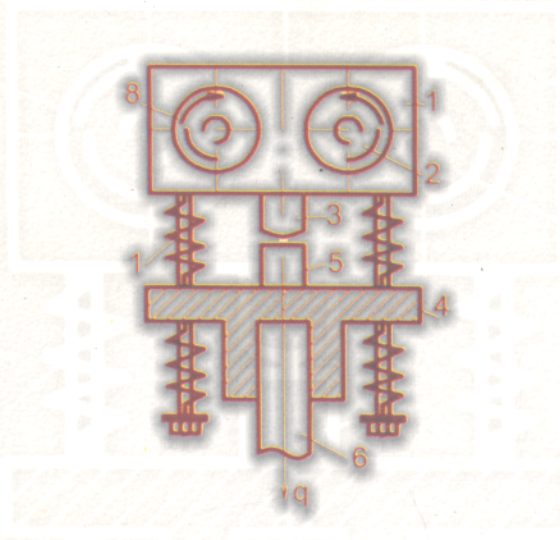


NGUYỄN ĐÌNH CHIỀU
NGUYỄN TRỌNG
NGUYỄN ANH TUẤN



CƠ SỞ LÝ THUYẾT
KỸ
THUẬT
RUNG
TRONG XÂY DỰNG



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN ĐÌNH CHIẾU (Chủ biên)
NGUYỄN TRỌNG - NGUYỄN ANH TUẤN

CƠ SỞ
LÝ THUYẾT KỸ THUẬT RUNG
TRONG XÂY DỰNG



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2004

LỜI NÓI ĐẦU

Kỹ thuật rung dầm tiên được đưa vào các dụng cụ đo đạc: các thiết bị thí nghiệm; các máy, trong đó chủ yếu thực hiện các kích rung gây ra lực kích động có mục đích. Dần dần, người ta đã đưa kỹ thuật rung vào các máy và thiết bị thực hiện trong công nghệ sản xuất, xây dựng, khử rung và giảm rung, điều khiển rung...

Kỹ thuật rung, trước hết dựa trên cơ sở của lý thuyết dao động, đặc biệt là dao động của hệ phi tuyến. Trong lý thuyết, kỹ thuật rung đã sử dụng các thành tựu của toán học, cơ học giải tích, lý thuyết ổn định chuyển động, lý thuyết tự điều khiển và các lĩnh vực khoa học khác. Lý thuyết kỹ thuật rung liên quan chặt chẽ với động lực học máy và công trình, kỹ thuật điện, vô tuyến điện, siêu âm, địa chấn...

Các lĩnh vực áp dụng kỹ thuật rung ngày một tăng. Có thể liệt kê một số lĩnh vực quan trọng, đó là:

- Tạo hình sản phẩm bê tông cốt thép trên bàn rung hay trên các khung rung.
- Làm chặt hỗn hợp bê tông trong các công trình thủy công, xây dựng nhà, móng và trụ cầu bằng các máy rung mặt và các máy rung sâu.
- Làm chặt đất nền đường, làm chặt lớp áo mặt đường bằng bê tông áptphan, lớp phủ mặt đường bằng bê tông ximăng... nhờ các thiết bị rung khác nhau.
- Sử dụng búa rung và búa va rung khi khoan thăm dò địa chất.
- Phân loại vật liệu theo kích thước, mật độ, hình dạng, hệ số ma sát trên các thiết bị rung (lưới và sàng rung)...

Kỹ thuật rung và công nghệ rung là một lĩnh vực mới mẻ. Do đó còn nhiều vấn đề tồn tại cả về lý thuyết cũng như thực tế chưa được làm sáng tỏ. Để giải quyết nó và đảm bảo sự tiến bộ cần phải tiến hành nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm trong một phạm vi rộng. Hàng loạt các vấn đề và các bài toán được các tác giả trong và ngoài nước quan tâm, đó chính là:

- *Nhóm thứ nhất:* các vấn đề liên quan đến việc nghiên cứu các quá trình phát ra dao động cơ học, chẳng hạn: nghiên cứu các máy kích động như các bộ biến đổi năng lượng nguồn vào năng lượng cơ học, các máy phát dao động cơ học ngẫu nhiên...
- *Nhóm thứ hai:* các vấn đề dẫn tới giải quyết các bài toán động lực học của máy rung và va rung: nghiên cứu quá trình chuyển và tạo ra các phương pháp giảm công suất yêu cầu, giảm trọng lượng kết cấu dẫn động, giảm dao động mạnh khi chuyển qua cộng hưởng; nghiên cứu hiện tượng động lực của hệ có một và nhiều bậc tự do khi cộng hưởng và gần cộng hưởng; nghiên cứu động lực của hệ có tác dụng của nhiều lực điều hoà, của hệ với thông số phân bố và của hệ phức tạp; giải các bài toán khi có sự làm việc đồng thời của hai hay một số máy kích rung.
- *Nhóm thứ ba:* các vấn đề nghiên cứu tính chất của các môi trường khác nhau, trong đó có tác động của các máy rung làm việc:
 - Nghiên cứu động lực của môi trường có dạng hạt thô và hạt mịn được áp dụng khi giải các bài toán đối với các máy rung để phân loại vật liệu, máy dịch chuyển rung, máy làm chặt nhờ rung;
 - Nghiên cứu động lực của hỗn hợp bê tông áp dụng vào các bài toán dịch chuyển rung, vận chuyển rung, làm chặt và làm phẳng rung, tạo hình sản phẩm...;
 - Nghiên cứu động lực biến dạng dẻo của thép dưới tác dụng rung và va rung khi hạ các chi tiết bằng phương pháp đóng,

rèn dập và dát vật liệu; nghiên cứu động lực của bê tông átphan khi áp dụng làm chặt bằng rung động:

- Nghiên cứu các tính chất hóa lý và cơ lý do ảnh hưởng rung trong môi trường có chất lỏng...
- *Nhóm thứ tư:* các vấn đề nghiên cứu tương tác của các bộ phận làm việc của máy rung và va rung với môi trường, trong đó chú ý đặc biệt đến tương tác lực: giải các bài toán về sự phân bố lực và áp lực tác dụng lên máy công tác từ môi trường; nghiên cứu sự thay đổi tác dụng tương hỗ dưới ảnh hưởng của máy công tác và môi trường...
- *Nhóm thứ năm:* các vấn đề liên quan đến nghiên cứu năng lượng của máy rung, chu kỳ năng lượng và đặc trưng hao tán năng lượng của hệ phụ thuộc vào tình trạng máy rung và do tính chất nguồn năng lượng.
- *Nhóm thứ sáu:* các vấn đề về tìm kiếm và tạo ra phương pháp mới làm sáng tỏ các phương pháp của các hệ rung tự điều khiển, các hệ tự điều chỉnh rung và tự kiểm tra chất lượng phương tiện kỹ thuật rung.

Các phương pháp rung trong xây dựng là các phương pháp liên quan tới việc sử dụng các thiết bị rung (máy rung và búa rung) để hạ chìm vào đất hay kéo ra từ môi trường đất các kết cấu khác nhau (cọc, ống, cừ...); để khoan thăm dò; để làm chặt nền đất, các hỗn hợp bê tông và phá hoại cấu trúc đất nền...

Trên cơ sở kinh nghiệm, ý tưởng hạ chìm các kết cấu vào đất bằng thiết bị rung được các tác giả đưa ra vào những năm 34 - 40 của thế kỷ XX, nhưng phải chờ đến những năm 50 của thế kỷ XX mới được áp dụng rộng rãi. Các kết quả nghiên cứu và áp dụng trong nửa thế kỷ qua của các nhà nghiên cứu ở ngoài nước cũng như ở nước ta còn trình bày riêng lẻ và tản mạn trong các tài liệu hay tạp chí, đồng thời không được thường xuyên công bố một cách hệ thống. Vì vậy, mục đích chính của cuốn sách này nhằm trình bày

một số vấn đề cơ bản của lý thuyết dao động cơ học liên quan trực tiếp đến áp dụng kỹ thuật rung nói chung và một vài bài toán cơ bản cũng như các kết quả nghiên cứu của các tác giả trong và ngoài nước vào những năm gần đây, trong đó đặc biệt chú ý đến những mô hình bài toán áp dụng kỹ thuật rung trong xây dựng.

Các tác giả hy vọng cuốn sách sẽ có tác dụng đối với các sinh viên năm cuối của ngành máy và công trình; các kỹ sư và cán bộ kỹ thuật trực tiếp làm công tác sản xuất, thiết kế thi công các công trình nhà, thủy lợi, giao thông; đồng thời cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho các học viên cao học, nghiên cứu sinh mà trong công việc có liên quan đến động lực học máy và công trình.

Cuốn sách mới được in lần đầu, nên không thể tránh được những khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong được sự đóng góp xây dựng của độc giả để cuốn sách ngày càng hoàn chỉnh trong các lần xuất bản tiếp theo.

CÁC TÁC GIẢ

Chương 1

DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ TUYẾN TÍNH CÓ MỘT VÀ HAI BẬC TỰ DO

§1.1. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ DAO ĐỘNG

1.1.1. CÁC PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

Lựa chọn phương pháp thiết lập phương trình vi phân chuyển động dao động của hệ có nhiều bậc tự do phụ thuộc vào mô hình cơ học của hệ. Người ta thường sử dụng ba cách sau:

1.1.1.a. Dùng phương trình Lagrăng loại II

Hệ Hôlônôm có n chất điểm và s bậc tự do; được xác định bởi các tọa độ suy rộng độc lập q_i ($i = 1, 2, \dots, s$), phương trình Lagrăng loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (1.1)$$

1.1.1.b. Sử dụng nguyên lý Đalămbe

Theo nguyên lý này, ở mỗi thời điểm các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ và các phản lực liên kết cân bằng với các lực quán tính. Ta có:

$$\sum_k \overline{F_k''} + \sum_k \overline{N_k} + \sum_k \overline{F_k^{qt}} = 0; \quad (1.2)$$

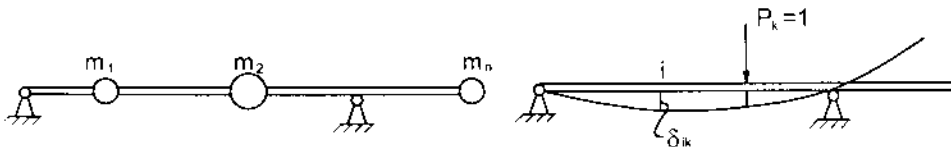
$$\sum_k \overline{m_o}(\overline{F_k^a}) + \sum_k \overline{m_o}(\overline{N_k}) + \sum_k \overline{m_o}(\overline{F_k^{qt}}) = 0.$$

trong đó: $\overline{F_k^{qt}} = -m_k \overline{W_k}$.

1.1.1.c. Áp dụng phương pháp lực

Các dịch chuyển theo hướng i do lực đơn vị tác dụng theo hướng k gây ra gọi là dịch chuyển đơn vị, ký hiệu là δ_{ik} . Các δ_{ik} còn gọi là các hệ số ảnh hưởng (hình 1.1). Đối với hệ đàn hồi, theo hướng k chịu tác dụng của lực $\overline{P_k}$ thì dịch chuyển do nó gây ra theo hướng i sẽ tỷ lệ với lực, nghĩa là $y_i = P_k \delta_{ik}$. Do đó dưới tác dụng đồng thời của các lực $(\overline{P_1}, \overline{P_2}, \dots, \overline{P_n})$, dịch chuyển toàn phần xác định theo hệ thức:

$$y_i = \sum_k P_k \delta_{ik}. \quad (1.3)$$



Hình 1.1

Công thức (1.3) là cơ sở để thiết lập phương trình vi phân chuyển động dao động của hệ. Các hệ số δ_{ik} được xác định theo công thức Mohr hoặc phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin. Theo định lý Mac-xoen ta có $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

1.1.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG CỦA HỆ n CHẤT ĐIỂM CÓ s BẬC TỰ DO

Bây giờ ta áp dụng (1.1) để viết phương trình vi phân dao động cho hệ n chất điểm có s bậc tự do, chịu tác dụng của các lực có thể, các lực cản (nhớt) phụ thuộc bậc nhất vào vận tốc và các lực kích động

ngoài là hàm bất kỳ của thời gian t . Ta có lực suy rộng của các lực trên được biểu thị:

$$Q_i^z = -\frac{\partial \pi}{\partial q_i}; \quad Q_i^\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i}; \quad Q_i^P = Q(t).$$

Xét dao động nhỏ thì:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \\ \pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j; \\ \phi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Các hệ số $a_{ij} = a_{ji}$; $b_{ij} = b_{ji}$; $c_{ij} = c_{ji}$ là các hằng số và thỏa mãn điều kiện Сильвестр. Thay (1.4) vào (1.1) ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n c_{ij} q_j = Q_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{1.5}$$

Có thể viết (1.5) ở dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} \tag{1.5a}$$

§1.2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ TUYẾN TÍNH CÓ MỘT BẬC TỰ DO

Dao động cường bức xảy ra khi hệ có tác dụng của các kích động ngoài. Các kích động này có thể tuần hoàn hay va chạm.

Phương trình Lagrăng II trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \pi}{\partial q} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}} + Q^P.$$

Với dao động nhỏ: $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$; $\pi = \frac{1}{2} c q^2$; $\phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2$.

Đặt $Q(t) = \frac{1}{a} Q^P$, thay vào phương trình trên, ta được:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = Q(t), \quad (1.6)$$

trong đó: $2n = \frac{b}{a}$; $k^2 = \frac{c}{a}$.

Phương trình (1.6) là phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ tuyến tính một bậc tự do. Trường hợp $n < k$, nghiệm tổng quát của nó là:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \beta_1) + \bar{q}, \quad (1.7)$$

trong đó: $k_1^2 = k^2 - n^2$;

A, β - được xác định từ điều kiện ban đầu;

\bar{q} - nghiệm riêng của phương trình (1.6).

Nghiệm riêng \bar{q} tìm dưới dạng:

$$\bar{q} = e^{-nt} Z(t). \quad (1.8)$$

Thay (1.8) vào (1.6), ta nhận được phương trình đối với hàm $Z(t)$:

$$\ddot{Z} + k_1^2 Z = Q(t)e^{nt}. \quad (1.9)$$

Nghiệm của (1.9) tìm được bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăng:

$$Z(t) = \frac{1}{k_1} \int_0^t e^{n\tau} Q(\tau) \sin k_1(t - \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

Như vậy, nghiệm riêng \bar{q} của (1.6) xác định bằng biểu thức:

$$\bar{q} = \frac{1}{k_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} Q(\tau) \sin k_1(t - \tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Tích phân vế phải của (1.11) tính theo biến τ . Do đó, khi tích phân ta coi t là hằng số. Sau khi hoàn thành việc thay cận tích phân ta nhận được q là hàm của thời gian t .

Cuối cùng nghiệm tổng quát của (1.6) có dạng:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \beta_1) + \frac{1}{k_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} Q(\tau) \sin k_1 (t - \tau) d\tau. \quad (1.12)$$

1.2.1. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC KHÔNG CÂN ($n = 0$)

Giả sử lực kích động ngoài biến đổi theo quy luật điều hòa:

$$Q(t) = P_0 \sin pt.$$

Phương trình (1.6) trở thành:

$$\ddot{q} + k^2 q = P_0 \sin pt. \quad (1.13)$$

Khi $p \neq k$, nghiệm tổng quát của (1.13) có dạng:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (1.14)$$

Lấy điều kiện đầu tại $t = 0$: $q(0) = q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ ta nhận được:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt - \frac{P_0 p}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (1.15)$$

Số hạng cuối của (1.15) biểu thị dao động cưỡng bức thuần túy:

$$\bar{q} = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (1.16)$$

Rõ ràng, dao động cưỡng bức xảy ra với tần số lực kích động p ; nó không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu của hệ. Khi $k > p$ thì dấu của \bar{q} cùng dấu với lực kích động (cùng pha), khi $k < p$ chúng ngược dấu nhau (ngược pha). Trường hợp $k = p$, biểu thức (1.16) và số hạng thứ ba trong (1.15) sẽ mất ý nghĩa. Nếu xét đồng thời nó

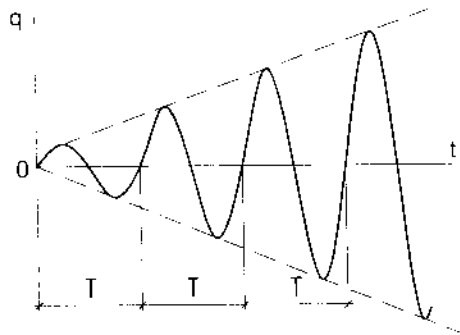
có dạng $\frac{0}{0}$. Áp dụng quy tắc Lôpitan, lấy đạo hàm theo p và cho $p \rightarrow k$, ta được biểu thức:

$$-\frac{P_o}{2k^2} \sin kt - \frac{P_o t}{2k} \cos kt.$$

Khi đó

$$q = q_o \cos kt + \frac{\dot{q}_o}{k} \sin kt + \frac{P_o}{2k^2} \sin kt - \frac{P_o t}{2k} \cos kt. \quad (1.17)$$

Như vậy, khi $p = k$ các giá trị nguy hiểm của biên độ tăng tuyến tính với thời gian t . Số hạng cuối của (1.17) thường gọi là thành phần đặc tính của dao động (hình 1.2). Sự trùng nhau giữa tần số của lực kích động p với tần số riêng k của hệ và các hiện tượng xảy ra tiếp sau gọi là hiện tượng cộng hưởng.



Hình 1.2

1.2.2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CÓ CẢN ($n \neq 0$)

Ta xét lực kích động ngoài, biến đổi theo quy luật điều hòa như phân trên. Phương trình (1.6) có dạng:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = P_o \sin pt. \quad (1.18)$$

Khi $n < k$, nghiệm tổng quát của (1.18) viết được:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \beta_1) + \bar{q}, \quad (1.19)$$

với: $k_1^2 = k^2 - n^2$.

Ta tìm \bar{q} dưới dạng:

$$q = B \sin(pt - \epsilon). \quad (1.20)$$

Chọn B, ϵ sao cho \bar{q} thỏa mãn đồng nhất phương trình (1.18), ta có:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad \operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (1.21)$$

Tích phân tổng quát (1.18) viết ở dạng:

$$q = Ae^{-\eta t} \sin(k_1 t + \beta_1) + \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt - \epsilon). \quad (1.22)$$

Các hằng số A, β_1 được xác định từ điều kiện ban đầu. Số hạng đầu của (1.22) ứng với dao động tắt dần. Sau một khoảng thời gian nào đó, ta xem hệ chỉ thực hiện dao động bình ổn:

$$q = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt - \epsilon). \quad (1.23)$$

Như vậy, dao động cưỡng bức có cản vẫn xảy ra với tần số lực kích động p , biên độ của nó không phụ thuộc vào thời gian t và không tắt dần do lực cản. Khi xảy ra cộng hưởng ($p = k$) biên độ này là hữu hạn và không phải là giá trị lớn nhất. $B = B_{\max}$ khi $p^2 = k^2 - 2n^2$ (xảy ra trước cộng hưởng). Khi cộng hưởng, độ lệch pha có giá trị cực đại và bằng $\frac{\pi}{2}$. Nếu ký hiệu η là tỷ số giữa biên độ B và độ

lệch tĩnh B_0 của hệ thì:

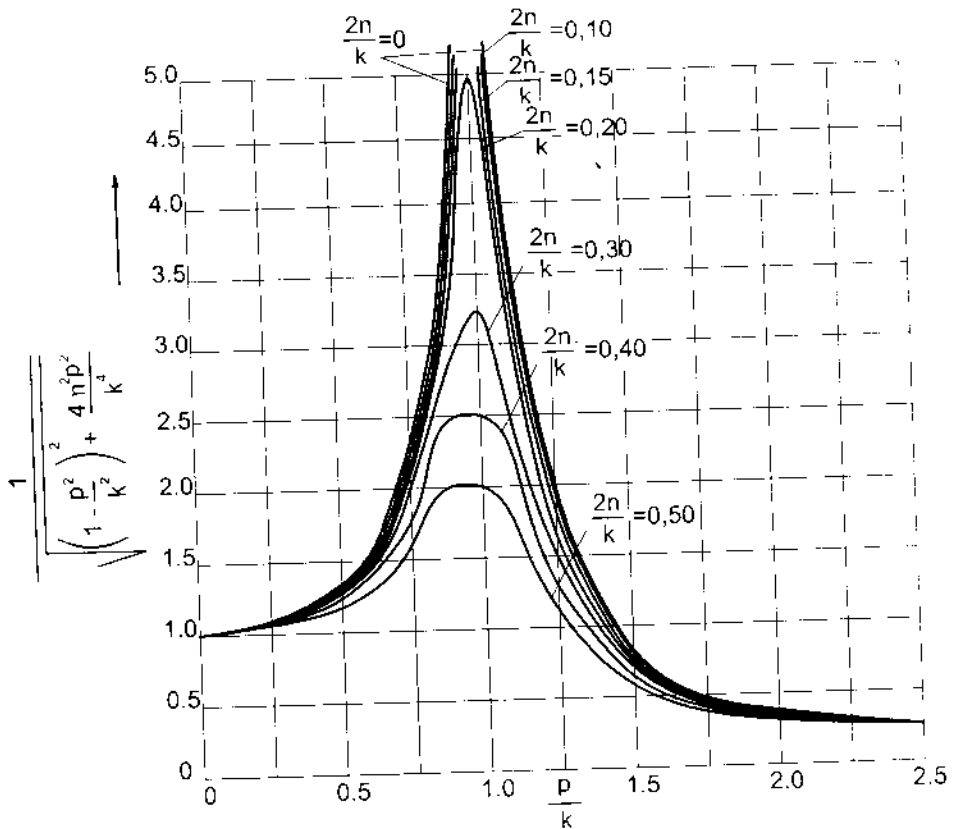
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4n^2 p^2}{k^2}}} \quad (1.24)$$

Hệ số η được gọi là hệ số động lực.

Trường hợp không có cản ($n = 0$), hệ số η bằng:

$$\eta = \frac{1}{1 - p^2/k^2} \quad (1.25)$$

Các giá trị của hệ số động lực η biểu thị theo (1.24) phụ thuộc vào $\frac{p}{k}$ ứng với các giá trị khác nhau của $\frac{2n}{k}$ được mô tả trên hình 1.3.



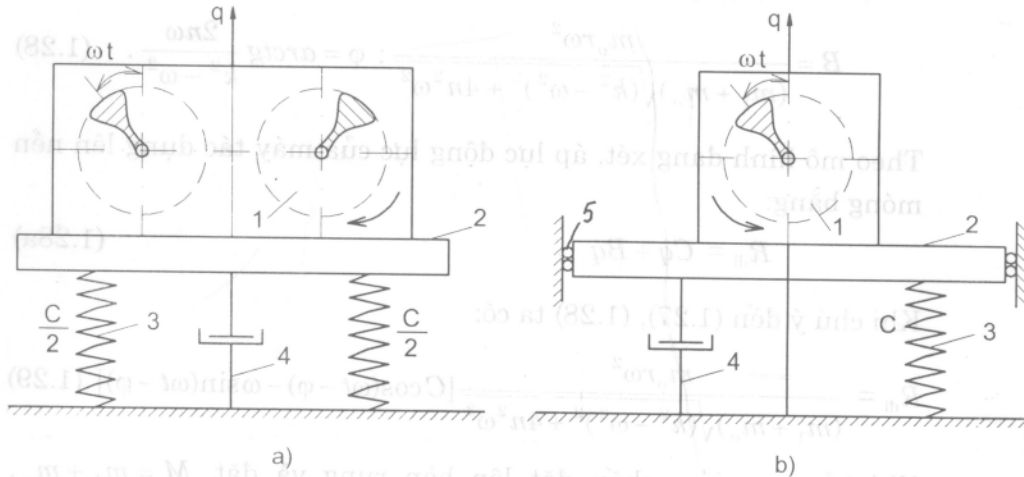
Hình 1.3

Ngoài phương pháp tính dao động cưỡng bức trình bày ở trên, ta còn có thể áp dụng phép biến đổi Laplace [38] để tính.

1.2.3. KÍCH ĐỘNG RUNG VỚI LỰC CƯỜNG BỨC THEO MỘT HƯỚNG

Xét hệ kích động rung trung tâm với lực cưỡng bức theo một hướng (hình 1.4). Trên hình 1.4a biểu diễn sơ đồ hệ kích động rung trung tâm với: bộ phận kích động rung (1); bàn rung (2); lò xo (3) và giảm chấn (4).

Trên hình 1.4b có: bộ phận kích động rung (1); bàn rung (2); liên kết lý tưởng (5) sao cho bàn (2) dịch chuyển theo một hướng; lò xo (3) và giảm chấn (4).



Hình 1.4

Cả hai sơ đồ đều có thể đảm bảo bàn rung 2 dịch chuyển theo hướng thẳng đứng q .

Phương trình vi phân chuyển động dao động của hệ có dạng:

$$(1.25) \quad (m_1 + m_o)\ddot{q} + b\dot{q} + cq = m_o r \omega^2 \cos \omega t,$$

hay rút gọn:

$$(1.26) \quad \ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{m_o r \omega^2}{m_1 + m_o} \cos \omega t,$$

trong đó: $(1.27) \quad 2n = \frac{b}{2(m_1 + m_o)}; k = \sqrt{\frac{C}{m_1 + m_o}};$

m_o - khối lượng quả nặng;

r - độ lệch tâm của khối lượng quả văng đối với trục quay của rôto;
 m_1 - khối lượng của bộ phận công tác của máy;
 ω - vận tốc góc quay các quả văng.

Tích phân riêng ứng với dao động cưỡng bức bình ổn của phương trình (1.26) có dạng:

$$q = B \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.27)$$

ở đây:

$$B = \frac{m_o r \omega^2}{(m_1 + m_o) \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (1.28)$$

Theo mô hình đang xét, áp lực động lực của máy tác dụng lên nền móng bằng:

$$R_{dl} = Cq + B\dot{q} \quad (1.28a)$$

Khi chú ý đến (1.27), (1.28) ta có:

$$R_{dl} = \frac{m_o r \omega^2}{(m_1 + m_o) \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} [C \cos(\omega t - \varphi) - \omega \sin(\omega t - \varphi)]. \quad (1.29)$$

Khi bỏ qua giảm chấn đặt lên bàn rung và đặt $M = m_1 + m_o$, nghiệm riêng biểu thị dao động cưỡng bức có dạng:

$$\ddot{q} = \frac{m_o r \omega^2}{C - M\omega^2} \cos(\omega t - \varphi);$$

$$\text{biên độ: } A = \frac{m_o r \omega^2}{C - M\omega^2}. \quad (1.30)$$

Mômen cần thiết làm quay các quả văng bằng:

$$M_q = m_o r (q + \ddot{q}) \sin \omega t. \quad (1.31)$$

Công suất động cơ cần thiết làm quay các quả văng là:

$$N = M_q \omega. \quad (1.32)$$

Trong thực tế, người ta tạo hình sản phẩm (các sản phẩm bằng bê tông cốt thép) bằng chấn động và thực hiện trên bàn rung. Nó được sử dụng chủ yếu trong các nhà máy bê tông và trên các pôlygôn vì đó là thiết bị có công suất lớn. Trên bàn rung có thể tạo hình nhiều loại sản phẩm bê tông cốt thép, dễ thay đổi loại sản phẩm khi thay đổi khối lượng. Có thể sử dụng các loại bàn rung với tải trọng từ 4 đến 40 tấn. Các bàn rung với dao động có hướng thẳng đứng được ghép từ các khối rung định hình, khuôn được kẹp chặt trên bàn rung bằng các nam châm điện. Để tăng cường khả năng lên chặt các hỗn hợp bê tông cứng, người ta còn sử dụng các loại bàn rung với các dao động gây ra do va đập. Chấn động dạng này cho phép tạo hình sản phẩm có độ cao lớn với chất lượng, năng suất cao và có thể làm giảm lượng xi măng.

Tính kích động rung trung tâm với lực cưỡng bức theo hai hướng và bài toán tổng quát tính kích động rung trung tâm được trình bày trong [10].

§1.3. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ TUYẾN TÍNH HAI BẬC TỰ DO

1.3.1. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC KHÔNG CẢN

Xét dao động của hệ hai bậc tự do, chịu tác dụng của các lực có thể và các lực kích động điều hòa hình sin. Gọi q_i ($i = 1, 2$) là các tọa độ suy rộng của cơ hệ. Phương trình Lagrăng II viết ở dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \pi}{\partial q} + Q^P, \quad (i = 1, 2). \quad (a)$$

Trường hợp dao động nhỏ:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2); \quad (b)$$

$$\pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) và giả thiết rằng các lực kích động là điều hòa có cùng tần số p và pha ban đầu δ . Các lực suy rộng của chúng bằng:

$$Q_i^p = H_i \sin(pt + \delta), \quad (i = 1, 2). \quad (d)$$

Khi đó phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin(pt + \delta) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin(pt + \delta). \end{cases} \quad (1.33)$$

Nghiệm tổng quát của (1.33) tìm được dưới dạng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của nó.

1.3.1.a. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0 \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Nghiệm tổng quát của hệ (1.34) tìm được dưới dạng:

$$q_i = A_i \sin(kt + \alpha), \quad (i = 1, 2). \quad (1.35)$$

Thay (1.35) vào (1.34) ta nhận được hệ hai phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với A_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \\ A_1(c_{21} - a_{21}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Hệ (1.36) chứa ba ẩn A_1, A_2 và k^2 . Nếu loại trừ nghiệm tầm thường đối với A_i ($i = 1, 2$), để nghiệm đối với chúng khác không thì định thức của hệ phải bằng không. Ta sẽ có:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (1.37)$$

Phương trình (1.37) được gọi là phương trình tần số. Nếu dạng toàn phương của động năng và thế năng xác định dương thì hai

nghiệm số đối với k^2 là thực và dương. Khi này các hàm q_1, q_2 biểu diễn sự phụ thuộc của hàm số sin vào thời gian t (hệ thực hiện dao động điều hòa).

- Trường hợp tần số bằng nhau: $k_1 = k_2 = k$; các phương trình (1.34) độc lập với nhau. Nghiệm của chúng được biểu diễn:

$$q_i = A_i \sin(kt + \alpha_i), \quad (i = 1, 2), \quad (1.38)$$

trong đó: A_i, α_i ($i = 1, 2$) được xác định từ các điều kiện đầu.

- Trường hợp tần số khác nhau: $k_1 < k_2$, trong đó k_1 gọi là tần số cơ bản (tần số thấp nhất). Các dao động ứng với các tần số k_1, k_2 gọi là các dao động chính của hệ.

Tích phân tổng quát của (1.34) biểu thị bằng:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= A_{21} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{22} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Đến đây ta đưa vào các hệ số phân phối được xác định theo hệ thức

$$\mu_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}; \quad \mu_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}}. \quad (1.39a)$$

Các hệ thức (1.39) trở thành:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= \mu_{21} A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \mu_{22} A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (1.40)$$

1.3.1.b. Tìm nghiệm riêng của hệ (1.33)

Nghiệm riêng của hệ xác định dao động cưỡng bức thuần túy. Ta tìm chúng dưới dạng:

$$q_i = A_{ip} \sin(pt + \delta), \quad (i = 1, 2) \quad (1.41)$$

Thay (1.41) vào (1.33) ta nhận được hệ phương trình xác định A_{ip} ($i = 1, 2$). Giải hệ này ta có:

$$\begin{aligned}
 A_{1p} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}p^2) - H_2(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2}; \\
 A_{2p} &= \frac{H_2(c_{22} - a_{22}p^2) - H_1(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Các mẫu số trong (1.42) là đa thức bậc hai đối với p^2 . Khi chú ý đến (1.37), các tần số k_1^2, k_2^2 là nghiệm của đa thức trên. Do đó ta viết được:

$$\begin{aligned}
 A_{1p} &= \frac{H_1(c_{22} - a_{22}p^2) - H_2(c_{12} - a_{12}p^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)}; \\
 A_{2p} &= \frac{H_2(c_{22} - a_{22}p^2) - H_1(c_{12} - a_{12}p^2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)}.
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Với $p = k_1$ hoặc $p = k_2$ thì các biên độ dao động cưỡng bức sẽ tăng vô hạn theo thời gian. Ta có hiện tượng cộng hưởng. Khi này hệ thức (1.41) sẽ mất ý nghĩa. Để biểu thị nghiệm riêng q_i ($i = 1, 2$) ta viết phương trình ở dạng các tọa độ chính.

Các tọa độ suy rộng θ_1, θ_2 được chọn đặc biệt sao cho: biểu thức động năng t của hệ chỉ chứa các số hạng có $\dot{\theta}_i^2$ ($i = 1, 2$), còn biểu thức thế năng π của hệ chỉ chứa các số hạng có θ_i^2 ($i = 1, 2$) thì θ_1, θ_2 gọi là các tọa độ chính của hệ.

Ta biểu diễn nghiệm q_1, q_2 qua các tọa độ chính θ_1, θ_2 ở dạng:

$$q_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad q_2 = \mu_{21}\theta_1 + \mu_{22}\theta_2. \tag{1.44}$$

Sau khi tính các lực suy rộng của các lực kích động ngoài theo các tọa độ chính nhờ biểu thức công ảo ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ ở dạng:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + k_1^2\theta_1 = \frac{H_1 - \mu_{21}H_2}{a_1} \sin(pt + \delta) \\ \ddot{\theta}_2 + k_2^2\theta_2 = \frac{H_1 + \mu_{22}H_2}{a_2} \sin(pt + \delta). \end{cases} \tag{1.45}$$

Hệ (1.45) có thể tích phân độc lập. Ta xét hai trường hợp:

- Khi $p = k_1$: ta tìm nghiệm riêng ứng với dao động cưỡng bức thuần túy theo các biểu thức:

$$\theta_1 = C_1 t \cos(pt + \delta); \quad \theta_2 = C_2 \sin(pt + \delta). \quad (1.46)$$

Thay (1.46) vào (1.45) ta có:

$$C_1 = -\frac{H_1 + \mu_{21} H_2}{2k_1 a_1};$$

$$C_2 = \frac{H_1 + \mu_{22} H_2}{a_2(k_2^2 - p^2)}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{H_1 + \mu_{21} H_2}{2pa_1} t \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right); \\ \theta_2 &= \frac{H_1 + \mu_{22} H_2}{a_2(k_2^2 - p^2)} \sin(pt + \delta). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Các hàm q_1, q_2 xác định theo (1.44).

- Khi $p = k_2$: một cách tương tự ta nhận được:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{H_1 + \mu_{21} H_2}{a_1(k_1^2 - p^2)} \sin(pt + \delta); \\ \theta_2 &= -\frac{H_1 + \mu_{22} H_2}{2pa_2} t \sin\left(pt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

1.3.2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CÓ CẢN

Hàm hao tán trong trường hợp hệ hai bậc tự do có dạng:

$$\phi = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2).$$

Giả sử lực kích động điều hòa $Q_i(t) = P_i \cos pt$ ($i = 1, 2$). Phương trình vi phân dao động của hệ viết được:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = P_1 \cos pt \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = P_2 \cos pt. \end{cases} \quad (1.49)$$

Tích phân riêng ứng với dao động cưỡng bức bình ổn được tìm tương tự dạng (1.20):

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos pt + B_1 \sin pt \\ q_2 &= A_2 \cos pt + B_2 \sin pt. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Để xác định A_1, B_1, A_2, B_2 ta thay (1.50) vào (1.49), nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}p^2)A_1 + (c_{12} - a_{12}p^2)A_2 + b_{11}pB_1 + b_{12}pB_2 = Q_1 \\ (c_{12} - a_{12}p^2)A_1 + (c_{22} - a_{22}p^2)A_2 + b_{12}pB_1 + b_{22}pB_2 = Q_2 \\ -b_{11}pA_1 - b_{12}pA_2 + (c_{11} - a_{11}p^2)B_1 + (c_{12} - a_{12}p^2)B_2 = 0 \\ -b_{12}pA_1 - b_{22}pA_2 + (c_{12} - a_{12}p^2)B_1 + (c_{22} - a_{22}p^2)B_2 = 0. \end{cases} \quad (1.51)$$

Khi giải hệ trên ta xác định được các hệ số cần tìm.

1.3.3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

1.3.3.a. Bộ tắt chấn động lực không tính đến ma sát

Nếu một trong các lực kích động triệt tiêu, chẳng hạn:

$$Q_2^p = 0; \quad Q_1^p = H_1 \sin(pt + \delta)$$

thì từ (1.42) ta có:

$$\begin{aligned} A_{1p} &= \frac{H_1 (c_{22} - a_{22}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2}; \\ A_{2p} &= \frac{H_1 (c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

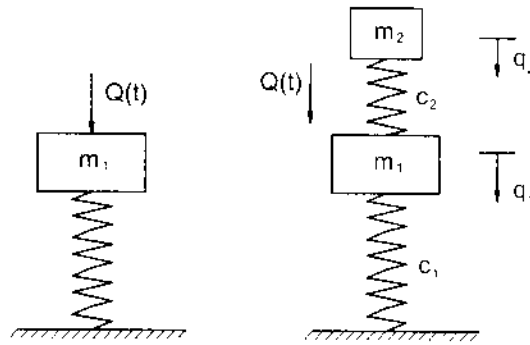
Tiếp tục chọn tham số của hệ sao cho: $c_{22} - a_{22}p^2 = 0$, tức là

$$p^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}, \text{ ta thu được:}$$

$$A_{1p} = 0; A_{2p} = \frac{H_1}{c_{12} - a_{12}p^2}. \quad (1.53)$$

Như vậy, khi $p^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$, dao động cường bức ứng với tọa độ suy rộng thứ nhất hoàn toàn dập tắt. Hiện tượng này gọi là tắt chấn động lực của dao động, nó không có trong hệ chỉ có một bậc tự do.

Giả sử có mô hình dao động chịu tác dụng của lực kích động $Q(t)$. Để làm tắt dao động của hệ này ta thêm một khối lượng phụ m_2 trên lò xo có độ cứng c_2 (hình 1.5).



Hình 1.5

Hệ mô tả có hai bậc tự do. Chọn q_1, q_2 là các tọa độ suy rộng độc lập. Phương trình vi phân chuyển động dao động của hệ có dạng:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2)q_1 - c_2 q_2 = H_1 \sin(pt + \delta) \\ m_2 \ddot{q}_2 - c_2 q_1 + c_2 q_2 = 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Biểu thị $\overline{q}_i = A_{ip} \sin(pt + \delta)$ ($i = 1, 2$), còn A_{ip} xác định theo (1.52).

Nếu chọn tham số của hệ để $p^2 = \frac{c_2}{m_2}$ thì nhận được:

$$\overline{q}_1 = 0; \overline{q}_2 = -\frac{H_1}{c_2} \sin(pt + \delta).$$

Thay \overline{q}_2 vào phương trình đầu của hệ (1.54) ta thu được:

$$\ddot{q}_1 + \frac{c_1 + c_2}{m_1} q_1 = 0; \quad k_1 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m_1}}$$

Do đó: $\ddot{q}_1 + k_1 q_1 = 0$. (1.55)

Phương trình (1.55) mô tả dao động tự do của khối lượng m_1 với tần số k_1 . Nghĩa là dao động cường độ bậc nhất của tải trọng m_1 được dập tắt.

1.3.3.b. Sơ lược về bộ tắt chấn động lực có ma sát nhớt

Đối với bộ tắt chấn động lực không có ma sát nhớt có hai tần số riêng. Nếu tần số của lực kích động trùng với một trong hai tần số riêng thì không thể sử dụng bộ tắt chấn động lực trên.

Ta xét bộ tắt chấn động lực có ma sát nhớt với mô hình dao động như hình vẽ (hình 1.6). Phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 = -c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) + b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + Q_0 \cos pt \\ m_2 \ddot{q}_2 = -c_2 (q_2 - q_1) - b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \end{cases} \quad (1)$$

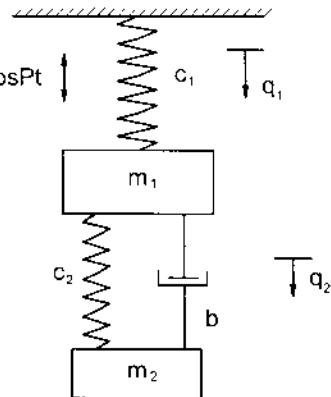
Nghiệm riêng ứng với dao động cường độ bậc bình ổn của hệ tìm ở dạng:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos pt + A_2 \sin pt; \\ q_2 &= A_3 \cos pt + A_4 \sin pt. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta nhận được bốn phương trình đại số xác định các hằng số A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Nếu dẫn ra các ký hiệu:

$$\lambda_t = \frac{Q_0}{c_1} \text{ - độ lệch tĩnh của hệ}$$

chính gây ra do lực Q_0 ;



Hình 1.6

$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ - tần số riêng của bộ tắt chấn:

$\beta = \frac{m_2}{m_1}$ - tỷ số khối lượng của bộ tắt chấn và hệ chính:

$\delta = \frac{k_2}{k_1}$ - tỷ số tần số riêng của bộ tắt chấn và hệ chính:

$\gamma = \frac{p}{k_1}$ - tỷ số tần số lực kích động và tần số riêng của hệ chính.

Sau khi thực hiện các lý giải và tính toán, người ta đã đưa ra công thức đơn giản và chỉ ra cách điều chỉnh bộ tắt chấn:

$$\delta = \frac{1}{1 - \beta} \quad (1.56)$$

Như vậy, nếu khối lượng m_2 của bộ tắt chấn được chọn thì giá trị β được biết và từ (1.56) ta tìm được giá trị cần thiết δ , nên xác định được tần số và độ cứng của bộ tắt chấn.

Để xác định biên độ dao động cưỡng bức, ta dùng hệ thức:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{2 + \beta}{\beta}} \quad (1.57)$$

λ_1 là biên độ dao động cưỡng bức của m_1 và có:

$$\lambda_1 = (q_1)_{\max} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \quad (1.58)$$

Cuối cùng, cần khảo sát và xác định giá trị $\mu = \frac{b}{2k_1 m_2}$. Nó xác định sự cản nhớt của bộ tắt chấn. Giá trị này sẽ được giải từ hệ thức:

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{4\mu^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2}{4\mu^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2)^2 + [\beta \delta^2 \gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)]^2}.$$

Nếu viết nó dưới dạng:

$$\frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} = \frac{M\mu^2 + N}{M_*\mu^2 + N_*}$$

Giải hệ thức trên đối với μ^2 ta được:

$$\mu^2 = \frac{N - N_* \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^2}{M_* \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right)^2 - M} \quad (1.59)$$

Do đó, phép gần đúng liên tiếp khi tính bộ tắt chấn có ma sát nhất như sau: đối với khối lượng m_1 và tần số riêng k_1 của nó đã cho ta chọn khối lượng bộ tắt chấn m_2 . Hệ số cứng của bộ tắt chấn tìm từ (1.56) sau đó giá trị sức cản nhất tính từ (1.59) cuối cùng tính biên độ dao động cường bậc từ (1.57).

§1.4. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẢN ĐỐI VỚI HỆ DAO ĐỘNG

Khi coi sự hao tán năng lượng trong dao động không xảy ra ta thiết lập được đặc trưng không tắt dần của quá trình dao động tự do. Tuy nhiên thực nghiệm đã chỉ ra rằng: dao động của hệ đàn hồi gây nên bởi kích động là tắt dần. Nguyên nhân của nó là: tồn tại các lực hao tán, nghĩa là các lực cản không đàn hồi liên quan đến ma sát với môi trường, cũng như nội ma sát trong vật liệu của cấu trúc dao động, các lực cản đáng kể xuất hiện ở các loại khác nhau trong các bộ phận giảm chấn và trong các phanh hãm. Không thể phân tích hết tất cả các tương tác vi mô của các hiện tượng trên. Do đó không có một định luật tổng quát để biểu thị những lực như vậy, nhưng có các định luật gần đúng áp dụng cho từng trường hợp:

- Nếu vật rắn chuyển động với vận tốc v đủ lớn thì lực ma sát với sắp si bậc cao bằng:

$$R = kv^2. \quad (1.60)$$

trong đó: k - hằng số phụ thuộc vào hình dạng vật rắn và bản chất của môi trường (chất lưu).

- Nếu vận tốc tịnh tiến khá nhỏ, thì:

$$R = kv. \quad (1.61)$$

Khi này ta có ma sát nhớt: k là hệ số phụ thuộc vào môi trường và các kích thước của vật rắn. Trong hàng loạt các trường hợp, trong các thiết bị kỹ thuật và trong các phanh hãm thủy lực nói riêng: lực cản phụ thuộc không tuyến tính vào vận tốc.

Ta viết nó dưới dạng

$$R = kv|v|^{n-1}, \quad (1.62)$$

ở đây: k và n là các hằng số.

Xét ma sát Culông, ta có $n = 0$, nghĩa là lực cản không đổi về trị số nhưng hướng ngược vận tốc:

$$R = kv|v|^{-1} \quad (1.63)$$

Do tồn tại ma sát trong nên mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng được miêu tả bằng cả sự phụ thuộc không tuyến tính, nghĩa là bằng hai nhánh đường cong tạo nên vòng trễ. Thực nghiệm khẳng định rằng: tốc độ quá trình biến dạng không ảnh hưởng đến chu tuyến các nhánh của vòng trễ và vì thế, diện tích trong vòng trễ là độ đo sự hao tán năng lượng khi dao động trong một chu trình. Đối với mỗi loại vật liệu đã cho, nó được xác định chỉ bằng biên độ dịch chuyển. Theo Н. Н. Давиденковий:

$$\Psi = ka^{n+1}, \quad (1.64)$$

trong đó: Ψ - diện tích trong vòng trễ:

a - biên độ dịch chuyển:

k, n - những hằng số phụ thuộc vào vật liệu và dạng của cấu trúc.

Bây giờ ta khảo sát dao động của hệ một bậc tự do khi lực cản tỷ lệ bậc n đối với vận tốc.

a) Trường hợp dao động tự do

Trong trường hợp này, phương trình (1.18) có dạng:

$$m\ddot{q} + k\dot{q}|^n + cq = 0. \quad (1.65)$$

Phương trình này không thể giải được ở dạng kín. Để giải gần đúng phương trình này ta sử dụng phương pháp cân bằng năng lượng.

Gia số thế năng trong một chu trình dao động (hình 1.7):

$$\Delta\pi_i = \frac{c}{2}(a_{i-1}^2 + a_i^2),$$

trong đó: c - hệ số cứng của hệ.

Biểu thức trên có thể viết:

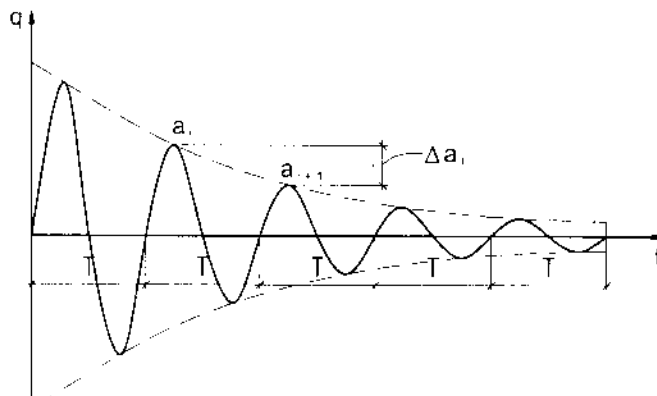
$$\Delta\pi_i \cong ca_i\Delta a_i. \quad (1.66)$$

ở đây: $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$.

Ta ký hiệu $a = a(t)$, có thể lấy gần đúng:

$$\Delta a \approx \frac{da}{dt} T. \quad (1.67)$$

ở đây: t gần đúng bằng chu kỳ dao động của hệ không có giảm chấn.



Hình 1.7

Do đó ta có:

$$\Delta\pi = caT \frac{da}{dt}. \quad (1.68)$$

Bây giờ ta xác định công thực hiện bởi lực $-k\dot{q}|\dot{q}|^{n-1}$ trong một chu trình dao động khảo sát:

$$\Psi = -\int_0^T k\dot{q}^2 |\dot{q}|^{n-1} dt = -k \int_0^T |\dot{q}|^{n+1} dt.$$

Xét chuyển động mô tả bởi phương trình:

$$q = a \cos pt. \quad (1.69)$$

Ta có:

$$\Psi = -ka^{n+1} p^{n-1} \int_0^T \sin pt | \sin pt |^{n+1} dt.$$

hay $\Psi = -ka^{n+1} p^n S. \quad (1.70)$

ở đây trị số S chỉ phụ thuộc vào bậc n .

$$S = -\int_0^{2\pi} |\sin \gamma|^{n+1} d\gamma. \quad (1.71)$$

n	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
S	4.000	3.500	3.142	2.874	2.667	2.498	2.356

Khi so sánh các vế phải của (1.68) và (1.70), ta có:

$$-ba^n = \frac{da}{dt}, \quad (1.72)$$

trong đó hệ số b chỉ phụ thuộc vào các thông số của hệ:

$$b = \frac{kp^{n+1}S}{2\pi c}. \quad (1.73)$$

- Tích phân phương trình (1.72) khi $n = 1$ (cần nhất tuyến tính đã xét ở trên):

$$-ba = \frac{da}{dt}; \quad b = \frac{k}{2m} \rightarrow a = a_0 e^{-bt}.$$

- Tích phân phương trình (1.72) khi $n \neq 1$ trong khoảng $t = 0$ đến t ta được:

$$a \frac{1-n}{1-n} - \frac{a_0^{1-n}}{1-n} = -bt$$

Từ đó

$$a = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)bt a_0^{n-1}}}. \quad (1.74)$$

b) Trường hợp dao động cưỡng bức

Trong trường hợp này, lực cản $R = R(\dot{q})$. Do sự phức tạp của tính toán chính xác ảnh hưởng của lực không tuyến tính này, ta giới hạn bằng một biện pháp đơn giản gần đúng. Lấy R bằng lực tương đương ma sát nhất:

$$R_* = -k_* \dot{q} \quad (1.75)$$

Và xác định hệ số k_* từ điều kiện cân bằng công được dẫn ra bởi lực R và R_* trong chu kỳ dao động. Dưới tác dụng của lực kích động điều hoà, một cách tự nhiên ta cũng cho rằng: ở trường hợp này, quá trình dao động cũng được mô tả bằng quy luật điều hoà.

Xét quy luật dao động ở dạng đơn giản sau đây:

$$q = a \cos \omega t. \quad (1.76)$$

Khi đó công nguyên tố của lực tương đương R_* xác định ở dạng:

$$R_* dq = R_* \dot{q} dt. \quad (1.77)$$

Công của R_* trong chu kỳ, khi chú ý đến (1.75) và (1.76) là:

$$\int_0^T R_* \dot{q} dt = \pi k_* a^2 \omega. \quad (1.78)$$

Bây giờ ta xây dựng tương tự đối với lực cản R ở dạng:

$$R = -k\dot{q}|\dot{q}|^{n-1}.$$

Công nguyên tố của lực này:

$$Rdq = R\dot{q}dt = -k\dot{q}^2|\dot{q}|^{n-1} dt$$

Khi tính đến (1.76), công của R trong một chu kỳ bằng:

$$\int_0^T R\dot{q}dt = -ka^{n+1}\omega^n S. \quad (1.79)$$

So sánh (1.78) và (1.79) ta tìm được hệ số tương đương của lực cản nhất:

$$k_* = \frac{kS}{\pi}(a\omega)^{n-1}.$$

Thay biểu thức k_* vào nghiệm (1.21), viết được:

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^2 + \left(\frac{k_*\omega}{c}\right)^2}}, \quad (1.80)$$

ở đây ký hiệu p_* là tần số riêng của hệ.

Rõ ràng biên độ chưa biết a được đưa vào cả hai vế của biểu thức này.

Lấy $n = 2$ thì $S = 2.667 \rightarrow k_* = 0.85ka\omega$. Thay vào (1.80) ta có:

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^2 + \left(\frac{0.85ka\omega^2}{c}\right)^2}}.$$

Giải ra ta nhận được biên độ của dao động:

$$a = \frac{c}{1.2k\omega^2} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^4 + 4a_0^2 \left(\frac{0.85k\omega^2}{c}\right)^2} - \left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^2}.$$

Biên độ cộng hưởng: $\omega = p_*$ và bằng:

$$a_{\max} \approx 1,085 \sqrt{\frac{m a_0}{k}}.$$

Đối với trường hợp ma sát trễ, ta tìm được:

$$k_* = \frac{k a^{n-1}}{\pi \omega}.$$

Do đó
$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^2 + \left(\frac{k a^{n-1}}{c}\right)^2}} \quad (1.81)$$

Lấy $n = 2$ thì:

$$a = \frac{m(p_*^2 - \omega^2)}{\sqrt{2k}} \sqrt{\frac{4P_0 k^2}{m^4(p_*^2 - \omega^2)^4} + 1} - 1.$$

Khi $n = 1$, quan hệ (1.81) quay về nghiệm (1.21), nghĩa là

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_*^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2}}.$$

Chương 2

DAO ĐỘNG DỌC VÀ XOẮN CỦA THANH THẲNG ĐÀN HỒI ĐỒNG CHẤT

Xét hệ có khối lượng phân bố liên tục, có vô số bậc tự do (nên có vô số tần số riêng và dạng dao động riêng).

Phương trình toán học mô tả dao động của hệ có hữu hạn bậc tự do là hệ phương trình vi phân thường.

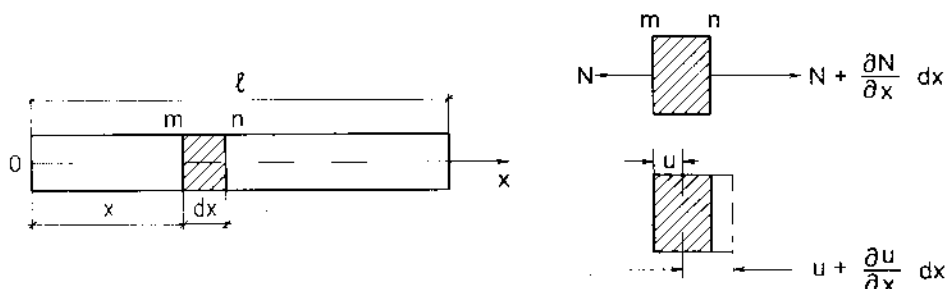
Phương trình toán học mô tả dao động của hệ vô hạn bậc tự do dẫn tới phương trình vi phân đạo hàm riêng. Do đó, việc tìm nghiệm dao động, ngoài các điều kiện đầu còn cần xét đến các điều kiện biên.

§2.1. DAO ĐỘNG DỌC CỦA THANH TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

2.1.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG DỌC CỦA THANH

Ta coi tiết diện ngang của thanh phẳng và các phần tử của thanh không thực hiện dịch chuyển ngang mà chỉ dịch chuyển theo hướng dọc thanh.

Cho thanh thẳng đồng chất dài l , chọn trục Ox như hình vẽ (hình 2.1). Ký hiệu: ρ là khối lượng riêng của vật liệu thanh; E là môđun đàn hồi của vật liệu thanh; F là diện tích tiết diện ngang của thanh.



Hình 2.1

Xét phân tố giới hạn bởi hai mặt cắt kế nhau m và n . Gọi u là dịch chuyển dọc của tiết diện ngang m có tọa độ x . Khi dao động, dịch chuyển này là hàm của x và thời gian t : $u = u(x, t)$. Dịch chuyển ở tiết diện lân cận n bằng: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Do đó, độ dãn dài tuyệt đối của

phân tố thành: $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ và độ dãn dài tương đối của nó bằng:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Lực dọc tác dụng tại tiết diện ngang có tọa độ x là:

$$N = EF\varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.2)$$

EF gọi là độ cứng của thanh.

Lực dọc tác dụng tại tiết diện n lân cận có tọa độ x bằng:

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx.$$

Do khối lượng của phân tố thanh khảo sát là $\rho F dx$ nên lực quán tính của nó tính bởi biểu thức: $-\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Áp dụng nguyên lý Đalămbe đối với phần tử thanh trên, phương trình vi phân chuyển động của nó dọc trục x là:

$$-N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) - \rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Suy ra:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Thay (2.2) vào (2.3), ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

trong đó: $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ là vận tốc truyền sóng dọc thanh, còn (2.4) là phương trình vi phân dao động dọc của thanh tiết diện không đổi.

2.1.2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH (2.4) BẰNG PHƯƠNG PHÁP FURIÊ

Hàm dịch chuyển $u = u(x, t)$. Ta tìm nghiệm riêng của (2.4) dưới dạng:

$$U = X(x).T(t), \quad (2.5)$$

với: $X(x)$ chỉ là hàm của x ; $T(t)$ chỉ là hàm của t .

Thay (2.5) vào (2.4), suy ra:

$$\frac{a^2 X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T}.$$

Vế trái của đẳng thức chỉ phụ thuộc x , vế phải của nó chỉ phụ thuộc t . Để đẳng thức đúng với mọi x và t thì phải bằng hằng số. Ta ký hiệu hằng số này là $-p^2$. Do đó:

$$\frac{a^2 X''}{X} = -p^2; \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -p^2.$$

Ta nhận được hai phương trình sau:

$$\ddot{T} + p^2 T = 0; \quad X'' - \left(\frac{p}{a}\right)^2 X = 0. \quad (2.6)$$

Phương trình đầu của (2.6) có nghiệm:

$$T = A \sin(pt + \alpha). \quad (2.7)$$

Nó xác định đặc trưng của quá trình dao động, ở đó p chưa biết và có ý nghĩa như tần số dao động tự do.

Phương trình thứ hai của (2.6) có nghiệm:

$$X = C \sin \frac{p}{a} x + D \cos \frac{p}{a} x \quad (2.8)$$

xác định dạng riêng của dao động.

Phương trình xác định đại lượng chưa biết p được thiết lập khi xét các điều kiện biên gọi là phương trình tần số. Nói chung phương trình này luôn là phương trình siêu việt và có vô số nghiệm số: p_n ($n = 1, 2, \dots$). Nghiệm của phương trình viết dưới dạng (2.5) chỉ là một nghiệm riêng. Nghiệm tổng quát của nó nhận được bằng cách tổ hợp các nghiệm riêng, nghĩa là:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t). \quad (2.9)$$

Hàm $X_n(x)$ gọi là hàm riêng, mô tả dạng riêng của dao động. Nó không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu và thỏa mãn điều kiện trực giao. Khi $m \neq n$, ta có:

$$\int_0^l X_m(x) \cdot X_n(x) dx = 0. \quad (2.10)$$

2.1.3. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN CỦA THANH. PHƯƠNG TRÌNH TẦN SỐ

2.1.3.a. Thanh có hai đầu tự do (hình 2.2)

Trong trường hợp này, lực dọc hai đầu thanh bằng không.

Ta có: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ khi $x = 0; x = l$

hay: $XT = 0$ khi $x = 0; x = l$



Hình 2.2

Các điều kiện trên được thỏa mãn nếu:

$$\frac{dX}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \text{ và } \frac{dX}{dx} \Big|_{x=l} = 0. \quad (2.11)$$

Từ (2.8), với C và D bất kỳ, nên điều kiện ban đầu được thỏa mãn, nếu đặt $C = 0$, điều kiện thứ hai thỏa mãn nếu:

$$\sin \frac{p_l}{a} = 0. \quad (2.12)$$

Phương trình (2.12) là phương trình tần số. Nó cho phép xác định tần số dao động riêng đối với dao động dọc của thanh có các mút tự do. Ta có:

$$\frac{p_n l}{a} = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.13)$$

Khi $n = 1$, ta có tần số dao động cơ bản:

$$p_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.14)$$

Chu kỳ tương ứng bằng:

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (2.15)$$

Như vậy, ta có vô số tần số riêng, mỗi tần số riêng tương ứng với một dạng dao động riêng xác định bởi hàm $X_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$. Nghiệm

tổng quát của phương trình (2.4) với thanh có hai đầu tự do được biểu diễn ở dạng:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l} A_n \sin(p_n t + \alpha_n),$$

hay:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right). \quad (2.16)$$

Các hằng số a_n , b_n có thể chọn sao cho thỏa mãn các điều kiện ban đầu. Giả sử tại $t = 0$: $u|_{t=0} = f(x)$; $\dot{u}|_{t=0} = f_1(x)$ thì:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.17)$$

2.1.3.b. Thanh có một đầu ngàm chặt, một đầu tự do (hình 2.3)

Giả sử thanh bị ngàm ở đầu $x = 0$, đầu còn lại ($x = l$) tự do. Điều kiện biên có dạng:

$$u|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

hay: $XT = 0$ khi $x = 0$; $X'T = 0$ khi $x = l$

Điều kiện này được thỏa mãn nếu:

$$X|_{x=0} = 0 \text{ và } X'|_{x=l} = 0. \quad (2.18)$$

Tương tự với cách lý giải như trên, để thỏa mãn (2.18) phải có $D = 0$ và ta nhận được phương trình tần số:

$$\cos \frac{pl}{a} = 0. \quad (2.19)$$

Suy ra:

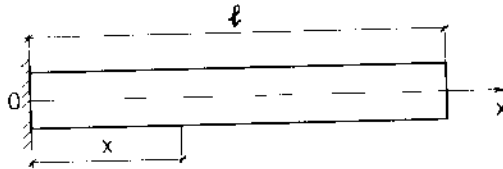
$$p_n = \frac{n\pi a}{2l} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (2.20)$$

Với $n = 1$ thì:

$$p_1 = \frac{\alpha\pi}{2l} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.21)$$

Nghiệm tổng quát trong trường hợp này viết ở dạng:

$$u = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{2l} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{2l} \right) \quad (2.22)$$



Hình 2.3

Hằng số a_n, b_n cũng được xác định từ điều kiện ban đầu $t = 0$. Giả sử thanh được kéo bởi lực P tại nút tự do. Tại $t = 0$ ta lập tức cắt lực P , thanh tự do. Ký hiệu ϵ_0 là độ giãn dài tương đối ban đầu tại nút tự do. Ta có:

$$\epsilon_0 = \frac{P}{EF}$$

Như vậy, điều kiện ban đầu được viết ở dạng:

$$u|_{t=0} = \epsilon_0 x; \quad \dot{u}|_{t=0} = 0.$$

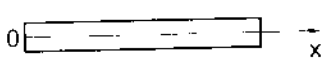
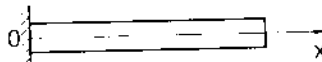
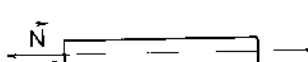
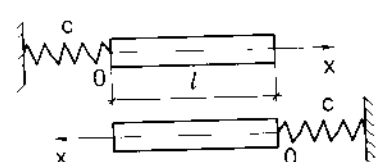
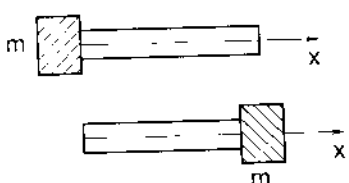
Suy ra:

$$b_n = 0 \text{ và } a_n = \frac{8\epsilon_0 l}{n^2 \pi^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Do đó:

$$u = \frac{8\epsilon_0 l}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2l} \cos \frac{n\pi at}{2l} \quad (2.23)$$

Bảng 1. Các điều kiện biên của một vài dạng liên kết khi xét dao động dọc của thanh thẳng đàn hồi tiết diện không đổi

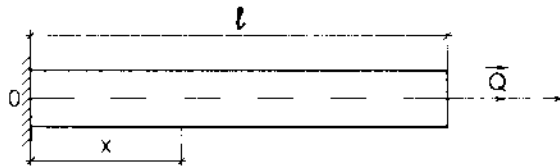
Sơ đồ	Dạng liên kết	Điều kiện biên
	Đầu tự do	$EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$
	Ngàm	$u(0,t) = 0$
	Lực dọc N	$EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = N$
	Đàn hồi tuyến tính độ cứng C	$EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = cu$ $EF \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -cu$
	Gắn khối lượng m ở đầu thanh	$EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ $EF \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

2.1.4. DAO ĐỘNG DỌC CƯỜNG BỨC CỦA THANH

Trước hết ta khảo sát dao động dọc cường bức của thanh thẳng, tiết diện không đổi, có một đầu ngàm và một đầu tự do. Tại đầu tự do thanh chịu tác dụng lực: $Q(t) = Q_0 \cos \omega t$ (hình 2.4). Phương trình vi phân chuyển động dao động dọc thanh được thiết lập theo (2.4). Ở đây các điều kiện biên đối với nút tự do thay đổi. Đó là điều kiện biên không thuần nhất. Cụ thể là:

$$u(0, t) = 0;$$

$$N(l, t) = EF \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = Q_0 \cos \omega t. \quad (2.24)$$



Hình 2.4

Rõ ràng, ta chỉ cần tìm nghiệm riêng của bài toán không thuần nhất ứng với dao động dọc cường bức của thanh. Ta đặt:

$$u_n(x, t) = u_n(x) \cos \omega t. \quad (a)$$

Thay (a) vào (2.4), ta có:

$$\frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} u_n(x) = 0. \quad (b)$$

Nghiệm tổng quát của (b) có dạng:

$$u_n(x) = B_1 \cos \frac{\omega}{a} x + B_2 \sin \frac{\omega}{a} x. \quad (c)$$

Nên:

$$u_n(x, t) = \left(B_1 \cos \frac{\omega}{a} x + B_2 \sin \frac{\omega}{a} x \right) \cos \omega t. \quad (d)$$

Các hằng B_1, B_2 được xác định từ điều kiện biên theo bảng 1. Cuối cùng, ta có:

$$u_n(x, t) = \frac{Q_0 a}{EF\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\cos \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t. \quad (2.25)$$

Biểu thức nghiệm (2.25) chỉ sử dụng khi $\omega \neq p_k$. Khi $\omega \rightarrow p_k$ hệ có cộng hưởng. Biểu thức của nghiệm riêng sẽ lấy ở dạng:

$$u_n(x, t) = u_n(x) \sin \omega t. \quad (2.26)$$

Bây giờ, nếu xét dao động cưỡng bức của thanh thẳng đàn hồi tiết diện không đổi, trên đó chịu tác dụng lực dọc trục có cường độ $q(x, t)$. Phương trình vi phân dao động dọc cưỡng bức không có cản của thanh:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t).$$

Đặt $\mu = \rho F$, ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{q(x, t)}{\mu}. \quad (2.27)$$

Nếu xét đến lực cản tuyến tính, ta có phương trình dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q(x, t)}{\mu}. \quad (2.28)$$

Nghiệm riêng của (2.27) tìm ở dạng:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t). \quad (2.29)$$

$X_n(x)$ là hàm riêng được xác định từ phương trình:

$$X_n''(x) + \left(\frac{p_n}{a}\right)^2 X_n(x) = 0. \quad (2.30)$$

Thay (2.29) vào (2.27), ta được:

$$\ddot{T}_n(t) X_n(x) - a^2 T_n(t) X_n''(x) = \frac{q(x, t)}{\mu}.$$

Chú ý đến (2.30), phương trình trên trở thành:

$$[\ddot{T}_n(t) + p_n^2 T_n(t)] X_n(x) = \frac{q(x,t)}{\mu}$$

Nhân hai vế của phương trình với hàm riêng $X_m(x)$ với $m \neq n$, rồi lấy tích phân trên toàn chiều dài thanh. Do tính chất trực giao của các hàm riêng, suy ra phương trình xác định hàm $T_n(t)$:

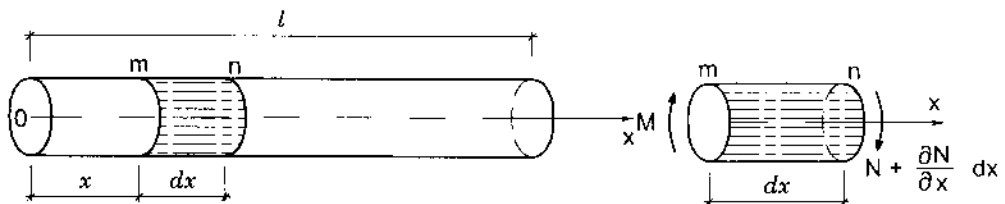
$$\ddot{T}_n(t) + p_n^2 T_n(t) = \frac{\int_0^l q(x,t) X_n(x) dx}{\mu \int_0^l X_n^2(x) dx} = f_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.31)$$

§2.2. DAO ĐỘNG XOẮN CỦA TRỤC TRÒN TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

2.2.1. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN VÀ NGHIỆM CỦA NÓ

Về mặt toán học, việc thiết lập phương trình vi phân dao động xoắn của trục tròn tiết diện không đổi tương tự như khảo sát dao động dọc của thanh.

Cho trục tròn dài l , chọn trục Ox như hình vẽ (hình 2.5).



Hình 2.5

Gọi: ρ là mật độ khối lượng của vật liệu trục; G là môđun đàn hồi trượt của vật liệu trục; J_p là mômen quán tính bậc cực của tiết diện ngang trục. Khi đó $GJ_p = c$ là độ cứng của tiết diện ngang trục khi xoắn.

Xét phân tố thanh giới hạn bởi hai mặt cắt m và n kế nhau. Mômen xoắn tác dụng ở hai tiết diện trên bằng M và $M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$.

Ký hiệu θ là góc xoay của tiết diện m có tọa độ x , khi đó biến dạng góc tương đối là $\frac{\partial \theta}{\partial x}$. Theo công thức trong Sức bền vật liệu thì:

$$M = GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.32)$$

Lực quán tính tác dụng lên phân tố thanh khảo sát là:

$$-\rho J_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$

Áp dụng nguyên lý Đalambé, viết phương trình cân bằng mômen đối với trục Ox , sau khi đơn giản, rút gọn ta suy ra:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho J_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (2.33)$$

Thay (2.32) vào (2.33), ta được:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (2.34)$$

trong đó: $a_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ là vận tốc truyền sóng trượt.

Phương trình (2.34) là phương trình vi phân dao động xoắn của trục tròn tiết diện không đổi. Nó có dạng giống phương trình (2.4). Nghiệm tổng quát của nó tìm ở dạng:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\nu} X_n(x) T_n(t), \quad (2.35)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_n \sin \frac{p_n x}{a_1} + D_n \cos \frac{p_n x}{a_1}; \\ T_n(t) &= A_n \sin(p_n t + \alpha_n). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Các hằng số A_n , α_n được xác định từ các điều kiện ban đầu, các tần số riêng và hàm riêng được xác định từ các điều kiện biên.

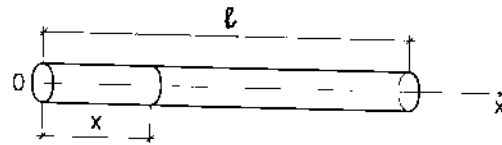
2.2.2. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN – PHƯƠNG TRÌNH TẦN SỐ

2.2.2.a. Trục có hai đầu tự do (hình 2.6)

Trường hợp này mômen xoắn ở hai đầu bằng không.

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

hay: $X'_{x=0} = 0; \quad X'_{x=l} = 0.$



Hình 2.6

Lý giải tương tự như đã làm trước đây, ta có:

$$c = 0 \text{ và } \sin \frac{p_l}{a_1} = 0. \quad (2.37)$$

(2.37) là phương trình tần số, giải ra ta nhận được:

$$\frac{p_n l}{a_1} = n\pi, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.38)$$

Khi $n = 1$ thì:

$$p_1 = \frac{\pi a_1}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.39)$$

2.2.2.b. Trục gắn các đĩa (bánh đà) ở hai đầu mút (hình 2.7)

Trong trường hợp này mômen xoắn ở hai đầu trục bằng mômen của các quán tính của các đĩa (bánh đà).

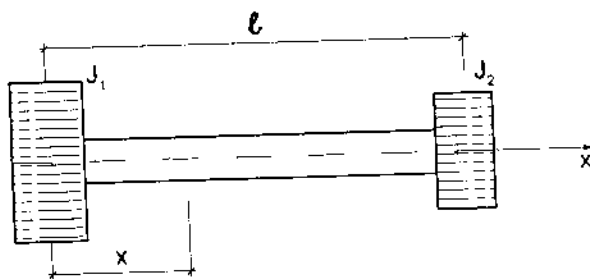
$$J_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GJ_P \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{khi } x = 0;$$

$$J_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -GJ_P \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{khi } x = l$$

hay:

$$J_1 p^2 X' = GJ_P X' \quad \text{khi } x = 0;$$

$$J_2 p^2 X' = -GJ_P X' \quad \text{khi } x = l$$



Hình 2.7

Đặt: $\beta = \frac{pl}{a_1}; m = \frac{J_1}{J_0} = \frac{J_1 g}{\gamma l J_P};$

$$n = \frac{J_2}{J_0}; J_0 = \frac{\gamma l J_P}{g}.$$

Khi các điều kiện trên được thỏa mãn, ta nhận được phương trình tần số.

Phương trình tần số có dạng:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(m+n)\beta}{mr\beta^2 - 1}. \quad (2.41)$$

Nếu β_1, β_2, \dots là nghiệm của phương trình (2.41) thì nghiệm tổng quát trong trường hợp khảo sát bằng:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\beta_n x}{l} - m \beta_n \sin \frac{\beta_n x}{l} \right) \left(a_n \cos \frac{\beta_n a_1 t}{l} + b_n \sin \frac{\beta_n a_1 t}{l} \right). \quad (2.42)$$

2.2.3. DAO ĐỘNG XOẮN CƯỜNG BỨC CỦA TRỤC TRÒN TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

Gọi $q_1(x, t)$ là cường độ mômen ngoại lực tác dụng lên thanh. Phương trình vi phân dao động xoắn của thanh tròn tiết diện không đổi viết dưới dạng:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{q_1(x, t)}{\mu_1}, \quad (2.43)$$

ở đây: $\mu_1 = \rho J_p$.

Phương trình (2.43) có dạng giống phương trình (2.27). Cách giải phương trình này đã được trình bày trong phần 2.1.4 ở trên.

§2.3. DAO ĐỘNG DỌC VÀ XOẮN CỦA THANH THẲNG TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

2.3.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Đối với thanh có khối lượng phân bố liên tục, tiết diện của nó biến đổi theo chiều dài. Khi đó ta thay các phương trình (2.4) và (2.34) bằng các phương trình sau:

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[F \frac{\partial u}{\partial x} \right] = F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

$$a_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[J \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

Nhờ việc đặt $u = X(x)T(t)$ và $\theta = X(x)T(t)$ ta nhận được các phương trình vi phân thường sau đối với các hàm $X(x)$ và $T(t)$:

$$(FX')' + \left(\frac{p}{a}\right)^2 FX = 0; \quad (2.46)$$

$$(JX')' - \left(\frac{P}{a_1} \right)^2 JX = 0; \quad (2.47)$$

$$\ddot{T} + p^2 T = 0. \quad (2.48)$$

Các phương trình này khác với các phương trình trước đây ở chỗ: các hệ số của chúng biến đổi, nghiệm kín của chúng chỉ nhận được trong các trường hợp riêng, khi các biến F và J xác định sự phụ thuộc đặc biệt. Trong trường hợp tổng quát cần đưa vào các phép giải gần đúng.

Nếu thanh có tiết diện thay đổi theo quy luật bậc, nghiệm tìm ở dạng đã biết sẽ được viết đối với mỗi đoạn riêng rẽ. Các hằng số được xác định từ hai điều kiện trên các nút thanh và có $2(m - 1)$ điều kiện ứng suất (giả sử thanh có m đoạn).

2.3.2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI GẦN ĐÚNG

Ta xét phương pháp РИТЦА giải phương trình (2.44). Nghiệm của phương trình tìm được dưới dạng:

$$u(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.49)$$

Thay (2.49) vào (2.44) ta được phương trình vi phân thường đối với hàm $X(x)$. Nếu thực hiện phép đổi biến số: $x = l\eta$ và giả thiết diện tích tiết diện thanh thay đổi theo quy luật:

$$F = F_0 f(\eta). \quad (2.50)$$

Đặt: $\lambda^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2}; \quad a^2 = \frac{E}{\rho}.$

Ta nhận được phương trình sau đối với hàm $X(\eta)$:

$$[f(\eta)X'(\eta)]' + \lambda^2 f(\eta)X(\eta) = 0. \quad (2.51)$$

Khi chú ý đến các điều kiện biên, phương trình (2.51) cho ta xác định được các hàm riêng $X(\eta)$ và giá trị riêng λ_i ($i = 1, 2, \dots$).

Theo phương pháp РИТЦА, các hàm riêng $X(\eta)$ được chọn gần đúng ở dạng chuỗi:

$$X(\eta) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(\eta), \quad (2.52)$$

trong đó: a_k - các hằng số xác định;
 $X_k(\eta)$ - các hàm tọa độ được chọn sao cho thỏa mãn các điều kiện biên hình học.

Nếu xây dựng phiếm hàm:

$$\phi(X, X', \eta) = \int_0^l f(\eta) [X'^2(\eta) - \lambda^2 X^2(\eta)] d\eta \quad (2.53)$$

thì các hằng số a_k phải thỏa mãn để phiếm hàm (2.53) đạt cực trị.

Thay (2.52) vào (2.53), ta có:

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_0^l f(\eta) \left\{ \left[\sum a_k X'_k(\eta) \right]^2 - \lambda^2 \left[\sum a_k X_k(\eta) \right]^2 \right\} d\eta.$$

Điều kiện để phiếm hàm $\phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đạt cực trị là:

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.54)$$

Điều kiện này dẫn đến hệ phương trình đại số giải các ẩn số cần tìm.

Với $n = 1$, phương pháp РИТЦА cho kết quả:

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^l f(\eta) X'^2(\eta) d\eta}{\int_0^l f(\eta) X^2(\eta) d\eta}.$$

Thay về biến cũ ta được:

$$\omega^2 = a^2 \frac{\int_0^l F(x) X'^2(x) dx}{\int_0^l F(x) X^2(x) dx}, \quad (2.55)$$

Công thức (2.55) dùng để xác định tần số riêng thấp nhất.

Như vậy, khó khăn gặp phải khi dùng phương pháp Ритца đó là:

1. Phải xây dựng hàm thỏa mãn điều kiện biên hình học. Đối với miền có tính hình học phức tạp thì điều này là khó khăn và cuối cùng vẫn phải quan tâm đến thuật toán trên máy tính.
2. Để đạt được độ chính xác cao phải dẫn đến giải đầy đủ hệ phương trình bậc cao. Mặt khác những tính toán thực tế chỉ ra rằng: có thể xảy ra hiện tượng không ổn định của nghiệm. Vào những năm gần đây, người ta hay sử dụng phương pháp biến thể của phương pháp Ритца. Đó là phương pháp phần tử hữu hạn.

Ngoài ra, để giải các phương trình vi phân không tuyến tính dạng trên, người ta còn sử dụng nhiều phương pháp gần đúng khác: phương pháp gần đúng liên tiếp, phương pháp Бубнова-Галёкин, phương pháp cân bằng điều hoà, phương pháp tham số bé... [10, 18, 21].

§2.4. SỰ LAN TRUYỀN SÓNG

2.4.1. SÓNG MẶT РЭЛЕЯ

Lần đầu tiên Ряссон đã chứng minh tồn tại hai dạng sóng trong môi trường đẳng hướng và thuần nhất: sóng nén – dãn và sóng trượt. Việc chứng minh tồn tại hai dạng sóng trên, xuất phát từ phương trình chuyển động của môi trường đàn hồi – phương trình Lamé. Gọi φ là thế năng dọc, Ψ là thế năng ngang, ta có:

$$C_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\phi; \quad (2.56)$$

$$C_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\Psi. \quad (2.57)$$

Gọi: $C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$

ϕ và ψ là các hàm vô hướng của tọa độ và thời gian.

Ψ và ψ là các hàm vectơ của tọa độ và thời gian.

Nếu bỏ qua lực khối thì thế năng ngang ψ đồng nhất bằng không. Thế năng dọc ϕ chỉ phụ thuộc vào x_1 và t . Phương trình (2.56) trở về phương trình dao động dọc của thanh (2.4) (xem §2.1):

$$C_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.58)$$

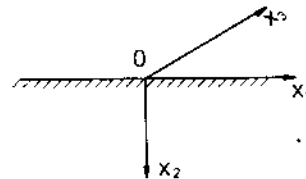
Ta chuyển đến xét nửa không gian đàn hồi, gốc tọa độ chọn trên mặt, trục x_1 hướng dọc biên, trục x_2 hướng sâu vào môi trường (hình 2.8).

Giả thiết bỏ qua lực khối, ta tìm nghiệm của phương trình (2.56) và (2.57) không phụ thuộc vào x_3 (biến dạng phẳng) thay đổi theo thời gian t với quy luật hình sin, tắt dần theo chiều sâu. Trên biên $x_2 = 0$ nó thỏa mãn điều kiện lực tiếp bằng không. Do đó khi $x_2 = 0$, ta có:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0. \quad (2.59)$$

Đây là bài toán dao động tự do của nửa không gian. Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-\alpha x_2 + ip(x_1 - ct)} \\ \psi_3 &= Be^{-\beta x_2 - ip(x_1 - ct)}, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$



Hình 2.8

ở đây: p là tần số đã cho. Các hằng số α, β và c (c là vận

tốc pha): A, B cần chọn sao cho (2.60) thỏa mãn phương trình (2.56), (2.57) và điều kiện biên (2.59).

Thay (2.60) vào (2.56), (2.57), suy ra:

$$\alpha = p \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}; \quad \beta = p \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}. \quad (2.61)$$

Trên cơ sở (2.60) và công thức biểu thị dịch chuyển \vec{u} :

$$\vec{u} = \nabla\varphi + r_p t \psi \quad (2.62)$$

ta tìm được:

$$\begin{aligned} u_1 &= (ipAe^{1ix_2} - \beta B e^{\beta ix_2}) e^{ip(x_1 - ct)}; \\ u_2 &= (-\alpha A e^{1ix_2} - ipB e^{-\beta ix_2}) e^{ip(x_1 - ct)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Như vậy, vectơ dịch chuyển \vec{u} nằm trong mặt phẳng hình vẽ và vuông góc với trục Ox_3 . Trên biên x_2 , dịch chuyển vectơ \vec{u} xác định bằng:

$$\begin{aligned} u_1 &= (ipA - \beta B) e^{ip(x_1 - ct)}; \\ u_2 &= -(\alpha A + ipB) e^{ip(x_1 - ct)}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Từ đó ta nhận được các thành phần ứng suất trên biên:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \mu p^2 \left\{ \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B \right\} e^{ip(x_1 - ct)}; \\ \sigma_{12} &= \mu p^2 \left\{ -2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B \right\} e^{ip(x_1 - ct)}. \end{aligned}$$

Để thỏa mãn điều kiện biên (2.59), ta đặt:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) A + 2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} B &= 0; \\ -2i \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} A + \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) B &= 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Do A và B khác không, nên định thức của hệ bằng không, ta có:

$$(2 - k)^2 - 4\sqrt{(1 - k)(1 - \gamma k)} = 0; \quad k = \frac{c^2}{c_2^2}; \quad \gamma = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1 \quad (2.66)$$

Phương trình này cho ta xác định tốc độ pha c , tốc độ này không phụ thuộc vào tần số p mà chỉ phụ thuộc vào quan hệ $\frac{c_2}{c_1}$.

Xét $\lambda = \mu$, từ (2.65) ta suy được A và B . Do đó:

$$\begin{aligned} u_1 &= D \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \left[2e^{-\mu x_2} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) e^{-\beta x_2} \right] \cos p(x_1 - ct); \\ u_2 &= -D \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)} e^{-\mu x_2} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) e^{-\beta x_2} \right] \sin p(x_1 - ct). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Khi $x_2 = 0$, từ (2.67) nhận được:

$$\begin{aligned} u_1 &= D \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \cdot \frac{c^2}{c_1^2} \cos p(x_1 - ct); \\ u_2 &= -D \left[2 \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)} - \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right) \right] \sin p(x_1 - ct). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Các điểm trên mặt chuyển động theo các Elip. Sóng khảo sát trên lần đầu tiên đã được Рэлея nghiên cứu.

2.4.2. SỰ LAN TRUYỀN SÓNG ĐÀN HỒI DỌC THANH CÓ TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

Trong §2.1 đã thiết lập phương trình dao động dọc của thanh có tiết diện không đổi (2.4). Đó cũng chính là phương trình dạng (2.58):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4)$$

Đặt $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ là tốc độ truyền sóng dọc trong thanh.

Nghiệm của (2.4) đã được khảo sát ở dạng chuỗi Furiê. Tuy nhiên, dạng nghiệm này không phải là duy nhất. Ta có thể nêu ra các phương pháp khác nhau giải phương trình sóng (2.4), chẳng hạn như: phương pháp Đalămbe, phương pháp họa đồ giải tích, phương pháp biến đổi tích phân, ... Ở đây ta khảo sát nghiệm của nó bằng phương pháp Đalămbe. Ta đưa vào biến số mới:

$$\begin{aligned} \xi &= at - x; \quad \eta = at + x \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{1}{2}(\eta - \xi); \quad t = \frac{1}{2a}(\eta + \xi). \end{aligned}$$

Khi đó dịch chuyển $u(x, t)$ qua biến mới là $u(\xi, \eta)$. Áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, phương trình (2.4) trở thành:

$$4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Như vậy, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ không phụ thuộc vào η mà chỉ là hàm của ξ . Ký

hiệu $\frac{\partial u}{\partial \xi} = Q(\xi)$, ta có:

$$u = \int Q(\xi) d\xi + \psi(\eta).$$

Tiếp tục đặt $\int Q(\xi) d\xi = \varphi(\xi)$, ta nhận được:

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Khi chuyển qua biến cũ, ta có:

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x). \quad (2.69)$$

Biểu thức (2.69) là nghiệm tổng quát của (2.4) được giải theo phương pháp Đalămbe. Nó gồm hai số hạng:

1. Số hạng đầu: $\varphi(at - x)$ là sóng dịch chuyển truyền dọc thanh theo hướng trục Ox với vận tốc truyền sóng a không đổi và không làm thay đổi dạng sóng.

Thật vậy, khi $x = at + c$ thì $\varphi = \text{const}$. Nếu ở thời điểm $t = t_1$, tại tiết diện $x = x_1$ tồn tại dịch chuyển φ thì ở thời điểm $t = t_2$ dịch chuyển này sẽ ở tiết diện $x = x_2$ với $x_2 = x_1 + a(t_2 - t_1)$.

2. Số hạng thứ hai: $\psi(at + x)$, với cách lý giải tương tự sẽ là sóng dịch chuyển dọc thanh theo hướng ngược lại cùng với vận tốc truyền sóng a .

Vậy, chuyển động của thanh có thể khảo sát như kết quả tổng hợp của hai sóng biến dạng dọc thanh hướng ngược nhau với cùng vận tốc truyền sóng a . Khi cho các điều kiện ban đầu và các điều kiện biên xác định, ta tìm được nghiệm cụ thể của phương trình (2.4).

Chương 3

CƠ SỞ TÍNH TOÁN HẠ CHÌM CÁC KẾT CẤU VÀO ĐẤT BẰNG THIẾT BỊ RUNG

§3.1. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC DỌC CỦA KẾT CẤU HẠ CHÌM VÀO ĐẤT GÂY RA DO MÁY RUNG

3.1.1. KẾT CẤU HẠ CHÌM VÀO ĐẤT COI NHƯ VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

Hạ chìm vào đất các loại cọc, ống, cừ hay các loại kết cấu khác khi áp dụng dao động cường bức gây ra do máy rung, sẽ phụ thuộc vào biên độ và tần số dao động. Những thông số này lại phụ thuộc vào tính chất cơ học của đất, trọng lượng và kích thước kết cấu, các thông số của thiết bị tạo ra kích động rung (máy rung hoặc búa rung). Do đó, cần chọn các thông số trên sao cho biên độ và tần số dao động của kết cấu thỏa mãn được các điều kiện cần thiết, đảm bảo đạt tốc độ hạ chìm và độ sâu yêu cầu. Như vậy, cần phải thiết lập quan hệ giữa dao động của kết cấu với các thông số của thiết bị rung và tính chất của đất nền. Áp dụng lý thuyết dao động để lập và giải bài toán trên gặp khó khăn và phức tạp đáng kể. Ta sẽ mô hình hóa để đơn giản bài toán trên dựa vào các giả thiết và giới hạn sau:

- Kết cấu dịch chuyển theo hướng hạ chìm (dao động dọc).

- Chiều dài của kết cấu không lớn, nên các điểm của nó có biên độ và tần số dao động như nhau theo chiều dài.
- Môi trường đất xem như môi trường đàn hồi của vật rắn và khi biên độ dao động của kết cấu không lớn thì phản lực của đất tác dụng lên nó là hàm tuyến tính của dịch chuyển và vận tốc dao động.
- Trong quá trình hạ chìm kết cấu có thể có một phần tách rời khỏi đất, phản lực của đất tác dụng lên nó chỉ tồn tại trên đoạn có tiếp xúc. Trong phân tích toán dưới đây, ảnh hưởng trên chưa tính đến.
- Môi trường đất có tính quán tính, nên có ảnh hưởng lớn đến dao động của kết cấu chìm trong nó. Việc tính chính xác ảnh hưởng này đòi hỏi thiết lập và giải bài toán dao động đồng thời của kết cấu và một phần môi trường đất xung quanh nó. Lời giải bài toán phức tạp này đến nay chưa được làm sáng tỏ. Tuy nhiên, khi tính toán ảnh hưởng quán tính của đất sẽ được đánh giá bằng hệ số, giá trị của hệ số này có được trên cơ sở nghiên cứu thực nghiệm.

Ta khảo sát kết cấu hạ chìm vào đất có mô đun đàn hồi khá lớn và có thể xem nó như vật rắn tuyệt đối:

Ký hiệu: q - dịch chuyển dao động trọng tâm của cả hệ (máy rung - kết cấu);

Q - trọng lượng tổng cộng của máy rung (Q_m) và kết cấu (Q_c);

c - hệ số đàn hồi của đất;

P - biên độ lực kích động dọc của máy rung:

$$P = m_0 e \omega^2, \quad (3.1)$$

ở đây: $m_0 g e = Q_0 e$ - mômen lệch tâm của máy rung;

ω - tần số góc của máy rung;

e - độ lệch tâm.

Nếu gọi N là số vòng quay trong một phút của phần lệch tâm máy rung, thì:

$$\omega = \frac{\pi N}{30} = 0,104N, \text{ rad/s.} \quad (3.2)$$

Giả sử máy rung liên kết chặt với kết cấu hạ chìm và lực kích động của nó là hàm số sin của thời gian t :

$$P = \sin \omega t.$$

Theo (1.8) ở chương 1, ta nhận được phương trình vi phân dao động dộc cưỡng bức của kết cấu có dạng:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = P_0 \sin \omega t. \quad (3.3)$$

ở đây: n - hệ số cản dao động và $2n = \frac{\alpha g}{Q}$;

α - hệ số giảm chấn dao động của hệ;

k - tần số dao động dọc riêng của kết cấu, $k = \sqrt{\frac{cg}{Q}}$, rõ ràng k

không phụ thuộc vào mômen lệch tâm của máy rung và tần số ω của nó. Nó được xác định chỉ bằng phản lực đàn hồi của đất và tính quán tính của hệ dao động:

$P_0 = \frac{Pg}{Q}$ - biên độ của lực kích động máy rung trên một đơn

vị khối lượng dao động.

Nghiệm tương ứng với dao động cưỡng bức của (3.3), theo (1.20) ở chương 1 bằng:

$$q = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.4)$$

trong đó: A - biên độ dao động cưỡng bức dọc của kết cấu.

Ta có: $A = KA_*$; (3.5)

$A_* = \frac{m_0 g e}{Q} = \frac{Q_0 e}{Q}$ là biên độ giới hạn của dao động;

$$K_* = \frac{\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]^2 + \frac{4n^2\omega^2}{k^4}}} \text{ là hệ số của biên độ } A_* \quad (3.6)$$

Đặt $\lambda = \frac{\omega}{k}$; $\gamma = \frac{n}{k}$ thì hệ thức (3.6) có thể viết:

$$K_* = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\left[1 - \lambda^2\right]^2 + 4\gamma^2\lambda^2}} \quad (3.7)$$

φ là góc trượt pha giữa lực kích động của máy rung với dịch chuyển dao động của kết cấu. Ta có:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2} = \frac{2\gamma\lambda}{1 - \lambda^2} \quad (3.8)$$

Bây giờ ta xét sự thay đổi của K_* và $\operatorname{tg}\varphi$ phụ thuộc vào sự thay đổi của ω đối với các giá trị xác định của k và n .

- Tần số máy rung lớn so với tần số riêng của kết cấu: $\omega \gg k$ ($\lambda \gg 1$). Từ (3.7) suy ra: $K_* = 1$ và $A = A_*$.

Vậy, nếu tần số của máy rung lớn hơn nhiều lần tần số riêng của kết cấu thì biên độ dao động xác định theo (3.5). Khi đó theo (3.8) góc trượt pha tiến tới π . Do đó, lực kích động của máy rung và dịch chuyển rung của kết cấu có hướng ngược nhau.

- Tần số của máy rung nhỏ so với tần số dao động riêng của kết cấu: $\omega \ll k$ ($\lambda \ll 1$). Từ (3.7) ta có:

$$K_* = \frac{1}{\lambda^2}; \quad A = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 A_* = \frac{\omega^2}{cg} = \frac{Q_0 e}{Q} = \frac{P}{c} \text{ hay } A = A_*$$

Nghĩa là: nếu tần số máy rung nhỏ hơn nhiều lần tần số riêng của kết cấu thì biên độ dao động được xác định theo biên độ của lực kích động. Trong trường hợp này, theo (3.8) ta nhận được: $\operatorname{tg}\varphi = 2\gamma\lambda$.

Khi $\gamma = \frac{n}{k}$ không lớn, $\lambda = \frac{\omega}{k}$ nhỏ, thì lực kích động của máy rung và dịch chuyển dao động của kết cấu có hướng trùng nhau.

- Trường hợp tần số máy rung có giá trị sao cho:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{1 - 2\gamma^2} \quad (3.9)$$

thì ω đạt tần số cộng hưởng: $\omega = \Omega$. Hệ thức (3.9) chỉ ra rằng: tần số cộng hưởng Ω của máy rung phụ thuộc vào $\gamma = \frac{n}{k}$. Nếu γ rất nhỏ (trường hợp giới hạn $\gamma = 0$), thì $\lambda = 1$. Do đó, nếu ta liên kết chặt máy rung với kết cấu thì tần số Ω của máy rung trùng với tần số dao động dọc riêng của kết cấu. Trong điều kiện thực tế $\gamma \neq 0$ (tần số cộng hưởng của máy rung luôn khác tần số dao động riêng của kết cấu). Giá trị của γ thường nằm trong khoảng $0 < \gamma < 0.5$ nên $k < \Omega < 1.4k$. Như vậy, giá trị lớn nhất của tần số cộng hưởng $\Omega = 1.4k$. Ở trạng thái cộng hưởng với λ được xác định từ (3.9) thì hệ số K_s chỉ phụ thuộc vào hệ số γ và bằng:

$$K_s = \frac{1}{2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad (3.10)$$

Các số liệu đo được trong thực tế và nghiên cứu thực nghiệm khẳng định rằng: khi hạ chìm kết cấu vào đất, trị số γ sắp xỉ trong khoảng $0.3 \div 0.5$, nên biên độ của nó trong điều kiện làm việc cộng hưởng của máy rung sẽ lớn gấp $1,15 \div 1,6$ lần giá trị A_s . Như thế, sau khi chọn tần số máy rung gần tần số cộng hưởng cũng khó có hy vọng tăng đáng kể biên độ dao động cưỡng bức.

Những lý giải về lý thuyết ở trên đã được so sánh kiểm tra với kết quả thực nghiệm [3, 4].

Cuối cùng, ta đưa vào biểu diễn nghiệm của bài toán ở dạng phức sẽ cần dùng sau này.

Xét lực kích động là hàm sin hay cos của thời gian t . Ta có:

$$\frac{Q}{g} \ddot{q}_1 + \alpha \dot{q}_1 + cq_1 = P \sin \omega t : \quad (1)$$

$$\frac{Q}{g} \ddot{q}_2 + \alpha \dot{q}_2 + cq_2 = P \cos \omega t . \quad (2)$$

Nhân phương trình (1) với đơn vị ảo i ($i^2 = -1$) và cộng với phương trình (2), với chú ý rằng:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t . \quad (3)$$

Ta nhận được phương trình vi phân dao động dọc cưỡng bức ở dạng phức:

$$\frac{Q}{g} \ddot{q} + \alpha \dot{q} + cq = Pe^{i\omega t} , \quad (3.11)$$

ở đây: $Pe^{i\omega t}$ - lực kích động dạng phức;

$q = iq_1 + q_2$ - dịch chuyển phức, trong đó: phần ảo mô tả chuyển động dao động do lực $P \sin \omega t$; phần thực mô tả chuyển động dao động do lực $P \cos \omega t$.

Nghiệm dao động cưỡng bức tìm dưới dạng:

$$q = Ae^{i\omega t} . \quad (3.12)$$

Thay (3.12) vào (3.11) ta tìm được biên độ phức:

$$A = \frac{P}{\frac{Q}{g} \omega^2 + i\alpha\omega + c} . \quad (3.13)$$

Biểu thức trên có thể viết dưới dạng:

$$A = a \cdot e^{i\beta} , \quad (3.14)$$

ở đây: môđun biên độ phức a là biên độ dao động;
 β là độ trượt pha.

Do đó, biên độ phức hàm chứa thông tin không chỉ là biên độ dao động mà còn có cả pha dao động.

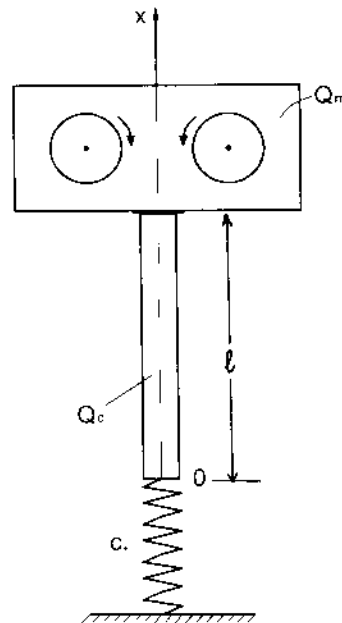
Đặt: $D = -\frac{Q}{g}\omega^2 + i\alpha\omega + c$. gọi là độ cứng động lực của hệ.

$$\text{Đại lượng: } D_* = \frac{1}{D} \text{ hay } D_* = -\frac{1}{\frac{Q}{g}\omega^2 + i\alpha\omega + c} \quad (3.15)$$

là biên độ phức của dao động gây ra do lực kích động đơn vị và gọi là đặc trưng tần số của hệ.

3.1.2. KẾT CẤU HẠ CHÌM VÀO ĐẤT COI NHƯ VẬT THỂ ĐÀN HỒI

Giả thiết tính kết cấu hạ chìm vào đất coi như vật rắn tuyệt đối đã mang tới sai số nhất định khi khảo sát dao động của nó. Trong một số trường hợp, giả thiết này không đáp ứng yêu cầu thực tế vì sai số có thể có giá trị rất lớn. Ta khảo sát dao động cường bức dọc của kết cấu là thanh (cọc) đàn hồi tiết diện ngang nhỏ tựa trên nền đất được mô hình như lò xo không trọng lượng có độ cứng c , đã biết (hình 3.1). Máy rung gắn liền với mút trên của thanh, tác dụng lên nó lực kích động $Pe^{i\omega t}$. Theo §2.1 chương 2, phương trình vi phân dao động dọc của thanh có tính đến phản lực giảm chấn tỷ lệ với vận tốc là:



Hình 3.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

với: α - hệ số của lực cản dao động;

$$a - \text{vận tốc truyền sóng dọc trong thanh, } a = \sqrt{\frac{E}{\rho}};$$

E và ρ - môđun đàn hồi và mật độ khối lượng của vật liệu thanh;

u - dịch chuyển của tiết diện thanh có tọa độ x .

Trục Ox có gốc O ở mút dưới thanh.

Nghiệm của phương trình (3.16) tìm ở dạng (xem 2.1.4 chương 2):

$$u = X(x)e^{i\omega t}. \quad (3.17)$$

Thay (3.17) vào (3.16) ta nhận được phương trình xác định hàm $X(x)$:

$$X'' + s^2 X = 0, \quad (3.18)$$

$$\text{ở đây: } s = \frac{\omega}{a} \sqrt{1 - \frac{i\alpha}{\omega}} = b + id. \quad (3.19)$$

Nghiệm của (3.18) có dạng:

$$X = C \cos(b + id)x + D \sin(b + id)x, \quad (3.20)$$

C và D là các hằng số được xác định từ các điều kiện biên.

Điều kiện biên của bài toán:

$$\text{- tại } x = 0: \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = c_* u \rightarrow u = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.21)$$

$$\text{- tại } x = l: \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Q_m}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

ở đây: F - diện tích tiết diện ngang của thanh;

Q_m - trọng lượng của máy rung;

$$\text{hệ số: } \lambda = \frac{EF}{c_*} = \frac{EF}{Qk^2} = \frac{EFg}{k^2(Q_m + Q_c)}; \quad (3.23)$$

$$k - \text{tần số dao động dọc riêng của thanh, } k = \sqrt{\frac{c_* g}{Q}};$$

Q_c - trọng lượng của thanh.

Khi sử dụng các điều kiện biên (3.21) - (3.22), ta thu được các kết quả sau:

$$\begin{aligned} C &= \lambda(b + id)D: \\ X &= D\sqrt{\lambda^2(b + id)^2 + 1} \sin[(b + id)x + \alpha_1]: \\ \operatorname{tg}\alpha_1 &= \lambda(b + id) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$D = \frac{P}{EF(b + id)\sqrt{\lambda^2(b + id)^2 + 1} \left\{ \cos[(b + id)l + \alpha_1] - \frac{Q_m}{a^2 Q_c(b + id)} \sin[(b + id)l + \alpha_1] \right\}}$$

Từ đó nghiệm của phương trình (3.16) có dạng:

$$u = \frac{Pe^{i\omega t} \sin[(b + id)l + \alpha_1]}{EF(b + id) \left\{ \cos[(b + id)l + \alpha_1] - \frac{Q_m}{a^2 Q_c(b + id)} \sin[(b + id)l + \alpha_1] \right\}} \quad (3.25)$$

Ảnh hưởng của phản lực giảm chấn tồn tại khi chiều dài của thanh lớn so với chiều dài của sóng lan truyền trong nó. Vì vậy, khi khảo sát sự lan truyền sóng, chẳng hạn như trong ống, được sử dụng trong trường hợp khoan giếng dầu và khí, giếng phun... ta không thể bỏ qua phản lực trên. Trong xây dựng, chiều dài cọc, ống, cừ dùng để khoan và gia cố nền móng thường nhỏ so với chiều dài của sóng lan truyền của lực kích động do máy rung gây ra nên có thể bỏ qua phản lực giảm rung. Nghĩa là trong (3.25) đặt $d = 0$ và có:

$$u = \frac{P \sin\left(\frac{\omega x}{a} + \alpha_1\right)}{EF \frac{\omega x}{a} \left\{ \cos\left(\frac{\omega l}{a} + \alpha_1\right) - \frac{Q_m}{Q_c} \frac{\omega l}{a} \sin\left(\frac{\omega l}{a} + \alpha_1\right) \right\}} \sin \omega t. \quad (3.26)$$

Khi cho mẫu số của biểu thức trên bằng không, ta nhận được phương trình xác định tần số dao động dọc riêng \bar{k} của thanh:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\bar{k}l}{a} + \alpha_1\right) = \frac{Q_m}{Q_c} \frac{\bar{k}l}{a}. \quad (3.27)$$

Bây giờ ta khảo sát trường hợp khi:

$$\frac{EF}{l} \gg \frac{Q_m + Q_c}{g} k^2. \quad (3.28)$$

hay:
$$\lambda = \frac{EFg}{k^2(Q_m + Q_c)} \gg 1 \text{ và } \sin \frac{\omega l}{a} \approx \frac{\omega l}{a}; \cos \frac{\omega l}{a} \approx 1. \quad (3.29)$$

Trong trường hợp này có thể chứng tỏ được các biểu thức trong (3.25) và (3.26) trùng nhau.

Như vậy, nếu độ cứng của thanh lớn hơn rất nhiều so với độ cứng đàn hồi của đất, còn chiều dài của thanh nhỏ hơn nhiều so với chiều dài của sóng truyền trong nó, thì tính chất đàn hồi của thanh ảnh hưởng không đáng kể tới biên độ dao động và tần số dao động dọc riêng của thanh.

Ta kiểm tra kết quả trên bằng một vài thí dụ đơn giản:

- a) Đường kính trung bình của cọc gỗ 25cm ($F = 490 \text{ cm}^2$), mô đun đàn hồi của gỗ (thổ dọc) $E = 5 \cdot 10^4 \text{ kG/cm}^2$, tần số dao động thẳng đứng của cọc $k = 50 \text{ rad/s}$, trọng lượng máy rung và cọc $Q = Q_m + Q_c = 2 \cdot 10^3 \text{ kG}$. Theo (3.23) tính được $\lambda = 49 \text{ m}$.

Thực tế chiều dài cọc gỗ ít khi vượt quá $10 \div 12 \text{ m}$. Do đó, đối với cọc thông thường điều kiện (3.28) là đảm bảo. Để hạ chìm cọc người ta dùng máy rung với số vòng quay không lớn hơn 1000 vòng/phút, vận tốc truyền sóng dọc trong gỗ xác định bằng:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Từ đó, chiều dài sóng truyền trong cọc khi hạ chìm nó vào đất bằng máy rung sẽ không nhỏ hơn 150m, nghĩa là lớn hơn đáng kể so với chiều dài của cọc. Như vậy, đối với cọc gỗ các điều kiện (3.28) và (3.29) được đảm bảo và tính chất đàn hồi của cọc gỗ ảnh hưởng không lớn đến dao động của nó.

- b) Cọc bê tông cốt thép có tiết diện ngang trung bình $f = 1,2 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$.
 Nếu $k = 30 \text{ rad/s}$, $E = 3 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, $Q = Q_m + Q_v = 7 \cdot 10^3 \text{ kG}$ thì
 $\lambda = 510 \text{ m}$, nghĩa là lớn hơn khoảng 10 ÷ 20 lần chiều dài cọc sử
 dụng trong xây dựng.

Tần số các máy rung dùng để hạ chìm cọc bê tông cốt thép không vượt quá 50 rad/s còn tốc độ lan truyền sóng trong cọc bê tông cốt thép gần bằng $3,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, nên chiều dài lan truyền sóng trong cọc bê tông cốt thép đạt gần 400m, tức là lớn đáng kể so với chiều dài cọc thực tế. Vì vậy, khi tính dao động đối với cọc bê tông cốt thép ta có thể bỏ qua tính đàn hồi của nó.

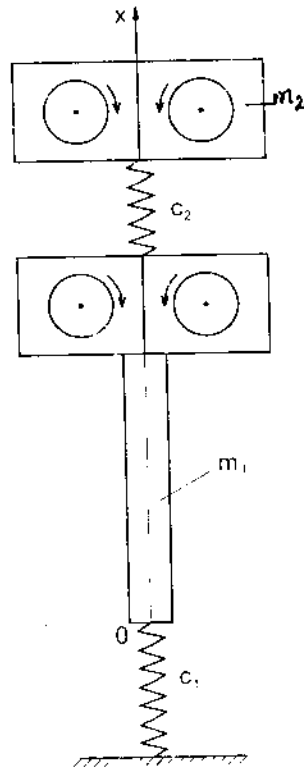
Đặc tính đàn hồi của vật liệu sẽ ảnh hưởng đặc biệt lớn đối với các kết cấu hạ chìm vào đất theo chiều dọc có độ dài lớn (chẳng hạn như các loại ống). Do đó, thực tế khi sử dụng rung động để khoan các lỗ khoan sâu việc tính toán dao động của ống cần phải tính đến tính đàn hồi của vật liệu ống.

3.1.3. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC DỌC CỦA KẾT CẤU HẠ CHÌM VÀO ĐẤT GÂY RA DO HAI MÁY RUNG

Ta xét trường hợp hạ chìm vào đất thanh (hay cọc) được coi như vật rắn tuyệt đối bằng hai máy rung. Máy rung thứ nhất liên kết chặt với nút trên của thanh. Máy rung thứ hai đặt trên máy rung thứ nhất nhờ liên kết đàn hồi (hình 3.2).

Hệ khảo sát trong trường hợp này có hai bậc tự do và được xác định bởi hai dịch chuyển: dịch chuyển của trọng tâm thanh (cọc) và máy rung thứ nhất, dịch chuyển của trọng tâm máy rung thứ hai.

Giả thiết rằng: tần số góc của hai máy rung như nhau (ω) và các lực kích động của chúng trùng pha, pha ban đầu bằng không. Trục Ox chọn như hình vẽ, gốc O trùng với nút dưới của thanh (cọc).



Hình 3.2

Theo §1.3 chương 1, ta có phương trình vi phân dao động thẳng đứng của hệ có dạng:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + k_1^2(1 + \mu)x_1 - k_1^2\mu(x_2 - x_1) + \eta_1\dot{x}_1 - \eta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - P_1 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 + k_1^2(x_2 - x_1) + \eta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = P_2 \sin \omega t \end{cases} \quad (3.30)$$

trong đó: c_1 - hệ số cứng đàn hồi của đất;

m_1 - khối lượng tổng cộng của thanh (cọc) và máy rung dưới;

x_1 - dịch chuyển thẳng đứng của trọng tâm khối lượng m_1 ;

c_2 - hệ số cứng đàn hồi của lò xo liên kết hai máy rung;

m_2 - khối lượng của máy rung trên;

x_2 - dịch chuyển thẳng đứng của trọng tâm máy rung trên;

$$k^z = \frac{c_1}{m_1 + m_2}; \quad k_1^z = \frac{c_2}{m_2};$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{m_1}; \quad \eta_2 = \frac{\alpha_2}{m_2}; \quad \mu = \frac{m_2}{m_1};$$

α_1, α_2 - hệ số giảm rung trong đất và trong liên kết đàn hồi;

P_1, P_2 - biên độ của lực kích động của các máy rung,

$$P_1 = \frac{Q_{\omega 1} e_1}{m_1 g} \omega^2; \quad P_2 = \frac{Q_{\omega 2} e_2}{m_2 g} \omega^2;$$

$Q_{\omega 1} e_1, Q_{\omega 2} e_2$ - mômen khối lượng lệch tâm của các máy rung. Khi tính toán sau này, lấy $e_1 = e_2 = e$.

Nghiệm của phương trình (3.30) tìm ở dạng (1.50) (xem chương 1):

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t; \\ x_2 &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Thay (3.31) vào (3.30) ta nhận được bốn phương trình xác định A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$\begin{cases} [-\omega^2 + k^z(1 + \mu) + k_1^z \mu] A_1 - (\eta_1 + k^z \mu) \omega B_1 - k_1^z \mu A_2 + \eta_2 \mu \omega B_2 - P_1 = 0 \\ (\eta_1 + \eta_2) \omega A_1 + [-\omega^2 - k^z(1 + \mu) + k^z(1 + \mu)] B_1 - \eta_2 \omega A_2 - k_1^z \mu B_2 = 0 \\ k_1^z A_1 + \eta_2 \omega B_1 + (-\omega^2 + k_1^z) A_2 - \eta_2 \omega B_2 - P_2 = 0 \\ -\eta_2 \omega A_1 - k_1^z B_1 + \eta_2 \omega A_2 + (-\omega^2 + k_1^z) B_2 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Giải hệ (3.32) ta nhận được bình phương các biên độ dao động của khối lượng m_1 và m_2 :

$$\begin{aligned} a_1^z &= A_1^z + B_1^z = \left(\frac{e_1}{m_1 g} \right)^2 \lambda^4 \frac{\xi_1^2}{\xi^2}; \\ a_2^z &= A_2^z + B_2^z = \left(\frac{e_2}{m_2 g} \right)^2 \lambda^4 \frac{\xi_2^2}{\xi^2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

trong đó:

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= \gamma_2^2 \lambda^2 (Q_{o1} + Q_{o2})^2 + \mu^2 [(1 - \lambda^2)Q_{o1} + Q_{o2}]^2 \\ \xi_2^2 &= \lambda^2 [\gamma_2 Q_{o1} + (\gamma_1 + \gamma_2)Q_{o2}]^2 + \{Q_{o1}\mu + Q_{o2}[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2]\}^2 \\ \xi^2 &= \{\mu[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2](1 - \lambda^2) - \mu^2\}^2 + [(1 - \lambda^2)^2 \mu^2 + \gamma_2^2 \lambda^2] \gamma_1^2 \lambda^2 - \\ &\quad - \{[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2 + (1 - \lambda^2)\mu - 2\mu]^2 \gamma_2^2 \lambda^2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \lambda^6 \mu^2\}\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{k_1}; \quad \beta = \frac{k}{k_1}; \quad \gamma_1 = \frac{\eta_1}{k_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\eta_2}{k_1} \mu.$$

Trường hợp riêng:

- 1) Dao động cưỡng bức của thanh (cọc) gây ra do máy rung dưới, máy rung trên không có. Thay vào nó, ta gắn trực tiếp với máy rung dưới một lò xo có khối lượng m_2 . Do sự hao tán năng lượng của lò xo này rất nhỏ so với sự hao tán năng lượng trong đất, nên hệ số γ_2 nhỏ so với hệ số γ_1 , sau này ta coi $\gamma_2 = 0$. Mô hình khảo sát tương ứng với trường hợp đặt khối lượng phụ tạo ra áp lực gia thêm lên thanh (cọc) và đất.

Trong trường hợp này, nghiệm bài toán sẽ đơn giản đáng kể và có thể nhận được trực tiếp khi đặt $Q_{o2} = 0$, $\gamma_2 = 0$. Ta có:

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= \mu^2 (1 - \lambda^2)^2 Q_{o1}^2; \\ \xi_2^2 &= \mu^2 Q_{o2}^2; \\ \xi^2 &= \mu^2 \{[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2](1 - \lambda^2) - \mu^2\}^2 - (1 - \lambda^2)^2 \gamma_1^2 \lambda^2\}.\end{aligned}$$

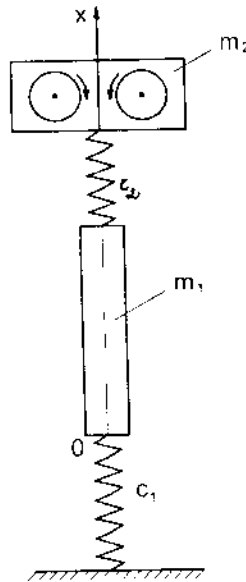
Biên độ dao động của khối lượng m_1 , m_2 tương ứng bằng:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{Q_{o1} e}{Q_1} \times \frac{\lambda^2 (1 - \lambda^2) \mu^2}{\xi^2}; \\ a_2 &= \frac{Q_{o1} e}{Q_1} \times \frac{\lambda^2 \mu^2}{\xi^2}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Từ đó:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1 - \lambda^2}.$$

2) Máy rung dưới không có, m_1 là khối lượng của thanh (cọc). Máy rung trên liên kết với thanh (cọc) bằng lò xo đàn hồi lý tưởng có độ cứng c_2 (hình 3.3). Mô hình khảo sát tương ứng với trường hợp đặt máy rung trên mũ cọc đàn hồi. Các giá trị biên độ trong trường hợp này cũng được nhận trực tiếp từ (3.33) khi đặt $Q_{o1} = 0, \gamma_2 = 0$.



Hình 3.3

Ta có:

$$\xi_1^2 = \mu^2 Q_{o2}^2;$$

$$\xi_2^2 = \{\lambda^2 \gamma_1^2 + [(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2]^2\} Q_{o2}^2;$$

$$\xi^2 = \{\mu[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2](1 - \lambda^2) - \mu^2\}^2 + [(1 - \lambda^2)^2 \mu^2] \gamma_1^2 \lambda^2.$$

Từ đó:

$$a_1 = \frac{Q_{o2} e}{Q_2} \times \frac{\lambda^2 \mu^2}{\xi^2};$$

$$a_2 = \frac{Q_{o2} e}{Q_2} \times \frac{\lambda^2 \mu^2 \sqrt{\lambda^2 \gamma_1^2 + [(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2]^2}}{\xi^2} \quad (3.35)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\lambda^2 \gamma_1^2 + [(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2]^2}. \quad (3.36)$$

Ta làm rõ ý nghĩa của điều kiện này: số hạng đầu của biểu thức dưới dấu căn $\lambda^2 \gamma_1^2$ luôn khác không, số hạng thứ hai của biểu thức dưới dấu căn $[(1 + \mu)\beta^2 + \mu - \lambda^2]^2$ bằng không khi:

$$\lambda^2 = \lambda_o^2 = (1 + \mu)\beta^2 + \mu, \quad (3.37)$$

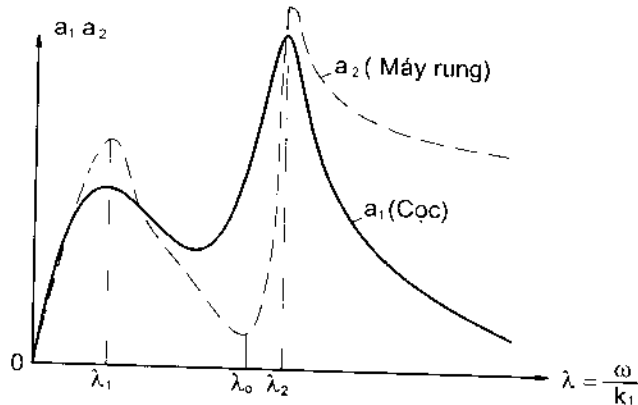
$$\text{ở đây: } \lambda_o = \frac{\omega_o}{k_1}; \quad k_1^2 = \frac{c_2}{m_2}.$$

Giá trị cần thiết của k_1 thỏa mãn hệ thức (3.37) và để tỷ số biên độ $\frac{a_2}{a_1}$ nhỏ nhất sẽ bằng:

$$k_1^2 = \frac{\omega_o^2 - (1 + \mu)k^2}{\mu}. \quad (3.38)$$

Trong trường hợp này, ta có:

$$\frac{a_2}{a_1} = \lambda_o \gamma_1 = \frac{\mu \eta_1 \omega_o}{\omega_o^2 - (1 + \mu)k^2}. \quad (3.39)$$



Hình 3.4

Rõ ràng, biểu thức (3.37) thỏa mãn không phải với bất kỳ giá trị ω_n nào của máy rung. Vì $k_1^2 > 0$, nên giá trị nhỏ nhất của ω_n để điều kiện này tuân theo là:

$$\omega_n^2 > (1 + \mu)k^2. \quad (3.40)$$

Từ đó, máy rung đặt trên mũ cọc đàn hồi, tần số của nó cần phải lớn hơn tần số dao động riêng thẳng đứng của cọc. Điều kiện trên đã chỉ ra những hạn chế khả năng sử dụng mũ cọc đàn hồi trong thực tế. Việc sử dụng mũ cọc sẽ hoàn toàn có lợi đối với máy rung nhẹ tần số cao và trung bình; đối với máy rung tần số thấp thì áp dụng mũ cọc đàn hồi không thật lợi thế. Với hệ có mũ cọc đàn hồi hai bậc tự do nó sẽ có hai tần số chính. Các tần số chính được xác định như là nghiệm của phương trình $\xi = 0$. Hệ quả là: những đường cong cộng hưởng được xây dựng đối với máy rung trên mũ cọc đàn hồi và đối với kết cấu hạ chìm sẽ có hai giá trị cực đại. Trên hình vẽ (hình 3.4) xây dựng các đường cong cộng hưởng của cọc và của máy rung có mũ cọc đàn hồi tương ứng với các giá trị của tần số máy rung.

3.1.4. DAO ĐỘNG XOẮN CỦA KẾT CẤU HẠ CHÌM VÀO ĐẤT GÂY RA DO MÁY RUNG

Kết cấu hạ chìm vào đất thực hiện thuận lợi khi có kích động xoắn đồng thời với kích động thẳng đứng, đặc biệt với kết cấu có dạng hình tròn (chẳng hạn các loại ống). Ta khảo sát ống trụ được hạ chìm vào đất. Khi tính đến tính chất đàn hồi của vật liệu ống, các phản lực đàn hồi và nhớt của đất tác dụng lên ống, phương trình vi phân dao động xoắn cưỡng bức của ống được viết ở dạng (xem §2.2 chương 2).

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \alpha \dot{\theta} + c_1 F_1 \theta = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (3.41)$$

trong đó: θ - góc quay của ống;
 ρ - mật độ khối của vật liệu ống;

J - mômen quán tính độc cực của tiết diện ngang ống;
 α - hệ số của lực cản dao động (lấy gaus đúng tỷ lệ với diện tích mặt bên ống);
 c_1 - hệ số cứng đàn hồi của đất khi quay;
 F_1 - diện tích phần mặt bên của ống hạ chìm trong đất.

Đặt:
$$n_1 = \frac{\alpha}{2\rho J} \text{ - hệ số cản (giảm chấn);}$$

$$k_1^2 = \frac{c_1 F_1}{\rho J} \text{ - tần số dao động xoắn riêng của ống.} \quad (3.42)$$

Phương trình (3.41) viết được:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + 2n_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + k_1^2 \theta = b_1^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (3.43)$$

ở đây:
$$b_1^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Giả thiết chiều dài của ống là l , nút dưới của ống đặt tự do, gốc tọa độ đặt ở nút dưới, trục Ox hướng lên trên. Mômen xoắn kích động của máy rung bằng:

$$M = M_0 e^{i\omega t}.$$

Ta sẽ có các điều kiện biên của bài toán như sau:

- khi $x = 0$:
$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

- khi $x = l$:
$$GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + M, \quad (3.44)$$

trong đó: I - mômen quán tính của ống đối với trục quay của nó.

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.43) ở dạng (xem chương 2):

$$\theta = X(x)e^{i\omega t}. \quad (3.45)$$

Thay (3.45) vào (3.43), ta nhận được phương trình đối với hàm riêng $X(x)$:

$$X'' + (b - id)^2 X = 0. \quad (3.46)$$

ở đây: $b - id = \frac{1}{b_1} \sqrt{\omega^2 - k_1^2 - 2n_1 i \omega};$

$$b = \frac{1}{b_1} \sqrt{\frac{\omega^2 - k_1^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega^2 - k_1^2)^2 + 4n_1^2 \omega^2}};$$

$$d = \frac{1}{b_1} \sqrt{-\frac{\omega^2 - k_1^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega^2 - k_1^2)^2 + 4n_1^2 \omega^2}}.$$

Nghiệm của phương trình (3.46) có dạng:

$$X(x) = A \cos(b - id)x + B \sin(b - id)x. \quad (3.47)$$

Khi sử dụng các điều kiện biên (3.44), ta nhận được:

$$A = \frac{M}{GJ} \times \frac{1}{r \cos(b - id)l + (b - id) \sin(b - id)l}; \quad (3.48)$$

$$B = 0;$$

$$r = \frac{I\omega^2}{GJ}.$$

Nếu tần số máy rung lớn so với tần số dao động xoắn riêng của ống thì khi tính biên độ dao động xoắn cường bức, có thể bỏ qua ảnh hưởng của phản lực nhớt (giảm chấn), nghĩa là đặt $n_1 = 0$. Ta có:

$$A = \frac{M}{GJ} \times \frac{b_1}{rb_1 \cos(bl) + \sqrt{\omega^2 - k_1^2} \sin(b_1 l)}. \quad (3.49)$$

§3.2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TÍNH BÚA RUNG

3.2.1. BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN VỀ DẪN ĐỘNG RUNG VA CHẠM

Hạ chìm kết cấu vào trong đất cần thiết phải khắc phục lực cản mặt đầu và mặt bên của đất lên kết cấu. Trong §3.1 đã trình bày

phương pháp sử dụng các máy rung tạo ra dao động cưỡng bức có biên độ và tần số cần thiết. Thực tế chỉ ra rằng, đa số trường hợp các máy rung có thể thỏa mãn các yêu cầu đặt ra. Nhưng trong nhiều trường hợp, để khắc phục các lực cản trên, các máy rung không thể đạt được. Do đó, người ta phải dùng các cơ cấu va chạm có tần số va chạm đủ lớn để khắc phục lực cản của đất.

Ta xét bài toán dao động rung va chạm đơn giản được mô tả theo sơ đồ sau (hình 3.5). Vật 1 khối lượng m treo vào lò xo đàn hồi 2 có độ cứng c . Nhờ liên kết lý tưởng 3, vật 1 chỉ chuyển động tịnh tiến dọc trục q . Trong quá trình chuyển động, vật 1 thực hiện va chạm vào mặt cố định 4.

Giả sử dịch chuyển của vật 1 được tính từ vị trí cân bằng, khoảng cách từ nó đến mặt cố định (khe hở) là q_0 , ở đây $q_0 > 0$.

Nếu trong khoảng thời gian va chạm không xảy ra hao tán năng lượng thì phương trình vi phân chuyển động của vật 1 có thể viết ở dạng:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (1)$$

trong đó: $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ - tần số góc riêng của hệ không kể đến mặt cố định.

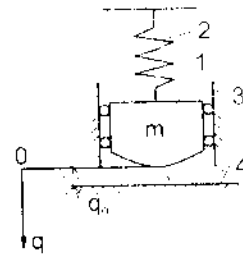
Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ (lấy ở thời điểm khi vật (1) tách rời khỏi mặt cố định (4)), ta có:

$$q_+ = q_0; \quad \dot{q}_+ = -V_0. \quad (2)$$

ở đây đã ký hiệu: dấu (+) chỉ các giá trị trực tiếp sau va chạm;
dấu (-) chỉ các giá trị trực tiếp trước va chạm.

Tích phân phương trình (1), ta nhận được:

$$q = A_1 \cos(kt + \alpha). \quad (3)$$



Hình 3.5

A_1 và α xác định từ điều kiện (2):

$$A_1 = \sqrt{q_o^2 + \frac{V_o^2}{k^2}}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_o}{q_o k}. \quad (4)$$

Đạo hàm q theo thời gian t , ta có:

$$\dot{q} = -A_1 k \sin(kt + \alpha). \quad (5)$$

Vào thời điểm $t = t_1$, vật 1 lại va chạm vào mặt cố định 4, khi đó trạng thái của hệ được xác định bằng điều kiện:

$$q_+ = q_o; \dot{q}_+ = V_o. \quad (6)$$

Thay (6) vào (3) và (5), sau đó chia đẳng thức thứ hai nhận được cho đẳng thức đầu, ta có:

$$\operatorname{tg}(kt_1 + \alpha) = -\frac{V_o}{q_o k}. \quad (7)$$

Từ (7) và đẳng thức thứ hai của (4) nhận được:

$$kt_1 + \alpha = 2\pi - \alpha.$$

Suy ra:
$$t_1 = \frac{2(\pi - \alpha)}{k} = \frac{2}{k} \left(\pi - \arccos \frac{q_o}{A_1} \right). \quad (8)$$

Bây giờ, điều kiện ban đầu của chu trình thứ hai $t = t_1$ là:

$$q_+ = q_o; \dot{q}_+ = -RV_o, \quad (9)$$

ở đây: R được ký hiệu là hệ số khôi phục vận tốc Niuton khi va chạm, nó đặc trưng cho bước nhảy của vận tốc và được xác định bởi quan hệ sau:

$$R = -\frac{\dot{q}_+}{\dot{q}_-}; \quad 0 \leq R \leq 1. \quad (10)$$

Đối với chu trình thứ hai, ta có:

$$A_2 = \sqrt{q_o^2 + \frac{R^2 V_o^2}{k^2}}; \quad t_2 = \frac{2}{\pi} \left(\pi - \arccos \frac{q_o}{A_2} \right). \quad (11)$$

Khi coi $R = \text{const.}$ ở chu trình thứ n , ta có:

$$A_n = \sqrt{q_0^2 + \frac{R^{2n-1} V^2}{k^2}}; t_n = \frac{2}{\pi} \left(\pi - \arccos \frac{q_0}{A_n} \right). \quad (12)$$

Như vậy, hệ dao động nhờ dẫn động va chạm có thể coi như thực hiện dao động cưỡng bức có chu kỳ.

3.2.2. TÍNH TOÁN BÚA RUNG MỘT BẬC TỰ DO

Thực tế không thể tạo ra các thiết bị rung vạm năng để với bất kỳ điều kiện nào cũng thực hiện hạ chìm được các kết cấu vào đất.

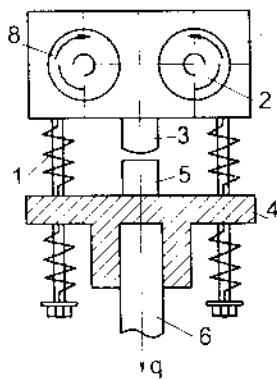
Các loại búa hơi, búa diesel có số va chạm lớn trong một đơn vị thời gian, tỏ ra có hiệu quả khắc phục lực cản của đất lên kết cấu.

Nhiều tài liệu thực tế và nghiên cứu thực nghiệm đã chứng tỏ được: để tác dụng va chạm có hiệu quả, trước hết tần số va chạm phải gần bằng tần số dao động thẳng đứng tự do của kết cấu hạ chìm, sau đó tiến hành quá trình lặp đi lặp lại liên tục thì lực kháng của đất sẽ giảm. Người ta đã đo được: tần số dao động tự do của cọc bê tông cốt thép trong đất yếu khoảng 300 ÷ 400 vòng/phút; cọc gỗ khoảng 500 ÷ 600 vòng/phút. Số va chạm cần phải chọn tương ứng với các tần số này. Thực tế có thể dễ dàng nhận được tần số va chạm cần thiết khi áp dụng máy rung với kích động va chạm tần số cao. Các máy rung cho phép thực hiện các va chạm với tần số đảm bảo yêu cầu trên gọi là búa rung. Sơ đồ nguyên tắc và cơ sở tính toán búa rung đã có từ những năm 40 của thế kỷ XX, nhưng việc áp dụng vào thực tế để hạ chìm các kết cấu vào đất phải tới những năm 50 của thế kỷ XX.

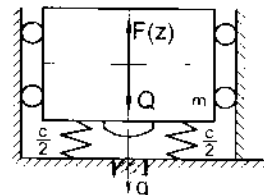
Ta xét một sơ đồ của búa rung được mô tả như trên hình vẽ (hình 3.6). Máy rung 1 nâng đầu búa 4 nhờ các lò xo 7 nằm đối xứng đối với trục q . Trong máy rung, người ta bố trí các động cơ điện 8. Trên trục rôto của động cơ có quả văng 2 đảm bảo cho dao động của phần va chạm rung dịch chuyển dọc trục q . Dao động này truyền va chạm của búa 3 vào mũ 5 của kết cấu. Mũ 5 gắn chặt vào cọc 6 được hạ chìm vào đất. Như thế, khi làm việc búa rung

thực hiện đồng thời tác dụng rung và va chạm. Tuy nhiên, dao động cơ bản của kết cấu (cọc) được gây ra bằng va chạm. Việc tính toán búa rung dẫn tới xác định vận tốc va chạm là chủ yếu.

Ta chọn mô hình động lực của hệ dao động va chạm có một bậc tự do áp dụng cho búa rung hoặc một số máy rung va chạm khác như trên hình vẽ (hình 3.7). Khối lượng m tựa trên lò xo có độ cứng c , chịu tác dụng của lực kích động $F(t)$ và lực không đổi Q . Chuyển động của hệ sẽ gây ra va chạm vào vật tựa trên nền đất cố định.



Hình 3.6



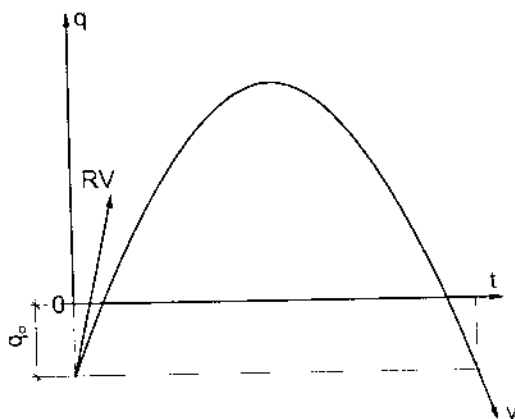
Hình 3.7

Những vấn đề động lực khác nhau của hệ khảo sát đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, như: И.Г. Русаковий, А.А. Харкевиц, О. Поповиц, П.С. Лившин, С.А. Цаплин, О.Я. Шехтер, Д.Д. Баркан, И.К. Пцелин... Tuy nhiên việc nghiên cứu đầy đủ và hoàn thiện nhất thuộc về Л.В. Беспановый. Có thể nói chung là: các tác giả đều giả thiết rằng, máy rung gây ra lực kích động thẳng đứng thay đổi điều hòa theo thời gian; va chạm xảy ra tức thời và được đặc trưng bằng hệ số khôi phục vận tốc R ; các lò xo là đàn hồi lý tưởng nên sự mất năng lượng của máy rung xảy ra chỉ trong thời gian va chạm, còn chuyển động của máy rung trong khoảng thời gian giữa hai va chạm không có sự hao tán năng lượng và nó thực hiện chuyển động cưỡng bức có chu kỳ ổn định.

Phương trình vi phân chuyển động của máy rung có thể viết ở dạng:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = P \cos(\omega t + \varphi) - Q, \quad (3.50)$$

ở đây: Q, m - trọng lượng, khối lượng của phần máy rung va chạm;
 c - độ cứng của lò xo đàn hồi lý tưởng;
 P, ω, φ - biên độ, tần số, góc trượt pha của lực kích động của
 máy rung;
 q - độ lệch của máy rung từ vị trí ban đầu (hình 3.8).



Hình 3.8

Ký hiệu: $A_* = \frac{Q_0 e}{Q}$.

ở đây: $Q_0 e$ - mômen lệch tâm của máy rung;
 k - tần số dao động riêng thẳng đứng của máy rung được
 liên kết chặt bởi các lò xo: $k^2 = \frac{cg}{Q}$.

Phương trình (3.50) viết được ở dạng:

$$\ddot{q} + k^2 q = A_* \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - g. \quad (3.50a)$$

Theo phương pháp của И.Г. Русаковий và А.А. Харкевиц, ta đưa ra điều kiện ở thời điểm đầu và cuối của khoảng thời gian giữa các va chạm.

$$t = 0: \quad q = -q_0; \quad \dot{q} = RV; \quad (3.51)$$

$$t = \frac{2\pi\lambda}{\omega}: \quad q = -q_0; \quad \dot{q} = -V.$$

ở đây: q_0 - độ lớn của khe hở giữa đầu búa của máy rung và mũ cọc;
 λ - tỷ số chu kỳ va chạm và chu kỳ lực kích động của máy rung, $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

Trong khoảng thời gian giữa hai va chạm liên tiếp cần thỏa mãn điều kiện: $0 < t < \frac{2\pi\lambda}{\omega}$; $q \leq q_0$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.50a) có dạng:

$$q = A_1 \cos(kt + \psi) + A_2 \cos(\omega t + \varphi) - \frac{g}{k^2}, \quad (3.52)$$

trong đó: A_1, A_2, φ, ψ là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu của chuyển động.

Số hạng đầu của nghiệm tương ứng với dao động tự do của máy rung; số hạng thứ hai tương ứng với dao động cưỡng bức của máy rung; thành phần cuối tương ứng với độ võng tĩnh của máy rung trên lò xo dưới tác dụng của trọng lượng bản thân của nó.

Sau khi sử dụng điều kiện ban đầu của chuyển động (3.51) ta nhận được bốn phương trình xác định A_1, A_2, φ, ψ :

$$\begin{cases} -q_0 = A_1 \cos \psi + A_2 \cos \varphi - \frac{g}{k^2} \\ RV = -A_1 k \sin \psi - A_2 \omega \sin \varphi \\ -q_0 = A_1 \cos(2\lambda\pi\xi_1 + \psi) + A_2 \cos \varphi \\ -V = -A_1 k \sin(2\lambda\pi\xi_1 + \psi) - A_2 \omega \sin \varphi \end{cases} \quad (3.53)$$

với: $\xi_1 = \frac{k}{\omega}$.

Giải hệ trên, ta nhận được:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(1+R)}{2k} V \frac{1}{\sin \lambda\pi\xi_1}; \\ A_2 &= -\frac{A_*}{1-\xi_1^2}; \\ \psi &= -\lambda\pi\xi_1; \\ \varphi &= \arcsin \frac{V(1-R)(1-\xi_1^2)}{2\omega A_*}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Thay các giá trị tìm được từ (3.54) vào biểu thức nghiệm (3.52) ta có:

$$q = \frac{(1+R)V}{2k} \times \frac{1}{\sin \lambda \pi \xi_1} \cos(kt - \lambda \pi \xi_1) - \frac{A_*}{1 - \xi_1^2} \cos \left[\omega t + \arcsin \frac{V(1-R)(1 - \xi_1^2)}{2\omega A_*} \right] - \frac{g}{k^2} \quad (3.55)$$

Khi $t = 0$, biểu thức (3.55) có dạng:

$$-q_0 = \frac{(1+R)V}{2k} \cot g \lambda \pi \xi_1 - \frac{A_*}{1 - \xi_1^2} \cos \left[\arcsin \frac{V(1-R)(1 - \xi_1^2)}{2\omega A_*} \right]$$

Bình phương hai vế của phương trình và tiến hành các biến đổi, ta nhận được phương trình đối với vận tốc v vào thời điểm va chạm:

$$V^2 + 4q_0 \frac{\omega}{1-R} \times \frac{y}{1-y^2} \cdot V + 4 \frac{\omega^2 [q_0^2 (1 - \xi_1^2)^2 + A_*^2]}{(1 - \xi_1^2)^2 (1 + y^2) (1 - R^2)} = 0, \quad (3.56)$$

ở đây đặt:

$$y = y(\xi_1, R) = \frac{1+R}{1-R} \times \frac{\cot g \lambda \pi \xi_1}{\xi_1} \quad (3.57)$$

Giải phương trình (3.56), nhận được:

$$V_{1,2} = \omega A_* \phi_{1,2} \quad (3.58)$$

Trong đó đưa ra ký hiệu:

$$\phi_{1,2} = \frac{2}{1-R} \times \frac{ry \pm \sqrt{(1 - \xi_1^2)^2 - r^2}}{1 + y^2}; \quad (3.59)$$

$$r = \frac{1}{A_*} (q_0 + q_t); \quad q_t = \frac{g}{\xi_1^2 \omega^2}$$

ở đây: $\phi_{1,2}$ - hàm vận tốc;

độ lớn của r khác với khe hở thực và gọi là khe hở thu gọn;
 q_t - độ co tĩnh của lò xo dưới tác dụng của trọng lượng máy rung.

Từ biểu thức xác định $\phi_{1,2}$ ta thấy: với các giá trị cho trước của thông số ξ_1 và r , vận tốc máy rung có hai giá trị và phụ thuộc vào dấu trước căn. Trong thực tế, vận tốc va chạm chỉ có thể là thực và dương.

Hàm của vận tốc $\phi_{1,2}$ là thực nếu biểu thức dưới dấu căn trong (3.59) không âm. Từ đó, nhận được:

$$|r| \leq \left| \frac{\sqrt{1+y^2}}{1-\xi_1^2} \right|. \quad (3.60)$$

Dấu của $\phi_{1,2}$ phụ thuộc vào dấu của ry và việc chọn dấu trước dấu căn.

Nếu $ry > 0$ và dấu trước căn chọn dương thì $\phi_{1,2}$ bảo toàn giá trị dương với mọi giá trị của r và y . Trong trường hợp dấu trước căn chọn dấu âm, vận tốc va chạm bảo toàn giá trị dương nếu:

$$|r| > \frac{1}{|1-\xi_1^2|}. \quad (3.61)$$

Cuối cùng, nếu $ry < 0$ thì vận tốc va chạm chỉ dương trong điều kiện dấu trước căn dương, ta có:

$$|r| < \frac{1}{|1-\xi_1^2|}. \quad (3.62)$$

Các biểu thức (3.60) - (3.62) xác định giải tích sự tồn tại các giá trị thực và dương của hàm $\phi_{1,2}$ và thiết lập điều kiện va chạm có chu kỳ ổn định của máy rung với các vận tốc tỷ lệ với $\phi_{1,2}$.

Những điều kiện trên phụ thuộc vào r , ξ_1 và R ; nghĩa là vào khe hở, tỷ số giữa tần số dao động riêng và tần số quay của máy rung trên lò xo, hệ số khôi phục vận tốc va chạm, cũng như vào giá trị λ (tỷ số giữa chu kỳ va chạm và chu kỳ lực kích động của máy rung). Như thế, việc điều chỉnh búa rung gặp khó khăn đáng kể và việc tính toán búa rung luôn luôn tồn tại những tính chất chưa xác định. Nguyên nhân chủ yếu là do những giá trị

chính xác của hệ số khôi phục va chạm chưa biết và có thể thay đổi trong một giới hạn lớn.

Thông thường các động cơ điện có dòng biến đổi sử dụng để dẫn động rung với số vòng quay không đổi, nên tần số của lực kích động có giá trị cố định; cũng như thế, các lò xo của búa rung có các thông số không đổi đã cho khi thiết kế, chế tạo búa rung. Nó xác định tần số dao động riêng cố định của búa rung trên các lò xo. Do đó, đối với các búa rung sử dụng trong sản xuất, thi công, tỷ số ξ_1 là không đổi và có giá trị đã cho. Điều ngược lại, khe hở giữa đầu búa và mũ cọc lại dễ dàng thay đổi. Vấn đề là: chọn giá trị khe hở và do đó giá trị r (khe hở thu gọn) để với giá trị ξ_1 đã cho đảm bảo vận tốc va chạm lớn nhất.

Giá trị tối ưu của khe hở tương ứng với giá trị lớn nhất của vận tốc va chạm được xác định từ phương trình:

$$\frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial r} = 0.$$

Trên thực tế thì $R \neq 1$, giá trị hàm $y = y(\xi_1, R)$ hữu hạn, từ (3.59) suy ra giá trị tối ưu r bằng:

$$r = \frac{y}{1 - \xi_1^2}. \quad (3.63)$$

Thay (3.63) vào (3.59), ta nhận được giá trị lớn nhất của hàm vận tốc:

$$\phi_{1,2 \max} = \frac{2(y^2 + 1)}{(1 - \xi_1^2)^2 (1 + y^2)(1 - R)}. \quad (3.64)$$

Các công thức nhận được cho phép xác định giá trị tối ưu của khe hở với giá trị cho trước ξ_1 .

Trong bảng 3.1 dẫn ra những thông số cơ bản của búa rung phụ thuộc vào chu kỳ đã cho của va chạm.

Bảng 3.1

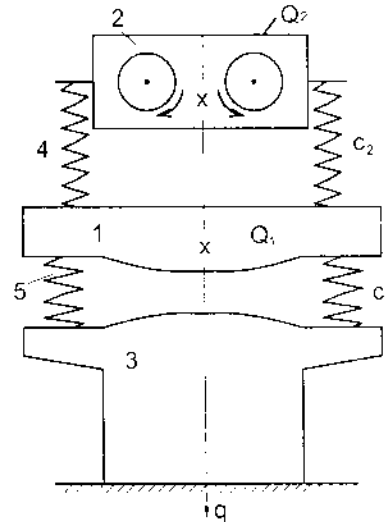
λ	ξ_1	r	ϕ
1	0,4 - 0,6	$> -1, < +1$	4
2	0,25 - 0,3	< -1	2,8
3	0,19 - 0,22	< -1	2,5
4	0,125 - 0,17	< -1	2,5

3.2.3. TÍNH TOÁN BÚA RUNG HAI BẬC TỰ DO

Trong phần trên ta khảo sát phương pháp tính toán búa rung một bậc tự do. Ở trường hợp này va chạm được thực hiện trực tiếp bởi máy rung. Cấu trúc như thế dẫn đến những bộ phận riêng rẽ của máy rung (động cơ, ổ đỡ...) sẽ chịu tác dụng của các tải trọng va chạm và có thể bị phá hỏng. Khác với sơ đồ đã khảo sát, một sơ đồ khác của búa rung là: va chạm được thực hiện không phải trực tiếp bằng máy rung mà bằng khối lượng đặc biệt đặt giữa máy rung và mũ cọc, liên kết với cọc bằng lò xo.

Sơ đồ búa rung có thể mô tả như hình vẽ (hình 3.9), trong đó:

- 1: phần va chạm khối lượng m_1 ;
- 2: máy rung khối lượng m_2 ;
- 3: kết cấu hạ chìm vào đất;
- 4 và 5: các lò xo đàn hồi lý tưởng.



Hình 3.9

Trong trường hợp này việc tính toán búa rung dẫn tới khảo sát dao động của hệ hai bậc tự do.

Ta ký hiệu:

q_1, q_2 - dịch chuyển thẳng đứng của trọng tâm các khối lượng m_1, m_2 từ vị trí cân bằng tĩnh;

c_1, c_2 - hệ số cứng đàn hồi của các lò xo;

Q_1, Q_2 - trọng lượng của phần va chạm và của máy rung;

$P \cos(\omega t + \varphi)$: lực kích động của máy rung.

Phương trình vi phân dao động của phần va chạm và của máy rung không tính đến phản lực giảm chấn được viết ở dạng:

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{g} \ddot{q}_1 + c_2(q_1 - q_2) + c_1 q_1 = -Q_1 \\ \frac{Q_2}{g} \ddot{q}_2 + c_2(q_2 - q_1) = P \cos(\omega t + \varphi) - Q_2. \end{cases} \quad (3.65)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.65) có thể tìm ở dạng [3]:

$$\begin{cases} q_1 = A \cos(\omega t + \varphi) - B_1 \mu_1 \cos(\xi_1 \omega t + \psi_1) - B_2 \mu_2 \cos(\xi_2 \omega t + \psi_2) - q_{1t} \\ q_2 = B \cos(\omega t + \varphi) + B_1 \cos(\xi_1 \omega t + \psi_1) + B_2 \cos(\xi_2 \omega t + \psi_2) - q_{2t} \end{cases} \quad (3.66)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta_2^2 A_*}{(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)}; \\ B &= \frac{\eta_2^2 + \frac{1}{g}(\eta_1^2 - 1)}{(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)} A_*, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\text{với: } A_* = \frac{Q_{o2} e}{Q_2}; \quad \eta_1 = \frac{k_1}{\omega}; \quad \eta_2 = \frac{k_2}{\omega};$$

k_1, k_2 - tần số giới hạn dao động riêng của hệ;

$$k_1^2 = \frac{c_1 g}{Q_1}; k_2^2 = \frac{c_2 g}{Q_2}; \vartheta = \frac{Q_2}{Q_1}; q_{1t} = \frac{Q_1 + Q_2}{c_1};$$

$$q_{2t} = \frac{Q_1 + Q_2}{c_1} + \frac{Q_2}{c_2}.$$

Các hệ số μ_1, μ_2 bằng:

$$\mu_1 = \left(\frac{\xi_1}{\eta_2} \right)^2 + 1; \mu_2 = \left(\frac{\xi_2}{\eta_2} \right)^2 + 1.$$

ξ_1, ξ_2 là nghiệm của phương trình:

$$\xi^4 - [\eta_1^2 + (1 + \vartheta)\eta_2^2]\xi^2 + \eta_1^2\eta_2^2 = 0.$$

Các điều kiện ban đầu của bài toán đối với khối lượng dưới m_1 là:

- khi $t = 0$: $q_1 = -q_0; \dot{q}_1 = RV$;

- khi $t = \frac{2\pi\lambda}{\omega}$: $q_1 = -q_0; \dot{q}_1 = -V$. (3.68)

Còn đối với khối lượng trên m_2 dịch chuyển và vận tốc thỏa mãn điều kiện liên tục:

$$q_2(t=0) = q_2\left(t = \frac{2\pi\lambda}{\omega}\right);$$

$$\dot{q}_2(t=0) = \dot{q}_2\left(t = \frac{2\pi\lambda}{\omega}\right).$$
(3.69)

Như vậy ta có sáu điều kiện: bốn điều kiện đối với khối lượng dưới m_1 và hai điều kiện đối với khối lượng trên m_2 . Thay các điều kiện này vào (3.66) ta dẫn ra được các kết quả liên quan đến xác định vận tốc va chạm V :

$$\psi_1 = -\lambda\pi\xi_1; \psi_2 = -\lambda\pi\xi_2; \tag{3.70}$$

$$\sin\varphi = \frac{V(1-R)}{2A\omega}; \tag{3.71}$$

$$B_1 = \frac{V(1+R)}{2\omega\xi_1(\mu_1 - \mu_2)\sin\lambda\pi\xi_1};$$

$$B_2 = \frac{V(1+R)}{2\omega\xi_2(\mu_1 - \mu_2)\sin\lambda\pi\xi_2}. \tag{3.72}$$

$$-q_o + q_{1t} = A \sqrt{1 - \frac{V^2(1-R)^3}{4A\omega^2}} + \frac{V(1+R)}{2\omega(\mu_1 - \mu_2)} \left[\frac{\mu_1 \cot g\lambda\pi\xi_1}{\xi_1} - \frac{\mu_2 \cot g\lambda\pi\xi_2}{\xi_2} \right]. \quad (3.73)$$

Nếu ký hiệu:

$$f = \frac{1+R}{1-R} \times \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_1 \cot g\lambda\pi\xi_1}{\xi_1} - \frac{\mu_2 \cot g\lambda\pi\xi_2}{\xi_2} \right]. \quad (3.74)$$

Ta nhận được:

$$V = \frac{2\omega}{1-R} \times \frac{-(q_o - q_{1t})f + \sqrt{A^2(1+f^2) - (q_o - q_{1t})^2}}{1+f^2}. \quad (3.75)$$

Bây giờ ta tìm giá trị tối ưu của thông số $(q_o - q_{1t})$ để vận tốc va chạm có giá trị cực đại (tương ứng với các giá trị cho trước của ξ_1, ξ_2), từ phương trình:

$$\frac{\partial V}{\partial (q_o - q_{1t})} = 0.$$

Ta có: $(q_o - q_{1t})_{\text{tối ưu}} = r_* = -|A|f$.

Do đó, nhận được:

$$V = \frac{2\omega|A|}{1-R} = \frac{2\omega Q_{o2}e}{Q_2(1-R)} \times \frac{\eta_2^2}{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)}. \quad (3.76)$$

$$q_1 = |A| \left\{ -\sin \omega t + \frac{1+R}{1-R} \times \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left[\frac{\xi_1^2 - \eta_2^2}{\xi_1 \sin \lambda\pi\xi_1} \cos \xi_1(\omega t - \lambda\pi) - \frac{\xi_2^2 - \eta_2^2}{\xi_2 \sin \lambda\pi\xi_2} \cos \xi_2(\omega t - \lambda\pi) \right] \right\} - q_{1t}. \quad (3.77)$$

$$q_2 = |A| \left\{ -\frac{b \sin \omega t}{A} + \frac{1+R}{1-R} \times \frac{\eta_2^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left[-\frac{\cos \xi_1(\omega t - \lambda\pi)}{\xi_1 \sin \lambda\pi\xi_1} + \frac{\cos \xi_2(\omega t - \lambda\pi)}{\xi_2 \sin \lambda\pi\xi_2} \right] \right\} - q_{2t} \quad (3.78)$$

§3.3. ĐỘ SÂU HẠ CHÌM VÀ VẬN TỐC HẠ CHÌM CỦA KẾT CẤU

3.3.1. ĐỘ SÂU HẠ CHÌM

Trước hết ta xét trường hợp kéo kết cấu từ đất lên bằng máy rung với giả thiết rằng: không có lực dính của đất và kết cấu được kéo lên với vận tốc nhỏ, lực cản nhớt rung có thể bỏ qua.

Ký hiệu η là tỷ số gia tốc dao động với gia tốc trọng lực.

Phương trình vi phân mô tả sự phụ thuộc giữa lực ma sát (R_{ms}) và trị số η có dạng [3, 4]:

$$\frac{dR_{ms}}{d\eta} = -\gamma_{ms}(R_{ms} - R_*), \quad (3.79)$$

ở đây: $\gamma = \gamma_{ms}$ - hệ số ảnh hưởng do rung lên ma sát của đất.

Khi $\eta = 0$ thì $R_{ms} = F_{ms}$; F_{ms} là trị số lực cản bên của đất khi không có rung động. Nếu tăng gia tốc dao động thì trị số của lực ma sát sẽ tiến tới giá trị giới hạn R_* phụ thuộc vào diện tích mặt bên của kết cấu và tính chất của đất.

Từ phương trình (3.79), ta nhận được:

$$R_{ms} = R_* + (F_{ms} - R_*)e^{-\eta\gamma}. \quad (3.80)$$

Khi chuyển tới các giá trị riêng của lực cản bên của đất, ta có:

$$\alpha = \alpha_* + (\alpha_{ms} - \alpha_*)e^{-\eta\gamma}. \quad (3.81)$$

Giá trị số của các hệ số α_{ms} , α_* và γ nhận được từ thực nghiệm của Н.А. Преображенский dẫn theo bảng 3.2.

Gọi ứng lực kéo kết cấu chìm trong đất lên là S . Từ điều kiện cân bằng của kết cấu chìm trong đất, suy ra:

$$S = S_1 h [\alpha_* + (\alpha_{ms} - \alpha_*)e^{-\eta\gamma}] + Q, \quad (3.82)$$

- ở đây: Q - trọng lượng của kết cấu và máy rung;
 h - độ sâu hạ chìm của kết cấu vào đất;
 S_1 - chu vi của phần hạ chìm của kết cấu;
 α_{ms}, α_* và γ - các hệ số xác định tính chất của đất;
 η - tỷ số gia tốc dao động với gia tốc trọng trường.

Bảng 3.2. Giá trị các hệ số α_{ms}, α_* và γ đối với cọc gỗ và cừ thép

Tên kết cấu	Chu vi S_1 (m)	Diện tích f (m^2)	F_{ms} (tấn)	α_{ms} (t/m^2)	R (t)	α_* (t/m^2)	γ
Cọc gỗ $h = 4m$							
Đường kính 25cm	0,8	3,2	5	1,6	0,8	0,25	0,5
Đường kính 20cm	0,62	2,4	4,5	1,9	1,0	0,42	0,4
Đường kính 15cm	0,47	1,9	3,2	1,7	0,8	0,42	1,0
Cừ thép $h = 3m$							
Phẳng	1,0	3,0	3,2	1,1	1,2	0,4	0,75
Làn sóng	1,2	3,6	4,5	1,25	0,8	0,22	0,80

Biểu thức (3.82) cho quan hệ ứng lực S cần thiết kéo kết cấu chìm trong đất phụ thuộc vào tính chất của đất, đường kính và độ sâu hạ chìm của kết cấu vào đất.

Ta minh họa ví dụ số áp dụng hệ thức (3.82). Giả sử yêu cầu kéo cừ phẳng bằng thép đóng ở độ sâu 10m trong đất cát, có $\alpha_{ms} = 7 t/m^2$; $\alpha_* = 0,2 t/m^2$; $\gamma = 0,6$; chu vi cừ $S_1 = 1m$; trọng lượng của cừ và máy rung $Q = 2,5 t$. Giả thiết máy rung gây ra gia tốc bằng $10g$. Theo (3.82), ta có:

$$S = 1,10[0,2 + (7 + 0,2)e^{-0,6 \cdot 10}] + 2,5 = 4,67 t.$$

Trong trường hợp khảo sát ứng lực kéo vượt trọng lượng tổng cộng của máy rung và cừ là 2,17 t. Khi không có rung động ($\eta = 0$), ứng lực cần thiết để kéo phải cần tới 74,5 t.

Bây giờ ta xét ảnh hưởng các thông số khác nhau đến độ sâu hạ chìm lớn nhất. Khi chú ý S là ứng lực kéo, từ (3.82) ta có thể viết:

$$h_{\max} = \frac{S + Q}{S_1 [\alpha_* + (\alpha_{ms} - \alpha_*) e^{-\beta h}]}. \quad (3.83)$$

Các tính toán và lý giải trong [3] đã chứng tỏ rằng: việc thay đổi trọng lượng máy rung đưa đến sự thay đổi biên độ và do đó cả gia tốc dao động. Nếu tần số máy rung lớn so với tần số dao động riêng thẳng đứng của kết cấu thì biên độ dao động cưỡng bức thay đổi tỷ lệ nghịch với trọng lượng của máy rung và kết cấu. Với số vòng quay máy rung không đổi, gia tốc dao động sẽ thay đổi phụ thuộc vào trọng lượng máy rung. Vì vậy, độ sâu h_{\max} trong trường hợp này có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$h_{\max} = \frac{S + Q}{S_1 \left[\alpha_* + (\alpha_{ms} - \alpha_*) e^{-\beta Q} \right]}, \quad (3.84)$$

ở đây đặt: $\beta = \gamma \frac{Q_0 e}{g} \omega^2$;

$Q_0 e$ - mômen lệch tâm của máy rung, ω là tần số của nó.

Dễ thấy rằng, tồn tại giá trị tối ưu của trọng lượng máy rung và kết cấu để độ sâu hạ chìm đạt giá trị lớn nhất. Đối với trường hợp khi hệ số biên độ K_s {xem (3.7)} gần bằng đơn vị, giá trị tối ưu của trọng lượng trên được xác định từ phương trình:

$$\frac{\alpha_*}{\alpha_{ms} - \alpha_*} e^{-\beta Q} = \frac{\beta(S + Q)}{Q^2} - 1. \quad (3.85)$$

3.3.2. VẬN TỐC HẠ CHÌM

Kết cấu rung là nguồn sóng đàn hồi trong đất, tạo ra trường gia tốc biến đổi. Theo các kết quả thực nghiệm có thể giả thiết rằng: dưới tác dụng rung động, đất biến thành môi trường có tính chất nhớt. Hệ số nhớt rung sẽ khác nhau đối với các điểm khác nhau

trong đất. Nếu trường gia tốc của đất xác định bởi hàm $W(x, y, z)$ thì hệ số nhớt rung cũng sẽ được xác định bởi hàm $\vartheta - \vartheta[W(x, y, z)]$. Bài toán hạ chìm kết cấu bằng phương pháp rung, khi lực tác dụng lên nó chỉ là lực cản nhớt của đất, dẫn đến vấn đề về hạ chìm kết cấu bằng phương pháp rung vào môi trường có hệ số nhớt rung biến đổi. Nghiệm của bài toán này, ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất cũng gặp khó khăn lớn về toán học. Tuy nhiên, khi đưa ra các giả thiết đơn giản hóa các tính chất của môi trường và của kết cấu, ta có thể đánh giá ảnh hưởng của các yếu tố khác nhau tới trị số vận tốc hạ chìm (có xét đến lực cản nhớt của đất).

Giả sử: lực cản nhớt của đất tác dụng lên mặt bên của kết cấu hạ chìm không phụ thuộc vào dạng bề mặt của nó (mặt trụ, mặt phẳng hay bất kỳ dạng nào khác), mà chỉ phụ thuộc vào độ lớn bề mặt sinh ra trên một đơn vị chiều dài của phần kết cấu chìm vào đất; kết cấu được hạ chìm vào đất là tấm mỏng vô hạn; đất được khảo sát như môi trường nhớt không nén được. Bỏ qua sự thay đổi áp lực của đất gây ra khi hạ tấm và coi thành phần vận tốc chuyển động của đất theo hướng thẳng góc với hướng hạ chìm của tấm là nhỏ so với thành phần vận tốc chuyển động của đất ở hướng song song với hướng chuyển động của tấm.

Gọi τ là ứng suất ở điểm nào đó của đất gây ra bởi lực nhớt, ρ là mật độ khối lượng đất (coi không đổi), ϑ là chiều của vận tốc tuyệt đối của phần tử khảo sát lên trục song song với hướng hạ chìm. Phương trình chuyển động của phần tử đất khảo sát sẽ là:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (3.86)$$

Đất chịu tác dụng rung động được coi như thỏa mãn giả thiết Newton đối với môi trường nhớt, nên:

$$\tau = \vartheta \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.87)$$

Các phương trình trên cần phải thỏa mãn phương trình liên tục:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.88)$$

Phương trình (3.86) bây giờ có thể viết ở dạng:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.89)$$

Điều kiện đầu và điều kiện biên có thể lấy:

$$\begin{aligned} & - \text{khi } t = 0: \quad V = 0; \\ & - \text{khi } x = 0: \quad V = V_{\text{bi}}; \\ & - \text{khi } x = \infty: \quad V = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

ở đây: V_{bi} - vận tốc hạ chìm tâm vào đất.

Bằng thực nghiệm, các tác giả nghiên cứu chỉ ra rằng: nếu tần số dao động không đổi, hệ số nhớt rung ϑ phụ thuộc vào gia tốc dao động hay vào biên độ dao động. Do đó để xác định hệ số ϑ cần biết sự phân bố biên độ dao động gần kết cấu hạ chìm. Những nghiên cứu lý thuyết về lan truyền sóng trong đất gây ra bởi kết cấu hạ chìm bằng phương pháp rung chưa có và về vấn đề này ngay cả những nghiên cứu thực nghiệm vẫn còn thiếu. Trong một số thực nghiệm, các tác giả cũng đã tiến hành đo biên độ dao động thẳng đứng của đất gần cọc rung trên các khoảng cách khác nhau (kể từ cọc). Một trong các kết quả đo như vậy, dẫn ra trên hình vẽ (hình 3.10).

Các vòng tròn nhỏ trên hình vẽ chỉ các tài liệu thực nghiệm, các đường cong được đưa ra theo quan hệ kinh nghiệm:

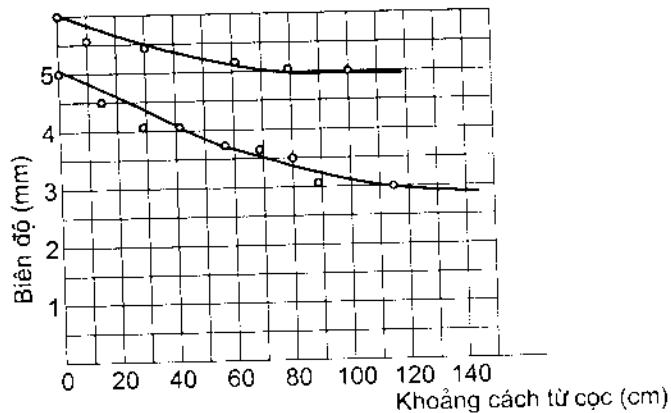
$$A = A_0 e^{-\eta x}, \quad (3.91)$$

trong đó: A_0 - biên độ dao động của cọc.

Vì gia tốc dao động bằng:

$$W = A_0 \omega^2 e^{-\eta x},$$

nên: $\eta = \eta_0 e^{-\eta x}$, η_0 - tỷ số gia tốc dao động của kết cấu hạ chìm với gia tốc trọng lực; η_0 có thể gọi là ngưỡng (giới hạn) của trạng thái rung nhớt của đất.



Hình 3.10

Mặt khác, theo [3], ta có quan hệ sau trên cơ sở thực nghiệm:

$$\frac{1}{\vartheta} = a(\eta - \eta_0). \quad (3.92)$$

Thay η vào (3.92), ta nhận được sự phụ thuộc của hệ số nhớt rung vào khoảng cách:

$$\vartheta = \frac{1}{a\eta_0 e^{-\alpha x} - b}$$

Giả thiết b nhỏ, ta có hệ thức gần đúng:

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{\alpha x} \quad (3.93)$$

ở đây: ϑ_0 - hệ số nhớt rung tương ứng với gia tốc dao động của kết cấu hạ chìm.

Từ (3.93), ta có:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \vartheta_0 \alpha e^{\alpha x}.$$

Thay ϑ và $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ vào phương trình (3.89), ta nhận được phương trình chuyển động nhớt của đất:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\rho}{\vartheta_0} e^{-\alpha x} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3.94)$$

Trong trường hợp khi αx có giá trị đủ nhỏ, phương trình chuyển động nhớt của đất có dạng:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial V}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (3.95)$$

ở đây đặt: $\beta^2 = \frac{\rho}{\vartheta_0}$.

Như vậy, phương trình chuyển động nhớt của đất dẫn tới phương trình truyền nhiệt với hệ số không đổi.

Nghiệm của phương trình (3.95) tìm ở dạng:

$$V = V_* e^{\frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2 t}{4\beta^2}}. \quad (3.96)$$

Thay (3.96) vào (3.95) ta thấy: biểu thức (3.96) chỉ thỏa mãn khi V_* thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 V_*}{\partial x^2} = \beta^2 \frac{\partial V_*}{\partial t}. \quad (3.97)$$

Điều kiện đầu và điều kiện biên khi này viết được:

- khi $t = 0$: $V_* = 0$;

- khi $x = 0$: $V_* = V_{hc} e^{\frac{\alpha^2 t}{4\beta^2}}$. (3.98)

Phương trình (3.97) với điều kiện (3.98) tương ứng với bài toán truyền nhiệt trong thanh bị giới hạn ở một phía. Nghiệm của bài toán này đã biết. Trong trường hợp khảo sát, ta có:

$$V_* = \frac{x\beta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\gamma) \frac{e^{-\frac{\beta^2 x^2}{4(t-\gamma)}}}{(t-\gamma)^{3/2}} d\gamma. \quad (3.99)$$

Từ đó:

$$V = \frac{x\beta e^{-\frac{\alpha}{2}x - \frac{\beta^2 t^2}{2\pi}}}{2\sqrt{\pi}} - \int_0^t \varphi(\gamma) \frac{e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2(t-\gamma)}}}{(t-\gamma)^{3/2}} d\gamma. \quad (3.100)$$

Sau khi sử dụng phương trình (3.86), trong [3] đã đưa ra biểu thức tính ứng suất tiếp τ_o trên mặt của phần kết cấu hạ chìm, gây ra do lực tác dụng tương hỗ của đất nhớt với kết cấu:

$$\tau_o = - \left(\sqrt{\frac{\rho}{\pi \vartheta_o t}} + \frac{\alpha}{2} \right) \vartheta_o V_{hc}. \quad (3.101)$$

Giả thiết V_{hc} không đổi, ta có:

$$\tau_o = - \left(\sqrt{\frac{\rho V_{hc}}{\pi \vartheta_o h}} + \frac{\alpha}{2} \right) \vartheta_o V_{hc}. \quad (3.102)$$

ở đây: h - độ sâu hạ chìm kết cấu vào đất.

Trường hợp hệ số nhớt $\alpha = 0$ thì $\tau_o = \sqrt{\frac{\rho \vartheta_o}{\pi h}} V_{hc}^{1/2}$.

Nếu kết cấu được hạ chìm vào đất ở độ sâu h , thì lực cản toàn phần của đất bằng:

$$F_c = S_1 h \left(2 \sqrt{\frac{\rho \vartheta_o}{\pi h}} V_{hc} + \frac{\alpha \vartheta_o}{2} \right) V_{hc}. \quad (3.103)$$

Coi $\alpha \vartheta_o$ nhỏ so với số hạng đầu của (3.103), ta có:

$$F_c = 2S_1 h \sqrt{\frac{\rho \vartheta_o V_{hc}^3}{\pi h}}. \quad (3.104)$$

Trong trường hợp tổng quát, lực cản bên bao gồm lực ma sát khô F_{ms} và lực cản nhớt F_c . Điều kiện hạ chìm của kết cấu có thể viết ở dạng:

$$S + Q \geq F_{ms} + F_c,$$

hay:
$$q \geq h \left[r + 2 \sqrt{\frac{\rho \vartheta_o V_{hc}^3}{\pi g h}} \right], \quad (3.105)$$

ở đây:
$$q = \frac{S + Q}{S_1}; \quad r = \alpha_* + (\alpha_{ms} - \alpha_*) e^{-\gamma_1}.$$

Giải phương trình (3.105) đối với V_{hc} , ta nhận được:

$$V_{hc} = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{h} - r \right)^2 h \frac{\pi g}{4 \rho \vartheta_o}}. \quad (3.106)$$

Biểu thức (3.106) cho phép đánh giá ảnh hưởng các thông số khác nhau tới vận tốc hạ chìm (V_{hc}), đồng thời cũng cho phép xác định hệ số nhót rung của đất theo vận tốc, tải trọng, đường kính và độ sâu hạ chìm của kết cấu đã cho. Rõ ràng, khi cần tăng độ sâu thì vận tốc hạ chìm cần phải giảm dần. Thực tế, cọc thường có tiết diện ngang tương đối lớn nên việc hạ chìm cọc vào đất bằng phương pháp rung, thì điều cơ bản phải khắc phục lực cản của đất lên mặt bên cọc. Trong trường hợp này, vận tốc và độ sâu hạ chìm cọc vào đất chịu ảnh hưởng cơ bản là biên độ dao động. Như vậy, các máy rung sử dụng để hạ chìm cọc cần có tần số nhỏ và mômen lệch tâm lớn, đảm bảo dao động với biên độ đủ lớn (các máy rung dùng hạ chìm cọc phải tương đối nặng). Khi cần phải khắc phục lực cản bên lớn, tốt nhất là sử dụng búa rung hoặc mô hình kết hợp rung và va chạm (cơ cấu rung đặc biệt).

Các tài liệu thực tế cho thấy [3]:

Hạ chìm các cọc gỗ nhẹ vào độ sâu 6 - 8m trong nền đất yếu, áp dụng búa rung có mômen lệch tâm 400 - 500 kGcm, số vòng quay 1000 vòng/phút, công suất động cơ 10 - 12 kW; còn để liên kết máy rung với cọc người ta dùng mũ nêm.

Hạ chìm cọc bê tông cốt thép, áp dụng máy rung tần số thấp: Nếu tiết diện ngang của cọc lớn đáng kể, sẽ xuất hiện lực cản mặt bên lớn. Để khắc phục lực cản này cần rung cọc với biên độ dao động lớn. Thường có thể sơ bộ tính chọn:

$$A = \frac{Q_e e}{Q},$$

trong đó: Q_e - mômen lệch tâm của máy rung;

Q - trọng lượng của cọc và máy rung.

Theo biên độ, trọng lượng của cọc và máy rung đã cho, dễ dàng xác định độ lớn cần thiết của mômen lệch tâm. Các cọc bê tông cốt thép, trọng lượng của nó và máy rung thường vào khoảng 7 - 10 t và cũng có thể lớn hơn. Để đảm bảo rung có hiệu quả, biên độ dao động máy rung cần vào khoảng 10 - 15mm, mômen lệch tâm của máy rung phải không nhỏ hơn 10000 - 15000 kGcm.

Chương 4

VA CHẠM DỌC CỦA THANH ĐÀN HỒI VÀ ÁP DỤNG CỦA NÓ VÀO BÀI TOÁN THI CÔNG ĐÓNG CỌC

1. Hiện tượng va chạm trong các hệ cơ học là hiện tượng đặc biệt và rất đa dạng, nhưng có thể nói chung là:
 - a) *Về mặt động học*: thời gian va chạm rất ngắn, trong thời gian va chạm xảy ra sự thay đổi vận tốc đáng kể của các chất điểm thuộc cơ hệ.
 - b) *Về mặt động lực học*: xuất hiện và mất đi các lực va chạm rất lớn.

Trong một vài trường hợp các lực va chạm có thể coi là những lực ngoài đã cho, không phụ thuộc vào tính chất và chuyển động của hệ cơ học (chẳng hạn như sóng nổ lên công trình); còn nói chung, chúng tồn tại là những lực kích động mà tác dụng của chúng có thể giải quyết với mô hình của những dao động cưỡng bức. Điều này đã được làm sáng tỏ một phần trong chương 1, chương 2 và chương 3.

2. Sự phát triển của lý thuyết va chạm có thể chia thành ba giai đoạn chính:

Giai đoạn đầu là lý thuyết va chạm cổ điển. Nó gắn liền với tên tuổi của Galilê, Huyghen, Niuton, Marpy, Ricat. Nội dung của lý

thuyết va chạm trong giai đoạn này chỉ là một phần của cơ học vật rắn. Kết quả là dựa vào các định lý của cơ học cổ điển đưa ra phương trình cơ bản của va chạm:

$$\Delta(m\vec{V}) = \int_0^t \vec{F} dt. \quad (1)$$

Sau đó để phù hợp với thực tế hơn đã đưa vào hệ số khôi phục dựa trên cơ sở thực nghiệm:

$$K = \frac{S_2}{S_1}. \quad (2)$$

Tồn tại của lý thuyết va chạm cổ điển được nghiên cứu và giải quyết với sự ra đời của lý thuyết biến dạng vị trí. Người đặt nền móng cho lý thuyết này là Hec. Ông đã đưa ra hệ phương trình cơ bản của bài toán tiếp xúc. Tuy nhiên, lý thuyết của Hec cũng chỉ áp dụng khi các vật va chạm có tốc độ nhỏ và ở vùng tiếp xúc các ứng suất không vượt quá giới hạn đàn hồi. Vào nửa đầu thế kỷ XX, Staerman đã xét bài toán tổng quát hơn, nghiệm của Hec đưa ra chỉ là trường hợp riêng.

Vào những năm cuối của nửa đầu thế kỷ XIX, các nhà nghiên cứu đã nhận thấy rằng: việc coi vật thể va chạm như vật rắn tuyệt đối là hoàn toàn không hợp lý trong thực tế. Năm 1823, Naviê đã xét bài toán về va chạm dọc của thanh đàn hồi và viết nghiệm của nó dưới dạng cấp số vô hạn. Nghiệm ở dạng đó không thuận tiện khi áp dụng thực tế do tính hội tụ chậm của cấp số. Sự phát triển tiếp theo phải kể đến tên tuổi của Сен-венан và Бусемнек. Nghiệm của phương trình sóng đã được viết dưới dạng nghiệm Dalāmbec, nó cho phép ứng dụng thuận tiện khi áp dụng vào thực tế. Dựa vào kết quả nghiên cứu trên, nhiều tác giả đã đưa ra các công thức khác nhau áp dụng vào các bài toán cọc, khi thi công nền móng các công trình. Đáng kể phải nói đến các công trình của Ghexêvanôp, Tricunôp, Vaxxilepski, Smith, Holandais... và các kết quả nghiên cứu của trường đại học Case USA do Goble chủ trì vào nửa cuối thế kỷ XX.

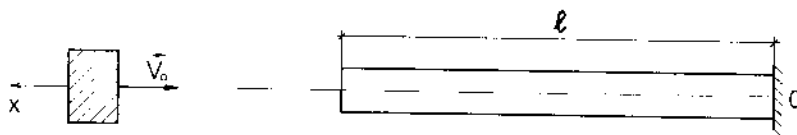
Hiện nay ở nước ta đã xuất hiện nhiều công trình nghiên cứu ứng dụng lý thuyết này. Tập trung và có kết quả trong việc hoàn thiện lớp các bài toán về lý thuyết sóng va chạm dọc cũng như bước đầu có nghiên cứu ứng dụng trong thi công móng cọc là đề tài nghiên cứu cấp nhà nước, được tiến hành nhiều năm do GS. TS Nguyễn Thúc An chủ trì cùng với các cộng tác khoa học [25, 28, 29, 31, 39, 41].

§4.1. VA CHẠM DỌC CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI

4.1.1. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI MỘT ĐẦU GẮN CHẶT

4.1.1.a. Đặt bài toán

Xét va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi dài l , có một đầu gắn chặt còn va chạm xảy ra theo nút tự do còn lại của thanh (hình 4.1).



Hình 4.1

Chọn trục Ox như hình vẽ. Giả sử \vec{V}_0 là vận tốc ban đầu của vật thể va chạm. Phương trình vi phân va chạm dọc của thanh theo (2.4) chương 2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{4.1}$$

ở đây: $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Điều kiện ban đầu của bài toán ($t = 0$):

$$u|_{t=0} = u(x,0) = 0 \quad 0 < x < l \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < l \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -V_0 \quad x = l \quad (4.4)$$

Điều kiện biên của bài toán ($x = 0, x = l$):

$$u(0, t) = 0, x = 0. \quad (4.5)$$

Còn tại đầu thanh tự do ($x = l$) lực dọc đầu thanh bằng lực quán tính của vật va chạm. Ta có:

$$EF \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = -\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{x=l}.$$

Nếu ký hiệu tỷ số trọng lượng của vật va chạm Q với trọng lượng thanh $Q_1 = \gamma Fl$ qua m ($Q = mQ_1$), ta viết được hệ thức trên ở dạng:

$$ml \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial u(t, l)}{\partial x}, x = l \quad (4.6)$$

Giải bài toán được thiết lập chính là tìm nghiệm của phương trình (4.1) thỏa mãn các điều kiện ban đầu (4.2) – (4.4) và điều kiện biên (4.5) – (4.6).

4.1.1.b. Giải bài toán

Sử dụng phương pháp tìm nghiệm Đalămbe, nghiệm tổng quát của phương trình (4.1) có dạng (2.69) chương 2:

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x). \quad (4.7)$$

Từ điều kiện biên ở đầu ngàm (4.5), ta có:

$$\varphi(at) = -\varphi(at) \text{ đối với bất kỳ } at,$$

nên: $\psi(at + x) = -\varphi(at - x)$.

Nghiệm (4.7) có thể viết ở dạng:

$$u = \varphi(at - x) - \varphi(at + x). \quad (4.8)$$

Từ (4.8) đối với thời điểm ban đầu ($t = 0$), ta có:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(-x) - \varphi(+x) = 0, & 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} &= -\varphi'(-x) - \varphi'(x) = 0, & 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= a\varphi'(-x) - a\varphi'(x) = 0, & 0 < x < l \end{aligned} \quad (4.9)$$

Khi sử dụng điều kiện ban đầu, hai hệ thức cuối của (4.9) cho ta kết quả:

$$\begin{aligned} \varphi'(-x) - \varphi'(x) &= 0 \\ \varphi'(-x) - \varphi'(x) &= 0 \end{aligned} \quad 0 < x < l \quad (4.10)$$

Khảo sát φ như hàm của Z (Z có thể đặt bằng $-x$ hay $+x$), từ (4.10) ta kết luận được:

$$\varphi'(Z) = 0, \quad -l < Z < l \quad (4.11)$$

Vậy, $\varphi(Z) = const$. Điều kiện (4.9) vẫn còn thỏa mãn khi ta chọn hằng số bằng không. Do đó:

$$\varphi(Z) = 0, \quad -l < Z < l \quad (4.12)$$

Trở lại điều kiện biên (4.6) có thể xác định được $\varphi(Z)$ nằm ngoài khoảng $-l < Z < l$.

Thay (4.8) vào (4.6) và đặt $at + l = Z$, ta nhận được:

$$\varphi''(Z) + \frac{1}{ml} \varphi'(Z) = \varphi''(Z - 2l) - \frac{1}{ml} \varphi'(Z - 2l). \quad (4.13)$$

Áp dụng (4.13) có thể xây dựng liên tiếp các hàm $\varphi(Z)$. Thật vậy, trong khoảng $l < Z < 3l$ vế phải của (4.13) bằng không. Tích phân phương trình này, ta biết $\varphi(Z)$ trong khoảng $l < Z < 3l$ và lại biết được phần phải của phương trình (4.13) trong khoảng $3l < Z < 5l$.

Tiếp tục tích phân phương trình vừa nhận được, ta có $\varphi(Z)$ trong khoảng $3l < Z < 5l$. Cứ làm như vậy, ta xác định được $\varphi(Z)$ đối với các giá trị của Z lớn hơn $-l$.

Bây giờ xét (4.13) như phương trình đối với $\varphi'(Z)$. Nghiệm tổng quát của nó bằng:

$$\varphi'(Z) = C_1 e^{-\frac{Z}{ml}} + e^{-\frac{Z}{ml}} \int e^{\frac{Z}{ml}} \left[\varphi''(Z-2l) - \frac{1}{ml} \varphi'(Z-2l) \right] dZ, \quad (4.14)$$

với: C_1 - hằng số tích phân.

Trong khoảng $l < Z < 3l$ vế phải của (4.13) bằng không, nên:

$$\varphi'(Z) = C_1 e^{-\frac{Z}{ml}}.$$

Từ điều kiện ban đầu (4.4), ta viết được:

$$a[\varphi'(-l+0) - \varphi'(l+0)] = -V_0.$$

Nếu chú ý đến (4.11), số hạng thứ nhất trong dấu ngoặc vuông bằng không, ta có:

$$\varphi'(Z) = C_1 e^{-\frac{Z}{ml}} = \frac{V_0}{a} \rightarrow C_1 = e^m \frac{V_0}{a}. \quad (4.15)$$

Đối với $l < Z < 3l$ thì:

$$\varphi'(Z) = \frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-l}{ml}}, \quad l < Z < 3l \quad (4.16)$$

Khi $3l < Z < 5l$, từ (4.14), ta có:

$$\varphi'(Z-2l) = \frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-3l}{ml}}.$$

Thay vào (4.13), ta nhận được:

$$\varphi''(Z-2l) - \frac{1}{ml} \varphi'(Z-2l) = -\frac{2}{ml} \frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-3l}{ml}}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này viết dưới dạng:

$$\varphi'(Z) = C_2 e^{-\frac{Z}{ml}} - \frac{2}{ml} \frac{V_0}{a} (Z - 3l) e^{-\frac{Z-3l}{ml}} \quad (4.17)$$

Hằng số C_2 được xác định từ điều kiện liên tục của vận tốc ở đầu thanh tự do ($x = l$) trong thời gian va chạm (tại thời điểm $t = \frac{2l}{a}$).

Điều kiện này có dạng:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l, t=\frac{2l}{a}-0} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l, t=\frac{2l}{a}+0} \quad (4.18)$$

Sử dụng hệ thức (4.8) hoặc hệ thức cuối của (4.9), chú ý tới các hệ thức (4.11), (4.16) và (4.17), ta nhận được:

$$-\frac{V_0}{a} = \frac{V_0}{a} - C_2 e^{-\frac{3l}{ml}} \rightarrow C_2 = -\frac{V_0}{a} \left(e^{\frac{3l}{ml}} + e^{\frac{3l}{ml}} \right) \quad (4.19)$$

Do đó, đối với khoảng $3l < Z < 5l$, ta có:

$$\varphi'(Z) = \frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-l}{ml}} + \frac{V_0}{a} \left[1 - \frac{2}{ml} (Z - 3l) \right] e^{-\frac{Z-3l}{ml}}, \quad 3l < Z < 5l \quad (4.20)$$

Tương tự trong khoảng $5l < Z < 7l$:

$$\begin{aligned} \varphi'(Z) = & \frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-l}{ml}} + \frac{V_0}{a} \left[1 - \frac{2}{ml} (Z - 3l) \right] e^{-\frac{Z-3l}{ml}} + \\ & + \frac{V_0}{a} \left[1 - \frac{4}{ml} (Z - 5l) + \frac{2}{(ml)^2} (Z - 5l)^2 \right] e^{-\frac{Z-5l}{ml}} \quad (4.21) \end{aligned}$$

Hàm $\varphi(Z)$ có được khi tích phân các hàm $\varphi'(Z)$. Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện liên tục của dịch chuyển $u(x, t)$ tại đầu thanh ($x = l$). Kết quả là:

$$\varphi(Z) = 0, \quad -l < Z < l \quad (4.22)$$

$$\varphi(Z) = \frac{mlV_0}{a} \left(1 - e^{-\frac{Z-l}{ml}} \right), \quad l < Z < 3l \quad (4.23)$$

$$\varphi(Z) = -\frac{mV_0}{a} e^{-\frac{Z-i}{m}} + \frac{mV_0}{a} e^{-\frac{Z-3l}{m}} + \frac{2V_0}{a} (Z-3l)e^{-\frac{Z-i}{m}}, \quad 3l < Z < 5l \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi(Z) = & \frac{mV_0}{a} \left(1 - e^{-\frac{Z-i}{m}} \right) + \frac{mV_0}{a} \left[1 + \frac{2}{ml} (Z-3l) \right] e^{-\frac{Z-3l}{m}} \\ & - \frac{mV_0}{a} \left[1 + \frac{2}{m^2 l^2} (Z-5l)^2 \right] e^{-\frac{Z-5l}{m}}, \quad 5l < Z < 7l \quad (4.25) \end{aligned}$$

Khi biết $\varphi(Z)$ có thể xác định dịch chuyển và ứng suất ở bất kỳ tiết diện ngang của thanh.

Như vậy, với $0 < t < \frac{2l}{a}$ thì $\varphi(at-x) = 0$ và ta có $u = \varphi(at+x)$. Đó là dịch chuyển của sóng theo hướng âm của trục Ox. Biểu thức của nó có được trên cơ sở công thức (4.23) sau khi đặt $Z = at+x$. Với $t = \frac{l}{a}$ sóng đến đầu thanh bị gắn chặt và xuất hiện sóng phản xạ

theo hướng dương trục Ox. Do đó khi $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ tồn tại hai sóng: sóng $\varphi(at-x)$ dịch chuyển theo chiều dương trục Ox và sóng $\varphi(at+x)$ dịch chuyển theo chiều âm trục Ox. Cả hai sóng đều có thể tìm bằng cách thay $Z = at-x$ và $Z = at+x$ vào biểu thức (4.23). Tiếp tục con đường này ta có thể nhận được bức tranh đầy đủ của hiện tượng va chạm dọc của thanh đàn hồi.

Các hệ thức trên nhận được chỉ có ý nghĩa trong thời gian va chạm giữa vật rắn và thanh. Cần phải xét sự kết thúc va chạm tại thời điểm τ nào đó.

Ta có, áp lực giữa vật va chạm vào thanh biểu diễn qua độ dãn dài tương đối:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\varphi'(at-l) - \varphi'(at+l). \quad (4.26)$$

Khi $0 < t < \frac{2l}{a}$ vế phải của (4.26) được xác định bằng hệ thức (4.16)

và nhận giá trị dương, nên $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} < 0$. Vậy thời gian va chạm $\tau > \frac{2l}{a}$.

Khi $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$, số hạng đầu của vế phải (4.26) được xác định bởi (4.16), số hạng thứ hai được xác định bởi (4.20). Ta có:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{V_0}{a} e^{-\frac{at}{m}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{at - 2l}{ml} \right) \right].$$

Hệ thức quay về không khi biểu thức trong ngoặc vuông bằng không, hay:

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-\frac{2}{m}}. \quad (4.27)$$

Phương trình này chỉ có thể có nghiệm trong khoảng $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ chỉ trong trường hợp nếu:

$$2 + e^{-\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}$$

Theo tính toán của Сен-венан, bất đẳng thức chỉ xảy ra với $m < 1.73$. Vậy, nếu tỷ số trọng lượng va chạm và trọng lượng thanh $m < 1.73$ thì va chạm sẽ kết thúc ở thời điểm thỏa mãn $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$. Thời điểm này được tính theo phương trình (4.27).

Nếu $m > 1.73$ cần xét đến sự kết thúc va chạm trong các khoảng $\frac{4l}{a} < t < \frac{6l}{a}$, ... Сен-венан cũng tính được:

$$\begin{aligned} 2l < at < 4l & \quad \text{nếu } m < 1,7283; \\ 4l < at < 6l & \quad \text{nếu } 1,7283 < m < 4,1511; \\ 6l < at < 8l & \quad \text{nếu } 4,1511 < m < 7,35. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Rõ ràng, tỷ số m tăng thì thời gian va chạm tăng. Ứng suất nén lớn nhất khi va chạm đạt được ở nút gắn chặt.

Khi $m \geq 24$ (m lớn) có thể tính theo công thức gần đúng đủ độ chính xác:

$$\sigma_{\max} = E \frac{V_a}{a} (\sqrt{m} + 1). \quad (4.29)$$

Khi $5 < m < 24$:

$$\sigma_{\max} = E \frac{V_a}{a} (\sqrt{m} + 1,1) \quad (4.30)$$

Khi $m < 5$, Сен-венан đưa ra công thức:

$$\sigma_{\max} = 2E \frac{V_a}{a} \left(1 + e^{-\frac{2}{m}} \right). \quad (4.31)$$

4.1.2. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI TỰ DO

4.1.2.a. Đặt bài toán

Xét va chạm của vật rắn trọng lượng Q vào thanh đàn hồi dài l , diện tích mặt cắt ngang F , mật độ khối lượng ρ , môđun đàn hồi của vật liệu E . Gọi \bar{V}_a là vận tốc ban đầu của vật thể va chạm. Chọn trục Ox như hình vẽ (hình 4.2). Phương trình vi phân chuyển động của thanh viết theo (2.4) chương 2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.32)$$

ở đây:
$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$$



Hình 4.2

Điều kiện ban đầu của bài toán ($t = 0$)

$$u|_{t=0} = u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{u}(x,0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{u}(x,0) = -V_0, \quad x = l \quad (4.35)$$

Điều kiện biên của bài toán ($x = 0, x = l$):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad x = 0. \quad (4.36)$$

Tại đầu tự do còn lại, ứng suất σ_x của tiết diện đầu thanh bằng lực quán tính của tải trọng va chạm. Ta có:

$$\sigma_x = EF \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ký hiệu: $\frac{Q}{Q_1} = m$; $Q_1 = \gamma Fl$, ta viết hệ thức trên ở dạng:

$$m \frac{\partial^2 u(t,l)}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial u(t,l)}{\partial x}, \quad x = l \quad (4.37)$$

Giải bài toán trên là tìm nghiệm của phương trình (4.32) thỏa mãn các điều kiện ban đầu (4.33) – (4.35) và các điều kiện biên (4.36) – (4.37).

4.1.2.b. Giải bài toán

Nghiệm của phương trình (4.32) theo Dälambé có dạng (2.69) chương 2:

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x) \quad (4.38)$$

Đạo hàm (4.38) theo t và x ta được:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a[\varphi'(at - x) + \psi'(at + x)]; \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(at - x) + \psi'(at + x)]. \quad (4.40)$$

Từ điều kiện biên (4.36) và hệ thức (4.40) nhận được:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\varphi'(at) - \psi'(at) = 0. \quad (4.41)$$

Suy ra:

$$\varphi'(at) = \psi'(at);$$

$$\varphi'(at - x) = \psi'(at - x);$$

$$\varphi(at - x) = \psi(at - x).$$

$$\text{Do đó: } u = \varphi(at - x) + \psi(at - x). \quad (4.42)$$

Từ điều kiện ban đầu (4.34) và hệ thức (4.39), ta có:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = a[\varphi'(-x) + \psi'(x)] = a[\psi'(-x) + \psi'(x)] = 0.$$

Mặt khác theo điều kiện biên (4.36) thì:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\varphi'(-x) + \psi'(x) = -\psi'(-x) + \psi'(x) = 0.$$

$$\text{Suy ra: } \psi'(-x) = \psi'(x) = 0, \quad 0 < x < l$$

Nếu thay x bằng biến mới Z , ta có:

$$\psi'(Z) = 0, \quad -l < x < l \quad (4.43)$$

Từ đó $\psi(Z) = \text{const}$ và có thể chọn hằng số bằng không, ta có

$$\psi(Z) = 0, \quad -l < x < l \quad (4.44)$$

Sử dụng điều kiện biên (4.37) và đặt $Z = at + l$, ta nhận được:

$$\psi''(Z) + \frac{1}{ml} \psi'(Z) = -\psi''(Z - 2l) + \frac{1}{ml} \psi'(Z - 2l). \quad (4.45)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên đối với $\psi'(Z)$ có dạng:

$$\psi'(Z) = C_1 e^{-\frac{Z}{m}} + e^{\frac{Z}{mi}} \int e^{mi} \left[-\psi''(Z - 2l) + \frac{1}{ml} \psi'(Z - 2l) \right] dZ. \quad (4.46)$$

Vế phải của (4.46) bằng không trong khoảng $l < Z < 3l$, mặt khác từ điều kiện ban đầu (4.35), ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}(x,0) = a[\varphi'(-l+0) + \psi'(l+0)] = -V_0.$$

Số hạng đầu trong ngoặc vuông của hệ thức trên bằng không, từ đó hằng số C trong (4.46) được xác định từ hệ thức:

$$aCe^{-\frac{Z}{m}} = -V_0 \rightarrow C = -\frac{V_0}{a} e^{\frac{Z}{m}}.$$

Như vậy, ta nhận được:

$$\psi'(Z) = -\frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z}{m}}, \quad l < Z < 3l \quad (4.47)$$

Tích phân (4.47), ta có:

$$\psi(Z) = -\frac{mV_0}{a} e^{-\frac{Z}{m}} + C_1.$$

Hằng số C_1 được xác định từ điều kiện liên tục của hàm $u(t, l)$ tại $t = 0$

$$u(0, l) = \psi(l+0) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{mV_0}{a}.$$

Do đó:

$$\psi(Z) = -\frac{mV_0}{a} \left(1 - e^{-\frac{Z-l}{m}} \right), \quad l < Z < 3l \quad (4.48)$$

Suy ra:
$$u = v(at + x) = -\frac{mV_0}{a} \left(1 - e^{-\frac{Z-l}{m}} \right), \quad l < Z < 3l \quad (4.49)$$

Với các khoảng cách tiếp theo, bằng cách lý giải tương tự ta nhận được:

$$\psi'(Z) = C_2 e^{-\frac{Z}{m}} - \frac{2}{ml} \frac{V_0}{a} (Z - 3l) e^{-\frac{Z-3l}{m}}, \quad 3l < Z < 5l \quad (4.50)$$

Dựa vào tính liên tục của vận tốc tại $x = l$, ta xác định được hằng số C_2 :

$$C_2 = -\frac{V_0}{a} \left(e^{ml} + e^{-ml} \right).$$

Do đó:

$$\psi'(Z) = -\frac{V_0}{a} e^{-\frac{Z-l}{ml}} + \frac{V_0}{a} \left[1 - \frac{2}{ml} (Z-3l) e^{-\frac{Z-3l}{ml}} \right], \quad 3l < Z < 5l \quad (4.51)$$

Bây giờ ta xét thời gian kết thúc va chạm tại tiết diện $x = l$, biến dạng tương đối bằng:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\psi'(at-l) + \psi'(at+l).$$

Khi $at < 2l$ thì

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{V_0}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0,$$

nghĩa là vật thể va chạm và thanh còn tiếp xúc nhau.

Khi $at > 2l$ thì

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{V_0}{a} e^{-\frac{at-2l}{ml}} - \frac{V_0}{a} e^{-\frac{at}{ml}} + \frac{V_0}{a} \left[1 - \frac{2}{ml} (at-2l) \right] e^{-\frac{at-2l}{ml}}.$$

Thay $at = 2l + 0$ vào hệ thức trên, ta có:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{at=2l+0} = -\psi'(at-l) + \psi'(at+l) = \frac{V_0}{a} \left(2 - e^{-\frac{2}{ml}} \right) > 0.$$

Nghĩa là, ở thời điểm $t = \frac{2l}{a}$ thanh tách rời vật va chạm. Hiện tượng va chạm kết thúc tại $t = \frac{2l}{a}$.

4.1.3. VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI MỘT ĐẦU GẮN CHẶT CÓ KỂ ĐẾN LỰC CẢN NHỚT Ở MẶT BÊN [27]

4.1.3.a. Đặt bài toán

Xét va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi dài l , chịu lực cản ở mặt bên, có một đầu bị gắn chặt còn va chạm xảy ra ở mút tự do còn lại của thanh qua đệm đàn hồi.

Ta xem lực ma sát ở mặt bên của thanh là đàn nhớt và coi gần đúng như lực khô, khi đó có thể biểu diễn lực này tác dụng lên một đơn vị thể tích của thanh bằng:

$$\left(k_1 u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \frac{r}{F},$$

trong đó: k_1 và λ_1 - hệ số lực cản đàn hồi và lực cản nhớt ở mặt bên; r và f - chu vi và diện tích tiết diện ngang của thanh.

Phương trình chuyển động của thanh trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.52)$$

ở đây đặt: $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; $k = \frac{k_1 r}{F}$; $\lambda = \frac{\lambda_1 r}{F}$.

Điều kiện ban đầu của bài toán ($t = 0$):

$$u|_{t=0} = 0; \quad \dot{u}|_{t=0} = 0. \quad (4.53)$$

Điều kiện biên của bài toán ($x = 0, x = l$):

$$\begin{aligned} \sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = -f(t) \text{ tại } x = 0; \\ u = 0 \text{ tại } x = l \end{aligned} \quad (4.54)$$

Để tìm nghiệm của bài toán, ta phải giải phương trình (4.52) thỏa mãn các điều kiện ban đầu (4.53) và các điều kiện biên (4.54). Do thanh có đệm đàn hồi (giảm chấn) ở đầu tự do nên cần xác định hàm $f(t)$ (lực nén của đệm đàn hồi lên đầu thanh).

4.1.3.b. Tìm hàm dịch chuyển $u(x, t)$

Sử dụng phép biến đổi Laplace:

$$u_o(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-pt} dt, \quad (4.55)$$

Khi đó bài toán khảo sát dẫn đến bài toán sau:

$$\frac{d^2 u_o}{dx^2} - \frac{p^2 + \lambda p + k}{a^2} u_o = 0, \quad (4.56)$$

Điều kiện biên bây giờ viết ở dạng:

$$\begin{aligned} \frac{du_o}{dx} &= -\frac{1}{E} f_o(p), \text{ tại } x = 0; \\ u_o(p, x) &= 0, \text{ tại } x = l \end{aligned} \quad (4.57)$$

Nghiệm tổng quát của (4.56) tìm ở dạng:

$$u_o(p, x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha' x}, \quad (4.58)$$

$$\text{trong đó: } \alpha = \frac{1}{a} \sqrt{\left(p + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{\lambda^2}{4}\right)}.$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện biên (4.57) và bằng:

$$C_1 = -\frac{f_o(p) e^{2\alpha l}}{\alpha E (1 + e^{2\alpha l})}; \quad C_2 = -\frac{f_o(p)}{\alpha E (1 + e^{2\alpha l})}.$$

Thay C_1 và C_2 vào (4.58) ta nhận được:

$$u_o(p, x) = -\frac{f_o(p)}{\alpha E (1 + e^{2\alpha l})} \left[e^{\alpha(2-l)x} + e^{\alpha x} \right], \quad (4.58a)$$

hay:

$$u_o(p, x) = \frac{1}{E} f_o(p) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\alpha(x+2ni)}}{\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\alpha[2(n+1)l-x]}}{\alpha} \right].$$

Ký hiệu: $V_n(p, x) = \frac{e^{-a(x+2nl)}}{\alpha}$; $W_n(p, x) = \frac{e^{-a[2(n+1)l-x]}}{\alpha}$.

Ta biểu diễn $u_o(p, x)$ dưới dạng:

$$u_o(p, x) = \frac{1}{E} f_o(p) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n(p, x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n(p, x) \right]. \quad (4.58b)$$

Hàm dịch chuyển $u(x, t)$ được xác định khi biết các hàm gốc của $V_n(p, x)$ và $W_n(p, x)$.

Ta có:

$$V_n(p, x) = \frac{e^{-a(x+2nl)}}{\alpha} = aH_n \left(p + \frac{\lambda}{2}, x \right). \quad (4.59)$$

Theo bảng tra biến đổi tích phân [5] và trên cơ sở định lý dịch chuyển, ta có:

$$V_n(p, x) = aH_n \left(p + \frac{\lambda}{2}, x \right) \div e^{-\frac{\lambda t}{2}} ah_n(t, x);$$

$$V_n(p, x) = ae^{-\frac{\lambda t}{2}} I_o \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4k}}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x + 2nl}{a} \right)^2} \right] \eta \left(t - \frac{x + 2nl}{a} \right). \quad (4.59a)$$

Nếu $\lambda^2 - 4k < 0$ thì:

$$V_n(p, x) \div ae^{-\frac{\lambda_2 t}{2}} J_o \left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4k}}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x + 2nl}{a} \right)^2} \right] \eta \left(t - \frac{x + 2nl}{a} \right), \quad (4.60)$$

ở đây đặt: $\lambda_2 = \lambda^2 - 4k$

Một cách tương tự:

$$W_n(p, x) = \frac{e^{-a[2(n+1)l-x]}}{\alpha} \times$$

$$\times ae^{-\frac{\lambda_2 t}{2}} I_o \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{2(n+1)l-x}{a} \right)^2} \right] \eta \left(t - \frac{2(n+1)l-x}{a} \right). \quad (4.60a)$$

Nếu $\lambda^2 - 4k < 0$ thì:

$$W_n(p, x) = ae^{-\frac{\lambda_2 t}{2}} J_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{t^2 - \left(\frac{2(n+1)l - x}{a} \right)^2} \right] \eta \left(t - \frac{2(n+1)l - x}{a} \right) \quad (4.60b)$$

Áp dụng định lý hàm nhân ta có:

$$u_n(p, x) = u(t, x) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{E} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta \left(t - \frac{x + 2nl}{a} \right) \int_{\frac{x+2nl}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} I_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x+2nl}{a} \right)^2} \right] d\tau - \\ &- \frac{a}{E} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \eta \left(t - \frac{2(n+1)l - x}{a} \right) \int_{\frac{2(n+1)l - x}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} I_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2(n+1)l - x}{a} \right)^2} \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nếu ở tổng thứ hai của (4.61) ta đặt $(n+1) = k$ và gọi phần nguyên

$$\left\lfloor \frac{at - x}{2l} \right\rfloor = n_1; \quad \left\lfloor \frac{at + x}{2l} \right\rfloor = n_2, \quad \text{thì (4.61) trở thành:}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a}{E} \left\{ \sum_{n=0}^{n_1} (-1)^n \int_{\frac{x+2nl}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} I_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x+2nl}{a} \right)^2} \right] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n_2} (-1)^k \int_{\frac{2kl-x}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} I_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2kl-x}{a} \right)^2} \right] d\tau \right\}. \quad (4.61a) \end{aligned}$$

Trường hợp $\lambda^2 - 4k < 0$ thì dịch chuyển $u(x, t)$ bằng:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a}{E} \left\{ \sum_{n=0}^{n_1} (-1)^n \int_{\frac{x+2nl}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} J_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{x+2nl}{a} \right)^2} \right] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n_2} (-1)^k \int_{\frac{2kl-x}{a}}^t f(t-\tau) e^{-\frac{\lambda_2 \tau}{2}} J_0 \left[\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{2kl-x}{a} \right)^2} \right] d\tau \right\}. \quad (4.61b) \end{aligned}$$

Các biểu thức (4.61a) và (4.61b) là nghiệm của bài toán (4.52), (4.53), (4.54).

4.1.3.c. Xác định lực $f(t)$

Trong phần trên ta đã khảo sát sự truyền sóng trong thanh khi đã xác định được hàm dịch chuyển $u(x, t)$. Do đầu thanh bị va chạm có bộ phận giảm chấn nên cần xác định hàm $f(t)$. Đó chính là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu thanh khi va chạm. Theo kết quả [29], hàm $f(t)$ được tìm từ phương trình:

$$\ddot{f}(t) - \frac{k}{M}f(t) + \frac{k}{F}\ddot{u}(t,0) = 0, \tag{4.62}$$

trong đó: m - khối lượng của đầu búa. Đồng thời cần thỏa mãn các điều kiện ban đầu sau:

$$f(0) = 0; \dot{f}(0) = \frac{kV_0}{F}, \tag{4.63}$$

ở đây: k - độ cứng của đệm đàn hồi;

V_0 - vận tốc ban đầu của vật rắn khi va chạm vào thanh.

Trong phương trình (4.62), hàm $\ddot{u}(t,0)$ vẫn còn phụ thuộc vào $f(t)$. Từ (4.61a) thay $x = 0$ vào để tính $u(0, t)$. Thực hiện đạo hàm biểu thức $u(0, t)$ hai lần theo thời gian và thay vào (4.62), sau khi biến đổi và rút gọn, ta nhận được phương trình xác định hàm $f(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) + \frac{ka}{EF}\dot{f}(t) + \left(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF}\right)f(t) + \frac{ka\lambda_2^2}{4F} \int_0^t g(t-\xi)f(\xi)d\xi + \\ + \frac{2ka}{EF} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e^{-\frac{\lambda_2 n t}{a}} \dot{f}\left(t - \frac{2nl}{a}\right) + \frac{\lambda_2}{2} \left(\frac{\lambda_2 nl}{2a} - 1\right) f\left(t - \frac{2nl}{a}\right) + \frac{\lambda_2}{2} \int_0^t g_n(t-\xi)f(\xi)d\xi \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Nếu: $n = n_1 = n_2$ khi $x = 0$:

$$g(y) = \left[I_1\left(\frac{\lambda_2}{2}y\right) - 2I_1\left(\frac{\lambda_2}{2}y\right) + I_0\left(\frac{\lambda_2}{2}y\right) \right] e^{-\frac{\lambda_2}{2}y};$$

$$g_n(\tau) = \frac{d}{dt} e^{-\frac{c_2 \tau}{2}} \left[\frac{\tau I_1 \left(\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2 l^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2 l^2}{a^2}}} - I_0 \left(\frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\tau^2 - \frac{4n^2 l^2}{a^2}} \right) \right]$$

Phương trình (4.64) là phương trình vi tích phân có độ chậm, ta có thể giải nó trong từng khoảng thời gian.

Khi $0 < t < \frac{2l}{a}$ thì $n = 0$. Phương trình (4.64) có dạng:

$$\ddot{f}(t) + \frac{ka}{EF} \dot{f}(t) + \left(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF} \right) f(t) + \frac{ka\lambda_2^2}{4F} \int_0^t g(t-\xi) f(\xi) d\xi = 0. \quad (4.65)$$

Phương trình (4.65) tương đương với phương trình Volter:

$$f(t) + \int_0^t K_o(t, \tau) f(\tau) d\tau = \frac{k}{F} V_o t \quad (4.66)$$

trong đó đặt: $K_o = \frac{ka}{EF} + \int_0^t \left[\left(\frac{k}{M} - \frac{ka\lambda_2}{2EF} \right) + \int_0^{\theta} \frac{ka\lambda_2^2}{4F} g(\xi - \tau) d\xi \right] d\theta$.

Có thể giải phương trình (4.66) bằng phương pháp gần đúng liên tiếp. Ta có:

$$f_0(t) = \frac{k}{F} V_o t;$$

$$f_1(t) = \frac{k}{F} V_o t - \int_0^t K_o(t, \tau) f_0(\tau) d\tau;$$

.....

$$f_n(t) = \frac{k}{F} V_o t - \int_0^t K_o(t, \tau) f_{n-1}(\tau) d\tau,$$

với: $\{f_n(t)\} \rightarrow f(t)$.

Bằng cách lý giải tương tự có thể tìm nghiệm của phương trình ở các khoảng tiếp sau.

Khi tìm được $f(t)$, thay vào (4.61a), (4.61b) ta xác định được dịch chuyển

$u(x, t)$, ứng suất và vận tốc tại mỗi tiết diện thanh. Đồng thời cũng tìm được thời gian va chạm của vật rắn vào thanh.

Bài toán khảo sát gắn với mô hình bài toán: búa rơi tự do vào cọc đàn hồi có đệm ở đầu cọc, chịu sức cản đàn nhớt ở mặt bên và gặp nền cứng.

Trong [30] bằng phương pháp tương tự đã xét bài toán va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi tựa trên nền cứng chịu lực cản nhớt ở mặt bên, được giả thiết là tỷ lệ bậc nhất với tọa độ tiết diện thanh.

§4.2. MỘT VÀI BÀI TOÁN VA CHẠM CỦA BÚA VÀ CỌC [12, 26, 29]

4.2.1. VA CHẠM CỦA BÚA VÀ CỌC TỰ DO (hình 4.3)

4.2.1.a. Thiết lập bài toán

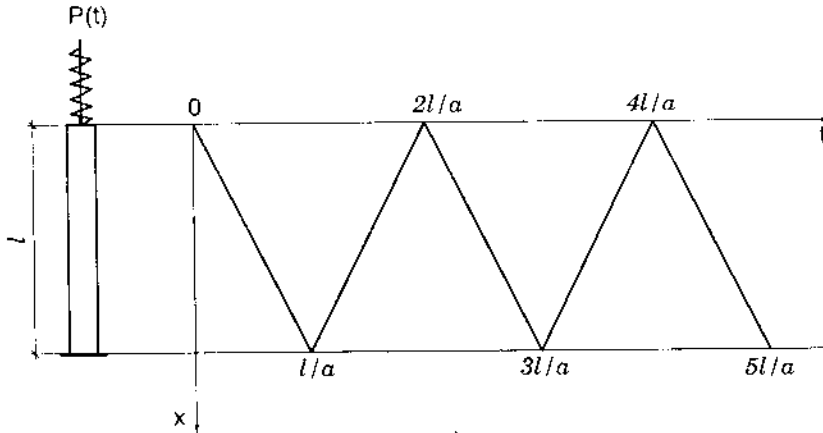
1. Phương trình chuyển động của cọc:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.67)$$

trong đó: u - dịch chuyển của cọc;

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{- vận tốc truyền sóng trong cọc;}$$

E và ρ - môđun đàn hồi và khối lượng riêng của vật liệu cọc.



Hình 4.3

2. Nghiệm tổng quát của (4.67) theo D'alambert có dạng:

$$u = \varphi(at - x) + \psi(at + x) \quad (4.68)$$

3. Điều kiện đầu của bài toán: Chọn thời điểm ban đầu trùng với thời điểm bắt đầu va chạm ($t = 0$):

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.69)$$

4. Điều kiện biên của bài toán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{P(t)}{EF} \text{ tại đầu cọc } x = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ tại đáy cọc } x = l \end{aligned} \quad (4.70)$$

4.2.1.b. Thiết lập phương trình vi phân xác định lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc

Gọi lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc là $P(t)$. Ta có:

$$\begin{aligned} P(t) &= c(u_t - u_o); \\ \dot{P}(t) &= c(\dot{u}_t - \dot{u}_o). \end{aligned} \quad (4.71)$$

trong đó: c - độ cứng của đệm đầu cọc;
 u_t - dịch chuyển của đầu búa;
 u_o - dịch chuyển của đầu cọc.

Phương trình chuyển động của đầu búa:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_t &= -P(t); \\ \ddot{u}_t &= -\frac{P(t)}{M}. \end{aligned} \quad (a)$$

trong đó: M - khối lượng đầu búa.

Dịch chuyển của đầu cọc ($x = 0$) bằng:

$$\begin{aligned} u_o &= \varphi(at) + \psi(at); \\ \ddot{u}_o &= a^2[\varphi''(at) + \psi''(at)]. \end{aligned} \quad (b)$$

Từ điều kiện biên (4.70), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\varphi'(at) + \psi'(at) = -\frac{P(t)}{EF}; \\ \varphi''(at) &= \psi''(at) + \frac{\dot{P}(t)}{aEF}. \end{aligned} \quad (c)$$

Trong khoảng thời gian sóng phản chưa xuất hiện thì $\varphi'(at) = 0$. Thay (a), (b), (c) vào (4.71) với $\psi''(at) = 0$, ta nhận được phương trình vi phân xác định lực nén của dệm đàn hồi lên đầu cọc $P_o(t)$:

$$\ddot{P}_o(t) + 2n\dot{P}_o(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_o(t) = 0,$$

trong đó đặt:

$$\frac{ca}{EF} = 2n; \quad \frac{c}{M} = \omega_1^2 + n^2; \quad \omega_1^2 = \frac{c}{M} - \left(\frac{ca}{2EF}\right)^2.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$P_o(t) = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t).$$

Các hằng số C_1 , C_2 được xác định nhờ điều kiện ban đầu tại $t = 0$ thì:

$$P_o(0) = 0; \quad \dot{P}_o(0) = cV,$$

ở đây: V - vận tốc rơi của búa, $V = \sqrt{2gH}$;

H - độ cao rơi của búa;

g - gia tốc trọng trường.

Từ đó: $C_1 = 0; C_2 = \frac{cV}{\omega_1}$.

Do đó: $P_o(t) = \frac{cV}{\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t$. (4.72)

Từ (4.68) và (4.70) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(at) + \psi'(at) = -\frac{P_o(t)}{EF}$$

Trong khoảng thời gian này chưa xuất hiện sóng phản, nên:
 $\varphi'(at) = \frac{P_o(t)}{EF}$. Vậy sóng thuận ở miền 1 và 2 trong cọc có dạng:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} P_o\left(t - \frac{x}{a}\right). \quad (4.73)$$

Để xác định sóng phản ở đáy cọc ($x = l$), ta sử dụng điều kiện biên (4.70) và biểu thức nghiệm (4.68). Ta có:

$$\varphi''(at) = \psi''(at) + \frac{\dot{P}(t)}{aEF}$$

Phương trình vi phân xác định lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc có dạng:

$$\ddot{P}(t) + 2n\dot{P}(t) + (\omega_1^2 + n^2)P(t) = -2ca^2\psi''(at). \quad (4.74)$$

4.2.1.c. Xác định lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$, $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$ và các hàm sóng $\varphi'(at - x)$, $\psi'(at + x)$

Ta xét trường hợp $\omega_1^2 > 0$, trường hợp $\omega_1^2 < 0$ xét tương tự.

- Trong khoảng $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$.

$P_o(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Trong khoảng thời gian này sóng phản chưa xuất hiện, vế phải của (4.74) bằng không. Sóng phản trong miền 2, 3 ở cọc có dạng:

$$\psi'(at+x) = \frac{1}{EF} P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right). \quad (4.75)$$

- Trong khoảng $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$.

Gọi $P_1(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Từ (4.75) tại đầu cọc ($x=0$), ta có:

$$\psi'(at) = \frac{1}{EF} P_o \left(t - \frac{2l}{a} \right).$$

Mặt khác: $\dot{P}_o(t) = e^{-nt} (-nC_2 \sin \omega_1 t + C_2 \omega_1 \cos \omega_1 t)$.

Suy ra:

$$\dot{P}_o \left(t - \frac{2l}{a} \right) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left[-nC_2 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + C_2 \omega_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right].$$

Phương trình (4.74) có dạng:

$$\ddot{P}(t) + 2n\dot{P}(t) + (\omega_1^2 + n^2)P(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left[A \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \quad (4.76)$$

ở đây: $A = -\frac{2ca}{EF} C_2 \omega_1$; $B = \frac{2ca}{EF} C_2 n$.

Nghiệm tổng quát của (4.76) có dạng:

$$P_1(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left\{ C_3 \cos \omega_1 t + C_4 \sin \omega_1 t + \frac{t}{2\omega_1} \left[A \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - B \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \right\} \quad (4.77)$$

Các hằng số C_3, C_4 được xác định từ điều kiện liên tục của hàm $P(t)$ và $\dot{P}(t)$ tại thời điểm $t = \frac{2l}{a}$:

$$P_1 \left(\frac{2l}{a} \right) = P_o \left(\frac{2l}{a} \right); \quad \dot{P}_1 \left(\frac{2l}{a} \right) = \dot{P}_o \left(\frac{2l}{a} \right). \quad (4.78)$$

Ta có:

$$C_3 = \alpha \cos\left(\omega_1 \frac{2l}{a}\right) - \beta \sin\left(\omega_1 \frac{2l}{a}\right);$$

$$C_1 = \alpha \sin\left(\omega_1 \frac{2l}{a}\right) + \beta \cos\left(\omega_1 \frac{2l}{a}\right);$$

$$\alpha = \frac{lB}{a\omega_1} + P_o\left(\frac{2l}{a}\right);$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_1} \left[\dot{P}_o\left(\frac{2l}{a}\right) + nP_o\left(\frac{2l}{a}\right) + \frac{B}{2\omega_1} - \frac{Al}{a} \right];$$

Thay C_3 , C_1 vào (4.77) ta xác định được lực nén $P(t)$, ta lại có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varphi'(at) + \psi'(at) = -\frac{P_1(t)}{EF}.$$

Trong khoảng thời gian $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$, sóng phản $\psi'(at)$ có dạng:

$$\psi'(at) = -\frac{1}{EF} P_o\left(t - \frac{2l}{a}\right).$$

Do đó:

$$\varphi'(at) = \psi'(at) + \frac{P_1(t)}{EF} = \frac{1}{EF} \left[P_o\left(t - \frac{2l}{a}\right) + P_1(t) \right].$$

Vậy, sóng thuận ở miền 3 trong cọc có dạng:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} \left[P_o\left(t - \frac{x + 2l}{a}\right) + P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) \right]. \quad (4.78a)$$

4.2.1.d. Xác định ứng suất trong cọc ở miền 1, 2 và 3

Ứng suất trong cọc được xác định theo công thức:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Từ (4.73) ứng suất trong cọc ở miền 1 bằng:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{F} P_o \left(t - \frac{x}{a} \right).$$

Từ (4.73) và (4.75) ứng suất trong cọc ở miền 2 bằng:

$$\sigma_2 = -\frac{1}{F} \left[P_o \left(t - \frac{x}{a} \right) - P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right].$$

Từ (4.75) và (4.78) ứng suất trong cọc ở miền 3 bằng:

$$\sigma_3 = \frac{1}{F} \left[-P_o \left(t + \frac{x+2l}{a} \right) - P_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right].$$

Nhận xét:

Mô hình bài toán phù hợp với trường hợp cọc đóng trong nền đất rất yếu.

Khi tiến hành thi công đóng cọc, tại miền 1, trong cọc chưa xuất hiện sóng phản, ứng suất trong cọc tại miền này chỉ chịu ứng suất nén và giảm dần từ đầu cọc ($x = 0$) đến đáy cọc ($x = l$). Cọc bị võ thưng ở đầu cọc ($x = 0$). Tại miền 2, 3 trong cọc đã xuất hiện sóng phản ở đáy cọc ($x = l$), ứng suất ở hai miền này có cả ứng suất kéo. Nếu cọc là bê tông thì khả năng phá hủy nó sẽ do ứng suất kéo.

4.2.2. VA CHẠM CỦA BÚA VÀO CỌC TỰA TRÊN NỀN ĐẤT CỨNG (hình 4.4)

4.2.2.a. Thiết lập bài toán

1. Phương trình vi phân chuyển động của cọc:

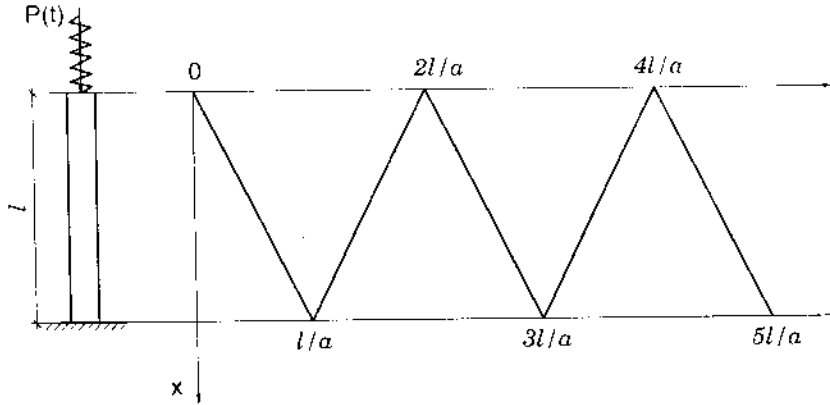
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.79}$$

2. Nghiệm tổng quát của (4.79) theo Đalămbe có dạng:

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \psi(at + x). \tag{4.80}$$

3. Điều kiện đầu của bài toán: Chọn thời điểm ban đầu trùng với thời điểm bắt đầu va chạm ($t = 0$):

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4.81)$$



Hình 4.4

4. Điều kiện biên của bài toán:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P(t)}{EF} \text{ tại đầu cọc } x = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ tại đáy cọc } x = l \quad (4.82)$$

4.2.2.b. Phương trình vi phân xác định lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc

Tiến hành tương tự như đã làm ở phần 4.1.2.b, ta nhận được

$$\ddot{P}(t) + 2n\dot{P}(t) + (\omega_1^2 + n^2)P(t) = -2ca^2\psi''(at). \quad (4.83)$$

4.2.2.c. Xác định lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$, $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$ và các hàm sóng $\varphi'(at - x)$, $\psi'(at + x)$

Ta chỉ xét trường hợp $\omega_1^2 > 0$ còn trường hợp $\omega_1^2 < 0$ xét tương tự.

- Trong khoảng $0 \leq t \leq \frac{2l}{a}$.

Gọi $P_0(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Do sóng phản chưa xuất hiện nên vế phải của (4.83) bằng không. Lý giải tương tự trường hợp trên (xem phần 4.1.2.c), ta có:

$$P_0(t) = \frac{cV}{\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t. \quad (4.84)$$

Từ điều kiện biên (4.82) và chú ý sóng phản chưa xuất hiện, ta suy ra sóng thuận ở miền 1, 2 trong cọc là:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} P_0 \left(t - \frac{x}{a} \right). \quad (4.85)$$

Để xác định sóng phản ở đáy cọc ($x = l$) ta sử dụng điều kiện biên thứ hai của (4.82), ta nhận được sóng phản ở miền 2, 3 trong cọc có dạng:

$$\psi'(at + x) = -\frac{1}{EF} P_0 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right). \quad (4.86)$$

- Trong khoảng $\frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$.

Gọi $P_1(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Phương trình (4.83) có dạng:

$$\ddot{P}_1(t) + 2n\dot{P}_1(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_1(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left[A \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \quad (4.87)$$

ở đây đặt: $A = \frac{2ca}{EF} C_2 \omega_1$; $B = -\frac{2ca}{EF} C_2 n$.

Nghiệm tổng quát của (4.87) có dạng:

$$P_1(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left\{ C_3 \cos \omega_1 t + C_4 \sin \omega_1 t + \frac{t}{2\omega_1} \left[A \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - B \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \right\} \quad (4.88)$$

Các hằng số C_3, C_4 được xác định dựa vào điều kiện liên tục của hàm $P(t)$ và $\dot{P}(t)$ tại thời điểm $t = \frac{2l}{a}$ (xem (4.78)). Thay C_3, C_4 tính được vào (4.88) ta xác định được lực nén $P_1(t)$.

Từ điều kiện biên (4.82) với chú ý trong khoảng thời gian này sóng phản đã xuất hiện. Từ đó suy ra sóng thuận ở miền 3 trong cọc bằng:

$$\varphi'(at - x) = -\frac{1}{EF} \left[P_0 \left(t - \frac{x + 2l}{a} \right) - P_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right]. \quad (4.89)$$

4.2.2.d. Xác định ứng suất trong cọc ở miền 1, 2 và 3

Dựa vào công thức tính ứng suất theo định luật Húc và các kết quả tính trên, ta nhận được hệ thức tính ứng suất trong cọc tại các miền 1, 2, 3 tương ứng bằng:

$$\sigma_1 = -\frac{1}{F} P_0 \left(t - \frac{x}{a} \right);$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{F} \left[P_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right) \right];$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{F} \left[P_0 \left(t - \frac{x + 2l}{a} \right) - P_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) - P_0 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right) \right].$$

Thực tế mô hình bài toán gần với trường hợp thi công đóng cọc gặp chướng ngại vật và khi tính bỏ qua ảnh hưởng ma sát ở mặt bên.

Kết quả chỉ ra rằng: Độ cứng c của đệm đàn hồi đầu cọc tăng thì giá trị lực nén cực đại $P(t)$ tăng và thời gian va chạm giảm.

Trong thời gian va chạm ứng suất của các tiết diện cọc chỉ là ứng suất nén và giá trị của nó tăng dần từ đầu cọc ($x = 0$) đến đáy cọc ($x = l$). Do đó khi thi công cần chọn đầu búa, chiều cao rơi của búa và đệm đầu cọc sao cho ứng suất ở đáy cọc ($x = l$) phải nhỏ hơn ứng suất cho phép của vật liệu cọc.

4.2.3. VA CHẠM CỦA BÚA VÀO CỌC TRONG NỀN ĐỒNG NHẤT, ĐÁY CỌC GẶP LỰC CẢN KHÔNG ĐỔI (hình 4.5)

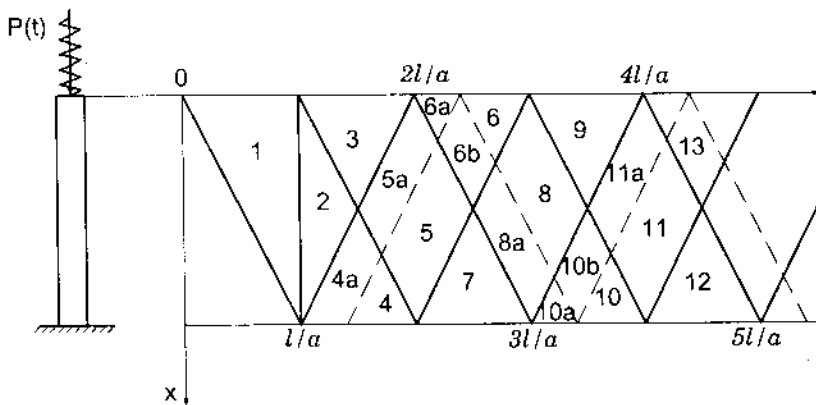
4.2.3.a. Thiết lập bài toán

1. Phương trình vi phân chuyển động của cọc và nghiệm của bài toán:

Ta giả thiết rằng:

- Cọc được giữ trong đất bằng lực ma sát phân bố đều ở mặt bên;
- Lực chống của đất lên đáy cọc không đổi;
- Kích thước tiết diện ngang của cọc nhỏ so với chiều dài của nó.

Ta coi lực ma sát ở mặt bên cọc như lực khối đặt vào cọc, trị số của nó ở một đơn vị thể tích bằng $\frac{r q}{F}$, trong đó: q - lực ma sát của đất trên một đơn vị diện tích mặt bên; r và f - chu vi và diện tích tiết diện ngang cọc.



Hình 4.5

Phương trình chuyển động của cọc cho ở dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - K \right). \quad (4.90)$$

ở đây đặt: $K = \frac{rQ}{F}$; $K \neq 0$ khi $at - x > 0$.

Theo [13, 26], nghiệm tổng quát của (4.90) có thể viết ở dạng:

• Ở miền 1:

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \frac{1}{2}Kx^2 - Katx. \quad (4.90a)$$

• Ở miền 2, 3:

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \frac{1}{2}K(l - x)^2. \quad (4.90b)$$

• Ở các miền còn lại:

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \psi(at + x) + \frac{1}{2}K(l - x)^2. \quad (4.90c)$$

2. Điều kiện đầu của bài toán: Chọn thời điểm ban đầu trùng với thời điểm bắt đầu va chạm ($t = 0$):

$$u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4.91)$$

3. Điều kiện biên của bài toán ($x = 0$; $x = l$):

• Tại đầu cọc $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P(t)}{EF}. \quad (a)$$

• Tại đáy cọc $x = l$ thì:

a. Cọc chưa lún:

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} < R, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (b)$$

b. Cọc lún:

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} = R. \quad (c)(4.92)$$

c. Cọc dừng lún:

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} < -R, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (d)$$

d. Đáy cọc tựa trên nền đất yếu:

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} < -R, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (e)$$

ở đây: r coi là hằng số, khi $r = 0$ tương đương với cọc đóng trên nền đất yếu.

4.2.3.b. Xác định trạng thái ứng suất trong cọc

- Trong khoảng $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$.

Gọi $P_o(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Phương trình xác định nó có dạng:

$$\ddot{P}_o(t) + 2n\dot{P}_o(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_o(t) = Ka^2c. \quad (4.93)$$

Nghiệm tổng quát của (4.93) tìm ở dạng:

$$P_o(t) = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \frac{Ka^2c}{\omega_1^2 + n^2}.$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ điều kiện ban đầu của $P_o(0)$ và $\dot{P}_o(0)$. Tại $t = 0$ thì :

$$P_o(0) = 0; \quad \dot{P}_o(0) = cV.$$

Ta có:

$$C_1 = -\frac{Ka^2c}{\omega_1^2 + n^2}; \quad C_2 = \frac{1}{\omega_1} \left(cV - n \frac{Ka^2c}{\omega_1^2 + n^2} \right).$$

Sóng thuận trong miền 1 là:

$$\varphi'(at - x) = -K(at - x) + \frac{1}{EF} P_o \left(t - \frac{x}{a} \right). \quad (4.94)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 1 bằng:

$$\sigma_1 = E[-\varphi'(at - x) - K(at - x)] = -\frac{1}{F} P_o \left(t - \frac{x}{a} \right).$$

Giả thiết tại đường biên $t = \frac{l}{a}$ giữa miền 1 và miền 2, hàm dịch chuyển là hàm liên tục:

$$u_1 \left(\frac{l}{a} - 0, x \right) = u_2 \left(\frac{l}{a} + 0, x \right).$$

Ta có:

$$\varphi'_1(at - x) = \varphi'_2(at - x).$$

Như vậy, sóng thuận tại miền 1, 2 và 4a, 4 giống nhau:

$$\varphi'(at - x) = -K(at - x) + \frac{1}{EF} P_o \left(t - \frac{x}{a} \right).$$

Ứng suất ở miền 2 bằng:

$$\sigma_2 = E[-\varphi'(at - x) - K(at - x)] = -\frac{1}{F} P_o \left(t - \frac{x}{a} \right) + EK(at - l).$$

Xét trường hợp cọc chưa lún tại $t = \frac{l}{a}$. Gọi t_v là thời điểm cọc bắt đầu lún; t_v được xác định từ điều kiện lún tại đáy cọc:

+ Khi sóng $\varphi'(at - x)$ chưa truyền tới đáy cọc thì nó bằng không:

+ Khi $t > \frac{l}{a}$ thì ứng suất ở đáy cọc tăng dần nhưng

$$EF \frac{\partial u}{\partial x} < -R \text{ nên đáy cọc vẫn chưa lún. Tại thời điểm } t = t_v$$

$$\text{thì } EF \frac{\partial u}{\partial x} = -R, \text{ đáy cọc bắt đầu lún.}$$

- Khi $\frac{l}{a} < t < t_v$: cọc chưa lún, sóng phản $\varphi'(at + x)$ ở các miền 4a, 5a, 6a được xác định từ điều kiện biên:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a[\varphi'(at-x) + \psi'(at+x)] = 0 \rightarrow \psi'(at+x) = -\varphi'(at-x).$$

Từ (4.94) sóng phản của cọc ở các miền 4a, 5a, 6a là:

$$\psi'(at+x) = -\frac{1}{F} P_o \left(t + \frac{l}{a} \right) + K(at+x-2l). \quad (4.95)$$

Ứng suất trong cọc tại miền 4a bằng:

$$\sigma_{4a} = \frac{1}{F} \left[-P_o \left(t - \frac{x}{a} \right) - P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right] + EK(2at+x-2l).$$

- Khi $t_y < t < \frac{2l}{a}$: cọc lún. Từ điều kiện biên, ta có sóng phản $\psi'(at+x)$ ở các miền 4, 5, 6b, 6 là:

$$\psi'(at+x) = \frac{1}{EF} \left[P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - K(at+x-2l). \quad (4.96)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 4 bằng:

$$\sigma_4 = \frac{1}{F} \left[-P_o \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_o \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right] - EK(l-x).$$

- Trong khoảng $\frac{l}{a} \leq t \leq \frac{2l}{a}$.

Gọi $P_1(t)$ là lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc. Phương trình xác định lực $P_1(t)$ trong khoảng thời gian này là:

$$\ddot{P}_1(t) + 2n\dot{P}_1(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_1(t) = 0. \quad (4.97)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên có dạng:

$$P_1(t) = e^{-nt} (C_3 \cos \omega_1 t + C_4 \sin \omega_1 t).$$

Các hằng số C_3, C_4 được xác định từ điều kiện ban đầu của $P_1(t)$ và $\dot{P}_1(t)$.

$$\text{Tại } t = \frac{l}{a}: P_1 \left(\frac{l}{a} \right) = P_o \left(\frac{l}{a} \right); \dot{P}_1 \left(\frac{l}{a} \right) = \dot{P}_o \left(\frac{l}{a} \right).$$

Từ đó ta có:

$$C_3 = \alpha \cos\left(\omega_1 \frac{l}{a}\right) - \beta \sin\left(\omega_1 \frac{l}{a}\right);$$

$$C_4 = \alpha \sin\left(\omega_1 \frac{l}{a}\right) + \beta \cos\left(\omega_1 \frac{l}{a}\right);$$

$$\alpha = e^{-n} P_0\left(\frac{l}{a}\right);$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_1} e^{-n} \left[n P_0\left(\frac{l}{a}\right) + \dot{P}_0\left(\frac{l}{a}\right) \right].$$

Sóng $\varphi'(at - x)$ trong miền 3, 5a, 5, 7 là:

$$\varphi'(at - x) = -\frac{1}{EF} P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - Kl. \quad (4.98)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 3 bằng:

$$\sigma_3 = E[\varphi'(at - x) - K(l - x)] = -\frac{1}{F} P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + EKx.$$

Ứng suất trong cọc ở miền 5a bằng:

$$\sigma_{5a} = \frac{1}{F} \left[-P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - P_0\left(t + \frac{x - 2l}{a}\right) \right] + EK(at + 2x - 2l).$$

Ứng suất trong cọc ở miền 5 bằng:

$$\sigma_5 = \frac{1}{F} \left[-P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - P_0\left(t + \frac{x - 2l}{a}\right) - R \right] - EK(at - 2l).$$

Từ điều kiện biên (4.92), khi cọc lún đáy cọc thuộc miền 7. Ta có sóng phản ở các miền 7, 8a, 8 và 9 là:

$$\psi'(at + x) = \frac{1}{EF} \left[P_1\left(t + \frac{x - 2l}{a}\right) - R \right] - Kl. \quad (4.99)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 7 bằng:

$$\sigma_7 = \frac{1}{F} \left[-P_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + P_1\left(t + \frac{x - 2l}{a}\right) - R \right] - EK(l - x).$$

- Trong khoảng thời gian $\frac{2l}{a} < t < \frac{l}{a} + t_y$.

Trong khoảng thời gian này, sóng phản đã xuất hiện ở đầu cọc. Phương trình xác định lực nén của đệm đàn hồi $P_2(t)$ lên đầu cọc có dạng:

$$\ddot{P}_2(t) + 2n\dot{P}_2(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_2(t) = -2a^2 c\psi''(at). \quad (4.100)$$

Từ (4.96) sóng phản tại đầu cọc trong miền 6a là:

$$\begin{aligned} \psi'(at) &= -\frac{1}{EF} P_o \left(t - \frac{2l}{a} \right) + K(at - 2l) \\ \rightarrow \psi''(at) &= -\frac{1}{aEF} \dot{P}_o \left(t - \frac{2l}{a} \right) + K. \end{aligned}$$

Thay vào (4.100), ta có:

$$\ddot{P}_2(t) + 2n\dot{P}_2(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_2(t) = -\frac{2c\alpha}{EF} \dot{P}_o \left(t - \frac{2l}{a} \right) - 2a^2 cK \quad (4.100a)$$

trong đó:

$$\dot{P}_o \left(t - \frac{2l}{a} \right) = e^{-nt} \left[(\omega_1 C_2 - nC_1) \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - (\omega_1 C_1 + nC_2) \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right]$$

Phương trình (4.100a) viết được dưới dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{P}_2(t) + 2n\dot{P}_2(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_2(t) &= \\ = e^{-n \left[t - \frac{2l}{a} \right]} \left[A \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] - 2a^2 cK. \quad (4.100b) \end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$P_2(t) = e^{-\frac{n}{a} \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \bar{P}_2(t) - \frac{2a^2 cK}{\omega_1^2 + n^2}.$$

$\bar{P}_2(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\ddot{\bar{P}}_2(t) + \omega_1^2 \bar{P}_2(t) = A \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên là:

$$\begin{aligned} \overline{P}_2(t) = & C_5 \cos \omega_1 t + C_6 \sin \omega_1 t \\ & + \frac{t}{2\omega_1} \left[A \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - B \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

ở trên ký hiệu: $A = \frac{2ca}{EF}(\omega_1 C_2 - nC_1)$; $B = -\frac{2ca}{EF}(\omega_1 C_1 + nC_2)$.

Các hằng số C_5 và C_6 được xác định từ điều kiện:

$$P_2\left(\frac{2l}{a}\right) = P_1\left(\frac{2l}{a}\right); \quad \dot{P}_2\left(\frac{2l}{a}\right) = \dot{P}_1\left(\frac{2l}{a}\right)$$

Ta có:

$$C_5 = Q_1 \cos\left(2\omega_1 \frac{l}{a}\right) - Q_2 \sin\left(2\omega_1 \frac{l}{a}\right);$$

$$C_6 = Q_2 \cos\left(2\omega_1 \frac{l}{a}\right) + Q_1 \sin\left(2\omega_1 \frac{l}{a}\right).$$

$$Q_1 = P_1\left(\frac{2l}{a}\right) + \frac{Bl}{a\omega_1} + \frac{2ca^2 K}{\omega_1^2 + n^2};$$

$$Q_2 = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{B}{2\omega_1} - \frac{Al}{2} + \dot{P}_1\left(\frac{2l}{a}\right) + nP_1\left(\frac{2l}{a}\right) + 2n \frac{ca^2 K}{\omega_1^2 + n^2} \right].$$

Vậy hệ thức xác định lực nén $P_2(t)$ bằng:

$$\begin{aligned} P_2(t) = & e^{-n\left(t - \frac{2l}{a}\right)} \left\{ C_5 \cos \omega_1 t + C_6 \sin \omega_1 t + \frac{t}{2\omega_1} \left[A \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - B \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{2a^2 cK}{\omega_1^2 + n^2}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Từ điều kiện biên, sóng $\varphi'(at - x)$ ở các miền 6a, 6b, 8a và 10a là:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} \left[P_2\left(t - \frac{x}{a}\right) - P_0\left(t - \frac{x + 2l}{a}\right) \right] + K(at - x - 3l). \quad (4.102)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 6a bằng:

$$\sigma_{6a} = \frac{1}{F} \left[P_0\left(t - \frac{x + 2l}{a}\right) - P_2\left(t - \frac{x}{a}\right) - P_0\left(t + \frac{x - 2l}{a}\right) \right] + 3EKx.$$

Ứng suất trong cọc ở miền 6b bằng:

$$\sigma_{6b} = \frac{1}{F} \left[P_0 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - 3EK(2at - x - 4l).$$

Ứng suất trong cọc ở miền 8a bằng:

$$\sigma_{8a} = \frac{1}{F} \left[P_0 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_1 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - EK(at - 2x - l).$$

Trường hợp cọc lún ở miền 10a, từ điều kiện biên và (4.102) sóng $\psi'(at+x)$ ở các miền 10a, 10b, 11a, 11b, 13a là:

$$\psi'(at+x) = \frac{1}{EF} \left[-P_0 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_2 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] + K(at+x-5l). \quad (4.103)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 10a bằng:

$$\sigma_{10a} = \frac{1}{F} \left[P_0 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_2 \left(t - \frac{x}{a} \right) - P_0 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_2 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] + 3EK(l-x)$$

- Trong khoảng thời gian $\frac{l}{a} + t_y < t < \frac{3l}{a}$.

Trong khoảng thời gian này, sóng phản đã xuất hiện ở đầu cọc. Từ điều kiện biên và hệ thức (4.94), sóng phản tại đầu cọc trong miền 6 là:

$$\psi'(at) = \frac{1}{EF} \left[P_0 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - R \right] - K(at - 2l);$$

$$\psi''(at) = \frac{1}{aEF} \dot{P}_0 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - K.$$

Gọi lực nén của đệm đàn hồi lên đầu cọc là $P_3(t)$. Ta có:

$$\ddot{P}_3(t) + 2n\dot{P}_3(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_3(t) = -2ca \frac{1}{EF} \dot{P}_0 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + 2a^2 cK \quad (4.104)$$

trong đó:

$$\dot{P}_0\left(t - \frac{2l}{a}\right) = e^{-n\left(t - \frac{2l}{a}\right)} \left[(\omega_1 C_2 - n C_1) \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) - (\omega_1 C_1 + n C_2) \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) \right] + 2a^2 cK.$$

Phương trình (4.104) viết được dưới dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{P}_3(t) + 2n\dot{P}_3(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_3(t) = \\ = e^{-n\left(t - \frac{2l}{a}\right)} \left[A_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) + B_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) \right] + 2a^2 cK \end{aligned} \quad (4.104a)$$

ở đây: $A_1 = -\frac{2ca}{EF}(\omega_1 C_2 - n C_1)$; $B_1 = \frac{2ca}{EF}(n C_2 - \omega_1 C_1)$.

Nghiệm tổng quát của nó có dạng:

$$P_3(t) = e^{-n\left(t - \frac{2l}{a}\right)} \bar{P}_3(t) - \frac{2a^2 cK}{\omega_1^2 + n^2}.$$

Còn $\bar{P}_3(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\ddot{\bar{P}}_3(t) + \omega_1^2 \bar{P}_3(t) = A_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) + B_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$\begin{aligned} \bar{P}_3(t) = C_7 \cos \omega_1 t + C_8 \sin \omega_1 t \\ + \frac{t}{2\omega_1} \left[A_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) - B_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

Các hằng số C_7 và C_8 được xác định từ điều kiện liên tục của hàm $P(t)$ và $\dot{P}(t)$:

$$P_3\left(\frac{l}{a} + t_y\right) = P_2\left(\frac{l}{a} + t_y\right); \quad \dot{P}_3\left(\frac{l}{a} + t_y\right) = \dot{P}_2\left(\frac{l}{a} + t_y\right).$$

Ta nhận được kết quả:

$$C_7 = Q_3 \cos \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y\right) - Q_4 \sin \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y\right);$$

$$C_x = Q_4 \cos \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) + Q_3 \sin \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y \right);$$

$$Q_3 = e^{-n \left(\frac{l}{a} + t_y \right)} \left[P_2 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) - \frac{2ca^2 K}{\omega_1^2 + n^2} \right] + \frac{1}{2\omega_1} \left[B_1 \cos \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) - A_1 \sin \omega_1 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) \right];$$

$$Q_4 = \frac{1}{2\omega_1} \left\{ e^{-n \left(t_y - \frac{l}{a} \right)} \left[P_2 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) + n P_2 \left(\frac{l}{a} + t_y \right) - \frac{2ca^2 K}{\omega_1^2 + n^2} \right] - \left[\frac{A_1}{2\omega_1} - \frac{B_1}{2} \left(\frac{l}{a} + t_y \right) \right] \sin \omega_1 \left(t_y - \frac{l}{a} \right) - \left[\frac{B_1}{2\omega_1} - \frac{A_1}{2} \left(\frac{l}{a} + t_y \right) \right] \cos \omega_1 \left(t_y - \frac{l}{a} \right) \right\}.$$

Cuối cùng công thức xác định $P_3(t)$ là:

$$P_3(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left\{ C_7 \cos \omega_1 t + C_x \sin \omega_1 t + \frac{t}{2\omega_1} \left[A_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \right\} + \frac{2a^2 cK}{\omega_1^2 + n^2}. \quad (4.105)$$

Sóng thuận $\varphi'(at - x)$ trong các miền 6, 8, 10b, 10 bằng:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} \left[P_3 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t - \frac{x + 2l}{a} \right) - R \right] - K(at - x - l). \quad (4.106)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 6 bằng:

$$\sigma_6 = \frac{1}{F} \left[-P_0 \left(t - \frac{x + 2l}{a} \right) - P_3 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right) \right] - EKx.$$

Ứng suất trong cọc ở miền 8 bằng:

$$\sigma_8 = \frac{1}{F} \left[-P_0 \left(t - \frac{x + 2l}{a} \right) - P_0 \left(t + \frac{x - 4l}{a} \right) - P_3 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_2 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right) \right] + EK(2at + x - 7l)$$

Theo điều kiện biên, sóng phản $\psi'(at + x)$ ở các miền 10, 11, 13 là:

$$\psi'(at + x) = \frac{1}{EF} \left[P_0 \left(t + \frac{x - 4l}{a} \right) + P_3 \left(t + \frac{x - 2l}{a} \right) - R \right] - EK(l - x)$$

(4.107)

Ứng suất trong cọc ở miền 10 bằng:

$$\sigma_{10} = \frac{1}{F} \left[-P_0 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_3 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_3 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - EK(l-x).$$

- Trong khoảng $\frac{3l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}$.

Từ (4.99) ta có:

$$\psi''(at) = \frac{1}{aEF} \dot{P}_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + K.$$

Phương trình xác định lực nén $P_1(t)$ của đệm đàn hồi lên đầu cọc trong khoảng thời gian này là:

$$\ddot{P}_1(t) + 2n\dot{P}_1(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_1(t) = -2ca \frac{1}{EF} \dot{P}_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right), \quad (4.108)$$

trong đó:

$$\dot{P}_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left[(\omega_1 C_4 - nC_3) \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - (\omega_1 C_3 + nC_4) \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right]$$

Phương trình (4.107) trở thành:

$$\ddot{P}_1(t) + 2n\dot{P}_1(t) + (\omega_1^2 + n^2)P_1(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left[A_2 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B_2 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \quad (4.108a)$$

với: $A_2 = \frac{2ca}{EF} (\omega_1 C_4 - nC_3)$; $B_2 = \frac{2ca}{EF} (\omega_1 C_3 + nC_4)$.

Nghiệm tổng quát của nó có dạng:

$$P_1(t) = e^{-n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \bar{P}_1(t),$$

$\bar{P}_1(t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\ddot{\bar{P}}_1(t) + \omega_1^2 \bar{P}_1(t) = A_2 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B_2 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình sau cùng là:

$$\bar{P}_1(t) = C_9 \cos \omega_1 t + C_{10} \sin \omega_1 t + \frac{t}{2\omega_1} \left[A_2 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) + B_2 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right]$$

Các hằng số C_9 và C_{10} được xác định từ điều kiện:

$$P_1 \left(\frac{3l}{a} \right) = P_3 \left(\frac{3l}{a} \right); \quad \dot{P}_1 \left(\frac{3l}{a} \right) = \dot{P}_3 \left(\frac{3l}{a} \right).$$

Và nhận được:

$$\begin{aligned} C_9 &= Q_5 \cos \left(3\omega_1 \frac{l}{a} \right) - Q_6 \sin \left(3\omega_1 \frac{l}{a} \right); \\ C_{10} &= Q_6 \cos \left(3\omega_1 \frac{l}{a} \right) + Q_5 \sin \left(3\omega_1 \frac{l}{a} \right); \\ Q_5 &= e^{na} P_3 \left(\frac{3l}{a} \right) + \frac{3l}{2a\omega_1} \left[B_2 \cos \left(\omega_1 \frac{l}{a} \right) - A_2 \sin \left(\omega_1 \frac{l}{a} \right) \right]; \\ Q_6 &= \frac{1}{\omega_1} e^{na} \left[\dot{P}_3 \left(\frac{3l}{a} \right) + nP_3 \left(\frac{3l}{a} \right) \right] - \left(\frac{A}{2\omega_1^2} + \frac{3l}{2a\omega_1} \right) \sin \left(\omega_1 \frac{l}{a} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{3l}{2a\omega_1} - \frac{B}{2\omega_1^2} \right) \cos \omega_1 \left(\omega_1 \frac{l}{a} \right). \end{aligned}$$

Công thức xác định lực nén $P_1(t)$ là:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= e^{n \left(t - \frac{2l}{a} \right)} \left\{ C_9 \cos \omega_1 t + C_{10} \sin \omega_1 t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{2\omega_1} \left[A_2 \sin \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) - B_2 \cos \omega_1 \left(t - \frac{2l}{a} \right) \right] \right\}. \quad (4.109) \end{aligned}$$

Do đó sóng thuận trong các miền 9, 11a, 11, 12 bằng:

$$\varphi'(at - x) = \frac{1}{EF} \left[P_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_1 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - R \right] - 2Kl. \quad (4.110)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 9 bằng:

$$\sigma_9 = \frac{1}{F} \left[-P_1 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_1 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right] + EK.$$

Ứng suất trong cọc ở miền 11a bằng:

$$\sigma_{11a} = \frac{1}{F} \left[-P_1 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_4 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_2 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right] + EK(at + 2x)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 11 bằng:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{F} \left[-P_1 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_4 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_0 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_3 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - EK(at - 4l).$$

Xét cọc lún trong miền 12, theo điều kiện biên ta có sóng $\psi'(at + x)$ ở miền 12 là:

$$\psi'(at + x) = \frac{1}{EF} \left[P_1 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_4 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) - R \right] - 2Kl. \quad (4.111)$$

Ứng suất trong cọc ở miền 12 bằng:

$$\sigma_{12} = \frac{1}{F} \left[-P_1 \left(t - \frac{x+2l}{a} \right) - P_4 \left(t - \frac{x}{a} \right) + P_1 \left(t + \frac{x-4l}{a} \right) + P_4 \left(t + \frac{x-2l}{a} \right) \right] - EK(l - x).$$

Bằng cách tương tự, ta có thể xác định được trạng thái ứng suất của cọc trong các miền tiếp theo cho đến khi va chạm kết thúc. Thời gian va chạm của búa vào cọc được xác định từ phương trình $P(t) = 0$.

Số liệu tính toán cụ thể cho thấy rằng: trong trường hợp khảo sát, ứng suất trong cọc chỉ chịu ứng suất nén, ứng suất cực đại thường xảy ra ở đầu cọc và giảm dần theo chiều dài cọc. Tại đáy cọc ứng suất bằng $\frac{R}{F}$. Để tránh vỡ, nứt đầu cọc, khi thiết kế cần gia cố cốt thép ở đầu cọc và phải tính chọn đệm và mũi cọc.

§4.3. MỘT SỐ KẾT QUẢ TÍNH TOÁN VỚI SỐ LIỆU CỤ THỂ TẠI CÔNG TRƯỜNG

Móng cọc là một trong những hình thức kết cấu quan trọng trong công trình kiến trúc xây dựng nhà và các công trình giao thông, thủy lợi. Sự phá hoại của các cọc đơn và do đó đối với móng cọc dưới tác dụng của các tải trọng ngoài bao gồm sự phá hoại cường độ vật liệu cọc và sự phá hoại cường độ đất nền. Việc tính toán tĩnh tải cũng như việc thử nghiệm tĩnh tải của cọc vẫn thường hay sử dụng, cho ta độ tin cậy về sức chịu nén dọc trục và sự chống nhổ của cọc, vì thực tế ở các công trình hệ móng cọc thường chịu lực theo phương thẳng đứng. Với sự ra đời và phát triển lý thuyết truyền sóng trong thanh đàn hồi, đã chứng tỏ rằng: sự phá hủy cọc không chỉ do nguyên nhân ứng suất nén lớn nhất mà có cả nguyên nhân ứng suất kéo (nhất là đối với các cọc bê tông hay bê tông cốt thép) ở đó ứng suất kéo vượt ứng suất kéo cho phép của vật liệu.

Công tác kiểm tra sức chịu tải của cọc cần tiến hành ở cả giai đoạn thiết kế và giai đoạn kiểm tra thi công. Việc kiểm tra thi công (có tính khống chế nhất định) được thực hiện trên cơ sở kiểm tra xác suất cọc sử dụng ở công trình với một tỷ lệ xác định. Trong tình hình hiện nay, có thể do nhiều nguyên nhân khác nhau (như kỹ thuật và công nghệ thi công, trình độ quản lý, mô hình tính toán động để kiểm tra sự làm việc của cọc, móng cọc... gặp khó khăn lớn về toán học, khó cho kết quả nghiệm chính xác...) mà dẫn đến các vấn đề về chất lượng cọc, móng cọc. Thí dụ như đối với cọc bê tông đúc sẵn, khi tiến hành thi công thường hay dùng búa Diesel, búa hơi hay rơi tự do để tăng tải cọc vào đất. Việc nghiên cứu giải quyết các vấn đề sau đây là rất quan trọng, đảm bảo độ tin cậy về sự làm việc của cọc, móng cọc.

1. Tính toán chọn đệm cọc và đệm búa phù hợp. Đệm búa là lớp đệm giữa mũ cọc và búa. Người ta thường dùng gỗ, cao su hoặc các chế phẩm chất dẻo, các tấm thép hoặc tấm nhôm... Đệm cọc

là lớp đệm giữa đầu cọc và mũi cọc. Người ta thường bố trí nhiều lớp và vật liệu chủ yếu có thể là gỗ, bao tải, rơm... Tác dụng của đệm là truyền xung lực va chạm cường độ lớn từ búa vào đầu cọc tạo ra lực nén đàn hồi phân bố đều, để ứng suất trong cọc không vượt quá giá trị cho phép của vật liệu cọc khi đóng.

2. Tính toán sự xuất hiện (nếu có) và độ lớn của ứng suất kéo ở các tiết diện của thân cọc khi tiến hành hạ cọc. Sự xuất hiện và độ lớn của ứng suất kéo là nguyên nhân cơ bản dẫn đến nứt thân cọc bê tông hay bê tông cốt thép, gây nên sự phá hoại cọc và kết cấu móng cọc. Trong các mô hình cơ bản, giải các bài toán truyền sóng đàn hồi trong thanh khi va chạm ở các phần trên, ta thấy rằng: không phải bao giờ cũng xuất hiện ứng suất kéo, nó phụ thuộc vào điều kiện biên của bài toán và chủ yếu là ma sát mặt bên (lực cản của đất lên thành cọc), lực cản mũi cọc (liên quan đến tính chất cơ lý các loại đất ở mũi cọc) và cũng có thể cả vào tính chất đàn hồi các lớp đệm đầu cọc.

Trong [35] chỉ ra rằng: một cọc đúc sẵn $450 \times 450\text{mm}$, dài 24m, bê tông M38, lớp đỡ mũi cọc là á sét, búa đóng nặng 40000N, chiều cao rơi 1,2m và cọc có đệm. Thực tế đo: vị trí cách đầu cọc 7,8m ứng suất kéo đạt 3 MN/m^2 vượt quá cường độ chịu kéo của bê tông (bê tông M38 có cường độ chịu kéo là $2,57 \text{ MN/m}^2$). Vết nứt có độ rộng dự tính bằng $\delta = 0,15\text{mm}$.

3. Tính toán sức chịu tải của cọc khi được tăng tải vào đất có nhiều lớp khác nhau. Mô hình động lực giải các bài toán như thế gặp nhiều khó khăn về toán học. Hiện nay, thường vẫn hay sử dụng phương pháp thử hoặc dựa vào kinh nghiệm để tiến hành thi công móng cọc. Điều này rõ ràng khó có độ tin cậy cao về sự an toàn móng cọc. Cọc đóng trong các trường hợp như thế có thể không đáp ứng yêu cầu độ xuyên đến chiều sâu dự kiến hoặc vỡ nứt đầu cọc, ảnh hưởng lớn đến sức chịu tải của cọc,

Trong những năm gần đây, người ta bắt đầu áp dụng rộng rãi phương pháp động để tiến hành kiểm tra chất lượng cọc. Điển hình

phải kể đến: phương pháp động biến dạng nhỏ và phương pháp động biến dạng lớn.

Vào những năm 60 của thế kỷ XX, E.A. Smith lần đầu tiên đã đưa ra nghiệm sai phân của phương trình sóng ứng dụng vào bài toán đóng cọc. Ý tưởng chính của phương pháp là: đưa phương trình sóng (2.4) (xem chương 2) thành một số hữu hạn các phương trình sai phân, mô tả hệ thống búa – cọc - đất lý tưởng để tìm nghiệm. Từ đó cho ta một phương pháp phân tích quá trình đóng cọc phức tạp trên cơ sở mô hình cơ - lý gần chính xác, kết hợp với tính toán số. Đó chính là mô hình khối: khối lượng, lò xo và giảm chấn, sử dụng máy vi tính tiến hành theo phương pháp thử dần. Các tham số Smith đưa vào tính là: trọng lượng cọc, trọng lượng mũi cọc, trọng lượng búa, môđun đàn hồi của cọc, diện tích mặt cắt cọc, chiều dài cọc, một số tham số chỉ đặc tính đệm búa và đệm cọc, tỷ lệ phân bố lực cản vách cọc và mũi cọc, lực cản tĩnh của đất khi đóng cọc. Phương pháp phân tích phương trình sóng ở trên có thể thu được ứng suất của mọi thời điểm trên mỗi mặt cắt ở thân cọc, cũng như ứng suất ở các mặt cắt khác nhau của cùng một thời điểm. Điều này giúp ta khống chế ứng suất khi tiến hành hạ cọc. Đặc biệt đối với cọc bê tông hay bê tông cốt thép, nếu ứng suất kéo lớn hơn cường độ chịu kéo của nó sẽ làm thân cọc nứt, hình thành kết quả gãy cọc.

Cũng vào thời gian này, song muộn hơn một ít, dưới sự chủ trì của G.C. Goble ở Học viện Công trình Case USA (nay là Trường Đại học Case) đã đưa ra phương pháp Case, dùng lý thuyết phương trình sóng là cơ sở, đồng thời chế tạo thiết bị phân tích đóng cọc PDA để ngay tại hiện trường có thể thu được các tham số: sức chịu tải của cọc, ứng suất đóng cọc, năng lượng búa và tính năng của lớp đệm. Năm 1975, phương pháp Case đã đưa ra công thức cơ bản suy ra từ lý thuyết truyền sóng xác định tổng lực cản của đất [35].

Với những vấn đề trình bày sơ lược trên, rõ ràng: việc hoàn thiện về lý thuyết các bài toán truyền sóng trong thanh đàn hồi dưới tác

động xung lực va chạm, cũng như giải quyết các mô hình bài toán va chạm của búa vào cọc với các điều kiện biên khác nhau là rất quan trọng trong việc áp dụng thực tế của lý thuyết kỹ thuật rung vào công tác xây dựng. Nó giúp cho công tác thiết kế, thi công, kiểm tra chất lượng cọc nhanh chóng, nhẹ nhàng và nhiều khả năng chi phí thấp. Trong tình hình hiện nay đa số nước, nhất là ở nước ta, việc tiến hành phương pháp động xác định sức chịu tải của cọc, móng cọc chưa nhiều và do những hạn chế nhất định (cả về lý thuyết và cả việc thiếu phương tiện kỹ thuật) độ chính xác của nó còn thấp.

Ta đưa ra một số ví dụ của một số tác giả nghiên cứu, áp dụng nghiệm chính xác từ các mô hình bài toán va chạm của búa vào cọc. Các số liệu được lấy từ các công trường thực tế ở nước ta. Mặc dù còn sớm nếu nói đến khả năng áp dụng vào thực tế, song phần nào cũng đưa ra được các nhận xét bổ ích giúp cho công tác thiết kế, thi công các công trình móng cọc ngày một hoàn thiện hơn.

Kết quả thí nghiệm công trình cầu Kỳ Lân – Ninh Bình [44]:

Áp dụng kết quả nghiệm bài toán: va chạm của búa vào cọc, phần trên của cọc tự do, phần dưới của cọc chịu ma sát mặt bên, đáy cọc chịu lực cản.

- 1) *Máy đo Si3535D, Scorpo Date Logger*: ghi sóng ứng suất và sóng biến dạng trong quá trình hạ cọc. Dùng 4 kênh đo động của máy.
- 2) *Búa*: búa Diesel kiểu C.268, trọng lượng phần va đập $Q = 1.2$ t; đường kính xylanh $D = 29$ cm; diện tích xylanh $f = 0.066$ m²; hành trình làm việc $H_p = 0.515$ m; chiều cao rơi lớn nhất $H = 2.10$ m. Khi thí nghiệm, cho búa đóng từng nhát, không cấp nhiên liệu.
- 3) *Đệm*: có diện tích bằng tiết diện cọc $f = 30 \times 30$ cm, gồm ba lớp: lớp dưới cùng là gỗ lim $E = 6.7.10^3$ kG/cm² dày 15cm và 5cm; lớp giữa là bản thép mũ cọc dày 4cm, $E = 2.1.10^6$ kG/cm²; lớp trên cùng là bao tải $E = 37.2$ kG/cm² dày 1.3cm.

- 4) *Cọc*: bê tông cốt thép M200#, kích thước $30 \times 30 \times 1000$ cm, $E = 3,11 \cdot 10^4$ kG/cm²; vận tốc truyền sóng $a = 3,565 \cdot 10^3$ cm/s; ứng suất cho phép $[\sigma]_{\text{II}} = 175$ kG/cm².
- 5) *Đất nền*: lớp 1 có chiều dày 6,67m là đất sét pha màu xám đen có lẫn hữu cơ, ở trạng thái mềm dẻo, có $q = 1,5$ t/m². Lớp 2 dưới lớp 1, chưa rõ chiều dày, là sét loang lổ, ở trạng thái dẻo cứng đến nửa cứng, lực chống đáy cọc $r = 330$ t/m².
- 6) *Kết quả*:

Loại đệm	Ứng suất tính toán lớn nhất	Ứng suất đo được lớn nhất
Gỗ lim dày 15cm	100,301 kG/cm ²	54,44 kG/cm ²
Gỗ lim dày 5cm	102,660 kG/cm ²	63,33 kG/cm ²

Kết quả trên cho thấy: thí nghiệm đã ghi được tín hiệu về ứng suất và biến dạng. Tại mặt cắt $x = 0,6$ m kết quả đo thực nghiệm sai khác khoảng 40% so với kết quả lý thuyết, song thiên về xu hướng an toàn. Những sai khác trong thí nghiệm này có thể phân tích ở nhiều nhân tố khác nhau, song điều quan trọng là kết quả thí nghiệm đã khẳng định thêm tính đúng đắn của nghiệm bài toán và có thể tham khảo khi áp dụng. Mặt khác, điều rõ ràng là độ cứng của đệm đầu cọc ảnh hưởng khá rõ đến ứng suất trong cọc và thời gian va chạm giữa búa và cọc. Độ cứng của đệm tăng thì ứng suất trong cọc lớn và thời gian va chạm nhỏ.

[45]

- a) Tính với số liệu lấy từ TTKH và TKKT Thủy lợi cho trạm bơm Văn Thái A – Bắc Ninh:

Áp dụng kết quả thí nghiệm khi giải bài toán: va chạm của búa và cọc qua đệm đàn hồi có kể đến lực cản ở mặt bên và lực chống ở đáy cọc không đổi. Hệ số truyền năng lượng η được xác

định là tỷ số công của lực nén $P(t)$ của dệm lên đầu cọc với động năng của búa trước khi va chạm.

$$\eta = \frac{\phi(t)}{T_b} = \frac{2 \int_0^{t_b} P(t)V(t)dt}{MV_b^2} \quad (4.111)$$

- 1) *Đất nền*: $q = 2,46 \text{ t/m}^2$; cọc chống lên lớp đất nền $r = 126 \text{ t/m}^2$.
- 2) *Cọc*: bê tông cốt thép M300#. $\rho = 2400 \text{ kG/m}^3$, kích thước $30 \times 30 \times 1900 \text{ cm}$.
- 3) *Đệm*: gồm hai lớp bao tải và thép, độ cứng đặc trưng $\gamma = 0,25$.
- 4) *Búa*: loại ống dẫn pittông rơi; đầu búa 2,5 t; $H_{\text{max}} = 2,5 \text{ m}$.
- 5) *Kết quả*: khối lượng cọc $m = 4104 \text{ kg}$.

- Cho $\gamma = 0,25$ cố định ứng với λ thay đổi từ $0,9 \div 3,6$. Kết quả cho $\eta = 0,756862$ với $A = 1,239879 \rightarrow m = 3310 \text{ kg}$. Nếu dùng búa có $m = 2500 \text{ kg}$, chiều cao nâng 1,8m thì ứng suất lớn nhất xuất hiện trong cọc khi đóng $\sigma = 171 \text{ kG/cm}^2$ nhỏ hơn 175 kG/cm^2 là ứng suất cho phép của cọc, tại mặt cắt $x = 1 \text{ m}$ kể từ đầu cọc.
- Cho $\lambda = 1,64$ cố định và thay đổi $\gamma = 0,15 \div 0,36$ kết quả cho $\eta_{\text{max}} = 0,705261$ ứng với $\gamma = 0,3004$. Từ đó tìm được độ cứng đệm, chọn được đệm thích hợp với loại búa có sẵn.

b) Tính với số liệu lấy tại công trường cầu kênh giữa đường Bắc Thăng Long – Nội Bài:

Áp dụng kết quả nghiệm khi giải bài toán: va chạm của búa vào cọc, một phần của cọc chịu ma sát mặt bên phân bố đều, đáy cọc chịu lực chống không đổi

- 1) *Đất nền*: $q = 4,46 \text{ t/m}^2$; chiều dày lớp đất này là 8m. Lớp đất tiếp theo là bùn nhão dày 4m, lực cản bỏ qua. Cọc chống lên lớp đất nền $r = 29340 \text{ kG/cm}^2$.

- 2) *Cọc*: bê tông cốt thép M200#, $\rho = 2400 \text{ kG/m}^3$; kích thước $35 \times 35 \times 1200 \text{ cm}$.
 - 3) *Đệm*: gồm hai lớp bao tải và thép; giá trị đặc trưng $\gamma = 0.16$ và $\gamma = 0.185$.
 - 4) *Búa*: loại ống dẫn; đầu búa $m = 2.5 \text{ t}$; $H = 2.5 \text{ m}$. Búa hơi một chiều 6B; $m = 2.560 \text{ t}$; chiều dài di chuyển của pittông 1.37 m .
 - 5) *Tính*: khối lượng cọc $m = 2592 \text{ kg}$.
- Cho $\gamma = 0.16$ cố định và thay đổi $\lambda = 0.9 \div 3.2$ kết quả cho $\eta_{\max} = 0.710061$ khi đó $\gamma = 0.1475$, từ đó $C = 46677.6 \text{ kG/cm}$.
 - Cho $\lambda = 1.41$ cố định và thay đổi $\gamma = 0.15 \div 0.22$ kết quả cho $\eta_{\max} = 0.7$ khi $\gamma = 0.1411$, từ đó $C = 46556.2 \text{ kG/cm}$.

Như vậy, thực tế khi thi công cọc trong môi trường không đồng nhất thì khi cố định đầu búa cần tính toán chọn đệm thích hợp và ngược lại khi cố định cần tính chọn đầu búa thích hợp.

Tính với số liệu lấy tại công trường khi áp dụng kết quả nghiệm giải từ các bài toán sau [37]:

- a) Cọc đóng trong nền đồng nhất đáy cọc tựa trên nền đất yếu.

Các tính toán đã đi đến các kết luận sau:

- 1) Thay đổi chiều dài cọc: chiều dài cọc tăng thì thời gian kết thúc va chạm tăng, ứng suất nén cực đại trong cọc giảm, ứng suất kéo cực đại trong cọc tăng. Từ đó đã đề nghị chọn chiều dài cọc hợp lý để tránh phá hỏng cọc khi đóng.
- 2) Thay đổi độ cứng của đệm đầu cọc: độ cứng của đệm đầu cọc tăng thì thời gian kết thúc va chạm giảm, ứng suất nén cực đại trong cọc tăng và ứng suất kéo cực đại trong cọc cũng tăng. Tác giả đã đề nghị chọn thông số đặc trưng đệm đầu cọc γ hợp lý đảm bảo an toàn và độ tin cậy khi hạ cọc.

- b) Cọc đóng trong nền không đồng nhất hai lớp, đáy cọc tựa trên nền cứng.
- 1) Thay đổi tiết diện ngang cọc: tiết diện ngang cọc tăng thì thời gian kết thúc va chạm giảm, ứng suất nén cực đại trong cọc cũng giảm. Từ đó dẫn đến tính toán chọn tiết diện cọc hợp lý khi chế tạo hay đúc sẵn cọc.
 - 2) Thay đổi độ cứng đệm đàn hồi đầu cọc: độ cứng đệm đầu cọc tăng thì thời gian kết thúc va chạm giảm, ứng suất nén cực đại trong cọc tăng. Như vậy, có thể tính chọn thông số đặc trưng γ hợp lý đảm bảo độ an toàn và tin cậy đối với sức chịu tải của cọc.

Chương 5

TÍNH TOÁN RUNG MẶT VÀ RUNG SÂU

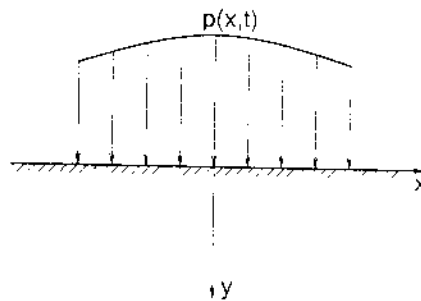
§5.1. TÍNH TOÁN RUNG MẶT

5.1.1. DAO ĐỘNG CỦA STAMP CỨNG TRÊN NỬA MẶT PHẶNG ĐÀN HỒI CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG THẲNG ĐỨNG BẤT KỲ

5.1.1.a. Bài toán Lamb H.

Bài toán Lamb H. thực chất là bài toán về dịch chuyển động lực của nửa mặt phẳng đàn hồi (biến dạng phẳng) khi các tải trọng đã cho thay đổi dọc biên phụ thuộc vào thời gian t .

Trên biên của nửa mặt phẳng đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng thay đổi theo quy luật $p(x, t)$ (hình 5.1). Tìm các dịch chuyển thẳng đứng $v(x, y, t)$ và các dịch chuyển nằm ngang $u(x, y, t)$ của các điểm thuộc nửa mặt phẳng.



Hình 5.1

Phương trình vi phân chuyển động của nửa mặt phẳng viết ở dạng [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

trong đó: $\beta = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1 - 2\vartheta_o}{2(1 - \vartheta_o)}}; c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_o}}; c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_o}};$

$$\lambda = \frac{E_o \vartheta_o}{(1 + \vartheta_o)(1 - 2\vartheta_o)}; \mu = \frac{E_o}{2(1 + \vartheta_o)}.$$

c_1, c_2 - tốc độ truyền sóng dọc và sóng ngang trong nửa không gian đàn hồi;

$\lambda, \mu, E_o, \vartheta_o, \rho_o$ - các hằng số Lamê, môđun đàn hồi, hệ số Poisson, mật độ vật liệu của nửa không gian;

$\bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{a}, \bar{t} = c_2 \frac{t}{a}$ - các biến số không thứ nguyên.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$ - các biến số thực;

a - thông số bất kỳ có thứ nguyên là chiều dài (chẳng hạn: nếu tải trọng đặt trên chiều dài hữu hạn là l thì thường đặt a bằng nửa chiều dài đoạn đặt lực: $l = 2a$).

Áp dụng phép biến đổi Laplace, đưa phương trình (5.1) về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} &= \beta^2 s^2 \bar{u}; \\ \beta^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} &= \beta^2 s^2 \bar{v}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

ở đây: s - thông số không thứ nguyên của phép biến đổi Laplace:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, s) &= \int_0^\infty u(x, y, t) e^{-st} dt; \\ \bar{v}(x, y, s) &= \int_0^\infty v(x, y, t) e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Thực hiện phép biến đổi ngược Laplace:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u(x, y, s) e^{st} ds; \\ v(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v(x, y, s) e^{st} ds. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nghiệm của phương trình (5.2) tìm ở dạng:

$$\bar{u} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}; \quad \bar{v} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}. \quad (5.5)$$

Khi này, việc giải phương trình (5.2) dẫn đến giải các phương trình sóng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} - \beta^2 s^2 \bar{\varphi} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - s^2 \bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nghiệm của phương trình (5.6) được tìm theo phương pháp biến đổi Furiê. Các biến đổi Furiê của hàm $\varphi(x, y, s)$ và $\psi(x, y, s)$ có dạng:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y, s) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, t) e^{i\xi x} dx; \\ \bar{\psi}(\xi, y, s) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, t) e^{i\xi x} dx, \end{aligned} \quad (5.7)$$

ở đây: ξ - thông số không thứ nguyên của phép biến đổi Furiê.

Nếu các biến đổi Furiê đã biết, thì chính hàm phải tìm sẽ có được trên cơ sở phép biến đổi ngược:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x, y, s) &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi, y, s) e^{-i\xi x} d\xi; \\ \bar{\psi}(x, y, t) &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(\xi, y, s) e^{-i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Bây giờ, ta sử dụng các phép biến đổi Furiê trên (theo tọa độ x), phương trình (5.6) dẫn tới dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (\xi^2 + \beta^2 s^2) \varphi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (\xi^2 + s^2) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Theo phương pháp đã chỉ (xem 2.4.1 chương 1), nghiệm của phương trình (5.9) sẽ tìm ở dạng:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, y, s) &= A(\xi, s) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}; \\ \psi(\xi, y, s) &= B(\xi, s) e^{-y\sqrt{\xi^2 + s^2}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Các hệ số $A(\xi, s), B(\xi, s)$ được tìm từ các điều kiện biên đối với ứng suất pháp $\sigma_y(x, y, t)$ và ứng suất tiếp $\tau_{xy}(x, y, t)$:

$$\sigma_y(x, 0, t) = -p(x, t); \quad \tau_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad (5.11)$$

$$\text{hay:} \quad \overline{\sigma}_y(x, 0, t) = -\overline{p}(x, t); \quad \overline{\tau}_{xy}(x, 0, t) = 0.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A(\xi, s) &= -\frac{a^2}{\mu} \frac{2\xi^2 + s^2}{F(\xi, s)} p(\xi, s); \\ B(\xi, s) &= \frac{2a^2}{\mu} \frac{i\xi\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} p(\xi, s), \end{aligned} \quad (5.12)$$

ở đây: biến đổi hai lần (Laplace và Furiê) của hàm đã cho $p(x, t)$ có dạng:

$$\overline{p}(\xi, s) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t p(x, t) e^{i\xi x - st} dt dx, \quad (5.13)$$

$$\text{và hàm:} \quad F(\xi, s) = (2\xi^2 + s^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2}. \quad (5.14)$$

Cuối cùng, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
 v(x, y, s) &= \\
 &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} \left[(2\xi^2 + s^2) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}} - 2\xi^2 e^{-y\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] p(\xi, s) e^{-ix\xi} d\xi :
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(x, y, s) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi p(\xi, s)}{F(\xi, s)} \left[(2\xi^2 + s^2) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2} e^{-y\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] e^{-ix\xi} d\xi :
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} \left[(2\xi^2 + s^2) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi^2 e^{-y\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] p(\xi, s) e^{-ix\xi + st} d\xi ds :
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi p(\xi, s)}{F(\xi, s)} \left[(2\xi^2 + s^2) e^{-y\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2} e^{-y\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] e^{ix\xi - st} d\xi ds .
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Khi $y = 0$ thì:

$$\bar{v}(x, 0, s) = \frac{s^2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} p(\xi, s) e^{-ix\xi} d\xi : \tag{5.19}$$

$$\bar{u}(x, 0, s) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi p(\xi, s)}{F(\xi, s)} \left(2\xi^2 + s^2 - 2\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2} \right) e^{-ix\xi} d\xi : \tag{5.20}$$

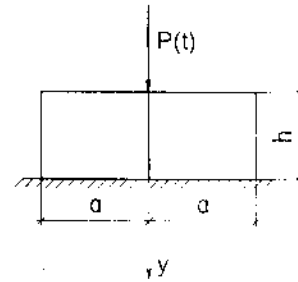
$$v(x, 0, t) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} p(\xi, s) e^{ix\xi + st} d\xi ds : \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \\
 &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi p(\xi, s)}{F(\xi, s)} \left(2\xi^2 + s^2 - 2\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2} \sqrt{\xi^2 + s^2} \right) e^{-ix\xi + st} d\xi ds
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Như vậy, bài toán khảo sát dẫn tới tích phân hai lớp (5.17), (5.18) hay (5.21), (5.22) (đối với biên) khi đã biết hàm $p(x, t)$

5.1.1.b. Dao động của Stamp cứng trên nửa mặt phẳng đàn hồi

Khảo sát tấm cứng tuyệt đối chiều rộng bằng đơn vị, chiều dài $2a$, chịu tác dụng của lực thẳng đứng thay đổi theo thời gian $P(t)$. Yêu cầu tìm phản lực pháp của nền $p(x, t)$ và dịch chuyển thẳng đứng của tấm $w(t)$. Ma sát giữa tấm và nửa mặt phẳng bỏ qua (hình 5.2).



Hình 5.2

Phương trình vi phân chuyển động của tấm viết ở dạng (trong các biến không thứ nguyên) [13, 22]:

$$M_o \frac{c_2^2}{a^2} \frac{d^2 w(t)}{dt^2} = P(t) - R(t), \quad (5.23)$$

ở đây: $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_o}}; \mu = \frac{E_o}{2(1 + \nu_o)}$

M_o - khối lượng của tấm;

$R(t)$ - hợp các phản lực của nền:

$$R(t) = 2a \int_0^1 p(x, t) dx. \quad (5.24)$$

Điều kiện tiếp xúc có dạng:

$$w(t) = v(x, 0, t). \quad (|x'| \leq 1). \quad (5.25)$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace và chú ý tới (5.25), phương trình (5.23) nhận được dạng:

$$M_o \left(\frac{c_o s}{a} \right)^2 \bar{v}(x, 0, s) = \bar{P}(s) - \bar{R}(s), \quad (|x| \leq 1). \quad (5.26)$$

Thay (5.19) vào (5.26), sử dụng (5.13), ta dẫn tới phương trình tích phân cặp trong miền khảo sát:

$$m_o \sqrt{2\pi s} \int_0^x \frac{\sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} p(\xi, s) \cos x\xi d\xi = \bar{P}(s) - \bar{R}(s), \quad (|x| \leq 1);$$

$$\int_0^x p(\xi, s) \cos x\xi d\xi = 0, \quad (|x| > 1). \quad (5.27)$$

ở đây: $m_o = \frac{2 h \rho}{\pi a \rho_o}$;

h - độ cao của tấm;

ρ - mật độ vật liệu tấm;

Hàm $F(\xi, s)$ xác định theo biểu thức (5.14).

Từ (5.27) ta nhận được hàm $\bar{p}(x, s)$ và sau đó xác định được hàm gốc theo công thức ngược:

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{p}(x, s) e^{ts} ds. \quad (5.28)$$

Nói chung, để nhận được nghiệm chính xác đối với hàm $p(x, t)$ là không thể. Do đó, ta chọn hướng tìm các phương pháp gần đúng có hiệu quả để giải bài toán.

Trong các công trình nghiên cứu của nhiều tác giả, phương trình vi phân dao động của Stamp được dẫn đến phương trình Fretton II và được giải bằng phương pháp số hay ở dạng chuỗi. Một phương pháp đã biết là dẫn phương trình tích phân lặp trực tiếp tới bài toán đại số bằng cách biểu diễn nghiệm bởi hệ hàm trực giao. Trong trường hợp này, để nhận được nghiệm hữu hiệu đảm bảo hội tụ nhanh cần phải làm rõ thực chất tính kỳ dị của hàm phải tìm. Người ta đã chứng minh được: phương pháp đa thức trực giao đủ hữu hiệu khi giải các bài toán động lực. Nghiệm của bài toán khảo

sát sẽ được tìm ở dạng khai triển chuỗi theo đa thức trực giao Чебышев loại I:

$$p(x,t) = \sum_{k=0}^n A_{2k}(t) \frac{T_{2k}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5.29)$$

với: $A_{2k}(t)$ - các hàm chưa biết, phụ thuộc vào thời gian t .

Biến đổi hai lần (Laplace và Furiê) hàm (5.29) có dạng:

$$\bar{p}(\xi, s) = \alpha \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \bar{A}_{2k}(s) J_{2k}(\xi). \quad (5.30)$$

Sau khi tiến hành hàng loạt các biến đổi và tính toán, ta nhận được các kết quả [22]:

a) Hệ phương trình đại số để xác định các ẩn số $\bar{A}_{2k}(s)$:

$$\begin{cases} \bar{A}_0(s) + m_\sigma s^2 \sum_{k=0}^r \bar{A}_{2k}(s) C_{2k,0}(s) = \bar{D}_0(s) \\ \sum_{k=0}^r (-1)^k \bar{A}_{2k}(s) C_{2k,2r}(s) = \bar{D}_{2r}(s). \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\text{Từ đó: } \bar{A}_{2k}(s) = \frac{\Delta_{2k}(s)}{\Delta(s)}, \quad (5.32)$$

ở đây: $\Delta(s)$ - định thức của hệ (5.31);

$\Delta_{2k}(s)$ - định thức nhận được khi thay các cột tương ứng của ma trận bằng các thành phần tự do:

$$\bar{D}_0(s) = \frac{\bar{P}(s)}{\pi a}; \quad \bar{D}_{2r}(0) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Áp dụng công thức biến đổi Laplace ngược, ta nhận được:

$$\Delta_{2k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Delta_{2k}(s)}{\Delta(s)} e^{ts} ds. \quad (5.33)$$

b) Dịch chuyển thẳng đứng của Stamp tìm được từ phương trình (5.23)

$$\bar{w}(s) = \frac{1}{\pi \mu m_0} \frac{1}{s^2} [\bar{P}(s) - \pi \alpha A_0(s)]. \quad (5.34)$$

Từ đó $w(t)$ được xác định bằng cách tính tích phân chập:

$$w(t) = \frac{1}{\pi \mu m_0} \int_0^t (t - \tau) [P(\tau) - \pi \alpha A_0(\tau)] d\tau. \quad (5.35)$$

5.1.2. LÀM CHẶT ĐẤT BẰNG MÁY RUNG MẶT

5.1.2.a. Phương pháp rung mặt và nguyên lý làm việc của máy rung mặt

Phương pháp rung mặt là phương pháp đặt bộ kích động rung lên mặt vật. Nhờ tác dụng của lực kích động rung truyền tới vật liệu làm cho vật liệu bị lèn chặt hơn.

Phương pháp rung mặt thường được sử dụng để lèn chặt nền đường, nền các công trình xây dựng (nền nhà, nền đất khi đắp đê, đập...), lèn chặt các lớp trong kết cấu áo đường ô tô bằng bê tông ápchân, bê tông ximăng, cấp phối đá dăm, đá gia cố ximăng... Hiệu quả lèn chặt có thể đạt độ dày từ 0,5 ÷ 1,0 m. Máy rung mặt lèn chặt nền đất qua một tấm thép cứng hay con lăn rung (lu rung tự hành hay lu rung có xe kéo). Các tấm thép cần phải có độ cứng đáng kể so với độ cứng của nền đất. Do đó, với độ chính xác cao ta có thể coi tấm tiếp xúc cùng máy rung như một vật rắn tuyệt đối thực hiện rung trên nền đất.

Khi máy rung làm việc, ngoài trọng lượng bản thân còn có lực quán tính ly tâm do mômen lệch tâm (quả văng) sinh ra. Lực này tác dụng lên vật liệu, gây ra hiệu ứng di chuyển rung làm vật liệu bị lèn chặt lại. Dưới tác dụng của lực rung động các hạt khoáng và đất nền bị dao động, làm cho lực ma sát và lực dính giữa các hạt giảm đi. Do lực kích rung và trọng lượng bản thân, các hạt khoáng và đất chuyển dịch theo phương thẳng đứng xuống tới vị trí ổn định, sắp xếp lại lấp đầy lỗ rỗng. Các hạt khoáng nhỏ hơn sẽ chèn đầy vào các khe rỗng giữa các hạt làm độ rỗng của đất giảm đi, độ

chặt tăng lên, độ thấm nước giảm, khả năng chống biến dạng của nền đất dưới công trình tăng lên.

Hiệu quả đầm nén bằng phương pháp rung phụ thuộc vào biên độ, tần số dao động, độ ẩm, số lần đầm nén cũng như cách tiếp xúc của bề mặt máy rung với nền. Khi rung, lực ma sát động giữa các hạt khoáng nhỏ so với lực ma sát tĩnh. Các hạt khoáng sẽ di chuyển càng nhanh khi lực dính giữa chúng càng nhỏ và độ chênh lệch về kích thước giữa các hạt càng lớn. Vì vậy, đối với đất rời rạc gồm các hạt có độ thô khác nhau, lực kết dính nhỏ thì sử dụng máy rung để lèn chặt đất nền càng hiệu quả. Khi cần đầm nén ở độ sâu lớn ta thường dùng thiết bị rung có tần số rung nhỏ, biên độ rung lớn và ngược lại. Thực tế, trong quá trình thiết bị rung làm việc, ta có thể điều chỉnh tần số rung cho phù hợp bằng cách thay đổi số vòng quay của động cơ.

Giá sử lực kích động của máy rung tác dụng theo trục đối xứng thẳng đứng qua trọng tâm máy rung, khi đó bài toán dao động cưỡng bức thẳng đứng của máy rung mặt dẫn tới bài toán dao động của vật rắn trên nửa không gian đàn hồi. Nghiệm chính xác của bài toán khảo sát, như đã chỉ ra ở phần trên còn chưa tìm được. Nếu ta thiết lập mô hình nền đất như môi trường đàn hồi và thay nó bằng lò xo lý tưởng (như một vài mô hình giải trong chương 3) là không thể, vì trong trường hợp tồn tại dao động cưỡng bức của máy rung mặt, lực cản dao động của cấu trúc nền đất thực chất phụ thuộc đáng kể vào tính chất quán tính của nó.

5.1.2.b. Các yếu tố ảnh hưởng đến độ chặt của nền đất khi rung và một vài chỉ tiêu đánh giá hiệu quả đầm nén

Độ rỗng và độ ẩm là những đặc trưng vật lý cơ bản của đất cát. Lực cản của đất dưới tác dụng của tải trọng ngoài, tính ổn định của đất, lực ma sát và lực dính của đất, độ ngậm nước và các tính chất cơ học khác của đất phụ thuộc vào độ rỗng và độ ẩm.

Gọi γ_r, γ_k, W tương ứng là trọng lượng riêng của đất, trọng lượng khối và độ ẩm của đất. Giá trị hệ số độ rỗng ε biểu thị bằng quan hệ:

$$\varepsilon = (1 + W) \frac{\gamma_r}{\gamma_k} - 1. \quad (5.36)$$

Độ chặt lớn nhất của đất đạt được khi sự phân bố các hạt trong đất đậm đặc nhất, nó tương ứng với giá trị nhỏ nhất của hệ số độ rỗng ε_* . Gọi giá trị hệ số độ rỗng của đất tối xốp là ε_o . Những giá trị tới hạn ε_* và ε_o là các đặc tính vật lý của đất, không phụ thuộc vào tác dụng ngoài và độ ẩm của nó. Chúng được xác định bởi hình dạng và tính đồng đều của các phần tử. Thực tế, khó khăn lớn trong thực nghiệm là xác định hệ số độ rỗng nhỏ nhất ε_* , vì khi sử dụng áp lực tĩnh không thể làm đất có trạng thái lèn chặt lớn nhất. Do đó, để xác định ε_* người ta phải áp dụng khả năng làm chặt đất do tác dụng rung động. Độ chặt cực đại (δ_{max}) được đặc trưng bằng hiệu các giá trị giới hạn của các hệ số độ rỗng:

$$\delta_{max} = \varepsilon_o - \varepsilon_*$$

Nếu ban đầu đất ở trạng thái tối xốp nhất và dưới tác dụng bên ngoài độ rỗng của đất được đặc trưng bằng hệ số ε , thì độ chặt của đất (δ) bằng:

$$\delta = \varepsilon_o - \varepsilon.$$

Người ta thường dùng tỷ số $\frac{\delta}{\delta_{max}}$ để đặc trưng cho độ chặt của đất.

ký hiệu là D :

$$D = \frac{\delta}{\delta_{max}} = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon}{\varepsilon_o - \varepsilon_*}.$$

D gọi là hệ số độ chặt của đất. Giá trị của nó thay đổi trong khoảng từ 1 đến 0. Trong trạng thái tối xốp nhất $\varepsilon = \varepsilon_o$ nên $D = 0$; còn trong trạng thái lèn chặt nhất $\varepsilon = \varepsilon_*$ nên $D = 1$.

Căn cứ vào hệ số độ chặt, các loại đất cát chia thành ba nhóm:

- Đất cát lèn chặt: $\frac{2}{3} < D < 1$;
- Đất cát chặt trung bình: $\frac{1}{3} < D < \frac{2}{3}$;
- Đất cát rời xốp: $0 < D < \frac{1}{3}$.

Trong nhiều trường hợp, người ta còn sử dụng hệ số rời xốp K của đất thay cho hệ số độ chặt của đất:

$$K = \frac{\varepsilon - \varepsilon_*}{\varepsilon_n - \varepsilon_*}.$$

Giữa K và D có quan hệ: $K = 1 - D$.

Ta xét cụ thể một số quan hệ sau:

- Ảnh hưởng của độ ẩm đến độ chặt của nền đất khi rung:

Theo [3, 4], giữa các hệ số ε và η (gia tốc rung) tồn tại sự phụ thuộc không tuyến tính. Ta có:

$$\varepsilon = \varepsilon(\eta).$$

Lấy với gần đúng thứ nhất, có thể coi sự phụ thuộc này tuyến tính và phương trình vi phân biểu thị sự phụ thuộc giữa ε và η có thể viết:

$$\frac{d\varepsilon}{d\eta} = -\beta(\varepsilon - \varepsilon_*). \quad (5.37)$$

ở đây: β - hệ số tỷ lệ hay hệ số lèn chặt khi rung.

Vì khi $\eta = 0$, thì $\varepsilon = \varepsilon(0)$, nên:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_*}{\text{tg}\alpha_0}.$$

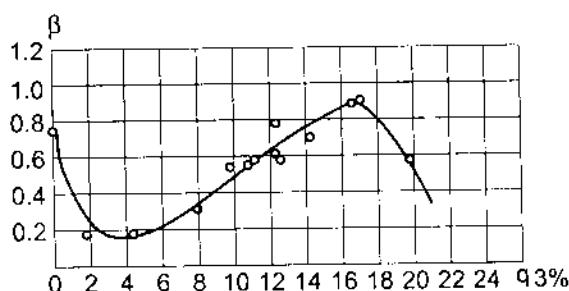
ở đây: α_0 - góc lệch của đường cong $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ khi $\eta = 0$.

Các tài liệu thực nghiệm cho thấy, đối với đất cát:

- Nếu độ ẩm 5% thì hệ số β giảm đáng kể. Độ chặt của nền đất giảm khi thực hiện làm chặt nền bằng phương pháp rung.
- Khi độ ẩm tăng thì β tăng. Độ ẩm đạt 16 ÷ 17% thì β lớn nhất. Trong trường hợp này, nền đất được làm chặt tốt nhất bằng phương pháp rung.
- Nếu độ ẩm vượt quá 16 ÷ 17% thì β lại giảm.

Ta có thể nói: mỗi loại đất cho ta một độ ẩm tốt nhất. Độ ẩm tốt nhất là độ ẩm với công suất đầm nén không đổi sẽ cho ta độ chặt lớn nhất. Do đó, khi sử dụng phương pháp rung để lèn chặt đất, độ ẩm thực tế của nền đất chưa đạt độ ẩm tốt nhất cần phải tưới thêm nước cho đạt độ ẩm tốt nhất. Song cũng lưu ý rằng: nếu tưới quá yêu cầu độ ẩm tốt nhất thì phương pháp đầm nén bằng rung động cũng rất khó khăn khi đẩy bớt nước ra khỏi nền đất.

Dựa vào tài liệu thí nghiệm, ta có thể biểu thị quan hệ trên đồ thị giữa độ chặt của nền đất khi rung với độ ẩm của nó (hình 5.3).



Hình 5.3

- Ảnh hưởng của biên độ và tần số rung đến độ chặt của nền đất khi rung:

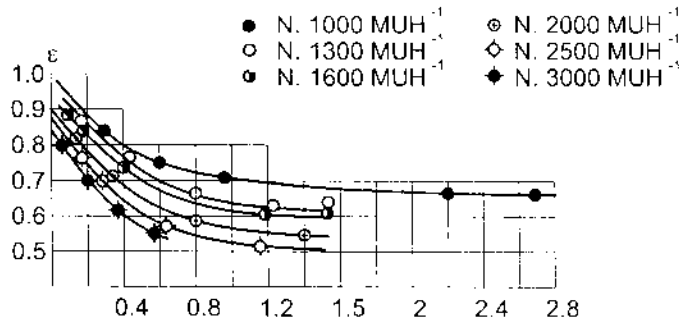
Sự thay đổi hệ số độ rỗng phụ thuộc vào gia tốc dao động, nghĩa là phụ thuộc vào biên độ và tần số của máy rung. Trên đồ thị

(hình 5.4) biểu thị sự phụ thuộc độ rỗng của đất cát vào biên độ dao động thẳng đứng ứng với các tần số dao động khác nhau.

Từ đồ thị, ta nhận thấy:

- Nếu tần số dao động không đổi, thì hệ số rỗng giảm khi biên độ dao động tăng.
 - Nếu biên độ dao động không đổi, còn tần số dao động thay đổi thì hệ số rỗng tăng khi tần số dao động giảm.
- Sự phụ thuộc giữa độ chặt của nền đất khi đầm nén với số lần đầm nén.

Các tài liệu thực nghiệm khẳng định rằng, khi số lần đầm nén tăng lên thì độ chặt của nền đất cũng tăng. Vấn đề là: cần phải chọn số lần đầm nén tối ưu (xác định) để với độ sâu đã cho nền đất đạt tới độ chặt yêu cầu. Qua thực tế và tài liệu thực nghiệm, người ta nhận thấy: hiệu quả các lần đầm nén càng về sau càng giảm.



Hình 5.4

Sự biến đổi độ chặt của đất với số lần đầm nén được cho trên đồ thị (hình 5.5). Từ đồ thị, ta có một số nhận xét:

- Với số lần đầm nén trong khoảng 1 ÷ 12 lần thì độ chặt của nền đất tăng dần, còn sau đó dù tăng số lần đầm nén độ chặt của nền đất cũng không tăng.

- Cùng một số lần đầm nén, ở các độ sâu khác nhau (kể từ mặt nền xuống), nền đất có độ chặt khác nhau.

Trong nhiều năm trở lại đây, trên thế giới cũng như ở nước ta đã sử dụng rộng rãi các máy rung để lèn chặt đất nền đường hay các công trình xây dựng nhà, thủy lợi... Người ta thường sử dụng các chỉ tiêu sau để đánh giá hiệu quả đầm nén bằng máy rung:

a) Chỉ tiêu tỷ số P_k/Q [46]:

P_k - lực kích rung; Q - trọng lượng của phần chấn động rung.

Hiệu quả đầm nén được xác định bằng tỷ số P_k/Q , ở đây P_k tỷ lệ với biên độ dao động còn trọng lượng Q của bộ chấn động phải đủ lớn để áp lực tĩnh đơn vị (Q/F , F - diện tích đáy bộ chấn động) không được nhỏ hơn các giá trị sau:

- Đối với cát ẩm ướt: $300 \div 400 \text{ kG/cm}^2$;
- Đối với cát độ ẩm tốt nhất: $600 \div 1000 \text{ kG/cm}^2$;
- Đối với đất á cát độ ẩm tốt nhất: $1000 \div 2000 \text{ kG/cm}^2$.

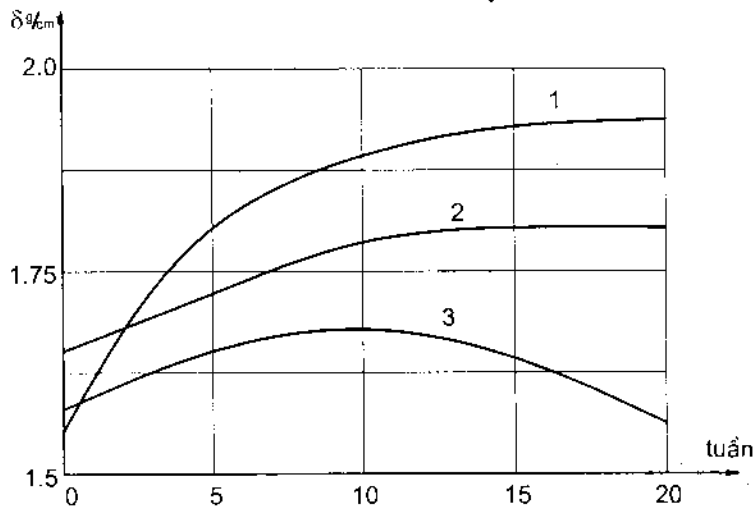
Hiệu quả đầm nén bằng lu rung phụ thuộc vào tần số, biên độ dao động và tải trọng tác dụng lên nền đất.

Quan hệ giữa độ chặt của nền đất khi đầm nén bằng lu rung với tỷ số P_k/Q cho trên đồ thị (hình 5.6). Như thế, tỷ số P_k/Q tốt nhất có những trị số khác nhau và phụ thuộc vào tần số dao động (bảng 5.1).

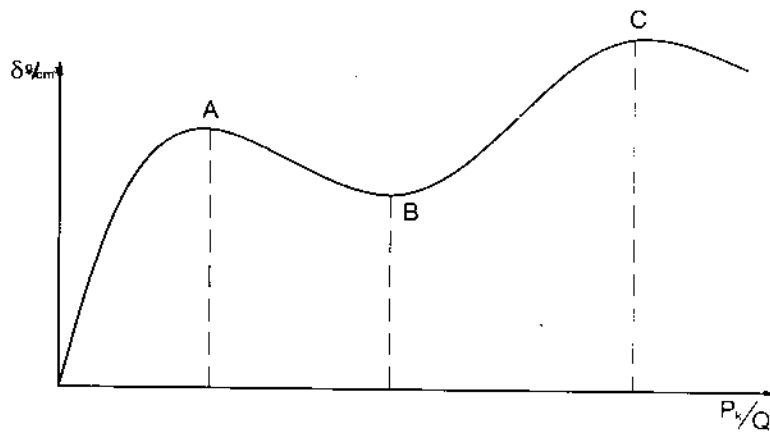
Khi tần số dao động của máy rung bằng hay gần bằng tần số dao động riêng của hệ (gồm máy rung và khối đất rung theo) thì xuất hiện cộng hưởng, hiệu quả đầm nén sẽ tốt nhất. Tuy nhiên, việc xác định chính xác tần số riêng của hệ là vấn đề còn khó khăn đáng kể về toán học, cho đến nay chưa có phương pháp nào đáng tin cậy.

Bảng 5.1

Tần số dao động	750 ÷ 1500	1500 ÷ 3000	3000 ÷ 5000
Tỷ số P_k/Q tốt nhất	0,9 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,4	1,4 ÷ 2,3

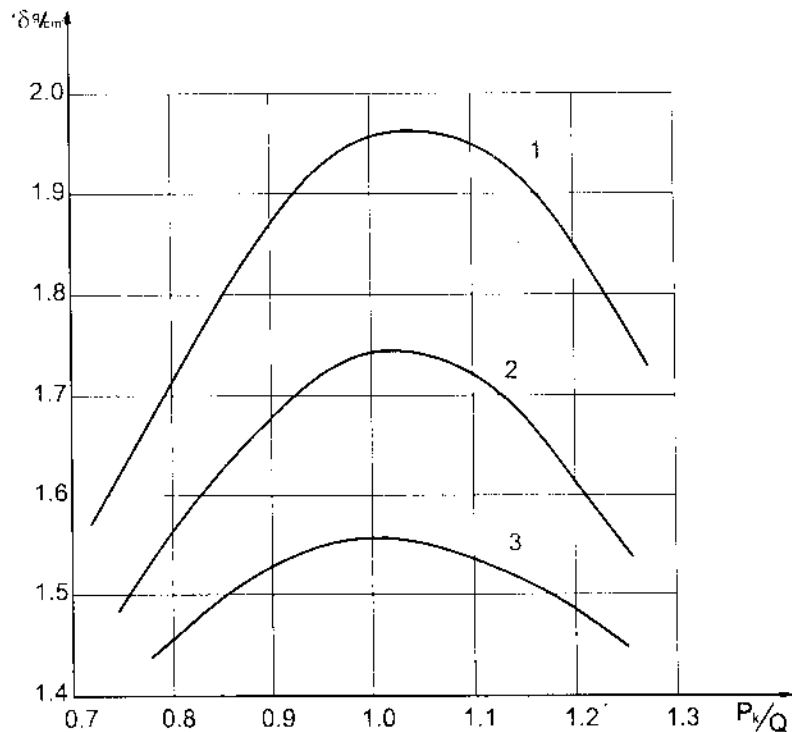


Hình 5.5



Hình 5.6

Ngoài ra, ta cũng có thể khảo sát quan hệ giữa độ chặt của nền đất khi đầm nén bằng máy rung với tần số đã cho (chẳng hạn 750 ÷ 1500 v/f) và sự thay đổi của tỷ số $\frac{P_k}{Q}$. Trên đồ thị (hình 5.7) cho quan hệ giữa δ và tỷ số $\frac{P_k}{Q}$ ở các độ sâu h khác nhau (h - độ sâu dưới mặt nền).



Hình 5.7

b) Chỉ tiêu biên độ lý thuyết A_0 [47]

Dựa vào thông số $\frac{M_1}{L} \cdot \sqrt{A_0}$ theo bảng phân cấp kèm theo (bảng 5.2). Ở đây: M_1 - khối lượng tổng cộng tác dụng lên một bánh chủ động của lu rung (kg); L - chiều dài của bánh chủ động của lu rung (cm); A_0 - biên độ lý thuyết, tính bằng mm.

Bảng 5.2

Cấp	$\frac{M_1}{L} \sqrt{A_0}$	A_0
	15 ÷ 25	$A_0 \geq 0,6$
Cấp V_1	> 25	$A_0 = 0,6 \div 0,8$
	25 ÷ 40	$A_0 \geq 0,8$
Cấp V_2	> 40	$A_0 = 0,8 \div 1,0$
	40 ÷ 55	$A_0 \geq 1,0$
Cấp V_3	> 55	$A_0 = 1,0 \div 1,3$
	55 ÷ 70	$A_0 \geq 1,3$
Cấp V_4	> 70	$A_0 = 1,3 \div 1,6$
Cấp V_5	> 70	$A_0 \geq 1,6$

5.1.2.c. Thiết lập và giải bài toán về lý thuyết rung mặt

Ta xét bài toán đầm chặt nền đất bằng máy rung mặt. Lực do máy rung tác dụng lên nền đất được truyền qua đế máy theo phương thẳng đứng. Bài toán dao động cưỡng bức của máy rung theo hướng thẳng đứng dẫn đến bài toán dao động của Stamp trên nửa không gian đàn hồi. Để tính ảnh hưởng của tính chất quán tính của khối đất nền rung theo, ta coi đế máy rung là tấm mềm tuyệt đối. Máy rung có khối lượng M . Theo phương pháp ở phần 5.1.1.b, phương trình vi phân dao động cưỡng bức của máy rung theo phương thẳng đứng (trục Oy) viết ở dạng:

$$M\ddot{y} + R\dot{y} = Pe^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (5.38)$$

trong đó: R - biên độ của phản lực nền đất tác dụng lên đế máy rung;
 φ - góc trượt pha giữa lực kích động của máy rung và phản lực của nền đất;
 ω - tần số của máy rung.

Để giải phương trình (5.38) cần phải biết sự phụ thuộc của phản lực nền đất R và giá trị dịch chuyển động lực thẳng đứng y của đế máy rung. Việc xác định chính xác quan hệ này như đã chỉ ra trong 5.1.1 là không thể. Khi coi đế máy rung là tấm tròn và dịch chuyển động lực của đế máy theo phương thẳng đứng là giá trị trung bình của các dịch chuyển ở tâm và trên biên, trong công trình của mình O.Я. Шехтер đã tiến hành thực nghiệm và thực hiện hàng loạt tính toán phức tạp, để nghị sử dụng quan hệ sau:

$$y = -\frac{R}{r_0 \mu} (f_1 + if_2) e^{i\omega t}, \quad (5.39)$$

ở đây: μ - môđun đàn hồi trượt của nền đất đã được lên chặt;
 r_0 - bán kính của đế máy rung. Nếu F là diện tích đế máy rung thì:

$$r_0 = \sqrt{\frac{F}{\pi}};$$

f_1, f_2 - các hàm của thông số χ :

$$\chi = 2\pi \frac{r_0}{L_B};$$

L_B - chiều dài của sóng trượt phát ra từ máy rung.

Với các giá trị đã cho của χ , các hàm f_1, f_2 được thiết lập theo đồ thị (hình 5.8):

σ - môđun đàn hồi trượt.

Đồ thị hàm f_j :

1 với $\sigma = 0$;

2 với $\sigma = 0,25$;

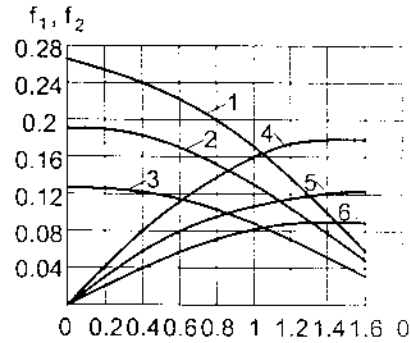
3 với $\sigma = 0,5$.

Đồ thị hàm f_2 :

4 với $\sigma = 0$;

5 với $\sigma = 0,25$;

6 với $\sigma = 0,5$.



Hình 5.8

Đạo hàm hai vế của (5.39) hai lần theo thời gian, thay kết quả nhận được vào (5.38), ta có:

$$\left[\frac{M\omega^2}{r_o\mu} (f_1 + if_2) + 1 \right] \text{Re}^{i\omega t} = P e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Chú ý rằng:

$$P e^{i(\omega t + \varphi)} = P e^{i\omega t} e^{i\varphi}; \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Từ đẳng thức trên, ta tìm được:

$$R = \frac{P}{\sqrt{\left(\frac{M\omega^2}{r_o\mu} f_1 + 1 \right)^2 + \left(\frac{M\omega^2}{r_o\mu} f_2 \right)^2}}; \quad (5.40)$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{\frac{M\omega^2}{r_o\mu} f_2}{\frac{M\omega^2}{r_o\mu} f_1 + 1}$$

Thay biểu thức R vào phần phải đẳng thức (5.39) và khi bỏ phần ảo, ta tìm được biên độ dao động cường bức thẳng đứng của máy rung:

$$A = \frac{P}{r_o \mu} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{\left(\frac{M\omega^2}{r_o \mu} f_1 + 1\right)^2 + \left(\frac{M\omega^2}{r_o \mu} f_2\right)^2}} \quad (5.41)$$

Góc trượt pha giữa lực kích động và dịch chuyển động lực theo phương thẳng đứng được xác định theo biểu thức:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{f_2}{f_1 + \frac{M\omega^2}{r_o \mu} (f_1 + f_2)} \quad (5.42)$$

Những công thức nhận được chỉ ra rằng: mặc dù trong phương trình xuất phát (5.38) không tính đến phản lực giảm chấn của đất, các biên độ dao động khi thay đổi tần số lực kích động không tiến đến vô cùng như điều đó đã có trong hệ đàn hồi lý tưởng. Do đó, ngay cả khi coi nền đất là môi trường đàn hồi lý tưởng thì vẫn tồn tại ảnh hưởng của tác dụng giảm chấn lên dao động của máy rung. Điều này được giải thích là: năng lượng dao động phát ra từ máy rung bị hao tán liên tục và vì vậy, dao động của máy rung trong nửa không gian đàn hồi tắt dần theo thời gian. Cường độ tắt dần của dao động phụ thuộc vào tính chất đàn hồi của đất.

Cũng theo phương pháp của О.Я. Шехтер, việc tính biên độ dao động cường bức thẳng đứng của máy rung mặt, có thể tiến hành theo công thức (3.5) (xem §3.1 chương 3):

$$A = K \cdot A_*$$

trong đó như đã biết: K - hệ số biên độ được xác định theo (3.6)

hoặc (3.7);

A_* - biên độ giới hạn.

Trong trường hợp này, khi tính toán coi nền đất như lò xo đàn hồi lý tưởng tuân theo hai điều kiện:

- 1) Giá trị số của hệ số tắt dần η cần phải lấy theo đồ thị thay đổi theo tỷ số hệ số tắt dần với tần số dao động riêng thẳng đứng phụ thuộc vào giá trị q bằng (hình 5.9):

$$q = \frac{\pi^2}{\gamma_k} \frac{\sigma_t}{\sqrt{F}}, \quad (5.43)$$

ở đây: σ_t - áp lực tĩnh do đế máy tác dụng lên nền đất (trị số này thường không vượt quá $0,20 \div 0,30 \text{ kG/cm}^2$, ngay cả đối với máy rung công suất lớn).

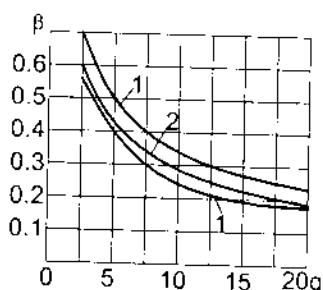
Các số liệu tính toán chỉ ra rằng: sự hao tán năng lượng của máy rung xảy ra rất mạnh.

- 2) Khối lượng rung theo cùng máy rung cần phải lấy bằng:

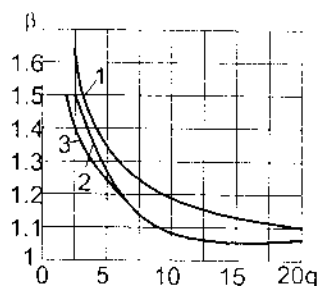
$$m = \beta m_o, \quad (5.44)$$

ở đây: m_o - khối lượng của máy rung.

Hệ số β được lấy phụ thuộc vào q và các tính chất đàn hồi của đất theo đồ thị (hình 5.10).



Hình 5.9



Hình 5.10

5.1.2.d. Tính độ sâu lèn chặt

Ta xây dựng hệ thức gần đúng xác định độ sâu lèn chặt nền đất bằng máy rung với giả thiết: máy rung tạo ra sóng mặt Рэлея truyền vào trong nền đất.

Tác dụng của máy rung lên nền được thay bằng lực tập trung thẳng đứng $Pe^{i\omega t}$ đặt dọc theo biên của nửa không gian dao động (mặt đất nền). Theo phương pháp và kết quả đã chỉ ra trong 2.4.1 chương 1, biểu thức đối với thành phần thẳng đứng của sóng có thể viết ở dạng:

$$V = \left\{ -a_* e^{-\alpha y} - b_* e^{-\beta y} \right\} \frac{P}{\mu} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{L} x\right). \quad (5.45)$$

Đối với cát được lèn chặt, hệ số Poisson bằng 0.25 thì a_* , b_* , α , β có các giá trị sau [3]:

$$a_* = 0.25; b_* = 0.43; \alpha = 0.85 \frac{2\pi}{L};$$

$$\beta = 0.39 \frac{2\pi}{L}; \mu = 0.4E.$$

Biểu thức (5.45) viết được:

$$V = \left\{ -0.25e^{-0.85 \frac{2\pi}{L} y} - 0.43e^{-0.39 \frac{2\pi}{L} y} \right\} \frac{P}{0.4E} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{L} x\right). \quad (5.46)$$

ở đây: L - chiều dài lan truyền sóng:

$$L = 2\pi \frac{a}{\omega}; \quad (5.47)$$

a - tốc độ truyền sóng.

Tốc độ truyền sóng đàn hồi $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; tốc độ truyền sóng dẻo

$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}$ được xác định theo thực nghiệm.

Ta dẫn ra một số giá trị của a và a_1 đối với một số loại đất theo bảng 5.3. Với: ω là tần số của máy rung; E là môđun đàn hồi của đất đã được lèn chặt.

Bảng 5.3

Loại đất	a (m/s)	a_1 (m/s)
Cát tươi	200	100
Cát chưa bị phá hoại	500	250
Đất thịt, cát pha	250	150
Đất thịt, cát pha chưa bị phá hoại	700	350
Sét pha	300	150
Sét	1500	500

Do số hạng đầu trong móc của biểu thức (5.46) nhỏ đáng kể so với số hạng thứ hai nên có thể lấy gần đúng:

$$V = e^{-0,39 \frac{2\pi}{L} y} \frac{P}{E} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{L} x\right). \quad (5.48)$$

Giá trị của thành phần thẳng đứng của sóng lan truyền do lực kích động thẳng đứng cường độ p phân bố dọc dải rộng $2l$ nhận được bằng cách thay $P = pdl$ vào (5.48) và tích phân trong khoảng $(-l, l)$:

$$V = e^{-0,39 \frac{2\pi}{L} y} \frac{P}{E} \int_{-l}^l \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{L}(x-l)\right] dl,$$

hay:

$$V = 2e^{-0,39 \frac{2\pi}{L} y} \frac{P}{L} \frac{\sin \frac{2\pi l}{L}}{2\pi} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{L} x\right).$$

Do đó, biên độ dao động cường độ bức thẳng đứng của đất bằng:

$$A_V = \frac{L}{\pi} e^{-0,39 \frac{2\pi}{L} y} \frac{P}{E} \sin \frac{2\pi}{L} a. \quad (5.49)$$

Biểu thức nhận được đã thiết lập quan hệ gần đúng sự phụ thuộc giữa biên độ dao động cường độ bức thẳng đứng của nền đất với độ sâu y của điểm khảo sát.

Giả thiết nguồn sóng là Stamp cứng gây ra dao động cưỡng bức thẳng đứng với biên độ A . Biên độ dao động thẳng đứng của các điểm của nền đất phụ thuộc vào độ sâu (kể từ mặt đất xuống), được xác định theo quan hệ:

$$A_y = Ae^{-0,39 \frac{2\pi}{L} y - d \frac{y}{l}}, \quad (5.50)$$

ở đây: $2l$ - chiều rộng của Stamp (để máy rung và là nguồn sóng).

Để xác định giá trị của d , ta giả thiết rằng: ở độ sâu đủ lớn, sự khác nhau giữa A_v và A_y trong (5.49) và (5.50) là rất nhỏ, chẳng hạn:

$$y > Kl \text{ thì } A_v = A_y.$$

Thay $y = Kl$ vào (5.49) và (5.50), thực hiện so sánh bậc lũy thừa phân bên phải ta nhận được:

$$d = \frac{1}{K'} \ln \frac{\frac{l\pi}{L \sin \frac{2\pi}{L} Kl}}{\frac{l\pi}{L K' l}}. \quad (5.51)$$

Biểu thức (5.50) bây giờ có thể viết:

$$A_y = Ae^{-\gamma y}, \quad (5.52)$$

trong đó:
$$\gamma = -0,39 \frac{2\pi}{L} - \frac{1}{K' l} \ln \frac{\frac{l\pi}{L \sin \frac{2\pi}{L} Kl}}{\frac{l\pi}{L K' l}}; \quad (5.53)$$

hệ số K' có thể lấy trong khoảng từ 2 đến 3.

Do gia tốc dao động của đất (W) tỷ lệ với biên độ nên ta có sự phụ thuộc của W vào độ sâu h bằng quan hệ:

$$W = W_0 e^{-\gamma h}. \quad (5.54)$$

Vấn ký hiệu η là tỷ số gia tốc dao động với gia tốc trọng lực, còn h là độ sâu lên chặt đất nền. Ta có:

$$\eta = \eta_0 e^{-\gamma h}.$$

Khi đó, điều kiện lèn chặt đất nền dưới tác dụng của rung động là:

$$\eta > \eta_0, \quad (5.55)$$

trong đó: η_0 - gia tốc rung tương ứng với hệ số rỗng của đất trước khi rung mà ta gọi là ngưỡng lèn chặt đất rung. Trị số của nó được xác định từ phương trình:

$$K_0 = e^{-\beta \eta_0}, \quad (5.56)$$

ở đây: K_0 - hệ số tới xấp, ứng với trạng thái ban đầu của nền đất.

Từ (5.56), suy ra:

$$\eta_0 = -\frac{1}{\beta} \ln K_0.$$

Do $\eta = \frac{1}{\beta} \ln K$ nên từ điều kiện (5.55) viết được:

$$K < K_0. \quad (5.57)$$

Thay $\eta = \eta_0 e^{-\beta h}$ vào vế trái của (5.57) và giải đối với h , ta nhận được biểu thức tính độ sâu lèn chặt đất bằng máy rung mặt:

$$h = -\frac{1}{\gamma} \ln \left[-\frac{1}{\beta \eta_0} \ln K_0 \right], \quad (5.58)$$

trong đó: γ được xác định theo (5.53).

Công thức (5.58) cho phép thiết lập sự phụ thuộc giữa độ sâu đất nền được lèn chặt với đặc tính máy rung và tính chất của đất nền lèn chặt.

Các tính toán đã chỉ ra rằng: độ sâu lèn chặt đạt được bằng máy rung mặt công suất nhỏ tương tự như máy rung bê tông, nghĩa là chỉ vào khoảng 20cm. Do đó, các máy rung mặt công suất nhỏ ít áp dụng trong thi công lèn chặt nền đất. Ngược lại, các máy rung mặt công suất lớn lại được áp dụng rộng rãi trong thực tế, không phải chỉ làm chặt đất nền đường mà cả trong các công trình xây

dựng nhà ở, công trình thủy công và các công trình công nghiệp khác. Nó được đánh giá là một trong các phương tiện hiệu quả nhất để lèn chặt đất nền.

§5.2. TÍNH TOÁN RUNG SÂU

5.2.1. PHƯƠNG PHÁP RUNG SÂU VÀ MÁY RUNG SÂU

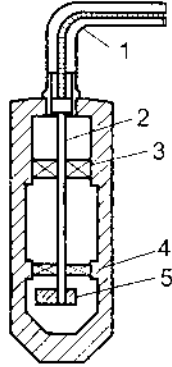
Phương pháp rung sâu là phương pháp đưa bộ kích rung vào sâu bên trong khối vật liệu hay kết cấu cần làm chặt. Nhờ lực kích rung làm cho vật liệu ở xung quanh nguồn phát rung bị lèn chặt trong một phạm vi (một vùng) nào đó.

Phương pháp này thường được sử dụng để đầm chặt khối bê tông trong khung cốt thép như: móng cầu, trụ cầu, đập bê tông cốt thép, dầm cầu bê tông cốt thép hay các kết cấu khung bê tông cốt thép. Các máy rung sâu làm việc nhờ bộ kích động rung ly tâm (tác dụng quay tròn của các quả nặng) hay cơ cấu hành tinh. Trên hình vẽ (hình 5.11) biểu diễn sơ đồ của máy rung sâu quả nặng.

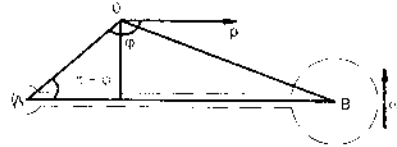
Trục quay 2 nhờ động cơ truyền qua trục mềm 1 nối với nó. Trên trục lắp quả nặng 5.

Trục 2 được lồng vào các ổ đỡ 3. Các ổ đỡ này đặt trong vỏ trụ 4. Vỏ của động cơ phải được giữ sao cho nó không thể tự quay đối với trục của nó.

Hỗn hợp bê tông ở tần số trung bình thường được coi là môi trường có độ cứng nhỏ nhưng lực cản giảm chấn và lực quán tính lớn đáng kể. Nhờ tính đẳng hướng của môi trường xung quanh, tính đồng tâm của trục quả nặng và vỏ của máy rung và nhờ dạng hình trụ của vỏ cũng như tính đối xứng trục của khối lượng vỏ, ta có thể coi rằng: các điểm của vỏ vạch nên các quỹ đạo tròn.



Hình 5.11



Hình 5.12

Bây giờ ta khảo sát trường hợp khi vectơ các lực tác dụng lên vỏ máy rung (lực quán tính của quả văng, các lực do dao động theo của hỗn hợp bê tông và lực cản hao tán của nó) nằm trên một tiết diện ngang với trọng tâm vỏ máy rung và các đường tác dụng của các lực đi qua trọng tâm này. Do vỏ máy rung thực hiện chuyển động tịnh tiến tròn nên chuyển động của máy rung có thể khảo sát trong mặt phẳng tác dụng của các lực.

Gọi: m_0 - khối lượng của quả văng (bao gồm cả các chi tiết liên kết chặt với nó);

m_1 - khối lượng phần công tác (vỏ máy rung);

m_2 - khối lượng của hỗn hợp bê tông dao động theo.

Chọn hệ trục tọa độ cực (r, θ) , gọi gốc O là điểm mà trục của vỏ máy rung quay quanh nó, trục OP hướng song song với vị trí ban đầu của đường thẳng nối liền trục A của vỏ máy với trọng tâm B của quả văng (khi $t = 0$). Vận tốc góc ω của quả văng quay ngược chiều kim đồng hồ và theo hướng này ta dẫn ra góc cực θ (hình 5.12).

Động năng của hệ:

$$T' = \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + m_0 e\omega[r\dot{\theta} \cos(\omega t - \theta) - \dot{r} \sin(\omega t - \theta)] + \frac{1}{2}(J_0 + m_0 e^2)\omega^2$$

ở đây: $r = OA$ - môđun bán kính vectơ xác định trục vỏ máy rung;
 θ - góc cực của bán kính vectơ \overrightarrow{OA} ;
 e - độ lệch tâm của khối lượng quả văng đối với trục quay A ;
 J_0 - mômen quán tính trung tâm của quả văng.

Hàm hao tán được xác định theo hệ thức:

$$\phi = \frac{1}{2}\alpha(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

trong đó: α - hệ số của lực cản hao tán của môi trường.

Khi sử dụng phương trình Lagrăng loại II (chương 1), ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của máy rung sâu:

$$\begin{cases} (m_0 + m_1 + m_2)(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \alpha r - m_0 e\omega^2 \cos(\omega t - \theta) = 0 \\ (m_0 + m_1 + m_2)(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + \alpha r\dot{\theta} - m_0 e\omega^2 \sin(\omega t - \theta) = 0 \end{cases} \quad (5.59)$$

Các tích phân đầu của hệ (5.59) ứng với chuyển động bình ổn, ta có: $\dot{r} = 0$; $\dot{\theta} = \omega$; $r = a$; $\theta = \omega t - \varphi$,

ở đây: a - biên độ dao động tròn của vỏ máy rung;
 φ - góc trượt pha của vỏ máy rung đối với pha quay của quả văng.

Từ đó phương trình (5.59) chuyển đến dạng:

$$\begin{cases} (m_0 + m_1 + m_2)a + m_0 e\omega \cos \varphi = 0 \\ \alpha a - m_0 e\omega \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.60)$$

Giải hệ (5.60) ta được:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\alpha}{(m_0 + m_1 + m_2)\omega}; \\ a &= \frac{m_0 e\omega}{\sqrt{(m_0 + m_1 + m_2)^2 \omega^2 + \alpha^2}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Thông thường hệ số α và khối lượng thu gọn m_2 của phần hỗn hợp bê tông dao động theo là chưa biết. Tuy nhiên, trong thực tế, khi tiến hành các thực nghiệm, ta có thể đo được biên độ dao động tròn của vỏ máy rung (a) và góc trượt pha (φ). Biết các giá trị này, ta tìm α từ phương trình thứ hai của (5.60):

$$\alpha = \frac{m_0 e \omega}{a} \sin \varphi. \quad (5.62)$$

Và từ đẳng thức đầu của (5.60), ta thu được:

$$m_2 = - \left(\frac{m_0 e}{a} \cos \varphi + m_0 + m_1 \right). \quad (5.63)$$

Vấn đề cơ bản của tính toán máy rung sâu là xác định vùng được lên chặt. Tuy nhiên, bài toán trên có ý nghĩa là: xác định biên độ dao động của máy rung phụ thuộc vào lực kích động khi nó được hạ chìm vào môi trường (chẳng hạn: hỗn hợp bê tông).

Trong công trình [3], việc khảo sát dao động của máy rung được đưa về khảo sát dao động theo một hướng (trục x) với giả thiết dao động nhỏ. Bài toán khảo sát đã dẫn tới giải phương trình vi phân dao động của hệ có một bậc tự do. Việc xác định hệ số cản hạc tán α được thay bằng việc xác định phản lực của hỗn hợp bê tông (hay nền đất) lên mặt hình cầu, được mô hình là nguồn phát ra sóng rung.

5.2.2. VÙNG ĐƯỢC LÊN CHẶT BẰNG MÁY RUNG SÂU

Những nghiên cứu thực nghiệm của O.A. Савинов, O.Я. Шехтер và nhiều tác giả khác đã chứng tỏ rằng: lên chặt đất bằng dao động thực chất phụ thuộc vào tải trọng tác dụng lên nền đất. Trong điều kiện đất đã chịu tác dụng tải trọng tĩnh, làm chặt đất bằng rung động chỉ có hiệu quả khi gia tốc dao động vượt quá một giá trị xác định nào đó mà ta gọi là ngưỡng rung. Ngưỡng rung không chỉ phụ thuộc vào hệ số tới xốp của đất mà còn phụ thuộc vào giá trị ứng suất pháp tĩnh tác dụng lên khối đất khảo sát. Giá trị ứng suất pháp này càng lớn thì ngưỡng rung càng lớn.

Ta có thể giả thiết rằng: chiều sâu càng tăng, ảnh hưởng rung tới độ lèn chặt đất càng giảm. Khi chưa đánh giá được đầy đủ ảnh hưởng của áp lực tĩnh, ta cũng coi rằng: ở miền được lèn chặt đất bằng máy rung có hiệu quả thì áp lực tĩnh không đổi. Điều đó cũng có nghĩa: miền được lèn chặt rung thường không lớn, trong miền đó áp lực tĩnh thay đổi không đáng kể.

Tại nơi chịu kích động của sóng dao động phát ra từ nguồn rung, gia tốc dao động phụ thuộc vào tọa độ của điểm khảo sát. Do đó, dưới tác dụng của rung động từ nguồn phát rung, hệ số tối xốp hay hệ số độ rỗng của đất không còn là hằng số mà thay đổi phụ thuộc vào sự thay đổi gia tốc của phần đất khảo sát (phụ thuộc vào khoảng cách đến nguồn dao động).

Nếu $\eta = \eta(x, y, z)$ thì hệ số tối xốp được biểu thị theo quan hệ:

$$K = e^{-\beta\eta(x,y,z)}. \quad (5.64)$$

Để phù hợp với ngưỡng rung, ta coi độ lèn chặt đất sẽ xảy ra chỉ ở các điểm thỏa mãn bất đẳng thức (5.57). Ta có:

$$e^{-\beta\eta(x,y,z)} < K_o.$$

trong đó: K_o - hệ số tối xốp tương ứng với ngưỡng rung.

Ngoài giới hạn miền đất được lèn chặt có bất đẳng thức ngược, còn trên biên của miền này, ta có:

$$e^{-\beta\eta(x,y,z)} = K_o.$$

Từ đó:

$$\eta(x, y, z) = -\frac{1}{\beta} \ln K_o. \quad (5.65)$$

Vậy, giới hạn của vùng được lèn chặt rung là mặt ứng với các gia tốc dao động như nhau. Do đó, việc xác định kích thước phạm vi được lèn chặt rung dẫn tới khảo sát trường gia tốc của đất bị kích động bởi máy rung sâu đã cho.

Thông thường máy rung có dao động ổn định với biên độ A và tần số ω không đổi. Trong trường hợp này, sóng lan truyền từ máy rung sẽ ổn định còn gia tốc của điểm bất kỳ trong đất bằng:

$$W = A\omega^2.$$

ở đây: A - biên độ ở điểm khảo sát trong đất, phụ thuộc vào khoảng cách đến nguồn sóng. Do giá trị ω không đổi nên:

$$\eta(x, y, z) = A(x, y, z) \frac{\omega^2}{g}.$$

Biểu thức (5.65) viết được ở dạng:

$$A(x, y, z) = -\frac{g}{\beta\omega^2} \ln K_n. \quad (5.66)$$

Việc tính toán trường biên độ dao động của đất gây ra do máy rung có thể thực hiện khi sử dụng phương pháp của lý thuyết đàn hồi. Các nhân tố ảnh hưởng đến kết quả tính toán sẽ là cấu trúc, độ rỗng và sự tồn tại của chất lỏng trong đất.

Я.И. Френкель đã khảo sát bài toán về lan truyền sóng trong vật rắn vô hạn tự do có các lỗ rỗng, trong các lỗ rỗng được lấp đầy nước. **Н.М. Герсеванов** đã gọi bài toán này là khảo sát môi trường đất. Các kết quả nhận được trùng với kết quả nghiên cứu sự lan truyền sóng trong môi trường chất lỏng nhớt hay trong môi trường vật rắn tồn tại sự tắt dần tỷ lệ với vận tốc dao động.

Bây giờ, ta giả thiết nền đất thỏa mãn tất cả các điều kiện của vật đàn hồi lý tưởng, thuần nhất và đẳng hướng. Ta có thể nghiên cứu sự lan truyền sóng trong đất bằng cách áp dụng phương trình chuyển động tổng quát đối với vật đàn hồi đã biết [1]:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.67)$$

ở đây: u, v, w - các thành phần dịch chuyển theo các trục tọa độ
Đề các x, y, z ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

∇^2 - toán tử Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

ρ - mật độ của đất, coi là không đổi, không phụ thuộc vào tọa độ và thời gian.

X, Y, Z - các thành phần của lực khối;

λ, μ - các hằng số Lamê liên hệ với môđun đàn hồi E và hệ số Poisson σ bằng các hệ thức:

$$\lambda = \frac{\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} E; \quad \mu = \frac{1}{2(1 + \sigma)} E.$$

Ảnh hưởng của lực khối là nhỏ, sau này ta sẽ bỏ qua trong tính toán. Giả thiết từ nguồn rung có hai sóng được lan truyền vào đất: sóng nén (dọc) và sóng trượt (ngang). Dịch chuyển của điểm bất kỳ trong đất là tổng các dịch chuyển gây ra do sóng nén là u_1, v_1, w_1 và do sóng trượt là u_2, v_2, w_2 .

Gọi φ là hàm thế, ta có:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5.68)$$

Đồng thời phải thỏa mãn phương trình Poisson:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \varphi, \quad (5.69)$$

ở đây: a - tốc độ truyền sóng nén:

$$a = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \times \frac{E}{\rho}. \quad (5.70)$$

Các thành phần của sóng trượt cũng thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = b \nabla^2 u_2; \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = b \nabla^2 v_2; \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = b \nabla^2 w_2. \quad (5.71)$$

Và điều kiện:

$$\Delta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}, \quad (5.72)$$

trong đó: b - tốc độ truyền sóng trượt:

$$b^2 = \frac{1}{2(1 + \sigma)} \frac{E}{\rho}. \quad (5.73)$$

Nguồn sóng phát ra từ máy rung được mô hình như hình cầu tạo nên dao động đã cho. Các sóng phát ra từ nguồn này sẽ thuộc dạng hình cầu, biên độ của nó trong trường hợp tổng quát không chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến tâm hình cầu rung mà còn phụ thuộc vào hai thông số của tọa độ cầu của điểm khảo sát. Nghiệm tổng quát của phương trình sóng (5.69) và (5.71) được biểu thị ở dạng [3]:

$$\psi = \frac{\partial^{h+i+j}}{\partial x^h \partial y^i \partial z^j} \left[\frac{1}{r} F \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \quad (5.74)$$

trong đó: ψ - có thể lấy giá trị của hàm thế φ hoặc dịch chuyển

$$F \left(t - \frac{r}{c} \right) - \text{hàm bất kỳ, dạng của nó sẽ được thiết lập trên}$$

cơ sở các điều kiện ban đầu và các điều kiện biên đã cho;

r - khoảng cách của điểm khảo sát trong đất đến gốc tọa

độ, chọn trùng với tâm cầu phát ra nguồn sóng;

c - vận tốc lan truyền sóng dọc hay sóng ngang.

Các thông số h, i, j được chọn sao cho khi $r = r_0$ (trên mặt cầu nguồn rung) thỏa mãn các điều kiện đã cho của chuyển động.

Như đã chỉ ra ở phần trên, do máy rung thực hiện chuyển động tròn tịnh tiến nên các thành phần dịch chuyển của các điểm của nó theo hai trục x, y có thể biểu diễn ở dạng:

$$u_o = A_o e^{-i\omega t}; v_o = iA_o e^{-i\omega t}, \quad (5.75)$$

ở đây: A_o - biên độ;
 ω - tần số dao động cưỡng bức của máy rung.

Ta khảo sát sự lan truyền sóng từ máy rung được mô tả ở dạng hình cầu, trọng tâm của nó thực hiện dao động theo hướng trục x tương ứng với hệ thức đầu của (5.75). Ký hiệu r_o là bán kính hình cầu (nguồn sóng) thì cần phải chọn h, i, j sao cho trên mặt hình cầu rung ($r = r_o$) thỏa mãn điều kiện:

$$u^{(1)} = A_o e^{-i\omega t}; v^{(1)} = 0; w^{(1)} = 0. \quad (5.76)$$

Bây giờ ta xét riêng các sóng nén và sóng trượt:

- Trong trường hợp sóng nén phát ra từ hình cầu rung, ở nghiệm (5.74) ta lấy: $h = 1; i = 0; j = 0$. Khi đó biểu thức thế năng dịch chuyển có dạng:

$$\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} F_1 \left(t - \frac{r}{a} \right) \right]. \quad (5.77)$$

Theo (5.68) ta có:

$$u_1^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \frac{F_1}{r}; v_1^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \times \frac{F_1}{r}; w_1^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \times \frac{F_1}{r}.$$

Mặt khác, sự thay đổi tương đối của thể tích bằng:

$$\Lambda^{(1)} = \frac{1}{a^2} \times \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\ddot{F}_1}{r}.$$

- Đối với sóng trượt, trong biểu thức nghiệm (5.74) ta lấy:
 + Với $v_2^{(1)}$: $h = 1, i = 1, j = 0$ và có:

$$v_2^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \times \frac{F_2}{r}.$$

+ Với $w_2^{(1)}$: $h = 1, i = 0, j = 1$ và có:

$$w_2^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \times \frac{F_2}{r}.$$

Để thỏa mãn phương trình (5.72) đối với những giá trị đã chọn $v_2^{(1)}$ và $w_2^{(1)}$, nghiệm của phương trình sóng đối với $u_2^{(1)}$ sẽ có dạng:

$$u_2^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \frac{F_2}{r} - \frac{\ddot{F}_2}{b^2 r}.$$

$$\text{Ký hiệu: } \phi(r, t) = F_1\left(t - \frac{r}{a}\right) - F_2\left(t - \frac{r}{b}\right).$$

Ta có:

$$u^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \times \frac{\phi}{r} - \frac{\ddot{F}_2}{r}; \quad v^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \times \frac{\phi}{r}; \quad w^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \times \frac{\phi}{r}. \quad (5.78)$$

Thay đạo hàm theo các tọa độ bằng đạo hàm theo r , ta nhận được:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \frac{x^2}{r^3} \left(\phi'' - \frac{3\phi}{r} + \frac{3\phi}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\dot{\phi}' - \frac{\phi}{r^2} - \frac{\ddot{F}_2}{b^2} \right); \\ v^{(1)} &= \frac{xy}{r^3} \left(\phi'' - \frac{3\phi}{r} + \frac{3\phi}{r^2} \right); \\ w^{(1)} &= \frac{xz}{r^3} \left(\phi'' - \frac{3\phi}{r} + \frac{3\phi}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (5.79)$$

ở đây: dấu (.) trên hàm ϕ biểu thị đạo hàm theo thời gian t , còn dấu (') trên hàm ϕ biểu thị đạo hàm theo r .

$$\text{Do: } \phi' = -\left(\frac{\dot{F}_1}{a} + \frac{\dot{F}_2}{b} \right); \quad \phi'' = \frac{\ddot{F}_1}{a^2} + \frac{\ddot{F}_2}{b^2}. \quad (5.80)$$

Và khi chú ý đến điều kiện biên (5.76), ta nhận được các phương trình xác định F_1 và F_2 :

$$A_o e^{-\omega t} = \frac{1}{r_o} \left[\frac{\ddot{F}_1}{a^2} + \frac{\dot{F}_1}{ar_o} + \frac{\dot{F}_2}{br_o} + \frac{F_1}{r_o^2} + \frac{F_2}{r_o^2} \right]; \quad (5.81)$$

$$0 = \frac{\ddot{F}_1}{a^2} + \frac{\ddot{F}_2}{b^2} + \frac{3\dot{F}_1}{ar_o} + \frac{3\dot{F}_2}{br_o} + \frac{3F_1}{r_o^2} + \frac{3F_2}{r_o^2}. \quad (5.82)$$

Từ đó suy ra: $3r_o A_o e^{-i\omega t} = \frac{\ddot{F}_1}{a^2} - \frac{2\ddot{F}_2}{b^2}$.

Sau khi tích phân nhận được:

$$\frac{F_1}{a^2} = \frac{2F_2}{b^2} - \frac{3r_o A_o}{\omega^2} e^{-i\omega t}; \quad (5.83)$$

$$\dot{F}_1 = 2 \frac{a^2}{b^2} \dot{F}_2 + 3 \frac{r_o a^2 i}{\omega} A_o e^{-i\omega t}.$$

Thay các giá trị $F_1, \dot{F}_1, \ddot{F}_1$ vào phương trình (5.81), ta dẫn ra phương trình xác định F_2 :

$$\ddot{F}_2 + \frac{1}{r_o} (2a + b) \dot{F}_2 + \frac{1}{r_o^2} (2a^2 + b^2) F_2 - \left(r_o - \frac{3a^2}{r_o \omega^2} + \frac{3ai}{\omega} \right) b^2 A_o e^{-i\omega t} = 0$$

Nghiệm của nó cho ở dạng:

$$F_2 = A_2 e^{-i\omega t}; \quad (5.84)$$

$$A_2 = D_1 + iD_2;$$

$$D_1 = r_o^3 \frac{\xi^2 + 3\xi + 1 + \Omega^2 + \frac{3\xi}{\Omega^2} (2\xi^2 + 1)}{\Omega^4 + (4\xi - 1)\Omega^2 + (2\xi^2 + 1)^2} A_o; \quad (5.85)$$

$$D_2 = \frac{r_o^3}{\Omega} \frac{(\xi - 1)(3\xi + \Omega^2)}{\Omega^4 + (4\xi - 1)\Omega^2 + (2\xi^2 + 1)^2} A_o;$$

$$\xi = \frac{a}{b}; \quad \Omega = \frac{r_o \omega}{b}.$$

Thay F_2 vào (5.83) ta tìm được F_1 :

$$F_1 = A_1 e^{-i\omega t}; \quad (5.86)$$

$$A_1 = C_1 + iC_2;$$

$$C_1 = \left(2D_1 - 3 \frac{r_o^2}{\Omega^2} A_o \right) \xi^2;$$

$$C_2 = 2\xi^2 D_2.$$

Như vậy, đối với giá trị bất kỳ $r > r_0$, ta có:

$$\begin{aligned} F_1 &= A_1 e^{-i\omega t_1}; \\ F_2 &= A_2 e^{-i\omega t_2}; \\ t_1 &= t - \frac{r - r_0}{a}; \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} t_2 &= t - \frac{r - r_0}{b}, \\ \text{và: } \phi &= A_1 e^{-i\omega t_1} + A_2 e^{-i\omega t_2}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Thay ϕ từ (5.88) vào (5.79), ta được:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \frac{x^2}{r^3} [\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2}] + \varphi_1 e^{-i\omega t_1} + \varphi_2 e^{-i\omega t_2}; \\ v^{(1)} &= \frac{xy}{r^3} [\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2}]; \\ w^{(1)} &= \frac{xz}{r^3} [\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2}]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

ở đây:

$$\psi_1 = \left[\frac{3}{r} - \frac{\omega^2}{a^2} - i \frac{3\omega}{ra} \right] A_1 \quad (5.90)$$

$$\psi_2 = \left[\frac{3}{r} - \frac{\omega^2}{b^2} - i \frac{3\omega}{rb} \right] A_2;$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{r} \left[-\frac{1}{r^2} + i \frac{\omega}{ra} \right] A_1; \quad (5.91)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{r} \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{\omega^2}{b^2} + i \frac{\omega}{rb} \right] A_2.$$

Một cách tương tự, khảo sát sự lan truyền sóng từ hình cầu rung theo hướng y . Trong trường hợp này, các sóng được xác định bởi các hàm sau:

$$F_1^* \left(t - \frac{r - r_0}{a} \right); F_2^* \left(t - \frac{r - r_0}{b} \right); F_1^* = iF_1; F_2^* = -iF_2.$$

Các thành phần dịch chuyển trong đất cho bởi biểu thức:

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= i \frac{xy}{r^3} \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] \\ v^{(11)} &= i \frac{y^2}{r^3} \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] + i\varphi_1 e^{-i\omega t_1} + i\varphi_2 e^{-i\omega t_2}; \quad (5.92) \\ w^{(11)} &= i \frac{xz}{r^3} \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] \end{aligned}$$

Tổng các thành phần dịch chuyển ở đất đồng thời ở hướng x và y bằng:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{r^3} (x + iy) \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] + \varphi_1 e^{-i\omega t_1} + \varphi_2 e^{-i\omega t_2}; \\ v &= \frac{y}{r^3} (x + iy) \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] + i \left(\varphi_1 e^{-i\omega t_1} + \varphi_2 e^{-i\omega t_2} \right) \quad (5.93) \\ w &= \frac{z}{r^3} (x + iy) \left[\psi_1 e^{-i\omega t_1} + \psi_2 e^{-i\omega t_2} \right] \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp giới hạn:

1) Trường hợp 1:

Khoảng cách từ máy rung đến điểm khảo sát trong đất nhỏ so với chiều dài sóng được phát ra từ máy rung. Trong trường hợp này $\frac{\omega}{a} = \frac{2\pi}{L_a}$, $\frac{\omega}{b} = \frac{2\pi}{L_b}$ (L_a , L_b là chiều dài sóng nén và sóng

trượt) nhỏ so với $\frac{1}{r}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{3}{r^2} A_1; \quad \psi_2 = \frac{3}{r^3} A_2; \\ \varphi_1 &= \frac{1}{r^2} A_1; \quad \varphi_2 = \frac{1}{r^2} A_2. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r^3} \left[\frac{3x}{r^2} (x + iy) - 1 \right] \left(A_1 e^{-i\omega t_1} + A_2 e^{-i\omega t_2} \right) \\ v &= \frac{1}{r^3} \left[\frac{3y}{r^2} (x + iy) - i \right] \left(A_1 e^{-i\omega t_1} + A_2 e^{-i\omega t_2} \right) \quad (5.94) \\ w &= \frac{1}{r^3} \frac{3z}{r^2} (x + iy) \left(A_1 e^{-i\omega t_1} + A_2 e^{-i\omega t_2} \right) \end{aligned}$$

2) Trường hợp 2:

Khoảng cách từ máy rung đến điểm khảo sát trong đất lớn so với L_a và L_b . Ta có:

$$\psi_1 = -\frac{\omega^2}{a^2} A_1; \quad \psi_2 = -\frac{\omega^2}{b^2} A_2;$$

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = 0.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x}{r^3} (x + iy) \left(\frac{\omega^2}{a^2} A_1 e^{i\omega t_1} + \frac{\omega^2}{b^2} A_2 e^{-i\omega t_2} \right); \\ v &= -\frac{y}{r^3} (x + iy) \left(\frac{\omega^2}{a^2} A_1 e^{-i\omega t_1} + \frac{\omega^2}{b^2} A_2 e^{-i\omega t_2} \right); \\ w &= -\frac{z}{r^3} (x + iy) \left(\frac{\omega^2}{a^2} A_1 e^{-i\omega t_1} + \frac{\omega^2}{b^2} A_2 e^{-i\omega t_2} \right). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Kích thước vùng được lèn chặt đất của các máy rung sâu (kể cả các máy có công suất lớn) thường không vượt quá 3m, nên r không vượt quá 1,5m. Các máy rung nhẹ áp dụng trong đầm bê tông, lèn chặt đất cát thì bán kính lèn chặt của nó là khá nhỏ (khoảng 0,5m).

Đối với đất có độ bền trung bình thì $E = 1000 \text{ kG/cm}^2$; hệ số Poisson bằng 0,3; tốc độ truyền sóng nén và trượt khoảng $3 \cdot 10^2 \text{ m/s}$ và $1,6 \cdot 10^2 \text{ m/s}$; tần số dao động của máy rung thường bằng $\omega = 312 \text{ rad/s}$ nên chiều dài của sóng nén và sóng trượt phát ra là 6,18m và 3,34m. Do đó, các dịch chuyển có thể được tính theo công thức (5.94).

Ta khảo sát dao động của đất trong mặt phẳng xích đạo của máy rung ($z = 0$) trên khoảng cách nhỏ từ nguồn phát rung. Khi bỏ phần ảo trong các biểu thức (5.94), ta nhận được:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r^3} [B_1 \sin(\omega t_1 + \gamma_1) + B_2 \sin(\omega t_2 + \gamma_2)]; \\ v &= \frac{1}{r^3} [E_1 \sin(\omega t_1 + \varepsilon_1) + E_2 \sin(\omega t_2 + \varepsilon_2)]; \end{aligned} \quad (5.96)$$

Ở đây ký hiệu:

- $B_1, E_1, \gamma_1, \gamma_2$ là các biên độ và pha của sóng nén:

$$B_1^2 = \frac{3x^2 + r^2}{r^2} (C_1^2 + C_2^2); \quad (5.97)$$

$$E_1^2 = \frac{3y^2 + r^2}{r^2} (C_1^2 + C_2^2);$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{(3x^2 - r^2)C_1 - 3xyC_2}{(3x^2 - r^2)C_2 - 3xyC_1}; \quad (5.98)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{(3y^2 - r^2)C_1 - 3xyC_2}{(3y^2 - r^2)C_2 - 3xyC_1}.$$

- $B_2, E_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ là các biên độ và pha của sóng trượt:

$$B_2^2 = \frac{3x^2 + r^2}{r^2} (D_1^2 + D_2^2); \quad (5.99)$$

$$E_2^2 = \frac{3y^2 + r^2}{r^2} (D_1^2 + D_2^2);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{(3x^2 - r^2)D_1 - 3xyD_2}{(3x^2 - r^2)D_2 - 3xyD_1}; \quad (5.100)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{(3y^2 - r^2)D_1 - 3xyD_2}{(3y^2 - r^2)D_2 - 3xyD_1}.$$

Lập tỷ số các biên độ sóng nén với sóng trượt, sử dụng hệ thức (5.86) và đặt $A_0 = 1$, ta có:

$$\alpha = \frac{B_1^2}{B_2^2} = \frac{E_1^2}{E_2^2} = \frac{C_1^2 + C_2^2}{D_1^2 + D_2^2} = 4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 + \left(3r_0 - \frac{4D_1}{b^2} \right) \frac{3r_0 a^2}{\omega^2 (D_1^2 + D_2^2)}. \quad (5.101)$$

Các biên độ sóng nén lớn so với các biên độ sóng trượt, nên số hạng thứ hai nhỏ so với số hạng đầu và ta có:

$$\alpha = 4 \left(\frac{a}{b} \right)^4.$$

Trong hệ thức (5.96) ta bỏ sóng trượt và có:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{B_1}{r^3} \sin \omega \tau; \\
 v &= \frac{E_1}{r^3} \sin(\omega \tau - \gamma); \\
 \omega \tau &= \omega t_1 + \gamma_1; \\
 \gamma &= \gamma_1 - \varepsilon_1.
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

Biểu thức (5.102) chỉ ra rằng: gần nguồn sóng các phần tử của đất thực hiện dao động theo quỹ đạo Elíp. Có thể chứng tỏ được hiệu số giữa bán trục lớn của elíp và giá trị biên độ của điểm khảo sát trong đất $A = \frac{1}{r^2} \sqrt{B_1^2 + E_1^2}$ là nhỏ. Do đó, giá trị cực đại của biên độ có thể lấy theo (5.97):

$$A = \frac{1}{r^3} \sqrt{5(C_1^2 + C_2^2)}, \tag{5.103}$$

ở đây: C_1 và C_2 được xác định theo (5.86), chỉ phụ thuộc vào tính chất đàn hồi của đất và đặc trưng của máy rung sâu (bán kính, biên độ, tần số dao động của nó).

Thay (5.103) vào (5.66), giải phương trình nhận được đối với r , ta có công thức xác định bán kính được lên chặt đất bằng máy rung sâu:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{K\beta\eta}{|\ln K_o|}}, \tag{5.104}$$

Ta được: $K = \sqrt{5(\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2)}$; $\bar{C}_1 = \frac{1}{A_o} C_1$; $\bar{C}_2 = \frac{1}{A_o} C_2$; $\eta = \frac{A_o \omega^2}{g}$.

Trong [3] còn đưa ra quan hệ r_1 tỷ lệ với bán kính máy rung sâu (r_o):

$$r_1 = r_o \sqrt[3]{\frac{\beta\eta\psi_o}{|\ln K_o|}}, \tag{5.105}$$

trong đó: $\psi_o(\xi, \Omega) = \psi_o \approx 3\sqrt{5} \frac{\xi^2}{2\xi^2 + 1} \frac{1}{\Omega^2}$; $\xi = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{6-2\sigma}}$;

$\Omega = 2\pi \frac{r_o}{L_b}$; $L_b = 2\pi \frac{b}{\omega}$; σ - hệ số Poisson.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М. Высшая школа, 1976.
2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. Изд. М. Наука, 1965.
3. *Баркан Д. Д.* Виброметод в строительстве. М. Гострой - издат, 1959.
4. *Баркан Д. Д.* Шехтер О. Я., К. Теории вынужденных колебаний вибратора с ограничителем. "Динамика грунтов". Сборник НИИОП. №32. Гостойиздат, 1958.
5. *Бейтман Г Эрдей Н. А.* Таблицы интегральных преобразований T1, 2. Наука М., 1969.
6. *Бородацев Н. И.* Динамический задача для полупространства. В. КН. Динамический расчёт сооружений на специальные воздействия. М. стройиздат, 1981.
7. *Бутенин Н. В.* Элементы теории нелинейных колебаний. Л. сизпромогиз, 1962.
8. *Быховский И. И.* О верхем пределе мощности необходимой для поддержания колебания "вибрационная техника" материалы семинара сд 2(ь). М. Мднп, 1962.
9. *Быховский И. И.* Прогресс вибрационной техники и задачи научных исследований "Вибрационная техника" материалы научно – технической конференция. М., 1966.
10. *Быховский И. И.* Основы теории видрационной техники. М. Машино строени, 1969.
11. *Жиганов А. Т.* Вибрационные машины для уплотнения грунта механизация строительства. №10, 1954.
12. *Герсеванов Н. М.* Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай. Собрание Сочинений. М. Т. I., 1948.

13. *Ильичев В. А.* Вертикальные нестационарные колебания массива под воздействием волн возникающих в полупространстве при колебаниях другого массива В. К. Н "Динамика сооружения" под ред. Коренева Б. Г., М., 1968.
14. *Ильичев В. А.* Динамическое взаимодействие сооружений с основанием и передача колебаний через грунт промышленная сейсмика В. КН. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. М. Стройиздат, 1981
15. *Кильчевский Н. А.* Теория соударений твёрдый тел. Киев, 1969.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. Наука, М., 1974.
17. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний изд. М. Машино - строение, 1967.
18. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Л. Машино - строение, 1976.
19. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М. Наука, 1981.
20. *Сявинов О. А., Лускин А. Я.* Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве. Л. Госстрой издат, 1960.
21. *Саркисян В.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Ереван, 1970.
22. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи изд "Наукова думка", Киев, 1976.
23. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука, 1967.
24. *Филипов А. А.* Колебания деформируемых систем. М., Машиностроение, 1970.
25. *Шкуренко Н. С.* О влиянии вибраций на сопротивление грунтов резаню. Труды Ниисп №28 Гостройиздат, 1956.
26. *Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Chiểu, Khổng Doãn Điền.* Lý thuyết dao động. Đại học Thủy lợi, Nhà xuất bản Nông nghiệp, Hà Nội, 2002.
27. *Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Chiểu.* Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi có kể đến lực cản đàn nhớt ở mặt bên. Tạp chí Cơ học, tập XIII, số 2, 1991.

28. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Tiến Triển. Một tổng quan về quá trình phát triển của lý thuyết va chạm. Tuyển tập công trình khoa học, Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ V, Hà Nội, 1992.
29. Nguyễn Thúc An. Lý thuyết va chạm dọc của thanh và ứng dụng vào bài toán đóng cọc. Đại học Thủy lợi, Hà Nội, 1991.
30. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Tiến Triển, Nguyễn Đăng Tộ. Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi có kể đến lực cản ở mặt bên. Tạp chí Khoa học và Công nghệ, tập XXXI, số 3, 1993.
31. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Chiêu, Nguyễn Đăng Tộ, Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Đăng Cường, Trần Anh Kỳ, Khổng Doãn Điện, Phó Đức Anh, Nguyễn Văn Huân, Nguyễn Tiến Triển. Một số kết quả nghiên cứu lý thuyết va chạm dọc của thanh. Tuyển tập công trình khoa học, 35 năm Trường Đại học Thủy lợi, tập I, Hà Nội, 1994.
32. Nguyễn Trọng. Luận văn thạc sỹ: Nghiên cứu ứng dụng rung động để làm chặt đất nền đường. Đại học Xây dựng, Hà Nội, 1995. Hướng dẫn khoa học: GS. TS. Dương Ngọc Hải, PGS. TS. Nguyễn Đình Chiêu.
33. Nguyễn Đình Chiêu, Nguyễn Trọng. Tác dụng tương hỗ công trình móng - nền. Tuyển tập công trình khoa học, 40 năm Trường Đại học Thủy Lợi, Hà Nội, 1999.
34. Nguyễn Đình Chiêu, Đỗ Văn Hứa, Nguyễn Đắc Hưng. Một vài ứng dụng lý thuyết kỹ thuật rung vào sản xuất cấu kiện bê tông và bê tông cốt thép vỏ mỏng. Tuyển tập báo cáo khoa học, 35 năm Trường Đại học Thủy lợi, tập I, Hà Nội, 1994.
35. Cung Nhất Linh, Diệp Vạn Linh, Lưu Hưng Lục. Thí nghiệm và kiểm tra chất lượng cọc. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 1999.
36. Bộ môn Cơ học ứng dụng. Cơ học lý thuyết, tập II. Giáo trình Trường Đại học Thủy lợi, 1977.
37. Nguyễn Thị Thanh Bình. Luận án tiến sỹ: Một vài bài toán va chạm dọc của vật rắn vào thanh đàn hồi và ứng dụng nghiên cứu trạng thái ứng suất trọng cọc. Hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Phạm Ngọc Khánh, PGS. TS. Nguyễn Đăng Tộ.
38. Nguyễn Văn Khang. Dao động kỹ thuật. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.
39. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đăng Tộ, Phó Đức Anh, Nguyễn Hùng Sơn, Hoàng Xuân Vinh. Một vài bài toán về va chạm dọc của hai thanh đàn hồi. Hội nghị Quốc tế Cơ học kỹ thuật ngày nay, 1995.

40. Nguyễn Đăng Cường. Hệ số truyền năng lượng của búa vào cọc, chọn búa và chọn đệm. Tạp chí Khoa học và Công nghệ, số 6, 1999.
41. Nguyễn Thúc An, Phó Đức Anh, Nguyễn Đăng Tộ, Nguyễn Đăng Cường. Một số kết quả nghiên cứu về lý thuyết va chạm của thanh và khả năng ứng dụng vào thi công cọc. Tuyển tập các công trình khoa học, 40 năm Trường Đại học Thủy Lợi, tập V, Hà Nội, 1999.
42. Nguyễn Thị Thanh Bình, Lê Đình Thám. Xác định ứng suất trong cọc đóng trong nền đồng nhất, đáy cọc tựa trên nền cứng. Tuyển tập hội nghị khoa học toàn quốc: Dao động trong kỹ thuật, Hà Nội, 2000.
43. Nguyễn Thị Thanh Bình, Bùi Quang Nhung. Nghiên cứu ứng suất của cọc đóng trong nền đồng nhất. Tạp chí Khoa học và Công nghệ xây dựng, 3/2000.
44. Hoàng Xuân Vinh. Luận án tiến sỹ: Một số bài toán va chạm của búa vào cọc. Hà Nội, 1996. Hướng dẫn khoa học: GS. TS. Nguyễn Thúc An, PGS. TS. Hoàng Xuân Lượng.
45. Nguyễn Đăng Cường. Luận án tiến sỹ: Nghiên cứu trạng thái ứng suất của cọc và chọn đầu búa theo lý thuyết va chạm. Hà Nội, 1999. Hướng dẫn khoa học: GS. TS. Nguyễn Thúc An.
46. Nguyễn Quang Chiểu, Hà Huy Cương, Dương Học Hải, Nguyễn Khải. Giáo trình xây dựng nền đường ô tô. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1981.
47. Realisation des remblais et des couches de forme. Guide technique September, 1992.
48. Lamb H on the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1904, A203, 1 - 42.
49. Shamsher Prakash, Hari Dsharma. Pile foundations in engineering practice. A wiley-interscience publication. John wiley & sons. Inc. Newyork / Chichester / Brisbane / Toronto / Singapore.
50. Kenneth G. Mc Counell. Vibration testing theory and practice. A wiley-interscience publication. John wiley & sons. Inc. Newyork/ Chichester/ Brisbane / Toronto / Singapore.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
LỜI NÓI ĐẦU	3
<i>Chương 1</i>	
DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ TUYẾN TÍNH CÓ MỘT VÀ HAI BẬC TỰ DO	
§1.1. Phương pháp thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ dao động.....	7
1.1.1. Các phương pháp thiết lập phương trình vi phân chuyển động	7
1.1.2. Phương trình vi phân dao động của hệ n chất điểm có s bậc tự do.....	8
§1.2. Dao động cưỡng bức của hệ tuyến tính có một bậc tự do	9
1.2.1. Dao động cưỡng bức không cản ($n = 0$).....	11
1.2.2. Dao động cưỡng bức có cản ($n \neq 0$)	12
1.2.3. Kích động rung với lực cưỡng bức theo một hướng.....	15
§1.3. Dao động cưỡng bức của hệ tuyến tính hai bậc tự do	17
1.3.1. Dao động cưỡng bức không cản	17
1.3.2. Dao động cưỡng bức có cản.....	21
1.3.3. Một số bài toán ứng dụng	22
§1.4. Ảnh hưởng của lực cản đối với hệ dao động	26
<i>Chương 2</i>	
DAO ĐỘNG DỌC VÀ XOẮN CỦA THANH THẲNG ĐÀN HỒI ĐỒNG CHẤT	
§2.1. Dao động dọc của thanh tiết diện không đổi.....	33

2.1.1. Phương trình vi phân dao động dọc của thanh	33
2.1.2. Giải phương trình (2.4) bằng phương pháp Fourier	35
2.1.3. Các điều kiện biên của thanh. Phương trình tần số	36
2.1.4. Dao động dọc cưỡng bức của thanh	41
§2.2. Dao động xoắn của trục tròn tiết diện không đổi	43
2.2.1. Phương trình cơ bản và nghiệm của nó	43
2.2.2. Các điều kiện biên – Phương trình tần số	45
2.2.3. Dao động xoắn cưỡng bức của trục tròn tiết diện không đổi	47
§2.3. Dao động dọc và xoắn của thanh thẳng tiết diện thay đổi	47
2.3.1. Phương trình vi phân dao động	47
2.3.2. Phương pháp giải gần đúng	48
§2.4. Sự lan truyền sóng	50
2.4.1. Sóng mặt РЭЛЕЯ	50
2.4.2. Sự lan truyền sóng đàn hồi dọc thanh có tiết diện không đổi	53

Chương 3

CƠ SỞ TÍNH TOÁN HẠ CHÌM CÁC KẾT CẤU VÀO ĐẤT BẰNG THIẾT BỊ RUNG

§3.1. Dao động cưỡng bức dọc của kết cấu hạ chìm vào đất gây ra do máy rung	57
3.1.1. Kết cấu hạ chìm vào đất coi như vật rắn tuyệt đối	57
3.1.2. Kết cấu hạ chìm vào đất coi như vật thể đàn hồi	63
3.1.3. Dao động cưỡng bức dọc của kết cấu hạ chìm vào đất gây ra do hai máy rung	67
3.1.4. Dao động xoắn của kết cấu hạ chìm vào đất gây ra do máy rung	73
§3.2. Một vài bài toán tính búa rung	75
3.2.1. Bài toán đơn giản về dẫn động rung va chạm	75
3.2.2. Tính toán búa rung một bậc tự do	78
3.2.3. Tính toán búa rung hai bậc tự do	85

§3.3. Độ sâu hạ chìm và vận tốc hạ chìm của kết cấu	89
3.3.1. Độ sâu hạ chìm	89
3.3.2. Vận tốc hạ chìm	91

Chương 4

VA CHẠM ĐỌC CỦA THANH ĐÀN HỒI VÀ ÁP DỤNG CỦA NÓ VÀO BÀI TOÁN THI CÔNG ĐÓNG CỌC

§4.1. Va chạm đọc của vật rắn vào thanh đàn hồi	101
4.1.1. Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi một đầu gắn chặt	101
4.1.2. Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi tự do	108
4.1.3. Va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi một đầu gắn chặt có kể đến lực cản nhớt ở mặt bên	113
§4.2. Một vài bài toán va chạm của búa và cọc	119
4.2.1. Va chạm của búa và cọc tự do	119
4.2.2. Va chạm của búa vào cọc tựa trên nền đất cứng	125
4.2.3. Va chạm của búa vào cọc trong nền đồng nhất, đáy cọc gặp lực cản không đổi	129
§4.3. Một số kết quả tính toán với số liệu cụ thể tại công trường	143

Chương 5

TÍNH TOÁN RUNG MẶT VÀ RUNG SÂU

§5.1. Tính toán rung mặt	151
5.1.1. Dao động của stamp cứng trên nửa mặt phẳng đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng thẳng đứng bất kỳ	151
5.1.2. Làm chặt đất bằng máy rung mặt	159
§5.2. Tính toán rung sâu	177
5.2.1. Phương pháp rung sâu và máy rung sâu	177
5.2.2. Vùng được lèn chặt bằng máy rung sâu	180
TÀI LIỆU THAM KHẢO	193

NGUYỄN ĐÌNH CHIẾU (Chủ biên)
NGUYỄN TRỌNG - NGUYỄN ANH TUẤN

CƠ SỞ LÝ THUYẾT KỸ THUẬT RUNG TRONG XÂY DỰNG

Chịu trách nhiệm xuất bản : PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : THANH ĐỊNH, ĐỖ PHÚ
Kỹ mỹ thuật : ĐỖ PHÚ
Sửa bản in : ĐỖ PHÚ
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 700 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Xí nghiệp in 19 - 8
Giấy phép xuất bản số: 469-120, cấp ngày 19/4/2004.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2005.

204291

Cơ sở lý thuyết KT rung trong



1 005011 900591

27.000 VND

Giá : 27000 đ