

TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI
KHOA CÔNG TRÌNH
BỘ MÔN KẾT CẤU
* * *

ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

Nguyễn Trung Kiên

Mục lục

1	Khái niệm cơ bản	1
1.1	Khái niệm về động lực học công trình	1
1.2	Tải trọng động	2
1.2.1	Tải trọng có chu kỳ	2
1.2.2	Tải trọng không có chu kỳ	3
1.3	Bậc tự do của hệ dao động	3
1.4	Phân loại dao động	4
1.5	Phương pháp lập phương trình vi phân dao động	5
1.5.1	Phương pháp trực tiếp	5
1.5.2	Phương pháp công khả dĩ	6
1.5.3	Phương pháp năng lượng-Nguyên lý Hamilton	7
1.6	Mô hình hóa bài toán động lực học	7
1.6.1	Phương pháp khối lượng tập trung	7
1.6.2	Phương pháp chuyển vị tổng quát (phương pháp Rayleigh-Ritz)	9
1.6.3	Phương pháp phần tử hữu hạn	9
2	Dao động hệ một bậc tự do	13
2.1	Mô hình hệ dao động một bậc tự do	13
2.2	Phương trình vi phân dao động tổng quát	14
2.3	Phương pháp giải phương trình vi phân dao động	15
2.3.1	Phương pháp cổ điển	15
2.3.2	Tích phân Duhamel	15
2.3.3	Phương pháp biến đổi Fourier	16
2.3.4	Phương pháp số	16
2.4	Dao động tự do của hệ một bậc tự do	16
2.4.1	Dao động tự do không lực cản	17

2.4.2	Dao động tự do có lực cản	21
2.4.3	Độ suy giảm logarithme	25
2.5	Dao động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung .	27
2.6	Dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do	28
2.6.1	Trường hợp không có lực cản	29
2.6.2	Trường hợp có lực cản	35
3	Dao động hệ hữu hạn bậc tự do	43
3.1	Mô hình hệ hữu hạn bậc tự do	43
3.2	Phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do	44
3.3	Dao động tự do hệ hữu hạn bậc tự do	46
3.3.1	Ý nghĩa vật lý của tần số dao động riêng và dạng dao động riêng	46
3.3.2	Tần số dao động riêng	49
3.3.3	Dạng dao động riêng	51
3.3.4	Tính chất trực giao các dạng dao động	54
3.3.5	Chuẩn hóa dạng dao động	56
3.3.6	Khai triển véc tơ chuyển vị theo dạng dao động	57
3.3.7	Phương trình dao động	58
3.4	Dao động cưỡng bức hệ hữu hạn bậc tự do	61
4	Hệ vô hạn bậc tự do - Dao động của thanh thẳng	65
4.1	Phương trình vi phân dao động	65
4.2	Dao động tự do của thanh thẳng	66
4.2.1	Phương trình dao động tự do	66
4.2.2	Tính chất trực giao của các dạng dao động riêng	68
4.3	Dao động tự do của thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi	69
4.4	Dao động cưỡng bức của thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi	76
4.5	Dao động cưỡng bức của thanh thẳng chịu tải trọng bất kỳ - Khai triển theo dạng dao động	78
5	Dao động của hệ phức tạp	81
5.1	Phương pháp chuyển vị tính dao động của khung	81
5.1.1	Dao động cưỡng bức	81
5.1.2	Dao động riêng	83
5.2	Phương pháp gần đúng tính dao động của khung	88

5.3	Phương pháp chuyển vị tính dao động của dầm liên tục	89
5.4	Dao động của dàn	91
6	Phương pháp tích phân theo thời gian trong phân tích bài toán động lực học	93
6.1	Hệ tuyến tính một bậc tự do	93
6.1.1	Phương pháp sai phân đúng tâm	94
6.1.2	Phương pháp Newmark	97
6.2	Hệ phi tuyến một bậc tự do	104
6.2.1	Phương trình cân bằng động dưới dạng gia số	104
6.2.2	Phương pháp Newmark	106
6.2.3	Giảm sai số bằng thuật toán Newton-Raphson	109
6.3	Hệ tuyến tính nhiều bậc tự do	113
6.3.1	Phương pháp sai phân đúng tâm	113
6.3.2	Phương pháp Newmark	114
6.3.3	Phương pháp Wilson	115
6.3.4	Phương pháp HHT	118
6.4	Hệ phi tuyến nhiều bậc tự do	119
6.4.1	Phương trình cân bằng động dưới dạng gia số	119
6.4.2	Phương pháp Newmark	119
7	Tính kết cấu chịu tác dụng động đất	121
7.1	Khái niệm về động đất	121
7.1.1	Nguồn gốc của động đất	121
7.1.2	Lan truyền sóng	121
7.1.3	Chuyển động của mặt đất	124
7.1.4	Cường độ	125
7.2	Tính kết cấu chịu tác dụng của động đất	125
7.2.1	Hệ một bậc tự do tuyến tính	126
8	Phương pháp phần tử hữu hạn trong bài toán động lực học	133

Danh sách hình vẽ

1.1	Tải trọng điều hòa	2
1.2	Tải trọng có chu kỳ bất kỳ	2
1.3	Tải trọng tác dụng trong thời gian ngắn-Tải trọng xung	3
1.4	Tải trọng dài hạn	3
1.5	Hệ có khối lượng tập trung: (a) hệ một bậc tự do, (b) hệ hai bậc tự do, (c) hệ bốn bậc tự do	4
1.6	Mô hình khối lượng tập trung	8
1.7	Mô hình Rayleigh-Ritz	8
1.8	Mô hình phần tử hữu hạn	10
2.1	Mô hình hệ dao động một bậc tự do (a), Các lực tác dụng lên khối lượng (b)	13
2.2	Các thành phần của dao động điều hòa: (a) thành phần phụ thuộc vào $u(0)$, (b) thành phần phụ thuộc vào $\dot{u}(0)$, (c) dao động điều hòa: tổng của (a) và (b)	18
2.3	Biểu diễn dao động điều hòa bằng véc tơ quay	19
2.4	Ví dụ hệ một bậc tự do	20
2.5	Dao động của hệ khi có lực cản, trường hợp tham số tắt dần $\xi < 1$	23
2.6	Ảnh hưởng tham số tắt dần ξ đến tần số dao động	23
2.7	Sự thay đổi của chuyển vị và vận tốc của hệ theo thời gian trong trường hợp $\xi = 1$ và $\xi > 1$	25
2.8	Xác định tham số tắt dần ξ	26
2.9	Tải trọng xung (a), dao động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung khi không xét đến lực cản (b)	27
2.10	Sự phụ thuộc của biên độ dao động điều hòa vào tần số tải trọng tác động $\bar{\omega}$	30
2.11	Sự thay đổi của hệ số động R_d và góc lệch pha θ theo tỉ số $\bar{\omega}/\omega$	32

2.12	Ví dụ hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa	33
2.13	Ví dụ xác định biểu đồ moment uốn động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa	34
2.14	Sự thay đổi của hệ số động R_t theo thời gian khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng	35
2.15	Dao động điều hòa khi xét đến lực cản	36
2.16	Biên độ ở trạng thái dao động ổn định	37
2.17	Sự thay đổi hệ số động R_d và góc lệch pha θ theo tỉ số $\overline{\omega}/\omega$ và tham số tắt dần ξ	39
2.18	Sự thay đổi hệ số động R_t theo tham số tắt dần ξ khi $\beta = 1$	41
3.1	Mô hình hệ dao động hữu hạn bậc tự do	44
3.2	Lực tác dụng lên các khối lượng	44
3.3	Chuyển động của hệ với điều kiện ban đầu bất kỳ	47
3.4	Dạng dao động thứ nhất của hệ	47
3.5	Dạng dao động thứ hai của hệ	48
3.6	Kết cấu nhà hai tầng, khối lượng tập trung ở hai sàn	50
3.7	Dạng dao động riêng : (a) dạng dao động thứ nhất, (b) dạng dao động thứ hai	52
3.8	Hệ dao động hai bậc tự do	53
3.9	Dạng dao động riêng : (a) dạng dao động thứ nhất, (b) dạng dao động thứ hai	54
3.10	Khai triển véc tơ chuyển vị theo dạng dao động	58
3.11	Hệ dao động hai bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa	62
4.1	Quy luật đạo hàm của A_{kx} , B_{kx} , C_{kx} và D_{kx}	72
4.2	Dầm một đầu ngàm một đầu tự do (a), dạng dao động thứ nhất (b), dạng dao động thứ hai (c), dạng dao động thứ ba (d)	74
4.3	Dầm hai đầu khớp (a), dạng dao động thứ nhất (b), dạng dao động thứ hai (c), dạng dao động thứ ba (d)	75
5.1	Khung chịu tác dụng của tải trọng động (a), Hệ cơ bản (b)	84
5.2	Biểu đồ moment uốn động của khung	88
5.3	Khung có khối lượng phân bố (a), Khung có khối lượng tập trung (b)	88
5.4	Dầm liên tục (a), Dạng dao động đối xứng của dầm liên tục (b)	90
5.5	Dàn có khối lượng tập trung tại nút dàn (a), Chuyển khối lượng về đường biên có xe chạy (b)	92

6.1	<i>Phương pháp sai phân đúng tâm</i>	94
6.2	<i>Trụ cầu chịu tác dụng của tải trọng động (a), Tải trọng động (b)</i>	97
6.3	<i>So sánh nghiệm chính xác và nghiệm tính theo phương pháp sai phân đúng tâm với các bước thời gian khác nhau</i>	98
6.4	<i>Phương pháp gia tốc trung bình (a), Phương pháp gia tốc tuyến tính (b)</i>	101
6.5	<i>So sánh nghiệm chính xác với nghiệm tính theo phương pháp gia tốc tuyến tính và gia tốc trung bình</i>	104
6.6	<i>Hệ một bậc tự do (a), Tải trọng động (b), Độ cứng phi tuyến (c), Lực cản phi tuyến (d)</i>	105
6.7	<i>Quan hệ lực-chuyển vị</i>	109
6.8	<i>Thuật toán Newton-Raphson (a), Thuật toán Newton-Raphson cải tiến (b)</i>	110
6.9	<i>Phương pháp Wilson</i>	116
7.1	<i>Các khái niệm về động đất</i>	122
7.2	<i>Sóng Rayleigh và sóng Love</i>	123
7.3	<i>Thành phần gia tốc của đất theo hướng Bắc-Nam được ghi lại tại El Centro, California trong trận động đất ngày 18 tháng 5 năm 1940. Vận tốc và chuyển vị của đất được xác định bằng cách tích phân gia tốc của đất</i>	126
7.4	<i>(a) Hệ một bậc tự do chịu ảnh hưởng của động đất, (b) Các lực tác dụng lên khối lượng</i>	127
7.5	<i>(a) Nghiệm chuyển vị của hệ một bậc tự do với ba chu kỳ dao động riêng khác nhau, (b) Phổ chuyển vị</i>	129
7.6	<i>(a) Phổ chuyển vị, (b) Phổ giả vận tốc, (c) Phổ giả gia tốc</i>	131
7.7	<i>Kết hợp phổ nghiệm D-V-A, trường hợp $\xi = 2$</i>	132

Ký hiệu dùng trong bài giảng

• Các ký hiệu chung

u	chuyển vị của hệ,
$\dot{u}$	vận tốc của hệ,
$\ddot{u}$	gia tốc của hệ,
m	khối lượng của hệ,
k	độ cứng của hệ,
c	hệ số cản nhớt,
$\bar{\omega}$	tần số lực cưỡng bức,
ω	tần số dao động riêng,
T	chu kỳ dao động,
f	tần số riêng,
θ	góc pha,

• Ký hiệu chương 1

$\hat{u}$	chuyển vị khả dĩ,
$P_i(\hat{u})$	công khả dĩ của nội lực,
$P_e(\hat{u})$	công khả dĩ của ngoại lực,
$A(\hat{u})$	công khả dĩ của lực quán tính,
T	động năng của hệ,
V	thế năng của hệ,
W_{nc}	công của các lực không bảo toàn,

• Ký hiệu chương 2

f_I	lực quán tính,
f_D	lực cản nhớt,
f_S	lực đàn hồi,
$p(t)$	tải trọng động,
$\mathcal{F}$	biến đổi Fourier,
ξ	tham số tắt dần,
$\mathcal{I}$	xung lượng của tải trọng xung,

• Ký hiệu chương 3

M	ma trận khối lượng,
K	ma trận độ cứng,
C	ma trận hệ số lực cản,

• Ký hiệu chương 4

E	module đàn hồi của vật liệu,
$I(x)$	momen quán tính của thanh,
M	moment uốn nội lực,
Q	lực cắt,
$p^{(n)}$	đạo hàm bậc n của p,
$\frac{\partial y}{\partial x}$	đạo hàm riêng của y theo x ,

• Ký hiệu chương 5

Z	biên độ chuyển vị tại các nút của kết cấu,
R	biên độ phản lực tại các liên kết đặt thêm vào,

Chương 1

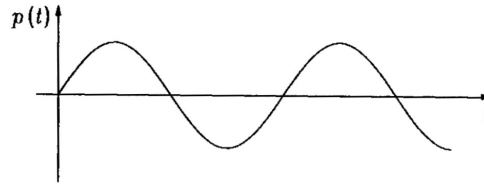
Khái niệm cơ bản

Bài giảng Động lực học công trình này được viết dành cho sinh viên các trường kỹ thuật, xây dựng dân dụng. Nó đề cập đến vấn đề cơ bản của lý thuyết dao động công trình, từ dao động hệ một bậc tự do đến hệ hữu hạn bậc tự do và hệ vô hạn bậc tự do. Phần cuối của bài giảng đề cập đến cách vận dụng các lý thuyết để tính toán một số kết cấu thường gặp trong xây dựng dân dụng cũng như trong các công trình giao thông như dầm, khung, dàn.

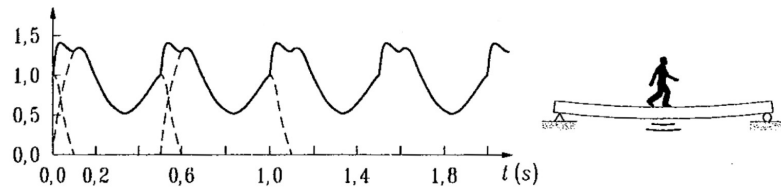
1.1 Khái niệm về động lực học công trình

Động lực học công trình nghiên cứu dao động của kết cấu gây ra bởi các tải trọng động là các tải trọng biến đổi theo thời gian. Tải trọng động này gây ra các chuyển vị, nội lực, phản lực và ứng suất cũng phụ thuộc thời gian. Do vậy, trong bài toán động không tồn tại nghiệm duy nhất như trong bài toán tĩnh. Trong bài toán động lực học, cần phải xác định các giá trị liên tiếp của chuyển vị theo thời gian trước khi đi xác định giá trị lớn nhất của lực, phản lực hay ứng suất được dùng để thiết kế và kiểm tra kết cấu.

Mặc dù sự khác nhau của việc phân tích động lực học kết cấu và phân tích tĩnh học được thể hiện thông qua thông số thời gian nhưng về bản chất là do lực quán tính. Đặc trưng động lực học của bài toán được xét đến nếu lực quán tính đóng vai trò quan trọng so với các lực tác dụng lên kết cấu. Ngược lại, bài toán sẽ được giải quyết như bài toán tĩnh học nếu như tải trọng tác dụng chỉ gây ra các lực quán tính mà ta có thể bỏ qua trong khi tính toán.



Hình 1.1: Tải trọng điều hòa



Hình 1.2: Tải trọng có chu kỳ bất kỳ

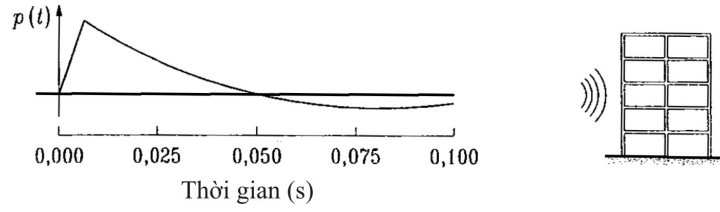
1.2 Tải trọng động

Tải trọng động là tải trọng mà giá trị, phương chiều hay điểm tác dụng của nó thay đổi theo thời gian. Nếu sự thay đổi theo thời gian của tải trọng được biểu diễn bằng một hàm số nào đó, người ta gọi đó là tải trọng xác định. Nếu sự thay đổi không được biểu diễn bằng một hàm cụ thể mà chỉ được biểu diễn qua các số liệu thống kê thì gọi là tải trọng bất kỳ. Để phân tích kết cấu dưới tác dụng của loại tải trọng này cần dùng đến lý thuyết xác suất. Trong phạm vi của bài giảng này sẽ chỉ trình bày các vấn đề liên quan đến tải trọng xác định. Tải trọng động được chia làm hai loại: tải trọng có chu kỳ và tải trọng không có chu kỳ.

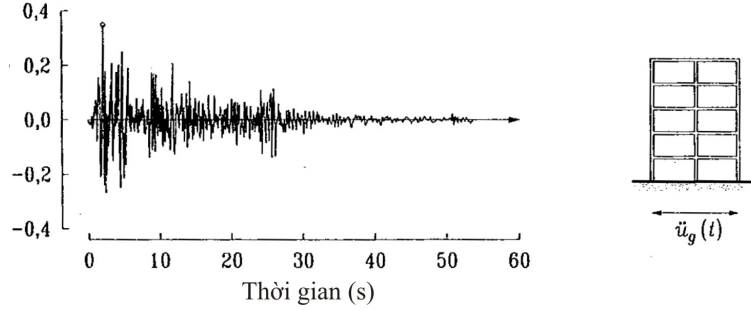
1.2.1 Tải trọng có chu kỳ

Tải trọng có chu kỳ là tải trọng mà sự biến thiên theo thời gian của nó sẽ lặp lại sau một khoảng thời gian T . Tải trọng có chu kỳ lại được chia thành hai loại: tải trọng điều hòa và tải trọng chu kỳ bất kỳ.

Hình 1.1 biểu diễn tải trọng điều hòa gây ra do chuyển động quay của động cơ có khối lượng lệch tâm. Hình 1.2 biểu diễn tải trọng có chu kỳ gây ra do



Hình 1.3: Tải trọng tác dụng trong thời gian ngắn-Tải trọng xung



Hình 1.4: Tải trọng dài hạn

người đi bộ trên cầu gây ra.

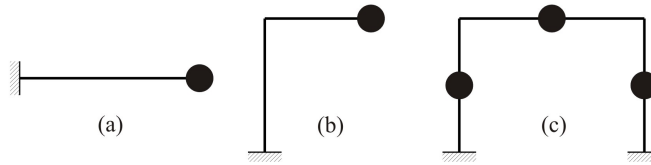
1.2.2 Tải trọng không có chu kỳ

Tải trọng không có chu kỳ là tải trọng là tải trọng biến đổi một cách bất kỳ theo thời gian. Tải trọng không có chu kỳ được chia thành tải trọng tác dụng ngắn hạn như tải trọng xung và tải trọng tác dụng dài hạn.

Hình 1.3 biểu diễn tải trọng tác dụng trong thời gian ngắn so với chu kỳ dao động của hệ. Nguyên nhân gây ra dạng tải trọng này có thể là do một vụ nổ, va đập hay đứt gãy một cấu kiện trong hệ. Hình 1.4 biểu diễn tải trọng dài hạn gây ra do động đất.

1.3 Bậc tự do của hệ dao động

Bậc tự do của hệ dao động là số thông số độc lập cần thiết để xác định vị trí của tất cả các khối lượng trên hệ đó khi dao động.



Hình 1.5: Hệ có khối lượng tập trung: (a) hệ một bậc tự do, (b) hệ hai bậc tự do, (c) hệ bốn bậc tự do

1. **Hệ có các khối lượng tập trung:** trong trường hợp này ta chỉ xét đến lực quán tính phát sinh do các khối lượng tập trung và chấp nhận các giả thiết sau:

- Các khối lượng tập trung được coi là chất điểm.
- Bỏ qua biến dạng dọc trục khi các thanh chịu uốn.

Bậc tự do được xác định bằng tổng số các liên kết tối thiểu cần thiết đặt thêm vào hệ tại vị trí các khối lượng để sao cho các khối lượng đó trở thành bất động.

2. **Hệ có khối lượng phân bố:** trong trường hợp này lực quán tính phụ thuộc vào cả tọa độ và thời gian $f_I = f_I(x, t)$, do đó phải giải hệ phương trình vi phân với các đạo hàm riêng. Bậc tự do của hệ có khối lượng phân bố là vô cùng.

1.4 Phân loại dao động

Do cấu tạo của kết cấu (sự phân bố khối lượng, độ cứng, kích thước) có nhiều hình thái khác nhau cũng như tải trọng tác dụng có tính chất khác nhau mà ta có nhiều cách để phân loại dao động

- **Theo tính chất của nguyên nhân gây ra dao động**
 - Dao động tự do (dao động riêng): là dao động không có tải trọng động duy trì trên hệ.
 - Dao động cưỡng bức: là dao động sinh ra bởi các ngoại lực tác dụng theo một quy luật nào đó và tồn tại trong suốt quá trình dao động.

- **Theo bậc tự do của hệ dao động**

Theo cách phân loại này, người ta chia hệ thành 3 loại dao động:

- Dao động hệ một bậc tự do.
- Dao động hệ hữu hạn bậc tự do.
- Dao động hệ vô hạn bậc tự do.

- **Theo sự tồn tại hay không tồn tại của lực cản**

- Dao động có lực cản (dao động tắt dần) là dao động bị mất một phần năng lượng do ảnh hưởng của hiệu ứng nhiệt, của ma sát trong khi vật rắn biến dạng, ma sát tại mối nối thép hay sự đóng mở các vết nứt trong bê tông.
- Dao động không có lực cản (dao động không tắt dần) là dao động mà năng lượng của hệ được bảo toàn.

- **Theo dạng của phương trình vi phân mô tả dao động**

- Dao động tuyến tính khi phương trình vi phân mô tả dao động là tuyến tính.
- Dao động phi tuyến khi phương trình vi phân mô tả dao động là phi tuyến.

- **Theo kích thước và cấu tạo của hệ**

- Dao động của hệ thanh: dầm, dàn, khung.
- Dao động của tấm, vỏ.
- Dao động của khối đặc.

1.5 Phương pháp lập phương trình vi phân dao động

Lập phương trình vi phân dao động là một bước quan trọng trong phân tích dao động của một hệ. Dưới đây sẽ trình bày một số phương pháp thiết lập phương trình vi phân dao động dựa trên các đại lượng véc-tơ hay đại lượng vô hướng.

1.5.1 Phương pháp trực tiếp

Phương pháp này dựa trên việc xác định hợp lực tác dụng lên hệ và viết phương trình cân bằng với biến thiên động lượng của hệ. Đây là kết quả của

*định luật II Newton*¹ hay còn gọi là định luật cơ bản của động lực học. Một cách tổng quát, hợp lực gồm 6 thành phần, 3 lực theo 3 phương của hệ tọa độ và 3 momen quay quanh 3 trục.

Gọi $p(t)$ là hợp lực tác dụng lên khối lượng m , $v = \frac{du}{dt}$ là vận tốc của khối lượng. Động lượng của hệ là $m.v = m\frac{du}{dt}$. Theo định luật biến thiên động lượng ta có phương trình sau:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du}{dt} \right) = m \frac{d^2u}{dt^2} = m\ddot{u} \quad (1.1)$$

hay

$$p(t) - m\ddot{u}(t) = 0 \quad (1.2)$$

Số hạng $m\ddot{u}$ biểu diễn lực quán tính tác dụng lên hệ. Phương trình cân bằng động của hệ (1.2) được thiết lập dựa trên nguyên lý *Alembert*².

Phương trình (1.2) là một hệ N phương trình gắn với mỗi bậc tự do của khối lượng m . Tổng quát, $N = 6$, trong đó gồm 3 chuyển vị đường và 3 góc xoay. Tùy theo bậc tự do được xét, m chỉ khối lượng hoặc là moment quán tính của khối lượng quanh một trục.

Phương pháp trực tiếp thích hợp với lập phương trình cân bằng của hệ mà trong đó các khối lượng tập trung tại một số vị trí trên hệ.

1.5.2 Phương pháp công khả dĩ

Phương pháp này đặc biệt thích hợp với hệ liên tục mà khối lượng và độ cứng được phân bố trên toàn hệ.

Theo định luật cơ bản của động lực học, tổng công khả dĩ của ngoại lực và nội lực bằng công khả dĩ của lực quán tính trên tất cả các chuyển vị khả dĩ $\hat{u}$ của hệ:

$$P_i(\hat{u}) + P_e(\hat{u}) = A(\hat{u}) \quad (1.3)$$

trong đó:

$P_i(\hat{u})$: công khả dĩ của nội lực

$P_e(\hat{u})$: công khả dĩ của ngoại lực

$A(\hat{u})$: công khả dĩ của lực quán tính

¹Isaac Newton, nhà vật lý, toán học, triết học, sinh ngày 25/12/1642 tại Woolsthorpe, Lincolnshire, Anh, mất ngày 20/03/1727 tại London, Anh

²Jean Le Rond d'Alembert, luật sư, nhà toán học, triết học, sinh ngày 17/11/1717 tại Paris, Pháp, mất ngày 19/10/1783 tại Paris, Pháp

Từ biểu thức của nguyên lý này ta tìm được phương trình vi phân chuyển động của hệ.

1.5.3 Phương pháp năng lượng-Nguyên lý Hamilton

Phương pháp này khác với phương pháp trực tiếp, nó cho phép thiết lập phương trình vi phân chuyển động dựa trên các đại lượng vô hướng, chính là các hàm năng lượng của hệ. Gọi T và V là động năng và thế năng của hệ, W_{nc} là công của các lực không bảo toàn (lực cản). Nguyên lý *Hamilton* được viết như sau:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0 \quad (1.4)$$

trong đó δ chỉ biến phân của các đại lượng.

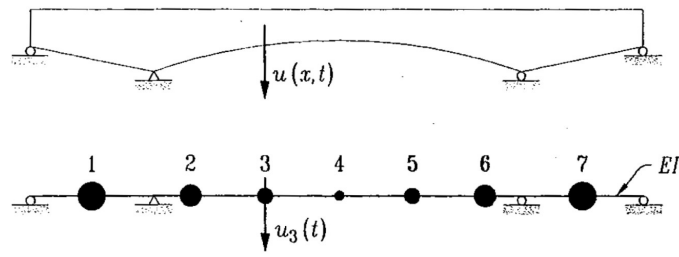
1.6 Mô hình hóa bài toán động lực học

Trong bài toán động lực học, lực quán tính là yếu tố đặc trưng của hệ, vì vậy lực quán tính cần được xác định trong mô hình hóa động lực học. Đối với các hệ liên tục như dầm, khối lượng được phân bố trên toàn bộ chiều dài của dầm. Điều đó dẫn đến phải xác định gia tốc và chuyển vị tại mỗi điểm của dầm. Lấy ví dụ phân tích dầm sẽ dẫn đến các phương trình đạo hàm riêng là hàm theo tọa độ “ x ” dọc theo dầm và thời gian “ t ”. Chúng ta biết rằng không thể giải tường minh các phương trình vi phân này trừ trường hợp kết cấu và tải trọng tác dụng là đơn giản. Trong trường hợp này, người ta sẽ sử dụng thuật toán rời rạc hóa, nó cho phép thiết lập phương trình của bài toán động lực học và giải bài toán bằng phương pháp số. Chúng ta giới thiệu sau đây một vài phương pháp được dùng để mô hình hóa bài toán động lực học.

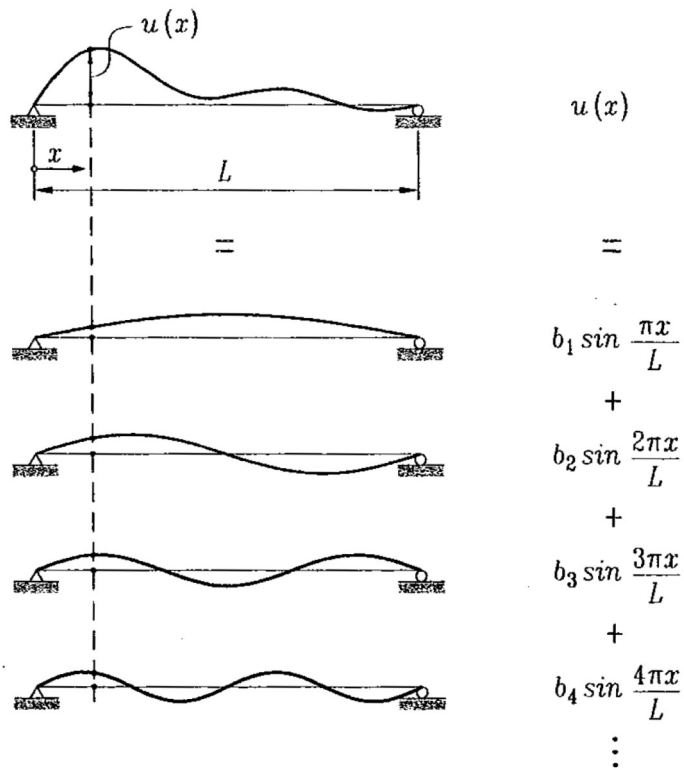
1.6.1 Phương pháp khối lượng tập trung

Khi tính một hệ phức tạp (vô hạn bậc tự do), người ta có thể đơn giản hóa bài toán bằng cách tập trung khối lượng của hệ tại một số hữu hạn các điểm trên hệ đó. Như vậy lực quán tính sẽ chỉ xuất hiện tại các điểm này.

Xét một cây cầu gồm 3 nhịp có mặt cắt thay đổi như hình 1.6. Trong trường hợp tổng quát hệ có vô hạn bậc tự do. Để đơn giản, chúng ta đưa về hệ mà các khối lượng tập trung tại 7 điểm. Nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua biến dạng dọc trục và momen quán tính xoay, hệ có 7 bậc tự do.



Hình 1.6: Mô hình khối lượng tập trung



Hình 1.7: Mô hình Rayleigh-Ritz

1.6.2 Phương pháp chuyển vị tổng quát (phương pháp Rayleigh-Ritz)

Đối với các hệ liên tục, chúng ta có thể đơn giản hóa việc phân tích bằng cách giả định dạng biến dạng của hệ. Một cách tổng quát, người ta giả định rằng biến dạng của hệ là tổng một chuỗi các sơ đồ biến dạng (còn gọi là hàm chuyển vị hay hàm nội suy). Các hàm chuyển vị này trở thành các bậc tự do tổng quát của hệ và số các hàm được sử dụng chính là số bậc tự do. Một ví dụ đơn giản để minh họa là biến dạng của một dầm giản đơn được biểu diễn bằng tổng của các hàm điều hòa (hình 1.7):

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (1.5)$$

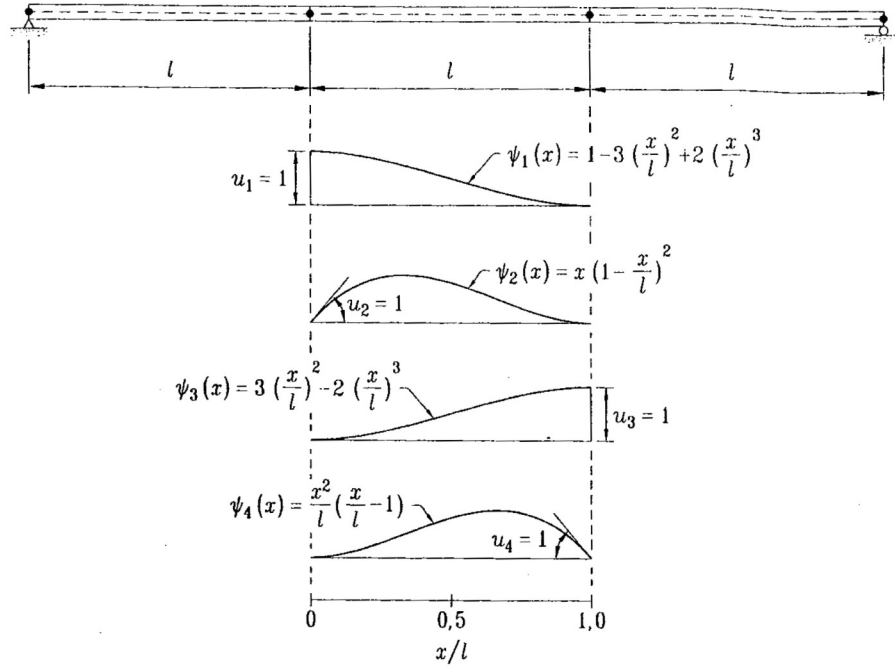
Một cách tổng quát, người ta có thể chọn bất kỳ hàm chuyển vị tổng quát $\psi_i(x)$ nào thỏa mãn điều kiện hình học tại các liên kết gối. Biểu thức tổng quát cho tất cả các hệ một chiều có thể viết dưới dạng sau:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n Z_i(t) \psi_i(x) \quad (1.6)$$

trong đó: $Z_i(t)$ được gọi là tọa độ tổng quát, $\psi_i(x)$ là các hàm chuyển vị tổng quát và n là bậc tự do của hệ. Khi $n = 1$ ta có phương pháp cổ điển Rayleigh, khi $n > 1$ ta có phương pháp Rayleigh-Ritz. Như vậy, phương pháp Rayleigh sử dụng hàm nội suy để biểu diễn chuyển vị tại các điểm của hệ theo một bậc tự do. Phương pháp Rayleigh-Ritz sử dụng nhiều hàm nội suy các chuyển vị theo một số hữu hạn bậc tự do dẫn đến việc giải đồng thời các phương trình đại số. Độ chính xác của kết quả khi sử dụng phương pháp Rayleigh phụ thuộc vào hàm nội suy được chọn. Độ chính xác này tăng lên theo số bậc tự do được sử dụng trong phương pháp Rayleigh-Ritz.

1.6.3 Phương pháp phần tử hữu hạn

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, người ta chấp nhận việc xấp xỉ theo từng phần tử của trường chuyển vị thực. Trong phương pháp Rayleigh-Ritz, người ta sử dụng một hàm chuyển vị duy nhất, thường là đa thức, cho toàn bộ kết cấu. Trong phương pháp phần tử hữu hạn, người ta sử dụng nhiều trường chuyển vị, mỗi trường là một đa thức đơn giản xác định trên một



Hình 1.8: Mô hình phân tử hữu hạn

phần của kết cấu. Việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn được minh họa bằng cách xét dầm giản đơn đặt trên hai gối như hình 1.8.

Bước đầu tiên là chia dầm thành một số đoạn dầm gọi là phần tử hữu hạn. Đầu mút của mỗi phần tử được gọi là nút, mỗi phần tử dầm trong ví dụ đang xét có hai nút. Chuyển vị của các nút này tạo thành các tọa độ tổng quát $Z_i = u_i$. Bên trong mỗi phần tử, chuyển vị được xác định theo công thức:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \psi_i(x) \quad (1.7)$$

Các hàm $\psi_i(x)$ là các đa thức và được gọi là đa thức nội suy. Để tìm các đa thức này ta đặt một chuyển vị đơn vị lên một bậc tự do (hay tọa độ tổng quát) và giữ cho tất cả các chuyển vị khác bằng không. Tất cả các hàm thỏa mãn điều kiện liên tục tại nút và bên trong các nút có thể dùng làm hàm nội suy. Đối với kết cấu dầm, người ta thường dùng đa thức bậc ba Hermite như hình vẽ.

Ưu điểm của phương pháp phần tử hữu hạn:

- Số tọa độ tổng quát có thể chọn tùy ý bằng cách chia kết cấu thành một số đoạn hoặc phần tử.
- Kết quả thu được càng chính xác khi tăng số phần tử (tăng số bậc tự do).
- Hàm nội suy được chọn như nhau cho tất cả các phần tử.
- Các thông số tại nút chỉ ảnh hưởng đến các phần tử lân cận.
- Áp dụng dễ dàng cho hệ phức tạp bằng cách ghép các phần tử có dạng đơn giản như: đường, tam giác, tứ giác, tứ diện ...

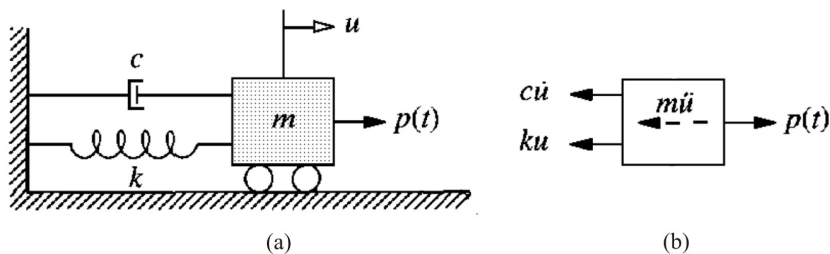
Chương 2

Dao động hệ một bậc tự do

2.1 Mô hình hệ dao động một bậc tự do

Mô hình đơn giản nhất mô tả hệ dao động một bậc tự do là một khối lượng m chuyển vị theo hướng u không có ma sát. Khối lượng được nối với một vật cố định bằng một lò xo và một “giảm chấn” như hình 2.1a. Chuyển động của hệ này được mô tả bằng ba thông số sau:

- chuyển vị của khối lượng $u(t)$
- vận tốc của khối lượng $\dot{u}(t) = du(t)/dt$
- gia tốc của khối lượng $\ddot{u}(t) = d^2u(t)/dt^2$



Hình 2.1: Mô hình hệ dao động một bậc tự do (a), Các lực tác dụng lên khối lượng (b)

2.2 Phương trình vi phân dao động tổng quát

Khảo sát hệ một bậc tự do như hình vẽ 2.1a. Các lực tác dụng lên khối lượng m tại thời điểm t bất kỳ bao gồm tải trọng động $p(t)$, nội lực $f_S(t)$, lực cản $f_D(t)$ và lực quán tính $f_I(t)$. Tại mọi thời điểm, khối lượng cân bằng dưới tác dụng của các lực này theo nguyên lý *Alembert*. Cân bằng động học được biểu diễn bằng biểu thức sau:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2.1)$$

Trong phạm vi của bài giảng, chúng ta chỉ nghiên cứu hệ đàn hồi và giả thiết rằng lực cản xuất hiện trong hệ là lực cản nhớt tuyến tính. Do đó, biểu thức của nội lực và lực cản có dạng sau:

$$\begin{aligned} f_S(t) &= ku(t) \\ f_D(t) &= c\dot{u}(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

trong đó: k là hệ số đàn hồi có thứ nguyên *lực/chiều dài*. c là hệ số tắt dần có thứ nguyên *(lực $\times$ thời gian)/chiều dài*.

Thay (2.2) vào (2.1) ta có phương trình chuyển động của khối lượng hay phương trình cân bằng động:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2.3)$$

Phương trình này có thể viết dưới dạng rút gọn như sau:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad (2.4)$$

trong đó:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.6)$$

lần lượt là tần số riêng và tham số tắt dần.

2.3 Phương pháp giải phương trình vi phân dao động

2.3.1 Phương pháp cổ điển

Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính (2.3) hoặc (2.4) là tổng của nghiệm tổng quát $u_c(t)$ của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng $u_p(t)$ của phương trình không thuần nhất, $u(t) = u_c(t) + u_p(t)$. Vì đây là phương trình vi phân bậc hai nên cần xác định hai hằng số tích phân từ điều kiện ban đầu.

Phương pháp cổ điển là phương pháp chính mà chúng ta sẽ sử dụng để giải các phương trình vi phân dao động tự do hay dao động dưới tác dụng của các lực điều hòa hay xung lực.

2.3.2 Tích phân Duhamel

Một phương pháp khác xác định nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính dựa trên việc biểu diễn lực tác dụng lên hệ như là tổng của các xung lực vô cùng ngắn. Dao động của hệ chịu tác dụng của lực $p(t)$ tại thời điểm $t = 0$ được xác định bằng cách cộng các dao động do các tải trọng xung gây ra đến thời điểm đó. Ví dụ, dao động của hệ một bậc tự do không xét đến lực cản được xác định theo công thức sau:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) được gọi là tích phân *Duhamel*¹. Cùng với phương pháp cổ điển, tích phân *Duhamel* được sử dụng nếu lực tác dụng $p(t)$ là các hàm đơn giản cho phép tính chính xác các tích phân. Đối với các tải trọng phức tạp được xác định bằng các giá trị số hóa tại các thời điểm khác nhau thì tích phân *Duhamel* được xác định bằng phương pháp số.

¹Jean-Marie Duhamel, nhà toán học, sinh ngày 05/02/1797 tại Saint Malo, Pháp, mất ngày 29/04/1872 tại Paris, Pháp

2.3.3 Phương pháp biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier² là một công cụ mạnh để giải phương trình vi phân tuyến tính, đặc biệt là phương trình chuyển động của hệ dao động tuyến tính một bậc tự do.

Biến đổi Fourier của hàm tải trọng $p(t)$ được định nghĩa như sau:

$$\widehat{p}(i\omega) = \mathcal{F}[p(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} p(t) dt \quad (2.8)$$

Theo cách giải phương trình vi phân dao động bằng phương pháp biến đổi Fourier, bước đầu tiên là biến đổi phương trình vi phân với biến số t thành phương trình đại số với biến số phức $i\omega$. Giải phương trình đại số này tìm được $\widehat{u}(i\omega)$ là biến đổi Fourier của $u(t)$. Cuối cùng, nghiệm $u(t)$ của phương trình vi phân được xác định bởi biến đổi ngược của $\widehat{u}(i\omega)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) \widehat{p}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.9)$$

trong đó hàm phức $H(i\omega)$ biểu diễn nghiệm tần số của hệ chịu tác dụng của tải trọng xung.

2.3.4 Phương pháp số

Ba phương pháp trên được dùng cho các hệ tuyến tính. Đối với các hệ phi tuyến, cách tiếp cận duy nhất là dùng tích phân theo thời gian. Các tích phân này được đánh giá bằng phương pháp số. Chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề này trong chương 6.

2.4 Dao động tự do của hệ một bậc tự do

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu dao động tự do và đưa ra khái niệm tần số dao động riêng-thông số quan trọng nhất trong dao động của kết cấu cũng như ảnh hưởng của tham số tắt dần đối với hệ một bậc tự do.

Một hệ được gọi là dao động tự do khi nó bị tách ra khỏi vị trí cân bằng rồi

²Baron Jean-Baptiste Joseph Fourier, nhà toán học và vật lý, sinh ngày 21/03/1768 tại Auxerre, Pháp, mất ngày 16/05/1830 tại Paris, Pháp

cho dao động mà không có tải trọng ngoài nào tác dụng lên nó. Dao động tự do được mô tả bằng nghiệm của phương trình đồng nhất sau:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0 \quad (2.10)$$

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ khối lượng m có chuyển vị $u(0)$ và vận tốc $\dot{u}(0)$. Dễ nhận thấy (2.10) là phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính, thuần nhất với hệ số là hằng số. Theo lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm của (2.10) có dạng:

$$u = e^{st} \quad (2.11)$$

hằng số s là ẩn số cần xác định. Thay (2.11) vào phương trình (2.10) ta có:

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)e^{st} = 0 \quad (2.12)$$

Do $e^{st} \neq 0$ với mọi giá trị của t nên ta có phương trình sau:

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \quad (2.13)$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng (2.13) có dạng:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.14)$$

Vậy nghiệm tổng quát của (2.10) là:

$$u(t) = A_1e^{(-\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1})t} + A_2e^{(-\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1})t} \quad (2.15)$$

Hai hằng số A_1 và A_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

2.4.1 Dao động tự do không lực cản

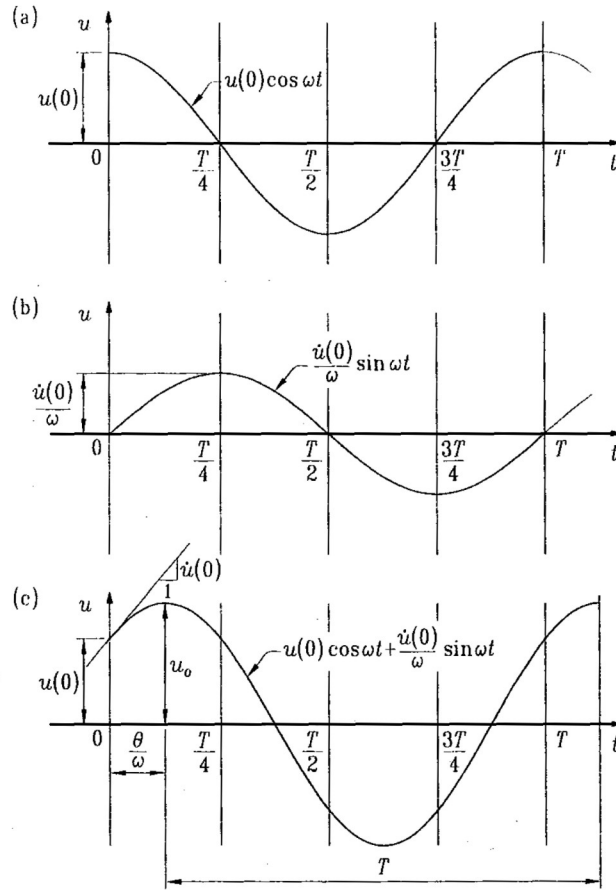
Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cản $f_D = 0$ hay $c = 0$ dẫn đến tham số tắt dần $\xi = 0$. Nghiệm của phương trình vi phân có dạng đơn giản sau:

$$u(t) = A_1e^{i\omega t} + A_2e^{-i\omega t} \quad (2.16)$$

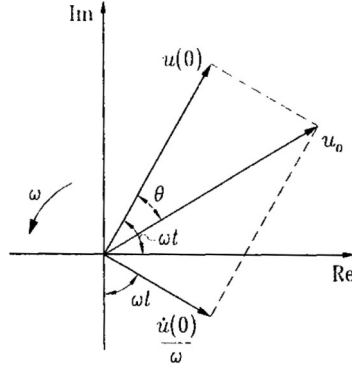
trong đó: $i = \sqrt{-1}$. Theo công thức $Euler^3$ $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ phương trình (2.16) có thể viết như sau:

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.17)$$

³Leonhard Euler, nhà toán học và vật lý, sinh ngày 15/04/1707 tại Bâle, Thụy Sĩ, mất ngày 18/09/1783 tại Saint-Petersbourg, Nga



Hình 2.2: Các thành phần của dao động điều hòa: (a) thành phần phụ thuộc vào $u(0)$, (b) thành phần phụ thuộc vào $\dot{u}(0)$, (c) dao động điều hòa: tổng của (a) và (b)



Hình 2.3: Biểu diễn dao động điều hòa bằng véc tơ quay

Thay điều kiện ban đầu $u(0)$ và $\dot{u}(0)$ ta có thể xác định 2 hằng số A và B :

$$A = u(0), \quad B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \quad (2.18)$$

Tóm lại, dao động của hệ là tổng của hai hàm điều hòa:

$$u(t) = u(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.19)$$

và được biểu diễn như trên hình vẽ 2.2

Trong công thức trên, ω được gọi là tần số dao động riêng của hệ. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cản, hệ sẽ dao động vô hạn theo thời gian với chu kỳ T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.20)$$

Thứ nguyên của T là giây (s). Số chu kỳ dao động của hệ trong một giây được gọi là tần số riêng f

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.21)$$

Thứ nguyên của f là *Hertz*⁴, kí hiệu là Hz .

Nghiệm (2.19) có thể biểu diễn dưới dạng một véc tơ có biên độ u_0 quay với

⁴Heinrich Hertz, nhà vật lý, sinh ngày 22/02/1857 tại Hambourg, Đức, mất ngày 01/01/1894 tại Bonn, Đức

vận tốc góc ω (hình 2.3)

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (2.22)$$

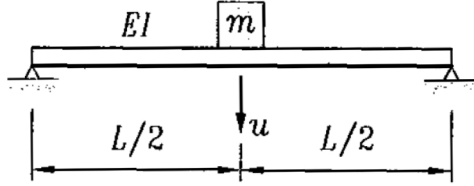
trong đó

$$u_0 = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2} \quad (2.23)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)} \right) \quad (2.24)$$

Người ta gọi θ là góc trễ pha của u_0 so với $u(0)$.

Ví dụ 2.1: Xét một dầm giản đơn có một khối lượng tập trung tại giữa dầm (hình 2.4). Giả sử bỏ qua khối lượng của dầm so với khối lượng tập trung m . Độ cứng chống uốn của dầm là EI . Tính tần số dao động riêng ω của hệ. Viết phương trình dao động biết rằng ở thời điểm ban đầu $t = 0$, hệ có chuyển vị u_0 và vận tốc v_0 .



Hình 2.4: Ví dụ hệ một bậc tự do

Lời giải: Độ cứng của hệ ⁵

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

Tần số dao động riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48EI}{mL^3}}$$

⁵Để xác định k , ta cho lực " k " chưa biết tác dụng lên hệ tại vị trí khối lượng tập trung và có phương trùng với phương dao động. Tính chuyển vị của khối lượng do "lực" k gây ra. Từ điều kiện chuyển vị này bằng 1 sẽ xác định được k .

Thay vào (2.19) ta có phương trình dao động của hệ:

$$u(t) = u_0 \cos \left(\sqrt{\frac{48EI}{mL^3}} t \right) + v_0 \sqrt{\frac{mL^3}{48EI}} \sin \left(\sqrt{\frac{48EI}{mL^3}} t \right)$$

2.4.2 Dao động tự do có lực cản

Khi xét đến ảnh hưởng của lực cản, nghiệm của phương trình vi phân dao động được xác định bằng công thức (2.15). Tùy theo giá trị của ξ , ba dạng chuyển động có thể xảy ra:

- Nếu $\xi = 1$ hệ quay trở lại vị trí cân bằng mà không dao động.
- Nếu $\xi > 1$ hệ cũng không dao động và trở lại vị trí cân bằng của nó.
- Nếu $\xi < 1$ hệ dao động xung quanh vị trí cân bằng với biên độ giảm dần.

Sự rẽ nhánh giữa dao động và không dao động tương ứng với giá trị $\xi = 1$. Theo công thức (2.6), khi $\xi = 1$, hệ số tắt dần tới hạn được viết như sau:

$$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega} \quad (2.25)$$

Sở dĩ c_{cr} được gọi là hệ số tắt dần tới hạn vì nó là giá trị nhỏ nhất của hệ số tắt dần c mà tại đó dao động hoàn toàn bị hạn chế. Nó biểu thị đường ranh giới giữa dao động và không dao động.

Sau đây ta sẽ lần lượt nghiên cứu các trường hợp ứng với các giá trị khác nhau của ξ

2.3.2.1 Trường hợp $\xi < 1$

Với giá trị $\xi < 1$, nghiệm của phương trình đặc trưng là nghiệm phức:

$$s_1 = -\xi\omega + i\omega_D, \quad s_2 = -\xi\omega - i\omega_D \quad (2.26)$$

trong đó:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.27)$$

là tần số dao động riêng khi tính đến lực cản. Nghiệm tổng quát của hệ:

$$u(t) = A_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + A_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t} = e^{-\xi\omega t} (A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (2.28)$$

Áp dụng công thức *Euler* ta có chuyển vị của hệ:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (2.29)$$

Vận tốc của hệ:

$$\dot{u}(t) = -e^{-\xi\omega t} [(\xi\omega A - \omega_D B) \cos \omega_D t + (\xi\omega B - \omega_D A) \sin \omega_D t] \quad (2.30)$$

Thay các điều kiện ban đầu, ta tìm được hai hằng số tích phân:

$$A = u(0), \quad B = \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D} \quad (2.31)$$

Vậy chuyển vị và vận tốc của hệ được xác định:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left(u(0) \cos \omega_D t + \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (2.32)$$

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi\omega t} \left(\dot{u}(0) \cos \omega_D t - \frac{\xi\omega \dot{u}(0) + \omega^2 u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (2.33)$$

Chuyển vị $u(t)$ có thể được biểu diễn dưới dạng sau:

$$u(t) = u_0 e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (2.34)$$

trong đó:

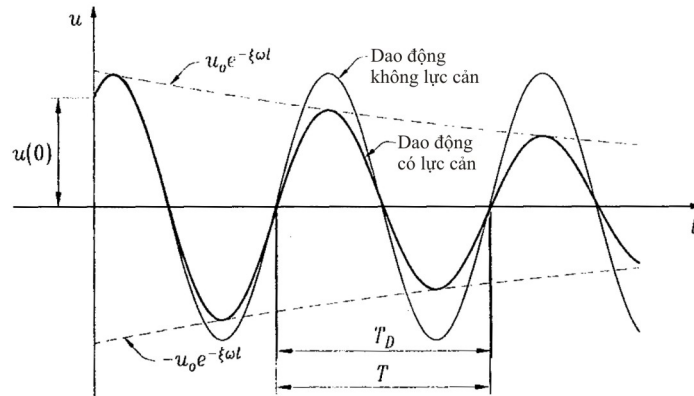
$$u_0 = \sqrt{(u(0))^2 + \left(\frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D} \right)^2} \quad (2.35)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D u(0)} \quad (2.36)$$

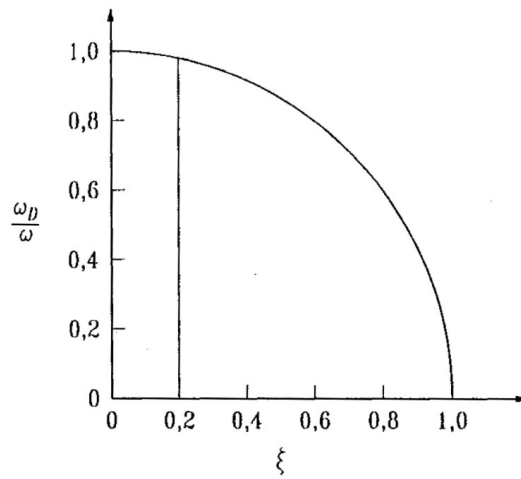
Hệ dao động với tần số $\omega_D < \omega$, chu kỳ dao động $T_D = 2\pi/\omega_D = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} > T$.

Trong quá trình dao động của hệ, biên độ dao động giảm theo hàm mũ trong mỗi chu kỳ (hình 2.5).

Từ phương trình (2.27) ta thấy rằng đồ thị của tỉ số ω_D/ω theo ξ là một đường tròn bán kính bằng 1. Trong thực tế hầu hết các kết cấu có tham số tắt dần ξ nằm trong khoảng $0 < \xi < 0,2$. Trên hình 2.6 ta thấy đối với những giá trị này của ξ thì tỉ số ω_D/ω có thể coi bằng 1.



Hình 2.5: Dao động của hệ khi có lực cản, trường hợp tham số tắt dần $\xi < 1$



Hình 2.6: Ảnh hưởng tham số tắt dần ξ đến tần số dao động

2.3.2.2 Trường hợp $\xi = 1$

Khi $\xi = 1$, hệ số tắt dần $c = c_{cr}$. Phương trình đặc trưng có nghiệm kép:

$$s_1 = s_2 = -\omega \quad (2.37)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân bậc hai là tổng của 2 nghiệm riêng độc lập tuyến tính. Do phương trình đặc trưng có nghiệm kép nên ta mới biết một nghiệm riêng:

$$u_1(t) = e^{-\omega t} \quad (2.38)$$

Chúng ta đi tìm nghiệm riêng thứ hai dưới dạng sau:

$$u_2(t) = te^{-\omega t} \quad (2.39)$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$u(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega t} \quad (2.40)$$

Từ các điều kiện ban đầu, ta tìm được các hằng số tích phân:

$$A_1 = u(0), \quad A_2 = \omega u(0) + \dot{u}(0) \quad (2.41)$$

Thay các hằng số tích phân vào nghiệm tổng quát ở trên, ta thu được phương trình chuyển động của hệ:

$$u(t) = (u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t)e^{-\omega t} \quad (2.42)$$

Hình 2.7 biểu diễn sự biến thiên của chuyển vị theo thời gian. Dễ dàng thấy rằng $u(t)$ là hàm không có chu kỳ và hệ không có dao động.

2.3.2.3 Trường hợp $\xi > 1$

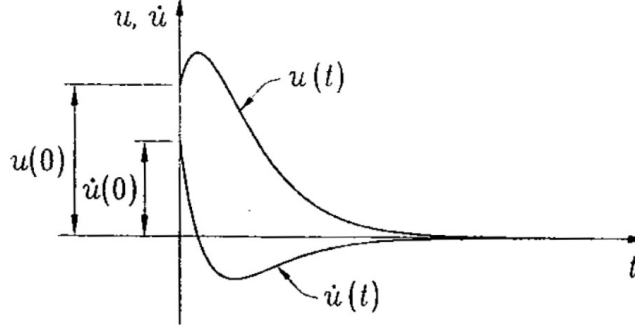
Trong trường hợp này, phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt. Nghiệm của hệ có dạng (2.15), ta có thể viết gọn lại như sau:

$$u(t) = (A_1 e^{\hat{\omega} t} + A_2 e^{-\hat{\omega} t})e^{-\xi \omega t} = (A \cosh \hat{\omega} t + B \sinh \hat{\omega} t)e^{-\xi \omega t} \quad (2.43)$$

trong đó: $\hat{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$, $A = A_1 + A_2$ và $B = A_1 - A_2$

Từ điều kiện ban đầu ta tìm được 2 hằng số tích phân A và B :

$$A = u(0) \quad B = \frac{\xi \omega u(0) + \dot{u}(0)}{\hat{\omega}} \quad (2.44)$$



Hình 2.7: Sự thay đổi của chuyển vị và vận tốc của hệ theo thời gian trong trường hợp $\xi = 1$ và $\xi > 1$

Sau khi thay vào phương trình trên, ta có nghiệm tổng quát như sau:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left(u(0) \cosh \hat{\omega}t + \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\hat{\omega}} \sinh \hat{\omega}t \right) \quad (2.45)$$

Đồ thị của chuyển vị $u(t)$ được biểu diễn trên hình vẽ 2.7. Chúng ta thấy rằng biểu thức của chuyển vị $u(t)$ tương tự như trong trường hợp $\xi < 1$ nhưng các hàm lượng giác được thay bằng các hàm siêu việt “cosh” và “sinh”. Đây là các hàm không điều hòa, do đó hệ không có dao động xung quanh vị trí cân bằng.

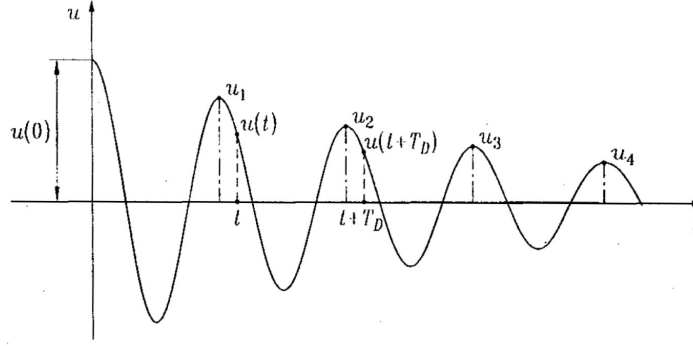
2.4.3 Độ suy giảm logarithme

Xét chuyển vị của hệ tại thời điểm t và $t + T_D$. Tỷ lệ giữa hai chuyển vị:

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{u(t + T_D)} &= \frac{u_0 e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)}{u_0 e^{-\xi\omega(t+T_D)} \cos(\omega_D(t + T_D) - \theta)} \\ &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{e^{-\xi\omega(t+T_D)}} = e^{\xi\omega T_D} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lấy logarithme cả hai vế của phương trình trên ta có:

$$\delta \equiv \ln \frac{u(t)}{u(t + T_D)} = \xi\omega T_D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.47)$$

Hình 2.8: Xác định tham số tắt dần ξ

Đại lượng δ được gọi là độ suy giảm logarithme. Đối với trường hợp lực cản nhỏ $\omega \approx \omega_D$ thì độ suy giảm logarithme được xấp xỉ bằng

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (2.48)$$

Khi $\xi \ll 1$, chuyển vị $u(t)$ rất gần với $u(t + T_D)$ làm cho việc đánh giá δ không chính xác. Để tăng độ chính xác, người ta đo các biên độ cách nhau m chu kỳ. Gọi u_n và u_{n+m} là biên độ tương ứng với các thời điểm t_n và $t_n + mT_D$ (m là một số nguyên). Xét tỉ lệ giữa hai biên độ:

$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \dots \frac{u_{n+m-1}}{u_{n+m}} = (e^{\xi\omega T_D})^m = e^{m\xi\omega T_D} \quad (2.49)$$

Thay (2.47) vào biểu thức trên ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = e^{m\delta} \quad (2.50)$$

hay

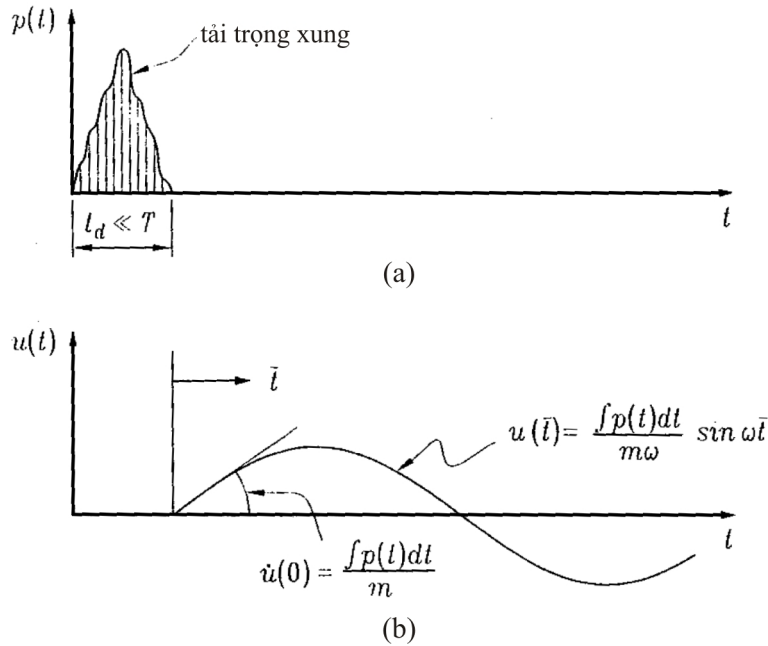
$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{u_n}{u_{n+m}} \quad (2.51)$$

Từ (2.48) và (2.51) ta suy ra:

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2m\pi} \ln \frac{u_n}{u_{n+m}} \quad (2.52)$$

2.5 Dao động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung

Tải trọng xung là tải trọng tác dụng lên hệ trong thời gian rất ngắn (hình 2.9a). Người ta định nghĩa xung lượng của tải trọng xung là diện tích phía dưới đường cong tải trọng



Hình 2.9: Tải trọng xung (a), dao động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung khi không xét đến lực cản (b)

$$\mathcal{I} = \int_0^{t_d} p(t)dt \quad (2.53)$$

Nếu thời gian tác dụng của tải trọng xung ngắn hơn nhiều so với chu kỳ dao động của hệ ($t_d \ll T$) ta có thể giả định rằng cường độ của tải trọng xung rất lớn so với các lực khác, do đó có thể bỏ qua lực đàn hồi và lực cản. Trong thời gian tác dụng của tải trọng xung không có sự thay đổi đáng kể nào về chuyển vị nhưng có sự thay đổi về vận tốc $\Delta \dot{u}$. Theo định luật II Newton⁶

⁶Biến thiên động lượng của hệ bằng tổng các lực tác dụng lên hệ

ta có:

$$m\Delta\dot{u} = \int_0^{t_d} p(t)dt \quad (2.54)$$

hay

$$\Delta\dot{u} = \frac{1}{m} \int_0^{t_d} p(t)dt \quad (2.55)$$

Sau thời điểm t_d hệ dao động tự do với điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} u(0) = u(t_d) = 0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(t_d) = \Delta\dot{u} = \frac{1}{m} \int_0^{t_d} p(t)dt \end{cases} \quad (2.56)$$

Thay các điều kiện ban đầu (2.56) vào (2.19) ta thu được dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung khi không xét đến lực cản (hình 2.9b):

$$u(\bar{t}) = u(t - t_d) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_d} p(t)dt \right) \sin \omega \bar{t} \quad (2.57)$$

Tương tự, thay (2.56) vào (2.32) ta tìm được dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng xung có xét đến lực cản:

$$u(\bar{t}) = u(t - t_d) = \frac{1}{m\omega_D} \left(\int_0^{t_d} p(t)dt \right) e^{-\xi\omega\bar{t}} \sin \omega_D \bar{t} \quad (2.58)$$

2.6 Dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do

Nghiên cứu hệ dao động chịu tác dụng của tải trọng điều hòa là bài toán cổ điển trong động lực học công trình không chỉ bởi loại tải trọng này hay gặp trong thực tế mà nếu hiểu cách tính hệ dưới tác dụng của loại tải trọng này chúng ta có thể hiểu cách tính cho các loại tải trọng khác.

Phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.59)$$

Nghiệm của (2.59) là tổng của nghiệm tổng quát $u_c(t)$ của phương trình thuần nhất ($p(t) = 0$) và nghiệm riêng $u_p(t)$ của phương trình không thuần nhất

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \quad (2.60)$$

Sau đây, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải phương trình (2.59) trong hai trường hợp: không có lực cản và có lực cản.

2.6.1 Trường hợp không có lực cản

Phương trình chuyển động có dạng:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.61)$$

Dựa vào kết quả nghiên cứu ở trên, ta đã biết nghiệm tổng quát của hệ dao động tự do (nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất)

$$u_c(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.62)$$

Dưới tác dụng của tải trọng điều hòa, chúng ta giả định hệ cũng dao động điều hòa cùng tần số và cùng pha với tải trọng. Nghiệm riêng của hệ được tìm dưới dạng sau:

$$u_p(t) = C \sin \bar{\omega}t \quad (2.63)$$

Hằng số tích phân C sẽ được xác định sao cho phương trình (2.61) thỏa mãn với mọi giá trị của $\bar{\omega}$ và t . Đạo hàm hai lần (2.63), ta thu được biểu thức của gia tốc:

$$\ddot{u}_p(t) = -\bar{\omega}^2 C \sin \bar{\omega}t \quad (2.64)$$

Thay biểu thức chuyển vị $u_p(t)$ và gia tốc $\ddot{u}_p(t)$ vào (2.61) ta có:

$$-m\bar{\omega}^2 C \sin \bar{\omega}t + kC \sin \bar{\omega}t = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.65)$$

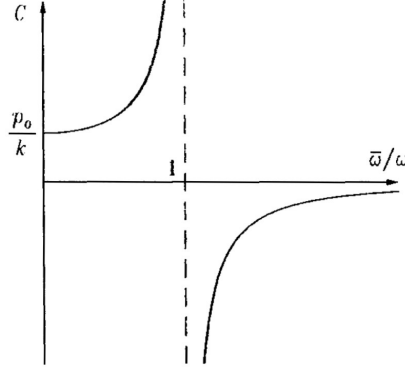
Đơn giản $\sin \bar{\omega}t$ ở cả hai vế của phương trình, ta tìm được hằng số tích phân C :

$$C = \frac{p_0}{k - m\bar{\omega}^2} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{m\bar{\omega}^2}{k}\right)} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right)} \quad (2.66)$$

Hình 2.10 cho thấy sự thay đổi của C theo tỉ số $\bar{\omega}/\omega$. Ta thấy rằng C thay đổi đột ngột từ giá trị dương vô cùng lớn thành giá trị âm vô cùng lớn khi $\bar{\omega} = \omega$, người ta gọi đây là hiện tượng cộng hưởng. Khi $\bar{\omega} < \omega$ hệ số C có giá trị dương, điều đó có nghĩa chuyển vị $u_p(t)$ và tải trọng $p(t)$ cùng dấu, hay nói một cách khác chuyển vị cùng pha với tải trọng tác dụng. Ngược lại, khi $\bar{\omega} > \omega$, C có giá trị âm, chuyển vị và tải trọng ngược dấu nhau. Ta nói rằng chuyển vị ngược pha so với tải trọng.

Thay biểu thức của C vào (2.63), ta có:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}} \sin \bar{\omega}t \quad (2.67)$$



Hình 2.10: Sự phụ thuộc của biên độ dao động điều hòa vào tần số tải trọng tác động $\bar{\omega}$

Nghiệm của (2.61) là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}} \sin \bar{\omega}t + A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.68)$$

Hai hằng số A và B được xác định từ điều kiện ban đầu. Từ phương trình mô tả chuyển vị của hệ, ta thấy $u(t)$ bao gồm 2 thành phần dao động riêng biệt:

- Thành phần chứa $\sin \bar{\omega}t$: dao động do tải trọng điều hòa gây ra.
- Thành phần chứa $\sin \omega t$ và $\cos \omega t$: dao động tự do của hệ.

Thành phần thứ nhất còn gọi là dao động cưỡng bức hay trạng thái dao động ổn định vì lực tác dụng không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu. Thành phần thứ hai mô tả trạng thái dao động tạm thời, trạng thái này phụ thuộc vào chuyển vị và vận tốc ban đầu. Trong thực tế, đối với các hệ dao động, lực cản luôn tồn tại và nó làm cho dao động tự do tắt dần theo thời gian. Đó chính là lí do mà trạng thái thứ hai được gọi là trạng thái dao động tạm thời. Trạng thái dao động ổn định có thể được viết lại dưới dạng dao động điều hòa với biên độ u_0 và pha θ tại thời điểm ban đầu $t = 0$:

$$u_p(t) = u_0 \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.69)$$

trong đó u_0 luôn có giá trị dương, được gọi là biên độ của dao động

$$u_0 = (u_{st})_0 R_d \quad (2.70)$$

$(u_{st})_0$ là *chuyển vị tĩnh lớn nhất*, do tải trọng tĩnh $p = p_0$ tác dụng trên hệ gây ra

$$(u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \quad (2.71)$$

R_d gọi là *hệ số động*

$$R_d = \frac{1}{|1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}|} \quad (2.72)$$

Dễ dàng nhận thấy $u_0 = |C|$, góc pha θ nhận một trong hai giá trị sau:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \bar{\omega} < \omega \\ \pi & \text{nếu } \bar{\omega} > \omega \end{cases}$$

Trên hình 2.11 biểu diễn sự thay đổi của hệ số động R_d theo tỉ số $\bar{\omega}/\omega$. Khi $\bar{\omega}/\omega$ nhỏ thì R_d xấp xỉ bằng 1, biên độ của dao động cũng xấp xỉ bằng biến dạng tĩnh. Khi $\bar{\omega}/\omega > \sqrt{2}$ thì $R_d < 1$, biên độ dao động nhỏ hơn biến dạng tĩnh. Khi tỉ số $\bar{\omega}/\omega$ ngày càng tăng thì R_d càng nhỏ đi và tiệm cận tới 0 khi $\bar{\omega}/\omega \rightarrow \infty$. Khi tỉ số $\bar{\omega}/\omega$ gần với giá trị 1 thì R_d lớn hơn nhiều lần so với 1, hay nói cách khác, biên độ dao động lớn hơn nhiều lần so với biến dạng tĩnh.

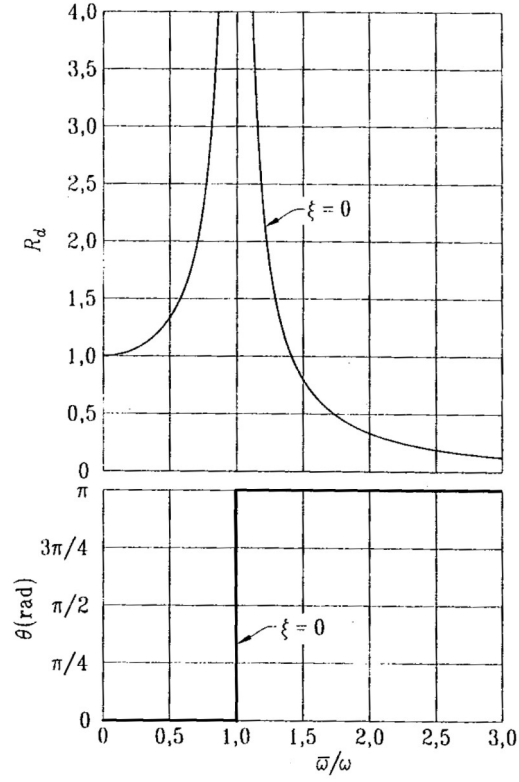
Ví dụ 2.2: Xét dầm một đầu ngàm có khối lượng tập trung tại đầu tự do như hình 2.12. Bỏ qua khối lượng của dầm so với khối lượng tập trung m . Dầm có chiều dài l và độ cứng chống uốn EI . Khối lượng chịu tác dụng của tải trọng động $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t$. Viết phương trình dao động ở trạng thái ổn định. Xác định độ võng lớn nhất của dầm.

Lời giải: Độ cứng của hệ:

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Tần số dao động riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}}$$



Hình 2.11: Sự thay đổi của hệ số động R_d và góc lệch pha θ theo tỉ số $\bar{\omega}/\omega$

Hệ số động:

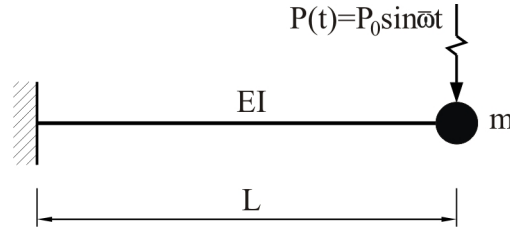
$$R_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega}^2 m L^3}{3EI}}$$

Phương trình dao động ở trạng thái ổn định:

$$u_p(t) = \frac{p_0 L^3}{3EI} R_d \sin \bar{\omega} t$$

Độ võng lớn nhất của dầm (tại vị trí khối lượng m)

$$u_{max} = u_m + u_p^d = \frac{mgL^3}{3EI} + \frac{p_0 L^3}{3EI} R_d$$



Hình 2.12: Ví dụ hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa

Ví dụ 2.3: Xét hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng động như hình 2.13a. Khối lượng m có trọng lượng $30kN$. Tải trọng động có biên độ $p_0 = 10kN$, tần số của tải trọng điều hòa $\bar{\omega} = 30rad/s$. Module đàn hồi Young $E = 2,1 \times 10^8 kN/m^2$, moment quán tính $I = 78 \times 10^{-6} m^4$. Vẽ biểu đồ moment uốn động của khung.

Lời giải: Độ cứng của hệ: Cho "lực" k tác dụng tại vị trí khối lượng theo phương dao động. Biểu đồ moment như hình 2.13b. Tính chuyển vị của khối lượng do "lực" k gây ra bằng cách nhân biểu đồ moment M_b và M_c . Cho chuyển vị này bằng 1 ta xác định được độ cứng k :

$$k = \frac{24EI}{23}$$

Tần số dao động riêng:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24EI}{23m}} \\ &= \sqrt{\frac{9,81 \times 24 \times 2,1 \times 10^8 \times 78 \times 10^{-6}}{23 \times 30}} = 74,76 rad/s \end{aligned}$$

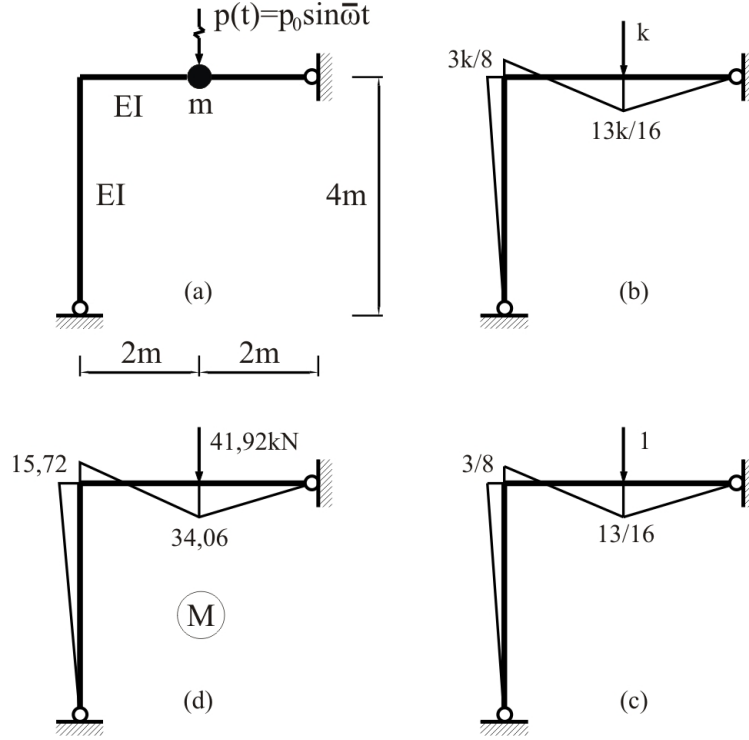
Hệ số động:

$$R_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{30}{74,76}\right)^2\right|} = 1,192$$

Tải trọng tĩnh tương đương ⁷

$$p_{eq} = p_0 \times R_d = 10 \times 1,192 = 11,92kN$$

⁷Tải trọng tĩnh tương đương là tải trọng gây ra biến dạng bằng biến dạng lớn nhất do tải trọng động gây ra. Khi đã xác định được tải trọng tĩnh tương đương, bài toán được tính như bài toán tĩnh chịu tác dụng của p_{eq} .



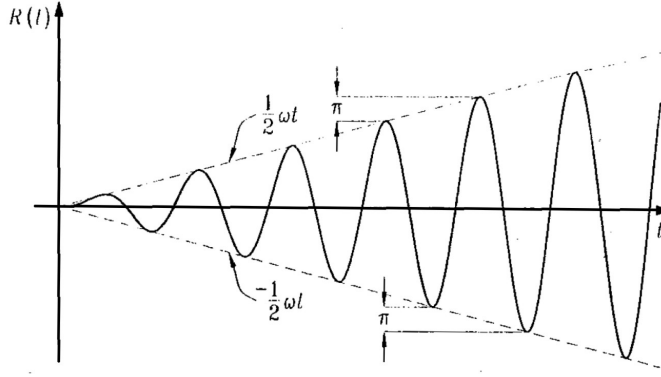
Hình 2.13: Ví dụ xác định biểu đồ moment uốn động hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa

Biểu đồ moment uốn động được biểu diễn trên hình 2.13d.

Hiện tượng cộng hưởng: Tần số cộng hưởng được định nghĩa là tần số của tải trọng tác dụng mà ứng với tần số đó R_d đạt giá trị cực đại. Đối với hệ không xét đến lực cản, tần số cộng hưởng bằng tần số dao động riêng ω và $R_d = \infty$. Tuy nhiên, chuyển vị của hệ không trở thành vô cùng lớn ngay lập tức.

Nếu $\bar{\omega} = \omega$, dạng nghiệm (2.63) không còn đúng nữa vì nó là một phần của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Chúng ta tìm nghiệm riêng dưới dạng sau: $u_p(t) = Ct \cos \omega t$. Thay vào (2.61) và giải phương trình ta tìm được hằng số tích phân

$$C = -\frac{p_0}{2k} \omega \quad (2.73)$$



Hình 2.14: Sự thay đổi của hệ số động R_t theo thời gian khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng

Nghiệm riêng bây giờ có dạng:

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{2k}\omega t \cos \omega t \quad (2.74)$$

Nghiệm của phương trình với trạng thái ban đầu $u(0) = \dot{u}(0) = 0$:

$$u(t) = -\frac{1}{2}\frac{p_0}{k}\left(\omega t \cos \omega t - \sin \omega t\right) \quad (2.75)$$

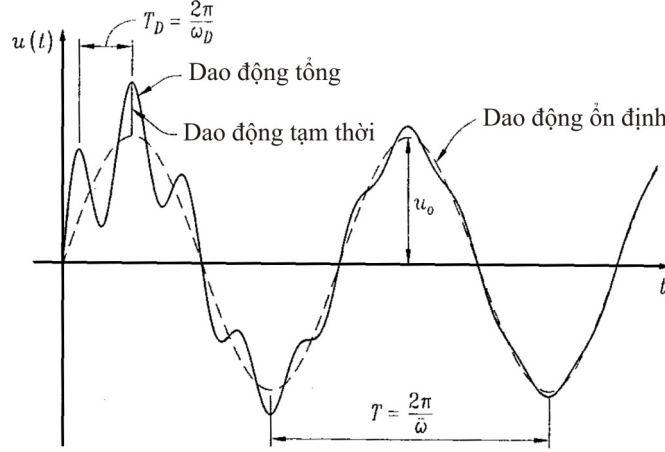
Gọi $R(t)$ là hệ số động theo thời gian, được xác định là tỉ số giữa chuyển vị động và giá trị lớn nhất của chuyển vị tĩnh:

$$R(t) = \frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{u(t)}{p_0/k} = -\frac{1}{2}\left(\omega t \cos \omega t - \sin \omega t\right) \quad (2.76)$$

Hình 2.14 biểu diễn đồ thị của $R(t)$ theo thời gian khi xảy ra cộng hưởng. Chu kỳ dao động vẫn là $T = 2\pi/\omega$. Biên độ của $R(t)$ tăng tuyến tính và nó trở thành vô cùng lớn sau một khoảng thời gian rất dài. Thực tế, hiện tượng cộng hưởng gây ra quá trình dẻo hóa vật liệu trước khi đạt đến chuyển vị cực đại.

2.6.2 Trường hợp có lực cản

Phương trình (2.59) mô tả dao động cưỡng bức điều hòa khi xét đến lực cản. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là nghiệm của dao động tự



Hình 2.15: Dao động điều hòa khi xét đến lực cản

do có lực cản, được xác định bởi biểu thức (2.29). Nghiệm riêng của phương trình:

$$u_p(t) = C \sin \bar{\omega}t + D \cos \bar{\omega}t \quad (2.77)$$

trong đó:

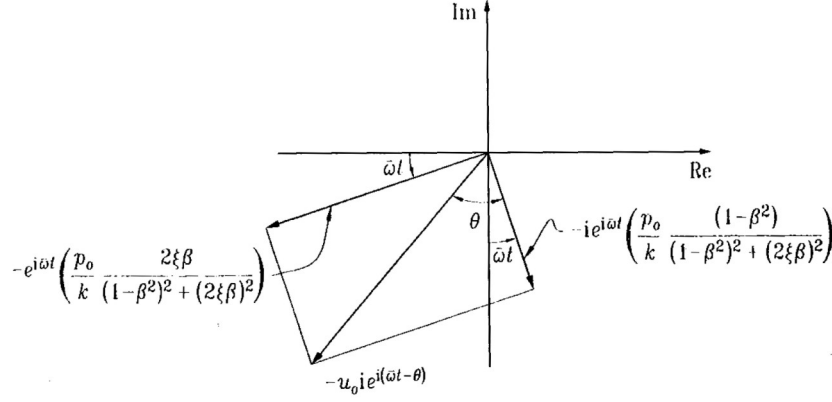
$$\begin{aligned} C &= \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\bar{\omega}/\omega)^2}{[1 - (\bar{\omega}/\omega)^2]^2 + [2\xi(\bar{\omega}/\omega)]^2} \\ D &= \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\bar{\omega}/\omega}{[1 - (\bar{\omega}/\omega)^2]^2 + [2\xi(\bar{\omega}/\omega)]^2} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Nghiệm của phương trình (2.59) là tổng của (2.78) và (2.29):

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{[1 - (\bar{\omega}/\omega)^2]^2 + [2\xi(\bar{\omega}/\omega)]^2} \times \\ &\times \left[\left(1 - (\bar{\omega}/\omega)^2 \right) \sin \bar{\omega}t - 2\xi(\bar{\omega}/\omega) \cos \bar{\omega}t \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

Số hạng thứ nhất tương ứng với trạng thái dao động tạm thời, trạng thái này sẽ nhanh chóng mất đi do ảnh hưởng của hàm mũ $e^{-\xi\omega t}$. Số hạng thứ hai tương ứng với trạng thái dao động ổn định.

Hình 2.15 biểu diễn dao động của hệ. Ta thấy rằng dao động tạm thời tắt



Hình 2.16: Biên độ ở trạng thái dao động ổn định

dần rất nhanh theo một tỉ lệ phụ thuộc vào ω và ξ . Sau một thời gian, chỉ còn lại dao động ổn định với tần số của lực tác dụng nhưng lệch pha so với tải trọng. Trong phần tiếp theo, chúng ta chỉ xét đến dao động ổn định tuy nhiên cần lưu ý rằng giá trị chuyển vị lớn nhất có thể xuất hiện trước khi hệ đạt đến trạng thái dao động ổn định.

Phương trình dao động ổn định có dạng:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \left[(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t \right] \quad (2.80)$$

trong đó:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2.81)$$

hoặc có thể viết dưới dạng véc tơ quay (hình 2.16):

$$u_p(t) = u_0 \sin(\bar{\omega}(t) - \theta) \quad (2.82)$$

Biên độ u_0 và góc trễ pha θ của chuyển vị so với tải trọng tác dụng được xác định bởi biểu thức:

$$u_0 = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.83)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{D}{C} = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right) \quad (2.84)$$

Hệ số động R_d là tỉ số giữa biên độ dao động u_0 và chuyển vị tĩnh $(u_{st})_0 = p_0/k$ do lực p_0 tác dụng tĩnh gây ra:

$$R_d = \frac{u_0}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.85)$$

Ta thấy rằng, góc trễ pha θ và hệ số động R_d phụ thuộc vào β và tham số tắt dần ξ . Hình 2.17 biểu diễn đồ thị của R_d và θ theo β với các giá trị khác nhau của tham số tắt dần ξ .

Hệ số động theo thời gian $R(t)$ được xác định bằng tỉ số giữa chuyển vị động và chuyển vị tĩnh gây ra bởi biên độ p_0 :

$$R(t) = \frac{u_p(t)}{p_0/k} = \frac{u_0 \sin(\bar{\omega}(t) - \theta)}{p_0/k} = R_d \sin(\bar{\omega}(t) - \theta) \quad (2.86)$$

Hiện tượng cộng hưởng: Hệ số động R_d đạt giá trị cực đại khi mẫu số của phương trình (2.85) đạt giá trị cực tiểu

$$\frac{d}{d\beta} \left((1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)^{1/2} = \frac{-2\beta(1 - \beta^2) + 2\beta(2\xi^2)}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0 \quad (2.87)$$

hay

$$\beta(\beta^2 - 1 + 2\xi^2) = 0 \quad (2.88)$$

Nghiệm khác không $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ cho giá trị lớn nhất của R_d

$$(R_d)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.89)$$

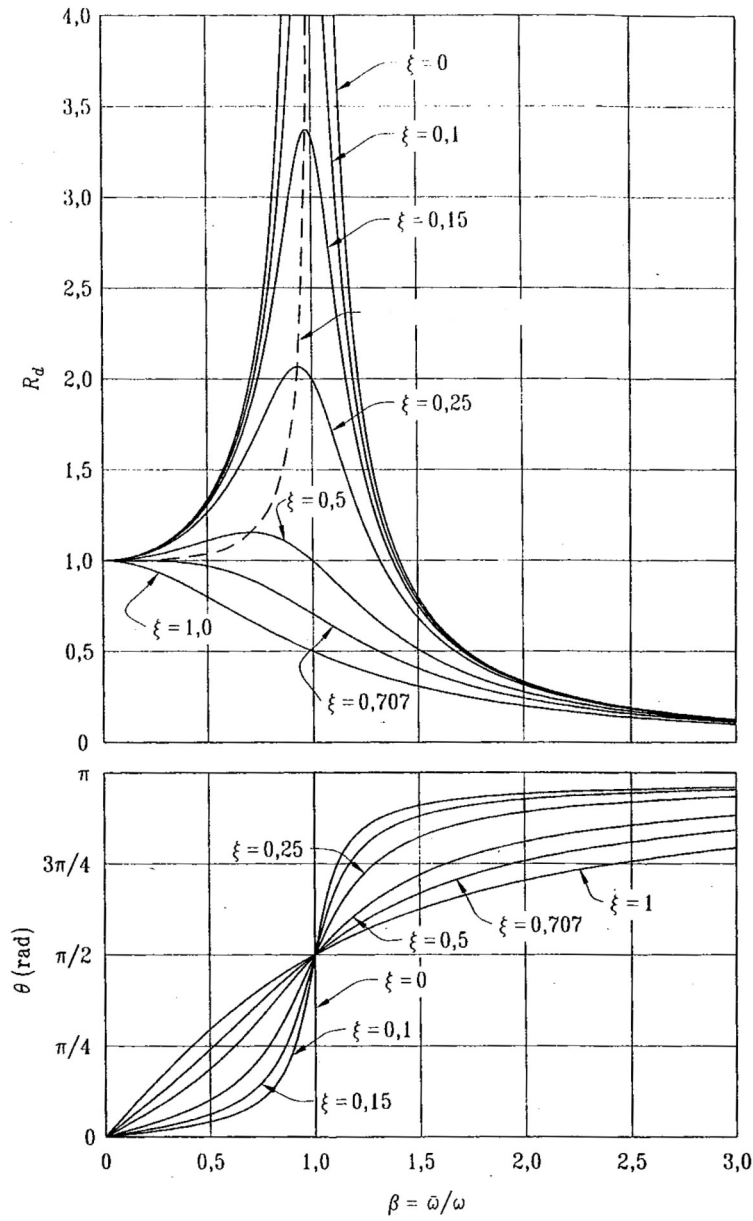
Tần số cộng hưởng tương ứng:

$$\bar{\omega} = \omega\sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2.90)$$

Khi $\beta = 1$ thì hệ số động R_d có dạng:

$$(R_d)_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.91)$$

Đối với những hệ có tham số tắt dần nhỏ ($\xi \ll 1$) thì $(R_d)_{max} \simeq (R_d)_{\beta=1}$. Để hiểu rõ hiện tượng cộng hưởng, ta nghiên cứu phương trình dao động



Hình 2.17: Sự thay đổi hệ số động R_d và góc lệch pha θ theo tỉ số $\bar{\omega}/\omega$ và tham số tắt dần ξ

tổng quát của hệ. Khi $\beta = 1$ hay $\bar{\omega} = \omega$, phương trình (2.79) có thể viết như sau:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) - \frac{p_0}{k} \frac{\cos \omega t}{2\xi} \quad (2.92)$$

Thay điều kiện ban đầu $t = 0$: $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, ta xác định được các hằng số A và B :

$$A = \frac{p_0}{2\xi k} \quad B = \frac{p_0}{2k\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.93)$$

Vậy phương trình dao động của hệ:

$$u(t) = \frac{p_0}{2\xi k} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2.94)$$

Trong trường hợp thực tế, tham số tắt dần ξ rất nhỏ và số hạng chứa sinus có thể bỏ qua, phương trình dao động có thể viết ⁸

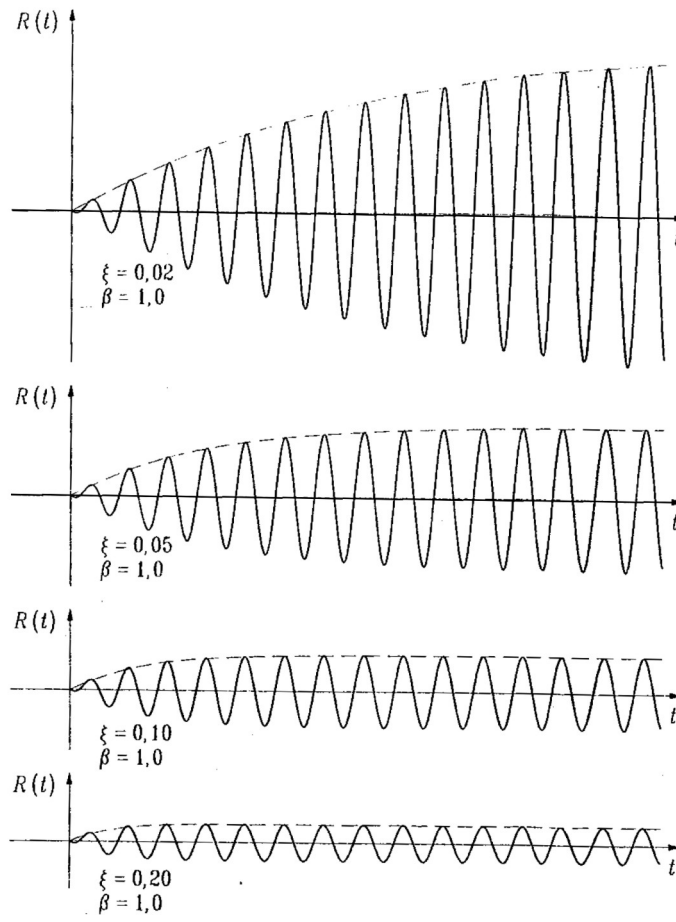
$$u(t) \approx \frac{p_0}{2\xi k} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (2.95)$$

Hệ số động theo thời gian $R(t)$ có dạng:

$$R(t) \approx \frac{u(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (2.96)$$

Hình 2.18 biểu thị quá trình dẫn đến trạng thái dao động ổn định khi cộng hưởng của hệ có lực cản. Dễ thấy rằng số chu kỳ cần thiết để biên độ đạt đến giá trị lớn nhất phụ thuộc vào tham số tắt dần ξ .

⁸Khi đó $\omega_D \approx \omega = \bar{\omega}$



Hình 2.18: Sự thay đổi hệ số động R_t theo tham số tắt dần ξ khi $\beta = 1$

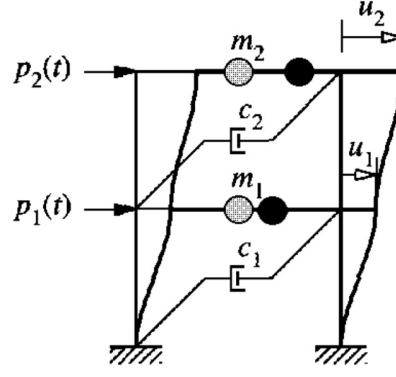
Chương 3

Dao động hệ hữu hạn bậc tự do

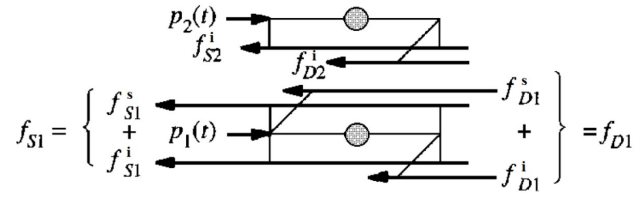
Trong chương này, chúng ta sẽ thiết lập phương trình vi phân dao động của một hệ nhiều bậc tự do. Từ đó dẫn đến khái niệm về ma trận khối lượng, ma trận ảnh hưởng độ cứng và ma trận ảnh hưởng lực cản. Phần tiếp theo sẽ đưa ra cách xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động tương ứng. Một tính chất quan trọng của các dạng dao động là tính chất trực giao cũng được giới thiệu. Phần cuối của chương trình bày cách xác định phương trình dao động dựa trên khai triển véc tơ chuyển vị theo dạng dao động.

3.1 Mô hình hệ hữu hạn bậc tự do

Để việc trình bày được đơn giản, dễ hiểu, chúng ta sẽ nghiên cứu mô hình đơn giản nhất của hệ dao động hữu hạn bậc tự do: kết cấu khung nhà hai tầng chịu tác dụng của các tải trọng $p_i(t)$. Giả thiết rằng dầm và sàn nhà là tuyệt đối cứng (không bị uốn), ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong dầm và cột cũng như ảnh hưởng của lực dọc trong các cột. Thực tế, khối lượng phân bố trên toàn kết cấu nhưng chúng ta giả định khối lượng trong các cột là không đáng kể và chỉ tập trung tại các sàn. Mặc dù khá xa so với thực tế nhưng mô hình này thuận tiện cho việc thiết lập phương trình chuyển động hệ nhiều bậc tự do.



Hình 3.1: Mô hình hệ dao động hữu hạn bậc tự do



Hình 3.2: Lực tác dụng lên các khối lượng

3.2 Phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do

Xét hệ như hình vẽ 3.1. Các lực tác dụng lên hai khối lượng được biểu diễn trên hình 3.2. Viết phương trình cân bằng cho hai khối lượng:

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Giả thiết hệ dao động tuyến tính, các lực đàn hồi f_{Si} là hàm của chuyển vị tương đối u_i

$$\begin{aligned} f_{S1} &= f_{S1}^i + f_{S1}^s = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \\ f_{S2} &= f_{S2}^i = k_2 (u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG HỆ HỮU HẠN BẬC TỰ DO 45

Lực cản f_{Di} là hàm của vận tốc $\dot{u}_i$

$$\begin{aligned} f_{D1} &= f_{D1}^i + f_{D1}^s = c_1 \dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \\ f_{D2} &= f_{D2}^i = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lực quán tính trong các khối lượng m_i

$$\begin{aligned} f_{I1} &= m_1 \ddot{u}_1 \\ f_{I2} &= m_2 \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Thay các biểu thức (3.2), (3.3) và (3.4) vào phương trình (3.1), ta có:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2) &= p_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) &= p_2(t) \end{aligned}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Phương trình (3.5) có thể viết gọn lại như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.6)$$

trong đó:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Chúng ta thấy rằng (3.6) có dạng tương tự như (2.3) nhưng các đại lượng được biểu diễn bằng các ma trận. Sau đây, chúng ta đưa ra định nghĩa về ma trận độ cứng, ma trận hệ số lực cản và ma trận khối lượng:

Ma trận độ cứng 1. *Hệ số ảnh hưởng độ cứng k_{ij} là lực tại tọa độ thứ i gây ra bởi chuyển vị đơn vị tại tọa độ thứ j trong khi giữ các chuyển vị tại các tọa độ khác bằng không. Ma trận các hệ số ảnh hưởng độ cứng $\mathbf{K}$ được gọi là ma trận độ cứng.*

Ma trận hệ số lực cản 2. *Hệ số ảnh hưởng lực cản c_{ij} là lực tại tọa độ thứ i gây ra bởi vận tốc đơn vị tại tọa độ thứ j trong khi giữ các vận tốc tại các tọa độ khác bằng không. Ma trận các hệ số ảnh hưởng lực cản $\mathbf{C}$ được gọi là ma trận ảnh hưởng lực cản.*

Ma trận khối lượng 3. *Hệ số ảnh hưởng khối lượng m_{ij} là lực tại tọa độ thứ i gây ra bởi gia tốc đơn vị tại tọa độ thứ j trong khi giữ các gia tốc tại các tọa độ khác bằng không. Ma trận các hệ số ảnh hưởng khối lượng $\mathbf{M}$ được gọi là ma trận khối lượng.*

3.3 Dao động tự do hệ hữu hạn bậc tự do

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu dao động hệ hữu hạn bậc tự do khi không có tải trọng ngoài tác động. Giả sử bỏ qua ảnh hưởng của lực cản, phương trình vi phân có dạng:

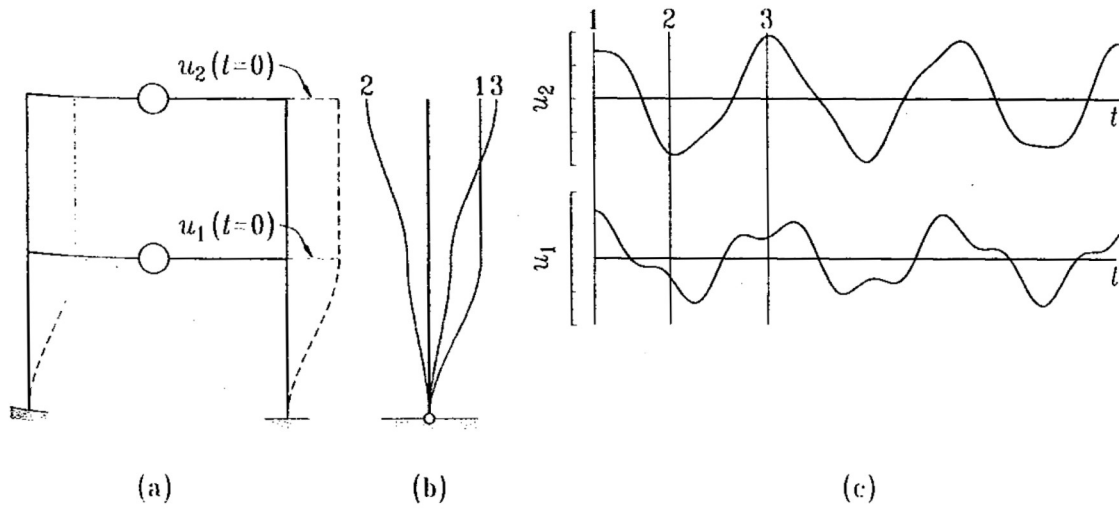
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = 0 \quad (3.11)$$

Phương trình (3.11) gồm n phương trình vi phân thuần nhất có liên hệ với nhau qua ma trận khối lượng, ma trận độ cứng. Mục đích của chúng ta là tìm nghiệm của (3.11) thỏa mãn điều kiện ban đầu: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(0)$ và $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0)$ tại $t = 0$.

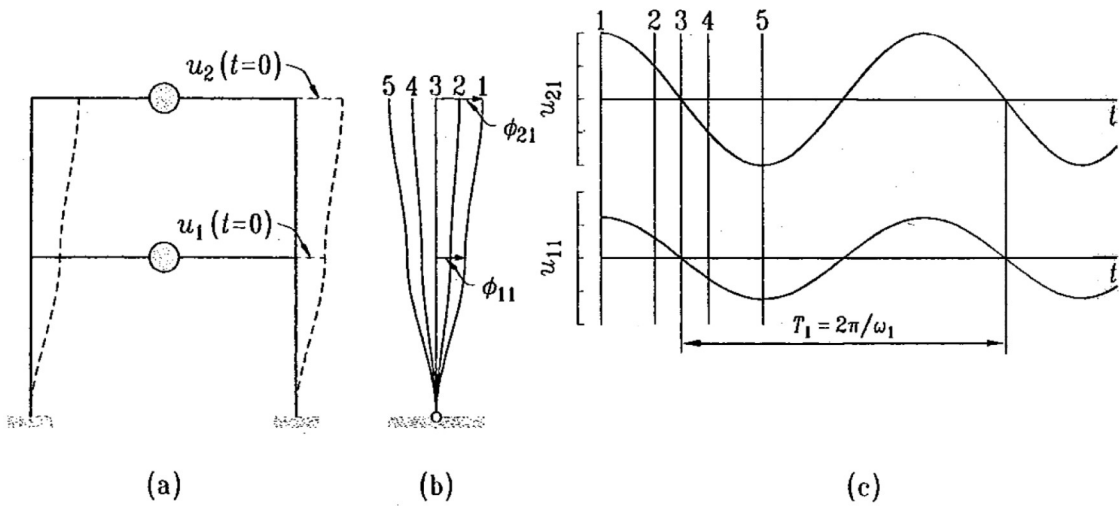
3.3.1 Ý nghĩa vật lý của tần số dao động riêng và dạng dao động riêng

Xét một hệ hai bậc tự do như hình 3.3a. Nếu đặt vào các khối lượng những chuyển vị ban đầu bất kỳ, hệ sẽ dao động quanh vị trí cân bằng của nó. Chúng ta nhận thấy rằng chuyển động của mỗi khối lượng của hệ không còn là dao động điều hòa như trong trường hợp hệ một bậc tự do nữa (hình 3.3c). Mặt khác, dạng đường đàn hồi của hệ (tỉ lệ u_1/u_2) cũng thay đổi theo thời gian.

Ngược lại, nếu đặt vào các khối lượng của hệ những chuyển vị ban đầu thích



Hình 3.3: Chuyển động của hệ với điều kiện ban đầu bất kỳ

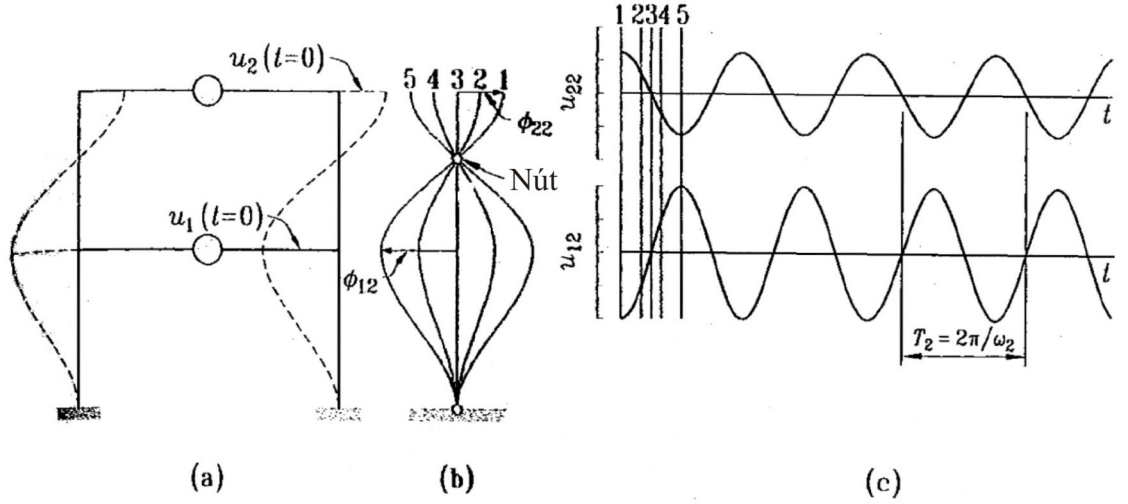


Hình 3.4: Dạng dao động thứ nhất của hệ

hợp, hệ sẽ dao động điều hòa với dạng đường đàn hồi không thay đổi theo thời gian. Đối với hệ hai bậc tự do, tồn tại hai dạng đường đàn hồi đặc trưng.

Dạng đặc trưng thứ nhất tương ứng với trạng thái chuyển vị 1 trên hình 3.4b tại thời điểm $t = 0$. Dễ nhận thấy rằng chuyển động của hai khối lượng là dao động điều hòa với cùng chu kỳ T_1 và cùng pha (hình 3.4c) hay nói cách khác chuyển vị của hai khối lượng luôn cùng hướng. Tỷ lệ giữa hai chuyển vị u_1/u_2 là hằng số. Ta cũng nhận thấy có một điểm của hệ mà chuyển vị tại đó luôn bằng không trong quá trình dao động. Người ta gọi điểm đó là nút. Dạng đặc trưng thứ hai tương ứng với trạng thái chuyển vị 1 trên hình 3.5b tại thời điểm $t = 0$. Một lần nữa chúng ta lại thấy hai khối lượng dao động điều hòa với chu kỳ T_2 nhưng ngược pha (hình 3.5c) hay chuyển vị của các khối lượng luôn ngược hướng. Tỷ lệ u_1/u_2 vẫn là hằng số. Trong dạng đặc trưng này có hai điểm nút mà tại đó các chuyển vị bằng không suốt quá trình dao động.

Mỗi đường đàn hồi đặc trưng được gọi là dạng dao động riêng của hệ hữu



Hình 3.5: Dạng dao động thứ hai của hệ

hạn bậc tự do và các véc tơ chứa các chuyển vị của mỗi dạng dao động riêng được gọi là ϕ . Với mỗi dạng dao động, chuyển vị của các khối lượng đạt đến giá trị cực trị tại cùng thời điểm và cũng đi qua vị trí cân bằng cùng thời điểm. Tương ứng với mỗi dạng dao động có một chu kỳ dao động T_i và tần số f_i

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad f_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (3.12)$$

Tần số dao động riêng bé nhất được ký hiệu là ω_1 , do đó chu kỳ dài nhất được ký hiệu là T_1 . Trường hợp tổng quát có n dạng dao động riêng đối với hệ có n bậc tự do

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \quad (3.13)$$

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n \quad (3.14)$$

Các đại lượng ω_1, T_1 và ϕ_1 lần lượt được gọi là tần số cơ bản, chu kỳ cơ bản và dạng dao động cơ bản của hệ.

3.3.2 Tần số dao động riêng

Theo phân tích ở phần trước, chúng ta biết rằng chuyển động của hệ là điều hòa với một vài điều kiện. Véc tơ chuyển vị có thể viết như sau:

$$\mathbf{u}(t) = \phi \sin(\omega t - \theta) \quad (3.15)$$

trong đó: ϕ là các dạng dao động có thể của hệ, θ là góc lệch pha. Đạo hàm 2 lần véc tơ chuyển vị ta thu được véc tơ gia tốc như sau:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 \phi \sin(\omega t - \theta) = -\omega^2 \mathbf{u}(t) \quad (3.16)$$

Thay biểu thức của chuyển vị và gia tốc vào (3.11):

$$-\omega^2 \mathbf{M} \phi \sin(\omega t - \theta) + \mathbf{K} \phi \sin(\omega t - \theta) = 0 \quad (3.17)$$

Phương trình này thỏa mãn với mọi giá trị của t nên ta có:

$$\mathbf{K} \phi = \omega^2 \mathbf{M} \phi \quad (3.18)$$

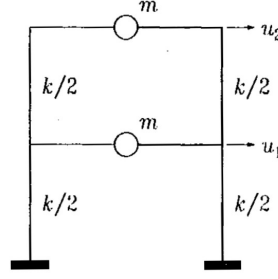
hoặc có thể viết dưới dạng sau:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \phi = 0 \quad (3.19)$$

Nghiệm tầm thường của phương trình $\phi = 0$ tương ứng với trạng thái hệ không có chuyển động nên ta không xét ở đây. Phương trình chỉ có nghiệm không tầm thường khi định thức của ma trận hệ số $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]$ bằng không

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.20)$$

Phương trình (3.20) được gọi là phương trình tần số hay phương trình đặc trưng của hệ. Khai triển định thức này ta thu được một đa thức bậc n của ω_j^2 ,



Hình 3.6: Kết cấu nhà hai tầng, khối lượng tập trung ở hai sàn

trong đó n là bậc tự do của hệ. Phương trình này có n nghiệm thực, dương đối với ω_j^2 vì ma trận khối lượng $\mathbf{M}$ và ma trận độ cứng $\mathbf{K}$ là các ma trận xác định dương. n nghiệm của phương trình xác định n tần số dao động riêng ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$) của hệ. Khi đã biết tần số dao động riêng ω_j , ta có thể giải phương trình (3.19) để tìm dạng dao động riêng tương ứng ϕ_j . Trong lý thuyết đại số tuyến tính, cặp véc tơ (ω_j^2, ϕ_j) được gọi là giá trị riêng và véc tơ riêng của bài toán giá trị riêng ma trận.

Như vậy, một hệ dao động n bậc tự do có n tần số riêng ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$) được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$) tương ứng với chu kỳ dao động riêng T_i và dạng dao động riêng ϕ_j . Thuật ngữ "riêng" được dùng ở đây nhằm nhấn mạnh rằng đó là các tính chất riêng của hệ dao động, nó chỉ phụ thuộc vào các khối lượng và độ cứng của hệ.

Ví dụ 3.1: Xác định tần số dao động riêng của kết cấu trên hình 3.6 biết rằng khối lượng của mỗi tầng là $m = 20000\text{kg}$, độ cứng ngang tổng cộng của mỗi tầng $k = 18 \times 10^6\text{N/m}$.

Lời giải: Hệ có 2 bậc tự do, ma trận khối lượng có dạng sau:

$$\mathbf{M} = 20 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

Ma trận độ cứng:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 18 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Các tần số dao động riêng được xác định từ phương trình đặc trưng:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} 36 \times 10^6 - (20 \times 10^3)\omega^2 & -1 \\ -1 & 18 \times 10^6 - (20 \times 10^3)\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Đặt $x = \omega^2/900$, ta có phương trình bậc hai đối với x :

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Hai nghiệm của phương trình là: $x_1 = 0,38197$ và $x_2 = 2,61803$.

Ta tính được các tần số riêng:

$$\omega_1 = 18,54 \text{rad/s} \quad \omega_2 = 48,54 \text{rad/s}$$

3.3.3 Dạng dao động riêng

Thay giá trị của ω_j vào phương trình (3.19) ta có:

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi_j = 0 \quad (3.21)$$

trong đó ϕ_j là dạng dao động riêng ứng với tần số riêng ω_j .

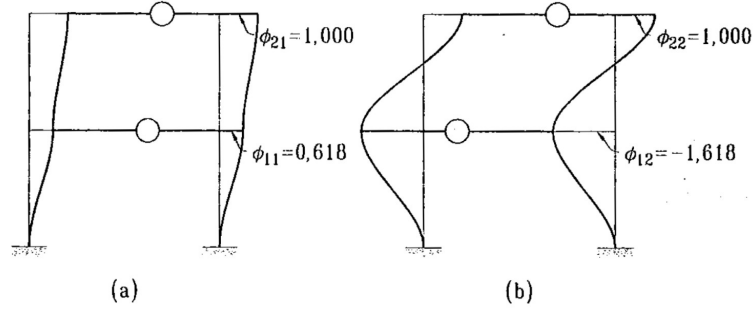
Do $\det[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] = 0$, ta không thể xác định các phần tử của véc tơ ϕ_j .

Tuy nhiên, dạng tổng quát ứng với một tần số có thể được xác định bằng cách biểu thị các chuyển vị theo một chuyển vị được chọn làm chuẩn. Ta có thể giả định phần tử đầu tiên ϕ_{1j} hay phần tử cuối cùng ϕ_{nj} của véc tơ ϕ_j có giá trị bằng 1. Như vậy ta có thể xác định được tất cả các phần tử khác ϕ_{ij} , ($i = 2, 3, \dots, n$) và ($j = 1, 2, \dots, n$).

Các phần tử của véc tơ ϕ_j của dạng dao động thứ j được gọi là ϕ_{ij} , nó tương ứng với chuyển vị thứ i trong n bậc tự do của dạng dao động thứ j . Việc sử dụng hai chỉ số cho phép chúng ta xác định dạng dao động và chuyển vị của các bậc tự do. Cách ký hiệu này sẽ rõ ràng hơn khi chúng ta sắp xếp các véc tơ ϕ_j vào một ma trận Φ chứa các véc tơ riêng

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó mỗi cột thứ j biểu diễn dạng dao động ϕ_j . Ma trận Φ gọi là ma trận dạng dao động.



Hình 3.7: Dạng dao động riêng : (a) dạng dao động thứ nhất, (b) dạng dao động thứ hai

Ví dụ 3.2: Xác định dạng dao động riêng của kết cấu trong ví dụ 3.1 (hình 3.6).

Lời giải: Thay tần số riêng thứ nhất $\omega_1 = 18,54$ vào (3.19) và cho $\phi_{21} = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 2 - 0,38197 & -1 \\ -1 & 1 - 0,38197 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình trên, ta tìm được $\phi_{11} = 0,61803$.

Tương tự, thay tần số riêng thứ hai $\omega_2 = 48,54$ vào (3.19) và cho $\phi_{22} = 1$, ta có:

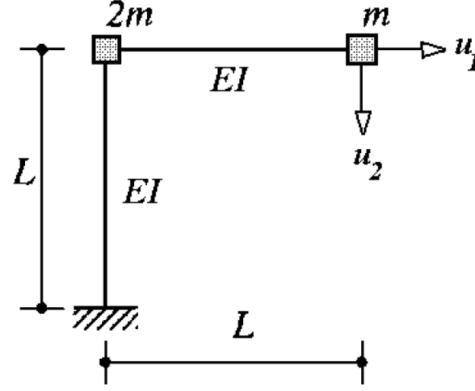
$$\begin{bmatrix} 2 - 2,61803 & -1 \\ -1 & 1 - 2,61803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình ta có $\phi_{12} = -1,61803$.

Dạng dao động của kết cấu (hình 3.7):

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} 0,61803 & -1,61803 \\ 1,00000 & 1,00000 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.3: Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của hệ như hình 3.8. Biết rằng độ cứng chống uốn của cả hai thanh đều là EI , giả thiết bỏ qua biến dạng dọc trục thanh. Khối lượng của hệ tập trung tại hai nút.



Hình 3.8: Hệ dao động hai bậc tự do

Lời giải: Hệ có hai bậc tự do. Ma trận khối lượng và ma trận độ cứng¹

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta đặt:

$$x = \frac{7mL^3}{6EI} \omega^2$$

phương trình đặc trưng có dạng:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \frac{m\omega^2}{x} \begin{vmatrix} 8 - 3x & -3 \\ -3 & 2 - x \end{vmatrix} = 0$$

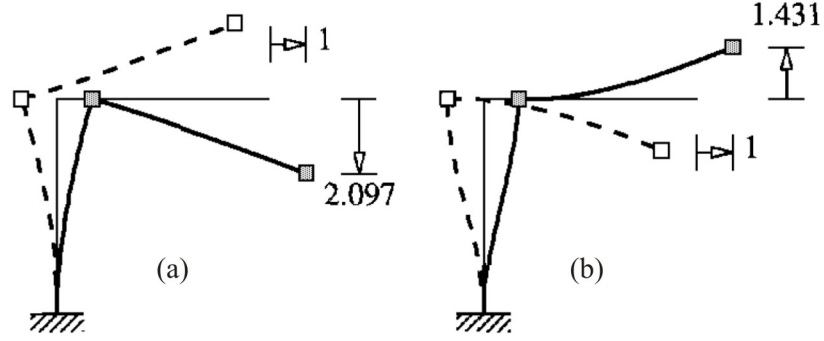
hay viết dưới dạng phương trình bậc hai đối với x :

$$3x^2 - 14x + 7 = 0$$

Hai nghiệm của phương trình: $x_1 = 0,5695$ và $x_2 = 4,0972$. Ta tính được các tần số riêng:

$$\omega_1 = 0,6987 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad \omega_2 = 1,874 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

¹Để xác định các hệ số ảnh hưởng độ cứng k_{ij} , ví dụ k_{11} và k_{21} ta lập biểu thức tính chuyển vị theo phương bậc tự do thứ nhất và bậc tự do thứ hai do các "lực" chưa biết k_{11} và k_{21} gây ra rồi cho các chuyển vị này lần lượt bằng 1 và 0, ta sẽ thu được 2 phương trình để giải ra k_{11} và k_{21}



Hình 3.9: Dạng dao động riêng : (a) dạng dao động thứ nhất, (b) dạng dao động thứ hai

Thay tần số riêng thứ nhất ω_1 vào (3.19) và cho $\phi_{11} = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 8 - 3 \times 0,5695 & -3 \\ -3 & 2 - 0,5695 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình trên ta tìm được $\phi_{21} = 2,097$.

Tương tự, thay tần số riêng thứ hai ω_2 vào (3.19) và cho $\phi_{12} = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 8 - 3 \times 4,0972 & -3 \\ -3 & 2 - 4,0972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình ta có $\phi_{22} = -1,431$.

Dạng dao động của hệ (hình 3.9):

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 \\ 2,097 & -1,431 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Tính chất trực giao các dạng dao động

Tính chất cơ bản của các dạng dao động là tính chất trực giao. Xét hai tần số riêng phân biệt ω_i, ω_j và các dạng dao động tương ứng ϕ_i, ϕ_j . Viết lại phương trình (3.18) với các tần số ω_i, ω_j :

$$\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j \quad (3.23)$$

Nhân trái phương trình (3.22) với ϕ_j^T và phương trình (3.23) với ϕ_i^T , ta thu được:

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.24)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K}\phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M}\phi_j \quad (3.25)$$

Chuyển trí các véc tơ và ma trận trong phương trình (3.25), ta có:

$$\phi_j^T \mathbf{K}^T \phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{M}^T \phi_i \quad (3.26)$$

Do các ma trận $\mathbf{M}$ và $\mathbf{K}$ đối xứng nên $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$. Điều đó dẫn đến:

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.27)$$

Từ các phương trình (3.24) và (3.27), ta có đẳng thức sau:

$$\omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = \omega_j^2 \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.28)$$

hay

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2) \phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = 0 \quad (3.29)$$

Với điều kiện $\omega_j \neq \omega_i$ ², ta có tính chất trực giao thứ nhất:

$$\phi_j^T \mathbf{M}\phi_i = 0, \quad i \neq j \quad (3.30)$$

Thay phương trình (3.30) vào (3.27), ta có tính chất trực giao thứ hai:

$$\phi_j^T \mathbf{K}\phi_i = 0, \quad i \neq j \quad (3.31)$$

Ý nghĩa của tính chất trực giao: Công của các lực quán tính và lực đàn hồi của dạng dao động thứ j trên những chuyển vị theo dạng dao động thứ i bằng không.

Để chứng minh kết quả này, xét một hệ ở dạng dao động thứ j với chuyển vị

$$u_j(t) = \phi_j \sin(\omega_j t - \theta_j) \quad (3.32)$$

Lực quán tính của dạng dao động

$$(f_I)_j = -\mathbf{M}\ddot{u}_j(t) = -\omega_j^2 \mathbf{M}\phi_j \sin(\omega_j t - \theta_j) \quad (3.33)$$

²Giải thích trường hợp $\omega_j = \omega_i$

Xét chuyển vị của hệ ở dạng dao động thứ i

$$u_i(t) = \phi_i \sin(\omega_i t - \theta_i) \quad (3.34)$$

Công của lực quán tính ở dạng dao động thứ j trên các chuyển vị ở dạng dao động thứ i :

$$(f_I)_j^T u_i = -\omega^2 (\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i) \sin(\omega_i t - \theta_i) \sin(\omega_j t - \theta_j) \quad (3.35)$$

Công này bằng không do tính chất trực giao (3.30).

Một cách tương tự, lực đàn hồi của dạng dao động thứ j

$$(f_S)_j = \mathbf{K} u_j(t) = \mathbf{K} \phi_j \sin(\omega_j t - \theta_j) \quad (3.36)$$

Công của lực đàn hồi ở dạng dao động thứ j trên các chuyển vị ở dạng dao động thứ i :

$$(f_S)_j^T u_i = (\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i) \sin(\omega_i t - \theta_i) \sin(\omega_j t - \theta_j) \quad (3.37)$$

Dễ dàng thấy công này bằng không do tính chất trực giao (3.31).

Nếu $\mathbf{M}$ là ma trận khối lượng bất kỳ, đối xứng, xác định dương thì ma trận được xác định bởi biểu thức:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (3.38)$$

là ma trận đường chéo. Các phần tử trên đường chéo được tính theo công thức:

$$\tilde{m}_i = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \quad (3.39)$$

Tương tự ta có:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (3.40)$$

với $\tilde{\mathbf{K}}$ là ma trận đường chéo có các phần tử trên đường chéo:

$$\tilde{k}_i = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i \quad (3.41)$$

3.3.5 Chuẩn hóa dạng dao động

Nếu véc tơ ϕ là dạng dao động riêng của hệ thì bất cứ véc tơ nào tỉ lệ với ϕ cũng là dạng dao động riêng vì nó thỏa mãn phương trình (3.19). Người ta có thể dùng hệ số tỉ lệ trong các dạng dao động riêng để chuẩn hóa các biên

độ của các bậc tự do. Quá trình đó gọi là chuẩn hóa dạng dao động. Trong tính toán, thuận tiện nhất là chuẩn hóa các dạng dao động sao cho các khối lượng tổng quát bằng một đơn vị $\tilde{m}_i = 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Điều kiện trực giao được biểu diễn như sau:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij} \quad (3.42)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (3.43)$$

với δ_{ij} là ký hiệu Kronecker. Điều kiện trực giao có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.44)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (3.45)$$

trong đó $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị bậc n và Ω gọi là ma trận phổ gồm n bình phương các tần số riêng ω_i^2 .

3.3.6 Khai triển véc tơ chuyển vị theo dạng dao động

Người ta có thể dùng một tập hợp bất kỳ n véc tơ độc lập làm cơ sở để biểu diễn một véc tơ bất kỳ bậc n . Tương tự, các dạng dao động riêng được dùng để biểu diễn véc tơ chuyển vị. Khai triển theo dạng dao động của một véc tơ chuyển vị $\mathbf{u}$ có dạng:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i = \Phi \mathbf{q} \quad (3.46)$$

trong đó: q_i gọi là tọa độ dạng dao động.

Đối với một véc tơ chuyển vị $\mathbf{u}$ cho trước, khi biết ϕ_i , người ta có thể đánh giá q_i bằng cách nhân cả hai vế của (3.46) với $\phi_j^T \mathbf{M}$

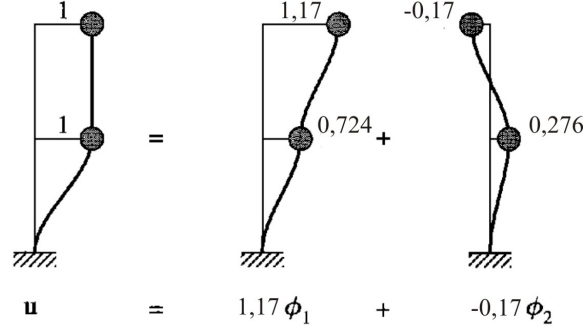
$$\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n (\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i) q_i \quad (3.47)$$

Do tính chất trực giao, các số hạng vế phải bằng không ngoại trừ số hạng $i = j$. Từ đó suy ra:

$$\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u} = \phi_j^T \mathbf{M} \phi_j q_j \quad (3.48)$$

Cả hai vế của phương trình trên đều là đại lượng vô hướng nên ta tìm được q_j theo biểu thức:

$$q_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}}{\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j} = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}}{\tilde{m}_j} \quad (3.49)$$



Hình 3.10: Khai triển véc tơ chuyển vị theo dạng dao động

Ví dụ 3.4: Xác định khai triển theo dạng dao động của véc tơ chuyển vị $\mathbf{u} = [1 \ 1]^T$ đối với hệ trong ví dụ 3.1 (hình 3.6)

Lời giải: Thay véc tơ chuyển vị $\mathbf{u}$ vào biểu thức (3.49) với $\phi_1 = [0, 618 \ 1]^T$ và $\phi_2 = [-1, 618 \ 1]^T$ ta có:

$$q_1 = \frac{[0, 618 \ 1] \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[0, 618 \ 1] \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, 618 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{1, 618m}{1, 382m} = 1, 17$$

$$q_2 = \frac{[-1, 618 \ 1] \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[-1, 618 \ 1] \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, 618 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-0, 618m}{3, 618m} = -0, 17$$

Kết quả khai triển được biểu diễn trên hình 3.10

3.3.7 Phương trình dao động

Trong phần này sẽ trình bày cách tìm nghiệm của (3.11) với điều kiện ban đầu. Từ (3.46) ta tính được véc tơ gia tốc $\ddot{\mathbf{u}}(t)$:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (3.50)$$

Thay $\mathbf{u}(t)$ và $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ vào (3.11) ta có:

$$\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = 0 \quad (3.51)$$

Nhân trái cả hai vế với Φ^T thu được:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (3.52)$$

Theo tính chất trực giao, phương trình trên có thể viết như sau:

$$\tilde{m}_i\ddot{q}_i(t) + \tilde{k}_i q_i(t) = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.53)$$

Đây là phương trình vi phân dao động của mô hình một bậc tự do đối với dạng dao động thứ i . Từ phương trình (3.22) ta biết rằng $\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\phi_i$, nhân trái hai vế với ϕ_i^T ta có:

$$\phi_i^T \mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 \phi_i^T \mathbf{M}\phi_i \quad (3.54)$$

Từ đó ta tìm được quan hệ giữa $\tilde{k}_i$ và $\tilde{m}_i$:

$$\tilde{k}_i = \omega_i^2 \tilde{m}_i \quad (3.55)$$

Thay (3.55) vào (3.53) và chia hai vế cho $\tilde{m}_i$, ta được phương trình:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad (3.56)$$

Nghiệm của (3.56) có dạng tương tự (2.19):

$$q_i(t) = q_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \quad (3.57)$$

trong đó: $q_i(0)$ và $\dot{q}_i(0)$ được xác định bởi:

$$q_i(0) = \frac{\phi_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}(0)}{\tilde{m}_i} \quad \dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(0)}{\tilde{m}_i} \quad (3.58)$$

với $\mathbf{u}(0)$ và $\dot{\mathbf{u}}(0)$ là điều kiện ban đầu. Thay (3.57) vào (3.46) ta được phương trình dao động của hệ:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \left[q_i(0) \cos(\omega_i t) + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right] \quad (3.59)$$

Ví dụ 3.5: Viết phương trình dao động của hệ trong ví dụ 3.3 biết rằng ở thời điểm ban đầu $t = 0$ hệ có các điều kiện:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v_0$$

Lời giải: Trong ví dụ 3, ta đã xác định được các tần số riêng:

$$\omega_1 = 0,6978\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \quad \omega_2 = 1,874\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

và các dạng dao động riêng:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 2,097 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ -1,431 \end{bmatrix}$$

Ta sẽ xác định $q_i(0)$ và $\dot{q}_i(0)$ theo biểu thức (3.58). Do $\mathbf{u}(0) = [0 \ 0]^T$ nên $q_i(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(0) &= \frac{\phi_1^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0)}{\phi_1^T \mathbf{M} \phi_1} \\ &= \frac{[1 \ 2,097] \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v_0}{[1 \ 2,097] \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2,097 \end{bmatrix}} = \frac{7,194mv_0}{7,397m} = 0,973v_0 \\ \dot{q}_2(0) &= \frac{\phi_2^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0)}{\phi_2^T \mathbf{M} \phi_2} \\ &= \frac{[1 \ -1,431] \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v_0}{[1 \ -1,431] \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1,431 \end{bmatrix}} = \frac{0,138mv_0}{5,048m} = 0,027v_0 \end{aligned}$$

Thay $\dot{q}_1(0)$ và $\dot{q}_2(0)$ vào (3.59) ta có:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,097 \end{bmatrix} \frac{0,973v_0}{0,6978} \sqrt{\frac{mL^3}{EI}} \sin \omega_1 t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1,431 \end{bmatrix} \frac{0,027v_0}{1,874} \sqrt{\frac{mL^3}{EI}} \sin \omega_2 t$$

hay viết gọn lại:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 1,394 \sin \omega_1 t + 0,014 \sin \omega_2 t \\ 2,924 \sin \omega_1 t - 0,021 \sin \omega_2 t \end{bmatrix} \sqrt{\frac{mL^3}{EI}} v_0$$

3.4 Dao động cưỡng bức hệ hữu hạn bậc tự do

Phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.60)$$

Điều kiện ban đầu: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(0)$ và $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0)$ tại $t = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình (3.60) gồm nghiệm của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Nghiệm thuần nhất ta đã biết cách xác định như phần trên. Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất. Ta có thể thực hiện tương tự như đối với phương trình thuần nhất, biến đổi phương trình vi phân dao động trong hệ tọa độ hình học thành phương trình vi phân dao động trong hệ tọa độ các dạng dao động. Bằng cách thay (3.46) vào phương trình (3.60), ta có:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (3.61)$$

Nhân trái cả hai vế với Φ^T thu được:

$$\Phi^T\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T\mathbf{K}\Phi\mathbf{q}(t) = \Phi^T\mathbf{p}(t) \quad (3.62)$$

Theo tính chất trực giao các dạng dao động riêng, phương trình trên có thể đơn giản như sau:

$$\phi_i^T\mathbf{M}\phi_i\ddot{q}_i(t) + \phi_i^T\mathbf{K}\phi_iq_i(t) = \phi_i^T\mathbf{p}(t) \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

hay

$$\tilde{m}_i\ddot{q}_i(t) + \tilde{k}_iq_i(t) = \tilde{p}_i(t) \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.64)$$

trong đó:

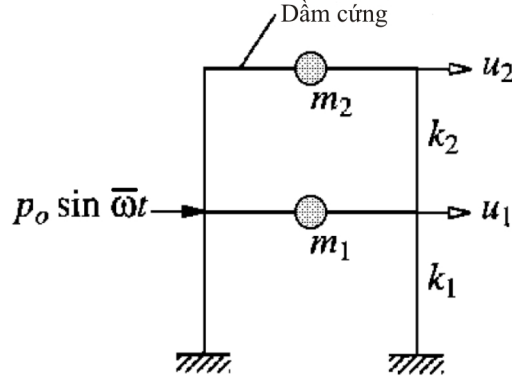
$$\tilde{m}_i = \phi_i^T\mathbf{M}\phi_i \quad \tilde{k}_i = \phi_i^T\mathbf{K}\phi_i \quad \tilde{p}_i = \phi_i^T\mathbf{p}(t) \quad (3.65)$$

lần lượt gọi là khối lượng tổng quát, độ cứng tổng quát và lực tổng quát đối với dạng dao động riêng thứ i .

Chia 2 vế của phương trình cho $\tilde{m}_i$ và sử dụng đẳng thức (3.55) ta có:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{\tilde{p}_i(t)}{\tilde{m}_i} \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.66)$$

Như vậy, hệ phương trình (3.60) trở thành n phương trình độc lập. Mỗi phương trình trong (3.64) hoặc (3.66) là phương trình dao động hệ một bậc tự do đối với $q_i, i = 1, 2, \dots, n$. Khi biết được $\mathbf{q}$ ta có thể xác định được phương trình dao động $\mathbf{u}(t)$ của hệ trong hệ tọa độ hình học từ phương trình (3.46).



Hình 3.11: Hệ dao động hai bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa

Ví dụ 3.6: Xét hệ trên hình 3.11 chịu tác dụng của tải trọng điều hòa $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$ đặt vào khối lượng m_1 . Bằng cách khai triển theo các dạng dao động, xác định phương trình dao động của hệ trên, biết rằng: $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 2k$, $k_2 = k$.

Lời giải: Ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của hệ:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng có dạng:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} 3k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

hay :

$$2m^2\omega^4 - 5km\omega^2 + 2k^2 = 0$$

Hai nghiệm của phương trình: $\omega_1^2 = k/2m$ và $\omega_2^2 = 2k/m$. Ta tính được các tần số riêng:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Thay tần số riêng thứ nhất ω_1 vào (3.19) và cho $\phi_{21} = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình trên ta tìm được $\phi_{11} = 1/2$.

Tương tự, thay tần số riêng thứ hai ω_2 vào (3.19) và cho $\phi_{22} = 1$, ta có:

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Giải phương trình ta có $\phi_{12} = -1$.

Ma trận dạng dao động của hệ:

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ (3.65) ta xác định được khối lượng tổng quát, độ cứng tổng quát và lực tổng quát:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 &= \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3m}{2} \\ \tilde{m}_2 &= \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3m \\ \tilde{k}_1 &= \phi_1^T \mathbf{K} \phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3k}{4} \\ \tilde{k}_2 &= \phi_2^T \mathbf{K} \phi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6k \\ \tilde{p}_1 &= \phi_1^T \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \bar{\omega} t = \frac{p_0}{2} \sin \bar{\omega} t \\ \tilde{p}_2 &= \phi_2^T \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \bar{\omega} t = -p_0 \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Thay các đại lượng trên vào phương trình (3.64) ta thu được 2 phương trình đối với q_1 và q_2

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 \ddot{q}_1 + \tilde{k}_1 q_1 &= \frac{p_0}{2} \sin \bar{\omega} t \\ \tilde{m}_2 \ddot{q}_2 + \tilde{k}_2 q_2 &= -p_0 \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{2p_0}{3k[1 - (\bar{\omega}/\omega_1)^2]} \sin \bar{\omega} t = \frac{2p_0}{3k} R_{d1} \sin \bar{\omega} t \\ q_2(t) &= -\frac{p_0}{6k[1 - (\bar{\omega}/\omega_2)^2]} \sin \bar{\omega} t = -\frac{p_0}{6k} R_{d2} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Phương trình dao động của hệ:

$$\mathbf{u}(t) = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t)$$

Thay các biểu thức của q_1 , q_2 và các dạng dao động riêng ta có:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2p_0}{3k} R_{d1} \sin \bar{\omega} t - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{p_0}{6k} R_{d2} \sin \bar{\omega} t \\ &= \begin{bmatrix} 2R_{d1} + R_{d2} \\ 4R_{d1} - R_{d2} \end{bmatrix} \frac{p_0}{6k} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Chương 4

Hệ vô hạn bậc tự do - Dao động của thanh thẳng

4.1 Phương trình vi phân dao động

Xét thanh thẳng có khối lượng phân bố. Dao động ngang của hệ tại thời điểm bất kỳ được biểu diễn bằng đường đàn hồi của hệ đó. Phương trình đường đàn hồi là hàm của tọa độ x và thời gian t

$$y = y(x, t) \quad (4.1)$$

Theo kết quả trong Sức bền vật liệu, giữa độ võng và nội lực trong dầm có liên hệ vi phân:

$$EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M(x, t) \quad (4.2)$$

trong đó: $EI(x)$ là độ cứng của dầm, M là momen nội lực trong dầm.

Giữa nội lực và tải trọng phân bố cũng có sự liên hệ:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.3)$$

Thay (4.2) vào phương trình (4.3), ta có biểu thức của lực đàn hồi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = -f_S(x, t) \quad (4.4)$$

Lực cản có chiều ngược với chiều của chuyển động và có cường độ:

$$f_D(x, t) = c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

Lực quán tính phân bố hướng theo chiều của chuyển vị:

$$f_I(x, t) = -m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

Tải trọng động tác dụng lên hệ có cường độ: $p(x, t)$

Theo nguyên lý *Alembert* ta có phương trình cân bằng:

$$-f_I(x, t) + f_D(x, t) - f_S(x, t) = p(x, t) \quad (4.7)$$

Thay các biểu thức của lực quán tính, lực cản và lực đàn hồi vào (4.7) ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \quad (4.8)$$

Phương trình (4.8) được gọi là phương trình vi phân dao động tổng quát của thanh thẳng chịu tải trọng bất kỳ.

Khi dầm có độ cứng EI không đổi thì (4.8) có dạng đơn giản như sau:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{m(x)}{EI} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{c}{EI} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{p(x, t)}{EI} \quad (4.9)$$

4.2 Dao động tự do của thanh thẳng

4.2.1 Phương trình dao động tự do

Phương trình vi phân dao động tự do của thanh thẳng khi không xét đến lực cản có dạng sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.10)$$

Nghiệm tổng quát của (4.10) là tổng của các nghiệm riêng:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x, t) \quad (4.11)$$

trong đó mỗi nghiệm riêng $y_i(x, t)$ được biểu diễn là tích của hai hàm số, một hàm chỉ phụ thuộc vào tọa độ x , hàm còn lại chỉ phụ thuộc thời gian t :

$$y_i(x, t) = X_i(x) T_i(t) \quad (4.12)$$

Thay (4.12) vào phương trình (4.10) ta có:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x)X_i''(x)T_i(t) \right) + m(x)X_i(x)\ddot{T}_i(t) = 0 \quad (4.13)$$

Chia hai vế phương trình trên cho tích $m(x)X_i(x)T_i(t)$ ta thu được:

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x)X_i''(x)]}{m(x)X_i(x)} = -\frac{\ddot{T}_i(t)}{T_i(t)} \quad (4.14)$$

Từ phương trình trên ta thấy vế trái chỉ phụ thuộc vào tọa độ x , vế phải chỉ phụ thuộc vào thời gian t . Như vậy cả hai vế của phương trình phải bằng một đại lượng không đổi, kí hiệu bằng ω_i^2 . Ta có hai phương trình sau:

$$\frac{\ddot{T}_i(t)}{T_i(t)} = -\omega_i^2 \quad (4.15)$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x)X_i''(x)]}{m(x)X_i(x)} = \omega_i^2 \quad (4.16)$$

hay

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = 0 \quad (4.17)$$

$$\left[EI(x)X_i''(x) \right]'' - m(x)\omega_i^2 X_i(x) = 0 \quad (4.18)$$

Ta thấy phương trình (4.17) tương tự phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do. Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$T_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.19)$$

Phương trình (4.18) là phương trình vi phân dạng dao động của thanh thẳng. Giải phương trình vi phân này ta tìm được dạng dao động riêng $X_i(x)$ ứng với tần số riêng ω_i .

Vậy mỗi nghiệm riêng $y_i(x, t)$ biểu thị một dạng dao động riêng thay đổi theo quy luật điều hòa với tần số riêng ω_i :

$$y_i(x, t) = X_i(x)A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.20)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (4.10):

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.21)$$

Trường hợp xét đến lực cản, phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.22)$$

Khi đó phương trình (4.17) trở thành:

$$\ddot{T}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = 0 \quad (4.23)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$T_i(t) = e^{-\omega_i \xi_i t} A_i \sin(\omega_{Di} t + \theta_i) \quad (4.24)$$

trong đó: $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động tự do có xét đến lực cản:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\omega_i \xi_i t} X_i(x) A_i \sin(\omega_{Di} t + \theta_i) \quad (4.25)$$

4.2.2 Tính chất trực giao của các dạng dao động riêng

Xét hai tần số riêng ω_i và ω_j và các dạng dao động riêng tương ứng X_i, X_j . Phương trình chuyển động ứng với dạng dao động riêng thứ i và thứ j :

$$y_i(x, t) = X_i(x) A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.26)$$

$$y_j(x, t) = X_j(x) A_j \sin(\omega_j t + \theta_j) \quad (4.27)$$

Lực quán tính phân bố có cường độ:

$$(f_I)_i(x, t) = \omega_i^2 m(x) X_i(x) A_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (4.28)$$

$$(f_I)_j(x, t) = \omega_j^2 m(x) X_j(x) A_j \sin(\omega_j t + \theta_j) \quad (4.29)$$

Công của lực quán tính ở dạng dao động thứ i trên chuyển vị ở dạng dao động thứ j :

$$\int_0^l (f_I)_i(x, t) y_j(x, t) dx = \int_0^l \omega_i^2 m(x) X_i(x) X_j(x) A_i A_j \sin(\omega_i t + \theta_i) \sin(\omega_j t + \theta_j) dx \quad (4.30)$$

4.3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT DIỆN KHÔNG ĐỔI

Công của lực quán tính ở dạng dao động thứ j trên chuyển vị ở dạng dao động thứ i :

$$\int_0^l (f_I)_j(x, t) y_i(x, t) dx = \int_0^l \omega_j^2 m(x) X_i(x) X_j(x) A_i A_j \sin(\omega_i t + \theta_i) \sin(\omega_j t + \theta_j) dx \quad (4.31)$$

Theo nguyên lý công tương hỗ *Betti* hai công này bằng nhau. Sau khi đơn giản hai vế cho $A_i A_j \sin(\omega_i t + \theta_i) \sin(\omega_j t + \theta_j)$ ta thu được:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l m(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \quad (4.32)$$

Với hai dao động riêng khác nhau thì $\omega_i \neq \omega_j$ nên ta có:

$$\int_0^l m(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \quad \text{với } i \neq j \quad (4.33)$$

Phương trình (4.33) biểu thị tính chất trực giao của các dạng dao động riêng qua khối lượng của hệ. Tính chất trực giao cũng có thể được biểu diễn qua độ cứng của thanh như sau.

Phương trình (4.18) viết cho dạng dao động thứ i :

$$\left[EI(x) X_i''(x) \right]'' = \omega_i^2 m(x) X_i(x) \quad (4.34)$$

Nhân hai vế phương trình trên với $X_j(x)$ và lấy tích phân từ 0 đến l ta có:

$$\int_0^l X_j \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx = \omega_i^2 \int_0^l m(x) X_i(x) X_j(x) dx \quad (4.35)$$

Thay (4.33) vào phương trình trên ta thu được:

$$\int_0^l X_j \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx = 0 \quad (4.36)$$

4.3 Dao động tự do của thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi

Khi thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi $m(x) = m = \text{const}$ và $EI(x) = EI = \text{const}$, phương trình vi phân dao động tự do

(4.10) được đơn giản thành:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.37)$$

Phương trình (4.18) viết lại như sau:

$$X_i^{(4)}(x) - \frac{m\omega_i^2}{EI} X_i(x) = 0 \quad (4.38)$$

hay

$$X_i^{(4)}(x) - k_i^4 X_i(x) = 0 \quad (4.39)$$

trong đó:

$$k_i^4 = \frac{m\omega_i^2}{EI} \quad (4.40)$$

Phương trình đặc trưng của (4.39) có dạng:

$$s^4 - k_i^4 = 0 \quad (4.41)$$

Phương trình này có 4 nghiệm:

$$s_{1,2} = \pm k_i \quad s_{3,4} = \pm i k_i \quad \text{với } i^2 = -1 \quad (4.42)$$

Vậy nghiệm của phương trình (4.39) như sau:

$$X_i(x) = a_1 e^{k_i x} + a_2 e^{-k_i x} + a_3 \sin(k_i x) + a_4 \cos(k_i x) \quad (4.43)$$

hoặc có thể viết dưới dạng:

$$X_i(x) = b_1 \cosh(k_i x) + b_2 \sinh(k_i x) + b_3 \sin(k_i x) + b_4 \cos(k_i x) \quad (4.44)$$

trong đó $\sinh(x)$ và $\cosh(x)$ là các hàm siêu việt được xác định bởi:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Phương trình (4.44) biểu diễn dạng dao động riêng thứ i ¹ ứng với tần số dao động ω_i .

¹Để viết phương trình được đơn giản, trong phần sau ta sẽ bỏ đi chỉ số dưới i

4.3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT DIỆN I

Ta có thể đặt các hàm:

$$\begin{cases} A_{kx} = [\cosh(kx) + \cos(kx)]/2 \\ B_{kx} = [\sinh(kx) + \sin(kx)]/2 \\ C_{kx} = [\cosh(kx) - \cos(kx)]/2 \\ D_{kx} = [\sinh(kx) - \sin(kx)]/2 \end{cases} \quad (4.45)$$

Phương trình (4.44) được viết lại dưới dạng sau:

$$X(x) = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} \quad (4.46)$$

Các hằng số C_i ($i = 1, \dots, 4$) và b_i ($i = 1, \dots, 4$) trong (4.44) có quan hệ:

$$\begin{aligned} C_1 &= b_1 + b_3; & C_2 &= b_2 + b_4 \\ C_3 &= b_1 - b_3; & C_4 &= b_2 - b_4 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Để việc tính toán được thuận tiện, giá trị các hàm số A_{kx} , B_{kx} , C_{kx} và D_{kx} theo các biến số kx được lập sẵn thành các bảng trong phụ lục ². Các hàm này có tính chất sau:

$$\begin{cases} A'_{kx} = k D_{kx} \\ B'_{kx} = k A_{kx} \\ C'_{kx} = k B_{kx} \\ D'_{kx} = k C_{kx} \end{cases} \quad (4.48)$$

$$A(0) = 1; B(0) = 0; C(0) = 0; D(0) = 0 \quad (4.49)$$

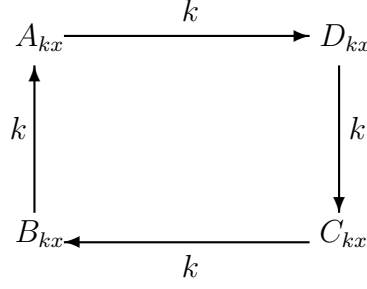
Các hằng số C_i ($i = 1, \dots, 4$) được xác định từ điều kiện biên. Giả sử tại $x = 0$ ta có:

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ X'(0) = \theta_0 \\ X''(0) = -M_0/EI \\ X'''(0) = -Q_0/EI \end{cases} \quad (4.50)$$

Từ phương trình (4.46) ta có các đạo hàm của $X(x)$:

$$\begin{aligned} X'(x) &= k(C_1 D_{kx} + C_2 A_{kx} + C_3 B_{kx} + C_4 C_{kx}) \\ X''(x) &= k^2(C_1 C_{kx} + C_2 D_{kx} + C_3 A_{kx} + C_4 B_{kx}) \\ X'''(x) &= k^3(C_1 B_{kx} + C_2 C_{kx} + C_3 D_{kx} + C_4 A_{kx}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

²Xem bảng 1

Hình 4.1: Quy luật đạo hàm của A_{kx} , B_{kx} , C_{kx} và D_{kx}

Thay các điều kiện biên (4.50) vào ta xác định được các hằng số:

$$\begin{aligned} C_1 &= X_0 & C_2 &= \frac{\theta_0}{k} \\ C_3 &= -\frac{M_0}{k^2 EI} & C_4 &= -\frac{Q_0}{k^3 EI} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Thay lại các giá trị này vào các biểu thức (4.46) và (4.51) ta tìm được các phương trình biến dạng và phương trình nội lực ³:

$$X(x) = X_0 A_{kx} + \frac{\theta_0}{k} B_{kx} - \frac{M_0}{k^2 EI} C_{kx} - \frac{Q_0}{k^3 EI} D_{kx} \quad (4.53)$$

$$X'(x) = X_0 k D_{kx} + \theta_0 A_{kx} - \frac{M_0}{k EI} B_{kx} - \frac{Q_0}{k^2 EI} C_{kx} \quad (4.54)$$

$$M(x) = -EI X_0 k^2 C_{kx} - EI \theta_0 k D_{kx} + M_0 A_{kx} + \frac{Q_0}{k} B_{kx} \quad (4.55)$$

$$Q(x) = -EI X_0 k^3 B_{kx} - EI \theta_0 k^2 C_{kx} + M_0 k D_{kx} + Q_0 A_{kx} \quad (4.56)$$

Các phương trình trên cho phép xác định các đại lượng cần nghiên cứu trong dao động riêng của thanh thẳng. Từ các điều kiện biên về biến dạng và nội lực ta sẽ lập được hệ phương trình xác định các thông số chưa biết. Xét điều kiện tồn tại dao động riêng ta sẽ lập được phương trình xác định thông số k , từ đó sẽ tính được tần số dao động riêng:

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (4.57)$$

³Theo Sức bền vật liệu: $\theta = X'(x)$, $M(x) = X''(x)$, $Q(x) = X'''(x)$

4.3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT DIỆN I

Phương trình để xác định k là phương trình siêu việt nên sẽ có vô số nghiệm k_i ($i = 1, 2, \dots$) nghĩa là có vô số tần số riêng ω_i ($i = 1, 2, \dots$). Điều này phù hợp với ý nghĩa của bài toán có vô số bậc tự do.

Ví dụ 4.1: Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của thanh thẳng như hình 4.2a, thanh có chiều dài l , đầu bên trái được ngàm chặt, đầu bên phải tự do. Khối lượng của thanh là m

Lời giải: Điều kiện biên:

Tại $x = 0$:

$$X(0) = 0 \quad (4.58)$$

$$\theta(0) = 0 \quad (4.59)$$

Tại $x = l$:

$$M(l) = 0 \quad (4.60)$$

$$Q(l) = 0 \quad (4.61)$$

Thay (4.60), (4.61) vào (4.55) và (4.56) ta có hệ phương trình:

$$M_0 A_{kl} + \frac{Q_0}{k} B_{kl} = 0 \quad (4.62)$$

$$M_0 k D_{kl} + Q_0 A_{kl} = 0 \quad (4.63)$$

Điều kiện để tồn tại dao động $M_0 \neq 0$ và $Q_0 \neq 0$ là định thức của hệ phương trình trên bằng không

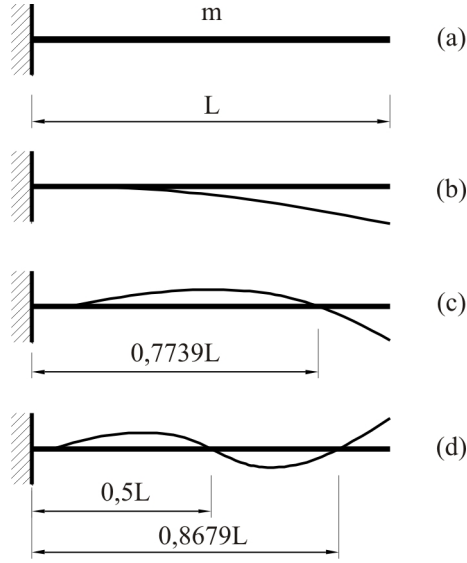
$$\begin{vmatrix} A_{kl} & B_{kl}/k \\ kD_{kl} & A_{kl} \end{vmatrix} = A_{kl}^2 - B_{kl}D_{kl} = 0 \quad (4.64)$$

hay

$$\cosh kl \cos kl + 1 = 0 \quad (4.65)$$

Phương trình siêu việt này được giải bằng phương pháp thử dần. Ta tìm được nghiệm thứ nhất $k_1 l = 1.875$, nghiệm thứ hai $k_2 l = 4.68 \dots$ Thay vào (4.57) ta tính được các tần số dao động riêng

$$\omega_1 = \frac{1,875^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{3,515}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$



Hình 4.2: Dầm một đầu ngàm một đầu tự do (a), dạng dao động thứ nhất (b), dạng dao động thứ hai (c), dạng dao động thứ ba (d)

$$\omega_2 = \frac{4,680^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{21,90}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Thay các giá trị $k_i l$ vào hệ phương trình ta xác định được M_0 và Q_0 . Từ đó tìm được các phương trình chuyển vị và nội lực của thanh ứng với tần số ω_i . Ba dạng dao động của thanh ứng với ba tần số dao động riêng đầu tiên ω_1, ω_2 và ω_3 lần lượt được biểu diễn trên hình 4.2b, 4.2c và 4.2d.

Ví dụ 4.2: Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của thanh thẳng như hình 4.3a, thanh có chiều dài l , hai đầu được đặt lên hai gối cố định. Khối lượng của thanh là m

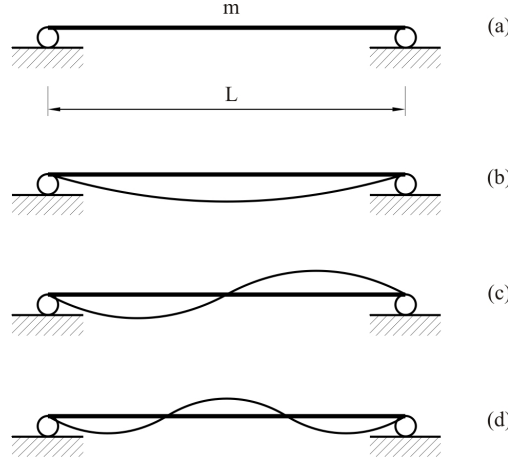
Lời giải: Điều kiện biên:

Tại $x = 0$:

$$X(0) = 0 \quad (4.66)$$

$$M(0) = 0 \quad (4.67)$$

4.3. DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT DIỆN ĐỀU



Hình 4.3: Dầm hai đầu khớp (a), dạng dao động thứ nhất (b), dạng dao động thứ hai (c), dạng dao động thứ ba (d)

Tại $x = l$:

$$X(l) = 0 \quad (4.68)$$

$$M(l) = 0 \quad (4.69)$$

Thay (4.68), (4.69) vào (4.53) và (4.55) ta có hệ phương trình:

$$\frac{\theta_0}{k} B_{kl} - \frac{Q_0}{k^3 EI} D_{kl} = 0 \quad (4.70)$$

$$-\theta_0 EIk D_{kl} + \frac{Q_0}{k} B_{kl} = 0 \quad (4.71)$$

Điều kiện để tồn tại dao động $Q_0 \neq 0$ và $\theta_0 \neq 0$ là định thức của hệ phương trình trên bằng không

$$B_{kl}^2 - D_{kl}^2 = 0 \quad (4.72)$$

hay

$$\sinh kl \sin kl = 0 \quad (4.73)$$

Do $\sinh kl \neq 0$ nên $\sin kl = 0$. Vậy ta tìm được

$$k_i l = i\pi \quad \text{với } i = 1, 2, \dots \quad (4.74)$$

Thay vào (4.57) ta xác định được các tần số dao động riêng

$$\omega_i = \frac{(i\pi)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (4.75)$$

Do $\sin kl = 0$ nên ta có $B_{kl} = D_{kl}$. Từ phương trình (4.70) ta rút ra đẳng thức:

$$\frac{\theta_0}{k} = \frac{Q_0}{k^3 EI} \quad (4.76)$$

Dạng dao động riêng thứ i được xác định theo biểu thức:

$$X(x) = \frac{\theta_0}{k} B_{kx} - \frac{Q_0}{k^3 EI} D_{kx} = \frac{Q_0}{k^3 EI} (B_{kx} - D_{kx}) \quad (4.77)$$

Thay biểu thức các hàm B_{kx} và D_{kx} vào phương trình trên ta có:

$$X(x) = \frac{Q_0}{k^3 EI} \sin kx = \frac{Q_0}{k^3 EI} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (4.78)$$

Các dạng dao động riêng được biểu diễn trên hình 4.3b, 4.3c và 4.3d.

4.4 Dao động cưỡng bức của thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu dao động của thanh thẳng có khối lượng phân bố đều và tiết diện không đổi chịu tác dụng của tải trọng điều hòa $p(x, t) = p(x) \sin \bar{\omega}t$.

Phương trình vi phân dao động điều hòa có dạng:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{p(x) \sin \bar{\omega}t}{EI} \quad (4.79)$$

Ta đã biết nghiệm tổng quát của (4.79) gồm nghiệm của phương trình thuần nhất (dao động tự do) và nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Nghiệm của phương trình thuần nhất đã được nghiên cứu ở phần trên. Ta sẽ khảo sát nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Giả định rằng

4.4. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA THANH THẲNG CÓ KHỐI LƯỢNG PHÂN BỐ ĐỀU VÀ TIẾT

ở giai đoạn ổn định, thanh thẳng dao động với tần số của lực cưỡng bức. Nghiệm riêng được tìm dưới dạng sau:

$$y(x, t) = X(x) \sin \bar{\omega} t \quad (4.80)$$

Thay (4.80) vào (4.79) và biến đổi ta có:

$$X^{(4)}(x) - k^4 X(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad (4.81)$$

trong đó:

$$k^4 = \frac{m\bar{\omega}^2}{EI} \quad (4.82)$$

Nếu $p(x)$ là một đa thức thì nghiệm riêng của (4.81) có dạng:

$$X_p(x) = \frac{p(x)}{k^4 EI} + \frac{p^{(4)}(x)}{k^8 EI} + \frac{p^{(8)}(x)}{k^{12} EI} + \dots \quad (4.83)$$

Vậy nghiệm tổng quát của (4.81) được viết như sau:

$$X(x) = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} + \frac{p(x)}{k^4 EI} + \frac{p^{(4)}(x)}{k^8 EI} + \dots \quad (4.84)$$

Trường hợp $p(x) = p = \text{const}$ thì nghiệm $X(x)$ có dạng đơn giản:

$$X(x) = C_1 A_{kx} + C_2 B_{kx} + C_3 C_{kx} + C_4 D_{kx} + \frac{p}{k^4 EI} \quad (4.85)$$

Từ đó ta tính được các đạo hàm của $X(x)$. Kết quả thu được tương tự (4.51). Các hằng số C_i ($i = 1, \dots, 4$) được xác định từ điều kiện biên:

$$\begin{aligned} C_1 &= X_0 - \frac{p}{k^4 EI} & C_2 &= \frac{\theta_0}{k} \\ C_3 &= -\frac{M_0}{k^2 EI} & C_4 &= -\frac{Q_0}{k^3 EI} \end{aligned} \quad (4.86)$$

trong đó: X_0, θ_0, M_0 và Q_0 là các giá trị của $X(x)$ và các đạo hàm của nó tại $x = 0$.

Thay các hằng số này vào (4.85) và (4.51) ta có phương trình biên độ chuyển

vị và nội lực của thanh thẳng khi dao động cưỡng bức:

$$\begin{aligned}
 X(x) &= X_0 A_{kx} + \frac{\theta_0}{k} B_{kx} - \frac{M_0}{k^2 EI} C_{kx} - \frac{Q_0}{k^3 EI} D_{kx} - \frac{p}{k^4 EI} (A_{kx} - 1) \\
 X'(x) &= X_0 k D_{kx} + \theta_0 A_{kx} - \frac{M_0}{k EI} B_{kx} - \frac{Q_0}{k^2 EI} C_{kx} - \frac{p}{k^3 EI} D_{kx} \quad (4.87) \\
 M(x) &= -EI X_0 k^2 C_{kx} - EI \theta_0 k D_{kx} + M_0 A_{kx} + \frac{Q_0}{k} B_{kx} + \frac{p}{k^2 EI} C_{kx} \\
 Q(x) &= -EI X_0 k^3 B_{kx} - EI \theta_0 k^2 C_{kx} + M_0 k D_{kx} + Q_0 A_{kx} + \frac{p}{k} B_{kx}
 \end{aligned}$$

4.5 Dao động cưỡng bức của thanh thẳng chịu tải trọng bất kỳ - Khai triển theo dạng dao động

Giả sử đã xác định được tần số dao động riêng và dạng dao động riêng từ phương trình (4.18). Khi đó nghiệm của phương trình vi phân (4.8) (bỏ qua lực cản) là tổ hợp tuyến tính của các dạng dao động:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \quad (4.88)$$

Phương trình vi phân dao động (4.8) được biến đổi thành một tập hợp vô hạn các phương trình vi phân mà trong mỗi phương trình đó tọa độ dạng dao động $q_i(t)$ đóng vai trò là ẩn số.

Thay (4.88) vào (4.8) ta có:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(x) X_i(x) \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' q_i(t) = p(x, t) \quad (4.89)$$

Nhân cả hai vế với $X_j(x)$ rồi tích phân trên toàn bộ chiều dài thanh, ta có:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i(t) m(x) X_i(x) X_j(x) dx + \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) X_j(x) \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx \\
 = \int_0^l p(x, t) X_j(x) dx \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

4.5. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA THANH THẲNG CHỊU TẢI TRỌNG BẤT KỲ - KHAI TRIỂN T

Thay đổi thứ tự lấy tích phân và tổng các số hạng ta thu được:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i(t) \int_0^l m(x) X_i(x) X_j(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \int_0^l X_j(x) \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx \\ = \int_0^l p(x, t) X_j(x) dx \end{aligned} \quad (4.91)$$

Theo tính chất trực giao các dạng dao động (4.33) và (4.36), tất cả các số hạng trong dấu tổng đều bằng không trừ số hạng mà chỉ số $i = j$. Do đó ta có:

$$\ddot{q}_i(t) \int_0^l m(x) X_i^2(x) dx + q_i(t) \int_0^l X_i(x) \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx = \int_0^l p(x, t) X_i(x) dx \quad (4.92)$$

Phương trình trên có thể viết lại như sau:

$$\mathbf{M}_i \ddot{q}_i(t) + \mathbf{K}_i q_i(t) = \mathbf{P}_i(t) \quad (4.93)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \int_0^l m(x) X_i^2(x) dx \\ \mathbf{K}_i &= \int_0^l X_i(x) \left[EI(x) X_i''(x) \right]'' dx \\ \mathbf{P}_i(t) &= \int_0^l p(x, t) X_i(x) dx \end{aligned}$$

gọi là khối lượng tổng quát, độ cứng tổng quát và lực tổng quát của dạng dao động thứ i . Các đại lượng này chỉ phụ thuộc vào dạng dao động thứ i . Khối lượng tổng quát $\mathbf{M}_i$ và độ cứng tổng quát $\mathbf{K}_i$ có liên hệ với nhau bởi biểu thức:

$$\mathbf{K}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}_i \quad (4.94)$$

Như vậy, phương trình dao động $y(x, t)$ của hệ có thể được xác định bằng cách giải phương trình (4.92) đối với $q_i(t)$. Phương trình của mỗi dạng dao động là độc lập với các phương trình của các dạng dao động khác, do đó có thể được giải một cách độc lập. Hơn nữa, các phương trình này có dạng giống phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do nên có thể sử dụng các kết quả trong chương 2 để xác định nghiệm $q_i(t)$ của phương trình (4.92).

Một khi $q_i(t)$ được xác định, ta tìm được chuyển vị là tổ hợp của tất cả các dạng dao động:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \quad (4.95)$$

Moment uốn và lực cắt tại mặt cắt bất kỳ được xác định bởi các biểu thức sau:

$$M(x, t) = EI(x) y''(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} EI(x) X_i''(x) q_i(t) \quad (4.96)$$

$$Q(x, t) = \left[EI(x) y''(x, t) \right]' = \sum_{i=1}^{\infty} \left[EI(x) X_i''(x) \right]' q_i(t) \quad (4.97)$$

Chương 5

Dao động của hệ phức tạp

Chương này sẽ trình bày cách tính dao động của các hệ phức tạp thường gặp trong xây dựng dân dụng như: khung, dầm liên tục và dàn. Có hai phương pháp tính dao động của hệ phức tạp: phương pháp chính xác và phương pháp gần đúng. Trong phương pháp chính xác ta xem kết cấu có khối lượng phân bố hay nói một cách khác xem kết cấu có bậc tự do bằng vô cùng. Đồng thời, quá trình tính toán được thực hiện theo sơ đồ biến dạng, có kể đến tất cả các dạng biến dạng. Để việc tính toán được đơn giản người ta đưa vào những giả thiết như: tính toán hệ theo sơ đồ không biến dạng, bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng trượt của các tiết diện khi xác định các chuyển vị. Trong phương pháp gần đúng, người ta có thể thay thế các khối lượng phân bố bằng một số khối lượng tập trung nghĩa là biến hệ có bậc tự do bằng vô cùng thành hệ có số bậc tự do hữu hạn. Trong phạm vi bài giảng, ta sẽ nghiên cứu phương pháp chuyển vị để tính các kết cấu dầm và khung đồng thời sẽ giới thiệu cách vận dụng phương pháp gần đúng để giải quyết bài toán.

5.1 Phương pháp chuyển vị tính dao động của khung

5.1.1 Dao động cưỡng bức

Xét khung siêu động chịu tác dụng của các tải trọng $p_i \sin \bar{\omega}t$. Ta chọn kết cấu cơ bản bằng cách thêm các liên kết để ngăn cản chuyển vị của nút. Ấn số là các chuyển vị thẳng hoặc chuyển vị góc tại vị trí các liên kết đặt thêm

vào.

Giả thiết dưới tác dụng của các tải trọng thay đổi điều hòa $p(t) = p \sin \bar{\omega}t$, các phản lực, nội lực và chuyển vị cũng thay đổi theo quy luật $\sin \bar{\omega}t$. Do đó chuyển vị tại các nút và phản lực trong các liên kết đặt thêm vào được viết như sau:

$$Z_i(t) = Z_i \sin \bar{\omega}t \quad (5.1)$$

$$R_{ik}(t) = R_{ik} \sin \bar{\omega}t \quad (5.2)$$

trong đó:

- Z_i là trị số biên độ chưa biết của các chuyển vị thẳng hoặc chuyển vị góc tại vị trí các liên kết đặt thêm vào.
- R_{ik} là trị số biên độ phản lực tại liên kết phụ thứ i do biên độ chuyển vị Z_k ở liên kết phụ thứ k gây ra trong hệ cơ bản.

Để hệ cơ bản làm việc giống hệ thực thì phản lực tại các liên kết phụ đặt thêm vào do các ản số cơ bản và do tải trọng gây ra phải bằng không.

$$R_i(t) = R_{i1} \sin \bar{\omega}t + R_{i2} \sin \bar{\omega}t + \dots + R_{in} \sin \bar{\omega}t + R_{ip} \sin \bar{\omega}t = 0 \quad (5.3)$$

Phương trình (5.3) có thể viết lại dưới dạng sau:

$$r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} = 0 \quad \text{với} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.4)$$

trong đó:

- r_{ik} là trị số biên độ phản lực tại liên kết phụ thứ i do chuyển vị động $Z_k(t) = 1 \sin \bar{\omega}t$ tại liên kết phụ thứ k gây ra trong hệ cơ bản.
- R_{ip} là trị số biên độ phản lực tại liên kết phụ thứ i do các tải trọng động gây ra trên kết cấu cơ bản.

Từ (5.4) ta có n phương trình chính tắc với n ẩn số Z_i . Các hệ số và số hạng tự do trong (5.4) được xác định bằng các phương trình cân bằng như trong phần tĩnh học. Các biểu đồ moment do các giá trị biên độ của chuyển vị đơn vị và các giá trị biên độ tải trọng gây ra được vẽ tương tự như trong phương pháp chuyển vị. Để thuận tiện cho việc tính toán, các giá trị biên độ moment uốn và lực cắt tại đầu các thanh do các chuyển vị đơn vị và do tải trọng gây

ra được cho trong các bảng.

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc (5.4), tìm được các trị số biên độ chuyển vị nút Z_i ta có thể tìm được biên độ biểu đồ moment uốn động theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n + M_p \quad (5.5)$$

5.1.2 Dao động riêng

Khi cho $R_{iP} = 0$ trong (5.4) ta có phương trình chính tắc của dao động riêng:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Để khung có dao động riêng nghĩa là các chuyển vị $Z_i \neq 0$ thì định thức của (5.6) phải bằng không.

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.7)$$

Khai triển định thức ta sẽ được phương trình xác định thông số $\lambda = kl$, từ đó tính được tần số dao động theo công thức:

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (5.8)$$

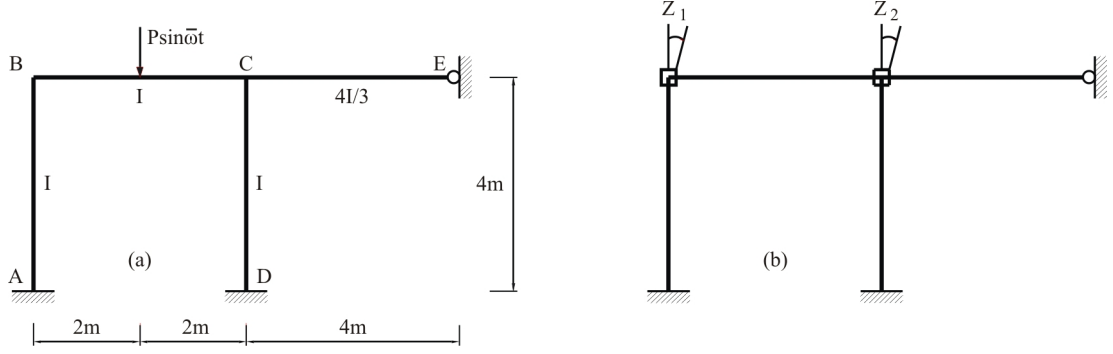
Ví dụ 5.1: Xác định tần số dao động riêng và vẽ biểu đồ moment uốn động của khung chịu tác dụng của tải trọng động $P \sin \bar{\omega} t$ như hình 5.1a. Biết rằng tần số dao động cưỡng bức $\bar{\omega} = 10s^{-1}$, trọng lượng mỗi thanh là 62,4kN và $EI = 4 \times 10^4 kNm^2$.

Lời giải:

1. *Xác định tần số dao động riêng*

Chọn hệ cơ bản như hình 5.1b. Phương trình dao động riêng có dạng:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0 \end{cases}$$



Hình 5.1: Khung chịu tác dụng của tải trọng động (a), Hệ cơ bản (b)

trong đó:

$$\begin{aligned} r_{11} &= EI\mu_1(\lambda_{AB}) + EI\mu_1(\lambda_{BC}) \\ r_{12} &= \frac{EI}{2}\mu_2(\lambda_{BC}) = r_{21} \\ r_{22} &= EI\mu_1(\lambda_{BC}) + EI\mu_1(\lambda_{CD}) + EI\mu_5(\lambda_{CE}) \end{aligned}$$

Chọn $I_0 = I$. Ta có:

$$\frac{I_0}{I_{CE}} = \frac{3}{4}$$

nên $k_{CE} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}k_0$. Như vậy: $\lambda_{AB} = \lambda_{BC} = \lambda_{CD} = \lambda_0$ và $\lambda_{CE} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\lambda_0$.

Ta tính được các hệ số r_{ij} :

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{\lambda_0}{2} \frac{\cosh \lambda_0 \sin \lambda_0 - \sinh \lambda_0 \cos \lambda_0}{1 - \cosh \lambda_0 \cos \lambda_0} \\ r_{12} &= \frac{\lambda_0}{4} \frac{\sinh \lambda_0 + \sin \lambda_0}{1 - \cosh \lambda_0 \cos \lambda_0} = r_{21} \\ r_{22} &= \frac{\lambda_0}{2} \frac{\cosh \lambda_0 \sin \lambda_0 - \sinh \lambda_0 \cos \lambda_0}{1 - \cosh \lambda_0 \cos \lambda_0} + \\ &\quad + \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \frac{2\lambda_0}{3} \frac{\sinh(0,9306\lambda_0) \sin(0,9306\lambda_0)}{\cosh(0,9306\lambda_0) \sin(0,9306\lambda_0) - \sinh(0,9306\lambda_0) \cos(0,9306\lambda_0)} \end{aligned}$$

Điều kiện để tồn tại dao động $Z_i \neq 0$ là định thức các hệ số bằng không:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Thay các biểu thức của r_{11}, r_{12} và r_{22} vào phương trình trên ta thu được phương trình đối với λ_0 . Giải phương trình này sẽ tìm được thông số k_0 . Từ đó sẽ tính được các tần số dao động riêng.

2. *Biểu đồ moment uốn động*

Hệ cơ bản được chọn như khi tính các tần số riêng. Phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

Đặc trưng cơ bản:

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\bar{\omega}^2}{EI}} = \sqrt[4]{\frac{62,4 \times 10^2}{10 \times 4 \times 4 \times 10^4}} = 0,25m^{-1}$$

Thông số λ của các thanh:

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BC} = \lambda_{CD} = \lambda_{CE} = \lambda = 0,25 \times 4 = 1$$

Từ đó ta tính được các hệ số và số hạng tự do:

$$r_{11} = 2EI\mu_1(1) = 2EI \times 0,99761 = 1,99522EI$$

$$r_{12} = \frac{EI}{2}\mu_2(1) = \frac{EI}{2} \times 1,00358 = 0,50179EI$$

$$r_{22} = 2EI\mu_1(1) + EI\mu_5(1) = 1,99522EI + 0,99363EI = 2,98885EI$$

$$R_{1P} = \frac{P}{k} \frac{C_\lambda D_{\lambda/2} - D_\lambda C_{\lambda/2}}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{P}{0,25} \frac{C_1 D_{0,5} - D_1 C_{0,5}}{C_1^2 - B_1 D_1} = -0,501155P$$

$$R_{2P} = -R_{1P}$$

Thay vào phương trình chính tắc và giải hệ phương trình ta tìm được hai ẩn số cơ bản:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{0,306279P}{EI} \\ Z_2 &= \frac{-0,219095P}{EI} \end{aligned}$$

Phương trình biểu diễn moment động trong các thanh của kết cấu:

- Thanh AB: chọn gốc ở A
Thông số ban đầu:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \\ M(0) &= \frac{2EI}{4}\mu_2(1)Z_1 = 0,153688P \\ Q(0) &= -\frac{3EI}{8}\varepsilon_2(1)Z_1 = -0,115448P \end{aligned}$$

Thay các giá trị trên vào (4.55) ta được phương trình biểu diễn moment trong thanh AB:

$$M(x) = 0,153688PA_{kx} - 0,461792PB_{kx}$$

- Thanh CD: chọn gốc ở D
Thông số ban đầu:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \\ M(0) &= \frac{2EI}{4}\mu_2(1)Z_2 = -0,10994P \\ Q(0) &= -\frac{3EI}{8}\varepsilon_2(1)Z_2 = 0,082585P \end{aligned}$$

Thay các giá trị trên vào (4.55) ta được phương trình biểu diễn moment trong thanh CD:

$$M(x) = -0,10994PA_{kx} + 0,33034PB_{kx}$$

- Thanh CE: chọn gốc ở C
Thông số ban đầu:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \theta(0) &= Z_2 = -\frac{0,219095P}{EI} \\ M(0) &= EI\mu_5(1)Z_2 = -0,217699P \\ Q(0) &= -\frac{EI}{4}\varepsilon_5(1)Z_2 = 0,053203P \end{aligned}$$

Thay các giá trị trên vào (4.55) ta được phương trình biểu diễn moment trong thanh CE:

$$M(x) = 0,054774PD_{kx} - 0,217699PA_{kx} + 0,212812PB_{kx}$$

- Thanh BC: chọn gốc ở B
Thông số ban đầu:

$$X(0) = 0$$

$$\theta(0) = Z_1 = \frac{0,306279P}{EI}$$

$$M(0) = EI\mu_1(1)Z_1 + \frac{EI}{2}\mu_2(1)Z_2 + R_{1P} = -0,305548P$$

$$Q(0) = -\frac{3EI}{8}\varepsilon_1(1)Z_1 - \frac{3EI}{8}\varepsilon_2(1)Z_2 + Q_P^0 = 0,470045P$$

trong đó Q_P^0 được xác định bằng cách tra bảng lực cắt do tải trọng động gây ra trên dầm hai đầu ngàm:

$$Q_P^0 = \frac{P(C_\lambda C_{\lambda/2} - B_\lambda D_{\lambda/2})}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{P(C_1 C_{0,5} - B_1 D_{0,5})}{C_1^2 - B_1 D_1} = 0,501311P$$

Thay các giá trị trên vào (4.55) ta được phương trình biểu diễn moment trong thanh BC:

Khi $0 \leq x \leq 2$:

$$M_1(x) = -0,07657PD_{kx} - 0,305548PA_{kx} + 1,88018PB_{kx}$$

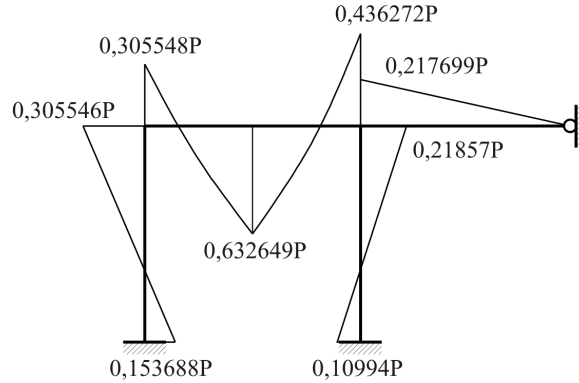
Khi $2 \leq x \leq 4$:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= M_1(x) - \frac{P}{k}B_{k(x-2)} \\ &= -0,07657PD_{kx} - 0,305548PA_{kx} + 1,88018PB_{kx} - 4PB_{k(x-2)} \end{aligned}$$

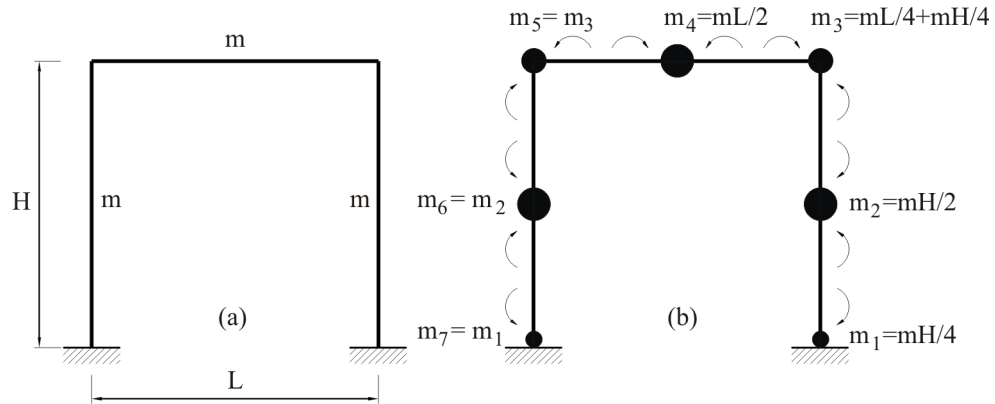
Biểu đồ moment uốn động của khung được vẽ trên hình 5.2. Các tung độ của biểu đồ được nhân với $\sin \bar{\omega}t$.

x(m)	Thanh AB	Thanh BC	Thanh CD	Thanh CE
0	0,153688P	-0,305548P	-0,10994P	-0,217699P
2		0,632649P		
4	-0,305546P	-0,436272P	0,21857P	0,000003P

Bảng 5.1: Bảng giá trị moment động của các thanh tại một số mặt cắt



Hình 5.2: Biểu đồ moment uốn động của khung



Hình 5.3: Khung có khối lượng phân bố (a), Khung có khối lượng tập trung (b)

5.2 Phương pháp gần đúng tính dao động của khung

Trong mục này sẽ giới thiệu phương pháp thay thế khối lượng để đưa bài toán có bậc tự do vô cùng về bài toán có một số bậc tự do. Nói một cách

khác ta biến đổi sơ đồ khối lượng phân bố theo chiều dài thanh về một số khối lượng tập trung. Thực tế, người ta thường thay thế các khối lượng phân bố trong mỗi đoạn bằng hai khối lượng tập trung đặt ở hai đầu đoạn đó. Hình 5.3b mô tả sự thay thế khối lượng phân bố trên mỗi thanh thành các khối lượng tập trung ở giữa và ở đầu các thanh. Khi đó ta có thể tính khung như hệ hữu hạn bậc tự do.

5.3 Phương pháp chuyển vị tính dao động của dầm liên tục

Khi tính dao động của dầm liên tục bằng phương pháp chuyển vị, ta chọn kết cấu cơ bản như khi tính với tải trọng tĩnh. Phương trình chính tắc thứ i có dạng sau:

$$r_{(i-1)i}Z_{i-1} + r_{ii}Z_i + r_{i(i+1)}Z_{i+1} + R_{ip} = 0 \quad (i = 1 \dots n) \quad (5.9)$$

Ta tính được các hệ số là các phản lực do các chuyển vị đơn vị $Z_i = 1$ gây ra:

$$\begin{aligned} r_{(i-1)i} &= \frac{2EI_i}{l_i} \mu_2(\lambda_i) \\ r_{ii} &= \frac{4EI_i}{l_i} \mu_1(\lambda_i) + \frac{4EI_{i+1}}{l_{i+1}} \mu_1(\lambda_{i+1}) \\ r_{i(i+1)} &= \frac{2EI_{i+1}}{l_{i+1}} \mu_2(\lambda_{i+1}) \end{aligned}$$

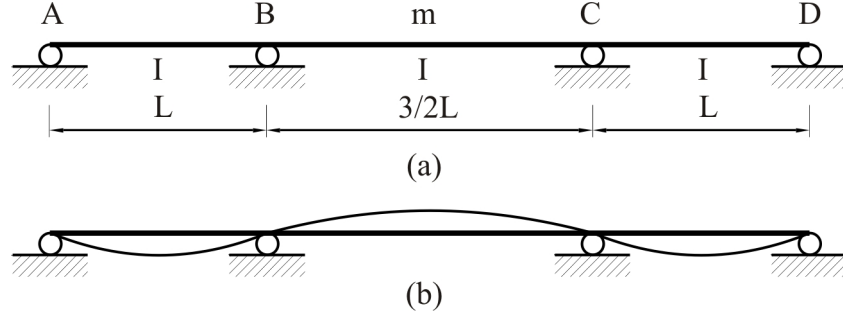
Trường hợp hai đầu dầm liên tục là liên kết khớp:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{3EI_1}{l_1} \mu_5(\lambda_1) + \frac{4EI_2}{l_2} \mu_1(\lambda_2) \\ r_{(n-1)(n-1)} &= \frac{4EI_{n-1}}{l_{n-1}} \mu_1(\lambda_{n-1}) + \frac{3EI_n}{l_n} \mu_5(\lambda_n) \end{aligned}$$

Để xác định tần số dao động riêng, ta xét phương trình chính tắc sau:

$$r_{(i-1)i}Z_{i-1} + r_{ii}Z_i + r_{i(i+1)}Z_{i+1} = 0 \quad (i = 1 \dots n) \quad (5.10)$$

Thiết lập điều kiện tồn tại các chuyển vị Z_i ta sẽ được phương trình tần số viết dưới dạng định thức của các hệ số phải bằng không. Từ đó ta xác định



Hình 5.4: Dầm liên tục (a), Dạng dao động đối xứng của dầm liên tục (b)

được các thông số λ mà trong đó có chứa tần số riêng ω .

Trường hợp dầm liên tục đối xứng, khi tính dao động riêng ta có thể chia thành hai bài toán:

- Bài toán xác định tần số riêng ứng với dạng dao động đối xứng.
- Bài toán xác định tần số riêng ứng với dạng dao động phản đối xứng.

Ví dụ 5.2: Xác định các tần số dao động riêng của dầm liên tục ba nhịp như hình 5.4a. Dầm có tiết diện không đổi và có khối lượng phân bố m .

Lời giải: Phương trình dao động riêng:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0 \end{cases}$$

Các hệ số r_{ij} được xác định bởi biểu thức:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{3EI}{l}\mu_5(\lambda_{AB}) + \frac{4EI}{l}\mu_1(\lambda_{BC}) \\ r_{12} &= \frac{2EI}{l}\mu_2(\lambda_{BC}) = r_{21} \\ r_{22} &= \frac{4EI}{l}\mu_1(\lambda_{BC}) + \frac{3EI}{l}\mu_5(\lambda_{CD}) \end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \lambda_{AB} &= \lambda_{CD} = \lambda = kl \\ \lambda_{BC} &= \frac{3\lambda}{2} = \frac{3kl}{2} \end{aligned}$$

Ta thu được:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \frac{2\lambda EI}{l} \frac{\sinh \lambda \sin \lambda}{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda} + \\
 &\quad + \frac{3\lambda EI}{2l} \frac{\cosh(3\lambda/2) \sin(3\lambda/2) - \sinh(3\lambda/2) \cos(3\lambda/2)}{1 - \cosh(3\lambda/2) \cos(3\lambda/2)} = r_{22} \\
 r_{12} &= \frac{3\lambda EI}{2l} \frac{\sinh(3\lambda/2) - \sin(3\lambda/2)}{1 - \cosh(3\lambda/2) \cos(3\lambda/2)} = r_{21}
 \end{aligned}$$

Điều kiện để tồn tại dao động $Z_i \neq 0$ là định thức các hệ số bằng không:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

hay

$$\begin{aligned}
 &\frac{3\lambda EI}{2l} \frac{[1 + \cosh(3\lambda/2)] \sin(3\lambda/2) - [1 + \cos(3\lambda/2)] \sinh(3\lambda/2)}{1 - \cosh(3\lambda/2) \cos(3\lambda/2)} + \\
 &\quad + \frac{2\lambda EI}{l} \frac{\sinh \lambda \sin \lambda}{\cosh \lambda \sin \lambda - \sinh \lambda \cos \lambda} = 0
 \end{aligned}$$

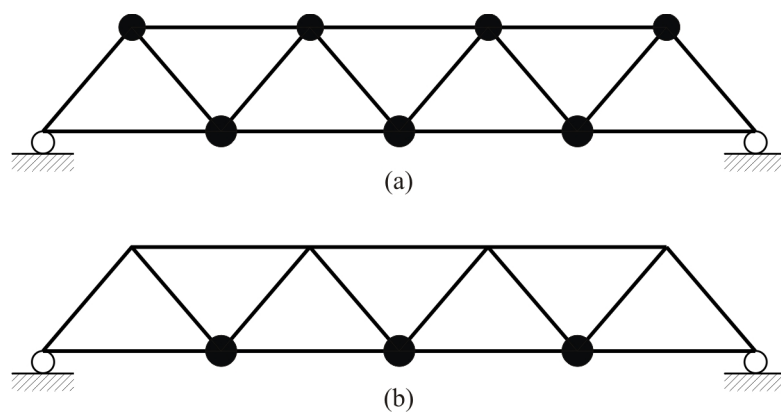
Giải phương trình này ta sẽ tìm được thông số $\lambda_i = k_i l$ và tính được tần số dao động riêng:

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Hình 5.4b biểu diễn dạng dao động đối xứng của dầm liên tục ba nhịp.

5.4 Dao động của dàn

Một cách tổng quát, khi tính dao động của dàn ta phải kể đến sự phân bố khối lượng trên các thanh và ảnh hưởng độ cứng của các nút dàn. Như vậy bài toán sẽ rất phức tạp do số bậc tự do là vô cùng. Để việc tính toán được đơn giản ta giả thiết khối lượng phân bố của các thanh được tập trung về các nút của dàn (hình 5.5a). Khi đó kết cấu dàn trở thành hệ hữu hạn bậc tự do. Nhằm mục đích đơn giản tính toán hơn nữa, người ta có thể chuyển khối lượng của dàn về đường biên có mặt đường xe chạy (hình 5.5b). Ta có thể xác định tần số dao động riêng của dàn như đối với hệ hữu hạn bậc tự do đã nghiên cứu ở chương 3.



Hình 5.5: Dàn có khối lượng tập trung tại nút dàn (a), Chuyển khối lượng về đường biên có xe chạy (b)

Chương 6

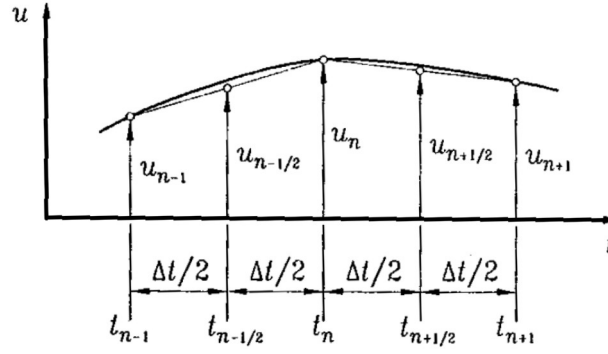
Phương pháp tích phân theo thời gian trong phân tích bài toán động lực học

Trong nhiều bài toán, nghiệm giải tích của phương trình vi phân dao động không thể xác định được khi tải trọng động tác dụng lên hệ biến đổi bất kỳ theo thời gian hay hệ làm việc ngoài giới hạn đàn hồi (phi tuyến). Các bài toán như vậy có thể được tính gần đúng bằng các phương pháp số. Trong chương này sẽ trình bày một vài phương pháp tích phân số theo thời gian.

6.1 Hệ tuyến tính một bậc tự do

Phương pháp tích phân trực tiếp theo thời gian xác định các giá trị xấp xỉ của nghiệm tại một số thời điểm chọn trước. Nguyên lý của phương pháp như sau:

- Chia thời gian tải trọng động tác dụng lên hệ thành các khoảng thời gian có thể bằng nhau hoặc khác nhau. Trong thực tế, để thuận tiện cho việc tính toán và lập trình, người ta thường chọn các khoảng thời gian bằng nhau (bước thời gian).
- Giả sử các hàm mô tả sự thay đổi của chuyển vị, vận tốc và gia tốc trong các khoảng thời gian này.
- Các hàm trên phải thỏa mãn phương trình vi phân dao động tại các thời điểm chọn trước (thời điểm đầu và cuối các khoảng thời gian).



Hình 6.1: Phương pháp sai phân đúng tâm

Độ chính xác của kết quả, độ ổn định của nghiệm cũng như thời gian tính toán phụ thuộc vào bước thời gian và việc chọn các hàm mô tả sự thay đổi của chuyển vị, vận tốc và gia tốc. Chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề này trong phần sau.

6.1.1 Phương pháp sai phân đúng tâm

Phương pháp sai phân đúng tâm dựa trên việc xấp xỉ vận tốc và gia tốc bằng các sai phân hữu hạn các giá trị chuyển vị tại các thời điểm. Theo hình 6.1 ta có:

$$u_{n-1/2} = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}; \quad u_{n+1/2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} \quad (6.1)$$

Vận tốc của hệ tại thời điểm t_n được biểu diễn bằng sai phân hữu hạn:

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1/2} - u_{n-1/2}}{\Delta t} \quad (6.2)$$

Thay các giá trị trong (6.1) vào (6.2) ta thu được biểu thức vận tốc tại thời điểm t_n :

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \quad (6.3)$$

Vận tốc tại thời điểm $t_{n-1/2}$ và $t_{n+1/2}$:

$$\dot{u}_{n-1/2} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}; \quad \dot{u}_{n+1/2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} \quad (6.4)$$

Từ đó xác định được gia tốc tại thời điểm t_n dựa vào sai phân hữu hạn:

$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+1/2} - \dot{u}_{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (6.5)$$

Thay các biểu thức vận tốc (6.3) và gia tốc (6.5) vào phương trình cân bằng động học ta có:

$$m \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} + c \frac{u_{n+1/2} - u_{n-1/2}}{\Delta t} + ku_n = p_n \quad (6.6)$$

Sau khi biến đổi phương trình trên, ta thu được:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{n+1} = p_n - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{n-1} - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) u_n \quad (6.7)$$

Biểu thức (6.7) được viết gọn lại như sau:

$$\hat{k}u_{n+1} = \hat{p}_n \quad (6.8)$$

trong đó:

$$\hat{k} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (6.9)$$

$$\hat{p}_n = p_n - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) u_{n-1} - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) u_n \quad (6.10)$$

Vận tốc tại thời điểm t_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{\hat{p}_n}{\hat{k}} \quad (6.11)$$

Như vậy, để tính được chuyển vị u_{n+1} tại thời điểm t_{n+1} ta cần biết các chuyển vị u_{n-1} và u_n . Dựa vào biểu thức vận tốc (6.3) và gia tốc (6.5) tại thời điểm t_n , ta xác định được chuyển vị u_{n-1} như sau:

$$u_{n-1} = u_n - \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n \quad (6.12)$$

Thay các giá trị chuyển vị, vận tốc, gia tốc tại thời điểm ban đầu $t = 0$, ta tìm được biểu thức tính chuyển vị tại thời điểm t_{-1} :

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 \quad (6.13)$$

Để phương pháp sai phân đúng tâm ổn định và cho kết quả chính xác ta phải chọn bước thời gian Δt nhỏ hơn một giá trị tới hạn Δt_{cr}

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{T}{\pi} = 0,3183T \quad (6.14)$$

trong đó: T là chu kỳ dao động của hệ.

Thuật toán tính dao động bằng phương pháp sai phân đúng tâm:

1. Điều kiện ban đầu:

$$u_0 \quad \text{và} \quad \dot{u}_0$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

2. Chọn bước thời gian: $\Delta t < \Delta t_{cr} = T/\pi$

3. Tính các hằng số tích phân:

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \quad \text{và} \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$$

4. Tính chuyển vị u_{-1} tại thời điểm t_{-1}

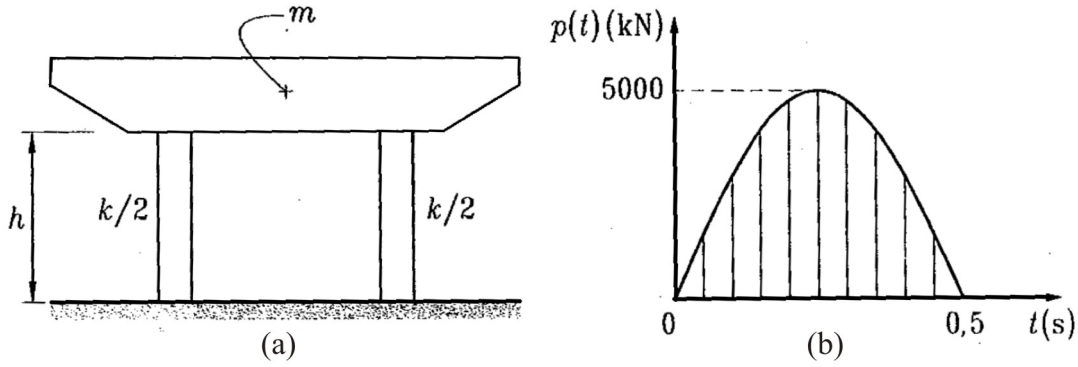
$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0$$

5. Tính độ cứng: $\hat{k} = a_0 m + a_1 c$

6. Tính vòng lặp:

$$\begin{cases} \hat{p}_n = p_n - (a_0 m - a_1 c)u_{n-1} - (k - 2a_0 m)u_n \\ u_{n+1} = \hat{p}_n / \hat{k} \end{cases}$$

Ví dụ 6.1: Tính dao động của hệ như hình 6.2, biết rằng khối lượng của hệ $m = 5 \times 10^5 kg$, độ cứng $k = 3 \times 10^5 kN/m$ và tham số tắt dần $\xi = 0,05$. Hệ chịu tác dụng của tải trọng động $p(t) = 5000 \sin(2\pi t) kN$ trong khoảng thời gian $t_d = 0,5s$.



Hình 6.2: Trụ cầu chịu tác dụng của tải trọng động (a), Tải trọng động (b)

Lời giải: Tần số dao động riêng của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^5}} = 24,4949 \text{ rad/s}$$

Chu kỳ dao động của hệ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2565 \text{ s}$$

Hệ số cản:

$$c = 2m\omega\xi = 1,2247 \times 10^6 \text{ N.s/m}$$

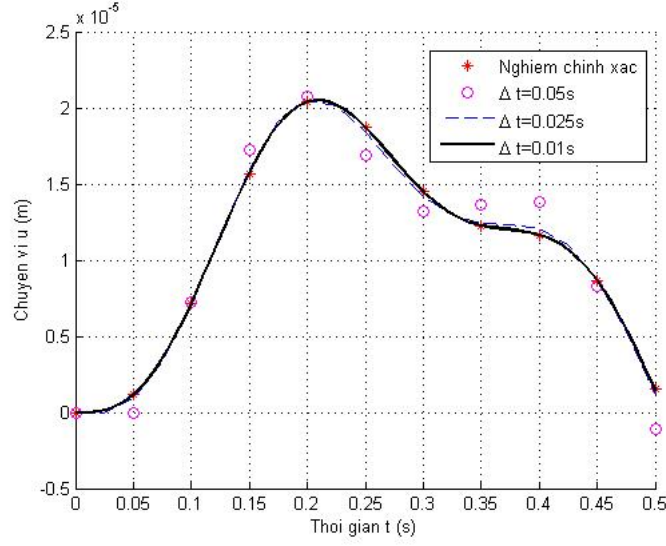
Chọn bước thời gian $\Delta t = 0,05 \text{ s} < \Delta t_{cr} = T/\pi = 0,08 \text{ s}$. Kết quả tính toán được cho trong bảng, cột cuối cùng là nghiệm chính xác được xác định theo công thức đã biết trong chương 2: hệ dao động một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa.

6.1.2 Phương pháp Newmark

Theo công thức Taylor ¹, ta có thể xác định trạng thái của hệ ở thời điểm t_{n+1} theo trạng thái đã biết của hệ ở thời điểm trước đó t_n như sau:

$$f(t_n + \Delta t) = f(t_n) + \Delta t f'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} f''(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R_s(t) \quad (6.15)$$

¹Brook Taylor, nhà toán học, sinh ngày 18/08/1685 tại Edmonton, Middlesex, Anh, mất ngày 29/12/1731 tại Somerset House, London, Anh



Hình 6.3: So sánh nghiệm chính xác và nghiệm tính theo phương pháp sai phân đúng tâm với các bước thời gian khác nhau

trong đó $R_s(t)$ là phần dư Lagrange bậc s , được xác định theo biểu thức sau:

$$R_s(t) = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} (t_n + \Delta t - \tau)^s f^{(s+1)}(\tau) d\tau \quad (6.16)$$

Chuyển vị và vận tốc tại thời điểm t_{n+1} được xác định theo công thức:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (6.17)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (6.18)$$

Các tích phân trong công thức trên lần lượt là phần dư bậc 1 và bậc 0 của khai triển Taylor.

Để tính các tích phân này ta cần tìm biểu thức của $\ddot{u}(\tau)$ trong đoạn $[t_n, t_{n+1}]$ theo các giá trị $\ddot{u}_n$ và $\ddot{u}_{n+1}$. Áp dụng công thức khai triển Taylor ta có:

$$\ddot{u}(t_n) = \ddot{u}(\tau) + (t_n - \tau) \ddot{u}^{(3)}(\tau) + \frac{(t_n - \tau)^2}{2!} \ddot{u}^{(4)}(\tau) + \dots \quad (6.19)$$

n	t_n	$p_n \times 10^{-6}$	$\widehat{p}_n \times 10^{-6}$	$u_n \times 10^3$	$u_{re} \times 10^3$
0	0,00	0	0	0	0
1	0,05	1,545	1,545	0	1,173
2	0,10	2,939	3,667	7,280	7,169
3	0,15	4,045	4,406	17,276	15,692
4	0,20	4,755	3,587	20,759	20,379
5	0,25	5	2,793	16,902	18,740
6	0,30	4,755	2,898	13,158	14,528
7	0,35	4,045	2,940	13,652	12,250
8	0,40	2,939	1,761	13,851	11,579
9	0,45	1,545	-0,226	8,296	8,602
10	0,50	0	-1,664	-1,064	1,550

$$\ddot{u}(t_{n+1}) = \ddot{u}(\tau) + (t_{n+1} - \tau)u^{(3)}(\tau) + \frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2!}u^{(4)}(\tau) + \dots \quad (6.20)$$

Nhân hai vế của (6.19) và (6.20) lần lượt với $(1 - \gamma)$ và γ rồi cộng các thành phần tương ứng, ta có:

$$\ddot{u}(\tau) = (1 - \gamma)\ddot{u}_n + \gamma\ddot{u}_{n+1} + (\tau - t_n - \gamma\Delta t)u^{(3)}(\tau) + \dots \quad (6.21)$$

Nhân hai vế của (6.19) và (6.20) một lần nữa với $(1 - 2\beta)$ và 2β rồi cộng các thành phần tương ứng, ta có:

$$\ddot{u}(\tau) = (1 - 2\beta)\ddot{u}_n + 2\beta\ddot{u}_{n+1} + (\tau - t_n - 2\beta\Delta t)u^{(3)}(\tau) + \dots \quad (6.22)$$

Thay (6.21) vào (6.18) và thay (6.22) vào (6.17) rồi tích phân từng phần ta có:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{u}(\tau) d\tau = (1 - \gamma)\Delta t \dot{u}_n + \gamma\Delta t \dot{u}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\Delta t^2 u^{(3)}(t_n) + \mathbf{O}\left(\Delta t^3 u^{(4)}(\tilde{\tau})\right) \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)\ddot{u}(\tau) d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \dot{u}_n + \beta\Delta t^2 \dot{u}_{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \beta\right)\Delta t^3 u^{(3)}(t_n) \\ &\quad + \mathbf{O}\left(\Delta t^4 u^{(4)}(\tilde{\tau})\right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

với: $t_n < \tilde{\tau} < t_{n+1}$

Do Δt thường được chọn rất nhỏ nên ta có thể bỏ qua các số hạng chứa Δt

với số mũ lớn hơn 2 đối với chuyển vị và lớn hơn 1 đối với vận tốc. Như vậy biểu thức chuyển vị và vận tốc tại thời điểm t_{n+1} có dạng sau:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma\Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (6.25)$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta\Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (6.26)$$

trong đó γ và β là các thông số xét đến ảnh hưởng của gia tốc tại thời điểm t_n và t_{n+1} đối với vận tốc và chuyển vị. Trong thực tế, các thông số này được chọn trong các khoảng sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{4} \\ 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6.27)$$

Từ (6.26) ta tính được gia tốc tại thời điểm t_{n+1} theo biểu thức:

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(u_{n+1} - u_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_n \quad (6.28)$$

Thay (6.28) vào (6.25) ta có:

$$\dot{u}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(u_{n+1} - u_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{u}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t \ddot{u}_n \quad (6.29)$$

Thay vận tốc (6.29) và gia tốc (6.28) vào phương trình cân bằng động học tại thời điểm t_{n+1} ta thu được:

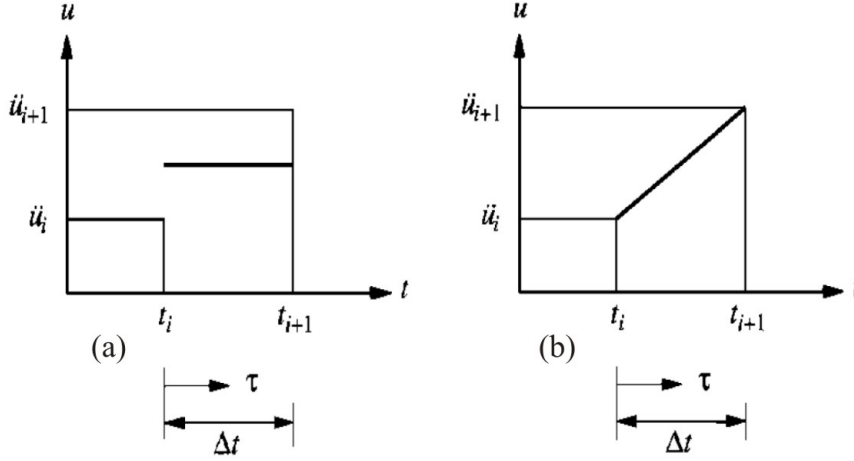
$$\begin{aligned} \left(k + \frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta\Delta t}\right)u_{n+1} &= p_{n+1} + \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}u_n + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_n\right]m \\ &+ \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}u_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{u}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t \ddot{u}_n\right]c \end{aligned} \quad (6.30)$$

Từ biểu thức (6.30) tính được chuyển vị tại thời điểm t_{n+1} :

$$u_{n+1} = \frac{\hat{p}_{n+1}}{\hat{k}} \quad (6.31)$$

trong đó:

$$\hat{k} = k + \frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta\Delta t} \quad (6.32)$$



Hình 6.4: Phương pháp gia tốc trung bình (a), Phương pháp gia tốc tuyến tính (b)

$$\begin{aligned} \hat{p}_{n+1} = p_{n+1} + & \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} u_n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_n \right] m \\ & + \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} u_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{u}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_n \right] c \end{aligned} \quad (6.33)$$

Sau khi tính được chuyển vị u_{n+1} , thay vào (6.29) và (6.28) ta tính được vận tốc $\dot{u}_{n+1}$ và gia tốc $\ddot{u}_{n+1}$.

Điều kiện ổn định của phương pháp Newmark:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T}{2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \quad (6.34)$$

Nhận xét:

1. Khi chọn các thông số $\gamma = \frac{1}{2}$ và $\beta = \frac{1}{4}$ ta có phương pháp gia tốc trung bình (hình 6.4a). Chọn các thông số như vậy có nghĩa chúng ta giả định rằng gia tốc là hằng số và bằng giá trị trung bình trong khoảng thời gian Δt :

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n}{2}$$

Tích phân biểu thức trên ta có biểu thức vận tốc trong khoảng thời gian Δt :

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_n + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)$$

Tích phân một lần nữa ta có biểu thức của chuyển vị:

$$u(\tau) = u_n + \tau \dot{u}_n + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)$$

Thay $\tau = \Delta t$ ta có giá trị vận tốc và chuyển vị tại thời điểm t_{n+1} :

$$\begin{aligned}\dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \\ u_{n+1} &= u_n + \dot{u}_n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n)\end{aligned}$$

Thay các giá trị $\gamma = 1/2$ và $\beta = 1/4$ vào điều kiện ổn định (6.34) ta có:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \infty$$

Điều đó có nghĩa phương pháp gia tốc trung bình ổn định với mọi giá trị của Δt . Thực tế, người ta thường chọn bước thời gian $\Delta t \leq T/10$ để dao động của hệ được xác định chính xác. Đặc biệt khi tính hệ chịu tác dụng của động đất, bước thời gian Δt thường được lấy các giá trị 0.01s hay 0.02s nhỏ hơn rất nhiều so với giới hạn $T/10$.

2. Khi chọn các thông số $\gamma = \frac{1}{2}$ và $\beta = \frac{1}{6}$ ta có phương pháp gia tốc tuyến tính (hình 6.4b). Trong trường hợp này, gia tốc được giả định là hàm tuyến tính trong khoảng thời gian Δt :

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_n + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n)$$

Tích phân biểu thức gia tốc lần lượt cho ta các biểu thức vận tốc và chuyển vị:

$$\begin{aligned}\dot{u}(\tau) &= \dot{u}_n + \tau \ddot{u}_n + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n) \\ u(\tau) &= u_n + \tau \dot{u}_n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_n + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n)\end{aligned}$$

Thay $\tau = \Delta t$ ta có giá trị vận tốc và chuyển vị tại thời điểm t_{n+1} :

$$\begin{aligned}\dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{n+1} + \ddot{u}_n) \\ u_{n+1} &= u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{6} \ddot{u}_{n+1} + \frac{1}{3} \ddot{u}_n \right)\end{aligned}$$

Điều kiện ổn định có dạng:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0,551$$

Thuật toán tính dao động của hệ bằng phương pháp Newmark:

1. Điều kiện ban đầu:

$$\begin{aligned}u_0 \quad \text{và} \quad \dot{u}_0 \\ \ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}\end{aligned}$$

2. Chọn phương pháp tích phân:

- Gia tốc trung bình: $\gamma = 1/2$ và $\beta = 1/4$
- Gia tốc tuyến tính: $\gamma = 1/2$ và $\beta = 1/6$

3. Chọn bước thời gian: $\Delta t < \Delta t_{cr}$

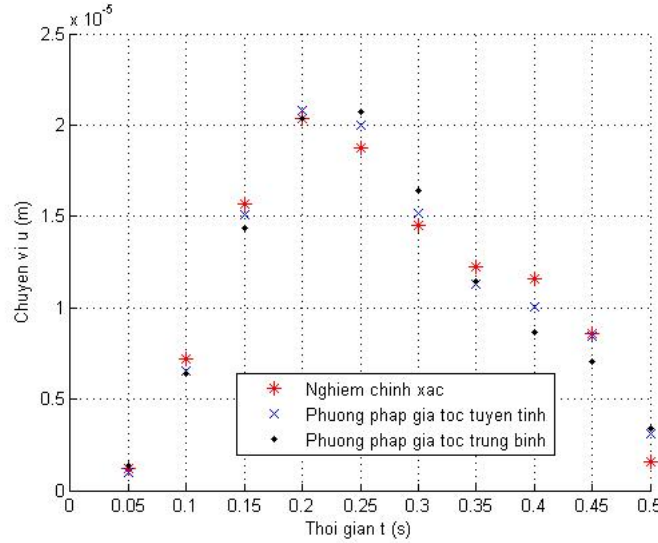
4. Tính các hằng số tích phân:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 & a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1 & a_5 &= \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t\end{aligned}$$

5. Tính độ cứng: $\hat{k} = k + a_0 m + a_1 c$

6. Tính vòng lặp:

$$\begin{cases} \hat{p}_{n+1} = p_{n+1} + (a_0 u_n + a_2 \dot{u}_n + a_3 \ddot{u}_n)m + (a_1 u_n + a_4 \dot{u}_n + a_5 \ddot{u}_n)c \\ u_{n+1} = \hat{p}_{n+1} / \hat{k} \\ \dot{u}_{n+1} = a_1 (u_{n+1} - u_n) - a_4 \dot{u}_n - a_5 \ddot{u}_n \\ \ddot{u}_{n+1} = a_0 (u_{n+1} - u_n) - a_2 \dot{u}_n - a_3 \ddot{u}_n \end{cases}$$



Hình 6.5: So sánh nghiệm chính xác với nghiệm tính theo phương pháp gia tốc tuyến tính và gia tốc trung bình

Ví dụ 6.2: Tính dao động của hệ trong ví dụ 6.1 bằng phương pháp Newmark.

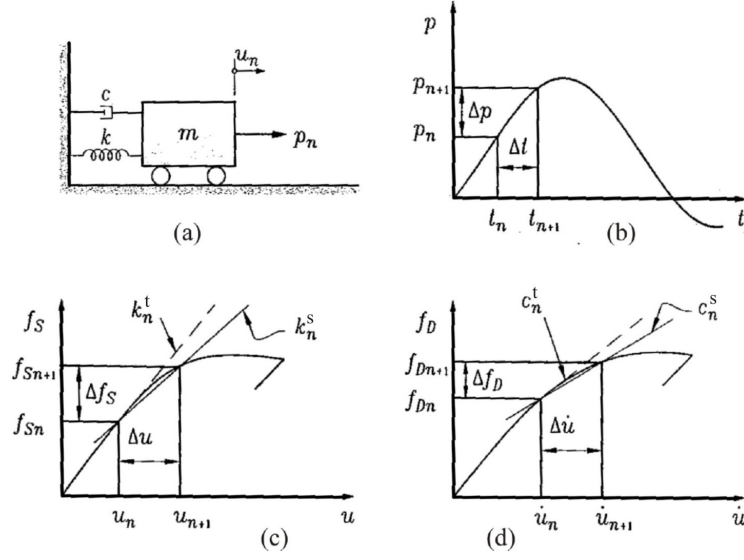
Nhận xét: Phương pháp gia tốc tuyến tính cho kết quả chính xác hơn phương pháp gia tốc trung bình khi chọn bước thời gian Δt như nhau.

6.2 Hệ phi tuyến một bậc tự do

Một hệ được gọi là phi tuyến khi độ cứng và (hoặc) hệ số cản thay đổi theo thời gian. Việc tính toán hệ phi tuyến được thực hiện bằng cách tích phân theo từng bước. Thuận toán được trình bày ở phần trước có thể được áp dụng để tính hệ phi tuyến khi viết dưới dạng gia số.

6.2.1 Phương trình cân bằng động dưới dạng gia số

Xét hệ một bậc tự do có khối lượng m chịu tác dụng của tải trọng động bất kỳ $p(t)$ (hình 6.6a và b). Giả thiết nội lực $f_S(t)$ và lực cản $f_D(t)$ là các hàm



Hình 6.6: Hệ một bậc tự do (a), Tải trọng động (b), Độ cứng phi tuyến (c), Lực cản phi tuyến (d)

phi tuyến đối với chuyển vị và vận tốc (hình 6.6c và d).

Tại thời điểm $t_n = n\Delta t$, phương trình cân bằng động của hệ:

$$f_{In} + f_{Dn} + f_{Sn} = p_n \quad (6.35)$$

Tại thời điểm $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, phương trình cân bằng động được viết như sau:

$$f_{In+1} + f_{Dn+1} + f_{Sn+1} = p_{n+1} \quad (6.36)$$

Lấy (6.36) trừ đi (6.35) ta được phương trình dưới dạng gia số:

$$\Delta f_I + \Delta f_D + \Delta f_S = \Delta p \quad (6.37)$$

trong đó:

$$\Delta f_I = f_{In+1} - f_{In} = m\Delta\ddot{u} \quad (6.38)$$

$$\Delta f_D = f_{Dn+1} - f_{Dn} = c_{n+1}^s \Delta\dot{u} \quad (6.39)$$

$$\Delta f_S = f_{Sn+1} - f_{Sn} = k_{n+1}^s \Delta u \quad (6.40)$$

$$\Delta p = p_{n+1} - p_n \quad (6.41)$$

c_{n+1}^s và k_{n+1}^s lần lượt là hệ số cản cát tuyến và độ cứng cát tuyến trong khoảng thời gian Δt . Các đại lượng này là chưa biết do chuyển vị và vận tốc của hệ tại thời điểm t_{n+1} chưa được xác định. Người ta có thể thay độ cứng cát tuyến k_{n+1}^s (hệ số cản cát tuyến c_{n+1}^s) bằng độ cứng tiếp tuyến k_n^t (hệ số cản tiếp tuyến c_n^t) được xác định ở đầu khoảng thời gian t_n . Việc sử dụng độ cứng tiếp tuyến thay cho độ cứng cát tuyến sẽ dẫn đến sai số trong quá trình tính toán. Để giảm sai số này, người ta thường dùng bước thời gian Δt rất nhỏ và phương pháp Newton-Raphson².

Thay các phương trình (6.38) đến (6.41) vào (6.37) ta có:

$$m\Delta\ddot{u} + c_n^t\Delta\dot{u} + k_n^t\Delta u = \Delta p \quad (6.42)$$

Để đơn giản người ta thường giả định hệ số cản c là hằng số. Khi đó, phương trình (6.42) được viết lại như sau:

$$m\Delta\ddot{u} + c\Delta\dot{u} + k_n^t\Delta u = \Delta p \quad (6.43)$$

6.2.2 Phương pháp Newmark

Để áp dụng phương pháp Newmark tính hệ phi tuyến, ta viết lại các phương trình (6.25) và (6.26) dưới dạng gia số:

$$\Delta\dot{u} = \Delta t\ddot{u}_n + \gamma\Delta t\Delta\ddot{u} \quad (6.44)$$

$$\Delta u = \Delta\dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_n + \beta\Delta t^2\Delta\ddot{u} \quad (6.45)$$

trong đó: $\Delta u = u_{n+1} - u_n$; $\Delta\dot{u} = \dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n$ và $\Delta\ddot{u} = \ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n$. Từ phương trình (6.45) ta tính được:

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta u - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_n - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_n \quad (6.46)$$

Thay (6.46) vào (6.44), ta thu được:

$$\Delta\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{u}_n \quad (6.47)$$

²Joseph Raphson, sinh năm 1648 tại Middlesex, Anh, mất năm 1715. Raphson đã công bố thuật toán này dưới tên "phương pháp Newton" vào năm 1690

Thay (6.46) và (6.47) vào (6.43), ta có:

$$\hat{k}_n \Delta u = \Delta \hat{p} \quad (6.48)$$

trong đó:

$$\hat{k}_n = k_n^t + \frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} \quad (6.49)$$

$$\Delta \hat{p} = \Delta p + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_n + \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_n \right) m + \left[\frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_n \right] c \quad (6.50)$$

Từ (6.48) ta tính được gia số chuyển vị Δu , sau đó thay vào (6.47) tính được gia số vận tốc $\Delta \dot{u}$. Giá trị chuyển vị và vận tốc tại thời điểm t_{n+1} được xác định bằng cách cộng thêm các gia số vào chuyển vị và vận tốc tại thời điểm t_n . Gia tốc tại thời điểm t_{n+1} có thể được xác định bằng cách tương tự. Tuy nhiên, u_{n+1} , $\dot{u}_{n+1}$ và $\ddot{u}_{n+1}$ tìm được không thỏa mãn điều kiện cân bằng tại thời điểm t_{n+1} do ta đã sử dụng độ cứng tiếp tuyến k_n^t ở đầu thời bước thời gian t_n thay cho độ cứng cát tuyến. Do đó, ta có thể xác định gia tốc $\ddot{u}_{n+1}$ từ điều kiện cân bằng động tại thời điểm t_{n+1} :

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{p_{n+1} - f_{Sn+1} - c\dot{u}_{n+1}}{m} \quad (6.51)$$

Thuật toán tính dao động hệ phi tuyến bằng phương pháp Newmark:

1. Điều kiện ban đầu:

$$u_0 \quad \text{và} \quad \dot{u}_0$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

2. Chọn phương pháp tích phân:

- Gia tốc trung bình: $\gamma = 1/2$ và $\beta = 1/4$
- Gia tốc tuyến tính: $\gamma = 1/2$ và $\beta = 1/6$

3. Chọn bước thời gian: $\Delta t < \Delta t_{cr}$

4. Tính các hằng số tích phân:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\beta \Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\beta} & a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} & a_5 &= \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \end{aligned}$$

5. Tính độ cứng có hiệu tại thời điểm t_n : $\widehat{k}_n = k_n^t + a_0 m + a_1 c$

6. Tính gia số lực $\Delta \widehat{p}$:

$$\Delta \widehat{p} = \Delta p + (a_2 \dot{u}_n + a_3 \ddot{u}_n) m + (a_4 \dot{u}_n + a_5 \ddot{u}_n) c$$

7. Tính gia số chuyển vị Δu :

$$\Delta u = \frac{\Delta \widehat{p}}{\widehat{k}_n}$$

8. Tính gia số vận tốc $\Delta \dot{u} = a_1 \Delta u - a_4 \dot{u}_n - a_5 \ddot{u}_n$

9. Tính chuyển vị và vận tốc tại thời điểm t_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u; \quad \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta \dot{u}$$

10. Tính gia tốc tại thời điểm t_{n+1} theo phương trình cân bằng động tại thời điểm t_{n+1} :

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{p_{n+1} - f_{Sn+1} - c \dot{u}_{n+1}}{m}$$

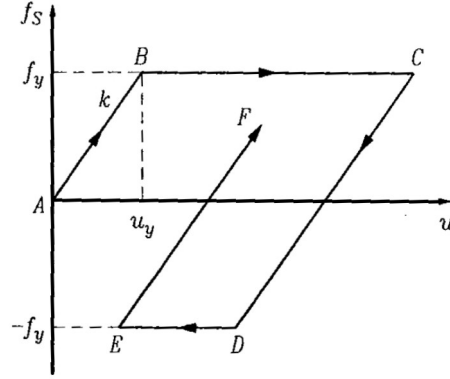
Ví dụ 6.3: Tính dao động của hệ trong ví dụ 6.1 bằng phương pháp gia tốc trung bình biết rằng quan hệ giữa $f_S(t)$ và chuyển vị u là đàn dẻo lý tưởng như hình 6.7 :

Lời giải: Các thông số của hệ:

$$m = 5 \times 10^5 kg; \quad k = 3 \times 10^8 N/m; \quad c = 1,2247 \times 10^6 Ns/m$$

Điều kiện ban đầu:

$$u_0 = 0; \quad \dot{u}_0 = 0; \quad \ddot{u}_0 = 0$$



Hình 6.7: Quan hệ lực-chuyển vị

Chọn bước thời gian: $\Delta t = 0,05s$

Độ cứng có hiệu:

$$\hat{k}_n = k_n + a_0 m + a_1 c = k_n + 8,49 \times 10^8$$

với:

$$k_n = \begin{cases} 3 \times 10^8 & \text{trên đoạn AB, CD và EF} \\ 0 & \text{trên đoạn BC và DE} \end{cases}$$

Gia số lực: $\Delta \hat{p} = \Delta p + 4,24 \times 10^7 \dot{u}_n + 10^6 \ddot{u}_n$

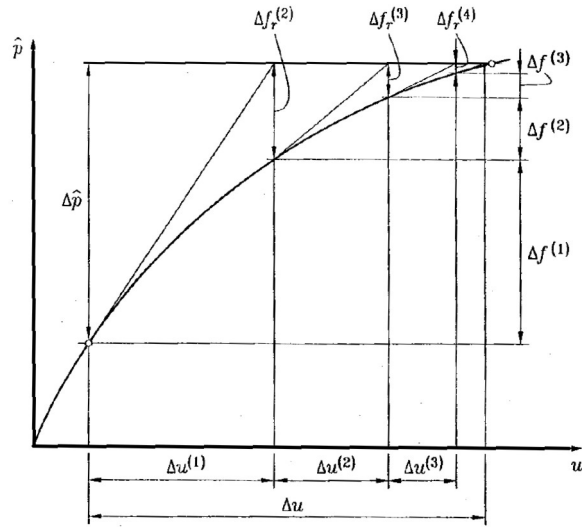
Kết quả cho trong bảng sau:

6.2.3 Giảm sai số bằng thuật toán Newton-Raphson

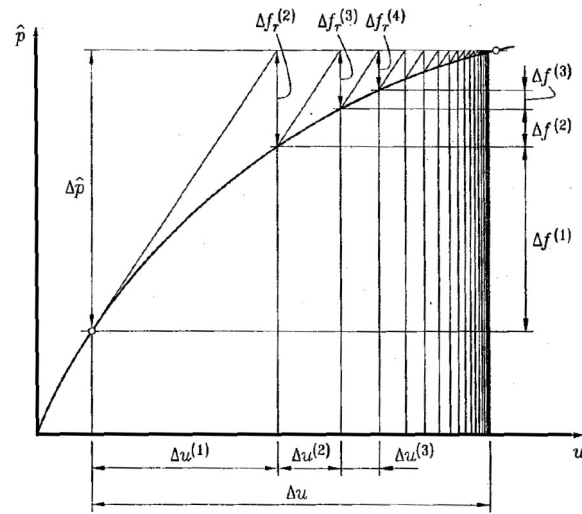
Như đã nói ở phần trên, sử dụng bước thời gian Δt nhỏ cho phép giảm sai số trong "một" bước thời gian khi tính hệ phi tuyến. Tuy nhiên, sai số tổng cộng (trên toàn bộ thời gian mà tải trọng động tác dụng) có thể rất lớn. Phương pháp hiệu quả để giảm sai số là áp dụng thuật toán lặp Newton trong từng bước thời gian để hội tụ đến giá trị chính xác. Trong cơ học, phương pháp này thường được gọi là thuật toán Newton-Raphson.

Xét nghiệm của một hệ phi tuyến như trên hình 6.8a. Ta bắt đầu bước lặp theo thuật toán Newton bằng cách xét gia số chuyển vị $\Delta u^{(1)}$ từ phương trình (6.48):

$$\hat{k}_{n+1}^{(0)} \Delta u^{(1)} = \Delta \hat{p} \quad (6.52)$$



(a)



(b)

Hình 6.8: Thuật toán Newton-Raphson (a), Thuật toán Newton-Raphson cải tiến (b)

n	t_n	$f_{Sn} \times 10^{-6}$	$\Delta \hat{p}_n \times 10^{-6}$	$\hat{k}_n \times 10^{-9}$	$u_n \times 10^3$
0	0,00	0	1,545	1,149	0
1	0,05	0,403	5,829	1,149	1,345
2	0,10	1,925	9,099	1,149	6,418
3	0,15	4,301	6,903	1,149	14,336
4	0,20	5,000	2,664	0,849	20,345
5	0,25	5,000	1,867	0,849	23,482
6	0,30	5,000	0,207	0,849	25,681
7	0,35	5,000	-4,033	1,149	25,925
8	0,40	3,947	-8,009	1,149	22,415
9	0,45	1,856	-8,721	1,149	15,444
10	0,50	-0,421	-4,748	1,149	7,854

với $\hat{k}_{n+1}^{(0)} = \hat{k}_n$ là độ cứng tiếp tuyến có hiệu tại thời điểm t_n .

Ở bước lặp thứ nhất, $\Delta f^{(1)}$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \Delta f^{(1)} = f_S^{(1)} + \left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} \right) (u_n + \Delta u^{(1)}) \\ - f_S^{(0)} - \left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} \right) u_n \end{aligned} \quad (6.53)$$

hay

$$\Delta f^{(1)} = f_S^{(1)} - f_S^{(0)} + \left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} \right) \Delta u^{(1)} \quad (6.54)$$

Từ hình 6.8a ta thấy, nội lực thực tác dụng trong lò xo $\Delta f^{(1)}$ nhỏ hơn $\Delta \hat{p}$. Hiệu số giữa $\Delta \hat{p}$ và $\Delta f^{(1)}$ là lực dư $\Delta f_r^{(2)}$. Lực dư này gây ra một chuyển vị $\Delta u^{(2)}$ mà ta có thể xác định từ biểu thức:

$$\hat{k}_{n+1}^{(1)} \Delta u^{(2)} = \Delta f_r^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)} \quad (6.55)$$

với $\hat{k}_{n+1}^{(1)}$ là độ cứng tiếp tuyến có hiệu được xác định ở cuối gia số chuyển vị $\Delta u^{(1)}$.

Chuyển vị $\Delta u^{(2)}$ này cho phép ta tính được lực dư mới và quá trình được bắt đầu lại cho đến khi hội tụ về chuyển vị thực. Thuật toán lặp Newton-Raphson

được tóm tắt theo các bước như sau:

$$\Delta f_r^{(i)} = \Delta f_r^{(i-1)} - \Delta f^{(i-1)} \quad (6.56)$$

$$\Delta u^{(i)} = \frac{\Delta f_r^{(i)}}{\widehat{k}_{n+1}^{(i-1)}} \quad (6.57)$$

$$u_{n+1}^{(i)} = u_{n+1}^{i-1} + \Delta u^{(i)} \quad (6.58)$$

$$\Delta u_i = \Delta u_{i-1} + \Delta u^{(i)} \quad (6.59)$$

$$f_S^{(i)} = f_S(u_{n+1}^{(i)}) \quad (6.60)$$

$$\Delta f^{(i)} = f_S^{(i)} - f_S^{(i-1)} + \left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} \right) \Delta u^{(i)} \quad (6.61)$$

với điều kiện ban đầu tại thời điểm t_n như sau:

$$\Delta f_r^{(0)} = \Delta \widehat{p} \quad (6.62)$$

$$\Delta f^{(0)} = 0 \quad (6.63)$$

$$u_{n+1}^{(0)} = u_n \quad (6.64)$$

$$f_S^{(0)} = f_{Sn} \quad (6.65)$$

$$\Delta u_0 = 0 \quad (6.66)$$

Trong thuật toán Newton-Raphson, độ cứng tiếp tuyến $\widehat{k}_{n+1}^{(i)}$ phải được xác định tại mỗi bước lặp thứ i . Việc này làm tăng đáng kể thời gian tính toán, đặc biệt đối với hệ nhiều bậc tự do. Để giảm thời gian tính toán, người ta có thể dùng thuật toán Newton-Raphson cải tiến hay còn gọi là thuật toán lặp với độ cứng không đổi (hình 6.8b). Khi đó, độ cứng tiếp tuyến được xác định ở đầu bước thời gian Δt và được giữ không đổi trong suốt quá trình lặp đối với bước thời gian đó cho đến khi hội tụ. So sánh hai hình 6.8a và 6.8b ta có thể nhận thấy, thuật toán Newton-Raphson cải tiến cho kết quả sau nhiều lần lặp hơn so với thuật toán Newton-Raphson ban đầu nhưng mỗi lần lặp sẽ nhanh hơn vì không phải xác định lại độ cứng tiếp tuyến. Thuật toán Newton-Raphson cải tiến tương tự như thuật toán ban đầu, có một điểm khác là trong biểu thức (6.57), độ cứng có hiệu $\widehat{k}_{n+1}^{(i-1)}$ được thay bằng độ cứng $\widehat{k}_n$ xác định tại thời điểm t_n .

Thuật toán lặp Newton-Raphson dừng khi thỏa mãn điều kiện hội tụ. Điều kiện này có thể được xác định bằng ba tiêu chí sau:

1. Tiêu chí chuyển vị:

Tỉ số giữa gia số chuyển vị ở cuối mỗi bước lặp $\Delta u^{(i)}$ và giá trị hiện

thời của gia số chuyển vị $\Delta u_i = \Sigma_i \Delta u^{(i)}$ phải nhỏ hơn giá trị sai số cho phép được chọn trước:

$$\left| \frac{\Delta u^{(i)}}{\Delta u_i} \right| \leq \varepsilon_D \quad (6.67)$$

2. Tiêu chí lực dư:

Tỉ số giữa lực dư ở bước lặp thứ i và lực có hiệu $\Delta \hat{p}$ nhỏ hơn giá trị sai số cho phép:

$$\left| \frac{\Delta f_r^{(i)}}{\Delta \hat{p}} \right| \leq \varepsilon_F \quad (6.68)$$

3. Tiêu chí năng lượng:

Tỉ số giữa gia số công nội lực ứng với các gia số chuyển vị ở bước lặp thứ i và công ứng với chuyển vị tổng cộng trong bước thời gian Δt nhỏ hơn sai số cho phép được chọn trước:

$$\frac{\Delta f_r^{(i)} \Delta u^{(i)}}{\Delta \hat{p} \Delta u_i} \leq \varepsilon_E \quad (6.69)$$

6.3 Hệ tuyến tính nhiều bậc tự do

Trong phần này giới thiệu một vài phương pháp tích phân theo thời gian tính hệ nhiều bậc tự do được xây dựng dựa trên các nội dung đã trình bày ở phần trên đối với hệ một bậc tự do.

Phương trình vi phân dao động hệ nhiều bậc tự do:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (6.70)$$

6.3.1 Phương pháp sai phân đúng tâm

Tương tự (6.3) và (6.5), các xấp xỉ của vecteur vận tốc và vecteur gia tốc được biểu diễn như sau:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (6.71)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (6.72)$$

Thay (6.71) và (6.72) vào phương trình vi phân dao động (6.70) tại thời điểm t_n ta có:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{p}_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_{n-1} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_n \quad (6.73)$$

hay

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_n \quad (6.74)$$

trong đó:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \quad (6.75)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_n = \mathbf{p}_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_{n-1} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_n \quad (6.76)$$

Vecteur chuyển vị tại thời điểm t_{n+1} được xác định sau khi chéo hóa ma trận độ cứng $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_n \quad (6.77)$$

Từ phương trình (6.76) ta thấy cần phải xác định vecteur chuyển vị ở cuối bước thời gian thứ nhất $t_1 = \Delta t$. Vecteur này được xác định theo biểu thức:

$$\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 \quad (6.78)$$

Điều kiện ổn định của phương pháp sai phân đúng tâm:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_{neq}}{\pi} = 0,318 T_{neq} \quad (6.79)$$

trong đó: T_{neq} là chu kỳ dao động nhỏ nhất của hệ có n_{eq} bậc tự do.

6.3.2 Phương pháp Newmark

Phương pháp Newmark đã được trình bày trong phần trước đối với hệ một bậc tự do. Để áp dụng phương pháp này cho hệ nhiều bậc tự do, ta chỉ cần thay các phương trình vô hướng đối với chuyển vị, vận tốc, gia tốc ở các thời điểm t_n, t_{n+1} thành các phương trình ma trận. Các biểu thức vận tốc và chuyển vị:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (6.80)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (6.81)$$

Thực hiện biến đổi tương tự như đối với hệ một bậc tự do, ta có:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.82)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.83)$$

Thay hai phương trình này vào phương trình cân bằng động tại thời điểm t_{n+1} :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} \quad (6.84)$$

ta thu được:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_{n+1} \quad (6.85)$$

trong đó:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} \quad (6.86)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} + & \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}_n + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_n \right] \mathbf{M} \\ & + \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{u}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n \right] \mathbf{C} \end{aligned} \quad (6.87)$$

Điều kiện ổn định của phương pháp Newmark:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_{neq}}{2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} = 0,551T_{neq} \quad (6.88)$$

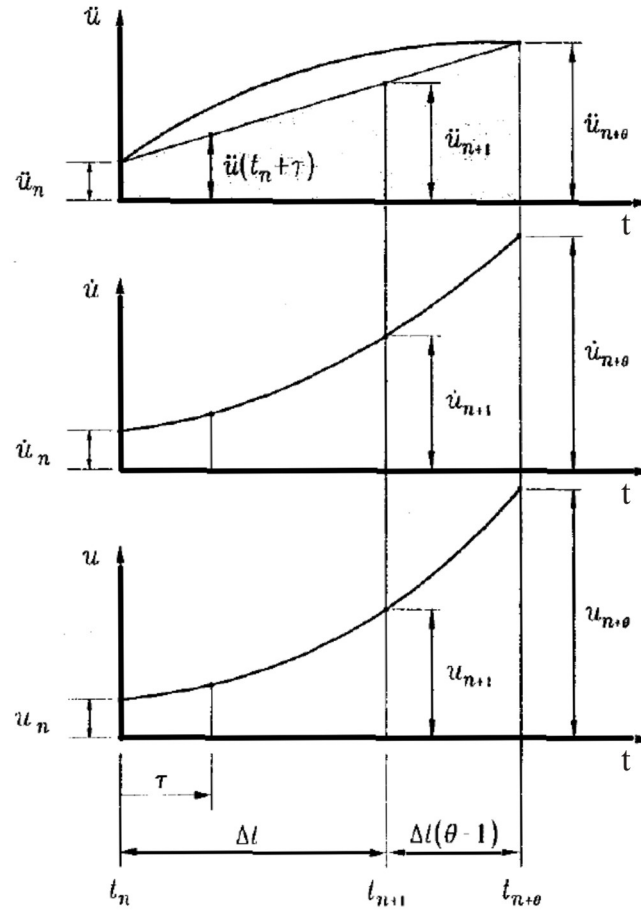
với T_{neq} là chu kỳ dao động nhỏ nhất của hệ n_{eq} bậc tự do.

6.3.3 Phương pháp Wilson

Phương pháp Wilson là sự cải tiến của phương pháp gia tốc tuyến tính nhằm làm cho phương pháp này trở thành phương pháp không phụ thuộc điều kiện ổn định. Trong phương pháp Wilson, người ta giả định gia tốc biến đổi tuyến tính trong khoảng $[t_n, t_n + \theta\Delta t]$ với $\theta \geq 1$.

Gia tốc tại thời điểm τ ($0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$):

$$\ddot{\mathbf{u}}(t_n + \tau) = \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.89)$$



Hình 6.9: Phương pháp Wilson

Tích phân (6.89) ta thu được biểu thức vận tốc và chuyển vị:

$$\dot{\mathbf{u}}(t_n + \tau) = \dot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_n \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.90)$$

$$\mathbf{u}(t_n + \tau) = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \tau + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.91)$$

Từ các phương trình (6.90) và (6.91), ta xác định được giá trị vận tốc và chuyển vị tại thời điểm $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$ (hay $\tau = \theta\Delta t$):

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\theta} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} + \ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.92)$$

$$\mathbf{u}_{n+\theta} = \mathbf{u}_n + \theta\Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} + 2\ddot{\mathbf{u}}_n) \quad (6.93)$$

Sau khi biến đổi (6.92) và (6.93), ta có thể biểu diễn được gia tốc $\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta}$ và vận tốc $\dot{\mathbf{u}}_{n+\theta}$ theo chuyển vị $\mathbf{u}_{n+\theta}$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+\theta} - \mathbf{u}_n) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_n - 2\ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.94)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+\theta} - \mathbf{u}_n) - 2\dot{\mathbf{u}}_n - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.95)$$

Phương trình cân bằng động tại thời điểm $t_{n+\theta}$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+\theta} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+\theta} = \mathbf{p}_{n+\theta} \quad (6.96)$$

Trong phương trình này $\mathbf{p}_{n+\theta}$ chưa biết. Do ta giả định gia tốc biến đổi tuyến tính nên ta sẽ dùng hình chiếu tuyến tính của vecteur tải trọng ở thời điểm $t_{n+\theta}$ được biểu diễn như sau:

$$\mathbf{p}_{n+\theta} = \mathbf{p}_n + \theta(\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n) \quad (6.97)$$

Thay (6.94) và (6.95) vào (6.96), ta có:

$$\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+\theta} = \widehat{\mathbf{p}}_{n+\theta} \quad (6.98)$$

trong đó:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{3}{\theta\Delta t}\mathbf{C} \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_{n+\theta} &= \mathbf{p}_n + \theta(\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n) + \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \mathbf{u}_n + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + 2\ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \\ &+ \mathbf{C} \left(\frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{u}_n + 2\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \right)\end{aligned}\quad (6.100)$$

Sau khi xác định được $\mathbf{u}_{n+\theta}$, ta tính $\ddot{\mathbf{u}}_{n+\theta}$ và $\dot{\mathbf{u}}_{n+\theta}$ theo (6.94) và (6.95). Bằng cách thay $\tau = \Delta t$ vào các phương trình (6.89), (6.90) và (6.91), ta tính được $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ và $\mathbf{u}_{n+1}$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{\theta} \left[\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+\theta} - \mathbf{u}_n) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - 3\ddot{\mathbf{u}}_n \right] \quad (6.101)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{u}}_n] \quad (6.102)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{6} [\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + 2\ddot{\mathbf{u}}_n] \quad (6.103)$$

Người ta chứng minh [1] rằng phương pháp Wilson không phụ thuộc vào điều kiện ổn định khi $\theta \geq 1,37$. Thực tế người ta thường chọn $\theta = 1,40$.

6.3.4 Phương pháp HHT

Phương pháp này do Hilber, Hughes và Taylor đề nghị nên người ta thường gọi là phương pháp HHT. Trong phương pháp HHT, các phương trình của phương pháp Newmark được giữ nguyên, chỉ phương trình cân bằng động được biến đổi như sau:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + (1+\alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + (1+\alpha)\mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}_n = (1+\alpha)\mathbf{p}_{n+1} - \alpha\mathbf{p}_n \quad (6.104)$$

Thay các phương trình (6.82) và (6.83) vào (6.104), ta có:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_{n+1} \quad (6.105)$$

trong đó:

$$\hat{\mathbf{K}} = (1+\alpha)\mathbf{K} + (1+\alpha)\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} \quad (6.106)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_{n+1} &= (1+\alpha)\mathbf{p}_{n+1} - \alpha\mathbf{p}_n + \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}_n + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n \right] \mathbf{M} \\ &+ \left[(1+\alpha)\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{u}_n + (1+\alpha)\left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_n + (1+\alpha)\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \right] \mathbf{C} \\ &+ \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha\mathbf{K}\mathbf{u}_n\end{aligned}\quad (6.107)$$

Dễ thấy rằng, khi $\alpha = 0$, phương pháp HHT trở thành phương pháp Newmark. Nếu chọn các thông số:

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \\ \gamma = \frac{1-2\alpha}{2} \\ \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \end{cases} \quad (6.108)$$

phương pháp HHT sẽ trở thành phương pháp không phụ thuộc vào điều kiện ổn định.

6.4 Hệ phi tuyến nhiều bậc tự do

Một cách tổng quát, để tính các hệ phi tuyến người ta thường dùng các phương pháp không phụ thuộc vào điều kiện ổn định. Lý do là chu kỳ dao động riêng của hệ phi tuyến thay đổi trong quá trình tính toán gây khó khăn trong việc chọn bước thời gian để thỏa mãn điều kiện ổn định. Tuy nhiên trong trường hợp ma trận khối lượng và ma trận cản là ma trận đường chéo hoặc bỏ qua ảnh hưởng lực cản, các phương pháp có điều kiện ổn định vẫn có thể áp dụng để tính hệ phi tuyến. Trong phần này sẽ giới thiệu phương pháp Newmark tính hệ phi tuyến nhiều bậc tự do.

6.4.1 Phương trình cân bằng động dưới dạng gia số

Tương tự như đối với hệ một bậc tự do, phương trình vi phân dao động sẽ được viết lại dưới dạng gia số. Đối với hệ nhiều bậc tự do, các đại lượng vô hướng được thay bằng các đại lượng vecteur hay ma trận tương ứng.

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_n^t\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{p} \quad (6.109)$$

trong đó: $\mathbf{K}_n^t$ là ma trận độ cứng tiếp tuyến tại thời điểm $t_n = n\Delta t$.

6.4.2 Phương pháp Newmark

Bài toán dao động hệ phi tuyến nhiều bậc tự do thường được tính bằng phương pháp gia tốc trung bình do phương pháp này không phụ thuộc vào điều kiện ổn định.

Viết lại các phương trình (6.44) và (6.45) dưới dạng vecteur:

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.110)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.111)$$

Từ phương trình (6.111) tính được $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.112)$$

Thay (6.112) vào (6.110), ta thu được:

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (6.113)$$

Thay (6.112) và (6.113) vào (6.109), ta có:

$$\hat{\mathbf{K}}_n \Delta \mathbf{u} = \Delta \hat{\mathbf{p}} \quad (6.114)$$

trong đó:

$$\hat{\mathbf{K}}_n = \mathbf{K}_n^t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (6.115)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{p}} = \Delta \mathbf{p} + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_n \right) \mathbf{M} + \left[\frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \right] \mathbf{C} \quad (6.116)$$

Sau khi tính được $\Delta \mathbf{u}$ từ phương trình (6.114), ta tính được gia số vận tốc $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ và gia số gia tốc $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$.

Chương 7

Tính kết cấu chịu tác dụng động đất

7.1 Khái niệm về động đất

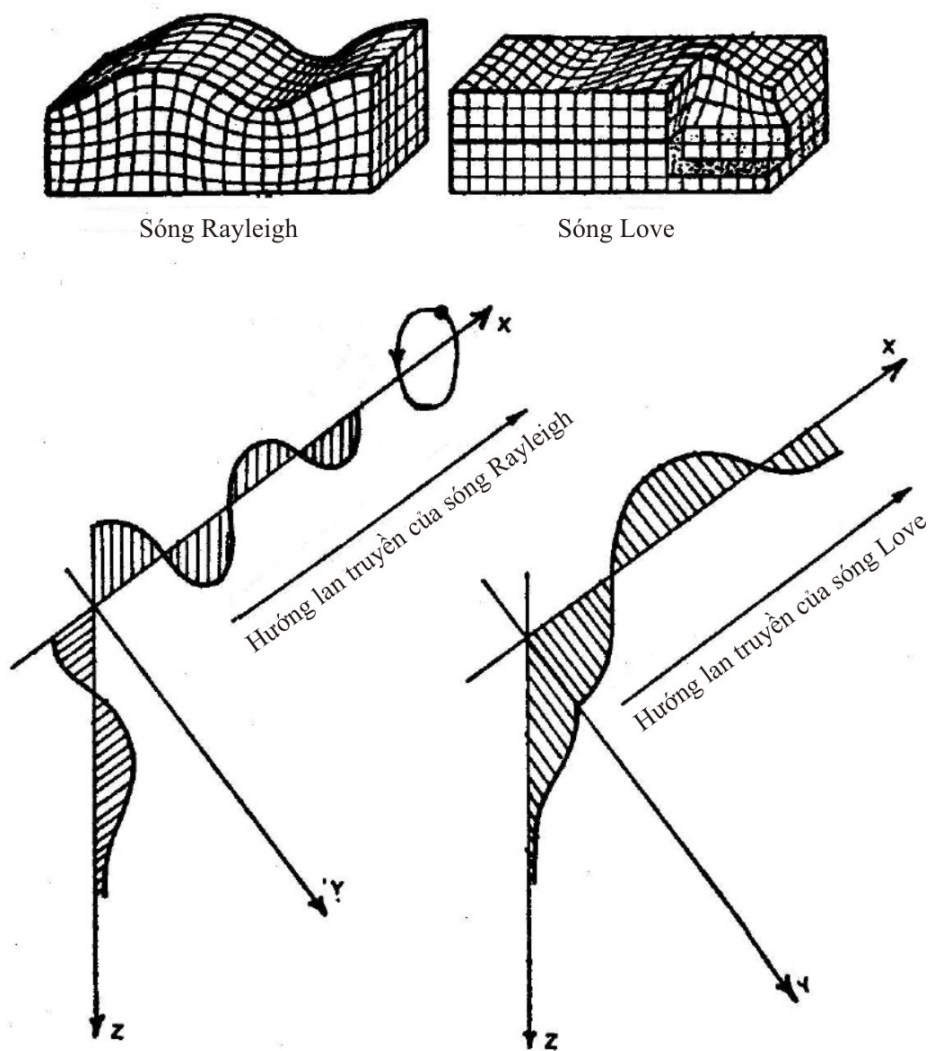
7.1.1 Nguồn gốc của động đất

Động đất là sự chuyển động của đất gây ra bởi sự giải phóng năng lượng được tích lũy trong vỏ trái đất một cách đột ngột. Nơi xảy ra động đất được gọi là tâm động đất, còn điểm trên bề mặt trái đất giống thẳng từ tâm động đất gọi là tâm chấn.

7.1.2 Lan truyền sóng

Từ tâm, các rung chuyển động đất lan truyền dưới dạng sóng theo nhiều kiểu khác nhau do sự không đồng nhất của đất. Các rung chuyển này gây ra các chuyển động phức tạp khó dự đoán trước. Người ta có thể chia ra thành các dạng sóng như sau:

- Sóng khối: Sóng này sinh ra từ tâm động đất và lan truyền trong đất theo 2 kiểu:
 - Sóng P hay sóng dọc: lan truyền với vận tốc $7 - 8\text{km/s}$ và gây ra sự thay đổi thể tích (nén và giãn xen kẽ nhau).
 - Sóng S hay sóng ngang: lan truyền với vận tốc $4 - 5\text{km/s}$, gây ra xoắn trong mặt phẳng vuông góc với phương truyền sóng và trượt



Hình 7.2: Sóng Rayleigh và sóng Love

và sóng P được cho bởi biểu thức:

$$v_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.1)$$

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (7.2)$$

trong đó: G và λ là các hằng số Lamé:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.3)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (7.4)$$

Tỉ số giữa vận tốc v_P và v_S có dạng:

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}} \quad (7.5)$$

Tỉ số này phụ thuộc vào hệ số Poisson:

$\nu = 0$	$\frac{v_P}{v_S} = 1,41$
$\nu = 0,15$	$\frac{v_P}{v_S} = 1,56$
$\nu = 0,25$	$\frac{v_P}{v_S} = 1,71$

Dễ thấy rằng sóng dọc P lan truyền nhanh hơn sóng ngang S khoảng 1,5 lần. Nếu biết vận tốc truyền sóng v_P và v_S cũng như chênh lệch thời gian truyền đến điểm đo của các sóng, người ta có thể xác định được khoảng cách giữa tâm động đất và điểm đo. Để xác định được vị trí của tâm động đất, cần phải sử dụng đồng thời từ 3 trạm đo trở lên.

7.1.3 Chuyển động của mặt đất

Sự chuyển động của mặt đất khi xảy ra động đất thường được ghi lại dưới dạng một biểu đồ gia tốc mà trên đó biểu diễn sự thay đổi của gia tốc dọc theo một hướng nào đó theo thời gian. Đồng thời người ta có thể ghi lại cả sự thay đổi của vận tốc và chuyển vị. Trên biểu đồ gia tốc, người ta quan tâm đến giá trị gia tốc lớn nhất, đây là thông số quan trọng để xác định nguy cơ động đất.

7.1.4 Cường độ

Cường độ của một trận động đất được xác định theo sự cảm nhận của con người và thiệt hại do nó gây ra. Đối với một trận động đất, cường độ phụ thuộc vào khoảng cách đến tâm chấn. Nói chung cường độ giảm khi khoảng cách này tăng lên nhưng đôi khi cũng có những bất thường xuất hiện do điều kiện địa chất đặc biệt.

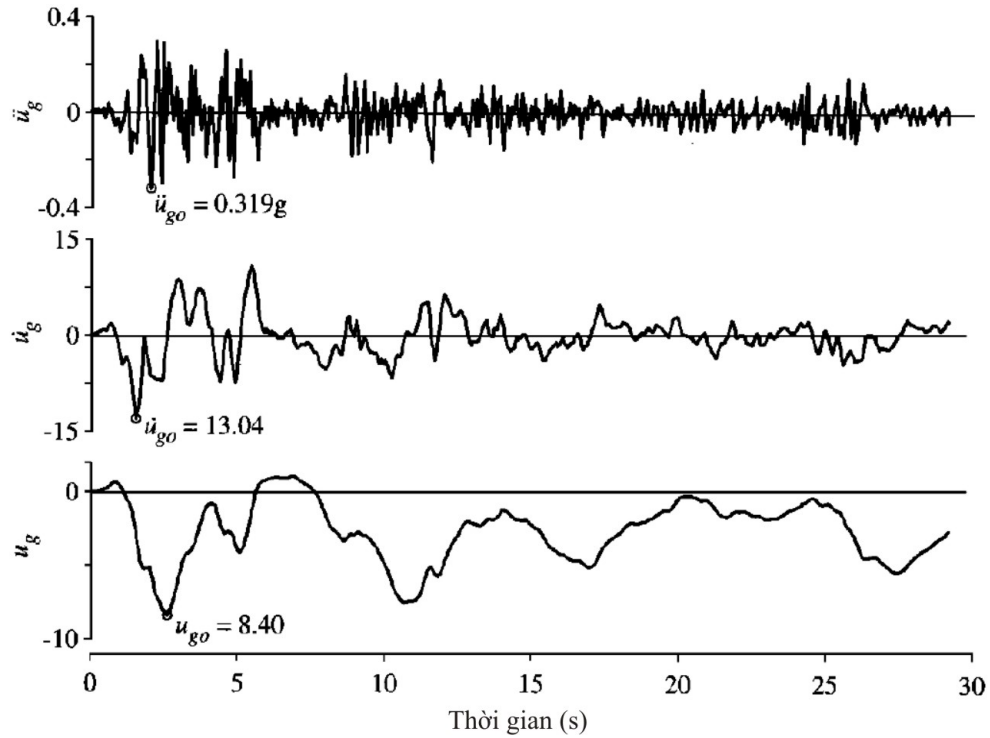
Thang cường độ Mercalli: được đề xuất bởi nhà địa chất học người Italia Giuseppe Mercalli ¹ vào năm 1902

- Bậc 1: rung động mà con người không cảm nhận được
- Bậc 2, 3: rung động mà chỉ một số ít người cảm nhận được
- Bậc 4, 5: rung động mà nhiều người cảm nhận được
- Bậc 6: rung động rất nhiều người cảm nhận được
- Bậc 7: gây thiệt hại nhẹ cho các công trình xây dựng
- Bậc 8, 9: gây thiệt hại khá nghiêm trọng cho các công trình xây dựng, xuất hiện các vết nứt trong đất
- Bậc 10: phá hủy hoàn toàn các công trình
- Bậc 11, 12: thảm họa

7.2 Tính kết cấu chịu tác dụng của động đất

Ứng dụng rộng rãi nhất của động lực học công trình trong xây dựng dân dụng là nghiên cứu "ứng xử" của kết cấu dưới tác dụng của động đất. Lý do chủ yếu là vì động đất gây ra lực quán tính lớn đối với nhà cửa cũng như các công trình xây dựng dân dụng khác.

¹Giuseppe Mercalli, nhà địa chất học, sinh ngày 21/05/1850 tại Milan, Italia, mất ngày 20/03/1914 tại Naples, Italia



Hình 7.3: Thành phần gia tốc của đất theo hướng Bắc-Nam được ghi lại tại El Centro, California trong trận động đất ngày 18 tháng 5 năm 1940. Vận tốc và chuyển vị của đất được xác định bằng cách tích phân gia tốc của đất

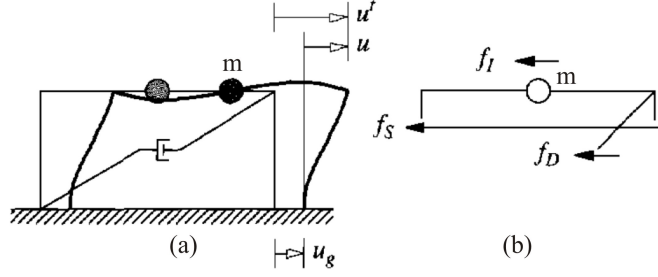
7.2.1 Hệ một bậc tự do tuyến tính

Sự kích động động đất:

Sự kích động động đất được biểu hiện qua gia tốc chuyển động của đất $\ddot{u}_g(t)$. Để ghi lại gia tốc của đất người ta dùng các thiết bị đo gia tốc. Kết quả được biểu diễn bằng biểu đồ gia tốc như trên hình 7.3

Phương trình vi phân dao động

Xét kết cấu chịu tác dụng của động đất như hình 7.4a. Chuyển vị của nền là $u_g(t)$. Chuyển vị tuyệt đối của khối lượng ký hiệu là $u^t(t)$, chuyển vị tương đối giữa khối lượng và nền là $u(t)$. Các chuyển vị này được liên hệ với nhau



Hình 7.4: (a) Hệ một bậc tự do chịu ảnh hưởng của động đất, (b) Các lực tác dụng lên khối lượng

bởi biểu thức:

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \quad (7.6)$$

Theo sơ đồ phân tích lực tác dụng lên khối lượng trên hình 7.4b, chúng ta có phương trình cân bằng động:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (7.7)$$

trong đó lực quán tính f_I được biểu diễn bởi biểu thức:

$$f_I = m\ddot{u}^t \quad (7.8)$$

Các lực đàn hồi và lực cản vẫn có dạng (2.2). Thay các biểu thức này và (7.8) vào phương trình (7.7) thu được:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (7.9)$$

Phương trình trên có dạng tương tự phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực động $-m\ddot{u}_g(t)$. Như vậy, ảnh hưởng của chuyển động nền có thể được thay thế bởi "lực động đất có hiệu" $p^{eff}(t)$ xác định bởi biểu thức:

$$p^{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (7.10)$$

Chia hai vế của phương trình (7.9) cho m , chúng ta có:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (7.11)$$

Nghiệm của phương trình chỉ phụ thuộc vào tần số dao động riêng ω và tham số tắt dần ξ khi đã biết gia tốc nền $\ddot{u}_g(t)$. Trong quá trình xảy ra động đất,

gia tốc nền biến đổi bất kỳ không theo quy luật nên không thể xác định nghiệm giải tích của phương trình vi phân dao động. Do đó, các phương pháp số (tích phân theo thời gian) giới thiệu trong chương 6 được sử dụng để xác định nghiệm của bài toán.

Nghiệm theo thời gian-Response history

Một khi chuyển vị theo thời gian $u(t)$ được xác định bằng phân tích động lực học kết cấu, nội lực có thể được xác định bằng phân tích tĩnh kết cấu tại mỗi thời điểm. Đầu tiên, lực tĩnh tương đương được xác định như sau:

$$f_s(t) = ku(t) \quad (7.12)$$

trong đó k là "độ cứng" của kết cấu. Biểu diễn k theo khối lượng m thu được:

$$f_s(t) = m\omega_n^2 u(t) = mA(t) \quad (7.13)$$

với $A(t) = \omega_n^2 u(t)$.

Dễ thấy rằng lực tĩnh tương đương bằng m lần $A(t)$ chứ không phải m lần gia tốc tổng $\ddot{u}^t(t)$. "Gia tốc giả" $A(t)$ của hệ có thể được xác định từ chuyển vị $u(t)$ bằng cách nhân $u(t)$ với bình phương tần số góc ω^2 .

Nội lực của hệ (moment, lực cắt) được xác định tại thời điểm bất kỳ bằng phân tích tĩnh kết cấu chịu tác dụng của lực tĩnh tương đương tại cùng thời điểm đó.

Khái niệm phổ nghiệm-Response spectrum concept

Đồ thị biểu diễn cực trị của các đại lượng như chuyển vị, vận tốc hay gia tốc theo chu kỳ riêng T hay tần số riêng f của hệ được gọi là phổ nghiệm của đại lượng đó.

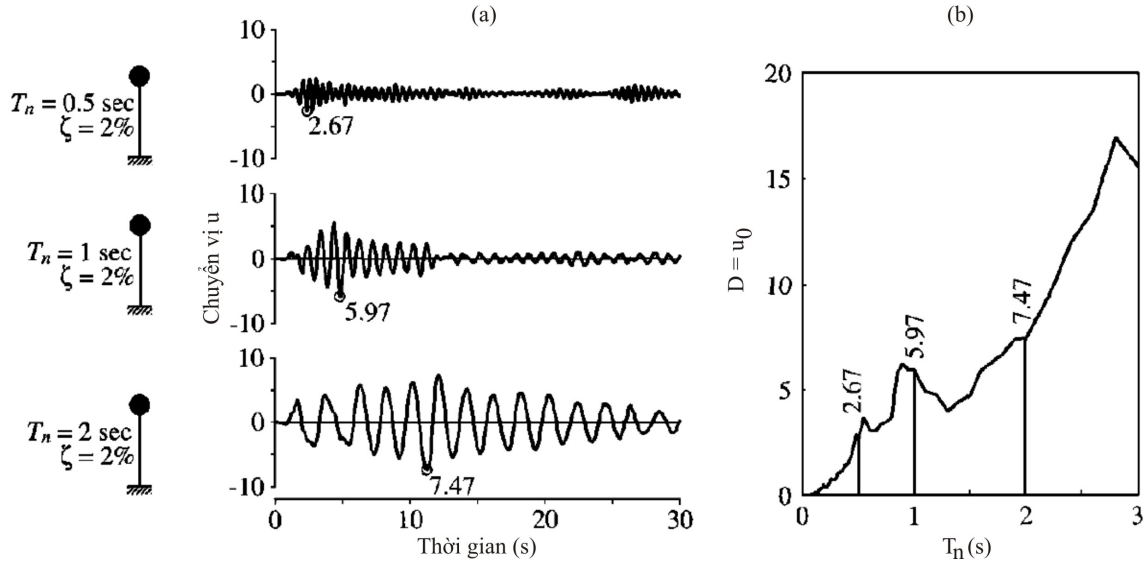
$$u_0(T, \xi) \equiv \max_t |u(t, T, \xi)| \quad (7.14)$$

$$\dot{u}_0(T, \xi) \equiv \max_t |\dot{u}(t, T, \xi)| \quad (7.15)$$

$$\ddot{u}_0(T, \xi) \equiv \max_t |\ddot{u}(t, T, \xi)| \quad (7.16)$$

- *Phổ chuyển vị*

Hình 7.5 thể hiện quá trình xác định phổ chuyển vị. Sự phụ thuộc của



Hình 7.5: (a) *Nghiệm chuyển vị của hệ một bậc tự do với ba chu kỳ dao động riêng khác nhau*, (b) *Phổ chuyển vị*

chuyển vị theo thời gian gây ra bởi chuyển động đất nền của 3 hệ một bậc tự do được biểu diễn bởi các hình bên trái. Đối với mỗi hệ, giá trị cực đại của chuyển vị được xác định (thông thường, cực đại thường xuất hiện trong quá trình đất nền chuyển động, tuy nhiên đối với những hệ có hệ số cản nhỏ và chu kỳ dao động lớn thì cực đại có thể xuất hiện trong quá trình dao động tự do sau khi chuyển động đất nền đã kết thúc). Giá trị chuyển vị cực đại u_0 được xác định đối với mỗi hệ cho chúng ta một điểm trên phổ chuyển vị. Lặp lại quá trình tính toán cho các chu kỳ T_n khác nhau và giữ ξ bằng hằng số sẽ cho phổ chuyển vị như hình vẽ bên phải. Phổ chuyển vị hoàn chỉnh sẽ gồm các đường cong tương tự đối với các giá trị ξ khác nhau.

- *Phổ giả vận tốc*

Xét đại lượng V của hệ một bậc tự do với tần số riêng ω_n được liên hệ với chuyển vị cực đại $D \equiv u_0$ của nó bởi biểu thức:

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D \quad (7.17)$$

Đại lượng V có thứ nguyên của vận tốc và được gọi là giá trị cực đại "giả" vận tốc. Tiền tố "giả" được sử dụng vì V không bằng vận tốc cực đại $\dot{u}_0$ mặc dù cùng thứ nguyên. Chúng ta sẽ trở lại vấn đề này trong phần sau. Phổ giả vận tốc là đồ thị biểu diễn sự thay đổi của V theo chu kỳ dao động riêng T_n hay tần số riêng f_n của hệ.

- *Phổ giả gia tốc*

Xét đại lượng A của hệ một bậc tự do với tần số riêng ω_n được liên hệ với chuyển vị cực đại $D \equiv u_0$ của nó bởi biểu thức:

$$A = \omega_n^2 D = \left(\frac{2\pi}{T_n} \right)^2 D \quad (7.18)$$

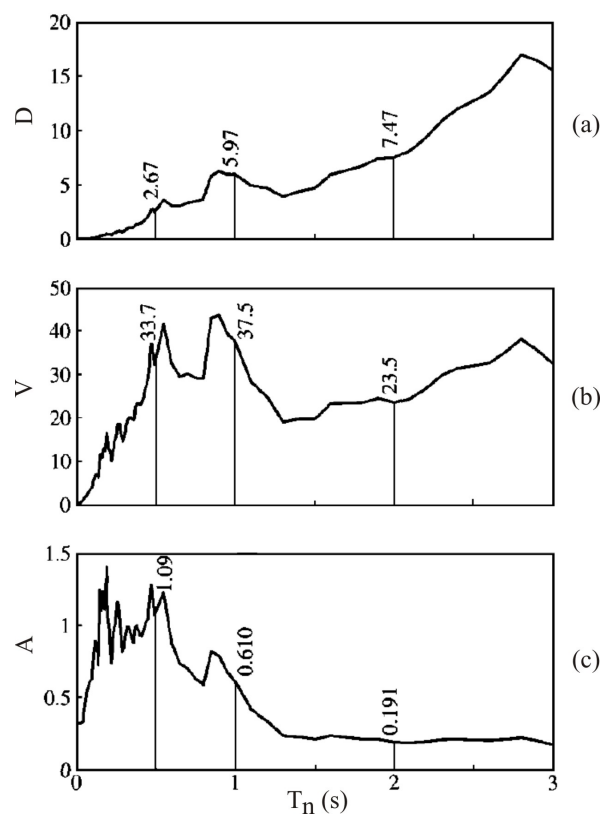
Đại lượng A có thứ nguyên của gia tốc và được liên hệ với giá trị cực đại của lực cắt ở chân của công trình theo biểu thức:

$$V_{b0} = f_{s0} = mA = \frac{A}{g} Q \quad (7.19)$$

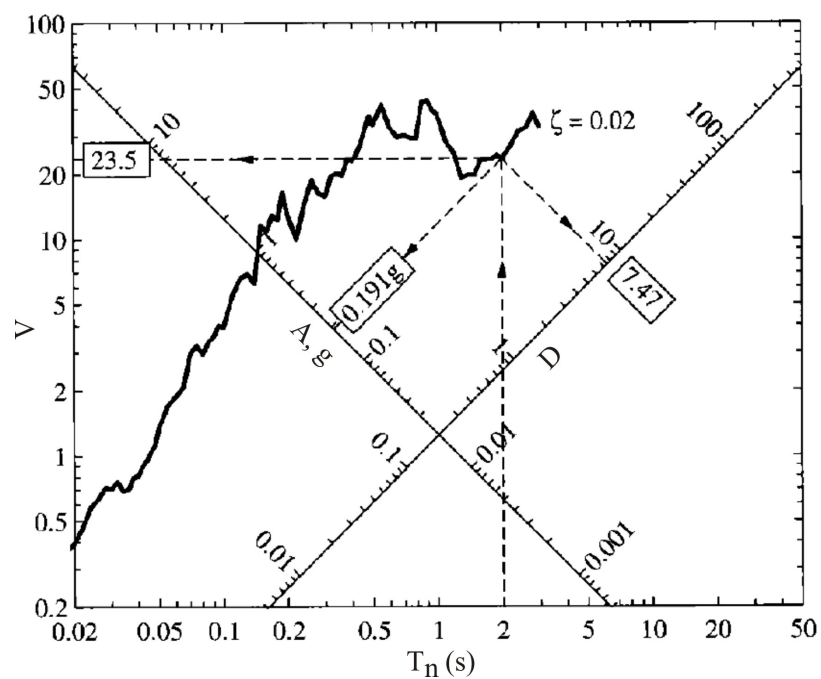
trong đó Q là trọng lượng của công trình và g là gia tốc trọng trường. Dưới dạng này, tỉ số $\frac{A}{g}$ được xem như hệ số lực cắt hay hệ số lực đẩy ngang. Chú ý rằng đại lượng A khác với giá trị cực đại của gia tốc $\ddot{u}_0$ của hệ. Phổ giả gia tốc là đồ thị biểu diễn sự thay đổi của A theo chu kỳ dao động riêng T_n hay tần số riêng f_n của hệ.

Kết hợp các phổ nghiệm D-V-A

Mỗi phổ chuyển vị, phổ giả vận tốc hay phổ giả gia tốc của một chuyển động đất nền (động đất) đều cung cấp cùng một thông tin về ứng xử của kết cấu hay công trình. Biết một trong ba phổ nghiệm này, hai phổ nghiệm còn lại có thể dễ dàng thu được bằng các biến đổi đại số các phương trình (7.17) và (7.18). Tuy nhiên, chúng ta vẫn sử dụng 3 phổ nghiệm vì mỗi phổ cho biết trực tiếp ý nghĩa vật lý của đại lượng đó. Phổ chuyển vị cho biết chuyển vị cực đại của hệ. Phổ giả vận tốc liên hệ trực tiếp với năng lượng cực đại của hệ trong quá trình xảy ra động đất. Phổ giả gia tốc liên hệ trực tiếp với giá trị cực đại của lực tĩnh tương đương và lực cắt ở chân công trình. Một lí do khác là trong thực tế, dạng của các phổ có thể được xấp xỉ để phục vụ cho việc thiết kế. Do đó, biểu diễn kết hợp cả 3 phổ nghiệm là rất cần thiết. Cách biểu diễn này xuất hiện lần đầu tiên bởi A.S. Veletsos và N.M. Newmark vào năm 1960.



Hình 7.6: (a) Phổ chuyển vị, (b) Phổ giả vận tốc, (c) Phổ giả gia tốc



Hình 7.7: Kết hợp phổ nghiệm D-V-A, trường hợp $\xi = 2\%$

Chương 8

Phương pháp phần tử hữu hạn trong bài toán động lực học

Sự phát triển của phương pháp phần tử hữu hạn là giai đoạn quan trọng trong cơ học ứng dụng. Có rất nhiều công trình nghiên cứu dưới dạng tổng quát hay ứng dụng của phương pháp phần tử hữu hạn trong bài toán động lực học. Trong chương này, chúng ta sẽ giới thiệu một số nét chính của phương pháp này.

Phương trình cơ bản của bài toán động lực học:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (8.1)$$

trong đó $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ và $\mathbf{K}$ lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận ảnh hưởng lực cản và ma trận độ cứng của kết cấu.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_e \mathbf{M}^e \\ \mathbf{C} &= \sum_e \mathbf{C}^e \\ \mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{K}^e \\ \mathbf{p} &= \sum_e \mathbf{p}^e\end{aligned}$$

Ma trận khối lượng của phần tử được xác định bằng biểu thức:

$$\mathbf{M}^e = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (8.2)$$

Ma trận ảnh hưởng lực cản phần tử:

$$\mathbf{C}^e = \int_V c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (8.3)$$

Ma trận độ cứng phần tử:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (8.4)$$

Vector tải trọng:

$$\mathbf{p}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV \quad (8.5)$$

với $\mathbf{B}$ là ma trận biến dạng-chuyển vị: $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u}$; $\mathbf{E}$ là ma trận độ cứng của vật liệu: $\sigma = \mathbf{E}\varepsilon$; $\mathbf{N}$ là các hàm dạng.

Trường hợp thanh thẳng, $\mathbf{N}$ có dạng sau:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k \\ N_u \end{bmatrix}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} & N_2 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_3 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_4 &= \frac{x}{L} & N_5 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

Nếu bỏ qua biến dạng dọc trục:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{N}_u] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{d^2}{dx^2} [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

Ma trận độ cứng của phần tử thanh có chiều dài L

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Ma trận khối lượng của phần tử thanh có chiều dài L

$$\mathbf{M}^e = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Code Matlab tính tần số riêng của dầm một đầu ngàm một đầu tự do bằng phương pháp phần tử hữu hạn

```
E=1;    Module đàn hồi của vật liệu
I=1;    Moment quán tính của thanh
m=1;    Khối lượng phân bố của thanh
L=1;    Chiều dài thanh
nele=2;  Số lượng phần tử
L1=L/nele;  Chiều dài phần tử thứ nhất
L2=L/nele;  Chiều dài phần tử thứ hai
m1=BeamElementMass(m,L1);  Ma trận khối lượng phần tử thứ nhất
m2=BeamElementMass(m,L2);  Ma trận khối lượng phần tử thứ hai
k1=BeamElementStiffness(E,I,L1);  Ma trận độ cứng phần tử thứ nhất
k2=BeamElementStiffness(E,I,L2);  Ma trận độ cứng phần tử thứ hai
M0=zeros(6,6);
M0=BeamAssemble(M0,m1,1,2);
M0=BeamAssemble(M0,m2,2,3);
K0=zeros(6,6);
K0=BeamAssemble(K0,k1,1,2);
K0=BeamAssemble(K0,k2,2,3);
M=[M0(3:6,3:6)];  Điều kiện biên
K=[K0(3:6,3:6)];  Điều kiện biên
[V, D] = eigs(K, M, 4, 'SA');
omega=sqrt(D)
```

Lắp ghép ma trận độ cứng tổng thể của dầm:

```
function y = BeamAssemble(K,k,i,j)
K(2 × i - 1, 2 × i - 1) = K(2 × i - 1, 2 × i - 1) + k(1, 1);
K(2 × i - 1, 2 × i) = K(2 × i - 1, 2 × i) + k(1, 2);
```

$$K(2 \times i - 1, 2 \times j - 1) = K(2 \times i - 1, 2 \times j - 1) + k(1, 3);$$

$$K(2 \times i - 1, 2 \times j) = K(2 \times i - 1, 2 \times j) + k(1, 4);$$

$$K(2 \times i, 2 \times i - 1) = K(2 \times i, 2 \times i - 1) + k(2, 1);$$

$$K(2 \times i, 2 \times i) = K(2 \times i, 2 \times i) + k(2, 2);$$

$$K(2 \times i, 2 \times j - 1) = K(2 \times i, 2 \times j - 1) + k(2, 3);$$

$$K(2 \times i, 2 \times j) = K(2 \times i, 2 \times j) + k(2, 4);$$

$$K(2 \times j - 1, 2 \times i - 1) = K(2 \times j - 1, 2 \times i - 1) + k(3, 1);$$

$$K(2 \times j - 1, 2 \times i) = K(2 \times j - 1, 2 \times i) + k(3, 2);$$

$$K(2 \times j - 1, 2 \times j - 1) = K(2 \times j - 1, 2 \times j - 1) + k(3, 3);$$

$$K(2 \times j - 1, 2 \times j) = K(2 \times j - 1, 2 \times j) + k(3, 4);$$

$$K(2 \times j, 2 \times i - 1) = K(2 \times j, 2 \times i - 1) + k(4, 1);$$

$$K(2 \times j, 2 \times i) = K(2 \times j, 2 \times i) + k(4, 2);$$

$$K(2 \times j, 2 \times j - 1) = K(2 \times j, 2 \times j - 1) + k(4, 3);$$

$$K(2 \times j, 2 \times j) = K(2 \times j, 2 \times j) + k(4, 4);$$

$$y = K;$$

Tài liệu tham khảo

- [1] **Bathe, K. J.**
Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- [2] **Chopra, Anil K.**
Dynamics of structures : theory and applications to earthquake engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [3] **Clough, R. W., and Penzien, J.**
Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [4] **Géradin, M., Rixen, D.**
Mechanical vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics, Wiley, 1997.
- [5] **Humar, J. L.**
Dynamics of Structures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [6] **Newmark, N. M.**
A Method of Computation for Structural Dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 85, 1959, pp. 67-94.
- [7] **Newmark, N. M., Rosenblueth, E.**
Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, pp. 308-312.
- [8] **Paultre, P.**
Dynamiques des structures : application aux ouvrages de génie civil, Hermes Science, 2005.
- [9] **Pecker, A.**
Dynamiques des Ouvrages, Cours ENPC.

- [10] **Dookie Kim.**
Dynamics of Structures, 2009.
- [11] **Lê Văn Quý, Lều Thọ Trình.**
Động lực học công trình, Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1979.
- [12] **Phạm Đình Ba, Nguyễn Tài Trung.**
Động lực học công trình, Nhà xuất bản xây dựng, Hà Nội, 2005.

Phụ lục

Bảng các hàm số A_{kx} , B_{kx} , C_{kx} và D_{kx}

kx	A_{kx}	B_{kx}	C_{kx}	D_{kx}
0,00	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,10	1,000000	0,100000	0,005000	0,000170
0,20	1,000070	0,200005	0,020000	0,001335
0,30	1,000340	0,300020	0,045000	0,004500
0,40	1,001065	0,400085	0,080005	0,010665
0,50	1,002605	0,500265	0,125025	0,020835
0,60	1,005405	0,600645	0,180065	0,036005
0,70	1,010005	0,701400	0,245165	0,057180
0,80	1,017070	0,802735	0,320360	0,085375
0,90	1,027350	0,904925	0,405740	0,121595
1,00	1,041690	1,008335	0,501390	0,166865
1,10	1,061060	1,113430	0,607460	0,222220
1,20	1,086510	1,220750	0,724150	0,288710
1,30	1,119205	1,330970	0,851705	0,367410
1,40	1,160435	1,444875	0,990465	0,459425
1,50	1,211575	1,563385	1,140835	0,565895
1,60	1,274130	1,687570	1,303330	0,688000
1,70	1,349740	1,818645	1,476580	0,826985
1,80	1,440135	1,958010	1,667335	0,984160
1,90	1,547220	2,107230	1,870510	1,160930

kx	A_{kx}	B_{kx}	C_{kx}	D_{kx}
2,00	1,673025	2,268080	2,089175	1,358780
2,10	1,819730	2,442535	2,324580	1,579325
2,20	1,989705	2,632805	2,578205	1,824305
2,30	2,185470	2,841335	2,851750	2,095625
2,40	2,409780	3,070815	3,147170	2,395385
2,50	2,665575	3,324335	3,466715	2,725865
2,60	2,956060	3,605115	3,812950	3,089615
2,70	3,284700	3,916820	4,188770	3,489440
2,80	3,655255	4,263455	4,597475	3,928465
2,90	4,071810	4,649405	5,042770	4,410155
3,00	4,538835	5,079495	5,528825	4,938375
3,10	5,061180	5,559015	6,060320	5,517435
3,20	5,644180	6,093755	6,642470	6,152425
3,30	6,293640	6,690065	7,281120	6,847815
3,40	7,015970	7,354910	7,982770	7,610450
3,50	7,818180	8,095925	8,754640	8,446705
3,60	8,708010	8,921470	9,604770	9,363990
3,70	9,693955	9,840725	10,542055	10,370565
3,80	10,785405	10,863775	11,576375	11,475635
3,90	11,992710	12,001665	12,718640	12,689435
4,00	13,327295	13,266560	13,980935	14,023360
4,10	14,801805	14,671790	15,376625	15,490070
4,20	16,430200	16,232045	16,920460	17,103625
4,30	18,227940	17,963470	18,628740	18,879640
4,40	20,212120	19,883850	20,549450	20,835450
4,50	22,401660	22,012740	22,612460	22,990270
4,60	24,817515	24,371720	24,929665	25,365410
4,70	27,482870	26,984560	27,495260	27,984480
4,80	30,423410	29,877465	30,335910	30,873625
4,90	33,667560	33,079360	33,481050	34,061810
5,00	37,246805	36,622445	36,963445	37,581065
5,10	41,195990	40,541050	40,818040	41,466860
5,20	45,553700	44,874955	45,085480	45,758405
5,30	50,362635	49,666820	49,808265	50,499090
5,40	55,670080	54,994095	55,035390	55,736855