Gs, Ts. LỀU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP I

Hệ tĩnh định

Tái bản có sửa đổi và bổ sung

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2006

50 NĂM ĐÀO TẠO
40 NĂM THÀNH LẬP

6 - 605
1288 – 12.1 - 06
KHKT - 06

Lời tựa

Cơ học kết cấu là một phần kiến thức cơ sở đối với kỹ sư thuộc các ngành xây dựng cơ bản, môn học được bố trí trong chương trình đào tạo của nhiều trường đại học như xây dựng, giao thông, thủy lợi, mỏ địa chất ...

Cơ học kết cấu trang bị cho kỹ sư và sinh viên những kiến thức cần thiết để giải quyết các bài toán thực tế có liên quan đến các khâu từ thiết kế, thẩm định đến thi công và để nghiên cứu các môn kỹ thuật khác của chuyên ngành.

Giáo trình **Cơ học kết cấu** được biên soạn nhằm giúp các kỹ sư và sinh viên nghiên cứu, luyện tập khả năng phân tích tính chất chịu lực của kết cấu và kỹ năng tính toán kết cấu chịu các nguyên nhân tác dụng thường gặp trong thực tế như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, chế tạo các thanh không chính xác.

Về nội dung, giáo trình được biên soạn nhằm đáp ứng yêu cầu về học và dạy phù hợp với chương trình môn học hiện hành trong các trường đại học, không tham vọng trình bày được đầy đủ các khía cạnh phong phú, đa dạng của Cơ học kết cấu.

Trong lần tái bản này, tác giả đã:

Chỉnh sửa những sai sót trong cuốn Cơ học kết cấu xuất bản năm 2000.

Bổ sung một số nội dung nhằm mục đích nâng cao và phục vụ cho các môn học chuyên môn.

Tác giả chân thành cảm ơn các Cán bộ giảng dạy trong bộ môn Cơ học kết cấu và bộ môn Cầu Hầm đã có những ý kiến đóng góp quý báu cho cuốn Cơ học kết cấu xuất bản năm 2000, đặc biệt cảm ơn Ths. Lều Mộc Lan đã có những giúp đỡ cụ thể cho bản thảo trong lần tái bản.

Chúng tôi mong tiếp tục nhận được sự quan tâm và những ý kiến đóng góp của bạn đọc cùng các đồng nghiệp.

TÁC GIẢ

Ký hiệu các đại lượng

Hệ toạ độ

z trục thanh;
x, y hệ trục chính trung tâm của tiết diện;
ρ, θ toạ độ cực.

Các đặc trưng vật liệu

E môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén (môđun Young);
μ hệ số biến dạng ngang (hệ số Poisson);
G môđun đàn hồi khi trượt;
α hệ số dãn nở dài vị nhiệt của vật liệu.

Các đặc trưng hình học

A diện tích tiết diện;
S, I, W mômen tĩnh, mômen quán tính và mômen chống uốn của tiết diện;
S_x, S_y mômen tĩnh đối với trục x và đối với trục y;
I_x, I_y mômen quán tính đối với trục x và đối với trục y;
I_{xy} mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục xy;
W_x, W_y mômen chống uốn của tiết diện trong mặt phẳng uốn yz và mặt phẳng uốn xz;
$W_{x,d}$ mômen chống uốn dẻo của tiết diện trong mặt phẳng uốn yz;
I_p mômen quán tính cực (đối với gốc toạ độ).

Ngoại lực và phản lực

P lực tập trung;
p cường độ lực phân bố diện tích;
q cường độ lực phân bố theo đường, vuông góc với trục thanh;
t cường độ lực phân bố theo đường, tiếp tuyến với trục thanh;
M mômen tập trung;
m cường độ mômen phân bố;

R_{jm} phản lực tại liên kết j do nguyên nhân m;
$\bar{R}_{jm}$ phản lực tại liên kết j do nguyên nhân m bằng đơn vị;
r_{km} phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m;
r'_{km} phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m;
P_{tc} tải trọng tiêu chuẩn;
P_t tải trọng tính toán.

Các ứng suất

p, σ, τ ứng suất toàn phần, ứng suất pháp, ứng suất tiếp;
σ_{tl} giới hạn tỷ lệ;
σ_{ch} giới hạn chảy;
σ_b giới hạn bền;
σ_o ứng suất giới hạn;
$[\sigma]$ ứng suất cho phép;
R_{tc} cường độ tiêu chuẩn, sức chịu tiêu chuẩn;
R_t cường độ tính toán, sức chịu tính toán.

Nội lực

N, M, Q các thành phần nội lực trong bài toán phẳng;
$\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$ các thành phần nội lực do lực đơn vị gây ra;
N lực dọc;
M_x mômen uốn trong mặt phẳng yz (mômen uốn quanh trục x);
M_y mômen uốn trong mặt phẳng xz (mômen uốn quanh trục y);
M_z mômen xoắn (mômen xoắn quanh trục z);
Q_x, Q_y lực cắt theo phương x và lực cắt theo phương y;
M_{gh} mômen uốn giới hạn;

Biến dạng và chuyển vị

ψ biến dạng xoay tỷ đối (góc hợp giữa hai tiết diện của một phân tố thanh có chiều dài bằng đơn vị khi phân tố bị biến dạng);
ε biến dạng dọc trục tỷ đối;
γ biến dạng trượt tỷ đối;
Δl biến dạng dài của đoạn thanh;

θ	góc xoắn tỷ đối của thanh;
Δ_{km}	chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do nguyên nhân m;
Z_{jm}	chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j ở trạng thái m;
y, φ	độ võng và góc xoay của tiết diện thanh chịu uốn trong mặt phẳng yz.
δ_{km}	chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m;
δ_{km}	chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do chuyển vị cưỡng bức Z_m.

Các ký hiệu khác

ν	hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp;
S	đại lượng nghiên cứu S;
$\bar{S}$	đại lượng nghiên cứu S do lực đơn vị gây ra;
(S)	biểu đồ của đại lượng S;
$(\bar{S})$	biểu đồ của đại lượng nghiên cứu S do lực đơn vị gây ra;
T	công của ngoại lực;
A^*	công của nội lực;
U	thế năng biến dạng đàn hồi;
U_P	thế năng của ngoại lực;
t_{1m}, t_{2m}	độ biến thiên nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới thanh;
t_{cm}	độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh;
n	bậc siêu tĩnh, bậc siêu động, hệ số vượt tải (hệ số độ tin cậy về tải trọng);
k	hệ số an toàn;
γ	hệ số điều kiện làm việc;
γ_{cn}	hệ số độ tin cậy theo chức năng của kết cấu;
γ_{vl}	hệ số độ tin cậy của vật liệu (hệ số đồng chất của vật liệu).

Mở đầu

1. Đối tượng và nhiệm vụ của Cơ học kết cấu

Cơ học kết cấu là môn *khoa học thực nghiệm*, trình bày các phép tính để kiểm tra *độ bền, độ cứng* và *độ ổn định* của các công trình được chế tạo từ các vật thể biến dạng, chịu tác dụng của các nguyên nhân khác nhau như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ và hiện tượng lún.

Tính công trình về độ bền nhằm bảo đảm cho công trình có khả năng chịu tác dụng của tải trọng cũng như của các nguyên nhân khác mà không bị phá hoại.

Tính công trình về độ cứng nhằm bảo đảm cho công trình không có chuyển vị lớn và rung động lớn có thể làm cho công trình mất trạng thái làm việc bình thường ngay cả khi điều kiện bền vẫn bảo đảm.

Tính công trình về mặt ổn định là tìm hiểu khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của công trình dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Tuy nội dung nghiên cứu của Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu giống nhau nhưng phạm vi nghiên cứu có khác nhau. Sức bền vật liệu nghiên cứu cách tính độ bền, độ cứng và độ ổn định của từng cấu kiện riêng rẽ. Cơ học kết cấu nghiên cứu toàn bộ công trình gồm nhiều cấu kiện riêng rẽ liên kết với nhau tạo thành một kết cấu có khả năng chịu lực và nghiên cứu phương pháp tính toán các kết cấu đó. Đó là sự phân biệt để giảng dạy còn trong nghiên cứu cũng có nhiều vấn đề đồng thời cùng thuộc lĩnh vực của cả hai môn học.

Nhiệm vụ chủ yếu của Cơ học kết cấu là *xác định nội lực (còn gọi là ứng lực) và chuyển vị trong công trình.* Độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình có liên quan đến tính chất cơ học của vật liệu, hình dạng và kích thước của cấu kiện, nội lực phát sinh và phát triển trong công trình. Hơn nữa kích thước của cấu kiện lại phụ thuộc nội lực trong cấu kiện đó. Do đó công việc đầu tiên khi tính công trình là xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình dưới các tác động bên ngoài.

Trong thực tế thường gặp hai loại bài toán:

* *Bài toán kiểm tra*: Ta gặp bài toán này khi đã có sẵn công trình, tức là đã biết hình dạng, kích thước của công trình cũng như đã biết được các nguyên nhân tác động bên ngoài. Trong trường hợp này cần phải xác định trạng thái nội lực và biến dạng của hệ dưới các tác động bên ngoài có thể xẩy ra để phán đoán xem công trình có bảo đảm đủ bền, đủ cứng và đủ ổn định hay không, công trình thiết kế có kinh tế hay không?

* *Bài toán thiết kế*: Ta gặp bài toán này khi cần thiết kế công trình, tức là cần xác định hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý để cho công trình có khả năng thỏa mãn điều kiện bền, điều kiện cứng và điều kiện ổn định dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài đã biết. Để giải bài toán này người thiết kế thường phải dựa vào kinh nghiệm hoặc sử dụng các phương pháp thiết kế sơ bộ gần đúng để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình. Tiếp đó, tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên để xem công trình vừa mới giả thiết có thỏa mãn các điều kiện bền, điều kiện cứng, điều kiện ổn định hay không, có bảo đảm tiết kiệm nguyên vật liệu hay không. Trên cơ sở đó người thiết kế hiệu chỉnh lại giả thiết ban đầu đã chọn.

Như vậy, trong cả hai loại bài toán kiểm tra và thiết kế ta đều phải biết cách xác định trạng thái nội lực và biến dạng phân bố trong công trình khi cho biết hình dạng kích thích thước của các cấu kiện trong công trình và các tác động bên ngoài.

Sau khi môn cơ học kết cấu đã giải quyết vấn đề nội lực và biến dạng của công trình, các môn kỹ thuật chuyên môn như Kết cấu thép, Kết cấu bêtông, Kết cấu gỗ, Kết cấu gạch đá sẽ căn cứ vào các kết quả tính nội lực đã tìm được đồng thời tùy theo tính năng của vật liệu do các môn đó nghiên cứu để tiếp tục hoàn thiện việc tính toán công trình. Do đó Cơ học kết cấu là môn kỹ thuật cơ sở, chuẩn bị phục vụ cho các môn học chuyên môn.

Ngoài ra, Cơ học kết cấu còn có nhiệm vụ nghiên cứu dạng hợp lý của các công trình bảo đảm yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất cũng như nghiên cứu các quy luật hình thành công trình bảo đảm cho công trình không bị thay đổi dạng hình học dưới tác động của các nguyên nhân bên ngoài.

Cơ học kết cấu là môn *khoa học thực nghiệm* do đó các khâu lý luận và thực nghiệm có liên quan mật thiết với nhau. Thực nghiệm có thể tiến hành trước hoặc sau khi sáng tạo lý luận, đôi khi tiến hành cả trước lẫn sau. Thực nghiệm tiến hành trước khi sáng tạo lý luận nhằm phát hiện những nhân tố cơ bản trong đối tượng nghiên cứu, đồng thời cũng phát hiện những nhân tố thứ yếu có thể bỏ qua được để đơn giản hóa bước đúc kết lý luận. Thực nghiệm tiến hành sau khi sáng tạo lý luận nhằm kiểm tra kết quả tìm được bằng lý luận. Chỉ có những công trình nghiên cứu nào được thực nghiệm xác nhận mới xứng đáng được tin cậy.

Môn Cơ học kết cấu giữ một vai trò quan trọng đối với kỹ sư xây dựng làm công tác thiết kế cũng như thi công. Cơ học kết cấu trang bị cho kỹ sư thiết kế những tri thức giúp họ phát hiện được trạng thái phân bố nội lực và biến dạng trong công trình và do đó tìm được những hình dạng hợp lý của công trình, thể hiện được một cách đầy đủ và hợp lý những ý nghĩ sáng tạo của mình. Môn học này giúp những người làm công tác thi công có khả năng hiểu biết đúng đắn sự làm việc của công trình, loại trừ được những thiếu sót trong khi xây dựng, quyết định một cách đúng đắn về kích thước các đà giáo, các thiết bị lắp ráp và có khả năng quyết định thay thế cấu kiện này bằng cấu kiện khác tương đương...

2. Sơ đồ tính của công trình

Nói chung, khi xác định nội lực trong công trình, nếu xét đến một cách chính xác và đầy đủ tất cả các yếu tố hình học của các cấu kiện thì bài toán sẽ quá phức tạp. Do đó cũng như các môn khoa học khác, Cơ học kết cấu phải dùng phương pháp trừu tượng khoa học để thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính của nó.

Sơ đồ tính của công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn bảo đảm phản ánh được sát với sự làm việc thực của công trình.

Trong sơ đồ tính người ta lược bỏ các yếu tố không cơ bản và chỉ xét đến các yếu tố chủ yếu quyết định khả năng làm việc của công trình. Khi tính toán ta cần tìm cách thay thế công trình thực bằng sơ đồ tính hợp lý gọi là lựa chọn sơ đồ tính.

Lựa chọn sơ đồ tính là công việc khá phức tạp và đa dạng. Khó có thể nêu ra những quy tắc có tính chất tổng quát về vấn đề này. Việc chọn sơ đồ tính chẳng những tùy thuộc vào hình dạng kết cấu và tầm quan trọng của nó, tùy thuộc vào khả năng tính toán, tùy thuộc vào quan hệ tỷ lệ giữa độ cứng của các cấu kiện trong công trình mà còn tùy thuộc vào tải trọng và tính chất tác dụng của tải trọng. Khi lựa chọn sơ đồ tính chẳng những phải xem xét các giả thiết đơn giản hóa có thể chấp nhận được không, chẳng những phải kiểm tra xem sơ đồ tính có đủ phản ánh sát thực tế về các điều kiện độ bền, độ cứng, ổn định mà còn phải chú ý khảo sát thêm các yêu cầu kinh tế, kỹ thuật khác nữa.

Trong thực tế, để chuyển công trình thực về sơ đồ tính tương ứng, thường cần thực hiện hai bước biến đổi sau:

* ***Bước thứ nhất***: Chuyển công trình thực về sơ đồ của công trình. Bước này được thực hiện theo một số nguyên tắc thay thế gần đúng như sau:

✦Thay các thanh bằng đường trung gian gọi là *trục*. Thay các bản hoặc vỏ bằng các *mặt trung gian*.

✦Thay tiết diện bằng các đại lượng đặc trưng như diện tích A, mômen quán tính I... của tiết diện.

✦Thay các thiết bị tựa bằng các liên kết tựa lý tưởng (không ma sát).

✦ Đưa các tải trọng tác dụng trên mặt cấu kiện về trục của cấu kiện.

* ***Bước thứ hai***: *Chuyển sơ đồ của công trình về sơ đồ tính của công trình.*

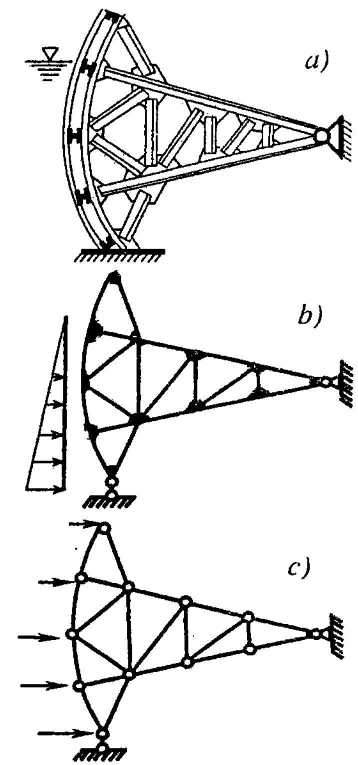
Ở bước này, nếu cần, ta bỏ qua thêm một số yếu tố giữ vai trò thứ yếu trong sự làm việc của công trình nhằm bảo đảm cho sơ đồ tính phù hợp với khả năng tính toán của người thiết kế.

Ví dụ, với công trình dàn van cung trên hình 1a, sau khi thực hiện các phép biến đổi trong bước thứ nhất, ta được sơ đồ của công trình như trên hình 1b. Nếu dùng sơ đồ này để tính toán với quan niệm mắt dàn (giao điểm của các thanh) được xem là nút cứng, nghĩa là xem chuyển vị (sự chuyển dời vị trí khi chịu lực) thẳng và chuyển vị góc của các đầu thanh quy tụ ở mỗi nút như nhau, thì bài toán sẽ rất phức tạp nếu không có sự trợ giúp của máy tính điện tử.

Trên thực tế, để đơn giản hóa cách tính dàn người ta thường quy đổi tải trọng về mắt dàn và giả thiết xem các mắt của dàn như các khớp lý tưởng, nghĩa là quan niệm các thanh quy tụ vào mắt có thể xoay tự do, không ma sát. Sau khi thực hiện cách đơn giản hóa đó, ta được hệ trên hình 1c, là sơ đồ tính của công trình.

Nếu sơ đồ của công trình đã phù hợp với khả năng và yêu cầu tính toán thì có thể chấp nhận làm sơ đồ tính mà không cần đơn giản hóa thêm nữa.

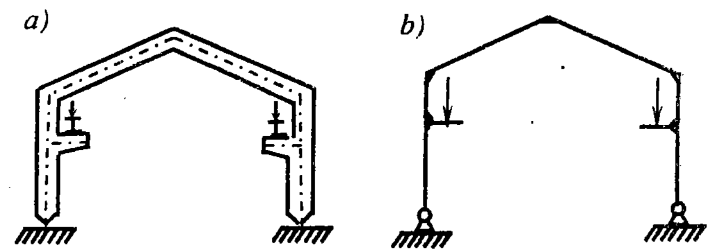
Ví dụ, với hệ khung cho trên hình 2a, sau khi thực hiện phép biến đổi ở bước thứ nhất ta có sơ đồ công trình như trên hình 2b. Sơ đồ này cũng là sơ đồ tính vì đã phù hợp với khả năng tính toán.



Hình 1

Như trên đã nói, cách chọn sơ đồ tính của công trình là một vấn đề phức tạp và quan trọng vì chất lượng kết quả tính toán phụ thuộc rất nhiều vào sơ đồ tính.

Cũng cần nhấn mạnh thêm rằng người thiết kế luôn luôn phải có trách nhiệm tự kiểm tra xem sơ đồ tính đã chọn có phù hợp với thực tế không, có phản ánh chính xác sự làm việc thực tế của công trình không. Nếu việc lựa chọn sơ đồ tính dựa trên nhiều giả thiết đơn giản hóa có thể dẫn đến sai lệch quá lớn so với sự làm việc thực tế của công trình thì người thiết kế phải tiến hành tính toán lại với sơ đồ tính mới đã được chính xác hóa thêm.



Hình 2

Đối với những phép tính sơ bộ, sơ đồ tính có thể đơn giản, thô sơ còn đối với những bước tính toán có tính chất quyết định thì sơ đồ tính phải hoàn thiện, chặt chẽ.

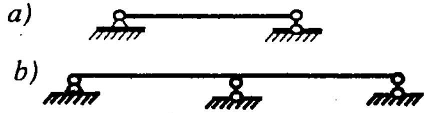
3. Phân loại công trình

Có nhiều cách phân loại công trình. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu một vài cách phân loại thường được sử dụng.

A. Phân loại theo sơ đồ tính

Theo cách này ta chia các công trình thành hai loại: *hệ phẳng và hệ không gian.*

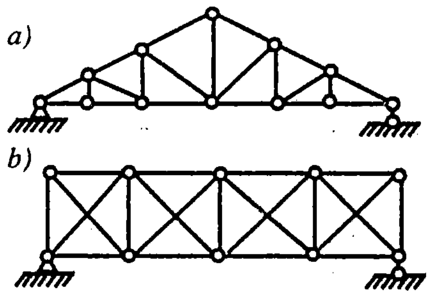
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện của công trình đều nằm trong một mặt phẳng và tải trọng cũng chỉ tác dụng trong mặt phẳng đó.



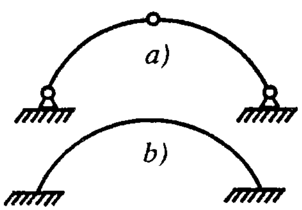
Hình 3

Trong hệ phẳng, dựa theo hình dạng của công trình người ta còn chia thành nhiều dạng kết cấu khác nhau:

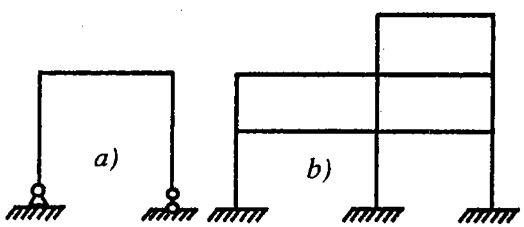
- dầm (hình 3a, b);
- dàn (hình 4a, b);
- vòm (hình 5a, b);
- khung (hình 6a, b);
- hệ liên hợp (hệ treo trên hình 7 là hệ liên hợp giữa dàn và dây xích).



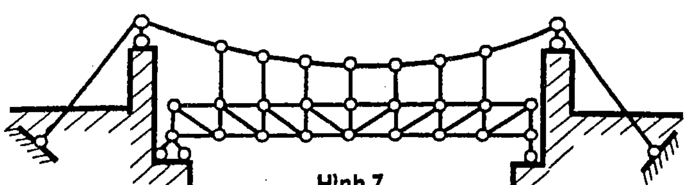
Hình 4



Hình 5



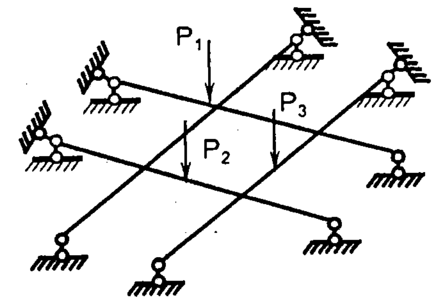
Hình 6



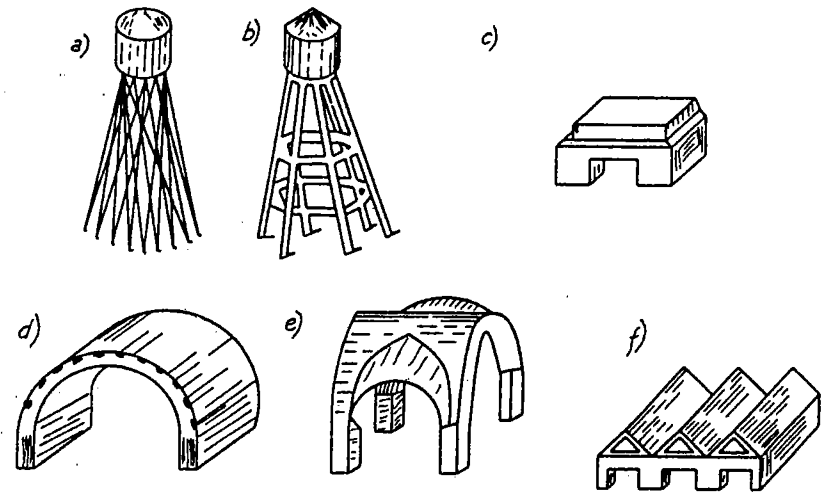
Hình 7

2. Hệ không gian: khi các cấu kiện của công trình không nằm trong cùng một mặt phẳng hoặc nằm trong cùng một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ngoài mặt phẳng của công trình. Những hệ không gian thường gặp là:

- dầm trực giao (hình 8);
- dàn không gian (phần dưới hình 9a);
- khung không gian (phần dưới hình 9b);
- bản (hình 9c);
- vỏ (hình 9d, e, f).



Hình 8



Hình 9

B. Phân loại theo cách tính công trình

Khi tính toán công trình, nói chung ta phải sử dụng các điều kiện sau:

* Điều kiện cân bằng tĩnh học.
* Điều kiện động học hay còn gọi là điều kiện hình học, điều kiện liên tục về biến dạng (biểu thị sự tương quan hình học giữa các điểm trên công trình; chẳng hạn điều kiện biểu thị chuyển vị tại hai tiết diện kề nhau trên công trình là như nhau hoặc khác nhau với một giá trị nào đó).

* Điều kiện vật lý biểu thị sự liên hệ giữa nội lực và biến dạng (sự biến đổi hình dạng) của công trình.

Tùy theo cách vận dụng các điều kiện nói trên trong một khâu tính toán nào đó, ta có thể phân loại công trình theo một trong hai cách sau:

1. Phân loại theo sự cần thiết hoặc không cần thiết phải sử dụng điều kiện động học khi xác định nội lực trong hệ

Theo cách này ta có hai loại hệ:

✦ **Hệ tĩnh định** là những hệ khi chịu tải trọng ta có thể xác định được nội lực trong hệ chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

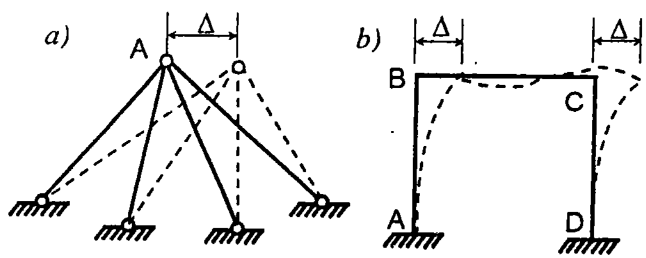
Ví dụ, các hệ trên hình 3a; 4a; 5a và 6a là tĩnh định.

✦ **Hệ siêu tĩnh** là những hệ khi chịu tải trọng, nếu chỉ sử dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định nội lực trong hệ. Đối với các hệ này ngoài những điều kiện cân bằng tĩnh học ta còn phải sử dụng các điều kiện động học và các điều kiện vật lý.

Những hệ vẽ trên hình 3b; 4b; 5b; 6b và 7 là siêu tĩnh.

2. Phân loại theo sự cần thiết hoặc không cần thiết phải sử dụng điều kiện cân bằng khi xác định biến dạng của hệ

Theo cách này ta có hai loại hệ:



Hình 10

✦ **Hệ xác định động** là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức (sự chuyển dời vị trí cho biết tại một hoặc một số nơi nào đó trên công trình) ta có thể xác định được biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học.

Trên hình 10a là một ví dụ về hệ xác định động. Khi mắt *A* của hệ chuyển vị ngang cưỡng bức là Δ, từ các điều kiện hình học ta dễ dàng xác định được sự thay đổi chiều dài của từng cấu kiện, tức là xác định được biến dạng của hệ.

✦ **Hệ siêu động** là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học không thôi thì chưa đủ để xác định biến dạng của hệ. Lúc này ta cần phải bổ sung thêm các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ trên hình 10b là hệ siêu động. Thật vậy dưới tác dụng của chuyển vị cưỡng bức Δ, các cấu kiện trong hệ bị uốn cong và không thể xác định ngay được biến dạng trong các cấu kiện theo các điều kiện hình học đơn thuần.

Ngoài ra, người ta còn phân loại công trình theo nhiều cách khác như:

* Phân loại theo *khả năng thay đổi hình dạng hình học của công trình* (xem chương 1).

* Phân loại theo *kích thước hình học tương đối của các cấu kiện*. Tùy theo độ lớn của kích thước hình học của các cấu kiện người ta chia thành ba loại:

✦ *Thanh* (kích thước của cấu kiện có một chiều lớn so với hai chiều còn lại);

✦ *Bản* (kích thước của cấu kiện có hai chiều lớn so với chiều còn lại);

✦ *Khối* (kích thước của cấu kiện theo cả ba chiều gần bằng nhau).

4. Các nguyên nhân gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị

Có nhiều nguyên nhân gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình. Dưới đây là các nguyên nhân thường gặp và ta sẽ nghiên cứu:

a. Tải trọng

Tải trọng gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình và được phân loại như sau:

1. Phân loại theo thời gian tác dụng

✦ **Tải trọng lâu dài** là những tải trọng tác dụng trong suốt quá trình làm việc của công trình. Ví dụ: trọng lượng bản thân của công trình.

✦ **Tải trọng tạm thời** là những tải trọng chỉ tác dụng trên công trình trong từng thời gian ngắn so với toàn bộ thời gian làm việc của công trình. Ví dụ: tải trọng gió, tải trọng đoàn người...

2. Phân loại theo vị trí tác dụng

✦ **Tải trọng bất động** là những tải trọng có vị trí không thay đổi trong quá trình làm việc của công trình. Ví dụ: trọng lượng bản thân, trọng lượng các thiết bị đặt trên công trình...

✦ **Tải trọng di động** là những tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình. Ví dụ: tải trọng đoàn xe lửa, ôtô, đoàn người, cầu chạy...

3. Phân loại theo tính chất tác dụng

✦ **Tải trọng tác dụng tĩnh** là những tải trọng tác dụng một cách nhịp nhàng, từ từ, tăng dần lên tới giá trị cuối cùng của nó, trong quá trình tác dụng không gây ra lực quán tính.

✦ **Tải trọng tác dụng động** là những tải trọng khi tác dụng trên công trình có gây ra lực quán tính. Ví dụ: tải trọng tác dụng đột ngột cùng một lúc với toàn bộ giá trị của nó, tải trọng va chạm (trọng lượng búa trên cọc), tải trọng có giá trị thay đổi theo thời gian một cách tuần hoàn (động cơ điện có khối lượng lệch tâm quay trong khi làm việc), lực địa chấn (động đất)...

Ngoài ra, người ta còn phân loại theo hình thức của tải trọng như tải trọng tập trung, tải trọng phân bố (xem Sức bền vật liệu).

B. Sự thay đổi nhiệt độ

Sự thay đổi nhiệt độ gây ra biến dạng và chuyển vị trong tất cả các hệ, gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh nhưng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định (xem chi tiết trong các chương 4 và 5).

C. Sự chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, sự chế tạo các cấu kiện không chính xác về kích thước hình học

Cũng như trường hợp thay đổi nhiệt độ, các nguyên nhân này gây ra biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ; gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh nhưng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định (xem chi tiết trong các chương 4 và 5).

5. Các giả thiết - Nguyên lý cộng tác dụng

Để đơn giản hóa tính toán mà vẫn bảo đảm phản ánh được sát với sự làm việc thực tế của công trình, trong Cơ học kết cấu thường thừa nhận một số giả thiết cơ bản.

1. Giả thiết vật liệu đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hooke nghĩa là giữa biến dạng và nội lực có sự liên hệ tuyến tính (xem Sức bền vật liệu).

Giả thiết này biểu thị điều kiện vật lý của bài toán.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi tuyến tính*. Trong những trường hợp không cho phép chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *đàn hồi phi tuyến hay phi tuyến vật lý*.

2. Giả thiết biến dạng và chuyển vị trong hệ rất nhỏ, nghĩa là dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, hình dạng của công trình thay đổi rất ít, cho phép ta có thể sử dụng các liên hệ gần đúng giữa các đại lượng hình học. Chẳng hạn, nếu gọi θ là góc xoay của một tiết diện nào đó trên công trình trong quá trình biến dạng thì theo giả thiết này ta có thể viết: $\sin\theta \approx 0;\ tg\theta \approx 0;\ \cos\theta \approx 1$.

Do đó, khi xác định nội lực ta có thể thực hiện theo *sơ đồ không biến dạng* của công trình. Nghĩa là mặc dù dưới tác dụng của tải trọng, công trình có thay đổi hình dạng nhưng khi tính nội lực ta vẫn dùng các kích thước hình học tương ứng với hình dạng ban đầu của công trình.

Đối với những trường hợp như bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc trong Sức bền vật liệu chẳng hạn, nếu dùng giả thiết này thì có thể mắc phải những sai số thuộc về bản chất, do đó phải xác định nội lực theo trạng thái biến dạng.

Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán được gọi là *tuyến tính hình học*. Khi không chấp nhận được giả thiết này thì bài toán được gọi là *phi tuyến hình học* và cách tính sẽ khá phức tạp vì cần được thực hiện theo *sơ đồ biến dạng* của công trình.

Nếu công trình nghiên cứu đáp ứng được các giả thiết 1 và 2 thì khi tính công trình đó ta được phép áp dụng một nguyên lý gọi là *nguyên lý cộng tác dụng*.

Nội dung nguyên lý cộng tác dụng:

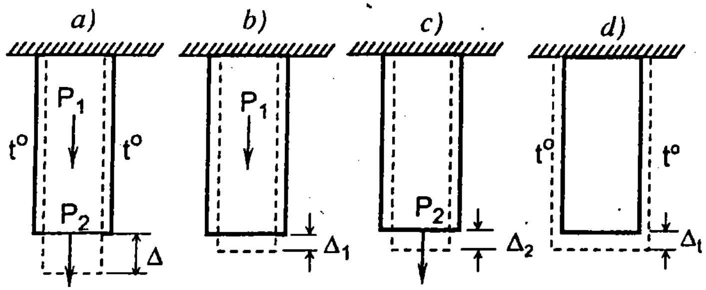
Một đại lượng nghiên cứu nào đó (chẳng hạn phản lực, nội lực, chuyển vị...) do một số nguyên nhân (ngoại lực, sự thay đổi nhiệt độ...) đồng thời cùng tác dụng trên công trình gây ra được xem như tổng đại số hay tổng hình học những giá trị thành phần của đại lượng đó do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số nếu đại lượng nghiên cứu là vô hướng còn lấy tổng véctơ nếu đại lượng nghiên cứu được biểu thị bằng các véctơ.

Ví dụ, cần xác định độ dãn của thanh chịu lực P_1, P_2 và sự thay đổi nhiệt độ (hình 11a). Nếu gọi Δ_1 là độ dãn của thanh do riêng lực P_1 gây ra (hình 11b), Δ_2 là độ dãn của thanh do riêng lực P_2 gây ra (hình 11c) và Δ_t là độ dãn của thanh do riêng sự thay đổi nhiệt độ gây ra (hình 11d); theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_t .$$

Hình 11



Biểu hiện về mặt giải tích của nguyên lý cộng tác dụng như sau:

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_k + ... + S_n + S_t \quad (1)$$

hay

$$S = \overline{S}_1 P_1 + \overline{S}_2 P_2 + ... + \overline{S}_k P_k + ... + \overline{S}_n P_n + S_t , \quad (2)$$

trong đó:

S - đại lượng nghiên cứu do các lực $P_1 , P_2 , ... , P_k , ... , P_n$ và sự thay đổi nhiệt độ hoặc các nguyên nhân khác đồng thời gây ra;

S_k - đại lượng nghiên cứu do riêng lực P_k gây ra;

$\overline{S}_k$ - đại lượng nghiên cứu do riêng lực P_k có giá trị bằng đơn vị của lực gây ra,

$$S_k = \overline{S}_k P_k ; \quad (3)$$

S_t - đại lượng nghiên cứu do riêng sự thay đổi nhiệt độ gây ra.

Từ biểu thức (2) ta thấy nguyên lý cộng tác dụng biểu thị sự liên hệ tuyến tính giữa đại lượng nghiên cứu S với tải trọng.

Nguyên lý cộng tác dụng hay còn gọi là *nguyên lý độc lập tác dụng của các tác động bên ngoài*, giữ một vai trò quan trọng trong Cơ học kết cấu. Với nguyên lý này ta có thể xây dựng được các thuật toán đơn giản nhưng vẫn thỏa mãn được yêu cầu chính xác trong thực tế. Cũng cần nhấn mạnh thêm là nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng được cho những bài toán tuyến tính về vật lý cũng như về hình học.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Đối chiếu nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của các môn học: Cơ học lý thuyết, Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu.
2. Ý nghĩa của sơ đồ tính công trình. Để chuyển công trình thực về sơ đồ tính, cần thực hiện như thế nào?
3. Phân biệt các loại hệ sau: hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh, hệ xác định động, hệ siêu động.
4. Phân biệt các loại tải trọng sau: tải trọng bất động, tải trọng di động, tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.
5. Phát biểu nội dụng nguyên lý cộng tác dụng và giải thích các điều kiện áp dụng.

1 Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng

Kết cấu dùng trong xây dựng thường được cấu tạo từ nhiều vật thể nối với nhau để cùng chịu các nguyên nhân tác động bên ngoài như tải trọng. Cách nối có thể thực hiện dưới nhiều hình thức khác nhau nhưng điều cơ bản là dưới tác dụng của tải trọng, kết cấu đó vẫn giữ được hình dạng hình học ban đầu mà không được sụp đổ. Do đó, trước khi đi vào tính toán công trình, người kỹ sư phải biết các quy tắc cho phép cấu tạo hệ thanh có khả năng chịu được tải trọng. Trong chương này thực hiện nhiệm vụ đó đối với các hệ phẳng.

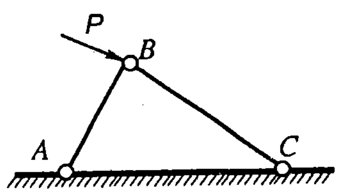
1.1. Khái niệm mở đầu

Để xây dựng quy tắc cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng ta cần tìm hiểu các khái niệm sau:

A. Hệ bất biến hình

Hệ bất biến hình (BBH) là hệ khi chịu tải trọng vẫn giữ nguyên được hình dạng hình học ban đầu của nó nếu ta xem biến dạng đàn hồi của các vật thể là không đáng kể, hoặc xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Hệ trên hình 1.1 là BBH vì dưới tác dụng của tải trọng, nếu xem các cấu kiện là tuyệt đối cứng thì hệ vẫn giữ nguyên dạng hình học ban đầu. Thực vậy, khi xem các cấu kiện *AB*, *BC*, *AC* là tuyệt đối cứng tức là chiều dài của chúng không đổi thì như ta đã biết, với ba cạnh xác định ta chỉ có thể dựng được một tam giác duy nhất *ABC* mà thôi.



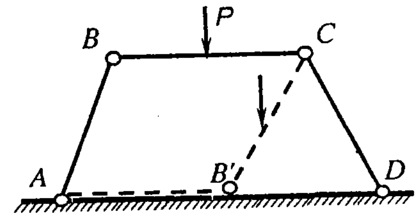
Hình 1.1

Trừ một vài trường hợp đặc biệt còn nói chung các kết cấu trong xây dựng phải là hệ BBH. Hệ BBH có khả năng chịu tải trọng; nội lực phát sinh trong hệ cân bằng với ngoại lực.

B. Hệ biến hình

Hệ biến hình (BH) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi hình dạng hình học một cách hữu hạn mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Kết cấu trên hình 1.2 là hệ BH. Dưới tác dụng của tải trọng, hệ *ABCD* có thể thay đổi dạng hình học hữu hạn và có thể sụp đổ theo đường đứt nét *AB'CD* như trên hình 1.2 mặc dù ta xem các thanh *AB*, *BC*, *CD* là tuyệt đối cứng.

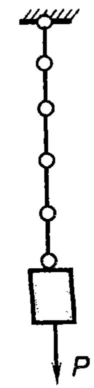


Hình 1.2

Nói chung kết cấu biến hình không có khả năng chịu tải trọng, do đó trong các công trình xây dựng người ta không dùng hệ BH.

Đôi khi trong thực tế người ta cũng dùng hệ BH để chịu lực nếu tải trọng tác dụng có thể làm cho hệ nằm trong trạng thái cân bằng.

Ví dụ, hệ dây xích trên hình 1.3 là hệ BH (khi tải trọng tác dụng theo phương ngang, hệ thay đổi dạng hình học ban đầu) nhưng vẫn có khả năng chịu lực tác dụng dọc theo các mắt xích (phương đứng).



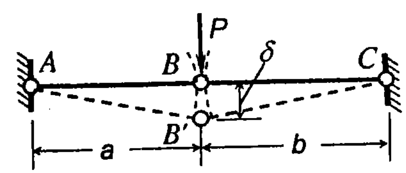
Hình 1.3

C. Hệ biến hình tức thời

Hệ biến hình tức thời (BHTT) là hệ khi chịu tải trọng sẽ thay đổi dạng hình học vô cùng bé (nếu bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao về sự thay đổi kích thước hình học) mặc dù ta xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Sau khi thay đổi dạng hình học vô cùng bé, hệ lại trở nên bất biến hình.

Trên hình 1.4 là một ví dụ đơn giản về hệ BHTT. Để xác nhận điều đó ta cần chứng minh điểm *B* chỉ có khả năng chuyển dời một đoạn *BB'* vô cùng bé.



Hình 1.4

Thật vậy, dưới tác dụng của tải trọng, điểm *B* thuộc thanh *AB* có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm A bán kính AB. Tương tự, điểm B thuộc thanh BC có khuynh hướng chuyển động theo đường tròn tâm C bán kính CB. Vì ABC thẳng hàng nên hai đường tròn đó tiếp xúc tại B. Do đó điểm B có khả năng chuyển dời vô cùng bé theo phương của tiếp tuyến chung tới B' với một lượng bằng δ. Chuyển dời vô cùng bé này có thể xảy ra được bởi vì độ chênh lệch giữa chiều dài của các thanh ở vị trí nằm nghiêng và vị trí nằm ngang là đại lượng vô cùng bé bậc hai. Thật vậy, chẳng hạn với thanh BA độ chênh lệch này bằng:

$$\Delta a = AB' - AB = a\left[\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} - 1\right] \approx a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 - 1\right] = \frac{\delta^2}{2a}.$$

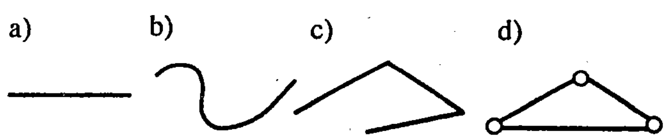
Sau khi B chuyển dời vô cùng bé tới B', điểm B' có khuynh hướng chuyển dời theo hai đường tròn có tâm A và C với bán kính AB' và CB'. Hai đường tròn giao nhau nên B' không có khả năng chuyển động tiếp tục, hệ trở nên BBH.

Như vậy hệ đã cho chỉ có khả năng thay đổi dạng hình học vô cùng bé và là hệ BHTT

Trong xây dựng người ta không dùng những hệ BHTT hoặc những hệ gần biến hình tức thời (những hệ BBH song cách bố trí có thể dễ dàng dẫn đến BHTT nếu thay đổi nhỏ vị trí của chúng, chẳng hạn hệ có dạng đường đứt nét $AB'C$ trên hình 1.4) vì như sau này ta sẽ thấy, trong hệ gần biến hình tức thời thường phát sinh nội lực rất lớn.

D. Miếng cứng

Hệ bất biến hình trong thực tế có nhiều hình dạng khác nhau nhưng cùng chung tính chất là có khả năng chịu tải trọng. Để tiện cho việc nghiên cứu ta khái quát hóa các hệ bất biến hình bằng cách đưa ra khái niệm *miếng cứng*.

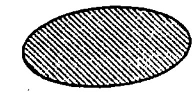


Hình 1.5

Miếng cứng là một hệ phẳng bất kỳ bất biến hình một cách rõ rệt.

Ví dụ, các hệ trên hình 1.5 đều là các miếng cứng.

Quy ước biểu diễn các miếng cứng như trên hình 1.6.



Hình 1.6

E. Bậc tự do

Khái niệm về bậc tự do đã được trình bày trong Cơ học cơ sở. Ở đây chỉ nhắc lại định nghĩa:

Bậc tự do của hệ là số thông số độc lập đủ để xác định vị trí của hệ đối với một hệ khác được xem là bất động.

Đối với một hệ trục tọa độ bất động trong mặt phẳng, một điểm có hai bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau, còn một miếng cứng có ba bậc tự do là hai chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ khác nhau và một chuyển động quay quanh giao điểm của hai phương đó.

1.2. Các loại liên kết

Để nối các miếng cứng với nhau ta dùng các liên kết. Liên kết có thể đơn giản hay phức tạp.

A. Liên kết đơn giản

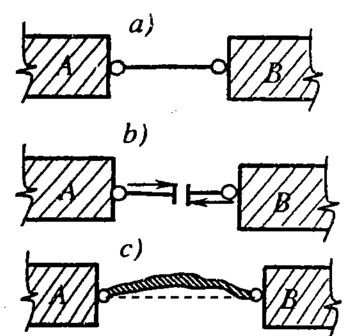
Liên kết đơn giản là liên kết chỉ nối hai miếng cứng với nhau.

Liên kết đơn giản được chia thành ba loại như sau:

1. Liên kết loại một hay liên kết thanh

Cấu tạo của liên kết này là một thanh có khớp lý tưởng ở hai đầu.

Nếu dùng liên kết thanh để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động (hình 1.7a) thì sẽ khử được một bậc tự do của miếng cứng B đối với miếng cứng A vì B không thể di chuyển theo phương dọc trục thanh. Đó là *tính chất động học* của liên kết thanh.



Hình 1.7

Về mặt *tĩnh học*, trong liên kết thanh có thể phát sinh một phản lực liên kết dọc theo trục thanh (hình 1.7b).

Như vậy, *một liên kết thanh khử được một bậc tự do và phát sinh trong đó một phản lực dọc trục thanh.*

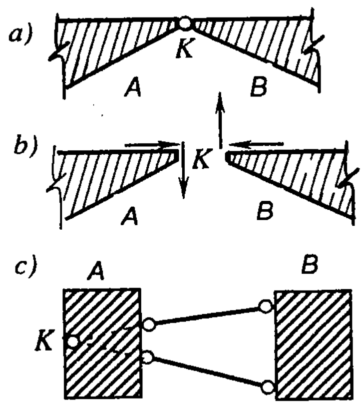
Căn cứ vào tính chất nói trên ta thấy cấu tạo của liên kết thanh không nhất thiết phải là thanh thẳng như trên hình 1.7a mà có thể là một miếng cứng bất kỳ miễn là hai đầu có khớp lý tưởng như trên hình 1.7c. Trong trường hợp này liên kết vẫn khử được một bậc tự do theo phương dọc theo đường nối hai khớp và trong liên kết vẫn phát sinh một phản lực hướng theo phương nói trên.

Liên kết thanh là khái niệm mở rộng của gối tựa di động. Liên kết thanh dùng để nối hai miếng bất kỳ còn gối tựa di động là liên kết dùng để nối một miếng cứng với trái đất. Nếu xem trái đất là một miếng cứng thì gối tựa di động chính là một trường hợp đặc biệt của liên kết thanh.

2. Liên kết loại hai hay liên kết khớp

Cấu tạo của liên kết khớp như trên hình 1.8a.

Khi dùng liên kết khớp để nối miếng cứng B vào miếng cứng A được xem là bất động thì liên kết này khử được hai bậc tự do của B so với A vì miếng cứng B không thể chuyển động tịnh tiến theo hai phương bất kỳ nào trong mặt phẳng đang xét mà chỉ có thể quay quanh miếng cứng A tại khớp K. Trong liên kết sẽ phát sinh một phản lực đặt tại K nhưng có phương bất kỳ nên thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định giao nhau tại khớp K (hình 1.8b).



Hình 1. 8

Như vậy, *một liên kết khớp khử được hai bậc tự do và phát sinh hai thành phần phản lực đi qua khớp.*

Về mặt động học, liên kết khớp tương đương với hai liên kết thanh. Nếu nối miếng cứng B với miếng cứng A bằng hai thanh thì miếng cứng B bị khử mất hai bậc tự do và chỉ còn có thể quay quanh giao điểm K của hai thanh (hình 1.8c). Ta gọi giao điểm đó là *khớp giả tạo*.

Tương tự như đã trình bày ở trên, liên kết khớp là một khái niệm mở rộng của gối tựa bất động đã biết trong Sức bền vật liệu.

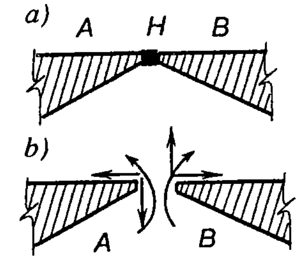
3. Liên kết loại ba hay liên kết hàn

Dùng một mối hàn để nối miếng cứng B với miếng cứng cố định A tức là gắn chặt B vào A (hình 1.9a). Lúc này mối hàn khử được ba bậc tự do của B đối với A.

Thật vậy, miếng cứng B không di chuyển tịnh tiến và cũng không quay được so với A.

Trong liên kết hàn phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt bất kỳ.

Đưa lực này về một điểm xác định tại mối hàn ta sẽ được một thành phần mômen và hai thành phần phản lực hướng theo hai phương xác định nào đó.



Hình 1. 9

Như vậy, *một liên kết hàn khử được ba bậc tự do và phát sinh ba thành phần phản lực.*

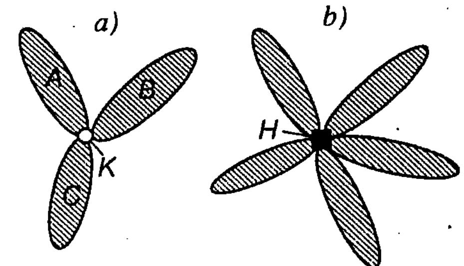
Về mặt động học, một liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hay tương đương với một thanh và một khớp nếu chúng được sắp xếp hợp lý (dưới đây ta sẽ tìm hiểu về điều kiện sắp xếp hợp lý).

Liên kết hàn là khái niệm mở rộng của liên kết ngàm đã biết trong Sức bền vật liệu.

B. Liên kết phức tạp

Liên kết phức tạp là liên kết nối nhiều miếng cứng, số miếng cứng lớn hơn hai.

Trong thực tế ta có thể gặp các liên kết phức tạp dưới dạng *khớp phức tạp* (hình 1.10a) hoặc *liên kết hàn phức tạp* (hình 1.10b).



Hình 1. 10

Để tiện cho việc nghiên cứu, ta quy đổi liên kết phức tạp thành các liên kết đơn giản cùng loại tương đương. Do đó cần xây dựng khái niệm về *độ phức tạp.*

Độ phức tạp của một liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó.

Ví dụ liên kết khớp phức tạp trên hình 1.10a tương đương với hai liên kết khớp đơn giản. Thật vậy, coi A là miếng cứng cố định, nối B với A bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của B. Tiếp đó nối C với A cũng bằng khớp K sẽ khử được hai bậc tự do của C. Như vậy khớp K khử được bốn bậc tự do tức là tương đương với hai khớp đơn giản. Do đó độ phức tạp của liên kết này bằng hai.

Từ nhận xét đó ta dễ dàng suy ra: *độ phức tạp của một liên kết phức tạp bằng số lượng D của các miếng cứng quy tụ vào liên kết trừ đi một.*

$$\boxed{p = D - 1} \qquad (1.1)$$

trong đó:

p – độ phức tạp của liên kết phức tạp;

D – số miếng cứng quy tụ vào liên kết phức tạp.

Ví dụ, liên kết phức tạp trên hình 1.10a có độ phức tạp là $p = 3 - 1 = 2$; liên kết phức tạp trên hình 1.10b có độ phức tạp là $p = 5 - 1 = 4$.

1.3. Cách nối các miếng cứng thành hệ bất biến hình

Để nối các miếng cứng ta phải dùng các liên kết. Như vậy, vấn đề đặt ra là: muốn nối một số lượng xác định các miếng cứng thì cần sử dụng bao nhiêu liên kết và các liên kết đó phải được bố trí như thế nào để bảo đảm cho hệ thu được là bất biến hình. Để giải đáp điều đó ta cần lần lượt nghiên cứu *điều kiện cần* và *điều kiện đủ* về cách nối các miếng cứng thành một hệ bất biến hình.

A. Điều kiện cần

Điều kiện cần biểu thị mối quan hệ về số lượng giữa các miếng cứng với số lượng các liên kết có trong hệ đang xét.

Ta lần lượt khảo sát các trường hợp sau:

1. Hệ bất kỳ

Giả sử trong hệ có D miếng cứng được nối với nhau bằng T liên kết thanh, K liên kết khớp, H liên kết hàn, đã quy đổi về liên kết đơn giản.

Coi một miếng cứng nào đó là bất động thì $(D-1)$ miếng cứng còn lại sẽ có $3(D-1)$ bậc tự do cần phải khử so với miếng cứng bất động. Đó là yêu cầu.

Xét về khả năng, với số lượng các liên kết nối trên có thể khử được $T+2K+3H$ bậc tự do.

Gọi n là hiệu số giữa số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu), ta có:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D-1).$$

Có thể xảy ra ba trường hợp sau:

a) $n < 0$: khả năng thấp hơn yêu cầu, chứng tỏ *hệ thiếu liên kết*. Ta có thể kết luận ngay là hệ biến hình.

b) $n = 0$: khả năng đáp ứng đúng với yêu cầu, chứng tỏ *hệ đủ liên kết*. Lúc này hệ có triển vọng BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là tĩnh định.

c) $n > 0$: khả năng lớn hơn yêu cầu, chứng tỏ *hệ thừa liên kết*. Trong trường hợp này hệ có triển vọng là BBH nên cần phải xét thêm điều kiện đủ. Nếu hệ BBH thì sẽ là siêu tĩnh. Số n biểu thị số lượng liên kết thừa tương đương loại một.

Như vậy, trong trường hợp hệ bất kỳ ta có điều kiện cần:

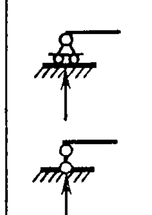
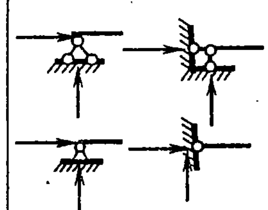
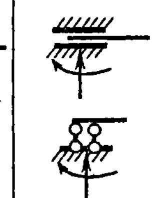
$$\boxed{n = T + 2K + 3H - 3(D-1) \geq 0} \qquad (1.2)$$

2. Hệ nối với trái đất

Trong thực tế, phần lớn các công trình đều được nối với trái đất. Nếu quan niệm trái đất là một miếng cứng thì ta vẫn có thể sử dụng công thức (1.2) để khảo sát điều kiện cần cho những hệ này. Tuy nhiên bài toán hệ nối với trái đất cũng khá phổ biến nên để tiện cho việc sử dụng ta sẽ thiết lập công thức biểu thị điều kiện cần cho trường hợp này.

Giả sử trong hệ có D miếng cứng không kể trái đất, được nối với nhau bằng T liên kết thanh, K liên kết khớp, H liên kết hàn đã quy đổi về liên kết đơn giản và được nối với trái đất bằng C liên kết tựa tương đương loại một (xem bảng 1.1).

Bảng 1.1

Tên	Gối di động	Gối cố định	Ngàm trượt	Ngàm cứng
Sơ đồ				
$C =$	1	2		3

Coi trái đất là bất động, như vậy muốn nối D miếng cứng với nhau và với trái đất thì yêu cầu phải khử được $3D$ bậc tự do. Về khả năng, với số lượng các liên kết đã nêu, có thể khử được $T + 2K + 3H + C$ bậc tự do.

Cũng lý luận tương tự như trên, trong trường hợp này, ta có điều kiện cần:

$$\boxed{n = T + 2K + 3H + C - 3D \geq 0} \qquad (1.3)$$

Công thức này có ý nghĩa tương tự như (1.2) và là trường hợp đặc biệt của (1.2)

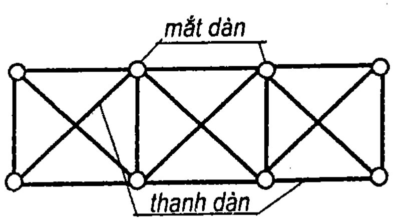
3. Hệ dàn

Dàn là hệ gồm các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.

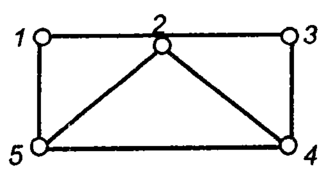
Giao điểm của các thanh được gọi là *mắt.*

Hệ trên hình 1.11 là hệ dàn. Hệ trên hình 1.12 không phải là hệ dàn vì thanh *1-3* không phải chỉ có khớp ở hai đầu.

Đối với hệ dàn, ta cũng có thể áp dụng công thức (1.2) hoặc (1.3) để khảo sát song cần chú ý là trong hệ dàn các liên kết khớp thường là *khớp phức tạp* nên cần quy đổi về *khớp đơn giản*. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát, dưới đây ta sẽ thiết lập các điều kiện cần áp dụng riêng cho hệ dàn, trong đó không cần quan tâm đến độ phức tạp của liên kết khớp.



Hình 1. 11



Hình 1. 12

a) Trường hợp dàn không nối với đất: Giả sử trong hệ dàn có D thanh và M mắt. Xem một thanh nào đó là miếng cứng bất động. Như vậy hệ còn lại $D-1$ thanh và $M-2$ mắt cần được nối vào miếng cứng bất động. Như đã biết, mỗi điểm (mắt) trong mặt phẳng có hai bậc tự do, do đó để nối $(M-2)$ mắt thì số bậc tự do cần phải khử là $2(M-2)$, đó là yêu

cầu. Xét về khả năng, hệ còn lại $(D-1)$ thanh tương đương loại một nên khả năng có thể khử được là $(D-1)$ bậc tự do. Cũng lập luận tương tự như trên ta có công thức biểu thị điều kiện cần cho trường hợp dàn không nối với đất như sau:

$$n = (D-1) - 2(M-2) \geq 0,$$

hay

$$\boxed{n = D + 3 - 2M \geq 0} \qquad (1.4)$$

Ý nghĩa của (1.4) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

b) Trường hợp hệ dàn nối với trái đất: Giả sử trong hệ dàn có D thanh, M mắt và C liên kết tựa tương đương loại một nối với trái đất. Coi trái đất là miếng cứng bất động thì số mắt cần nối vào miếng cứng bất động đó là M. Do đó số bậc tự do cần phải khử là $2M$. Về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là $D + C$.

Tương tự như trên, ta thiết lập được công thức biểu thị điều kiện cần cho hệ dàn nối với đất như sau:

$$\boxed{n = D + C - 2M \geq 0} \qquad (1.5)$$

Ý nghĩa của (1.5) cũng được giải thích tương tự như đối với (1.2).

B. Điều kiện đủ

Khi điều kiện cần đã được thỏa mãn, hệ có thể là đủ hoặc thừa liên kết nhưng nếu cách bố trí liên kết không được hợp lý thì các liên kết này vẫn không có khả năng khử tất cả các bậc tự do của hệ và hệ có thể là biến hình hoặc biến hình tức thời.

Như vậy, *điều kiện đủ để cho hệ bất biến hình là các liên kết cần được bố trí hợp lý.*

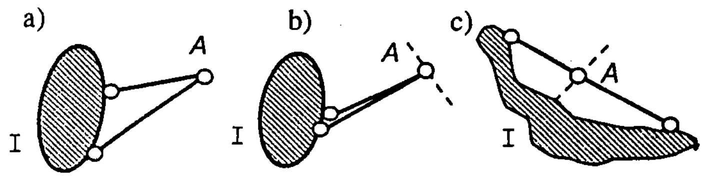
Nhưng làm thế nào để có thể khẳng định được các liên kết đã bố trí là hợp lý? Để giải quyết vấn đề này ta lần lượt khảo sát một số trường hợp cụ thể.

1. Cách nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành hệ bất biến hình

Xét miếng cứng bất động I và một điểm (mắt) A nằm ngoài miếng cứng đó. Để nối điểm A vào miếng cứng ta cần phải khử hai bậc tự do của A nghĩa là phải dùng hai liên kết thanh như trên hình 1.13a. Hai thanh này không được nằm trên cùng một đường thẳng như trên hình 1.13b, c, vì nếu không thì điểm *A* có thể chuyển vị vô cùng bé theo phương vuông góc với trục của hai thanh và hệ là BHTT (chứng minh tương tự như đối với hệ trên hình 1.4).

Như vậy, *điều kiện cần và đủ để nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng thành một hệ bất biến hình là phải dùng hai thanh không thẳng hàng.*

Gọi hệ hai thanh không thẳng hàng này là *bộ đôi.*



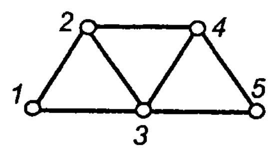
Hình 1. 13

Do sự cấu tạo hợp lý và chỉ vừa đủ để liên kết một điểm vào một hệ nên bộ đôi có tính chất sau:

Bộ đôi không làm thay đổi tính chất động học của hệ, nghĩa là nếu hệ cho ban đầu là BBH (hoặc BH, BHTT) thì sau khi thêm hoặc bớt một bộ đôi ta sẽ được một hệ mới, hệ mới này vẫn là BBH (hoặc BH, BHTT).

Có thể vận dụng tính chất nói trên của bộ đôi để phát triển miếng cứng, nhằm mục đích đưa hệ nhiều miếng cứng về hệ gồm một số ít các miếng cứng để khảo sát cho dễ dàng.

Ta sẽ tìm hiểu cách phát triển miếng cứng thông qua hệ vẽ trên hình 1.14. Tam giác khớp *1-2-3* là một miếng cứng, thêm vào miếng cứng này bộ đôi *(4-2) (4-3)*, ta sẽ được hệ mới *1-2-4-3* cũng BBH. Tương tự, thêm vào hệ BBH *1-2-4-3* bộ đôi *(5-4) (5-3)* ta sẽ được hệ mới *1-2-4-5-3* cũng BBH. Như vậy, có thể kết luận toàn hệ là BBH.



Hình 1. 14

Cũng có thể phân tích sự cấu tạo hình học theo trình tự ngược lại (thu hẹp hệ). Theo cách này, ta lần lượt loại ra khỏi hệ cho ban đầu từng bộ đôi một, cuối cùng sẽ được một hệ mới, căn cứ vào cấu tạo của hệ này ta có thể kết luận về sự cấu tạo hình học của hệ cho ban đầu. Ví dụ, với hệ

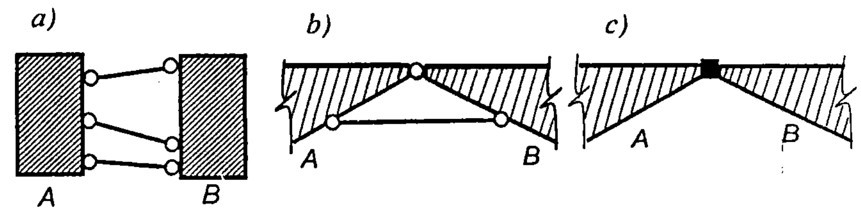
vẽ trên hình 1.14 ta lần lượt loại bỏ khỏi hệ các bộ đôi *(5-4)(5-3); (4-2)(4-3)* và *(2-1)(2-3)*, hệ còn lại là thanh *1-3* bất biến hình, do đó hệ cho ban đầu là BBH.

2. Cách nối hai miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Từ điều kiện cần ta thấy: để nối hai miếng cứng thành hệ BBH thì tối thiểu phải sử dụng ba thanh (hình 1.15a); một khớp và một thanh (hình 1.15b), hoặc một mối hàn (hình 1.15c).

Sử dụng một mối hàn (hình 1.15c) để nối hai miếng cứng thì bao giờ cũng được một hệ BBH.

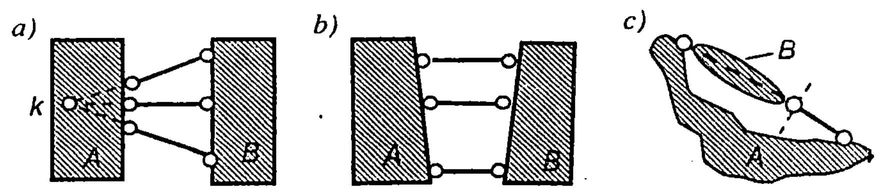
Nếu sử dụng ba thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *ba liên kết thanh không được đồng quy hoặc song song* (hình 1.15a).



Hình 1. 15

Thật vậy, trong trường hợp bố trí ba thanh đồng quy như trên hình 1.16a thì cả ba thanh đó đều không ngăn cản được chuyển vị xoay vô cùng bé với tâm quay *K* của miếng cứng *B* quanh miếng cứng quy ước bất động *A*. Chuyển vị xoay đó là vô cùng bé bởi vì sau khi dịch chuyển, ba thanh trở thành không đồng quy nữa và hệ lại BBH. Hệ trên hình 1.16a là BHTT.

Khi bố trí ba thanh song song như trên hình 1.16b thì hệ là BHTT bởi vì lúc này hệ là trường hợp đặc biệt của trường hợp ba thanh đồng quy (giao điểm của ba thanh ở vô cùng). Khi ba thanh song song có chiều



Hình 1. 16

dài bằng nhau thì chuyển vị xảy ra là hữu hạn, hệ sẽ biến hình.

Nếu sử dụng một khớp và một thanh thì điều kiện bố trí hợp lý là *liên kết thanh không được đi qua khớp* (hình 1.15b).

Trong trường hợp liên kết thanh đi qua khớp thì hệ sẽ BHTT (hình 1.16c, cách chứng minh như đã thực hiện với hệ trên hình 1.4).

Tóm lại, trong bài toán hai miếng cứng ta có thể phát biểu như sau:

Để nối hai miếng cứng thành một hệ bất biến hình thì điều kiện cần và đủ là phải sử dụng ít nhất:

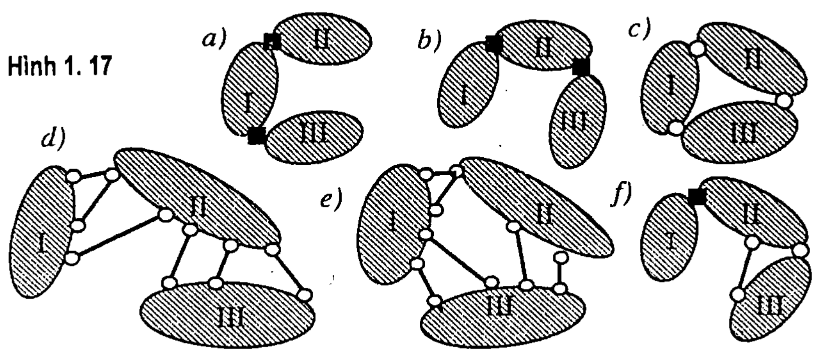
- *hoặc ba liên kết thanh không đồng quy hay không song song;*
- *hoặc một liên kết khớp và một liên kết thanh không đi qua khớp;*
- *hoặc một mối hàn.*

3. Cách nối ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình

Từ điều kiện cần ta thấy: để nối ba miếng cứng thành một hệ BBH thì tối thiểu phải sử dụng sáu liên kết tương đương loại một. Như vậy có thể thực hiện theo nhiều cách nối như sau:

- sử dụng hai mối hàn (hình 1.17a, b);
- sử dụng ba khớp (hình 1.17c);
- sử dụng sáu liên kết thanh (hình 1.17d, e);
- sử dụng một mối hàn, một khớp và một thanh (hình 1.17f);
- v. v...

Hình 1. 17



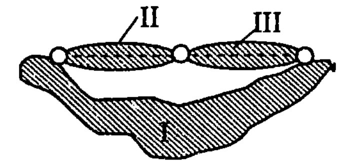
Qua những cách nối ba miếng cứng giới thiệu trên hình 1.17 ta thấy: trong một số trường hợp có thể sử dụng các điều kiện nối hai miếng cứng đã biết để phân tích điều kiện đủ. Các cách nối trên hình 1.17a, b, d, f thuộc trường hợp này. Ví dụ với hệ trên hình 1.17f, ta có thể xem

như đã dùng một mối hàn để nối hai miếng cứng *I* và *II* thành hệ BBH, tiếp đó nối *III* với hệ BBH vừa thu được bằng một khớp và một thanh không đi qua khớp.

Khi ba miếng cứng được liên kết từng cặp hai miếng cứng với nhau bằng một khớp hoặc hai thanh như trên hình 1.17c, e, ta không thể vận dụng điều kiện nối hai miếng cứng để phân tích mà phải sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng như sau:

Điều kiện cần và đủ để nối ba miếng cứng là ba khớp thực hoặc giả tạo tương hỗ (giao điểm của hai thanh nối từng cặp hai miếng cứng) không được nằm trên cùng một đường thẳng.

Nếu ba khớp tương hỗ cùng nằm trên một đường thẳng thì hệ sẽ BHTT. Hệ vẽ trên hình 1.18 là BHTT vì cấu tạo của nó tương tự như hệ BHTT đã khảo sát trên hình 1.4.



Hình 1. 18

4. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi điều kiện cần đã được thỏa mãn ta có thể phân tích điều kiện đủ theo biện pháp sau:

Vận dụng tính chất của bộ đôi, điều kiện nối hai miếng cứng hoặc ba miếng cứng đã biết để phát triển từng miếng cứng của hệ hoặc thu hẹp hệ đã cho đến mức tối đa cho phép. Như vậy, ta sẽ đưa bài toán hệ có nhiều miếng cứng về bài toán mới có số lượng miếng cứng ít hơn.

✻ Nếu hệ mới được đưa về một miếng cứng thì hệ sẽ bất biến hình.

✻ Nếu hệ mới được đưa về hai miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối hai miếng cứng để khảo sát.

✻ Nếu hệ mới được đưa về ba miếng cứng thì sử dụng điều kiện nối ba miếng cứng để khảo sát.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có thể sử dụng biện pháp trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong những trường hợp phức tạp, khi không thể vận dụng các biện pháp trên để phân tích ta có thể áp dụng các phương pháp khác như phương pháp tải trọng bằng không (xem chương 2); phương pháp động học (xem chương 11) hoặc phương pháp thay thế liên kết [1; 5].

1.4. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.1. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.19.

Điều kiện cần. Hệ đã cho là hệ nối với đất, ta sẽ dùng công thức (1.3) để khảo sát điều kiện cần. Có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau:

a) *Quan niệm mỗi thanh thẳng là một miếng cứng*

Lúc này ta có: $D = 6; T = 0; K = 2; H = 3; C = 5.$

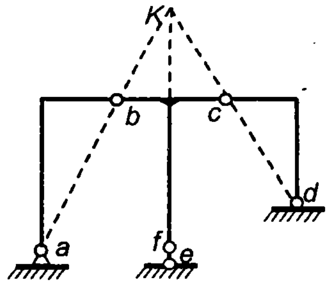
Theo (1.3): $n = 0 + 2.2 + 3.3 + 5 - 3.6 = 0$. Hệ đủ liên kết.

Cách quan niệm này chỉ làm phức tạp bài toán vì hai miếng cứng được nối với nhau bằng một mối hàn thực ra đã trở thành một miếng cứng.

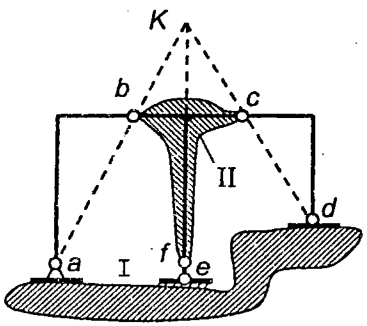
b) *Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng*

Lúc này ta có $D= 3$ (các miếng cứng *ab, bcf, cd*). Các liên kết nối giữa ba miếng cứng: $T = 0; K = 2; H = 0$. Số liên kết nối với đất tương đương loại một: $C = 5$.

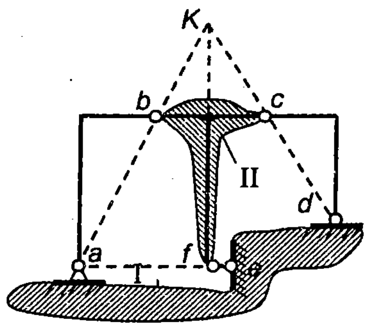
Theo (1.3): $n = 0+2.2+3.0+5-3.3=0$. Hệ đủ liên kết.



Hình 1. 19



Hình 1. 20



Hình 1. 21

c) *Giải theo cách chọn số miếng cứng tối thiểu*

Quan niệm thanh gãy khúc *bcf* là một miếng cứng còn các thanh gãy khúc *ab, cd* là liên kết loại một nối với đất, ta có: $D=1; T=0; K=0;$

$H = 0; C = 3$. Theo (1.3): $n = 3-3.1= 0$. Hệ đủ liên kết.

d) *Quan niệm trái đất là một miếng cứng và sử dụng công thức (1.2)*

Lúc này ta có: $D = 2; T = 3; K = 0; H = 0.$

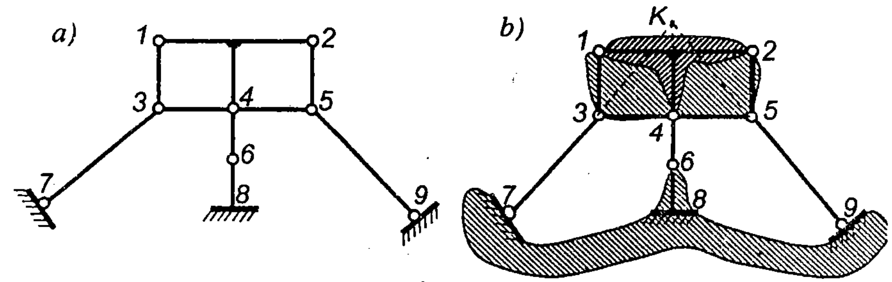
Theo (1.2): $n = 3+2.0+3.0-3\,(2-1)= 0$. Hệ đủ liên kết.

Như vậy khi phân tích điều kiện cần ta có thể thực hiện theo nhiều cách quan niệm khác nhau, song với bất kỳ cách quan niệm nào ta cũng thu được một kết quả thống nhất.

Điều kiện đủ. Hệ đã cho có thể đưa về bài toán hai miếng cũng như trên hình 1.20. Hai miếng cứng được nối với nhau bằng ba thanh (*ab, ef, dc*) đồng quy. Vậy hệ là BHTT.

Nếu thay đổi cách bố trí liên kết sao cho ba thanh *ab, ef* và *dc* không đồng quy nữa, chẳng hạn như hệ trên hình 1.21, thì sẽ được một hệ BBH.

Ví dụ 1.2. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.22a.



Hình 1. 22

Điều kiện cần. Hệ nối với đất nên ta sẽ dùng công thức (1.3) để phân tích. Quan niệm hệ gồm bốn miếng cứng: *1-2-4; 3-7; 6-8* và *5-9*. Lúc này các thanh *1-3; 3-4; 2-5; 4-5* và *4-6* thỏa mãn yêu cầu của liên kết thanh.

Ta có: $D = 4; T = 5; K = 0; H = 0; C = 7.$

Theo (1.3): $n = 5+ 2.0 + 3.0 + 7-3.4 = 0$. Hệ đủ liên kết.

Điều kiện đủ. Ta sẽ tìm cách phát triển dần các miếng cứng. Nếu nối miếng cứng *6-8* vào trái đất bằng liên kết hàn tại *8* thì miếng cứng trái đất sẽ phát triển tới vị trí *7-6-9* như trên hình 1.22b. Mặt khác, xét miếng cứng *1-2-4*. Nếu nối hai bộ đôi *(3-1)(3-4)* và *(5-2)(5-4)* vào miếng cứng *1-2-4* thì miếng cứng sẽ phát triển thành *1-2-5-3*. Như vậy, hệ sẽ gồm hai miếng cứng được nối với nhau bằng ba thanh *7-3; 6-4* và *9-5*. Vì hệ đối xứng nên ba thanh này đồng quy tại *K*, do đó toàn bộ hệ là BHTT.

Ví dụ 1.3. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn trên hình 1.23.

Điều kiện cần. Bài toán này là hệ dàn nối với đất nên ta sẽ sử dụng công thức (1.5) để khảo sát.

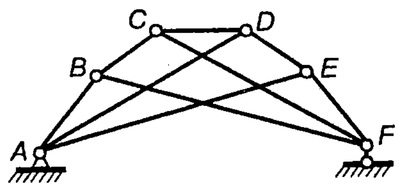
Trong trường hợp này ta có:

$D = 9; M = 6; C = 3.$

Do đó theo (1.5):

$n = 9 + 3 - 2.6 = 0.$

Hệ đủ liên kết.



Hình 1. 23

Điều kiện đủ. Ta có thể dựa vào nhận xét sau để làm đơn giản bài toán: Trường hợp hệ nối với đất bằng ba liên kết tựa bố trí hợp lý, nếu phần hệ chưa nối với đất mà BBH thì toàn bộ hệ sẽ BBH. Do đó, trong trường hợp này ta có thể loại bỏ trái đất để phân tích sự cấu tạo.

Quan niệm hai tam giác khớp *aDe* và *FBC* là hai miếng cứng. Như vậy phần dàn chưa nối với đất gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng ba thanh *aB, CD* và *eF* không đồng quy hoặc song song. Kết luận: hệ BBH.

Ví dụ 1.4. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.24.

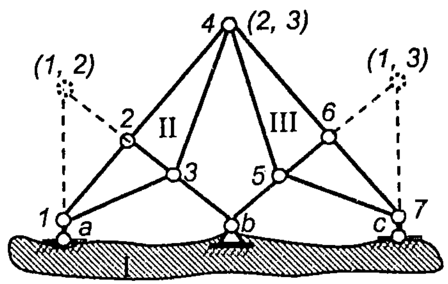
Điều kiện cần. Bài toán đã cho là hệ dàn nối với đất.

Trong trường hợp này ta có: $D = 12; M = 8; C = 4.$

Theo (1.5):

$n = 12 + 4 - 2.8 = 0.$

Hệ đủ liên kết.



Hình 1. 24

Điều kiện đủ. Gọi trái đất là miếng cứng *I*. Xuất phát từ tam giác khớp *1-2-3*, sử dụng bộ đôi *(4-2)(4-3)* sẽ được miếng cứng *1-4-3* ký hiệu là *II*. Tương tự *4-7-5* cũng là một miếng cứng, ký hiệu là *III*. Ba miếng cứng này được nối với nhau từng đôi một bằng các khớp tương hỗ *(1,2), (2,3), (1,3)* như trên hình 1.24. Ba khớp tương hỗ không thẳng hàng nên hệ đang xét là BBH.

Ví dụ 1.5. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.25.

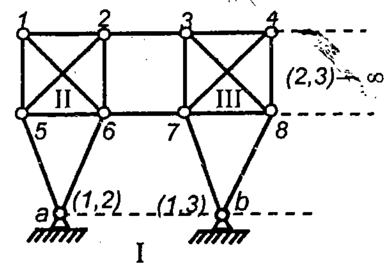
Điều kiện cần. Hệ đã cho là hệ dàn nối với đất. Ta có:

$D = 18; M = 10; C = 4.$

Theo (1.5):

$n = 18 + 4 - 2.10 = 2 > 0.$

Hệ thừa hai liên kết tương đương loại một.



Hình 1. 25

Điều kiện đủ. Gọi trái đất là miếng cứng *I*. Từ tam giác khớp *a-5-6* ta có thể phát triển thành miếng cứng *a-5-1-2-6* gọi là miếng cứng *II* bằng cách thêm vào hai bộ đôi, chẳng hạn *(1-5)(1-6)* và *(2-5)(2-6)*. Trong quá trình phát triển thành miếng cứng *II* ta thấy có một thanh thừa. Tương tự ta cũng được miếng cứng *b-7-3-4-8* gọi là miếng cứng *III*; trong đó cũng có một thanh thừa. Như vậy bài toán được đưa về ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ. Khớp tương hỗ *(2,3)* nối *II* với *III* là giao điểm của hai thanh song song nên ở xa vô cùng theo phương ngang. Các khớp tương hỗ *(1,2)* và *(1,3)* nằm trên đường thẳng song song với hai thanh nối hai miếng cứng *II* và *III* nên khớp *(2,3)* sẽ nằm trên đường thẳng nối *(1,2)* và *(1,3)*. Kết luận: hệ BHTT.

Trong trường hợp này, cũng có thể quan niệm trái đất là một miếng cứng có hai khớp *a, b* được dùng để nối hai miếng cứng *II* và *III*, giữ vai trò như một liên kết thanh *ab*. Bài toán đưa về trường hợp hai miếng cứng *II* và *III* được nối với nhau bằng ba thanh song song *2-3, 6-7* và *a-b* có chiều dài khác nhau. Kết luận: hệ BHTT.

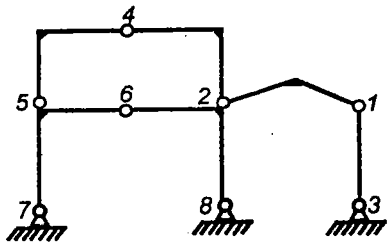
Ví dụ 1.6. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 1.26.

Điều kiện cần. Từ điều kiện cần (1.3) ta dễ dàng tìm được $n = 0$ tức là hệ đủ liên kết.

Điều kiện đủ. Nếu chú ý là có thể quan niệm liên kết thanh một cách khái quát hơn như trên hình 1.7c thì ta có thể vận dụng tính chất của bộ đôi để giải bài toán này bằng biện pháp thu hẹp hoặc phát triển miếng cứng như sau:

khi loại bỏ bộ đôi *(6-7)(6-8)* ta được hệ còn lại là trái đất. Vì trái đất là hệ BBH nên toàn bộ hệ đã cho cũng là BBH.

Cũng có thể phân tích bài toán bằng cách phát triển miếng cứng theo thứ tự ngược lại.



Hình 1. 26

CÂU HỎI ÔN TẬP

1.1. Ý nghĩa của việc nghiên cứu sự cấu tạo hình học của kết cấu?

1.2. Thế nào là hệ bất biến hình, biến hình và biến hình tức thời. Khả năng áp dụng các hệ đó trong xây dựng?

1.3. Định nghĩa miếng cứng.

1.4. Thiết lập các công thức biểu thị điều kiện cần để nối các miếng cứng thành hệ bất biến hình. Nêu đối tượng áp dụng cho từng công thức.

1.5. Giải thích tính chất của bộ đôi và trình bày cách vận dụng.

1.6. Phát biểu và giải thích điều kiện cần và đủ để nối hai miếng cứng, ba miếng cứng thành một hệ bất biến hình.

2 Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

Xuất phát từ định nghĩa hệ tĩnh định đã nêu trong chương Mở đầu, ta thấy: khi xác định nội lực chỉ cần sử dụng các điều kiện cân bằng, không yêu cầu sử dụng các điều kiện vật lý và biến dạng. Do đó, nội lực trong hệ tĩnh định chỉ phụ thuộc các đại lượng tham gia phương trình cân bằng như: tải trọng, sơ đồ hình học của công trình, không phụ thuộc độ cứng của các cấu kiện (vật liệu, kích thước tiết diện) cũng như không phụ thuộc công trình làm việc trong giai đoạn đàn hồi hay đàn dẻo. Nội lực chỉ phụ thuộc vật liệu và kích thước tiết diện khi tính hệ thanh với trọng lượng bản thân chưa biết.

Cũng cần chú ý là khái niệm về nội lực tại một tiết diện *k* nào đó của hệ, hoàn toàn có thể đồng nhất với khái niệm về phản lực trong các liên kết nếu quan niệm tiết diện *k* là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện *k*. Như vậy, về sau này ta có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

Nội dung chủ yếu của chương này là nghiên cứu phương pháp tính hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động với giả thiết là tải trọng tác dụng tĩnh. Các phương pháp tính được xây dựng trên cơ sở các điều kiện cân bằng tĩnh học nên được gọi là phương pháp tĩnh học.

Trong những trường hợp, khi gặp bài toán phức tạp ta có thể vận dụng phương pháp động học được xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ (xem chương 11) hoặc phương pháp tĩnh học trong đó sử dụng biện pháp thay thế liên kết [1; 5; 6].

2.1. Phân tích tính chất chịu lực của các hệ tĩnh định

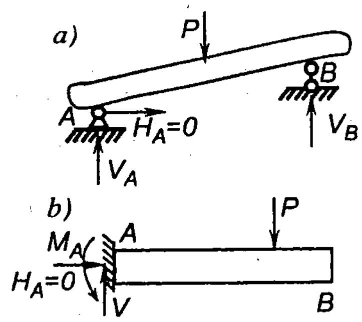
Có nhiều cách phân loại các hệ tĩnh định. Dưới đây là cách phân loại theo tính chất chịu lực của các hệ.

A. Hệ đơn giản

Căn cứ vào phương của phản lực tựa khi hệ chịu tải trọng thẳng đứng, ta chia các hệ đơn giản thành hai trường hợp cơ bản: *hệ dầm* và *hệ ba khớp.*

1. Hệ dầm

Hệ dầm là hệ bất biến hình được cấu tạo từ một miếng cứng nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động có phương thẳng đứng (hình 2.1a) hoặc bằng một liên kết ngàm (hình 2.1b). Dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, thành phần phản lực nằm ngang trong hệ luôn luôn bằng không.



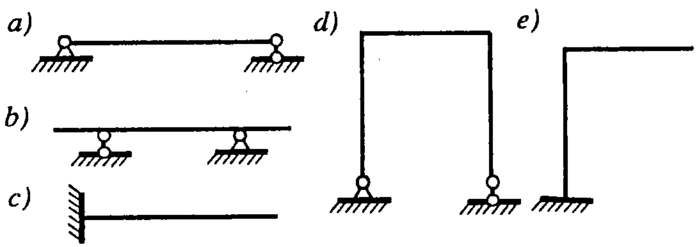
Hình 2. 1

Tùy theo sự cấu tạo của miếng cứng, hệ dầm được phân loại như sau:

a) Dầm tĩnh định đơn giản, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh thẳng, bao gồm:

- Dầm đơn giản không có đầu thừa (hình 2.2a).
- Dầm đơn giản có đầu thừa (hình 2.2b).
- Dầm côngxôn (hình 2.2c)

Hình 2. 2



Dưới tác dụng của tải trọng bất kỳ, trong dầm phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc. Lực dọc bằng không khi trục dầm vuông góc với phương của tải trọng.

b) Khung tĩnh định, khi miếng cứng được hình thành từ một thanh gãy khúc (hình 2.2d, e). Trong khung phát sinh các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

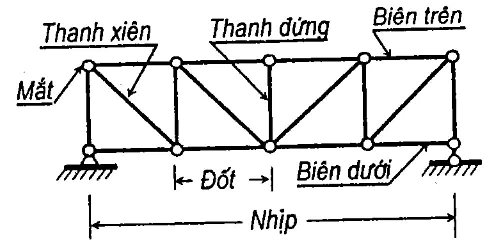
c) Dàn dầm tĩnh định, khi miếng cứng được hình thành từ các thanh thẳng nối với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh (hình 2.3).

Khoảng cách giữa các gối tựa của dàn gọi là *nhịp*. Giao điểm của các thanh gọi là *mắt dàn*. Những thanh nằm trên chu vi của dàn tạo thành

đường *biên trên* và *biên dưới*.

Các thanh nằm bên trong các đường biên tạo thành *hệ thanh bụng*. Hệ thanh bụng gồm có các *thanh đứng* và các *thanh xiên*.

Khoảng cách giữa các mắt thuộc đường biên gọi là *đốt* (xem hình 2.3).



Hình 2. 3

Để tính toán dàn được đơn giản, ta thừa nhận các giả thiết sau:

1) Mắt của dàn phải nằm tại giao điểm của các trục thanh và là khớp lý tưởng (các đầu thanh quy tụ ở mắt có thể xoay một cách tự do không ma sát).

2) Tải trọng chỉ tác dụng tại các mắt của dàn.

3) Trọng lượng bản thân của các thanh không đáng kể so với tải trọng tổng thể tác dụng trên dàn.

Trong thực tế, các thanh thường được nối với nhau bằng đinh tán hoặc mối hàn, rất ít khi nối bằng khớp (bulông, chốt...). Những mối nối này không phải là khớp lý tưởng, ngoài ra các thanh đều có trọng lượng riêng, cho nên kết quả tính toán theo các giả thiết trên chỉ là gần đúng.

Từ các giả thiết trên ta đi đến kết luận quan trọng như sau:

Các thanh trong dàn chỉ chịu kéo hoặc nén, nghĩa là trong dàn chỉ tồn tại lực dọc N mà không có mômen uốn M và lực cắt Q.

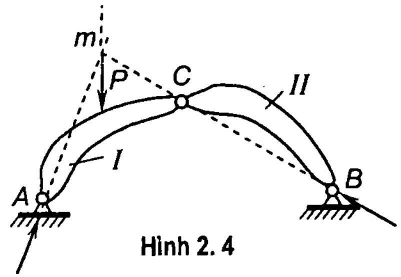
Thật vậy, vì trọng lượng bản thân của mỗi thanh trong dàn không đáng kể và tải trọng chỉ đặt ở mắt nghĩa là thanh không chịu tải trọng đặt trực tiếp trên chiều dài của nó, hơn nữa vì các khớp ở hai đầu thanh là lý tưởng nên ta có thể xem mỗi thanh trong dàn như một liên kết loại một. Như đã biết từ chương 1, trong các liên kết loại một chỉ phát sinh một thành phần phản lực hướng theo trục thanh, do đó trong các thanh của dàn chỉ tồn tại lực dọc *N*.

Ưu điểm của dàn là có thể vượt qua được những nhịp lớn và tiết kiệm được vật liệu. Nếu dùng dầm đặc để vượt qua những nhịp lớn thì chiều cao của dầm đặc phải lớn và vật liệu làm việc không đồng đều. Thật vậy, trong dầm có mômen uốn do đó ứng suất phân bố không đều trên toàn tiết diện, các thớ biên làm việc nhiều còn các thớ giữa làm việc ít. Trong dàn thì các thanh chỉ chịu kéo hoặc nén đúng tâm nên ứng suất phân bố đều trên toàn tiết diện, do đó các thớ làm việc như nhau và tiết kiệm được vật liệu.

2. Hệ ba khớp (hay hệ vòm)

Hệ ba khớp (hình 2.4) *là hệ được cấu tạo từ hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp (khớp C) và nối với trái đất bằng hai gối tựa bất động (A và B).*

Nếu xem trái đất là một miếng cứng thì hệ sẽ gồm ba miếng cứng nối với nhau bằng ba khớp tương hỗ không thẳng hàng *A, B, C*. Như vậy hệ ba khớp là hệ bất biến hình, đủ liên kết.



Hình 2. 4

Hệ ba khớp là hệ có *lực xô*, nghĩa là trong hệ phát sinh thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng chỉ tác dụng thẳng đứng.

Đó là điều khác nhau cơ bản giữa hệ ba khớp và hệ dầm.

Để xác nhận điều đó ta xét hệ trên hình 2.4. Khi tải trọng thẳng đứng *P* *tác dụng trên miếng cứng bên trái I của hệ, phản lực tại gối B phải đi qua khớp C. Thật vậy, lúc này trên miếng cứng II chỉ chịu tác dụng của* hai lực đặt tại *B* và *C*, muốn cho miếng cứng *II* cân bằng thì hai lực đó phải trực đối, do đó phản lực tại *B* có phương *BC*.

Mặt khác, khi xét cân bằng của toàn hệ ta thấy trên hệ có ba lực tác dụng: lực *P*, phản lực tại *B* và phản lực tại *A*. Điều kiện để cho hệ cân bằng là ba lực này phải đồng quy, do đó phản lực tại *A* buộc phải đi qua giao điểm *m* của hai lực *P* và *B*.

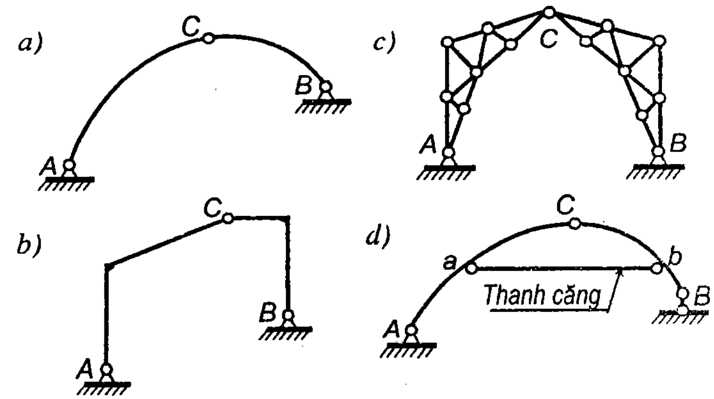
Như vậy, khi tải trọng tác dụng thẳng đứng, các phản lực *A* và *B* nói chung có thành phần nằm ngang tức là có *lực xô* (trừ trường hợp đặc biệt khi khớp *C* và *B* cùng trên đường thẳng đứng, lúc này hệ trở thành hệ dầm).

Hệ ba khớp được sử dụng rộng rãi trong thực tế dưới nhiều hình thức:

- *Vòm ba khớp* (hình 2.5a), khi các miếng cứng của hệ là các thanh cong, trong vòm ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.
- *Khung ba khớp* (hình 2.5b), khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc hoặc thẳng. Trong khung ba khớp phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt, lực dọc.

- *Dàn vòm ba khớp* (hình 2.5c), khi mỗi miếng cứng của hệ là dàn phẳng bất biến hình và tĩnh định. Trong các thanh của dàn vòm ba khớp chỉ phát sinh lực dọc.

Hình 2. 5



- *Hệ ba khớp có thanh căng* (hình 2.5d). Hệ này gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng khớp *C* và thanh căng *ab*, tiếp đó liên kết với trái đất bằng một gối cố định *A* và một gối di động *B*. Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô, chịu lực dọc. Trong các miếng cứng *AC* và *CB*, nói chung phát sinh đầy đủ các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và lực dọc.

Kết cấu hệ ba khớp có ưu điểm là có thể vượt qua được các nhịp khá lớn so với kết cấu dầm. Thật vậy, như dưới đây sẽ thấy, mômen uốn và lực cắt trong vòm ba khớp thường rất nhỏ so với mômen uốn và lực cắt trong dầm có điều kiện làm việc như nhau về nhịp và tải trọng. Hơn nữa nếu khéo chọn dạng của trục vòm thì mômen uốn và do đó lực cắt tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không hoặc xấp xỉ bằng không, vòm chỉ chịu lực nén là chủ yếu. Lúc này có thể sử dụng được các loại vật liệu chịu nén tốt như gạch, đá là những loại vật liệu dễ kiếm để xây dựng vòm.

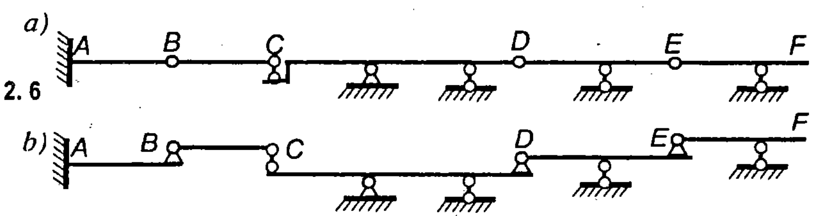
Đối với những nhịp nhỏ, sử dụng kết cấu vòm sẽ không kinh tế bằng kết cấu dầm vì chế tạo kết cấu vòm thường phức tạp hơn.

Một nhược điểm nữa cần chú ý khi sử dụng kết cấu vòm ba khớp là phải xây dựng kết cấu bên dưới gối tựa *A* và *B* khá lớn để chịu thành phần lực xô. Có thể khắc phục nhược điểm này bằng cách sử dụng vòm ba khớp có thanh căng. Lúc này dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng, các phản lực ở gối tựa chỉ có thành phần thẳng đứng còn thanh căng tiếp nhận lực xô, do đó kết cấu bên dưới gối sẽ nhẹ nhàng hơn.

B. Hệ ghép

Hệ ghép tĩnh định là hệ gồm nhiều hệ tĩnh định đơn giản nối với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh và nối với trái đất bằng các liên kết tựa sao cho hệ là bất biến hình và đủ liên kết.

Trên hình 2.6a giới thiệu một hệ ghép gồm năm dầm đơn giản nối với nhau, hệ này còn được gọi là *hệ dầm tĩnh định nhiều nhịp*. Cũng dễ dàng xác nhận được là hệ bất biến hình và đủ liên kết.



Hình 2. 6

Từ sự cấu tạo của hệ trên hình 2.6, ta có nhận xét sau: nếu loại bỏ dầm *BC* thì dầm *AB* vẫn bất biến hình, ngược lại, nếu loại bỏ dầm *AB* thì dầm *BC* trở thành biến hình. Vì thế ta gọi hệ *BC* là hệ phụ của hệ *AB* và gọi hệ *AB* là hệ chính của dầm *BC*.

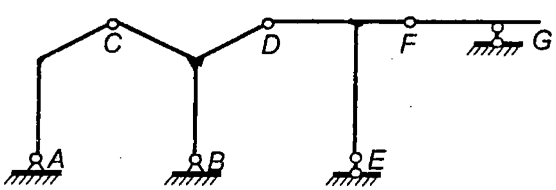
Như vậy, *hệ chính là hệ sẽ bất biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận, hệ phụ là hệ sẽ biến hình nếu loại bỏ các hệ lân cận.*

Trong hệ này, hệ *DE* là chính của hệ *EF* đồng thời là phụ của hệ *CD*.

Các hệ phụ muốn đứng vững được thì phải dựa vào hệ chính của nó. Do đó có thể biểu diễn hệ đã cho theo sơ đồ cấu tạo về tính chất chịu lực như trên hình 2.6b, trong đó các hệ phụ được đặt trên các hệ chính tương ứng.

Hệ ghép trên hình 2.7 gồm khung ba khớp *ACBD*, khung *DEF* và dầm đơn giản *FG* nối với nhau bằng các khớp *D*, *F*. Trong đó: *ACBD* là hệ chính, *DEF* là hệ phụ của *ACBD* và là hệ chính của *FG*, còn *FG* là hệ phụ.

Hình 2. 7



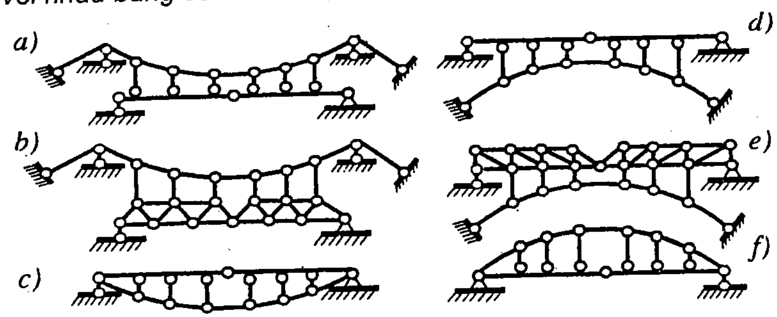
Về tính chất truyền lực, ta có nhận xét sau:

Tải trọng tác dụng trên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính mà không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không bị biến dạng nên không phát sinh nội lực.

Tải trọng tác dụng trên hệ phụ thì cả hệ phụ lẫn hệ chính của nó cũng phát sinh nội lực. Tải trọng truyền áp lực từ hệ phụ vào hệ chính qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

C. Hệ liên hợp

Hệ liên hợp tĩnh định là hệ bất biến hình được cấu tạo bởi nhiều hệ có tính chất chịu lực khác nhau (dầm, vòm, dàn, dây cáp hoặc dây xích...) nối với nhau bằng số liên kết vừa đủ để cùng tham gia chịu lực.



Hình 2. 8

Trên hình 2.8 giới thiệu một số hệ liên hợp đơn giản cấu tạo bởi dầm hoặc dàn dầm nối với hệ thanh khớp là những hệ liên hợp thường gặp.

Dưới tác dụng của tải trọng thẳng đứng hướng từ trên xuống dưới, các cấu kiện của hệ liên hợp có tính chất chịu lực như sau:

- Các cấu kiện tạo thành đường cong hay đường đa giác võng xuống dưới sẽ chịu kéo (hình 2.8a, b, c) nên thường làm bằng vật liệu chịu kéo tốt như dây cáp hoặc dây xích. Ta gọi những cấu kiện này là *dây xích*.
- Các cấu kiện tạo thành đường cong hay đường đa giác vồng lên trên đều chịu nén (hình 2.8d, e, f). Những cấu kiện này được làm bằng vật liệu chịu nén tốt và gọi là *vòm dẻo*.
- Hệ dầm hoặc dàn chịu uốn gọi là *dầm cứng*. Dầm cứng được gia cường bằng dây xích (hình 2.8a, b, c) gọi là *hệ treo*. Lúc này dầm cứng chịu mômen uốn, lực cắt nếu dây xích không neo vào dầm cứng (hình 2.8a,b) và chịu mômen uốn, lực cắt cùng với lực nén nếu dây xích được neo vào dầm cứng (hình 2.8c).

Dầm cứng được gia cường bằng vòm dẻo (hình 2.8d, e, f) gọi là *hệ vòm*. Tùy theo chân vòm dẻo có liên kết (hình 2.8f) hay không liên kết (hình 2.8d, e) với dầm cứng, trong dầm cứng sẽ phát sinh mômen uốn, lực cắt cùng với lực kéo hay chỉ phát sinh mômen uốn và lực cắt.

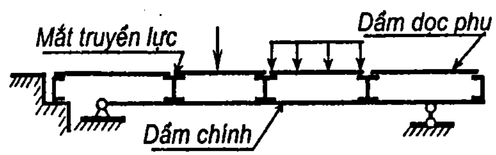
♦ Vì tải trọng thường di động trên dầm cứng nên:

- Các thanh đứng bố trí ở phía trên dầm cứng (hình 2.8a, b, f) thường chịu kéo.
- Các thanh đứng bố trí ở phía dưới dầm cứng (hình 2.8c, d, e) thường chịu nén.

Hiện nay, hệ liên hợp tĩnh định thường ít được sử dụng song hệ liên hợp siêu tĩnh lại được quan tâm nghiên cứu phát triển để vượt qua các khẩu độ lớn. Ví dụ, cầu treo dây văng Tatara ở Onomichi - Imabari (Nhật bản) có nhịp 890 m (1999); cầu treo dây parabol Akashi- Kaikyo ở Kobe (Nhật bản), có ba nhịp 960+1991+960 m (1998).

D. Hệ có hệ thống truyền lực

Trong thực tế xây dựng, thường gặp những *hệ trong đó tải trọng không tác dụng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính mà truyền áp lực vào kết cấu chịu lực qua một hệ thống dầm gọi là hệ thống truyền lực*.



Hình 2. 9

Trên hình 2.9 giới thiệu dầm có hệ thống truyền lực. Trong hệ này, tải trọng chỉ đặt trên các dầm dọc phụ và truyền áp lực từ dầm dọc phụ xuống dầm dọc chịu lực chính (gọi là dầm dọc chính) qua các điểm tựa của dầm dọc phụ trên dầm dọc chính. Những điểm tựa này được gọi là *mắt truyền lực. Trong thực tế các mắt truyền lực thường là hệ thống dầm* ngang đặt vuông góc với dầm dọc phụ và chính. Khoảng cách giữa hai mắt truyền lực gọi là *đốt*.

Hệ có hệ thống truyền lực thường được dùng trong kết cấu sàn nhà, mái nhà và kết cấu mặt cầu... nhằm mục đích: giảm nhẹ trọng lượng kết cấu chịu lực chính, bảo vệ kết cấu chịu lực chính khỏi bị hư hỏng trong quá trình chịu tải, cố định vị trí đặt lực trên kết cấu chịu lực chính.

Kết cấu chịu lực chính có thể là bất kỳ (dầm, dàn, vòm, khung...) tĩnh định hoặc siêu tĩnh.

2.2. Cách xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động

Để xác định phản lực trong các liên kết hoặc nội lực tại một tiết diện nào đó ta sử dụng phương pháp mặt cắt nhằm biến nội lực thành ngoại lực, thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng giải tích, từ đó suy ra các phản lực hoặc nội lực cần tìm.

Thứ tự tiến hành:

1) Thực hiện các mặt cắt qua các liên kết cần xác định phản lực (hoặc qua tiết diện cần tìm nội lực). Mỗi mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập.

2) Khảo sát một phần hệ nào đó. Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các phản lực (nội lực) tương ứng tại các liên kết (tiết diện) bị cắt. Các phản lực (nội lực) chưa biết có thể giả thiết hướng theo chiều dương.

3) Lập các điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng giải tích cho phần hệ khảo sát.

Với mỗi mặt cắt ta có các điều kiện cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu trên một số trục hoặc tổng mômen đối với một số điểm, cụ thể như sau:

* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực đồng quy tại điểm O* thì có thể sử dụng một trong ba dạng điều kiện sau:

a) $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$, (*X* và *Y* là *hai trục chiếu bất kỳ không song song với nhau*). Trong thực tế thường dùng điều kiện này.

b) $\Sigma X = 0$; $\Sigma M_A = 0$, (*OA không được vuông góc với trục chiếu X*).

c) $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$, (*AOB không được thẳng hàng*).

* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực song song*, ta có thể sử dụng một trong hai dạng điều kiện:

a) $\Sigma X = 0$; $\Sigma M_A = 0$, (*trục chiếu không được vuông góc với phương của các lực song song*).

b) $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$, (*AB không được song song với phương của các lực song song*).

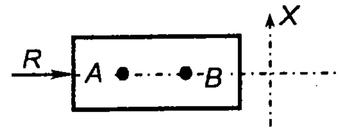
* Nếu các lực đặt vào phần hệ đang xét là *hệ lực bất kỳ*, ta có thể sử dụng một trong ba dạng điều kiện:

a) $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M_A = 0$, (các trục chiếu *X và Y không được song song với nhau*).

b) $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$, *(A và B không được nằm trên đường thẳng vuông góc với trục X).*

c) $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum M_C = 0$, *(A, B và C không được cùng nằm trên một đường thẳng).*

Nhất thiết phải chú ý đến điều kiện hạn chế của các dạng điều kiện cân bằng, nếu không thì các phương trình cân bằng sẽ không độc lập với nhau và có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng vẫn được thỏa mãn trong khi hệ không cân bằng.



Hình 2. 10

Thật vậy, với hệ chịu lực hoặc hợp lực *R* như trên hình 2.10, khi sử dụng dạng điều kiện cân bằng *b)* của bài toán hệ chịu lực bất kỳ, nếu chọn trục *X* và các điểm *A, B* như trên hình 2.10 thì các điều kiện cân bằng vẫn được thỏa mãn trong khi hệ không cân bằng.

Trong hệ tĩnh định ta sẽ thiết lập được một hệ phương trình cân bằng độc lập vừa đủ để xác định số thành phần phản lực liên kết (nội lực) cần tìm trong hệ.

Thật vậy, nếu quan niệm hệ bất kỳ gồm *D* miếng cứng nối với nhau bằng *T* liên kết thanh, *K* liên kết khớp đơn giản, *H* mối hàn đơn giản, ta có $T+2K+3H$ thành phần phản lực cần tìm. Số phương trình cân bằng độc lập được xác định bằng số bậc tự do của hệ tức là bằng $3(D-1)$. Vì hệ là tĩnh định nên:

$$n = T + 2K + 3H - 3(D-1) = 0, \quad \text{hay} \quad 3(D-1) = T + 2K + 3H.$$

Như vậy là số phương trình cân bằng độc lập vừa bằng số thành phần phản lực liên kết cần tìm.

4) Giải hệ phương trình cân bằng ta xác định được các thành phần phản lực cần tìm. Kết quả mang dấu dương thì chiều của thành phần phản lực đúng với chiều giả thiết còn kết quả mang dấu âm thì ngược với chiều đã giả thiết.

Ví dụ 2.1. Xác định các thành phần phản lực tại liên kết khớp *A, B* và *C* (hình 2.11a).

Từ các điều kiện cân bằng của toàn hệ ta xác định các phản lực tựa, kết quả ghi trên hình 2.11a.

Thực hiện mặt cắt 1-1, xét cân bằng của miếng cứng *I* (hình 2.11b), ta có:

$$\sum X = X_C - X_A = 0; \qquad \text{(a)}$$

$$\sum Y = Y_A + Y_C - P = 0; \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_C = Y_A a + X_A h_1 = 0. \qquad \text{(c)}$$

Thực hiện mặt cắt 2-2; xét cân bằng của miếng cứng *II* (hình 2.11b), ta có:

$$\sum X = X_B - X_C = 0; \qquad \text{(d)}$$

$$\sum Y = Y_B - Y_C = 0; \qquad \text{(e)}$$

$$\sum M_C = Y_B b + X_B h_2 = 0. \qquad \text{(f)}$$

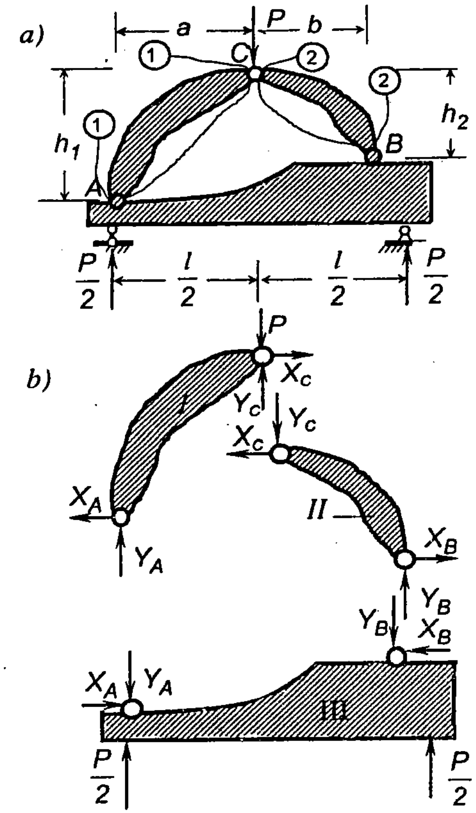
Ta được sáu phương trình đủ để xác định sáu thành phần phản lực cần tìm. Kết quả:

$$X_A = X_B = X_C = \frac{-Pab}{bh_1 + ah_2};$$

$$Y_A = \frac{Pbh_1}{bh_1 + ah_2};$$

$$Y_B = Y_C = \frac{Pah_2}{bh_1 + ah_2}.$$

Về nguyên tắc, khi vận dụng phương pháp mặt cắt để tính hệ tĩnh định ta sẽ lập được một hệ phương trình vừa đủ để xác định các đại lượng chưa biết. Sau này, tùy từng trường hợp cụ thể ta có thể vận dụng linh hoạt các mặt cắt và các phương trình cân bằng để sao cho việc giải hệ phương trình được dễ dàng.



Hình 2 11.

2.3. Cách tính dàn tĩnh định chịu tải trọng bất động

Như đã phân tích ở 2.1, trong các thanh dàn chỉ tồn tại lực dọc *N*. Do đó, khi thực hiện mặt cắt qua mỗi thanh dàn ta chỉ cần thay thế tác dụng của phần thanh bị cắt bằng một thành phần nội lực là lực dọc *N*.

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định lực dọc trong các thanh dàn theo một số phương pháp thường được áp dụng trong thực hành.

A. Phương pháp tách mắt

Phương pháp tách mắt là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, trong đó hệ lực cần khảo sát cân bằng là hệ lực đồng quy. Phương pháp này thường được dùng để tính hệ dàn.

Nội dung của phương pháp tách mắt là *khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn.*

Thứ tự áp dụng:

✦ *Lần lượt tách từng mắt ra khỏi dàn bằng những mặt cắt bao quanh mắt.*

✦ *Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Quy ước lực dọc dương là kéo tức là hướng từ mắt ra ngoài. Khi chưa biết lực dọc trong thanh thì giả thiết lực dọc có chiều dương, hướng ra ngoài mắt đang xét. Sau khi thay thế, tại mỗi mắt ta có một hệ lực đồng quy.*

✦ *Khảo sát sự cân bằng của từng mắt. Vì hệ lực là phẳng và đồng quy nên tại mỗi mắt có hai phương trình cân bằng, thường dùng hai phương trình hình chiếu theo hai phương bất kỳ X và Y không song song:*

$$\Sigma X = 0 \quad \text{và} \quad \Sigma Y = 0.$$

Từ các phương trình cân bằng đó ta suy ra được nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều đã giả định là đúng, lực dọc là kéo. Nếu kết quả mang dấu âm thì chiều của lực cần tìm ngược chiều đã giả định, lực dọc là nén.

Về nguyên tắc, có thể tách các mắt theo thứ tự bất kỳ và tại mỗi mắt có thể viết phương trình hình chiếu lên hai phương X, Y bất kỳ không song song, cuối cùng vẫn tìm được đầy đủ các nội lực trong dàn. Tuy nhiên, nếu thứ tự tách mắt và cách chọn trục không khéo thì trong một phương trình cân bằng có thể tồn tại nhiều lực chưa biết, do đó phải giải một hệ phương trình. *Biện pháp tốt nhất là chọn sao cho trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn số.* Muốn vậy, khi áp dụng phương pháp tách mắt ta nên thực hiện theo những chỉ dẫn sau:

* *Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai lực dọc chưa biết.*

Tại mỗi mắt ta chỉ có hai phương trình cân bằng cho nên nếu ở đó chỉ có một hoặc hai lực dọc chưa biết thì có thể tìm được ngay. Trong trường hợp hệ cho trên hình 2.12, có thể tách theo thứ tự 1, 2, 3, 4...

* *Tại mỗi mắt, để tìm lực dọc trong thanh chưa biết thứ nhất thì nên lập phương trình hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chưa biết thứ hai.*

Làm như vậy thì trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số và các kết quả tìm được sẽ độc lập với nhau, đỡ mắc sai lầm dắt dây.

Ví dụ 2.2. Xác định lực dọc trong các thanh *1–2*, *1–3* và *2–3* trong hệ trên hình 2.12a.

Tách mắt *1* (hình 2.12b), để tìm N_{1-3} ta sử dụng phương trình hình chiếu lên phương X vuông góc với thanh *1–2*

$\Sigma X = N_{1-3} \sin\alpha - a \cos\alpha = 0;$ suy ra $N_{1-3} = 2P\cot g\alpha$ (lực kéo).

Để tìm N_{1-2} ta dùng phương trình hình chiếu lên phương Y vuông góc với thanh *1–3*

$\Sigma Y = N_{1-2} \sin\alpha + A = 0;$ suy ra $N_{1-2} = -2P/\sin\alpha$ (lực nén).

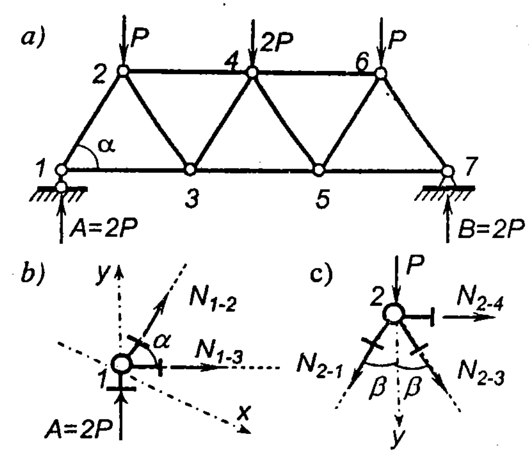
Sau khi biết N_{1-2} ta có thể tách mắt *2* để tìm N_{2-4} và N_{2-3} (hình 2.12c). Chẳng hạn cần tìm N_{2-3} ta chiếu các lực lên phương vuông góc với thanh *2–4*

$\Sigma Y = N_{2-3}\cos\beta +$

$+ N_{1-2}\cos\beta + P = 0;$

Nhưng $N_{1-2} = -2P/\sin\alpha$ và $\cos\beta = \sin\alpha$, nên:

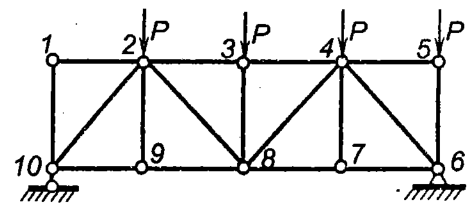
$N_{2-3} = P/\sin\alpha$ (lực nén).



Hình 2. 12

Từ phương pháp tách mắt ta suy ra các hệ quả quan trọng sau:

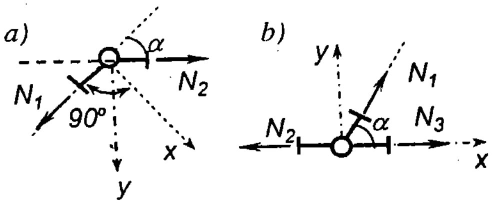
1) Tại một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng và không có tải trọng tác dụng thì hai thanh đó không làm việc tức là lực dọc trong hai thanh đó bằng không.



Hình 2. 13

Ví dụ như trường hợp

dàn trên hình 2.13, lực dọc trong các thanh $1-2$ và $1-10$ bằng không vì mắt 1 thỏa mãn các yêu cầu của hệ quả 1.



Hình 2. 14

Để chứng minh hệ quả 1 ta khảo sát sự cân bằng của một mắt có hai thanh không thẳng hàng và không có lực đặt ở mắt (hình 2.14a).

$$\sum X = N_2 \sin\alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \quad \text{nên} \quad N_2 = 0.$$

$$\sum Y = N_1 \sin\alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \quad \text{nên} \quad N_1 = 0.$$

2) *Tại một mắt có ba thanh trong đó có hai thanh thẳng hàng và nếu tại mắt đó không có tải trọng tác dụng thì thanh không thẳng hàng không làm việc (lực dọc bằng không) còn lực dọc trong hai thanh thẳng hàng bằng nhau.*

Trong trường hợp hệ trên hình 2.13 ta có:

- Tại mắt 9: $N_{9-2} = 0$ còn $N_{9-10} = N_{9-8}$.
- Tại mắt 7: $N_{7-4} = 0$ còn $N_{7-8} = N_{7-6}$.
- Tại mắt 5 ta thấy chỉ có hai thanh và một lực P, thẳng hàng với thanh $5-6$; có thể xem lực P như một thanh đã biết nội lực, do đó: $N_{5-4} = 0$ còn $N_{5-6} = -P$.

Để chứng minh tính chất trên ta khảo sát sự cân bằng của mắt vẽ trên hình 2.14b, ta có:

$$\sum Y = N_1 \sin\alpha = 0; \quad \text{vì } \alpha \neq 0 \quad \text{nên} \quad N_1 = 0.$$

$$\sum X = N_3 - N_2 = 0; \quad \text{nên} \quad N_3 = N_2.$$

Đó là điều cần chứng minh.

Trước khi tính dàn ta nên chú ý sử dụng các hệ quả trên để phát hiện các thanh không làm việc và loại chúng ra khỏi hệ, như vậy hệ còn lại sẽ đơn giản và dễ dàng tính toán hơn.

Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng nhưng cũng có nhược điểm là nếu để xảy ra sai lầm trong một bước tính toán nào đó thì các kết quả tiếp sau cũng bị sai kéo theo.

B. Phương pháp mặt cắt đơn giản

Phương pháp mặt cắt đơn giản là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt, được áp dụng khá tiện lợi để tính dàn tĩnh định khi có thể thực hiện tách đôi dàn thành hai phần độc lập bằng một mặt cắt qua các thanh với số nội lực chưa biết nói chung không lớn hơn ba. Phương pháp này do A. Ritter (1826-1908) kiến nghị đầu tiên và được hoàn thiện bởi giáo sư F. S. Iaxinxki (1856-1899).

Thứ tự áp dụng:

Thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm nội lực và qua hai thanh khác chưa biết nội lực, mặt cắt cần phải chia dàn ra thành hai phần độc lập.

Thay thế tác dụng của các thanh bị cắt bằng các lực dọc tương ứng. Cũng như phương pháp tách mắt, khi chưa biết lực dọc ta giả thiết là dương nghĩa là hướng ra ngoài mắt đang xét.

Lập điều kiện cân bằng của một phần dàn bị cắt (phần phải hoặc phần trái). Trong trường hợp này ta có hệ lực phẳng bất kỳ, nên có ba phương trình cân bằng. Từ các phương trình cân bằng đó suy ra các nội lực cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều nội lực hướng theo chiều giả định, tức là kéo. Ngược lại nếu kết quả mang dấu âm thì chiều nội lực hướng ngược chiều giả định, tức là nén.

Để tìm được các phương trình cân bằng trong đó mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số ta nên thực hiện theo chỉ dẫn sau:

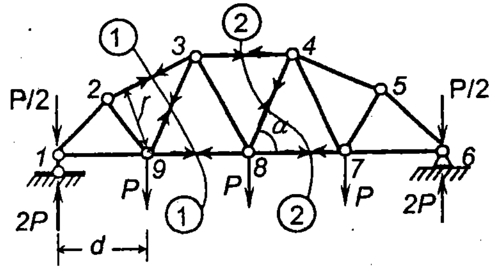
Trường hợp ba thanh chưa biết nội lực cắt nhau từng đôi một, để tìm nội lực trong thanh thứ nhất, nên sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực đối với giao điểm của hai thanh còn lại.

Trường hợp trong số ba thanh bị cắt chưa biết nội lực có hai thanh song song, để tìm nội lực trong thanh không song song ta sử dụng phương trình cân bằng dưới dạng tổng hình chiếu của các lực lên phương vuông góc với hai thanh song song.

Ví dụ 2.3. Xác đị nnh lực dọc trong các thanh $2-3$ và $4-8$ của dàn trên hình 2.15.

Tìm N_{2-3}: thực hiện mặt cắt $1-1$ qua thanh $2-3$ và hai thanh chưa biết nội lực $3-9$ và $9-8$. Thay thế các thanh bị cắt bằng lực dọc tương ứng như trên hình 2.15.

Khảo sát cân bằng phần bên trái mặt cắt. Để tìm được ngay N_{2-3} ta lập phương trình cân bằng dưới dạng tổng mômen của các lực thuộc phần bên trái mặt cắt đối với giao điểm của hai thanh *3–9* và *9–8* tức là đối với điểm *9*. Khi đó, các lực chưa biết N_{3-9}, N_{9-8} không tham gia phương trình cân bằng, ta có:



Hình 2. 15

$$\Sigma M_9^{tr} = -N_{2-3}r - \left(2P - \frac{P}{2}\right)d = 0, \text{ suy ra } N_{2-3} = -\frac{3Pd}{2r} \text{ (lực nén).}$$

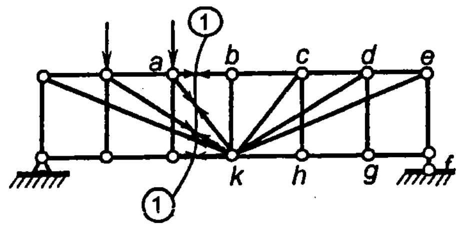
Tìm N_{4-8}: thực hiện mặt cắt *2–2* như trên hình 2.15. Mặt cắt này qua ba thanh chưa biết nội lực, trong đó hai thanh *3–4* và *8–7* song song. Do đó, để tìm N_{4-8} ta lập phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu các lực thuộc phần phải (hoặc phần trái) lên phương vuông góc với hai thanh song song *3–4* và *8–7*, ta có:

$$\Sigma Y^{ph} = -N_{4-8}\sin\alpha - P + \left(2P - \frac{P}{2}\right) = 0 \text{ suy ra } N_{4-8} = \frac{P}{2\sin\alpha} \text{ (lực kéo).}$$

Chú thích:

Nếu mặt cắt đi qua bốn thanh (hoặc hơn nữa) chưa biết nội lực thì nói chung ta không thể xác định ngay được các lực dọc theo một mặt cắt. Trong trường hợp đặc biệt khi các thanh bị cắt đồng quy tại một điểm *k* nào đó trừ một thanh thì ta có thể tìm ngay được nội lực trong thanh không đồng quy từ một mặt cắt.

Ví dụ, với hệ trên hình 2.16, mặt cắt *1-1* đi qua năm thanh chưa biết nội lực trong đó có bốn thanh đồng quy ở điểm *k*, để tìm N_{a-b} trong thanh không đồng quy ta có thể sử dụng phương trình cân bằng $\Sigma M_k = 0$.



Hình 2. 16

C. Phương pháp mặt cắt phối hợp

Phương pháp này được áp dụng để tính dàn khi không dùng được phương pháp mặt cắt đơn giản, nghĩa là khi tại một mặt cắt, số lực chưa biết lớn hơn ba. Mục đích chính của phương pháp này là tìm cách thiết lập một số

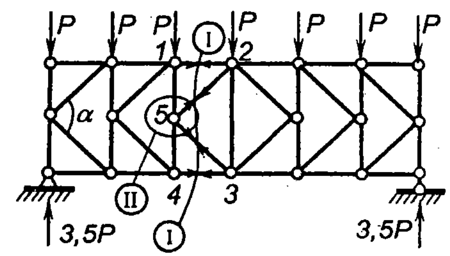
phương trình cân bằng chỉ chứa một số lực chưa biết bằng số phương trình đó. Lúc này ta phải giải hệ phương trình. Tất nhiên số phương trình càng ít càng tốt.

Như đã biết, khi thiết lập một phương trình cân bằng trong mỗi mặt cắt nói chung ta chỉ có thể loại trừ được hai lực chưa biết. Bởi vậy:

✣ *Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua bốn thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện là cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia dàn thành hai phần độc lập thì ta phải dùng hai mặt cắt phối hợp.* Với hai mặt cắt thì ta có thể tìm ngay được hai nội lực theo hai phương trình. Muốn vậy:

- *Hai mặt cắt cùng phải đi qua hai thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt chỉ có thể đi qua hai thanh khác chưa cần tìm nội lực.* Hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ nhất phải khác biệt với hai thanh chưa cần tìm nội lực thuộc mặt cắt thứ hai, nếu không thì hai mặt cắt sẽ trùng hợp.
- *Trong mỗi mặt cắt, thiết lập một phương trình cân bằng sao cho các lực chưa cần tìm không tham gia.* Như vậy, ta sẽ lập được hai phương trình chỉ chứa hai ẩn số cần tìm.

Ví dụ 2.4. Xác định lực dọc trong thanh *2–5* và *5–3* của dàn trên hình 2.17.



Hình 2. 17

Thực hiện mặt cắt I–I: mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực *2–5* và *5–3* đồng thời qua hai thanh chưa cần tìm nội lực là *1–2* và *4–3*.

Để có được phương trình chỉ chứa N_{2-5} và N_{5-3} ta lập phương trình cân bằng hình chiếu của các lực bên trái mặt cắt lên phương thẳng đứng

$$\Sigma y^{tr} = N_{2-5}\sin(\alpha/2) - N_{3-5}\sin(\alpha/2) - 3{,}5P - P - P = 0,$$

hay $$N_{2-5}\sin(\alpha/2) - N_{3-5}\sin(\alpha/2) - 0{,}5P = 0. \qquad \text{(a)}$$

Thực hiện mặt cắt II–II (tách mắt). Mặt cắt này đi qua hai thanh cần tìm nội lực *2–5*; *3–5* và hai thanh khác chưa cần tìm nội lực là *1–5*; *5–4*. Để thiết lập phương trình chỉ chứa N_{2-5} và N_{3-5} ta lập phương trình hình chiếu của các lực tác dụng bên trọng mặt cắt lên phương ngang:

$$\Sigma X = N_{2-5}\cos(\alpha/2) + N_{3-5}\cos(\alpha/2) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta được: $N_{3-5} = -N_{2-5} = \dfrac{0,25P}{sin(\alpha/2)}$.

✣ *Khi chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua năm thanh chưa biết nội lực mới đủ điều kiện cắt qua thanh cần tìm nội lực và chia hệ thành hai phần độc lập thì phải sử dụng ba mặt cắt phối hợp.* Với ba mặt cắt phối hợp ta có thể tìm ngay được ba nội lực theo ba phương trình. Muốn vậy:

- *Các mặt cắt phải đi qua ba thanh cần tìm nội lực và mỗi mặt cắt còn có thể đi qua hai thanh khác nữa chưa cần tìm nội lực.*
- *Trong mỗi mặt cắt ta thiết lập một phương trình chỉ chứa các ẩn số cần tìm.* Giải hệ ba phương trình đó ta sẽ thu được ba nội lực cần tìm.

Cũng lý luận tương tự như vậy đối với các trường hợp cần dùng bốn mặt cắt phối hợp, năm mặt cắt phối hợp...

Đối với những hệ thông thường ta chỉ cần dùng hai mặt cắt phối hợp là đủ.

D. Phương pháp họa đồ - Giản đồ Maxwell- Crêmôna

Phương pháp họa đồ là phương pháp vẽ để giải bài toán. Phương pháp này đơn giản, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc mức độ chính xác và quy mô của bản vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế.

Có thể vận dụng phương pháp họa đồ để giải nhiều bài toán khác nhau *của cơ học và để xác định phản lực, nội lực cũng như vẽ biểu đồ nội lực* trong các hệ tĩnh định. Trong mục này chỉ giới thiệu cách vận dụng phương pháp họa đồ để tính hệ dàn, đó là trường hợp thường được dùng trong thiết kế.

Cách giải bài toán được trình bày toàn bộ trên một hình vẽ gọi là *giản đồ nội lực* hay *giản đồ Maxwell–Cremona*, do nhà vật lý học người Anh J. Clerk Maxwell (1831-1879) đề cập và nhà hình học Italia là Luigi Cremona (1830-1903) phát triển, áp dụng vào kết cấu dàn.

Trước khi đi vào nghiên cứu giản đồ nội lực ta cần tìm hiểu cách xác định nội lực trong các thanh của dàn bằng họa đồ.

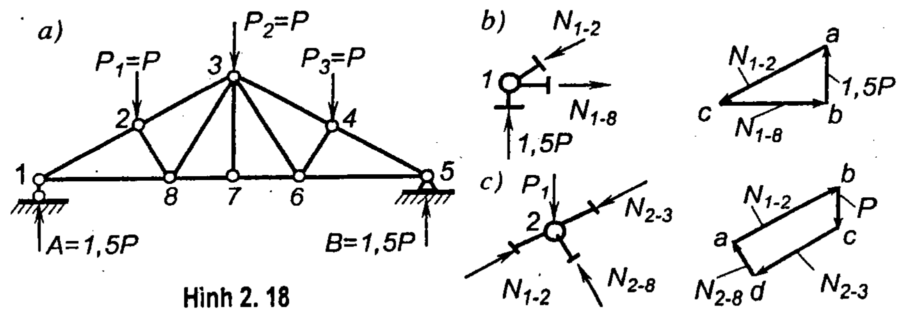
Giả sử các phản lực gối tựa đã biết (cách xác định phản lực bằng họa đồ đã được đề cập trong Cơ học cơ sở) yêu cầu xác định nội lực trong các thanh của dàn.

Từ Cơ học cơ sở ta đã biết: *điều kiện cần và đủ để cho hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực này phải khép kín.* Lần lượt áp dụng điều kiện này cho từng mắt của dàn bị tách ra theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai nội lực chưa biết trị số nhưng đã biết phương

thì ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

Cách thực hiện cũng giống như trong phương pháp tách mắt, nhưng ở đây không dùng điều kiện cân bằng giải tích mà dùng điều kiện cân bằng dưới dạng họa đồ.

Đối với dàn trên hình 2.18a nếu tách mắt *1* ta thấy tại mắt này có ba lực: phản lực *A* đã biết, hai lực N_{1-2} và N_{1-8} chưa biết nhưng có phương xác định.



Hình 2. 18

Để vẽ đa giác lực, trên hình 2.18b ta vẽ vectơ $\overrightarrow{ba}$ cùng phương và cùng chiều với phản lực *A* và có chiều dài biểu thị trị số của *A* theo một tỷ lệ xích nào đó. Từ ngọn và gốc của vectơ này, kẻ hai đường song song với hai phương của thanh *1–2* và *1–8*, hai đường này cắt nhau tại *c*. Theo điều kiện cân bằng đã nêu ở trên đoạn *ac* và *cb* lần lượt biểu thị giá trị của lực N_{1-2} và N_{1-8}.

Chiều của vectơ $\overrightarrow{ac}$ hướng vào mắt *1* nên N_{1-2} là lực nén, còn chiều của vectơ $\overrightarrow{cb}$ hướng ra ngoài mắt nên N_{1-8} là lực kéo.

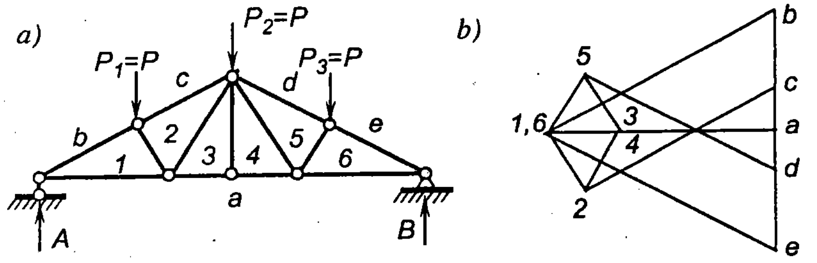
Tiếp đó chuyển sang mắt 2. Tại mắt này có bốn lực: hai lực đã biết là *P* và N_{1-2}, hai lực chưa biết nhưng có phương xác định là N_{2-3} và N_{2-8}. Hình 2.18c là đa giác lực của hệ lực này; sau khi vẽ hai vectơ $\overrightarrow{ab}$ và $\overrightarrow{bc}$ biểu thị phương chiều và trị số của hai lực đã biết là N_{1-2} và *P*, từ *a* và *c* kẻ hai đường song song với phương của thanh *2–8* và *2–3* cho tới khi cắt nhau tại *d*. Từ điều kiện cân bằng ta thấy hai lực cần tìm N_{2-3} và N_{2-8} được biểu thị bằng hai vectơ $\overrightarrow{cd}$ và $\overrightarrow{da}$, những lực này hướng vào mắt *2* nên là lực nén.

Cũng tiến hành tương tự như vậy đối với các mắt khác theo thứ tự *8, 7, 3* ta sẽ xác định được nội lực trong tất cả các thanh của dàn.

Nếu gộp tất cả các đa giác lực vẽ cho từng mắt với cùng một tỷ lệ xích trên một hình vẽ chung thì ta sẽ được giản đồ nội lực.

Để vẽ giản đồ nội lực ta cần thống nhất một số điều kiện, quy ước và tiến hành theo thứ tự như sau:

1) Xác định các phản lực tựa (có thể sử dụng phương pháp họa đồ hoặc giải tích).



Hình 2. 19

2) Ký hiệu các miền ngoài chu vi dàn bằng các chữ cái *a, b, c*... Mỗi miền được giới hạn trong phạm vi hai ngoại lực. Quy ước đọc tên các ngoại lực và phản lực bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên do lực đó phân giới.

Chú ý phải *đọc hai chỉ số theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn*. Ví dụ lực P_1 đọc là *b–c*; phản lực *B* đọc là *e–a*... (hình 2.19a).

3) Vẽ đa giác lực cho các ngoại lực và phản lực theo một tỷ lệ xích nào đó. Khi vẽ đa giác lực ta không vẽ chiều mũi tên của lực mà ghi hai chỉ số tương ứng biểu thị lực. Chỉ số đầu biểu thị gốc, chỉ số thứ hai biểu thị ngọn của vectơ lực tương ứng. Ví dụ, lực P_1 (hình 2-19a) được biểu thị bằng đoạn *b–c* trên đa giác lực (hình 2.19b), vì P_1 hướng xuống nên điểm ngọn *c* nằm dưới điểm gốc *b*. Đa giác lực của ngoại lực và phản lực đối với dàn trên hình 2.19a là đường khép kín *abcdea* (hình 2.19b).

4) Đánh số các miền ở trong dàn bằng các con số *1, 2, 3*... Lúc này nội lực trong mỗi thanh được đọc bằng hai con số biểu thị hai miền ở hai bên thanh. Khi cắt một thanh nào đó ta phải thay thế tác dụng của nó bằng hai lực ngược chiều có giá trị bằng nhau đặt tại hai mắt mà thanh đó nối.

Cách đọc hai lực này cũng có khác nhau; *muốn đọc nội lực đặt tại mắt i nào đó ta đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền ở hai bên thanh tương ứng theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ quanh mắt i.* Ví dụ với lực dọc trong thanh biên trên đầu tiên ở bên trái, khi lực này đặt tại mắt *a* ta đọc là *b–1* còn khi đặt tại mắt có chịu lực P_1 ta đọc là *1 – b*.

5) Lần lượt vẽ đa giác lực cho từng mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có hai thanh chưa biết nội lực. *Khi vẽ cần chú ý sử dụng cách ký hiệu nói trên, không vẽ các mũi tên, lực đã biết vẽ trước rồi dựa vào điều kiện khép kín của đa giác lực để xác định lực chưa biết. Tất cả các đa giác lực vẽ cho mỗi mắt đều phải được thực hiện trên cùng một hình vẽ của đa giác lực đã vẽ ở bước ba, theo cùng một tỷ lệ xích.*

Ví dụ: xét mắt *A*, trên hình 2.19b, đoạn *a–b*, biểu thị phản lực *A* đã biết, từ *b* và *a* lần lượt vẽ các đường song song với các lực chưa biết *b–1* và *1 – a*. Giao điểm của hai đường này xác định vị trí của điểm *1*. Đoạn *b–1* và *1 – a* biểu thị giá trị của lực *b–1* và *1–a*. Chiều *1–a* hướng ra ngoài mắt đang xét nên lực *1–a* là kéo.

Tiếp tục xét mắt ở dưới lực P_1 ta vẽ được đường khép kín *1bc21*. Đối với các mắt khác cũng tiến hành tương tự sẽ được giản đồ nội lực.

Ta thấy mỗi mắt của dàn tương ứng một đa giác lực khép kín, mỗi miền của dàn tương ứng với một điểm của giản đồ nội lực.

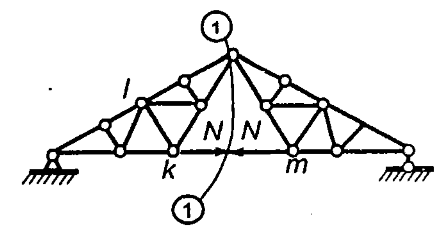
Để xác định giá trị của nội lực trong thanh *i–k* nào đó của dàn ta đo chiều dài của đoạn *i–k* tương ứng trên giản đồ nội lực theo tỷ lệ xích đã chọn khi vẽ giản đồ.

Để biết chiều hoặc dấu của nội lực, thực hiện như đã trình bày ở điểm 4.

Chú ý:

1. Khi gặp những dàn trong đó không thể thực hiện tách mắt để sao cho tại đó chỉ có hai nội lực chưa biết, ta cần kết hợp với cách tính giải tích để giải quyết.

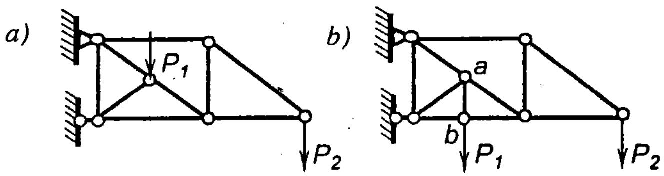
Ví dụ với dàn vẽ trên hình 2.20 khi tách đến mắt *k* và mắt *l* ta sẽ gặp phải khó khăn trên. Để giải quyết, trước khi vẽ giản đồ ta cần sử dụng phương pháp mặt cắt (mặt cắt 1-1) để xác định lực dọc *N* trong thanh *k- m*; sau đó vẽ giản đồ như thường lệ (vì lực *N* đã biết).



Hình 2. 20

2. Nếu ngoại lực nằm trong chu vi dàn thì trước khi đặt tên các miền ngoài chu vi dàn ta đưa các ngoại lực ra ngoài chu vi bằng cách đặt thêm các thanh quy ước. Tất nhiên thanh quy ước phải đặt sao cho tính chất làm việc của dàn không thay đổi.

Ví dụ khi gặp trường hợp dàn vẽ trên hình 2.21a ta có thể đưa lực P_1 ra ngoài chu vi dàn bằng cách đặt thêm thanh quy ước *a-b* như trên hình 2-21b.



Hình 2. 21

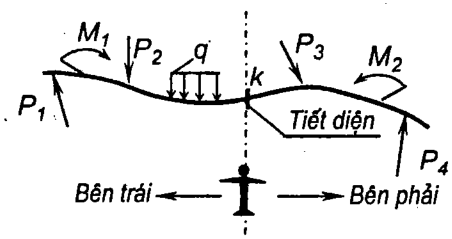
2.4. Biểu đồ nội lực và cách tính dầm, khung chịu tải trọng bất động

Vẽ đúng và nhanh các biểu đồ nội lực là một yêu cầu rất cơ bản khi tính hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh. Bởi vậy trong mục này sẽ đề cập đến cách vẽ thực hành đáp ứng yêu cầu vẽ nhanh các biểu đồ nội lực trong những hệ gồm các thanh thẳng như dầm, khung.

Trong thực hành, khi vẽ biểu đồ nội lực trong những hệ thanh gồm các thanh thẳng, không cần thiết lập các phương trình nội lực (trừ trường hợp thật cần thiết) mà *vẽ theo giá trị nội lực tại một số tiết diện đặc trưng cần thiết ở mức độ tối thiểu*. Cách vẽ thực hành được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng và các liên hệ vi phân đã biết giữa ngoại lực và nội lực.

Trước khi đi vào nghiên cứu cách vẽ biểu đồ ta cần nhớ lại các định nghĩa và quy ước về dấu của nội lực tại một tiết diện bất kỳ.

Giả sử cần xác định nội lực tại tiết diện *k* bất kỳ, ta thực hiện mặt cắt qua tiết diện *k*.



Hình 2. 22

Đặt người quan sát tại *k* đứng vuông góc với tiếp tuyến tại *k* của trục thanh. Như vậy, mặt cắt sẽ chia hệ thành hai phần: phần bên trái và phần bên phải người quan sát (hình 2.22).

Tại *k* có các thành phần nội lực sau:

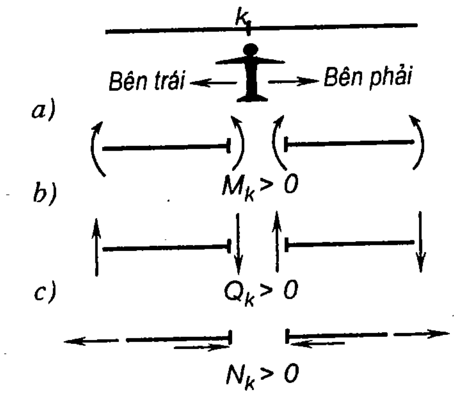
* *Mômen uốn M tại tiết diện k có giá trị được xác định bằng tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lấy đối với trọng tâm của tiết diện k.*

Mômen uốn được xem là dương nếu có khuynh hướng làm căng thớ bên dưới.

Do đó, ta có thể căn cứ chiều của ngoại lực để suy ra dấu của nội lực (hình 2.23a) như sau:

- Nếu khảo sát phần bên trái, các ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tiết diện *k* sẽ gây ra mômen uốn dương

- Nếu khảo sát phần bên phải, các ngoại lực quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tiết diện *k* sẽ gây ra mômen uốn dương.



Hình 2. 23

* *Lực cắt Q tại tiết diện k có giá trị bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương vuông góc với tiếp tuyến tại k của trục thanh.*

Lực cắt được coi là dương nếu có khuynh hướng làm cho phần hệ có đặt lực cắt đó quay thuận chiều kim đồng hồ.

Do đó, ta có thể căn cứ vào chiều tác dụng của ngoại lực để suy ra dấu của nội lực (hình 2.23b):

- Nếu khảo sát phần bên trái, ngoại lực hướng lên phía trên người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.

- Nếu khảo sát phần bên phải, ngoại lực hướng xuống phía dưới người quan sát sẽ gây ra lực cắt dương.

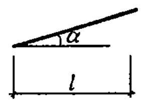
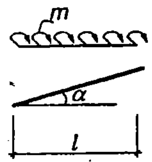
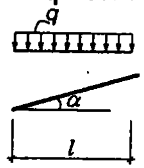
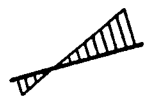
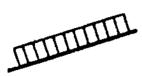
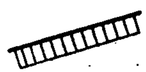
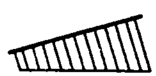
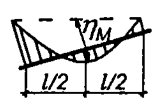
* *Lực dọc N tại tiết diện k có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái hay phần phải lên phương tiếp tuyến tại k của trục thanh.*

Lực dọc được xem là dương khi có khuynh hướng gây tác dụng kéo.

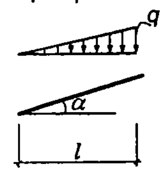
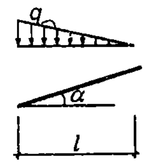
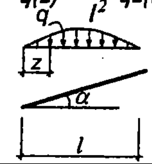
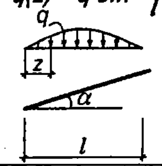
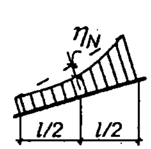
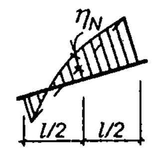
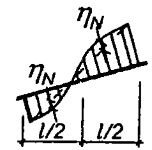
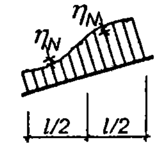
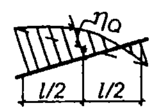
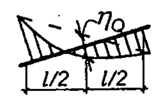
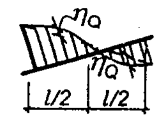
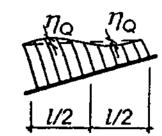
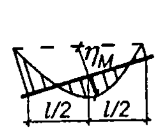
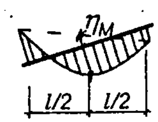
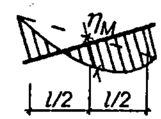
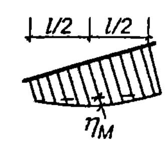
Do đó, các ngoại lực gây tác dụng kéo đối với tiết diện *k* sẽ phát sinh lực dọc dương (hình 2.23c).

Sau khi biết cách xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ ta cần dựa vào các liên hệ vi phân quen biết giữa cường độ tải trọng phân bố tiếp tuyến với lực dọc *N*; giữa cường độ tải trọng phân bố pháp tuyến với lực cắt *Q* và mômen

Bảng 2.1

Sơ đồ tải trọng		q = 0 	m = const 	q = const 
N	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm	*1*	*1*	*2*
	η_N	*0*	*0*	*0*
Q	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm	*1*	*1*	*2*
	η_Q	*0*	*0*	*0*
M	Dạng biểu đồ			
	Số tiết diện cần tìm	*2*	*2*	*3*
	η_M	*0*	*0*	$\frac{1}{8} q l^2$
Hợp lực tải trọng phân bố		*0*	$m l$	$q l$

Bảng 2.1 (tiếp theo)

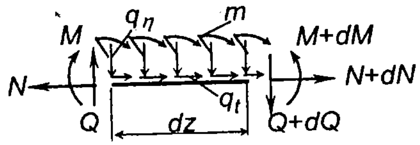
q - bậc nhất	q - bậc nhất	q - parabol bậc hai $q(z) = \frac{4}{l^2} qz(l-z)$	q - hình sin $q(z) = q \sin \frac{\pi z}{l}$
			
			
3	*3*	*5*	*5*
$\frac{1}{8} q l \sin\alpha$	$\frac{1}{8} q l \sin\alpha$	$\frac{1}{16} q l \sin\alpha$	$\frac{1}{2\pi}(\sqrt{2}-1) q l \sin\alpha$
			
3	*3*	*5*	*5*
$\frac{1}{8} q l \cos\alpha$	$\frac{1}{8} q l \cos\alpha$	$\frac{1}{16} q l \cos\alpha$	$\frac{1}{2\pi}(\sqrt{2}-1) q l \cos\alpha$
			
3	*3*	*3*	*3*
$\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{1}{16} q l^2$	$\frac{5}{48} q l^2$	$\frac{1}{\pi^2} q l^2$
$\frac{1}{2} q l$	$\frac{1}{2} q l$	$\frac{2}{3} q l$	$\frac{2}{\pi} q l$

uốn M để xác định dạng biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh trong đó tải trọng tác dụng là liên tục. Nếu quy ước chiều dương của các đại lượng như trên hình 2.24 thì từ các điều kiện cân bằng (bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao) ta có các liên hệ vi phân như sau:

$$\frac{dN}{dz} = -q_t\,;$$

$$\frac{dQ}{dz} = -q_n\,;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q + m\,.$$



Hình 2. 24

Bảng 2.1 giới thiệu dạng biểu đồ N, Q, M, số tiết diện đặc trưng cần xác định nội lực và các số liệu cần thiết khác khi vẽ biểu đồ nội lực tương ứng với các dạng tải trọng cơ bản tác dụng trên một đoạn thanh bất kỳ. Các số liệu này tạo điều kiện thuận lợi để vẽ biểu đồ nội lực khi hệ chịu các tải trọng thường gặp trong thực tế. Trường hợp hệ chịu tải trọng phức tạp hơn thì thường ta có thể xem tải trọng đó như là tập hợp của các tải trọng đơn giản đã giới thiệu trong bảng 2.1 và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để vẽ các biểu đồ nội lực.

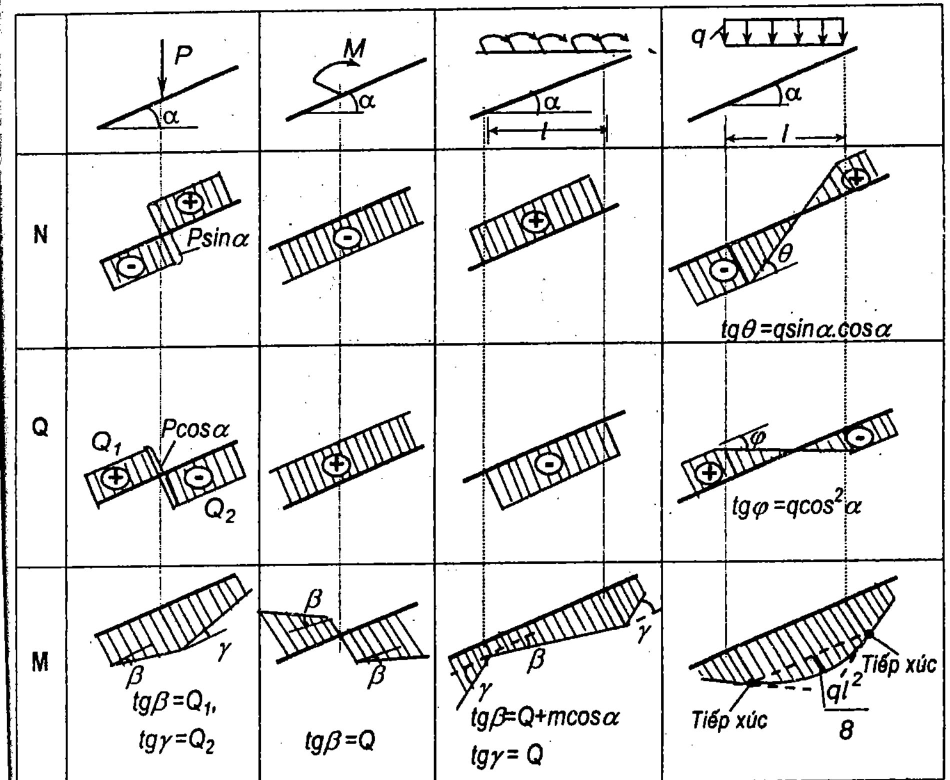
Khi sử dụng bảng 2.1 cần chú ý:

1) Giá trị tung độ biểu đồ nội lực ở hai đầu mỗi đoạn thanh cần được xác định theo các định nghĩa và quy ước về dấu đã nêu ở trên. Ngoài ra ta có thể vận dụng các đặc điểm của biểu đồ nội lực tại vị trí chuyển đoạn (liên tục hoặc tồn tại bước nhảy) như trên bảng 2.2 để giảm bớt số lần xác định nội lực tại hai đầu mỗi đoạn thanh.

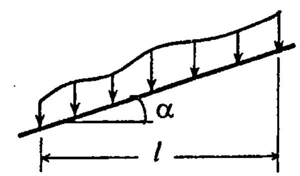
2) Đối với các đoạn biểu đồ cần xác định bằng ba tung độ thì ta có thể xác định tung độ thứ ba ở giữa mỗi đoạn thanh như sau. Nối hai tung độ ở hai đầu đoạn thanh bằng đường đứt nét; từ chính giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn một đoạn η có giá trị và chiều xác định theo bảng 2.1, ta sẽ được tung độ thứ ba. Nối ba tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp sẽ vẽ được biểu đồ nội lực trong đoạn thanh đang xét.

3) Đối với các đoạn biểu đồ cần xác định bằng năm tung độ (chẳng hạn biểu đồ lực dọc và lực cắt khi tải trọng phân bố theo luật đường cong parabol hoặc hình sin) ta có thể tìm các tung độ bên trong đoạn như sau: Nối hai tung độ ở hai đầu đoạn bằng đường đứt nét. Tung độ biểu đồ ở giữa đoạn trùng với tung độ tương ứng của đường đứt nét. Tung độ biểu đồ tại 1/4 và 3/4 đoạn tìm được bằng cách dóng vuông góc với đường chuẩn những đoạn có giá trị và chiều xác định theo bảng 2.1. Cuối cùng nối năm tung độ tìm được bằng đường cong thích hợp.

Bảng 2.2



4) Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh (hình 2.24) biểu đồ nội lực vẫn có dạng như trong bảng 2.1 nhưng tất cả các số liệu về η cần được chia cho $\cos\alpha$.



Hình 2. 25

Việc kiểm tra kết quả vẽ biểu đồ cũng thực hiện tương tự như đã trình bày trong Sức bền vật liệu.

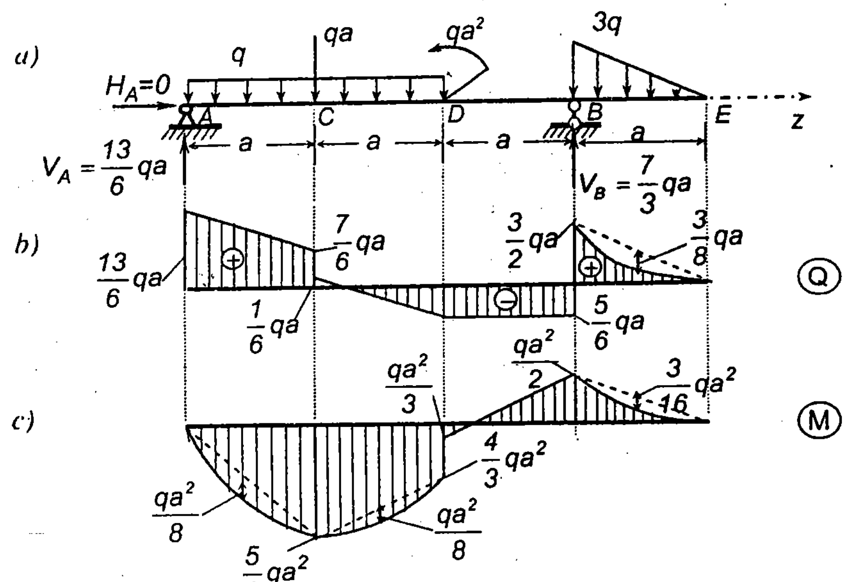
Ví dụ 2.5. Vẽ biểu đồ nội lực trong dầm cho trên hình 2.25a.

a) Xác định phản lực- Xét cân bằng toàn hệ

$$\Sigma Z = H_A = 0, \;\Rightarrow\; H_A = 0.$$

$$\Sigma M_A = V_B.3a - 2qa.a - qa.a + qa^2 - \frac{3qa}{2}\left(3a + \frac{a}{3}\right) = 0, \;\Rightarrow\; V_B = \frac{7}{3}qa.$$

$$\Sigma M_B = V_A.3a - 2qa.2a - qa.2a - qa^2 + \frac{3qa}{2}.\frac{a}{3} = 0, \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{13}{6}qa.$$



Hình 2. 26

b) Vẽ các biểu đồ nội lực

Trong trường hợp này, tải trọng vuông góc với trục dầm nên lực dọc tại mọi tiết diện đều bằng không. Ta chỉ cần vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn.

Ký hiệu S_{ik} là nội lực tại tiết diện i thuộc đoạn thanh ik.

✤ *Đoạn AC*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên:

- Biểu đồ Q có dạng đường thẳng xiên, tìm theo hai giá trị tại A và C

$$Q_{AC} = V_A = \frac{13}{6}qa \; ; \qquad Q_{CA} = V_A - qa = \frac{7}{6}qa .$$

- Biểu đồ M có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có:

$$M_{AC} = 0 \; ; \quad M_{CA} = V_A.a - \frac{1}{2}qa^2 = \frac{5}{3}qa^2 \; ; \qquad \eta_M = \frac{1}{8}qa^2.$$

✤ *Đoạn CD*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều nên:

- Biểu đồ Q có dạng đường thẳng xiên,

$$Q_{CD} = \frac{7}{6}qa - qa = \frac{1}{6}qa \; ; \qquad Q_{DC} = V_A - 2qa - qa = -\frac{5}{6}qa .$$

- Biểu đồ M có dạng đường cong parabol bậc hai, ta có:

$$M_{CD} = \frac{5}{3}qa^2 \; ; \quad M_{DC} = V_A.2a - 2qa.a - qa.a = \frac{4}{3}qa^2 \; ; \quad \eta_M = \frac{1}{8}qa^2.$$

✤ *Đoạn DB* - Trong đoạn này không có tải trọng phân bố nên:

- Biểu đồ Q có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn với:

$$Q_{DB} = -\frac{5}{6}qa .$$

- Biểu đồ M có dạng đường thẳng xiên với:

$$M_{DB} = \frac{4}{3}qa^2 - qa^2 = \frac{1}{3}qa^2 \; ; \quad M_{BD} = -3q.\frac{1}{2}a.\frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}qa^2 .$$

✤ *Đoạn BE*- Trong đoạn này có tải trọng phân bố theo luật bậc nhất nên

- Biểu đồ Q có dạng đường cong bậc hai với:

$$Q_{BE} = \frac{1}{2}3q.a = \frac{3}{2}qa \; ; \quad Q_{EB} = 0 \; ; \quad \eta_Q = \frac{1}{8}3qa = \frac{3}{8}qa \text{ (hướng xuống).}$$

- Biểu đồ M có dạng đường cong bậc ba với:

$$M_{BE} = -\frac{1}{2}qa^2 \; ; \quad M_{EB} = 0 \; ; \quad \eta_M = \frac{1}{16}3qa^2 = \frac{3}{16}qa^2.$$

Ví dụ 2.6. Vẽ các biểu đồ nội lực cho hệ thanh trên hình 2.27a. Cho biết: $q_1 = 1$ kN/m; $q_2 = 2$ kN/m; $P = 2$ kN; $M = 1$ kNm; $a = 2$ m; $e = 0,4$ m.

Để thuận tiện cho việc tính toán, ta có thể quy đổi tải trọng q_1 phân bố dọc trục thanh AB về hai thành phần: tải trọng tác dụng đúng tâm phân bố đều dọc trục thanh AB với cường độ $q_1 = 1$ kN/m và mômen phân bố đều với cường độ $m = q_1.e = 1.0,4 = 0,4$ kN/m.

a) Xác định các phản lực- Xét cân bằng toàn hệ, ta có:

$\Sigma X = H_E - q_1 a = 0$, suy ra: $H_E = 2$ kN ;

$\Sigma M_E = V_D.2a - Pa + Pa - M - q_2a.1,5a - q_1a.a - ma = 0$, suy ra: $V_D = 4,7$ kN;

$\Sigma M_D = V_E.2a + H_E.a - P.3a + M - Pa - 0,5q_2a^2 + ma = 0$, suy ra: $V_E = 3,3$ kN.

b) Vẽ các biểu đồ nội lực (hình 2.27 b, c, d).

✣ *Đoạn AB*: Trong đoạn này không có lực phân bố pháp tuyến nhưng có lực phân bố tiếp tuyến và mômen phân bố m. Do đó:

- Biểu đồ lực dọc có dạng đường thẳng xiên, được xác định theo giá trị tại hai đầu đoạn:

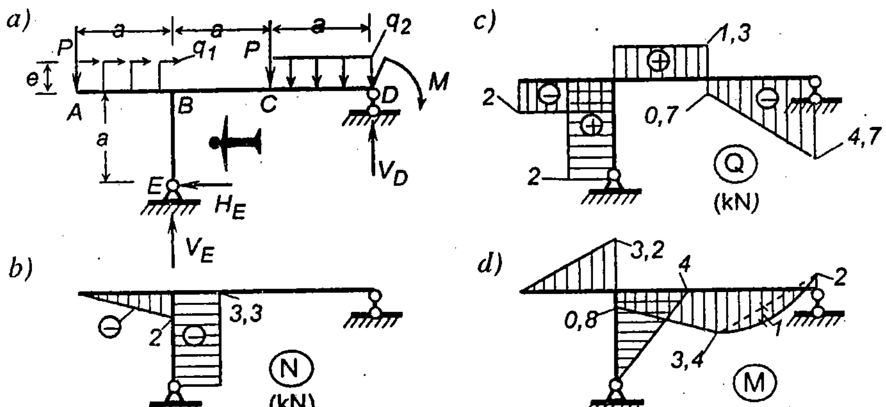
$$N_{AB}=0\ ; \qquad N_{BA}=-q_1.a=-2\text{ kN}.$$

- Biểu đồ lực cắt có dạng song song với đường chuẩn, được xác định theo giá trị tại một tiết diện; chẳng hạn tại tiết diện A:

$$Q_{AB}=-P=-2\text{ kN}.$$

- Biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo giá trị tại hai đầu đoạn:

$$M_{AB}=0; \qquad M_{BA}=-Pa+ma=-3{,}2\text{ kNm}.$$



Hình 2. 27

✣ *Đoạn EB*: Đặt người quan sát như trên hình 2.27a. Các biểu đồ nội lực được xác định theo các giá trị sau:

$N_{EB}=-V_E=-3{,}3$ kN; $Q_{EB}=H_E=2$ kN; $M_{EB}=0$; $M_{BE}=H_E.a=4$ kNm.

✣ *Đoạn BC*: Các biểu đồ nội lực được xác định theo các giá trị sau:

$$N_{BC}=-q_1a+H_E=0; \qquad Q_{BC}=-P+V_E=1{,}3\text{ kN};$$

$$M_{BC}=-Pa+H_E.a+ma=0{,}8\text{ kNm};$$

$$M_{CB}=-P.2a+H_E.a+V_E.a+m=3{,}4\text{ kNm}.$$

✣ *Đoạn CD*: Trong đoạn này có tải trọng phân bố đều, vuông góc với

trục thanh. Do đó:

- Biểu đồ lực dọc có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn, được xác định theo giá trị lực dọc tại tiết diện D. Ta có: $N_{DC}=0$.
- Biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng xiên, được xác định theo hai giá trị tại tiết diện C và D. Nếu dùng phần phải ta có:

  $Q_{CD}=-V_D+q.a=-0{,}7$ kN (cũng có thể xác định theo giá trị lực cắt tại C thuộc đoạn BC nếu dựa vào tính chất của bước nhảy);

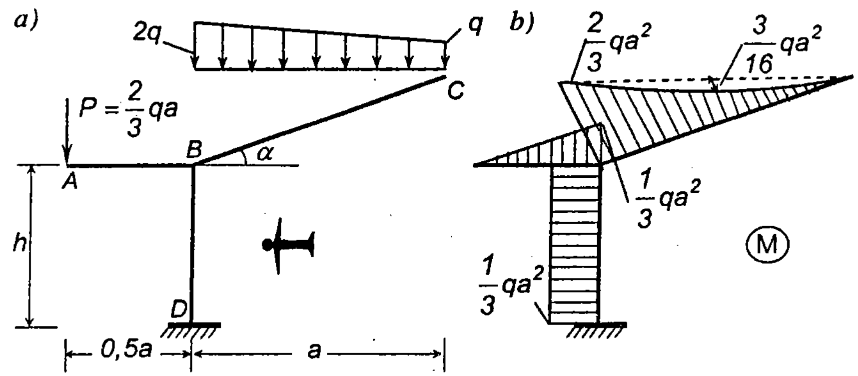
  $Q_{DC}=-V_D=-4{,}7$ kN.

- Biểu đồ mômen uốn có dạng đường cong parabol bậc hai và được xác định theo các giá trị sau:

  $M_{CD}=3{,}4$ kNm (vì tại C không có bước nhảy); $M_{DC}=-M=-2$ kNm.

  Nối hai tung độ biểu đồ mômen uốn ở hai đầu đoạn CB bằng đường đứt nét. Từ giữa đường đứt nét, dóng vuông góc với đường chuẩn theo chiều của tải trọng q một đoạn $\eta_M=q.a^2/8=1$ kNm, ta được tung độ thứ ba. Nối ba tung độ đó với nhau bằng đường cong ta được biểu đồ mômen uốn trên đoạn CD.

Ví dụ 2.7. Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ chịu tải trọng như trên hình 2.28a.



Hình 2. 28

Trong bài toán này không cần xác định phản lực nếu khi xác định nội lực ta chỉ khảo sát cân bằng phần hệ không chứa liên kết ngàm.

✣ *Đoạn AB*: Trong đoạn này biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo hai giá trị sau:

$$M_{AB} = 0; \qquad M_{BA} = -Pa/2 = -qa^2/3.$$

✣ *Đoạn DB*: Đặt người quan sát như trên hình 2.28a và khảo sát phần phải. Biểu đồ mômen uốn có dạng đường thẳng xiên và được xác định theo giá trị mômen uốn tại B và D. Coi tải trọng phân bố theo luật hình thang như tập hợp của hai tải trọng: tải trọng phân bố đều với cường độ lớn nhất bằng q và tải trọng phân bố theo luật tam giác với cường độ lớn nhất tại đầu trái bằng q, ta có:

$$M_{BD} = M_{DB} = Pa/2 - qa.\,a/2 - q(a/2).(a/3) = -(1/3)\,qa^2.$$

Trong trường hợp này biểu đồ có dạng song song với đường chuẩn.

Đoạn BC: Biểu đồ mômen uốn có dạng đường cong bậc ba và được xác định theo các giá trị sau:

$$M_{BC} = -qa.a/2 - q(a/2).(a/3) = -(2/3)\,qa^2; \qquad M_{CB} = 0.$$

Dựng hai tung độ M_{BC} và M_{CB}, tiếp đó nối hai tung độ đó với nhau bằng đường đứt nét. Để tìm tung độ thứ ba, từ giữa đường đứt nét dóng vuông góc với đường chuẩn, theo chiều của q một đường tên $\eta_M = \eta_1 + \eta_2$, trong đó:

$\eta_1 = q.\,a^2/8$ – *đường tên tương ứng với tải trọng phân bố theo luật hình chữ nhật với cường độ q;*

$\eta_2 = q.a^2/16$ – đường tên tương ứng với tải trọng phân bố theo luật hình tam giác với cường độ lớn nhất là q.

Vậy: $$\eta_M = (q.\,a^2/8) + (q.\,a^2/16) = (3/16)\,q.a^2.$$

Nối ba tung độ vừa tìm được bằng đường cong ta sẽ được biểu đồ mômen uốn trong đoạn BC.

Toàn bộ biểu đồ mômen uốn trong hệ thanh như trên hình 2.28b.

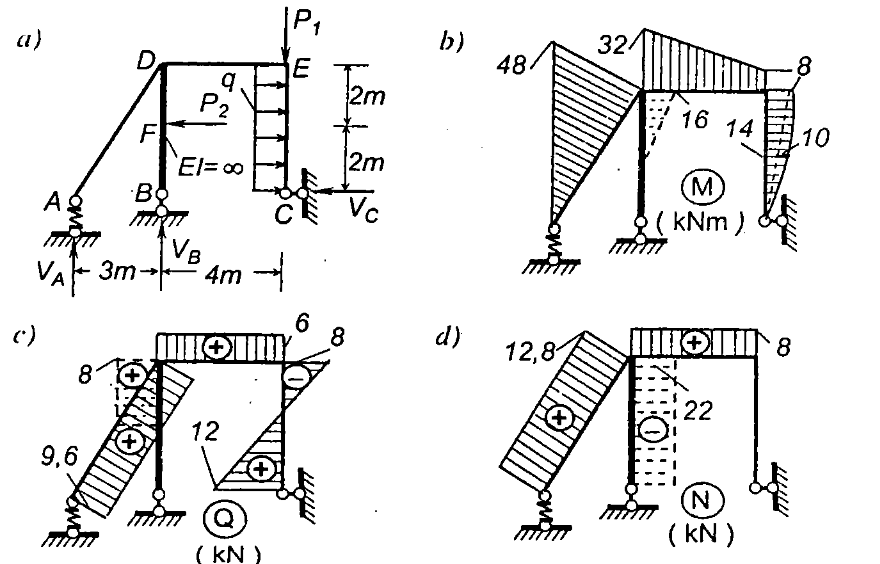
Ví dụ 2.8. Vẽ các biểu đồ nội lực cho hệ chịu tải trọng như trên hình 2.29a.

Cho biết: $P_1 = 6$ kN; $P_2 = 8$ kN; $q = 5$ kN/m.

Trong hệ đã cho có hai điều cần lưu ý:

✣ Hệ có liên kết đàn hồi tại A, được mô tả dưới dạng lò xo (hình 2.29a). Trong phạm vi bài toán xác định nội lực trong hệ tĩnh định, nếu cách tính được thực hiện theo sơ đồ chưa biến dạng thì nội lực không phụ thuộc độ cứng của các liên kết cũng như của các cấu kiện. Do đó, ta có thể xem liên kết đàn hồi tại A như một liên kết thanh bình thường.

✣ Thanh BD trong hệ có độ cứng $EI = \infty$, tức là không bị biến dạng. Như đã nêu ở trên, nội lực trong hệ tĩnh định không phụ thuộc độ cứng của các các thanh. Mặt khác, về ý nghĩa: khi không có biến dạng thì trong thanh không tồn tại nội lực. Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc vẽ biểu đồ theo quy cách thông thường và dễ dàng kiểm tra các điều kiện cân bằng, ta quy ước: xem các thanh có $EI = \infty$ như thanh có độ cứng hữu hạn nhưng rất lớn ($EI \rightarrow \infty$) và vẽ biểu đồ trong những thanh này bằng đường đứt nét.



Hình 2. 29

a) Xác định các phản lực- Xét cân bằng toàn hệ, ta có:

$\sum X = 5.4 - 8 + C = 0, \qquad \Rightarrow \; C = 12$ kN;

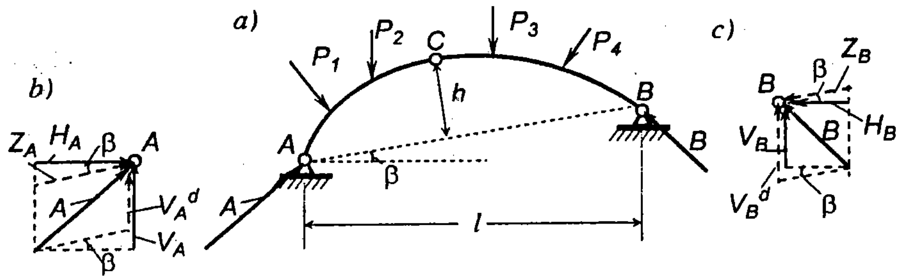
$\sum M_A = B.3 + 8.2 - 6.7 - 5.4.2 = 0, \qquad \Rightarrow \; B = 22$ kN;

$\sum M_B = A.3 + 8.2 - 6.4 - 5.4.2 = 0, \qquad \Rightarrow \; A = 16$ kN.

b) Vẽ các biểu đồ nội lực - Lần lượt vẽ biểu đồ nội lực trong 5 đoạn thanh AD; BF; FD; DE; EC theo quy cách đã thực hiện trong các ví dụ trên, ta được kết quả như trên hình 2.29 b, c, d.

Biểu đồ nội lực trong các đoạn thanh BF; FD được vẽ bằng đường đứt nét.

2.5. Cách tính hệ ba khớp chịu tải trọng bất động



Hình 2.30

A. Xác định phản lực

Xét hệ ba khớp với các kích thước đã biết và chịu tải trọng bất kỳ như trên hình 2.30a. Gọi A và B là phản lực tại các gối tựa A, B. Các phản lực này có phương chưa biết nên được phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ như sau:

Nếu phân tích theo phương AB và phương đứng (hình 2.30b,c) ta có:

$$\vec{A}\left|\begin{matrix}\vec{Z}_A\\ \vec{V}_A^d\end{matrix}\right. ; \qquad \vec{B}\left|\begin{matrix}\vec{Z}_B\\ \vec{V}_B^d\end{matrix}\right. .$$

Nếu phân tích theo phương ngang và phương đứng (hình 2.30b,c), ta có:

$$\vec{A}\left|\begin{matrix}\vec{H}_A\\ \vec{V}_A\end{matrix}\right. ; \qquad \vec{B}\left|\begin{matrix}\vec{H}_B\\ \vec{V}_B\end{matrix}\right.$$

Như vậy, muốn xác định các phản lực A, B ta chỉ cần lần lượt xác định các thành phần của chúng.

1. Xác định các thành phần V_A^d và V_B^d

Để xác định các phản lực V_A^d và V_B^d ta nên vận dụng các phương trình cân bằng mômen đối với các gối A và B vì lúc này các thành phần lực Z_A và Z_B không tham gia phương trình cân bằng.

Từ phương trình $\sum M_B = 0$, suy ra V_A^d.

Từ phương trình $\sum M_A = 0$, suy ra V_B^d.

Ta thấy cách tìm phản lực V_A^d và V_B^d trong hệ ba khớp giống như cách tìm phản lực trong dầm tĩnh định nên các phản lực này được gọi là *phản lực dầm* và đọc ký hiệu V_A^d là $V_A^{dầm}$.

2. Xác định các thành phần Z_A và Z_B

Các lực này được xác định theo điều kiện mômen uốn tại khớp C bằng không.

Nếu khảo sát phần vòm bên trái ta có: $\quad M_C = -Z_A h + M_C^{tr} = 0,$

trong đó:

M_C^{tr} – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên trái đối với điểm C (không kể lực Z_A);

h – khoảng cách từ khớp C đến đường nối AB.

Từ đó suy ra: $$Z_A = \frac{M_C^{tr}}{h}. \qquad (2.1)$$

Tương tự, nếu khảo sát phần vòm bên phải, ta có:

$$Z_B = \frac{M_C^{ph}}{h}, \qquad (2.2)$$

M_C^{ph} – tổng mômen của các lực đặt trên phần vòm bên phải đối với điểm C (không kể lực Z_B).

Các thành phần Z_A và Z_B thường chỉ tồn tại trong các hệ ba khớp nên được gọi là các *lực vòm*.

3. Xác định các thành phần H_A và H_B

Từ hình 2.30b, c ta dễ dàng xác định được các thành phần H_A và H_B theo Z_A và Z_B như sau:

$$H_A = Z_A \cos\beta; \qquad H_B = Z_B \cos\beta. \qquad (2.3)$$

Trong trường hợp hệ chỉ chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng, sau khi viết điều kiện cân bằng hình chiếu của các lực lên trục nằm ngang, ta có:

$$H_A = H_B = H.$$

Từ (2.3) ta suy ra: $\quad Z_A = Z_B = Z.$

Như vậy, trong trường hợp hệ ba khớp chỉ chịu tải trọng thẳng đứng thì lực vòm, lực xô ở hai gối cũng bằng nhau về giá trị.

4. Xác định thành phần V_A và V_B

Từ hình 2.30b, c ta dễ dàng xác định được:

$$V_A = V_A^d + Z_A \sin\beta; \quad V_B = V_B^d - Z_B \sin\beta.$$

Chú ý đến (2.3) ta có:

$$V_A = V_A^d + H_A \, tg\beta; \quad V_B = V_B^d - H_B \, tg\beta. \qquad (2.4)$$

5. Xác định các phản lực toàn phần A và B

Phản lực toàn phần A và B là tổng hình học của các thành phần phản lực tương ứng:

$$\vec{A} = \vec{V}_A^d + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A; \quad \vec{B} = \vec{V}_B^d + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B.$$

Do đó, độ lớn của phản lực A và B được xác định theo công thức sau

$$A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; \qquad B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}.$$

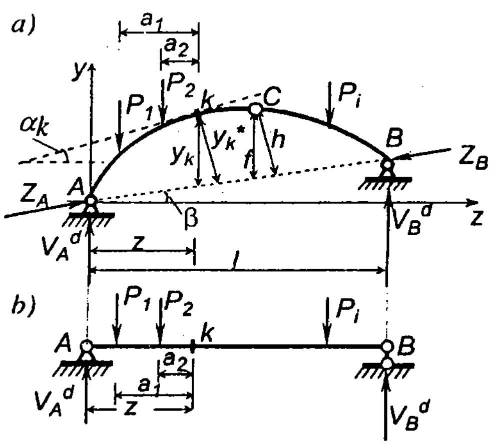
B. Xác định nội lực

Sau khi biết các thành phần phản lực ta có thể xác định nội lực trong hệ theo phương pháp đã trình bày trong 2.3 và 2.4 tùy theo hệ là dàn ba khớp hoặc vòm, khung ba khớp.

Trong trường hợp *tải trọng tác dụng thẳng đứng hoặc song song với phương trục y*, ta thiết lập được các biểu thức cụ thể, tiện lợi cho việc xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ trong hệ vòm hoặc khung ba khớp.

1. Biểu thức mômen uốn

Giả sử cần thiết lập biểu thức mômen uốn $M_k(z)$ tại tiết diện k có hoành độ z trên vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng như trên hình 2.31a.



Hình 2. 31

Tưởng tượng thực hiện mặt cắt qua tiết diện k và xét cân bằng của một phần vòm, chẳng hạn phần bên trái, ta có:

$$M_k(z) = V_A^d . z - P_1 a_1 - P_2 a_2 - Z_A y_k^*.$$

Đối chiếu với *dầm đơn giản tương ứng* nghĩa là dầm đơn giản có nhịp bằng nhịp của vòm và chịu tải trọng tác dụng như trên vòm (hình 2.31b)

ta thấy đại lượng:

$$V_A^d.z - P_1 a_1 - P_2 a_2$$

chính là mômen uốn $M_k^d(z)$ trong dầm tại tiết diện k tương ứng có hoành độ z.

Do đó có thể viết

$$M_k(z) = M_k^d(z) - Z_A y_k^*.$$

Từ hình 2.31 ta thấy $y_k^* = y_k \cos\beta$, đồng thời theo (2.3), $H_A = Z_A \cos\beta$, nên biểu thức trên có dạng:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H_A y_k.$$

Vì tải trọng thẳng đứng, nên $H_A = H_B = H$, do đó ta có:

$$\boxed{M_k(z) = M_k^d(z) - H y_k.} \qquad (2.5)$$

trong đó:

$M_k(z)$ – mômen uốn tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z trên vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$M_k^d(z)$ – mômen uốn tại tiết diện k tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng tác dụng như trên vòm;

H – lực xô của vòm;

y_k – khoảng cách theo phương thẳng đứng từ tiết diện k đến đường thẳng AB nối hai gối của vòm.

Qua công thức (2.5) ta có thể giải thích được tính ưu việt của kết cấu vòm so với kết cấu dầm như sau: mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ của vòm bằng mômen uốn tương ứng trong dầm có cùng nhịp và có cùng tải trọng trừ đi tích số Hy_k. Tích số Hy_k làm cho mômen uốn trong vòm nhỏ hơn mômen uốn trong dầm. Nếu khéo chọn được hình dạng của vòm sao cho tích số Hy_k luôn luôn bằng đúng đại lượng $M_k^d(z)$ thì mômen uốn tại mọi tiết diện của vòm đều bằng không, lúc đó vòm hoàn toàn không chịu uốn và không chịu cắt mà chỉ chịu nén. Như vậy không những sẽ tiết kiệm được vật liệu mà còn có thể sử dụng được những vật liệu chỉ chịu được nén như gạch, đá.

2. Biểu thức lực cắt

Giả sử cần thiết lập biểu thức lực cắt $Q_k(z)$ tại tiết diện bất kỳ k có hoành độ z trên vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng (hình 2.31).

Từ định nghĩa về lực cắt, ta có:

$$Q_k(z) = V_A^d\cos\alpha_k - P_1\cos\alpha_k - P_2\cos\alpha_k + Z_A\sin\beta\cos\alpha_k - Z_A\cos\beta\sin\alpha_k .$$

Chú ý đến biểu thức (2.3): $\quad Z_A = \dfrac{H_A}{\cos\beta}$,

ta có thể viết:

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2)\cos\alpha_k + \frac{H_A}{\cos\beta}\sin\beta\cos\alpha_k - \frac{H_A}{\cos\beta}\cos\beta\sin\alpha_k .$$

$$Q_k(z) = (V_A^d - P_1 - P_2)\cos\alpha_k + H_A\,tg\beta\cos\alpha_k - H_A\sin\alpha_k .$$

Đối chiếu với dầm đơn giản có cùng nhịp và có cùng tải trọng ta thấy đại lượng $V_A^d - P_1 - P_2$ trong biểu thức trên chính là lực cắt $Q_k^d(z)$ trong dầm tại tiết diện k tương ứng có hoành độ z, cho nên:

$$Q_k(z) = Q_k^d(z)\cos\alpha_k - H_A(\sin\alpha_k - tg\beta\cos\alpha_k).$$

Nhưng do tải trọng tác dụng thẳng đứng $H_A = H_B = H$ nên:

$$\boxed{Q_k(z) = Q_k^d(z)\cos\alpha_k - H(\sin\alpha_k - tg\beta\cos\alpha_k).} \qquad (2.6)$$

trong đó:

$Q_k(z)$ – lực cắt tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z trong vòm chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng;

$Q_k^d(z)$ – lực cắt tại tiết diện k tương ứng trong dầm đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng thẳng đứng tác dụng như trong vòm;

α_k – góc hợp giữa phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k và phương nằm ngang;

β – góc hợp giữa phương nằm ngang với phương AB nối liền hai gối;

H – lực xô của vòm.

3. Biểu thức lực dọc

Tương tự như trên, nếu quy ước *lực dọc kéo là dương* thì biểu thức lực dọc $N_k(z)$ tại tiết diện k bất kỳ có hoành độ z của vòm ba khớp chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng có dạng:

$$\boxed{N_k(z) = -Q_k^d(z)\sin\alpha_k - H(\cos\alpha_k + tg\beta\sin\alpha_k).} \qquad (2.7)$$

Trường hợp đặc biệt nếu hai gối cố định A, B có cùng cao độ (nghĩa là nếu góc $\beta = 0$) thì các công thức (2.5), (2.6), (2.7) sẽ có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\boxed{\begin{aligned} M_k(z) &= M_k^d(z) - H\,y_k ;\\ Q_k(z) &= Q_k^d(z)\cos\alpha_k - H\sin\alpha_k ;\\ N_k(z) &= -Q_k^d(z)\sin\alpha_k - H\cos\alpha_k .\end{aligned}} \qquad (2.8)$$

Ví dụ 2.9. Cho vòm có trục biến thiên theo phương trình $y = \frac{1}{9}(12 - z)z$ và chịu tải trọng như trên hình 2.32. Xác định nội lực tại tiết diện k có hoành độ $z = 3$ m.

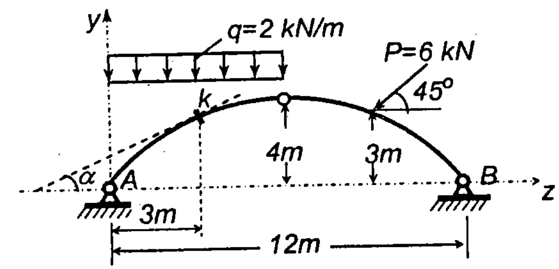
Đây là bài toán hệ ba khớp chịu tải trọng không thẳng đứng.

Các số liệu của bài toán:

Tại hoành độ $z_k = 3$ m, ta xác định được tung độ theo công thức:

$$y_k = \frac{1}{9}(12 - z_k)z_k = \frac{(12-3)3}{9} = 3 \text{ m}.$$

Hình 2. 32



Góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k so với đường nằm ngang được xác định như sau:

$$tg\alpha_k = y'_k = \frac{1}{9}(12 - z_k) = \frac{1}{9}(12 - 2.3) = \frac{2}{3} .$$

Từ đó suy ra $\quad \sin\alpha_k = \dfrac{tg\alpha_k}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_k}} = \dfrac{2}{3\sqrt{1+(2/3)^2}} = 0{,}555$;

$$\cos\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_k}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2/3)^2}} = 0{,}832 .$$

Trong trường hợp này hai gối A, B có cùng cao độ nên góc $\beta = 0$, do đó:

$$V_A^d = V_A ;\quad V_B^d = V_B ;\quad Z_A = H_A ;\quad Z_B = H_B .$$

Từ các phương trình cân bằng:

$$\sum M_B = V_A^d.12 - 2.6.9 - (P\cos 45^o).3 - (P\sin 45^o).3 = 0,$$

suy ra $\qquad V_A^d = V_A = 11{,}12$ kN.

$$\sum M_A = -V_B^d.12 + 2.6.3 - (P\cos 45^o).3 + (P\sin 45^o).9 = 0,$$

suy ra $\qquad V_B^d = V_B = 5{,}12$ kN.

Theo công thức (2.1) và (2.2) ta tính được các lực vòm:

$Z_A = H_A = M_C^{tr} / h = (V_A^d.6 - 2.6.3) / 4 = 7{,}68$ kN;

$Z_B = H_B = M_C^{ph} / h = [V_B^d.6 - (P\cos 45^o).1 - (P\sin 45^o).3] / 4 = 3{,}44$ kN.

Sau khi xác định được các phản lực tựa ta tìm nội lực tại một tiết diện bất kỳ bằng cách thực hiện mặt cắt đi qua tiết diện đó và xét cân bằng của một phần vòm bị cắt. Ví dụ, xét cân bằng của phần bên trái ta có:

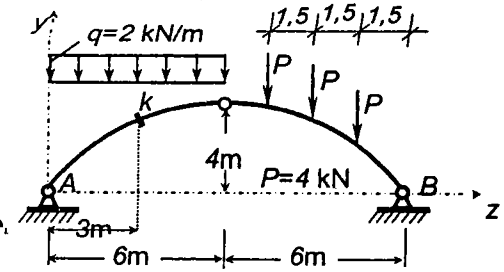
$M_k = V_A.3 - 2.3.(3/2) - H_A.3 = 11{,}12.3 - 2.3.(3/2) - 7{,}68.3 = 1{,}32$ kNm;

$Q_k = V_A\cos\alpha_k - H_A\sin\alpha_k - 2.3\cos\alpha_k = 11{,}12.0{,}832 - 7{,}68.0{,}555 - 2.3.0{,}832 = 0;$

$N_k = -V_A\sin\alpha_k - H_A\cos\alpha_k + 2.3\sin\alpha_k = -11{,}12.0{,}555 - 7{,}68.0{,}832 + 2.3.0{,}555 =$

$= -9{,}23$ kN (lực nén).

Ví dụ 2.10. Cũng cho vòm như trong ví dụ 2.9 nhưng chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng (hình 2.33). Xác định nội lực tại tiết diện *k*.



Hình 2. 33

Xác định các phản lực:

Từ phương trình $\sum M_B = 0$, suy ra $V_A^d = V_A = 12$ kN.

Từ phương trình $\sum M_A = 0$, suy ra $V_B^d = V_B = 12$ kN.

$Z_A = Z_B = Z = H_A = H_B = H = M_C^{tr} / h = (12.6 - 2.6.3) / 4 = 9$ kN.

Vì tải trọng tác dụng thẳng đứng và hai gối cố định có cùng cao độ nên góc $\beta = 0$, do đó ta có thể vận dụng công thức (2.8) để tính các nội lực:

$M_k = M_k^d - H\,y_k = 12.3 - 2(3^2/2) - 9.3 = 0;$

$Q_k = Q_k^d\cos\alpha_k - H\sin\alpha_k = (12 - 2.3)0{,}832 - 9.0{,}555 = 0;$

$N_k = -Q_k^d\sin\alpha_k - H\cos\alpha_k = -(12 - 2.3)0{,}555 - 9.0{,}832 = -10{,}81$ kN.

C. Khái niệm về trục hợp lý của vòm ba khớp

Như ở trên đã nhận xét, nếu khéo chọn hình dạng của trục vòm thì có thể làm cho mômen uốn trong vòm ba khớp nhỏ đi thậm chí bằng không tại mọi tiết diện, như thế sẽ tiết kiệm được vật liệu. Do đó nảy sinh vấn đề: *nên chọn trục vòm sao cho hợp lý và trục vòm thế nào là hợp lý?*

1. Định nghĩa trục hợp lý của vòm

Về mặt kết cấu, ta gọi *trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho thể tích vòm có giá trị nhỏ nhất mà vẫn đảm bảo được điều kiện bền.*

Nói chung, dọc theo trục vòm diện tích tiết diện *A* của vòm là hàm của các nội lực *M, N, Q* và khả năng chịu lực $[\sigma]$ của vật liệu dùng làm vòm

$$A = A(M, N, Q, [\sigma]),$$

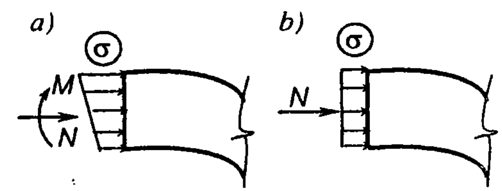
do đó, thể tích *V* của vòm có chiều dài *S* sẽ là

$$V = \int_0^S A(M, N, Q, [\sigma])ds. \qquad (2.9)$$

Thường thì các nội lực *M, N, Q* thay đổi khi trục vòm biến đổi cho nên bài toán xác định trục vòm hợp lý ứng với điều kiện V_{min} là một bài toán phức tạp.

Ta có thể dựa vào những nhận xét trong thực tế thiết kế dưới đây để đơn giản hóa bài toán: *với những vòm có kích thước thông thường, khi biến đổi trục mà vẫn giữ nguyên nhịp và đường tên võng thì chiều dài trục vòm và lực dọc biến đổi ít, còn mômen uốn và lực cắt biến đổi nhiều.* Với những nhận xét đó, ta có thể xem gần đúng là *thể tích vòm do mômen uốn và lực cắt quyết định.* Do đó, nói một cách gần đúng, *thể tích của vòm nhỏ nhất khi mômen uốn trong vòm bằng không* và lực cắt là đạo hàm của mômen uốn cũng bằng không.

Có thể minh họa nhận xét gần đúng đó bằng cách so sánh biểu đồ ứng suất pháp trên một tiết diện vòm trong trường hợp *M* và *Q* khác không (hình 2.34a), với biểu đồ ứng



Hình 2. 34

suất pháp trong trường hợp M và Q bằng không (hình 2.34b).

Khi M và Q bằng không, ứng suất pháp phân bố đều, vật liệu ở mọi điểm trên tiết diện đều được khai thác như nhau, nên có thể phát huy hết khả năng của vật liệu.

Dựa vào lập luận gần đúng như trên ta có thể đi đến định nghĩa gần đúng về trục hợp lý của vòm như sau:

Trục hợp lý của vòm là trục chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không (do đó lực cắt cũng bằng không).

Trong trường hợp vòm chịu tải trọng di động thì trục hợp lý cũng thay đổi tùy theo vị trí của tải trọng. Nếu tải trọng bất động lớn hơn rất nhiều so với tải trọng di động thì khi chọn trục hợp lý có thể chỉ kể tới ảnh hưởng của tải trọng bất động mà bỏ qua ảnh hưởng của tải trọng di động.

Khi xác định trục hợp lý của vòm ba khớp ta phải xét đến tải trọng tác dụng trên vòm trong đó có trọng lượng bản thân vòm. Thông thường thì khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm cũng thay đổi theo. Lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng thay đổi phụ thuộc dạng của vòm*. Đôi khi trục vòm thay đổi, trọng lượng bản thân của vòm và các tải trọng tác dụng trên vòm thay đổi không đáng kể, lúc đó ta gặp trường hợp *tải trọng không phụ thuộc dạng của vòm*. Thực ra trọng lượng bản thân của vòm là một đại lượng phụ thuộc vào hình dạng của vòm. Tuy nhiên, khi tính gần đúng ta có thể ước đoán trọng lượng bản thân vòm, lúc đó tải trọng tác dụng trên vòm (gồm cả trọng lượng bản thân vòm) được xem là độc lập với hình dạng vòm.

Dưới đây trình bày cách tìm trục hợp lý của vòm ba khớp cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế.

2. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng không phụ thuộc dạng vòm, biểu thức mômen uốn trong dầm tương ứng cũng không phụ thuộc dạng vòm, do đó ta có thể sử dụng công thức (2.5) để xác định trục hợp lý của vòm:

$$\boxed{y(z) = \frac{M^d(z)}{H}.} \qquad (2.10)$$

Ta thấy lực xô H không phụ thuộc z nên *trục hợp lý của vòm có dạng biểu đồ mômen uốn trong dầm tương ứng* (có nhịp và tải trọng như của vòm) *với tỷ lệ các tung độ nhỏ hơn H lần.*

Ví dụ 2.11. Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phân bố đều theo chiều dài nhịp với cường độ q, cho biết vòm có chiều dài là l, đường tên f, khớp C ở chính giữa nhịp.

Biểu thức mômen uốn trong dầm chịu tải trọng phân bố đều:

$$M^d(z) = \frac{q}{2} z(l - z).$$

Tương tự như ở ví dụ 2.10, ta xác định được: $H = \dfrac{M_C^{tr}}{f} = \dfrac{ql^2}{8f}$.

Do đó, theo (2.10) ta có: $y(z) = \dfrac{q}{2} z(l - z)\dfrac{8f}{ql^2} = \dfrac{4f}{l^2} z(l - z).$

Như vậy, trong trường hợp này trục hợp lý có dạng đường parabol bậc hai.

3. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm

Trong trường hợp này, không thể xuất phát từ biểu thức (2.10) để xác định trục hợp lý được vì bản thân hàm $M^d(z)$ cũng phụ thuộc tải trọng. Nếu lấy vi phân hai lần biểu thức (2.10) ta sẽ được phương trình vi phân trục hợp lý biểu thị trực tiếp theo hàm tải trọng q.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q}{H}.} \qquad (2.11)$$

trong đó hàm tải trọng q không những phụ thuộc biến số z mà còn phụ thuộc hàm y cần tìm.

Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.11) bằng phương pháp giải tích chính xác, còn nói chung thì cách giải sẽ gặp nhiều khó khăn và chỉ có thể giải quyết bằng các phương pháp đúng dần.

Dưới đây là một ví dụ có thể giải được bằng phương pháp giải tích.

Ví dụ 2.12. Tìm trục hợp lý của vòm ba khớp đối xứng, cong trơn tru, chịu tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng vòm (chẳng hạn trọng lượng vật liệu xây hoặc đất đắp bên trên vòm) theo quy luật sau (hình 2.35):

$$q(z) = q_o + \gamma y,$$

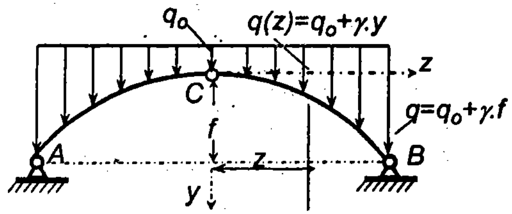
trong đó:

$q(z)$ – cường độ tải trọng phân bố tại tiết diện bất kỳ;

q_o – cường độ tải trọng tại đỉnh C của vòm;

γ – hệ số tỷ lệ;

y – tung độ của tiết diện bất kỳ trong vòm ứng với hệ trục tọa độ đã chọn;



Hình 2. 35

Phương trình vi phân của trục hợp lý trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{q_o + \gamma\, y}{H}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng quen thuộc như sau:

$$y = A\, shkz + B\, chkz - \frac{q_o}{\gamma}, \quad \text{với} \quad k = \sqrt{\frac{\gamma}{H}}.$$

A, B là các hằng số tích phân được xác định theo các điều kiện biên của bài toán:

- Tại đỉnh C của vòm đối xứng cong trơn tru, góc nghiêng của tiếp tuyến bằng không, nghĩa là khi $z = 0$ thì $dy/dz = 0$.
- Đỉnh C là gốc tọa độ cho nên tại đó tung độ y của vòm bằng không, nghĩa là khi $z = 0$ thì $y = 0$.

Từ các điều kiện biên này ta được:

Khi $z = 0$: $dy/dz = kA\, chkz + kB\, shkz = kA\, ch0 + kB\, sh0 = 0$,

nên $kA = 0$, suy ra $A = 0$.

Khi $z = 0$: $y = A\, shkz + B\, chkz - \dfrac{q_o}{\gamma} = B - \dfrac{q_o}{\gamma} = 0$, suy ra $B = \dfrac{q_o}{\gamma}$.

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có dạng $y = \dfrac{q_o}{\gamma}(chkz - 1)$.

Đường cong của phương trình này chính là đường dây xích catênôit.

Để xác định hệ số k, ta sử dụng điều kiện:

Khi $z = \pm\dfrac{l}{2}$: $y = f = \dfrac{q_o}{\gamma}\left(chk\dfrac{l}{2} - 1\right)$, suy ra $k = \dfrac{2}{l}\, arg\, ch\left(\dfrac{f.\gamma}{q_o} + 1\right)$.

Để cho tiện, ta gọi: $m = \dfrac{q_o + \gamma f}{q_o}$, suy ra $\dfrac{q_o}{\gamma} = \dfrac{f}{m-1}$.

Như vậy phương trình trục hợp lý của vòm có thể biểu diễn dưới dạng sau

$$y = \frac{f}{m-1}(chkz - 1).$$

Còn hệ số k được xác định theo công thức: $k = \dfrac{2}{l}\, arg\, ch\, m$.

Nếu chú ý rằng $argchm = ln\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)$ thì ta có thể xác định k theo công thức:

$$k = \frac{2}{l} ln\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right).$$

Nếu cho biết trị số m thì ta có thể xác định được hệ số k và tiếp đó tìm được trục hợp lý của vòm ba khớp.

4. Trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng vuông góc với trục vòm

Các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng hoặc chất khí thường chịu áp lực vuông góc với trục. Để tìm trục hợp lý của vòm trước tiên ta cần khảo sát cân bằng của một đoạn vô cùng bé của trục được giả thiết là trục hợp lý của vòm (hình 2.36).

Lấy tổng mômen của các lực đối với tâm cong O của phân tố

$$\Sigma M_O = N\rho - (N + dN)\rho = 0.$$

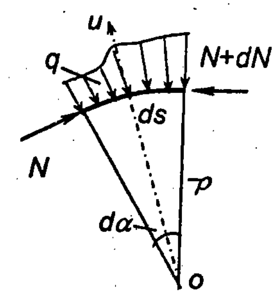
Từ đó ta có $dN = 0$ như vậy $N = const$.

Viết phương trình hình chiếu theo phương u:

$$\Sigma u = N\sin\frac{d\alpha}{2} + N\sin\frac{d\alpha}{2} - q\,ds = 0.$$

Góc $d\alpha$ vô cùng bé nên có thể xem $\sin\dfrac{d\alpha}{2} \approx \dfrac{d\alpha}{2}$.

Ta được: $N\, d\alpha - q\, ds = 0$.



Hình 2. 36

Nhưng $ds = \rho\, d\alpha$ nên sau khi thay vào điều kiện này, ta được:

$$\rho = \frac{N}{q}. \qquad (2.12)$$

Vì $N = const$ nên *bán kính cong ρ của vòm tỷ lệ nghịch với cường độ của tải trọng phân bố q.*

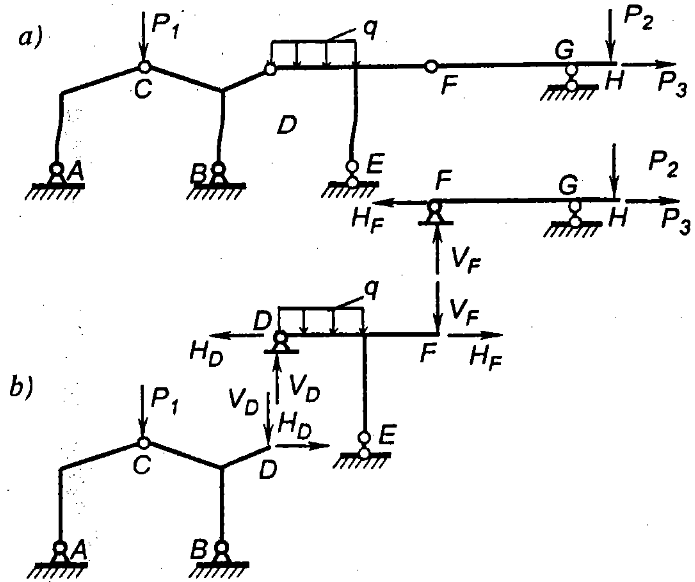
Biểu thức (2.12) là phương trình vi phân của trục hợp lý của vòm chịu tải trọng vuông góc với trục vòm. Giải phương trình này cho trường hợp tải trọng q phân bố bất kỳ rất phức tạp.

Trường hợp đặc biệt, khi $q = const$ (tải trọng phân bố đều) ta có: $\rho = const$.

Như vậy, *trục hợp lý của vòm ba khớp chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với trục vòm là đường tròn.*

2.6. Cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động

Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động thông qua hệ vẽ trên hình 2.37.

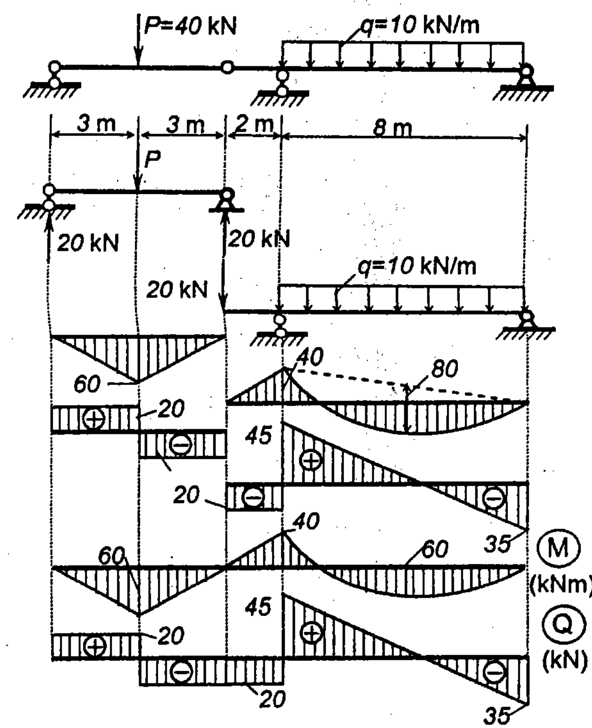


Hình 2. 37

Thứ tự thực hiện:

- ✦ Phân tích cấu tạo của hệ ghép, tức là *phân biệt hệ chính và hệ phụ* theo quy cách đã nêu trong 2.1.B. Ta thấy *ACBD* là hệ chính; *DEF* là hệ phụ của *ACBD* và là hệ chính của *FGH*; *FGH* là hệ phụ.
- ✦ Căn cứ vào tính chất chịu lực của hệ chính và hệ phụ đã nêu trong 2.1.B, *đưa hệ ghép về sơ đồ tính tách biệt từng hệ đơn giản* như trên hình 2.37b.
- ✦ *Thực hiện tính toán riêng biệt từng hệ đơn giản theo thứ tự: tính hệ phụ trước rồi chuyển sang tính hệ chính.* Khi tính hệ chính, ngoài tải trọng tác dụng trên hệ, cần phải xét đến các áp lực truyền từ hệ phụ.

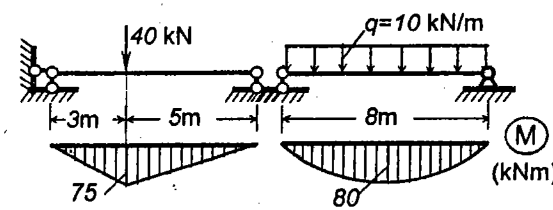
Đối với hệ trên hình 2.37 trước hết cần tính hệ phụ *FGH* chịu tác dụng của các lực P_2, P_3 và xác định phản lực V_F, H_F. Tiếp đó xét hệ *DEF* chịu tải trọng tác dụng trên hệ đó (tải trọng phân bố q) và các áp lực truyền từ hệ phụ *FHG*. Những áp lực này có giá trị bằng V_F và H_F đã biết khi tính hệ phụ *FGH* nhưng đặt tại *F* với chiều ngược lại. Thực hiện tính toán hệ *DEF* với các lực đã biết và xác định được các phản lực V_D, H_D tại khớp *D*. Sau cùng tính hệ chính *ACBD* chịu tải trọng tác dụng trên hệ đó (lực P_1) và các áp lực đặt tại *D* truyền từ *DEF* tới. Những áp lực này có giá trị bằng V_D và H_D như đã biết nhưng với chiều ngược lại.



Hình 2. 38

Ví dụ 2.13. Vẽ biểu đồ nội lực trong hệ dầm ghép cho trên hình 2.38.

Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình



Hình 2. 39

bày trên hình 2.38.

Chú thích

So sánh biểu đồ mômen uốn trên hình 2.38 của dầm ghép hai nhịp với biểu đồ mômen uốn trên hình 2.39 của hai dầm đơn giản có cùng nhịp và chịu tải trọng tương đương ta thấy mômen uốn lớn nhất trong dầm ghép là 60 kNm còn mômen uốn lớn nhất trong dầm đơn giản là 80 kNm.

Điều đó cho ta thấy: dùng dầm ghép có khả năng tiết kiệm vật liệu hơn so với dùng dầm đơn giản có điều kiện làm việc tương đương.

2.7. Cách tính hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động

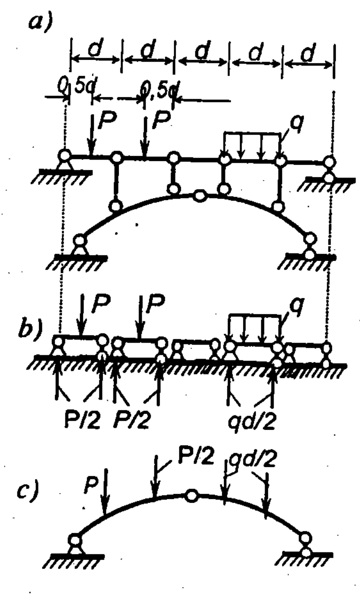
Nhiệm vụ chủ yếu của việc tính các hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động là xác định nội lực hoặc vẽ các biểu đồ nội lực trong kết cấu chịu lực chính. Thực chất của vấn đề là phải phân tích cách truyền lực từ dầm dọc phụ xuống kết cấu chịu lực chính.

Xét hệ có hệ thống truyền lực như trên hình 2.40a. Ta thấy các dầm dọc phụ làm việc như những dầm đơn giản kê trên các gối tựa đặt tại vị trí các mắt truyền lực (hình 2.40b). Dưới tác dụng của tải trọng, trong dầm dọc phụ sẽ phát sinh các phản lực và nội lực xác định theo quy tắc đã trình bày trong mục 2.4. Để tính kết cấu chính ta cần thay thế tác dụng của tải trọng trên dầm dọc phụ bằng những áp lực đặt tại vị trí các mắt truyền lực. Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, những áp lực này có giá trị bằng các phản lực tương ứng đã được xác định khi tính dầm dọc phụ nhưng có chiều ngược lại. Sơ đồ tính kết cấu chính như trên hình 2.40c. Như vậy các lực đặt trên kết cấu chịu lực chính đều đã biết và ta có thể xác định nội lực trong kết cấu chịu lực chính theo quy tắc chung đã biết.

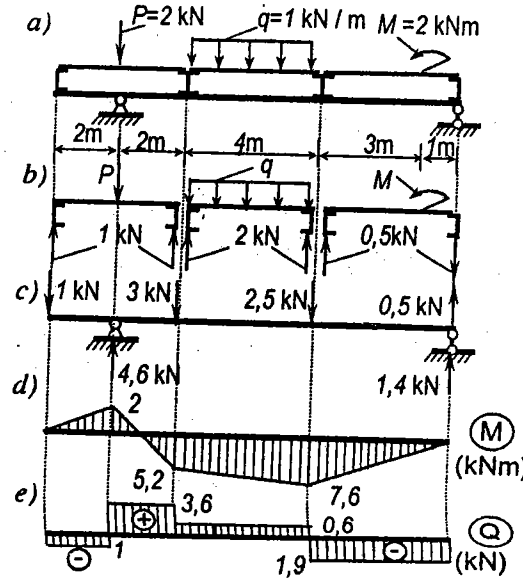
Ta nhận thấy các lực đặt trên kết cấu chịu lực chính của hệ có hệ thống truyền lực là những lực tập trung có vị trí xác định đặt tại các mắt truyền lực. Do đó nếu kết cấu chịu lực chính là hệ gồm các thanh thẳng thì biểu đồ lực dọc và lực cắt luôn có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn còn biểu đồ mômen uốn có dạng hình đa giác.

Ví dụ 2.14. Vẽ biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực cắt trong dầm chính của hệ có hệ thống truyền lực cho trên hình 2.41a.

Quá trình phân tích bài toán và kết quả cần tìm được trình bày trên hình 2.41.



Hình 2. 40



Hình 2. 41

2.8. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ thanh có đủ số liên kết

Ở chương 1 ta đã nghiên cứu sự cấu tạo hình học của các hệ thanh. Trong mục này giới thiệu thêm một phương pháp khác là phương pháp tải trọng bằng không. Cần chú ý là có thể áp dụng phương pháp tải trọng bằng không cho hệ thanh bất kỳ có số liên kết vừa đủ (điều kiện cần được thỏa mãn với $n = 0$). Áp dụng phương pháp này thường có hiệu quả đối với những hệ dàn.

Tiêu chí của sự bất biến hình và không bất biến hình theo phương pháp tải trọng bằng không như sau:

Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ:

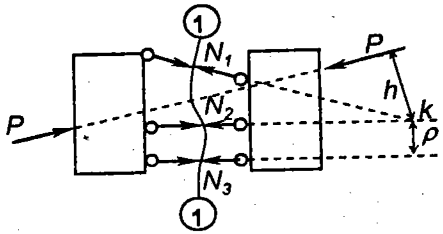
* *nếu phản lực và nội lực trong tất cả các thanh đều duy nhất bằng không thì hệ bất biến hình;*
* *nếu phản lực và nội lực trong tất cả hoặc một số thanh là vô định thì hệ không bất biến hình.*

Thật vậy, ta hãy khảo sát nội lực N_3 trong hệ trên hình 2.42.

Từ phương trình cân bằng:

$\sum M_k^{ph} = -N_3\rho + Ph = 0,$

suy ra: $N_3 = \dfrac{Ph}{\rho}$.



Hình 2. 42

Khi $P = 0$:

✤ nếu $\rho \neq 0$, *hệ bất biến hình* (ba thanh không đồng quy):

$N_3 = \dfrac{0}{\rho} = 0$;

✤ nếu $\rho = 0$, *hệ biến hình tức thời* (ba thanh đồng quy): $N_3 = \dfrac{0}{0}$ *(vô định).*

Lực N_3 có dạng vô định tức là *có thể tồn tại nhiều giá trị khác nhau.*

Cũng thực hiện như vậy với các lực N_1 và N_2 ta sẽ đi đến kết luận tương tự.

Ví dụ 2.15. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ cho trên hình 2.43.

Vận dụng hệ thức (1.5) đã biết trong chương 1 ta thấy hệ đủ liên kết.

Giả sử hệ không chịu tải trọng. Lập phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang $\sum X = 0$, ta sẽ được $H = 0$. Phần hệ còn lại có tính chất đối xứng. Cần tiếp tục xác định nội lực trong các thanh còn lại.

Tách mắt 2 và vận dụng tính chất đối xứng của hệ, từ phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng ta dễ dàng xác định được các lực dọc $N_{2-6} = N_{2-4} = 0$. Tiếp đó, áp dụng hệ quả 1:

- với mắt 6 ta được:

  $N_{6-1} = N_{6-5} = 0;$

- với mắt 4 ta được:

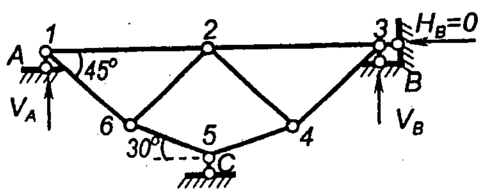
  $N_{4-5} = N_{4-3} = 0;$

- với mắt 1 ta được:

  $N_{1-2} = V_A = 0;$

- với mắt 3 ta được:

  $N_{3-2} = V_B = 0.$



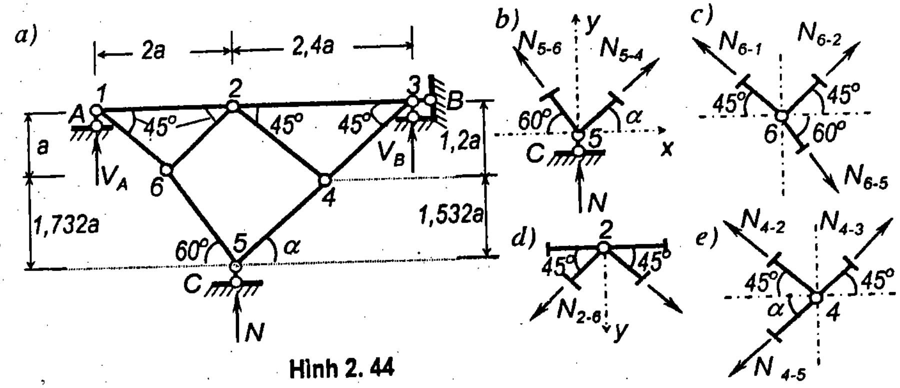
Hình 2. 43

Phản lực và lực dọc trong toàn hệ đều duy nhất bằng không, hệ bất biến hình.

Ví dụ 2.16. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ cho trên hình 2.44a. Cho

biết: $\sin\alpha = 0{,}7826;\ \cos\alpha = 0{,}61665.$

Vận dụng hệ thức (1.5) đã biết trong chương 1 ta thấy hệ đủ liên kết.



Hình 2. 44

Trong trường hợp này chưa thể tìm ngay được các thành phần phản lực thẳng đứng cũng như không thể tách mắt nào chỉ có hai thanh chưa biết nội lực hoặc thực hiện mặt cắt qua ba thanh chưa biết nội lực, do đó chưa xác định ngay được nội lực trong một thanh nào đó của dàn.

Để giải quyết khó khăn này ta giả thiết coi phản lực tại gối C bằng N và xác định lực dọc trong các thanh khác theo N.

- *Tách mắt 5* (hình 2.44b): Lập các phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang và phương đứng, ta có:

  $$\sum X = N_{5-4} \times 0{,}61665 - N_{5-6} \times 0{,}5 = 0\ .$$

  $$\sum Y = N_{5-4} \times 0{,}78726 + N_{5-6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + N = 0\ .$$

  Suy ra: $N_{5-4} = -0{,}53899\,N\ ;\quad N_{5-6} = -0{,}66474\,N.$

- *Tách mắt 6* (hình 2.44c): Lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương của thanh 6–2, ta có:

  $$N_{6-2} = -N_{5-6} \times 0{,}5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{5-6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}17205\,N.$$

- *Tách mắt 2* (hình 2.44d): Lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương thẳng đứng y, ta có:

  $$\sum Y = N_{2-4}\cos 45^o + N_{6-2}\cos 45^o = 0,$$

  suy ra: $N_{2-4} = -N_{6-2} = +\,0{,}17205\,N.$ (a)

• Mặt khác, *tách mắt 4* (hình 2.44e) và lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương của thanh 2–4 để xác định lại giá trị N_{2-4}, ta có:

$$N_{2-4} = N_{5-4}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - N_{5-4}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = -0{,}0652\,N. \qquad \text{(b)}$$

So sánh (a) và (b) ta thấy hai kết quả tính được cho một thanh mâu thuẫn với nhau. Điều đó không thể tồn tại được. Chỉ có thể giải quyết mâu thuẫn này khi phản lực $N = 0$.

Sau khi khẳng định $N = 0$, lần lượt tách các mắt *5, 6, 4, 1* và *3* ta dễ dàng nhận thấy phản lực và lực dọc trong các thanh còn lại đều bằng không. Kết luận: hệ bất biến hình.

Ví dụ 2.17. Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 2.45a

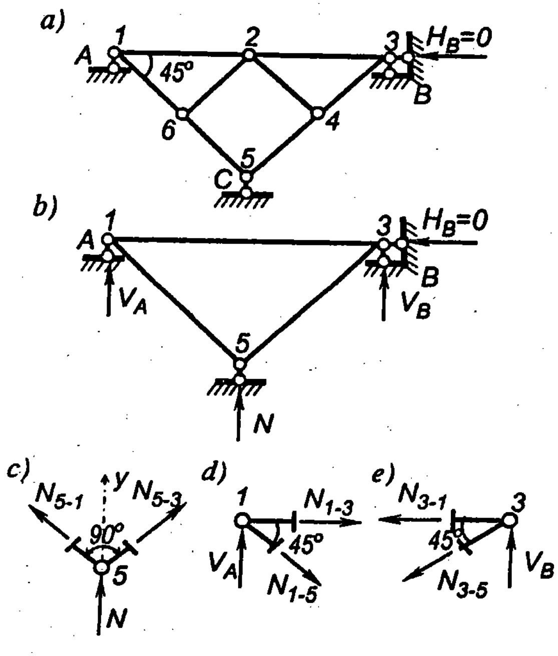
Vận dụng hệ thức (1.5) đã biết trong chương 1 ta thấy hệ đủ liên kết.

Giả sử không có tải trọng tác dụng trên hệ. Từ phương trình hình chiếu theo phương ngang $\Sigma X = 0$, ta sẽ tìm được $H_B = 0$.

Tách mắt *6* và *4* ta dễ dàng thấy $N_{6-2} = 0$ và $N_{4-2} = 0$.

Chỉ biết các lực này bằng không, ta chưa thể kết luận được là hệ bất biến hình, cần phải tiếp tục xác định nội lực trong các thanh biên và ba thành phần phản lực đứng.

Hệ đã loại bỏ những thanh không làm việc vẽ trên hình 2.45b. Cũng tương tự như ở ví dụ trên ta giả thiết phản lực tại gối *C* có giá trị bằng *N* và xác định lực dọc trong các thanh khác theo *N*.



Hình 2. 45

• *Tách mắt 5* (hình 2.45c):

$$\Sigma Y = N_{5-1}\cos 45^o + N_{5-3}\cos 45^o + N = 0\,.$$

Theo tính chất đối xứng: $N_{5-1} = N_{5-3}$, do đó: $N_{5-1} = N_{5-3} = -N\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• *Tách mắt 1* (hình 2.45d):

$$\Sigma X = N_{1-3} + N_{5-1}\cos 45^o = 0, \quad \text{suy ra:} \quad N_{1-3} = +N/2. \qquad \text{(a)}$$

• *Tách mắt 3* (hình 2.45e):

$$\Sigma X = N_{1-3} + N_{5-3}\cos 45^o = 0, \quad \text{suy ra:} \quad N_{1-3} = +N/2. \qquad \text{(b)}$$

Trong hai lần tính, hai kết quả (a) và (b) của lực dọc N_{1-3} thống nhất với nhau. Như vậy các phản lực nội lực trong hệ 2.45b đều có thể biểu diễn theo *N*. Nếu cho *N* nhiều giá trị tùy ý khác nhau ta sẽ tìm được nhiều đáp số khác nhau cho phản lực và nội lực trong các thanh của hệ mà không gặp mâu thuẫn gì cả.

Điều đó chứng tỏ nội lực trong các thanh biên và ba thành phần phản lực thẳng đứng là vô định.

Kết luận: hệ không bất biến hình.

CÂU HỎI ÔN TẬP

2.1. Nêu đặc điểm chịu lực của các dạng hệ tĩnh định.

2.2. Nêu các dạng phương trình cân bằng và các điều cần lưu ý khi mô tả sự cân bằng của các hệ lực phẳng: đồng quy, song song, bất kỳ.

2.3. Vì sao có thể phát biểu hệ bất biến hình đủ liên kết là hệ tĩnh định?

2.4. Nội lực trong hệ tĩnh định phụ thuộc và không phụ thuộc các yếu tố gì?

2.5. Phát biểu các giả thiết thường được áp dụng khi tính dàn. Phân tích về các thành phần nội lực trong các thanh của dàn.

2.6. Cách tính dàn theo phương pháp tách mắt:

- Trình bày nội dung phương pháp, phạm vi áp dụng và ưu khuyết điểm của phương pháp.
- Cần thực hiện như thế nào để cho mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn lực?

• Nêu cách phát hiện các thanh không chịu lực trong dàn.

2.7. Trình bày cách vẽ giản đồ nội lực Maxwell - Cremona.

2.8. Cách tính dàn theo phương pháp mặt cắt đơn giản:

• Nêu phạm vi áp dụng và nội dung phương pháp.
• Cần thực hiện như thế nào để trong mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa một ẩn lực?

2.9. Cách tính dàn theo phương pháp mặt cắt phối hợp:

• Khi nào cần phải phối hợp các mặt cắt?
• Điều kiện phối hợp?

2.10. Trình bày các định nghĩa và quy ước về dấu khi xác định nội lực tại một tiết diện.

2.11. Nêu và giải thích về dạng biểu đồ nội lực trong các đoạn thanh thẳng không chịu tải trọng và chịu tải trọng phân bố tương ứng với các quy luật cơ bản khác nhau.

2.12. Nhận xét về đặc điểm của biểu đồ nội lực ở lân cận tiết diện chịu lực tập trung, tiết diện chịu mômen tập trung và tiết diện có sự thay đổi về cường độ của lực phân bố.

2.13. Hệ ba khớp:

• Định nghĩa, tính chất, ưu khuyết điểm?
• Trình bày cách xác định các thành phần phản lực và nội lực.

2.14. Thiết lập các biểu thức nội lực tại một tiết diện bất kỳ trong vòm và khung ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng.

2.15. Hệ ghép tĩnh định:

• Định nghĩa.
• Phân biệt kết cấu chính, kết cấu phụ và tính chất chịu lực của chúng.
• Nêu thứ tự tiến hành khi tính hệ ghép.

2.16. Hệ có hệ thống truyền lực:

• Định nghĩa, ý nghĩa của việc sử dụng hệ thống truyền lực?
• Nêu thứ tự tiến hành khi tính hệ có hệ thống truyền lực.

2.17. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học:

• Điều kiện áp dụng?
• Chứng minh các tiêu chí về bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.

3 Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

3.1. Phương pháp nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động

Tải trọng di động là tải trọng có vị trí thay đổi trên công trình, ví dụ như đoàn xe hỏa, đoàn xe ôtô, đoàn người đi trên cầu...

Khác với trường hợp hệ chịu tải trọng bất động, nội lực trong hệ chịu tải trọng di động thay đổi theo vị trí của tải trọng. Do đó khi nghiên cứu cách tính công trình chịu tải trọng di động ta phải giải quyết hai nhiệm vụ sau:

* *Xác định vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình*, nghĩa là tìm vị trí của tải trọng để sao cho tương ứng với vị trí đó thì đại lượng nghiên cứu (chẳng hạn như mômen uốn, lực cắt, phản lực, chuyển vị...) sẽ có giá trị lớn nhất. Vị trí để tính còn gọi là *vị trí bất lợi nhất*.
* *Xác định trị số để tính của đại lượng nghiên cứu* tương ứng với vị trí để tính của tải trọng. Trị số để tính của đại lượng nghiên cứu là trị số lớn nhất về giá trị tuyệt đối khi tải trọng di động trên công trình.

Nói chung, về nguyên tắc, muốn tìm vị trí bất lợi nhất và giá trị để tính ta có thể tiến hành theo các bước sau:

✦ Giả thiết coi khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi (điều này phù hợp với các quy định trong quy trình thiết kế) và xác định vị trí của chúng theo một tọa độ chạy z.

✦ Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực hoặc chuyển vị) theo tọa độ chạy z.

✦ Tìm các cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị cực trị lớn nhất là giá trị để tính còn vị trí tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

Về nguyên tắc, cách giải bài toán cũng tương đối đơn giản nhưng trên thực tế khi vận dụng ta thường gặp nhiều khó khăn vì các hàm $S(z)$ thường không phải là hàm liên tục về giá trị cũng như về đạo hàm của chúng. Vì vậy, hướng giải quyết này thường không được áp dụng.

Đối với những hệ thanh được phép áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể giải quyết vấn đề một cách đơn giản hơn bằng *phương pháp đường ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ phẳng) hoặc mặt *ảnh hưởng* (nếu hệ thanh là hệ không gian). Dưới đây ta sẽ nghiên cứu tỷ mỷ nội dung phương pháp đường ảnh hưởng.

A. Định nghĩa đường ảnh hưởng

Đường ảnh hưởng S là đồ thị biểu diễn luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu S xuất hiện tại một vị trí xác định trên công trình (chẳng hạn phản lực tại liên kết, mômen uốn, lực cắt, lực dọc, chuyển vị tại một tiết diện trên công trình) theo vị trí của một tải trọng tập trung bằng đơn vị lực không thứ nguyên có phương và chiều không đổi di động trên công trình.

Để cho gọn, ta sẽ ký hiệu đường ảnh hưởng S là *đ.a.h. S*.

Ngoài định nghĩa trên, trong thực tế còn tồn tại các định nghĩa về đường ảnh hưởng của đại lượng S khi tải trọng là mômen tập trung di động, khi tải trọng là lực tập trung quay xung quanh một điểm (để tính cần trục) v.v... Trong giáo trình này chỉ đề cập đến các nội dung về đường ảnh hưởng tương ứng với định nghĩa đã nêu ở trên. Trên cơ sở đó, người đọc dễ dàng suy luận cho các trường hợp khác.

B. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng

Theo định nghĩa trên, khi vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S ta thực hiện theo thứ tự như sau:

1) Giả thiết trên công trình chỉ có một lực tập trung P bằng đơn vị đặt cách gốc tọa độ chọn tùy ý một khoảng là z.

2) Xác định đại lượng nghiên cứu S tương ứng với vị trí của lực P có tọa độ z theo các phương pháp tính với tải trọng bất động đã biết. Như vậy ta sẽ được biểu thức giải tích $S(z)$ của đại lượng nghiên cứu. Biểu thức này là phương trình đường ảnh hưởng S.

3) Cho tọa độ z biến thiên, tức là tải trọng P di động trên công trình, căn cứ vào phương trình vừa tìm được, vẽ đồ thị của hàm $S(z)$, tức là vẽ được đường ảnh hưởng S.

Chú ý: Nếu đại lượng nghiên cứu S không phải là một hàm duy nhất liên tục theo tọa độ z trên toàn bộ công trình thì đường ảnh hưởng S bao gồm nhiều đoạn với các quy luật biến thiên khác nhau. Trong trường hợp này ta cần lần lượt đặt tải trọng P trên từng đoạn một để xác định hàm $S(z)$ tương ứng.

Khi vẽ đường ảnh hưởng cần thống nhất quy ước:

- *Chọn đường chuẩn vuông góc với phương của lực di động hoặc chọn song song với trục của các thanh.*
- *Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.*
- *Các tung độ dương dựng theo chiều của lực di động.*

Ví dụ 3.1. Vẽ các đường ảnh hưởng phản lực A, phản lực B, mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k cho dầm trên hình 3.1a khi lực P hướng từ trên xuống dưới di động vuông góc với trục dầm.

a) Đường ảnh hưởng phản lực A và phản lực B

Chọn gốc tọa độ tại gối tựa A và đặt lực P cách gốc một khoảng z.

Xác định các phản lực từ các điều kiện cân bằng

$\Sigma M_B = Al - P(l-z) = 0;$

$\Sigma M_A = Bl - Pz = 0\,.$

Suy ra: $A = P\dfrac{l-z}{l}$; $B = P\dfrac{z}{l}$.

Nếu cho $P = 1$ ta có:

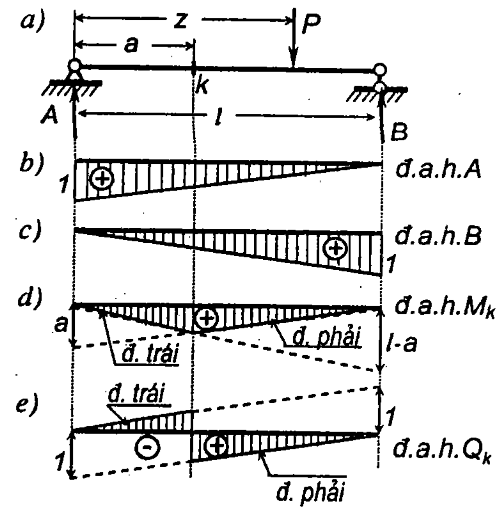
$đ.a.h.A = \dfrac{l-z}{l}$; $đ.a.h.\ B = \dfrac{z}{l}$.

Cho z biến thiên ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng. Các đ.a.h. có dạng đường thẳng.

Khi $z = 0$ ta có $A = 1;\ B = 0$.

Khi $z = l$ ta có $A = 0;\ B = 1$.

Đ.a.h. A và *đ.a.h. B* như trên hình 3.1b và c.



Hình 3.1

b) Đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k

Trong trường hợp này ta cần lần lượt đặt tải trọng trong từng đoạn: đoạn bên trái tiết diện k (từ gối A đến tiết diện k) và đoạn bên phải tiết diện k (từ tiết diện k đến gối B) vì ứng với mỗi đoạn đó ta sẽ tìm được những biểu thức khác nhau của *đ.a.h.* M_k và *đ.a.h.* Q_k.

- Khi tải trọng P đặt ở bên trái tiết diện k $(0 \le z \le a)$: thực hiện mặt cắt qua tiết diện k và khảo sát cân bằng phần bên phải, ta có:

$$M_k = B(l-a)\,; \qquad Q_k = -B.$$

Thay B bằng hàm ảnh hưởng tìm được ở trên, ta có

$$đ.a.h.\ M_k = \frac{z}{l}(l-a)\,; \qquad đ.a.h.\ Q_k = -\frac{z}{l}.$$

Các phương trình chỉ thích hợp khi lực P di động ở bên trái tiết diện k tức là khi $0 \le z \le a$ nên gọi là phương trình *đường trái*. Ta vẽ các đường trái theo hai tung độ:

- khi $z = 0$ ta có: $M_k = 0;$ $Q_k = 0;$
- khi $z = l$ ta có: $M_k = l-a;$ $Q_k = -1.$

Các đường trái của *đ.a.h.* M_k và *đ.a.h.* Q_k như trên hình 3.1d và e.

Phần thích dụng của các đường này là các đoạn thẳng liền nét trên hình vẽ.

- Khi tải trọng P đặt ở bên phải tiết diện k, khảo sát cân bằng của phần bên trái tiết diện k, ta có

$$M_k = A.\,a\,; \qquad Q_k = A.$$

Thay A bằng hàm ảnh hưởng tìm được ở trên, ta có

$$đ.a.h.\ M_k = \frac{l-z}{l}a\,; \qquad đ.a.h.\ Q_k = \frac{l-z}{l}.$$

Các phương trình này chỉ thích hợp khi P di động ở bên phải tiết diện k $(a \le x \le l)$ nên gọi là phương trình *đường phải*. Ta vẽ đường phải theo hai *tung độ:*

- khi $z = 0$ ta có: $M_k = +a;$ $Q_k = 1;$
- khi $z = l$ ta có: $M_k = 0\,;$ $Q_k = 0.$

Trên các hình 3.1d và e, phần thích dụng của đường phải được vẽ liền nét.

***Nhận xét*:**

Ta có thể dễ dàng kiểm nghiệm những đặc điểm sau:

1. *Đường trái và đường phải của đ.a.h. M_k cắt nhau tại điểm ứng dưới tiết diện k.* Thật vậy, nếu cho $z = a$ trong các phương trình đường trái và đường phải của *đ.a.h.* M_k ta sẽ tìm được hai tung độ có giá trị bằng nhau và bằng $a(l-a)/l$.
2. *Đường trái và đường phải của đ.a.h.Q_k song song với nhau.* Thật vậy, so sánh hai hệ số góc ta thấy chúng bằng nhau và bằng $-1/l$.

C. Ý nghĩa và thứ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng

1. Ý nghĩa của tung độ đ.a.h. S

Theo định nghĩa và cách vẽ đường ảnh hưởng nêu ở trên, ta suy ra ý nghĩa của một tung độ đường ảnh hưởng như sau:

Tung độ của đường ảnh hưởng S tại một tiết diện nào đó biểu thị đại lượng S do lực tập trung P bằng đơn vị đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.

Để phân biệt rõ khái niệm về đường ảnh hưởng với khái niệm biểu đồ, ta nhớ lại ý nghĩa của một tung độ biểu đồ.

Tung độ biểu đồ S tại một tiết diện nào đó biểu thị giá trị của đại lượng S tại tiết diện đó do các tải trọng đã biết có vị trí không đổi gây ra.

Như vậy, biểu đồ cho ta thấy được sự phân bố của đại lượng nghiên cứu trên tất cả các tiết diện của công trình trong điều kiện tải trọng bất động. Nếu thay đổi vị trí của tải trọng thì biểu đồ cũng thay đổi theo, lúc đó ta phải vẽ lại biểu đồ khác.

Đường ảnh hưởng cho ta thấy sự biến thiên của đại lượng cần nghiên cứu tại một vị trí xác định nào đó trên công trình tương ứng với tất cả các vị trí của một tải trọng tập trung P bằng đơn vị. Đường ảnh hưởng không nói lên được sự biến thiên của đại lượng nghiên cứu từ tiết diện này qua tiết diện khác, khi thay đổi vị trí của tiết diện thì cần phải vẽ đường ảnh hưởng khác.

2. Thứ nguyên của tung độ đ.a.h. S

Qua ví dụ trên khi vẽ *đ.a.h. S* ta đã thiết lập phương trình *đ.a.h. S* theo tải trọng tập trung $P = 1$ là một lực không thứ nguyên. Trong thực tế, tải trọng là đại lượng có thứ nguyên (TN), do đó ta có:

$$TN\ của\ tung\ độ\ đ.a.h.\ S = \frac{TN\ của\ S}{TN\ của\ P}.$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra đơn vị đo của tung độ *đ.a.h. S.*

Chẳng hạn, nếu lực được đo bằng kN, chiều dài được đo bằng m thì đơn vị của tung độ đ.a.h. phản lực sẽ là kN/kN tức là hư số còn tung độ đ.a.h. mômen uốn là kNm/kN = m v.v...

D. Dạng của đường ảnh hưởng

Nói chung, *đ.a.h. S* có thể là đường thẳng hoặc cong. *Riêng trong trường hợp đại lượng S là phản lực hoặc nội lực trong hệ tĩnh định, đ.a.h. S bao* *gồm những đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng tương ứng với một phần xác định của hệ.*

Các phần xác định này được giới hạn trong phạm vi mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng S. Trong trường hợp miếng cứng thành phần của hệ có chứa đại lượng S thì phạm vi miếng cứng này sẽ được chia thành hai phần xác định bởi mặt cắt qua tiết diện hoặc qua liên kết có chứa đại lượng S.

3.2. Đường ảnh hưởng trong dầm và khung tĩnh định đơn giản

Dưới đây ta sẽ xây dựng các mẫu đường ảnh hưởng cho trường hợp dầm đơn giản có đầu thừa (hình 3.2a), khi lực P hướng từ trên xuống dưới và di động vuông góc với trục dầm. Trên cơ sở những kết quả này có thể dễ dàng suy ra các đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản và dầm côngxôn.

A. Đường ảnh hưởng phản lực trong dầm đơn giản

Theo định nghĩa, đường ảnh hưởng phản lực A trong dầm đơn giản AB là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của phản lực A khi lực $P=1$ di động trên dầm, hay nói cách khác là khi hoành độ z của lực đó biến thiên trong khoảng $(-l_1 \le z \le l+l_2)$ nếu chọn gốc tọa độ ở gối A.

Muốn vậy, ta xác định giá trị của phản lực A với giả thiết lực $P=1$ đặt tại hoành độ z bằng cách viết phương trình cân bằng tĩnh học của dầm dưới dạng tổng mômen đối với điểm B.

$$\Sigma M_B = -Al + 1(l-z) = 0, \quad \text{hay} \quad đ.a.h.\ A = \frac{l-z}{l}.$$

Biểu thức đó chứng tỏ rằng phản lực A là hàm bậc nhất của biến số z.

Khi z thay đổi trong khoảng $(l_1\ ,\ l+l_2)$ thì đường ảnh hưởng A có dạng đường thẳng xác định bởi hai điểm:

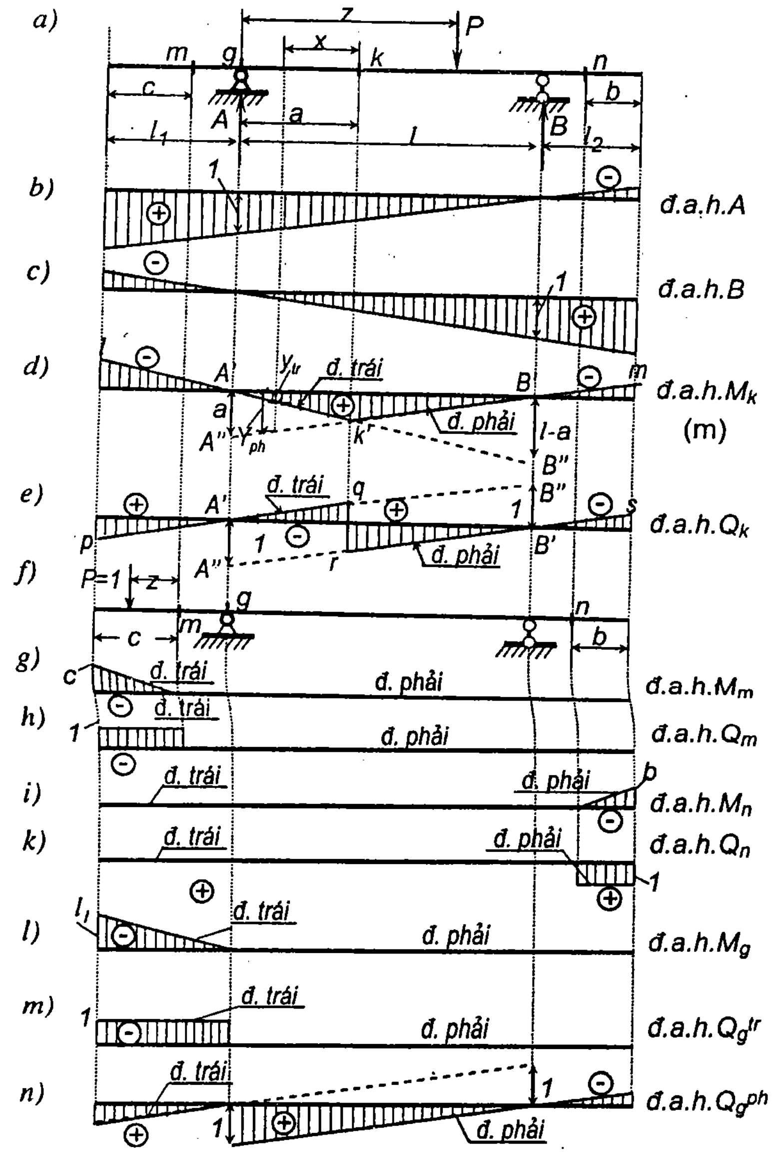
Khi $z = 0$; $A = +1$; Khi $z = l$; $A = 0$.

Tương tự, để vẽ đường ảnh hưởng B ta viết điều kiện cân bằng tĩnh học dưới dạng tổng mômen đối với điểm A.

$$\Sigma M_A = Bl - 1.z = 0, \quad \text{suy ra} \quad đ.a.h.\ B = \frac{z}{l}.$$

Khi $z = 0$; $B = 0$. Khi $z = l$; $B = +1$.

Các đường ảnh hưởng phản lực tìm được như trên hình 3.2b và c.



Hình 3.2

B. Đường ảnh hưởng nội lực tại một tiết diện trên dầm

Tiết diện trong dầm bao gồm hai loại:

∗ Tiết diện nằm trong khoảng giữa hai gối tựa gọi là tiết diện trong nhịp.

∗ Tiết diện nằm ở đầu thừa của dầm.

Tương ứng với từng loại tiết diện kể trên, cách thực hiện có khác nhau đôi chút.

Khi tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm, trong dầm không phát sinh lực dọc N cho nên ta chỉ cần vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn M và lực cắt Q.

1. Tiết diện trong nhịp

Ta vẽ *đ.a.h* M_k và *đ.a.h* Q_k tại tiết diện k nằm trong khoảng giữa hai gối tựa (trong nhịp).

Khi di động trên dầm, tải trọng $P=1$ có thể ở bên trái tiết diện k, hoặc ở bên phải tiết diện k. Ứng với mỗi trường hợp đó, phương trình đ.a.h. sẽ khác nhau.

- *Khi $P=1$ di động trên phần bên trái tiết diện k* tức là $-l_l \le z \le a$, ta tính mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k bằng cách tưởng tượng cắt dầm tại tiết diện k thành hai phần và xét điều kiện cân bằng của phần dầm chứa ít lực hơn để cho phương trình được đơn giản (phần bên phải), kết quả:

$$đ.a.h.\ M_k = \frac{z}{l}(l-a)\ ; \quad đ.a.h.\ Q_k = -\frac{z}{l}.$$

Hai biểu thức trên chỉ đúng khi lực $P=1$ ở phần bên trái tiết diện k, tức là khi $-l_l \le z \le a$. Trên hình 3.2d, e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình trên ứng với vị trí của $P=1$ ở bên trái tiết diện, gọi là những *đường trái*. Mỗi đường thẳng đó được xác định bằng hai điểm:

Khi	$z = 0;$	$M_k = 0;$	$Q_k = 0.$
Khi	$z = l;$	$M_k = l-a;$	$Q_k = -1.$

- *Khi $P=1$ di động trên phần bên phải tiết diện k* tức là $a \le z \le (l+l_2)$, khảo sát sự cân bằng của phần bên trái tiết diện k, ta tính được mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k như sau

$$đ.a.h.\ M_k = \frac{l-z}{l}a\ ; \quad đ.a.h.\ Q_k = \frac{l-z}{l}.$$

Khi	$z = 0;$	$M_k = +a;$	$Q_k = +1.$
Khi	$z = l;$	$M_k = 0;$	$Q_k = 0.$

Trên hình 3.2d và e ta vẽ được hai đường thẳng biểu thị hai phương trình tương ứng với các vị trí của tải trọng $P=1$ ở bên phải tiết diện k, gọi là những *đường phải*.

Hai đường gãy khúc $lk'm$ và $pqrs$ trên hình 3.2d,e lần lượt là *đ.a.h.* M_k và *đ.a.h.* Q_k cần tìm.

Nhận xét :

1) Từ *đ.a.h.* M_k ta nhận thấy đường trái và đường phải giao nhau tại điểm k' ứng dưới tiết diện k và đường kéo dài của đường phải cắt đường dóng thẳng đứng ứng dưới gối A tại điểm A'' với tung độ $A'A'' = a$ là khoảng cách từ gối tựa trái đến tiết diện k.

   Từ nhận xét đó ta suy ra cách vẽ thực hành *đ.a.h.* M_k của tiết diện bất kỳ k trong nhịp như sau:

   - Trước tiên vẽ đường phải, được xác định bởi A'' là điểm ứng dưới gối tựa A với tung độ $A'A'' = a$ và B' là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối tựa B. Nối A'' với B' bằng đường thẳng. Từ tiết diện k kẻ đường dóng thẳng đứng cắt đường phải $A''B'$ ở k'. Đoạn $k'B'm$ là phần thích dụng của đường phải.
   - Sau đó vẽ đường trái bằng cách nối k' với A' là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối tựa A. Phần thích dụng của đường trái là đoạn $k'a'l$.

2) Trên *đ.a.h.* M_k, tại một tiết diện bất kỳ, khoảng cách theo phương của các tung độ (hiệu các tung độ) giữa hai đường phải và đường trái bằng khoảng cách theo phương vuông góc với lực $P = 1$ từ tiết diện đang xét tới giao điểm của hai đường phải và đường trái.

   Thật vậy, tại tiết diện bất kỳ cách giao điểm của hai đường phải và đường trái một khoảng là x, tức là khi $z = a - x$, ta có:

   - Tung độ của đường phải : $y_{ph} = (l - a + x)a / l$.
   - Tung độ của đường trái : $y_{tr} = (a - x)(l - a) / l$.

   Do đó, trị số tuyệt đối của hiệu hai tung độ đó bằng : $|\, y_{ph} - y_{tr} \,| = |\, x \,|$. Đó là điều cần xác minh.

3) Từ *đ.a.h.* Q_k ta nhận thấy đường trái và đường phải song song với nhau, đồng thời tại các gối tựa *đ.a.h.* Q_k có tung độ bằng không.

Từ nhận xét đó ta suy ra cách vẽ thực hành *đ.a.h.* Q_k cho tiết diện bất kỳ k trong nhịp như sau

- Trước tiên vẽ đường phải, xác định bởi A'' là điểm ứng dưới gối A với $A'A''= 1$ và B' là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B. Nối A'' với B' bằng đường thẳng. Từ tiết diện k kẻ đường dóng thẳng đứng cắt đường phải $A''B'$ ở r. Đoạn $rB's$ là phần thích dụng của đường phải.
- Sau đó vẽ đường trái bằng cách kẻ từ A' là điểm có tung độ bằng không ứng dưới gối A, đường thẳng song song với đường phải. Phần thích dụng của đường trái là đoạn $pA'q$.

2. Tiết diện ở đầu thừa

Ví dụ, vẽ *đ.a.h.* M_m và *đ.a.h.* Q_m tại tiết diện m ở đầu thừa của dầm.

- *Khi $P=1$ di động ở phần bên trái tiết diện m*, để cho tiện lợi ta chọn gốc tọa độ z tại tiết diện m như trên hình 3.2f và xét sự cân bằng của phần dầm có ít lực (phần đầu thừa), ta được:

$$đ.a.h.\ M_m = -1.z = -z; \quad đ.a.h.\ Q_m = -1; \quad \text{với } (0 \le z \le c).$$

Từ hai biểu thức đó ta có: khi $z = 0;\ M_m = 0;\ \ Q_m = -1;$

khi $z = c;\ M_m = -c;\ Q_m = -1.$

Trên hình 3.2g, h ta vẽ các đường trái của *đ.a.h.* M_m và *đ.a.h.* Q_m ứng với khi $0 \le z \le c$.

- *Khi $P=1$ di động trên phần bên phải tiết diện m*, vẫn xét cân bằng của phần đầu thừa ta có:

$$đ.a.h.\ M_m = 0; \qquad đ.a.h.\ Q_m = 0.$$

Như vậy những đường phải của *đ.a.h.* M_m và *đ.a.h.* Q_m hoàn toàn trùng với đường chuẩn.

Cách vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện n ở đầu thừa bên phải của dầm cũng tương tự như khi vẽ cho tiết diện m. Kết quả như trên hình 3.2i, k lúc này đ.a.h. lực cắt mang dấu dương (ngược dấu so với trường hợp *đ.a.h.* Q_m).

Nhận xét :

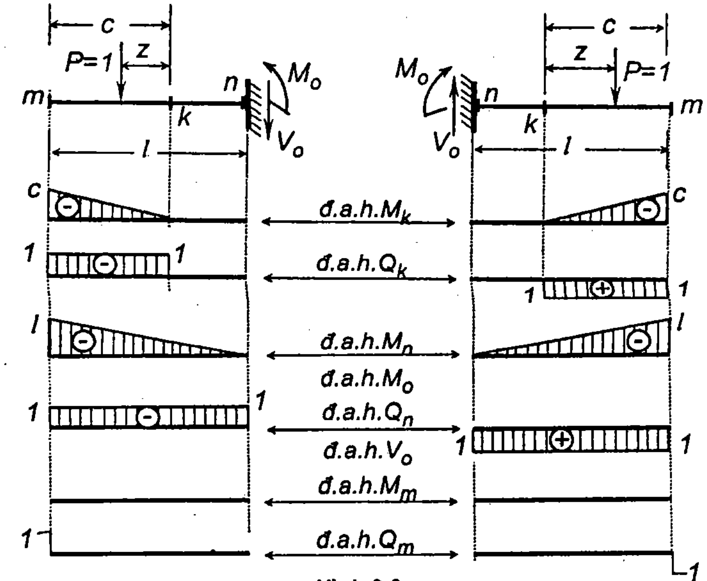
1) Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện thuộc đầu thừa trái hoặc phải có dạng hình tam giác trong khoảng từ mút thừa đến tiết diện. Những đường này luôn luôn mang dấu âm và có tung độ lớn nhất tại mút thừa với giá trị bằng khoảng cách từ mút thừa đến tiết diện.

2) Nhận xét 2) đã nêu trong 3.2.B.1 cũng nghiệm đúng đối với trường hợp đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện thuộc đầu thừa.

3) Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện thuộc đầu thừa có dạng hình chữ nhật với tung độ bằng *1*. Nếu tiết diện ở đầu thừa trái thì đ.a.h. mang dấu âm còn nếu tiết diện ở đầu thừa phải thì đ.a.h. mang dấu dương.

4) Đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong dầm đơn giản không có đầu thừa chính là những phần đường ảnh hưởng ở khoảng giữa hai gối tựa của dầm đơn giản có đầu thừa.

5) Đường ảnh hưởng nội lực trong dầm côngxôn vẽ tương tự như đ.a.h. nội lực tại tiết diện ở đầu thừa. Đường ảnh hưởng của thành phần phản lực mômen và thành phần phản lực đứng tại ngàm trong dầm công xôn có dạng đ.a.h. mômen uốn và lực cắt tại tiết diện ở ngàm. Trên hình 3.3 là kết quả vẽ các đ.a.h. của phản lực và nội lực tại các số tiết diện k, n, m.



Hình 3.3

3. Trường hợp đặc biệt, tiết diện ở trên gối tựa :

Tại tiết diện ở trên gối tựa có phản lực nên nội lực tại tiết diện bên trái gối và tiết diện bên phải gối nói chung sẽ khác nhau. Do đó, cần vẽ hai đường ảnh hưởng tương ứng với hai tiết diện ở hai bên gối tựa.

✣ Mômen uốn tại hai tiết diện ở hai bên gối tựa như nhau vì phản lực là lực tập trung nên không làm thay đổi giá trị mômen uốn. Do đó ta có thể vẽ đ.a.h. M_g tại tiết diện trên gối g theo mẫu đ.a.h. M_m của tiết diện m ở đầu thừa của dầm với giá trị $c \to l_l$ hoặc theo mẫu đ.a.h. M_k của tiết diện k ở trong nhịp với giá trị $a \to 0$. Kết quả như trên hình 3.2*l*.

✣ Phản lực là lực tập trung ở gối làm thay đổi giá trị lực cắt tại hai tiết diện ở hai bên gối tựa. Do đó ta cần vẽ hai đ.a.h. lực cắt:

- Đ.a.h. Q_g^{tr} tại tiết diện ở bên trái gối g theo mẫu đ.a.h. Q_m của tiết diện ở đầu thừa với tiết diện $m \to$ tiết diện g (hình 3.2m).

• Đ.a.h. Q_g^{ph} tại tiết diện ở bên phải gối g theo mẫu đ.a.h. Q_k của tiết diện trong nhịp với tiết diện $k \rightarrow$ tiết diện g (hình 3.2n).

B. Đường ảnh hưởng phản lực và nội lực trong khung

Cách vẽ đường ảnh hưởng phản lực và nội lực trong hệ khung cũng được thực hiện theo nguyên tắc tương tự như trong hệ dầm. Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ thông qua ví dụ 3.2.

Ví dụ 3.2. Xét khung trên hình 3.4a. Vẽ các đường ảnh hưởng phản lực và nội lực tại tiết diện k tương ứng với các trường hợp sau:

1) Lực $P=1$ có phương thẳng đứng, di động trên đường CDE (hình 3.4a).

2) Lực $P=1$ có phương nằm ngang, di động trên tất cả các thanh (hình 3.5a).

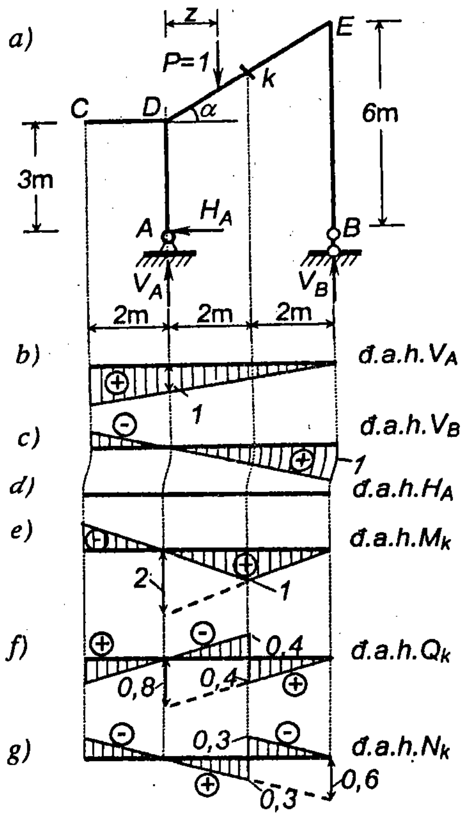
1) Lực di động $P=1$ có phương thẳng đứng:

Trong trường hợp này ta có thể chọn đường chuẩn vuông góc với phương của lực $P=1$.

Các thành phần phản lực V_A, V_B được xác định như các phản lực trong dầm kê trên hai gối A, B. Do đó:

đ.a.h.$V_A=(l-z)/l=(4-z)/4$;

đ.a.h.$V_B=z/l=z/4$.



Hình 3.4

Các đ.a.h.V_A, đ.a.h.V_B có dạng như trên hình 3.4b, c.

Thành phần $H_A=0$ với mọi vị trí của lực thẳng đứng $P=1$ nên đ.a.h. H_A trùng với đường chuẩn.

Các đ.a.h. nội lực tại k cũng được xác định tương tự như đ.a.h. nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản.

• *Khi $P=1$ di động trên phần bên trái tiết diện k* (trên CDk) ta có:

$đ.a.h.M_k = V_B.2 = 2.\frac{z}{4}$;   khi $z=0$: $M_k=0$; khi $z=4$ m: $M_k=2$.

$đ.a.h.Q_k = -V_B.\cos\alpha = -0{,}8\frac{z}{4}$;   khi $z=0$: $Q_k=0$; khi $z=4$ m: $Q_k=-0{,}8$.

$đ.a.h.N_k = V_B.\sin\alpha = 0{,}6\frac{z}{4}$;   khi $z=0$: $N_k=0$; khi $z=4$ m: $N_k=0{,}6$.

Từ các kết quả trên ta vẽ được các *đường trái* của đ.a.h. nội lực tại k (hình 3.4e, f, g).

• *Khi $P=1$ di động trên phần bên phải tiết diện k* (trên kE) ta có:

$đ.a.h.M_k = V_A.2 = 2.\frac{4-z}{4}$;   khi $z=0$: $M_k=2$; khi $z=4$m: $M_k=0$.

$đ.a.h.Q_k = V_A.\cos\alpha = 0{,}8\frac{4-z}{4}$;   khi $z=0$: $Q_k=0{,}8$; khi $z=4$m: $Q_k=0$.

$đ.a.h.N_k = -V_A.\sin\alpha = -0{,}6\frac{4-z}{4}$; khi $z=0$: $N_k=-0{,}6$; khi $z=4$ m: $N_k=0$.

Từ các kết quả trên ta vẽ được các *đường phải* của đ.a.h. nội lực tại k (hình 3.4e, f, g).

Trên hình 3.4e, f, g là các *đ.a.h.M_k; đ.a.h.Q_k* và *đ.a.h.N_k* cần tìm.

2) *Lực di động $P=1$ có phương nằm ngang:*

Trong trường hợp này ta cần chọn đường chuẩn theo trục của các thanh trong khung.

Tương ứng với vị trí bất kỳ của lực $P=1$ cách gốc A một khoảng z, từ hình 3.5a, ta xác định được các thành phần phản lực như sau:

$V_B = -V_A = z/4$.   Suy ra đ.a.h.$V_B = -$đ.a.h.$V_A = z/4$.

$H_A=1$ với mọi z.   Suy ra đ.a.h.$H_A=1$.

Lần lượt cho $P=1$ di động trong từng thanh tức là cho z biến thiên, từ các biểu thức trên ta dễ dàng vẽ được các đ.a.h.V_A, đ.a.h.V_B như trên hình 3.5b và đ.a.h.H_A như trên hình 3.5c.

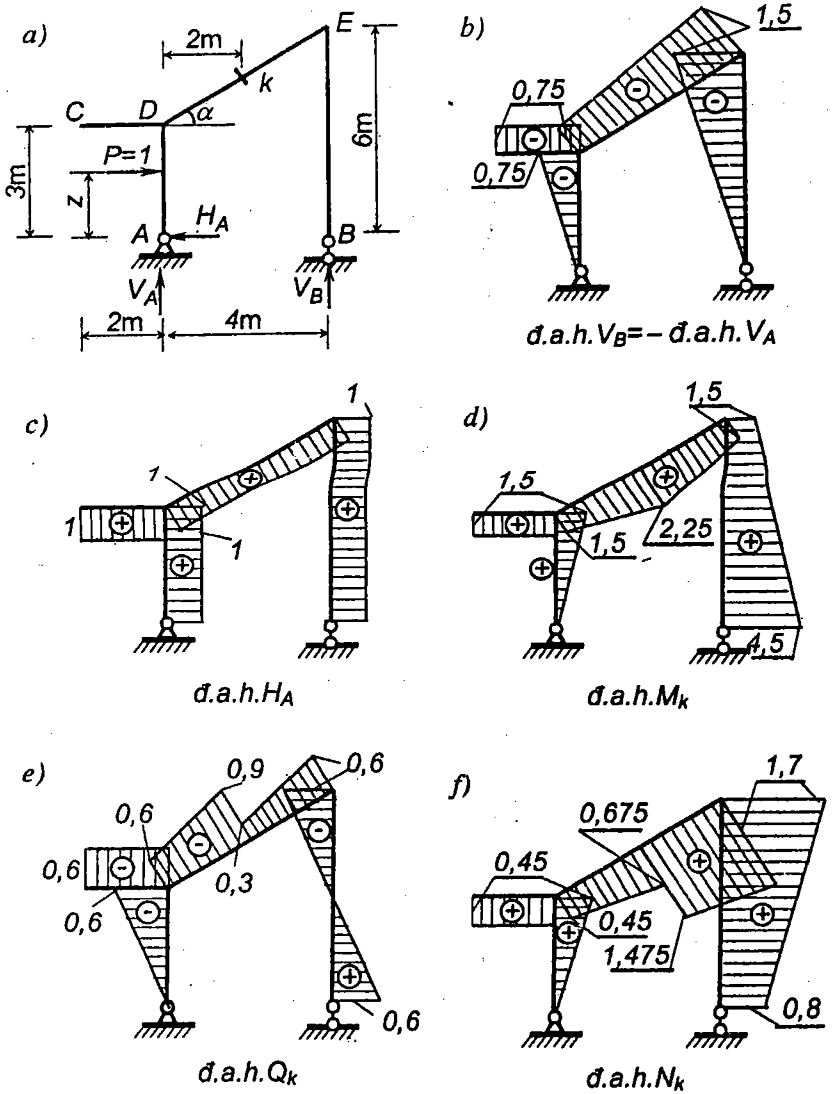
Để vẽ các đ.a.h. nội lực tại k ta cần xét hai trường hợp:

• *Khi $P=1$ di động trên phần bên trái tiết diện k* (trên các đoạn thanh *AD, CD, Dk*) ta có:

$đ.a.h.M_k = (đ.a.h.\ V_B).2 = (z/4).2 = 0{,}5z$;

$đ.a.h.Q_k = -(đ.a.h.V_B).\cos\alpha = -(z/4).0{,}8 = -0{,}2\ z$;

$đ.a.h.N_k = (đ.a.h.V_B).sin\alpha = (z/4)0,6; \; = 0,15\, z.$



Hình 3.5

Lần lượt cho lực $P=1$ di động trên từng đoạn thanh, từ các biểu thức trên ta tìm được các tung độ đ.a.h. tương ứng với các giá trị của z:

Đoạn AD:	Khi $z=0$,	$M_k=0;$	$Q_k=0;$	$N_k=0.$
	Khi $z=3$ m ,	$M_k=1,5;$	$Q_k=-0,6;$	$N_k=0,45.$
Đoạn CD:	Khi $z=3$ m ,	$M_k=1,5;$	$Q_k=-0,6;$	$N_k=0,45.$
Đoạn Dk:	Khi $z=3$ m ,	$M_k=1,5;$	$Q_k=-0,6;$	$N_k=0,45.$
	Khi $z=4,5$ m ,	$M_k=2,25;$	$Q_k=-0,9;$	$N_k=0,675.$

Từ các kết quả trên ta vẽ được các *đường trái* của đ.a.h. nội lực tại k (hình 3.5d, e, f).

- *Khi $P=1$ di động trên phần bên phải tiết diện k* (trên các đoạn thanh kE, EB) ta có:

$đ.a.h.M_k = (đ.a.h.V_A).2 + (đ.a.h.H_A).4,5 = (-z/4).2 + 4,5 = -0,5z + 4,5;$

$đ.a.h.Q_k = (đ.a.h.V_A).cos\alpha + (đ.a.h.H_A).sin\alpha =$

$= (-z/4).0,8 + 1.0,6 = -0,2z + 0,6;$

$đ.a.h.N_k = -(đ.a.h.V_A).sin\alpha + (đ.a.h.H_A).cos\alpha =$

$= -(-z/4).0,6 + 1.0,8 = 0,15\, z + 0,8.$

Lần lượt cho lực $P=1$ di động trên từng đoạn thanh, từ các biểu thức trên ta tìm được các tung độ đường ảnh hưởng tương ứng với các giá trị khác nhau của z:

Đoạn kE:	Khi $z=4,5$ m ,	$M_k=2,25;$	$Q_k=-0,3;$	$N_k=1,475.$
	Khi $z=6$ m,	$M_k=1,5;$	$Q_k=-0,6;$	$N_k=1,7.$
Đoạn EB:	Khi $z=6$ m ,	$M_k=1,5;$	$Q_k=-0,6;$	$N_k=1,7.$
	Khi $z=0$,	$M_k=4,5;$	$Q_k=0,6;$	$N_k=0,8.$

Từ các kết quả trên ta vẽ được các *đường phải* của đ.a.h. nội lực tại k (hình 3.5d, e, f).

Trên hình 3.5d, e, f là các *$đ.a.h.M_k$; $đ.a.h.Q_k$* và *$đ.a.h.N_k$* cần tìm.

3.3. Đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực

Cách vẽ đường ảnh hưởng phản lực và nội lực trong hệ có hệ thống truyền lực được xây dựng trên nguyên tắc so sánh sự làm việc giữa hệ không có hệ thống truyền lực với hệ có hệ thống truyền lực khi chịu tải trọng $P=1$ di động trên hệ thống truyền lực.

Để vẽ *đ.a.h. S* khi đại lượng S thuộc hệ chịu lực chính là một kết cấu bất kỳ (có thể là dầm, khung, dàn, hệ ba khớp, hệ ghép...) ta tiến hành theo thứ tự như sau:

1) Vẽ đ.a.h. S với giả thiết hệ không có hệ thống truyền lực tức là coi tải *trọng P=1 di động trực tiếp trên hệ chịu lực chính.*

Song thực ra hệ có hệ thống truyền lực cho nên ta cần phải sửa lại kết quả vừa tìm được. Cách sửa lại sẽ được đề cập đến trong các bước tiếp sau.

2) *Giữ lại các tung độ đ.a.h S (vừa tìm được ở bước 1) ứng dưới các mắt truyền lực, các tung độ này chính là các tung độ đ.a.h. S khi có hệ thống truyền lực.*

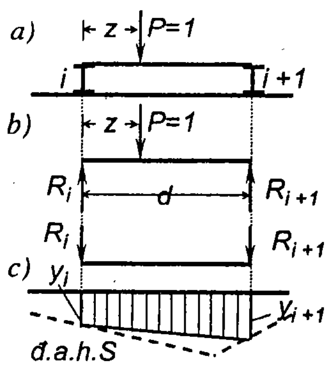
Thật vậy, theo ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng, các tung độ này biểu thị đại lượng S khi tải trọng $P=1$ đặt ngay tại mắt truyền lực tương ứng. Nhưng khi $P=1$ đặt đúng tại mắt truyền lực thì thực chất là nó đặt trực tiếp vào kết cấu chính nên các tung độ này đồng thời cũng là các tung độ *đ.a.h.* S khi có hệ thống truyền lực.

Đặc biệt khi tải trọng $P=1$ ở tại mắt đặt trên trái đất thì lực $P=1$ sẽ truyền trực tiếp vào trái đất, không gây ảnh hưởng xuống hệ chịu lực chính cho nên ứng với các vị trí này tung độ đường ảnh hưởng có giá trị bằng không.

3) *Lần lượt nối các tung độ vừa giữ lại ở trên với nhau bằng các đoạn thẳng nối trong phạm vi từng đốt.*

Để xác nhận điều sửa đổi này là đúng ta cần chứng minh là khi $P=1$ di động trong phạm vi một đốt, *đ.a.h.* S sẽ có quy luật bậc nhất và đi qua hai tung độ ứng dưới mắt trái và mắt phải của đốt đang xét.

Xét một đốt bất kỳ nằm giữa mắt i và $i+1$ trong hệ có hệ thống truyền lực (hình 3.6a).



Hình 3.6

Giả sử *đ.a.h.* S ứng với trường hợp hệ không có hệ thống truyền lực là đường đứt nét trên hình 3.6c, các tung độ y_i và y_{i+1} là các tung độ được giữ lại ứng dưới mắt truyền lực i và $(i+1)$.

Lực $P=1$ di động trên đốt sẽ truyền xuống hệ chịu lực chính qua hai áp lực R_i và R_{i+1} được xác định như sau (hình 3.6b):

$$R_i = \frac{d-z}{d}\ ; \qquad R_{i+1} = \frac{z}{d}.$$

Hai áp lực R_i và R_{i+1} thay thế cho tác dụng của lực $P=1$ sẽ gây ảnh hưởng đến đại lượng S trong hệ chịu lực chính. Xuất phát từ ý nghĩa của tung độ

đ.a.h. S và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể biểu thị ảnh hưởng của R_i và R_{i+1} đến đại lượng S như sau

$$S = R_i\, y_i + R_{i+1}\, y_{i+1} \qquad \text{hay} \quad S = \frac{d-z}{d}\, y_i + \frac{z}{d}\, y_{i+1}.$$

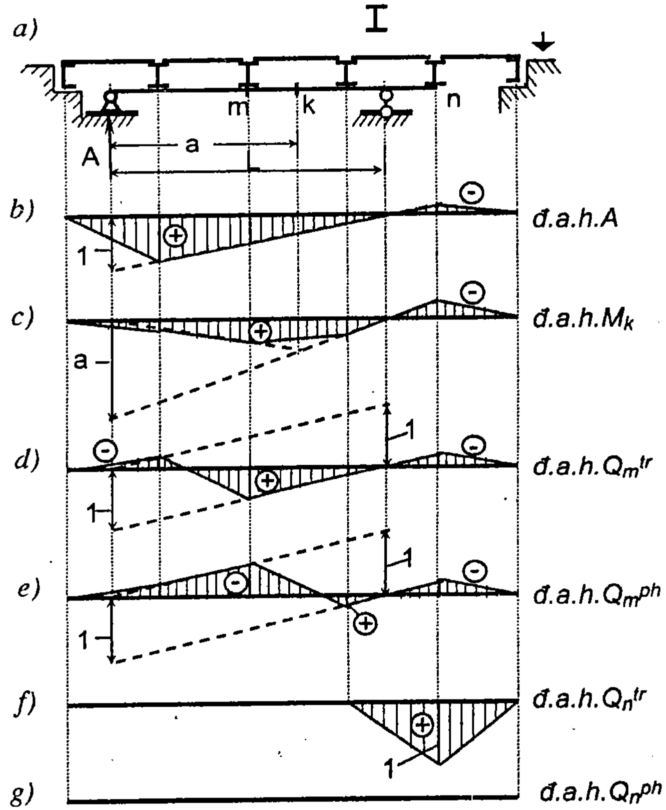
Đó là phương trình *đ.a.h.* S khi $P=1$ di động trên đốt i, $(i+1)$. Phương trình này có dạng bậc nhất nên *đ.a.h.* S có dạng đường thẳng và đi qua hai tung độ y_i, y_{i+1}.

Thật vậy, khi $z = 0$ ta có $S = y_i$; khi $z = d$ ta có $S = y_{i+1}$.

Đó là điều cần chứng minh.

Ví dụ 3.3. Cho hệ như trên hình 3.7a. Khi lực di động thẳng đứng $P=1$ hướng từ trên xuống dưới, vẽ các đường ảnh hưởng: phản lực A; mômen uốn tại k; lực cắt tại m và tại n.

Hình 3.7



Sau khi thực hiện theo thứ tự nêu trên, ta tìm được *đ.a.h. A* và *đ.a.h.* M_k như trên hình 3.7b, c.

Các tiết diện *m* và *n* ở dưới mắt truyền lực là nơi có áp lực tập trung nên lực cắt tại các tiết diện ở hai bên mắt truyền lực sẽ có giá trị khác nhau. Do đó cần vẽ hai đường ảnh hưởng lực cắt tương ứng với hai tiết diện ở hai bên mắt truyền lực.

✣ *Đối với tiết diện m :* Sau khi vẽ đường ảnh hưởng Q_m với giả thiết lực $P=1$ đặt trực tiếp trên hệ chịu lực chính, khi giữ lại tung độ ứng dưới mắt *m* ta cần thực hiện như sau:

- *Đ.a.h.* Q_m^{tr}*:* lúc này mắt truyền lực ở bên phải tiết diện khảo sát nên cần giữ lại tung độ bên phải. Kết quả như trên hình 3.7d.
- *Đ.a.h.* Q_m^{ph}*:* lúc này mắt truyền lực ở bên trái tiết diện khảo sát nên cần giữ lại tung độ bên trái. Kết quả như trên hình 3.7e.

✣ *Đối với tiết diện n :* Sau khi vẽ đường ảnh hưởng Q_n với giả thiết lực $P=1$ đặt trực tiếp trên hệ chịu lực chính (đ.a.h. chỉ có một tung độ bằng -1 ứng dưới tiết diện *n*), khi giữ lại tung độ ứng dưới mắt *n* ta cũng thực hiện tương tự như trường hợp tiết diện *m.* Kết quả tìm được như trên hình 3.7f và g.

3.4. Đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp

A. Đường ảnh hưởng phản lực

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực trong hệ ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng $P=1$ di động mà không trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của các phản lực toàn phần *A* và *B* vì vẽ các *đường ảnh hưởng đó vừa khó khăn vừa không cần thiết.*

1. Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực V_A^d và V_B^d

Khi trên hệ ba khớp có tải trọng thẳng đứng $P=1$ di động với vị trí được xác định theo hoành độ *z* , ta tìm được biểu thức giải tích của đường ảnh hưởng V_A^d và V_B^d từ các điều kiện cân bằng:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow đ.a.h.V_A^d = (l-z)/l.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow đ.a.h.\ V_B^d = z/l.$$

Lần lượt cho hoành độ *z* hai giá trị khác nhau ta sẽ vẽ được đ.a.h các thành phần phản lực này như trên hình 3.8b và c. Ta thấy các đ.a.h. V_A^d và V_B^d hoàn toàn giống như các đ.a.h phản lực trong dầm tương ứng.

2. Đường ảnh hưởng lực xô *H*

Theo (2.5), biểu thức giải tích của mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ trong vòm khi chịu tải trọng thẳng đứng là:

$$M_k(z) = M_k^d(z) - H\,y_k.$$

Áp dụng công thức này cho tiết diện ở khớp *C* của vòm, ta có:

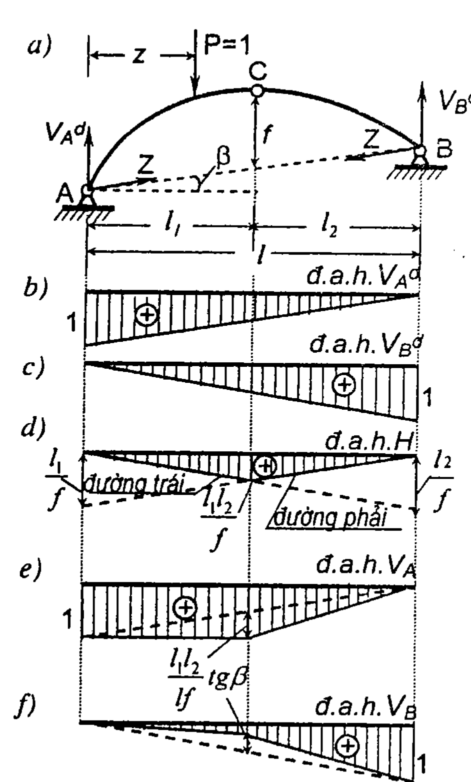
$$M_C = M_C^d - H\,y_C\,,$$

vì $y_C = f$ nên $H = M_C^d / f$

Khi lực $P=1$ di động trên vòm, tung độ *f* là hằng lượng còn đại lượng M_C^d và *H* biến đổi nên ta có thể viết:

$$đ.a.h.H = \frac{1}{f}\,đ.a.h.M_C^d. \quad (3.1)$$

Như vậy, *ta vẽ đường ảnh hưởng lực xô H bằng cách vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn trong dầm tương ứng tại vị trí khớp C, rồi chia cho hằng lượng f.*



Hình 3.8

Đường ảnh hưởng *H* như trên hình 3.8d.

3. Đường ảnh hưởng lực vòm Z

Khi lực thẳng đứng $P=1$ di động trên hệ ba khớp ta có đẳng thức:

$$H = Z\cos\beta.$$

Do đó
$$đ.a.h.\ Z = \frac{1}{\cos\beta}(đ.a.h.H). \quad (3.2)$$

Như vậy, *ta vẽ được đường ảnh hưởng Z bằng cách lấy đường ảnh hưởng H chia cho hằng lượng cosβ.*

4. Đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực đứng V_A và V_B

Các công thức (2.4) vẫn đúng khi tải trọng thẳng đứng $P=1$ ở bất kỳ vị trí nào trên hệ ba khớp:

$$V_A = V_A^d + H\,tg\beta; \qquad V_B = V_B^d - H\,tg\beta.$$

Khi $P=1$ di động, đại lượng $tg\beta$ không thay đổi, còn các đại lượng khác đều thay đổi cho nên ta có thể viết:

$$đ.a.h.V_A = đ.a.h.V_A^d + (đ.a.h.H)\,tg\beta;$$

$$đ.a.h.V_B = đ.a.h.V_B^d - (đ.a.h.H)\,tg\beta. \qquad (3.3)$$

Như vậy, *để vẽ đường ảnh hưởng V_A (hoặc V_B) ta lấy đường ảnh hưởng V_A^d (hoặc V_B^d) cộng (hoặc trừ) với đường ảnh hưởng H đã nhân với $tg\beta$.*

Các $đ.a.h.V_A$ và $đ.a.h.V_B$ vẽ trên hình 3.8e, f.

B. Đường ảnh hưởng nội lực

Cũng lý luận như trên, ta vẽ được các đường ảnh hưởng nội lực theo những công thức suy ra từ các công thức (2.5), (2.6) và (2.7):

$$đ.a.h.\ M_k = đ.a.h.\ M_k^d - (đ.a.h.\ H)\,y_k;$$

$$đ.a.h.\ Q_k = (đ.a.h.\ Q_k^d)\cos\alpha_k - (đ.a.h.H)(\sin\alpha_k - tg\beta\cos\alpha_k); \quad (3.4)$$

$$đ.a.h.N_k = -(đ.a.h.\ Q_k^d)\sin\alpha_k - (đ.a.h.H)(\cos\alpha_k + tg\beta\sin\alpha_k).$$

1. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k

Từ công thức (3.4):

$$đ.a.h.\ M_k = đ.a.h.\ M_k^d - (đ.a.h.\ H)\,y_k.$$

Như vậy, *để vẽ đ.a.h. M_k trong hệ ba khớp (hình 3.9a) ta cần lấy đ.a.h. M_k^d (hình 3.9b) của dầm đơn giản tương ứng trừ đi đ.a.h. H đã được nhân với hằng lượng y_k (hình 3.9c).*

Thực hiện phép trừ bằng cách đặt chồng hai đ.a.h. đó lên nhau, phần gạch gạch trên hình 3.9d chính là kết quả cần tìm. Đem các tung độ kết quả đặt lên đường chuẩn ta có *đ.a.h. M_k* như trên hình 3.9e.

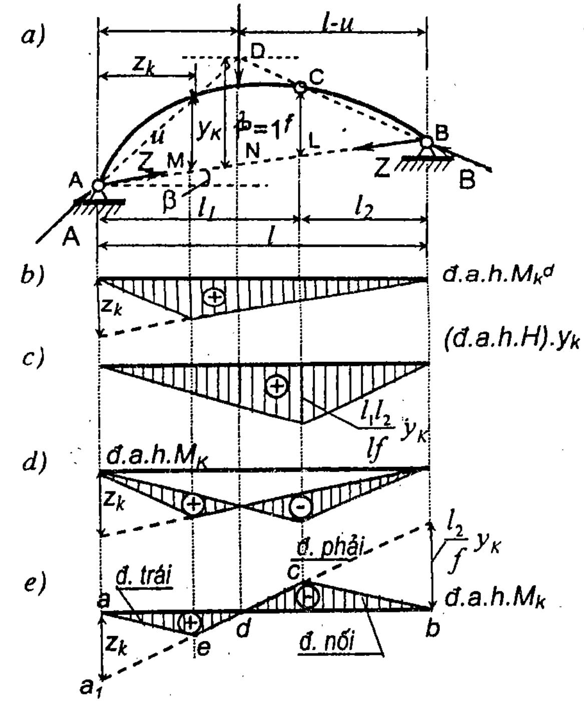
Cách làm như vậy thường tốn khá nhiều thời gian cho nên ở đây ta đặt vấn đề tìm một cách vẽ thực hành nhanh chóng.

Từ kết quả vẽ trên hình 3.9 ta có các nhận xét được dùng để làm cơ sở cho cách vẽ thực hành.

1) Phần *ae* của *đ.a.h.M_k* gọi là *đường trái* ứng với trường hợp *P* di động trên phần bên trái tiết diện *k*. Phần *ec* của *đ.a.h.M_k* gọi là *đường phải* ứng với trường hợp lực *P* di động trên phần bên phải tiết diện *k*, từ *k*

đến khớp *C*. Phần *cb* của *đ.a.h.M_k* gọi là *đường nối* ứng với khi *P* di động trên phần *CB*.

Ta thấy: nếu vẽ được đường phải thì sẽ tìm được toàn bộ *đ.a.h. M_k*, bởi vì đường trái *ae* đi qua điểm *a* có tung độ bằng không ứng dưới gối *A* và đi qua điểm *e* nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện *k*; đường nối đi qua điểm *b* có tung độ bằng không ứng dưới gối *B* và đi qua điểm *c* nằm trên đường phải ứng dưới khớp *C*.



Hình 3.9

Đường phải được xác định theo hai điểm: điểm a_1 với tung độ $aa_1 = z_k$ và điểm không *d* nằm trên đường chuẩn. Điểm a_1 tìm được dễ dàng, chỉ cần phải tìm điểm không *d*.

2) Điểm không *d* của đường phải là điểm ứng dưới vị trí tải trọng $P=1$ sao cho mômen uốn $M_k = 0$. Nó chính là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm *D* của đường *Ak* và đường *BC*.

Thật vậy, khi $P=1$ đặt tại điểm *D* thì phản lực *B* có phương *BCD*, còn phản lực *A* có phương *AD* đi qua trọng tâm của tiết diện *k*. Do đó, khi $P=1$ đặt tại điểm *D* thì mômen uốn tại tiết diện *k* được xác định theo phản lực *A* đi qua *k* nên có giá trị bằng không. Như vậy điểm không *d* nằm trên đường chuẩn của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm *D* của đường *BC* và đường *Ak*.

Đó là điều cần chứng minh.

Hai nhận xét trên cho phép ta suy ra cách vẽ thực hành đường ảnh hưởng mômen uốn tại một tiết diện k nằm ở phần bên trái vòm như sau:

1) Xác định điểm không d của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm của đường BC và đường Ak.

2) Dưới gối trái A, dựng đoạn $aa_1 = z_k$. Nối điểm a_1 với điểm không d sẽ được đường phải ec (e là điểm nằm trên đường phải ứng dưới tiết diện k còn c là điểm nằm trên đường phải ứng dưới khớp C).

3) Nối a với e, được đường trái ae.

4) Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, được đường nối cb.

Đường gãy khúc aecb là đ.a.h. M_K cần tìm.

Chú thích :

✣ Từ hình 3.9 ta thấy tam giác *ADN* đồng dạng với tam giác *AkM*; tam giác *BDN* đồng dạng với tam giác *BCL*, ta tính được :

$$\lambda = \frac{y_k}{z_k}u \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{l_2}(l-u), \quad \text{do đó} \quad \lambda = \frac{y_k}{z_k}u = \frac{f}{l_2}(l-u)$$

với *u* là khoảng cách theo phương nằm ngang từ gối tựa trái đến điểm không *d*.

Suy ra:
$$u = \frac{fl}{l_2(y_k/z_k)+f}. \qquad (3.5)$$

Từ công thức này ta xác định được vị trí của điểm không *d* bằng giải tích.

✣ Nhận xét 2) trong 3.2.B.1 cũng nghiệm đúng đối với đ.a.h.M_k trong hệ ba khớp.

✣ Trường hợp tiết diện *k* ở phần miếng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ *đ.a.h.M_K* cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện *k* về phần bên trái.

2. Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện *k*

Theo (3.4):

$$đ.a.h.\ Q_k = (đ.a.h.\ Q_k{}^d)\cos\alpha_k - (đ.a.h.H)(\sin\alpha_k - tg\beta\cos\alpha_k).$$

Như vậy, *để vẽ đ.a.h. Q_K trong hệ ba khớp (hình 3.10a) ta cần nhân đ.a.h. $Q_K{}^d$ của dầm đơn giản tương ứng với $\cos\alpha_K$ (hình 3.10b) rồi trừ đi đ.a.h.H đã được nhân với hằng lượng ($\sin\alpha_K$ - $tg\beta\cos\alpha_K$) (hình 3.10c).*

Quá trình thực hiện được trình bày trên hình 3.10.

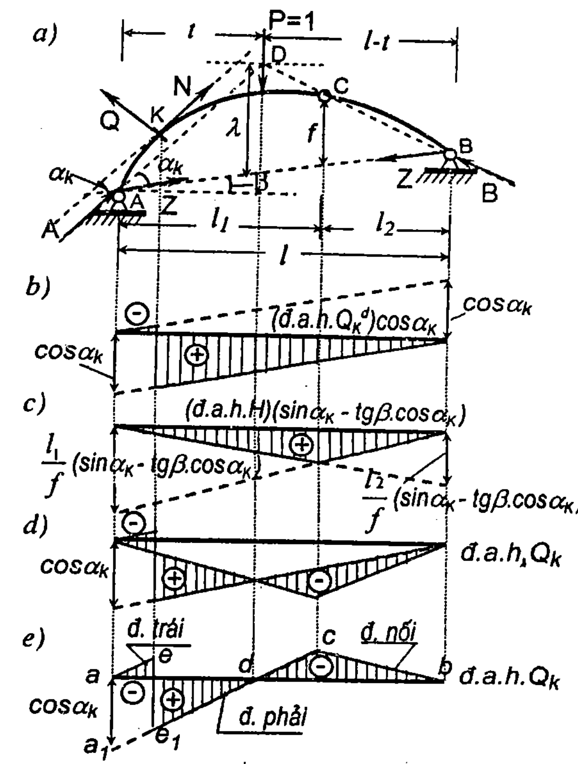
Từ hình 3.10 ta thấy *đ.a.h. Q_k* gồm ba đoạn thẳng: đoạn *ae* ở bên trái tiết diện *k*, đoạn e_1c ở bên phải tiết diện *k* và đoạn nối *bc*. Đoạn thẳng e_1c đi qua điểm a_1 với $aa_1=\cos\alpha_k$ và qua điểm không *d*. Điểm không *d* chính là

điểm ứng dưới vị trí của tải trọng $P=1$ di động từ *k* đến *C* để sao cho lực cắt Q_k bằng không, nghĩa là sao cho hợp lực ở bên trái tiết diện *k* (phản lực *A*) song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện *k*.

Vị trí đó của tải trọng $P=1$ chính là giao điểm của đường *AD* song song với tiếp tuyến của trục vòm tại tiết diện *k* và đường *BC* đi qua hai khớp *B* và *C*.

Do đó ta suy ra cách vẽ thực hành *đ.a.h. Q_k* đối với tiết diện thuộc phần bên trái của vòm theo thứ tự như sau:

1) Xác định điểm không d của đường phải là điểm ứng dưới giao điểm D của hai đường: đường BC và đường AD là đường kẻ từ A song song với tiếp tuyến của trục vòm tại k.



Hình 3.10

2) Dưới gối trái A dựng tung độ $aa_1 = \cos\alpha_k$. Nối a_1 với d sẽ được đoạn phải e_1c của đ.a.h.Q_k, đoạn này tương ứng với trường hợp P =1 di động trên phần kC.

3) Từ điểm a kẻ đường thẳng song song với a_1 d. Đường dóng thẳng đứng kẻ từ tiết diện k cắt đường vừa vẽ tại điểm e. Đoạn ae là đường trái của đ.a.h.Q_k. Ứng dưới tiết diện k, đ.a.h.Q_k có bước nhảy bằng $\cos\alpha_k$.

4) Từ khớp C kẻ đường dóng thẳng đứng, cắt đường phải tại c. Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, được đoạn nối cb.

Đường aee_1cb là đ.a.h.Q_k.

Chú thích:

- Cũng có thể xác định vị trí của điểm không d bằng công thức giải tích. Từ hình (3.10) ta có:

$$\lambda = t\,(tg\alpha_k - tg\beta) \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{f}{l_2}(l-t), \quad \text{do đó} \quad t\,(tg\alpha_k - tg\beta) = \frac{f}{l_2}(l-t).$$

Suy ra
$$t = \frac{fl}{l_2(tg\alpha_k - tg\beta) + f}, \qquad (3.6)$$

t là khoảng cách theo phương ngang từ điểm không d đến gối trái A.

- Trường hợp tiết diện k ở phần miếng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ đ.a.h.Q_k cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện k về phần miếng cứng bên trái song cần đổi dấu.

3. Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện k

Theo (3.4):

$$đ.a.h.N_k = -(đ.a.h.\ Q_k{}^d)\sin\alpha_k - (đ.a.h.H)(\cos\alpha_k + tg\beta\sin\alpha_k).$$

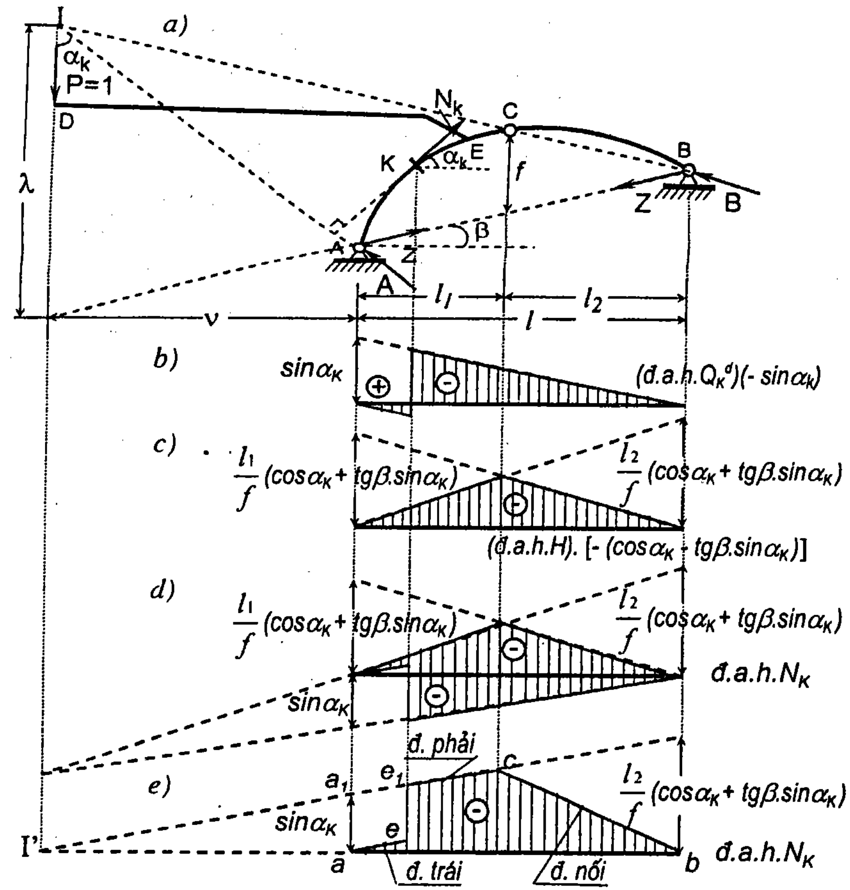
Như vậy, *để vẽ đ.a.h. N_k trong hệ ba khớp (hình 3.11a) ta cần nhân đ.a.h. $Q_k{}^d$ của dầm đơn giản tương ứng với $-\sin\alpha_k$ (hình 3.11b) rồi cộng với đ.a.h.H đã nhân với hằng lượng $-(\cos\alpha_k + tg\beta\sin\alpha_k)$ (hình 3.11c).*

Phép cộng này được thực hiện trên hình 3.11d và được kết quả như trên hình 3.11e.

Từ hình vẽ ta thấy *đ.a.h.N_k* gồm ba đoạn thẳng: đường trái *ae*, đường phải e_1c và đường nối *cb*.

Vị trí của đường phải được xác định bằng điểm a_1 và điểm không I'. Để tìm điểm a_1, từ điểm không a ứng dưới gối trái ta dựng tung độ $aa_1 = \sin\alpha_k$. Điểm I' của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm I của đường BC và đường AI kẻ từ A vuông góc với tiếp tuyến tại k của vòm.

Thật vậy, điểm không I' là điểm ứng dưới một vị trí của điểm đặt lực $P=1$ khi lực này di động trên đoạn kC để sao cho lực dọc N_k tại tiết diện k bằng không. Khi $P=1$ di động trên đoạn kC thì phản lực B có phương BC, lúc đó thực hiện mặt cắt qua tiết diện k ta sẽ thấy hợp lực bên trái tiết diện chỉ là phản lực A; chính phản lực này gây ra lực dọc N_k bằng thành phần chiếu của lực A lên phương tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k.



Hình 3.11

Muốn cho lực dọc N_k bằng không thì tải trọng $P=1$ ở trên đoạn vòm kC phải có vị trí sao cho phản lực A vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại k, nghĩa là phải có phương AI. Vì hệ ở trong trạng thái cân bằng nên ba lực $P=1$, A, B phải đồng quy, do đó lực $P=1$ có vị trí trên đoạn kC sao cho nó đi qua giao điểm I của phản lực B và phản lực A. Nhưng điểm đặt I của tải trọng $P=1$ như trên hình 3.11 có thể ở ngoài phần kC. Nếu tưởng tượng điểm I được gắn với phần kC của hệ bằng thanh DE thì có thể xem như lực $P=1$ trực tiếp tác dụng trên đoạn kC và giá trị lực dọc N_k tương ứng tại tiết diện k sẽ phải bằng không. Lúc đó, ứng dưới điểm I sẽ là điểm không l' của đường phải e_1c.

Từ nhận xét trên ta suy ra cách vẽ thực hành *đ.a.h.*N_k theo thứ tự như sau:

1) Xác định điểm không l' của đường phải. Điểm này là điểm ứng dưới giao điểm I của đường BC và đường AI đi qua A vuông góc với tiếp tuyến của trục vòm tại k.

2) Từ a đặt tung độ $aa_1 = \sin\alpha_k$, nối a_1 với l' sẽ được đường phải e_1c của đ.a.h.N_k ứng với trường hợp P=1 di động trên đoạn kC.

3) Từ a kẻ đường trái ae song song với e_1c. Dưới tiết diện k, đ.a.h.N_k có bước nhảy bằng $\sin\alpha_k$.

4) Nối c với điểm b nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, được đường nối cb.

Đường gãy khúc aee_1cb là đ.a.h.N_k của hệ ba khớp.

Chú thích :

✤ Từ hình 3.11a ta có :

$\lambda = v(tg\beta + cotg\alpha_k)$ và $\lambda = \frac{f}{l_2}(l+v)$, do đó $v(tg\beta + cotg\alpha_k) = \frac{f}{l_2}(l+v)$.

v là khoảng cách theo phương nằm ngang từ điểm không l' đến gối trái A.

Từ đó ta suy ra công thức giải tích để xác định vị trí điểm l' như sau

$$v = \frac{fl}{l_2(tg\beta + cotg\alpha_k) - f}. \tag{3.7}$$

✤ Trường hợp tiết diện k ở phần miếng cứng bên phải, nguyên tắc thực hiện cũng tương tự. Khi vẽ *đ.a.h.*N_k cũng có thể quan sát hệ từ phía sau để chuyển tiết diện k về miếng cứng bên trái.

C. Đường ảnh hưởng trong hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp

Ở trên, ta đã nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp khi ba khớp A, B, C đều là các khớp thực. Có thể mở rộng cách vẽ cho những hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp trong đó các khớp A, B, C có thể là khớp thực hoặc khớp giả.

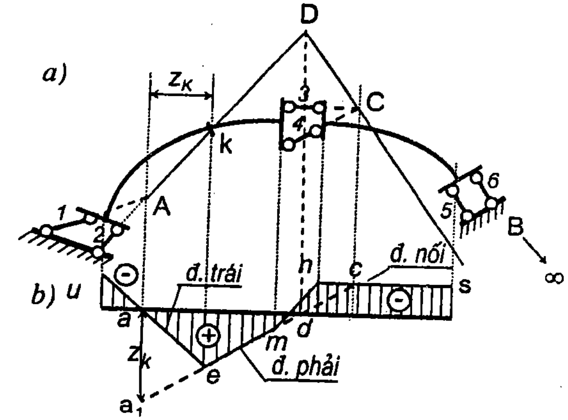
Giả sử xét hệ cho trên hình 3.10a. Hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng hai thanh *3* và *4* cắt nhau tại C tạo thành khớp giả C. Miếng cứng bên trái nối với trái đất bằng hai thanh *1* và *2* cắt nhau tại A tạo thành khớp giả A. Miếng cứng bên phải nối với trái đất bằng hai thanh *5* và *6* song song với nhau tạo thành khớp giả B ở xa vô cùng theo phương song song với các

thanh *5*, *6*. Như vậy, hệ đã cho làm việc tương tự như hệ ba khớp với các khớp A, B, C có vị trí đã xác định ở trên.

Để vẽ đường ảnh hưởng trong hệ này ta có thể áp dụng cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp đã biết song cần thực hiện tương ứng với ba khớp giả.

Ví dụ, vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện k.

Áp dụng cách vẽ thực hành đã nêu ở trên cho trường hợp này, ta cần thực hiện các bước sau (hình 3.12a và b):



Hình 3.12

1) Xác định điểm không d của đường phải là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới giao điểm D của đường Ak và BC. Trong trường hợp này khớp B nằm ở xa vô cùng theo phương song song với các thanh *5* và *6* nên đường BC chính là đường kẻ từ C song song với các thanh *5* và *6*.

2) Ứng dưới gối trái A, đặt đoạn $aa_1 = z_k$. Nối a_1 với điểm không d ta được *đường phải*. Trong trường hợp này phần thích dụng của đường phải là đoạn *em* với e là điểm ứng dưới tiết diện k; còn m là điểm ứng dưới đầu phải của phần phải thuộc miếng cứng bên trái.

3) Nối a với e ta được *đường trái*.

Trong trường hợp này phần thích dụng của đường trái là đoạn thẳng *uae* với u là điểm ứng dưới đầu trái của miếng cứng bên trái.

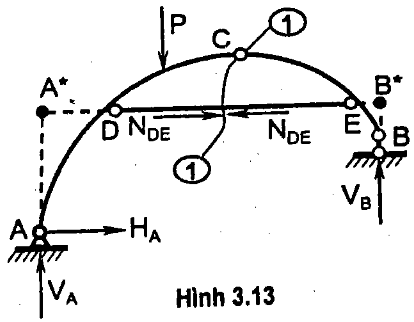
4) Nối điểm c với điểm b, c là điểm nằm trên đường phải ứng dưới khớp C còn b là điểm nằm trên đường chuẩn ứng dưới gối B, ta sẽ được *đường nối*. Trong trường hợp này gối B ở xa vô cùng nên đường nối chính là đường kẻ từ c song song với đường chuẩn. Đoạn nối tương ứng với khi $P=1$ di động trên miếng cứng bên phải nên phần thích dụng của đường này là đoạn *ns*.

5) Khi $P=1$ di động trên thanh *3*, theo nguyên tắc hệ thống truyền lực, đường ảnh hưởng là đoạn *mn*.

Như vậy, đường gãy khúc *uemns* là *đ.a.h.* M_k cần tìm (hình 3.12b).

Ta khảo sát thêm một trường hợp khác hay gặp trong thực tế là bài toán hệ ba khớp có thanh căng như trên hình 3.13.

Đối với trường hợp này ta có thể xác định hoặc vẽ các đ.a.h. phản lực và nội lực như sau:



Hình 3.13

✦ Các phản lực hoặc đ.a.h. phản lực V_A, V_B, H_A được xác định giống như các phản lực trong dầm.

✦ Lực căng N_{DE} trong thanh căng được xác định bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1 qua khớp *C* và thanh *DE* rồi khảo sát cân bằng của một phần hệ. Đ.a.h. lực dọc trong thanh căng được vẽ như đ.a.h. lực xô trong hệ ba khớp A^*CB^*.

✦ Nội lực hoặc đ.a.h. nội lực tại các tiết diện trên đoạn *AD* và *EB* được xác định như trong dầm vì lúc này lực căng N_{DE} không tham gia trong các phương trình dùng để xác định các đại lượng đó.

✦ Nội lực hoặc đ.a.h. nội lực tại các tiết diện trên đoạn *DCE* được xác định như trong hệ ba khớp với các khớp tương ứng là A^*CB^*.

Trên cơ sở những khái niệm mở rộng vừa trình bày ở trên ta có thể vận dụng linh hoạt để giải các bài toán khác có cấu tạo tương tự như hệ ba khớp.

3.5. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm

A. Đường ảnh hưởng phản lực

Ta nghiên cứu cách vẽ đ.a.h. phản lực trong hệ dàn dầm qua trường hợp hệ dàn có đầu thừa trên hình 3.14a. Cũng tương tự như trong dầm, ta xác định vị trí của tải trọng di động $P=1$ theo tọa độ chạy z từ gối tựa trái, tiếp đó tìm phản lực *A* và *B* tương ứng với vị trí tải trọng đó, ta có:

$$\Sigma M_B = Al - P(l-z) = 0; \qquad \Sigma M_A = Bl - Pz = 0 .$$

Suy ra $\qquad$ *đ.a.h.* $A = \dfrac{l-z}{l}$; $\qquad$ *đ.a.h.* $B = \dfrac{z}{l}$.

Vẽ đồ thị biến thiên của hai đại lượng trên theo z, ta sẽ được *đ.a.h.A* và

đ.a.h.B như trên hình 3.14b và c. Những đ.a.h. này có dạng giống như đ.a.h. phản lực trong hệ dầm.

B. Đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh

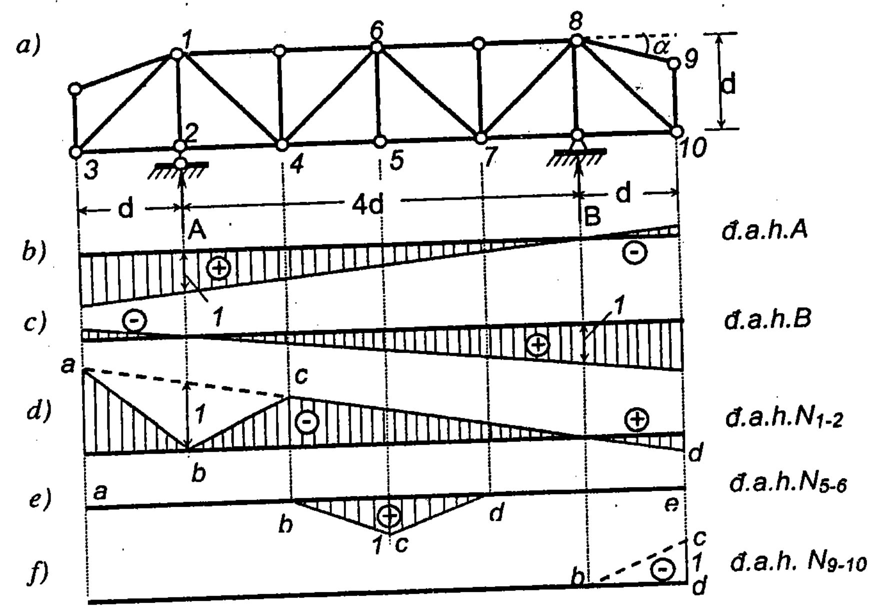
Có thể sử dụng các phương pháp đã trình bày trong 2.3 để vẽ đ.a.h. nội lực trong các thanh dàn.

1. Phương pháp tách mắt

Khi sử dụng phương pháp tách mắt để vẽ đ.a.h. ta lần lượt xét các vị trí của tải trọng như sau:

- Khi $P=1$ đặt ngay tại mắt bị tách.
- Khi $P=1$ di động ngoài các đốt bị cắt.
- Khi $P=1$ di động trên các đốt bị cắt.

Để thấy rõ cách vận dụng phương pháp, ta xét một số ví dụ cụ thể đối với dàn trên hình 3.14a.



Hình 3.14

✦ *Đường ảnh hưởng* N_{1-2}. Tách mắt 2 (hình 3.14a)

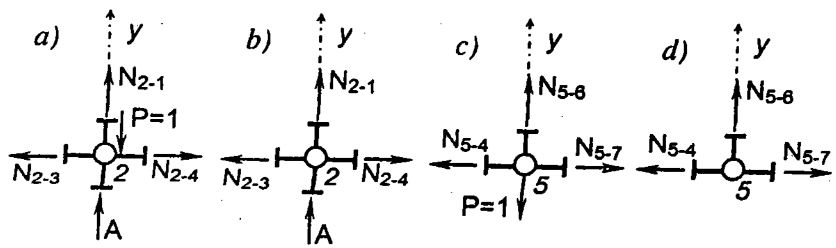
- Khi $P=1$ đặt ngay tại mắt 2 (hình 3.15a):

Từ phương trình hình chiếu theo phương *1-2* ta có:

$\Sigma Y = N_{1\text{-}2} - 1 + A = 0$. Suy ra: $N_{1\text{-}2} = -A + 1$.

Nhưng tại điểm này phản lực $A = +1$, nên $N_{1\text{-}2} = 0$.

Tung độ của *đ.a.h.* $N_{1\text{-}2}$ tại điểm này bằng không (điểm *b* trên hình 3.15d).



Hình 3.15

- Khi *P=1* di động ở ngoài các đốt bị cắt *3-2* và *2-4*:

  Mắt *2* chịu tác dụng của các lực như trên hình 3.15b. Từ phương trình hình chiếu $\Sigma Y = N_{1\text{-}2} + A = 0$ ta được $N_{1\text{-}2} = -A = -(l-z)/l$.

  Đường biểu diễn của phương trình này là đường *acd* trên hình 3.14d. Phần thích dụng của đường này bao gồm điểm *a* là điểm ứng dưới mắt *3* và đoạn *cd* là đoạn ứng dưới các mắt $4 \div 10$ vì phương trình này chỉ thích nghi khi lực *P=1* di động ở ngoài hai đốt *3-2* và *2-4*.

- Khi *P=1* di động trên các đốt bị cắt *3-2* và *2-4*

  Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền các tung độ đ.a.h. ứng dưới các mắt.

  - Khi *P=1* di động trên đốt *3-2*, đ.a.h. tương ứng là đoạn *ab*.

  - Khi *P=1* di động trên đốt *2-4*, đ.a.h. tương ứng là đoạn *bc*.

Toàn bộ *đ.a.h.*$N_{1\text{-}2}$ là đường gãy khúc *abcd* trên hình 3.14d.

✦ *Đường ảnh hưởng* $N_{5\text{-}6}$. Tách mắt *5* (hình 3.14a)

- Khi *P=1* đặt tại mắt *5* (hình 3.16c)

  Từ phương trình cân bằng: $\Sigma Y = N_{5\text{-}6} - 1 = 0$, ta được $N_{5\text{-}6} = 1$.

  Tung độ của đ.a.h.$N_{5\text{-}6}$ tại mắt này bằng *+1* (điểm *c* trên hình 3.14e).

- Khi *P=1* di động ở ngoài các đốt bị cắt *4-5* và *5-7*(hình 3.15d)

Từ phương trình hình chiếu $\Sigma Y = N_{5\text{-}6} = 0$ ta được $N_{5\text{-}6} = 0$.

Đường biểu diễn của phương trình này là đường thẳng trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng của đường này bao gồm hai đoạn *ab* và *de* (hình 3.14e)

- *Khi P=1* di động trên các đốt *4-5* và *5-7*, theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong những đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới các mắt của mỗi đốt.

  - Khi *P =1* di động trên đốt *4-5*, đ.a.h. tương ứng là đoạn *bc*.

  - Khi *P =1* di động trên đốt *5-7*, đ.a.h. tương ứng là đoạn *cd*.

  Toàn bộ đường ảnh hưởng $N_{5\text{-}6}$ là đường gãy khúc *abcde* trên hình 3.14e.

✦ *Đường ảnh hưởng* $N_{9\text{-}10}$. Tách mắt *9* (hình 3.14a)

Trong trường hợp này tải trọng truyền vào dàn qua đường biên dưới (đường xe chạy dưới) nên lực *P=1* không tác dụng tại mắt *9*. Do đó, sau khi tách mắt *9*, ta thấy $N_{9\text{-}10}$ luôn luôn bằng không với bất kỳ vị trí nào của tải trọng trên đường biên dưới. Vậy *đ.a.h.*$N_{9\text{-}10}$ trùng với đường chuẩn (đường *abd* trên hình 3.14f).

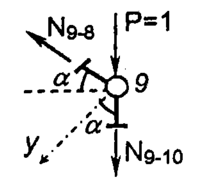
Nếu giả thiết tải trọng *P=1* di động trên đường biên trên (đường xe chạy trên) thì *đ.a.h.*$N_{9\text{-}10}$ sẽ có dạng khác đi.

- Khi *P=1* đặt tại mắt *9*, khảo sát sự cân bằng của mắt *9* dưới tác dụng của các lực vẽ trên hình 3.16 ta có:

  $\Sigma Y = N_{9\text{-}10}\cos\alpha + 1\cos\alpha = 0$.

  Suy ra $N_{9\text{-}10} = -1$.

  Tung độ của *đ.a.h.* $N_{9\text{-}10}$ tại mắt *9* là đoạn *cd* trên hình 3.14f.



Hình 3.16

- Khi *P=1* di động ngoài đốt *8-9* bị cắt.

  Tách mắt *9*, ta thấy $N_{9\text{-}10} = 0$, đường biểu diễn trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn *ab*.

- Khi *P=1* di động trên đốt *8-9*. Theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. là đoạn *bc*.

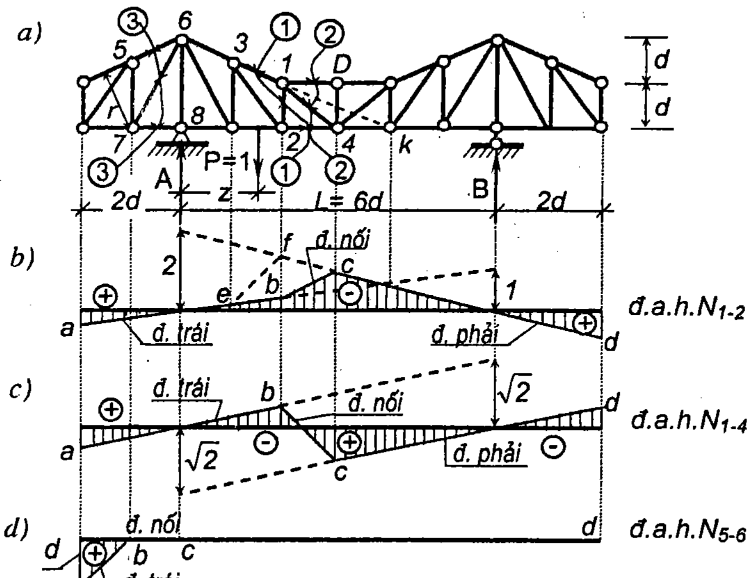
Vậy khi tải trọng di động trên đường biên trên, toàn bộ *đ.a.h.* $N_{9\text{-}10}$ là đường gãy khúc *abcd* (hình 3.14f).

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản

Khi sử dụng phương pháp này, cần phân biệt hai loại mặt cắt:

* *Mặt cắt ở trong nhịp*, khi mặt cắt này chia dàn thành hai phần, mỗi phần đều có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 1-1 trên hình 3.17a.
* *Mặt cắt ở đầu thừa*, khi mặt cắt này chia dàn thành hai phần, trong đó một phần không có phản lực tựa. Ví dụ mặt cắt 3-3 trên hình 3.17a.

a) Mặt cắt ở trong nhịp. Giả sử cần vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh *1-2* và *1-4* khi đường xe chạy dưới.



Hình 3.17

✦ *Đường ảnh hưởng N_{1-2}*. Thực hiện mặt cắt 1-1 qua thanh *1-2* và hai thanh khác là *3-1* và *2-4*. Để xác định N_{1-2} ta lập phương trình cân bằng tổng mômen của các lực đối với giao điểm *k* của hai thanh *3-1* và *2-4*. Gọi điểm *k* là *tâm mômen*. Xét ba trường hợp:

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt: $(-2d \le z \le +2d)$, *khảo sát sự cân bằng của phần phải, ta có:*

$\Sigma M_k = N_{1-2}.2d + B.2d = 0$; suy ra $N_{1-2} = -B = -z/l = -z/6d$. (a)

Đó là phương trình của *đường trái* khi *P* di động ở phần bên trái mặt cắt. Phương trình này có dạng bậc nhất. Để vẽ đường trái, ta tìm giá trị ở hai điểm: khi $z=0$ ta có $N_{1-2}=0$; khi $z = l = 6d$ ta có $N_{1-2}=-1$.

Phần thích dụng của đường trái là đoạn vẽ liền nét trên hình 3.17b. Phần này bắt đầu từ tung độ ứng dưới mút bên trái của dàn tới tung độ ứng dưới mắt số *2* là mắt cuối cùng của phần bên trái mặt cắt khi đường xe chạy dưới (đoạn *ab*).

- Khi $P=1$ di động ở bên phải mặt cắt, tức là mắt *4* đến đầu mút bên phải của dàn $(3d \le z \le 8d)$. Khảo sát cân bằng của phần trái, ta có:

$\Sigma M_k = N_{1-2}.2d + a.4d = 0$; suy ra $N_{1-2} = -2a = -(6d-z)/3d$. (b)

Đó là phương trình *đường phải*, có dạng bậc nhất. Để vẽ đường phải ta cần tìm hai giá trị: khi $z=0$ ta có $N_{1-2} = -2$; khi $z = l = 6d$ ta có $N_{1-2} = 0$.

Phần thích dụng của đường phải bắt đầu từ tung độ ứng dưới mắt số *4* tức là mắt đầu tiên của phần bên phải khi đường xe chạy dưới cho đến hết tung độ ứng dưới đầu mút bên phải của dàn. Trên hình 3.17b ta vẽ đoạn này bằng đường liền nét *cd*.

- Khi $P=1$ di động trên đốt bị cắt *2-4*.

Trong thực tế tải trọng không đặt vào các thanh của dàn mà thường đặt vào các mắt thông qua hệ thống truyền lực ở phía trên. Bởi vậy khi $P=1$ di động trong khoảng này thì theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. là đoạn thẳng *bc* nối liền tung độ ứng dưới mắt *2* của đường trái và tung độ ứng dưới mắt *4* của đường phải.

Toàn bộ đường gãy khúc *abcd* trên hình 3.17b là *đ.a.h.* N_{1-2}.

Nhận xét:

Dễ dàng nghiệm thấy: *đường trái và đường phải cắt nhau dưới tâm mômen k.* Thật vậy, trong phương trình của đường trái và đường phải, cho $z = 4d$, ta đều tìm được $N_{1-2} = 2/3$. Điều đó chứng tỏ đường trái và đường phải cắt nhau ở dưới điểm *k*.

Nếu đường xe chạy ở đường biên trên thì dạng ảnh hưởng N_{1-2} sẽ khác đi. Lúc này phần thích dụng của đường trái là đoạn *ae* (hình 3.17b) tức là bắt đầu từ tung độ ứng dưới đầu mút bên trái của dàn và kết thúc dưới mắt *3* là mắt cuối cùng của phần bên trái khi lực *P =1* di động ở đường biên trên. Phần thích dụng của đường phải bắt đầu từ tung độ ứng dưới mắt 1 cho tới tung độ ứng dưới đầu mút phải của dàn (đường *fd*).

Đường nối là đoạn *ef* tương ứng dưới đốt *3-1*. Toàn bộ *đ.a.h.*N_{1-2} khi đường xe chạy trên là đường gãy khúc *aefcd* (hình 3.17b).

Đường ảnh hưởng $N_{1\text{-}4}$. Thực hiện mặt cắt 2-2 qua thanh *1-4* và hai thanh song song *1-0, 2-4*. Để xác định $N_{1\text{-}4}$ ta lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương *y* vuông góc với hai thanh song song

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt 2-2 $(-2d \le z \le +2d)$, khảo sát sự cân bằng của phần dàn bên phải, ta có:

$$\sum Y = N_{1\text{-}4}.\cos 45^o + B = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{1\text{-}4} = -\frac{B}{\cos 45^o} = -\frac{\sqrt{2}}{6d}z \,. \quad (c)$$

Đó là phương trình *đường trái*, có dạng bậc nhất.

Khi $z = 0$ ta có $N_{1\text{-}4} = 0$; khi $z = l = 6d$ ta có $N_{1\text{-}2} = -\sqrt{2}$.

Phần thích dụng của đường trái là đoạn *ab* trên hình 3.17c.

- Khi $P=1$ di động ở bên phải mặt cắt 2-2 $(3d \le z \le 8d)$, khảo sát sự cân bằng của phần dàn bên trái, ta có:

$$\sum Y = -N_{1\text{-}4}.\cos 45^o + A = 0,$$

suy ra $$N_{1\text{-}4} = \frac{A}{\cos 45^o} = \frac{\sqrt{2}(6d - z)}{6d}. \quad (d)$$

Đó là phương trình *đường phải*, có dạng bậc nhất.

Khi $z = 0$ ta có $N_{1\text{-}4} = \sqrt{2}$; khi $z = l = 6d$ ta có $N_{1\text{-}2} = 0$.

Phần thích dụng của đường phải là đoạn *cd* trên hình 3.17c.

- Khi $P=1$ di động trên đốt bị cắt *2-4*: áp dụng quy tắc của hệ có hệ thống truyền lực, ta có đường nối *bc* như trên hình 3.17c.

Toàn bộ đường gãy khúc *abcd* trên hình 3.17c là *đ.a.h.*$N_{1\text{-}4}$.

Nhận xét:

Khi mặt cắt đi qua ba thanh trong đó có hai thanh song song, đ.a.h. nội lực trong thanh không song song có *đường trái và đường phải song song với nhau.* Thật vậy, ta dễ dàng nhận thấy các phương trình của đường trái và đường phải có cùng một hệ số góc.

b) Mặt cắt ở đầu thừa. Giả sử cần vẽ đ.a.h. lực dọc trong thanh *5-6* khi đường xe chạy dưới.

Thực hiện mặt cắt 3-3 qua thanh *5-6* và các thanh *6-7, 7-8*. Mặt cắt này chia dàn thành hai phần, trong đó phần bên trái không có phản lực tựa. Với loại mặt cắt này ta chỉ nên khảo sát sự cân bằng của phần không có phản lực, dù tải trọng di động ở phần bên trái hoặc bên phải mặt cắt vì làm như vậy thì số lượng lực tham gia phương trình cân bằng sẽ ít nhất.

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt, tức là di động từ mút trái của dàn đến mắt *7*. Nếu chọn gốc tọa độ tại gối *A* và chiều dương của trục *z* hướng về bên trái thì ta tìm được phương trình *đ.a.h.*$N_{5\text{-}6}$ trong khoảng $(d \le z \le 2d)$:

$$\sum M_7^{tr} = N_{5\text{-}6}.r - 1(z-d) = 0; \quad \text{suy ra} \quad N_{5\text{-}6} = (z-d)/r.$$

Đó là phương trình *đường trái.*

Khi $z = 2d$, ta có $N_{5\text{-}6} = d/r$; khi $z = d$, ta có $N_{5\text{-}6} = 0$.

Phần thích dụng của đường trái là đoạn *ab* (hình 3.17d) ứng dưới đầu mút trái của dàn và mắt *7*.

- Khi $P=1$ di động ở phần bên phải mặt cắt tức là từ mắt *8* đến đầu mút bên phải của dàn. Lúc này trên phần bên trái chỉ có các nội lực $N_{5\text{-}6}$, $N_{7\text{-}6}$ và $N_{7\text{-}8}$; phương trình cân bằng có dạng

$$\sum M_7^{tr} = N_{5\text{-}6}.r = 0; \quad \text{suy ra} \quad N_{5\text{-}6} = 0.$$

Đó là phương trình *đường phải.* Đường phải trùng với đường chuẩn. Phần thích dụng là đoạn *cd* (hình 3.17d) ứng dưới mắt *8* và đầu mút phải của dàn.

- Khi $P=1$ di động trên đốt bị cắt (đốt *7-8*), cũng tương tự như trên, theo nguyên tắc của hệ có hệ thống truyền lực, đ.a.h. trong đoạn này là đoạn thẳng nối liền tung độ ứng dưới mắt *7* của đường trái và tung độ ứng dưới mắt *8* của đường phải. Trong trường hợp này đường nối là đoạn *bc* trùng với đường chuẩn.

Đường gãy khúc *abcd* trên hình 3.17d là *đ.a.h.*$N_{5\text{-}6}$.

Chú thích:

1.Từ kết quả vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn dầm theo phương pháp mặt cắt đơn giản ta thấy chúng có nhiều nét tương đồng với *đ.a.h.*M_k và *đ.a.h.*Q_k trong dầm đơn giản tương ứng. Do đó có thể đề xuất cách vẽ nhanh đ.a.h. lực dọc trong dàn dầm theo đ.a.h. nội lực trong dầm đã quen thuộc khi áp dụng được phương pháp mặt cắt đơn giản. Ta lần lượt xét hai trường hợp sau:

✤ Sau khi thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm đường ảnh hưởng lực dọc nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại không ở xa vô cùng* thì từ (a) và (b) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h.lực dọc *N* trên dàn và đ.a.h. mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng như sau:

$$\text{đ.a.h. } N = \pm\frac{1}{\rho}\,\text{đ.a.h. } M_k^d, \quad (3.8)$$

trong đó:

đ.a.h. M_k^d – đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện *k* trong dầm đơn giản tương ứng;

ρ – khoảng cách từ tâm mômen *k* đến phương của lực *N* cần tìm đ.a.h.

Chọn dấu + nếu lực dọc *N* dương tác dụng vào phần bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm mômen *k*.

Từ (3.8) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h.lực dọc trong dàn dầm như sau:

- *Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần tìm đ.a.h lực dọc, lấy giao điểm của hai thanh còn lại làm tâm mômen k.*
- *Vẽ đ.a.h của mômen uốn* M_k^d *tại tiết diện k trong dầm đơn giản tương ứng theo phương pháp đã biết.*
- *Xác định phạm vi thích dụng của các đường trái, đường phải và đường nối cho phù hợp với vị trí của mặt cắt và đường xe chạy trên dàn. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.*
- *Nhân các tung độ của đ.a.h.*M_k^d *với thừa số* $\pm 1/\rho$ *(cách chọn dấu đã nói ở trên) sẽ được đ.a.h. cần tìm.*

✤ Sau khi thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h. lực dọc, nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại ở xa vô cùng* thì từ các biểu thức (c) và (d) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h. lực dọc *N* trong dàn và đ.a.h. lực cắt trong dầm đơn giản tương ứng như sau:

$$đ.a.h.\ N = \pm \frac{1}{\sin\gamma}\ đ.a.h.\ Q^d, \qquad (3.9)$$

trong đó:

đ.a.h. Q^d – đ.a.h. lực cắt tại tiết diện có vị trí trong phạm vi đốt bị cắt trên đường xe chạy trong dầm đơn giản tương ứng;

γ – góc hợp giữa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng *N* với phương của hai thanh song song.

Chọn dấu + nếu lực *N* dương đặt ở phần bên trái mặt cắt hướng xuống phía dưới.

Từ (3.9) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h.*N* cho trường hợp này như sau:

- *Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h.N và hai thanh song song.*
- *Vẽ đ.a.h.*Q^d *trong dầm đơn giản tương ứng tại tiết diện nằm trong phạm vi đốt bị cắt.*
- *Xác định phần thích dụng của các đoạn đ.a.h. phù hợp với vị trí của mặt cắt và đường xe chạy trên dàn. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.*
- *Nhân các tung độ đ.a.h.N vừa tìm được với thừa số* $\pm 1/\sin\gamma$ *sẽ được đ.a.h. N cần tìm (cách chọn dấu đã nêu ở trên).*

Đề nghị bạn đọc tự áp dụng cách vẽ này để kiểm nghiệm lại các đ.a.h. đã vẽ trên hình 3.17.

2. Về nguyên tắc có thể sử dụng một trong hai phương pháp kể trên để vẽ đ.a.h.lực dọc trong tất cả các thanh của dàn dầm tĩnh định. Trong những bài toán cụ thể, nên chọn phương pháp nào cho phép thiết lập được phương trình đ.a.h. từ một phương trình cân bằng tĩnh học.
3. Trường hợp không thể thiết lập được phương trình đ.a.h. từ một phương trình cân bằng, có thể dùng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan. Ví dụ muốn vẽ *đ.a.h.*$N_{k\text{-}d}$ của dàn trên hình 2.16 (chương 2) ta có thể thực hiện theo một trong hai cách sau:
   - vẽ trước *đ.a.h.*$N_{g\text{-}d}$ bằng phương pháp tách mắt (mắt g), sau đó tách mắt d để vẽ *đ.a.h.* $N_{k\text{-}d}$ theo *đ.a.h.*$N_{g\text{-}d}$.
   - vẽ trước *đ.a.h.*$N_{k\text{-}e}$ bằng mặt cắt qua ba thanh *d-e*, *k-e* và *g-f*, sau đó sử dụng mặt cắt qua các thanh *c-d*, *k-d*, *k-e* và *h-g* để vẽ *đ.a.h.* $N_{k\text{-}d}$.
4. Trong thực hành, khi gặp những dàn phức tạp như dàn trên hình 2.17 (chương 2), ta có thể vẽ đ.a.h. bằng cách: cho *P =1* lần lượt đặt tại từng mắt, xác định lực dọc trong thanh cần vẽ đ.a.h., dưới mỗi mắt dóng một tung độ bằng giá trị lực dọc tương ứng với khi *P =1* đặt tại mắt đó, nối các tung độ lại với nhau bằng những đoạn thẳng (theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực) đường gãy khúc đó chính là đ.a.h. cần tìm.

3.6. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn ba khớp

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ dàn ba khớp hay còn gọi là dàn vòm ba khớp thông qua hệ dàn vẽ trên hình 3.18. Giả sử cần vẽ đ.a.h. các thành phần phản lực và đ.a.h. nội lực trong các thanh *1-2* và *2-4* khi đường xe chạy trên.

A. Đường ảnh hưởng phản lực

Cách vẽ đường ảnh hưởng của các thành phần phản lực trong dàn vòm ba khớp giống như cách vẽ đ.a.h. phản lực trong hệ ba khớp *ACB*.

Trên hình 3.18b,c cho kết quả *đ.a.h.*V_A^d và *đ.a.h.H*

B. Đường ảnh hưởng nội lực trong các thanh

1. Phương pháp tách mắt: Cách thực hiện tương tự như đã trình bày trong 3.5.B.1.

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản: Ta tìm hiểu cách thực hiện thông qua trường hợp các đường ảnh hưởng $N_{1\text{-}2}$ và $N_{2\text{-}4}$ trong dàn trên hình 3.18a.

Đường ảnh hưởng $N_{1\text{-}2}$. Thực hiện mặt cắt *I-I* qua thanh *1-2* và hai thanh

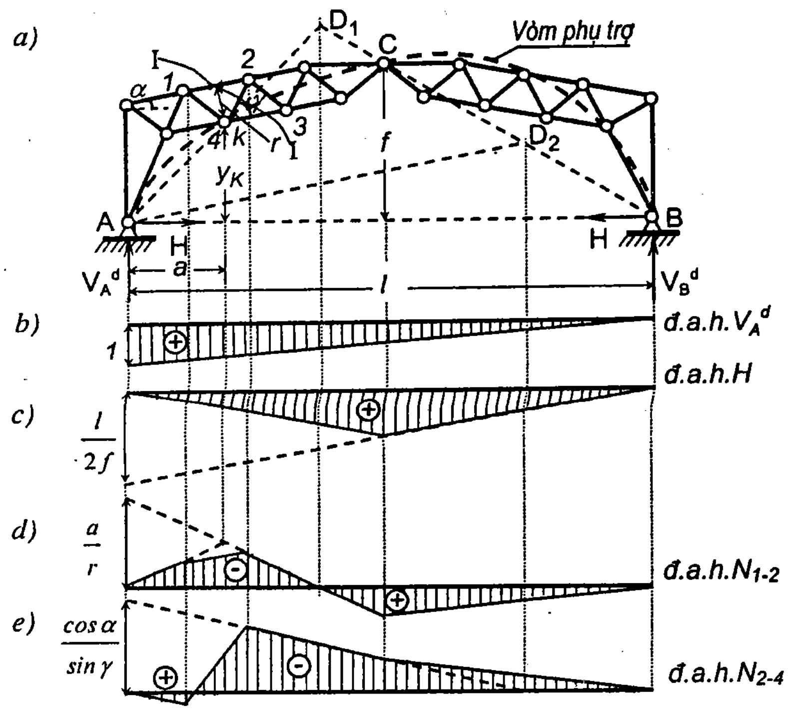
2-4, 3-4, lập điều kiện cân bằng dưới dạng tổng mômen đối với điểm *k*:

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt, khảo sát cân bằng của phần phải:

$$\Sigma M_k^{ph} = N_{1\text{-}2}.r + V_B^d(l-a) - H\,y_k = 0;$$

suy ra $$đ.a.h.N_{1\text{-}2} = -\frac{1}{r}\,[V_B^d(l-a) - H\,y_k].\qquad (a)$$

Đó là phương trình *đường trái* khi *P* di động ở phần bên trái mặt cắt.



Hình 3.18

- Khi $P=1$ di động ở bên phải mặt cắt, khảo sát cân bằng của phần trái:

$$\Sigma M_k^{tr} = N_{1\text{-}2}.r + V_A^d\,a - H\,y_k = 0;$$

suy ra $$đ.a.h.\ N_{1\text{-}2} = -\frac{1}{r}\,[V_A^d\,a - H\,y_k].\qquad (b)$$

Đó là phương trình *đường phải* khi *P* di động ở phần bên phải mặt cắt.

Từ hai biểu thức trên ta sẽ vẽ được *đ.a.h.*$N_{1\text{-}2}$ (hình 3.18d) khi *P* di động bên ngoài đốt bị cắt.

- Khi *P* di động trên đốt bị cắt *1-2*, ta dùng đường nối theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực.

✦ *Đường ảnh hưởng* $N_{2\text{-}4}$. Ta cũng dùng mặt cắt I-I và viết điều kiện cân bằng dưới dạng hình chiếu xuống phương *Y* vuông góc với hai thanh song song *1-2* và *3-4*.

- Khi $P=1$ di động ở bên trái mặt cắt, khảo sát sự cân bằng của phần phải:

$$\Sigma Y^{ph} = N_{2\text{-}4}.\sin\gamma - V_B^d\cos\alpha - H\sin\alpha = 0;$$

suy ra $$đ.a.h.\ N_{2\text{-}4} = \frac{1}{\sin\gamma}\,[V_B^d\cos\alpha + H\sin\alpha].\qquad (c)$$

- Khi $P=1$ di động ở bên phải mặt cắt: khảo sát cân bằng của phần trái:

$$\Sigma Y^{tr} = N_{2\text{-}4}.\sin\gamma + V_A^d\cos\alpha - H\sin\alpha = 0;$$

suy ra $$đ.a.h.\ N_{2\text{-}4} = -\frac{1}{\sin\gamma}\,[V_A^d\cos\alpha - H\sin\alpha].\qquad (d)$$

Từ hai biểu thức trên, ta sẽ vẽ được *đ.a.h.*$N_{2\text{-}4}$ (hình 3.18e) khi *P* di động bên ngoài đốt bị cắt.

- Khi P di động trên đốt bị cắt 1-2, ta dùng đường nối theo nguyên tắc hệ có hệ thống truyền lực.

Chú thích:

Từ kết quả vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn vòm ba khớp theo phương pháp mặt cắt đơn giản ta thấy chúng có nhiều nét tương đồng với đ.a.h. mômen uốn hoặc đ.a.h.lực cắt trong hệ ba khớp. Do đó có thể đề xuất cách vẽ nhanh đ.a.h. lực dọc trong dàn vòm ba khớp theo đ.a.h. nội lực trong hệ ba khớp đã biết khi áp dụng được phương pháp mặt cắt đơn giản. Lần lượt xét hai trường hợp sau:

✤ Sau khi thực hiện mặt cắt qua thanh cần tìm đường ảnh hưởng lực dọc nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại không ở xa vô cùng* thì từ (a) và (b) ta có thể suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h.lực dọc *N* trên dàn vòm ba khớp và đ.a.h. mômen uốn trong hệ ba khớp tương ứng như sau:

$$đ.a.h.\ N = \pm\frac{1}{\rho}\,đ.a.h.\ M_k^V,\qquad (3.10)$$

trong đó:

đ.a.h.M_k^V - đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện *k* trong vòm ba khớp phụ trợ đi qua *A, C, B* và *k;*

ρ - khoảng cách từ tâm mômen *k* đến phương của lực *N* cần tìm đ.a.h.

Chọn dấu + nếu lực dọc *N* dương tác dụng vào phần bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm mômen *k*.

Từ (3.10) ta có thể đề ra quy tắc vẽ đ.a.h. lực dọc trong dàn vòm ba khớp như sau:

- *Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần tìm đ.a.h lực dọc, lấy giao điểm của hai thanh còn lại làm tâm mômen k.*
- *Vẽ vòm phụ trợ tưởng tượng đi qua ba khớp A, B, C và qua tâm mômen k. Vẽ đ.a.h mômen uốn M_k^V tại tiết diện k trong vòm phụ trợ theo phương pháp đã biết.*
- *Xác định phạm vi thích dụng của các đường trái, đường phải và đường nối cho phù hợp với đường xe chạy trên dàn vòm. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.*
- *Nhân các tung độ của đ.a.h. M_k^V với thừa số $\pm 1/\rho$ (cách chọn dấu đã nói ở trên) sẽ được đ.a.h. cần tìm.*

Chi tiết cách vẽ *đ.a.h.$N_{1\text{-}2}$* theo cách này được trình bày trên hình 3.18a và d.

✤ Sau khi thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc, nếu *giao điểm k của hai thanh còn lại ở xa vô cùng* thì từ các biểu thức (c) và (d) ta suy ra công thức liên hệ giữa đ.a.h. lực dọc *N* trong dàn vòm ba khớp và đ.a.h. lực cắt trong hệ ba khớp như sau:

$$\text{đ.a.h. } N = \pm \frac{1}{\sin\gamma}\, \text{đ.a.h. } Q^V, \qquad (3.11)$$

trong đó:

đ.a.h. Q^V - đ.a.h. lực cắt tại tiết diện tương ứng với vị trí mặt cắt trong vòm ba khớp phụ trợ đi qua các điểm *A, C, B* và có đoạn song song với hai thanh song song tại vị trí mặt cắt;

γ - góc hợp giữa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng *N* với phương của hai thanh song song.

Chọn dấu + nếu lực *N* dương đặt ở phần bên trái mặt cắt hướng xuống phía dưới.

Từ (3.11) ta có thể đề ra quy tắc vẽ *đ.a.h. N* cho trường hợp này như sau:

- *Thực hiện mặt cắt qua ba thanh trong đó có thanh cần vẽ đ.a.h.N và hai thanh song song.*
- *Vẽ vòm phụ trợ đi qua ba khớp A, C, B và có đoạn song song với hai thanh song song tại đốt dàn bị cắt. Vẽ đ.a.h.Q^V trong vòm phụ trợ tại tiết diện nằm trong phạm vi đốt bị cắt.*
- *Xác định phần thích dụng của các đoạn đ.a.h. cho phù hợp với đường xe chạy trên dàn vòm. Trong phạm vi mặt cắt, dùng đường nối.*
- *Nhân các tung độ đ.a.h.N vừa tìm được với thừa số $\pm 1/\sin\gamma$ (cách chọn dấu đã nêu ở trên) sẽ được đ.a.h. N cần tìm.*

Đề nghị bạn đọc tự áp dụng cách vẽ này để kiểm nghiệm lại các đ.a.h. nội lực đã vẽ cho dàn trên hình 3.20.

3.7. Đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định

Cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định dựa trên nguyên tắc phân tích hệ thành những hệ đơn giản, hệ phụ tựa vào hệ chính. Đồng thời cần nắm vững tính chất sau:

✦ *Khi P=1 di động trên hệ chính: không gây ra nội lực và phản lực trong hệ phụ.*

✦ *Khi P=1 di động trên hệ phụ: gây ra nội lực và phản lực trong cả hệ phụ lẫn hệ chính.*

Ta tìm hiểu cách vẽ đường ảnh hưởng thông qua trường hợp hệ ghép trên hình 3.19a khi lực thẳng đứng *P=1* hướng từ trên xuống dưới, di động trên đường *ABCDEF*. Trong hệ ghép đã cho: hệ ba khớp *CDIK* và hệ khung *EFL* là hệ chính; hệ *AB* và *DE* là hệ phụ; hệ *BC* là hệ chính của *AB* và là phụ của *CDIK*. Sơ đồ phân tích các hệ phụ và hệ chính vẽ trên hình 3.19b.

Có thể xảy ra hai trường hợp: *đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ phụ và đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ chính hoặc vừa chính vừa phụ.*

A. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ

✤ **Đường ảnh hưởng *G*** :

Phản lực *G* thuộc hệ phụ *AB*. Lần lượt cho *P=1* di động trên các hệ thuộc đường xe chạy:

✧ Khi lực *P=1* di động trên các hệ chính của *AB* là *BC, CD* và các hệ khác không liên quan *DE, EF* (hình 3.19b): không gây ra phản lực và nội lực trong hệ phụ *AB*. Do đó, *đ.a.h. G* tương ứng với các phần này trùng với đường chuẩn.

✧ Khi lực *P=1* di động trên *AB*: xem *AB* như một dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được *đ.a.h. G* trong dầm đơn giản theo quy tắc đã trình bày trong 3.2.

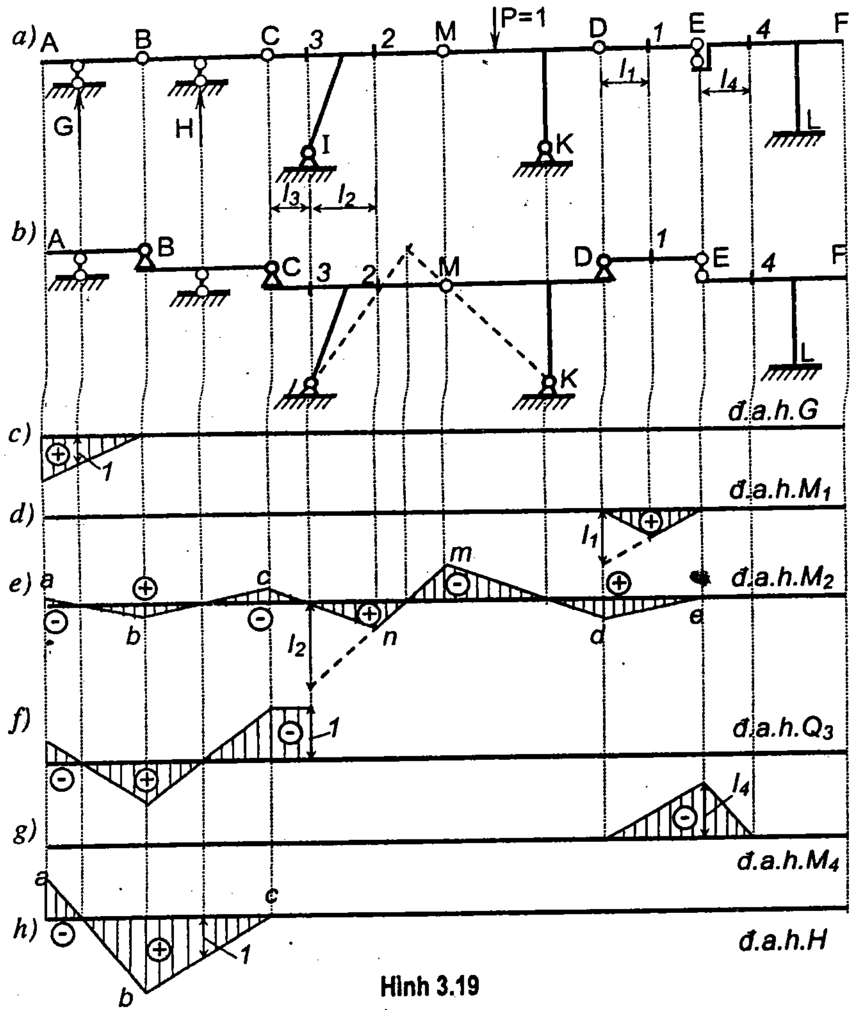
Kết quả tìm được như trên hình 3.19c.

✤ **Đường ảnh hưởng M_1** : Đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ dầm phụ *DE*.

✧ Khi lực *P=1* di động trên các hệ chính *ELF, CDIK* và các hệ khác không liên quan *AB, CD* (hình 3.19b): không gây ra phản lực và nội lực trong hệ phụ *DE, đ.a.h.* M_1 trong những đoạn này trùng với đường chuẩn.

✧ Khi *P=1* di động trên hệ phụ *DE*: có thể xem *DE* như dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được *đ.a.h.* M_1.

Kết quả tìm được như trên hình 3.19d.



Hình 3.19

Như vậy ta có thể đề ra *quy tắc vẽ đường ảnh hưởng của các đại lượng thuộc hệ phụ* như sau:

✦ *Khi P di động trên hệ chính của hệ có chứa đại lượng cần vẽ đ.a.h. và trên các hệ khác không liên quan: đường ảnh hưởng trùng với đường chuẩn.*

✦ *Khi P di động trên hệ phụ có chứa đại lượng cần vẽ đ.a.h.: cô lập hệ phụ đó khỏi toàn hệ (liên kết nối với các hệ chính được xem như nối với đất) ta sẽ được một hệ đơn giản tĩnh định và vẽ được các đường ảnh hưởng theo quy tắc đã biết.*

B. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ chính hoặc vừa chính vừa phụ

✣ **Đường ảnh hưởng M_2 :** Đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ chính *CDIK*.

✧ *Khi P=1 di động trên hệ chính khác không chứa đại lượng đang xét (ELF):* không gây ra phản lực và nội lực trong hệ có chứa đại lượng đang xét, *đ.a.h.* M_2 trong những đoạn này trùng với đường chuẩn.

✧ *Khi P=1 di động trên hệ chính có chứa đại lượng đang xét*, tức là trên *CDIK*, lực *P* chỉ gây ra phản lực và nội lực trong hệ chính *CDIK*, các hệ phụ của nó không chịu lực. Do đó, trong trường hợp này có thể tạm thời loại bỏ các hệ phụ, hệ *CDIK* trở thành hệ ba khớp độc lập và dễ dàng vẽ ngay được *đ.a.h.* M_2 (đường *c2md* trên hình 3.19e).

✧ *Khi P=1 di động trên các hệ phụ* của *CDIK*. Lúc này tải trọng *P* sẽ gây ảnh hưởng xuống hệ chính giống như trong hệ có hệ thống truyền lực. Trong phạm vi mỗi hệ phụ, đường ảnh hưởng là một đoạn thẳng đi qua tung độ ứng dưới khớp nối hệ phụ với hệ chính (được xem như mắt truyền lực đặt trên hệ chính) có giá trị bằng tung độ đ.a.h. thuộc hệ chính và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa nối với trái đất của hệ phụ (được xem như mắt truyền lực đặt trên trái đất) hoặc tung độ bằng không ứng dưới liên kết nối hệ phụ với hệ chính khác (được xem như mắt truyền lực đặt trên hệ chính khác).

- *Khi P=1 di động trên hệ phụ BC:* trong phạm vi *BC*, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng đi qua tung độ *c* ứng dưới khớp nối *C* của hệ phụ với hệ chính và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa *H* nối với trái đất.
- *Khi P=1 di động trên hệ phụ AB:* trong phạm vi *AB*, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng đi qua tung độ *b* ứng dưới khớp nối *B* của hệ phụ *AB* với hệ *BC* và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa *G* nối với trái đất.
- *Khi P=1 di động trên hệ phụ DE:* trong phạm vi *DE*, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng đi qua tung độ *d* ứng dưới khớp nối *D* của hệ phụ *DE* với hệ chính *CDIK* và tung độ bằng không ứng dưới liên kết

E nối với hệ chính khác là *EFL*.

Kết quả vẽ *đ.a.h.*M_2 như trên hình 3.19e.

❖ **Đường ảnh hưởng Q_3 và M_4** : Các đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ chính *CDIK*. Cũng thực hiện các bước tương tự như trong trường hợp *đ.a.h.*M_2 ta được kết quả như trên các hình 3.19f, g.

❖ **Đường ảnh hưởng phản lực *H***: Đại lượng cần vẽ đ.a.h. thuộc hệ vừa chính vừa phụ *BC*.

✧ *Khi P=1 di động trên hệ chính của AB là CDIK, trên hệ chính khác ELF và hệ không liên quan DE*: không gây ra phản lực và nội lực trong hệ có chứa đại lượng đang xét, *đ.a.h. H* trong những đoạn này trùng với đường chuẩn.

✧ *Khi P=1 di động trên hệ có chứa đại lượng đang xét*, tức là trên *BC*, lực *P* chỉ gây ra phản lực và nội lực trong hệ *BC*, hệ phụ *AB* của nó không chịu lực. Do đó, trong trường hợp này có thể tạm thời loại bỏ hệ phụ, hệ *BC* trở thành hệ dầm độc lập và dễ dàng vẽ ngay được *đ.a.h.H* (đường *bc* trên hình 3.19h).

✧ *Khi P=1 di động trên hệ phụ AB:* trong phạm vi *AB*, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng đi qua tung độ *b* ứng dưới khớp nối *B* của hệ phụ với hệ chính và tung độ bằng không ứng dưới gối tựa *G* nối với trái đất.

Kết quả vẽ *đ.a.h.H* như trên hình 3.19h.

Như vậy ta có thể đề ra *quy tắc vẽ đường ảnh hưởng của các đại lượng thuộc hệ chính hoặc thuộc hệ vừa là chính vừa là phụ* như sau:

✦ *Khi P=1 di động trên hệ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng, cô lập hệ đó sẽ được một hệ đơn giản, vẽ đường ảnh hưởng ứng với đoạn này theo quy tắc đã biết.*

✦ *Lần lượt cho P=1 di động trên các hệ kế tiếp hệ vừa xét:*

✧ *nếu hệ kế tiếp là những hệ chính của hệ đang xét hoặc một hệ chính khác không liên quan thì đoạn đường ảnh hưởng tương ứng trùng với đường chuẩn;*

✧ *nếu hệ kế tiếp là những hệ phụ của hệ đang xét thì trong phạm vi hệ phụ đó, đường ảnh hưởng tương ứng là những đoạn thẳng kế tiếp từ tung độ đ.a.h. của hệ chính ứng dưới liên kết nối hệ phụ với hệ chính và đi qua những điểm có tung độ bằng không. Những tung độ bằng không này thường là tung độ ứng dưới các gối tựa kế tiếp song song với phương lực P, thuộc hệ phụ của hệ đang xét hoặc ứng dưới khớp gặp đầu tiên thuộc một hệ chính khác.*

3.8. Cách xác định các đại lượng nghiên cứu tương ứng với các dạng tải trọng theo đường ảnh hưởng

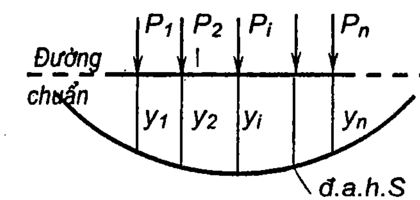
Trong 3.1 đã nêu hai yêu cầu cần thực hiện khi tính công trình với tải trọng di động. Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách thực hiện yêu cầu thứ hai, còn yêu cầu thứ nhất sẽ được đề cập trong 3.10. Để trình bày được tổng quát, ta giả thiết đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu *S* là đường cong bất kỳ được mô tả bởi phương trình $y = f(z)$.

Có bốn dạng tải trọng thường gặp, cần nghiên cứu: *lực tập trung, lực phân bố, mômen tập trung và mômen phân bố*. Dưới đây sẽ lần lượt nghiên cứu cách sử dụng đường ảnh hưởng để tính ảnh hưởng của các dạng tải trọng đó đối với đại lượng *S*.

A. Lực tập trung

Giả sử trên công trình có *n* lực tập trung $P_1, P_2, \ldots, P_n$ cùng phương tác dụng tại những vị trí xác định (hình 3.20).

Yêu cầu xác định ảnh hưởng của các tải trọng đó đối với đại lượng *S* có đường ảnh hưởng đã vẽ được theo lực *P=1*, tác dụng cùng phương với các lực P_i nêu trên.



Hình 3.20

Theo định nghĩa đường ảnh hưởng, nếu trên hệ chỉ có một lực $P_i=1$ tác dụng thì ảnh hưởng của lực này đến đại lượng S bằng tung độ y_i của *đ.a.h. S* tại tiết diện đặt lực.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, nếu lực đó có giá trị P_i thì sẽ gây ảnh hưởng đến đại lượng *S* gấp P_i lần và được biểu thị bằng tích số $P_i\, y_i$ cùng phương với các lực trên.

Lại vận dụng nguyên lý cộng tác dụng một lần nữa ta có thể biểu thị ảnh hưởng của tất cả các lực đối với đại lượng *S* theo đa thức sau:

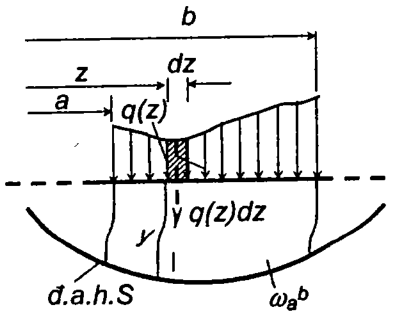
$$\boxed{S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_i y_i + \ldots + P_n y_n = \sum_{i=1}^{n} P_i\, y_i .} \qquad (3.12)$$

Như vậy, *giá trị của đại lượng S do các lực tập trung gây ra bằng tổng đại số các tích số giữa giá trị của lực tập trung với tung độ đường ảnh hưởng tại các điểm đặt lực tương ứng.*

- ✦ *Các lực P_i hướng theo chiều P=1 dùng để vẽ đ.a.h. được xem là dương (thường hướng xuống dưới).*
- ✦ *Dấu của tung độ y_i lấy theo dấu của đường ảnh hưởng S.*

B. Lực phân bố

Giả sử công trình chịu lực phân bố có phương không đổi tác dụng theo luật bất kỳ với cường độ $q(z)$ (hình 3.21), yêu cầu xác định ảnh hưởng của lực phân bố đối với đại lượng S có đường ảnh hưởng đã vẽ được với lực $P=1$ tác dụng cùng phương với q.



Hình 3.21

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng trên chiều dài dz (phần gạch chéo trên hình 3.21). Có thể xem phân tố tải trọng này như lực tập trung với giá trị là $q(z).dz$ và gây ra ảnh hưởng dS đối với đại lượng S theo (3.12):

$$dS = q(z).dz.y.$$

Ảnh hưởng tổng cộng của tất cả các phân tố tải trọng:

$$S = \int dS = \int_a^b q(z).y.dz\ . \qquad (3.13)$$

Trường hợp tải trọng phân bố đều ($q = const$), ta có:

$$\boxed{S = q\int_a^b y.dz = q\omega_a^b\ .} \qquad (3.14)$$

trong đó $\omega_a{}^b$ là diện tích của phần đ.a.h. tương ứng với đoạn tải trọng phân bố đều q.

Như vậy, *giá trị của đại lượng S do lực phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ tải trọng q với diện tích của phần đường ảnh hưởng ứng dưới đoạn tải trọng.*

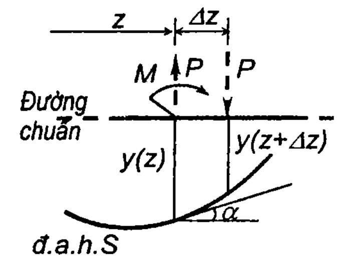
- ✦ *Cường độ q được xem là dương nếu tải trọng phân bố hướng theo chiều lực P=1 dùng để vẽ đ.a.h. S.*

- ✦ *Dấu của diện tích lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.*

Trường hợp phần đường ảnh hưởng ở phía dưới tải trọng gồm nhiều đoạn có dấu khác nhau ta cần hiểu $\omega_a{}^b$ là tổng đại số của các diện tích.

C. Mômen tập trung

Giả sử trên công trình có tác dụng mômen tập trung M, yêu cầu xác định ảnh hưởng của M đối với đại lượng S đã biết đường ảnh hưởng (hình 3.22).



Hình 3.22

Thay thế tác dụng của mômen tập trung M đặt tại hoành độ z bằng một ngẫu lực gồm hai lực tập trung P có cánh tay đòn bằng Δz với Δz tiến tới 0. Theo (3.12), ta xác định được đại lượng S do ảnh hưởng của hai lực này như sau:

$$S = \lim_{\Delta z \to 0} [P\, y(z+\Delta z) - P\, y(z)].$$

Nhưng $P = M / \Delta z$, nên:

$$S = M.\lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{y(z+\Delta z) - y(z)}{\Delta z}\right] = M.y'(z)\ ,$$

hay

$$\boxed{S = M.\,tg\alpha.} \qquad (3.15)$$

Như vậy, *ảnh hưởng của mômen tập trung đến đại lượng S bằng giá trị của mômen tập trung nhân với giá trị đạo hàm của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen hay nhân với tang của góc hợp giữa tiếp tuyến của đường ảnh hưởng tại điểm đặt mômen với phương của đường chuẩn.*

Trường hợp trên kết cấu có nhiều mômen tập trung $M_1, M_2 ,..., M_i ,..., M_n$ tác dụng, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có

$$S = M_1\, tg\alpha_1 + M_2\, tg\alpha_2 + ... + M_i\, tg\alpha_i + ... + M_n\, tg\alpha_n\ ,$$

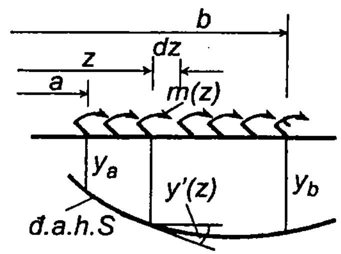
hay

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} M_i\, tg\alpha_i\ .} \qquad (3.16)$$

- ✦ *Công thức trên được thiết lập với chiều mômen vẽ trên hình 3.22 nên khi sử dụng công thức này ta phải xem mômen M_i là dương nếu quay thuận chiều kim đồng hồ.*
- ✦ *$tg\alpha_i$ được xem là dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.*

B. Mômen phân bố

Giả sử công trình chịu mômen phân bố theo luật bất kỳ với cường độ $m(z)$, tác dụng trên đoạn có hoành độ từ a đến b (hình 3.23), yêu cầu xác định ảnh hưởng của lực phân bố đối với đại lượng S có đường ảnh hưởng S đã biết.



Hình 3.23

Trước tiên ta xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng trên chiều dài dz.

Có thể xem phân tố tải trọng này như mômen tập trung với giá trị là $m(z).dz$ và gây ra ảnh hưởng dS đối với đại lượng S theo (3.15):

$$dS = m(z).dz.tg\alpha = m(z).dz.y'.$$

Ảnh hưởng tổng cộng của tất cả các phân tố tải trọng:

$$S = \int dS = \int_a^b m(z).y'.dz\ .$$

Trường hợp mômen phân bố đều ($m = const$), ta có:

$$\boxed{S = m\int_a^b y'(z).dz = m.y(z)\Big|_a^b = m(y_b - y_a).} \qquad (3.17)$$

trong đó y_b *và* y_a lần lượt là tung độ của đ.a.h. S tại đầu phải và đầu trái đoạn chịu mômen phân bố đều m.

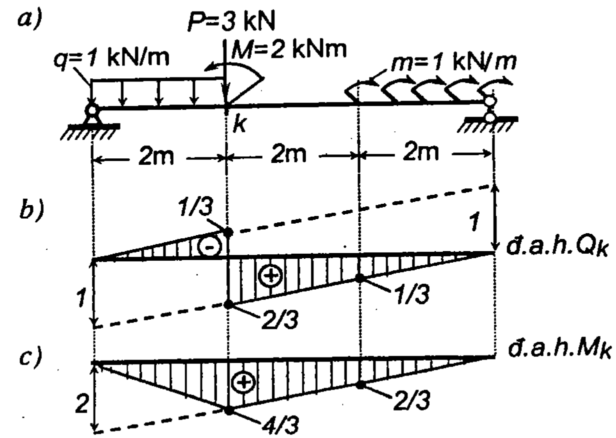
Như vậy, *giá trị của đại lượng S do mômen phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ mômen m với hiệu số (y_b - y_a) của hai tung độ đ.a.h. S tại đầu phải và đầu trái đoạn chịu mômen phân bố đều m.*

✦ *Công thức trên được thiết lập với chiều mômen vẽ trên hình 3.23 nên khi sử dụng công thức này ta phải xem cường độ mômen m là dương nếu quay thuận chiều kim đồng hồ.*

✦ *Dấu của các tung độ lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.*

Ví dụ 3.4. Sử dụng đường ảnh hưởng để xác định mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k (hình 3.24) do các tải trọng có vị trí cố định gây ra.

Các *đ.a.h.*Q_k và *đ.a.h.*M_k vẽ trên hình 3.24b và c. Tại tiết diện k có mômen và lực tập trung nên cần xác định hai giá trị của mômen uốn và lực cắt ứng với hai tiết diện ở bên trái và bên phải điểm đặt mômen và lực tập trung.



Hình 3.24

✣ *Nội lực tại tiết diện bên trái điểm đặt mômen và lực tập trung:* lúc này lực tập trung và mômen tập trung ở bên phải k (bên phải bước nhảy của *đ.a.h.*Q_k và điểm gãy của *đ.a.h.*M_k).

$$Q_k^{tr} = -1.(1/2).2.(1/3) + 3.(2/3) - 2.(-1/6) + 1.(0-1/3) = 5/3 \text{ kN};$$

$$M_k^{tr} = 1.(1/2).2.(4/3) + 3.(4/3) + (-2)(-4/12) + 1.(0-2/3) = 16/3 \text{ kNm}.$$

✣ *Nội lực tại tiết diện bên phải điểm đặt mômen và lực tập trung:* lúc này lực tập trung và mômen tập trung tác dụng ở bên trái k (bên trái bước nhảy của *đ.a.h.*Q_k và điểm gãy của *đ.a.h.*M_k).

$$Q_k^{ph} = -1.(1/2).2.(1/3) + 3.(-1/3) - 2.(-1/6) + 1.(0-1/3) = -4/3 \text{ kN};$$

$$M_k^{ph} = 1.(1/2).2.(4/3) + 3.(4/3) + (-2)(4/6) + 1.(0-2/3) = 10/3 \text{ kNm}.$$

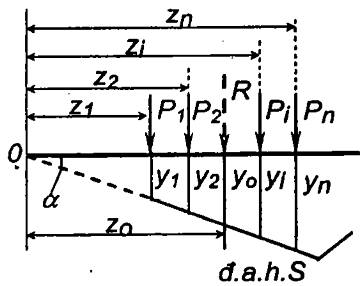
Bạn đọc có thể vẽ các biểu đồ lực cắt và mômen uốn để đối chiếu với những kết quả vừa tìm được.

3.9. Tính chất của đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng

Trong 3.8 ta đã nghiên cứu cách sử dụng các đường ảnh hưởng có dạng bất kỳ: cong hoặc thẳng. Riêng trong trường hợp đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng hoặc gồm nhiều đoạn thẳng, ta có thể chứng minh được tính chất sau:

Khi xác định đại lượng nghiên cứu S do tải trọng bất kỳ có vị trí xác định gây ra, ta có thể thay thế các tải trọng tác dụng trên từng phần *thẳng của đường ảnh hưởng bằng hợp lực của chúng.*

Ta sẽ chứng minh tính chất này trong trường hợp tải trọng tập trung (hình 3.25). Giả thiết trên phần thẳng của đường ảnh hưởng có các lực tập trung $P_1, P_2, ..., P_n$ tác dụng. Kéo dài phần đường thẳng tới khi cắt đường chuẩn tại điểm 0 và xem 0 là gốc tọa độ.



Hình 3.25

Theo (3.12) ta có:

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_i\, y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + ... + P_i y_i + ... + P_n y_n.$$

Vì phần đường ảnh hưởng là đường thẳng liên tục nên từ hình 3.25 ta có:

$$y_i = z_i\, tg\alpha, \quad \text{với} \quad tg\alpha = const$$

nên $$S = tg\alpha\,(P_1 z_1 + P_2 z_2 + ... + P_i z_i + ... + P_n z_n),$$

hay $$\boxed{S = tg\alpha \sum_{i=1}^{n} P_i\, z_i.} \qquad (3.18)$$

Ta thấy $P_i z_i$ là mômen của lực P_i đối với điểm 0.

Theo định lý Varignon (xem Cơ học cơ sở): tổng mômen của các lực P_i đối với điểm 0 bằng mômen của hợp lực các lực P_i đối với điểm đó, nên

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, z_i = R\, z_o,$$

trong đó: R – hợp lực của các lực P_i;

z_o – hoành độ của hợp lực R kể từ gốc 0.

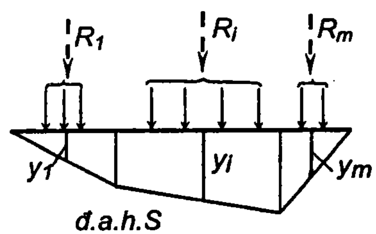
Do đó, ta có thể viết (3.18) dưới dạng sau:

$$S = R\, z_o tg\alpha.$$

Nhưng $z_o tg\alpha = y_o$ nên

$$S = R y_o.$$

Đó là điều cần chứng minh.



Hình 3.26

Trong trường hợp đ.a.h. gồm nhiều đoạn thẳng, muốn áp dụng tính chất trên để tính đại lượng S ta cần lấy hợp lực từng nhóm tải trọng tác dụng trong từng đoạn thẳng một, rồi cộng các kết quả (xem hình 3.26):

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{m} R_i\, y_i} \qquad (3.19)$$

trong đó m là số đoạn thẳng của đường ảnh hưởng.

Chú thích:

Trên phần thẳng của đ.a.h. ta có thể dùng công thức (3.18) thay thế cho công thức (3.12). Trong một số trường hợp, dùng (3.18) tiện lợi hơn (3.12), ví dụ như khi xác định đại lượng S do nhiều tải trọng tập trung có khoảng cách đã biết tác dụng trên đường ảnh hưởng thẳng thì tìm các hoành độ z_i nhanh hơn tìm các tung độ y_i của đ.a.h.

3.10. Cách sử dụng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng

Tải trọng di động thường gặp trong thực tế là: đoàn xe hỏa, đoàn xe ôtô, xe xích... gọi chung là *đoàn tải trọng*. Khi di động trên công trình, đoàn tải trọng phải tuân theo một luật lệ nhất định về trọng tải, về khoảng cách... (xem các quy trình về cầu). Những đoàn tải trọng bố trí đúng theo quy định gọi là *đoàn tải trọng tiêu chuẩn*. Mỗi công trình đều được tính toán với một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nhất định tùy theo mục đích sử dụng.

Giả sử cần xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng tiêu chuẩn đối với đại lượng S có đường ảnh hưởng đã biết.

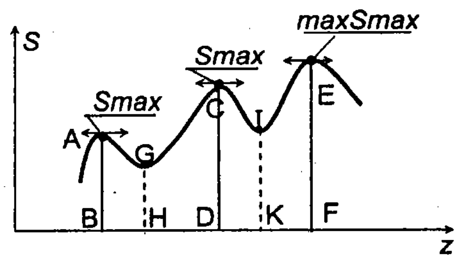
Khi đoàn tải trọng di động trên *đ.a.h. S* (trên công trình), ta có thể xác định vị trí của nó theo hoành độ z của một tải trọng nào đó và biểu thị đại lượng S dưới dạng hàm của z

$$S = f(z). \qquad (3.20)$$

Như trên đã biết, *vị trí bất lợi (vị trí để tính) của đoàn tải trọng trên đ.a.h. S là vị trí gây ảnh hưởng lớn nhất đến đại lượng nghiên cứu S.*

Do đó việc xác định vị trí bất lợi của tải trọng có liên quan đến việc tìm các cực trị của hàm $S = f(z)$. Nói chung, khi vẽ đồ thị biểu diễn sự biến thiên của đại lượng $S = f(z)$ (hình 3.27), ta thấy có một số cực trị cục bộ tương ứng với một số vị trí nào đó của đoàn tải trọng.

Trong số những cực trị đó có cực trị lớn nhất về trị số tương ứng với từng dấu khác nhau (đoạn *EF* trên hình 3.27), ta ký hiệu là $max\ S_{max}$ (hay $min\ S_{min}$). Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng với vị trí có $max\ S_{max}$ (hay $min\ S_{min}$) là vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng đối với đại lượng *S*.



Hình 3.27

Như vậy, nguyên tắc chung khi tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng đối với đại lượng *S* là: phát hiện tất cả các vị trí của đoàn tải trọng cho S_{max} (hay S_{min}) tức là cho cực trị cục bộ, so sánh các S_{max} (hay S_{min}) với nhau để tìm ra $max\ S_{max}$ (hay $min\ S_{min}$), vị trí có $max\ S_{max}$ (hay $min\ S_{min}$) là vị trí bất lợi cần tìm.

Để phát hiện cực trị, ta nhớ lại những biểu hiện toán học của cực trị như sau:

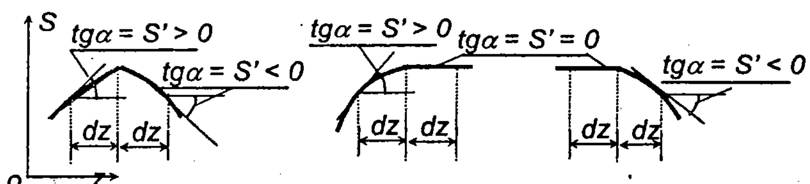
* *Nếu S = f(z) liên tục và đạo hàm cấp một S'= f'(z) cũng liên tục* thì khi điều kiện

$$\frac{dS}{dz} = 0 \qquad (3.21)$$

được thỏa mãn, hàm *S* sẽ có một cực đại hoặc một cực tiểu tùy theo đạo hàm cấp hai của *S* âm hoặc dương.

Trong thực hành ta ít gặp trường hợp này vì đạo hàm $S' = f'(z)$ thường không liên tục.

* *Nếu S= f(z) liên tục nhưng đạo hàm cấp một của nó không liên tục* (hình 3.28) thì những biểu hiện cực trị sẽ như sau:



Hình 3.28

✣ **Biểu hiện cực đại** - Gọi z_o là hoành độ có cực đại. Điều kiện xảy ra cực đại được thể hiện theo một trong ba dạng sau:

✧ Hình 3.28a: Trước khi qua cực đại $S' > 0$. Sau khi qua cực đại $S' < 0$.

✧ Hình 3.28b: Trước khi qua cực đại $S' > 0$. Sau khi qua cực đại $S' = 0$.

✧ Hình 3.28c: Trước khi qua cực đại $S' = 0$. Sau khi qua cực đại $S' < 0$.

Tóm lại:

Điều kiện cực đại xảy ra tại z_o nếu đạo hàm:	
chuyển từ $\frac{dS}{dz}\begin{array}{l}>\\>0\\=\end{array}$	sang $\frac{dS}{dz}\begin{array}{l}<\\=0\\<\end{array}$
(khi $z = z_o - dz$)	(khi $z = z_o + dz$)

(3.22)

✣ **Biểu hiện cực tiểu** - Cũng lập luận tương tự, ta có:

Điều kiện cực tiểu xảy ra tại z_o nếu đạo hàm:	
chuyển từ $\frac{dS}{dz}\begin{array}{l}<\\=0\\<\end{array}$	sang $\frac{dS}{dz}\begin{array}{l}>\\>0\\=\end{array}$
(khi $z = z_o - dz$)	(khi $z = z_o + dz$)

(3.23)

Vì tải trọng và đường ảnh hưởng có nhiều dạng khác nhau nên khó có thể đưa ra những quy tắc chung để xác định vị trí bất lợi một cách cụ thể hơn so với những điều nêu ở trên. Dưới đây ta sẽ thiết lập một vài quy tắc cụ thể hơn cho một số dạng tải trọng và một số dạng đ.a.h. thường gặp.

A. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một dấu

Khi phương trình đường ảnh hưởng *S* liên tục và đạo hàm của nó cũng liên tục thì *đ.a.h. S* cong trơn tru. Khi đó, hàm $S = f(z)$ biểu thị sự biến thiên của đại lượng *S* theo vị trí của tải trọng di động sẽ liên tục, đạo hàm $S' = f'(z)$ cũng liên tục. Bài toán tìm vị trí bất lợi của tải trọng sẽ đưa về bài toán tìm cực trị của hàm $S = f(z)$. Đối với những bài toán thường gặp ta cần thực hiện các bước sau:

1) *Thiết lập biểu thức giải tích của S theo tọa độ chạy z là hoành độ của một tải trọng nào đó di động trên đường ảnh hưởng.*
2) *Lấy đạo hàm cấp một và xác định các hoành độ z_o tương ứng với khi đạo hàm này bằng không.*
3) *Tìm đạo hàm cấp hai của S và dựa vào dấu của S'' khi $z = z_o$ để phán đoán về cực đại hay cực tiểu.*

4) Tính các S_{max} (hay S_{min}) tương ứng với các z_o. So sánh các S_{max} (hay S_{min}) để tìm ra max S_{max} (hay min S_{min}), vị trí tương ứng của tải trọng là vị trí bất lợi nhất.

Chú thích:

Do ý nghĩa thực tế của bài toán, ta cần chọn hoành độ z_o nằm trong phạm vi đ.a.h. Ngoài ra, cần kiểm tra lại xem khi $z = z_o$ thì tất cả các tải trọng dùng để thiết lập biểu thức S có còn nằm trong phạm vi đ.a.h. nữa hay không. Nếu có tải trọng nào đã chạy ra ngoài đ.a.h. thì biểu thức S tìm được ở bước thứ nhất không phù hợp nữa. Trong trường hợp này ta cần lập lại biểu thức S tương ứng với tình huống có tải trọng chạy ra ngoài đ.a.h. và so sánh các tung độ trong tất cả các tình huống có thể xảy ra để tìm ra tung độ lớn nhất.

Ví dụ 3.5. Xác định vị trí để tính và giá trị để tính cho đại lượng S có *đường ảnh hưởng cong trơn tru chịu tải trọng như trên hình 3.29.*

Phương trình đ.a.h. $y = z - \dfrac{z^3}{36}$.

Biểu thức giải tích của S

$$S = f(z) = 10\left[z - \frac{z^3}{36}\right] + 20\left[(z-2) - \frac{(z-2)^3}{36}\right].$$

Sau khi lấy đạo hàm và cho bằng không:

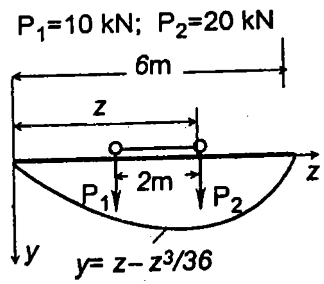
$$\frac{dS}{dz} = \frac{1}{6}\left[-15z_o^2 + 40z_o + 140\right] = 0$$

ta được $z_o = 14/3$ m (các tải trọng nằm trong phạm vi đường ảnh hưởng).

Đạo hàm cấp hai $\dfrac{d^2S}{dz^2} = -5z + \dfrac{20}{3}$.

Khi $z_o = \dfrac{14}{3}$ m thì $\dfrac{d^2S}{dz^2} = -\dfrac{50}{3}$.

Dấu trừ biểu thị z_o cho vị trí cực đại.



Hình 3.29

Thay $z = z_o = 14/3$ m vào biểu thức giải tích của S, ta được

$$S_{tính} = 10[14/3-(1/36)(14/3)^3] + 20[(14/3-2)-(14/3-2)^3/36] = 4960/81.$$

Đơn vị của kết quả bằng đơn vị của lực nhân với đơn vị của tung độ đường ảnh hưởng.

B. Đường ảnh hưởng đa giác có một dấu

Trong trường hợp này tiện nhất là dùng phương pháp thử dần để tìm vị trí bất lợi của tải trọng. Để giảm nhẹ khối lượng tính toán, ta cần chứng minh những tính chất sau đây của đ.a.h. có dạng đa giác.

1. Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng, trùng với một đỉnh nào đó của đường ảnh hưởng.

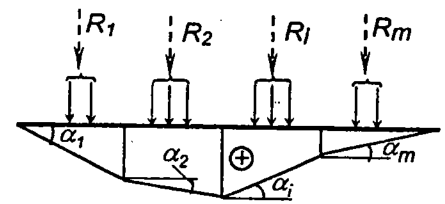
Giả sử có đ.a.h. đa giác mang dấu dương như trên hình 3.30. Các cạnh của đa giác nghiêng với phương đường chuẩn theo những góc α_1, α_2,..., α_i ,...,α_m. Dưới tác dụng của các tải trọng P, ta có thể xác định đại lượng S theo công thức (3.19):

$$S = \sum_{i=1}^{m} R_i\, y_i.$$

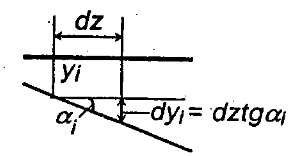
trong đó:

R_i – hợp lực của các lực P đặt trên đoạn thứ i;

y_i – tung độ đường ảnh hưởng tại vị trí tương ứng với hợp lực R_i.



Hình 3.30



Hình 3.31

Nếu giả thiết cho toàn bộ hệ lực dịch chuyển sang bên phải (hoặc bên trái) một đoạn bằng dz thì các tung độ y_i sẽ biến thiên một lượng bằng $dz\, tg\alpha_i$ (hình 3.31), do đó đại lượng S cũng biến thiên một lượng bằng:

$$dS = \sum_{i=1}^{m} R_i\, tg\alpha_i\, dz.$$

Suy ra

$$\boxed{\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^{m} R_i\, tg\alpha_i\ .} \qquad (3.24)$$

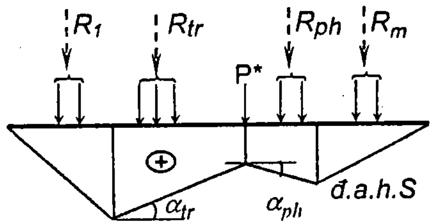
Như đã biết, điều kiện để xảy ra cực trị là dS/dz đổi dấu. Vì các góc nghiêng α_i không thay đổi về giá trị cũng như về dấu khi ta dịch chuyển đoàn tải trọng nên biểu thức (3.24) chỉ có thể thay đổi dấu khi các hợp lực R_i thay đổi. Điều kiện để cho các hợp lực R_i thay đổi khi đoàn tải trọng dịch chuyển là tối thiểu có một lực P nào đó chuyển dời từ đoạn thẳng này sang đoạn thẳng khác tức là đi qua một đỉnh nào đó của đ.a.h. Đó là điều cần chứng minh.

Tính chất trên chỉ là *điều kiện cần, chưa phải là điều kiện đủ*, nghĩa là khi có một tải trọng P nào đó đặt ở đỉnh của đ.a.h. thì chưa chắc vị trí đó cho cực trị.

Ký hiệu lực đặt ở đỉnh đường ảnh hưởng để cho dS/dz đổi dấu là P^*.

2. *Nếu tải trọng P^* đi qua một đỉnh lồi của đường ảnh hưởng thì đại lượng S có thể có giá trị tuyệt đối cực đại còn đi qua đỉnh lõm thì S có thể có giá trị tuyệt đối cực tiểu.*

Để chứng minh tính chất này ta đặt một lực P^* ở một đỉnh nào đó của đ.a.h. giả thiết là mang dấu dương (hình 3.32) và xác định số gia của đạo hàm dS/dz khi số gia $\Delta z > 0$ tức là khi P^* di chuyển từ bên trái sang bên phải đỉnh đang xét.



Hình 3.32

Như đã biết, khi số gia $\Delta z > 0$, nếu số gia $\Delta(dS/dz) < 0$ thì hàm S cực đại còn $\Delta(dS/dz) > 0$ thì hàm S cực tiểu. Trong trường hợp này, ta sẽ vận dụng công thức (3.24) để tính $\Delta(dS/dz)$ đồng thời tách riêng lực P^*, *không cho tham gia vào các hợp lực R_i.*

Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải một đoạn Δz, ta có

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^{m} R_i \, tg\alpha_i + P^* \, tg\alpha_{ph} .$$

Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái một đoạn Δz, ta có

$$\frac{dS}{dz} = \sum_{i=1}^{m} R_i \, tg\alpha_i + P^* \, tg\alpha_{tr} .$$

Vì chỉ có lực P^* đặt ở đỉnh nên trong hai lần dịch chuyển các hợp lực R_i không thay đổi. Do đó số gia

$$\Delta(dS/dz) = P^*(tg\alpha_{ph} - tg\alpha_{tr}) = P^* \, \Delta tg\alpha.$$

Từ hình 3.32 ta dễ dàng nhận thấy rằng: nếu đ.a.h. mang dấu dương và đỉnh lồi thì $\Delta tg\alpha < 0$ ($tg\alpha_{ph} < tg\alpha_{tr}$ về trị số đại số), còn khi đỉnh lõm thì $\Delta tg\alpha > 0$ ($tg\alpha_{ph} > tg\alpha_{tr}$ về trị số đại số).

Vậy khi P^* đặt ở đỉnh lồi: $\Delta(dS/dz)=P^*\Delta tg\alpha < 0$; S có giá trị cực đại.

Còn khi P^* đặt ở đỉnh lõm: $\Delta(dS/dz)=P^*\Delta tg\alpha > 0$; S có giá trị cực tiểu.

Đó là điều cần chứng minh.

Khảo sát đường ảnh hưởng mang dấu âm ta cũng được kết quả tương tự.

Tóm lại: *Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng đó đặt tại một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng.*

Dựa vào những nhận xét trên, ta có thể tìm vị trí bất lợi và $S_{tính}$ bằng phương pháp thử dần như sau:

1- *Phát hiện tất cả các vị trí cho S_{max} nếu đ.a.h. là dương hoặc S_{min} nếu đ.a.h. là âm. Tính các S_{max} hoặc S_{min}. Muốn vậy, lần lượt đặt từng tải trọng vào từng đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Mỗi lần đặt như vậy ta phải thực hiện các bước sau:*

✣ Cho đoàn tải trọng dịch sang trái một đoạn dz. Tính dS/dz theo (3.24).

✣ Cho đoàn tải trọng dịch sang phải một đoạn dz. Tính dS/dz theo (3.24).

✣ So sánh các giá trị dS/dz trong hai lần tính.

- Nếu những giá trị này thỏa mãn các điều kiện (3.22) hoặc (3.23) thì vị trí này cho ta một S_{max} hoặc S_{min}. Tính S_{max} hoặc S_{min}.
- Nếu không thỏa mãn thì cần dịch chuyển đoàn tải trọng tới vị trí khác để sao cho có một tải trọng nào đó đặt ở đỉnh lồi của đ.a.h. Dựa theo chiều hướng biến thiên của dS/dz ta thấy: muốn đạt được cực đại, nên dịch chuyển sang bên phải nếu dS/dz trong cả hai lần tính là dương, còn sang bên trái nếu dS/dz trong cả hai lần tính là âm. Muốn đạt cực tiểu thì làm ngược lại.

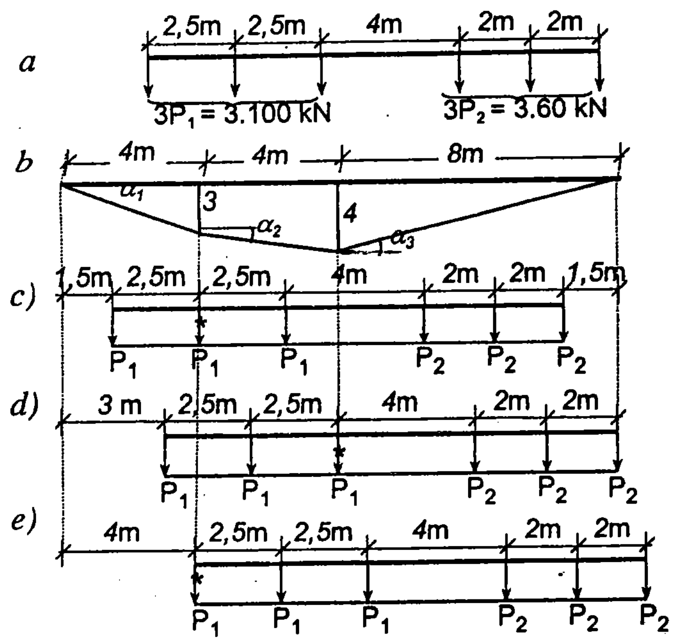
Về nguyên tắc, nếu có p lực và q đỉnh lồi thì cần thực hiện các bước tính nêu trên $p.q$ lần, tuy nhiên ta cần nhận xét trị số của các tải trọng và hình dạng của đ.a.h. để loại trừ bớt những trường hợp vô ích. *Thường nên bố trí các tải trọng lớn trên phần đ.a.h. có tung độ lớn và càng nhiều tải trọng nằm trong phạm vi đ.a.h. càng tốt.*

2- So sánh các S_{max} (hoặc các S_{min}) với nhau để tìm giá trị max S_{max} (hoặc min S_{min}). Đó là giá trị $S_{tính}$ cần tìm.

Chú thích:

- Trường hợp ngoài tải trọng tập trung còn có tải trọng phân bố thì vẫn có thể tìm vị trí bất lợi theo quy tắc trên nếu thay tải trọng phân bố bằng nhiều tải trọng tập trung.
- Khi đ.a.h. có hai dấu, nếu tải trọng di động gồm những lực độc lập với nhau và khoảng cách cực tiểu giữa chúng đã biết thì ta có thể cắt rời thành từng nhóm để bố trí riêng biệt trên từng phần đ.a.h. dương hoặc âm. Khi bố trí trên phần đ.a.h. dương ta sẽ được $maxS_{max}$ còn khi bố trí trên phần đ.a.h. âm ta được $minS_{min}$. Trường hợp tải trọng không thể cắt rời ra được, khi bố trí nếu có phần tải trọng nào nằm trên đ.a.h. có dấu khác với dấu đang xét thì ta phải kể đến chúng. Tất nhiên khi đó những tải trọng này sẽ làm cho giá trị của đại lượng nghiên cứu giảm xuống.

Ví dụ 3.6. Tìm giá trị để tính của đại lượng S có đường ảnh hưởng như trên hình 3.33b. Sơ đồ tải trọng di động cho trên hình 3.33a.



Hình 3.33

Trước tiên ta tính *tang* các góc nghiêng của các đoạn đ.a.h.:

$tg\alpha_1 = 3/4;\quad tg\alpha_2 = (4-3)/4 = 1/4;\quad tg\alpha_3 = -4/8 = -1/2;$

✦ *Tính thử lần thứ nhất:* Chọn tải trọng P_1 thứ hai làm lực P^* đặt tại đỉnh có tung độ bằng *3*. Tải trọng này được đánh dấu x như trên hình 3.33c.

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = (100+100)3/4 + 100(1/4) + 3.60(-1/2) = 175-90 > 0.$
- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = 100(3/4) + (100+100)1/4 + 3.60(-1/2) = 125-90 > 0.$

Ta thấy các điều kiện (3.22) không thỏa mãn, tức là vị trí này không cho cực đại. Vì trong cả hai lần dịch chuyển dS/dz đều dương nên ta chuyển dời đoàn tải trọng về phía bên phải.

✦ *Tính thử lần thứ hai:* Khi chuyển đoàn tải trọng về bên phải, lực đầu tiên gặp đỉnh đ.a.h. là lực P_1 thứ ba, do đó ta chọn lực này là lực P^* và đặt tại đỉnh có tung độ bằng *4* (hình 3.33d).

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = 100.3/4 + (100+100).1/4 + 3.60(-1/2) = 125-90 > 0.$
- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100-110 < 0.$

Điều kiện (3.22) thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính S_{max}:

$$S_{max} = \sum_{i=1}^{n} P_i\, y_i = 100.3(3/4) + 100[3+1,5.(1/4)] + 100.4 + 60.4.(1/2) + $$
$$+ 60.2.(1/2) = 1142,5.$$

Chưa kết luận được giá trị *1142,5* là giá trị để tính sau hai lần thử. Vì có thể tồn tại S_{max} khác lớn hơn. Do đó cần tiếp tục phát hiện thêm các vị trí khác.

✦ *Tính thử lần thứ ba:* Chọn tải trọng P_1 thứ nhất làm lực P^* và đặt tại đỉnh có tung độ bằng *3* (hình 3.33e).

- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = 100.3/4 + 100.1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 100-110 < 0.$
- Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn *dz*, tính
  $dS/dz = (100+100).1/4 + (100+60+60)(-1/2) = 50-110 < 0.$

Ta thấy vị trí này không cho S_{max}.

Về nguyên tắc, trong trường hợp này có *6* lực và *2* đỉnh lồi nên phải thử *12* lần. Nhưng có thể dựa vào những nhận xét sau để loại trừ bớt, những lần thử không cần thiết:

- ✧ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải vị trí trên hình 3.33d thì sẽ có một số tải trọng vượt ra khỏi phạm vi đường ảnh hưởng. Hơn nữa sau lần thử thứ ba ta thấy trong cả hai lần dịch chuyển dS/dz đều âm, điều đó có nghĩa là nếu dịch chuyển sang bên phải một chút thì cũng không có cực trị mà cần dịch chuyển về bên trái.
- ✧ Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái vị trí trên hình 3.33c thì sẽ có một tải trọng P_1 vượt ra ngoài đ.a.h., các tải trọng lớn không đặt vào phạm vi đường ảnh hưởng có tung độ lớn, do đó ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Bởi vậy sau ba lần thử ta có thể kết luận được là giá trị $maxS_{max} = 1142{,}5$ và vị trí bất lợi như trên hình 3.33d.

C. Đường ảnh hưởng tam giác

Trong thực tế ta thường gặp đ.a.h. có dạng hình tam giác (ví dụ đường ảnh hưởng của mômen uốn trong dầm đơn giản hay của nội lực trong một số thanh dàn). Bởi vậy việc nghiên cứu vị trí bất lợi của đoàn tải trọng tương ứng với đ.a.h. tam giác để đề ra các tiêu chí đơn giản và cụ thể là có ý nghĩa thực tiễn.

Giả sử trên đ.a.h. tam giác có đoàn tải trọng di chuyển như trên hình 3.34. Như trên đã nói, vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi có một lực tập trung nào đó đặt ở một đỉnh lồi. Gọi lực tập trung đặt ở đỉnh tam giác là lực P^*; ký hiệu hợp lực các lực đặt ở bên trái lực P^* là R_{tr} còn hợp lực của các lực đặt ở bên phải lực P^* là R_{ph}.

Lần lượt cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái và bên phải mỗi đoạn bằng dz, căn cứ vào điều kiện cực đại (3.22) ta có thể thiết lập điều kiện xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng trong trường hợp này như sau:

$$(R_{tr}+P^*)tg\alpha_1+R_{ph}tg\alpha_2 \ \overset{>}{\underset{=}{>}} 0 \qquad \text{và} \qquad R_{tr}tg\alpha_1+(R_{ph}+P^*)\,tg\alpha_2 \ \overset{<}{\underset{<}{=}} \ 0.$$

Nhưng $tg\alpha_1 = c/a$; $tg\alpha_2 = -c/b$, nên:

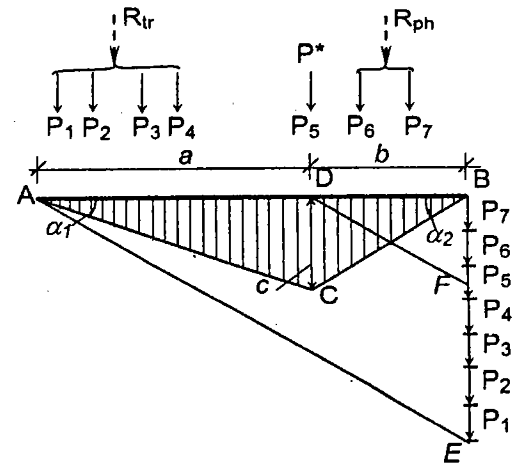
- Khi chuyển đoàn tải trọng về bên trái $\dfrac{R_{tr}+P^*}{a} \overset{>}{\underset{=}{>}} \dfrac{R_{ph}}{b}$, (3.25a)
- Khi chuyển đoàn tải trọng về bên phải $\dfrac{R_{tr}}{a} \overset{<}{\underset{<}{=}} \dfrac{R_{ph}+P^*}{b}$. (3.25b)

Điều kiện (3.25) là điều kiện cần và đủ dưới dạng giải tích để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng đặt trên đ.a.h. tam giác.

Có thể tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng một cách đơn giản bằng đồ thị như trên hình 3.34 và thực hiện như sau:

Tại điểm B, lần lượt vẽ các véctơ biểu thị các lực P_7, P_6,..., P_1 theo thứ tự từ B đến A trên một đường thẳng bất kỳ không trùng với đường chuẩn. Gọi E là điểm mút của véctơ cuối cùng. Nối AE và từ D kẻ đường thẳng song song với AE cắt BE tại F. Điểm F nằm trên véctơ biểu thị lực nào thì lực đó là lực P cần đặt ở đỉnh tam giác để có vị trí bất lợi.*

Hình 3.34



Thật vậy, từ quan hệ tỷ lệ giữa các đoạn bị chắn bởi các đường song song, ta có:

$$\frac{FE}{a} = \frac{BF}{b}.$$

Nếu thay $Fe \le R_{tr} + P^*$ và $BF \ge R_{ph}$ vào đẳng thức trên ta sẽ được điều kiện (3.25a).

Nếu thay $Fe \ge R_{tr}$ và $BF \le R_{ph} + P^*$ vào đẳng thức trên ta sẽ được điều kiện (3.25b).

Như vậy là cách dựng hình nói trên thỏa mãn điều kiện cần và đủ để tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng.

Chú thích:

- Cách tìm vị trí bất lợi nói trên chỉ đúng trong trường hợp không có một tải trọng nào vượt ra ngoài phạm vi đ.a.h. Nếu có tải trọng nào vượt ra ngoài thì khi khảo sát điều kiện (3.25) ta chỉ xét các lực nằm trong phạm vi đ.a.h.
- Nếu chiều dài của đoàn tải trọng lớn hơn chiều dài của đường ảnh hưởng thì ta phải thử nhiều lần với các lực khác nhau chọn làm P^*. Lúc này có thể có nhiều vị trí tải trọng thỏa mãn điều kiện (3.25) do đó sẽ có nhiều giá trị S_{max}. Ta chọn giá trị nào lớn nhất để tính toán.
- Trong cách giải bằng họa đồ, nếu điểm F nằm ở ranh giới giữa hai lực P_{i-1} và P_i thì cả hai lực đó đều có thể là lực P^*.
- Trường hợp khi đoàn tải trọng phân bố, ta có $P^* = 0$ và điều kiện xảy ra vị trí bất lợi (3.25) sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\frac{R_{tr}}{a} = \frac{R_{ph}}{b}. \qquad (3.26)$$

D. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ

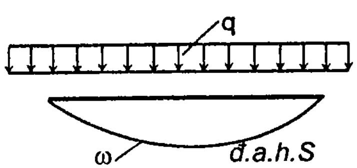
Ta xét ba trường hợp:

1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.35)

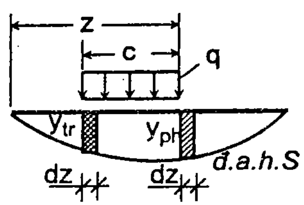
Trong trường hợp này, cần chất tải trọng trên toàn bộ đường ảnh hưởng và tìm $S_{tính}$ theo công thức

$$S_{tính} = q.\,\omega, \qquad (3.27)$$

trong đó ω - diện tích của toàn bộ đ.a.h.



Hình 3.35



Hình 3.36

2. Chiều dài của tải trọng nhỏ hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.37)

Ta sẽ chứng minh: *Vị trí bất lợi của đoàn tải trọng phân bố đều sẽ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.*

Thật vậy, đại lượng S tương ứng với một vị trí bất kỳ của tải trọng bằng

$$S = q.\,\omega^{z}_{z-c}\,,$$

trong đó: ω^{z}_{z-c} – diện tích của phần *đ.a.h. S* ứng dưới đoạn tải trọng.

Hàm này liên tục và đạo hàm cấp một của nó cũng liên tục, ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dS}{dz} = q\frac{d\omega}{dz} = 0.$$

Vị trí bất lợi sẽ xảy ra khi $d\omega / dz = 0$.

Khi tải trọng di chuyển với giá trị dz, diện tích sẽ tăng thêm một lượng bằng $y_{ph}dz$ (phần gạch chéo một lần trên hình 3.36) và giảm đi một lượng bằng $y_{tr}dz$ (phần gạch chéo hai lần trên hình 3.36).

Do đó: $\quad d\omega = y_{ph}\,dz - y_{tr}\,dz.$

Suy ra $\quad d\omega / dz = y_{ph} - y_{tr} = 0.$

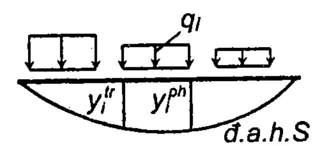
Vậy điều kiện cực trị sẽ xảy ra khi $y_{ph} = y_{tr}$. Đó là điều cần chứng minh.

3. Trường hợp có nhiều đoạn tải trọng phân bố đều với cường độ khác nhau và chiều dài chung nhỏ hơn chiều dài của đường ảnh hưởng (hình 3.37)

Cũng lý luận tương tự như trên ta có điều kiện cực trị:

$$\frac{dS}{dz} = \sum_i q_i \frac{d\omega_i}{dz} = \sum_i q_i (y_i^{ph} - y_i^{tr}) = 0.$$

Do đó $\quad \sum_i q_i y_i^{ph} = \sum_i q_i y_i^{tr}.$



Hình 3.37

Như vậy, trong trường hợp này, *vị trí bất lợi của tải trọng xảy ra khi tổng các tích số giữa cường độ tải trọng với tung độ đường ảnh hưởng tại các đầu trái của từng đoạn tải trọng tương ứng bằng tổng các tích số giữa cường độ tải trọng với tung độ đường ảnh hưởng tại các đầu phải của từng đoạn tải trọng tương ứng.*

3.11. Khái niệm về tải trọng tương đương

Khi thiết kế kết cấu chịu tải trọng di động, thường phải lặp lại nhiều lần việc tìm vị trí bất lợi của một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nào đó trên một số dạng đường ảnh hưởng có hình dạng giống nhau mà chỉ khác về độ lớn. Do đó, để tiết kiệm thời gian và sức lao động ta có thể đặt vấn đề là tìm một dạng tải trọng đơn giản nào đó thay thế cho đoàn tải trọng tiêu chuẩn phải tính để sao cho tải trọng này gây ảnh hưởng lớn nhất đến đại lượng S bằng ảnh hưởng lớn nhất do đoàn tải trọng tiêu chuẩn phải tính gây ra. Người ta đã thực hiện được điều đó và sử dụng dạng tải trọng phân bố đều để thay thế gọi là *tải trọng tương đương*.

Như vậy, *tải trọng tương đương đối với một đường ảnh hưởng S nào đó là tải trọng phân bố đều trên toàn chiều dài của đường ảnh hưởng với cường độ q_{td} để sao cho trị số để tính của đại lượng S là $S_{tính}$ ($maxS_{max}$ hay $minS_{min}$) do nó gây ra bằng trị số $S_{tính}$ do tải trọng được thay thế gây ra.*

Khi đó theo (3.27) ta có

$$S_{tính} = q_{td} \cdot \omega , \tag{3.28}$$

với ω là diện tích của *đ.a.h. S*.

Từ đó suy ra
$$q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega} . \tag{3.29}$$

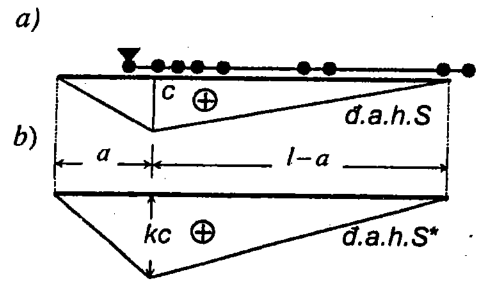
Công thức này được dùng để xác định cường độ của tải trọng tương đương. Để xác định $S_{tính}$ do tải trọng được thay thế gây ra, ta vận dụng các quy tắc trình bày ở mục 3.10.

Thoáng nhìn qua, ta thấy công việc này có vẻ luẩn quẩn vì cần có q_{td} để xác định $S_{tính}$ mà q_{td} lại xác định theo $S_{tính}$. Thực ra không phải hoàn toàn như vậy. Trước khi giải đáp điều đó ta cần chứng minh tính chất sau:

Tải trọng tương đương chỉ phụ thuộc chiều dài, hình dạng của đường ảnh hưởng mà không phụ thuộc độ lớn của các tung độ đường ảnh hưởng.

Thật vậy, giả sử trên *đ.a.h. S* có dạng tam giác (hình 3.38a) ta đã tìm được vị trí bất lợi của đoàn tải trọng và xác định được giá trị để tính của đại lượng S là $S_{tính}$; tải trọng tương đương bằng:

$$q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega} .$$



Hình 3.38

Bây giờ ta xét *đ.a.h. S** (hình 3.38b) có cùng chiều dài và hình dạng với *đ.a.h. S* nhưng độ lớn của các tung độ tăng lên k lần. Lúc này vị trí bất lợi của đoàn tải trọng không thay đổi vì *tang* của góc nghiêng của đ.a.h. trong hai trường hợp thay đổi tỷ lệ với nhau nên điều kiện xảy ra cực trị không đổi. Đại lượng $S_{tính}$ và diện tích ω của đ.a.h. sẽ tăng lên k lần vì các tung độ tăng lên k lần. Ta có:

$$q^*_{td} = \frac{S^*_{tính}}{\omega^*} = \frac{k\, S_{tính}}{k\, \omega} = \frac{S_{tính}}{\omega} .$$

Đối chiếu với trường hợp trên ta thấy $q^*_{td} = q_{td}$. Đó là điều cần chứng minh.

Như vậy ứng với mỗi loại tải trọng tiêu chuẩn, với mỗi hình dạng và chiều dài của đường ảnh hưởng khác nhau ta chỉ cần xác định $S_{tính}$ và suy ra q_{td} trong một lần đầu tiên, sau đó có thể dùng giá trị q_{td} này để tính $S_{tính}$ theo (3.28) cho các đ.a.h. khác có cùng chiều dài và hình dạng.

Trong các "Sổ tay thiết kế" người ta đã thiết lập sẵn các bảng tải trọng tương đương cho nhiều đoàn tải trọng di động và các dạng đ.a.h. khác nhau tương ứng với từng chiều dài của đ.a.h.

Khi dùng tải trọng tương đương để tìm $S_{tính}$ ta cần:

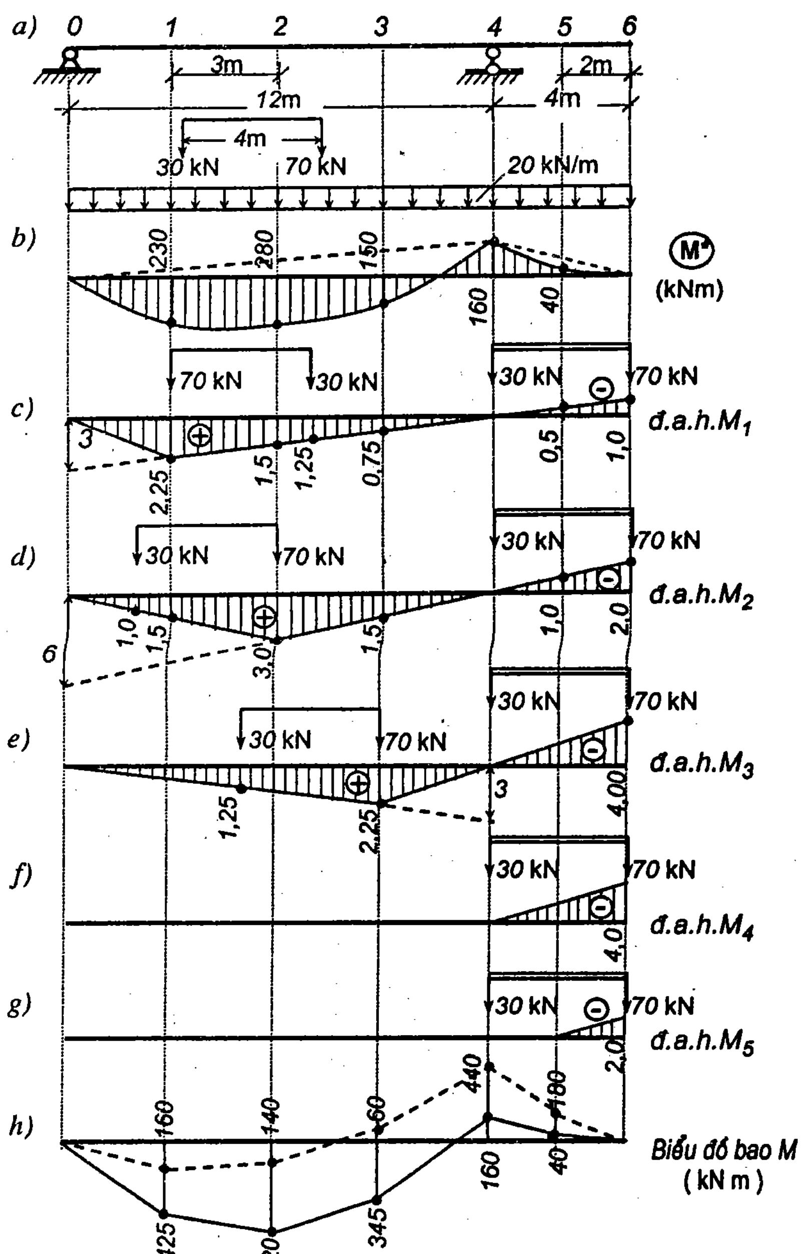
- Căn cứ vào tải trọng và dạng đ.a.h. đang xét, tìm bảng tải trọng tương đương tương ứng.
- Căn cứ vào chiều dài của đ.a.h. đang xét, tìm giá trị của q_{td}.
- Sử dụng công thức (3.28) để xác định $S_{tính}$.

3.12. Khái niệm về biểu đồ bao nội lực

Các công trình trong thực tế thường chịu tác dụng đồng thời của tải trọng bất động và tải trọng di động. Do đó, khi tính toán những công trình này ta cần phải xác định được giá trị bất lợi nhất của nội lực cho từng tiết diện đối với tải trọng di động đã cho kết hợp với nội lực do tải trọng bất động gây ra. Để thực hiện yêu cầu đó ta vận dụng khái niệm về biểu đồ bao nội lực.

Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất có thể xảy ra tại tiết diện tương ứng do tải trọng bất động và tải trọng di động gây ra.

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực thông qua một ví dụ cụ thể là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm đơn giản có một đầu thừa (hình 3.39a) chịu tải trọng di động có dạng hai lực tập trung và tải trọng bất động phân bố đều. Tất nhiên, cách vẽ cũng có thể áp dụng cho mọi trường hợp khác.



Hình 3.39

1) *Vẽ đường ảnh hưởng nội lực tại một số tiết diện chỉ định trên dầm.* Trong trường hợp hệ trên hình 3.39a, các tiết diện đó là *0, 1, 2, 3, 4, 5* và *6*. Tất nhiên, càng thực hiện với nhiều tiết diện thì biểu đồ bao tìm được càng sát với kết quả chính xác nhưng khối lượng tính toán sẽ tăng lên theo. Trên hình 3.39c, d, e, f, g là các đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện *1, 2, 3, 4, 5*.

2) *Xác định nội lực do tải trọng bất động gây ra* bằng cách vẽ biểu đồ nội lực hoặc bằng cách sử dụng các đường ảnh hưởng như đã trình bày trong mục 3.8. Kết quả tính ghi trên hình 3.39b và trên cột 2 của bảng 3.1.

3) *Xác định các giá trị để tính max hoặc min của nội lực cho từng tiết diện.* Tương ứng với mỗi tiết diện ta cần vận dụng phương pháp đã trình bày trong mục 3.10 để xác định vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động, tiếp đó suy ra giá trị để tính.

Ví dụ với tiết diện *1* (hình 3.39c):

- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên *đ.a.h.* M_1 tương ứng với dấu dương là vị trí của lực có một nét nối ngang. Giá trị để tính tương ứng:

$$M_{1,max} = 70.2{,}25 + 30.1{,}25 = 195 \text{ kNm}.$$

- Vị trí bất lợi của tải trọng di động trên *đ.a.h.* M_1 tương ứng với dấu âm là vị trí của lực có hai nét nối ngang. Giá trị để tính tương ứng:

$$M_{1,min} = 70.(-1) + 30.0 = -70 \text{ kNm}.$$

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ tính được các giá trị $M_{k,max}$ và $M_{k,min}$ do tải trọng di động gây ra. Kết quả tính ghi trên các cột 3 và 4 của bảng 3.1.

Bảng 3.1

Tiết diện	M* (kNm)	Mmax (kNm)	Mmin (kNm)	M^bmax (kNm)	M^bmin (kNm)
1	230	70.2,25 + 30.1,25 = 195	70(-1) + 30.0 = -70	230 + 195 = 425	230 - 70 = 160
2	280	70.3 + 30.1 = 240	70(-2) = - 140	280 + 240 = 520	280 - 140 = 140
3	150	70.2,25+30.1,25 = 195	70(-3) = - 210	150 + 195 = 345	150 - 210 = - 60
4	- 160	0	70(-4) = - 280	-160 + 0 = - 160	-160- 280= - 440
5	- 40	0	70(-2) = - 140	- 40 + 0 = - 40	- 40 - 140 = -180

4) *Vẽ biểu đồ bao nội lực do tải trọng di động và bất động đồng thời gây ra.* Sau khi đã tính được các giá trị max và min của nội lực do tải trọng di động gây ra, đem cộng đại số những giá trị này với các giá trị nội lực tại từng tiết diện tương ứng lấy trên biểu đồ do tải trọng bất động gây ra ta sẽ tính được các tung độ của biểu đồ bao nội lực

$$\boxed{M^b_{k,max} = M_{k,max} + M^*_k.} \quad (3.30)$$

$$\boxed{M^b_{k,min} = M_{k,min} + M^*_k.} \quad (3.31)$$

Ví dụ, tại tiết diện *1* ta có: $M^b_{1,max} = 195 + 230 = 425$ kNm.

$M^b_{1,min} = -70 + 230 = 160$ kNm.

Cũng thực hiện như thế với các tiết diện khác ta sẽ xác định được các tung độ của biểu đồ bao. Kết quả tính ghi trên các cột 5 và 6 của bảng 3.1.

Sau khi dựng các tung độ tìm được và nối lại với nhau bằng các đoạn thẳng, ta sẽ được biểu đồ bao mômen uốn max (đường liền nét) và biểu đồ bao mômen uốn min (đường đứt nét) như trên hình 3.39h.

Cần chú ý là với cách làm như vậy ta chỉ được các giá trị đúng của biểu đồ bao tại các tiết diện đã chỉ định. Trên thực tế biểu đồ bao có dạng đường cong chứ không phải là đường đa giác như đã tìm được.

CÂU HỎI ÔN TẬP

3.1. Nhiệm vụ cơ bản khi tính công trình chịu tải trong di động là gì? Nêu phương hướng chung để thực hiện nhiệm vụ tính công trình chịu tải trọng di động.

3.2. Định nghĩa đường ảnh hưởng. Nêu nguyên tắc và những quy ước cần thống nhất khi vẽ đường ảnh hưởng.

3.3. Phân biệt ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng *S* và biểu đồ nội lực *S*.

3.4. Đường ảnh hưởng nội lực ứng dưới một phần xác định của hệ tĩnh định có dạng như thế nào?

3.5. Trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng của phản lực, nội lực trong dầm đơn giản có đầu thừa và dầm côngxôn. Nêu các nhận xét và cách vẽ thực hành đ.a.h. cho các hệ này.

3.6. Trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực.

3.7. Trình bày cách vẽ đ.a.h. của các thành phần phản lực (phản lực đứng, lực xô, lực vòm) trong hệ ba khớp.

3.8. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện *k* trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.

3.9. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. lực cắt tại tiết diện *k* trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.

3.10. Trình bày cách vẽ thực hành đ.a.h. lực dọc tại tiết diện *k* trong hệ ba khớp. Cho ví dụ.

3.11. Trình bày cách sử dụng phương pháp tách mắt để vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của dàn.

3.12. Trình bày cách sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản để vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của hệ dàn dầm. Cho ví dụ.

3.13. Trình bày cách vẽ đ.a.h. lực dọc trong các thanh của hệ dàn vòm ba khớp. Cho ví dụ.

3.14. Trình bày cách vẽ đ.a.h. trong hệ ghép tĩnh định. Cho ví dụ minh họa.

3.15. Thiết lập các công thức tính giá trị của đại lượng nghiên cứu S theo đường ảnh hưởng tương ứng với các trường hợp sau:

hệ lực tập trung;

lực phân bố;

mômen tập trung;

mômen phân bố.

3.16. Chứng minh rằng ảnh hưởng của hệ tải trọng tập trung đến đại lượng S có thể thay thế bằng ảnh hưởng của hợp lực các tải trọng tập trung khi *đ.a.h.* S là một đoạn thẳng liên tục.

3.17. Thế nào là vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động? Chứng minh điều kiện cần để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác một dấu. Nêu thứ tự thực hiện khi tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng di động trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu.

3.18. Thế nào là tải trọng tương đương? Tải trọng tương đương phụ thuộc và không phụ thuộc những yếu tố nào?

3.19. Thế nào là biểu đồ bao nội lực? Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ biểu đồ bao nội lực.

4 Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng đàn hồi tuyến tính

Nghiên cứu cách xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính nhằm phục vụ hai mục đích sau:

* Kiểm tra độ cứng của công trình.
* Chuẩn bị cơ sở cho việc nghiên cứu các hệ siêu tĩnh.

Trong Sức bền vật liệu, ta đã nghiên cứu cách tìm phương trình đường đàn hồi của hệ đơn giản. Trong Cơ học kết cấu, để đạt được hai mục đích nói trên ta không cần tìm đường đàn hồi của hệ thanh mà chỉ cần xác định chuyển vị tại các vị trí xác định trong hệ thanh.

Khi nghiên cứu cách xác định chuyển vị của hệ thanh đàn hồi tuyến tính ta thừa nhận các giả thiết sau:

✦ Tải trọng gây ra chuyển vị là tải trọng tác dụng tĩnh.

✦ Chuyển vị của hệ nghiên cứu tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

Để xác định chuyển vị trong hệ thanh ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng:

✤ Xuất phát từ *nguyên lý bảo toàn năng lượng*, xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng đàn hồi.

✤ Xuất phát từ *nguyên lý công khả dĩ (còn gọi là nguyên lý công ảo)* của hệ thanh.

4.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị

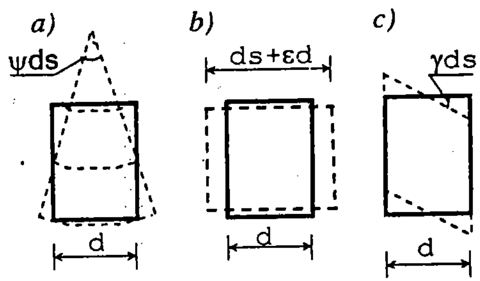
Sự thay đổi hình dạng của công trình dưới tác dụng của nguyên nhân bên ngoài như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, gọi là biến dạng. Biến dạng của công trình là do kết quả biến dạng của các phân tố thanh vô cùng bé trong các cấu kiện của công trình hay nói khác đi là do kết quả của sự thay đổi kích thước và hình dạng của các phân tố thanh đó.

Trong phạm vi bài toán hệ thanh phẳng, biến dạng của mỗi phân tố thanh có chiều dài ds được phân tích thành ba thành phần:

✦ Biến dạng xoay $\psi\, ds$ giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 4.1a). ψ là *biến dạng xoay tỷ đối* (góc hợp giữa hai tiết diện nói trên khi phân tố thanh có chiều dài bằng đơn vị).

✦ Biến dạng dọc trục $\varepsilon\, ds$ giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 4.1b). ε là *biến dạng dọc trục tỷ đối.*

✦ Biến dạng trượt $\gamma\, ds$ giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh (hình 4.1c). γ là *góc trượt tỷ đối.*



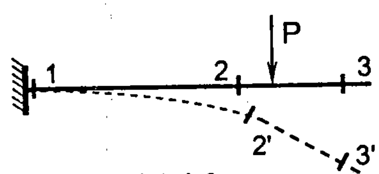
Hình 4. 1

Chiều dương của các đại lượng này tương ứng với các chiều vẽ trên hình 4.1.

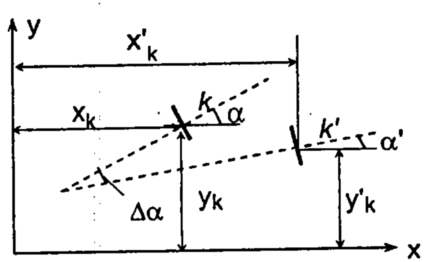
Khi hệ biến dạng, hầu hết các phân tố thanh sẽ có vị trí mới. *Sự thay đổi vị trí của phân tố thanh gọi là chuyển vị.* Như vậy có thể nói chuyển vị là hệ quả của biến dạng.

Một phân tố thanh trong hệ có thể có ba khả năng (hình 4.2):

- Không chuyển vị nhưng có biến dạng (phân tố thanh *1*, phân tố thanh này ở ngay tại ngàm nên không chuyển vị được nhưng vẫn bị biến dạng vì tại ngàm vẫn có nội lực).
- Có chuyển vị và có biến dạng (phân tố thanh 2).
- Có chuyển vị nhưng không biến dạng (phân tố thanh *3*, phân tố thanh này không bị biến dạng vì tại đó không có nội lực, song vẫn có chuyển vị do hệ quả biến dạng của các phân tố thanh khác).



Hình 4. 2



Hình 4. 3

Trong thực hành thường sử dụng khái niệm *chuyển vị của tiết diện.*

Giả sử xét một tiết diện k bất kỳ được xác định trong hệ tọa độ xOy (hình 4.3). Ở vị trí ban đầu, tiết diện được xác định theo các tọa độ x_k, y_k và góc nghiêng α của tiếp tuyến tại tiết diện k so với phương x. Sau khi hệ biến dạng, tiết diện k có vị trí mới là k' và được xác định theo x'_k, y'_k, α'.

Trong bài toán phẳng, nói chung chuyển vị của tiết diện bao gồm ba thành phần:

chuyển vị thẳng theo phương x: $\quad \Delta x = x'_k - x_k$;

chuyển vị thẳng theo phương y: $\quad \Delta y = y'_k - y_k$;

chuyển vị góc: $\quad \Delta\alpha = \alpha' - \alpha$.

Ký hiệu chung cho các chuyển vị thẳng cũng như chuyển vị góc bằng Δ có mang theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí, phương của chuyển vị còn chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Δ_{km} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m gây ra.

Khi *nguyên nhân gây ra chuyển vị bằng đơn vị* thì ký hiệu bằng δ và gọi là *chuyển vị đơn vị*, nghĩa là:

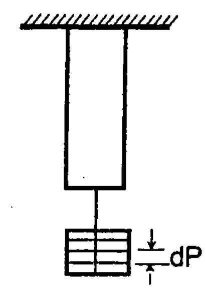
δ_{km} – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra.

4.2. Thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính

A. Nguyên lý bảo toàn năng lượng

Cách tính chuyển vị theo thế năng dựa trên cơ sở áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng cho một hệ đàn hồi cô lập. Trong mục này ta sẽ ôn lại những khái niệm cần thiết có liên quan đến vấn đề đang nghiên cứu.

Để trình bày được cụ thể ta khảo sát một thanh chịu kéo đúng tâm. Khi kéo thanh bởi một lực tăng lên từ từ bằng cách thêm dần các tải trọng vô cùng bé dP (hình 4.4), thì mỗi lần thêm tải trọng ta thấy thanh bị dãn dài thêm và điểm đặt lực hạ thấp xuống một chút tức là thế năng của ngoại lực giảm xuống đồng thời thế năng biến dạng của thanh tăng lên. Như vậy, thế năng đã chuyển biến từ dạng này qua dạng khác: *phần thế năng tác dụng vào thanh hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng của thanh.*



Hình 4.4

Hiện tượng này cũng xảy ra với tất cả các loại biến dạng khác của hệ đàn hồi, do đó ta có thể xem hệ đàn hồi như là một môi trường có thể biến thế năng từ dạng này sang dạng khác.

Tất nhiên sự biến đổi thế năng đó chỉ đúng khi ngoại lực tác dụng cân bằng với nội lực. Hơn nữa, vì tải trọng tác dụng tĩnh nên động năng không biến đổi. Ngoài ra ta cũng có thể bỏ qua phần năng lượng do các hiện tượng từ, điện, nhiệt xảy ra kèm theo biến dạng tĩnh của vật thể đàn hồi vì phần năng lượng này rất nhỏ. Như vậy ta có thể phát biểu:

Toàn bộ thế năng của ngoại lực U_P biến thành thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ đàn hồi nếu biến dạng không phá vỡ sự cân bằng của hệ

$$U_P = U. \qquad (4.1)$$

Như đã biết, năng lượng được đo bằng công sinh ra trong vật thể đàn hồi. Do đó, thế năng U_P được đo bằng công T của các ngoại lực sinh ra trên những chuyển vị của các điểm đặt lực. Công T dương vì chuyển vị cùng chiều với ngoại lực. Thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ đàn hồi được đo bằng công A^* của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ. Công A^* âm vì nội lực có khuynh hướng ngăn cản biến dạng của hệ:

Như vậy: $$T = -A^* \quad \text{hay} \quad T + A^* = 0. \qquad (4.2)$$

Từ (4.1) và (4.2) ta suy ra:

$$\boxed{U = T = -A^*.} \qquad (4.3)$$

Như vậy: *Về trị số, thế năng biến dạng tích lũy trong hệ đàn hồi bằng công T của các ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công A^* của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.*

Ta sẽ sử dụng công thức (4.3) để thiết lập biểu thức của thế năng. Muốn vậy trước tiên cần xác định công của ngoại lực và công của nội lực trong hệ đàn hồi.

B. Công của ngoại lực

Như đã biết: *công được đo bằng tích số giữa lực tác dụng với trị số chuyển vị của điểm đặt lực theo phương của lực*. Phát biểu như vậy chỉ đúng khi lực không thay đổi giá trị trong quá trình điểm đặt lực chuyển dời.

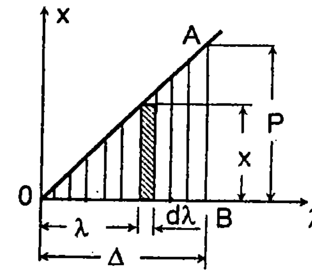
Trong trường hợp đang xét, tải trọng P tác dụng tĩnh và vật liệu tuyệt đối

đàn hồi nên trong quá trình chuyển vị của hệ, tải trọng không giữ nguyên trị số mà biến thiên cùng với chuyển vị theo quan hệ bậc nhất.

Do đó, công của lực sẽ không bằng tích số giữa trị số cuối cùng P của lực với trị số cuối cùng Δ của chuyển vị tương ứng, mà nhỏ hơn tích số đó.

Gọi X là giá trị của lực biến thiên và λ là giá trị chuyển vị tương ứng (hình 4.5). Khi chuyển vị thay đổi một lượng vô cùng bé thì công của lực X bằng tích số:

$$dT = Xd\lambda.$$



Hình 4.5

Nếu chấp nhận giả thiết: *giữa chuyển vị và ngoại lực có sự liên hệ tuyến tính* thì đồ thị trên hình 4.5 là đường thẳng. Ta thấy công phân tố dT là diện tích của phần gạch chéo trên hình 4.5. Do đó công tổng cộng khi lực X đạt tới giá trị P và chuyển vị λ đạt tới giá trị Δ sẽ bằng diện tích của tam giác OAB, tức là:

$$T = \frac{1}{2} P.\Delta. \qquad (4.4)$$

Trong trường hợp có nhiều lực $P_1, P_2, ..., P_n$; nếu gọi $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ là các chuyển vị tương ứng theo phương của các lực $P_1, P_2, ..., P_n$ do tất cả các lực đó gây ra thì:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \Delta_i. \qquad (4.5)$$

Như vậy: *Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của các ngoại lực tập trung đồng thời cùng tác dụng tĩnh được xác định bằng nửa tổng các tích số của giá trị cuối cùng của mỗi ngoại lực với giá trị cuối cùng của chuyển vị tổng cộng tương ứng.*

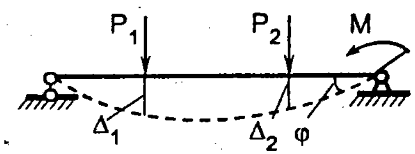
Đó là định lý do Clapeyron (1799-1864) đề xuất vào năm 1852.

Cần hiểu giá trị cuối cùng của chuyển vị tổng cộng tương ứng là giá trị chuyển vị Δ_i theo phương lực P_i do tất cả các lực có giá trị cuối cùng gây ra.

Ví dụ, tìm công của các lực P_1, P_2, mômen M tác dụng trên dầm vẽ ở hình 4.6. Gọi Δ_1, Δ_2, φ là giá trị cuối cùng của chuyển vị theo phương

P_1, P_2, M do tất cả các lực và mômen đó gây ra, ta có:

$$T = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + M\varphi).$$



Hình 4.6

Chú thích :

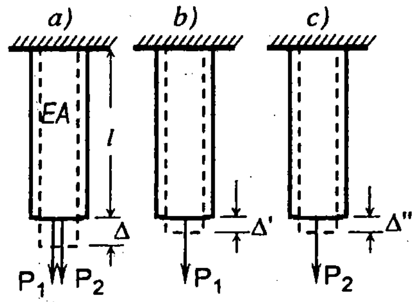
1. *Công tổng cộng không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các ngoại lực.*

Thật vậy, giả sử cho hai lực kéo P_1 và P_2 tác dụng đồng thời (hình 4.7a). Công của hai lực đó là:

$$T = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\Delta \text{ với } \Delta = \frac{(P_1 + P_2)l}{EA}.$$

Vậy :

$$T = \frac{(P_1 + P_2)^2 l}{2EA} = \frac{P_1^2 l}{2EA} + \frac{P_2^2 l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA}.$$



Hình 4.7

Bây giờ giả sử cho P_1 tác dụng trước (hình 4.7b).

- Công của lực đó là: $T_1 = \frac{1}{2}P_1\Delta'$ với $\Delta' = \frac{P_1 l}{EA}$.

Sau khi lực P_1 đạt tới giá trị cuối cùng của nó, ta cho lực P_2 tác dụng (hình 4.7c). Gọi Δ'' là độ dãn dài của thanh do riêng P_2 gây ra: $\Delta'' = \frac{P_2 l}{EA}$. Lúc này:

- Lực P_2 sinh công $T_2 = \frac{1}{2}P_2\Delta''$.
- Lực P_1 sinh công $T'_1 = P_1\Delta''$ (không phải chia đôi vì lực P_1 không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng với giá trị Δ'').

Vậy công tổng cộng của cả hai lực là

$$T' = T_1 + T_2 + T'_1 = \frac{1}{2}P_1\Delta' + \frac{1}{2}P_2\Delta'' + P_1\Delta'' = \frac{P_1^2 l}{2EA} + \frac{P_2^2 l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA}.$$

Ta thấy $T' = T$.

Nếu cho P_2 tác dụng trước và P_1 tác dụng sau ta cũng được kết quả tương tự.

Điều đó chứng tỏ là công không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các lực.

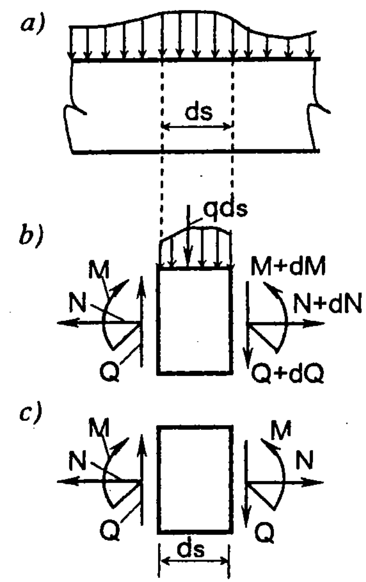
2. *Công của ngoại lực trên những chuyển vị đàn hồi không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.* Nghĩa là công do nhiều lực đồng thời tác dụng gây ra không bằng tổng công của từng tác dụng riêng biệt gây ra.

Thật vậy, chuyển vị tỷ lệ bậc nhất với lực P nên từ (4.5) ta thấy công T tỷ lệ bậc hai với ngoại lực. Điều kiện để cho một đại lượng tuân theo nguyên lý cộng tác dụng là đại lượng đó phải tỷ lệ tuyến tính với tải trọng. Ta thấy công T không thỏa mãn điều kiện này. Đó là điều cần xác minh.

C. Công của nội lực - Thế năng của hệ thanh

Để tính công của nội lực trong toàn hệ, trước tiên ta hãy tính công của nội lực trong một phân tố thanh của hệ gọi là *công phân tố*.

Tách khỏi hệ (hình 4.8a) một phân tố thanh dài ds và tính công phân tố dA của các nội lực trong phân tố thanh. Khi tách phân tố thanh, ta cần thay thế tác dụng của các phần bị loại bỏ bằng các lực M, N, Q đặt tại tiết diện bên trái; các lực $M+dM$; $N+dN$; $Q+dQ$ đặt tại tiết diện bên phải và các lực tác dụng trên phân tố thanh (hình 4.8b). Nếu xét toàn bộ thanh thì các lực này là nội lực, nhưng sau khi tách phân tố thanh thì các lực đó trở thành ngoại lực đối với phân tố thanh. Như vậy, ta có thể sử dụng công thức (4.5) để xác định công phân tố dT của các ngoại lực tác dụng trên phân tố thanh, sau đó suy ra công phân tố dA^* của các nội lực trong phân tố thanh, theo (4.3), ta có:



Hình 4.8

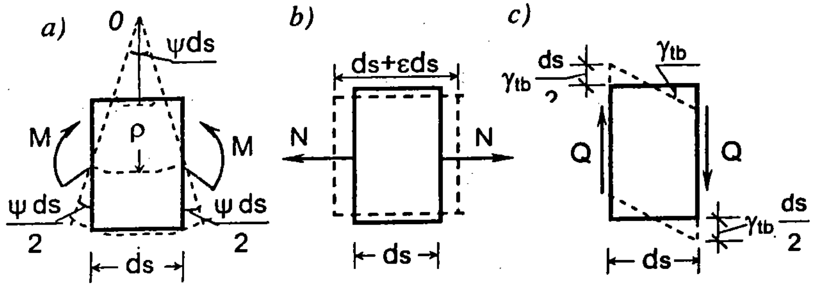
$$dA^* = -\,dT. \tag{4.6}$$

Trước khi tính công dT ta cần nhận xét:

✦ Chiều dài ds của phân tố thanh rất nhỏ nên độ biến thiên của các lực dM, dN, dQ và tải trọng $q\,ds$ cũng rất nhỏ do đó có thể bỏ qua khi tính công dT. Nếu không bỏ qua thì những đại lượng đó sẽ cho những độ biến thiên của công với những vô cùng bé bậc hai so với ds mà trong phạm vi nghiên cứu của Cơ học kết cấu, ta chỉ xét tới những vô cùng bé bậc một. Bởi vậy, để đơn giản tính toán ta có thể bỏ qua các đại lượng vô cùng bé đó ngay từ đầu và thay thế phân tố thanh trên hình 4.8b bằng phân tố thanh trên hình 4.8c.

✦ Các lực M, N, Q sinh công trên những biến dạng tương ứng độc lập với nhau (xem hình 4.9a, b, c) nên ta có thể tính riêng rẽ rồi cộng các kết quả.

Ta có: $$dT = dT_M + dT_N + dT_Q.$$



Hình 4.9

✤ *Tính công dT_M của mômen uốn M* (hình 4.9a).

Theo công thức (4.5), ta có:

$$dT_M = \frac{1}{2}\left(M\frac{\psi ds}{2} + M\frac{\psi ds}{2}\right) = \frac{1}{2}M\psi ds,$$

trong đó $\psi\, ds$ là góc hợp giữa hai tiết diện của phân tố thanh khi chịu mômen uốn M.

Nếu gọi ρ là bán kính cong của phân tố thanh bị uốn thì từ hình (4.9a), ta thấy:

$$\psi ds = \frac{1}{\rho}ds \quad \text{hay} \quad \frac{1}{\rho} = \psi. \qquad \text{(a)}$$

Mặt khác, khi nghiên cứu bài toán uốn thuần túy của các thanh thẳng trong Sức bền vật liệu ta đã biết:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \qquad \text{(b)}$$

với: E – môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén của vật liệu;

I – mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện thanh.

So sánh (a) với (b), ta được: $\psi = \dfrac{M}{EI}$

Vậy $$dT_M = \frac{M^2 ds}{2EI}. \qquad (4.7)$$

✤ *Tính công dT_N của lực dọc N* (hình 4.9b). Theo công thức (4.5):

$$dT_N = \frac{1}{2}\left(N\frac{\varepsilon ds}{2} + N\frac{\varepsilon ds}{2}\right) = \frac{1}{2}N\varepsilon ds,$$

trong đó εds là độ dãn của phân tố thanh do lực dọc.

Theo định luật Hooke khi kéo hoặc nén: $\varepsilon ds = \dfrac{N}{EA}ds$,

với A – diện tích của tiết diện thanh.

Vậy $$dT_N = \frac{N^2 ds}{2EA}. \qquad (4.8)$$

✤ *Tính công dT_Q của lực cắt Q* (hình 4.9c).

Dưới tác dụng của lực cắt, các tiết diện trượt với nhau một góc γ_{tb}. Vì ứng suất tiếp do Q gây ra biến đổi không đều theo chiều cao của tiết diện nên góc trượt (xem SBVL) cũng phân bố không đều theo chiều cao, do đó ta dùng giá trị trung bình γ_{tb}.

Theo (4.5): $$dT_Q = \frac{1}{2}\left(Q\gamma_{tb}\frac{ds}{2} + Q\gamma_{tb}\frac{ds}{2}\right) = \frac{1}{2}Q\gamma_{tb}\, ds,$$

Để xác định γ_{tb} ta áp dụng định luật Hooke khi biến dạng trượt:

$$\gamma_{tb} = \frac{\tau_{tb}}{G} = \frac{1}{G}\nu\frac{Q}{A},$$

trong đó: G – môđun đàn hồi khi trượt;

ν – hệ số điều chỉnh, kể tới sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số này chỉ phụ thuộc hình dạng của tiết diện.

Vậy $$dT_Q = \nu\frac{Q^2 ds}{2GA}. \qquad (4.9)$$

Để lập công thức xác định hệ số ν ta cần tính công do các ứng suất tiếp gây ra. Xét một phân tố diện tích dA song song với trục trung hòa x của tiết diện (hình 4.10a). Thành phần của ứng suất tiếp theo phương song song với Q trên phân tố diện tích này bằng nhau và được xác định theo công thức của Jurapski:

$$\tau = \frac{QS_c}{I_x b_c}$$

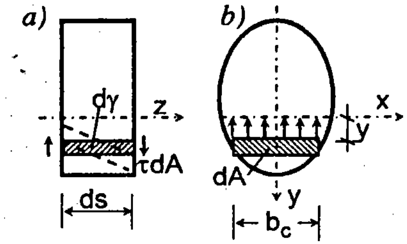
trong đó:

b_c - bề rộng của tiết diện tại vị trí cần xác định ứng suất tiếp;

S_c - mômen tĩnh của phần tiết diện bên dưới hoặc bên trên đường b_c, lấy đối với trục trung hòa x.

Dưới tác dụng của các ứng suất tiếp, hai diện tích dA tương ứng ở hai tiết diện của phân tố thanh có chiều dài ds sẽ trượt một góc bằng $d\gamma = \tau / G$. Do đó, công của ứng suất tiếp tác dụng trên diện tích dA sẽ bằng:

$$2\left[\frac{1}{2}\tau.dA.d\gamma.\frac{ds}{2}\right] = \frac{1}{2}\tau.dA..\frac{\tau}{G}ds.$$



Hình 4.10

Công của các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện thuộc phân tố thanh:

$$dT_Q = \int_A \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}ds.dA = \int_A \frac{1}{2}\frac{Q^2S_c^2}{I_x^2b_c^2G}ds.dA.$$

Vì tích phân được lấy theo diện tích, nên có thể đưa các đại lượng ds, I_x, Q, G ra ngoài dấu tích phân. Ta có:

$$dT_Q = \left[\frac{A}{I_x^2}\int_A \frac{S_c^2}{b_c^2}dA\right]\frac{Q^2}{2GA}ds.$$

So sánh với (4.9) ta được: $\nu = \dfrac{A}{I_x^2}\displaystyle\int_A \frac{S_c^2}{b_c^2}dA.$ (4.10)

- Với tiết diện chữ nhật $\nu = 1,2$.
- Với tiết diện tròn $\nu = 32/27 \approx 1,18$ (*).
- Với tiết diện hình ống mỏng $\nu = 2$.
- Với tiết diện chữ I $\nu = A/A_b$.

trong đó: A - diện tích của toàn bộ tiết diện;

A_b - diện tích của bản bụng.

Cộng các kết quả trong các công thức (4.7), (4.8) và (4.9) ta được công tổng cộng đối với phân tố thanh thẳng:

$$dT = \frac{M^2ds}{2EI} + \frac{N^2ds}{2EA} + \nu\frac{Q^2ds}{2GA}.$$

(*) Nếu giả thiết là các ứng suất tiếp song song với Q và áp dụng công thức (4.10) ta sẽ thấy đối với tiết diện tròn: $\nu = 10/9 \approx 1,11$. Thực ra các ứng suất tiếp không song song với Q, nếu kể tới thành phần ứng suất tiếp vuông góc với lực cắt ta sẽ được giá trị ν lớn hơn và bằng $32/27 \approx 1,18$.

$$dT = \frac{M^2ds}{2EI} + \frac{N^2ds}{2EA} + \nu\frac{Q^2ds}{2GA}.$$

Công phân tố của nội lực:

$$dA^* = -dT = -\left(\frac{M^2ds}{2EI} + \frac{N^2ds}{2EA} + \nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right).$$

Để có công tổng cộng của nội lực trong toàn hệ ta cần lấy tích phân của dA^* dọc theo chiều dài của từng thanh trong hệ. Nói chung, các hàm số dưới dấu tích phân thường không liên tục, khi đó ta cần lấy tích phân trong từng đoạn trong đó các hàm số dưới dấu tích phân là liên tục rồi cộng kết quả:

$$A^* = \int dA^* = -\left[\sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right]. \quad (4.11)$$

Sau khi xác định công A^* ta có thể tìm được công thức cho thế năng đàn hồi của hệ thanh biểu thị theo các nội lực. Từ công thức (4.3) ta có:

$$U = \sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}. \quad (4.12)$$

Chú thích:

1) Từ công thức (4.12) ta thấy thế năng U luôn luôn dương vì các đại lượng dưới dấu tích phân luôn luôn dương.
2) Các tích phân trong (4.11) và (4.12) là tích phân định hạn tuy rằng ở đây ta không ghi các cận trên và dưới của chúng. Khi áp dụng, ta cần lấy tích phân trên từng đoạn trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục, sau đó cộng kết quả theo số đoạn đã lấy tích phân.
3) Biểu thức (4.12) chỉ áp dụng đúng cho trường hợp hệ gồm những thanh thẳng hoặc hệ gồm những thanh cong với độ cong nhỏ. Thanh cong được xem là có độ cong nhỏ khi $h/r \le 1/5$; trong đó h là chiều cao tiết diện, r là bán kính cong bé nhất của trục thanh ở trạng thái ban đầu. Trường hợp thanh có độ cong lớn, khi $h/r > 1/5$; xem [13].

4.3. Cách xác định chuyển vị theo thế năng

A. Cách áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng

Ta có thể áp dụng cách xác định này khi trên hệ chỉ có một lực tác dụng và chỉ cần tìm chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực đó.

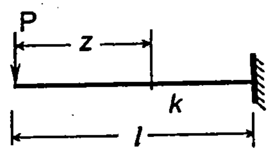
Giả sử trên hệ chỉ có một lực P tác dụng và cần xác định chuyển vị Δ có vị trí và phương tương ứng với lực P. Từ (4.3) và (4.5) ta có:

$$T = \frac{1}{2}P.\Delta = U. \qquad \text{Suy ra} \qquad \Delta = \frac{2U}{P}.$$

Nếu chú ý đến (4.12) ta có thể xác định Δ theo công thức sau

$$\Delta = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P}\left[\sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right]. \qquad (4.13)$$

Ví dụ 4.1. Xác định độ võng tại mút thừa của dầm cho trên hình 4.11. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt (dưới đây ta sẽ thấy những ảnh hưởng này rất nhỏ so với ảnh hưởng của mômen uốn).



Hình 4.11

Trong trường hợp này ta có:

$$\Delta = \frac{2}{P}\sum\int\frac{M^2ds}{2EI} = \frac{1}{P}\int_0^l\frac{(Pz)^2dz}{EI} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Để giải quyết sự hạn chế đã nêu ở trên, ta có thể áp dụng định lý Castigliano.

B. Cách xác định chuyển vị theo định lý Castigliano

Ta sẽ chứng minh định lý Castigliano:

Đạo hàm riêng của thế năng biến dạng U theo một trong các ngoại lực P_k nào đó bằng chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực P_k.

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}. \qquad (4.14)$$

Để chứng minh định lý này (*) ta xét trường hợp hệ chịu một số lực tập trung P_1, P_k, P_n... (hình 4.12). Tất nhiên cách lập luận dưới đây vẫn đúng cho hệ bất kỳ chịu lực dưới các dạng khác.

Dưới tác dụng của các lực P_1, P_k, P_n các điểm đặt lực $1, k, n$ bị võng xuống là y_1, y_k, y_n, toàn dầm có vị trí theo đường cong I. Giả sử cần tìm độ võng y_k.

Chuyển dầm từ vị trí I sang vị trí lân cận II. Muốn vậy có thể dùng nhiều cách: thêm tải trọng mới hoặc tăng cường tải trọng cũ v.v... Giả sử ta thêm một lực dP_k vô cùng bé để chuyển dầm từ vị trí I sang vị trí II.

Khi chuyển dầm từ vị trí I sang vị trí II, các lực P_1, P_k, P_n đều hạ thấp

(*) Cũng có thể chứng minh định lý này một cách đơn giản và gọn hơn sau khi biết định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị (xem mục 4.8).

xuống, sinh công dT và thế năng biến dạng của dầm tăng lên là dU, với:

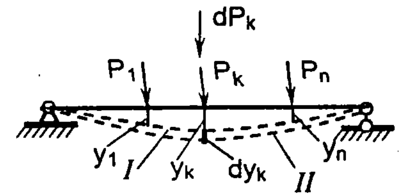
$$dU = dT. \qquad (a)$$

Vì U là hàm số của các lực P_1, P_k, P_n... và dU là độ biến thiên thế năng do riêng lực P_k biến đổi với một lượng dP_k vô cùng bé gây ra, nên dU chính là vi phân riêng phần của U khi P_k thay đổi, tức là:

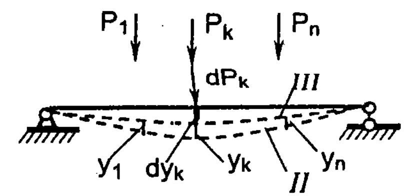
$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_k}dP_k \qquad (b)$$

Mặt khác, ta tính độ biến thiên dT của công ngoại lực. Nếu gọi T_1 và T_2 là giá trị của công của các ngoại lực khi dầm ở vị trí I và II, ta có:

$$dT = T_2 - T_1. \qquad (c)$$



Hình 4.12



Hình 4.13

Theo (4.5): $$T_1 = \frac{1}{2}P_1y_1 + \frac{1}{2}P_ky_k + \frac{1}{2}P_ny_n. \qquad (d)$$

Để tính công T_2 ta nhớ lại tính chất: công tổng cộng không phụ thuộc thứ tự tác dụng của các lực. Do đó, đầu tiên ta có thể cho lực dP_k tác dụng, dầm sẽ cong tới vị trí III (hình 4.13), điểm đặt của dP_k chuyển vị bằng dy_k.

Công của lực dP_k sẽ bằng $\frac{1}{2}dP_kdy_k$.

Sau đó cho các lực P_1, P_k, P_n tác dụng, dầm bị cong tới vị trí II, các điểm đặt lực chuyển dời y_1, y_k, y_n (hình 4.13). Công của các lực P_1, P_k, P_n:

$$\frac{1}{2}P_1y_1 + \frac{1}{2}P_ky_k + \frac{1}{2}P_ny_n.$$

Ngoài ra lực dP_k sẵn có trên dầm cũng di chuyển một đoạn y_k và không đổi trị số trong quá trình chuyển vị, nên lực dP_k sinh công bằng dP_ky_k.

Vậy công tổng cộng của các ngoại lực khi dầm chuyển từ vị trí ban đầu đến vị trí II là:

$$T_2 = \frac{1}{2}\,dP_k\,dy_k + \frac{1}{2}P_1 y_1 + \frac{1}{2}\,P_k y_k + \frac{1}{2}\,P_n y_n + dP_k\,y_k. \qquad (e)$$

Thay (e) và (d) vào (c): $\quad dT = T_2 - T_1 = \dfrac{1}{2}\,dP_k dy_k + dP_k\,y_k.$

Bỏ qua những lượng vô cùng bé bậc hai, ta được: $dT = dP_k\,y_k\,. \qquad$ (f)

Thay (b) và (f) vào (a), ta có: $\quad dP_k\,y_k = \dfrac{\partial U}{\partial P_k}dP_k\,,$

hay

$$y_k = \frac{\partial U}{\partial P_k},$$

Vậy, *chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực P_k bằng đạo hàm riêng của thế năng theo lực đó.*

Cũng có thể mở rộng kết quả này cho:

- ✤ Trường hợp tải trọng phân bố: lúc này ta có thể thay tải trọng phân bố bằng vô số lực tập trung.
- ✤ Trường hợp lực P_k là mômen tập trung, chuyển vị tương ứng là góc xoay.

Để suy ra công thức xác định chuyển vị theo các nội lực ta thay (4.12) vào (4.14)

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[\sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right].$$

Ta thấy các nội lực M, N, Q là hàm của lực P_k và tọa độ s, các tích phân ở đây là lấy theo s, còn đạo hàm riêng lấy theo P_k. Như đã biết, nếu giới hạn của tích phân là hằng lượng thì có thể đưa đạo hàm theo biến số khác với biến số lấy tích phân vào trong dấu tích phân. Hơn nữa:

$$\frac{\partial(M^2)}{\partial P_k} = 2M\frac{\partial M}{\partial P_k}\,; \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial P_k} = 2N\frac{\partial N}{\partial P_k}\,; \quad \frac{\partial(Q^2)}{\partial P_k} = 2Q\frac{\partial Q}{\partial P_k}\,,$$

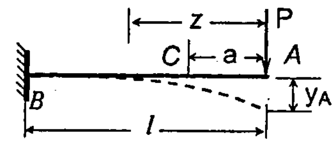
nên:

$$\Delta_k = \sum\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_k}ds + \sum\int\frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P_k}ds + \sum\int\nu\frac{Q}{GA}\frac{\partial Q}{\partial P_k}ds\,, \qquad (4.15)$$

trong đó: $\dfrac{\partial M}{\partial P_k}, \dfrac{\partial N}{\partial P_k}, \dfrac{\partial Q}{\partial P_k}$ là đạo hàm riêng của các biểu thức nội lực M, N, Q lấy theo lực P_k.

Chú thích: Trường hợp muốn tìm chuyển vị Δ_k có vị trí và phương bất kỳ mà ở đó không có lực đặt theo phương cần tìm chuyển vị, ta cần thực hiện như sau: đặt thêm một lực P_k có điểm đặt và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm rồi áp dụng định lý như thường lệ, cuối cùng cho lực $P_k = 0$.

Ví dụ 4.2. Xác định độ võng tại mút thừa A (hình 4.14). Bỏ qua ảnh hưởng của N và Q. Cho biết $EI = const.$



Hình 4.14

Chuyển vị cần tìm có vị trí và phương tương ứng với lực P, do đó theo (4.15), ta có:

$$y_A = \Delta_P = \sum\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds\,.$$

Từ hình 4.14 ta thấy: $M = -Pz\,;\ \dfrac{\partial M}{\partial P} = -z.$

Những hàm số này liên tục trên toàn chiều dài của dầm. Do đó:

$$y_A = \Delta_P = \int_0^l\frac{(-Pz)}{EI}(-z)dz = \frac{Pl^3}{3EI}\,.$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực P.

Ví dụ 4.3. Xác định độ võng tại C trong hệ trên hình 4.14. Bỏ qua ảnh hưởng của N và Q. Cho biết $EI = const.$

Tại C không có lực tương ứng với chuyển vị cần tìm, nên ta phải đặt thêm một lực R phù hợp như trên hình 4.15. Khi đó:

$$y_C = \Delta_R = \sum\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}ds\,.$$

Trong trường hợp này mômen uốn M không liên tục trên toàn chiều dài, ta phải chia thành hai đoạn để khảo sát:

Khi $0 \le z_1 \le a\,;\qquad M_1 = -Pz_1\,;\qquad \dfrac{\partial M_1}{\partial R} = 0.$

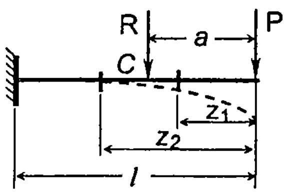
Khi $a \le z_2 \le l\,;\qquad M_2 = -Pz_2 - R(z_2 - a)\,;\qquad \dfrac{\partial M_2}{\partial R} = -(z_2 - a).$

Sau khi lấy đạo hàm riêng phần theo R ta có thể cho ngay $R = 0$ để đơn giản việc lấy tích phân. Ta có:

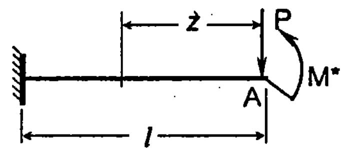
$$y_C = \int_0^a \frac{(-Pz_1)}{EI}(0)dz_1 + \int_a^l \frac{(-Pz_2)}{EI}\left[-(z_2 - a)\right]dz_2 =$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{l^3 - a^3}{3} - \frac{a}{2}(l^2 - a^2)\right].$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực R, tức là hướng xuống dưới.



Hình 4.15



Hình 4.16

Ví dụ 4.4. Xác định góc xoay tại tiết diện A trong hệ trên hình 4.14. Cho biết: $EI = const$. Bỏ qua ảnh hưởng của N và Q.

Để xác định chuyển vị góc tại một tiết diện nào đó thì ta cần lấy đạo hàm riêng của thế năng U theo mômen tập trung. Trong trường hợp này ở điểm A không có mômen tập trung nên cần đặt thêm vào đó một mômen M^* có chiều bất kỳ (hình 4.16). Khi đó, theo (4.15), ta có

$$\varphi_A = \Delta_{M^*} = \sum \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M^*}ds.$$

Từ hình (4.16) ta tính được: $M = -Pz + M^*;\quad \dfrac{\partial M}{\partial M^*} = 1.$

Sau đó cho $M^* = 0$ và thay vào công thức trên, ta có

$$\varphi_A = \Delta_{M^*} = \int_0^l \frac{(-Pz)}{EI}.1.dz = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$

Kết quả mang dấu âm chứng tỏ chiều quay của góc φ_A ngược với chiều của M^* nên góc xoay quay thuận chiều kim đồng hồ.

4.4. Công khả dĩ (công ảo) của ngoại lực và nội lực

Cách xác định chuyển vị theo thế năng đã trình bày còn chưa được thuận lợi trong áp dụng và chưa đề cập đầy đủ các nguyên nhân gây ra chuyển vị. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách xác định chuyển vị theo khái niệm công khả

dĩ. Với cách này ta có thể thiết lập được công thức tổng quát cho chuyển v khi hệ chịu nhiều nguyên nhân khác nhau.

A. Định nghĩa công khả dĩ (công ảo)

Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra.

Chuyển vị và biến dạng vô cùng bé đó phải phù hợp với các điều kiện liên kết ngoại cũng như liên kết nội của hệ, tức là thỏa mãn điều kiện động học và được gọi là *chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.*

Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng có thể là tải trọng hay nhiệt độ và sự chuyển vị của các gối tựa.

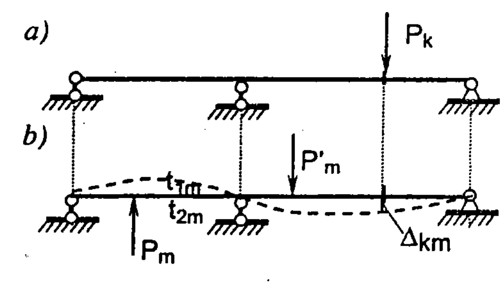
Nếu nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh ra công thì công đó gọi là *công thực*. Khái niệm này đã đề cập ở mục 4.2.

Để thấy rõ định nghĩa về công khả dĩ, ta xét một hệ ở hai trạng thái (hình 4.17):

- ✦ Trạng thái thứ nhất gọi là trạng thái "*k*" chịu lực P_k (hình 4.17a).
- ✦ Trạng thái thứ hai gọi là trạng thái "*m*" chịu các nguyên nhân "*m*". Các nguyên nhân "*m*" trên hình 4.17b gồm có các tải trọng P_m, sự biến thiên nhiệt độ t_{1m}, t_{2m}.

Chuyển vị và biến dạng đàn hồi ở trạng thái "*m*" là nhỏ và tự động thỏa mãn điều kiện động học nên được xem là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

Gọi Δ_{km} là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực P_k (có vị trí và phương tương ứng với lực P_k) do các nguyên nhân "*m*" gây ra.



Hình 4.17

Tích số P_k. Δ_{km} là công khả dĩ của lực P_k trên những chuyển vị tương ứng do các nguyên nhân "*m*" gây ra.

Ký hiệu T_{km} là công khả dĩ của lực ở trạng thái k sinh ra trên các chuyển vị tương ứng ở trạng thái m. Ta có:

$$T_{km} = P_k.\ \Delta_{km}.$$

Cần lưu ý là: khác với công thực đã biết ở trên, công khả dĩ bằng tích số của lực với chuyển dời tương ứng mà không chia đôi. Sở dĩ như vậy là vì khi các nguyên nhân "m" gây ra chuyển vị Δ_{km}, lực P_k không tham gia chuyển vị nên không thay đổi trị số.

Khái niệm công khả dĩ là một khái niệm mở rộng, trừu tượng, giúp ta dễ dàng xác định được chuyển vị có vị trí và phương bất kỳ do mọi nguyên nhân gây ra.

B. Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý công ảo) áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833)

Trong Cơ học cơ sở ta đã biết nội dung nguyên lý công khả dĩ của Lagrange:

Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé (tức là những chuyển dời mà các liên kết cho phép) phải bằng không

$$T_{km} = 0 . \qquad (4.16)$$

Công thức (4.16) biểu thị điều kiện công khả dĩ của các ngoại lực bằng không.

Trong trường hợp hệ biến dạng đàn hồi thì theo S. D. Poisson, ngoài công khả dĩ của các ngoại lực ta còn phải xét đến công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ. Do đó, có thể phát biểu nguyên lý như sau:

Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ T_{km} của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực A^*_{km} trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không

$$T_{km} + A^*_{km} = 0 , \quad \text{hay} \quad T_{km} = -A^*_{km} . \qquad (4.17)$$

C. Công khả dĩ của ngoại lực

Theo khái niệm công khả dĩ trình bày ở trên ta có thể phát biểu định nghĩa mở rộng cho trường hợp nhiều lực như sau:

Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái k trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái m bằng tổng các tích số giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái k với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái m

$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \Delta_{km} . \qquad (4.18)$$

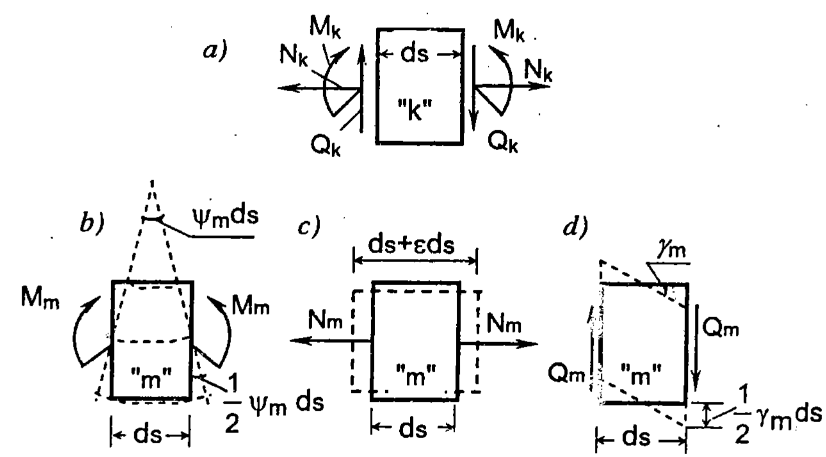
D. Công khả dĩ của nội lực

Để xác định công khả dĩ của nội lực cho toàn hệ, cũng như ở mục 4.2 trước tiên ta tính công khả dĩ của một phân tố thanh.

✦ Ở trạng thái "k" ta tách một phân tố thanh có chiều dài ds. Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng tại các mặt cắt đầu trái và đầu phải của phân tố thanh có các lực M_k, N_k, Q_k tác dụng. Các lực này là ngoại lực đối với phân tố thanh đang xét, nhưng là nội lực đối với toàn hệ ở trạng thái "k" do nguyên nhân k gây ra (hình 4.18a).

✦ Ở trạng thái "m" tại vị trí tương ứng ta cũng tách phân tố thanh có chiều dài ds. Ở trạng thái này phân tố thanh ds có thể có những biến dạng sau:

1. Biến dạng do các nội lực M_m, N_m, Q_m



Hình 4. 18

- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh bị xoay tạo thành góc $\psi_m\, ds$ (hình 4.18b).
- Phân tố thanh bị dãn dài dọc trục một đoạn $\varepsilon_m\, ds$ (hình 4.18c).
- Hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh bị trượt một góc $\gamma_m^{tb}\, ds$ (hình 4.18d).

Vì biến dạng của hệ là đàn hồi tuyến tính cho nên theo định luật

Hooke (xem 4.2.C), ta có:

$$\psi_m = \frac{M_m}{EI}\ ; \qquad \varepsilon_m = \frac{N_m}{EA}\ ; \qquad \gamma_m^{tb} = \nu\frac{Q_m}{GA}. \qquad \text{(a)}$$

2. Biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ

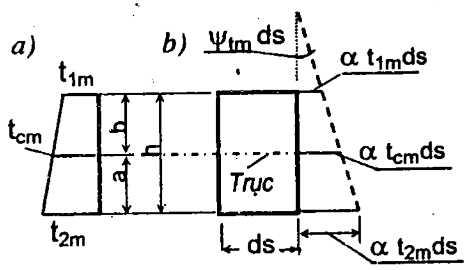
Gọi t_{1m} và t_{2m} là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh. Nếu *chấp nhận quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao tiết diện là luật bậc nhất* thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng đường thẳng như trên hình 4.19a.

Từ đó ta dễ dàng xác định được độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}.$$

Nếu $a = b = h/2$; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}.$$



Hình 4.19

Để lập các công thức ta giả thiết $t_{1m} > 0$ và $t_{2m} > t_{1m}$; tiết diện 1-1 ở đầu trái của phân tố thanh là cố định.

Gọi α là hệ số dãn nở dài vì nhiệt của vật liệu ta có: thớ trên của phân tố thanh sẽ dãn dài bằng $\alpha t_{1m}ds$, trục phân tố thanh (thớ trung hòa) sẽ dãn dài là $\alpha t_{cm}ds$ và thớ dưới phân tố thanh sẽ dãn dài là $\alpha t_{2m}ds$ (hình 4.19b). Như vậy phân tố thanh có hai thành phần biến dạng vì nhiệt:

- Biến dạng dài dọc theo trục do nhiệt độ t_{cm} gây ra:

$$\varepsilon_{tm}\,ds = \alpha\, t_{cm}\, ds. \qquad \text{(b)}$$

- Biến dạng xoay giữa hai tiết diện đầu trái và đầu phải:

$$\psi_{tm}\,ds = \frac{\alpha\, t_{2m}\,ds - \alpha\, t_{1m}ds}{h} = \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds. \qquad \text{(c)}$$

Vậy công khả dĩ phân tố thanh của các lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng

$$dT_{km} = \frac{1}{2}M_k\psi_m ds + \frac{1}{2}M_k\psi_m ds + \frac{1}{2}N_k\varepsilon_m ds + \frac{1}{2}N_k\varepsilon_m ds +$$

$$+\frac{1}{2}Q_k\gamma_m^{tb}ds + \frac{1}{2}Q_k\gamma_m^{tb}ds + M_k\psi_{tm}ds + N_k\varepsilon_{tm}ds,$$

hay

$$dT_{km} = M_k\psi_m ds + N_k\varepsilon_m ds + Q_k\gamma_m^{tb}ds + M_k\psi_{tm}ds + N_k\varepsilon_{tm}ds.$$

Theo (4.17) ta có $\qquad dT_{km} = -dA^*_{km}$.

Do đó:

$$dA^*_{km} = -dT_{km} = -[M_k\psi_m ds + N_k\varepsilon_m ds + Q_k\gamma_m^{tb}ds + M_k\psi_{tm}ds + N_k\varepsilon_{tm}ds].$$

Trên toàn hệ, công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng

$$A^*_{km} = -[\Sigma\int M_k\ \psi_m ds + \Sigma\int N_k\ \varepsilon_m ds + \Sigma\int Q_k\ \gamma_m^{tb}ds +$$

$$+\Sigma\int M_k\ \psi_{tm}ds + \Sigma\int N_k\ \varepsilon_{tm}ds].$$

Thay (a), (b), (c) vào biểu thức công nội lực, ta có

$$A^*_{km} = -\Big[\sum\int\frac{M_kM_m}{EI}ds + \sum\int\frac{N_kN_m}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{Q_kQ_m}{GA}ds +$$

$$+\sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds + \sum\int N_k\alpha\, t_{cm}ds\Big]. \qquad (4.19)$$

E. *Công thức công khả dĩ*

Thay (4.18) và (4.19) vào (4.17), ta có:

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_i P_{ik}\Delta_{km} = &\sum\int\frac{M_kM_m}{EI}ds + \sum\int\frac{N_kN_m}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{Q_kQ_m}{GA}ds +\\ &+\sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds + \sum\int N_k\alpha\, t_{cm}ds.\end{aligned}} \qquad (4.20)$$

Công thức (4.20) biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của các ngoại lực tác dụng trên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

Dưới đây ta sẽ vận dụng công thức này để thiết lập công thức chuyển vị.

Chú thích:

- Công thức này được áp dụng cho các hệ đàn hồi tuyến tính gồm những thanh thẳng hoặc những thanh cong có độ cong nhỏ (xem 4.2.C).
- Dấu tích phân trong công thức trên cần hiểu là tích phân định hạn, ta cần lấy tích phân trên từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu t...

vế phải áp dụng cho các đoạn thanh trong hệ. Dấu tổng ở vế trái lấy theo số lực ở trạng thái "k".

4.5. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính

Ta sẽ chứng minh bốn định lý tương hỗ để phục vụ cho việc nghiên cứu các nội dung sau này.

A. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực

Định lý này do E. Betti đề xuất vào năm 1872.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái: ở trạng thái "m" hệ chịu các ngoại lực P_{jm}; ở trạng thái "k" hệ chịu các ngoại lực P_{ik}. Theo công thức công khả dĩ (4.20) ta có:

✦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "m" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$\sum_j P_{jm}\Delta_{mk} = \sum\int\frac{M_m M_k}{EI}ds + \sum\int\frac{N_m N_k}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{Q_m Q_k}{GA}ds. \quad \text{(a)}$$

✦ Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$\sum_i P_{ik}\Delta_{km} = \sum\int\frac{M_k M_m}{EI}ds + \sum\int\frac{N_k N_m}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{Q_k Q_m}{GA}ds. \quad \text{(b)}$$

So sánh (a) và (b) ta có:

$$\sum_j P_{jm}\Delta_{mk} = \sum_i P_{ik}\Delta_{km}. \qquad (4.21)$$

Như vậy, *trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k" tương hỗ bằng công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".*

Cần hiểu khái niệm *tương hỗ* như sau:

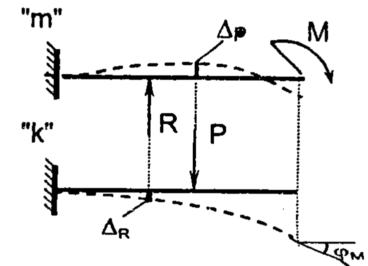
✧ Hai trạng thái "m" và "k" phải xảy ra trên cùng một hệ.

✧ Chuyển dời ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với vị trí và phương của lực ở trạng thái kia.

Ví dụ đối với hệ cho trên hình 4.20:

- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "m" trên những chuyển dời ở trạng thái "k" là $R\Delta_R + M\varphi_M$.

- Công khả dĩ của các lực ở trạng thái "k" trên những chuyển dời ở trạng thái "m" là $P\Delta_P$.



Hình 4.20

Theo định lý E. Betti, ta có:

$$R\Delta_R + M\varphi_M = P\Delta_P.$$

Dưới đây ta sẽ vận dụng định lý E. Betti để chứng minh các định lý khác.

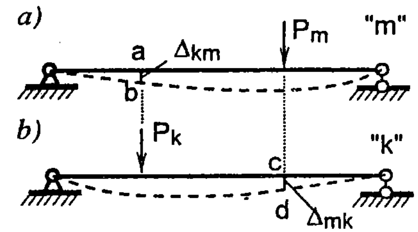
B. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị

Định lý này do J. Maxwell đề xuất năm 1864.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (hình 4.21):

✦ Trạng thái "m": có một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung) P_m tác dụng.

✦ Trạng thái "k": có một lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung) P_k tác dụng.



Hình 4.21

Theo định lý Betti ta có: $P_m\Delta_{mk} = P_k\Delta_{km}$

hay $$\frac{\Delta_{mk}}{P_k} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$\Delta_{mk}/P_k = \delta_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k bằng đơn vị gây ra, gọi là *chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k gây ra.*

$\Delta_{km}/P_m = \delta_{km}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m bằng đơn vị gây ra, gọi là *chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m gây ra.*

Do đó ta có:

$$\boxed{\delta_{mk} = \delta_{km}.} \qquad (4.22)$$

Như vậy, *trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m gây ra.*

Định lý này được áp dụng trong phương pháp lực khi tính hệ siêu tĩnh.

Từ định nghĩa trên ta suy ra thứ nguyên (*TN*) của chuyển vị đơn vị:

$$TN\ của\ \delta_{mk} = \frac{TN\ của\ \Delta_{mk}}{TN\ của\ P_k}.$$

Cần hiểu chuyển vị đơn vị là chuyển vị do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra, không phải bản thân nó bằng đơn vị.

Có thể hiểu định lý một cách cụ thể hơn như sau: xét một hệ ở hai trạng thái, nếu trong mỗi trạng thái chỉ đặt một lực bằng đơn vị thì các chuyển vị theo phương của lực này do lực kia gây ra sẽ bằng nhau. Đối với hệ trên hình 4.21, khi $P_m = 1$ và $P_k = 1$ thì $ab = cd$.

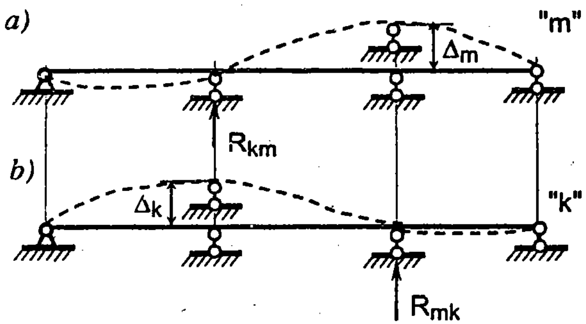
C. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị

Định lý này do L. Rayleigh (1842-1919) đề xuất năm 1875.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (hình 4.22):

✦ Trạng thái "*m*": có một liên kết *m* của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_m.

✦ Trạng thái "*k*": có một liên kết *k* của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_k.



Hình 4. 22

Khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, trong các liên kết sẽ phát sinh phản lực.

Gọi: R_{mk} – phản lực tại liên kết *m* do chuyển vị cưỡng bức Δ_k gây ra;

R_{km} – phản lực tại liên kết *k* do chuyển vị cưỡng bức Δ_m gây ra.

Các phản lực đó chính là các ngoại lực, áp dụng định lý Betti ta có:

$$R_{mk}.\ \Delta_m = R_{km}\ .\ \Delta_k\ ,$$

hay $$\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}.$$

Ta thấy:

$R_{mk}/\Delta_k = r_{mk}$ là phản lực tại liên kết *m* do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết *k* gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra.*

$R_{km}/\Delta_m = r_{km}$ là phản lực đơn vị tại liên kết *k* do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết *m* gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.*

Do đó, ta có:

$$\boxed{r_{mk} = r_{km}.} \qquad (4.23)$$

Như vậy, *trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.*

Định lý này được áp dụng trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ siêu động.

Thứ nguyên của phản lực đơn vị:

$$TN\ của\ r_{mk} = \frac{TN\ của\ R_{mk}}{TN\ của\ \Delta_k}.$$

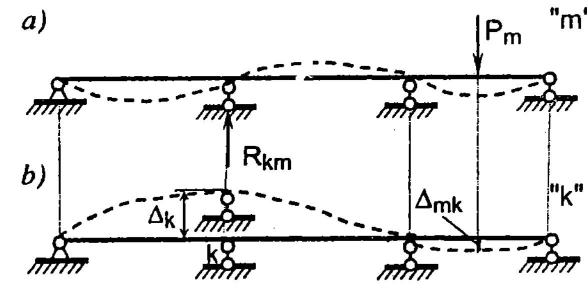
D. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị

Định lý này do A. A. Gvozdiev đề xuất năm 1927.

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (hình 4.23):

✦ Trạng thái "*m*": hệ chịu một lực P_m.

✦ Trạng thái "*k*": có một liên kết *k* của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_k.



Hình 4. 23

Gọi: R_{km} - phản lực tại liên kết *k* có chuyển vị cưỡng bức Δ_k, do lực P_m

gây ra ở trạng thái "*m*";

Δ_{mk} - chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực P_m, do chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết *k* gây ra ở trạng thái "*k*".

Trong trường hợp này ta thấy công khả dĩ của các phản lực ở trạng thái "*k*" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "*m*" bằng không, vì các chuyển vị ở trạng thái "*m*" theo phương của các phản lực ở trạng thái "*k*" bằng không. Do đó, theo định lý Betti ta có:

$$R_{km} \cdot \Delta_k + P_m \cdot \Delta_{mk} = 0,$$

hay:
$$\frac{R_{km}}{P_m} = -\frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}.$$

Ta thấy:

$R_{km}/P_m = \dot{r}_{km}$ là phản lực tại liên kết *k* do lực P_m bằng đơn vị gây ra; gọi là *phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m gây ra* (dấu chấm trên ký hiệu $\dot{r}_{km}$ biểu thị phản lực này *do lực gây ra* để phân biệt với r_{km} là phản lực *do chuyển vị cưỡng bức gây ra*).

$$TN\ của\ \dot{r}_{km} = \frac{TN\ của\ R_{km}}{TN\ của\ lực\ P_m}.$$

$\Delta_{mk}/\Delta_k = \dot{\delta}_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết *k* gây ra; gọi là *chuyển đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra* (dấu chấm trên ký hiệu $\dot{\delta}_{mk}$ biểu thị chuyển vị này *do chuyển vị cưỡng bức gây ra*, để phân biệt với chuyển vị δ_{mk} *do lực gây ra*).

$$TN\ của\ \dot{\delta}_{mk} = \frac{TN\ của\ \Delta_{mk}}{TN\ của\ \Delta_k}.$$

Do đó ta có:

$$\boxed{\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}.} \qquad (4.24)$$

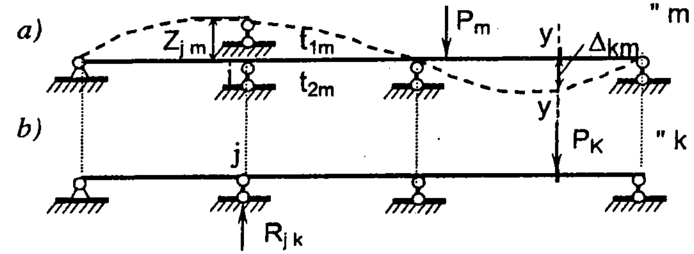
Như vậy, *trong hệ đàn hồi tuyến tính phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra nhưng trái dấu.*

Định lý này còn được gọi là định lý Rayleigh thứ hai. Định lý được áp dụng trong phương pháp hỗn hợp khi tính các hệ siêu tĩnh.

4.6. Công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính (Công thức Maxwell-Morh, 1874)

Ta áp dụng công thức công khả dĩ (4.20) để thiết lập công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính.

Hình 4.24



Xét hệ thanh bất kỳ (tĩnh định hoặc siêu tĩnh), đồng thời chịu tác dụng của các nguyên nhân sau: tải trọng P_m; chuyển vị cưỡng bức Z_m tại các liên kết tựa; sự thay đổi nhiệt độ t_{2m}, t_{1m}. Gọi trạng thái này của hệ là trạng thái thực "*m*". Hệ bị biến dạng theo đường đứt nét như trên hình 4.24a.

Yêu cầu xác định chuyển vị tại tiết diện *k* bất kỳ trên hệ. Tại tiết diện *k* có thể có chuyển vị thẳng được phân tích thành hai thành phần theo hai phương bất kỳ và chuyển vị xoay, được ký hiệu chung là Δ_{km}. Giả định cần tìm thành phần chuyển vị thẳng theo phương *y-y*.

Để thực hiện yêu cầu trên ta tưởng tượng tạo ra trên hệ đã cho một trạng thái khả dĩ (còn gọi là trạng thái giả tạo) "*k*" trong đó đặt lực P_k sao cho lực này sinh công khả dĩ trên chuyển vị Δ_{km} cần tìm, nghĩa là:

* *Nếu chuyển vị cần tìm là thành phần chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó theo phương y thì ở trạng thái khả dĩ "k" ta cần đặt lực P_k dưới dạng một lực tập trung tại tiết diện đó, theo phương y có chiều chọn tùy ý.*
* *Nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay tại một tiết diện nào đó thì ở trạng thái khả dĩ "k" ta cần đặt lực P_k dưới dạng một mômen tập trung tại tiết diện đó, có chiều chọn tùy ý.*

Trên hình 4.24b là trạng thái khả dĩ "*k*" khi tìm thành phần chuyển vị thẳng tại *k* theo phương *y-y*.

Áp dụng công thức công khả dĩ của ngoại lực và nội lực ở trạng thái "*k*" trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ ở trạng thái "*m*" ta có:

$$P_k\Delta_{km}+\sum_j R_{jk}Z_{jm}=\sum\int\frac{M_kM_m}{EI}ds+\sum\int\frac{N_kN_m}{EA}ds+\sum\int\nu\frac{Q_kQ_m}{GA}ds$$

$$+\sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m}-t_{1m})ds+\sum\int N_k\alpha\, t_{cm}ds.$$

Chia cả hai vế của biểu thức này cho P_k đồng thời ký hiệu:

$$\overline{M}_k=\frac{M_k}{P_k};\quad \overline{N}_k=\frac{N_k}{P_k};\quad \overline{Q}_k=\frac{Q_k}{P_k};\quad \overline{R}_{jk}=\frac{R_{jk}}{P_k},$$

trong đó:

$\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$ – nội lực do lực $P_k= 1$ gây ra trong hệ ở trạng thái "k" ;

$\overline{R}_{jk}$ – phản lực tại liên kết thứ j do lực $P_k= 1$ gây ra ở trạng thái "k".

Ta được công thức xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính:

$$\boxed{\Delta_{km}=-\sum_j\overline{R}_{jk}Z_{jm}+\sum\int\frac{\overline{M}_kM_m}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{N}_kN_m}{EA}ds+\sum\int\nu\frac{\overline{Q}_kQ_m}{GA}ds+\sum\int\overline{M}_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m}-t_{1m})ds+\sum\int\overline{N}_k\alpha\, t_{cm}ds.}\quad(4.25)$$

Khi sử dụng công thức cần chú ý:

1) Chiều của $P_k = 1$ có thể chọn tùy ý. Nếu kết quả của chuyển vị tìm được mang dấu dương thì chuyển vị cần tìm hướng theo chiều $P_k = 1$ đã chọn. Nếu kết quả mang dấu âm thì ngược lại.
2) Z_{jm} - chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ j ở trạng thái "m"

   $\overline{R}_{jk}$ - phản lực tại liên kết thứ j do $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

   Tích $\overline{R}_{jk}Z_{jm}$ dương khi $\overline{R}_{jk}$ cùng chiều với Z_{jm}.

   Dấu tổng của số hạng thứ nhất lấy theo j, tức là theo số liên kết có chuyển vị cưỡng bức.
3) M_m, N_m, Q_m - các biểu thức nội lực trong hệ ở trạng thái "m";

   $\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$ - các biểu thức của nội lực trong hệ do $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

   Trong các số hạng từ thứ hai đến thứ sáu, các tích phân là định hạn, lấy theo từng đoạn thanh trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh đã lấy tích phân.
4) Công thức này dùng để tính chuyển vị trong hệ thanh tĩnh định cũng như siêu tĩnh nếu biết được nội lực trong hệ ở trạng thái m và k.
5) Công thức (4.25) chỉ áp dụng cho trường hợp hệ gồm những thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ (xem 4.2.C).

4.7. Cách vận dụng công thức chuyển vị

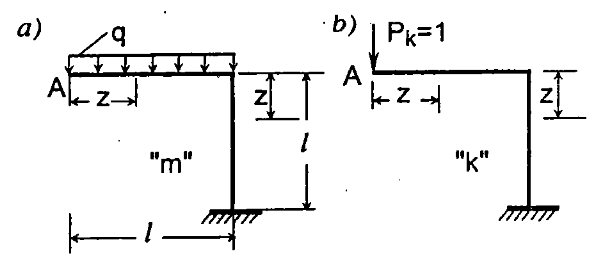
Trong thực tế thường ít gặp trường hợp phải vận dụng toàn bộ công thức tổng quát của chuyển vị. Tùy theo từng trường hợp cụ thể chỉ cần vận dụng một vài số hạng của công thức. Dưới đây ta sẽ xét một số trường hợp cụ thể thường gặp.

A. Trường hợp hệ dầm và khung chịu tải trọng

Kinh nghiệm tính toán các hệ dầm và khung cho ta thấy phần ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt thể hiện qua lực dọc và lực cắt đối với các chuyển vị thường nhỏ hơn rất nhiều so với phần ảnh hưởng của biến dạng uốn thể hiện qua mômen uốn, do đó thường có thể bỏ qua được. Lúc này công thức chuyển vị có dạng:

$$\boxed{\Delta_{km}=\sum\int\frac{\overline{M}_kM_m}{EI}ds.}\quad(4.26)$$

Ví dụ 4.5. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A của khung chịu tải trọng như trên hình 4.25. Tiết diện của các thanh ngang và đứng không đổi và có dạng hình chữ nhật với kích thước là $b\times h$.



Hình 4. 25

Để thấy rõ ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn, trong ví dụ này ta tính chuyển vị có xét tất cả các phần ảnh hưởng. Ta có:

$$\Delta_{km}=\sum\int\frac{\overline{M}_kM_m}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{N}_kN_m}{EA}ds+\sum\int\nu\frac{\overline{Q}_kQ_m}{GA}ds.$$

Trạng thái "m" là trạng thái thực trên hình 4.25a. Theo yêu cầu của bài toán, ở trạng thái "k" ta đặt lực $P_k=1$ tại A và có phương thẳng đứng (chiều chọn tùy ý, ở đây hướng xuống dưới, hình 4.25b). Các nội lực ở trạng thái "m" và "k":

- Trong thanh ngang: $M_m = -\dfrac{qz^2}{2}$; $\quad N_m = 0$; $\quad Q_m = -qz$;
  $\overline{M}_k = -1.z$; $\quad \overline{N}_k = 0$; $\quad \overline{Q}_k = -1$.
- Trong thanh đứng: $M_m = -\dfrac{ql^2}{2}$; $\quad N_m = -ql$; $\quad Q_m = 0$;
  $\overline{M}_k = -1.l$; $\quad \overline{N}_k = -1$; $\quad \overline{Q}_k = 0$.

Thay các đại lượng này vào công thức chuyển vị, ta được:

$$\Delta_{km} = \int_0^l (-z)\left(-\frac{qz^2}{2}\right)\frac{dz}{EI} + \int_0^l (-l)\left(-\frac{ql^2}{2}\right)\frac{dz}{EI} + \int_0^l (-1)(-ql)\frac{dz}{EA} +$$

$$+ \int_0^l \nu(-1)(-qz)\frac{dz}{GA} = \frac{5ql^4}{8EI}\left[1 + \frac{8I}{5l^2A} + \nu\frac{4EI}{5l^2GA}\right] = \frac{5ql^4}{8EI}(1+\eta),$$

trong đó η là hệ số kể đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn.

Vì tiết diện là hình chữ nhật nên $\nu = 1,2$ và $\dfrac{I}{A} = \dfrac{bh^3}{12bh} = \dfrac{h^2}{12}$.

Ngoài ra ta có liên hệ: $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$, với μ là hệ số biến dạng ngang Poisson. Do đó:

$$\eta = \frac{8}{5}\frac{h^2}{12l^2} + \frac{4}{5}1,2\frac{h^2}{12l^2}2(1+\mu) = \frac{2}{15}[1+1,2(1+\mu)]\frac{h^2}{l^2}.$$

Ta thấy trị số η được dùng để đánh giá ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt phụ thuộc tỷ số $h\,/\,l$. Nếu $l >> h$ thì $\eta \approx 0$ tức là ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt không đáng kể.

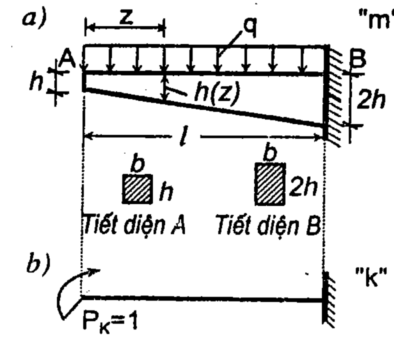
Nếu cho $l = 4h$ và $\mu = 1/3$ thì:

$$\eta = \frac{2}{15}\left[1 + 1,2\left(1 + \frac{1}{3}\right)\right]\frac{1}{16} \approx 0,022 = 2,2\ \%.$$

Ta thấy trong trường hợp này, ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn là nhỏ, không đáng kể và có thể bỏ qua được.

Ví dụ 4.6. Xác định góc xoay tại tiết diện A của dầm côngxôn có tiết diện

chữ nhật thay đổi như trên hình 4.26a.



Hình 4.26

Ta xác định chuyển vị góc theo công thức (4.26):

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{M}_k M_m}{EI}ds = \int_0^l \frac{\overline{M}_k M_m}{EI(z)}dz.$$

Tìm quy luật biến thiên của I, ta có:

$$I(z) = bh^3(z)\,/12.$$

Từ hình 4.26a, theo luật đồng dạng, ta có: $h(z) = h\,(1+z/l)$

nên $$I(z) = \frac{bh^3}{12}\frac{(l+z)^3}{l^3} = I_o\frac{(l+z)^3}{l^3},$$

với $I_o = \dfrac{bh^3}{12}$ là mômen quán tính tại tiết diện A.

Nội lực ở trạng thái "m": $\quad M_m(z) = -qz^2\,/2.$

Tạo trạng thái "k" và xác định nội lực ở trạng thái "k": Để tìm góc xoay tại A, ta đặt tại A lực P_k dưới dạng một mômen tập trung. Chọn chiều của mômen quay thuận chiều kim đồng hồ (hình 4.26b), ta có:

$$\overline{M}_k(z) = +1.$$

Thay các đại lượng này vào công thức chuyển vị ta có:

$$\varphi_A = \Delta_{km} = \int_0^l 1\left(-\frac{qz^2}{2}\right)\frac{l^3dz}{EI_o(l+z)^3} = -\frac{ql^3}{2EI_o}\int_0^l \frac{z^2}{(l+z)^3}dz.$$

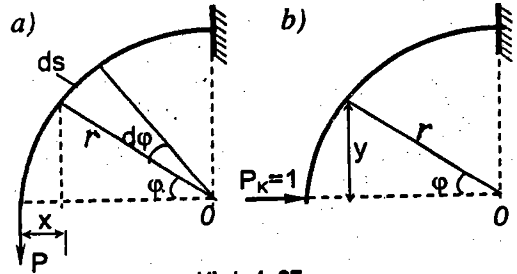
Sau khi lấy tích phân (xem cách lấy tích phân trong các Sổ tay toán học), ta được kết quả:

$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{2EI_o}\left[ln(l+z) + \frac{2l}{l+z} - \frac{l^2}{2(l+z)^2}\right]_0^l = -\frac{ql^3}{2EI_o}.0,0681 =$$

$$= -0,03405\frac{ql^3}{EI_o}.$$

Kết quả mang dấu âm chứng tỏ góc xoay tại A quay ngược chiều với P_k. Cụ thể ở đây là quay ngược chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 4.7. Xác định chuyển vị ngang tại đầu tự do của dầm cong trên hình 4.27a. Cho biết $EI = const.$



Hình 4. 27

Vì bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt nên ta có thể xác định chuyển vị theo công thức (4.26).

Trạng thái "k" như trên hình 4.27b.

Nếu lấy biến số là góc φ, ta có:

- Nội lực ở trạng thái "m": $M_m = -P.x = -Pr(1-\cos\varphi)$.
- Nội lực ở trạng thái "k": $\overline{M}_k = -1.y = -r\sin\varphi$.

Vi phân của chiều dài $ds = r\,d\varphi$.

Thay cá0c đại lượng đó vào 4.26, ta được:

$$\Delta_{km} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{EI}(-r\sin\varphi)\left[-Pr(1-\cos\varphi)\right]r\,d\varphi = \frac{Pr^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi(1-\cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{Pr^3}{EI}\int_1^0 -(1-\cos\varphi)\,d(\cos\varphi) = \frac{Pr^3}{2EI}.$$

Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của P_k tức là hướng về bên phải.

B. Trường hợp hệ dàn khớp chịu tải trọng

Như đã biết, trong dàn khớp chỉ tồn tại lực dọc còn $M = Q = 0$, nên:

$$\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{N}_k N_m}{EA}ds. \qquad (4.27)$$

Trong thực tế, các đại lượng E, A và lực dọc $\overline{N}_k$ cũng như N_m thường không thay đổi trong phạm vi từng thanh, do đó ta có thể đưa các đại lượng đó ra ngoài dấu tích phân:

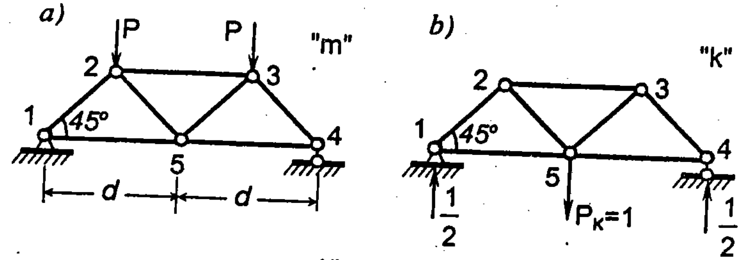
$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{im}}{(EA)_i}\int_0^{l_i} ds,$$

suy ra

$$\boxed{\Delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{im}}{(EA)_i}l_i.} \qquad (4.28)$$

Dấu tổng trong công thức áp dụng cho tất cả các thanh của dàn.

Ví dụ 4.8. Xác định chuyển vị đứng tại mắt *5* của dàn trên hình 4.28a. Cho biết $EA = const.$



Hình 4. 28

Để cho thuận tiện, ta lập bảng tính chuyển vị trong dàn. Căn cứ vào công thức (4.28) ta chuẩn bị các số liệu cần thiết và ghi vào bảng 4.1. Thứ tự thực hiện như sau:

a) Xác định chiều dài của từng thanh, ghi kết quả vào bảng 4.1 (cột thứ hai).

Bảng 4.1

Thanh	l_i	$1/(EA)_i$	N_{im}	$\overline{N}_{ik}$	$\overline{N}_{ik}N_{im}l_i/(EA)_i$
1-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
2-3	d	$1/EA$	$-P$	-1	Pd/EA
3-4	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
4-5	d	$1/EA$	P	$1/2$	$Pd/2EA$
5-1	d	$1/EA$	P	$1/2$	$Pd/2EA$
5-2	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	0	$\sqrt{2}/2$	0
5-3	$d\sqrt{2}/2$	$1/EA$	0	$\sqrt{2}/2$	0

$$\sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{im}}{(EA)_i}l_i = \frac{Pd}{EA}(2+\sqrt{2}).$$

b) Xác định giá trị $1/EA$ cho từng thanh, ghi vào cột thứ ba. Trong trường hợp này, các giá trị đó như nhau.

c) Xác định lực dọc N_{im} trong từng thanh ở trạng thái "m" (ghi vào cột thứ tư) theo các phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã biết.

d) Tạo trạng thái "k" và xác định lực dọc $\overline{N}_{ik}$ trong từng thanh, ghi vào cột thứ năm.

e) Tính các giá trị $[\overline{N}_{ik} N_{im} l_i] /(EA)_i$ cho từng thanh bằng cách nhân các số liệu trong bốn cột: thứ hai, thứ ba, thứ tư và thứ năm với nhau. Ghi kết quả của phép nhân vào cột thứ sáu rồi cộng các kết quả sẽ được chuyển vị cần tìm.

Kết quả $$\Delta_{km} = \frac{Pd}{EA}(2+\sqrt{2}).$$

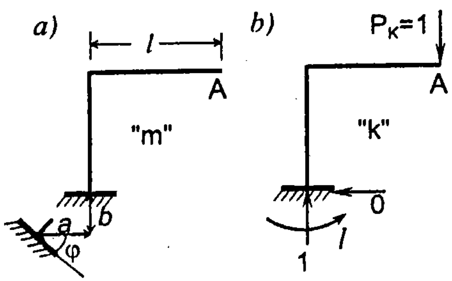
C. Trường hợp hệ tĩnh định bất kỳ chịu chuyển vị cưỡng bức

Khi liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong các hệ tĩnh định không phát sinh nội lực, do đó công thức chuyển vị sẽ có dạng:

$$\boxed{\Delta_{kZ} = -\sum_j \overline{R}_{jk} Z_{jm}.} \qquad (4.29)$$

Ví dụ 4.9. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại đầu tự do của khung khi ngàm chịu chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là a, theo phương thẳng đứng là b và xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc bằng φ (hình 4.29a).

Để xác định chuyển vị này ta cần tạo trạng thái "k" (hình 4.29b) trong đó đặt lực $P_k = 1$ tại đầu tự do, có phương thẳng đứng. Tiếp đó tìm các phản lực $\overline{R}_{jk}$ tại các liên kết có chuyển vị cưỡng bức do $P_k = 1$ gây ra. Giá trị của các phản lực này ghi trên hình 4.29b.



Hình 4. 29

Áp dụng công thức (4.29), đồng thời chú ý là tích số của $\overline{R}_{jk} Z_{jm}$ dương khi phản lực tại liên kết j ở trạng thái "k" cùng chiều với chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j ở trạng thái "m", ta được:

$$\Delta_{kZ} = -(0.a - 1.b - 1.\varphi) = b + 1\varphi.$$

D. Trường hợp hệ tĩnh định bất kỳ chịu sự thay đổi nhiệt độ

Sự thay đổi nhiệt độ chỉ gây ra nội lực trong hệ siêu tĩnh mà không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định. Do đó ta có thể xác định chuyển vị trong hệ tĩnh định theo công thức sau:

$$\Delta_{kt} = \sum \int \overline{M}_k \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds + \sum \int \overline{N}_k \alpha\, t_{cm} ds. \qquad (4.30)$$

Trong những trường hợp khi:

- ✧ Nhiệt độ thay đổi như nhau theo chiều dài của từng đoạn thanh.
- ✧ Vật liệu trong từng đoạn thanh như nhau, nghĩa là $\alpha = const$ trong từng đoạn thanh.
- ✧ Chiều cao $h = const$ trong từng đoạn thanh.

Ta có thể đưa các đại lượng t_{cm}, $(t_{2m} - t_{1m})$, α và h ra ngoài dấu tích phân

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m}) \int \overline{M}_k ds + \sum \alpha\, t_{cm} \int \overline{N}_k ds.$$

Ta thấy các tích số $\overline{M}_k ds$ và $\overline{N}_k ds$ lần lượt là diện tích phân tố của biểu đồ mômen uốn và lực dọc nên:

$\int \overline{M}_k .ds = \Omega(\overline{M}_k)$ – diện tích biểu đồ mômen uốn trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".

$\int \overline{N}_k .ds = \Omega(\overline{N}_k)$ – diện tích biểu đồ lực dọc trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k".

Công thức sẽ có dạng:

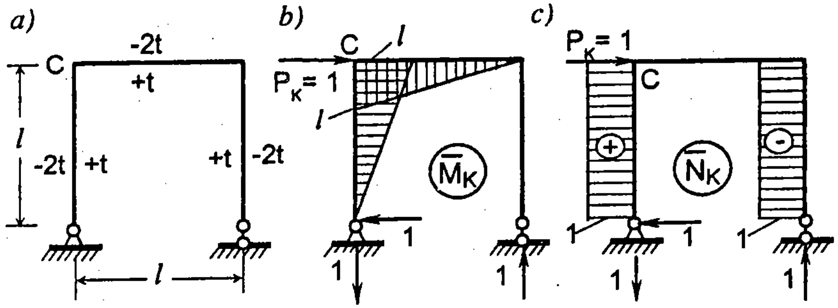
$$\boxed{\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha\, t_{cm} \Omega(\overline{N}_k).} \qquad (4.31)$$

Ví dụ 4.10. Xác định chuyển vị ngang của điểm C khi nhiệt độ ở trong khung biến đổi $+t$ còn ở ngoài khung biến đổi $-2t$ (hình 4.30a). Tiết diện hình chữ nhật có chiều cao $h = const$.

Để áp dụng công thức (4.31) ta cần chuẩn bị các số liệu sau:

- *Xác định các giá trị t_{cm} và $(t_{2m} - t_{1m})$.* Nếu đặt người quan sát đứng ở bên trong khung thì các giá trị này như nhau cho tất cả các thanh và bằng:

$t_{cm} = \frac{1}{2}(t_1+t_2) = \frac{1}{2}(-2t + t) = -\frac{1}{2}t$; $t_{2m} - t_{1m} = +t - (-2t) = + 3t.$



Hình 4. 30

• *Tạo trạng thái "k" và vẽ các biểu đồ nội lực.* Biểu đồ $\overline{M}_k$ như trên hình 4.30b (chỉ cần vẽ trong những đoạn thanh nào có sự thay đổi nhiệt độ $t_{2m} - t_{1m}$). Biểu đồ $\overline{N}_k$ như trên hình 4.30c (chỉ cần vẽ trong những đoạn thanh nào có sự thay đổi nhiệt độ t_{cm}).

Áp dụng công thức (4.31):

$$\Delta_{kt} = \frac{\alpha}{h}3t\frac{l.l}{2} + \frac{\alpha}{h}3t\frac{l.l}{2} + \alpha\left(-\frac{t}{2}\right)(l.l) + \alpha\left(-\frac{t}{2}\right)(-l.l) = \frac{3\alpha t l^2}{h}.$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị hướng theo chiều của lực P_k (hướng về bên phải).

E. Trường hợp hệ dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác

Khi lắp ráp các thanh chế tạo không chính xác vào hệ dàn, các mắt dàn sẽ chuyển vị. Bài toán có thể giải quyết tương tự như trường hợp hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ như sau:

✤ Các thanh có chiều dài l được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu là Δ được xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là $\alpha t_c l = \Delta$.

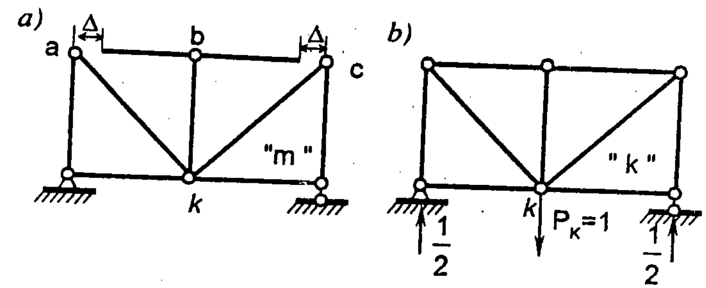
✤ Các thanh bị chế tạo hụt có thể xem như chịu biến dạng vì nhiệt tương đương là $\alpha t_c l = -\Delta$ với l là chiều dài của thanh.

Một cách tổng quát, nếu gọi Δ_i là *độ dôi* của thanh thứ i khi thanh được chế tạo dài hơn chiều dài yêu cầu thì sau khi áp dụng công thức (4.31) cho trường hợp này ta có:

$$\boxed{\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik}\ \Delta_{im}\ .} \qquad (4.32)$$

Ví dụ 4.11. Xác định độ võng tại k của dàn trên hình 4.31 nếu trong khi chế tạo, chiều dài của các thanh a-b và b-c bị hụt là Δ.

Hình 4. 31



Với bài toán đã cho, ta có: $i = 2$; $\Delta_{a\text{-}b} = \Delta_{b\text{-}c} = -\Delta$. Trạng thái "k" được tạo ra như trên hình 4.39b. Sau khi tính toán ta được:

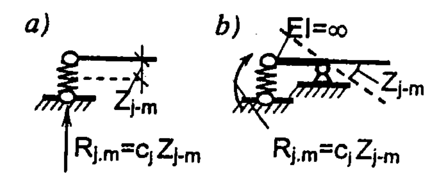
$$\overline{N}_{ab,k} = \overline{N}_{bc,k} = -\frac{1}{2}. \quad \text{Do đó} \quad \Delta_{k\Delta} = -\frac{1}{2}(-\Delta) - \frac{1}{2}(-\Delta) = \Delta\ .$$

F. Trường hợp hệ tĩnh định có liên kết đàn hồi, chịu tải trọng

Các liên kết đàn hồi thường được mô tả dưới dạng lò xo. Quy ước ký hiệu liên kết thanh đàn hồi và liên kết ngàm đàn hồi như trên hình 4.32a và b.

Các liên kết đàn hồi được đặc trưng bằng *hệ số đàn hồi c*. Ý nghĩa Vật lý của hệ số đàn hồi như sau:

✤ *Với liên kết thanh đàn hồi:* c là lực cần tác dụng vào liên kết để sao cho liên kết có chuyển vị thẳng bằng đơn vị; đơn vị đo của c thường là kN/m.



Hình 4 .32

✤ *Với liên kết ngàm đàn hồi:* c là mômen cần tác dụng vào liên kết để sao cho liên kết có chuyển vị xoay bằng đơn vị; đơn vị đo của c thường là kN.m.

Để giải bài toán cho trường hợp hệ có liên kết đàn hồi ta có thể thay thế mỗi liên kết đàn hồi bằng một cấu kiện thanh có độ cứng tương ứng. Tuy nhiên, có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách vận dụng số hạng đầu của công thức (4.25) với lập luận như sau: quan niệm chuyển vị của liên kết đàn hồi j ở trạng thái "m" như là chuyển vị cưỡng bức Z_{jm} tại liên kết j do các nguyên nhân ở trạng thái "m" gây ra. Giá trị của Z_{jm} được xác định theo phản lực R_{jm} tại liên kết đàn hồi j ở trạng thái "m" thông qua hệ số đàn hồi c_j của liên kết. Giữa chuyển vị Z_{jm} và phản lực R_{jm} tại liên kết đàn hồi luôn ngược chiều nhau nên ta có liên hệ sau:

$$Z_{jm} = -\frac{R_{jm}}{c_j}$$

Sau khi thay hệ thức trên vào công thức chuyển vị (4.25) ta được công thức xác định chuyển vị cho trường hợp hệ tĩnh định có liên kết đàn hồi, chịu tải trọng như sau:

$$\Delta_{kZ} = \sum_j \overline{R}_{jk}\frac{R_{jm}}{c_j} + \sum\int\frac{\overline{M}_k M_m}{EI}ds + \sum\int\frac{\overline{N}_k N_m}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{\overline{Q}_k Q_m}{GA}ds. \qquad (4.33)$$

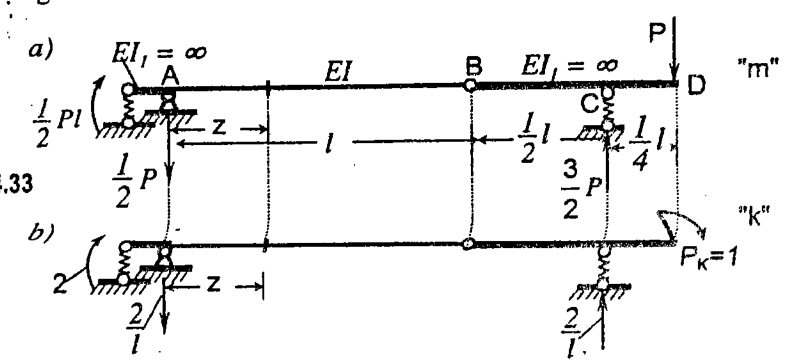
Ví dụ 4.12. Cho hệ có liên kết đàn hồi và chịu tải trọng như trên hình 4.33a. Tìm góc xoay tại tiết diện D. Cho biết các hệ số đàn hồi :

- tại liên kết thanh đàn hồi ở C: $c_1 = 10EI/l^3$;
- tại liên kết ngàm đàn hồi ở A: $c_2 = 10EI/l$.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với ảnh hưởng của biến dạng uốn.

Gọi trạng thái đã cho trên hình 4.33a là trạng thái "m". Tạo trạng thái khả dĩ "k" để tìm góc xoay tại D như trên hình 4.33b.

Từ các điều kiện cân bằng ta xác định được các phản lực liên kết, kết quả tìm được ghi trên hình 4.33a và b.



Hình 4.33

Để tính các tích phân trong số hạng thứ hai của (4.33) ta cần lập các biểu thức mômen uốn trong các đoạn thanh. Chú ý là trong đoạn thanh BD có

$EI_1 = \infty$ nên kết quả tính tích phân bằng không. Do đó chỉ cần lập các biểu thức mômen uốn trong đoạn thanh AB:

$$M_m = \frac{Pl}{2} - \frac{P}{2}z; \qquad \overline{M}_k = 2 - \frac{2}{l}z.$$

Áp dụng công thức (4.33), ta có:

$$\varphi_D = \left[2.\frac{Pl}{2}.\frac{1}{c_2} + \frac{2}{l}.\frac{3P}{2}.\frac{1}{c_1}\right] + \frac{1}{EI}\int_0^l \frac{2}{l}(l-z)\frac{P}{2}(l-z)dz =$$

$$= \left[2.\frac{Pl}{2}.\frac{l}{10EI} + \frac{2}{l}.\frac{3P}{2}.\frac{l^3}{10EI}\right] + \frac{P}{l.EI}\int_0^l (l-z)^2dz = 0{,}733\frac{Pl^2}{EI}.$$

Tiết diện D quay thuận chiều kim đồng hồ.

Chú thích: Trong trường hợp hệ chịu nhiều nguyên nhân khác nhau ta có thể tính riêng biệt với từng nguyên nhân rồi cộng các kết quả.

4.8. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"

Đối với hệ gồm các thanh thẳng (dầm, khung, dàn) ta có thể tính các tích phân trong công thức chuyển vị đơn giản hơn so với cách lấy tích phân trực tiếp. Cách tính này được gọi là cách "nhân biểu đồ" do A. N. Vêrêxaghin đề xuất vào năm 1925.

Các tích phân trong công thức chuyển vị (4.25) đều có thể đưa về dạng tích phân T của tích hai hàm số $\varphi(s)$ và $\Phi(s)$ như sau

$$T = \int_{s_1}^{s_2}\varphi(s).\Phi(s)ds. \qquad (4.34)$$

Chẳng hạn:

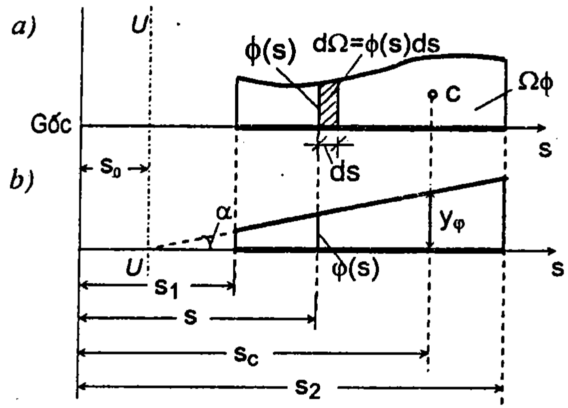
$$\int_{s_1}^{s_2}\overline{M}_k\frac{M_m}{EI}ds = \int_{s_1}^{s_2}\varphi(s).\Phi(s)ds, \text{ trong đó } \varphi(s) = \overline{M}_k \text{ còn } \Phi(s) = \frac{M_m}{EI}.$$

Trong những trường hợp khi hệ gồm những thanh thẳng và một trong hai hàm số là hằng số hoặc bậc nhất, giả sử $\varphi(s)$ là hằng số hoặc bậc nhất và $\Phi(s)$ có bậc bất kỳ, ta có thể tính tích phân T có dạng (4.34) bằng cách lấy diện tích Ω_Φ của biểu đồ có bậc bất kỳ nhân với tung độ y_φ của biểu đồ là hằng số hoặc bậc nhất lấy tại hoành độ tương ứng với trọng tâm của diện tích Ω_Φ.

Nghĩa là:

$$\boxed{T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s).\Phi(s)ds = \Omega_\Phi\, y_\varphi .} \qquad (4.35)$$

Thật vậy, giả sử trong khoảng $(s_1,\ s_2)$ hàm $\Phi(s)$ và $\varphi(s)$ có dạng như trên hình 4.34a,b. Kéo dài đường thẳng $\varphi(s)$ tới khi cắt đường chuẩn ở U và gọi α là góc nghiêng của đường thẳng $\varphi(s)$ với đường chuẩn. Từ hình vẽ ta dễ dàng thấy:



Hình 4. 34

- $\varphi(s) = (s - s_o)tg\alpha$;
- $\Phi(s)ds = d\Omega$ – diện tích phân tố của biểu đồ $\Phi(s)$ (phần gạch chéo trên hình 4.34a).

Thay vào (4.34) ta được: $T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s).\Phi(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_o).tg\alpha.d\Omega$.

Vì $tg\alpha$ không đổi trong khoảng (s_1, s_2), nên: $T = tg\alpha \int_{s_1}^{s_2} (s - s_o).d\Omega$.

Tích phân trong vế phải của biểu thức trên chính là *mômen tĩnh* S_U của diện tích trong khoảng (s_1, s_2) lấy đối với trục U. Trục U đi qua điểm U và vuông góc với đường chuẩn. Mặt khác, ta đã biết mômen tĩnh S_U bằng diện tích nhân với khoảng cách từ trọng tâm của diện tích đến trục U.

Do đó: $\int_{s_1}^{s_2} (s - s_o).d\Omega = S_U = (s_c - s_o)\ \Omega_\Phi$, nên $T = tg\alpha\,(s_c - s_o)\ \Omega_\Phi$.

Từ hình 4.31b ta thấy: $tg\alpha\,(s_c - s_o) = y_\varphi$.

Vậy $$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s).\Phi(s)ds = \Omega_\Phi\, y_\varphi .$$

Đó là điều cần chứng minh.

Cách tính các tích phân T như trình bày ở trên gọi là cách "*nhân biểu đồ*" theo *Vêrêxaghin*. Ta ký hiệu phép "*nhân*" biểu đồ như sau:

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s).\Phi(s)ds = (\varphi)\,(\Phi) . \qquad (4.36)$$

Với cách ký hiệu như vậy, ta có thể viết lại công thức chuyển vị cho trường hợp hệ chịu tải trọng như sau:

$$\boxed{\Delta_{km} = (\overline{M}_k)\,(M_m) + (\overline{N}_k)\,(N_m) + (\overline{Q}_k)\,(Q_m).} \qquad (4.37)$$

Đồng thời cần lưu ý là:

✤ *Các đại lượng 1/EI, 1/EA, ν/GA tuy không viết trong (4.37) nhưng cần hiểu ngầm là vẫn tồn tại, khi tính ta phải thêm các đại lượng đó vào.*

✤ *Trong (4.37) tuy không viết dấu tổng nhưng cũng cần hiểu là phải "nhân" biểu đồ trong tất cả các đoạn thanh của hệ rồi cộng đại số các kết quả.*

Các chú ý khi nhân biểu đồ:

1) *Tung độ y_φ bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có bậc bé hơn hoặc bằng bậc một, còn diện tích có thể lấy ở biểu đồ bất kỳ.*

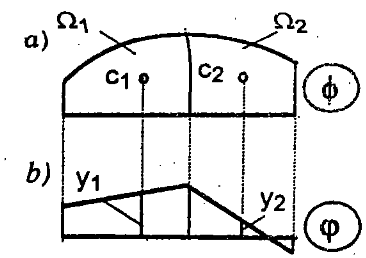
2) *Nếu diện tích và tung độ y_φ cùng dấu thì kết quả nhân mang dấu dương và ngược lại.*

3) *Trong khoảng $(s_1,\ s_2)$ biểu đồ lấy tung độ phải là một đoạn thẳng trơn tru* (nếu là đường thẳng gãy khúc thì $tg\alpha$ sẽ thay đổi và ta sẽ không thể đưa ra ngoài dấu tích phân trong phép biến đổi khi chứng minh cách nhân).

   Trong trường hợp biểu đồ bậc nhất $\varphi(s)$ là đường thẳng gãy khúc ta cần chia khoảng $(s_1,\ s_2)$ ra thành nhiều đoạn để áp dụng cách nhân rồi cộng kết quả với nhau. Chẳng hạn như trường hợp trên hình 4.35, chia khoảng cần nhân biểu đồ thành hai đoạn để thực hiện phép nhân, ta có:

   $$T = \Omega_1\, y_1 + \Omega_2\, y_2 .$$

   Biểu đồ lấy diện tích không bị điều kiện này hạn chế.



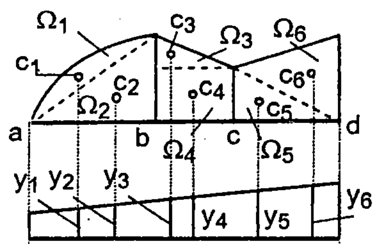
Hình 4. 35

4) Theo tính chất tích phân của một tổng hoặc một hiệu bằng tổng hoặc hiệu các tích phân, *khi biểu đồ lấy diện tích là hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình rồi cộng kết quả với nhau. Cần*

hiểu hình đơn giản là hình dễ tìm ngay được diện tích và trọng tâm của nó.

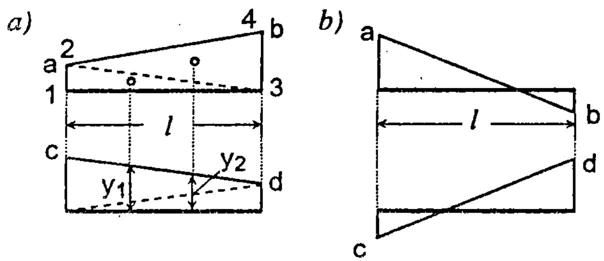
Ví dụ như trường hợp trên hình 4.36 ta có thể chia biểu đồ thành những hình đơn giản như sau: Trong khoảng *ab* ta chia biểu đồ có dạng parabol thành một mảnh parabol và một tam giác, trong khoảng *bc* và *cd* ta có thể chia thành một hình chữ nhật và một tam giác hoặc hai hình tam giác. Khi đó:

$$T = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3 + \Omega_4 y_4 + \Omega_5 y_5 + \Omega_6 y_6 .$$



Hình 4. 36

Hình 4. 37



Trường hợp nhân hai biểu đồ có dạng hình thang cùng ở một bên đường chuẩn như trên hình 4.37a, ta có thể xem diện tích hình thang như tổng của diện tích hai tam giác *1 2 3* và *2 3 4*. Do đó:

$$T = \frac{l}{2} a\, l\, y_1 + \frac{l}{2} b\, l\, y_2 .$$

Từ hình 4.37a ta dễ dàng tìm được:

$$y_1 = \frac{2}{3} c + \frac{1}{3} d \qquad \text{và} \qquad y_2 = \frac{2}{3} d + \frac{1}{3} c .$$

Do đó:

$$T = \frac{l}{6} \left[2ac + 2bd + ad + bc \right]. \qquad (4.38)$$

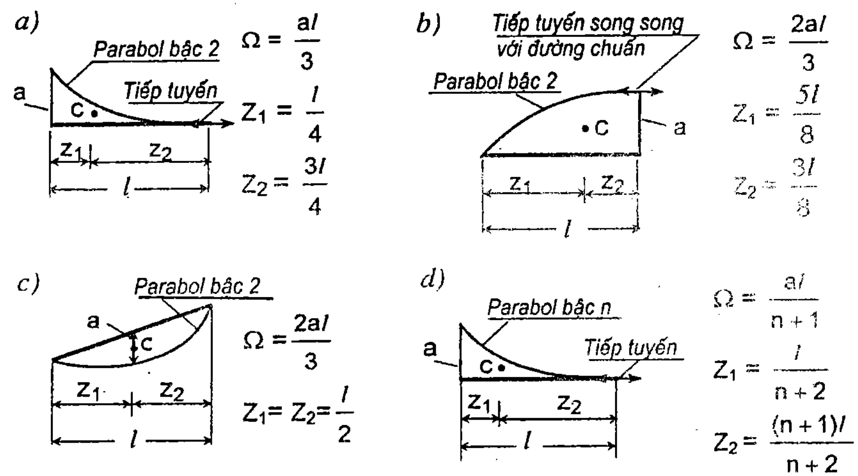
Đối với trường hợp nhân hai biểu đồ có dạng hình thang khác với dạng trên hình 4.37a, ta vẫn có thể áp dụng công thức (4.38) với chú ý: *tích của từng cặp hai tung độ trong các số hạng của (4.38) mang dấu dương khi hai tung độ đó ở cùng một bên đường chuẩn, còn mang dấu âm khi hai tung độ đó ở hai bên đường chuẩn.*

Chẳng hạn, khi nhân hai hình thang xoắn như trên hình 4.37b, ta có:

$$T = \frac{l}{6} \left[-2ac - 2bd + ad + bc \right].$$

5) *Biểu đồ đối xứng nhân với biểu đồ phản xứng cho kết quả bằng không* (theo tính chất của tích phân).

Trên hình 4.38 cung cấp số liệu về diện tích và vị trí trọng tâm của một số hình thường gặp.



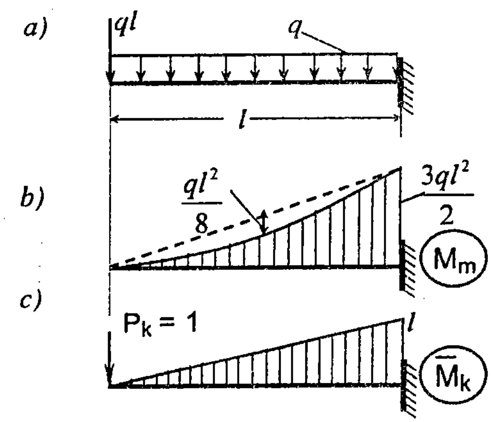
Hình 4. 38

Ví dụ 4.13. Xác định độ võng tại đầu tự do của dầm trên hình 4.39a.

Biểu đồ M_m vẽ trên hình 4.39b.

Trạng thái "*k*" và biểu đồ $\overline{M}_k$ vẽ trên hình 4.39c. Biểu đồ $\overline{M}_k$ có dạng đường thẳng nên có thể áp dụng phép "nhân biểu đồ".

Khi nhân ta xem biểu đồ M_m như hiệu của hai hình: hình tam giác và hình parabol (chú ý ở đây đường chuẩn không tiếp xúc với đường cong tại đầu tự do).

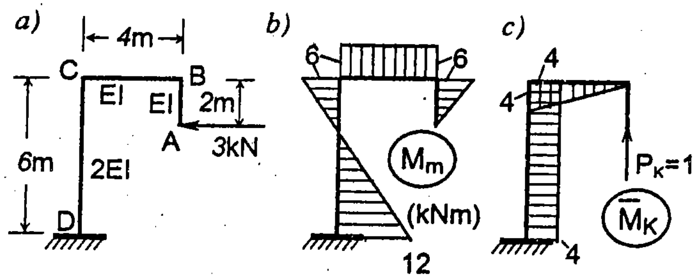


Hình 4. 39

Ta có: $\Delta_{km} = (\overline{M}_k)(M_m) = \dfrac{l}{EI}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{3ql^2}{2}l\dfrac{2}{3}l - \dfrac{2}{3}\dfrac{ql^2}{8}l\dfrac{l}{2}\right] = \dfrac{11}{24}\dfrac{ql^4}{EI}$.

Ví dụ 4.14. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại *A* của khung trên hình 4.40a.

Biểu đồ M_m vẽ trên hình 4.40b. Trạng thái "*k*" và biểu đồ $\overline{M}_k$ vẽ trên hình 4.40c.



Hình 4. 40

Khi nhân biểu đồ cần chú ý là độ cứng của các thanh có giá trị khác nhau. Vì hai biểu đồ đều có dạng đường thẳng nên ta lấy diện tích và tung độ y_φ ở biểu đồ nào cũng được.

Kết quả nhân biểu đồ:

- *Trong thanh AB:* mômen uốn $\overline{M}_k$ bằng không nên kết quả nhân bằng không.
- *Trong thanh BC:* $-\dfrac{1}{EI}4.6.2=-\dfrac{48}{EI}$;
- *Trong thanh CD:* $\dfrac{1}{2EI}\left[\dfrac{1}{2}12.6.4-\dfrac{1}{2}6.6.4\right]=\dfrac{36}{EI}$.

Như vậy: $\Delta_{km}=-\dfrac{48}{EI}+\dfrac{36}{EI}=-\dfrac{12}{EI}$.

Kết quả mang dấu trừ chứng tỏ chuyển vị hướng ngược chiều P_k tức là hướng xuống dưới. Trong khi tính toán ta đã dùng các đơn vị lực kN, đơn vị chiều dài là m nên độ cứng *EI* cũng phải lấy theo $(kN/m^2)\times m^4 = kNm^2$, do đó chuyển vị tìm được sẽ tính theo mét.

4.9. Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị

Trong trường hợp hệ có các thanh cong (bài toán vòm) hoặc thanh có tiết diện thay đổi, nếu không thực hiện phép rời rạc hoá gần đúng bằng cách thay thanh cong và thanh có tiết diện thay đổi bằng các đoạn thanh thẳng có tiết diện không đổi thì về nguyên tắc ta không dùng được cách nhân biểu đồ mà phải tích phân trực tiếp các tích phân trong công thức chuyển

vị. Nếu các hàm dưới dấu tích phân này không thể đưa được về dạng hàm sơ cấp quen thuộc thì có thể dùng cách tính gần đúng để xác định.

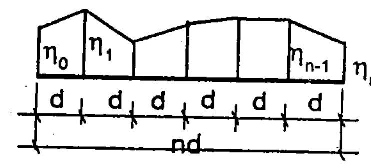
Nói chung, các tích phân trong công thức chuyển vị đều có thể đưa được về dạng:

$$T=\int_a^b \eta dz. \qquad (4.39)$$

Chẳng hạn: $\displaystyle\int_a^b \overline{M}_k\frac{M_m}{EI}ds=\int_a^b \overline{M}_k\frac{M_m}{EI}\frac{dz}{cos\varphi}=\int_a^b \eta dz$, với $\eta=\overline{M}_k\dfrac{M_m}{EI\,cos\varphi}$,

trong đó $cos\varphi = 1\big/\sqrt{1+(dy/dz)^2}$ với *y(z)* là phương trình của trục thanh.

Chia khoảng cần lấy tích phân (khoảng *a-b*) thành *n* đoạn có chiều dài bằng nhau theo trục *z* và bằng *d*. Tiếp đó xác định các giá trị của hàm η tại những hoành độ tương ứng với những khoảng đã chia.



Hình 4. 41

Nếu vẽ đồ thị biểu diễn luật biến thiên của hàm η ta sẽ tìm được dạng gần đúng như trên hình 4.41. Các tung độ η tại ranh giới những đoạn chia biểu thị giá trị chính xác của hàm η còn các tung độ trung gian chỉ là gần đúng. Tích phân cần tìm chính là diện tích biểu đồ vừa vẽ được.

Do đó ta có thể dùng công thức tính diện tích để xác định tích phân 4.39.

* *Nếu giả thiết là các tung độ giữa mỗi đoạn chia biến thiên theo luật đường thẳng* (hình 4.41) thì ta có thể dùng *công thức hình thang* để tính diện tích tức là tính tích phân (4.39):

$$T=\int_a^b \eta dz = d\left[\frac{\eta_o}{2}+\eta_1+\eta_2+...+\eta_{n-1}+\frac{\eta_n}{2}\right]. \qquad (4.40)$$

* *Nếu giả thiết hàm số η thay đổi theo đường cong parabol trong hai đoạn kế tiếp nhau* (đường parabol bậc hai đi qua ba tung độ chính xác) và *nếu số đoạn chia là chẵn* thì ta có thể dùng công thức *Simpson* để xác định:

$$T=\int_a^b \eta dz=\frac{d}{3}\left[\eta_o+4(\eta_1+\eta_3+...+\eta_{n-1})+2(\eta_2+\eta_4+...+\eta_{n-2})+\eta_n\right].$$

(4.41)

Công thức *Simpson* cho kết quả chính xác hơn công thức hình thang nên thường được áp dụng trong thực hành.

Nếu hàm số η không trơn tru thì cần chia khoảng lấy tích phân thành nhiều khoảng trong đó các hàm η trơn tru rồi áp dụng công thức trên cho từng khoảng, sau đó cộng kết quả,

Tất nhiên, nếu số đoạn chia càng nhiều thì kết quả càng chính xác nhưng khối lượng tính toán cũng tăng lên.

4.10. Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính bất kỳ ở hai trạng thái "*m*" và "*k*" như trên hình 4.42a và b.

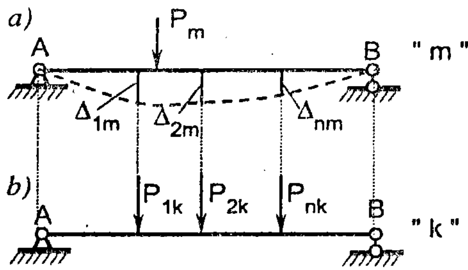
Ta biểu thị các lực ở trạng thái "*k*" theo lực P_{jk}:

$P_{1k} = \alpha_{1j} P_{jk}$;

$P_{2k} = \alpha_{2j} P_{jk}$;

.... ;

$P_{nk} = \alpha_{nj} P_{jk}$.



Hình 4.42

Công khả dĩ của nhóm lực ở trạng thái "*k*" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "*m*" bằng:

$$T_{km} = P_{1k}\Delta_{1m} + P_{2k}\Delta_{2m} + ... + P_{nk}\Delta_{nm},$$

hay $$T_{km} = P_{jk}\,[\alpha_{1j}\Delta_{1m} + \alpha_{2j}\Delta_{2m} + ... + \alpha_{nj}\Delta_{nm}] = P_k^*\,\Delta_{km}^*,$$

trong đó: $P_k^* = P_{jk}$ và $\Delta_{km}^* = [\alpha_{1j}\Delta_{1m} + \alpha_{2j}\Delta_{2m} + ... + \alpha_{nj}\Delta_{nm}]$.

Như vậy, trong trường hợp tổng quát ta luôn có thể biểu thị công khả dĩ của một nhóm lực P_{ik} bất kỳ (tập trung, phân bố...) dưới dạng một đơn thức là tích của hai đại lượng vô hướng:

$$T_{km} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}\Delta_{im} = P_k^*\,\Delta_{km}^*\,. \qquad (4.42)$$

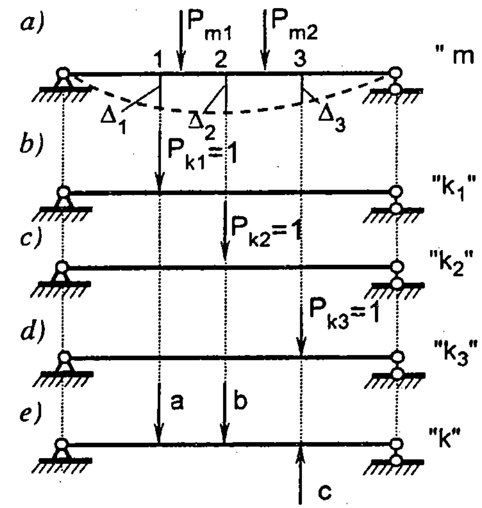
P_k^* gọi là *lực khái quát*. Đó là lực tưởng tượng thay thế cho các lực P_{ik}.

Lực P_k^* phụ thuộc nhóm lực bất kỳ P_{ik} (tập trung hoặc phân bố) và biểu thị gián tiếp nhóm lực đó.

Δ_{km}^* gọi là *chuyển vị khái quát* tương ứng với các lực P_k^* do các nguyên nhân *m* gây ra. Chuyển vị khái quát phụ thuộc các chuyển vị Δ_{im}.

Biểu diễn công của các lực dưới dạng tích của một lực khái quát với chuyển vị khái quát cho phép ta không cần phân biệt lực khái quát với lực đơn giản cũng như chuyển vị khái quát với chuyển vị đơn giản. Do đó *tất cả những nội dung đã được trình bày với lực đơn giản đều có thể mở rộng cho trường hợp lực khái quát và chuyển vị khái quát.*

Trong phạm vi bài toán xác định chuyển vị ta có thể vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát và lực khái quát để tạo các trạng thái "*k*" khi cần xác định các tập hợp chuyển vị.



Hình 4.43

Giả sử xét một hệ bất kỳ chịu tác dụng của các nguyên nhân "*m*", tại các điểm xác định *1*, *2*, *3* của hệ có các chuyển vị thẳng đứng lần lượt là Δ_1, Δ_2, Δ_3 (hình 4.43a). Yêu cầu xác định tập hợp chuyển vị

$$\Delta^* = a\,\Delta_1 + b\,\Delta_2 - c\Delta_3$$

với *a*, *b*, *c* là các hằng số cho trước.

Nếu không vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát, khi xác định Δ^* ta cần thực hiện như sau:

Xác định các chuyển vị Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Các trạng thái k_1, k_2, k_3 tương ứng vẽ trên hình 4.43b, c, d. Để trình bày được đơn giản ta chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn (nếu xét thêm các ảnh hưởng khác thì nội dung cũng không có gì thay đổi) và viết các công thức chuyển vị dưới dạng nhân biểu đồ.

Ta có: $\Delta_1 = (\overline{M}_{k_1})(M_m)$; $\Delta_2 = (\overline{M}_{k_2})(M_m)$; $\Delta_3 = (\overline{M}_{k_3})(M_m)$. (a)

Lần lượt nhân các chuyển vị Δ_1, Δ_2, Δ_3 vừa tìm được với các hằng số a, b, −c, và thực hiện phép cộng ta sẽ xác định được:

$$\Delta^* = a\,\Delta_1 + b\,\Delta_2 - c\Delta_3. \qquad (b)$$

Cách làm như vậy tương đối tốn thời gian vì phải nhân biểu đồ nhiều lần.

Bây giờ ta đặt vấn đề tìm lực khái quát P^* biểu thị bằng một nhóm lực nào đó đặt ở trạng thái "k" để sao cho P^* sinh công trên chuyển vị Δ^* cần xác định. Nói khác đi là tìm nhóm lực P^* sao cho khi nhân biểu đồ $\overline{M}_k$ do chúng gây ra với biểu đồ M_m ta sẽ tìm ngay được chuyển vị Δ^*:

$$\Delta^* = (\overline{M}_k)(M_m) \qquad (c)$$

Nếu thay (a) vào (b), ta được

$$\Delta^* = a(\overline{M}_{k_1})(M_m) + b(\overline{M}_{k_2})(M_m) - c(\overline{M}_{k_3})(M_m) =$$

$$= [\,a(\overline{M}_{k_1}) + b(\overline{M}_{k_2}) - c(\overline{M}_{k_3})\,](M_m). \qquad (d)$$

So sánh (c) với (d) ta thấy:

$$(\overline{M}_k) = a(\overline{M}_{k_1}) + b(\overline{M}_{k_2}) - c(\overline{M}_{k_3}).$$

Vì các tung độ biểu thị nội lực tỷ lệ bậc nhất với giá trị của lực tác dụng nên theo nguyên lý cộng tác dụng đồng thời xuất phát từ điều kiện trên, ta thấy lực khái quát P^* chính là nhóm lực như trên hình 4.43e.

Như vậy, *nếu ở trạng thái "m" ta muốn tìm một tập hợp chuyển vị*

$$\Delta^*_{km} = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta_i\,, \qquad (4.43)$$

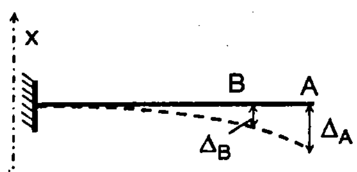
thì ở trạng thái "k" cần đặt lực khái quát P^* là một nhóm gồm n lực trong đó lực thứ i có vị trí và phương của chuyển vị Δ_i còn giá trị bằng hệ số a_i. Tiếp đó áp dụng công thức chuyển vị như thường lệ:

$$\Delta^*_{km} = (\overline{M}_k)(M_m) \qquad (4.44)$$

Dưới đây ta sẽ áp dụng kết luận vừa tìm được cho một số trường hợp thường gặp trong thực tế tính toán.

A. Chuyển vị thẳng tương đối

Chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo phương X nào đó là hiệu số hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm đó theo phương X ở lúc sau và trước biến dạng.



Hình 4.44

Ví dụ cần xét chuyển vị tương đối giữa hai điểm A và B theo phương

thẳng đứng trong hệ trên hình 4.44.

Ta thấy hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm A và B theo phương X trước biến dạng bằng không, còn sau biến dạng là $\Delta_A - \Delta_B$.

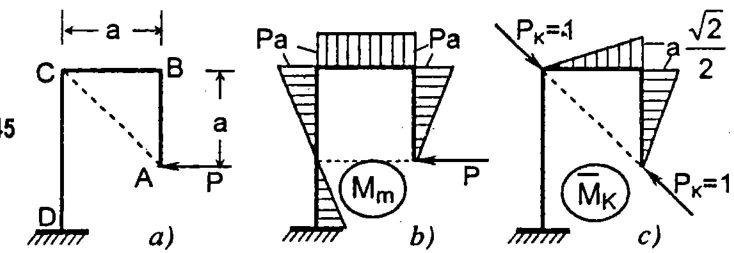
Do đó, chuyển vị tương đối $\Delta_{AB} = \Delta_A - \Delta_B$ tức là hiệu của hai chuyển vị tuyệt đối cùng chiều nhau tại hai điểm A và B theo phương đang xét.

Như vậy, ta có thể phát biểu về cách tạo trạng thái "k" khi cần xác định chuyển vị thẳng tương đối như sau:

Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm nào đó theo phương X bất kỳ thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát P^* dưới dạng hai lực ngược chiều nhau bằng đơn vị tại hai điểm đang xét và hướng theo phương X.

Ví dụ 4.15. Tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm A và C theo phương nối liền hai điểm đó (hình 4.45a).

Hình 4. 45



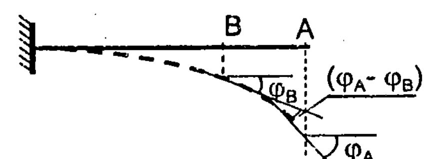
Trạng thái "m" và biểu đồ M_m vẽ trên hình 4.45b. Trạng thái "k" và biểu đồ $\overline{M}_k$ vẽ trên hình 4.45c. Ta có:

$$\Delta^*_{km} = \Delta_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}a\frac{2}{3}Pa + \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}a.Pa\right] = \frac{5\sqrt{2}}{12EI}Pa^3.$$

Kết quả mang dấu dương chứng tỏ chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm này hướng theo chiều của nhóm lực P^* (A và C tiến gần lại với nhau).

D. Chuyển vị góc tương đối

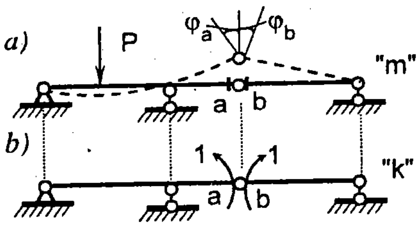
Chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện là hiệu của góc hợp giữa hai tiết diện đó ở lúc sau và trước biến dạng.



Hình 4.46

Ví dụ, xét chuyển vị góc

tương đối giữa hai tiết diện A và B của hệ trên hình 4.46.



Hình 4.47

Góc hợp thành giữa hai tiết diện A và B hay nói khác đi là góc hợp giữa phương tiếp tuyến tại hai tiết diện A và B trước biến dạng bằng không còn sau biến dạng là $\varphi_A - \varphi_B$. Do đó, chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện A và B bằng $\varphi_{A\text{-}B} = \varphi_A - \varphi_B$ tức là bằng hiệu của hai chuyển vị góc tuyệt đối tại hai điểm đó nếu hai góc này được giả thiết là cùng chiều.

Như vậy, *muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát P* dưới dạng hai mômen đơn vị ngược chiều nhau tại hai tiết diện đó.*

Ví dụ, muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện a và b của hệ vẽ trên hình 4.7a ta tạo trạng thái "k" như trên hình 4.47b.

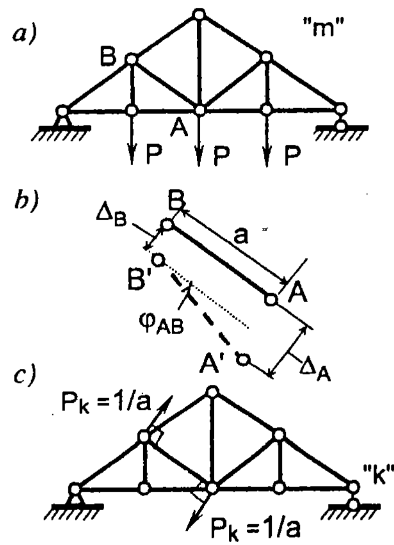
C. Góc xoay của thanh trong dàn

Giả sử cần tìm góc xoay của thanh AB trong dàn (hình 4.48a). Vì các thanh trong dàn không bị uốn nên khi biến dạng chúng vẫn thẳng. Nếu gọi $A'B'$ là vị trí của thanh AB sau biến dạng (hình 4.48) đồng thời gọi Δ_A và Δ_B là chuyển vị tại mắt A và B theo phương vuông góc với trục thanh AB thì khi Δ_A và Δ_B cùng chiều ta có

$$\varphi_{AB} \approx tg\varphi_{AB} =$$

$$= \frac{\Delta_A - \Delta_B}{a} = \frac{1}{a}\Delta_A - \frac{1}{a}\Delta_B .$$

Ta thấy góc xoay của thanh AB trong dàn chính là tập hợp của hai chuyển vị Δ_A và Δ_B với các hệ số là $1/a$ và $-1/a$.



Hình 4. 48

Như vậy, *muốn tìm góc xoay của thanh bất kỳ trong dàn thì ở trạng thái "k" ta cần đặt lực khái quát P* dưới dạng hai lực đặt tại hai đầu thanh, ngược chiều nhau, vuông góc với trục của thanh, mỗi lực có giá trị bằng đơn vị chia cho chiều dài của thanh.*

Trạng thái "k" để tìm góc xoay của thanh AB trong dàn vẽ trên hình 4.48c.

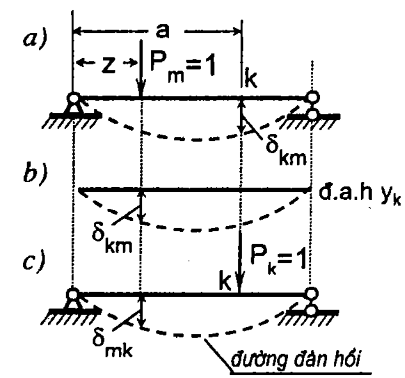
4.11. Cách xác định chuyển vị trong hệ chịu tải trọng di động

Nội dung chính của việc nghiên cứu chuyển vị trong hệ thanh chịu tải trọng di động là vẽ các đường ảnh hưởng của chuyển vị. Sau đó, ta có thể sử dụng các đường ảnh hưởng tìm được để xác định vị trí bất lợi của tải trọng và xác định chuyển vị tương ứng với các vị trí của tải trọng như đã trình bày trong chương 3.

Trong mục này chỉ cần nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng của chuyển vị.

Đường ảnh hưởng của chuyển vị tại một điểm k nào đó là đường biến thiên của chuyển vị đó do một lực đơn vị di động trên công trình gây ra.

Giả sử cần tìm đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện k có hoành độ là a. Muốn vậy ta cần cho một lực $P=1$ di động trên công trình, vị trí của nó được xác định theo tọa độ chạy z, và xác định chuyển vị tại k theo công thức Mohr, chuyển vị này là hàm của z, sau khi cho z thay đổi ta sẽ vẽ được đường ảnh hưởng (hình 4.49b). Tất nhiên tung độ đường ảnh hưởng ở hoành độ z phải bằng chuyển vị Δ_{km} tại k do lực $P_m=1$ đặt tại hoành độ z gây ra.



Hình 4.49

Cách thực hiện như vậy sẽ phức tạp, dựa trên cơ sở định lý tương hỗ của các chuyển vị ta có thể làm đơn giản hơn.

Bây giờ ta xét dầm chịu lực $P_k=1$ đặt tại tiết diện k cần tìm đường ảnh hưởng chuyển vị. Lực $P_k=1$ gây ra đường đàn hồi (biểu đồ độ võng) tương ứng như trên hình 4.49c. Ta sẽ chứng minh rằng đường đàn hồi này chính là đường ảnh hưởng y_k cần tìm.

Thật vậy, lực $P_k=1$ gây ra độ võng tại điểm m có hoành độ z là δ_{mk}, giá trị này thay đổi theo vị trí của điểm m tức là theo hoành độ z. Vì điểm k trên hình 4.49a và lực $P_k=1$ trên hình 4.49c có vị trí cố định nên với bất kỳ vị trí nào của điểm m, theo định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị, ta luôn luôn có:

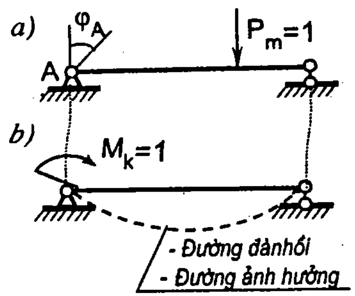
$$\delta_{km} = \delta_{mk}\,.$$

Như vậy ta đã chứng minh được đường đàn hồi (hình 4.49c) chính là đường ảnh hưởng y_k (hình 4.49b).

Căn cứ vào lập luận trên ta có thể kết luận:

* *Đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng tại một tiết diện nào đó chính là đường đàn hồi do lực $P_k = 1$ đặt tại tiết diện đó, có phương hướng theo phương của chuyển vị cần vẽ đường ảnh hưởng.*
* *Đường ảnh hưởng của góc xoay tại một tiết diện nào đó chính là đường đàn hồi do một mômen đơn vị đặt tại tiết diện đó.*

Chẳng hạn cần tìm đường ảnh hưởng của góc xoay tại tiết diện A trong hệ trên hình 4.50a. Muốn vậy ta chỉ cần đặt tại A một mômen bằng đơn vị và vẽ đường đàn hồi của dầm do mômen đó gây ra (hình 4.50b).



Hình 4.50

CÂU HỎI ÔN TẬP

4.1. Thế nào là biến dạng, chuyển vị? Các dạng biến dạng và chuyển vị trong bài toán phẳng? Cách ký hiệu chuyển vị và những giả thiết cơ bản khi nghiên cứu chuyển vị?

4.2. Thiết lập công thức xác định công ngoại lực tác dụng tĩnh trên hệ đàn hồi. Phát biểu tính chất của công ngoại lực.

4.3. Nêu các bước thiết lập công thức công của nội lực và công thức thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức.

4.4. Trình bày cách xác định chuyển vị khi áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng. Nêu các hạn chế của cách tính.

4.5. Phát biểu và chứng minh định lý Castigliano. Trình bày cách vận dụng định lý để tính chuyển vị.

4.6. Phân biệt chuyển vị thực và chuyển vị khả dĩ, công thực với công khả dĩ của ngoại lực.

4.7. Thiết lập và giải thích công thức công khả dĩ.

4.8. Phát biểu và chứng minh các định lý tương hỗ về:

- công khả dĩ của ngoại lực;
- chuyển vị đơn vị;
- phản lực đơn vị;
- chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị.

4.9. Thiết lập và giải thích công thức tổng quát của chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính.

4.10. Trình bày cách vận dụng công thức chuyển vị trong các trường hợp:

- hệ khung, dầm chịu tải trọng;
- hệ dàn chịu tải trọng;
- hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa;

• hệ tĩnh định chịu sự thay đổi nhiệt độ;

• hệ dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác.

• hệ tĩnh định có liên kết đàn hồi, chịu tải trọng.

4.11. Phát biểu và chứng minh phép nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin. Nêu các chú ý khi nhân biểu đồ.

4.12. Thế nào là lực khái quát, chuyển vị khái quát? Cách vận dụng những khái niệm này để tìm một tập hợp chuyển vị.

4.13. Trình bày cách tạo trạng thái "k" để tìm:

• chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện;

• chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện;

• góc xoay của thanh trong dàn.

4.14. Trình bày cách tìm đường ảnh hưởng của chuyển vị thẳng và đường ảnh hưởng của góc xoay tại một tiết diện.

Mục lục

Lời tựa 3

Ký hiệu các đại lượng 4

Mở đầu

1. Đối tượng và nhiệm vụ của Cơ học kết cấu 7

2. Sơ đồ tính của công trình 9

3. Phân loại công trình 12

4. Các nguyên nhân gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị 15

5. Các giả thiết - Nguyên lý cộng tác dụng 16

Câu hỏi ôn tập 19

Chương 1. Phân tích cấu tạo hình học của các hệ phẳng

1.1. Khái niệm mở đầu 20

1.2. Các loại liên kết 23

1.3. Cách nối các miếng cứng thành hệ bất biến hình 26

1.4. Ví dụ áp dụng 34

Câu hỏi ôn tập 38

Chương 2. Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

2.1. Phân tích tính chất chịu lực của các hệ tĩnh định 39

2.2. Cách xác định nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động 47

2.3. Cách tính dàn tĩnh định chịu tải trọng bất động 49

2.4. Biểu đồ nội lực và cách tính dầm, khung chịu tải trọng bất động 60
2.5. Cách tính hệ ba khớp chịu tải trọng bất động 72
2.6. Cách tính hệ ghép tĩnh định chịu tải trọng bất động 84
2.7. Cách tính hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng bất động 86
2.8. Phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ thanh có đủ số liên kết 87
Câu hỏi ôn tập 91

Chương 3. Cách xác định nội lực trong hệ phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

3.1. Phương pháp nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động 93
3.2. Đường ảnh hưởng trong dầm và khung tĩnh định đơn giản 98
3.3. Đường ảnh hưởng trong hệ có hệ thống truyền lực 107
3.4. Đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp 110
3.5. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm 120
3.7. Đường ảnh hưởng trong hệ dàn ba khớp 129
3.4. Đường ảnh hưởng trong hệ ghép tĩnh định 133
3.8. Cách xác định các đại lượng nghiên cứu tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau theo đường ảnh hưởng 137
3.9. Tính chất của đường ảnh hưởng có dạng đường thẳng 141
3.10. *Cách sử dụng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất* lợi của đoàn tải trọng 143
3.11. Khái niệm về tải trọng tương đương 155
3.12. Khái niệm về biểu đồ bao nội lực 157
Câu hỏi ôn tập 161

Chương 4. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng đàn hồi tuyến tính

4.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị 163
4.2. Thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính 165
4.3. Cách xác định chuyển vị theo thế năng 173
4.4. Công khả dĩ (công ảo) của ngoại lực và nội lực 178
4.5. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính 184
4.6. Công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính (Công thức Maxwell-Morh, 1874) 189
4.7. Cách vận dụng công thức chuyển vị 191
4.8. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ" 201
4.9. Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị 206
4.10. Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát 208
4.11. Cách xác định chuyển vị trong hệ chịu tải trọng di động 213
Câu hỏi ôn tập 215

Gs, Ts. LỀU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP I

HỆ TĨNH ĐỊNH

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs, Ts. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : MINH HẰNG, THANH ĐỊNH
Kỹ mỹ thuật : NHƯ MAI
Sửa bản in : MINH HẰNG, THANH NGA
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Nhà in KH&CN
Giấy phép xuất bản số 1288 - 12.1 cấp ngày 9/8/2005
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2006