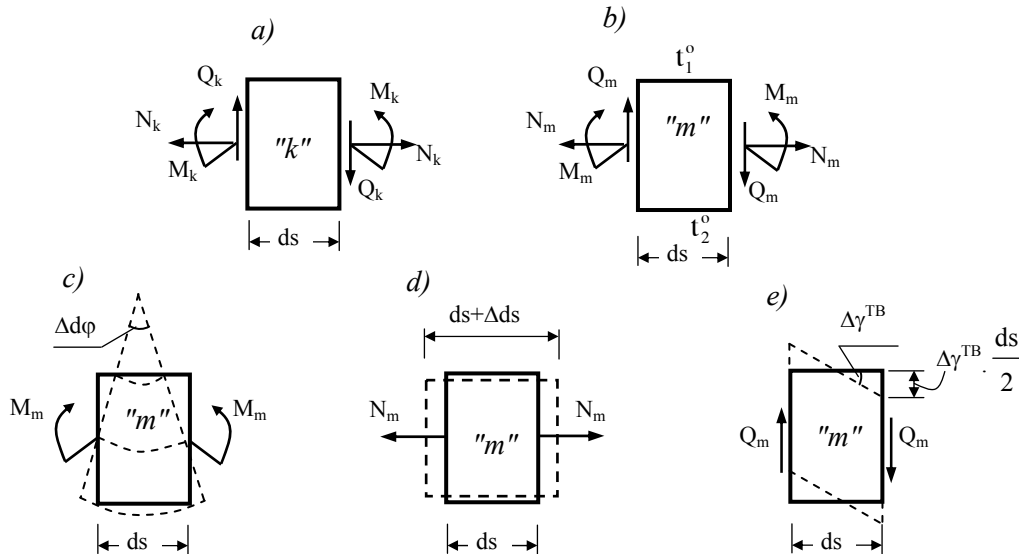
Công của ngoại lực sẽ lấy dấu dương khi lực và chuyển vị cùng chiều, lấy dấu âm khi lực và chuyển vị ngược chiều.

4.2.4. Công khả dĩ của nội lực

Để tính công khả dĩ của nội lực V_{km} cho toàn hệ trước hết ta tính công khả dĩ của một đoạn thanh có chiều dài ds nhỏ tùy ý (Hình 4.6).

♦ Ở trạng thái “k” ta tách một phân tố có chiều dài ds . Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng tại mặt cắt trái và phải của phân tố có các lực M_k , N_k , Q_k tác dụng (bỏ qua các đại lượng vô cùng bé). Các lực này là nội lực của hệ ở trạng thái “k” nhưng lại là ngoại lực đối với phân tố đang xét trên hình 4.6a.

♦ Ở trạng thái “m” tại vị trí tương ứng ta cũng tách một phân tố có chiều dài ds (Hình 4.6b). Ở trạng thái “m” này phân tố sẽ bị biến dạng do các nội lực M_m , N_m , Q_m và sự thay đổi nhiệt độ trong thanh gây ra, gồm biến dạng góc $\Delta d\varphi_m$, biến dạng dài Δds_m và biến dạng trượt $\Delta \gamma_m^{TB}$.



Hình 4.6

Theo nguyên lý cộng tác dụng ta có:

* Biến dạng xoay: $\Delta d\varphi_m = \Delta d\varphi(M_m) + \Delta d\varphi(t^o)$

* Biến dạng dọc: $\Delta ds_m = \Delta ds(N_m) + \Delta ds(t^o)$

* Biến dạng trượt: $\Delta \gamma_m^{TB} = \Delta \gamma^{TB}(Q_m) + \Delta \gamma^{TB}(t^o)$

1. Biến dạng do các nội lực M_m, N_m, Q_m

* Do M_m tác dụng hai tiết diện ở hai đầu phân tố bị xoay tạo thành góc:

$$\Delta d\varphi(M_m) = \frac{ds}{\rho} = \frac{M_m ds}{EJ} \quad (\text{Hình 4.6c}).$$

* Do N_m tác dụng hai tiết diện ở hai đầu phân tố bị dãn dài dọc trục một đoạn:

$$\Delta ds(N_m) = \frac{N_m ds}{EF} \quad (\text{Hình 4.6d}).$$

* Do Q_m tác dụng hai tiết diện ở hai đầu phân tố bị trượt một góc:

$$\Delta \gamma^{TB}(Q_m) = \frac{\tau^{TB}}{G} = \frac{\mu Q_m}{GF} \quad (\text{Hình 4.6e}).$$

Trong đó: μ : Hệ số điều chỉnh có xét tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp (phụ thuộc vào hình dạng của mặt cắt).

2. Biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ

Gọi t_1^o và t_2^o là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và dưới của thanh. Để đơn giản ta chấp nhận các giả thiết sau:

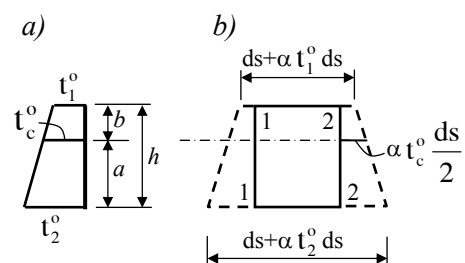
+ Dọc theo thớ biên của từng đoạn thanh nhiệt độ thay đổi như nhau.

+ Theo chiều cao của tiết diện nhiệt độ thay đổi theo qui luật bậc nhất.

Biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng đường thẳng như trên hình 4.7a được vẽ với giả thiết $t_2^o > t_1^o$. Theo biểu đồ ta dễ dàng tính được độ biến thiên nhiệt độ ở trục (t_c^o) của thanh:

$$t_c^o = \frac{a \cdot t_1^o + b \cdot t_2^o}{h} \quad \text{Nếu } a = b = \frac{h}{2} \text{ thì ta có: } t_c^o = \frac{t_1^o + t_2^o}{2}$$

Để thành lập công thức tính biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ ta giả thiết: $t_1^o > 0$; $t_2^o > 0$; $t_2^o > t_1^o$; gọi α là hệ số dãn nở vì nhiệt của vật liệu. Như vậy thớ trên của phân tố sẽ dãn dài một đoạn bằng $\alpha \cdot t_1^o \cdot ds$, trục của phân tố (thớ trung hòa) sẽ dãn dài là $\alpha \cdot t_c^o \cdot ds$ và thớ dưới của phân tố sẽ dãn dài là $\alpha \cdot t_2^o \cdot ds$ (Hình 4.7b).



Hình 4.7

Biến dạng của phân tố do sự thay đổi nhiệt độ gồm hai thành phần:

* Biến dạng dài dọc theo trục thanh do nhiệt độ t_c^o gây ra:

$$\Delta ds(t^o) = \alpha \cdot t_c^o \cdot ds \quad (b)$$

* Biến dạng xoay giữa hai tiết diện đầu trái và phải của phân tố:

$$\Delta d\varphi(t^o) = \alpha \cdot \frac{t_2^o - t_1^o}{h} \cdot ds = \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds \quad (c)$$

* Biến dạng trượt giữa hai tiết diện do nhiệt độ gây ra:

$$\Delta \gamma^{TB}(t^o) = 0$$

Tính công khả dĩ phân tố dT_{km} của các lực M_k, N_k, Q_k của phân tố ở trạng thái “k” trên chuyển vị khả dĩ tương ứng của phân tố ở trạng thái “m” theo công thức (4-3)

$$dT_{km} = 2M_k \cdot \frac{\Delta d\varphi_m}{2} + 2Q_k \cdot \frac{\Delta \gamma_{TB} ds}{2} + 2N_k \cdot \frac{\Delta ds_m}{2}$$

Theo (4 - 2) ta có thể tính được công khả dĩ của nội lực phân tố dV_{km} :

$$dV_{km} = -dT_{km} = -(M_k \cdot \Delta d\varphi_m + Q_k \cdot \Delta \gamma_{TB} \cdot ds + N_k \cdot \Delta ds_m)$$

Trên toàn hệ công khả dĩ của nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” bằng:

$$V_{km} = -[\sum \int M_k \cdot \Delta d\varphi_m + \sum \int Q_k \cdot \Delta \gamma_{TB} \cdot ds + \sum \int N_k \cdot \Delta ds_m]$$

Thay các thành phần biến dạng (a), (b), (c) đã tính ở trên vào ta có:

$$V_{km} = -\left[\sum \int \frac{M_k M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q_k Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EF} ds + \sum \int \alpha t_c N_k ds + \sum \int M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \right] \quad (4-4)$$

4.2.5. Công thức biểu diễn nguyên lý công khả dĩ của hệ đàn hồi

Thay công thức tính công khả dĩ của ngoại lực (4-3) và công khả dĩ của nội lực (4-4) vào (4-2) ta có biểu thức đầy đủ của nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi như sau:

$$\sum_{i=1}^n P_k^i \cdot \Delta_i^{km} + \sum_{j=1}^n R_k^j \cdot \Delta_j^{km} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q_k Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EF} ds + \sum \int \alpha t_c N_k ds + \sum \int M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \quad (4-5)$$

Ghi chú:

+ Công thức (4-5) được áp dụng cho các hệ đàn hồi tuyến tính gồm những thanh thẳng hoặc những thanh cong có độ cong nhỏ (Thanh cong được xem là có độ cong nhỏ khi

$h/\rho \leq 1/10$. Trong đó: h là chiều cao của tiết diện, ρ là bán kính cong bé nhất của trục thanh ở trạng thái ban đầu).

+ Các tích phân trong công thức (4-5) là tích phân định hạn, được lấy trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng ở vế phải áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ. Dấu tổng ở vế trái lấy theo số lực ở trạng thái “k”.

4.3. CÔNG THỨC MẮCXOEN - MO TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH PHẪNG (1874)

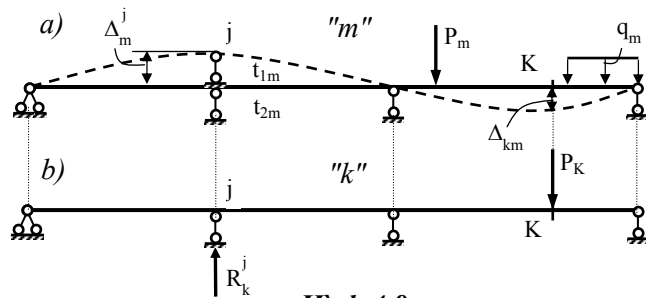
4.3.1. Công thức tổng quát

Công thức tổng quát tính chuyển vị trong hệ dàn hồi tuyến tính được thiết lập dựa trên nguyên lý công khả dĩ (4-5).

Xét hệ thanh bất kỳ (có thể là tĩnh định hoặc siêu tĩnh), đồng thời chịu tác dụng của các nguyên nhân “m” sau:

- + Tải trọng P_m (có thể là lực tập trung P , lực phân bố q , mô men tập trung M).
- + Sự thay đổi nhiệt độ: t_{1m} và t_{2m}
- + Chuyển vị cưỡng bức Δ_m^j tại các liên kết tựa.

Gọi trạng thái này của hệ là trạng thái thực “m”. Do tác dụng của các nguyên nhân “m” hệ bị biến dạng theo đường đứt nét như trên hình 4.8a.



Hình 4.8

Yêu cầu xác định chuyển vị tại tiết diện K nào đó trên hệ.

Trong trường hợp hệ phẳng bất kỳ, tại tiết diện K có thể có ba chuyển vị đó là chuyển vị đứng, chuyển vị ngang và chuyển vị góc xoay. Ta ký hiệu chung là Δ_{km} .

Giả sử cần tìm thành phần chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện K (Hình 4.8a) do nguyên nhân “m” gây ra. Để thực hiện được yêu cầu trên ta tưởng tượng tạo ra trên hệ đã cho một trạng thái khả dĩ (còn gọi là trạng thái giả tạo) “k” trong đó đặt lực P_k sao cho lực này sinh công khả dĩ trên chuyển vị Δ_{km} cần tìm (Hình 4.8b). Nghĩa là:

* Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó theo phương u thì ở trạng thái khả dĩ “k” ta cần đặt lực P_k dưới dạng một lực tập trung tại tiết diện đó, theo phương u , chiều chọn tùy ý.

* Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay tại một tiết diện nào đó thì ở trạng thái khả dĩ “k” ta cần đặt lực P_k dưới dạng một mô men tập trung tại tiết diện đó, có chiều chọn tùy ý.

Áp dụng nguyên lý công khả dĩ của lực ở trạng thái “k” trên các chuyển vị và biến dạng khả dĩ ở trạng thái “m” (4-5) ta có:

$$P_k \cdot \Delta_{km} + \sum_{j=1}^n R_k^j \cdot \Delta_m^j = \sum \int \frac{M_k M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q_k Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EF} ds + \\ + \sum \int \alpha t_c N_k ds + \sum \int M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds$$

Chia cả hai vế của biểu thức cho P_k và ký hiệu:

$$\overline{M}_k = \frac{M_k}{P_k}; \quad \overline{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}; \quad \overline{N}_k = \frac{N_k}{P_k}; \quad \overline{R}_k^j = \frac{R_k^j}{P_k}$$

Ta được công thức tổng quát tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\overline{M}_k M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{\overline{Q}_k Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{\overline{N}_k N_m}{EF} ds + \\ + \sum \int \alpha t_c \overline{N}_k ds + \sum \int \overline{M}_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds - \sum_{j=1}^n \overline{R}_k^j \cdot \Delta_m^j \quad (4-6)$$

Trong đó:

$\overline{M}_k, \overline{Q}_k, \overline{N}_k$: Biểu thức nội lực của hệ ở trạng thái “k” do lực $P_k = 1$ gây ra.

M_m, Q_m, N_m : Biểu thức nội lực của hệ ở trạng thái “m” do các nguyên nhân “m” (P_m, t_m, Δ_m) gây ra.

$\overline{R}_k^j$: Phản lực tại liên kết thứ j ở trạng thái “k” do lực $P_k = 1$ gây ra.

Δ_m^j : Chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ j ở trạng thái “m”

α : Hệ số dẫn nở dài do nhiệt độ

Δt : Độ chênh nhiệt độ ở hai phía của thanh ($\Delta t = t_{2m} - t_{1m}$)

t_c : Nhiệt độ tại trục thanh.

Chú ý:

1. Chiều của lực $P_k = 1$ có thể chọn tùy ý. Nếu kết quả tính chuyển vị mang dấu dương thì chuyển vị cần tìm cùng chiều với lực P_k đã giả thiết. Nếu kết quả mang dấu âm thì ngược lại.

2. Tích số $\overline{R}_k^j \cdot \Delta_m^j$ lấy dấu dương khi phản lực $\overline{R}_k^j$ cùng chiều với Δ_m^j .

3. Các tích phân trong công thức là tích phân định hạn được lấy tích phân trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng ở vế phải áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ.

4. Công thức được dùng để tính chuyển vị trong hệ tĩnh định cũng như hệ siêu tĩnh nếu biết được nội lực trong hệ ở hai trạng thái “m” và “k”.

5. Công thức chỉ áp dụng cho các hệ đàn hồi tuyến tính gồm những thanh thẳng hoặc những thanh cong có độ cong nhỏ.

4.3.2. Cách vận dụng công thức tính chuyển vị

Công thức (4-6) là công thức tổng quát tính chuyển vị trong hệ bất kỳ chịu tác dụng đồng thời của nhiều nguyên nhân. Trong thực tế tùy theo từng trường hợp cụ thể ta chỉ cần vận dụng một vài số hạng của công thức. Dưới đây ta sẽ xét một số trường hợp thường gặp.

1. Hệ chịu tác dụng của tải trọng

Khi hệ chỉ chịu tác dụng của tải trọng. Trạng thái “m” được gọi cụ thể hơn là trạng thái “p”. Khi đó công thức tính chuyển vị của Mác xoen - Mo có dạng:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{\bar{Q}_k Q_p}{GF} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} ds \quad (4-7)$$

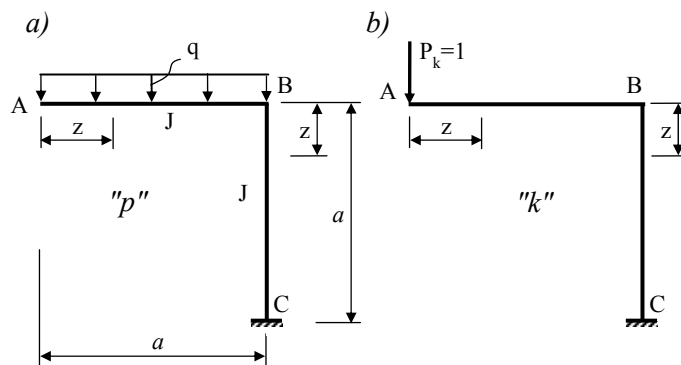
Trong đó: M_p , Q_p , N_p Là các biểu thức nội lực do tải trọng tác dụng ở trạng thái “p”.

Ví dụ 4-1: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A của khung có kích thước và sơ đồ chịu lực như trên hình 4.9a. Các thanh có mặt cắt ngang không đổi và có dạng hình chữ nhật kích thước (b×h).

Để thấy rõ ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc so với ảnh hưởng của mô men. Trong ví dụ này ta tính chuyển vị có xét đến ảnh hưởng của cả ba thành phần nội lực M, Q, N:

$$\Delta_y^A = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} dz + \sum \int \mu \frac{\bar{Q}_k Q_p}{GF} dz + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} dz \quad (*)$$

Theo yêu cầu của bài toán để tính chuyển vị đứng tại A, ta lập trạng thái “k”: Đặt lực tập trung $P_k = 1$ có phương thẳng đứng hướng từ trên xuống (có thể chọn chiều tùy ý) tại tiết diện A của hệ đã cho như trên hình 4.9b.



Hình 4.9

Trạng thái “p” (Hình 4.9a) là trạng thái thực do lực phân bố q gây ra chuyển vị ở A. Các biểu thức nội lực ở trạng thái “p” và “k” là:

$$\begin{aligned} \text{* Thanh AB:} \quad M_p &= -\frac{qz^2}{2}; & Q_p &= -qz; & N_p &= 0; \\ \bar{M}_k &= -1 \cdot z = -z; & \bar{Q}_k &= -1; & \bar{N}_k &= 0; \\ \text{* Thanh BC:} \quad M_p &= -\frac{qa^2}{2}; & Q_p &= 0; & N_p &= -qa; \\ \bar{M}_k &= -1 \cdot a = -a; & \bar{Q}_k &= 0; & \bar{N}_k &= -1; \end{aligned}$$

Thay các đại lượng này vào công thức (*) ta được:

$$\begin{aligned} \Delta_y^A &= \int_0^a (-z) \left(-\frac{qz^2}{2} \right) \frac{dz}{EJ} + \int_0^a (-a) \left(-\frac{qa^2}{2} \right) \frac{dz}{EJ} + \int_0^a \mu (-1) (-qz) \frac{dz}{GF} + \int_0^a (-1) (-qa) \frac{dz}{EF} \\ &= \frac{5qa^4}{8EJ} \left[1 + \mu \frac{4EJ}{5a^2GF} + \frac{8J}{5a^2F} \right] = \frac{5qa^4}{8EJ} (1 + \eta) \end{aligned}$$

Gọi η là hệ số kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc so với ảnh hưởng của mô men uốn. Để tính hệ số η ta cần lưu ý:

+ Tiết diện chữ nhật có: $\mu = 1,2$; tỷ số $\frac{J}{F} = \frac{bh^3}{12 \cdot bh} = \frac{h^2}{12}$

+ Vật liệu đàn hồi ta có liên hệ: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Trong đó ν là hệ số biến dạng ngang Poisson.

Thay vào ta có:

$$\eta = \frac{8}{5} \cdot \frac{h^2}{12a^2} + \frac{4}{5} \cdot 1,2 \cdot \frac{h^2}{12a^2} \cdot 2(1+\nu) = \frac{2h^2}{15a^2} [1 + 1,2(1+\nu)]$$

Kết quả cho thấy trị số của η phụ thuộc vào tỷ số h/a .

+ Nếu $a \gg h$ thì $\eta = 0$ tức là ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc không đáng kể.

+ Nếu cho $a = 4h$ và $\nu = 1/3$ thì $\eta = 0,022 = 2,2\%$ ta thấy ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc so với ảnh hưởng của mô men là nhỏ, không đáng kể và có thể bỏ qua được.

Chú ý:

Khi vận dụng công thức (4-7) để tính chuyển vị cho hệ chịu tác dụng của tải trọng tùy theo từng trường hợp cụ thể ta có các công thức rút gọn sau :

◆ Với hệ dầm và khung. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc ta có:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds \quad (4-8)$$

◆ Với hệ vòm có độ cong thoải. Có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q . Công thức tính chuyển vị có dạng:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} ds \quad (4-9)$$

♦ Với hệ dàn khớp. Nội lực trong hệ dàn khớp chỉ tồn tại lực dọc N còn M và Q bằng không. Nên ta có:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} ds \quad (4-10)$$

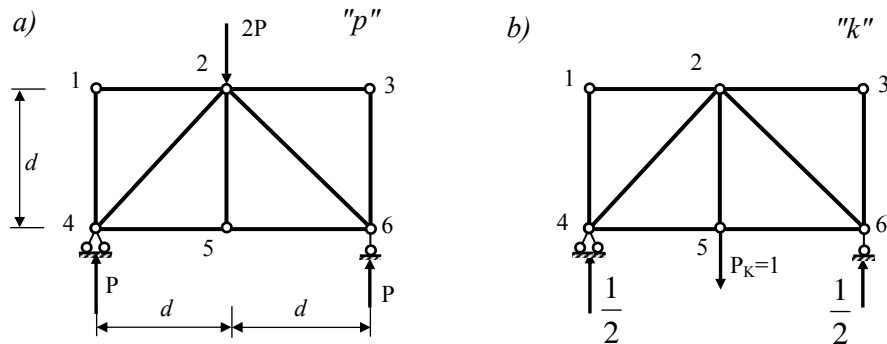
Trong thực tế, các đại lượng E, F, lực dọc $N_p, \bar{N}_k$ thường không thay đổi trong từng thanh dàn do đó:

$$\Delta_{kp} = \sum \int_0^L \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} ds = \sum \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} \int_0^L ds = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip}}{(EF)_i} L_i \quad (4-11)$$

Ví dụ 4-2: Xác định chuyển vị đứng tại mắt 5 của dàn có kích thước và sơ đồ chịu lực trên hình 4.11a. Cho biết các thanh dàn đều có $EF = \text{const}$.

Dựa vào công thức (4-10) ta thực hiện theo thứ tự sau:

1. Lập trạng thái “k” (Hình 4.10b) và xác định lực dọc trong các thanh dàn.
2. Xác định lực dọc trong các thanh dàn ở trạng thái “p” (Hình 4.10a).



Hình 4.10

Khi xác định phản lực và nội lực trong các thanh dàn ta cần lưu ý tính đối xứng của hệ để giảm bớt khối lượng tính toán. Kết quả tính phản lực ghi trên hình vẽ. Xác định nội lực trong các thanh dàn ở hai trạng thái “p” và “k”:

* Trạng thái “p”: Dùng nhận xét khi tách các mắt dàn 1, 3 và 5 ta có:

$$N_{1-2} = N_{1-4} = N_{3-2} = N_{3-6} = N_{5-2} = 0;$$

Tách mắt 4 (hoặc mắt 6) ta có:

$$N_{4-5} = N_{6-5} = P;$$

$$N_{4-2} = N_{6-2} = -P\sqrt{2}$$

* Trạng thái “k”: Tương tự như trên ta có:

$$N_{1-2} = N_{1-4} = N_{3-2} = N_{3-6} = 0;$$

$$N_{4-5} = N_{6-5} = 1/2 ;$$

$$N_{4-2} = N_{6-2} = -\sqrt{2} ;$$

Tách mắt 5 ta được: $N_{5-2} = 1$

Vận dụng công thức (4-11) ta tính được chuyển vị đứng tại mắt 5 như sau:

$$\Delta_y^5 = \frac{1}{EF} \left[2 \cdot (-P\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot d\sqrt{2} + 2 \cdot P \cdot \frac{1}{2} \cdot d \right] = \frac{3,328 \text{ Pd}}{EF}$$

Kết quả mang dấu dương cho ta thấy mắt 5 chuyển vị đi xuống theo chiều của lực $P_k = 1$ đã giả thiết.

2. Hệ tĩnh định chịu sự thay đổi của nhiệt độ

Khi hệ chỉ chịu tác dụng của nhiệt độ. Trạng thái “m” được gọi cụ thể hơn là trạng thái “t”. Với lưu ý: Sự thay đổi nhiệt độ chỉ gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh mà không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định. Ta có $M_t = Q_t = N_t = 0$. Công thức tính chuyển vị có dạng:

$$\Delta_{kt} = \sum \int \alpha t_c \bar{N}_k ds + \sum \int \bar{M}_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \quad (4-12)$$

Khi trong từng đoạn thanh có:

- * Nhiệt độ thay đổi như nhau theo chiều dài của từng đoạn thanh .
 - * Hệ số biến dạng dài vì nhiệt độ của vật liệu như nhau ($\alpha = \text{const}$).
 - * Chiều cao của tiết diện $h = \text{const}$.
- Công thức (4-12) được viết lại:

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha t_c \int \bar{N}_k ds + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \int \bar{M}_k ds$$

Với các thanh thẳng ta có:

$\int \bar{M}_k ds = \Omega_{\bar{M}_k}$: Diện tích biểu đồ mô men uốn trong từng đoạn thanh ở trạng thái “k”.

$\int \bar{N}_k ds = \Omega_{\bar{N}_k}$: Diện tích của biểu đồ lực dọc trong từng đoạn thanh ở trạng thái “k”.

Để thuận tiện khi xét dấu của số hạng thứ nhất, ta biểu diễn chúng dưới dạng trị tuyệt đối. Lúc đó ta có công thức thực hành để tính chuyển vị khi có sự thay đổi nhiệt độ như sau:

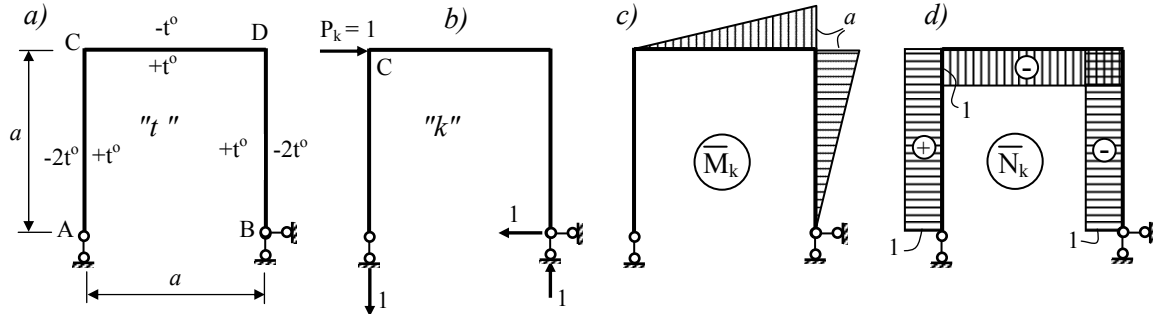
$$\Delta_{kt} = \sum \alpha t_c \Omega_{\bar{N}_k} + \sum \pm \frac{\alpha |\Delta t|}{h} |\Omega_{\bar{M}_k}| \quad (4-13)$$

Trong đó:

$|\Delta t|$: Trị tuyệt đối của hiệu đại số độ chênh nhiệt độ ở hai phía của thanh

Tích số $|\Delta t| \cdot |\Omega_{\bar{M}_k}| > 0$ (lấy dấu dương) khi $\bar{M}_k$ căng về phía có nhiệt độ thay đổi lớn hơn và ngược lại sẽ lấy dấu âm khi căng về phía có nhiệt độ thay đổi nhỏ hơn.

Ví dụ 4-3: Xác định chuyển vị ngang tại tiết diện C, khi các thanh trong khung có nhiệt độ thay đổi như trên hình 4.11a. Cho biết các thanh của hệ có α , h không đổi.



Hình 4.11

♦ Lập trạng thái “k” như trên hình 4.11b, tính hệ ở trạng thái “k”: Vẽ biểu đồ mô men uốn (Hình 4.11c) và biểu đồ lực dọc (Hình 4.11d).

♦ Tính các giá trị t_c và $|\Delta_t|$ của các thanh có thay đổi nhiệt độ:

+ Thanh CD: $t_c = \frac{+t - t}{2} = 0; \quad |\Delta t| = |t - (-t)| = 2t$

+ Thanh AC và BD: $t_c = \frac{+t - 2t}{2} = -\frac{t}{2}; \quad |\Delta t| = |t - (-2t)| = 3t$

♦ Vận dụng công thức (4-13) ta có:

$$\Delta_c^n(t) = \left[-\frac{\alpha}{h} \cdot 2t \cdot \frac{a \cdot a}{2} - \frac{\alpha}{h} \cdot 3t \cdot \frac{a \cdot a}{2} \right] + \left[\alpha \left(-\frac{t}{2} \right) (1 \cdot a) + \alpha \cdot 0 \cdot (-1 \cdot a) + \alpha \cdot \left(-\frac{t}{2} \right) \cdot (-1 \cdot a) \right]$$

$$\Delta_c^n(t) = -2,5 \frac{\alpha}{h} t a^2$$

Kết quả mang dấu âm, chứng tỏ chuyển vị ngang của điểm C ngược chiều với lực $P_k=1$ đã giả thiết (tiết diện C dịch chuyển sang trái).

3. Hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa

Cũng tương tự như trường hợp hệ chịu sự thay đổi của nhiệt độ. Khi các liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong các hệ tĩnh định không phát sinh nội lực. Do đó công thức tính chuyển vị có dạng:

$$\Delta_{k\Delta} = - \sum_{j=1}^n \bar{R}_k^j \cdot \Delta_m^j \quad (4-14)$$

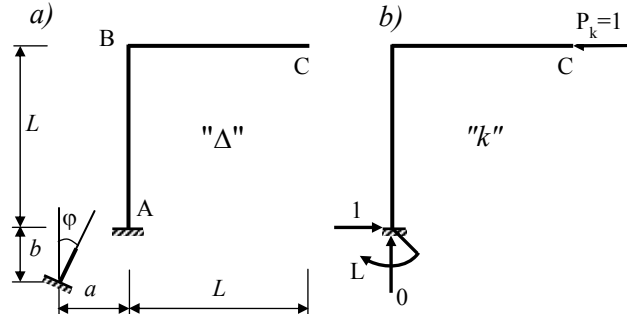
Tích số $\bar{R}_k^j \cdot \Delta_m^j$ mang dấu dương khi phản lực $\bar{R}_k^j$ cùng chiều với chuyển vị Δ_m^j của liên kết tựa thứ j. Mang dấu âm trong trường hợp ngược lại.

Ví dụ 4-4: Xác định chuyển vị ngang tại đầu tự do C của khung khi ngàm A chịu chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là a, theo phương thẳng đứng là b và xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc bằng φ (Hình 4.12a).

Theo yêu cầu của đề bài ta cần:

+ Lập trạng thái “k” trong đó đặt lực $P_k = 1$ vào đầu tự do C theo phương ngang (Hình 4.12b).

+ Tìm các phản lực tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do $P_k = 1$ gây ra, kết quả ghi trên hình 4.12b.



Hình 4.12

+ Vận dụng công thức (4-14) ta có: $\Delta_C^n = -[(1.a) - (0.b) + (L.\varphi)] = -(a + L.\varphi)$

Kết quả tính mang dấu âm cho ta thấy tiết diện C dịch chuyển sang phải (ngược với chiều của $P_k = 1$ đã giả thiết).

4.3.3. Hệ dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác

Khi lắp ráp các thanh chế tạo không chính xác vào hệ dàn, các mắt dàn sẽ chuyển vị.

Bài toán có thể giải quyết tương tự như trường hợp hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ. Các thanh có chiều dài được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu là Δ được xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là $\alpha.t_c.L = \Delta$; còn các thanh bị chế tạo hụt so với chiều dài yêu cầu là Δ được xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là $\alpha.t_c.L = -\Delta$. Với L là chiều dài của thanh dàn.

Một cách tổng quát, nếu gọi Δ_i là độ dôi của thanh dàn thứ i bị chế tạo dài hay ngắn hơn chiều dài yêu cầu thì sau khi áp dụng công thức (4-13) ta có:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_{ik} \cdot \Delta_{im} \quad (4-15)$$

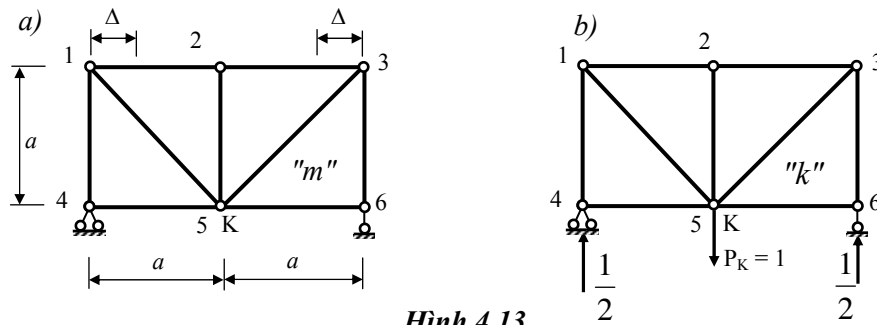
Ví dụ 4-5: Xác định độ võng tại K của dàn có kích thước và sơ đồ như trên hình 4.13a, nếu trong khi chế tạo chiều dài của các thanh 1-2 và 2-3 bị hụt một đoạn bằng Δ .

Khi vận dụng công thức (4-15) vào bài toán trên ta có: $i = 2$; $\Delta_{1-2} = \Delta_{2-3} = -\Delta$.

Lập trạng thái “k” như trên hình 4.13b và tính hệ ở trạng thái “k”:

+ Xác định phản lực, kết quả ghi trên hình 4.13b.

+ Tính nội lực trong thanh dàn 1-2 và 2-3 ở trạng thái “k”.



Hình 4.13

$$\bar{N}_k^{1-2} = \bar{N}_k^{2-3} = -\frac{1}{2} \quad \text{Do đó:} \quad \Delta_{k\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot (-\Delta) - \frac{1}{2} \cdot (-\Delta) = \Delta$$

Kết quả cho thấy điểm K sẽ chuyển vị xuống một đoạn bằng Δ .

Chú ý: Trong trường hợp hệ chịu nhiều nguyên nhân khác nhau ta có thể vận dụng nguyên lý cộng tác dụng để tính riêng biệt với từng nguyên nhân rồi cộng các kết quả.

4.4. TÍNH CÁC TÍCH PHÂN TRONG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ DO

TẢI TRỌNG TÁC DỤNG BẰNG CÁCH “NHÂN” BIỂU ĐỒ

Đối với hệ gồm các thanh thẳng như dầm, khung, dàn ta có thể tính các tích phân trong công thức chuyển vị một cách đơn giản và tiện lợi hơn so với cách lấy tích phân trực tiếp. Cách tính này gọi là cách “nhân” biểu đồ do A.N.Vêrêsgahin đề xuất vào năm 1925.

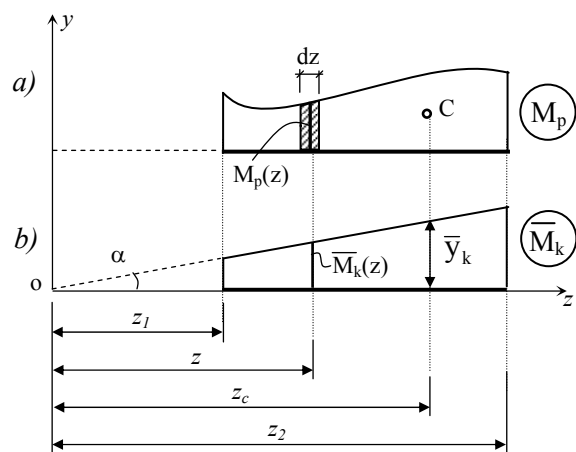
Ta sẽ nghiên cứu nội dung của phương pháp qua cách tính tích phân trong số hạng đầu của công thức (4-7).

$$T = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\bar{M}_k(z) \cdot M_p(z)}{EJ} dz \quad (a)$$

Giả sử trong đoạn thanh thẳng đang xét (Z_1, Z_2) có:

- . $EJ = \text{const}$
- . Biểu thức nội lực $M_p(z)$ có dạng bất kỳ liên tục trong đoạn
- . Biểu thức nội lực $\bar{M}_k(z)$ có dạng bậc nhất

Gọi α là góc nghiêng giữa đường thẳng của biểu đồ $\bar{M}_k(z)$ và đường chuẩn (trục z).



Hình 4.14

Từ hình 4.14b ta thấy: $\bar{M}_k(z) = Z \cdot \tan \alpha$ (b)

Thay (b) vào (a) với lưu ý trong đoạn (Z_1, Z_2) ta có: $\operatorname{tg} \alpha = \text{const}$ nên:

$$T = \frac{1}{EJ} \operatorname{tg} \alpha \int_{z_1}^{z_2} z \cdot M_p(z) \cdot dz$$

Ký hiệu $M_p(z) \cdot dz = d\Omega_p$ là vi phân diện tích của biểu đồ M_p (phần gạch chéo) trên hình 4.14a. Tích phân được viết lại:

$$T = \frac{1}{EJ} \operatorname{tg} \alpha \int_{z_1}^{z_2} z \cdot d\Omega_p$$

Ta nhận thấy tích phân ở vế phải của biểu thức chính là mô men tĩnh của diện tích biểu đồ M_p đối với trục oy . Nên $\int z \cdot d\Omega_p = z_c \cdot \Omega_p$. Trong đó:

- + Z_c là hoành độ trọng tâm diện tích của biểu đồ mô men uốn M_p với trục oy .
- + Ω_p là diện tích của biểu đồ mô men uốn M_p .
- + Ký hiệu $\bar{y}_k = \operatorname{tg} \alpha \cdot Z_c$ là tung độ của biểu đồ $\bar{M}_k$ ứng với trọng tâm diện tích của biểu đồ mô men uốn M_p .

Tích phân (a) được viết lại:
$$T = \frac{1}{EJ} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot Z_c \cdot \Omega_p = \frac{1}{EJ} \cdot \bar{y}_k \cdot \Omega_p$$

Số hạng đầu của công thức (4-7) được tính theo cách “nhân” biểu đồ và ký hiệu như sau:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds = \sum \frac{1}{EJ} \Omega_p^i \cdot \bar{y}_k^i = (\textcircled{M_p}) \cdot (\textcircled{\bar{M}_k}) \quad (4-16)$$

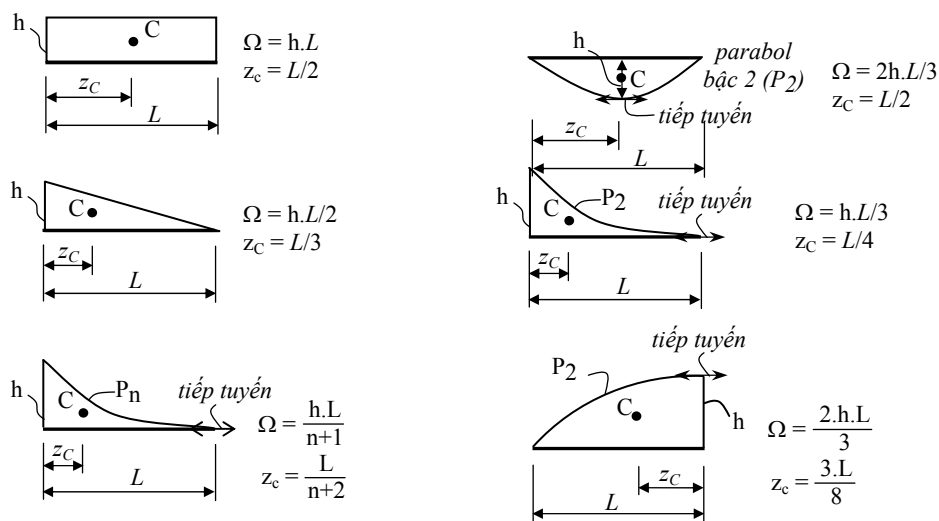
Làm tương tự với các tích phân còn lại của công thức (4-7) ta có thể viết lại công thức tính chuyển vị cho hệ chịu tải trọng dưới dạng “nhân” biểu đồ như sau:

$$\Delta_{kp} = (\textcircled{M_p}) \cdot (\textcircled{\bar{M}_k}) + (\textcircled{Q_p}) \cdot (\textcircled{\bar{Q}_k}) + (\textcircled{N_p}) \cdot (\textcircled{\bar{N}_k}) \quad (4-17)$$

Trong ký hiệu “nhân” biểu đồ nội lực của (4-17) bao gồm việc lấy tổng các kết quả nhân của từng đoạn thanh và trong mỗi đoạn thanh đều có xét đến độ cứng EJ , EF , GF tương ứng.

Các chú ý khi nhân biểu đồ:

1. Tung độ $\bar{y}_k$ buộc phải lấy ở biểu đồ có dạng đường thẳng. Diện tích Ω_p lấy ở biểu đồ có dạng bất kỳ.
2. Nếu biểu đồ lấy diện tích và biểu đồ lấy tung độ cùng dấu thì kết quả nhân biểu đồ mang dấu dương và ngược lại.
3. Theo tính chất tích phân của tích phân xác định, khi biểu đồ lấy diện tích (miền lấy tích phân) là hình phức tạp, ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản (hình dễ tìm ngay được diện tích và trọng tâm của nó) để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình rồi cộng kết quả lại với nhau.



Hình 4.15

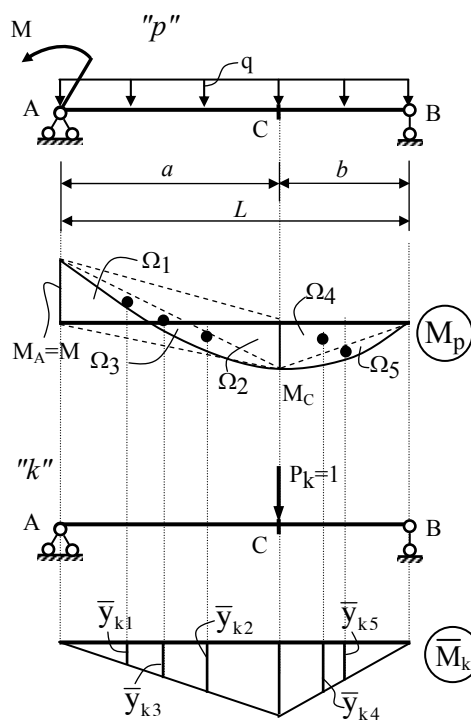
4. Biểu đồ đối xứng nhân với biểu đồ phản xứng cho kết quả bằng không.

Trên hình 4.15 sẽ cung cấp các số liệu về diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình đơn giản thường gặp.

Ta sẽ tìm hiểu cách nhân biểu đồ khi gặp các hình phức tạp (khó tính diện tích và tìm vị trí trọng tâm của nó) thông qua các hình đơn giản nói trên qua ví dụ sau:

Tính chuyển vị thẳng đứng của tiết diện C trên dầm có kích thước và sơ đồ chịu lực như trên hình 4.16.

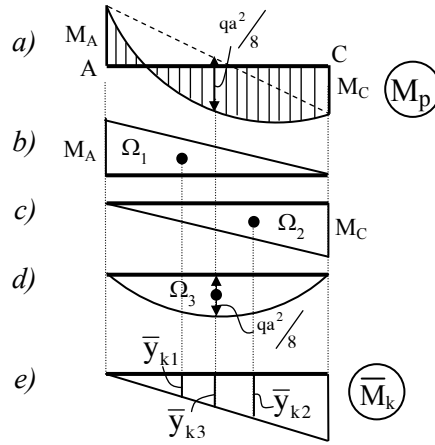
Trên hình 4.16 ta thấy biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “p” liên tục từ A đến B. Nhưng ở trạng thái “k” biểu đồ mô men uốn gồm hai đoạn thẳng có hệ số góc khác nhau nên khi nhân biểu đồ ta phải chia thành hai đoạn AC và CB rồi nhân riêng trong từng đoạn.



Hình 4.16

Với cách chia hình khi nhân biểu đồ trên đoạn AC (Hình 4.17) ta có thể chia biểu đồ M_p thành 2 hình tam giác và một hình parabol bậc hai (Hình 4.17b,c,d) và tương tự với đoạn CB ta cũng chia thành một hình tam giác và một hình parabol bậc hai. Ta có kết quả nhân là:

$$\Delta_c^d = (\overline{M_p})(\overline{M_k}) = \frac{1}{EJ} [-\Omega_1 \cdot \bar{y}_{k1} + \Omega_2 \cdot \bar{y}_{k2} + \Omega_3 \cdot \bar{y}_{k3} + \Omega_4 \cdot \bar{y}_{k4} + \Omega_5 \cdot \bar{y}_{k5}]$$



Hình 4.17

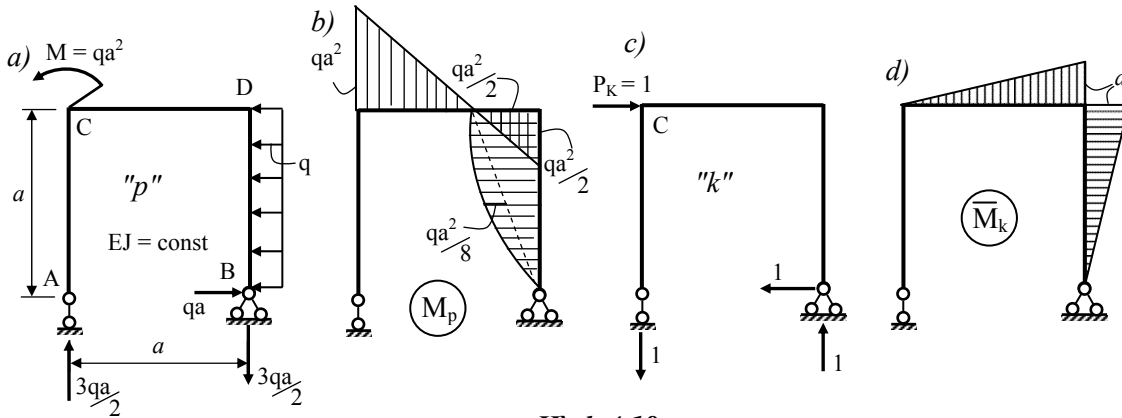
Ví dụ 4-6: Xác định chuyển vị ngang tại mắt cắt C của khung có kích thước và sơ đồ chịu lực như trên hình 4.18a. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần:

+ Lập trạng thái “k” (Hình 4.18c). Tính hệ ở trạng thái “k”, biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” được vẽ trên hình 4.18d.

+ Tính hệ ở trạng thái “p”, biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “p” được vẽ trên Hình 4.18b.

+ Dùng cách nhân biểu đồ để tính chuyển vị ngang tại C: $\Delta_c^n = (\overline{M_p})(\overline{M_k})$



Hình 4.18

$$\Delta_c^n = \frac{1}{EJ} \left[\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a - \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a - \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{a}{2} \right]$$

$$\Delta_c^n = \frac{qa^4}{EJ} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} \right] = -\frac{5qa^4}{24EJ}$$

Kết quả tính cho ta thấy mặt cắt C sẽ dịch chuyển sang trái một đoạn bằng $\frac{5qa^4}{24EJ}$ (ngược với chiều $P_k = 1$ đã giả thiết).

4.5. CÁCH LẬP TRẠNG THÁI KHẢ DĨ “K” ĐỂ TÍNH CHUYỂN VỊ

TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI TIẾT DIỆN VÀ GÓC XOAY CỦA THANH DÀN

Trong thực tế khi tính toán nhiều trường hợp ta cần phải xác định chuyển vị thẳng và chuyển vị góc giữa hai tiết diện với nhau. Các chuyển vị đó gọi là chuyển vị tương đối, cách lập trạng thái “k” để tính các chuyển vị này có khác so với cách lập trạng thái “k” để tính chuyển vị tuyệt đối. Sau đây ta sẽ xét một số trường hợp thường gặp trong thực tế tính toán.

4.5.1. Chuyển vị thẳng tương đối

Chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo một phương u nào đó là hiệu số hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm đó theo phương u ở lúc sau và trước khi biến dạng.

Giả sử cần tìm chuyển vị tương đối giữa hai điểm A và B theo phương thẳng đứng y do nguyên nhân “m” nào đó gây ra trên hệ (Hình 4.19a).

Từ hình vẽ ta thấy hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm A và B theo phương y lúc trước biến dạng bằng không còn sau khi biến dạng hình chiếu khoảng cách giữa chúng lên phương y là: $A'B' = \Delta_A + \Delta_B$

Vậy khi hai điểm có chuyển vị ngược chiều nhau thì chuyển vị tương đối giữa chúng bằng tổng của hai chuyển vị tuyệt đối của hai điểm đó.

Ta có $\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B$. Để tính chuyển vị tuyệt đối Δ_A và Δ_B , ta cần lập hai trạng thái “k₁” và “k₂” (Hình 4.19b và Hình 4.19c). Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc bằng cách nhân biểu đồ ta có:

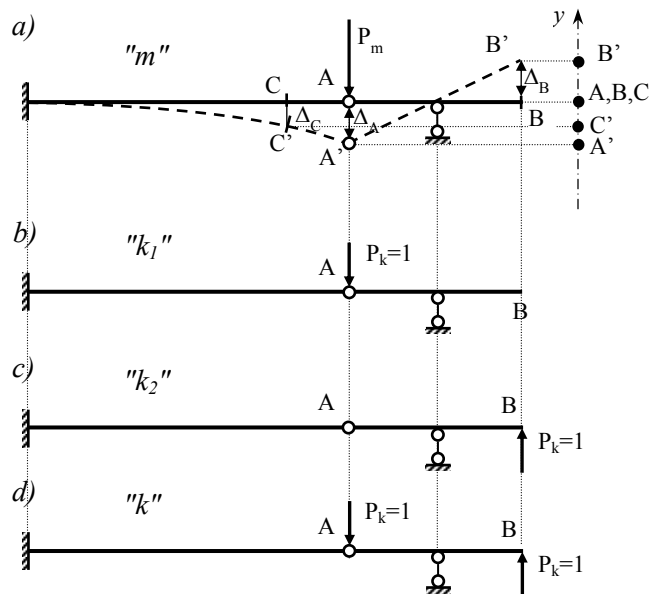
$$\Delta_A = (M_m) (\overline{M}_{k_1})$$

$$\Delta_B = (M_m) (\overline{M}_{k_2})$$

$$\Delta_{AB} = (M_m) (\overline{M}_{k_1}) + (M_m) (\overline{M}_{k_2})$$

$$= (M_m) [(\overline{M}_{k_1}) + (\overline{M}_{k_2})]$$

$$= (M_m) (\overline{M}_k)$$



Hình 4.19

Trong đó $\overline{M}_k$ là biểu đồ mô men ở trạng thái “k” là tổ hợp của hai trạng thái “k₁” và “k₂” (Hình 4.19d).

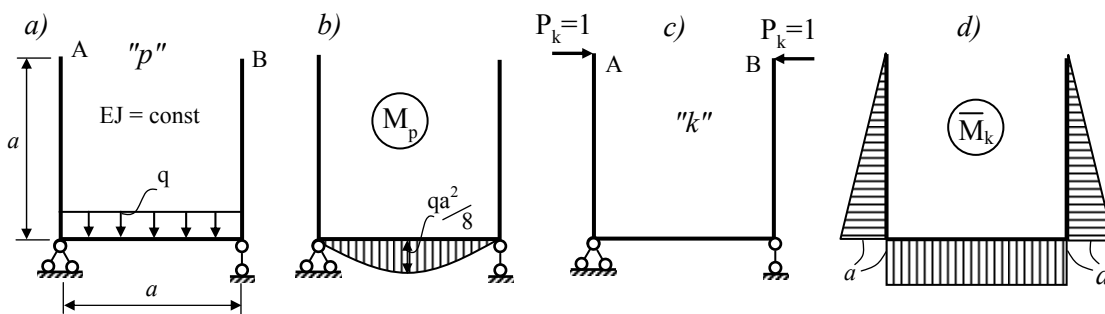
Khi hai điểm có chuyển vị cùng chiều nhau như hai điểm A và C thì chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm đó theo phương y là hiệu của hai chuyển vị tuyệt đối của A và C. Ta có: $\Delta_{AC} = \Delta_A - \Delta_C$, viết dưới dạng tổng đại số thì: $\Delta_{AC} = \Delta_A + (-\Delta_C)$

Với cách lập luận tương tự như trên cả hai trường hợp đều cho ta cách tạo trạng thái “k” khi cần xác định chuyển vị thẳng tương đối như sau:

Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm nào đó theo phương u bất kỳ thì ở trạng thái “k” ta cần đặt hai lực $P_k = 1$ ngược chiều nhau theo phương u vào hai điểm đang xét.

Sau khi lập trạng thái “k” các bước tính tiếp theo giống như cách xác định các chuyển vị tuyệt đối.

Ví dụ 4-7: Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm A và B theo phương ngang của khung có kích thước và sơ đồ chịu lực như hình 4.20. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.



Hình 4.20

Theo yêu cầu của đề bài ta cần thực hiện theo thứ tự sau:

+ Lập trạng thái “k”: Đặt hai lực nằm ngang $P_k=1$ ngược chiều nhau tại A và B (Hình 4.20c).

+ Tính hệ ở trạng thái “k”: Vẽ biểu đồ mô men uốn $\overline{M}_k$ (Hình 4.20d).

+ Tính hệ ở trạng thái “p”: Vẽ biểu đồ mô men uốn M_p (Hình 4.20b).

+ Dùng cách nhân biểu đồ để tính chuyển vị ngang tương đối giữa A và B:

$$\Delta_{AB}^n = \overline{M}_p \overline{M}_k$$

$$\Delta_{AB}^n = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot a = \frac{qa^4}{12EJ}$$

Kết quả mang dấu dương cho ta thấy chuyển vị ngang tương đối giữa hai tiết diện A và B hướng theo chiều của hai lực $P_k = 1$ đã giả thiết (hai điểm A và B xích lại gần nhau).

4.5.2. Chuyển vị góc tương đối

Chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện là hiệu số của góc hợp giữa hai tiết diện đó ở lúc sau và trước khi biến dạng.

Ví dụ cần tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện A và B của hệ có sơ đồ chịu lực trên hình 4.21.

Từ hình 4.21a ta thấy góc hợp giữa hai tiết diện A và B lúc trước khi biến dạng bằng không, còn sau khi biến dạng là φ_{AB} và $\varphi_{AB} = \varphi_A + \varphi_B$.

Vậy chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện A và B được tính bằng tổng hai chuyển vị góc tuyệt đối tại hai tiết diện đó.

Với lý luận tương tự như chuyển vị thẳng tương đối ta có kết luận: Muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện thì ở trạng thái “k” ta cần đặt hai mô men tập trung $M_k = 1$ ngược chiều nhau tại hai tiết diện đó (Hình 4.21b).

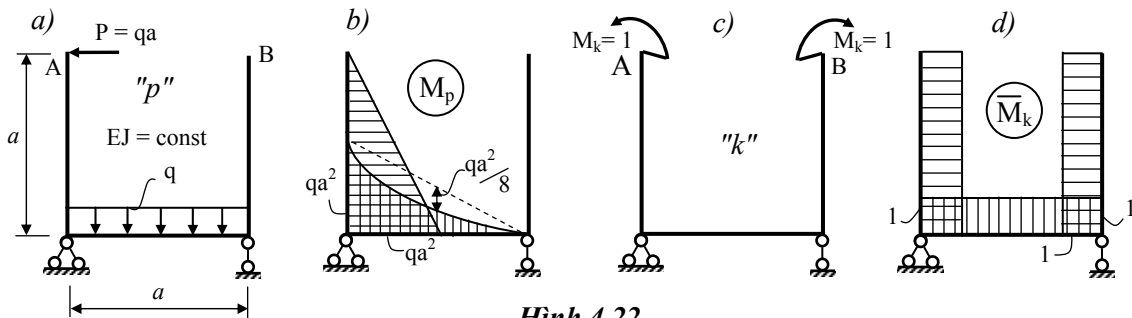
Ví dụ 4-8: Xác định chuyển vị góc xoay tương đối giữa hai tiết diện A và B của khung có sơ đồ chịu lực như hình 4.22. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

Thứ tự thực hiện như sau:

+ Lập trạng thái “k”: Đặt hai mô men tập trung $M_k = 1$ ngược chiều nhau tại A và B (Hình 4.22c).

+ Tính hệ ở trạng thái “k”: Vẽ biểu đồ mô men uốn $(\overline{M}_k)$ (Hình 4.22d).

+ Tính hệ ở trạng thái “p”: Vẽ biểu đồ mô men uốn $(\overline{M}_p)$ (Hình 4.22b).



Hình 4.22

+ Dùng cách nhân biểu đồ để tính chuyển vị góc xoay tương đối giữa A và B:

$$\varphi_{AB} = (\overline{M}_p)(\overline{M}_k)$$

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot 1 + \frac{qa^2 \cdot a}{2} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot 1 \right) = \frac{11qa^3}{12EJ}$$

Kết quả mang dấu dương cho ta biết chuyển vị góc xoay tương đối giữa hai tiết diện A và B là cùng chiều với cặp mô men $M_k = 1$ đã giả thiết.

4.5.3. Chuyển vị góc xoay của thanh dầm

Đặc điểm của hệ dầm là khi chịu lực trong các thanh dầm chỉ tồn tại một thành phần nội lực đó là lực dọc, khi bị biến dạng thanh dầm vẫn thẳng, chúng chỉ bị biến dạng dài làm cho các mắt dầm bị chuyển vị thẳng do đó các thanh dầm sẽ bị xoay.

Giả sử cần tìm góc xoay của thanh dầm AB trong dầm có sơ đồ chịu lực trên hình 4.23a.

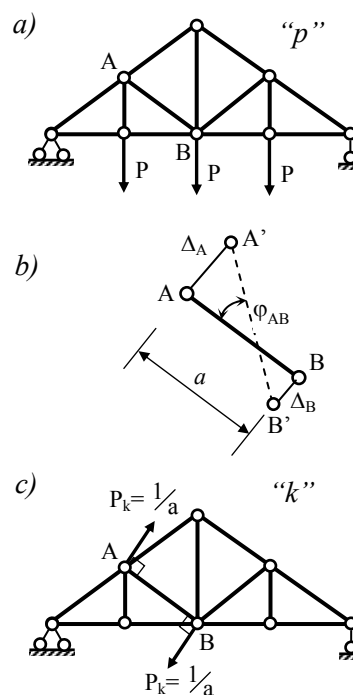
Trên hình 4.23b nếu gọi A'B' là vị trí của thanh AB sau biến dạng đồng thời gọi Δ_A và Δ_B là chuyển vị tại mắt A và B theo phương vuông góc với trục thanh AB. Gọi φ_{AB} là góc xoay của thanh dầm AB ta có:

$$\varphi_{AB} = \operatorname{tg} \varphi_{AB} = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{a} = \frac{1}{a} \cdot \Delta_A + \frac{1}{a} \cdot \Delta_B$$

Ta thấy góc xoay của thanh AB trong dầm chính là tập hợp của hai chuyển vị Δ_A và Δ_B với hệ số là $1/a$.

Vậy ta có thể phát biểu cách lập trạng thái “k” như sau:

Muốn tìm góc xoay của thanh bất kỳ trong dầm thì ở trạng thái “k” ta cần đặt hai lực tập trung tại hai đầu thanh, ngược chiều nhau, vuông góc với trục thanh và có giá trị bằng đơn vị chia cho chiều dài của thanh ($P_k = 1/a$).



Hình 4.23

4.6. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ SỰ TƯƠNG HỖ

Dưới đây sẽ trình bày bốn định lý về sự tương hỗ để phục vụ cho việc nghiên cứu và tính toán hệ siêu tĩnh sau này.

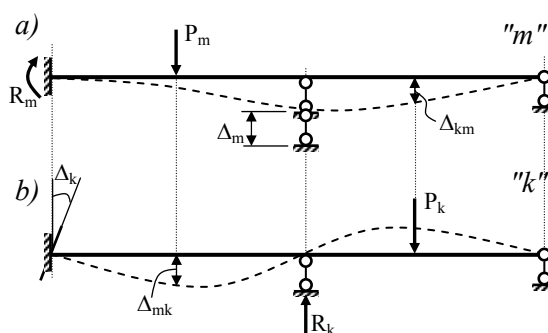
4.6.1. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực

Định lý này do E. Betti đề xuất vào năm 1872. Xét một hệ dầm hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” (Hình 4.24).

+ Ở trạng thái “m” hệ chịu các ngoại lực P_m và các chuyển vị gối tựa Δ_m (Hình 4.24a).

+ Ở trạng thái “k” hệ chịu các ngoại lực P_k và các chuyển vị gối tựa Δ_k (Hình 4.24b).

Theo công thức công khả dĩ (4-5) ta có:



Hình 4.24

♦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “m” trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k”:

$$\sum_{i=1}^n P_m^i \cdot \Delta_{mk}^i + \sum_{j=1}^n R_m^j \cdot \Delta_k^j = \sum \int \frac{M_m M_k}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q_m Q_k}{GF} ds + \sum \int \frac{N_m N_k}{EF} ds \quad (a)$$

♦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m”:

$$\sum_{i=1}^n P_k^i \cdot \Delta_{km}^i + \sum_{j=1}^n R_k^j \cdot \Delta_m^j = \sum \int \frac{M_k M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{Q_k Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EF} ds \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta có:

$$\sum_{i=1}^n P_m^i \cdot \Delta_{mk}^i + \sum_{j=1}^n R_m^j \cdot \Delta_k^j = \sum_{i=1}^n P_k^i \cdot \Delta_{km}^i + \sum_{j=1}^n R_k^j \cdot \Delta_m^j \quad \text{hay} \quad T_{mk} = T_{km} \quad (4-18)$$

Vậy định lý Betti được phát biểu như sau:

Trong hệ đàn hồi tuyến tính công khả dĩ của ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k” tương hỗ bằng công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái “k” trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m”.

Cần hiểu khái niệm tương hỗ như sau:

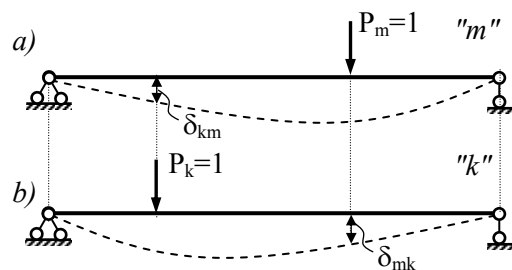
- + Hai trạng thái “m” và “k” phải xây dựng trên cùng một hệ.
- + Chuyển vị ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với vị trí và phương của lực ở trạng thái kia.

Sau đây ta sẽ vận dụng định lý Betti để chứng minh các định lý khác.

4.6.2. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị

Định lý này do J. Maxwell đề xuất năm 1864. Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái:

+ Ở trạng thái “m” hệ chịu một lực $P_m = 1$ gây nên chuyển vị δ_{km} theo phương của lực P_k (Hình 4.25a).



Hình 4.25

+ Ở trạng thái “k” hệ chịu một lực P_k (có thể là lực tập trung hoặc mô men tập trung) gây nên chuyển vị δ_{mk} theo phương của lực P_m (Hình 4.25b).

Theo định lý Betti ta có: $1 \cdot \delta_{mk} = 1 \cdot \delta_{km}$

Vậy: $\delta_{mk} = \delta_{km} \quad (4-19)$

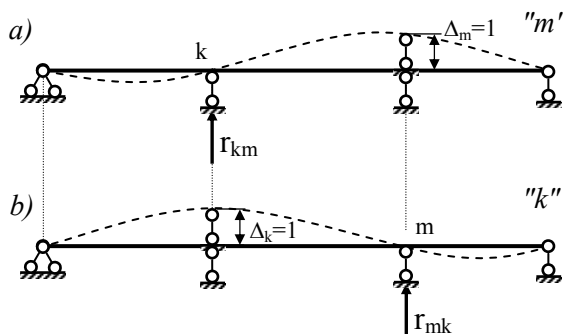
Định lý Maxwell được phát biểu như sau:

Trong hệ đàn hồi tuyến tính chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m bằng đơn vị gây ra.

4.6.3. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị

Định lý này do L. Rayleigh (1842- 1919) đề xuất năm 1875. Xét một hệ đàn hồi ở hai trạng thái:

+ Ở trạng thái “m”: Gối tựa thứ m có chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra tại gối tựa thứ k phản lực đơn vị r_{km} (Hình 4.26a).



Hình 4.26

+ Ở trạng thái “k”: Gối tựa thứ k có chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra tại gối tựa thứ m phản lực đơn vị r_{mk} (Hình 4.26a).

Theo định lý Betti ta có: $1.r_{mk} = 1.r_{km}$

$$\text{Vậy: } r_{mk} = r_{km} \quad (4-20)$$

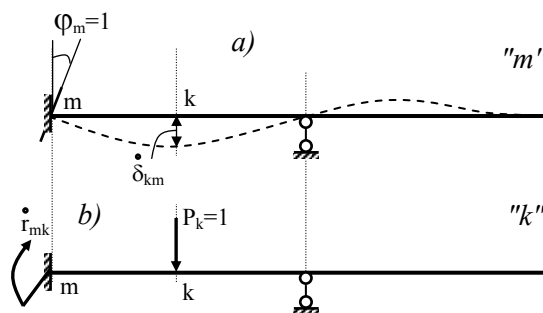
Định lý Rayleigh được phát biểu như sau:

Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m bằng đơn vị gây ra.

4.6.4. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị

Định lý này do A.A.Gvozdiev đề xuất năm 1927. Xét một hệ đàn hồi ở hai trạng thái:

+ Trạng thái “m”: Gối tựa thứ m có chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị ($\varphi_m = 1$), gây ra chuyển vị tại một điểm k là δ_{km} (Hình 4.27a).



Hình 4.27

+ Trạng thái “k”: Một lực bằng đơn vị ($P_k = 1$) gây ra tại gối tựa thứ m phản lực đơn vị là r_{mk} (Hình 4.27b).

Công khả dĩ $T_{mk} = 0$ vì trạng thái m không có ngoại lực tác dụng.

Công khả dĩ:

$$T_{km} = \dot{r}_{mk} \varphi_m + \dot{\delta}_{km} P_k$$

$$T_{km} = \dot{r}_{mk} + \dot{\delta}_{km}$$

Áp dụng định lý Betti ($T_{km} = T_{mk} = 0$) ta có:

$$\dot{r}_{km} = - \dot{\delta}_{mk} \quad (4-21)$$

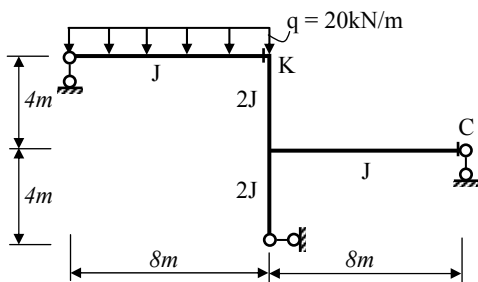
Như vậy định lý được phát biểu như sau:

Trong hệ đàn hồi tuyến tính phân lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cường bậc tại liên kết k bằng đơn vị gây ra nhưng trái dấu.

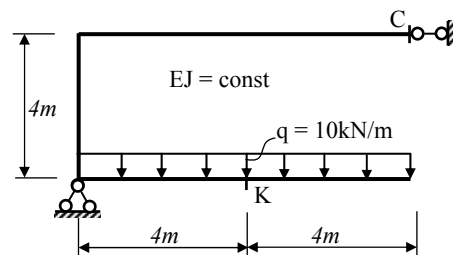
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện K, chuyển vị ngang tại tiết diện I, chuyển vị góc xoay tại tiết diện C, chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện A và B theo phương AB, chuyển vị góc xoay tương đối giữa hai tiết diện E và F của các hệ có kích thước và sơ đồ chịu lực trên các hình từ hình 4.28 đến hình 4.39.

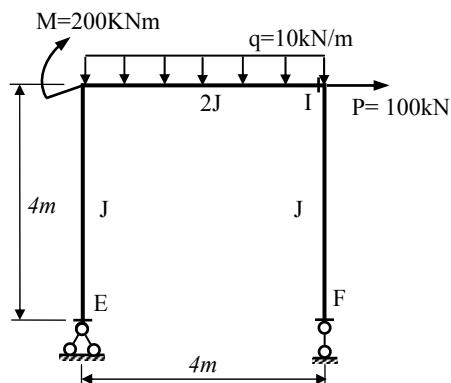
2. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại mắt B, chuyển vị ngang tại mắt C và góc xoay của thanh AB trong dàn có kích thước và sơ đồ chịu lực như trên các hình từ hình 4.40 đến hình 4.43.



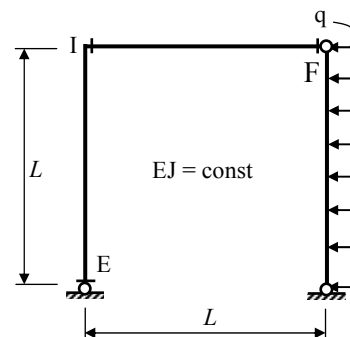
Hình 4.28



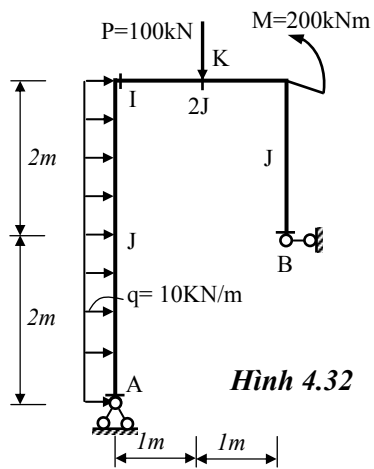
Hình 4.29



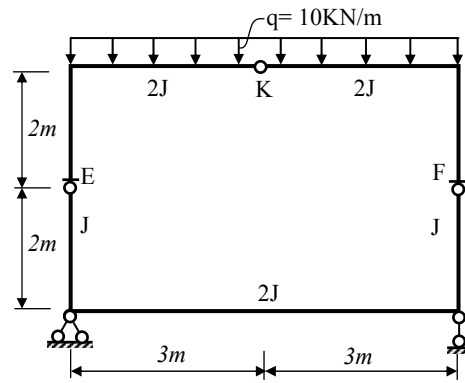
Hình 4.30



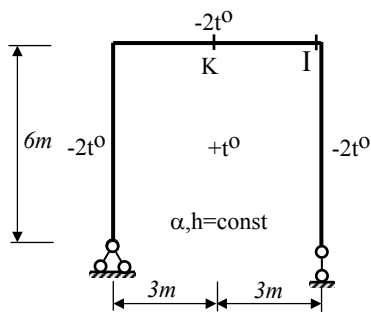
Hình 4.31



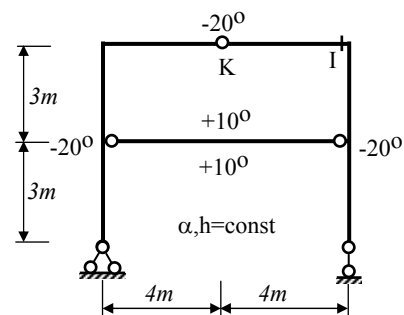
Hình 4.32



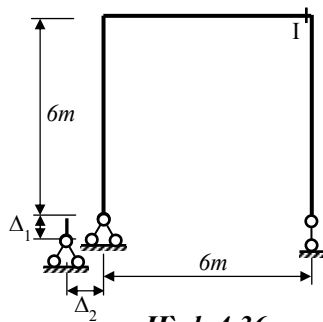
Hình 4.33



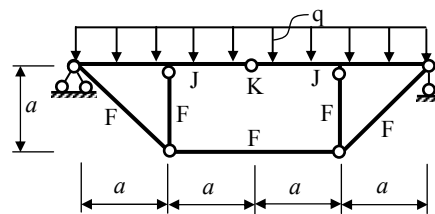
Hình 4.34



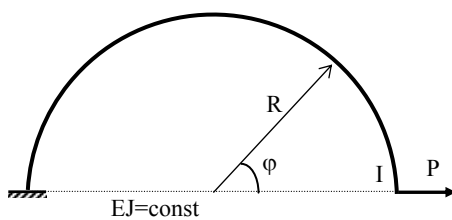
Hình 4.35



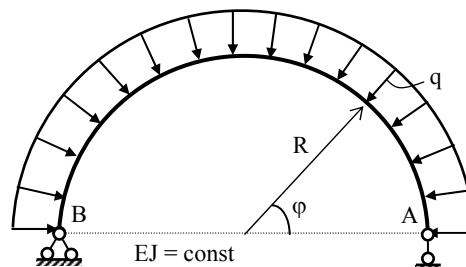
Hình 4.36



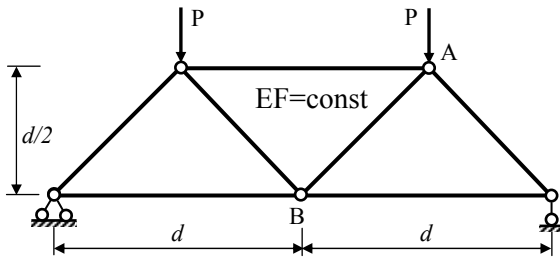
Hình 4.37



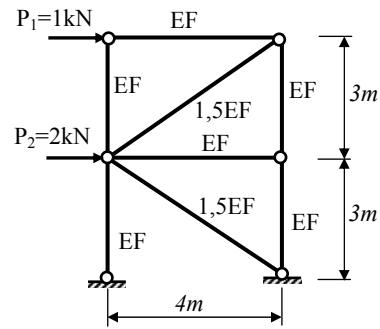
Hình 4.38



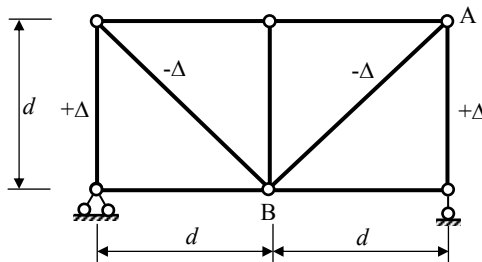
Hình 4.39



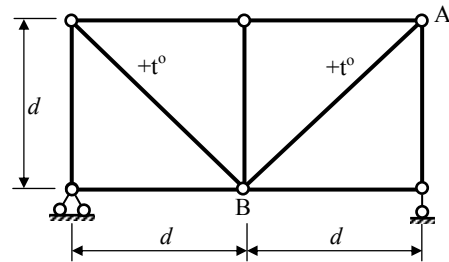
Hình 4.40



Hình 4.41

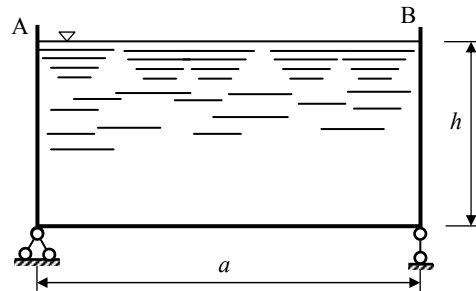


Hình 4.42



Hình 4.43

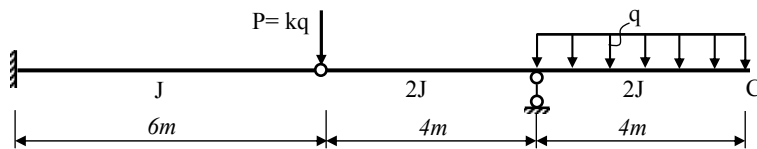
3. Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện A và B của khung có kích thước và sơ đồ cho trên hình 4.44. Khung chịu áp lực của cột nước có chiều cao là h . Biết $EJ = \text{const}$; Trọng lượng riêng của nước là γ_0 .



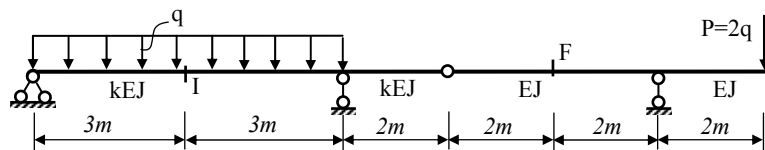
Hình 4.44

4. Xác định hệ số k để:

- Chuyển vị góc xoay tại C trên dầm ở hình 4.45 bằng không.
- Chuyển vị thẳng đứng tại I bằng chuyển vị thẳng đứng tại F trên dầm ở hình 4.46.



Hình 4.45



Hình 4.46

CHƯƠNG 5

TÍNH HỆ SIÊU TĨNH THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC

5.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH

5.1.1. Định nghĩa

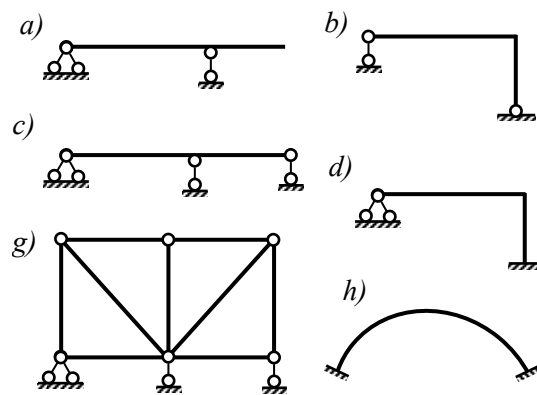
Trong các chương trước ta đã làm quen với hệ tĩnh định, là hệ chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học là đủ để xác định hết các phản lực và nội lực của hệ. Trong thực tế ta thường gặp những hệ mà nếu chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học thì chưa đủ để xác định hết các thành phần phản lực và nội lực. Để tính các hệ đó, cần bổ sung thêm phương trình thường là các phương trình biến dạng, những hệ như vậy gọi là hệ siêu tĩnh.

Hệ được gọi là siêu tĩnh nếu trong toàn hệ hoặc trong một vài phần của hệ ta không thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định được tất cả các phản lực và nội lực.

Về mặt cấu tạo hình học, hệ siêu tĩnh là hệ bất biến hình và thừa liên kết. Số liên kết thừa là đặc trưng của hệ siêu tĩnh, song ở đây liên kết thừa là những liên kết không cần thiết cho sự cấu tạo hình học của hệ nhưng vẫn cần cho sự làm việc của công trình.

Ví dụ dầm và khung trên hình 5.1a, b là hệ tĩnh định. Các hệ dầm, khung, dàn, vòm trên hình 5.1c, d, g, h là hệ siêu tĩnh vì từ ba phương trình cân bằng tĩnh học ta chưa thể xác định được hết các phản lực.

Hệ siêu tĩnh được sử dụng rộng rãi trong các công trình thực tế như cầu giao thông, nhà dân dụng và công nghiệp, các đập ngăn, cống, cầu máng, trạm thủy điện v.v...



Hình 5.1

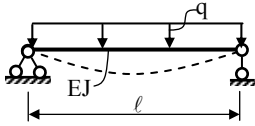
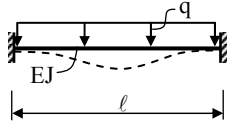
5.1.2. Đặc điểm của hệ siêu tĩnh

Đối chiếu với hệ tĩnh định thì hệ siêu tĩnh có các đặc điểm sau:

1. Chuyển vị, biến dạng và nội lực trong hệ siêu tĩnh nói chung nhỏ hơn trong hệ tĩnh định có cùng kích thước và tải trọng.

Kết quả tính độ võng ở giữa nhịp, mô men uốn lớn nhất trong dầm tĩnh định một nhịp và dầm siêu tĩnh một nhịp hai đầu ngàm ghi trong bảng 5.1 cho ta thấy chuyển vị và nội lực trong dầm siêu tĩnh nhỏ hơn trong dầm tĩnh định khá nhiều.

Bảng 5-1

Dầm		
Độ võng ở giữa nhịp	$Y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ}$	$Y_{\max} = \frac{ql^4}{384EJ}$
Giá trị mô men uốn lớn nhất	Tại giữa nhịp $M = \frac{ql^2}{8}$	Tại ngàm $M = \frac{ql^2}{12}$

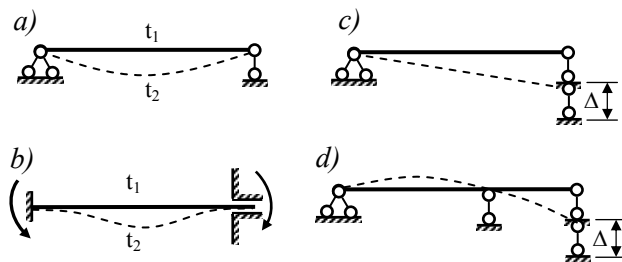
Vì vậy dùng hệ siêu tĩnh sẽ tiết kiệm vật liệu hơn so với hệ tĩnh định tương ứng. Đây cũng là ưu điểm chính của hệ siêu tĩnh.

2. Trong hệ siêu tĩnh phát sinh các nội lực do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị các gối tựa, sự chế tạo và lắp ráp không chính xác gây ra (những nguyên nhân này không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định).

Để thấy rõ tính chất này, ta xét một vài ví dụ:

• So sánh dầm đơn trên hình 5.2a với dầm siêu tĩnh một nhịp trên hình 5.2b cùng chịu sự thay đổi nhiệt độ không đều, ở trên là t_1 , ở dưới là t_2 với $t_2 > t_1$ ta thấy:

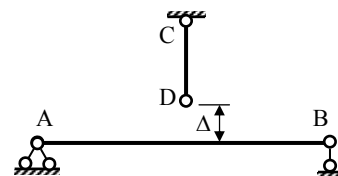
Dưới tác dụng của nhiệt độ dầm có khuynh hướng bị uốn cong, nhưng trong dầm tĩnh định các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không phát sinh phản lực và nội lực, ngược lại trong dầm siêu tĩnh, các liên kết (ngàm) cản trở không cho phép dầm biến dạng tự do, do đó phát sinh phản lực và nội lực.



Hình 5.2

• Khi liên kết có chuyển vị cưỡng bức (bị lún) dầm tĩnh định cho trên hình 5.2c bị nghiêng đi, các liên kết không ngăn cản và cho phép chuyển vị tự do nên không phát sinh nội lực. Ngược lại, khi gối phải của dầm siêu tĩnh trên hình 5.2d bị lún, gối tựa giữa không cho phép dầm chuyển vị tự do như trường hợp trên, dầm bị uốn cong theo đường đứt nét, do đó trong dầm sẽ phát sinh nội lực.

• Khi chế tạo, lắp ráp không chính xác (hình 5.3). Giả sử chiều dài của thanh CD trong hệ siêu tĩnh bị ngắn so với chiều dài thiết kế một đoạn bằng Δ . Sau khi lắp ráp, thanh CD bị dãn ra đồng thời dầm AB cũng bị uốn cong, do đó trong hệ tồn tại các nội lực ban đầu.



Hình 5.3

Khi thiết kế kết cấu siêu tĩnh ta cần đặc biệt lưu ý đến những nguyên nhân gây ra nội lực kể trên. Đôi khi có thể sử dụng tính chất này để tạo sẵn trong hệ những nội lực và biến dạng ban đầu ngược chiều với nội lực và biến dạng do tải trọng gây ra. Biện pháp này làm cho sự phân phối nội lực trong các cấu kiện của công trình được hợp lý hơn và do đó tiết kiệm được vật liệu.

3. Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vật liệu, kích thước và hình dạng của tiết diện trong các thanh.

Sau này ta sẽ thấy, để tính hệ siêu tĩnh ta phải dựa vào điều kiện biến dạng mà biến dạng lại phụ thuộc các độ cứng EJ, EF... nên nội lực trong hệ siêu tĩnh cũng phụ thuộc EJ, EF của các thanh.

Ba đặc điểm trên sẽ thấy rõ hơn trong quá trình tính hệ siêu tĩnh sau này.

5.1.3. Bậc siêu tĩnh

Với những giả thiết được chấp nhận trong cơ học kết cấu, ta có thể đưa ra khái niệm về bậc siêu tĩnh như sau:

Bậc siêu tĩnh của hệ siêu tĩnh bằng số lượng liên kết thừa đã qui đổi ra liên kết thanh ngoài số liên kết cần thiết đủ để cho hệ bất biến hình.

Có thể tính bậc siêu tĩnh (ký hiệu là n) theo ba cách sau:

1. Theo định nghĩa

Ta có thể dùng các công thức (1-2), (1-3), liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và số lượng các liên kết đã nghiên cứu trong chương 1 để suy ra công thức xác định bậc siêu tĩnh n của hệ:

$$n = (T + 2K + 3H) - 3(D - 1) \quad \text{Hệ bất kỳ không nối đất}$$

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D \quad \text{Hệ nối đất}$$

Trong đó:

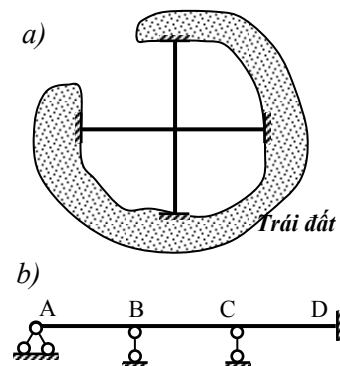
D - số các miếng cứng tĩnh định (miếng cứng có chu vi hở).

T, K, H - số liên kết thanh, liên kết khớp, liên kết hàn dùng để nối D miếng cứng (đã qui đổi ra liên kết đơn giản).

C - số liên kết tựa nối với đất được qui ra liên kết thanh.

2. Loại bỏ dần liên kết

Theo cách này ta sẽ loại bỏ dần các liên kết trong hệ siêu tĩnh để đưa hệ siêu tĩnh đã cho về hệ tĩnh định (bất biến hình đủ liên kết). Số liên kết bị loại bỏ (đã qui đổi ra liên kết thanh) là bậc siêu tĩnh cần tìm.



Hình 5.4

Ví dụ 5-1: Xác định bậc siêu tĩnh của các hệ trên hình 5.4.

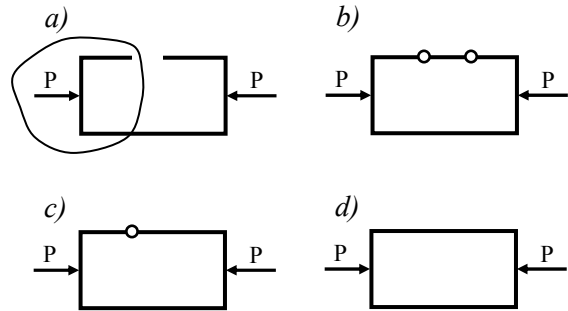
Khung siêu tĩnh trên hình 5.4a nếu bỏ 3 trong 4 ngàm hệ sẽ trở thành tĩnh định. Do đó $n = 3.3 = 9$, hệ siêu tĩnh bậc 9.

Dầm siêu tĩnh trên hình 5.4b nếu bỏ các liên kết ở A, B, C sẽ có dầm công sôn quen thuộc nên $n = 1.2 + 1 + 1 = 4$. Nếu bỏ liên kết ở B và D ta có dầm đơn giản có đầu thừa nên $n = 1 + 1.3 = 4$ dầm siêu tĩnh bậc 4.

3. Theo công thức đơn giản

Trước khi thiết lập công thức ta hãy khảo sát một ví dụ sau:

Xét một khung có chu vi hở (hình 5.5a). Khung này là tĩnh định, vì khi thực hiện mặt cắt như trên hình vẽ ta chỉ cần sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học là có thể xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ nào đó thuộc hệ.



Hình 5.5

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại một (liên kết thanh), hệ sẽ thừa một liên kết (hình 5.5b). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng một ($n = 1$).

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại hai (liên kết khớp) hệ sẽ thừa hai liên kết tương đương loại một (hình 5.5c). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng hai ($n = 2$).

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một mối hàn (liên kết loại ba) hệ sẽ thừa ba liên kết tương đương loại một (hình 5.5d). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng ba ($n = 3$).

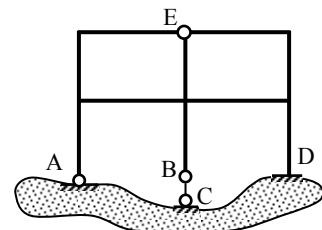
Qua ví dụ trên ta có: Một chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba, nếu thêm vào chu vi kín đó một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị. Bởi vậy, với hệ siêu tĩnh có V chu vi kín và K khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh n của hệ được xác định theo công thức:

$$n = 3V - K \quad (5-1)$$

Chú thích: Khi sử dụng công thức (5-1) cần quan niệm trái đất là miếng cứng hở. Ví dụ, khi xét hệ trên hình 5.4a thì số chu vi kín trong trường hợp này bằng 3 chứ không phải bằng 4 vì phải quan niệm trái đất là miếng cứng hở như trên hình vẽ. Bậc siêu tĩnh của hệ này bằng $n = 3.3 - 0 = 9$.

Ví dụ 5-2: Xác định bậc siêu tĩnh của khung trên hình 5.6.

Coi đất là một miếng cứng hở đi qua A, C, D. Ta thấy hệ có 4 chu vi kín ($V = 4$), số khớp đơn giản là 5 ($K = 5$) đó là 3 khớp đơn tại A, B, C và 1 khớp phức tạp được qui đổi thành 2 khớp đơn giản tại E. Vậy $n = 3.4 - 5 = 7$. Hệ siêu tĩnh bậc 7.



Hình 5.6

5.1.4. Các phương pháp tính hệ siêu tĩnh

So với các hệ tĩnh định đã biết, việc tính toán các hệ siêu tĩnh thường phức tạp và khối lượng tính toán lớn. Có nhiều phương pháp tính hệ siêu tĩnh, trong đó có hai phương pháp cơ bản là phương pháp lực và phương pháp chuyển vị.

1. *Phương pháp lực* (được đề cập trong Chương này), là phương pháp tổng quát áp dụng cho kết cấu dạng thanh bất kỳ với các nguyên nhân khác nhau. Hệ có bậc siêu tĩnh càng cao việc tính toán càng phức tạp.

2. *Phương pháp chuyển vị* (được đề cập trong Chương 6), thường dùng để tính cho hệ dầm, khung. Việc tính toán khá thuận tiện và có khả năng tự động hoá cao.

Nhược điểm của hai phương pháp này là phải giải hệ phương trình nhiều ẩn số. Để khắc phục nhược điểm này các phương pháp giải đúng dần dựa trên cơ sở của phương pháp chuyển vị đã ra đời. Một trong các phương pháp đó là phương pháp phân phối mô men (được đề cập trong Chương 7).

Trong những năm gần đây, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của máy tính điện tử, phương pháp phần tử hữu hạn được áp dụng rộng rãi và rất hiệu quả đối với các bài toán cơ học môi trường liên tục nói chung và cơ học vật rắn biến dạng nói riêng. Ta sẽ nghiên cứu phương pháp này trong môn học phương pháp số.

5.2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LỰC TÍNH HỆ SIÊU TĨNH

5.2.1. Nội dung cơ bản của phương pháp

Từ định nghĩa ta thấy không thể tính phản lực, nội lực trực tiếp trên hệ siêu tĩnh đã cho mà phải tính thông qua một hệ khác cho phép dễ dàng xác định phản lực, nội lực. Hệ mới này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là *hệ cơ bản*. Để bảo đảm cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho ta cần phải bổ sung thêm các điều kiện phụ. Đó là nội dung tóm tắt của phương pháp lực.

Hệ cơ bản của phương pháp lực là một hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa.

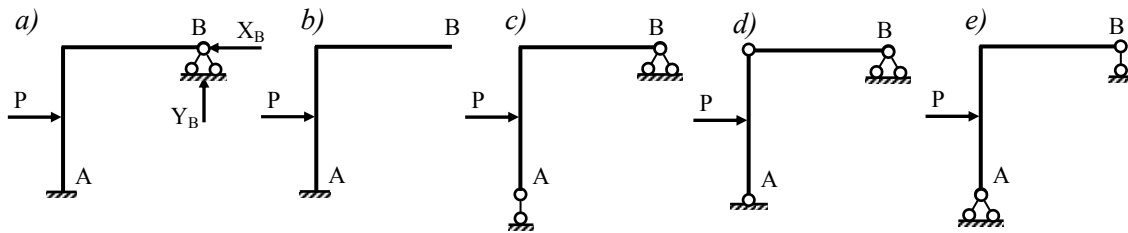
Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định, còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Điều quan trọng là hệ cơ bản phải *bất biến hình* và cho phép ta xác định được nội lực một cách dễ dàng. Bởi vậy trong đa số trường hợp, ta thường dùng hệ cơ bản tĩnh định.

Đối với hệ siêu tĩnh trên *hình 5.7a*, có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau. Ví dụ trên *hình 5.7b,c,d,e* cho ta ba cách chọn hệ cơ bản tĩnh định từ một hệ siêu tĩnh đã cho trên *hình 5.7a*.

Để thiết lập các điều kiện phụ ta hãy so sánh sự khác nhau giữa hệ siêu tĩnh đã cho (*hình 5.7a*) với hệ cơ bản (giả sử dùng hệ cơ bản *hình 5.7b*). Ta nhận thấy:

♦ Tại vị trí loại bỏ liên kết trong hệ siêu tĩnh có các phản lực X_B , Y_B còn trong hệ cơ bản (*hình 5.8*) thì không có các thành phần lực này.

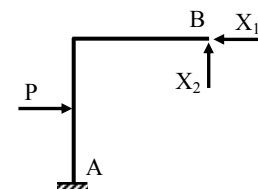


Hình 5.7

♦ Trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ đều bằng không, còn trong hệ cơ bản các chuyển vị này có thể tồn tại.

Như vậy, muốn cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho, ta cần:

♦ Trong hệ cơ bản, đặt các lực $X_1, X_2, \dots, X_n$ tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số (hình 5.8). Vì các ẩn số là lực (lực tập trung hoặc mô men tập trung) nên phương pháp này mang tên là *phương pháp lực*.



Hình 5.8

♦ Thiết lập điều kiện bổ sung là buộc chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ phải bằng với các chuyển vị thực tương ứng trong hệ siêu tĩnh (thường các chuyển vị này bằng không). Nói khác đi, chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của ẩn số $X_1, X_2, \dots, X_n$ do các lực $X_1, X_2, \dots, X_n$ và do các nguyên nhân bên ngoài (tải trọng P, sự thay đổi nhiệt độ t, sự chế tạo lắp ráp không chính xác và chuyển vị gối tựa Δ) gây ra phải bằng không.

Trên hình 5.8, với nguyên nhân tải trọng ta có hai chuyển vị ngang và đứng tại B là:

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, P) = 0$$

$$\Delta_{X_2}(X_1, X_2, P) = 0$$

Nếu hệ có bậc siêu tĩnh là n và hệ cơ bản tĩnh định thì ta có n điều kiện:

$$\Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, \Delta) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5-2)$$

Các điều kiện (5-2) được gọi là các *phương trình cơ bản của phương pháp lực*.

Với hệ có n bậc siêu tĩnh ta thiết lập được n phương trình cơ bản đủ để xác định n ẩn số $X_1, X_2, \dots, X_n$. Sau khi tìm được các lực $X_1, X_2, \dots, X_n$ ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản (hình 5.8). Lúc này các lực tác dụng trên hệ cơ bản đều đã biết, ta dễ dàng tìm được nội lực và biến dạng trong hệ cơ bản, đó chính là nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh đã cho, vì các lực X_i đã thỏa mãn hệ phương trình cơ bản tức là đã thỏa mãn điều kiện làm việc như nhau giữa hệ cơ bản với hệ siêu tĩnh đã cho.

Chú ý:

1. Khi chọn hệ cơ bản cho hệ siêu tĩnh chịu các chuyển vị cưỡng bức Δ tại các gối tựa. Để vế phải của phương trình cơ bản luôn bằng không như trường hợp tải trọng và nhiệt độ tác dụng ta cắt các liên kết có chuyển vị cưỡng bức mà không loại bỏ nó.

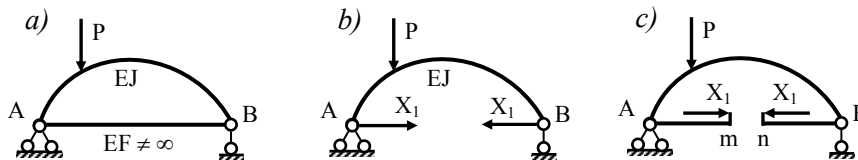
Thật vậy, giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên *hình 5.9a* nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết tại A có chuyển vị cưỡng bức (*Hình 5.9b*) thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số X_1 sẽ khác không:

$$\Delta_{X_1(X_1, \Delta)} = -a$$

Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị thì điều kiện biến dạng vẫn bằng không (*Hình 5.9c*) bởi vì lúc này chuyển vị tương ứng với cặp ẩn số X_1 là chuyển vị tương đối, tuy gối A có chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối giữa hai điểm cắt m và n vẫn bằng không.

$$\Delta_{X_1(X_1, \Delta)} = 0$$

2. Khi chọn hệ cơ bản cho hệ dàn siêu tĩnh hoặc hệ siêu tĩnh có các thanh hai đầu khớp với độ cứng hữu hạn ($EF \neq \infty$) và tải trọng không tác dụng trên thanh, ta quy định chỉ được phép cắt và thay thế bằng các cặp lực X_K ngược chiều nhau mà *không được phép loại bỏ*.



Hình 5.10

Với hệ trên *hình 5.10a*: nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ thanh cứng AB (*Hình 5.10b*) thì phương trình cơ bản biểu thị chuyển vị tương đối giữa A và B theo phương AB, chuyển vị này khác không vì trong thanh AB có biến dạng dọc trục; nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh AB (*Hình 5.10c*) thì chuyển vị tương đối giữa hai điểm m và n bằng không và phương trình cơ bản luôn bằng không.

5.2.2. Hệ phương trình chính tắc

1. Thành lập hệ phương trình chính tắc

Trong giáo trình này ta chỉ nghiên cứu những hệ có thể áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng, với những hệ này ta có thể biểu thị phương trình cơ bản thứ k của hệ (5-2) dưới dạng:

Để cho gọn, ta bỏ bớt các chỉ số X:

Trong đó:

Δ_{kP} , Δ_{kt} , $\Delta_{k\Delta}$ - chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực X_K do riêng tải trọng, thay đổi nhiệt độ, chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

$$\Delta_{km} = \delta_{km} \cdot X_m$$
$$\delta_{k1}.X_1 + \delta_{k2}.X_2 + ... + \delta_{kk}.X_k + ... + \delta_{kn}.X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Lambda} = 0.$$

Hệ phương trình (5-3) sau đây được gọi là *hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực*. Các hệ số δ_{km} (với $k \neq m$) của phương trình chính tắc gọi là *hệ số phụ*. Các hệ số δ_{kk} gọi là *hệ số chính*. Các số hạng Δ_{kp} , Δ_{kt} , $\Delta_{k\lambda}$ gọi là *số hạng tự do*.

Hệ phương trình (5-3) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

Trong đó:

$\{X\}$ - véc tơ ân lực

$\{\Delta\}$ - véc tơ các số hạng tự do

130

2. Cách tính các hệ số và số hạng

Về bản chất, các hệ số và số hạng tự do trong (5-3) là chuyển vị nên có thể xác định theo công thức Mắc xoen - Mo:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{\overline{Q}_k \overline{Q}_m}{GF} ds + \sum \int \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m}{EF} ds. \quad (5-4)$$

Trong đó: $(\overline{M}_k, \overline{Q}_k, \overline{N}_k)$, $(\overline{M}_m, \overline{Q}_m, \overline{N}_m)$ - lần lượt là biểu thức mô men, lực cắt, lực dọc do riêng $X_k = 1$, $X_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Đối với những hệ có thể áp dụng phép “nhân” biểu đồ theo Vêrêsgahin, ta có:

$$\delta_{km} = (\overline{M}_k)(\overline{M}_m) + (\overline{N}_k)(\overline{N}_m) + (\overline{Q}_k)(\overline{Q}_m);$$

Trong đó: $(\overline{M}_k), (\overline{Q}_k), (\overline{N}_k), (\overline{M}_m), (\overline{Q}_m), (\overline{N}_m)$ - lần lượt là biểu đồ mô men, lực cắt, lực dọc do $X_k = 1$, $X_m = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.

Các hệ số chính δ_{kk} luôn dương, các hệ số phụ δ_{km} có thể dương, âm hoặc bằng không.

- Các số hạng tự do:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\overline{M}_k M_p^o}{EJ} ds + \sum \int \frac{\overline{N}_k N_p^o}{EF} ds + \sum \int \mu \frac{\overline{Q}_k Q_p^o}{GF} ds \quad (5-5)$$

Trong đó: M_p^o, N_p^o, Q_p^o - Biểu thức giải tích của mô men uốn, lực dọc và lực cắt do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Trong trường hợp có thể áp dụng cách “nhân” biểu đồ ta có:

$$\Delta_{kp} = (M_p^o)(\overline{M}_k) + (N_p^o)(\overline{N}_k) + (Q_p^o)(\overline{Q}_k)$$

Trong đó:

$(M_p^o), (N_p^o), (Q_p^o)$ - Các biểu đồ nội lực do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

$$\Delta_{kt} = \sum \int \overline{M}_k \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta_t}{h} ds + \sum \int \overline{N}_k \cdot \alpha \cdot t_c \cdot ds. \quad (5-6)$$

Với những hệ gồm những thanh thẳng có tiết diện không đổi trong từng đoạn thanh và nhiệt độ thay đổi như nhau dọc theo chiều dài của từng đoạn thanh, ta dùng công thức thực hành sau:

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega_{(\overline{N}_k)} + \sum \pm \alpha \cdot \frac{|\Delta_t|}{h} \cdot |\Omega_{(\overline{M}_k)}|$$

Trong đó: $\Omega_{(\overline{N}_k)}$ và $\Omega_{(\overline{M}_k)}$ - là diện tích biểu đồ lực dọc và biểu đồ mô men uốn do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.

$$\Delta_{k\Delta} = - \sum \overline{R}_k^i \cdot \Delta_m^i \quad (5-7)$$

Trong đó: Δ_m^i - là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ i của hệ siêu tĩnh; $\overline{R}_k^i$ là phản lực tại liên kết thứ i do lực $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Chú ý: Nếu nguyên nhân tác dụng trên hệ siêu tĩnh không phải là chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa mà do chế tạo, lắp ráp không chính xác thì $\Delta_{k\Delta}$ được xác định theo (4-15).

5.2.3. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh

Giải hệ phương trình chính tắc (5-3) sẽ xác định được giá trị các ẩn lực $X_1, X_2, \dots, X_n$ và từ đây ta có thể vẽ biểu đồ nội lực theo hai cách sau:

1. Cách tính trực tiếp

Đặt tất cả các ẩn lực đúng chiều và trị số vào hệ cơ bản cùng với tải trọng đã cho. Vì hệ cơ bản thường là tĩnh định nên các biểu đồ nội lực sẽ được xác định dễ dàng như đã trình bày trong chương 2.

2. Cách dùng nguyên lý cộng tác dụng

Mô men uốn, lực cắt, lực dọc trong hệ siêu tĩnh do P, t, Δ gây ra có thể xác định theo biểu thức cộng tác dụng (xem Chương mở đầu). Với mô men uốn ta có:

$$\overline{M_{cc}} = \overline{M_1} \cdot X_1 + \overline{M_2} \cdot X_2 + \dots + \overline{M_n} \cdot X_n + \overline{M_p^0} + \overline{M_t^0} + \overline{M_\Delta^0} \quad (5-8)$$

Trong đó:

$\overline{M_{cc}}$ - biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh do P, t, Δ gây ra.

$\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_n}$ - biểu đồ mô men trên hệ cơ bản do riêng $X_1 = 1, \dots, X_n = 1$ gây ra.

$\overline{M_p^0}, \overline{M_t^0}, \overline{M_\Delta^0}$ - biểu đồ mô men trên hệ cơ bản do tải trọng, thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết tựa gây ra. Trong trường hợp hệ cơ bản là hệ tĩnh định thì $\overline{M_t^0} = \overline{M_\Delta^0} = 0$.

Biểu thức (5-8) hay được áp dụng để vẽ biểu đồ mô men uốn vì các biểu đồ $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_n}, \overline{M_p^0}$ đã được xây dựng trong quá trình tính hệ số, số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Biểu đồ lực cắt, lực dọc thường được xác định theo cách sau đây.

3. Cách vẽ biểu đồ lực cắt, lực dọc

Ta có thể vẽ biểu đồ lực cắt từ biểu đồ mô men đã biết và xác định biểu đồ lực dọc từ biểu đồ lực cắt đã biết.

a. Xác định giá trị lực cắt tại đầu mỗi đoạn thanh theo công thức:

$$Q_{AB} = Q_{AB}^0 \pm \frac{|\Delta M_{AB}|}{\ell_{AB}} \quad (5-9)$$

Trong đó:

Q_{AB} - giá trị lực cắt tại tiết diện A của thanh AB trong hệ siêu tĩnh.

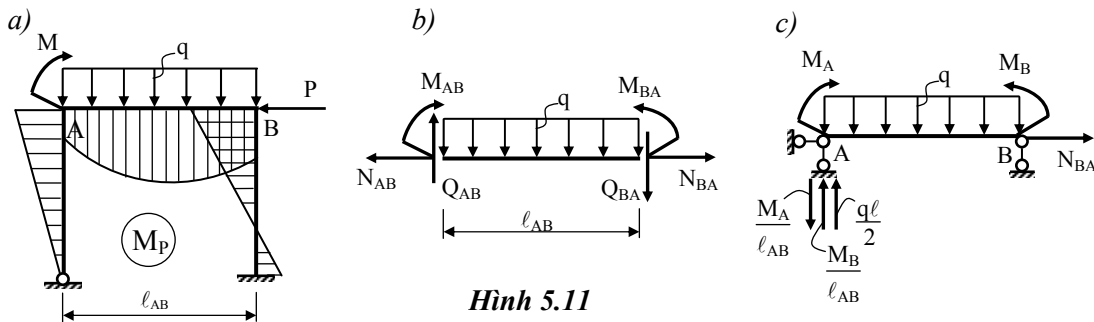
Q_{AB}^0 - giá trị lực cắt tại tiết diện A của thanh AB do tải trọng tác dụng trong đoạn thanh AB gây ra khi coi thanh đó như một dầm đơn giản hai đầu khớp.

ΔM_{AB} - hiệu đại số các tung độ mô men ở hai đầu đoạn thanh A và B.

$|\Delta M_{AB}|$ - lấy dấu dương khi trục thanh quay một góc nhỏ hơn 90° về phương của đường nối hai tung độ mô men ở hai đầu thanh là thuận chiều kim đồng hồ và lấy dấu âm khi quay ngược chiều kim đồng hồ.

Ta có thể chứng minh công thức (5-9) như sau:

Giả sử đã biết biểu đồ mô men (M_p) như hình 5.11a. Tách thanh AB để xét, tại tiết diện bị cắt đặt thêm các nội lực M, Q, N như hình 5.11b. Sau đó thay tác dụng của lực cắt và lực dọc bằng các liên kết thanh như hình 5.11c.



Hình 5.11

Để xác định lực cắt trong đoạn thanh AB ta chỉ cần tìm lực cắt trên sơ đồ dầm đơn quen thuộc (hình 5.11c). Tại mỗi gối tựa phản lực có ba ảnh hưởng của M_A, M_B và q . Dùng phương pháp mặt cắt tại A, xét cân bằng phần trái ta có:

$$Q_{AB} = \frac{q\ell_{AB}}{2} + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{\ell_{AB}} = Q_{AB}^o + \frac{M_{BA} - M_{AB}}{\ell_{AB}}$$

Để tránh phiền phức về qui ước dấu của mô men trong số hạng thứ hai, ta có thể viết công thức dưới dạng trị tuyệt đối như (5-9).

b. Xác định giá trị lực dọc từ lực cắt:

Cách vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt đã biết dựa trên cơ sở khảo sát sự cân bằng về lực của các nút hoặc của từng phần hệ được tách ra khỏi hệ thanh (thông qua các phương trình cân bằng hình chiếu).

5.3. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

5.3.1. Hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động

Ví dụ 5-3: Vẽ biểu đồ nội lực trong khung cho trên hình 5.12a.

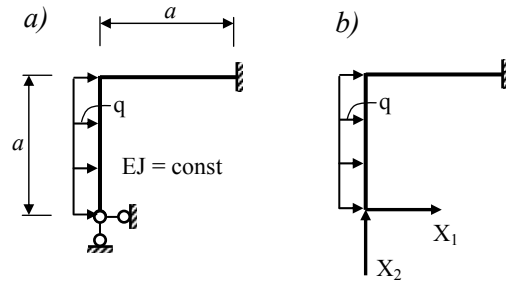
Quá trình tính toán được thực hiện theo thứ tự như sau:

1. **Xác định bậc siêu tĩnh.** Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng 2.
2. **Chọn hệ cơ bản.** Có nhiều cách chọn hệ cơ bản, ta chọn hệ cơ bản như hình 5.12b.
3. **Thiết lập hệ phương trình chính tắc.** Hệ siêu tĩnh bậc hai ($n = 2$).

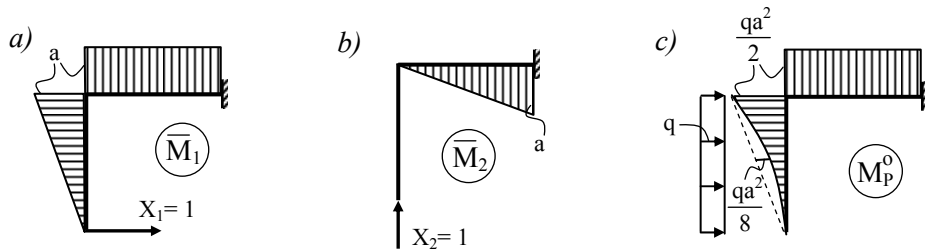
Ta có hai phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Khi xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc trong khung và dầm, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt khi tính các chuyển vị. Ta cần vẽ các biểu đồ mô men uốn đơn vị lần lượt do $X_1 = 1$; $X_2 = 1$ và biểu đồ mô men uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.13a, b, c). Ta có:



Hình 5.12



Hình 5.13

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1) \cdot (\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} + a^2 \cdot a \right] = \frac{4a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2) \cdot (\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1) \cdot (\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (M_p^0) \cdot (\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a \right] = \frac{5qa^4}{8EJ}$$

$$\Delta_{2P} = (M_p^0) \cdot (\overline{M}_2) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ}$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{4a^3}{3EJ} X_1 - \frac{a^3}{2EJ} X_2 + \frac{5qa^4}{8EJ} &= 0 \\ -\frac{a^3}{2EJ} X_1 + \frac{a^3}{3EJ} X_2 + \frac{qa^4}{4EJ} &= 0 \end{aligned}$$

Hay:
$$\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0$$

$$-\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0.$$

4. Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn số X_1, X_2 . Kết quả:

$$X_1 = -\frac{3}{7}qa; \quad X_2 = \frac{3}{28}qa.$$

5. Vẽ biểu đồ mô men uốn. Trong ví dụ này ta vẽ biểu đồ mô men uốn theo nguyên lý cộng tác dụng. Với hệ chỉ chịu tải trọng ta có:

$$(M_p) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + (M_p^0)$$

Từ biểu thức trên ta xác định các giá trị mô men tại các đầu thanh và áp dụng cách treo biểu đồ của dầm đơn sẽ vẽ được biểu đồ (M_p) của hệ siêu tĩnh đã cho trên hình 5.14a.

6. Vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ mô men uốn:

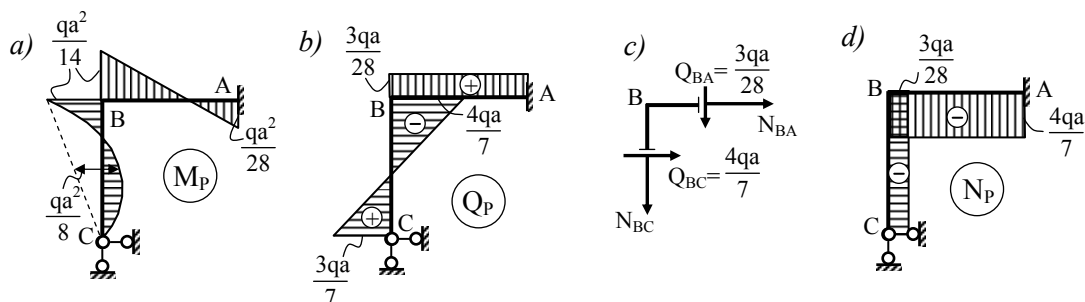
• Trên thanh ngang AB: biểu đồ lực cắt là hằng số, có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn và có giá trị:

$$Q_{BA} = \frac{1}{a} \left(\frac{qa^2}{28} + \frac{qa^2}{14} \right) = +\frac{3qa}{28}$$

• Trên thanh đứng BC: biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất, ta chỉ cần xác định giá trị của lực cắt tại các đầu thanh Q_{CB} và Q_{BC} rồi nối lại với nhau bằng đường thẳng ta có:

$$Q_{CB} = Q^{\text{tr}} = \frac{1}{a} \left(\frac{qa^2}{14} - 0 \right) + \frac{qa}{2} = +\frac{3qa}{7}$$

$$Q_{BC} = Q^{\text{ph}} = \frac{1}{a} \left(\frac{qa^2}{14} - 0 \right) - \frac{qa}{2} = -\frac{4qa}{7}$$



Hình 5.14

Biểu đồ lực cắt vẽ trên hình 5.14b.

7. Vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt bằng cách tách nút:

Vì tải trọng vuông góc với trục thanh nên lực dọc không thay đổi trong từng thanh, do đó chỉ cần xác định một giá trị lực dọc tại một tiết diện nào đó trong mỗi thanh là đủ để vẽ biểu đồ.

Tách nút B (hình 5.14c), sau khi đặt tại những tiết diện bị cắt các lực cắt có giá trị và chiều đã biết theo biểu đồ Q đồng thời đặt các lực dọc N_{AB} và N_{BC} chưa biết (giả thiết là dương hướng ra ngoài mặt cắt), ta viết phương trình cân bằng hình chiếu:

$$\sum X = N_{AB} + \frac{4qa}{7} = 0, \quad \text{suy ra } N_{AB} = -\frac{4qa}{7}$$

$$\sum Y = -N_{BC} - \frac{3qa}{28} = 0, \quad \text{suy ra } N_{BC} = -\frac{3qa}{28}$$

Biểu đồ lực dọc vẽ trên hình 5.14d.

Ví dụ 5-4: Vẽ biểu đồ nội lực trong khung cho trên hình 5.15a.

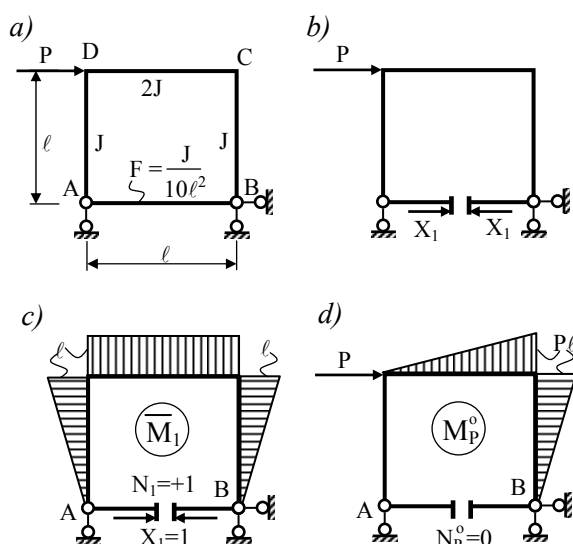
Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.15b.

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Để xác định δ_{11} và Δ_{1P} ta cần vẽ biểu đồ $\overline{M}_1$ và biểu đồ M_p^0 (Hình 5.15c,d).

Ngoài ra, phải xét đến ảnh hưởng của lực dọc trong thanh hai đầu khớp AB, nên ta cần xác định thêm lực dọc trong thanh AB do $X_1 = 1$ và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản, kết quả ghi trên hình 5.15c,d.



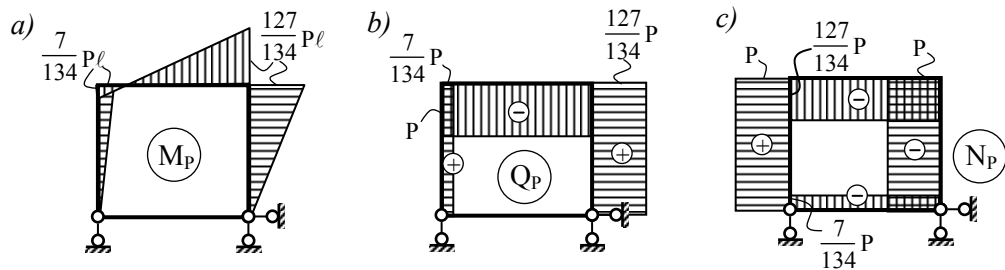
Hình 5.15

Xác định hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} :

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \overline{M}_1 + \overline{N}_1 \overline{N}_1 = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{\ell \cdot \ell}{2} \cdot \frac{2\ell}{3} + \frac{\ell^3}{2EJ} + \frac{1}{EF} \cdot \ell \cdot 1 \cdot 1 = \frac{67\ell^3}{6EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \overline{M}_1^0 \overline{M}_1 = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{P\ell^2}{2} \cdot \ell + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P\ell^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell = \frac{7P\ell^3}{12EJ}$$

Thay các trị số này vào phương trình chính tắc và giải ra ta được: $X_1 = -\frac{7P}{134}$

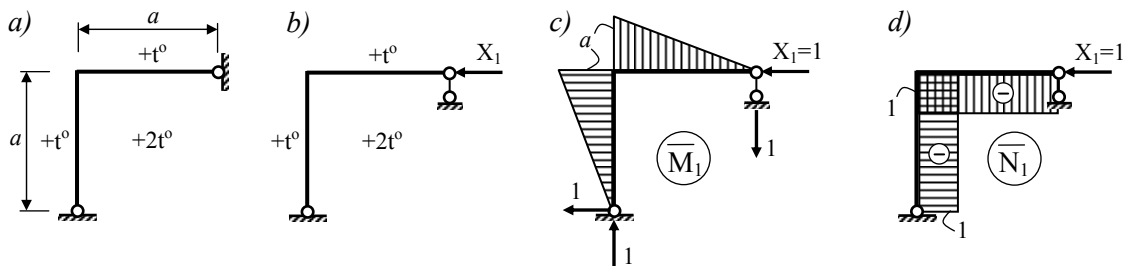


Hình 5.16

Cũng thực hiện các bước tiếp theo tương tự như trong ví dụ trên, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mô men uốn, lực cắt và lực dọc như trên hình 5.16a,b,c.

5.3.2. Hệ siêu tĩnh chịu sự thay đổi nhiệt độ

Ví dụ 5-5: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong khung chịu sự thay đổi của nhiệt độ có kích thước và sơ đồ như hình 5.17a. Cho biết chiều cao h của các tiết diện không đổi, $h = a/10$. $EJ = \text{const}$. Vật liệu có hệ số giãn nở vì nhiệt là α .



Hình 5.17

Hệ đã cho có một bậc siêu tĩnh. Chọn hệ cơ bản như hình 5.17b. Phương trình chính tắc có dạng: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0$

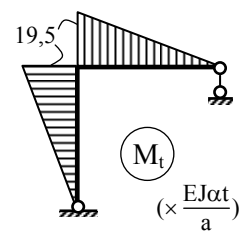
Biểu đồ $(\overline{M}_1)$ và $(\overline{N}_1)$ vẽ trên hình 5.17c,d.

Tính các hệ số:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1, \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{2a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1t} = \sum \pm \alpha \cdot \frac{|\Delta_t|}{h} \cdot |\Omega_{(\overline{M}_1)}| + \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega_{(\overline{N}_1)}$$

$$= -\alpha \cdot \frac{|2t - t|}{h} \left(\frac{a \cdot a}{2} \right) \cdot 2 + \alpha \cdot \frac{t + 2t}{2} (1 \cdot a) \cdot 2 = -13\alpha t$$



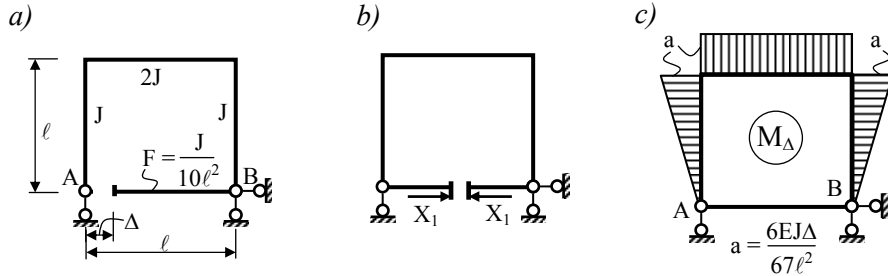
Hình 5.18

Thay vào phương trình chính tắc và giải phương trình ta được: $X_1 = 19,5EJ \frac{\alpha t}{a^2}$

Biểu đồ mô men uốn được xác định theo biểu thức: $(M_t) = (\overline{M}_1) X_1$. Kết quả vẽ trên hình 5.18.

5.3.3. Hệ siêu tĩnh có thanh chế tạo chiều dài không chính xác

Ví dụ 5-6: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong khung siêu tĩnh cho trên hình 5.19a khi thanh AB có chiều dài chế tạo bị hụt một đoạn là Δ .



Hình 5.19

Hệ đã cho có một bậc siêu tĩnh. Chọn hệ cơ bản như hình 5.19b. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

Hệ này đã được khảo sát trong ví dụ 5-4 khi hệ chịu tải trọng, do đó ta có thể sử dụng một số số liệu đã có. Biểu đồ $(\overline{M}_1)$ như trên hình 5.15c.

Hệ số chính có giá trị: $\delta_{11} = \frac{67\ell^3}{6EJ}$

Số hạng tự do $\Delta_{1\Delta}$ biểu thị chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của các lực X_1 do độ hụt Δ của thanh AB gây ra trên hệ cơ bản.

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_{im}$$

Trong trường hợp này $i = 1$; $\Delta_{1m} = -\Delta$; $\overline{N}_{11} = 1$. Do đó: $\Delta_{1\Delta} = 1 \cdot (-\Delta) = -\Delta$.

Nghiệm của phương trình chính tắc: $X_1 = \frac{6EJ\Delta}{67\ell^3}$

Biểu đồ mô men uốn trong hệ siêu tĩnh được xác định theo công thức

$$(\overline{M}_\Delta) = (\overline{M}_1)X_1$$

Kết quả như trên hình 5.19c.

5.3.4. Hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa

Ví dụ 5-7: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong dầm liên tục cho trên hình 5.20a, khi ngàm A bị xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc $\varphi = \frac{\Delta}{\ell}$ và gối tựa C bị lún xuống một đoạn bằng Δ . Cho biết $EJ = \text{const}$.

Hệ đã cho là dầm siêu tĩnh bậc hai. Chọn hệ cơ bản như hình 5.20b.

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Delta} = -\Delta$$

Xác định các hệ số và số hạng tự do:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \overline{M_1} \overline{M_1} \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell \right] = \frac{\ell^3}{3EJ}\end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \overline{M_2} \overline{M_2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{2\ell \cdot 2\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\ell \right] = \frac{8\ell^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M_1} \overline{M_2} = \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{\ell^2}{2} \cdot \left(\ell + \frac{2}{3}\ell \right) \right] = \frac{5\ell^3}{6EJ}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\ell \cdot \varphi = -\Delta$$

$$\Delta_{2\Delta} = -2\ell \cdot \varphi = -2\Delta$$

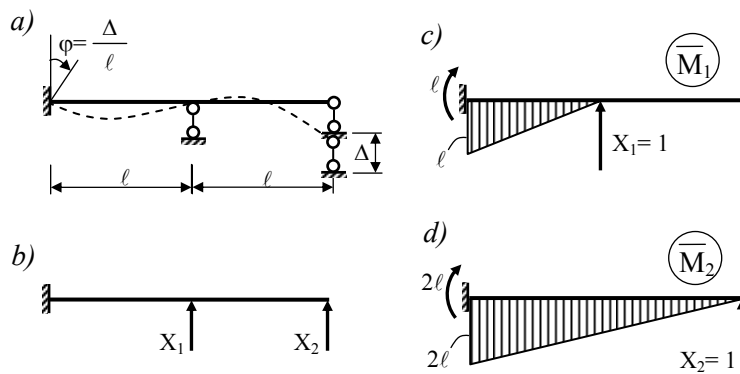
Thay các hệ số đã tính được vào hệ phương trình chính tắc và giải ta được các ẩn lực:

$$X_1 = 9,43 \frac{EJ\Delta}{\ell^3}; \quad X_2 = -2,57 \frac{EJ\Delta}{\ell^3}$$

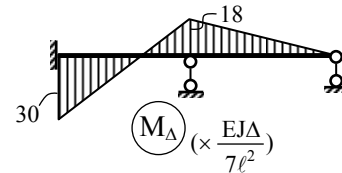
Biểu đồ mô men uốn được tính theo biểu thức cộng tác dụng:

$$\overline{M_\Delta} = \overline{M_1} \cdot X_1 + \overline{M_2} \cdot X_2$$

Kết quả vẽ trên hình 5.21.



Hình 5.20



Hình 5.21

5.3.5. Dàn siêu tĩnh

Ví dụ 5-7: Cho dàn chịu tải trọng như hình 5.22a. Xác định lực dọc trong các thanh của dàn. Biết $EF = \text{const}$.

Trình tự tính như sau:

1. **Bậc siêu tĩnh.** Với hệ dàn nổi đất ta có:

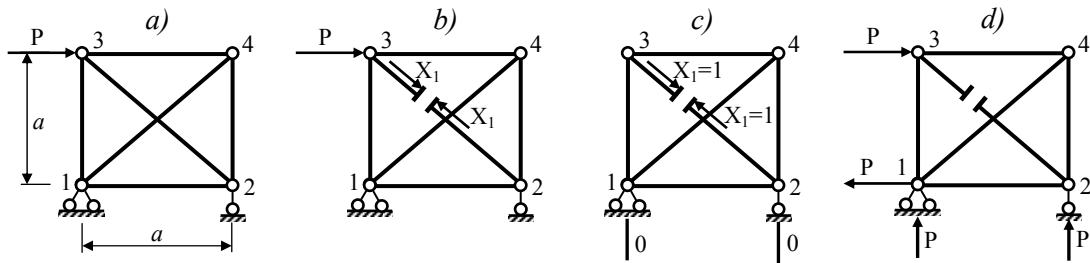
$$n = D + C - 2M = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Dàn siêu tĩnh bậc một.}$$

2. **Hệ cơ bản.** Cắt thanh 2-3 hệ cơ bản được chọn như hình 5.22b.

3. **Phương trình chính tắc.** $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

♦ Tính hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} :

Cần tính lực dọc trong các thanh dàn trên hệ cơ bản lần lượt do cặp ản lực $X_1 = 1$ (hình 5.22c) và tải trọng (hình 5.22d) gây ra. Kết quả tính được ghi trên cột 3, 4 của bảng 5-2.



Hình 5.22

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot \bar{N}_{im}}{(EF)_i} \ell_i; \quad \text{suy ra } \delta_{11} = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^6 \bar{N}_{i1} \cdot \bar{N}_{i1} \cdot \ell_i = \frac{2a(1 + \sqrt{2})}{EF}$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{iP}^0}{(EF)_i} \ell_i; \quad \text{suy ra } \Delta_{1P} = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^6 \bar{N}_{i1} \cdot N_{iP}^0 \cdot \ell_i = \frac{Pa(2 + \sqrt{2})}{EF}$$

♦ Giải phương trình chính tắc ta được: $X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -0,707P$

4. Xác định lực dọc trong dàn siêu tĩnh

Vận dụng nguyên lý cộng tác dụng $N_{iP} = \bar{N}_{i1}X_1 + N_{iP}^0$ ta tính được lực dọc trong các thanh của dàn siêu tĩnh đã cho. Kết quả được ghi trên cột 7 của bảng 5-2.

Bảng 5-2

Thanh	ℓ_i	$\bar{N}_{i1}$	N_{iP}^0	$\bar{N}_{i1} \cdot \bar{N}_{i1} \cdot \ell_i$	$\bar{N}_{i1} \cdot N_{iP}^0 \cdot \ell_i$	N_{iP}
1-2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$	0	+ 0,499P
1-3	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$	0	+ 0,499P
1-4	$a\sqrt{2}$	1	$P\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	2Pa	+ 0,703P
3-4	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	- P	$\frac{a}{2}$	$\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	- 0,5P
3-2	$a\sqrt{2}$	1	0	$a\sqrt{2}$	0	- 0,707P
4-2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	- P	$\frac{a}{2}$	$\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	- 0,5P
Σ				$2a(1 + \sqrt{2})$	$Pa(2 + \sqrt{2})$	

$$\text{Ví dụ: } N_p^{3-4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-0,707P) + (-P) = -0,5P; \quad N_p^{1-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-0,707P) + 0 = +0,499P.$$

5.4. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

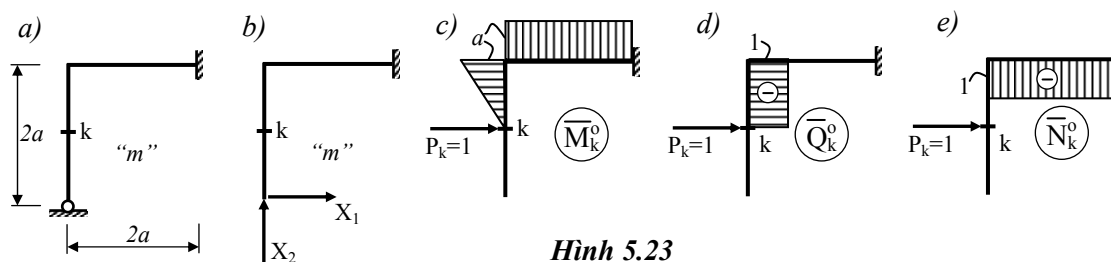
5.4.1. Cách tính chuyển vị

Công thức tính chuyển vị của Măcxoen - Mo (4-6) là tổng quát, áp dụng cho hệ siêu tĩnh cũng như tĩnh định. Khi sử dụng công thức này ta cần phải tính hệ ở hai trạng thái, trạng thái “m” là trạng thái thực của hệ, trạng thái “k” là trạng thái khả dĩ được tạo ra bằng cách đặt một lực $P_k = 1$ có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm vào hệ ban đầu.

Nếu tính chuyển vị trực tiếp trên hệ siêu tĩnh đã cho, ta sẽ phải giải hệ siêu tĩnh hai lần với hai nguyên nhân khác nhau. Như vậy khối lượng tính toán sẽ rất nặng nề.

Song nếu lưu ý nội lực và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh do nguyên nhân “m” gây ra chính là nội lực và chuyển vị trong hệ cơ bản tĩnh định tương đương chịu tác dụng của các ảnh hưởng và nguyên nhân “m”, thì tính chuyển vị trên hệ cơ bản tương đương sẽ đơn giản hơn nhiều. Vì như vậy ta chỉ phải giải hệ siêu tĩnh một lần ở trạng thái thực “m”, còn trạng thái phụ “k” sẽ được tính trên hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ được suy từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ các liên kết thừa.

Để dễ hiểu hơn ta xét khung siêu tĩnh trên *hình 5.23a*. Giả sử cần tính chuyển vị ngang tại k do nguyên nhân “m” gây ra (tải trọng P, sự thay đổi nhiệt độ t, sự chế tạo không chính xác và chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa Δ).



Hình 5.23

Thay việc lập trạng thái phụ “k” từ hệ siêu tĩnh (*hình 5.23a*) ta lập trạng thái “k” từ hệ cơ bản tương đương (*hình 5.23b*), ta có:

$$\Delta_{km} = \Delta_{k(X_1, X_2, P, t, \Delta)}^0 = \Delta_{k(X_1, X_2, P)}^0 + \Delta_{kt}^0 + \Delta_{k\Delta}^0 \quad (5-10)$$

Trong đó:

$\Delta_{k(X_1, X_2, P)}^0$ - chuyển vị ngang tại k do các ảnh hưởng và tải trọng đã cho gây ra trên hệ cơ bản tĩnh định. Nếu biểu diễn dưới dạng nhân biểu đồ ta có:

$$\Delta_{k(X_1, X_2, P)}^0 = (M_m) \cdot (\overline{M}_k^0) + (Q_m) \cdot (\overline{Q}_k^0) + (N_m) \cdot (\overline{N}_k^0) \quad (5-11)$$

$\Delta_{kt}^o, \Delta_{k\Delta}^o$ - chuyển vị tương ứng tại k do nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa gây ra trên hệ cơ bản tĩnh định đã chọn làm trạng thái phụ “k” và chúng được xác định:

$$\Delta_{kt}^o = \sum \pm \alpha \cdot \frac{|\Delta_t|}{h} \cdot |\Omega_{(\overline{M}_k)}| + \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega_{(\overline{N}_k)} \quad (5-12)$$

$$\Delta_{k\Delta}^o = - \sum_i \overline{R}_{ik}^o \cdot \Delta_{im} \quad (5-13)$$

Trong đó:

$(\overline{M}_m), (\overline{Q}_m), (\overline{N}_m)$ - các biểu đồ nội lực do các nguyên nhân (P, t, Δ) gây ra trên hệ siêu tĩnh (có được sau khi vận dụng các phương pháp giải hệ siêu tĩnh).

$(\overline{M}_k^o), (\overline{Q}_k^o), (\overline{N}_k^o)$ - các biểu đồ nội lực ở trạng thái phụ “k” trên hệ tĩnh định bất biến hình được suy từ hệ siêu tĩnh đã cho (hình 5.23c,d,e).

$\Omega_{(\overline{M}_k^o)}, \Omega_{(\overline{N}_k^o)}$ - lần lượt là diện tích của biểu đồ mô men và lực dọc trong trạng thái phụ “k” đã chọn.

$\overline{R}_{ik}^o$ - phản lực tại liên kết có chuyển vị cưỡng bức Δ_i trong trạng thái phụ “k”.

Xét các trường hợp riêng hay gặp (hệ dầm, khung).

♦ Hệ chỉ có tải trọng tác dụng:

$$\Delta_{kP} = (\overline{M}_P) \cdot (\overline{M}_k^o) \quad (5-14)$$

♦ Hệ chịu tác dụng của nhiệt độ:

$$\Delta_{kt} = (\overline{M}_t) \cdot (\overline{M}_k^o) + \Delta_{kt}^o \quad (5-15)$$

♦ Hệ chịu chuyển vị liên kết tựa:

$$\Delta_{k\Delta} = (\overline{M}_\Delta) \cdot (\overline{M}_k^o) + \Delta_{k\Delta}^o \quad (5-16)$$

Từ ví dụ khung siêu tĩnh trên hình 5.23 ta suy ra công thức tính chuyển vị cho hệ thanh phẳng bất kỳ có độ cong nhỏ như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = \sum \int \frac{\overline{M}_k^o M_m}{EJ} ds + \sum \int \mu \frac{\overline{Q}_k^o Q_m}{GF} ds + \sum \int \frac{\overline{N}_k^o N_m}{EF} ds + \\ + \sum \pm \alpha \cdot \frac{|\Delta_t|}{h} \cdot |\Omega_{(\overline{M}_k^o)}| + \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega_{(\overline{N}_k^o)} - \sum_i \overline{R}_{ik}^o \cdot \Delta_i \end{aligned} \quad (5-17)$$

5.4.2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 5-8: Cho hệ siêu tĩnh chịu tác dụng đồng thời của ba nguyên nhân P, t, Δ như hình 5.24.

Yêu cầu: Xác định góc xoay tại nút B ($\varphi_B = ?$). Cho biết các biểu đồ mô men uốn trên hệ siêu tĩnh M_P, M_t, M_Δ như hình 5.25a, b, c.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần:

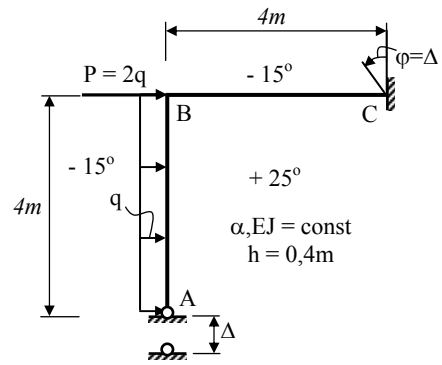
+ Lập trạng thái phụ “k” như hình 5.25d:

Đặt $M_k = 1$ vào hệ tĩnh định được suy từ hệ siêu tĩnh ($n = 2$) bằng cách loại bỏ hai liên kết thừa ở A.

+ Tính hệ ở trạng thái “k”:

Vẽ biểu đồ mô men $(\overline{M}_k^0)$ và lực dọc $(\overline{N}_k^0)$ như trên hình 5.25e,f.

+ Xác định góc xoay tại B theo nguyên lý cộng tác dụng:



Hình 5.24

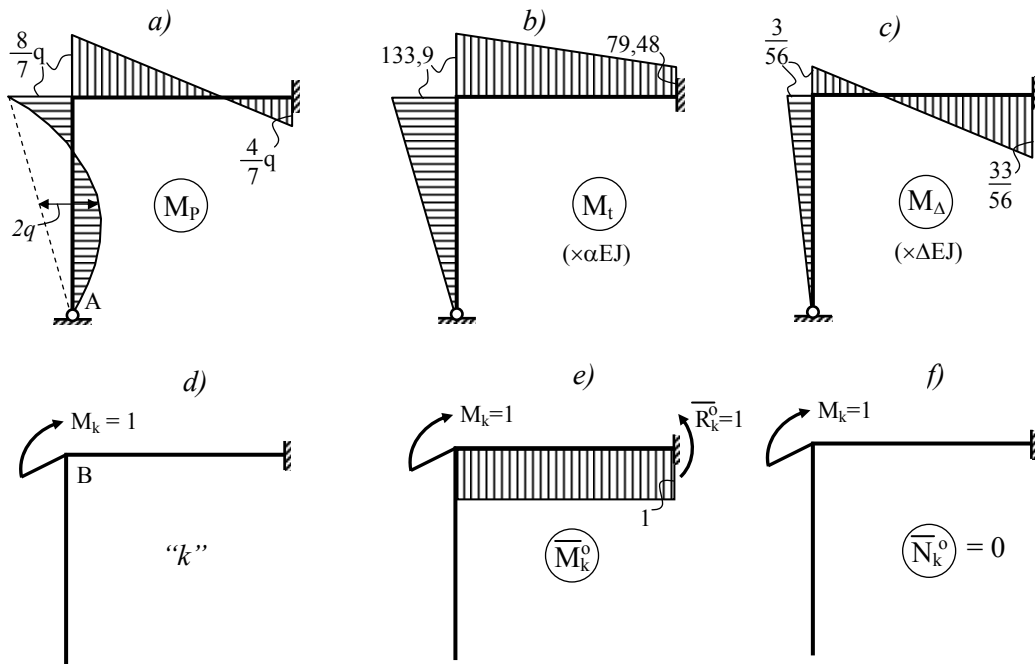
$$\varphi_{B(P, t, \Delta)} = \varphi_{BP} + \varphi_{Bt} + \varphi_{B\Delta}$$

$$\varphi_{BP} = (M_P) \cdot (\overline{M}_k^0) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{8q}{7} \cdot \frac{4}{2} \cdot 1 + \frac{4q}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot 1 \right) = \frac{16q}{7EJ} \text{ (rad)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Bt} &= (M_t) \cdot (\overline{M}_k^0) + \varphi_{Bt}^0 = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{(133,9 + 79,84)\alpha EJ}{2} \cdot 4 \cdot 1 \right] + \alpha \frac{40}{0,4} \cdot 1 \cdot 4 = -26,7\alpha \text{ (rad)} \end{aligned}$$

$$\varphi_{B\Delta} = (M_\Delta) \cdot (\overline{M}_k^0) + \varphi_{B\Delta}^0 = +\frac{15}{14}\Delta - \Delta = +\frac{\Delta}{14} \text{ (rad)}$$

Vậy chuyển vị góc xoay tại B là: $\varphi_B = -\frac{16q}{7EJ} - 26,7\Delta + \frac{\Delta}{14} \text{ (rad)}$



Hình 5.25

5.5. CÁCH KIỂM TRA TÍNH TOÁN TRONG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Khi giải bài toán siêu tĩnh theo phương pháp lực ta phải trải qua khá nhiều phép tính trung gian, do đó dễ dẫn đến những sai số lớn trong kết quả cuối cùng. Để sớm phát hiện ra các sai số và nhầm lẫn trong tính toán ta nên vận dụng một số tính chất độc lập với các phép tính đã sử dụng để kiểm tra lại quá trình tính toán và kết quả tính cuối cùng.

5.5.1. Kiểm tra quá trình tính toán

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$ và biểu đồ (M_p^o)

Vận dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng bộ phận được tách ra khỏi hệ như đã biết trong Sức bền vật liệu để kiểm tra.

2. Kiểm tra các hệ số δ_{km} và các số hạng tự do

Gọi $(\overline{M}_S)$ là biểu đồ mô men đơn vị tổng cộng do các ản $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$ tác dụng đồng thời trong hệ cơ bản. Có thể tìm biểu đồ này một cách độc lập hoặc bằng cách cộng các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$:

$$(\overline{M}_S) = (\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_k) + \dots + (\overline{M}_n) \quad (5-18)$$

Nhân $(\overline{M}_S)$ với các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$ và (M_p^o) ta có kết quả như sau:

$$\begin{aligned} (\overline{M}_k) \cdot (\overline{M}_S) &= (\overline{M}_k) \times [(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_n)] \\ &= [(\overline{M}_k) (\overline{M}_1) + (\overline{M}_k) (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_k) (\overline{M}_n)] \\ &= \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kk} + \dots + \delta_{kn} = \sum_{m=1}^n \delta_{km} \end{aligned} \quad (5-19)$$

Làm tương tự lấy $(\overline{M}_S)$ nhân với $(\overline{M}_S)$ ta có kết quả:

$$(\overline{M}_S) (\overline{M}_S) = [(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_n)] \times [(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_n)] = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \delta_{km} \quad (5-20)$$

$$\begin{aligned} (\overline{M}_S) (M_p^o) &= [(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + \dots + (\overline{M}_n)] (M_p^o) \\ &= (\overline{M}_1) (M_p^o) + (\overline{M}_2) (M_p^o) + \dots + (\overline{M}_n) (M_p^o) = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP} = \sum_{k=1}^n \Delta_{kP} \end{aligned} \quad (5 - 21)$$

điều kiện kiểm tra cho các hệ số δ_{km} và Δ_{kp} như sau:

♦ Kết quả nhân $\overline{M}_S$ với một biểu đồ đơn vị $\overline{M}_k$ nào đó phải bằng tổng các hệ số thuộc hàng thứ k của hệ phương trình chính tắc.

♦ Kết quả nhân $\overline{M}_S$ với chính $\overline{M}_S$ phải bằng tổng các hệ số δ_{km} của hệ phương trình chính tắc.

♦ Kết quả nhân $\overline{M}_S$ với $\overline{M}_P$ phải bằng tổng các số hạng tự do Δ_{kP} của hệ phương trình chính tắc.

3. Kiểm tra kết quả giải hệ phương trình chính tắc

Sau khi tìm được các ẩn số X_k ta thay chúng vào hệ phương trình ban đầu, các ẩn số X_k đúng thì các phương trình chính tắc đều bằng không. Tuy nhiên, trong thực hành tính toán, do hậu quả của việc làm tròn các số liệu tính toán trung gian đến một số hữu hạn các số thuộc phần thập phân nên sau khi thay thế các lực X_k tìm được vào hệ phương trình chính tắc ban đầu, kết quả thường khác không. Để đánh giá sai số, trong mỗi phương trình ta có thể tập hợp các số liệu và biểu thị kết quả tính bằng hiệu của hai số A và B. Nói chung $A - B \neq 0$. Mức độ sai số được biểu thị qua sai số tỉ đối ε

$$\varepsilon = \frac{A - B}{A} (100\%)$$

Tùy theo yêu cầu về mức độ chính xác cần thiết của công tác thiết kế, người ta quy định sai số tỉ đối cho phép $[\varepsilon]$ và người thiết kế phải tính toán sao cho bảo đảm được điều kiện $\varepsilon \leq [\varepsilon]$.

5.5.2. Kiểm tra biểu đồ nội lực cuối cùng

Trước khi vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc ta cần kiểm tra biểu đồ mô men vừa tìm được xem có đúng không.

Ngoài cách kiểm tra sơ bộ dựa vào các nhận xét về dạng của biểu đồ, xét cân bằng mô men tại các nút ta có thể kiểm tra biểu đồ mô men một cách chính xác theo điều kiện chuyển vị bằng cách tính chuyển vị tại các liên kết trong hệ siêu tĩnh mà ta đã biết trước (thường là bằng không với trường hợp hệ chịu P, t hoặc có thể khác không với trường hợp chịu chuyển vị cưỡng bức Δ). Ta có thể viết lại chúng thành điều kiện sau:

$$\begin{aligned}\Delta_{kP} &= \overline{M}_P \overline{M}_k^0 = 0 \\ \Delta_{kt} &= \overline{M}_t \overline{M}_k^0 + \Delta_{kt}^0 = 0 \\ \Delta_{k\Delta} &= \overline{M}_\Delta \overline{M}_k^0 + \Delta_{k\Delta}^0 = \text{chuyển vị tại k trên hệ siêu tĩnh.}\end{aligned}\tag{5-22}$$

Từ (5-22) ta có cách kiểm tra biểu đồ mô men cuối cùng theo điều kiện chuyển vị là:

♦ Trường hợp tải trọng tác dụng. Biểu đồ M_P tìm được sẽ đúng nếu

$$\Delta_{kP} = (\overline{M}_P) (\overline{M}_k) = 0 \quad (5-23)$$

♦ Trường hợp hệ chịu sự thay đổi của nhiệt độ. Biểu đồ M_t tìm được sẽ đúng nếu:

$$\Delta_{kt} = (\overline{M}_t) (\overline{M}_k) = - \Delta_{kt} \quad (5-24)$$

♦ Trường hợp hệ chịu chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: Biểu đồ M_Δ tìm được sẽ đúng nếu:

$$\Delta_{k\Delta} = (\overline{M}_\Delta) (\overline{M}_k) = - \Delta_{k\Delta} + \text{chuyển vị thực tại } k \quad (5-25)$$

Trong đó:

$(\overline{M}_k)$ - biểu đồ mô men đơn vị do ảnh lực $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Nó đóng vai trò $(\overline{M}_k^o)$ trong (5-22).

Δ_{kt} , $\Delta_{k\Delta}$ - số hạng tự do trong phương trình chính tắc thứ k do nhiệt độ, chế tạo không chính xác, chuyển vị gối tựa gây ra. Nó đóng vai trò Δ_{kt}^o , $\Delta_{k\Delta}^o$ trong (5-22).

Chú ý:

Nếu ta thay $(\overline{M}_k)$ bằng $(\overline{M}_S)$, sẽ có cách kiểm tra biểu đồ mô men tổng quát hơn theo điều kiện chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} (\overline{M}_P) (\overline{M}_S) &= 0 \\ (\overline{M}_t) (\overline{M}_S) &= - \sum_{k=1}^n \Delta_{kt} \\ (\overline{M}_\Delta) (\overline{M}_S) &= - \sum_{k=1}^n \Delta_{k\Delta} + \text{các chuyển vị thực tại các liên kết trên hệ siêu tĩnh.} \end{aligned} \quad (5-26)$$

Ví dụ 5-9: Kiểm tra kết quả tính toán trong ví dụ 5-3.

Để kiểm tra ta vẽ biểu đồ mô men uốn tổng cộng $(\overline{M}_S) = (\overline{M}_1) + (\overline{M}_2)$ như hình 5.26.

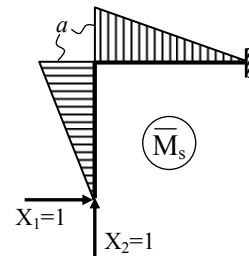
1. Kiểm tra các hệ số:

• Theo hàng thứ nhất. Nhân $(\overline{M}_S)$ với $(\overline{M}_1)$ (xem hình 5.13a):

$$(\overline{M}_S) (\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a \right] = \frac{5a^3}{6EJ}$$

Mặt khác

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{4a^3}{3EJ} - \frac{a^3}{2EJ} = \frac{5a^3}{6EJ} \quad (\text{đúng}).$$



Hình 5.26

- Theo hàng thứ hai. Nhân $(\overline{M}_S)$ với $(\overline{M}_2)$ (Hình 5.13b):

$$(\overline{M}_S)(\overline{M}_2) = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot a \right] = -\frac{a^3}{6EJ}$$

$$\text{Mặt khác } \delta_{21} + \delta_{22} = -\frac{a^3}{2EJ} + \frac{a^3}{3EJ} = -\frac{a^3}{6EJ} \text{ (đúng)}$$

- Kiểm tra toàn bộ các hệ số:

$$(\overline{M}_S)(\overline{M}_S) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right] = \frac{2a^3}{3EJ}$$

$$\text{Mặt khác } \sum_{k,m} \delta_{km} = \frac{4a^3}{3EJ} - \frac{a^3}{2EJ} - \frac{a^3}{2EJ} + -\frac{a^3}{EJ} = \frac{2a^3}{3EJ} \text{ (đúng)}.$$

2. Kiểm tra các số hạng tự do. Nhân biểu đồ $(\overline{M}_S)$ với (M_p^0) (hình 5.13c):

$$(\overline{M}_S)(M_p^0) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{3} \cdot a \cdot \frac{3}{4} \cdot a + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right] = \frac{3qa^4}{8EJ}$$

$$\text{Mặt khác } \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{5qa^4}{8EJ} - \frac{qa^4}{4EJ} = \frac{3qa^4}{8EJ} \text{ (đúng)}.$$

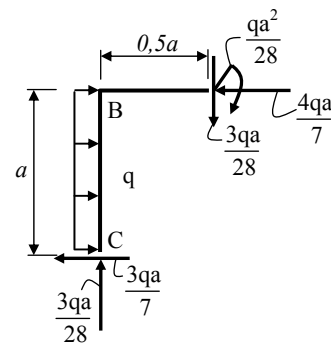
3. Kiểm tra kết quả cuối cùng. Biểu đồ mô men trên hình 5.14a sau khi kiểm tra về dạng và cân bằng nút ta sẽ kiểm tra chính xác theo điều kiện chuyển vị bằng biểu thức đầu của (5-26). Ta có:

$$\begin{aligned} (M_p)(\overline{M}_S) &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a - \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right] \\ &+ \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{28} \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot a \right] \\ &= \frac{2qa^2}{EJ} \left[\frac{1}{42} - \frac{1}{42} \right] = 0 \end{aligned}$$

(chứng tỏ (M_p) đã vẽ đúng).

Từ biểu đồ mô men đã vẽ đúng, ta suy ra biểu đồ lực cắt và lực dọc.

Sau đó kiểm tra $(Q_p), (N_p)$ theo điều kiện cân bằng bộ phận bằng cách cắt một phần bất kỳ của hệ xem nội lực và ngoại lực có thoả mãn các phương trình cân bằng hay không. Ví dụ để kiểm tra $(Q_p), (N_p)$ trên hình 5.14b, ta thực hiện mặt cắt qua C và tiết diện giữa của thanh AB và kiểm tra một phần của hệ như hình 5.27.



Hình 5.27

$$\Sigma X = + qa - \frac{4}{7} qa - \frac{3}{7} qa = 0$$

$$\Sigma Y = + \frac{3}{28} qa - \frac{3}{28} qa = 0$$

Qua các nội dung trình bày ở trên ta thấy tuy cách kiểm tra có ưu điểm là độc lập với các phép tính đã dùng nhưng vẫn còn tồn tại một vài khuyết điểm sau:

- * Cách kiểm tra còn phức tạp, khối lượng các phép tính dùng để kiểm tra còn lớn.
- * Cách kiểm tra chỉ có thể tin cậy được khi người thực hiện không bị mắc sai lầm về nguyên tắc tính toán. Vì điều kiện kiểm tra vẫn có thể được thỏa mãn khi người tính toán và người kiểm tra cùng mắc sai lầm như nhau trong các bước vẽ biểu đồ hoặc nhân biểu đồ.

Ngoài ra trong thực hành tính toán cần lưu ý, do hậu quả của phép làm tròn các số liệu nên các điều kiện kiểm tra nói trên thường sẽ không đồng nhất bằng không hoặc bằng nhau. Lúc này ta cần đánh giá sai số theo quy cách đã trình bày trong phần kiểm tra kết quả giải hệ phương trình chính tắc.

5.5.3. Một số chú ý khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao

Trong thực tế ta thường hay gặp những hệ siêu tĩnh bậc cao. Khi tính toán các hệ này ta cần tìm các biện pháp để nâng cao độ chính xác của kết quả tính và giảm nhẹ khối lượng tính toán.

1. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán

Những sai số khi phải làm tròn các số liệu tính toán sẽ có ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Thông thường, muốn bảo đảm cho kết quả cuối cùng đạt độ chính xác đến m con số thuộc phần thập phân, các số liệu tính toán trung gian cần đạt độ chính xác tối thiểu đến $m + 2$ con số thuộc phần thập phân. Tuy vậy, khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao ta phải giải một số lượng lớn các phương trình chính tắc thì vấn đề này càng cần phải lưu ý khi nghiệm của *hệ phương trình chính tắc không ổn định*. Những nghiệm được gọi là không ổn định khi ta thay đổi rất nhỏ giá trị của các phần tử của hệ phương trình sẽ gây ra những thay đổi lớn đối với kết quả cần tìm. Để khắc phục vấn đề này ngoài các biện pháp toán học, về mặt cơ học kết cấu ta có thể nêu ra một vài cách khắc phục như sau:

- ♦ Chọn phương pháp tính sao cho số lượng ẩn số là ít nhất. Đối với mỗi bài toán cụ thể ta nên cân nhắc xem trong số các phương pháp như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp (xem các Chương sau)... nên chọn phương pháp nào đòi hỏi số ẩn ít nhất.
- ♦ Khi dùng phương pháp lực ta nên chọn hệ cơ bản sao cho hệ làm việc càng sát với hệ siêu tĩnh càng tốt. Đó là hệ cơ bản khi chịu các nguyên nhân bên ngoài sẽ phát sinh các nội lực và chuyển vị không chênh lệch nhiều so với nội lực chuyển vị trong hệ siêu tĩnh.

Lúc này các ẩn lực X chỉ gây ra một phần ảnh hưởng nhỏ đến kết quả cuối cùng. Tất nhiên, biện pháp này đòi hỏi người thiết kế phải có nhiều kinh nghiệm.

♦ *Dùng các biện pháp giảm thiểu số lượng các phương trình cần phải giải*, sẽ trình bày trong phần tiếp theo dưới đây.

2. Các biện pháp giảm nhẹ khối lượng tính toán

Khi tính các hệ siêu tĩnh bậc càng cao thì khối lượng tính toán, đặc biệt là khối lượng giải hệ phương trình càng tăng lên gấp bội. Bởi vậy, cần chú ý vận dụng các biện pháp dưới đây để giảm nhẹ khối lượng tính toán.

a. Các biện pháp giảm thiểu số lượng phương trình cần giải

♦ Chọn phương pháp tính sao cho số ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên).

♦ Khi tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực ta không chọn hệ cơ bản tĩnh định mà chọn hệ cơ bản siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Biện pháp chọn hệ cơ bản siêu tĩnh cho phép ta thay thế việc giải hệ n phương trình bằng cách giải hai hệ có số lượng phương trình là n_1 và n_2 với $n_1 + n_2 = n$. Giải hai hệ có số phương trình n_1 và n_2 đòi hỏi tốn ít thời gian hơn giải một hệ có số phương trình là

$$n = n_1 + n_2.$$

♦ Trong trường hợp hệ siêu tĩnh đã cho là hệ đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng. Các biện pháp cụ thể sẽ được trình bày trong mục 5.6 dưới đây.

b. Các biện pháp đơn giản hóa cấu trúc của hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản là hệ phương trình có nhiều hệ số phụ bằng không.

Giải hệ phương trình có càng nhiều hệ số phụ bằng không thì khối lượng tính toán càng được giảm nhẹ so với khi giải hệ phương trình có đầy đủ các hệ số phụ. Để đạt được mục đích đó, trong phạm vi cơ học kết cấu, ta có thể vận dụng các biện pháp sau:

♦ Nếu hệ có tính chất đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng (xem ở mục 5.6 dưới đây).

♦ Chọn hệ cơ bản hợp lý.

Tương ứng với mỗi hệ siêu tĩnh ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau miễn là hệ cơ bản phải bất biến hình. Việc chọn dùng hệ cơ bản này hay hệ cơ bản khác có ảnh hưởng quan trọng đến khối lượng tính toán trong các bước sau: xác định nội lực (vẽ biểu đồ), xác định các hệ số và số hạng tự do và đặc biệt là trong bước giải hệ phương trình chính tắc.

Như vậy, hệ cơ bản hợp lý là hệ cơ bản chọn sao cho việc tính toán được đơn giản trong các khâu đã nêu ở trên.

Để đạt được yêu cầu đó, ta nên chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ thành nhiều bộ phận độc lập với nhau.

Lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ, việc xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không.

Ví dụ với hệ siêu tĩnh trên hình 5.28a, ta có thể nêu ra hai cách chọn hệ cơ bản như trên hình 5.28b và c để so sánh.

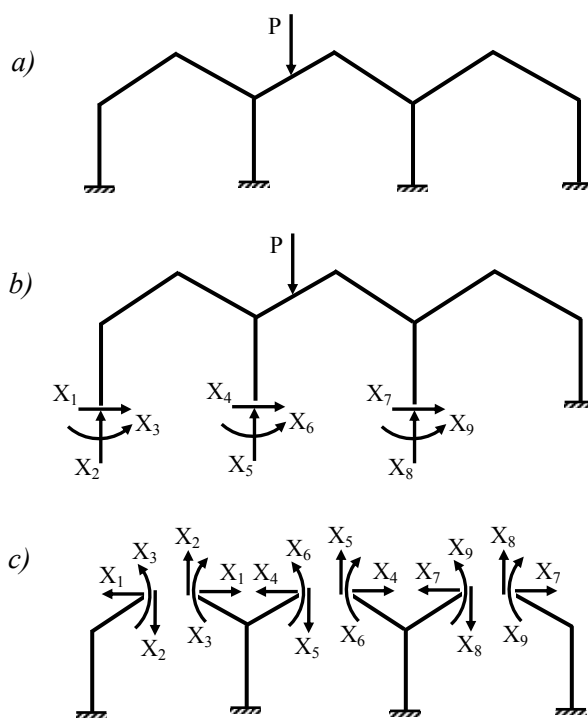
Hệ cơ bản hình 5.28b: Nội lực trong hệ này nói chung phân phối trên toàn hệ (chẳng hạn, dưới tác dụng của riêng lực $X_1=1$, biểu đồ $(\overline{M}_1)$ phân bố trên phần lớn các thanh của hệ cơ bản). Do đó, xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức, tất cả các hệ số phụ đều tồn tại.

Hệ cơ bản hình 5.28c: Hệ cơ bản này gồm nhiều bộ phận độc lập với nhau, mỗi biểu đồ nội lực đơn vị chỉ phân bố trong hai bộ phận lân cận của hệ cơ bản.

Do đó, việc vẽ các biểu đồ đơn vị sẽ đơn giản hơn, xác định các hệ số và số hạng tự do cũng dễ dàng và nhanh chóng, nhiều hệ số phụ bằng không ($\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = 0$).

Vậy hệ cơ bản hình 5.28c hợp lý hơn hệ cơ bản hình 5.28b.

♦ Biến đổi vị trí và phương của các ẩn số. Biện pháp này sẽ được trình bày trong mục 5.6 dưới đây.



Hình 5.28

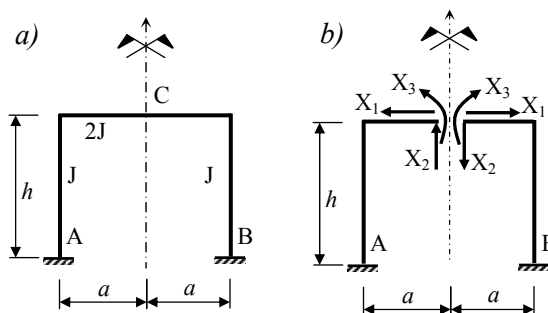
5.6. CÁC BIỆN PHÁP ĐƠN GIẢN HOÁ KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CÓ SƠ ĐỒ ĐỐI XỨNG

Trong thực tế ta thường gặp những hệ có hình dạng, kích thước hình học và độ cứng đối xứng qua một trục. Nếu biết cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ thì khối lượng tính toán sẽ được giảm nhẹ khá nhiều. Khi tính các hệ siêu tĩnh đối xứng ta có thể dùng một số biện pháp cụ thể dưới đây để đơn giản hóa tính toán.

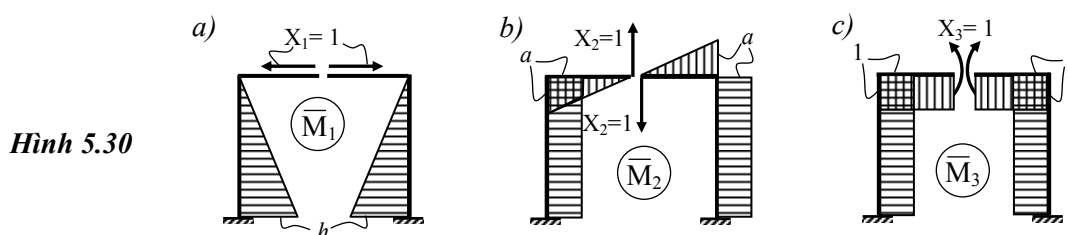
5.6.1. Chọn sơ đồ hệ cơ bản đối xứng

Từ hệ siêu tĩnh có sơ đồ đối xứng, loại bỏ liên kết tại các vị trí nằm trên trục đối xứng của hệ, ta được hệ cơ bản có tính đối xứng.

Ví dụ với hệ khung siêu tĩnh trên hình 5.29a, nếu chọn hệ cơ bản có sơ đồ đối xứng như hình 5.29b, ta có $\bar{M}_1$ và $\bar{M}_3$ đối xứng (Hình 5.30a,c) vì các cặp ẩn X_1, X_3 đối xứng.



Hình 5.29



Hình 5.30

Còn $\bar{M}_2$ phản đối xứng (Hình 5.30b) nên biết ngay:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \bar{M}_2 = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \bar{M}_2 \bar{M}_3 = 0.$$

Ngoài ra chọn hệ cơ bản như trên còn rất tiện lợi cho việc vẽ các biểu đồ đơn vị, nhân biểu đồ đơn giản hơn. Quá trình giải hệ phương trình nhanh gọn hơn do có nhiều hệ số phụ bằng không. Những ưu điểm này không có nếu chọn hệ cơ bản có cấu tạo bất kỳ.

5.6.2. Sử dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản đối xứng

Giả sử xét hệ siêu tĩnh đối xứng như trên hình 5.31a. Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình 5.31b. Các ẩn số trong hệ cơ bản đối xứng gồm hai loại:

♦ Loại ẩn số có tính chất đối xứng hay phản xứng. Ví dụ cặp ẩn số X_2 có tính đối xứng, cặp X_3 có tính phản xứng.

♦ Loại ẩn số chỉ có vị trí đối xứng còn về trị số thì khác nhau. Ví dụ hai ẩn số X_1 và X_4 .

Để triệt để sử dụng tính chất đối xứng, ta phân tích hai ẩn số có vị trí đối xứng thành hai cặp ẩn số: một cặp đối xứng và một cặp phản xứng. Ví dụ, phân tích hai ẩn số X_1 và X_4 thành hai cặp: cặp Y_1 đối xứng và cặp Y_4 phản xứng (Hình 5.31c). Tất nhiên hai cặp ẩn số mới Y_1 và Y_4 phải thỏa mãn điều kiện:

$$Y_1 + Y_4 = X_1; \quad Y_1 - Y_4 = X_4.$$

Cách phân tích này luôn luôn có thể thực hiện được vì Y_1 và Y_4 là nghiệm duy nhất của các ẩn số X_1 và X_4 .

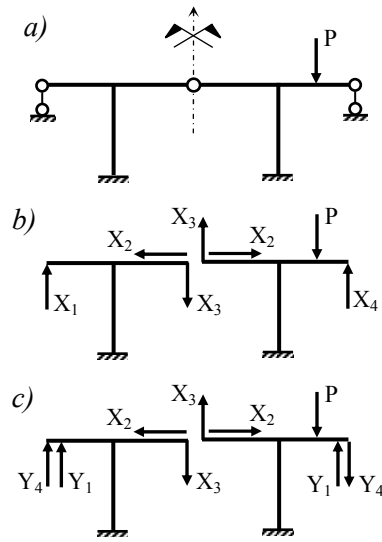
$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_4);$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_4)$$

Sau khi đã phân tích như trên ta sẽ thực hiện tính toán với các cặp ẩn số mới Y_1 , Y_4 và các cặp ẩn số về bản chất đã mang tính chất đối xứng hoặc phản đối xứng X_2 và X_3 .

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}Y_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}Y_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$



Hình 5.31

Trong trường hợp này, các cặp ẩn số Y_1 và X_2 đối xứng do đó các biểu đồ $(\overline{M}_1)$ và $(\overline{M}_2)$ đối xứng. Các cặp ẩn số X_3 , Y_4 phản xứng do đó các biểu đồ $(\overline{M}_3)$ và $(\overline{M}_4)$ phản xứng. Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng sẽ bằng không. Do đó các chuyển vị δ_{km} sẽ bằng không khi một chỉ số của nó biểu thị cặp ẩn số đối xứng còn một chỉ số biểu thị cặp ẩn số phản xứng. Cụ thể là các chuyển vị:

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{41} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{24} = \delta_{42} = 0$$

Lúc này hệ phương trình chính tắc sẽ chia ra thành hai hệ phương trình độc lập:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Một hệ (hệ a) chỉ chứa những cặp ẩn số đối xứng còn một hệ (hệ b) chỉ chứa những cặp ẩn số phản xứng.

Với hệ siêu tĩnh đối xứng bậc n , nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng như đã nói ở trên thì ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: một hệ có n_1 phương trình và một hệ có n_2 phương trình với $n_1 + n_2 = n$.

Kết luận vừa thu được ở trên không phụ thuộc vào nguyên nhân tác dụng, nghĩa là nguyên nhân tác dụng có thể bất kỳ. Trong trường hợp đặc biệt khi:

♦ Nguyên nhân tác dụng (P, t, Δ) đối xứng: Chẳng hạn hệ chịu tải trọng tác dụng đối xứng, lúc này (M_p^o) đối xứng nên $\Delta_{3P} = \Delta_{4P} = 0$.

Thay vào hệ (b) ta được hệ phương trình thuần nhất, vì định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực luôn luôn khác không nên

$$X_3 = Y_4 = 0$$

Như vậy, ta có thể kết luận: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các cặp ẩn số phản xứng bằng không.

♦ Nguyên nhân tác dụng (P, t, Δ) phản đối xứng: Chẳng hạn hệ chịu tải trọng tác dụng phản đối xứng, lúc này (M_p^o) phản xứng nên $\Delta_{1P} = \Delta_{2P} = 0$. Giải hệ (a) ta được $Y_1 = X_2 = 0$.

Cũng lý luận tương tự như trên, ta đi đến kết luận sau: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các cặp ẩn số đối xứng bằng không.

Chú ý:

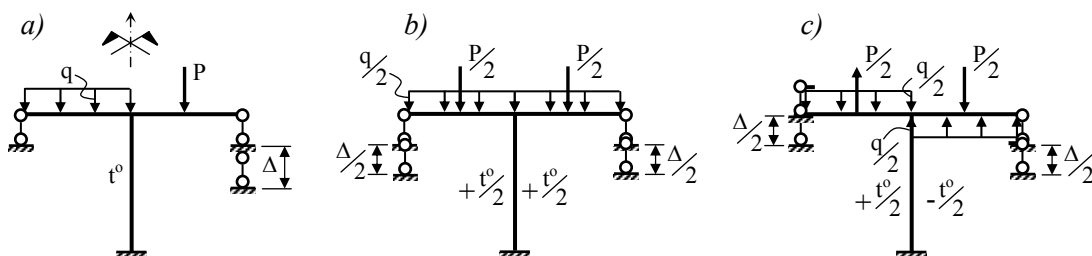
♦ Khi tính hệ siêu tĩnh có sơ đồ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ta chỉ cần tìm các cặp ẩn số đối xứng (các cặp ẩn số phản xứng bằng không) hoặc ngược lại.

♦ Trong trường hợp hệ có hai trục đối xứng, nếu cũng vận dụng biện pháp như đã nói ở trên với cả hai trục đối xứng thì hệ phương trình chính tắc sẽ phân thành bốn hệ phương trình độc lập. Gọi n_1, n_2, n_3, n_4 - lần lượt là số phương trình của bốn hệ nói trên, ta có:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n.$$

5.6.3. Phân tích nguyên nhân tác dụng bất kỳ thành đối xứng và phản đối xứng

Với một hệ siêu tĩnh chịu nguyên nhân tác dụng bất kỳ (Hình 5.32a) bao giờ ta cũng có thể đưa về tổng của hai hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và phản đối xứng như hình 5.32b,c.



Hình 5.32

Trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng, nội lực và chuyển vị trong hệ đã cho được xác định bằng tổng đại số các nội lực và chuyển vị trong hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản đối xứng.

Ưu điểm của hệ chịu tác dụng của nguyên nhân đối xứng (hoặc phản đối xứng) đã được đề cập trong mục B ở trên và biện pháp biến đổi sơ đồ tính sau đây.

5.6.4. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính

Biện pháp này áp dụng cho hệ có sơ đồ tính đối xứng tương ứng với hai bài toán hệ chịu nguyên nhân đối xứng và hệ chịu nguyên nhân phản đối xứng. Nội dung của biện pháp này là thay thế việc tính hệ đối xứng bằng việc tính nửa hệ với sơ đồ tính tương đương bảo đảm sao cho nội lực và biến dạng trong cả hai trường hợp là như nhau. Sau khi tìm được kết quả trên một nửa hệ ta dễ dàng suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo các tính chất sau:

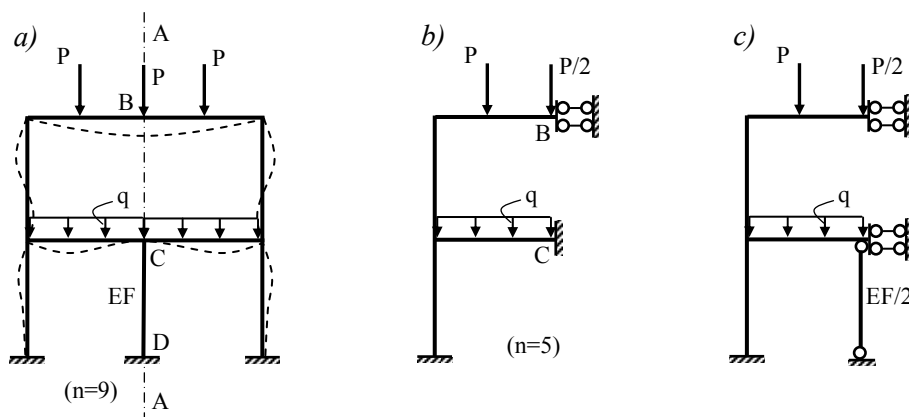
- ♦ Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng: đường biến dạng, mô men uốn, lực dọc có tính chất đối xứng, còn lực cắt có tính chất phản xứng.
- ♦ Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng: đường biến dạng, mô men uốn, lực dọc có tính chất phản xứng còn lực cắt có tính chất đối xứng.

Các tính chất trên được rút ra trên cơ sở lý luận về tính chất chẵn (đối xứng) hoặc lẻ (phản xứng) của các hàm đồng thời lưu ý đến các liên hệ vi phân đã quen biết giữa các hàm tải trọng, nội lực và chuyển vị.

So với các biện pháp khác, biện pháp biến đổi sơ đồ tính cho phép giảm nhẹ khối lượng tính toán rất đáng kể nên hay được áp dụng. Sau đây ta sẽ nghiên cứu cách tìm sơ đồ tính tương đương để thực hiện tính toán với một nửa hệ.

1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng

Giả sử xét hệ siêu tĩnh đối xứng qua trục A-A, chịu lực đối xứng như hình 5.33a.



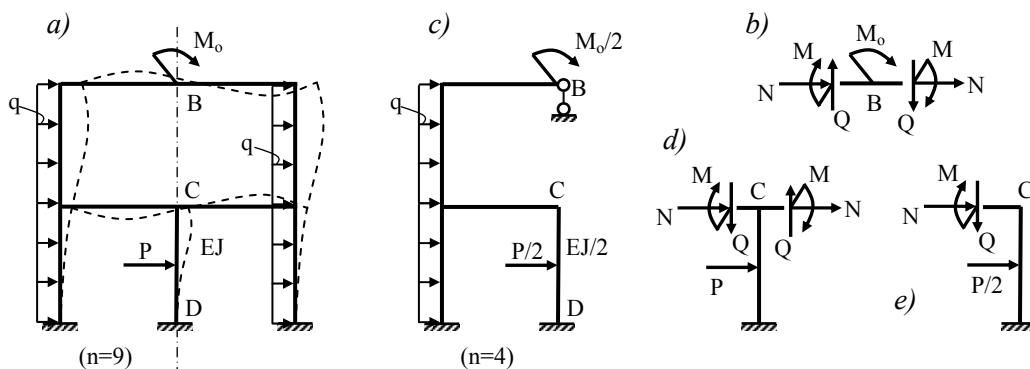
Hình 5.33

Trong trường hợp này hệ có thanh CD trùng với trục đối xứng. Để đảm bảo tính đối xứng của kết cấu, thanh CD không thể bị uốn cong tức là mô men uốn trong thanh CD không có. Từ đây ta cắt đôi hệ tại B và C xét một phần đối xứng.

Phân tích chuyển vị của tiết diện B và C trong hệ nguyên để thêm liên kết cho phù hợp với chuyển vị: Do đường đàn hồi có tính đối xứng, nên tiết diện B và C nằm trên trục đối xứng sẽ không có chuyển vị góc và chuyển vị ngang. Tại C nếu bỏ qua biến dạng nén đàn hồi trong thanh CD thì chuyển vị đứng cũng sẽ bằng không. Vậy thêm liên kết ngàm trượt tại B và ngàm cứng tại C là thỏa mãn (Hình 5.33b). Như vậy để tính hệ siêu tĩnh đã cho với $n = 12$ lúc này ta chỉ cần tính hệ siêu tĩnh với $n = 5$. Nếu xét cả biến dạng nén đàn hồi của thanh CD thì sơ đồ tính sẽ như hình 5.33c.

2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản đối xứng

Giả sử có hệ siêu tĩnh chịu lực phản đối xứng như hình 5.34a.



Hình 5.34

Thanh CD trùng với trục đối xứng, trong trường hợp này có mô men uốn (vì thanh CD vẫn có thể bị uốn cong). Do đó, khi đưa về sơ đồ hệ một nửa phải xét cả thanh CD. Từ đường đàn hồi của hệ ta thấy tiết diện B có chuyển vị ngang và xoay mà không có chuyển vị đứng. Để thấy rõ được các chuyển vị trên tại B, ta tách nút B với các nội lực đã có quy luật như hình 5.34b.

Sơ đồ tính toán là một phần đối xứng của hệ đã cho, tại B đặt thêm liên kết thanh chống theo phương đứng, độ cứng trong thanh CD bị bẻ đôi bằng một nửa độ cứng thanh CD trong hệ nguyên (Hình 5.34c).

Vì thanh CD không có lực dọc nên tại nút C (Hình 5.34a) không có chuyển vị đứng mà chỉ có chuyển vị ngang và chuyển vị xoay. các chuyển vị này chính là chuyển vị tại đầu C của thanh công xôn CD khi được tách riêng biệt (Hình 5.34d) do các cặp lực M , Q , N và tải trọng gây nên. Khi đưa về sơ đồ một nửa (Hình 5.34e) thanh công xôn CD chỉ còn chịu tác dụng của một nửa các lực trên, do đó để đảm bảo chuyển vị tại nút C trên hình 5.34c bằng chuyển vị tại C trên hình 5.34a thì độ cứng EJ của thanh CD của sơ đồ một nửa bằng một nửa độ cứng EJ của thanh CD trong hệ nguyên.

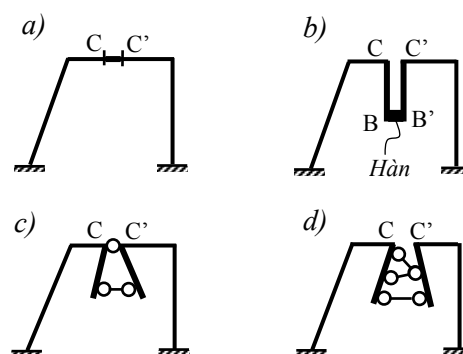
Nhờ biện pháp đơn giản hóa nên để tính hệ 9 bậc siêu tĩnh, ta chỉ cần tính hệ có 4 bậc siêu tĩnh và từ đó suy ra nội lực của hệ nguyên đã cho với lưu ý nội lực trong thanh CD (trùng với trục đối xứng) bằng gấp đôi các giá trị đã tìm được trên sơ đồ một nửa.

5.6.5. Biện pháp thay đổi vị trí và phương của các ẩn lực

Nội dung chính của biện pháp này là dùng các thanh tuyệt đối cứng, đưa hệ đã cho về hệ tương đương để thực hiện tính toán. Với biện pháp này ta có thể khéo chọn vị trí và phương của các ẩn sao cho cấu trúc của hệ phương trình chính tắc được đơn giản, nghĩa là có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình 5.35a. Giả sử cắt hệ tại một tiết diện bất kỳ rồi dùng liên kết hàn gắn vào hai tiết diện C và C'.

Ở hai bên tiết diện bị cắt ta gắn hai thanh CB và C'B' có độ cứng bằng vô cùng. Nếu nối hai thanh tuyệt đối cứng này với nhau bằng một mối hàn tại BB' như trên hình 5.35b, lúc này ta đã đưa được các ẩn lực ở C đến vị trí mới ở B. Tương tự ta có thể nối hai thanh tuyệt đối cứng bằng một khớp và một thanh (hình 5.35c), hoặc bằng ba thanh (hình 5.35d) thì hệ mới và hệ đã cho sẽ làm việc hoàn toàn như nhau.



Hình 5.35

Thật vậy, dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, các thanh tuyệt đối cứng không bị biến dạng nên hai tiết diện C và C' phải chuyển vị như nhau, nghĩa là các chuyển vị tương đối giữa chúng bằng không. Điều đó hoàn toàn thống nhất với cách làm việc của hệ đã cho ban đầu.

Sau khi đưa hệ về hệ tương đương, ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa hai thanh tuyệt đối cứng và thực hiện tính toán trên hệ tương đương như thường lệ. Vì có nhiều cách lập hệ tương đương nên ta cũng có nhiều cách chọn hệ cơ bản tương ứng với nhiều cách chọn vị trí và phương của các ẩn lực. Như vậy, ta có thể chọn lựa để sao cho hệ phương trình chính tắc có càng nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

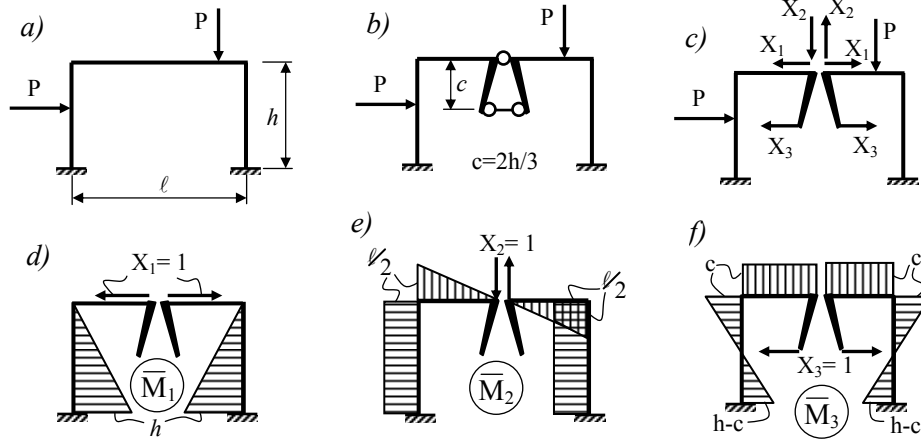
Để thấy rõ được hiệu quả của biện pháp này, ta khảo sát một dụ đơn giản sau.

Ví dụ 5-10: Chọn hệ cơ bản cho khung trên hình 5.36a sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không.

Hệ tương đương vẽ trên hình 5.36b, và hệ cơ bản tương ứng như hình 5.36c. Các biểu đồ đơn vị vẽ trên hình 5.36d,e,f.

Theo tính chất đối xứng: $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Muốn cho $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ ta chọn $c = 2h/3$ vì khi đó tung độ trên $(\bar{M}_3)$ tương ứng với trọng tâm của $(\bar{M}_1)$ trên thanh đứng sẽ bằng không.

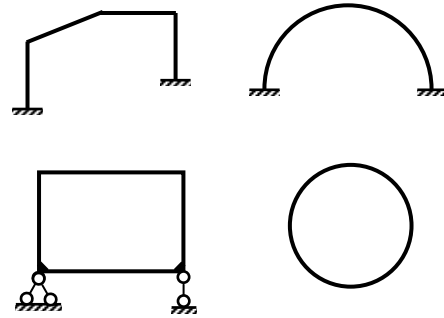


Hình 5.36

5.6.6. Tâm đàn hồi

Đối với những hệ siêu tĩnh bậc ba tạo thành một chu vi kín (Hình 5.37) ta có thể sử dụng khái niệm tâm đàn hồi. Biện pháp tâm đàn hồi là một trường hợp đặc biệt của biện pháp sử dụng thanh tuyệt đối cứng đã nêu ở trên.

Giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.38a. Biến đổi hệ đã cho bằng cách đặt thêm thanh tuyệt đối cứng như trên hình 5.38b.



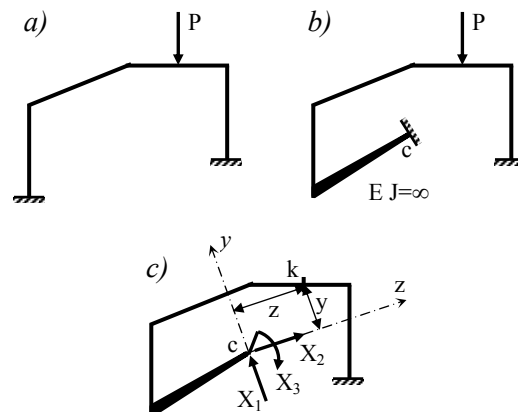
Hình 5.37

Hệ cơ bản tương ứng vẽ trên hình 5.38c. Vấn đề đặt ra là tìm vị trí của điểm C và phương của các lực X_1 , X_2 để sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không. Lúc này hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \quad (5-27)$$

và việc giải hệ phương trình này sẽ rất dễ dàng. Điểm C có vị trí thỏa mãn với yêu cầu trên gọi là *tâm đàn hồi*.

Vị trí của tâm đàn hồi C và phương của các lực X_1 , X_2 được xác định theo các điều kiện $\delta_{km} = 0$. Trước khi viết các điều kiện này, ta cần thiết lập các biểu thức giải tích của mô men uốn đơn vị.



Hình 5.38

Từ hình 5.38c, ta có: $\overline{M}_1 = -1.y$; $\overline{M}_2 = 1.z$; $\overline{M}_3 = 1$.

Từ các điều kiện $\delta_{km} = 0$, và giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc khi tính chuyển vị ta có:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int_0^s \overline{M}_1 \overline{M}_3 \frac{1}{EJ} ds = \sum \int_0^s (-y) \frac{1}{EJ} ds = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int_0^s \overline{M}_2 \overline{M}_3 \frac{1}{EJ} ds = \sum \int_0^s z \frac{1}{EJ} ds = 0$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_0^s \overline{M}_1 \overline{M}_2 \frac{1}{EJ} ds = \sum \int_0^s (-y) \frac{1}{EJ} ds = 0$$

Nếu gọi $dv = ds/EJ$ là vi phân của tải trọng đàn hồi thì các điều kiện trên sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} \sum \int y dv &= 0 \\ \sum \int z dv &= 0 \\ \sum \int yz dv &= 0 \end{aligned} \quad (5-28)$$

Ý nghĩa của (5-28) như sau: nếu tại mỗi trọng tâm của một phân tố chiều dài ds của kết cấu ta quy ước đặt một tải trọng đàn hồi dv có giá trị $dv = ds/EJ$ thì:

♦ Hai công thức đầu của (5-28) biểu thị điều kiện mô men tĩnh của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục yz bằng không. Do đó, tâm đàn hồi C phải là trọng tâm của các tải trọng đàn hồi v .

♦ Công thức cuối của (5-28) biểu thị điều kiện mô men quán tính ly tâm của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục yz bằng không. Do đó hệ trục vuông góc yz phải là hệ trục quán tính chính.

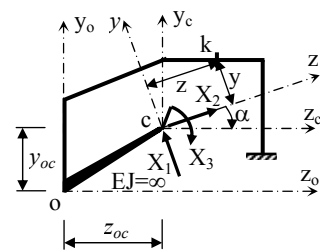
Vì vậy ta có thể sử dụng công thức xác định trọng tâm và trục quán tính chính của các lực để tìm vị trí của điểm C và phương của y, z theo thứ tự sau:

1. Chọn hệ trục bất kỳ y_0, z_0 (Hình 5.39), xác định tọa độ y_{oc} và z_{oc} của điểm C theo công thức xác định tọa độ trọng tâm đã quen biết:

$$y_{oc} = \frac{\sum \int y_0 dv}{\sum \int dv}; \quad z_{oc} = \frac{\sum \int z_0 dv}{\sum \int dv} \quad (5-29)$$

2. Sau khi biết vị trí của C ta chọn hệ trục tọa độ y_c, z_c đi qua tâm đàn hồi và xác định góc nghiêng α giữa hệ trục quán tính chính y, z với hệ trục trung tâm y_c, z_c theo công thức:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2 \sum \int z_c y_c dv}{\sum \int y_c^2 dv - \sum \int z_c^2 dv} \quad (5-30)$$



Hình 5.39

Chú thích:

♦ Khi hệ gồm các thanh thẳng và các tiết diện trong từng đoạn thanh không đổi, tọa độ y_{oc} và z_{oc} được tính theo biểu thức đơn giản sau:

$$y_{oc} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{S_z^i}{EJ_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{EJ_i}}; \quad z_{oc} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{S_y^i}{EJ_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{EJ_i}} \quad (5-31)$$

Trong đó: S_z^i , S_y^i là mô men tĩnh của đoạn thanh thứ i đối với trục z , trục y (bằng tích số của chiều dài đoạn thanh thứ i với khoảng cách từ trọng tâm của nó đến trục z , y).

♦ Việc xác định vị trí của tâm đàn hồi C tương đối dễ dàng nhưng việc xác định phương của trục chính thường phức tạp. Do đó, đối với những hệ không đối xứng ta chỉ nên tìm vị trí của C để có được hai cặp hệ số phụ $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ và $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ mà không tìm phương của trục chính (lúc này $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$), lúc đó hệ phương trình chính tắc có dạng:

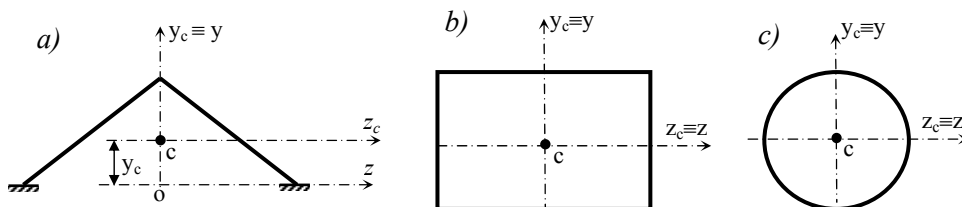
$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \end{aligned} \quad (5-32)$$

♦ Tâm đàn hồi và các trục quán tính chính của các tải trọng đàn hồi có đầy đủ tính chất của trọng tâm và của các trục quán tính chính của tải trọng. Chẳng hạn:

- Hai trục quán tính chính luôn luôn vuông góc.
- Nếu hệ đối xứng thì một trục chính trùng với trục đối xứng của hệ còn tâm đàn hồi cũng nằm trên trục đối xứng đó.

Chính vì vậy biện pháp tâm đàn hồi thường áp dụng cho hệ có ít nhất là một trục đối xứng (Hình 5.40a), tâm đàn hồi C nằm trên trục đối xứng, một trục chính trùng với trục đối xứng còn trục chính thứ hai sẽ đi qua C và vuông góc với trục đối xứng.

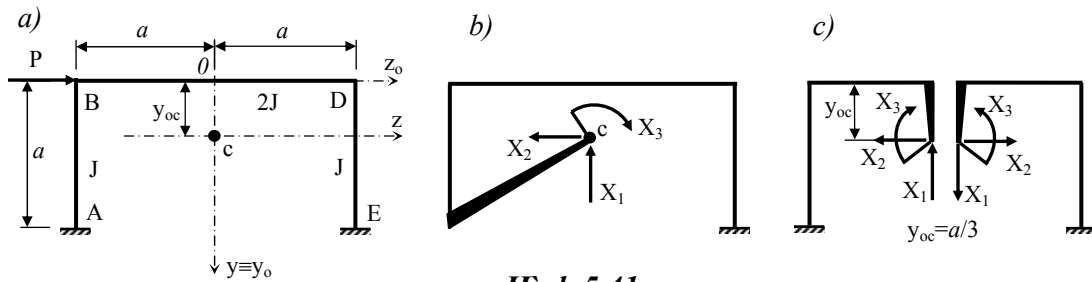
Khi hệ có hai hoặc nhiều trục đối xứng (Hình 5.40b,c) tâm đàn hồi C là giao điểm của hai trục đối xứng và phương của hai trục chính y và z trùng với phương của hai trục đối xứng vuông góc.



Hình 5.40

♦ Khi thiết lập các điều kiện (5-28) ta đã giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt. Nếu kể đến các ảnh hưởng này thì hai điều kiện đầu dùng để xác định vị trí của tâm đàn hồi sẽ không thay đổi vì lúc này $N_3 = Q_3 = 0$; còn điều kiện cuối cùng sẽ khác đi. Tuy nhiên ảnh hưởng này nói chung rất nhỏ.

Ví dụ 5-11: Tìm tâm đàn hồi của hệ khung siêu tĩnh bậc ba có một trục đối xứng như trên hình 5.41a.



Hình 5.41

Khung có một trục đối xứng nên tâm đàn hồi nằm trên trục đối xứng y và ta chỉ cần tìm tung độ y_{oc} . Áp dụng công thức (5-29), ta tìm được:

$$y_{oc} = \frac{\sum \int y_o dv}{\sum \int dv} = \frac{\sum \int y_o \frac{ds}{EJ}}{\sum \int \frac{ds}{EJ}} = \frac{\int_{-a}^a y_{BD} \frac{dz}{EJ_{BD}} + 2 \int_0^a y_{DE} \frac{dy}{EJ_{DE}}}{\int_{-a}^a \frac{dz}{EJ_{BD}} + 2 \int_0^a \frac{dy}{EJ_{DE}}} = \frac{a}{3}$$

Áp dụng công thức (5-31), ta có:

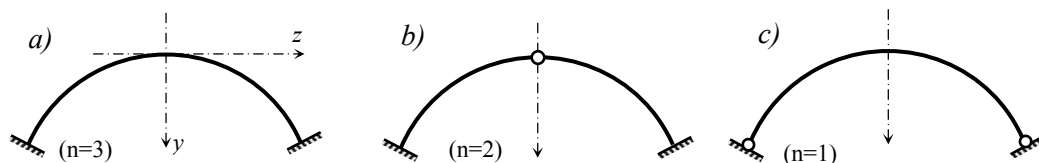
$$y_{oc} = \frac{\sum \frac{S_z}{EJ}}{\sum \frac{\ell}{EJ}} = \frac{\frac{\ell_{BD} \cdot 0}{2EJ} + 2 \cdot \frac{\ell_{DE} \cdot \frac{a}{2}}{EJ}}{\frac{\ell_{BD}}{2EJ} + 2 \cdot \frac{\ell_{DE}}{EJ}} = \frac{a}{3}$$

Sau khi tìm được tâm đàn hồi C, một trục quán tính chính y trùng với trục đối xứng còn một trục z vuông góc với trục trên và đi qua C. Trên hình 5.41b,c trình bày hai kiểu chọn hệ cơ bản bằng cách dùng thanh tuyệt đối cứng để đưa các ản số về tâm đàn hồi. Hệ phương trình chính tắc có dạng (5-27), các bước tính tiếp theo đã quen thuộc.

5.7. TÍNH VÒM SIÊU TĨNH

5.7.1. Khái niệm về vòm siêu tĩnh

Vòm siêu tĩnh chia thành ba loại: Vòm không khớp (Hình 5.42a), vòm một khớp (Hình 5.42b) và vòm hai khớp (Hình 5.42c).



Hình 5.42

Vòm là một loại kết cấu phù hợp với khẩu độ nhịp lớn, có thể làm bằng những vật liệu có sẵn ở địa phương như gạch, đá v.v... Trong ba loại vòm kể trên vòm không khớp được dùng nhiều nhất vì nội lực được phân bố đều đặn hơn theo chiều dài của vòm.

Khi thiết kế vòm ta cần quan tâm đến hai vấn đề là dạng trục của vòm và tiết diện vòm:

♦ Chọn dạng trục của vòm sao cho với thể tích vòm là nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo điều kiện bền. Người ta cũng đã chứng minh được đối với vòm siêu tĩnh không tồn tại vòm không có mô men nếu kể đến biến dạng nén đàn hồi trong vòm. Hiện nay người ta thường chọn dạng trục vòm siêu tĩnh theo dạng hợp lý của vòm ba khớp.

♦ Qui luật biến thiên của tiết diện vòm cần chọn sao cho phù hợp với sự phân bố nội lực trong vòm mà trước hết là mô men uốn và lực dọc.

Đối với vòm hai khớp (Hình 5.43a) áp dụng qui luật $J = J_0 \cdot \cos \varphi$. Tiết diện ngang của vòm sẽ tăng dần từ chân tới đỉnh. Sự biến thiên của tiết diện phù hợp với qui luật phân bố của mô men từ chân tới đỉnh vòm.

Đối với vòm không khớp (Hình 5.43b) để đơn giản trong tính toán thường áp dụng qui

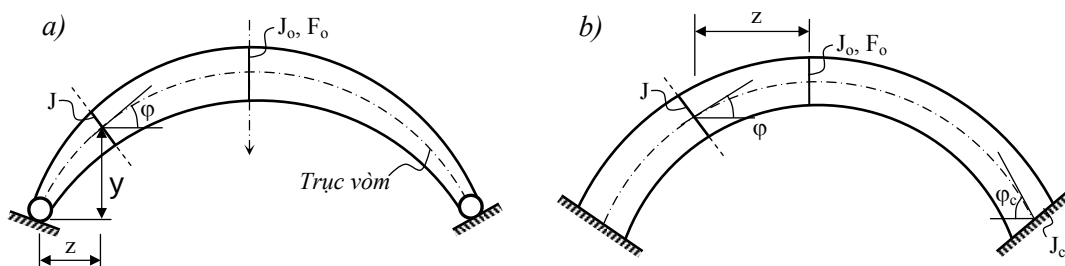
luật: $J = \frac{J_0}{\cos \varphi}$

Trong đó:

J - mô men quán tính tại tiết diện bất kỳ có hoành độ z (gốc chọn ở đỉnh vòm).

J_0 - mô men quán tính tại tiết diện đỉnh vòm.

φ - góc nghiêng của đường tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện có hoành độ z so với phương ngang.



Hình 5.43

Với qui luật trên tiết diện vòm tăng dần từ đỉnh tới vòm.

Khi tính vòm siêu tĩnh theo phương pháp lực cần chú ý tới hai vấn đề sau:

♦ Khi tính chuyển vị trong vòm theo công thức tổng quát (4-6) không được bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

♦ Đối với vòm có độ cong lớn ($\frac{\rho}{h} < 10$), khi tính chuyển vị cần áp dụng công thức có kể đến độ cong.

5.7.2. Tính vòm không khớp

Trong phần này ta sẽ nghiên cứu cách tính vòm không khớp đối xứng vì vòm không đối xứng thường ít dùng và nguyên tắc tính toán cũng tương tự như vòm đối xứng.

Giả sử cần xác định nội lực trong vòm siêu tĩnh không khớp cho trên *hình 5.44a*. Vận dụng phương pháp lực để tính. Dùng biên pháp tâm đàn hồi với hệ có một trục đối xứng:

1. Xác định toạ độ tâm đàn hồi C theo (5-29) ta có:

$$y_{oc} = \frac{2 \int_0^{\ell/2} y \frac{ds}{EJ} = \frac{\int_0^{\ell/2} y \frac{dz}{EJ_0}}{2 \int_0^{\ell/2} \frac{ds}{EJ} = \frac{\int_0^{\ell/2} \frac{dz}{EJ_0}}; \quad \left(ds = \frac{dz}{\cos \varphi}; J = \frac{J_0}{\cos \varphi} \right) \quad (5-33)$$

2. Chọn hệ cơ bản và đưa ẩn số về tâm đàn hồi như *hình 5.44b*.

3. Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0$$

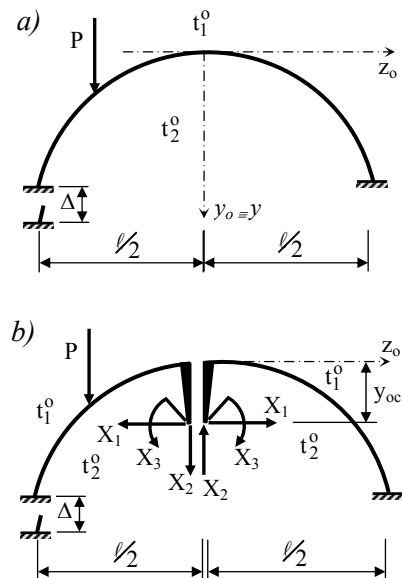
$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} + \Delta_{3t} = 0$$

4. Xác định các hệ số δ_{kk} :

$$\delta_{kk} = \sum_0^s \int \overline{M}_k \overline{M}_k \frac{ds}{EJ} + \sum_0^s \int \overline{Q}_k \overline{Q}_k \mu \frac{ds}{GF} + \sum_0^s \int \overline{N}_k \overline{N}_k \frac{ds}{EF}$$

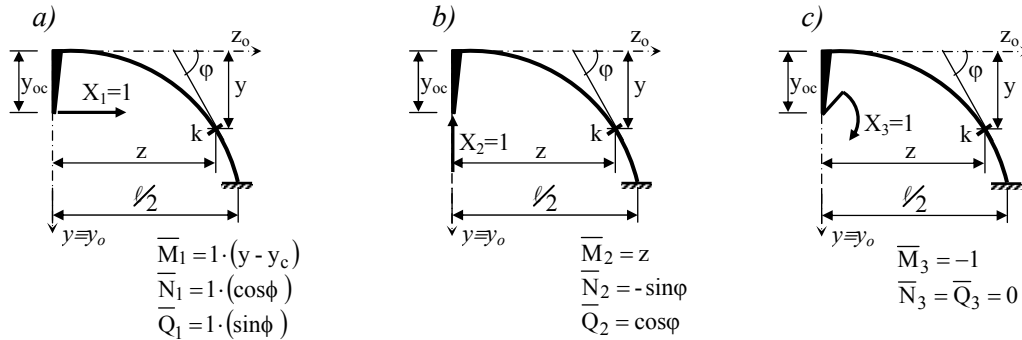
Vì vòm đối xứng nên ta chỉ cần tính cho một nửa vòm, sau đó nhân đôi các kết quả (các biểu thức nội lực được ghi trên *hình 5.45*).



Hình 5.44

Khi tính các tích phân ở trên ta cần biểu diễn $\cos\varphi$ theo z :

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}$$



Hình 5.45

Các số hạng tự do Δ_{km} được xác định theo công thức (5-17). Các bước tính còn lại đã quen thuộc.

Chú ý:

Đối với vòm siêu tĩnh mà trục và chiều cao của tiết diện ngang biến đổi không theo qui luật của các hàm sơ cấp thì việc xác định tâm đàn hồi, các hệ số và số hạng tự do bằng công thức tích phân sẽ rất phức tạp. Trong trường hợp đó ta có thể áp dụng hai cách tính gần đúng sau đây:

- ♦ Tính gần đúng các tích phân.
- ♦ Biến đổi sơ đồ vòm một cách gần đúng, đưa trục vòm có dạng đường cong về dạng đường gãy khúc với các điểm chia 0, 1, 2, ..., n có khoảng cách theo phương ngang như nhau. Với mỗi đoạn gãy khúc ta xác định chiều dài s , góc nghiêng φ và khoảng cách từ trọng tâm của đoạn đến trục z . Sau đó áp dụng công thức (5-31) để tìm tâm đàn hồi.

Ví dụ 5-12: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong vòm không khớp trên hình 5.46.

Phương trình trục vòm $y = \frac{4f}{\ell^2} z^2$. Luật biến thiên của tiết diện $J(z) = \frac{J_0}{\cos\varphi}$. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

Hệ vòm đối xứng có bậc siêu tĩnh $n = 3$. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.46b với C là tâm đàn hồi. Tung độ y_{oc} của tâm đàn hồi được xác định theo (5-29):

$$y_{oc} = \frac{2 \int_0^{\ell/2} y dv}{2 \int_0^{\ell/2} dv} = \frac{\int_0^{\ell/2} y \frac{dz}{EJ \cos\varphi}}{\int_0^{\ell/2} \frac{dz}{EJ \cos\varphi}} = \frac{\int_0^{\ell/2} y \frac{dz}{EJ_0}}{\int_0^{\ell/2} \frac{dz}{EJ_0}} = \frac{\int_0^{\ell/2} \frac{4f}{\ell^2} z^2 dz}{\int_0^{\ell/2} dz} = \frac{f}{3}$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0$$

Xác định các hệ số chính và số hạng tự do với:

$$\bar{M}_1 = (y - y_{oc});$$

$$\bar{M}_2 = z;$$

$$\bar{M}_3 = 1.$$

$$M_P^0 = -\frac{qz^2}{2} \text{ với } (-\frac{\ell}{2} \leq z \leq 0);$$

$$M_P^0 = 0 \text{ với } (0 \leq z \leq \frac{\ell}{2})$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \int_0^{\ell/2} (y - y_{oc})^2 \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = \\ &= 2 \int_0^{\ell/2} \left[\frac{4f}{\ell^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \frac{dz}{EJ_0} = \frac{4f^2 \ell}{45EJ_0} \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{\ell/2} z^2 \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = 2 \int_0^{\ell/2} z^2 \frac{dz}{EJ_0} = \frac{\ell^3}{12EJ_0}$$

$$\delta_{33} = 2 \int_0^{\ell/2} \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = 2 \int_0^{\ell/2} \frac{dz}{EJ_0} = \frac{\ell}{EJ_0}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int (y - y_{oc}) M_P^0 \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = \int_{-\ell/2}^0 \left[\frac{4f}{\ell^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \cdot \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EJ_0} = -\frac{q\ell^3 f}{180EJ_0}$$

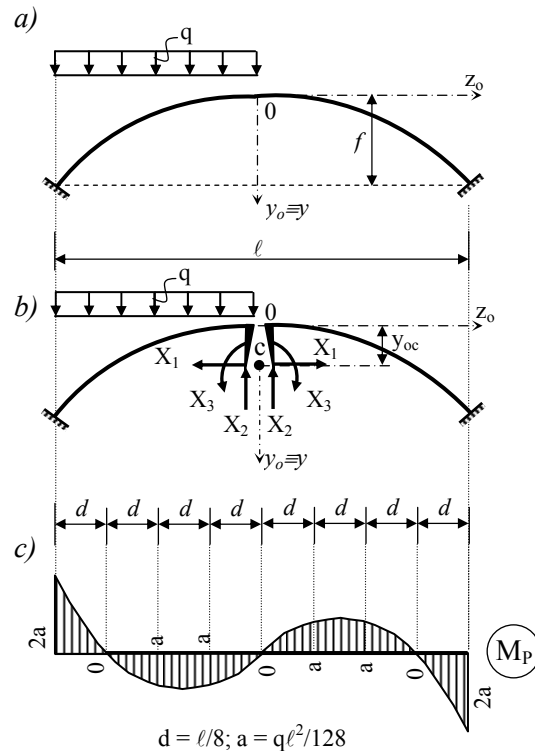
$$\Delta_{2P} = \sum \int z \cdot M_P^0 \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = \int_{-\ell/2}^0 z \cdot \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EJ_0} = -\frac{q\ell^4}{128EJ_0}$$

$$\Delta_{3P} = \sum \int M_P^0 \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = \int_{-\ell/2}^0 \left[-\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EJ_0} = -\frac{q\ell^3}{48EJ_0}$$

Thay các hệ số δ_{kk} và Δ_{kP} vào hệ phương trình chính tắc và giải phương trình ta được:

$$X_1 = -\frac{q\ell^2}{16f}; \quad X_2 = -\frac{3q\ell}{32}; \quad X_3 = -\frac{q\ell^2}{48}$$

Vận dụng nguyên lý cộng tác dụng (5-19) ta có biểu thức giải tích của mô men uốn trong vòm đã cho:



$$d = \ell/8; a = q\ell^2/128$$

Hình 5.46

- Trong phần trái của vòm, đoạn $(-\ell/2 \leq z \leq 0)$

$$M(z) = -\frac{qz^2}{4} - \frac{3q\ell z}{32}$$

- Trong phần phải của vòm, đoạn $(0 \leq z \leq \ell/2)$

$$M(z) = \frac{qz^2}{4} - \frac{3q\ell z}{32}$$

Thay các giá trị cụ thể cách đều theo z ta có biểu đồ mô men uốn của vòm đã cho như trên *hình 5.49c*.

5.8. TÍNH DẦM LIÊN TỤC

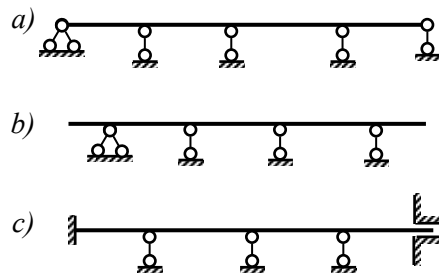
5.8.1. Khái niệm

Dầm liên tục là hệ chỉ có một thanh thẳng đặt trên nhiều gối tựa, trong đó số gối tựa lớn hơn hai.

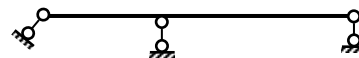
Trên *hình 5.47a,b,c* là ba loại dầm liên tục thường gặp trong thực tế:

- Dầm liên tục đơn giản (*Hình 5.47a*)
- Dầm liên tục có đầu thừa (*Hình 5.47b*)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (*Hình 5.47c*).

Trừ trường hợp đặc biệt trên *hình 5.48* dầm là tĩnh định, còn nói chung dầm liên tục là siêu tĩnh.



Hình 5.47



Hình 5.48

Bậc siêu tĩnh của dầm liên tục được tính theo công thức (1-3) đã nêu ở Chương 1. Tuy nhiên, nếu chú ý là một dầm tĩnh định chỉ cần nối với trái đất bằng ba liên kết thanh sắp xếp hợp lý thì ta có thể tính ngay được bậc siêu tĩnh của dầm liên tục theo công thức đơn giản sau:

$$n = C - 3$$

Trong đó:

- n - Bậc siêu tĩnh của dầm liên tục;
- C - Số liên kết tựa tương đương liên kết thanh.

Ví dụ, với hệ dầm liên tục trên *hình 5.47c* ta có $C = 8$ do đó bậc siêu tĩnh của hệ là

$$n = 8 - 3 = 5.$$

Trong thực tế, dầm liên tục thường chịu tải trọng thẳng đứng (vuông góc với trục thanh) nên thành phần phản lực ngang bằng không, lúc đó không có sự phân biệt giữa gối tựa cố định và gối tựa di động, giữa ngàm cứng và ngàm trượt nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục. Vì vậy trong trường hợp này ta có thể tính bậc siêu tĩnh n của dầm theo công thức đơn giản sau:

$$n = C_g + N \quad (5-34)$$

Trong đó:

C_g - số gối tựa trung gian (không tính hai liên kết ở ngoài cùng) của dầm, không cần phân biệt là gối di động hay gối tựa cố định;

N - số ngàm của dầm, không cần phân biệt là ngàm cứng hay ngàm trượt.

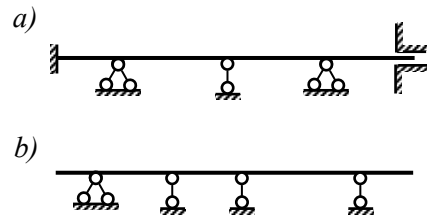
Ví dụ, trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng:

- Với hệ trên *hình 5.49a*, ta có

$$C_g = 4; N = 2, \text{ do đó } n = 4 + 2 = 6;$$

- Với hệ trên *hình 5.49b*, ta có

$$C_g = 2; N = 0, \text{ vậy } n = 2.$$



Hình 5.49

Chú ý:

Để đảm bảo cho dầm liên tục không biến hình, ít nhất phải có một liên kết nối với trái đất có khả năng ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục, chẳng hạn một ngàm hay một gối tựa cố định.

Dầm liên tục là một loại kết cấu siêu tĩnh được sử dụng sớm và rộng rãi trong kết cấu công trình. Nó có thể là những bộ phận chịu lực chủ yếu như cầu giao thông, cầu công tác, dầm cầu trục trong trạm bơm, nhà máy... hoặc chỉ là một cấu kiện trong công trình như xà gồ, dầm phụ trong cầu cửa van v...v... Có nhiều phương pháp tính dầm liên tục. Ở đây ta sẽ nghiên cứu hai phương pháp thường dùng trong thực tế là phương pháp lực và phương pháp tiêu điểm mô men.

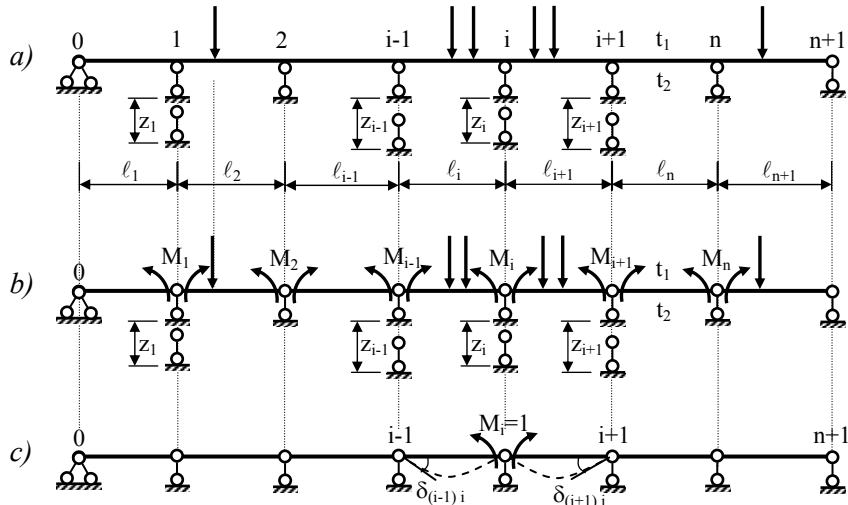
5.8.2. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp lực - phương trình ba mô men

Dầm liên tục chỉ là trường hợp đặc biệt của hệ siêu tĩnh nói chung nên có thể vận dụng phương pháp lực đã nghiên cứu để tính toán. Vì dầm liên tục rất hay gặp trong thực tế xây dựng nên ta có thể cụ thể hóa hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực nhằm phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản hơn.

Trước tiên, ta nghiên cứu cách tính dầm liên tục đơn giản, trên cơ sở đó dễ dàng suy ra cách tính dầm liên tục có đầu thừa hoặc đầu ngàm.

Xét dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng nhịp, chịu tác dụng đồng thời của tải trọng (P), sự biến thiên nhiệt độ (t) và chuyển vị cưỡng bức (z) tại các gối tựa như trên *hình 5.50a*.

Giả sử dầm có n gối tựa trung gian tức là có $(n + 1)$ nhịp; ta đánh số thứ tự các gối tựa tăng dần từ trái qua phải, các nhịp và các đặc trưng trong nhịp lấy tên theo số thứ tự của gối tựa phải như trên *hình 5.50a*. Với cách đánh số như vậy, theo (5-34) bậc siêu tĩnh của hệ sẽ bằng n .



Hình 5.50

Chọn hệ cơ bản như trên *hình 5.50b* với các ẩn số X_i là các mô men uốn M_i tại gối tựa thứ i . Như vậy hệ phương trình chính tắc sẽ biểu thị điều kiện các góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên mỗi gối tựa trung gian bằng không.

Hệ cơ bản vừa chọn có ưu điểm là chia dầm thành nhiều bộ phận độc lập với nhau nên sẽ cho nhiều hệ số phụ bằng không. Thật vậy, dưới tác dụng của riêng ẩn số $M_i = 1$, biến dạng chỉ xảy ra trong hai nhịp lân cận thứ i và thứ $(i + 1)$ (*Hình 5.50c*) do đó chỉ tồn tại các chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện (chuyển vị tương ứng với các ẩn số) ở hai bên gối tựa trung gian thứ $(i - 1)$, thứ i và thứ $(i + 1)$. Như vậy, với hệ cơ bản đã chọn ta có các tính chất sau:

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} = 0 \quad \text{khi} \quad k \neq (i - 1), i \text{ và } (i + 1);$$

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} \neq 0 \quad \text{khi} \quad k = (i - 1), i \text{ và } (i + 1).$$

Lúc này, phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc biểu thị điều kiện góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa trung gian thứ i bằng không, sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\delta_{i(i-1)}M_{(i-1)} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{(i+1)} + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta} = 0 \quad (5-35)$$

Phương trình (5-35) có ba ẩn mô men nên gọi là phương trình ba mô men. Trong đó:

$\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$ - Góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các mô men đơn vị M_{i-1} , M_i và $M_{(i+1)}$ gây ra trong hệ cơ bản;

Δ_{iP} , $\Delta_{i\Delta}$, Δ_{it} - Góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa và do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Để thuận lợi cho việc tính toán, ta thiết lập sẵn các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Khi xác định các đại lượng này ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, còn biến dạng dọc trục sẽ không tồn tại với sơ đồ tính đã chấp nhận và khi dầm chỉ chịu tải trọng vuông góc với trục dầm.

Trên hình 5.51a,b,c,d là sơ đồ tính và các biểu đồ mô men uốn đơn vị cần thiết trong hệ cơ bản để xác định các hệ số.

♦ Xác định các hệ số:
Thực hiện nhân các biểu đồ đơn vị, ta có:

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i} \cdot 1 \cdot \frac{\ell_i}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\ell_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EJ_i} \cdot 1 \cdot \frac{\ell_i}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{\ell_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\ell_i}{3EJ_i} + \frac{\ell_{i+1}}{3EJ_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{\ell_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\ell_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

♦ Xác định số hạng tự do Δ_{ip} do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối Δ_{ip} giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức

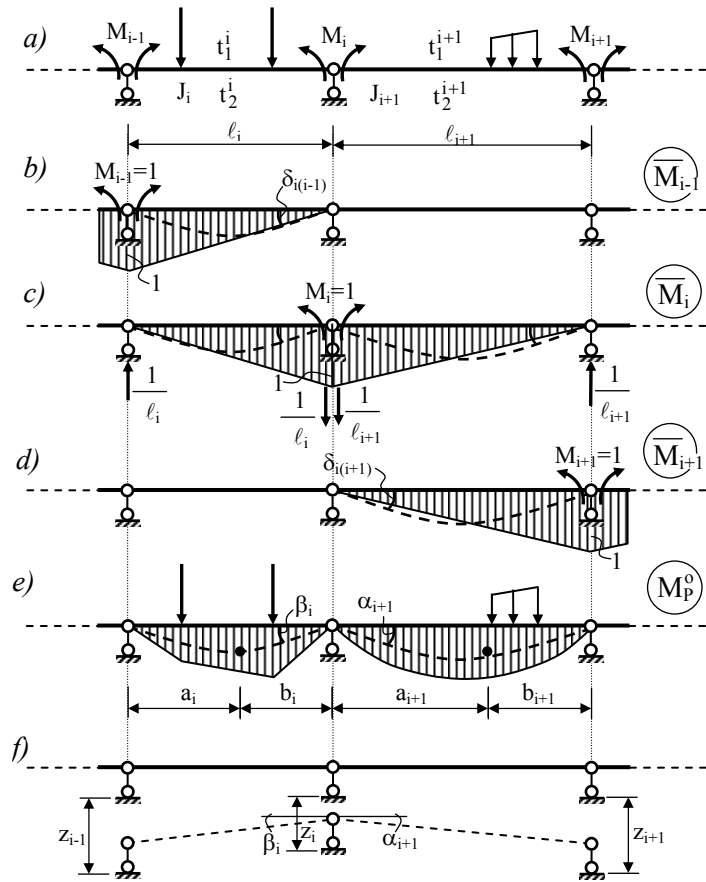
$$\Delta_{ip} = (\overline{M}_i)(M_p^o)$$

Trong đó M_p^o là biểu đồ mô men uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (Hình 5.50e). Thực hiện nhân biểu đồ ta được:

$$\Delta_{ip} = \frac{\omega_i a_i}{\ell_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{\ell_{i+1} EJ_{i+1}}$$

Trong đó:

ω_i và ω_{i+1} - diện tích biểu đồ mô men uốn (M_p^o) tại nhịp i và nhịp (i+1) do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;



Hình 5.51

a_i, b_i - khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mô men uốn (M_p^0) trong nhịp i đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó;

a_{i+1}, b_{i+1} - khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mô men uốn (M_p^0) trong nhịp $(i+1)$ tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó.

♦ Xác định số hạng tự do $\Delta_{i\Delta}$ do chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối $\Delta_{i\Delta}$ giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa i do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo (5-13):

$$\Delta_{k\Delta} = - \sum_j \bar{R}_k^j \cdot \Delta_m^j$$

Trong đó:

Δ_m^j - chuyển vị cưỡng bức cho biết tại gối tựa thứ j của dầm siêu tĩnh;

$\bar{R}_k^j$ - phản lực tại gối j của hệ do mô men $M_i = 1$ gây ra trong hệ cơ bản .

Nếu quy ước các chuyển vị lún xuống dưới là dương ta được:

$$\Delta_{i\Delta} = - \left[-\frac{1}{\ell_i} \Delta_{i-1} + \frac{1}{\ell_i} \Delta_i + \frac{1}{\ell_{i+1}} \Delta_i - \frac{1}{\ell_{i+1}} \Delta_{i+1} \right]$$

hay
$$\Delta_{i\Delta} = \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{\ell_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{\ell_{i+1}} \right]$$

Trong đó: $\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}$ - Độ lún tại các gối tựa thứ $(i-1)$, thứ i và thứ $(i+1)$ với quy ước hướng xuống phía dưới là dương.

Mặt khác qua hình 5.5If, ta thấy $\Delta_{i\Delta}$ là tổng hai góc β_i và α_{i+1} ở hai bên gối tựa i :

$$\Delta_{i\Delta} = \beta_i + \alpha_{i+1} \approx \text{tg}\beta_i + \text{tg}\alpha_{i+1} = \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{\ell_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{\ell_{i+1}} \right]$$

♦ Xác định số hạng tự do Δ_{it} do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối Δ_{it} giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức (5-12).

Với chú ý lực dọc trong dầm bằng không, ta có:

$$\Delta_{it} = \left[\frac{\alpha \ell_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha \ell_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right]$$

Trong đó:

h_i, h_{i+1} - chiều cao của tiết diện dầm tại nhịp thứ i và $(i+1)$;

$t_{1i}, t_{1(i+1)}$ - độ biến thiên nhiệt độ tại thớ trên của nhịp thứ i và $(i+1)$;

$t_{2i}, t_{2(i+1)}$ - độ biến thiên nhiệt độ tại thớ dưới của nhịp thứ i và $(i+1)$.

Thay các trị số vừa tính được vào phương trình chính tắc (5-35) và rút gọn phương trình trên bằng cách nhân hai vế với $6EJ_o$, ký hiệu: $\lambda_i = \ell_i \frac{J_o}{J_i}$; $\lambda_{i+1} = \ell_{i+1} \frac{J_o}{J_{i+1}}$;

Trong đó:

J_o - là mô men quán tính của một nhịp nào đó được chọn làm chuẩn chung.

λ_i, λ_{i+1} - Gọi là chiều dài qui ước của nhịp thứ i và $(i+1)$.

Ta được phương trình ba mô men viết cho gối trung gian thứ i khi dầm chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, và chuyển vị gối tựa:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6J_o \left[\frac{\omega_i a_i}{\ell_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{\ell_{i+1} EJ_{i+1}} \right] + 6EJ_o \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{\ell_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{\ell_{i+1}} \right] + 6EJ_o \left[\frac{\alpha \ell_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha \ell_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0 \quad (5-36)$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trong tất cả các nhịp ($J = \text{const}$) ta có thể lấy $J_o = J$, lúc đó phương trình ba mô men sẽ có dạng:

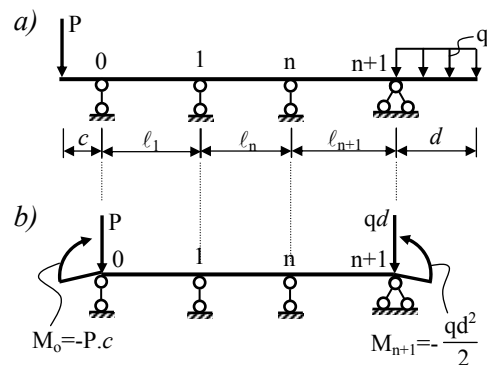
$$\ell_i M_{i-1} + 2(\ell_i + \ell_{i+1})M_i + \ell_{i+1}M_{i+1} + 6 \left[\frac{\omega_i a_i}{\ell_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{\ell_{i+1}} \right] + 6EJ \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{\ell_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{\ell_{i+1}} \right] + 3EJ\alpha \left[\frac{\ell_i}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\ell_{i+1}}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0 \quad (5-37)$$

Ứng với mỗi gối trung gian của dầm liên tục ta có một phương trình ba mô men, như vậy với dầm liên tục có bậc n siêu tĩnh bằng ta sẽ viết được n phương trình ba mô men cho n gối trung gian, đủ để xác định n ẩn số M_i .

* Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa

Ta có thể đưa dầm có đầu thừa chịu tải trọng (Hình 5.52a) về dầm liên tục đơn giản (Hình 5.52b) bằng cách cắt bỏ các đầu thừa và thay tác dụng của phần đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở các gối biên của dầm liên tục đơn giản.

Nội lực của dầm liên tục đơn giản trên hình 5.52b được xác định bằng cách sử dụng phương trình ba mô men với mô men uốn tại các gối biên của dầm đã biết, chúng có giá trị bằng mô men tập trung M_o và M_{n+1} .



Hình 5.52

Ta cũng có thể coi các mô men tập trung ở hai đầu dầm như ngoại lực đặt trong nhịp thứ nhất và thứ $(n+1)$. Lúc này, mô men tựa M_o và M_{n+1} sẽ bằng không còn các đại lượng

ω_1 và ω_{n+1} cần được bổ sung phần ảnh hưởng do các mô men tập trung đó gây ra. Cách này thường phức tạp nên ít được sử dụng.

*** Trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm**

Trong trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm trên hình 5.53a, ta tưởng tượng thay ngàm và ngàm trượt bằng hai nhíp ở hai đầu có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng $EJ = \infty$ và có số liên kết tương đương với ngàm (Hình 5.53b).

Ta đã đưa bài toán dầm liên tục có đầu ngàm về bài toán dầm liên tục đơn giản và có thể áp dụng được phương trình ba mô men như thường lệ.

Như vậy, với mỗi dầm liên tục bất kỳ khi quy về dầm liên tục đơn giản tương ứng, ta thiết lập được hệ phương trình ba mô men viết cho tất cả các gối trung gian. Sau khi giải hệ phương trình sẽ tìm được tất cả các mô men uốn tại các gối tựa gọi là *mô men tựa*.

Muốn xác định giá trị mô men uốn và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ trong các nhịp của dầm liên tục. Ta xem mỗi nhịp dầm liên tục như một dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối ở hai đầu nhịp, chịu tải trọng và các mô men uốn đã xác định được từ hệ phương trình ba mô men. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng (Hình 5.54) ta sẽ tìm được biểu thức mô men uốn tại một tiết diện bất kỳ k có hoành độ z trong nhịp thứ i của dầm liên tục như sau:

$$M_k = M_k^d + \frac{\ell_i - z}{\ell_i} M_{i-1} + \frac{z}{\ell_i} M_i \quad (5-38)$$

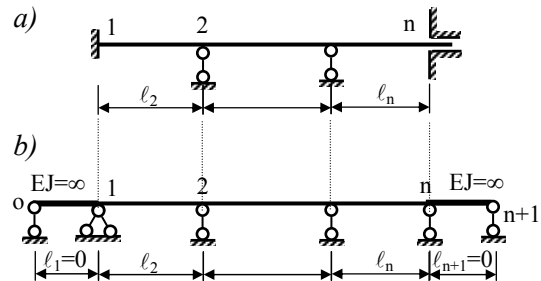
Trong đó M_k^d - mô men uốn tại tiết diện k do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Lấy đạo hàm biểu thức trên ta sẽ được biểu thức lực cắt tại tiết diện k của dầm liên tục:

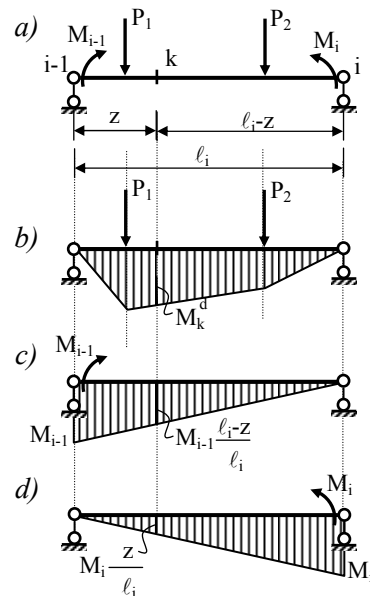
$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{\ell_i} \quad (5-39)$$

Trong đó Q_k^d là lực cắt tại tiết diện k do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Để tìm phản lực tại gối tựa bất kỳ thứ i, ta chỉ cần xét cân bằng của phần dầm bị cắt xung quanh gối tựa thứ i.



Hình 5.53



Hình 5.54

Trình tự tính dầm liên tục theo phương pháp phương trình ba mô men được trình bày qua ví dụ sau.

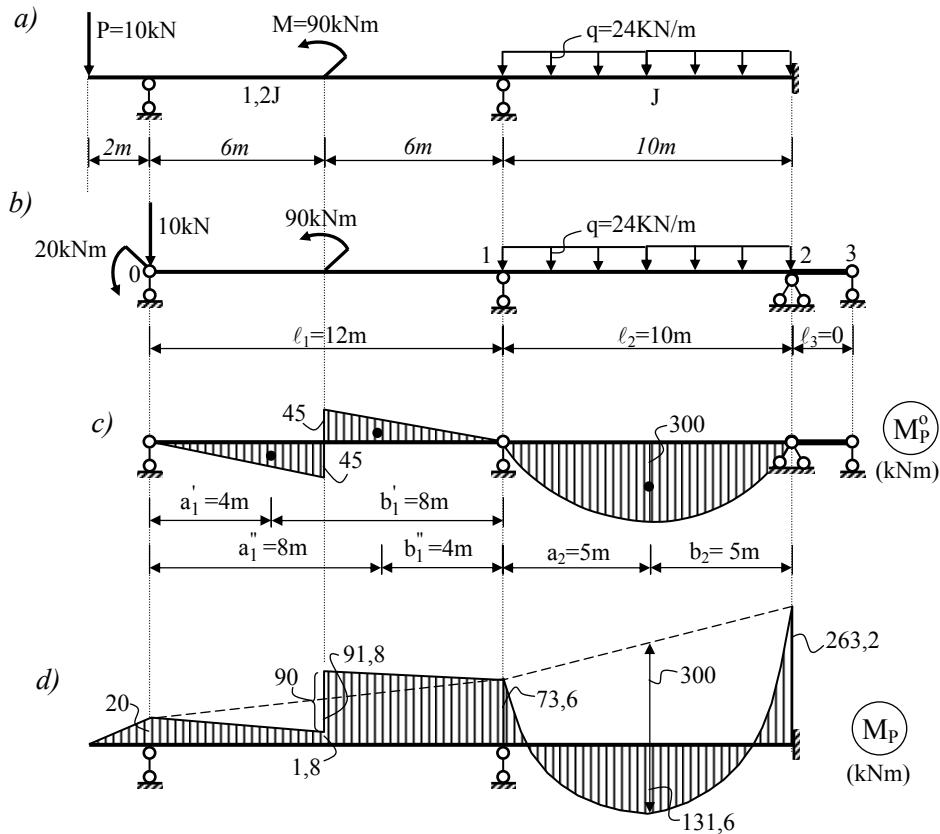
Ví dụ 5-13: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong dầm liên tục trên hình 5.55a.

1. Cắt bỏ đầu thừa, thay tác dụng của phần đầu thừa bằng các lực đặt ở gối biên bên trái và thay ngàm bên phải bằng một nhíp có chiều dài $\ell_3 = 0$ ta được sơ đồ tính tương đương như trên hình 5.55b là dầm liên tục đơn giản.

2. Đánh số thứ tự các gối tựa và nhíp từ trái qua phải như trên hình 5.55b.

Chọn $J_0 = J$, chiều dài quy ước của các nhíp sẽ là:

$$\lambda_1 = \frac{12J_0}{1,2J} = 10 ; \quad \lambda_2 = \frac{10J_0}{J} = 10 \text{ m} ; \quad \lambda_3 = 0.$$



Hình 5.55

3. Viết phương trình ba mô men cho các gối trung gian (gối 1 và gối 2), ta có

$$\text{Gối 1 (i = 1): } \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J \left[\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1 \cdot 1,2J} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2 \cdot J} \right] = 0$$

$$\text{Gối 2 (i = 2): } \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3) M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J \left[\frac{\omega_2 a_2}{\ell_2 \cdot J} + \frac{\omega_3 b_3}{\ell_3 \cdot J_3} \right] = 0$$

4. Vẽ biểu đồ mô men uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Kết quả như trên hình 5.55c.

5. Xác định các đại lượng trong số hạng tự do của hệ phương trình ba mô men

$$\omega_1 a_1 = \omega_1' a_1' + \omega_1'' a_1'' = \frac{45.6}{2} \cdot 4 - \frac{45.6}{2} \cdot 8 = -540 \text{ kNm}^3$$

$$\omega_2 a_2 = \omega_2 b_2 = \frac{2}{3} \cdot 300 \cdot 10.5 = 10000 \text{ kNm}^3$$

$$\omega_3 = 0; \quad b_3 = 0.$$

6. Thay trị số của các hệ số vào hệ phương trình ba mô men, với chú ý $M_0 = -20 \text{ kNm}$; ta có:

$$-10.20 + 2(10+10)M_1 + 10M_2 + 6\left(\frac{-540}{12.1,2} + \frac{10000}{10}\right) = 0$$

$$10M_1 + 2(10+0)M_2 + 0 + 6 \cdot \frac{10000}{10} = 0$$

Rút gọn, ta được:

$$4M_1 + M_2 + 557,5 = 0$$

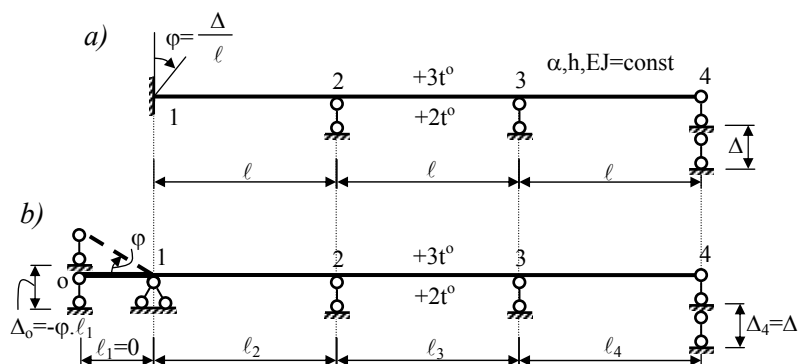
$$M_1 + 2M_2 + 600 = 0.$$

7. Giải hệ phương trình, ta được $M_1 = -73,6 \text{ kNm}$; $M_2 = -263,2 \text{ kNm}$.

8. Vẽ biểu đồ mô men uốn trong dầm liên tục đã cho bằng cách vẽ biểu đồ do các ảnh hưởng mô men tựa (đường đứt nét), sau đó treo biểu đồ (M_p^0) trong từng nhịp của dầm. Kết quả vẽ trên hình 5.55d.

Ví dụ 5-14: Viết phương trình ba mô men dạng số để tính dầm liên tục chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi và gối tựa dời chỗ cho trên hình 5.56a.

Sơ đồ dầm liên tục đơn giản tương đương thay thế cho dầm đã cho trong tính toán được vẽ trên hình 5.56b. Ngàm 1 bị xoay một góc thuận chiều kim đồng hồ được thay thế bằng nhịp tương đương có chiều dài $\ell_1 \rightarrow 0$ và gối 0 dịch chuyển lên phía trên một đoạn



Hình 5.56

$$z_0 = \phi \cdot \ell_1 = \frac{\Delta \cdot \ell_1}{\ell}$$

Viết phương trình ba mô men cho các gối trung gian 1, 2, 3. Lần lượt thay $i = 1, 2, 3$ vào (5-37) ta có:

$$\ell_1 M_0 + 2(\ell_1 + \ell) M_1 + \ell M_2 + 6EJ \left(\frac{-\frac{\Delta \ell_1}{\ell} - 0}{\ell_1} + \frac{0 - 0}{\ell} \right) = 0$$

$$\ell M_1 + 2(\ell + \ell) M_2 + \ell M_3 + 3EJ \frac{\alpha}{h} [\ell(0 - 0) + \ell(2t - 3t)] = 0$$

$$\ell M_2 + 2(\ell + \ell) M_3 + \ell M_4 + EJ \frac{\alpha}{h} [\ell(2t - 3t) + \ell(0 - 0)] + 6EJ \left[\frac{0 - 0}{\ell} + \frac{\Delta - 0}{\ell} \right] = 0$$

Cho $\ell_1 \rightarrow 0$ và $M_0 = M_4 = 0$. Rút gọn ta được hệ phương trình cần tìm:

$$\begin{cases} 2\ell M_1 + \ell M_2 - \frac{6EJ\Delta}{\ell} = 0 \\ \ell M_1 + 4\ell M_2 + \ell M_3 - \frac{3\ell EJ\alpha t}{h} = 0 \\ \ell M_2 + 4\ell M_3 - \frac{3\ell EJ\alpha t}{h} + \frac{6EJ\Delta}{\ell} = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5-15: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong dầm liên tục chịu sự biến thiên nhiệt độ như trên hình 5.57a. Cho biết $EJ = \text{const}$; $h = \text{const}$.

Phương trình ba mô men viết cho gối 1 và gối 2:

$$\ell_1 M_0 + 2(\ell_1 + \ell_2) M_1 + \ell_2 M_2 + 3EJ\alpha \left[\frac{\ell_1}{h_1} (t_{21} - t_{11}) + \frac{\ell_2}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \right] = 0$$

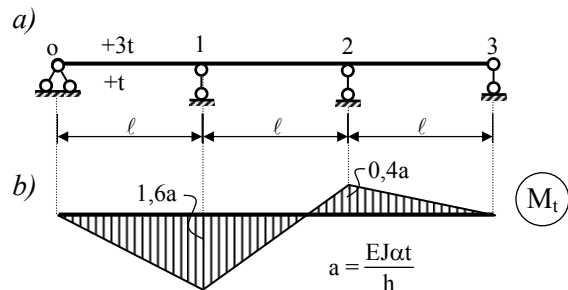
$$\ell_2 M_1 + 2(\ell_2 + \ell_3) M_2 + \ell_3 M_3 + 3EJ\alpha \left[\frac{\ell_2}{h_2} (t_{22} - t_{12}) + \frac{\ell_3}{h_3} (t_{23} - t_{13}) \right] = 0$$

Trong đó: $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$; $M_0 = M_3 = 0$; $h_1 = h_2 = h_3 = h$;
 $t_{21} = +t$; $t_{11} = +3t$; $t_{22} = t_{12} = t_{23} = t_{13} = 0$.

Thay các số liệu trên vào hệ phương trình và giải ra ta được:

$$M_1 = \frac{8EJ\alpha t}{5h}; \quad M_2 = -\frac{2EJ\alpha t}{5h}.$$

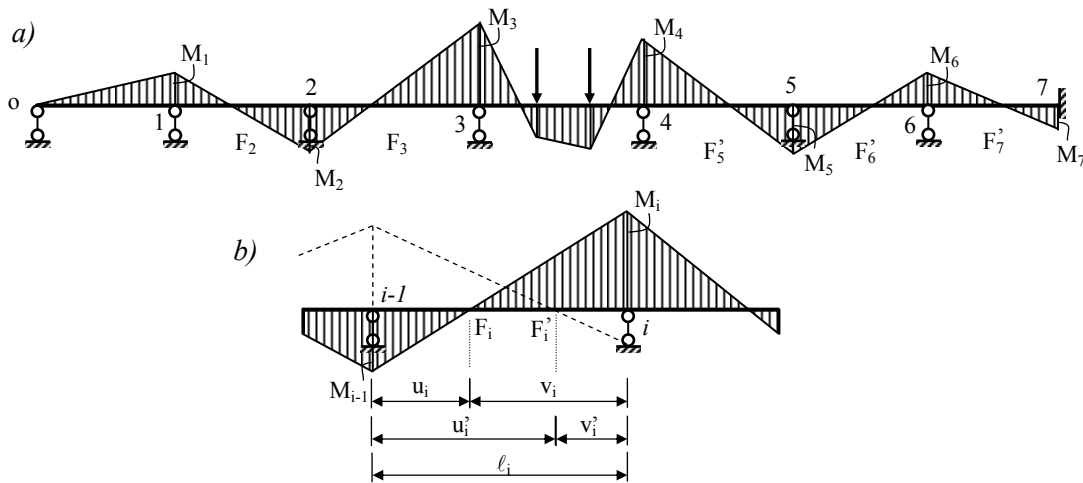
Biểu đồ mô men uốn cần tìm vẽ trên hình 5.57b.



Hình 5.57

5.8.3. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp tiêu điểm mô men

Xét một dầm liên tục chịu tải trọng chỉ đặt trên một nhịp. Dùng phương trình ba mô men ta vẽ được biểu đồ mô men như trên *hình 5.58a*. Nhận xét các nhịp không đặt tải ta thấy mô men gối tựa lần lượt đổi dấu và càng xa nhịp có tải trọng thì trị số càng giảm. Trong mỗi nhịp này giao điểm của đường biểu diễn mô men với đường chuẩn gọi là tiêu điểm mô men. Các điểm F_2, F_3 thuộc các nhịp ở phía trái của nhịp đặt tải gọi là các tiêu điểm trái, còn các điểm F'_5, F'_6, F'_7 thuộc các nhịp ở phía bên phải của nhịp đặt tải gọi là các tiêu điểm phải. Vị trí của tiêu điểm được xác định bởi tỉ số giữa đoạn lớn và đoạn nhỏ do tiêu điểm chia trong mỗi nhịp gọi là tỉ số tiêu cự K . Nếu ký hiệu các khoảng cách từ tiêu điểm tới gối trái của nhịp là u (hoặc u') và tới gối phải của nhịp là v (hoặc v') thì khi nhịp thứ i ở phía trái của nhịp đặt tải, có tỉ số tiêu cự trái (*Hình 5.58b*):



Hình 5.58

$$K_i = \frac{v_i}{u_i} = \left| \frac{M_i}{M_{i-1}} \right| = -\frac{M_i}{M_{i-1}} \quad (5-40)$$

và khi nhịp i ở phía phải của nhịp đặt tải, có tỉ số tiêu cự phải:

$$K'_i = \frac{v_i}{u_i} = \left| \frac{M_{i-1}}{M_i} \right| = -\frac{M_{i-1}}{M_i} \quad (5-41)$$

Như vậy, với dầm trên, nếu xác định được các tỉ số tiêu cự trái và phải (K và K') và các mô men gối tựa ở hai đầu ở hai nhịp có đặt tải (M_3, M_4) thì có thể tính được tất cả các tung độ mô men gối tựa của biểu đồ mô men cuối cùng:

$$M_2 = -\frac{M_3}{K_3}; \quad M_1 = -\frac{M_2}{K_2}; \quad M_5 = -\frac{M_4}{K'_5}; \quad M_6 = -\frac{M_5}{K'_6}; \quad M_7 = -\frac{M_6}{K'_7}.$$

1. Xác định các tỉ số tiêu cự:

Để thiết lập công thức xác định tỉ số tiêu cự trái K_i của nhịp thứ i ở phía trái của nhịp có đặt tải trọng (Hình 5.59), ta viết phương trình ba mô men cho gối tựa thứ $(i-1)$:

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i = 0$$

Chia cả hai vế cho M_{i-1} :

$$\lambda_{i-1} \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

Thay các tỉ số mô men bằng các tỉ số tiêu cự trái, được:

$$-\frac{\lambda_{i-1}}{K_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) - K_i \lambda_i = 0$$

Từ đó rút ra biểu thức tính tỉ số tiêu cự trái của nhịp i :

$$K_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left(2 - \frac{1}{K_{i-1}} \right) \quad (5-42)$$

Công thức trên có tính truy hồi vì muốn tính được K_i phải biết K_{i-1} là tỉ số tiêu cự trái của nhịp thứ $i-1$ kề phía trái nhịp i , ..., do đó trước hết phải tìm được tỉ số tiêu cự trái nhịp tận cùng phía trái, tức là K_1 của nhịp thứ nhất.

Xét nhịp thứ nhất có hai trường hợp:

- Nếu gối tựa đầu tiên là khớp (Hình 5.60a) thì:

$$K_1 = \left| \frac{M_1}{M_0} \right| = \left| \frac{M_1}{0} \right| = \infty$$

- Nếu gối tựa đầu tiên là ngàm (Hình 5.60b) ta có thể thay nó bằng một nhịp tương đương có độ dài nhịp là vô cùng bé hoặc $J_0 = \infty$ (Hình 5.60c), khi đó:

$$K_0 = \left| \frac{M_0}{M_{-1}} \right| = \infty \text{ và } \lambda_0 = 0;$$

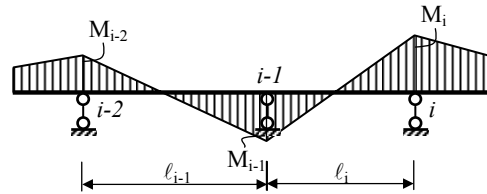
Theo (5-43) tìm được:

$$K_i = 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left(2 - \frac{1}{\lambda_0} \right) = 2$$

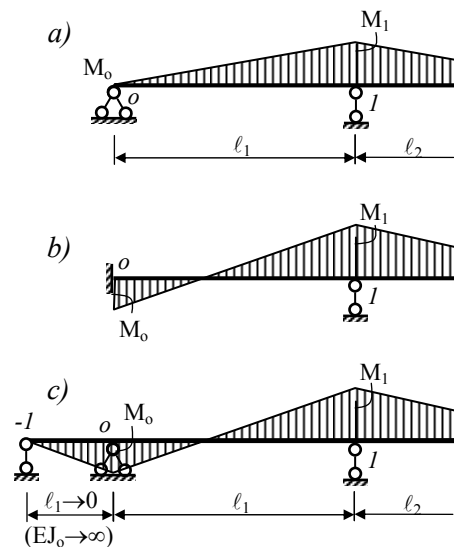
Tương tự cách lập luận trên ta cũng lập được công thức tính tỉ số tiêu cự phải K'_i của nhịp thứ i ở phía phải nhịp có đặt tải:

$$K'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left(2 - \frac{1}{K'_{i+1}} \right) \quad (5-43)$$

và trước hết phải tìm được K'_n của nhịp cuối cùng thứ n :



Hình 5.59



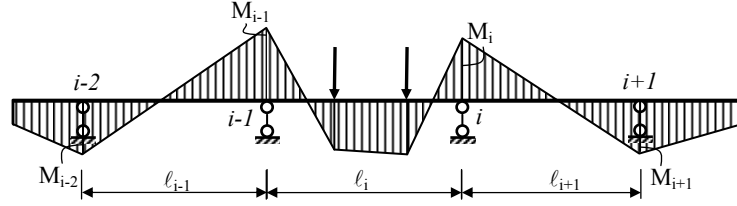
Hình 5.60

- Nếu gối n cuối cùng là gối khớp, có $K'_n = \infty$.

- Nếu gối n cuối cùng là ngàm, có $K'_n = 2$.

2. Xác định các mô men gối tựa ở hai đầu nhịp có tải trọng

Giả sử trên dầm chỉ có nhịp i có tải trọng tác dụng (Hình 5.61). Để xác định các mô men gối tựa M_{i-1} và M_i ta viết phương trình ba mô men cho các gối tựa thứ $i-1$ và i :



Hình 5.61

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i + \frac{6\omega_i b_i J_o}{\ell_i J_i} = 0$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + \frac{6\omega_i b_i J_o}{\ell_i J_i} = 0$$

Trong hai phương trình trên có bốn ẩn mô men gối tựa mà ta chỉ cần tìm M_{i-1} và M_i , do đó có thể biểu diễn các mô men gối M_{i-2} và M_{i+1} qua các tỉ số tiêu cự và hai ẩn còn lại:

$$M_{i-2} = -\frac{M_{i-1}}{K_{i-1}}; \quad M_{i+1} = -\frac{M_i}{K_{i+1}};$$

Thay chúng vào hệ phương trình, chia các vế cho λ_i và rút gọn, được:

$$M_{i-1} \left[2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left(2 - \frac{1}{K_{i-1}} \right) \right] + M_i + \frac{6\omega_i b_i J_o}{\ell_i J_i} = 0$$

$$M_{i-1} + M_i \left[2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left(2 - \frac{1}{K_{i+1}} \right) \right] + \frac{6\omega_i a_i J_o}{\ell_i J_i} = 0$$

Áp dụng công thức (5-42), (5-43) và thay thế $\lambda_i = \ell_i \cdot \frac{J_o}{J_i}$ được:

$$M_{i-1}K_i + M_i + \frac{6\omega_i b_i}{\ell_i^2 J_i} = 0$$

$$M_{i-1} + M_i K'_i + \frac{6\omega_i a_i}{\ell_i^2 J_i} = 0$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được các mô men gối tựa ở hai đầu của nhịp i có tải trọng tác dụng:

$$\begin{aligned} M_{i-1} &= -\frac{6\omega_i(b_i K_i' - a_i)}{\ell_i^2(K_i K_i' - 1)} \\ M_i &= -\frac{6\omega_i(a_i K_i - b_i)}{\ell_i^2(K_i K_i' - 1)} \end{aligned} \quad (5-44)$$

Trường hợp nhịp ngoài cùng có tải trọng tác dụng và gối tựa ngoài cùng là khớp, chẳng hạn nhịp thứ nhất chịu tải và gối tựa số 0 đầu tiên là khớp, ta có $K_1 = \infty$, $M_0 = 0$ và M_1 theo (5-44) có dạng vô định. Chia cả tử số và mẫu số của biểu thức cho K_1 để khử dạng vô định đó, ta được:

$$M_1 = -\frac{6\omega_1\left(a_1 - \frac{b_1}{K_1}\right)}{\ell_1^2\left(K_1' - \frac{1}{K_1}\right)} = -\frac{6\omega_1 a_1}{\ell_1^2 K_1'} \quad (5-45)$$

Tương tự, nếu nhịp có tải trọng là nhịp cuối cùng (nhịp thứ n) và gối tựa cuối cùng là khớp, ta có:

$$M_n = 0 \text{ và } M_{n-1} = -\frac{6\omega_n b_n}{\ell_n^2 K_n} \quad (5-46)$$

Khi trên dầm có một số nhịp chịu tải, theo nguyên lý cộng tác dụng, biểu đồ mô men sẽ là tổng các biểu đồ đã xây dựng cho các trường hợp tải trọng tác dụng riêng trong từng nhịp.

Ví dụ 5-14: Vẽ biểu đồ mô men cho dầm trên hình 5.62a với $J = \text{const}$; có $\lambda_i = \ell_i$.

Theo các công thức (5-42) và (5-43) tính các tỉ số tiêu cự trái và phải cần thiết cho các nhịp:

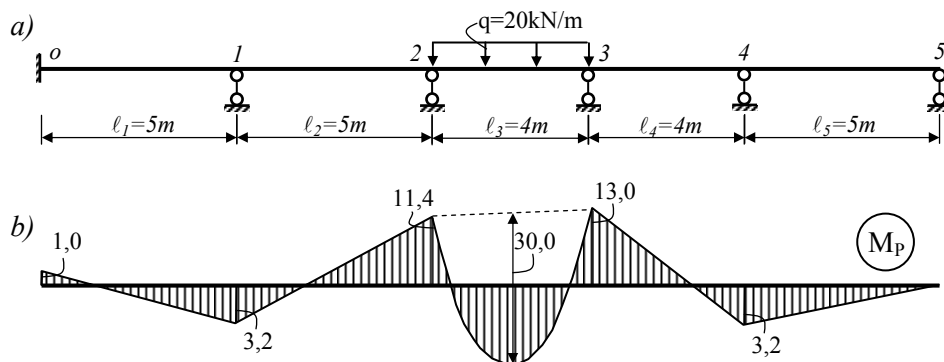
$$\begin{aligned} K_1 &= 2; & K_2 &= 2 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \left(2 - \frac{1}{K_1}\right) = 2 + \frac{5}{5} \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3,5 \\ K_3 &= 2 + \frac{5}{4} \left(2 - \frac{1}{3,5}\right) = 4,14; & K_5' &= 0; \\ K_4' &= 2 + \frac{5}{4} \left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4; & K_3' &= 2 + \frac{4}{4} \left(2 - \frac{1}{4}\right) = 3,75 \end{aligned}$$

Xác định các mô men gối tựa của nhịp có tải trọng tác dụng theo (5-44):

$$\omega_3 = \frac{q\ell_3^3}{12} = \frac{5 \cdot 4^3}{12} = 80 \text{ kNm}^2; \quad a_3 = b_3 = 2\text{m}$$

$$M_2 = -\frac{6 \cdot 80(2 \cdot 3,75 - 2)}{4^2 \cdot (4,14 \cdot 3,75 - 1)} = -11,4 \text{ kNm}$$

$$M_3 = -\frac{6 \cdot 80 \cdot (2 \cdot 4,14 - 2)}{4^2 \cdot (4,14 \cdot 3,75 - 1)} = -3 \text{ kNm}$$



Hình 5.62

Xác định mô men gối tựa tại các nhịp không chịu tải:

$$M_1 = -\frac{M_2}{K_2} = -\frac{-11,4}{3,5} = 3,2 \text{ kNm}$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{K_1} = -\frac{3,2}{2} = -1,6 \text{ kNm}$$

$$M_4 = -\frac{M_3}{K_4} = -\frac{-3}{4} = +0,75 \text{ kNm}$$

Biểu đồ mô men vẽ được trên hình 5.62b.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Vẽ biểu đồ M, Q, N cho các khung trên hình 5.63, hình 5.64.
2. Vẽ biểu đồ M cho các khung trên hình 5.65, hình 5.66.
3. Vẽ biểu đồ M, Q, N cho các khung trên hình 5.67, hình 5.68.
4. Xác định chuyển vị đứng tại K, chuyển vị ngang tại D cho các khung trên hình 5.63, hình 5.67, hình 5.68.
5. Vẽ biểu đồ M cho các khung trên hình 5.69, đến hình 5.72.

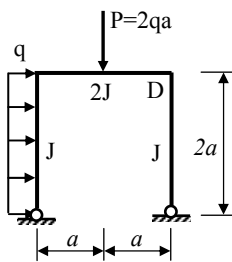
6. Chọn sơ đồ tính hợp lý và viết hệ phương trình chính tắc dạng số cho các hệ trên hình 5.73, đến hình 5.77.

7. Viết hệ phương trình chính tắc dạng số cho các hệ trên hình 5.78, hình 5.79.

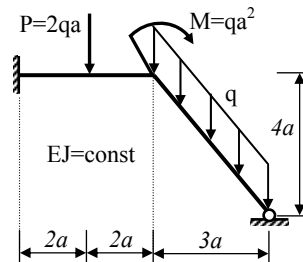
8. Dùng phương trình ba mô men vẽ biểu đồ M, Q cho các dầm liên tục trên hình 5.80, đến hình 5.83.

9. Vẽ biểu đồ M cho các dầm trên hình 5.84 đến hình 5.86.

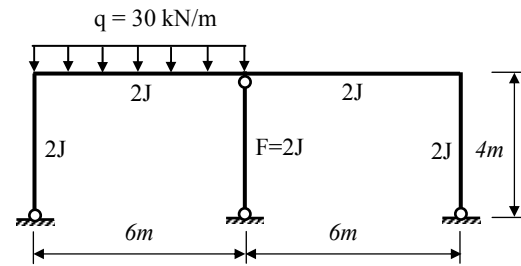
10. Xác định chuyển vị đứng tại K, chuyển vị góc xoay tại D cho các hệ trên hình 5.80, hình 5.82, hình 5.83, hình 5.85.



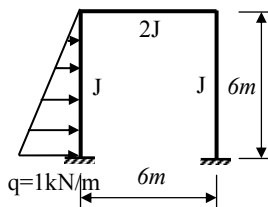
Hình 5.63



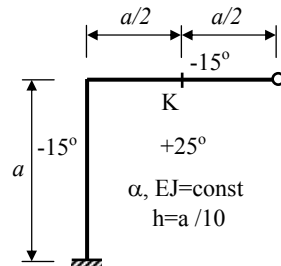
Hình 5.64



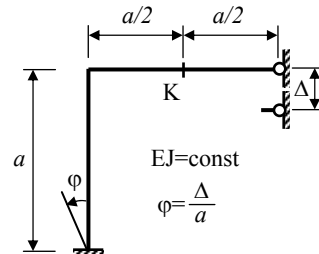
Hình 5.65



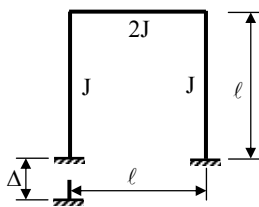
Hình 5.66



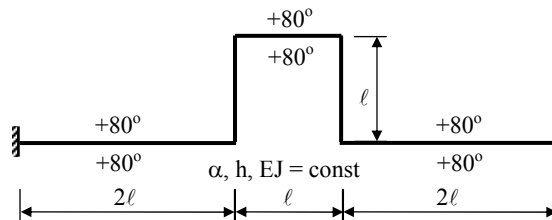
Hình 5.67



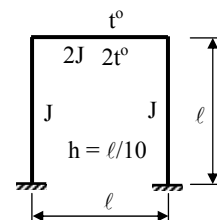
Hình 5.68



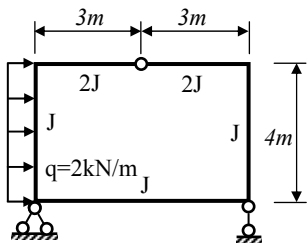
Hình 5.69



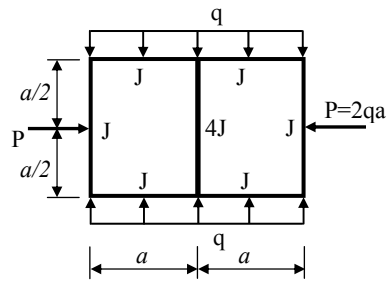
Hình 5.70



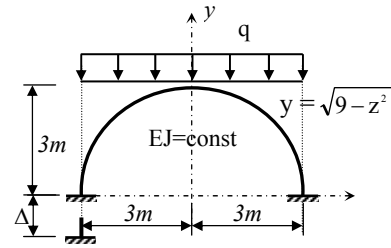
Hình 5.71



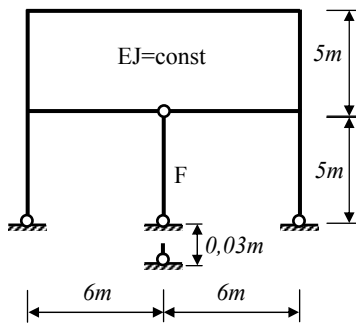
Hình 5.72



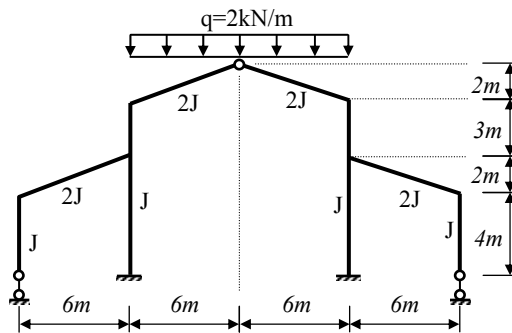
Hình 5.73



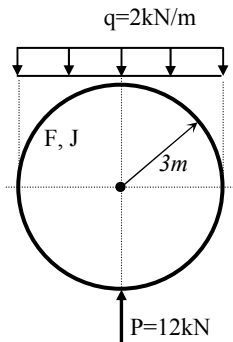
Hình 5.74



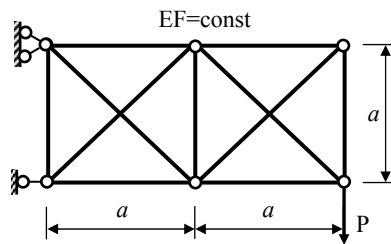
Hình 5.75



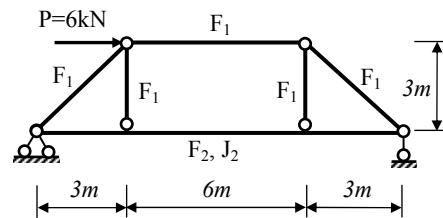
Hình 5.76



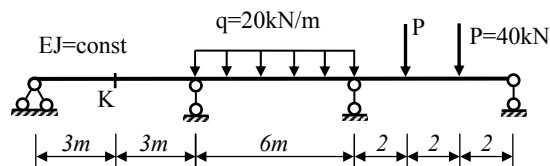
Hình 5.77



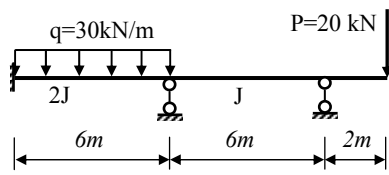
Hình 5.78



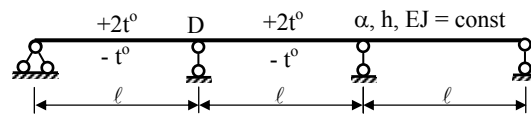
Hình 5.79



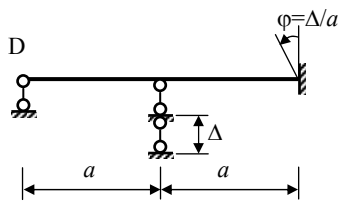
Hình 5.80



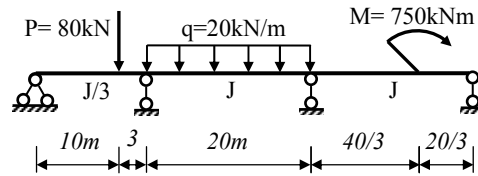
Hình 5.81



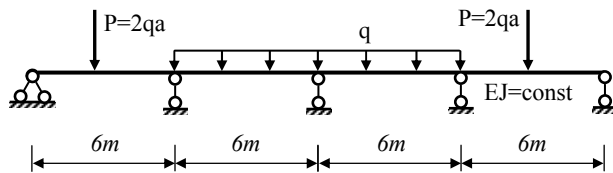
Hình 5.82



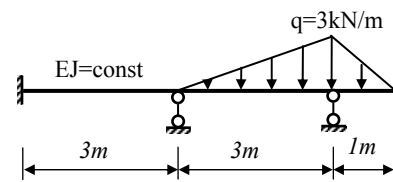
Hình 5.83



Hình 5.84



Hình 5.85



Hình 5.86

CHƯƠNG 6

TÍNH HỆ SIÊU TĨNH PHẪNG THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

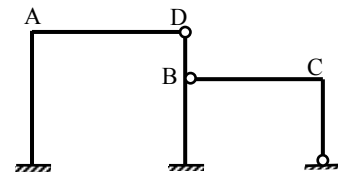
6.1. KHÁI NIỆM

Phương pháp chuyển vị cũng như phương pháp lực, là các phương pháp cơ bản để tính hệ siêu tĩnh. Phương pháp lực áp dụng tổng quát cho các hệ dầm, khung, vòm, dàn và hệ liên hợp, còn phương pháp chuyển vị áp dụng phù hợp cho hệ dầm và khung. Ngoài hai phương pháp cơ bản trên để tính hệ siêu tĩnh còn có các phương pháp khác như phương pháp hỗn hợp, liên hợp, phân phối mô men... Khi tính toán hệ siêu tĩnh điều quan trọng là biết chọn phương pháp tính nào để đạt kết quả nhanh nhất và việc chọn thường xuất phát từ số lượng ẩn số của mỗi phương pháp.

Phương pháp lực chọn ẩn số là phản lực liên kết hoặc nội lực ở những tiết diện nào đó, còn phương pháp chuyển vị, ẩn được chọn là chuyển vị tại hai đầu của các đoạn thanh của hệ. Có các chuyển vị này (theo phương pháp thông số ban đầu hay phương pháp lực đã trình bày ở Chương 5), ta hoàn toàn xác định được nội lực và chuyển vị của từng đoạn thanh. Các bước để xác định biểu đồ mô men uốn của phương pháp lực như thế nào thì trong phương pháp chuyển vị cũng như vậy (xác định số ẩn, lập hệ cơ bản, đặt ẩn số, xác định và giải hệ phương trình chính tắc, dùng phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ mô men uốn). Các yêu cầu còn lại như xác định lực cắt, lực dọc, chuyển vị đã trình bày trong Chương 5

6.1.1. Các giả thiết

Ngoài các giả thiết chung đã biết, trong phương pháp chuyển vị để giảm số ẩn số ta chấp nhận thêm ba giả thiết. Trong hệ thanh các đầu thanh qui tụ tại các nút. Nút có thể là nút cứng, như A, B, C hoặc nút khớp như D của *hình 6.1*.



Hình 6.1

Giả thiết 1: Coi các nút cứng trong hệ là tuyệt đối cứng, do đó các thanh qui tụ tại nút đều xoay một góc như nhau và gọi là góc xoay của nút.

Giả thiết 2: Trong khung và dầm có thể bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng do lực cắt, lực dọc so với ảnh hưởng của biến dạng uốn (giả thiết này không đúng với nguyên nhân nhiệt độ).

Giả thiết 3: Trước và sau biến dạng, khoảng cách giữa hai đầu một đoạn thanh theo phương ban đầu của thanh là không đổi (giả thiết này không đúng với nguyên nhân nhiệt độ).

6.1.2. Xác định số ẩn chuyển vị của một hệ

Đó chính là xác định số chuyển vị góc của các nút cứng và chuyển vị thẳng độc lập của các nút. Nếu gọi n_g là số chuyển vị góc của các nút cứng và n_t là số chuyển vị thẳng độc lập của các nút thì số chuyển vị của một hệ sẽ là:

$$n = n_g + n_t \quad (6-1)$$

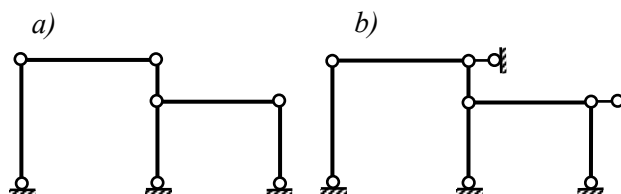
Từ giả thiết 1 thì n_g chính bằng số nút cứng của hệ

Xác định số ẩn n_t có khó khăn hơn. Phân tích chuyển dịch của các nút trên cơ sở giả thiết 3 hoặc xác định theo phương pháp thực hành sau đây:

Thay các nút cứng và ngàm cứng của hệ siêu tĩnh đã cho bằng các khớp ta sẽ nhận được hệ khớp.

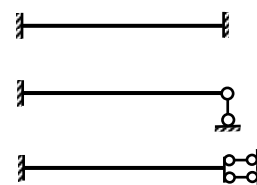
- Nếu hệ khớp bất biến hình thì $n_t = 0$
- Nếu hệ khớp biến hình thì n_t sẽ bằng số liên kết thanh chống thêm vào vừa đủ để cho hệ khớp trở thành hệ bất biến hình (tức các nút được cố định).

Với hệ đã cho trên *hình 6.1*, sau khi thay tất cả các nút cứng và ngàm bằng khớp, ta có hệ khớp như *hình 6.2a*. Hệ khớp biến hình, sau khi thêm hai thanh chống như *hình 6.2b* hệ bất biến hình đủ liên kết nên số chuyển vị thẳng độc lập của nút $n_t = 2$.



Hình 6.2

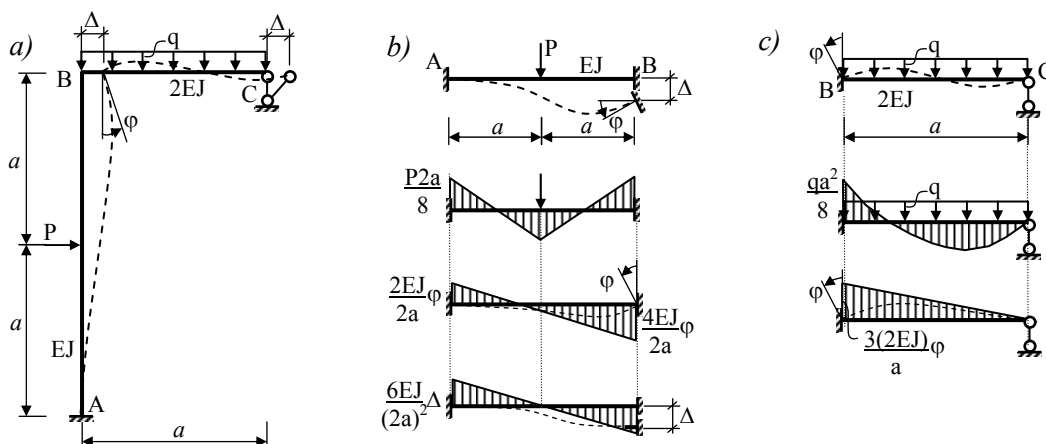
Ta biết rằng các dầm siêu tĩnh một nhịp có $EJ = \text{const}$ như *hình 6.3*, chịu tác dụng của tải trọng, nhiệt độ và chuyển vị của liên kết tựa (P, t, Δ), bằng phương pháp lực ta hoàn toàn xác định được phản lực và nội lực và lập thành bảng tra sẵn (xem *bảng 6-1*). Hệ siêu tĩnh trên *hình 6.4a*, nếu ta biết thêm chuyển vị góc và chuyển vị thẳng của nút B (φ và Δ) thì biểu đồ mô men trong 2 thanh AB, BC có thể vẽ theo cách tra *Bảng 6-1*.



Hình 6.3

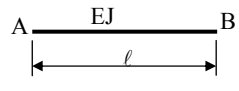
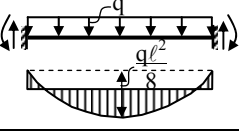
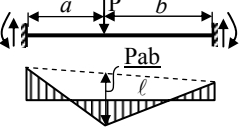
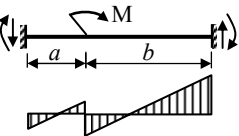
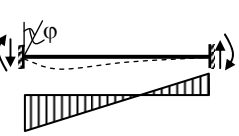
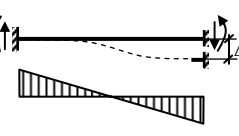
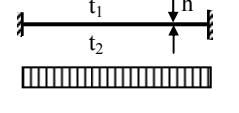
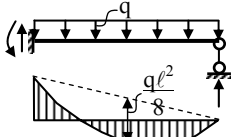
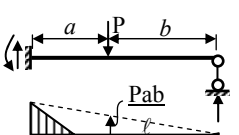
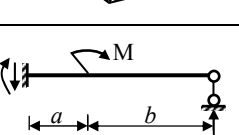
- Dầm hai đầu ngàm cứng chiều dài $2a$, độ cứng EJ chịu tác dụng đồng thời của 3 nguyên nhân P, Δ, φ (*hình 6.4b*)

- Dầm một đầu ngàm cứng, một đầu khớp (thanh chống) có chiều dài a , độ cứng $2EJ$, chịu tác dụng đồng thời của 2 nguyên nhân q và φ (*hình 6.4c*).

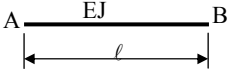
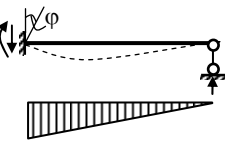
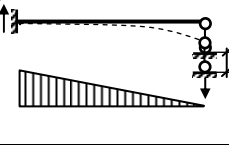
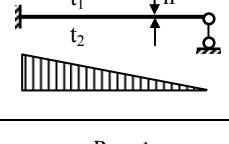
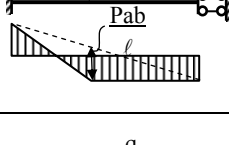
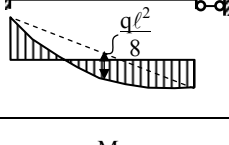
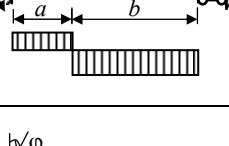
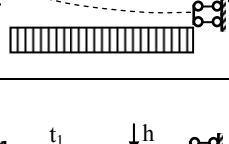
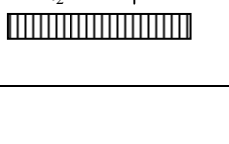


Hình 6.4

Bảng 6-1

TT		M_A	M_B	Q_A	Q_B
1		$-\frac{q\ell^2}{12}$	$-\frac{q\ell^2}{12}$	$\frac{q\ell}{2}$	$-\frac{q\ell}{2}$
2		$-\frac{Pab^2}{\ell^2}$ $(-\frac{P\ell}{8})$	$-\frac{Pab^2}{\ell^2}$ $(-\frac{P\ell}{8})$	$\frac{Pb^2(\ell+2a)}{\ell^3}$ $(\frac{P}{2})$	$-\frac{Pa^2(3\ell-2a)}{\ell^3}$ $(-\frac{P}{2})$
3		$\frac{Mb}{\ell^2}(2a-b)$ $(\frac{M}{4})$	$-\frac{Ma}{\ell^2}(2b-a)$ $(-\frac{M}{4})$	$-\frac{6ab}{\ell^3}M$ $(-\frac{3M}{2\ell})$	$-\frac{6ab}{\ell^3}M$ $(-\frac{3M}{2\ell})$
4		$\frac{4EJ}{\ell}\varphi$	$-\frac{2EJ}{\ell}\varphi$	$-\frac{6EJ}{\ell^2}\varphi$	$-\frac{6EJ}{\ell^2}\varphi$
5		$-\frac{6EJ}{\ell^2}\Delta$	$\frac{6EJ}{\ell^2}\Delta$	$\frac{12EJ}{\ell^3}\Delta$	$\frac{12EJ}{\ell^3}\Delta$
6		$-\frac{\alpha}{h}(t_2-t_1)EJ$	$-\frac{\alpha}{h}(t_2-t_1)EJ$	0	0
7		$-\frac{q\ell^2}{8}$	0	$\frac{5}{8}q\ell$	$-\frac{3}{8}q\ell$
8		$-\frac{Pab}{2\ell^2}(2\ell-a)$ $(-\frac{3}{16}P\ell)$	0 (0)	$\frac{Pb}{2\ell}(3-\frac{b^2}{\ell^2})$ $(\frac{11}{16}P)$	$-\frac{Pa^2}{2\ell^2}(3-\frac{a}{\ell})$ $(-\frac{5}{16}P)$
9		$\frac{M}{2}(1-3\frac{b^2}{\ell^2})$ $(\frac{M}{8})$	0 (0)	$-\frac{3M}{2\ell}(1-\frac{b^2}{\ell^2})$ $(-\frac{9M}{8\ell})$	$-\frac{3M}{2\ell}(1-\frac{b^2}{\ell^2})$ $(-\frac{9M}{8\ell})$

(tiếp theo) Bảng 6-1

TT		M_A	M_B	Q_A	Q_B
10		$\frac{3EJ}{\ell} \varphi$	0	$-\frac{3EJ}{\ell^2} \varphi$	$-\frac{3EJ}{\ell^2} \varphi$
11		$-\frac{3EJ}{\ell^2} \Delta$	0	$\frac{3EJ}{\ell^3} \Delta$	$\frac{3EJ}{\ell^3} \Delta$
12		$-\frac{3\alpha}{2h} (t_2 - t_1) EJ$	0	$\frac{3\alpha}{2h} (t_2 - t_1) \frac{EJ}{\ell}$	$\frac{3\alpha}{2h} (t_2 - t_1) \frac{EJ}{\ell}$
13		$\frac{Pa}{2} (2 - \frac{a}{\ell})$ $(-\frac{3}{8} P \ell)$	$\frac{Pa^2}{2\ell}$ $(\frac{P\ell}{8})$	P	0
14		$-\frac{q\ell^2}{3}$	$\frac{q\ell^2}{6}$	$q\ell$	0
15		$-\frac{Mb}{\ell}$ $(-\frac{M}{2})$	$\frac{Ma}{\ell}$ $(\frac{M}{2})$	0	0
16		$\frac{EJ}{\ell} \varphi$	$\frac{EJ}{\ell} \varphi$	0	0
17		$-\frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) EJ$	$-\frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) EJ$	0	0

6.2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ TÍNH HỆ SIÊU TĨNH

CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

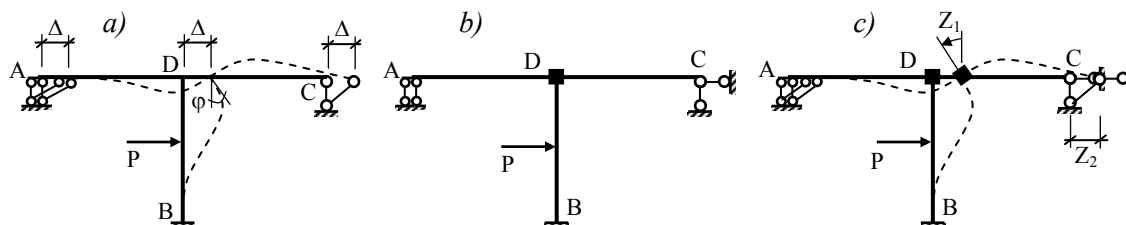
Nguyên lý tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp chuyển vị cũng như phương pháp lực: nội lực của hệ siêu tĩnh đã cho được xác định qua nội lực của hệ cơ bản tương đương (tương đương về lực và chuyển vị) với hệ siêu tĩnh. Trong phương pháp chuyển vị ẩn là chuyển vị nút, hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh thêm liên kết, bản chất của phương trình cơ bản là phản lực.

6.2.1. Hệ cơ bản

Cũng như phương pháp lực, khi tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp chuyển vị ta không tính trực tiếp trên hệ đã cho mà tính trên một hệ khác đã biết cách tính gọi là hệ cơ bản.

Khác với phương pháp lực, khi lập hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị, ta đặt thêm vào các nút của hệ các liên kết để ngăn cản hết tất cả các chuyển vị còn lại của các nút có trong hệ, nhằm biến các thanh trong hệ thành các dầm một nhịp độc lập tương tự như các thanh dầm trong *bảng 6-1*.

Để ngăn cản chuyển vị xoay của nút cứng ta đưa vào các liên kết chốt hay liên kết “ngàm”. Liên kết này chỉ có tác dụng ngăn cản xoay của nút mà vẫn cho phép nút có chuyển vị thẳng, do đó trong liên kết chỉ phát sinh một phản lực mô men, vì vậy liên kết “ngàm” còn được gọi là liên kết mô men. Số liên kết mô men được thêm vào bằng số nút cứng có trong hệ. Với kết cấu cho trên *hình 6.5a*, nút D được thêm vào một liên kết mô men và biểu diễn liên kết này như *hình 6.5b*.



Hình 6.5

Để ngăn cản chuyển vị thẳng của nút, ta đặt vào nút liên kết thanh chống. Loại liên kết này chỉ có tác dụng ngăn cản chuyển vị thẳng mà vẫn cho phép nút cứng xoay được, do đó trong liên kết chỉ phát sinh một phản lực dọc theo thanh chống. Số liên kết thanh thêm vào bằng số chuyển vị thẳng độc lập của các nút. Trên *hình 6.5a* nút cứng D có chuyển vị góc φ và chuyển vị thẳng ngang là Δ , để ngăn cản hai chuyển vị này ta thêm liên kết mô men tại nút D và liên kết thanh đặt tại C như *hình 6.5b* và đó là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị.

Trên *hình 6.5b* gồm các thanh AD, BD giống như sơ đồ dầm hai đầu ngàm cứng (ngàm trượt tại A không có chuyển vị ngang nên hoàn toàn như ngàm cứng); thanh DC

giống như sơ đồ dầm một đầu ngàm cứng một đầu khớp (liên kết mô men tại D không có chuyển vị đứng và ngang nên hoàn toàn có thể coi như ngàm cứng).

Liên kết thanh chống theo phương ngang đặt tại C hoặc A hoặc nút D đều có cùng một tác dụng là ngăn cản chuyển vị ngang của nút D, do đó với 3 cách đặt thanh chống hệ cơ bản vẫn chỉ là một. Như vậy, với cách thêm đầy đủ các liên kết thì hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là duy nhất (khác với hệ cơ bản của phương pháp lực).

6.2.2. Hệ phương trình chính tắc

Hệ cơ bản trên *hình 6.5b* khác với hệ siêu tĩnh đã cho trên *hình 6.5a* là chưa có lực tác dụng và không có các chuyển vị Δ và φ của nút D. Để hệ cơ bản giống với hệ siêu tĩnh đã cho ta đặt tải trọng P, cho liên kết mô men xoay cưỡng bức một góc Z_1 và cho liên kết thanh chống dịch chuyển cưỡng bức một đoạn Z_2 như *hình 6.5c*. Vì chưa biết chiều thực của Z_1, Z_2 nên ta chọn chiều quay của Z_1 , chiều dịch chuyển của Z_2 là tùy ý.

Nếu Z_1, Z_2 đúng bằng φ, Δ thì hệ cơ bản hoàn toàn tương đương với hệ đã cho và nội lực của hệ cơ bản tương đương chính là nội lực cần tìm của hệ siêu tĩnh *hình 6.5a*. Thực tế chuyển vị của nút D là chưa biết nên Z_1, Z_2 là hai ẩn số cần phải tìm. Điều kiện để tìm Z_1, Z_2 là phản lực mô men tại liên kết D và phản lực thanh chống thêm vào trên hệ cơ bản tương đương phải bằng phản lực tương ứng trên hệ ban đầu tức bằng không. Ta có 2 phương trình cơ bản:

$$\begin{aligned} R_{1(Z_1, Z_2, P)} &= 0 \\ R_{2(Z_1, Z_2, P)} &= 0 \end{aligned} \quad (6-2)$$

Phương trình cơ bản tổng quát của hệ có n ẩn số tại liên kết thêm vào thứ k có dạng:

$$R_{k(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (6-3)$$

Hệ phương trình (6-3) gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết (6-3) cụ thể hơn:

$$R_{k(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P)} = R_{kZ_1} + R_{kZ_2} + \dots + R_{kZ_n} + R_{kP} = 0$$

Trong đó:

- R_{kZ_m} là phản lực tại liên kết thêm vào thứ k trên hệ cơ bản do ẩn chuyển vị tại liên kết thêm vào thứ m là Z_m gây ra

- R_{kP} là phản lực tại liên kết thêm vào thứ k trên hệ cơ bản do tải trọng đã cho gây ra trên hệ cơ bản.

Nếu gọi r_{km} là phản lực đơn vị tại liên kết thêm vào thứ k do ẩn chuyển vị $Z_m=1$ gây ra trên hệ cơ bản ta có :

$$R_{kZ_m} = r_{km} Z_m$$

Hệ phương trình cơ bản (6-3) có thể viết lại như sau:

$$r_{k1} Z_1 + r_{k2} Z_2 + \dots + r_{kn} Z_n + R_{kP} = 0 \quad (6-4)$$

Cho $k=1,2,\dots,n$ ta có hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0 \\ &\dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0 \end{aligned} \quad (6-5)$$

Trong đó:

r_{kk} gọi là hệ số chính

r_{km} gọi là hệ số phụ

R_{kP} gọi là số hạng tự do

Các hệ số và số hạng tự do là phản lực, sẽ mang dấu dương khi nó cùng chiều với chiều của ẩn chuyển vị và ngược lại. Các hệ số chính r_{kk} luôn luôn dương, còn các hệ số phụ và số hạng tự do có thể dương, âm và bằng không.

Hệ phương trình chính tắc (6-5) có thể biểu diễn gọn dưới dạng ma trận:

$$[K]\{\Delta\} + \{R\} = 0$$

Trong đó

$[K]$ là ma trận các hệ số

$\{\Delta\}$ là véc tơ các ẩn chuyển vị

$\{R\}$ là véc tơ các số hạng tự do

6.2.3. Xác định các hệ số và số hạng tự do

Các hệ số r_{km} (với $m=1,2,\dots,n$) và số hạng tự do R_{kP} của phương trình chính tắc thứ k là phản lực tại liên kết thêm vào thứ k do lần lượt liên kết thêm vào thứ $1,2,\dots,n$ chuyển vị cường bức bằng đơn vị và do tải trọng đã cho gây ra trên hệ cơ bản. Các phản lực trên có thể là phản lực mô men (nếu liên kết thêm vào thứ k là liên kết mô men), phản lực thẳng (nếu liên kết thêm vào thứ k là liên kết thanh). Có nhiều phương pháp xác định chúng, song vì nó là phản lực nên đơn giản nhất là sử dụng các điều kiện cân bằng bộ phận.

Sau khi đã vẽ đúng các biểu đồ mô men uốn do các nguyên nhân $Z_m=1$ và tải trọng gây ra trên hệ cơ bản (bằng cách tra *bảng 6-1*) ta dễ dàng xác định các phản lực trên như sau:

- Nếu liên kết thêm vào thứ k là liên kết mô men thì r_{km} và R_{kP} được xác định từ điều kiện cân bằng mô men tại nút K của các biểu đồ M_m (do $Z_m=1$ gây ra trên hệ cơ bản) và M_P^0 (do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản). Chiều dương của r_{km} và R_{kP} lấy theo chiều xoay giả thiết của ẩn Z_K .

- Nếu liên kết thêm vào thứ k là liên kết thanh chống thì r_{km} , R_{kP} được xác định từ phương trình cân bằng hình chiếu của một phần kết cấu trên hệ cơ bản lần lượt do $Z_m=1$ và do tải trọng đã cho gây ra. Chiều dương của các phản lực trên lấy theo chiều dịch chuyển của ẩn Z_K . Từ các biểu đồ M_m và M_P^0 đã có, ta cần xác định thêm lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia trong phương trình cân bằng hình chiếu.

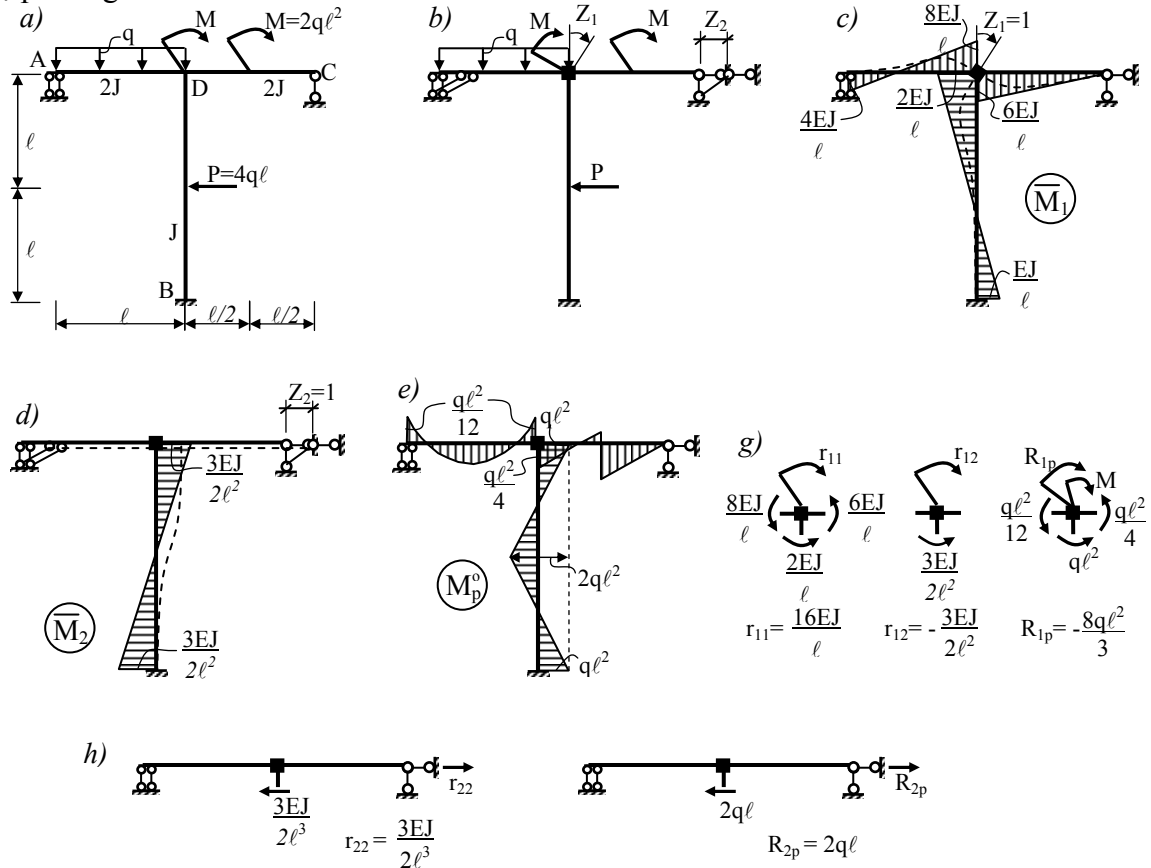
Từ hệ siêu tĩnh trên *hình 6.6a* ta có hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

Hình 6.6b,c,d,e là hệ cơ bản tương đương, vẽ biểu đồ mô men tra bảng lần lượt do $Z_1=1, Z_2=1$, tải trọng (P, q) gây ra trên hệ cơ bản

Hình 6.6g,h thể hiện cách xác định các hệ số r_{11}, r_{22}, r_{12} và số hạng tự do R_{1P}, R_{2P} của hệ phương trình chính tắc.



Hình 6.6

6.2.4. Vẽ biểu đồ mô men uốn

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc, tìm được các ẩn chuyển vị $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, ta có thể xác định mô men uốn cuối cùng theo nguyên lý cộng tác dụng đã biết:

$$M_P = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \overline{M}_n \cdot Z_n + M_P^0 \quad (6-6)$$

Trong đó:

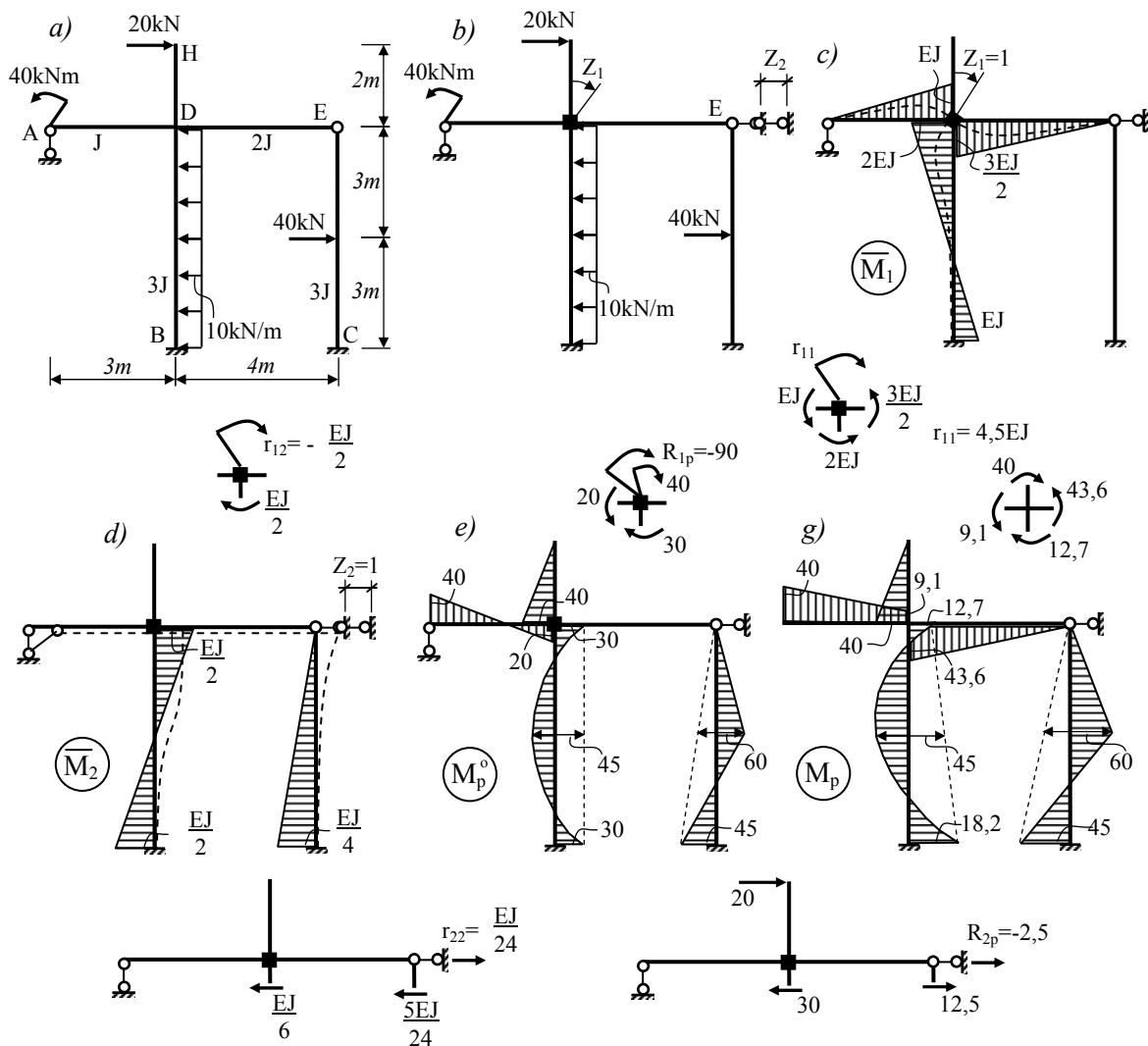
$\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n, M_P^0$ là các biểu đồ mô men đơn vị và biểu đồ do tải trọng trên hệ cơ bản (các biểu đồ này đã có sẵn).

Thực hiện (6-6) tại hai đầu của từng đoạn thanh sau đó nối thẳng rồi treo biểu đồ sẽ có biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh đã cho. Từ mô men suy ra lực cắt, từ lực cắt suy ra lực dọc như đã trình bày trong phương pháp lực.

Để kiểm tra biểu đồ mô men uốn cuối cùng theo phương pháp chuyển vị ta có thể chỉ cần xét dạng, xét cân bằng mô men nút, xét cân bằng bộ phận là đủ.

6.2.5. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 6-1: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho khung trên hình 6.7a.



Hình 6.7

a) Xác định số ẩn, lập hệ cơ bản, đặt ẩn số:

Khung đã cho có một ẩn chuyển vị góc và một ẩn chuyển vị thẳng

$$n = n_g + n_t = 1 + 1 = 2$$

Lập hệ cơ bản, đặt ẩn số như hình 6.7b.

b) Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (\bar{M}_p^0)$ và xác định các hệ số, số hạng tự do như hình 6.7c,d,e.

- Hệ phương trình dạng số:

$$4,5EJ.Z_1 - 0,5EJ.Z_2 - 90 = 0$$

$$-0,5EJ.Z_1 + 0,208EJ.Z_2 - 2,5 = 0$$

$$\rightarrow Z_1 = \frac{29,09}{EJ} (\text{Rad}) \quad Z_2 = \frac{81,82}{EJ} (\text{m})$$

Vẽ biểu đồ mô men bằng bảng cộng tác dụng, kết quả như hình 6-7g

c) Kiểm tra biểu đồ $(\bar{M}_p)$:

- Dạng hợp lý

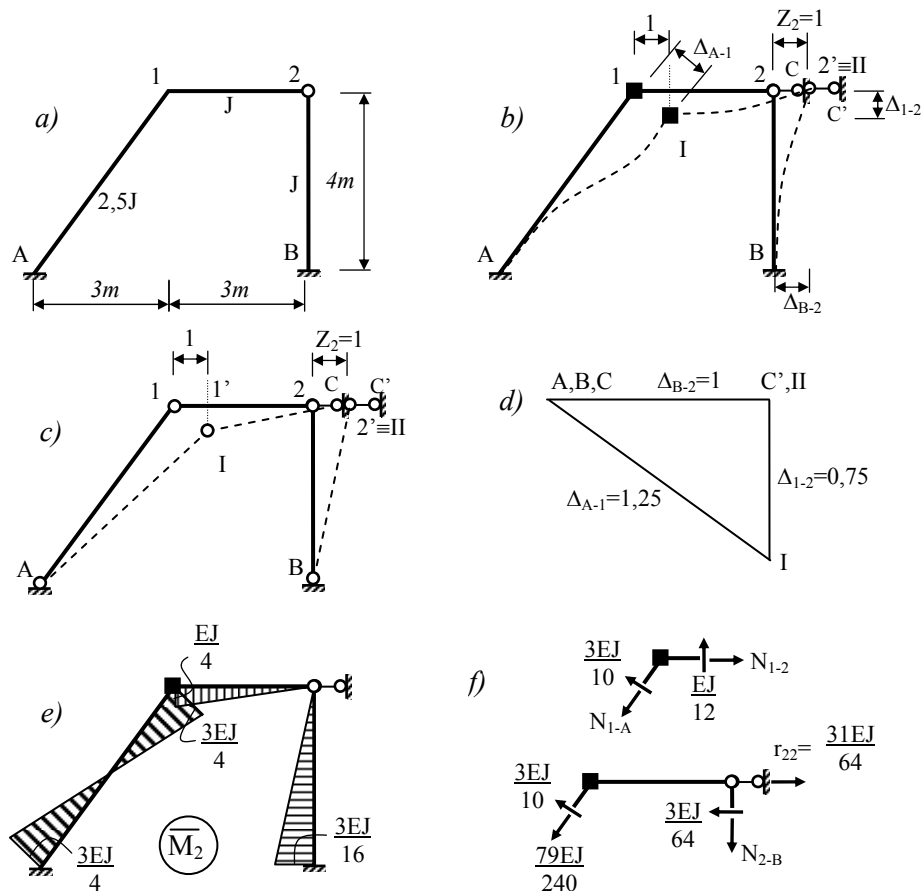
- Nút D cân bằng mô men: $\Sigma M_D = 40 + 12,7 - 43,6 - 9,1 = 0$

Phân vẽ biểu đồ lực cắt từ mô men, biểu đồ lực dọc từ lực cắt và tính toán chuyển vị đã trình bày trong Chương 5.

6.3. CÁCH XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ THẲNG TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐẦU THANH THEO PHƯƠNG VUÔNG GÓC VỚI TRỤC THANH TRONG HỆ CÓ CÁC THANH ĐỨNG KHÔNG SONG SONG

Trong quá trình vẽ biểu đồ mô men cuối cùng nếu hệ có chuyển vị thẳng, thì ta phải vẽ biểu đồ mô men do các chuyển vị thẳng bằng đơn vị gây ra trên hệ cơ bản. Trong trường hợp hệ có các thanh đứng song song (Hình 6.7) thì các nút ở đầu thanh đứng cùng có một chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục của thanh đứng, còn các thanh ngang đều di chuyển tịnh tiến nên không sinh ra chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh; cho nên việc vẽ biểu đồ đơn vị cũng như dùng phương trình cân bằng hình chiếu để xác định các hệ số, số hạng tự do đều rất dễ dàng. Song còn có những hệ thanh đứng không song song nhau như trên hình 6.8, khi ảnh chuyển vị thẳng tác dụng trên hệ cơ bản thì các thanh có biến dạng lại có phương không vuông góc với phương của ảnh. Bởi vậy muốn vẽ biểu đồ mô men đơn vị ta phải tìm xem dưới tác dụng của chuyển vị thẳng cường độ đơn vị đã cho, từng thanh của hệ sẽ có chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh là bao nhiêu để tra bảng ra biểu đồ đơn vị.

Xét hệ trên hình 6.8a: trên hệ cơ bản (Hình 6.8b) khi liên kết thanh 2-c có chuyển vị thẳng cường độ $Z_2=1$ thì nút 1 không dịch chuyển ngang tới vị trí 1' mà tới vị trí I, làm cho các thanh trong hệ lần lượt có các chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh là Δ_{A-1} ; Δ_{1-2} và Δ_{B-2} ; Chúng đều có trị số khác với ảnh chuyển vị Z_2 . Để vẽ biểu đồ mô men đơn vị $\bar{M}_2$ ta cần phải xác định các chuyển vị tương đối trên. Tương tự như trước đây ta có thể xác định chúng trên hệ khớp tương ứng khi liên kết thanh 2-c có chuyển vị cường độ $Z_2=1$ (Hình 6.8c)



Hình 6.8

Khi liên kết thanh 2-c có chuyển vị cưỡng bức $Z_2 = 1$ thì hình chiếu chuyển vị của nút 1 và 2 trên phương ngang là các đoạn 1-1' và 2-2' cũng bằng 1. Mặt khác các thanh A-1 và B-2 chuyển động, do các điểm A,B cố định nên điểm 1 và 2 di động theo 1-I và 2-II có phương vuông góc với trục thanh ban đầu. Vì vậy điểm I là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh A-1 và 1-2 lần lượt kẻ từ 1 và 1'. Điểm II là giao điểm vuông góc với hai thanh B-2 và 2-1 lần lượt kẻ từ 2 và 2' ($II \equiv 2'$). Xác định được vị trí các điểm I và II ta sẽ tìm được chuyển vị thẳng tương đối giữa các đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh của mỗi thanh trong hệ.

Để dễ dàng xác định các chuyển vị trên ta có thể áp dụng kiến thức Cơ học lý thuyết để phân tích vận tốc của các điểm trong cơ cấu và vẽ sơ đồ chuyển vị các điểm nút như sau (Hình 6.8d):

Lấy một điểm tùy ý tượng trưng cho tất cả các điểm nối cố định với nút A, B, C. Khi liên kết thanh 2-c có chuyển vị cưỡng bức $Z_2 = c-c' = 1$, tức điểm cố định C dời ra vị trí cố định mới C', trên sơ đồ kẻ c-c' song song với chiều tương ứng và bằng một đơn vị theo tỷ xích đã chọn. Chuyển vị của điểm 2 sinh ra do hai thanh 2-C' và 2-B quay xung quanh C' và B, nên vị trí mới của 2 là II, trên sơ đồ chuyển vị là giao điểm của hai đường vuông góc

với hai thanh 2-C và 2-B, kể từ C' và B (C' $\equiv$ 2 $\equiv$ II). Đối với thanh 1-2, lúc này điểm cố định mới là II; Do đó điểm I tương ứng cho điểm 1 trên sơ đồ chuyển vị là giao điểm của hai đường thẳng vuông góc với 2 thanh 1-A và 1-2 kể từ A và II. Trên sơ đồ chuyển vị, các đoạn A-1, I-II, II-b lần lượt là các chuyển vị tương đối Δ_{A-1} , Δ_{1-2} và Δ_{B-2} giữa hai đầu thanh của các đoạn thanh A-1; 1-2, 2-B. Với ví dụ trên $\Delta_{A-1} = 1,25$; $\Delta_{1-2} = 0,75$ và $\Delta_{B-2} = 1$. Biểu đồ $\overline{M}_2$ chỉ ra trên hình 6.8e.

Để tính các hệ số là phản lực thẳng trong liên kết thanh đã thêm, không thể lập một phương trình cân bằng để tính trực tiếp được vì có thêm thành phần lực dọc trong thanh.

Chẳng hạn, để tính r_{22} trước hết tách nút 1 của biểu đồ M_2 và từ phương trình hình chiếu lên phương đứng tìm được lực dọc trong thanh 1-A: $N_{1A} = \frac{79}{240}EJ$, sau đó có thể dùng mặt cắt qua hai thanh đứng và dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang ta tìm được r_{22} (Hình 6-8f).

6.4. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH KHI CÓ CHUYỂN VỊ GỐI TỰA

Áp dụng nguyên lý của phương pháp chuyển vị đã nêu trên, khi tính hệ siêu tĩnh có chuyển vị gối tựa (Δ), phương trình chính tắc thứ k có dạng :

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kn}Z_n + R_{k\Delta} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6-7)$$

Cách xác định các hệ số r_{km} đã trình bày ở 6.2. Vấn đề mới cần giải quyết ở đây là cách vẽ biểu đồ $(\overline{M}_\Delta^0)$ (do gối tựa dời chỗ gây ra trên hệ cơ bản) để từ đó xác định số hạng tự do $R_{k\Delta}$.

$R_{k\Delta}$ là phản lực tại liên kết thêm vào thứ k do chuyển vị gối tựa gây ra trên hệ cơ bản. $R_{k\Delta}$ cũng được xác định từ cân bằng bộ phận của biểu đồ $(\overline{M}_\Delta^0)$

Giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số Z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) và vẽ biểu đồ mô men uốn của hệ đã cho bằng phương pháp cộng tác dụng :

$$(\overline{M}_\Delta) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + \dots + (\overline{M}_n)Z_n + (\overline{M}_\Delta^0) \quad (6-8)$$

Sau đây ta xét một ví dụ minh họa từ hệ siêu tĩnh trên hình 6.9a: gối C bị lún một đoạn đã biết là Δ và ngàm B bị xoay một góc là $\varphi = \frac{\Delta}{\ell}$. Cần vẽ biểu đồ M_Δ theo EJ, ℓ , Δ

Ẩn số của phương pháp là 2, hệ cơ bản tương đương như hình 6.9b.

Hệ phương trình chính tắc :

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1\Delta} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0$$

Tra bảng biểu đồ $(\overline{M}_1)$, $(\overline{M}_2)$ và xác định các hệ số r_{11} , r_{22} , r_{12} đã có ở hình 6.6c,d,g,h. Tra bảng biểu đồ $(\overline{M}_\Delta^0)$ và xác định số hạng tự do $R_{1\Delta}$, $R_{2\Delta}$ như hình 6.9c,d.

- Nhiệt độ thay đổi như nhau dọc theo chiều dài từng thanh của hệ.
- Nhiệt độ thay đổi bậc nhất theo chiều cao tiết diện.

Với một thanh bất kỳ, nếu ký hiệu sự thay đổi nhiệt độ của thớt trên là t_1^0 còn thớt dưới là t_2^0 , thì biến dạng do sự thay đổi vì nhiệt của thanh bao giờ cũng có thể xem tổ hợp của hai biến dạng cơ bản:

+ Trục thanh bị uốn cong và phát sinh mômen uốn do sự thay đổi nhiệt độ chênh lệch ở hai thớt: thớt trên và thớt dưới (Δt).

+ Trục thanh bị dãn ra (hay co lại) do sự thay đổi đều của nhiệt độ dọc theo trục thanh (t_c^0). Trong trường hợp tiết diện thanh đối xứng với trục x thì: $t_c^0 = \frac{t_2^0 - t_1^0}{2}$. Sự thay đổi chiều dài các thanh sẽ làm cho các nút của hệ cơ bản chuyển vị, do đó các thanh bị uốn cong và phát sinh mômen uốn.

Như vậy, biểu đồ (M_t^0) do nhiệt độ thay đổi gây ra trên hệ cơ bản chính là tổng của hai biểu đồ mô men gây ra do hai tác dụng:

+ Tác dụng của sự thay đổi không đều nhiệt độ giữa hai thớt của thanh gây nên $(M_t^{0'})$ trên hệ cơ bản.

+ Tác dụng của sự thay đổi đều nhiệt độ làm dãn (hay co) các thanh gây nên $(M_t^{0''})$ trên hệ cơ bản.

Nhiệt độ thay đổi không đều giữa hai thớt $\Delta t = t_1^0 - t_2^0$ làm trục thanh bị uốn cong mà không bị co (dãn) nên trong hệ cơ bản các nút không có chuyển vị thẳng, các thanh trở thành các dầm độc lập với nhau và bị uốn do Δt trong từng thanh gây ra. Tác dụng của sự thay đổi không đều nhiệt độ giữa hai thớt của thanh gây nên biểu đồ $(M_t^{0'})$. Dùng *bảng 6-1* ta vẽ được $(M_t^{0'})$. Với khung trên *hình 6.10*, biểu đồ $(M_t^{0'})$ do nhiệt độ thay đổi không đều trên hệ cơ bản vẽ được trên *hình 6.10c*.

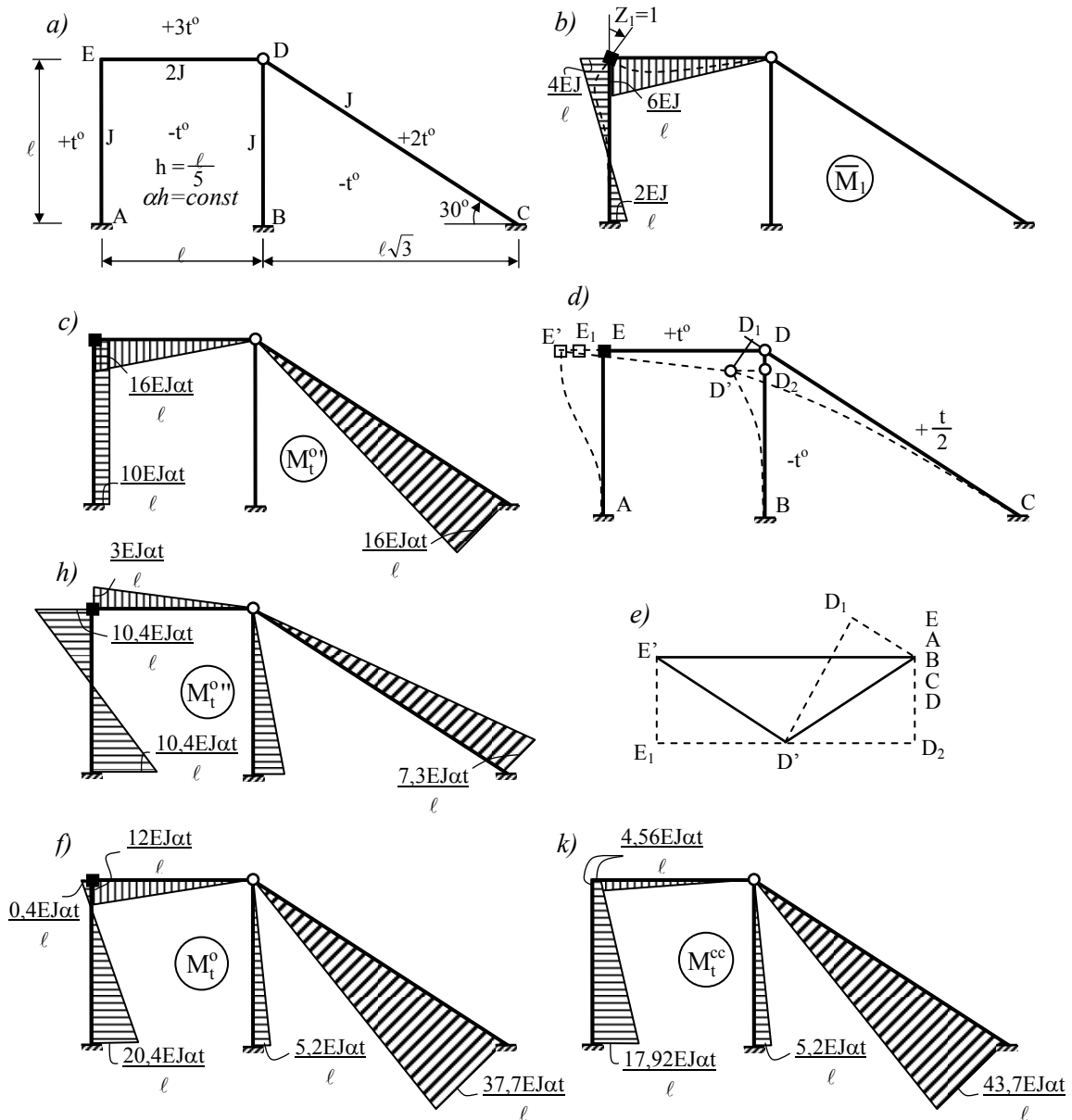
Nhiệt độ thay đổi tại thớt trục t_c^0 làm cho các thanh bị dãn (hay co). Do chiều dài các thanh thay đổi nên các nút có chuyển vị thẳng, từ đó gây nên chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh và tạo ra mô men uốn trong các thanh.

Giả thiết các thanh của khung trên *hình 6.10a* đều có tiết diện đối xứng nên nhiệt độ tại thớt trục của mỗi thanh được tính và ghi trên từng thanh tương ứng (*Hình 6.10d*). Do trục thanh CD dãn dài $\Delta \ell_{(CD)t} = \alpha t \ell_{CD}$ và thanh BD bị co ngắn $\Delta \ell_{(BD)t} = \alpha t \ell_{BD}$, nên nút D chuyển vị tới D'. Khi D dịch chuyển, nút E cũng bị đẩy ngang tới E₁ ($EE_1 = D'D_2$), tiếp đó thanh ED bị dãn dài với $\Delta \ell_{(ED)t} = \alpha t \ell_{ED}$ nên nút E bị dịch thêm đoạn E'E₁ và có vị trí mới là E'. Từ hình vẽ ta thấy chuyển vị tương đối giữa hai đầu mỗi thanh $\Delta_{CD} = D'D_1$;

$\Delta_{BD} = D'D_2$; $\Delta_{ED} = DD_2$; $\Delta_{AE} = D'D_2 + E'E_1$. Căn cứ vào các chuyển vị tương đối này tra bảng 6-1 ta vẽ được biểu đồ mômen uốn ($M_t^{o''}$).

Các chuyển vị tương đối trên có thể xác định bằng cách vẽ sơ đồ chuyển vị (Hình 6.10e).

Chọn một điểm bất kỳ tượng trưng cho các điểm cố định ban đầu (a, b, c). Nút D có chuyển vị tới D' có các thành phần chuyển vị theo phương của hai thanh CD, BD bằng các đoạn $\Delta\ell_{(CD)t}$ và $\Delta\ell_{(BD)t}$. Trên sơ đồ chuyển vị chúng được biểu thị bằng các đoạn CD_1 và BD_2 theo một tỉ xích đã chọn và có phương song song cùng chiều tương ứng.



Hình 6.10

Giao điểm D' của hai đường vuông góc với phương của hai thanh kẻ từ D₁ và D₂ xác định véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{BD}$ có hình chiếu lần lượt lên phương vuông góc với các thanh CD và BD cho ta các chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh của các thanh đó. Điểm D lại được coi là điểm cố định ban đầu của thanh DE khi xét chuyển vị nút E. Trên sơ đồ chuyển vị, độ dãn dài $\Delta\ell_{(DE)t}$ của thanh DE được biểu thị bằng đoạn DE₁ có phương và chiều tương ứng. Thanh AE không có biến dạng nên E₂ trùng với A. Giao điểm E' của hai đường vuông góc với thanh ED và EA kẻ từ E₁ và E₂ xác định véc tơ $\overrightarrow{D'E}$ và $\overrightarrow{AE'}$ có hình chiếu lên phương vuông góc với trục thanh cho chuyển vị tương đối giữa hai đầu của các thanh ED và EA.

Trong ví dụ trên các chuyển vị tương đối giữa hai đầu thanh $\Delta_{BD} = \Delta_{CD} = \alpha t \ell \sqrt{3}$; $\Delta_{ED} = \alpha t \ell$; $\Delta_{AE} = \alpha t \ell + \alpha t \ell \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) \alpha t \ell$.

Biểu đồ $M_t^{o''}$ vẽ được trên hình 6.10h.

Biểu đồ $M_t^o = M_t^{o'} + M_t^{o''}$ vẽ được trên hình 6.10f.

Từ M_t^o tìm được $R_{1t} = 1,24 \frac{EJ\alpha t}{\ell}$. Kết hợp với $r_{11} = 10 \frac{EJ}{\ell}$ xác định từ biểu đồ $\overline{M}_1$ (Hình 6.10b), ta có phương trình chính tắc:

$$10 \frac{EJ}{\ell} Z_1 + 12,4 \frac{EJ\alpha t}{\ell} = 0$$

Giải ra tìm được $Z_1 = -12,4\alpha t$ (rad).

Biểu đồ $\overline{M}_1$ trên hệ siêu tĩnh đã cho được xây dựng theo nguyên lý chung trong 6.2. Kết quả chỉ ra trên hình 6.10k.

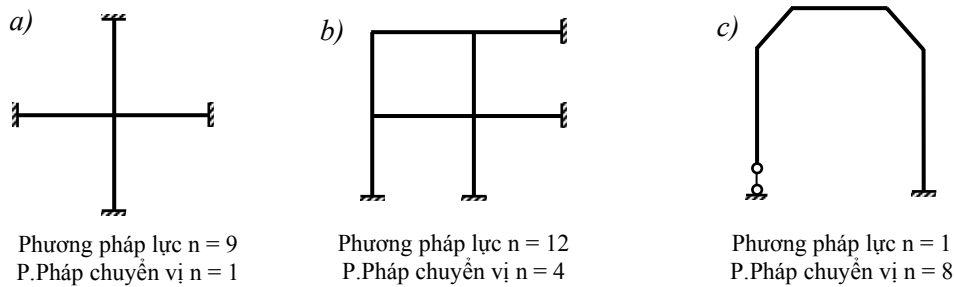
6.6. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH THEO PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP VÀ PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

6.6.1. Phương pháp hỗn hợp

Chúng ta nghiên cứu hai phương pháp cơ bản để tính hệ siêu tĩnh: Phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Ưu điểm của hai phương pháp này thể hiện ở tính tổng quát của chúng. Về mặt lý luận chúng cho phép ta có khả năng tính bất kỳ một hệ nào một cách chính xác dù hệ đó phức tạp đến đâu. Về đường lối giải quyết trong hai phương pháp là giống nhau song khác nhau về ý nghĩa và cách giải quyết cụ thể. Với hệ dầm và khung tính theo phương pháp chuyển vị thường đơn giản hơn vì lập hệ cơ bản, vẽ biểu đồ mô men đơn vị và biểu đồ mô men do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản, xác định các hệ số và số hạng tự do cũng như giải hệ phương trình chính tắc là dễ dàng hơn so với phương pháp lực. Song phương pháp chuyển vị có hạn chế lớn khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng do lực dọc và lực cắt khi áp dụng tính dãn khớp và thanh cong.

Với khung siêu tĩnh lựa chọn phương pháp tính thông thường trước hết căn cứ vào số ẩn xác định theo mỗi phương pháp. Chẳng hạn các khung siêu tĩnh trên *hình 6.11a,b* dùng phương pháp chuyển vị để tính vì số ẩn ít hơn; với khung trên *hình 6.11c* dùng phương pháp lực để tính lợi hơn.

Trong thực tế còn gặp phải những kết cấu có phần này dùng phương pháp lực lợi hơn, còn phần kia thì dùng phương pháp chuyển vị lợi hơn. Từ đó đặt ra vấn đề có thể kết hợp cả hai phương pháp để cùng tính cho một hệ. Đó là xuất phát điểm của phương pháp hỗn hợp sau đây.



Hình 6.11

Xét hệ trên *hình 6.12a*, ta thấy khung bên trái ABC nếu tính theo phương pháp chuyển vị chỉ có một ẩn, song theo phương pháp lực có ba ẩn; còn đối với phần khung bên phải BDEF nếu tính theo phương pháp chuyển vị sẽ có 3 ẩn song theo phương pháp lực chỉ có một ẩn. Do đó ta có thể dùng phương pháp hỗn hợp với nội dung phần khung bên trái tính theo phương pháp chuyển vị, còn phần khung bên phải tính theo phương pháp lực, như vậy số ẩn chỉ còn hai (khung này nếu tính theo phương pháp lực số $n = 4$ và tính theo phương pháp chuyển vị số ẩn $n = 4$).

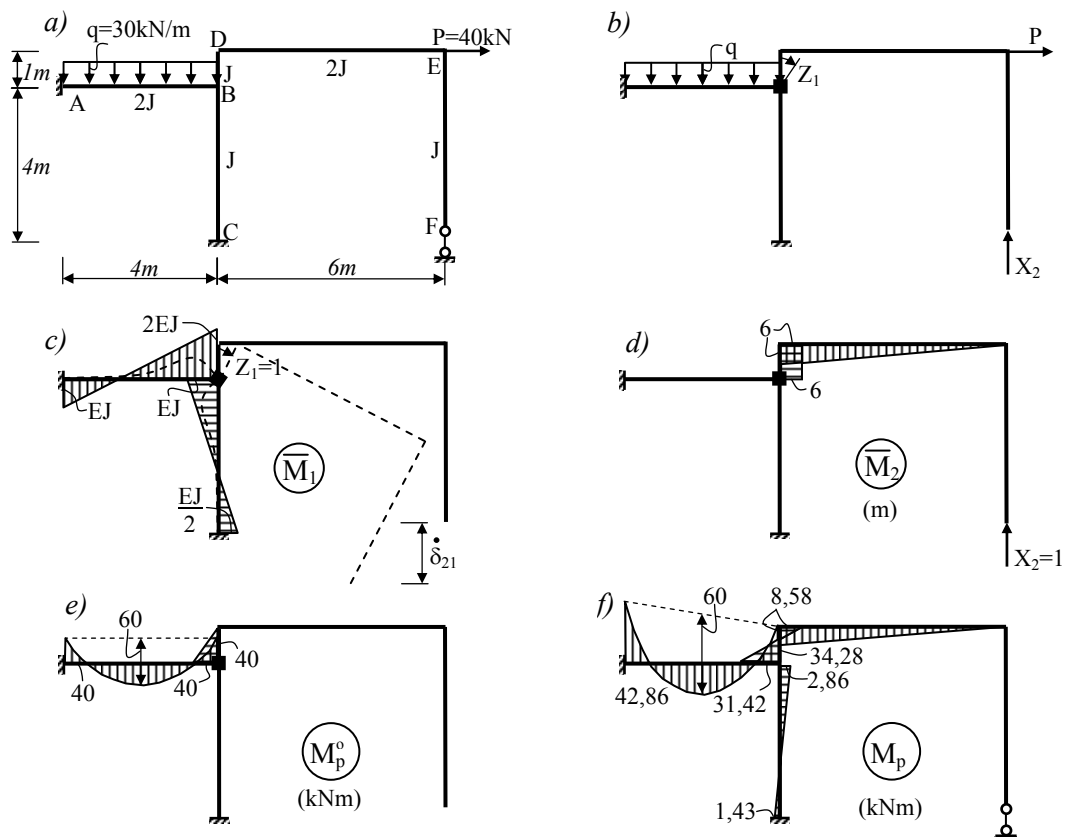
Hệ cơ bản dùng tính thay hệ đã cho trên mỗi phần khung được lập theo mỗi cách của mỗi phương pháp (*hình 6.12b*). Ở phần khung bên trái ta đưa thêm liên kết mô men để ngăn cản sự xoay của nút B, và ký hiệu chuyển vị góc xoay chưa biết là Z_1 . Ở phần khung bên phải loại bỏ liên kết thanh F và thay bằng ẩn lực X_2 .

Điều kiện để cho hệ cơ bản trên hoàn toàn tương đương với hệ đã cho về mặt lực và chuyển vị là :

- Phản lực ở liên kết mô men đã thêm ở nút B phải bằng không tức là $R_{1(Z_1, X_2, P)} = 0$
- Chuyển vị của tiết diện F theo phương thẳng đứng phải bằng không tức là $\Delta_{2(Z_1, X_2, P)} = 0$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và triển khai các điều kiện trên, ta được hệ hai phương trình chính tắc sau:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}X_2 + R_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}Z_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (6-10)$$



Hình 6.12

trong đó các hệ số chính r_{11} , δ_{22} và các số hạng tự do R_{1P} , Δ_{2P} có ý nghĩa và cách tính như đã biết trong mỗi phương pháp.

r_{11} , R_{1P} phản lực thêm vào thứ 1 (nút B) lần lượt do $Z_1=1$ và tải trọng đã cho gây nên trên hệ cơ bản, được xác định bằng cách tách xét cân bằng mô men tại nút B trên biểu đồ $\overline{M}_1$ và M_p^0

δ_{22} , Δ_{2P} - chuyển vị tại tiết diện F theo phương ần lực X_2 lần lượt do $X_2=1$ và tải trọng đã cho gây nên trên hệ cơ bản, được xác định theo công thức Mo viết dưới dạng nhân biểu đồ như sau:

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \overline{M}_2$$

$$\Delta_{2P} = M_p^0 \overline{M}_2$$

- r_{12} và δ_{21} các hệ số chỉ xuất hiện trong phương pháp hỗn hợp (ký hiệu có dấu chấm);

r_{12} là phản lực liên kết thêm vào thứ nhất do ần lực $X_2 = 1$ gây nên trên hệ cơ bản, được xác định bằng cách tách xét cân bằng tại nút B trên biểu đồ $\overline{M}_2$;

δ_{21} là chuyển vị tại tiết diện F theo phương ản lực X_2 do ản chuyển vị $Z_1 = 1$ gây nên trên hệ cơ bản. Để tính chuyển vị này ta dùng công thức M_0 tính chuuyển vị do gối tựa dời chỗ do liên kết tựa dời chỗ ($\Delta_{k\Delta} = -\sum_{i=1}^n \bar{R}_k^i \Delta_m^i$). Ta nhận thấy trên hệ cơ bản, khi liên kết ngàm xoay một góc $Z_1 = 1rad$, phần khung bên phải BDEF không bị biến dạng mà chỉ xoay xung quanh nút B, do đó cũng có thể tính δ_{21} bằng phương pháp hình học thông thường (Hình 6.12c) hoặc theo định lý tương hỗ giữa phản lực đơn vị và chuyển vị đơn vị, ta có quan hệ $\delta_{21} = -\dot{r}_{12}$

Giải hệ phương trình (6-9) sẽ xác định được các ản Z_1 và X_2 . Theo nguyên lý cộng tác dụng, biểu đồ mô men cuối cùng trên hệ siêu tĩnh đã cho sẽ là :

$$\textcircled{M_p} = \textcircled{M_1} Z_1 + \textcircled{M_2} X_2 + \textcircled{M_p^0}$$

Với ví dụ cụ thể tính khung cho trên hình 6.12a, vẽ biểu đồ mô men đơn vị $\textcircled{M_1}$, $\textcircled{M_2}$ (Hình 6.12c,d) và biểu đồ mô men do tải trọng đã cho trên hệ cơ bản (Hình 6.12e). Theo nguyên tắc tính trên ta tìm được các hệ số, số hạng tự do và hệ phương trình chính tắc là:

$$\begin{aligned} 3EJ.Z_1 + 6.X_2 + 0 &= 0 \\ -6.Z_1 + \frac{72}{EJ}.X_2 - \frac{120}{EJ} &= 0 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình tìm được

$$Z_1 = -\frac{2,86}{EJ} \text{ rad}; \quad X_2 = 1,43kN$$

Biểu đồ mô men cuối cùng trên hệ siêu tĩnh vẽ được trên hình 6.12f.

6.6.2. Phương pháp liên hợp:

Những bài toán về dầm, khung phù hợp với phương pháp hỗn hợp đều có thể áp dụng phương pháp liên hợp. Số ản số của phương pháp hỗn hợp và liên hợp là như nhau song phương pháp liên hợp có ưu điểm hơn là chia hệ phương trình chính tắc làm hai nhóm phương trình độc lập và từ đó giải hệ phương trình đơn giản hơn. Phương pháp liên hợp đưa hệ về hai bài toán độc lập, một bài toán theo phương pháp lực một bài toán theo phương pháp chuyển vị. Trong phương pháp liên hợp có thể thực hiện một trong hai cách sau đây. Ở đây trình bày 2 cách thông qua một ví dụ cụ thể là khung siêu tĩnh trên hình 6.13a có số ản theo phương pháp hỗn hợp là hai, phần ABC phù hợp với phương pháp chuyển vị, phần CDE phù hợp với phương pháp lực.

Cách 1: Bài toán làm theo phương pháp lực, chọn hệ cơ bản bằng cách chỉ loại bỏ liên kết của phần hệ phù hợp với phương pháp lực, ta có hệ cơ bản tương đương như hình 6.13b. Như vậy hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh với phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$;

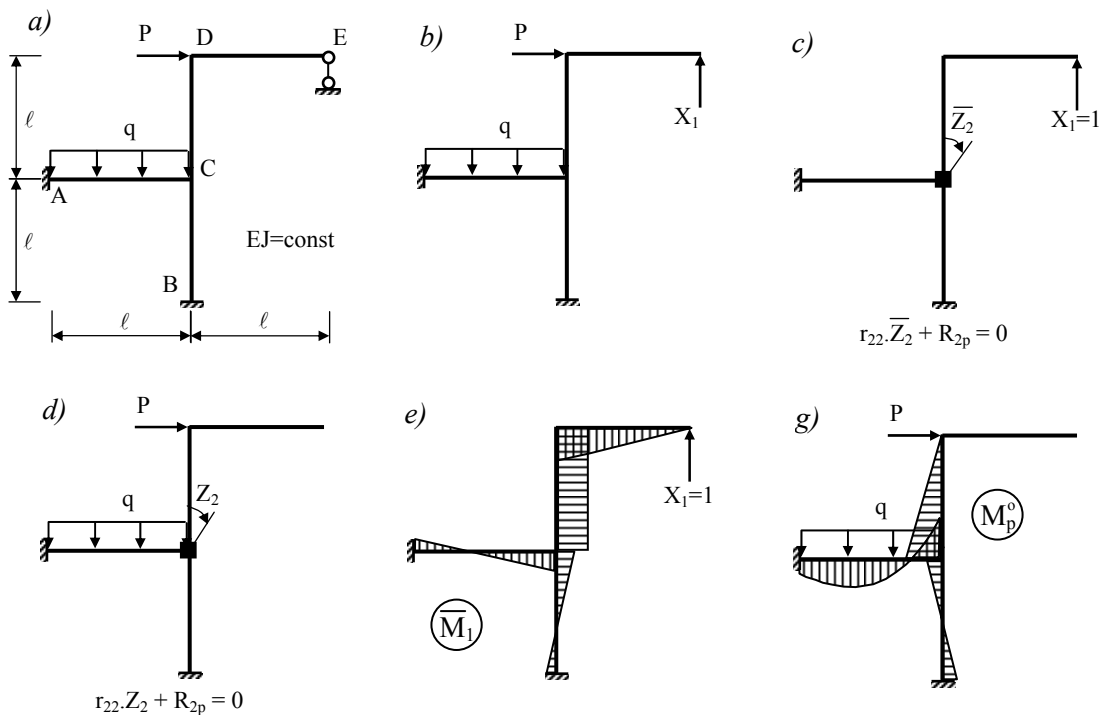
$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \overline{M}_1; \quad \Delta_{1P} = \overline{M}_p^0 \overline{M}_1; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

Biểu đồ nội lực cuối cùng:

$$\overline{M}_p = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_p^0$$

Vấn đề cần giải quyết ở đây là vẽ $\overline{M}_1$, $\overline{M}_p^0$ như thế nào trong phần siêu tĩnh ABC, còn phần tĩnh định CDE vẽ dễ dàng. Để vẽ $\overline{M}_1$ và $\overline{M}_p^0$ cho phần ABC là phần phù hợp với phương pháp chuyển vị, ta áp dụng phương pháp chuyển vị từ hệ ban đầu là hệ cơ bản của phương pháp lực lần lượt với hai nguyên nhân là $X_1=1$ và tải trọng P, q đã cho. Với ví dụ cụ thể này ta sẽ thực hiện hai bài toán phụ độc lập:

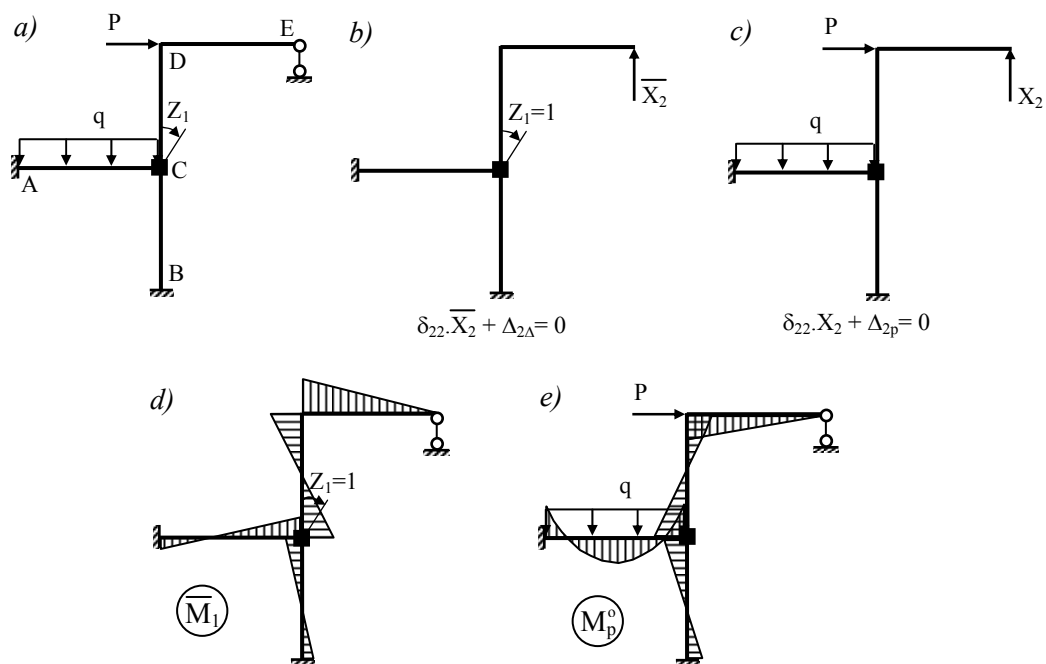
- Với $X_1 = 1$ ta có hệ cơ bản tương đương, phương trình chính tắc như hình 6.13c.
- Với tải trọng đã cho, có hệ cơ bản tương đương, phương trình chính tắc như hình 6.13d.
- Tiếp tục các bước của phương pháp chuyển vị sẽ có biểu đồ $\overline{M}_1$, $\overline{M}_p^0$ trong phần ABC
- Hình 6.13e, g là dạng của biểu đồ $\overline{M}_1$, $\overline{M}_p^0$ theo phương pháp lực ban đầu.



Hình 6.13

Cách 2: Bài toán làm theo phương pháp chuyển vị, chọn hệ cơ bản bằng cách thêm liên kết cho phần hệ phù hợp với phương pháp chuyển vị, ta có hệ cơ bản tương đương như hình 6.14a và có phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$



Hình 6.14

r_{11} và R_{1P} được xác định từ điều kiện cân bằng của $(\bar{M}_1, M_p^0)$. Ở đây ta lại tìm cách vẽ $(\bar{M}_1, M_p^0)$ của phần hệ phù hợp với phương pháp lực CDE, còn phần ABC tra bảng dễ dàng.

Để vẽ biểu đồ của phần CDE, ta áp dụng phương pháp lực từ hệ ban đầu là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị lần lượt với hai nguyên nhân là chuyển vị xoay tại liên kết ngàm C bằng đơn vị và tải trọng đã cho. Với hệ trên hình 6.12a, ta sẽ thực hiện hai bài toán phụ độc lập:

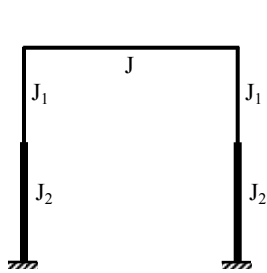
- Với $Z_1 = 1$ ta có hệ cơ bản tương đương, phương trình chính tắc của phương pháp lực như hình 6.14b.

- Với tải trọng đã cho, có hệ cơ bản tương đương và phương trình chính tắc như hình 6.14c.

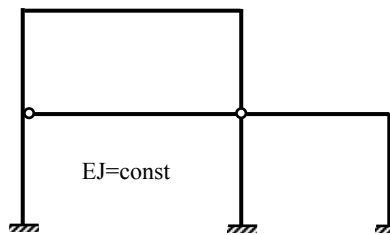
Tiếp tục hai bài toán theo phương pháp lực sẽ vẽ được biểu đồ $(\bar{M}_1, M_p^0)$ trong phần CDE. Hình 6.14d,e là dạng của biểu đồ $(\bar{M}_1, M_p^0)$ theo phương pháp chuyển vị ban đầu.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

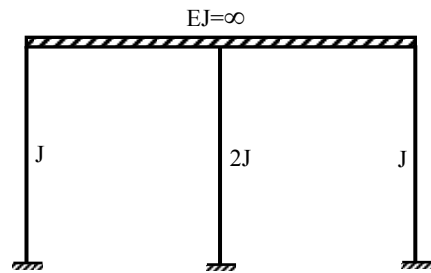
1. Xác định số ẩn số theo phương pháp chuyển vị để giải các khung cho trên các hình từ hình 6.15 đến hình 6.17.
2. Vẽ biểu đồ M, Q, N cho các khung từ hình 6.18 đến hình 6.21. Tính chuyển vị đứng tại K và chuyển vị ngang tại D của các khung trên.
3. Chọn phương pháp vẽ biểu đồ mô men cho các khung từ hình 6.22 đến hình 6.25.
4. Vẽ sơ đồ chuyển vị cho khung trên hình 6.26.
5. Viết hệ phương trình chính tắc dạng số để giải khung siêu tĩnh cho trên hình 6.27 bằng phương pháp chuyển vị.
6. Vẽ biểu đồ M cho các kết cấu cho trên hình 6.28 đến hình 6.31. Tính góc xoay của tiết diện C.
7. Dùng phương pháp hỗn hợp vẽ các biểu đồ mô men, lực cắt cho các khung trên hình 6.32 và hình 6.33.



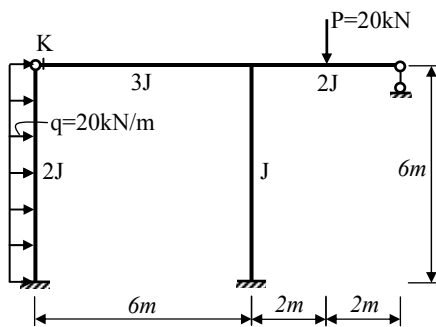
Hình 6.15



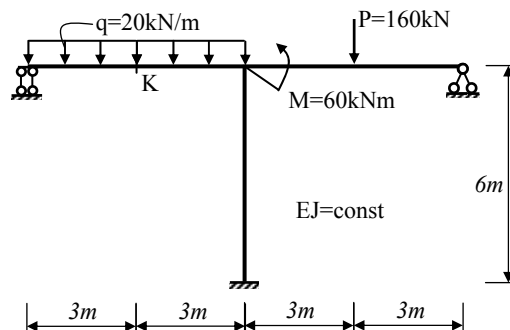
Hình 6.16



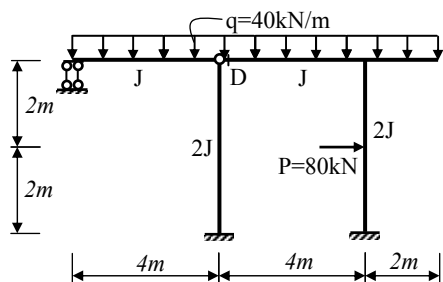
Hình 6.17



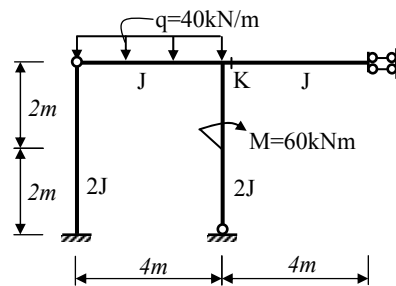
Hình 6.18



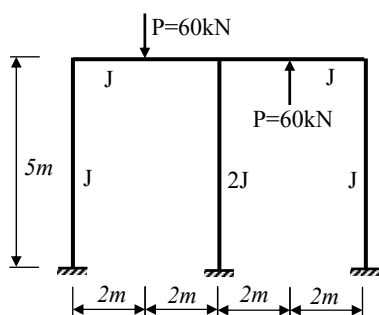
Hình 6.19



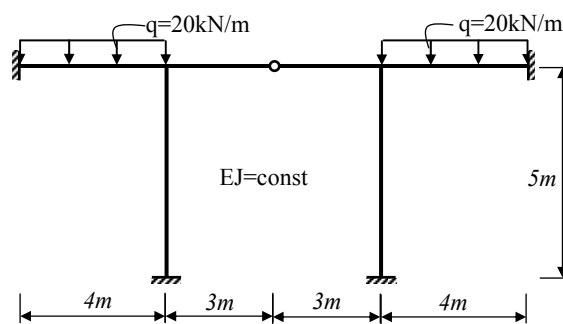
Hình 6.20



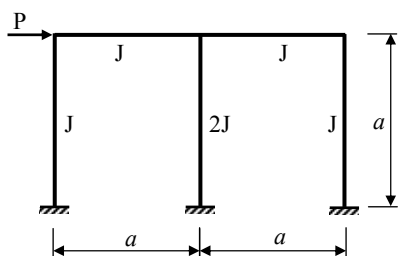
Hình 6.21



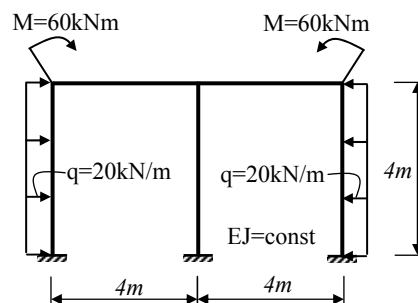
Hình 6.22



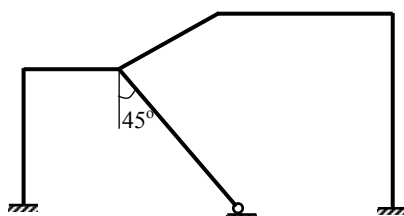
Hình 6.23



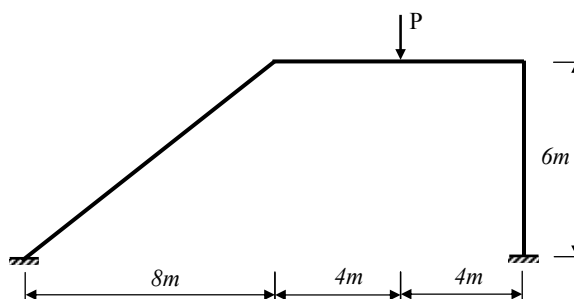
Hình 6.24



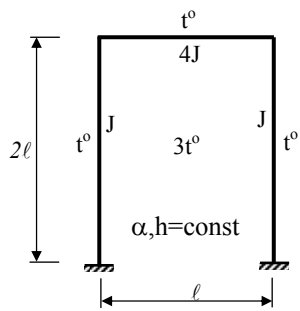
Hình 6.25



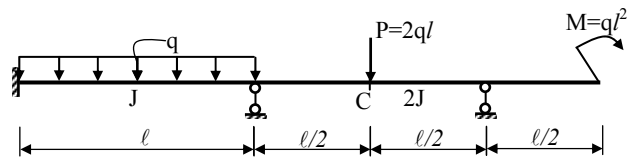
Hình 6.26



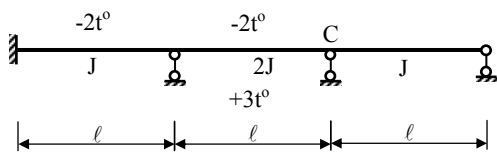
Hình 6.27



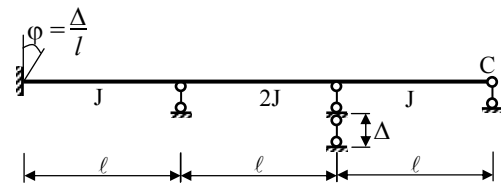
Hình 6.28



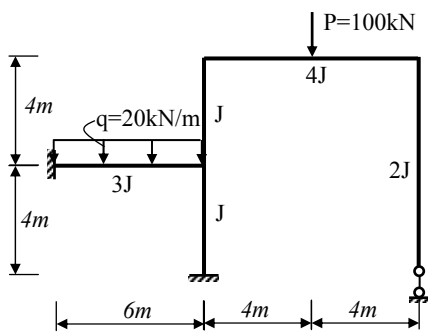
Hình 6.29



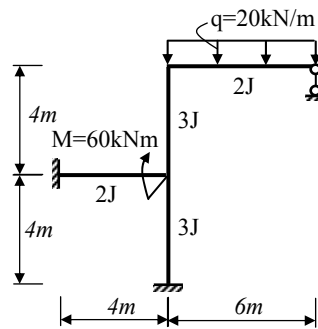
Hình 6.30



Hình 6.31



Hình 6.32



Hình 6.33

CHƯƠNG 7

TÍNH HỆ SIÊU TĨNH THEO PHƯƠNG PHÁP PHÂN PHỐI MÔ MEN (H.CROSS)

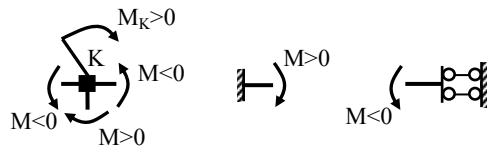
7.1. KHÁI NIỆM VÀ BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA PHƯƠNG PHÁP

7.1.1. Khái niệm

Khi tính các hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực và phương pháp chuyển vị trên cơ sở các giả thiết đã nêu, kết quả nhận được là chính xác; song với các kết cấu siêu tĩnh phức tạp thì khối lượng tính toán khá lớn vì phải giải hệ nhiều phương trình. Khi không có điều kiện áp dụng các công cụ tính toán hiện đại, để rút ngắn thời gian mà vẫn đảm bảo độ chính xác cần thiết, người ta đã nghiên cứu và đề xuất nhiều phương pháp tính đúng dần cho các hệ siêu tĩnh.

Phương pháp phân phối mô men (còn gọi là phương pháp H.cross) nghiên cứu trong chương này là một trong những phương pháp đó. Nó là một trong những phương pháp cơ bản làm cơ sở cho việc nghiên cứu các phương pháp tính đúng dần khác. Phương pháp phân phối mô men được xây dựng trên cơ sở của phương pháp chuyển vị.

Vì không phải vẽ các biểu đồ trung gian nên phương pháp phân phối mô men có quy ước lại dấu của mô men uốn tại các đầu thanh như sau: Mô men quay thuận kim đồng hồ quanh nút cứng hoặc ngàm được quy ước là dương và ngược lại là âm (hình 7.1). Quy ước dấu của lực cắt cũng như trước đây.



Hình 7.1

Phương pháp phân phối mô men có những ưu điểm sau:

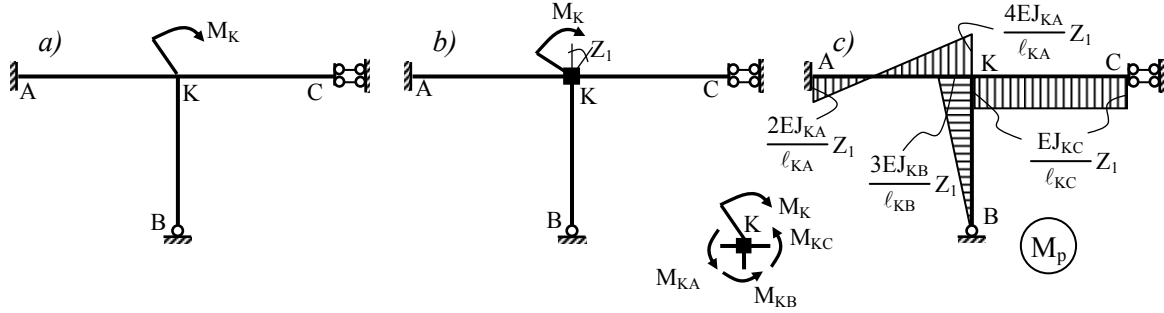
Tính toán đơn giản, không cần dùng các công cụ toán học phức tạp. Hầu hết các phép tính trong phương pháp chỉ là các phép tính cộng hoặc nhân, do đó có thể tính bằng tay hoặc dùng máy tính phổ thông cũng đủ để thực hiện.

Phương pháp này đòi hỏi phải giải rất ít phương trình so với số lượng phương trình để tính theo các phương pháp chính xác, có trường hợp không cần giải phương trình nào. Đây là ưu điểm căn bản của phương pháp. Với ưu điểm này, phương pháp phân phối mô men rất thích hợp với hệ siêu tĩnh bậc cao. Các hạn chế của phương pháp phân phối mô men tương tự như phương pháp chuyển vị. Trên thực tế nó chỉ áp dụng được cho hệ dầm hoặc khung.

7.1.2. Bài toán cơ bản và các công thức của phương pháp

Ta xét bài toán cơ bản sau đây làm cơ sở cho phương pháp này là tính khung siêu tĩnh một nút cứng, không có chuyển vị thẳng, chịu mô men tập trung tác dụng tại nút như hình 7.2a.

Theo phương pháp chuyển vị ta có biểu đồ mô men uốn như trên *hình 7.2c* (*Hình 7.2b* là hệ cơ bản tương đương với $M_p^0 = 0$). Ta phân tích biểu đồ M_p để tìm ra quan hệ giữa mô men nội lực của 3 đầu thanh quy tụ tại nút với mô men ngoại lực M_K , cũng như liên hệ giữa mô men tại các đầu A, B, C với mô men của các đầu thanh tương ứng tại K:



Hình 7.2

Nếu đặt $\rho_{KA} = \frac{EJ_{KA}}{l_{KA}}$; $\rho_{KB} = \frac{3EJ_{KB}}{4l_{KB}}$; $\rho_{KC} = \frac{EJ_{KC}}{4l_{KC}}$

Xét cân bằng mô men nút K có :

$$M_K - 4(\rho_{KA} + \rho_{KB} + \rho_{KC})Z_1 = 0 \quad \rightarrow \quad Z_1 = \frac{M_K}{4(\rho_{KA} + \rho_{KB} + \rho_{KC})}$$

$$M_{KA} = -\frac{\rho_{KA}}{\rho_{KA} + \rho_{KB} + \rho_{KC}} M_K = -\mu_{KA} \cdot M_K$$

$$M_{KB} = -\frac{\rho_{KB}}{\rho_{KA} + \rho_{KB} + \rho_{KC}} M_K = -\mu_{KB} \cdot M_K$$

$$M_{KC} = -\frac{\rho_{KC}}{\rho_{KA} + \rho_{KB} + \rho_{KC}} M_K = -\mu_{KC} \cdot M_K$$

μ_{Kj} là hệ số không phụ thuộc vào tải trọng, chỉ phụ thuộc chiều dài, độ cứng thanh K_j và liên kết tại đầu j của thanh. Nó chính là hệ số phân phối của mô men nút cứng M_K cho các đầu thanh quy tụ tại nút K:

M_{Kj} gọi là mô men phân phối tại đầu K của thanh K_j , ta có:

$$M_{Kj} = -\mu_{Kj} \cdot M_K \quad (7-1)$$

μ_{Kj} gọi là hệ số phân phối tại đầu K của thanh K_j , với:

$$\mu_{Kj} = \frac{\rho_{Kj}}{\sum \rho_K} \quad (7-2)$$

ρ_{Kj} là độ cứng đơn vị quy ước của thanh K_j được xác định như sau:

$$\rho_{Kj} = \begin{cases} \frac{EJ_{Kj}}{\ell_{Kj}} & \text{Nếu đầu } j \text{ là ngàm cứng} \\ \frac{3}{4} \frac{EJ_{Kj}}{\ell_{Kj}} & \text{Nếu đầu } j \text{ là khớp} \\ \frac{1}{4} \frac{EJ_{Kj}}{\ell_{Kj}} & \text{Nếu đầu } j \text{ là ngàm trượt theo phương vuông góc trục thanh} \end{cases} \quad (7-3)$$

$\Sigma \rho_K$ là tổng số các độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút K.

Từ biểu đồ M_P ta thấy mô men phân phối M_{Kj} và mô men tại các đầu đối diện M_{jK} có quan hệ với nhau theo một tỷ lệ nào đó:

$$M_{AK} = \frac{1}{2} M_{KA}; \quad M_{BK} = 0 \cdot M_{KB}; \quad M_{CK} = -M_{KC}$$

(lưu ý quy ước mới về dấu của mô men)

$$\text{Nếu gọi } M_{jK} \text{ là mô men truyền thì: } M_{jK} = \beta_{Kj} M_{Kj} \quad (7-4)$$

β_{Kj} gọi là hệ số truyền:

$$\beta_{Kj} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Nếu đầu } j \text{ là ngàm cứng} \\ 0 & \text{Nếu đầu } j \text{ là khớp} \\ -1 & \text{Nếu đầu } j \text{ là ngàm trượt theo phương vuông góc trục thanh} \end{cases} \quad (7-5)$$

Tóm lại với phương pháp phân phối mô men tính hệ chỉ có một nút cứng không có chuyển vị thẳng và chịu một mô men tập trung M tại nút, nội dung và trình tự tính toán như sau:

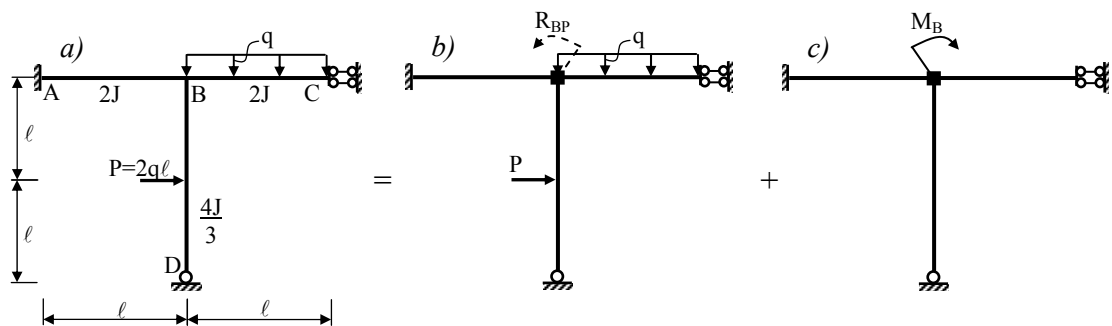
- Tính độ cứng đơn vị quy ước ρ_{Kj} của các thanh theo (7-3) và các hệ số phân phối mô men μ_{Kj} tại nút K theo (7-2)
- Tính mô men phân phối cho các đầu thanh M_{Kj} theo (7-1)
- Tính mô men truyền cho các đầu đối diện với nút là M_{jK} theo (7-4)

Tổng các mô men đầu thanh tính được chính là giá trị mô men cuối cùng cần tìm. Cách giải quyết và các công thức đã rút ra trong bài toán trên được lấy làm cơ sở để tính các hệ siêu tĩnh phức tạp khác.

7.2. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH GỒM CÁC NÚT KHÔNG CÓ CHUYỂN VỊ THẲNG

7.2.1. Hệ siêu tĩnh chỉ có một nút cứng

Giả sử cần tính hệ siêu tĩnh chỉ có một nút cứng không có chuyển vị thẳng chịu tải trọng bất kỳ như hình 7.3a. Bài toán này khác với bài toán cơ bản ở chỗ ngoại lực không phải là một mô men tập trung đặt tại nút (còn gọi là mô men nút cứng). Ta đưa về bài toán cơ bản bằng cách coi hệ đã cho là tổ hợp của hai hệ sau:



Hình 7.3

Hệ thứ nhất (Hình 7.3b): chính là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị nên tra bảng dễ dàng.

Hệ thứ hai (hình 7.3c) là bài toán cơ bản của phương pháp phân phối mô men với mô men nút cứng:

$$M_B = \sum_j M_{Bj}^0 \quad (7-6)$$

(tổng mô men tra bảng của các đầu thanh quy tụ tại nút B)

Ví dụ 7-1: Vẽ biểu đồ mô men uốn của khung siêu tĩnh cho trên hình 7.3a theo q , ℓ , EJ đã biết.

- Tính độ cứng đơn vị quy ước ρ_{Bj} của ba thanh quy tụ tại B theo (7-3)

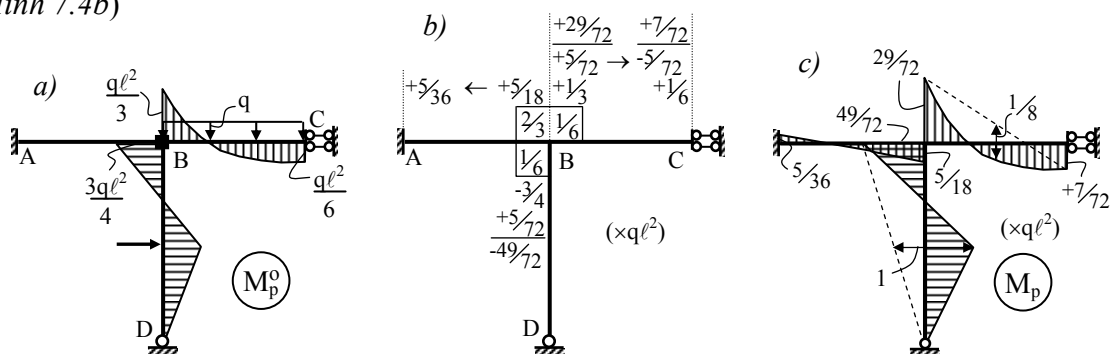
$$\rho_{BA} = \frac{E(2J)}{\ell} = \frac{2EJ}{\ell}; \quad \rho_{BD} = \frac{\frac{3}{4}E(\frac{4}{3}J)}{2\ell} = \frac{EJ}{2\ell}; \quad \rho_{BC} = \frac{\frac{1}{4}E(2J)}{\ell} = \frac{EJ}{2\ell}$$

- Tính hệ số phân phối cho các đầu thanh tại nút B theo (7-2)

$$\mu_{BA} = \frac{\frac{2EJ}{\ell}}{\frac{2EJ}{\ell} + \frac{EJ}{2\ell} + \frac{EJ}{2\ell}} = \frac{2}{3}; \quad \mu_{BC} = \mu_{BD} = \frac{\frac{EJ}{2\ell}}{\frac{2EJ}{\ell} + \frac{EJ}{2\ell} + \frac{EJ}{2\ell}} = \frac{1}{6}$$

$$(\sum \mu_B = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1)$$

Các hệ số phân phối tính được, được ghi tại các đầu thanh tương ứng trên sơ đồ tính (Hình 7.4b)



Hình 7.4

- Ngầm nút B, tra bảng biểu đồ M_p^0 như *hình 7.4a* và xác định giá trị mô men tại các đầu thanh theo quy ước dấu của mô men:

$$M_{BC}^0 = +\frac{q\ell^2}{3}; \quad M_{BD}^0 = -\frac{3}{4}q\ell^2; \quad M_{CB}^0 = +\frac{q\ell^2}{6}$$

Các giá trị này được ghi vào các đầu thanh của sơ đồ tính (*Hình 7.4b*)

- Tính mô men nút cứng tại B: $M_B = M_{BC}^0 + M_{BD}^0 = \frac{q\ell^2}{3} - \frac{3}{4}q\ell^2 = -\frac{5}{12}q\ell^2$

- Thực hiện bài toán cơ bản, phân phối mô men tại nút B theo (7-1) và ghi lên sơ đồ:

$$M_{BA} = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{12}q\ell^2 \right) = +\frac{5}{18}q\ell^2; \quad M_{BC} = M_{BD} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{5}{12}q\ell^2 \right) = +\frac{5}{72}q\ell^2$$

- Tính mô men truyền tại các đầu đối diện của nút B theo (7-4) và ghi lên sơ đồ:

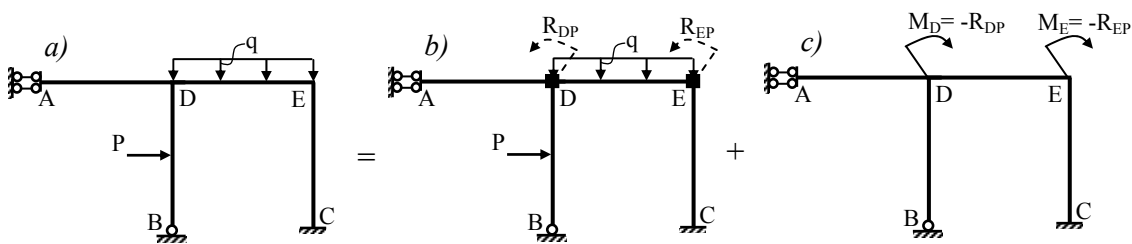
$$M_{AB} = \frac{1}{2} \times \left(+\frac{5}{18}q\ell^2 \right) = +\frac{5}{36}q\ell^2; \quad M_{DB} = 0; \quad M_{CB} = -1 \times \left(+\frac{5}{72}q\ell^2 \right) = -\frac{5}{72}q\ell^2$$

- Giá trị mô men cuối cùng tại mỗi tiết diện đầu thanh bằng tổng đại số các trị số đã ghi tại đó: $M_{Bj} = M_{Bj}^0 + M_{Bj}^{pp}; \quad M_{jB} = M_{jB}^0 + M_{jB}^{tr} \quad (7-7)$

Biểu đồ mô men được vẽ trên *hình 7.4c*

7.2.2. Hệ siêu tĩnh có nhiều nút cứng

Giả sử cần tính hệ có hai nút cứng, không có chuyển vị thẳng, chịu tải trọng bất kỳ vẽ trên *hình 7.5a*. Tương tự như trên, để đưa về dạng bài toán cơ bản ta biến khung siêu tĩnh đã cho thành tổng của hai khung trên *hình 7.5b* và *hình 7.5c*. Các giá trị mô men đầu thanh của khung ở *hình 7.5b* tính được nhờ tra *bảng 6-1*. Dưới đây ta chỉ xét cách tính khung trên *hình 7.5c* bằng phương pháp phân phối mô men. Các công thức phân phối mô men đã thiết lập ở trên là chỉ đối với hệ chỉ có một nút cứng và các đầu đối diện là liên kết ngàm, khớp hoặc ngàm trượt mà không phải là nút cứng xoay được.



Hình 7.5

Do đó với hệ gồm nhiều nút cứng (*hình 7.5c*) ta phải biến đổi để giải quyết từng bộ phận của hệ, trong đó chỉ có một nút cứng xoay. Chẳng hạn muốn phân phối M_D (của nút D), ta thêm vào nút E một liên kết mô men để ngăn cản sự xoay của nút E (chốt nút E). Khi đó bộ phận khung ABDE đã giống bài toán cơ bản (*hình 7.6a*). Theo công thức từ (7-1) đến (7-5), ta tính được các hệ số phân phối mô men và thực hiện phân phối và truyền mô men ta được:

Mô men phân phối

$$M_{DA}^1 = -\mu_{DA} \cdot M_D^1$$

$$M_{DB}^1 = -\mu_{DB} \cdot M_D^1$$

$$M_{DE}^1 = -\mu_{DE} \cdot M_D^1$$

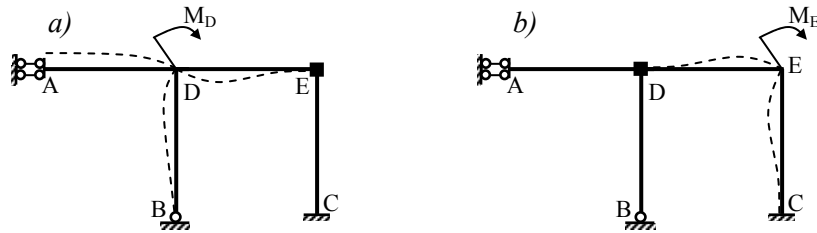
Mô men truyền

$$M'_{AD} = -M_{DA}^1$$

$$M'_{BD} = 0$$

$$M'_{ED} = \frac{1}{2} \cdot M_{DE}^1$$

Trong đó chỉ số 1 và dấu ' biểu thị tương ứng với lần phân phối thứ nhất của nút.



Hình 7.6

Nút D sau khi phân phối đã cân bằng mô men, nhưng tại nút E do đặt thêm liên kết mô men nên mô men nút cứng M_E lúc này đã thêm lượng M'_{ED} mới truyền tới nghĩa là:

$$M_{ED}^1 = M_E + M'_{ED}$$

Để thực hiện phân phối mô men nút E tương tự như phân phối mô men nút D, ta phải tháo bỏ liên kết đã đưa thêm vào nút E và đưa thêm liên kết mô men để ngăn cản sự xoay của nút D (chốt nút D). Như vậy bộ phận khung DEC lại giống bài toán cơ bản (hình 7.6b). Thực hiện phân phối và truyền mô men cho bộ phận khung DEC, ta được:

Mô men phân phối

$$M_{ED}^1 = -\mu_{ED} \cdot M_E^1$$

$$M_{EC}^1 = -\mu_{EC} \cdot M_E^1$$

Mô men truyền

$$M'_{DE} = \frac{1}{2} \cdot M_{ED}^1$$

$$M'_{CE} = \frac{1}{2} \cdot M_{EC}^1$$

Nút E sau khi phân phối đã cân bằng mô men, nhưng tại nút D lại có lượng mô men M'_{DE} mới truyền tới, nên tại đó lại xuất hiện mô men nút cứng không cân bằng $M_D^2 = M'_{DE}$. Mô men nút cứng D lúc này bé hơn nhiều so với trước đây ($M_D^2 \ll M_D^1$). Đến đây, ta thực hiện xong một chu trình phân phối mô men. ở bài toán này, ta thấy sau một chu kỳ phân phối thứ nhất, tại nút D lại xuất hiện mô men nút cứng không cân bằng M_D^2 . Bởi vậy ta phải tiếp tục tiến hành chu kỳ phân phối thứ 2, quá trình tính toán hoàn toàn như chu kỳ trước, nghĩa là:

Phân phối mô men nút cứng M_D^2 (tạm chốt nút E và tháo chốt nút D) ta có:

Mô men phân phối

$$M_{DA}^2 = -\mu_{DA} \cdot M_D^2$$

$$M_{DB}^2 = -\mu_{DB} \cdot M_D^2$$

$$M_{DE}^2 = -\mu_{DE} \cdot M_D^2$$

Mô men truyền

$$M''_{AD} = -M_{DA}^2$$

$$M''_{BD} = 0$$

$$M''_{ED} = \frac{1}{2} \cdot M_{DE}^2$$

Trong đó chỉ số 2 và dấu '' biểu thị tương ứng với lần phân phối thứ hai của nút.

Nút D sau khi phân phối lần thứ hai đã cân bằng, nhưng nút E lại còn chốt và có mô men nút cứng $M_E^2 = M_{ED}''$, do đó lại phải phân phối tiếp. Quá trình đó cứ lần lượt tiếp diễn mãi, sau mỗi lần phân phối, mô men nút cứng giảm dần, cho tới khi đạt tới trị số không có ý nghĩa trong thực tiễn nữa thì dừng lại.

Sau n chu kỳ phân phối, mô men cuối cùng ở đầu mỗi thanh của hệ trên hình 7.5c bằng tổng giá trị đại số mô men phân phối và mô men đã tích lũy dần. Kết quả càng chính xác khi quá trình tính kéo dài. Để tiện lợi, việc tính toán cả hai hệ trên hình 7.5b được thể hiện chung trên một sơ đồ. Ta sẽ tìm hiểu kỹ thêm cách làm này thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 7-2: Vẽ biểu đồ mô men uốn và lực cắt cho khung siêu tĩnh trên hình 7.7.

a) *Tính độ cứng đơn vị quy ước ρ của các thanh và hệ số phân phối mô men từ mỗi nút ra các đầu thanh:* Trong quá trình tính, các nút cứng được cố định nên được coi như liên kết ngàm khi tính ρ và μ .

$$\text{- Tại nút E: } \rho_{EA} = \frac{EJ}{6}; \quad \rho_{EF} = \frac{2EJ}{8} = \frac{EJ}{4}$$

$$\mu_{EA} = \frac{\rho_{EA}}{\rho_{EA} + \rho_{EF}} = \frac{\frac{EJ}{6}}{\frac{EJ}{6} + \frac{EJ}{4}} = 0,4; \quad \mu_{EF} = \frac{\rho_{EF}}{\rho_{EA} + \rho_{EF}} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{6} + \frac{EJ}{4}} = 0,6$$

$$\text{Kiểm tra } \mu: \Sigma \mu_E = \mu_{EA} + \mu_{EF} = 0,4 + 0,6 = 1$$

$$\text{- Tại nút F: } \rho_{EF} = \rho_{FE} = \frac{EJ}{4}; \quad \rho_{FB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2EJ}{6} = \frac{EJ}{4}; \quad \rho_{FC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3EJ}{10} = \frac{9EJ}{40}$$

$$\mu_{FE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{9EJ}{40}} = 0,345 = \mu_{FB}; \quad \mu_{FC} = 0,31$$

$$\text{Kiểm tra } \mu: \Sigma \mu_F = \mu_{FE} + \mu_{FB} + \mu_{FC} = 0,345 + 0,345 + 0,31 = 1$$

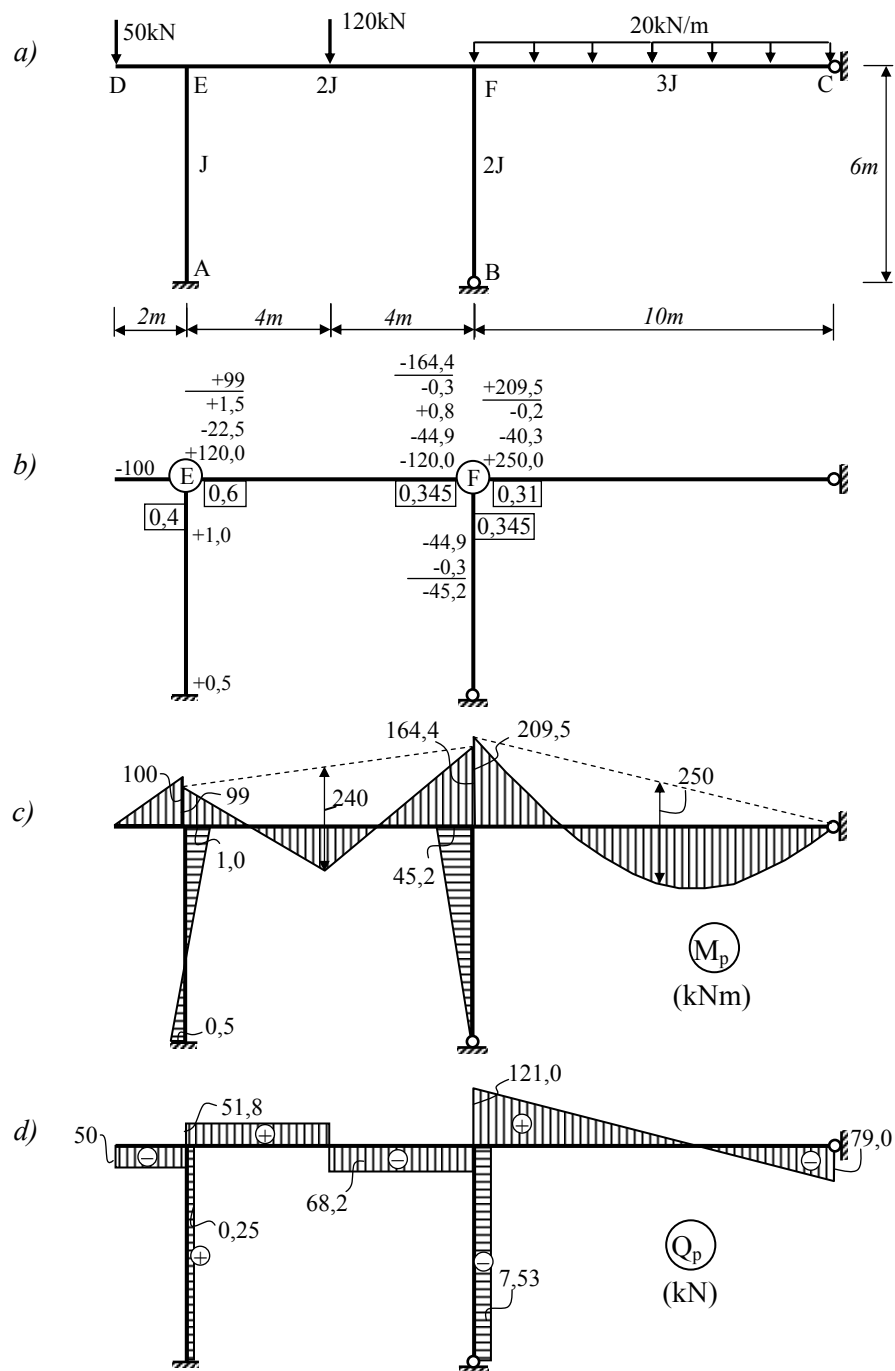
Các hệ số phân phối mô men ghi trong các ô vuông trên sơ đồ (hình 7.7b)

b) *Tính các mô men đầu thanh do tải trọng đã cho trong hệ có nút bị chốt:*

Tra bảng 6-1 được:

$$M_{EF}^0 = 120 \text{ kNm}; \quad M_{FE}^0 = -120 \text{ kNm}; \quad M_{FC}^0 = 250 \text{ kNm}$$

Còn $M_{ED}^0 = -50,2 = -100 \text{ kNm}$. Chúng được ghi trên các đầu thanh tương ứng trên sơ đồ tính (hình 7.7b).



Hình 7.7

c) Tính các mô men nút cứng cho chu kỳ phân phối thứ nhất và tính hệ gồm các mô men đặt tại nút (tính loại hệ như hình 7.5c)

- Tại E: $M_E^1 = -100 + 120 = 20 \text{ kNm}$

- Tại F: $M_F^1 = -120 + 250 = 130 \text{ kNm}$

Để tăng tốc của quá trình lặp ta chọn nút F có mô men nút cứng lớn hơn để phân phối trước.

- Chốt nút E phân phối nút F lần một với $M_F^1 = 130 \text{ kNm}$

<u>Mô men phân phối</u>	<u>Mô men truyền</u>
$M_{FE}^1 = -0,345.130 = -44,9 \text{ kNm}$	$M'_{EF} = \frac{1}{2}(-44,9) = -22,5 \text{ kNm}$
$M_{FB}^1 = -44,9 \text{ kNm}$	$M'_{BF} = 0$
$M_{FC}^1 = -0,31.130 = -40,3 \text{ kNm}$	$M'_{CF} = 0$

Chúng được ghi lên các đầu thanh tương ứng và sắp thành cột cùng với các giá trị ghi trước (hình 7.7b)

- Chốt nút F, mở nút E, phân phối nút E lần 1 với $M_E^1 = 20 - 22,5 = -2,5 \text{ kNm}$

<u>Mô men phân phối</u>	<u>Mô men truyền</u>
$M_{EF}^1 = -0,6.(-2,5) = 1,5 \text{ kNm}$	$M'_{FE} = \frac{1}{2}(1,5) = 0,8 \text{ kNm}$
$M_{EA}^1 = -0,4.(-2,5) = 1 \text{ kNm}$	$M'_{AE} = \frac{1}{2}(1,0) = 0,5 \text{ kNm}$

Chốt nút E mở nút F, phân phối nút F lần hai với $M_F^2 = M'_{FE} = 0,8 \text{ kNm}$

<u>Mô men phân phối</u>	<u>Mô men truyền</u>
$M_{FE}^2 = -0,345.0,8 = -0,3 \text{ kNm}$	$M''_{EF} = \frac{1}{2}(-0,3) = -0,15 \text{ kNm}$
$M_{FB}^2 = -0,3 \text{ kNm}$	$M''_{BF} = 0$
$M_{FC}^2 = -0,31.0,8 = -0,2 \text{ kNm}$	$M''_{CF} = 0$

Mô men truyền $M''_{EF} = -0,15 \text{ kNm}$ đã quá nhỏ so với các giá trị mô men có trong hệ, nên không cần chuyển tiếp nữa và ta dừng quá trình phân phối ở đây.

d) Tính các giá trị cuối cùng của các mô men đầu thanh và vẽ biểu đồ mô men cho hệ siêu tĩnh đã cho (hình 7.7c). Cộng đại số tất cả các giá trị mô men đã ghi ở đầu mỗi thanh, chẳng hạn:

$$M_{FE} = -120 - 44,9 + 0,8 - 0,3 = -164,4 \text{ kNm}$$

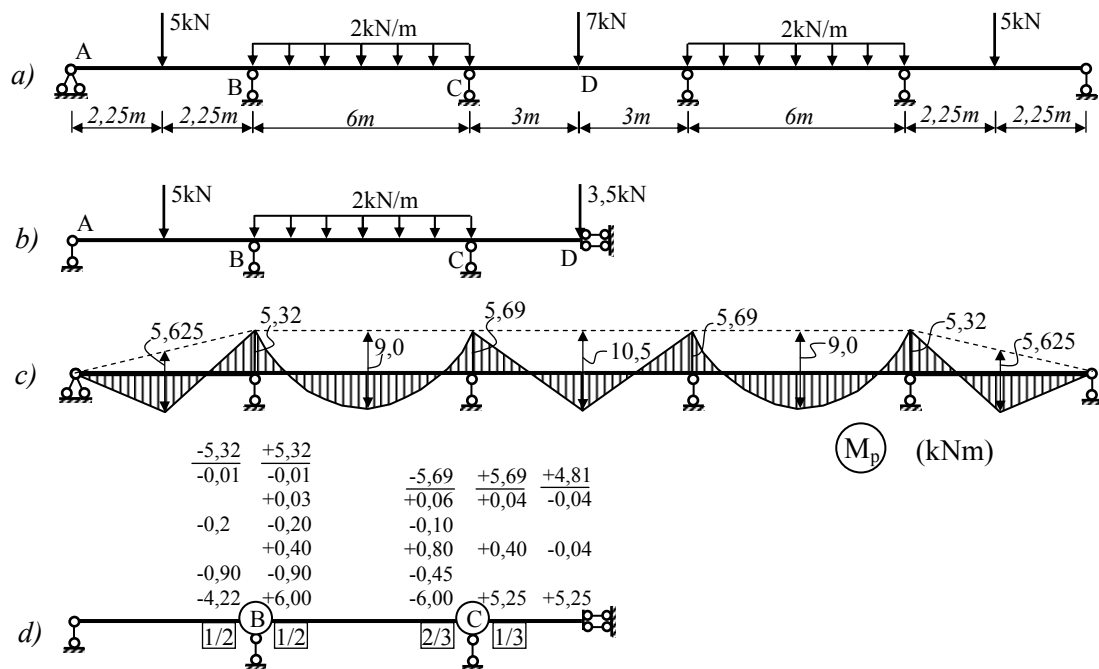
Toàn bộ quá trình này thể hiện trên hình 7.7b.

Biểu đồ M_P được vẽ trên hình 7.7c.

Biểu đồ Q_P được suy ra từ M_P tương tự phương pháp lực. Kết quả vẽ trên hình 7.7d.

Ví dụ 7-3: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho dầm liên tục cho trên hình 7.8a.

Dầm đã cho có tính chất đối xứng, chịu tải trọng đối xứng, do đó ta chỉ cần tính cho nửa dầm theo sơ đồ trên hình 7.8b.



Hình 7.8

a) Xác định độ cứng đơn vị quy ước ρ và hệ số phân phối μ :

$$\rho_{BA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{EJ}{4,5} = \frac{EJ}{6}; \quad \rho_{BC} = \rho_{CB} = \frac{EJ}{6}; \quad \rho_{CD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{12}$$

- Nút B:
$$\mu_{BA} = \frac{\frac{EJ}{6}}{\frac{EJ}{6} + \frac{EJ}{6}} = \frac{1}{2} = \mu_{BC}$$

- Nút C:
$$\mu_{CB} = \frac{\frac{EJ}{6}}{\frac{EJ}{6} + \frac{EJ}{12}} = \frac{2}{3}; \quad \mu_{CD} = \frac{\frac{EJ}{12}}{\frac{EJ}{12} + \frac{EJ}{6}} = \frac{1}{3}$$

b) Tính mô men đầu thanh trong hệ có nút bị chốt. Tra bảng 6-1

$$M_{AB}^0 = 0; \quad M_{BA}^0 = -\frac{3P\ell}{16} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 4,5}{16} = -4,22 \text{ kNm}$$

$$M_{BC}^0 = -M_{CB}^0 = \frac{q\ell^2}{12} = -\frac{2 \cdot 6^2}{12} = 6 \text{ kNm}; \quad M_{CD}^0 = M_{DC}^0 = \frac{P\ell}{2} = -\frac{3,5 \cdot 3}{2} = 5,25 \text{ kNm}$$

c) Tính mô men nút cứng:

$$M_B = 6 - 4,22 = 1,78 \text{ kNm}$$

$$M_C = -6 + 5,25 = -0,75 \text{ kNm}$$

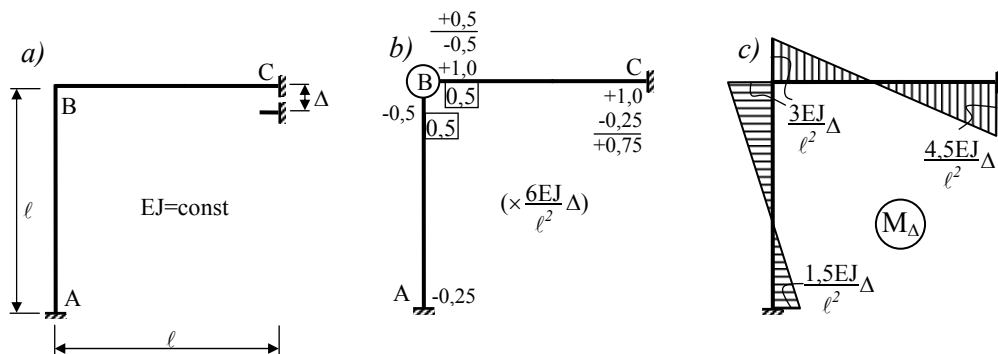
$|M_B| > |M_C|$ nên ta tiến hành phân phối mô men nút B trước.

d) Thực hiện phân phối và truyền mô men như hình 7.8d.

Cộng các kết quả tính toán trong từng cột, sẽ được mô men nội lực tại các đầu thanh. Ta vẽ biểu đồ mô men cho nửa dầm bên trái và suy ra biểu đồ mô men cho nửa dầm bên phải theo nguyên tắc đối xứng. Biểu đồ M_P vẽ trên hình 7.8c.

Ví dụ 7-4: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho hệ trên hình 7.9a.

Đây là bài toán phân phối mô men cho hệ siêu tĩnh có nút không chuyển vị thẳng do gối tựa dời chỗ gây ra.



Hình 7.9

a) Tính độ cứng đơn vị quy ước của các thanh và hệ số phân phối mô men (ρ , μ)

$$\rho_{BA} = \rho_{BC} = \frac{EI}{\ell} \quad \mu_{BA} = \mu_{BC} = \frac{\frac{EI}{\ell}}{\frac{EI}{\ell} + \frac{EI}{\ell}} = \frac{1}{2}$$

Các hệ số phân phối mô men ghi trên sơ đồ (hình 7.9b)

b) Tính mô men đầu thanh do lún gối tựa đã cho gây ra trong hệ đã có nút bị chốt.

Tra bảng 6-1 được: $M_{BC}^0 = \frac{6EI}{\ell^2} \Delta = M_{CB}^0$

Các trị số này được ghi trên đầu thanh tương ứng trên sơ đồ (hình 7.9b).

c) Thực hiện phân phối và truyền mô men như hình 7.9b. Do hệ chỉ có một nút cứng không có chuyển vị thẳng nên quá trình phân phối và truyền mô men chỉ thực hiện một lần. Cộng các kết quả tính toán trong từng cột sẽ được trị số mô men tại các đầu thanh. Biểu đồ M_Δ của khung vẽ được trên hình 7.9c.

7.3. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH GỒM CÁC NÚT CÓ CHUYỂN VỊ THẲNG

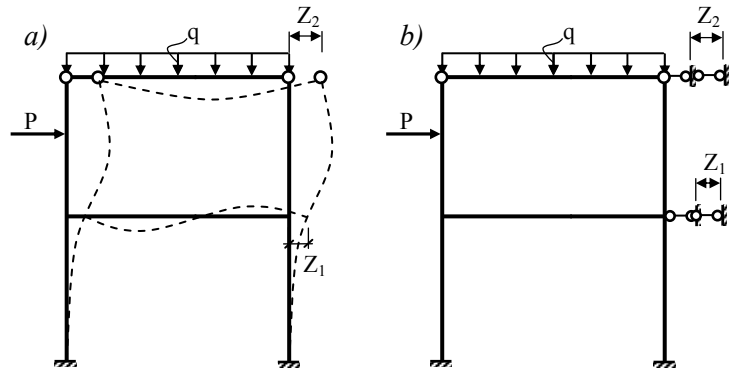
Xét khung cho trên hình 7.10a, hệ có hai chuyển vị thẳng độc lập. Giống như phương pháp lực và phương pháp chuyển vị trước đây ta thay việc tính hệ siêu tĩnh đã cho bằng hệ đã biết cách tính gọi là hệ cơ bản. Trong phương pháp phân phối mô men, ta chọn hệ gồm các nút không có chuyển vị thẳng làm hệ cơ bản bằng cách đưa vào các nút của hệ một số thanh chống vừa đủ để ngăn cản hết các chuyển vị thẳng của các nút (bằng n_i trong phương pháp chuyển vị). Hệ cơ bản này khác với hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là các nút vẫn xoay được.

Để hệ cơ bản giống với hệ đã cho về mặt chuyển vị, cần tạo cho các liên kết thanh chống đã thêm (1,2) những chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2). Đó là những ẩn cần tìm của phương pháp phân phối mô men.

Tương tự như phương pháp chuyển vị, điều kiện để xác định ẩn trên là phản lực tại mỗi liên kết đã thêm trên hệ cơ bản do tất cả các ẩn chuyển vị thẳng (Z_1, Z_2) và tải trọng đã cho gây ra bằng không. Với ví dụ trên hình 7.10a điều kiện này được viết là:

$$R_{1(Z_1, Z_2, P)} = 0$$

$$R_{2(Z_1, Z_2, P)} = 0$$



Hình 7.10

Hệ phương trình trên là hệ phương trình cơ bản của phương pháp phân phối mô men.

Sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng, khai triển hệ phương trình cơ bản ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp phân phối mô men. Với hệ có n chuyển vị thẳng độc lập của các nút, hệ phương trình chính tắc có dạng giống như (6-4). Cụ thể là:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} &= 0 \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} &= 0 \end{aligned} \quad (7-8)$$

Trong đó:

r_{km} ($k=1,2,\dots,n$) là phản lực tại liên kết thanh chống đã thêm vào thứ k do liên kết thanh chống đã thêm vào thứ m chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị ($Z_m=1$) gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp phân phối mô men.

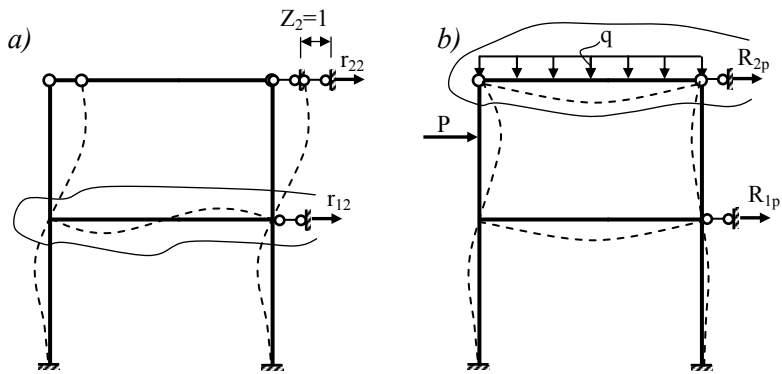
R_{kP} ($k=1,2,\dots,n$) là phản lực tại liên kết thanh chống đã thêm vào thứ k do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp phân phối mô men.

Để xác định các phản lực này, ta cũng áp dụng điều kiện cân bằng như đã làm trong phương pháp chuyển vị, chỉ khác là các biểu đồ mô men đơn vị $\overline{M}_k$ ($k=1,2,\dots,n$) và biểu đồ mô men do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản có được không phải bằng cách tra bảng như trong phương pháp chuyển vị, mà phải tiến hành giải bài toán phân phối mô men cho hệ có nút không có chuyển vị thẳng (hệ cơ bản) do lần lượt các liên kết thêm vào có chuyển vị cưỡng bức $Z_m=1$ và do tải trọng đã cho gây ra (như đã làm ở 7.2). Ví dụ trên hình 7.10a, có hệ cơ bản như hình 7.10b. Hệ phương trình chính tắc là:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

Chẳng hạn để xác định r_{12} ta dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang ($\Sigma X = 0$) đối với phần khung có chứa liên kết 1 được tách ra và do $Z_2 = 1$ tác dụng trên hệ cơ bản (hình 7.11a); để tính R_{2p} ta dùng mặt cắt tách phần khung có liên kết 2 trên hệ cơ bản do tải trọng tác dụng (hình 7.11b).



Hình 7.11

Muốn vậy phải vẽ các biểu đồ mô men đơn vị lần lượt do các ẩn $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ và biểu đồ mô men uốn do tải trọng (M_p^o) gây ra trên hệ cơ bản.

Sau khi xác định được các hệ số và số hạng tự do giải hệ phương trình chính tắc (7-8), tìm được các ẩn chuyển vị thẳng $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

Biểu đồ mô men cuối cùng được xây dựng trên cơ sở cộng tác dụng đã biết:

$$(M_p) = (\overline{M}_1) Z_1 + (\overline{M}_2) Z_2 + \dots + (\overline{M}_n) Z_n + (M_p^o) \quad (7-9)$$

Chú thích:

Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu sự biến thiên nhiệt độ hoặc chuyển vị cưỡng bức các gối tựa, nguyên tắc tính toán hoàn toàn tương tự như trường hợp tải trọng, chỉ việc thay M_p^o bằng M_t^o hoặc M_Δ^o là các biểu đồ mô men do sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức các gối tựa gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp phân phối mô men.

Ví dụ 7-5: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho khung siêu tĩnh cho trên hình 7.12a.

a) Lập hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc

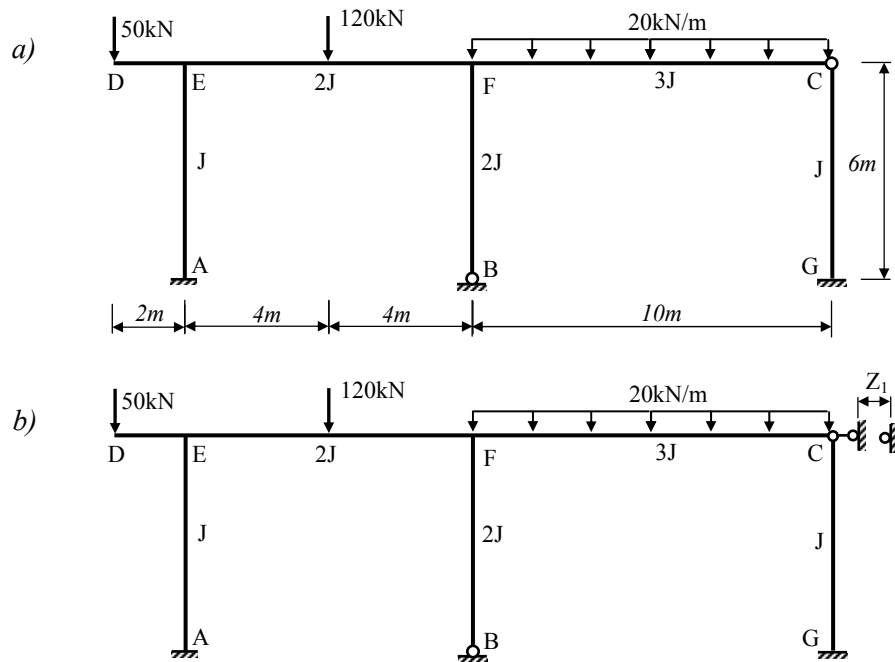
Hệ đã cho (Hình 7.12a) có một chuyển vị thẳng độc lập nên hệ cơ bản như trên hình 7.12b, phương trình chính tắc có dạng:

$$r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0$$

Để xác định r_{11} và R_{1p} ta phải vẽ ($\overline{M}_1$) và (M_p^o) bằng cách phân phối mô men trên hệ cơ bản. Các hệ số phân phối mô men trên hệ cơ bản đã tính được trong ví dụ 7-2 và biểu đồ (M_p^o) chính là (M_p) đã vẽ được trên hình 7.7c (vì khung cho trên hình 7.12 chính là khung đã làm ở ví dụ 7-2 với gối khớp cố định C được thay bằng thanh đứng CG)

b) Vẽ biểu đồ mô men ($\overline{M}_1$) do ẩn chuyển vị $Z_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

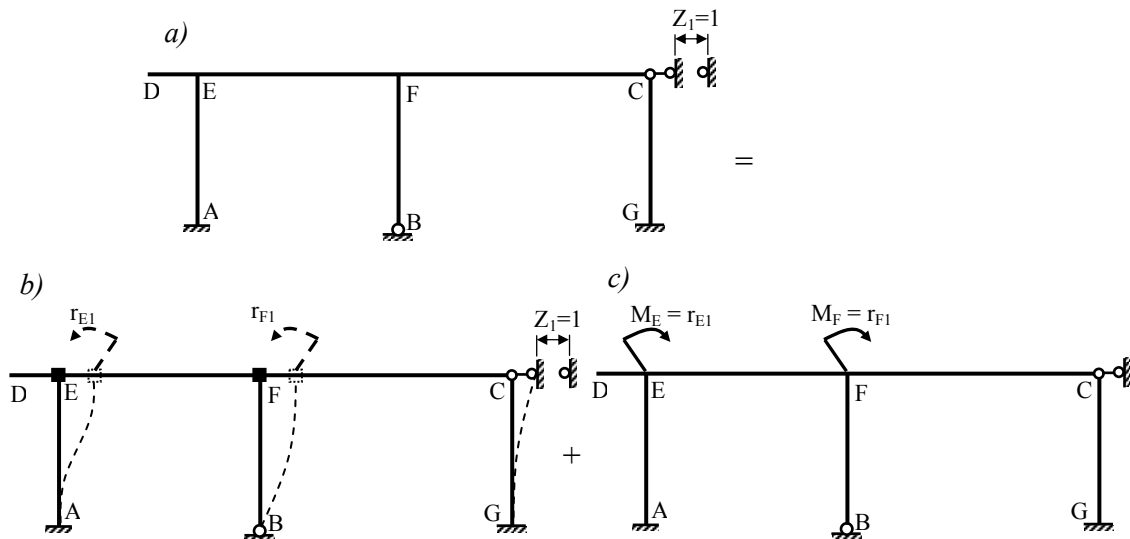
Đây là bài toán phân phối mô men cho hệ siêu tĩnh với nút không chuyển vị thẳng do gối tựa dời chỗ gây ra. Biểu đồ ($\overline{M}_1$) chính là tổng của hai biểu đồ sau:



Hình 7.12

- Biểu đồ do $Z_1=1$ gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (các nút đã bị chốt), có được nhờ tra bảng 6-1 (Hình 7.13b). Với quy ước về dấu của mô men, ta được:

$$M_{EA} = M_{AE} = \frac{6EJ}{6^2} = \frac{EJ}{6}; \quad M_{FB} = \frac{3.E.2J}{6^2} = \frac{EJ}{6}; \quad M_{GC} = \frac{EJ}{12}$$



Hình 7.13

Các trị số trên được ghi trên sơ đồ tính (hình 7.14a). Trong liên kết mô men đặt thêm vào tại các nút E và F xuất hiện các phản lực mô men (hình 7.13b):

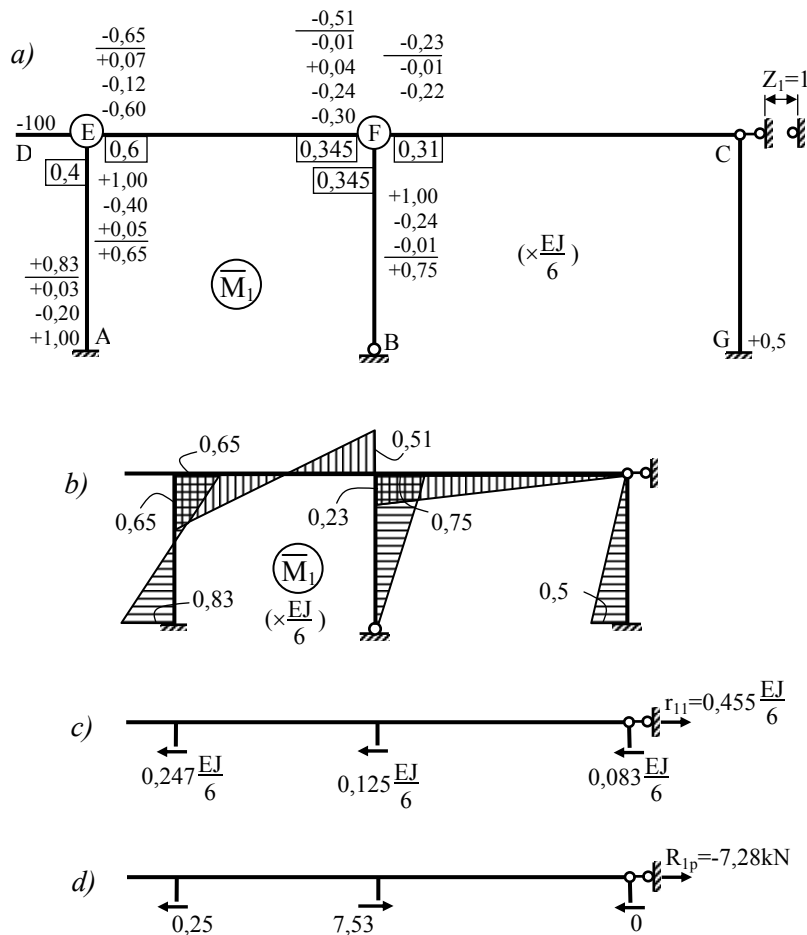
$$r_{E1} = -M_{EA} = -\frac{EJ}{6} = -i$$

$$r_{F1} = -M_{FB} = -\frac{EJ}{6} = -i$$

- Biểu đồ do các mô men nút cứng $M_E = -r_{E1} = i$ và $M_F = -r_{F1} = i$ đặt tại nút trên hệ cơ bản của phương pháp phân phối mô men (nút không bị chốt) (hình 7.13c) bằng phương pháp phân phối mô men như đã trình bày ở 7.2, với phân phối đầu tiên xuất phát từ nút E. Các giá trị mô men phân phối và mô men truyền ghi trên sơ đồ tính ở hình 7.14a. Biểu đồ $\overline{M}_1$ do ảnh hưởng $Z_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản chỉ ra trên hình 7.14b.

c) Tính hệ số r_{11} và R_{1P} :

- Tính r_{11} : bằng cách tách và xét cân bằng phần khung trên biểu đồ $\overline{M}_1$ (hình 7.14b,c). Từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang:



Hình 7.14

$$\Sigma X = r_{11} - Q_{EA} - Q_{FB} - Q_{CG} = 0$$

$$r_{11} = 0,247i + 0,125i + 0,083i = 0,455i$$

Tính R_{1P} bằng cách tách xét cân bằng phần khung trên biểu đồ (M_p^0) do tải trọng gây ra.

Các giá trị lực cắt này chính là các giá trị lực cắt của ví dụ 7-2 (hình 7.7d). Từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang ta có:

$$\Sigma X = R_{1P} - Q_{EA} - Q_{FB} - Q_{CG} = 0$$

$$R_{1P} = 0,25 - 7,53 + 0 = 7,28 \text{ kN}$$

d) Giải hệ phương trình chính tắc:

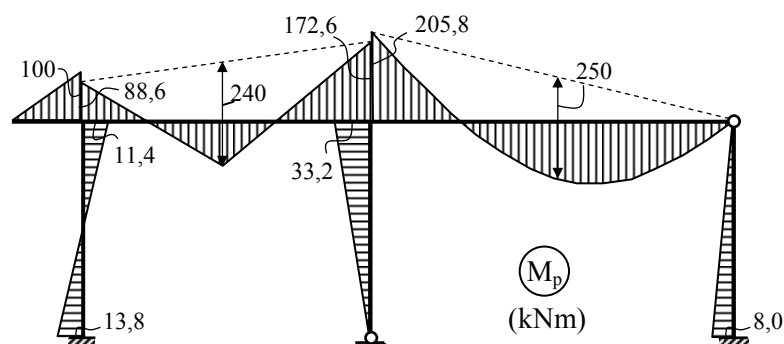
Thay các giá trị r_{11} và R_{1P} đã tính được vào phương trình ta có:

$$0,455iZ_1 - 7,28 = 0$$

$$Z_1 = \frac{7,28}{0,455i} = \frac{16}{i} \text{ (m)}$$

e) Vẽ biểu đồ nội lực cuối cùng theo công thức (7-9).

Kết quả cho trên hình 7.15.

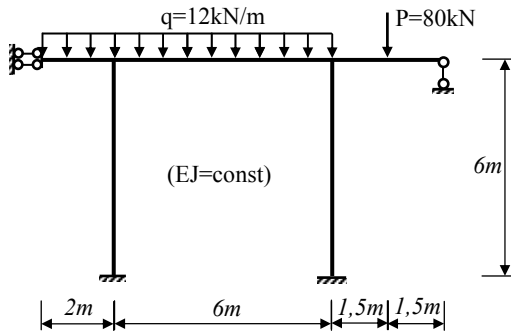


Hình 7.15

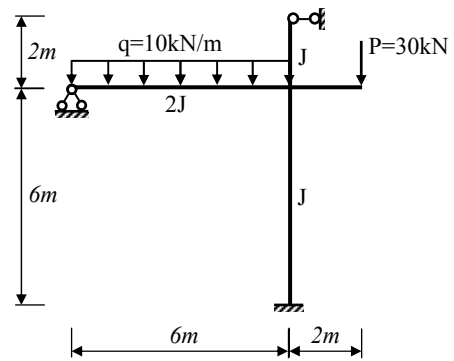
Từ biểu đồ (M_p) đã vẽ được ta sẽ suy ra biểu đồ (Q_p) và (N_p) như đã trình bày trong Chương 5.

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

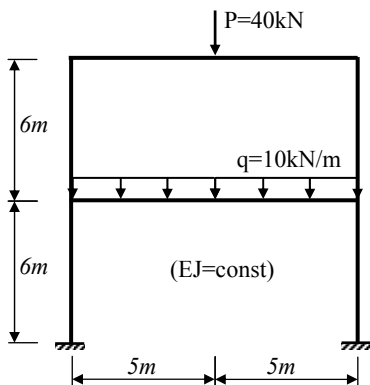
Dùng phương pháp phân phối mô men để vẽ biểu đồ M, Q, N cho các khung sau:



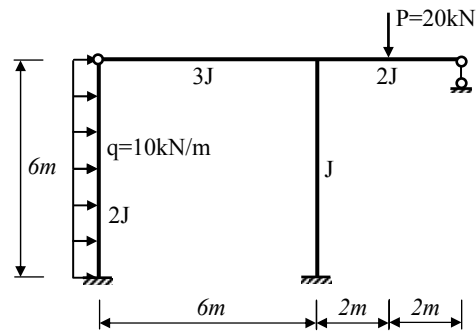
Hình 7.16



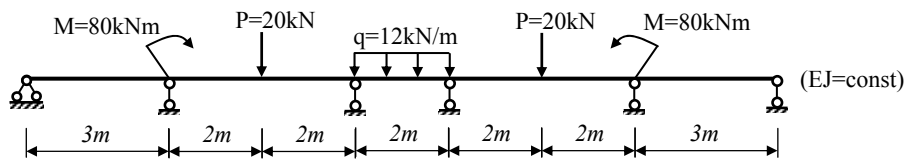
Hình 7.17



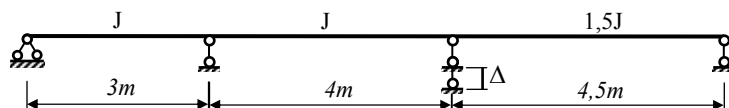
Hình 7.18



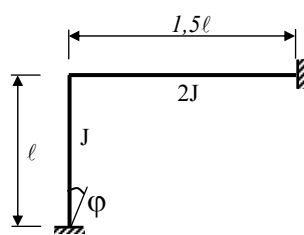
Hình 7.19



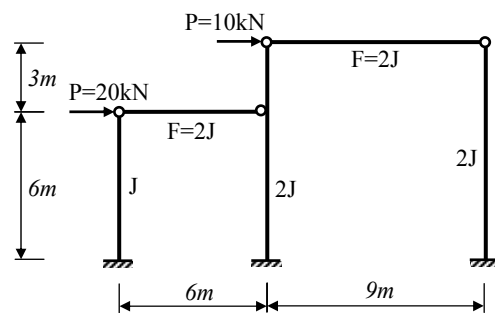
Hình 7.20



Hình 7.21



Hình 7.22



Hình 7.23

CHƯƠNG 8

HỆ KHÔNG GIAN

8.1. CÁC LOẠI LIÊN KẾT TRONG HỆ KHÔNG GIAN

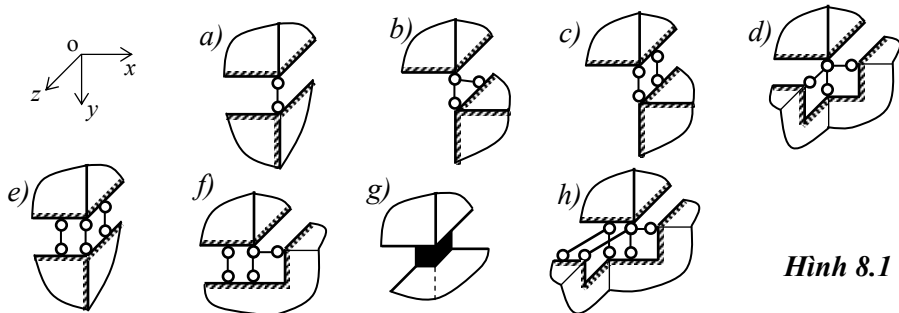
Hệ thanh không gian là hệ mà trục thanh và tải trọng không cùng nằm trong mặt phẳng. Trong thực tế hầu hết các công trình có sơ đồ tính là hệ không gian. Giống như hệ phẳng, một hệ không gian muốn có khả năng chịu tải trọng phải được cấu tạo thành hệ bất biến hình. Khi nghiên cứu cấu tạo hình học của hệ không gian, thay khái niệm miếng cứng trong hệ phẳng ta đưa vào một khái niệm mới gọi là vật thể. Vật thể là một hệ không gian bất biến hình một cách rõ rệt. Trong không gian, một vật thể này đối với một vật thể khác được coi là bất động có sáu bậc tự do, đó là ba chuyển vị tịnh tiến và ba chuyển vị xoay.

Một hệ không gian gồm nhiều vật thể nối với nhau bằng các liên kết. Các loại liên kết thường dùng trong hệ không gian như sau:

8.1.1. Thanh hai đầu có khớp lý tưởng (Hình 8.1a)

Liên kết này khử được một chuyển vị thẳng của vật thể theo phương dọc trục thanh (phương y), tức khử được một bậc tự do; song vẫn cho phép vật chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với thanh và quay quanh ba trục bất kỳ. Trong liên kết có thể phát sinh phản lực dọc theo trục thanh.

Liên kết thanh có khớp cầu ở hai đầu là loại liên kết cơ bản thường dùng nhất trong hệ không gian. Mọi liên kết khác thường là tổ hợp của một số liên kết loại này.



Hình 8.1

8.1.2. Hai thanh có một khớp cầu chung ở một đầu (Hình 8.1b)

Liên kết này khử được hai bậc tự do là những chuyển vị thẳng của vật thể trong mặt phẳng của hai thanh, song vẫn cho phép nó chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng của hai thanh và quay quanh ba trục bất kỳ. Tại liên kết có thể phát sinh hai thành phần phản lực (phương x và y).

8.1.3. Hai thanh song song (Hình 8.1c)

Liên kết này khử chuyển vị thẳng của vật thể theo phương dọc trục thanh và chuyển vị xoay trong mặt phẳng của hai thanh. Tại liên kết có thể phát sinh phản lực dọc theo hai thanh và phản lực mô men nằm trong mặt phẳng của hai thanh.

8.1.4. Ba thanh không cùng trong một mặt phẳng, có khớp cầu chung ở một đầu (Hình 8.1d)

Liên kết này khử được cả ba chuyển vị thẳng của vật thể theo các phương, tức khử được ba bậc tự do; song vẫn cho phép vật thể xoay quanh ba trục đi qua khớp chung. Trong liên kết có thể phát sinh phản lực đi qua khớp chung, lực này có thể phân thành ba thành phần (phương x, y, z)

8.1.5. Ba thanh song song không cùng nằm trong một mặt phẳng (Hình 8.1e)

Liên kết này khử chuyển vị thẳng của vật thể theo phương dọc trục thanh và hai chuyển vị góc quay quanh các trục nằm trong mặt phẳng vuông góc với các thanh (trục x, z). Tại liên kết có thể phát sinh phản lực dọc theo ba thanh và hai phản lực mô men.

8.1.6. Ba thanh cùng trong một mặt phẳng, trong đó hai thanh song song và thanh thứ ba có đầu khớp chung với một trong hai thanh trên (Hình 8.1f)

Liên kết này khử chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay của vật thể trong mặt phẳng của các thanh (mặt phẳng xoy). Tại liên kết có thể phát sinh các phản lực dọc theo trục thanh và một mô men nằm trong mặt phẳng của các thanh.

8.1.7. Mỗi hàn (Hình 8.1g)

Liên kết này khử toàn bộ các chuyển vị của vật thể, tức khử tất cả sáu bậc tự do. Trong liên kết này có thể phát sinh ba phản lực theo phương ba trục của hệ tọa độ và ba phản lực mô men trong ba mặt phẳng của hệ tọa độ đó. Mỗi hàn tương đương với sáu thanh.

Trên đây là bảy loại liên kết cơ bản thường dùng. Ngoài ra còn có thể tổ hợp các liên kết thanh để được các liên kết loại khác, chẳng hạn như khớp tựa (Hình 8.1h)

Trường hợp mỗi hàn hay khớp cầu đồng thời nối một số vật thể thì liên kết đó là liên kết phức tạp. Độ phức tạp của liên kết phức tạp bằng số vật thể được nối trừ đi một.

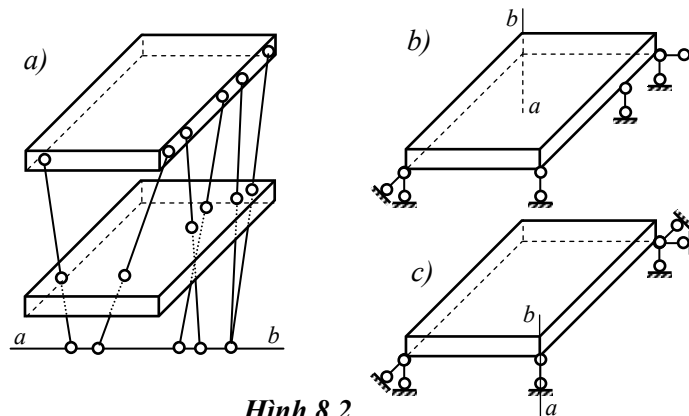
8.2. CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ KHÔNG GIAN

8.2.1. Cách nối hai vật thể thành một hệ bất biến hình

Muốn nối hai vật thể thành một hệ bất biến hình cần phải dùng liên kết khử hết sáu bậc tự do của vật thể nọ đối với vật thể kia; do đó cần sử dụng số liên kết ít nhất phải tương đương với sáu thanh và sắp xếp hợp lý; nếu không hệ sẽ biến hình hoặc biến hình tức thời. Dưới đây là một số trường hợp sáu thanh sắp xếp không hợp lý cần tránh:

1. Sáu thanh cùng cắt một đường thẳng (đường ab Hình 8.2a): Đường thẳng đó là trục quay của vật thể nọ đối với vật thể kia, tức hệ bị biến hình hoặc biến hình tức thời.

2- Số thanh đồng quy ở một điểm hoặc song song lớn hơn ba (Hình 8.2b): các thanh đồng quy (hoặc song song) chỉ khử được tối đa ba bậc tự do nên số thanh còn lại ít hơn ba không đủ để khử hết ba bậc tự do nữa, do đó hệ biến hình.



Hình 8.2

3- Ba thanh cùng trong một mặt phẳng và đồng quy ở một điểm (Hình 8.2c): Khi đó ba thanh này chỉ khử được hai bậc tự do, nên ba thanh còn lại không đủ để khử nốt bốn bậc tự do nữa, vì vậy hệ biến hình.

8.2.2. Cách nối nhiều vật thể thành một hệ bất biến hình

Trước hết thành lập điều kiện để nối V vật thể thành một hệ bất biến hình. Coi một trong số các vật thể là bất động thì đối với vật thể đó, hệ có $6(V - 1)$ bậc tự do cần khử. Gọi T là số liên kết thanh tương đương với số liên kết có trong hệ. Vậy điều kiện cần về số lượng liên kết để nối các vật thể với nhau thành một hệ bất biến hình như sau:

$$6(V - 1) \leq T \quad (8-1)$$

Trường hợp hệ không gian nối đất bằng số liên kết tựa quy ra số liên kết thanh tương đương là C :

$$6V \leq T + C \quad (8-2)$$

Nếu không đảm bảo điều kiện trên, tức thiếu liên kết, hệ sẽ biến hình. Trường hợp điều kiện cần đảm bảo với dấu "=", hệ vừa đủ liên kết, nếu sắp xếp liên kết hợp lý để khử hết bậc tự do, sẽ bất biến hình, ta được hệ không gian tĩnh định. Còn ứng với dấu "<" là hệ thừa liên kết, nếu sắp xếp hợp lý thì hệ bất biến hình, ta được hệ không gian siêu tĩnh.

Để nhận biết việc sắp xếp các liên kết có hợp lý hay không, với các hệ không gian đơn giản thường gặp, cũng tương tự như hệ phẳng, ta tìm cách đưa về trường hợp hai vật thể nối với nhau ở trên để xem xét hoặc phát triển dần từ một vật thể ra toàn hệ.

8.2.3. Cấu tạo hình học của dàn không gian

Tương tự như trong dàn phẳng, do đặc điểm về cấu tạo chỉ gồm các thanh thẳng nối với nhau bởi các khớp cầu ở hai đầu nên đối với dàn không gian cũng có thể lập được công thức điều kiện cần đơn giản hơn nhiều.

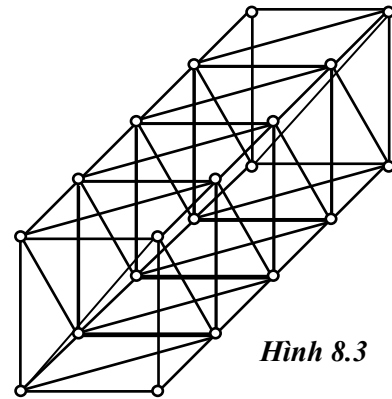
Giả sử trong hệ dàn có T thanh và M mắt. Đối với dàn không nối đất, ta quan niệm một tam giác khớp là vật thể bất động, như vậy trong hệ còn lại $M - 3$ mắt cần nối vào vật thể bất động và có $T - 3$ thanh để nối. Đối với dàn nối đất bằng C liên kết tựa tương đương liên kết thanh, coi trái đất là vật thể bất động, trong hệ có M mắt cần nối vào vật thể bất động và có $T + C$ thanh để nối. Ta có điều kiện cần về liên kết như sau:

$$\text{Đối với dàn tự do: } 3M \leq T + 6 \quad (8 - 3)$$

$$\text{Đối với dàn nối đất: } 3M \leq T + C \quad (8 - 4)$$

Ý nghĩa các dấu tương tự như trường hợp trên

Dàn không gian thường gặp là loại dàn lưới (Hình 8.3), có các thanh dàn đều nằm trên các mặt phẳng biên của một đa diện kín và mỗi mặt là một hệ phẳng bất biến hình. Người ta chứng minh được rằng một đa diện lồi là bất biến hình khi tất cả các mặt biên của nó đều là hệ phẳng bất biến hình.



Hình 8.3

8.3. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC VÀ NỘI LỰC TRONG HỆ KHÔNG GIAN TĨNH ĐỊNH

8.3.1. Xác định phản lực

Nếu một hệ bất biến hình nối cố định với đất bằng sáu thanh, thì có thể xác định phản lực từ hệ sáu phương trình cân bằng tĩnh học, thông thường hay dùng hai nhóm phương trình sau:

1. Nhóm sáu phương trình gồm ba phương trình cân bằng hình chiếu và ba phương trình cân bằng mô men:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0; \\ \Sigma M_1 = 0; \quad \Sigma M_2 = 0; \quad \Sigma M_3 = 0. \end{aligned} \quad (8-5)$$

Trong đó các trục X, Y, Z hay các trục lấy mô men 1, 2, 3, phải không được song song với nhau hoặc không được cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Nhóm sáu phương trình cân bằng mô men:

$$\begin{aligned} \Sigma M_1 = 0; \quad \Sigma M_2 = 0; \quad \Sigma M_3 = 0; \\ \Sigma M_4 = 0; \quad \Sigma M_5 = 0; \quad \Sigma M_6 = 0. \end{aligned} \quad (8-6)$$

Trong đó các trục phải thỏa mãn các điều kiện sau:

- Các trục không được cắt qua một đường thẳng.
- Không được có quá ba trục song song với nhau
- Nếu có ba trục cắt nhau tại một điểm thì ba trục còn lại không được song song với nhau.

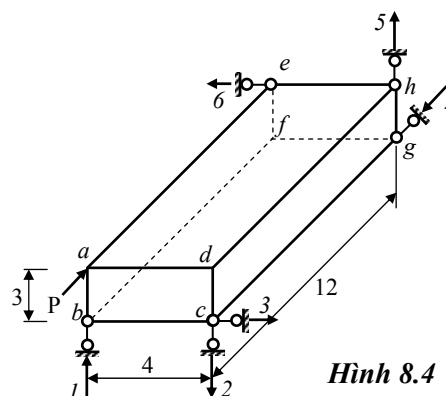
Nếu các điều kiện trên không được bảo đảm thì mặc dù các phương trình (8-5), (8-6) thỏa mãn nhưng vật thể vẫn không nằm trong trạng thái cân bằng.

Ngoài hai nhóm phương trình cân bằng tĩnh học thường dùng nêu trên còn có thể có nhiều nhóm phương trình cân bằng khác. Cần chú ý đến việc chọn trục chiếu hoặc trục lấy mô men, cũng như thứ tự phương trình sao cho mỗi phương trình có ít ẩn phản lực nhất.

Ví dụ 8-1: Xác định các phản lực của hệ cho trên hình 8.4

Dùng các phương trình cân bằng với các thứ tự sau đây:

$$\begin{aligned}\sum Y &= -P + R_4 = 0 & \rightarrow R_4 &= P \\ \sum M_{cd} &= P \cdot 4 - R_6 \cdot 12 = 0 & \rightarrow R_6 &= \frac{P}{3} \\ \sum X &= R_3 - R_6 = 0 & \rightarrow R_3 &= R_6 = \frac{P}{3} \\ \sum M_{bc} &= P \cdot 3 - R_5 \cdot 12 = 0 & \rightarrow R_5 &= \frac{P}{4} \\ \sum M_{cg} &= R_1 \cdot 4 - R_6 \cdot 3 = 0 & \rightarrow R_1 &= \frac{P}{4} \\ \sum Z &= R_1 + R_5 - R_2 = 0 & \rightarrow R_2 &= \frac{P}{2}\end{aligned}$$



Hình 8.4

8.3.2. Xác định nội lực

Để xác định nội lực tại một tiết diện trong hệ không gian vẫn áp dụng nguyên lý mặt cắt. Nguyên tắc chung là dùng mặt cắt đi qua tiết diện cần tìm nội lực và chia kết cấu ra hai phần riêng biệt. Thiết lập các phương trình cân bằng tĩnh đối với một phần kết cấu đã được tách ra, ta xác định được các nội lực cần tìm. Xét cân bằng một bộ phận trong không gian, ta lập được sáu phương trình cân bằng tĩnh, nên số nội lực chưa biết không được quá sáu. Vì vậy, trừ trường hợp đặc biệt, thông thường đối với khung, mặt cắt không được đi qua hai tiết diện, đối với dàn không được cắt quá sáu thanh. Riêng đối với dàn, nếu tách xét cân bằng phần dàn chỉ có một mắt (phương pháp tách mắt) thì với hệ lực đồng quy cân bằng chỉ lập được ba phương trình; Do đó thông thường tách mắt dàn không quá ba thanh. Tương tự đối với dàn phẳng, ta cũng có những nhận xét thường dùng từ phương pháp tách mắt đối với dàn không gian như sau:

- Nếu tại mắt có ba thanh qui tụ và không có tải trọng tác dụng thì lực dọc trong cả ba thanh đều bằng không.

- Nếu tại mặt cắt có n thanh qui tụ, trong đó có $(n - 1)$ thanh nằm trong cùng một mặt phẳng thì lực dọc trong thanh còn lại bằng không khi tại mặt không có tải trọng tác dụng hoặc tải trọng nằm trong mặt phẳng của $(n - 1)$ thanh kể trên.

Ví dụ 8-2: Xác định nội lực trong các thanh dàn trên hình 8.5.

Sử dụng phương pháp tách mắt cùng các nhận xét và theo thứ tự sau:

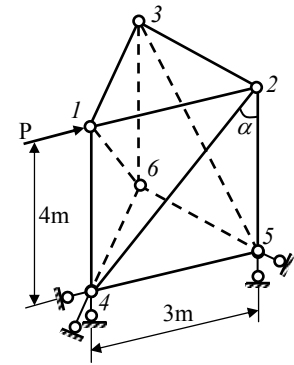
Tách mắt 2, được: $N_{23} = 0$;

Tách mắt 3, được: $N_{31} = N_{35} = N_{36} = 0$

Tách mắt 1, được: $N_{14} = N_{16} = 0$; $N_{12} = -P$

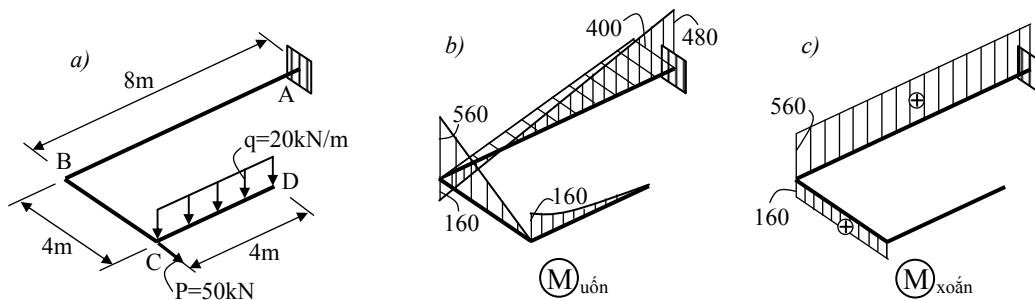
Tách mắt 6, được: $N_{24} = \frac{P}{\sin \alpha}$; $N_{25} = -P \cot \alpha$

Tách mắt 5, được: $N_{54} = 0$



Hình 8.5

Ví dụ 8-3: Vẽ biểu đồ mô men uốn và xoắn của khung cho trên hình 8.6a.



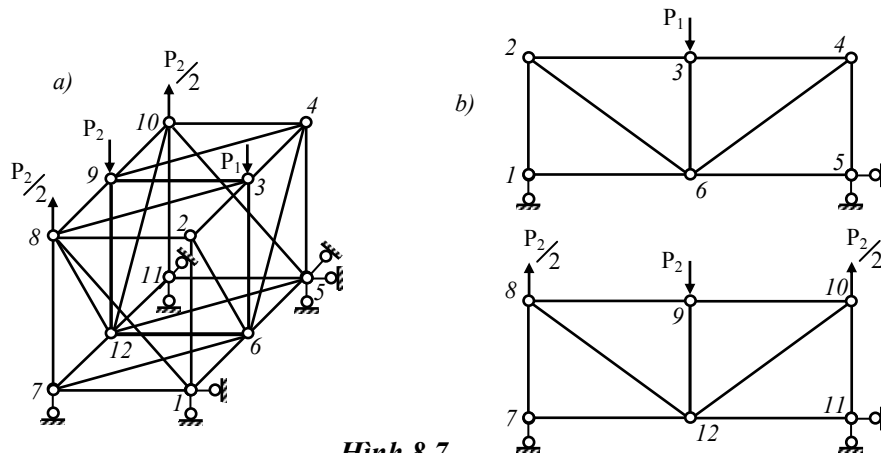
Hình 8.6

Thanh CD có mô men uốn trong mặt phẳng YOZ do q gây nên. Thanh CB có mô men uốn trong mặt phẳng XOZ do q gây nên. Thanh AB có mô men uốn trong mặt phẳng XOZ do q và trong mặt phẳng XOY do P . Biểu đồ mô men uốn của khung vẽ được trên hình 8.6b.

Lực phân bố còn gây nên mô men xoắn trong các thanh BC, AB và biểu đồ vẽ được trên hình 8.6c.

8.3.3. Tính dàn không gian bằng cách phân tích thành những dàn phẳng

Nếu dàn không gian gồm nhiều dàn phẳng bất biến hình ghép lại thì ta có thể phân tích thành các dàn phẳng để tính riêng. Cơ sở lý luận của việc phân tích này là: Trong dàn không gian, nếu tải trọng chỉ tác dụng trong mặt phẳng của từng dàn phẳng bất biến hình riêng biệt mà cân bằng với nhau, hoặc cân bằng với các phản lực tựa của hệ thuộc trong mặt phẳng ấy, thì lực dọc chỉ phát sinh trong những thanh thuộc dàn phẳng đó, còn các thanh khác của dàn không gian không nằm trong mặt phẳng ấy sẽ có lực dọc bằng không.

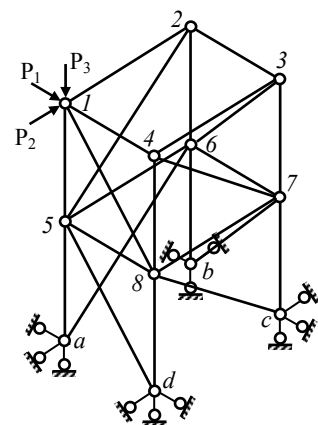


Hình 8.7

Chẳng hạn xét dàn không gian cho trên hình 8.7a, ta nhận thấy chỉ có các thanh trong hai dàn thẳng đứng có nội lực khác không và được xác định bằng cách tính riêng từng dàn như trên hình 8.7b.

Kết quả tính dàn trong ví dụ 8-2, cho thấy lực dọc chỉ sinh ra trong các thanh của dàn phẳng bất biến hình 1-2-4-5 và kết quả hoàn toàn giống với kết quả khi tính riêng dàn phẳng ấy.

Trường hợp tại mắt biên nối giữa các dàn phẳng có hệ lực tác dụng một cách bất kỳ thì ta có thể phân tích thành các thành phần nằm trong từng dàn phẳng một để sau đó sẽ tính cho từng dàn riêng biệt. Ví dụ lực P bất kỳ tại mắt 1 của dàn cho trên hình 8.8, được phân tích thành các lực P_1, P_2, P_3 .



Hình 8.8

P_1 chỉ gây ra các nội lực trong các thanh của dàn phẳng a-5-1-4-8-d.

P_2 gây ra nội lực trong các thanh của dàn phẳng a-5-1-2-6-b.

P_3 có phương trùng với giao tuyến của hai mặt dàn nên có thể tính trên sơ đồ của một trong hai dàn trên. Nội lực trong các thanh a-5 và 5-1 xuất hiện trong cả ba sơ đồ tính trên sẽ bằng tổng các kết quả riêng rẽ.

8.4. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH KHÔNG GIAN

Nguyên tắc xác định chuyển vị trong hệ thanh không gian cũng giống như hệ phẳng, chỉ khác là công thức tính phức tạp hơn do phải xét đến cả sáu thành phần nội lực: $M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, N_z$ (Hình 8.9).

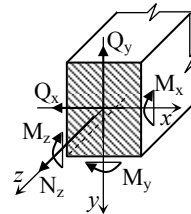
Tương tự cách chứng minh trong hệ thanh phẳng, công thức tính chuyển vị trong hệ thanh không gian có độ cong nhỏ, do tải trọng tác dụng như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{kP} = & \sum_0^s \int \bar{M}_{xk} M_{xP} \frac{ds}{EJ_x} + \sum_0^s \int \bar{M}_{yk} M_{yP} \frac{ds}{EJ_y} + \sum_0^s \int \bar{M}_{zk} M_{zP} \frac{ds}{GJ_{xoan}} + \\ & + \sum_0^s \int \bar{N}_k N_P \frac{ds}{EF} + \sum_0^s \int \mu_x \bar{Q}_{xk} Q_{xP} \frac{ds}{GF} + \sum_0^s \int \mu_y \bar{Q}_{yk} Q_{yP} \frac{ds}{GF} \quad (8-7) \end{aligned}$$

Trong đó: GJ_{xoan} độ cứng của tiết diện khi chịu xoắn. Với tiết diện vuông có $J_{xoan} \approx 0,1426a^4$; Với tiết diện chữ nhật hẹp ($a > b$)

có: $J_{xoan} \approx \frac{b^3}{a}(a - 0,63b)$; Với tiết diện tròn $J_{xoan} = \frac{\pi r^4}{2}$;

Các tích phân trên có thể được tính bằng cách nhân biểu đồ Vêrêsinh như trong hệ phẳng. Với dầm khung, tiết diện chủ yếu là uốn, thường bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.



Hình 8.9

Với hệ dàn, công thức tính chuyển vị vẫn như trước đây trong chương 4.

Các định lý về công và chuyển vị đã rút ra trong hệ phẳng vẫn đúng cho hệ không gian.

8.5. TÍNH HỆ KHÔNG GIAN SIÊU TĨNH

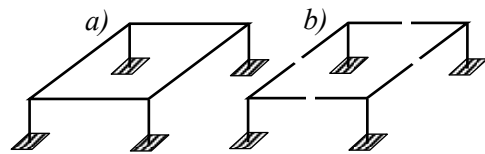
Tính hệ không gian siêu tĩnh theo các phương pháp cơ bản - phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, về nguyên tắc giống như khi tính hệ siêu tĩnh phẳng, nhưng phức tạp hơn do:

- Số ẩn trong hệ không gian nhiều hơn.
- Số nội lực trong các thanh nhiều hơn.

8.5.1. Áp dụng nguyên lý chung của phương pháp lực

Số ẩn của hệ bằng số liên kết “thừa” và được suy ra từ công thức (8-1). Để đơn giản ta thường áp dụng cách loại bỏ liên kết thừa để được hệ không gian tĩnh định, vừa đồng thời lập được hệ cơ bản.

Hệ cơ bản của hệ cho trên hình 8.10a, lập được bằng cách cắt qua bốn thanh ngang ta sẽ có bốn công sơn tĩnh định (Hình 8.10b). Tại mỗi tiết diện bị cắt xuất hiện sáu ẩn nội lực, như vậy số ẩn lực của toàn hệ là $6 \cdot 4 = 24$.



Hình 8.10

Với hệ siêu tĩnh bậc n , tương tự trước đây, ta lập được hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0$$

...

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0$$

Trong đó ý nghĩa của phương trình, của các hệ số và số hạng tự do vẫn như trong hệ phẳng. Hệ số và số hạng tự do được xác định theo công thức (8-7)

$$\begin{aligned}\delta_{ik} = & \sum_0^s \int \bar{M}_{xi} \bar{M}_{xk} \frac{ds}{EJ_x} + \sum_0^s \int \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yk} \frac{ds}{EJ_y} + \sum_0^s \int \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zk} \frac{ds}{GJ_{xoan}} + \\ & + \sum_0^s \int \bar{N}_i \bar{N}_k \frac{ds}{EF} + \sum_0^s \int \mu_x \bar{Q}_{xi} \bar{Q}_{xk} \frac{ds}{GF} + \sum_0^s \int \mu_y \bar{Q}_{yi} \bar{Q}_{yk} \frac{ds}{GF} \\ \Delta_{iP} = & \sum_0^s \int \bar{M}_{xi} M_{xP}^o \frac{ds}{EJ_x} + \sum_0^s \int \bar{M}_{yi} M_{yP}^o \frac{ds}{EJ_y} + \sum_0^s \int \bar{M}_{zi} M_{zP}^o \frac{ds}{GJ_{xoan}} + \\ & + \sum_0^s \int \bar{N}_i N_P^o \frac{ds}{EF} + \sum_0^s \int \mu_x \bar{Q}_{xi} Q_{xP}^o \frac{ds}{GF} + \sum_0^s \int \mu_y \bar{Q}_{yi} Q_{yP}^o \frac{ds}{GF}\end{aligned}$$

Chúng còn có thể xác định qua cách nhân biểu đồ và bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, lực dọc. Với dàn siêu tĩnh:

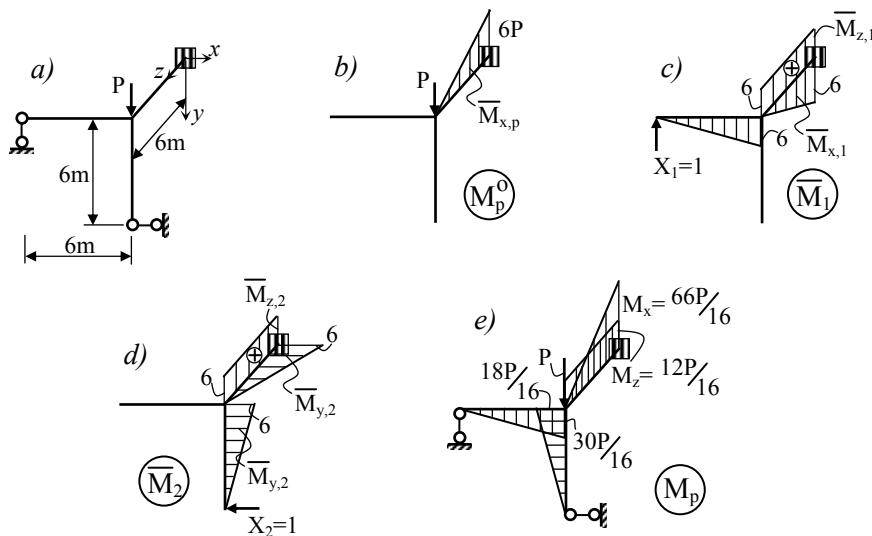
$$\delta_{ik} = \sum_j \frac{\bar{N}_{ij} \bar{N}_{kj} I_j}{EF_j}$$

$$\Delta_{iP} = \sum_j \frac{\bar{N}_{ij} N_{Pj}^o I_j}{EF_j}$$

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc tìm được các ẩn lực, nội lực cuối cùng trong hệ siêu tĩnh được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_n X_n + S_p^o$$

Ví dụ 8-4: Vẽ biểu đồ mô men uốn và xoắn của khung siêu tĩnh trên hình 8.11b. Biết $\frac{EJ}{GJ_{xoan}} = 1$, $J_x = J_y = J$.



Hình 8.11

Hệ cơ bản và biểu đồ mô men do tải trọng vẽ trên *hình 8.11b*. Các biểu đồ mô men đơn vị vẽ trên *hình 8.11c,d*. Các hệ số và số hạng tự do xác định theo cách nhân biểu đồ:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{6.6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{EJ_x} + \frac{6.6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{EJ_x} + \frac{6.6.6}{GJ_{xoan}} = \frac{360}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \frac{6.6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{EJ_y} + \frac{6.6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{EJ_y} + \frac{6.6.6}{GJ_{xoan}} = \frac{360}{EJ}$$

$$\delta_{12} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = \frac{6.6.6}{GJ_{xoan}} = \frac{216}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_p^0) = -\frac{6.6.P}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} = -\frac{72P}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M_p^0) = 0;$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$360X_1 + 216X_2 - 72P = 0;$$

$$216X_1 + 360X_2 + 0 = 0;$$

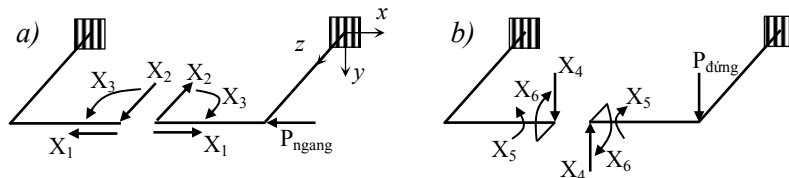
Từ đó tìm được: $X_1 = \frac{5}{16}P$; $X_2 = -\frac{3}{16}P$;

Áp dụng biểu thức (8-13) có biểu đồ mô men trên hệ siêu tĩnh (*Hình 8.11e*). Kiểm tra biểu đồ cuối cùng:

$$(\overline{M}_1)(M_p) = \frac{30P}{16} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} - \frac{66P}{16} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{EJ} + \frac{12P}{16} \cdot 6 \cdot \frac{6}{GJ_{xoan}} = 0$$

8.5.2. Tính khung siêu tĩnh phẳng chịu lực không gian

Trong trường hợp khung siêu tĩnh phẳng (*Hình 8.12*), các ẩn lực trong mặt phẳng của hệ (X_1, X_2, X_3) chỉ gây ra các chuyển vị trong mặt phẳng đó, mà không gây ra các chuyển vị theo phương các ẩn còn lại (theo X_4, X_5, X_6). Hệ phương trình chính tắc luôn luôn tách thành hai nhóm độc lập: Nhóm thứ nhất gồm ba phương trình với ba ẩn lực nằm trong mặt phẳng của hệ (X_1, X_2, X_3), và nhóm thứ hai gồm ba phương trình với ba ẩn lực còn lại (X_4, X_5, X_6). Như vậy việc giải sáu phương trình sáu ẩn số là đơn giản đi rất nhiều.



Hình 8.12

Mặt khác, nếu ta cũng phân tích tải trọng đã cho thành tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của hệ (P_{ng} trong *hình 8.12a*) và tải trọng thẳng góc với hệ (P_d trong *hình 8.12b*) thì

khối lượng tính số hạng tự do cũng giảm đi đáng kể. Tải trọng nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây nên những ảnh hưởng trong mặt phẳng của hệ (X_1, X_2, X_3), còn tải trọng vuông góc chỉ gây nên các ảnh hưởng còn lại (X_4, X_5, X_6).

Ví dụ 8-5: Vẽ biểu đồ mô men uốn của khung cho trên hình 8.13a, biết tiết diện của thanh hình tròn có $\frac{E}{G} = 2,5$; $\frac{J_{xoan}}{J} = 2$.

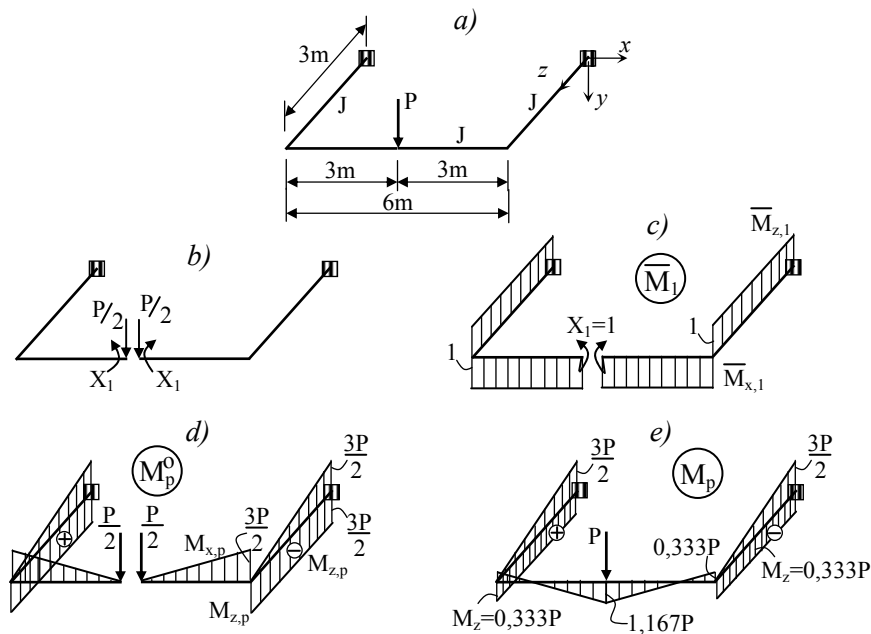
Hệ cơ bản vẽ trên hình 8.13b. Từ tính chất đối xứng, khung siêu tĩnh chỉ có một ảnh hưởng X_1 (mô men uốn tại tiết diện bị cắt). Biểu đồ do X_1 và do tải trọng vẽ trên hình 8.13c,d. Phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

Hệ số δ_{11} và số hạng tự do Δ_{1P} xác định được:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1 | \overline{M}_1) = \left(\frac{1.3.1}{EJ} + \frac{1.3.1}{G.2.J} \right) \cdot 2 = \frac{13,5}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1 | M_p^0) = - \left(\frac{3P}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{EJ} + \frac{3P}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{G.2.J} \right) \cdot 2 = - \frac{15,75P}{EJ}$$

Từ phương trình: $13,5X_1 - 15,75P = 0$, tìm được $X_1 = 1,167P$. Biểu đồ mô men uốn cuối cùng vẽ trên hình 8.13e.



Hình 8.13

Ví dụ 8-6: Vẽ biểu đồ mô men uốn trong hệ dầm trực giao cho trên hình 8.14a.

Hệ dầm trực giao có thể đưa về sơ đồ tính đơn giản như trên hình 8.14b. Do đó hệ cơ bản lập được trên hình 8.14c, đều gồm các dầm đơn giản chịu các lực tác dụng trong mặt phẳng của từng dầm. Các biểu đồ đơn vị và biểu đồ do tải trọng vẽ trên hình 8.14e, f.

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0$$

Các hệ số và số hạng tự do:

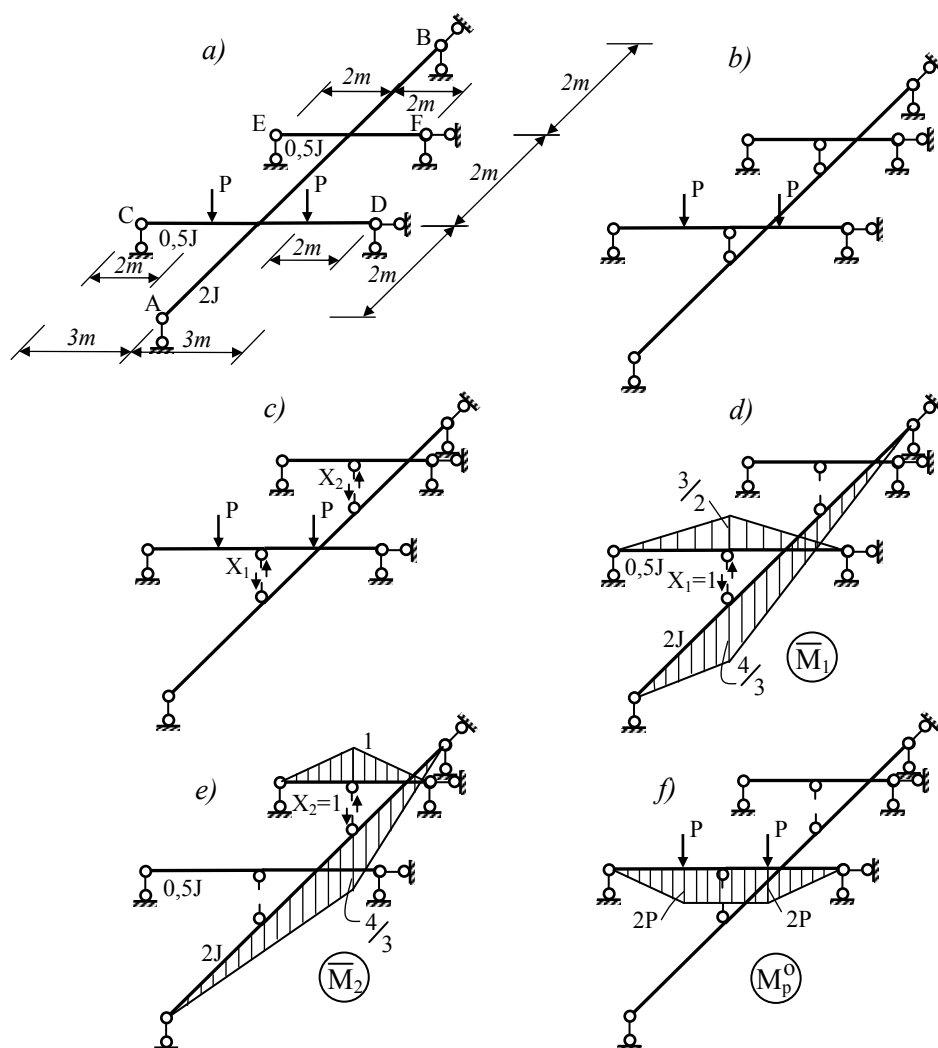
$$\delta_{11} = (\overline{M}_1 | \overline{M}_1) = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{2}{0,5EJ} + \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{97}{9EJ};$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2 | \overline{M}_2) = \frac{40}{9EJ};$$

$$\delta_{12} = (\overline{M}_1 | \overline{M}_2) = \frac{42}{27EJ};$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1 | M_p^0) = \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2P \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - 1 \cdot 2P \cdot \frac{5}{2 \cdot 2} \right) \frac{2}{0,5EJ} = -\frac{46P}{3EJ};$$

$$\Delta_{2P} = (\overline{M}_2 | M_p^0) = 0;$$



Hình 8.14

Hệ phương trình chính tắc dạng số:

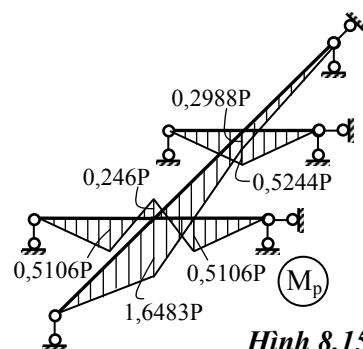
$$\frac{97}{9} X_1 + \frac{42}{27} X_2 - \frac{46}{3} P = 0$$

$$\frac{42}{27} X_1 + \frac{40}{9} X_2 - 0 = 0$$

Từ đó tìm được: $X_1 = 1,4984P$,

$$X_2 = -0,5244P.$$

Biểu đồ mô men uốn cuối cùng vẽ trên *hình 8.15*.

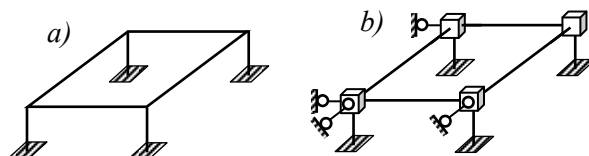


Hình 8.15

8.5.3. Tính hệ không gian siêu tĩnh theo phương pháp chuyển vị

Tương tự như hệ phẳng, các ẩn số trong phương pháp chuyển vị là các chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng của các nút khung. Mỗi nút khung không gian có thể có sáu chuyển vị: Ba chuyển vị góc xoay quanh ba trục tọa độ và ba chuyển vị thẳng hướng theo ba trục đó.

Với các giả thiết như đã sử dụng trước đây, ta có số ẩn chuyển vị góc bằng ba lần số nút cứng trong hệ (vì mỗi nút cứng có ba ẩn góc xoay); còn số ẩn chuyển vị thẳng bằng số chuyển vị thẳng độc lập có trong hệ. Cũng giống như đối với hệ phẳng, để xác định số ẩn chuyển vị thẳng ta đưa hệ đã cho về hệ khớp bằng cách thay tất cả các nút cứng và liên kết ngàm bằng khớp rồi xét tính biến hình của hệ khớp đó. Số ẩn chuyển vị thẳng bằng số liên kết thanh chống đã thêm vào vừa đủ để cố định các nút của hệ khớp theo các phương. Hệ đã cho trên *hình 8.16a* có 12 ẩn chuyển vị góc và 4 ẩn chuyển vị thẳng.



Hình 8.16

Hệ cơ bản là hệ các nút đã hoàn toàn được cố định, lập được bằng cách đưa các liên kết ngàm chống xoay (theo ba trục) vào các nút cứng và đặt thêm các liên kết thanh chống ngăn chuyển vị thẳng của nút. Hệ cơ bản của khung đã cho được vẽ trên *hình 8.16b*.

Trên *hình 8.17*, vẽ một số biểu đồ do tải trọng, do ẩn chuyển vị đơn vị tác dụng trên hệ cơ bản. Khi ẩn chuyển vị góc xoay tác dụng các thanh nối với nút đều biến dạng: Các thanh nằm trong mặt phẳng góc xoay bị uốn, còn các thanh khác vuông góc với mặt phẳng đó bị xoắn. Mô men xoắn do góc xoay đơn vị bằng:

$$M_z = \frac{GJ_{xoan}}{\ell} = \frac{GJ_{xoan}}{EJ} i; \quad i = \frac{EJ}{\ell}$$

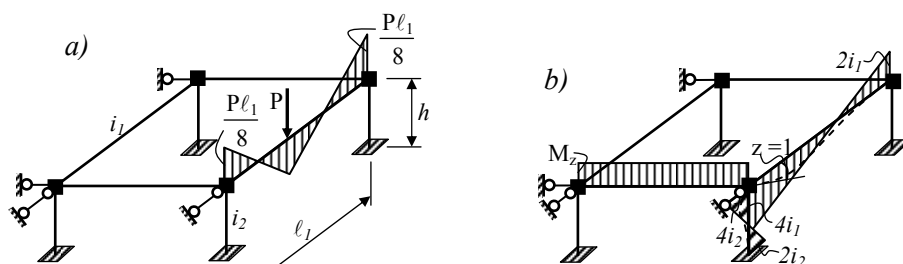
Hệ phương trình chính tắc có dạng như trước đây:

$$r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ý nghĩa phương trình, các hệ số và số hạng tự do vẫn như trong hệ phẳng.

Giải hệ phương trình chính tắc tìm được các ẩn chuyển vị và mô men cuối cùng được xác định theo biểu thức cộng tác dụng:

$$\textcircled{M_p} = \textcircled{M_1}Z_1 + \textcircled{M_2}Z_2 + \dots + \textcircled{M_n}Z_n + \textcircled{M_p^0}$$



Hình 8.17