LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LÊ QUANG MINH – NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Cuốn giáo trình Sức bền vật liệu (S.B.V.L) xuất bản tại NXB Giáo dục từ năm 1984 đến 2006 được tái bản chín lần. Điều đó chứng tỏ nội dung của sách đã đáp ứng được chương trình giảng dạy của các trường Đại học kỹ thuật và đã có tác dụng giúp đỡ sinh viên trong việc học tập và nghiên cứu môn học.

Do chương trình, nội dung và phương pháp giảng dạy đang dần được chuẩn hoá nên lần xuất bản này chúng tôi đã biên soạn lại như sau :

Ba tập Sức bền vật liệu trước đây nay dồn thành hai tập gồm 25 chương :

Tập một *gồm 13 chương (Từ chương 1 đến chương 13)* : Mở đầu, Trạng thái ứng suất ; Trạng thái biến dạng ; Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng ; Đặc trưng hình học của một hình phẳng ; Thanh, nội lực trong thanh ; Bài toán uốn cộng kéo ; Bài toán uốn ngang phẳng; Đường đàn hồi ; Bài toán xoắn thuần tuý ; Tính các mối nối ghép ; Bài toán chịu lực phức tạp ; Dầm trên nền đàn hồi.

Tập hai *gồm 12 chương (Từ chương 14 đến chương 25)* : Dây mềm ; Tính chuyển vị theo phương pháp năng lượng ; Giải bài toán siêu tĩnh bằng phương pháp tĩnh lực ; Ma trận chuyển ; Phương pháp phần tử hữu hạn ; Tải trọng động ; Tính độ bền khi ứng suất biến đổi có chu kì ; Ổn định ; Thanh thành mỏng ; Ống dày ; Vỏ ; Ứng suất tiếp xúc.

Chắc chắn trong quá trình viết không tránh khỏi những thiếu sót, mong độc giả lượng thứ và rất mong sự góp ý của độc giả để lần tái bản tới sách có thể phục vụ độc giả tốt hơn. Các góp ý xin gửi về Công ty Cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

Các tác giả

LÊ QUANG MINH

NGUYỄN VĂN VƯỢNG

Phần I

CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

Chương 1

MỞ ĐẦU

§1–1. NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

Nhiệm vụ của môn học là cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phương pháp tính toán độ bền, độ cứng và ổn định của thanh dưới tác dụng của ngoại lực. Môn học cũng đề cập đến một số kiến thức để tính toán cho hệ thanh, cho các tấm, các vỏ, thanh thành mỏng..., đề cập đến các bài toán về ứng suất tiếp xúc về các loại ống v.v... nghĩa là bao gồm một số kiến thức cơ bản của các môn "Sức bền vật liệu", "Cơ học kết cấu" và "Lí thuyết đàn hồi ứng dụng" như quan niệm sẵn có từ trước đến nay.

Như chúng ta đã biết, ngày nay với sự phát triển nhanh chóng của các môn Sức bền vật liệu, Lí thuyết đàn hồi và Cơ học kết cấu, ranh giới giữa chúng đã dần dần bị xóa bỏ [15]. Do yêu cầu cần phải cung cấp một số lượng kiến thức tối thiểu cần thiết về tính toán độ bền, độ cứng và sự ổn định của những chi tiết có những loại hình khác nhau cho sinh viên cơ khí, buộc chúng ta phải đề cập đến một số kiến thức cơ bản của các môn học trên, hay nói một cách khác, chúng ta đã xóa bỏ ranh giới giữa chúng.

Môn học còn có nhiệm vụ cung cấp cho sinh viên ngành cơ khí những kiến thức cơ bản của môn "Cơ học vật rắn biến dạng" vì với các kiến thức đó người kĩ sư chế tạo máy dễ dàng đi sâu vào lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến, dễ dàng nghiên cứu lí thuyết gia công áp lực, nghiên cứu thủy khí động lực v.v...

Khi nói đảm bảo yêu cầu về độ bền có nghĩ là phải thiết kế các chi tiết máy, hay kết cấu công trình có kích thước vừa đủ để có thể chịu tác dụng của ngoại lực mà không bị phá hỏng.

Đảm bảo yêu cầu về độ cứng có nghĩa là kích thước của chi tiết hay kết cấu đủ lớn để dưới tác dụng của ngoại lực chi tiết hay kết cấu có biến dạng hay chuyển vị nhỏ theo một giới hạn nhất định để đảm bảo cho chi tiết hay công trình làm việc bình thường dưới tác dụng của ngoại lực.

Yêu cầu đảm bảo điều kiện ổn định là các bộ phận công trình hay chi tiết máy phải có kích thước sao cho dưới tác dụng của ngoại lực chúng không mất hình dạng cân bằng ban đầu.

Đối tượng của môn học là vật rắn biến dạng, song để đơn giản việc tính toán chúng ta thường đưa ra các giả thuyết và các mô hình của vật liệu. Giả thuyết chung nhất là *giả thuyết về tính liên tục và đồng nhất của vật liệu.*

Tính liên tục có nghĩa là ta xem rằng ở mọi nơi trong vật thể đều có vật liệu. Rõ ràng điều đó là mâu thuẫn với thực tế vì vật liệu thực luôn luôn có cấu trúc nhất định. Giữa các tinh thể là một khoảng không gian "rộng lớn". Cũng đã có nhiều công trình chú ý đến khoảng không gian này, thừa nhận giả thuyết về cấu trúc các hạt rời nhau, giữa chúng có lực hút và lực đẩy trong nhiệt độ thông thường. Lí thuyết này gọi là *lí thuyết đàn hồi rời rạc*. Song lí thuyết đó đã gặp rất nhiều khó khăn về phương diện toán học và ngay những lí thuyết đó đã cho thấy giả thuyết về vật liệu liên tục là có thể chấp nhận được.

Tính đồng nhất có nghĩa là tất cả mọi nơi trong vật thể vật liệu có tính chất lí hóa như nhau.

Ta cũng thừa nhận rằng khi không có ngoại lực tác dụng lên vật thể thì trong lòng vật thể không có ứng suất. Giả thuyết này được gọi là giả thuyết về trạng thái không có ứng suất ban đầu. Ứng suất mà ta sẽ xác định là phần ứng suất tăng lên tại điểm đang xét do ngoại lực sinh ra chứ không kể đến ứng suất có sẵn ban đầu tại điểm đó.

§1–2. NHỮNG NGÀNH KHÁC NHAU CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

Ngành phát triển đầu tiên của Cơ học vật rắn biến dạng là ngành Lí thuyết đàn hồi. Đối tượng nghiên cứu của lí thuyết đàn hồi là vật thể đàn hồi lí tưởng ; mô hình này do Húc (Hooke) đề ra nên được gọi là mô hình vật rắn của Húc. Tính đàn hồi lí tưởng là khả năng của vật thể lấy lại toàn vẹn hình dạng ban đầu khi nguyên nhân gây ra biến dạng đã bị loại bỏ. Công của ngoại lực được tích lũy dưới dạng thế năng đàn hồi trong vật thể. Hình dạng của vật thể chỉ phụ thuộc vào tải trọng đang tác động, không phụ thuộc vào quá trình đặt tải trọng quá khứ.

Lí thuyết đàn hồi được xem là một bộ môn của vật lí toán. Nhiệm vụ của môn học là tìm cách xác định ứng suất và biến dạng trong vật thể đàn hồi dưới tác dụng của ngoại lực ở trạng thái cân bằng tĩnh cũng như ở trạng thái cân bằng động như dao động. Phương pháp giải của môn học là đi từ điều kiện chuyển vị hay ngoại lực ở bề mặt để suy ra trạng thái ứng suất ở mọi nơi trong vật thể. Với phương pháp đó lí thuyết đàn hồi có thể đề cập đến các bài toán với vật thể có hình dạng đa dạng. Kết quả của lí thuyết đàn hồi đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực : trong xây dựng, trong ngành chế tạo máy, trong địa chấn học và trong vật lí.

Những bài toán của thủy động học, khí động học cũng dẫn đến những phương trình gần giống hoặc giống hẳn các phương trình của lí thuyết đàn hồi và lí thuyết dẻo.

Ở đây ta phân biệt hai ngành của lí thuyết đàn hồi : lí thuyết đàn hồi toán học và lí thuyết đàn hồi ứng dụng.

Lí thuyết đàn hồi toán học cố gắng tìm thấy các nghiệm hoàn toàn bằng phương pháp toán học. Trên thực tế với phương pháp này một số bài toán không giải nổi vì rất nhiều khó khăn về mặt toán học thuần túy. Để đáp ứng với nhu cầu thực tế, khi giải các bài toán phức

tạp, người ta thường đưa vào một số giả thuyết, ví dụ trong bài toán tấm và vỏ phải đưa vào giả thuyết về đoạn thẳng vuông góc với mặt trung bình của tấm sau khi biến dạng vẫn vuông góc với mặt đó chẳng hạn. Từ đó phát sinh một ngành được gọi là lí thuyết đàn hồi ứng dụng.

Sức bền vật liệu có thể xem là lí thuyết đàn hồi ứng dụng ; ở đây vật thể được xét chủ yếu có dạng thanh. Với hình dáng đặc biệt đó sức bền vật liệu đã đưa vào giả thuyết về tiết diện phẳng để giải quyết các bài toán. Căn cứ vào những nhận xét trực quan trong quá trình làm thí nghiệm với các thanh chịu uốn chịu kéo hoặc xoắn ; sức bền vật liệu còn đưa ra một giả thuyết thứ hai là giả thuyết về các thớ dọc không ép lên nhau và tách xa nhau trong quá trình thanh biến dạng. Với các giả thuyết đó Sức bền vật liệu dễ dàng tìm thấy nghiệm của bài toán mà không cần gì đến những phương trình cơ bản của đàn hồi. Nhưng đó cũng là mặt yếu của Sức bền vật liệu vì cách suy luận đó không đủ sức để giải các bài toán tìm ứng suất và biến dạng của các vật thể có dạng tấm, vỏ hay khối...

Một ngành học gần với lí thuyết đàn hồi và sức bền vật liệu là ngành cơ học kết cấu hay là lí thuyết công trình hiểu theo nghĩa rộng là bao gồm nhiều môn học : lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến, sức bền vật liệu... Cơ học kết cấu theo nghĩa hẹp là môn học nhằm tính ứng suất và biến dạng trong hệ thanh dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cũng như động.

Quyển "Sức bền vật liệu" này viết theo quan điểm ý nghĩa rộng. Chúng tôi đã xóa bỏ ranh giới giữa lí thuyết đàn hồi, sức bền vật liệu và cơ học kết cấu. Sự xóa bỏ ranh giới đó không đứng trên ý nghĩa đơn thuần về các hình dạng vật thể được xét mà có một sự thay đổi sâu sắc về phương pháp giải quyết bài toán : Khai thác triệt để các phương trình cơ bản của lí thuyết đàn hồi và sử dụng ít nhất các giả thuyết. Bỏ đi giả thuyết về các thớ dọc mà các tác giả cho rằng không hợp lí. Tuy nhiên sách giữ lại nguyên vẹn cách giải của sức bền vật liệu trong một số bài toán như uốn ngang phẳng, uốn thanh cong... Ý nghĩa của việc làm đó là mong muốn trong một số giờ hạn chế của nhà trường, môn học có thể cung cấp cho sinh viên ngành cơ khí khả năng tự đọc sâu về lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo và giải quyết được những bài toán đa dạng của ngành cơ khí.

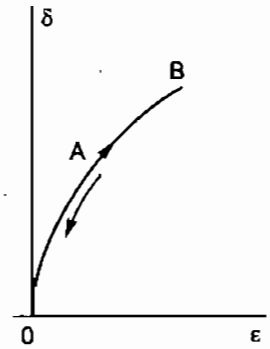
Sự phát triển của lí thuyết đàn hồi đã dẫn đến lí thuyết đàn hồi phi tuyến.

Trong lí thuyết đàn hồi tuyến tính hay còn gọi là lí thuyết đàn hồi cổ điển, quan hệ giữa các thành phần biến dạng và ứng suất biến dạng là quan hệ bậc nhất. Quan hệ đó được biểu diễn bằng định luật Húc tổng quát. Điều đó chỉ đúng trong một chừng mực nào đó khi ứng suất chưa vượt quá một giới hạn nhất định. Thí nghiệm đã chứng tỏ rằng khi ứng suất vượt quá giới hạn đàn hồi thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không còn là bậc nhất nữa. Quan hệ đó là một đường cong. Trong thực tế có nhiều loại vật liệu không tuân theo định luật Húc. Khi đó tương quan giữa ứng suất và biến dạng được biểu diễn dưới dạng một hàm số nào đó :

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

Lí thuyết đàn hồi viết trên tương quan đó được gọi là lí thuyết đàn hồi phi tuyến vật lí. Ở đây quá trình đặt tải và cất tải là thuận nghịch nghĩa là khi đặt tải tương quan giữa σ

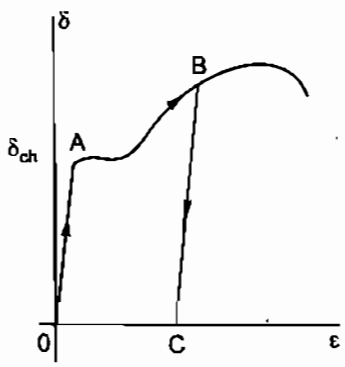
và ε là đường cong OAB (h.1–1) thì khi cất tải tương quan đó cũng giảm theo BAO. Biến dạng sẽ mất đi khi tải đã giảm hoàn toàn.



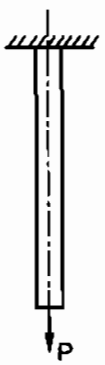
Hình 1–1

Với lí thuyết đàn hồi dù rằng tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tương quan tuyến tính, nhưng nếu biến dạng không thể xem là bé được, các phương trình hình học là phi tuyến thì ta gọi đó là lí thuyết đàn hồi phi tuyến hình học.

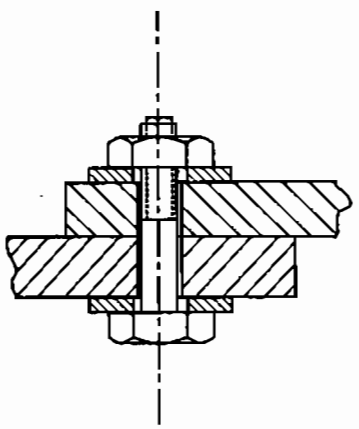
Trong các thí nghiệm đối với sắt cũng như đối với hợp kim của chúng cho thấy khi ứng suất vượt quá giới hạn chảy thì tương quan giữa biến dạng và ứng suất là một đường cong (h.1–2), quá trình đó là một quá trình không thuận nghịch. Giả dụ khi tăng tải lên đến B rồi giảm tải đi thì quá trình giảm tải không theo đường cong OAB nữa mà theo đường BC nghĩa là sau khi giảm tải hoàn toàn vẫn còn một lượng biến dạng còn dư thể hiện bằng đoạn thẳng OC. Biến dạng đó được gọi là biến dạng dẻo. Lí thuyết nghiên cứu quy luật hình thành biến dạng dẻo và trạng thái ứng suất với quá trình biến dạng đó được gọi là Lí thuyết dẻo. Với lí thuyết dẻo ta cũng có hai ngành : ngành lí thuyết dẻo toán học mang tính chất chặt chẽ của toán học và lí thuyết dẻo ứng dụng mà trong đó các phương pháp tính được đơn giản hóa nhờ dựa vào các giả thuyết về mặt hình học hay về mặt vật lí.



Hình 1–2



Hình 1–3


Hình 1–4

Chúng ta hãy để ý đến một tính chất sau đây của vật liệu. Ví dụ xét một thanh thép treo chịu tác dụng của lực kéo (h.1–3), khi đặt tải, lực P gây nên độ giãn Δl nào đó. Nếu ta để lực P tác dụng lâu dài thì độ giãn Δl vẫn tiếp tục tăng lên mặc dù rất chậm. Hiện tượng đó càng rõ khi thanh phải làm việc ở nhiệt độ cao mà ta gọi là hiện tượng sau tác dụng. Xét một ví dụ thứ hai : Xiết chặt êcu để ghép hai tấm phẳng (h.1–4). Nếu lực xiết đạt đến một giá trị nào đó và để tấm ghép làm việc lâu dài thì đến một lúc nào đó ta nhận thấy êcu bị lỏng ra, nghĩa là ứng suất trong bulông sẽ bị giảm đi. Hiện tượng đó được gọi là hiện tượng nới.

Hiện tượng sau tác dụng và hiện tượng nới thể hiện cùng một bản chất của vật liệu đó là hiện tượng xuất hiện biến dạng dẻo khi vật liệu làm việc dưới tác dụng lâu dài của

tải trọng. Hiện tượng đó được gọi là từ biến. Từ đó sinh ra một ngành cơ học là lí thuyết từ biến.

Hiện tượng từ biến xảy ra không những trong giai đoạn vật liệu đã bước vào giai đoạn chảy dẻo mà còn xảy ra ngay trong giai đoạn đàn hồi vì vậy lí thuyết từ biến đã sử dụng các phương trình của lí thuyết đàn hồi và lí thuyết dẻo.

Gần đây đã phát sinh một ngành mới là lí thuyết lưu biến. Lí thuyết này nghiên cứu những định luật chung về sự phát sinh và phát triển của biến dạng theo thời gian của vật liệu do những nguyên nhân khác nhau trong những điều kiện nhiệt độ và hóa lí khác nhau. Lí thuyết lưu biến cho phép ta xác định được biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong vật thể ở một thời điểm xác định khi biết được các thông số của yếu tố tác động bên ngoài và quá trình biến đổi của các thông số đó trong quá khứ.

§1–3. LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN CỦA MÔN HỌC

Trong thế kỉ thứ 18 chúng ta đã có những công trình quan trọng được xem là những sự khởi đầu của môn học.

Năm 1729 Buyphighe đưa ra dạng quan hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng. Sau đó năm 1768 Húc đã đưa ra quy luật cơ bản của vật thể đàn hồi với dạng đơn giản tuyến tính. Gần như đồng thời với Húc ta có các công trình :

– Lí thuyết toán học về uốn của thanh đàn hồi của Ơle và Becnuli.

– Tính ổn định của Ơle.

– Dao động ngang của thanh đàn hồi (Ơle và Becnuli)

– Nghiên cứu về lí thuyết lực đàn hồi của không khí (Lômônôxôp)

Cuối thế kỉ 18 và vào đầu thế kỉ 19 đã có ba nhà toán học nổi tiếng là Oxstrôgratxki, Côsi và Poatxông đã nghiên cứu về bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi. Nhà bác học người Pháp Naviê xuất phát từ quan điểm về lực tương tác giữa các phần tử của Niutơn đã đề xuất ra lí thuyết đàn hồi rời rạc. Năm 1822 Côsi đã đưa ra khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm và viết các phương trình cân bằng cùng với các biểu thức biểu diễn sự tương quan giữa ứng suất và biến dạng cho vật thể đẳng hướng. Ta có thể kết luận rằng Naviê, Côsi, Ostrôgratxki, Poátxông là những người đã đặt nền móng cho lí thuyết đàn hồi toán học.

Vào giữa và cuối thế kỉ 19, nhu cầu về phát triển công nghiệp lớn đã thôi thúc các nhà bác học tìm cách tính toán nhanh chóng những bài toán trong thực tế, do đó đã phát sinh ra ngành lí thuyết đàn hồi ứng dụng và lí thuyết về sức bền vật liệu. Những người có công trong lĩnh vực này là Ơle, Becnuli, Giurapxki, Iaxinxki, Kiêcpisep Lamê, Culông, Clapâyrôn, Gađôlin, Xanhvơnăng và các nhà bác học khác. Vào cuối thế kỉ 19 và sang đầu thế kỉ 20 ngành cơ học vật rắn biến dạng đã phát triển vô cùng rộng lớn : Trong lĩnh vực bài toán phẳng Côlôxôp và Muskhêlisvili đã đề ra phương pháp tìm nghiệm bằng lí thuyết hàm phức, lí thuyết về tấm của Búpnốp và Galiockin, tính mái che không có dầm của Lâybenzôn, lí thuyết uốn thanh cong của Gôlôvin, kết cấu tàu thủy của Cơrulốp và

Papcôvích, lí thuyết hệ thanh mỏng của Vlaxốp. Các tác phẩm về sức bền vật liệu, về tấm vỏ và lí thuyết đàn hồi của Timôsencô v.v...

Gần đây nhiều công trình đã phát triển sang lí thuyết đàn hồi dị hướng và nhất là từ khi có những máy tính lớn đã xuất hiện nhiều phương pháp tính như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp siêu phần tử, phương pháp phần tử biên v.v...

Thành tựu đáng kể trong lĩnh vực mới của lí thuyết đàn hồi là lí thuyết đàn hồi phi tuyến. Trong lĩnh vực chính xác hóa ta có lí thuyết đàn hồi mômen.

Vào đầu nửa sau của thế kỉ XX đã phát triển mạnh các lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến và lưu biến...

Số tác phẩm, số công trình cũng như số các nhà bác học trên toàn thế giới đã lên đến con số khá lớn đến mức ta không thể thống kê vào đây được.

§1–4. NGUYÊN LÍ XANH VƠNĂNG

Trong tất cả những phần tính toán sau đây chúng ta thường sử dụng một nguyên lí quan trọng đó là nguyên lí Xanh Vơnăng.

Nguyên lí được phát biểu như sau : Nếu trên một phần nhỏ nào đó của vật thể có tác động của một hệ lực cân bằng thì ứng suất phát sinh sẽ tắt dần khá nhanh ở những điểm xa miền đặt lực. Ví dụ khi dùng kìm để cắt một sợi dây thép, ta thấy rằng trên sợi dây tại chỗ cắt tác động một hệ lực cân bằng. Dù cho lực cắt khá lớn thì tại những điểm xa chỗ cắt của sợi dây hầu như ứng suất bằng không.

Với nguyên lí Xanh Vơnăng ta có thể thay thế một hệ lực cân bằng bằng một hệ lực tương đương khác để tính ứng suất trong vật thể, ví dụ như chuyển lực từ mặt phía trên của dầm xuống mặt dưới, hoặc thay lực tập trung đặt tại đầu mút của dầm bằng một nhóm lực phân bố có giá trị tương đương và ngược lại bằng cách thêm các hệ phụ tự cân bằng. Sự thay thế đó chỉ làm thay đổi sự phân bố của ứng suất ở vùng lân cận, còn tại những điểm cách xa vị trí đặt lực sự phân bố của ứng suất là như nhau. Ta có thể phát biểu nguyên lí như sau : Tại những điểm của vật thể cách xa điểm đặt lực thì ứng suất phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực.

Chương 2

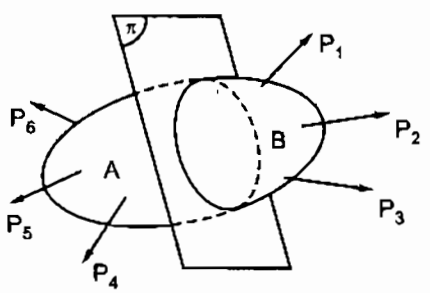
TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

§2–1. ỨNG SUẤT

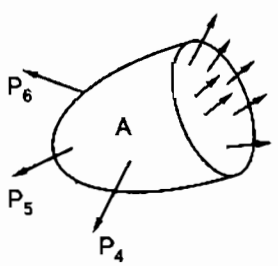
Xét vật thể đàn hồi ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực (h.2–1).

Tưởng tượng cắt qua vật thể một mặt cắt π bất kì. Mặt cắt chia vật thể thành hai phần A và B.

Tưởng tượng vứt bỏ phần B và xét điều kiện cân bằng của phần A (h.2–2). Sở dĩ A giữ được trạng thái cân bằng là nhờ phần B đã tác động lên phần A một hệ lực phân bố trên khắp mặt cắt. Ngược lại nếu xét sự cân bằng của phần B ; A sẽ tác động lên B một hệ lực tương tự nhưng có chiều ngược lại. Hệ lực đó được gọi là hệ nội lực hay ứng lực trong lòng của vật thể.



Hình 2–1



Hình 2–2

Hệ lực đó sinh ra để chống lại biến dạng do ngoại lực gây nên.

Sự phân bố của hệ lực trên mặt cắt là chưa xác định, nhưng dễ dàng tính được hợp lực của chúng vì chúng phải cân bằng với ngoại lực tác động lên mỗi phần.

Chúng ta sẽ nói kĩ hơn về các hợp lực đó khi đề cập đến bài toán thanh. Ở đây chúng ta hãy xét ứng suất tại một điểm M bất kì trên mặt cắt π (h.2–3). Lấy một phân tố diện tích dF chung quanh M. Gọi ứng lực trên dF là $d\vec{P}_i$. Phương của $d\vec{P}_i$ nói chung không vuông góc với π. Ta gọi ứng suất tại M là tỉ số :

$$\vec{p} = \frac{d\vec{P}_i}{dF} \ (N/cm^2) \qquad (2–1)$$

khi dF tiến đến không. Vectơ $\vec{p}$ có phương chiều của $d\vec{P}_i$.

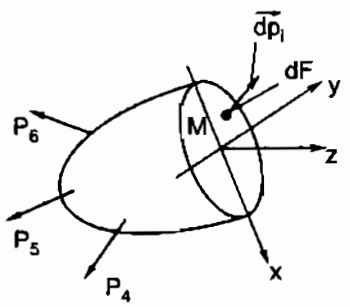
Nếu trên mặt cắt π ta chọn một hệ trục tọa độ thuận Oxyz với Oz vuông góc với π và gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục thì $\vec{p}$ được biểu diễn qua các thành phần hình chiếu của nó như sau :

$$\vec{p} = \sigma_z \vec{k} + \tau_{zy} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{i} \qquad (2\text{–}2)$$

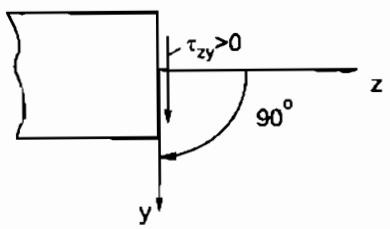
σ_z được gọi là ứng suất pháp ;

τ_{zy} và τ_{zx} được gọi là ứng suất tiếp : Chỉ số z để chỉ τ nằm trên mặt cắt vuông góc với trục z và chỉ số thứ hai để chỉ phương song song của τ.

Ta quy định dấu của ứng suất pháp và ứng suất tiếp như sau :



Hình 2–3



Hình 2–4

σ_z được xem là dương khi vectơ biểu diễn nó có chiều trùng với chiều của pháp tuyến ngoài của mặt cắt ;

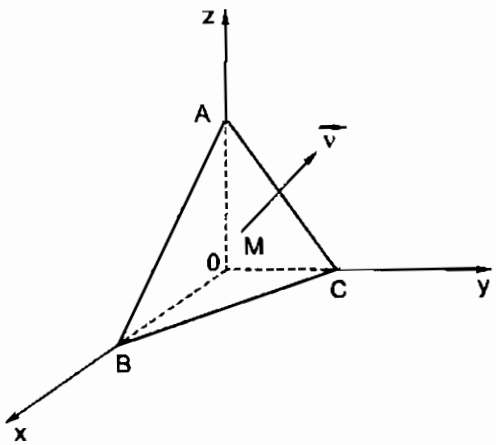
τ_{zy} được xem là dương khi đứng về phía dương của trục x nhìn vào mặt yOz thấy chiều của vectơ biểu diễn τ_{zy} là chiều của z quay theo chiều kim đồng hồ một góc 90° trong mặt yOz (h.2–4).

§2–2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Nếu cho qua M những mặt cắt π khác nhau thì tương ứng với mỗi vị trí của π ta được một vectơ ứng suất $\vec{p}$. *Tập hợp tất cả mọi vectơ ứng suất $\vec{p}$ của tất cả các mặt cắt qua M được gọi là trạng thái ứng suất tại M.*

Tập hợp đó không phải là một tập hợp những vectơ độc lập. Quả vậy, tưởng tượng tách ra khỏi M một phân tố vô cùng bé bằng những mặt cắt π. Phân tố bé đến mức thể tích của nó tiến tới không. Khi đó có thể xem như các mặt cắt π đi qua M. Vì phân tố phải ở trong trạng thái cân bằng nên ứng lực do ứng suất $\vec{p}$ trên một mặt nào đó gây nên phải cân bằng với các ứng lực trên các mặt cắt còn lại. Xét trường hợp phân tố có hình dáng đơn giản nhất là một hình tứ diện.

Giả sử bốn mặt cắt π qua M có ba mặt song song với các mặt tọa độ và mặt thứ tư là một mặt nghiêng bất kỳ. Ứng lực trên mặt nghiêng phải cân bằng với ứng lực tác dụng trên



Hình 2–5

ba mặt song song với các mặt tọa độ. Ta được một tứ diện vuông MABC như trên hình 2–5. Ở đây các cạnh của tứ diện là song song với các trục tọa độ nên để thuận lợi ta dời góc tọa độ về M. Vậy Oxyz sẽ trùng với MBCA. Gọi $\vec{v}$ là vectơ đơn vị trên pháp tuyến của mặt cắt nghiêng.

Các cosin chỉ phương của $\vec{v}$ được kí hiệu như sau :

$$\left.\begin{aligned}\cos(v, x) &= l\\ \cos(v, y) &= m\\ \cos(v, z) &= n\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}3)$$

Gọi $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ và $\vec{p}_v$ là ứng suất trên các mặt cắt yOz, xOz, xOy và ABC. Ta có thể biểu diễn chúng qua các thành phần hình chiếu của chúng trên các trục tọa độ như sau :

$$\left.\begin{aligned}\vec{p}_x &= \sigma_x\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}\\ \vec{p}_y &= \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k}\\ \vec{p}_z &= \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}4)$$

$$\vec{p}_v = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad (2\text{–}5)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

và X, Y, Z là các thành phần của ứng suất p_v, song song với các trục tọa độ. Nếu gọi dS là diện tích của tam giác ABC và lần lượt dS', dS'', dS''' là diện tích của các mặt AOC, AOB, BOC thì :

$$dS' = dSl \; ; \; dS'' = dSm \; ; \; dS''' = dSn$$

Từ điều kiện cân bằng của phân tố ta có :

$$\vec{p}_x dSl + \vec{p}_y dSm + \vec{p}_z dSn + \vec{p}_v dS = 0$$

Hay :

$$\vec{p}_x.l + \vec{p}_y.m + \vec{p}_z.n + \vec{p}_v = 0 \qquad (2\text{–}6)$$

Chiếu xuống các trục ta có các hệ thức :

$$\left.\begin{aligned}X &= \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n\\ Y &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n\\ Z &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}7)$$

Hay viết dưới dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Chú ý : Phép nhân nối tích hai ma trận ở phía phải cho ta một ma trận cột ở vế trái với ba thành phần.

Ngoài điều kiện vectơ chính bằng không ta phải có mômen chính bằng không. Gọi O' là trọng tâm của ABC. Xác định hệ trục tọa độ O'x'y'z' song song với hệ trục cũ. Các thành phần mômen chính tại O' sẽ là tổng mômen của các lực đối với các trục O'x', O'y', O'z' (h.2–6).

Ví dụ tính tổng mômen của các lực đối với trục O'x'. Ta nhận thấy tất cả các mômen do các lực khác gây nên là bằng không, trừ mômen do lực của hai thành phần τ_{yz} và τ_{zy}. Ta giả sử chiều các vectơ ứng suất τ_{yz} và τ_{zy} như trên hình 2–6 và gọi h, h' là các chiều cao của tứ diện tương ứng với các mặt OBC và OAB. Ta phải có :

$$dS'''\frac{h}{3}\tau_{zy} - dS''\frac{h'}{3}\tau_{yz} = 0$$

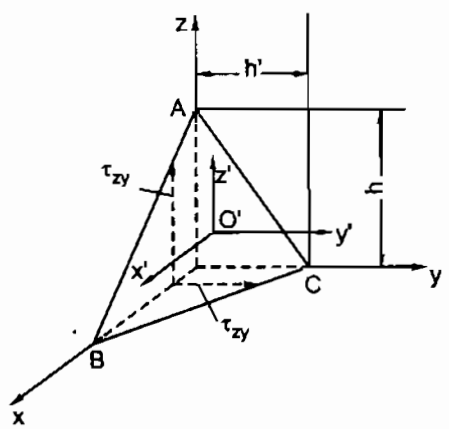
Vì

$$dS'''\frac{h}{3} = dS''\frac{h'}{3} = dV$$

dV – thể tích của tứ diện.

nên :

$$|\tau_{zy}| = |\tau_{yz}| \qquad (2\text{–}8)$$



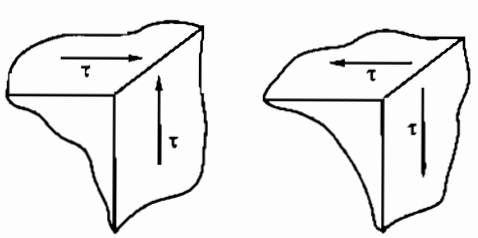
Hình 2–6

Viết các phương trình mômen đối với các trục O'y' và O'z' ta được các biểu thức tương tự :

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \; ; \; |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$$

Từ đó ta có thể phát biểu như sau :

Các thành phần ứng suất tiếp trên các mặt cắt vuông góc với nhau thì có chiều cùng hướng vào cạnh chung hoặc cùng hướng ra khỏi cạnh chung và về trị số là bằng nhau (h.2–7).



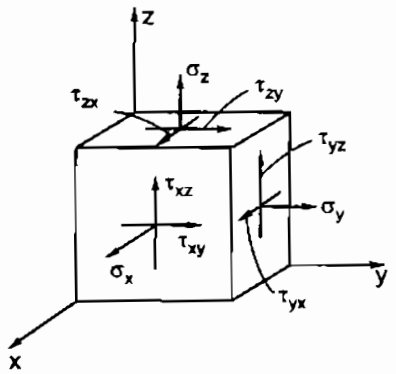
Hình 2–7

Mệnh đề đó được gọi là định luật đối ứng của ứng suất tiếp.

Như vậy trong chín thành phần ứng suất trên các mặt của tam diện vuông chỉ có sáu thành phần độc lập. Chúng là các thành phần của một đại lượng vật lí không biến đổi khi hệ trục tọa độ thay đổi và được gọi là tenxơ ứng suất, đó là một tenxơ hạng hai đối xứng :

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix} \qquad (2\text{–}9)$$

Chúng đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại M vì các thành phần đó đủ xác định được mọi ứng suất trên các mặt cắt khác đi qua M. Cũng từ đó để biểu diễn trạng thái ứng suất tại M, ta tách ra khỏi M một phân tố hình hộp vô cùng bé mà thể tích có thể xem là không và kí hiệu các thành phần ứng suất trên các mặt cắt như trên hình 2–8.



Hình 2–8

Ở đây, chúng ta chú ý rằng trị số ứng suất trên hai mặt cắt song song là khác nhau, nếu thể tích của phân tố tiến đến không thì có thể xem ứng suất trên hai mặt song song đó là bằng nhau.

Để thuận lợi cho cách viết thu gọn hay khi phải tính toán với nhiều ẩn số người ta còn sử dụng các ký hiệu sau đây : Hệ trục Oxyz được kí hiệu là $Ox_1x_2x_3$. Các ứng suất pháp trên các mặt cắt vuông góc với Ox_1, Ox_2, Ox_3 được ký hiệu là σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}. Các ứng suất tiếp được kí hiệu với hai chỉ số khác nhau. σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}, chỉ số thứ nhất để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt và chỉ số thứ hai để chỉ phương song song của ứng suất tiếp đó.

Các thành phần của tenxơ ứng suất T_σ được viết lại như sau :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (2\text{–}10)$$

Hay một cách gọn hơn :

$$T_\sigma = [\sigma_{ij}] \text{ với } i, j = 1, 2, 3 \qquad (2\text{–}11)$$

Chỉ số thứ nhất để chỉ cột và chỉ số thứ 2 để chỉ hàng.

Định luật đối ứng của ứng suất tiếp được diễn đạt với biểu thức :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{với } i \neq j \text{ và } i, j \text{ lần lượt lấy các trị số } 1, 2, 3 \qquad (2\text{–}12)$$

Các côsin chỉ phương của một trục v nào đó đối với hệ trục $Ox_1x_2x_3$ được ký hiệu là $n_{v_1}, n_{v_2}, n_{v_3}$. Chỉ số thứ nhất để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt và chỉ số thứ hai để chỉ phương của trục tọa độ.

Bài toán quay trục

Giả sử tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực ta đã biết các thành phần của tenxơ ứng suất đối với hệ trục ban đầu $Ox_1x_2x_3$. Vấn đề đặt ra là xoay hệ trục đó đến một vị trí mới $Ox'_1x'_2x'_3$ ta phải xác định được các thành phần của tenxơ ứng suất tại điểm đó đối với hệ trục mới $Ox'_1x'_2x'_3$.

Bài giải

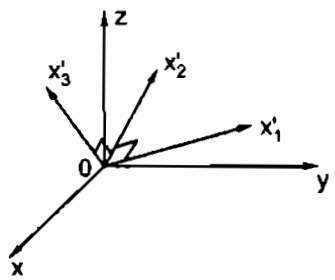
Các thành phần tenxơ ứng suất đối với hệ trục $Ox'_1x'_2x'_3$ là các ứng suất trên các mặt nghiêng lần lượt có pháp tuyến là Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3.

Gọi các côsin chỉ phương của các trục đó đối với $Ox_1x_2x_3$ là như sau :

đối với Ox'_1 là n_{11}, n_{12}, n_{13}

đối với Ox'_2 là n_{21}, n_{22}, n_{23}

đối với Ox'_3 là n_{31}, n_{32}, n_{33}



Hình 2 – 9

Ba thành phần song song với hệ trục $Ox_1x_2x_3$ của ứng suất trên mặt cắt nghiêng vuông góc với Ox'_1 sẽ là :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \tag{2–13}$$

Ứng suất pháp trên mặt cắt chẳng qua là tổng hình chiếu của $X_1X_2X_3$ lên Ox'_1. Vậy ta có :

$$\sigma'_{11} = [X_1\ X_2\ X_3] \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \tag{2–14}$$

Đem (2–13) thay vào (2–14) với chú ý ma trận cột (2–13) phải đổi thành ma trận hàng trong phép nhân nội tích (2–14). Ta có :

$$\sigma'_{11} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \tag{2–15}$$

Ứng suất tiếp trên mặt cắt đó có phương song song với Ox'_2 là tổng hình chiếu X_1X_2 và X_3 lên phương Ox'_2. Vậy

$$\sigma_{12} = [X_1\ X_2\ X_3] \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix}$$

Thay (2–13) vào ta có :

$$\sigma'_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix} \tag{2–16}$$

Một cách tổng quát các công thức (2–15) và (2–16) có thể viết lại dưới dạng rút gọn như sau :

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \{[\sigma_{ij}][n_{\alpha j}]\}^T[n_{\beta j}] \quad \text{với} \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (2\text{–}17)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Với chú ý phép nhân nội tích thứ nhất trong ngoặc cho ta ma trận cột của ba thành phần vectơ ứng suất. Ta phải đổi thành ma trận hàng để thực hiện tiếp phép nhân nội tích thứ hai.

Như vậy (2–17) cho ta tất cả các thành phần của tenxơ ứng suất trong hệ trục mới $Ox'_1x'_2x'_3$.

Ví dụ : Cho các thành phần của một tenxơ ứng suất như sau :

$\sigma_x = 100$ N/cm^2 $\quad \sigma_y = 150$ N/cm^2 $\quad \sigma_z = 200$ N/cm^2

$\tau_{xy} = 150$ N/cm^2 $\quad \tau_{yz} = 100$ N/cm^2 $\quad \tau_{zx} = 50$ N/cm^2.

Pháp tuyến của mặt cắt nghiêng ABC so với các trục tọa độ có các côsin chỉ phương như sau :

$$\cos(n, x) = \cos 30^o \qquad \cos(n, y) = \cos 70^o$$

1. Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt.

2. Giả sử chọn phương của pháp tuyến đó làm một trục tọa độ mới. Tự chọn hai trục còn lại và xác định các thành phần của tenxơ ứng suất đó trong hệ trục mới.

Bài giải

1. Tính cos(n, z)

$\cos(n, x) = \cos 30^o = 0{,}866$

$\cos(n, y) = \cos 70^o = 0{,}342$

với biểu thức $\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1$ ta tính được

$\cos(n, z) = \cos 68^o = 0{,}365$.

2. Gọi $\vec{p}$ là vectơ ứng suất trên ABC các thành phần song song với các trục tọa độ Oxyz của $\vec{p}$ là p_x, p_y, p_z. Các trị số đó được tính với biểu thức :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \\ 150 & 150 & 100 \\ 50 & 100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156{,}15 \\ 217{,}7 \\ 150{,}5 \end{bmatrix}$$

Trị số ứng suất pháp trên mặt cắt sẽ là :

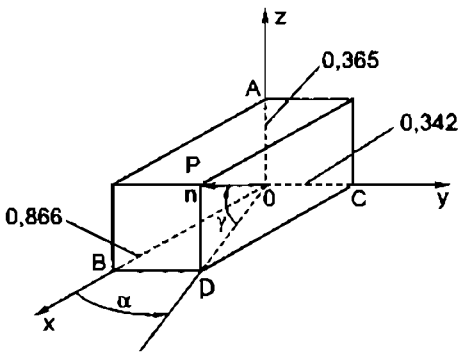
$$\sigma_n = [156{,}15 ; 217{,}7 ; 150{,}5] \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix} = 264{,}6118 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất tiếp trên mặt cắt sẽ là :

$$\tau_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2} = 156{,}227 \text{ N/cm}^2.$$

3. Để tiện cho việc tính tiếp theo ta gọi Oxyz là $Ox_1x_2x_3$ và $Ox_1'x_2'x_3'$ là hệ trục mới với Ox_1' trùng với On. Gọi P là đầu mút vectơ pháp tuyến On và D là hình chiếu của P trên mặt Ox_1x_2 (h.2-10).

Sử dụng phép quay thứ nhất quanh Ox_3 để đưa Ox_1 về trùng với OD. Khi đó Ox_2 sẽ đến vị trí mới Ox_2', gọi α là góc quay ta sẽ tính được các côsin chỉ phương của Ox_2' đối với $Ox_1x_2x_3$. Phép quay thứ hai quanh Ox_2' để đưa Ox_1 về trùng với OP. Trong phép quay đó sẽ đưa Ox_3 đến vị trí Ox_3'. Gọi γ là góc quay. Ta dễ dàng tính được α và γ.



Hình 2-10

$$\text{tg}\alpha = \frac{0{,}342}{0{,}866}, \qquad \text{tg}\gamma = \frac{0{,}365}{\sqrt{0{,}866^2 + 0{,}342^2}}$$

$$\alpha = 21^o55 \qquad \gamma = 21^o428.$$

Từ đó ta có được dễ dàng các cosin chỉ phương của các trục Ox_1', Ox_2', Ox_3' đối với hệ trục $Ox_1x_2x_3$ như sau :

Ox_1' ($n_{11} = 0{,}866$, $n_{12} = 0{,}342$, $n_{13} = 0{,}365$)

Ox_2' ($n_{21} = 0{,}3673$, $n_{22} = 0{,}930$, $n_{23} = 0$)

Ox_3' ($n_{31} = 0{,}339$, $n_{32} = 0{,}134$, $n_{33} = 0{,}9308$)

Từ đó ta có thể tính được các thành phần của tenxơ ứng suất đối với hệ trục $Ox_1'x_2'x_3'$.

$$\sigma_{11}' = \left\{\begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \\ 150 & 150 & 100 \\ 50 & 100 & 200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix} = 264{,}61 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{12}' = \left\{\begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \\ 150 & 150 & 100 \\ 50 & 100 & 200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0{,}3673 \\ 0{,}930 \\ 0 \end{bmatrix} = 259{,}8 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{13}' = \left\{\begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \\ 150 & 150 & 100 \\ 50 & 100 & 200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}342 \\ 0{,}365 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0{,}339 \\ 0{,}134 \\ 0{,}9308 \end{bmatrix} = 222{,}19 \text{ N/cm}^2$$

Tương tự như vậy ta sẽ tìm thấy :

$$\sigma'_{21} = 259{,}8\ N/cm^2; \qquad \sigma'_{31} = 222{,}2\ N/cm^2$$

$$\sigma'_{22} = 245{,}70\ N/cm^2; \qquad \sigma'_{32} = 189{,}47\ N/cm^2$$

$$\sigma'_{23} = 189{,}47\ N/cm^2; \qquad \sigma'_{33} = 257{,}62\ N/cm^2.$$

Như vậy tenxơ ứng suất là :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 264{,}62 & 259{,}8 & 222{,}2 \\ 259{,}8 & 245{,}7 & 189{,}47 \\ 222{,}2 & 189{,}47 & 257{,}626 \end{bmatrix}$$

§2–3. PHƯƠNG CHÍNH VÀ ỨNG SUẤT CHÍNH

Ta gọi mặt cắt trên đó không có ứng suất tiếp là mặt chính. Nếu trên đó có ứng suất pháp thì ứng suất đó được gọi là ứng suất chính. Trường hợp không có ứng suất pháp thì ta xem giá trị ứng suất chính là bằng không. Như vậy trên mặt chính ứng suất toàn phần $\vec{p}_\nu$ có phương trùng với phương của pháp tuyến của mặt cắt. Vậy ta có.

$$\vec{p}_\nu = \sigma_\nu.\vec{\nu} \tag{2–18}$$

Chiếu cả hai vế xuống các trục tọa độ ta có :

$$X = \sigma_\nu l; \quad Y = \sigma_\nu.m; \quad Z = \sigma_\nu.n \tag{2–19}$$

Đem hệ thức đó vào (2–7). Sau khi chuyển vế và thu gọn ta được :

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_\nu)l + \tau_{yx}.m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_\nu)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_\nu)n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2–20}$$

trong đó σ_ν và l, m, n là các ẩn số phải tìm, vì ta phải có :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

nên l, m, n không thể đồng thời triệt tiêu và như vậy định thức của hệ phương trình thuần nhất (2–20) phải bằng không.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_\nu) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_\nu) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_\nu) \end{vmatrix} = 0 \tag{2–21}$$

Khai triển định thức ta có :

$$\sigma_\nu^3 - I_1\sigma_\nu^2 - I_2\sigma_\nu - I_3 = 0 \tag{2–22}$$

trong đó :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}23)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Phương trình (2–21) cho phép ta xác định được các giá trị ứng suất chính. Ta nhận thấy các phương chính luôn luôn vuông góc với nhau từng đôi một.

Thật vậy gọi các nghiệm đó là σ_1, σ_2, σ_3. Các cosin chỉ phương tương ứng với ba nghiệm đó là l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2 ; n_2 ; l_3, m_3 ; n_3 ; Từ (2–20) ta có thể viết : (ví dụ đối với phương chính thứ nhất) :

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0 \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0 \\ \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0 \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất với l_2, phương trình thứ hai với m_2 và phương trình thứ ba với n_2 rồi cộng các vế với nhau ta được :

$$[(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1]l_2 + [\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \\ + \tau_{zy}n_1]m_2 + [\tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1]n_2 = 0 \qquad (2\text{–}24)$$

Một cách tương tự viết đảo lại :

$$[(\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{yx}m_2 + \tau_{zx}n_2]l_1 + [\tau_{xy}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \\ + \tau_{zy}n_2]m_1 + [\tau_{xz}l_2 + \tau_{yz}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2]n_1 = 0 \qquad (2\text{–}25)$$

Đem trừ (2–24) và (2–25) cho nhau và chú ý $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, sau khi rút gọn ta được :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0$$

Điều đó đúng với mọi σ_1 và σ_2, nghĩa là :

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \qquad (2\text{–}26)$$

Vậy hai phương ν_1 và ν_2 tương ứng với σ_1 và σ_2 vuông góc với nhau. Tương tự ta có thể chứng minh ν_2 và ν_3 cũng như ν_1 và ν_3 là vuông góc với nhau.

Từ đó ta cũng chứng minh được rằng phương trình (2–22) chỉ có ba nghiệm thực.

Thực vậy giả sử phương trình có hai nghiệm ảo liên hợp

$$\sigma_1 = a + bi \text{ và } \sigma_2 = a - bi$$

Sau khi thay các trị số đó vào (2–20) ta sẽ tìm thấy các giá trị của l_1l_2, m_1m_2, n_1n_2 là các lượng liên hợp. Tích

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

phải là một trị số dương. Điều đó trái với điều kiện (2–26). Vậy phương trình (2–22) chỉ có thể có ba nghiệm thực. (Xem cách giải phương trình bậc ba ở cuối sách).

Tóm lại tại mỗi điểm của vật thể đàn hồi ta tìm thấy ba mặt cắt vuông góc với nhau mà trên ba mặt đó các vectơ ứng suất trùng với pháp tuyến của mặt cắt. Các mặt đó là các mặt cắt chính và ứng suất chính. Các ứng suất chính được kí hiệu như sau σ_1, σ_2, σ_3 với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ về trị số đại số.

Vừa qua chúng ta đã sử dụng các thành phần ứng suất trên ba mặt cắt bất kì để xác định phương chính và ứng suất chính. Xét về ý nghĩa vật lí ta nhận thấy rằng phương chính ứng suất không tùy thuộc các mặt cắt đã chọn ban đầu, nghĩa là không phụ thuộc tọa độ ban đầu. Chúng chỉ phụ thuộc vào điều kiện chịu lực của vật thể ; dù ta chọn tọa độ ban đầu như thế nào thì phương chính và ứng suất chính chỉ là một. Nói một cách khác phương chính và ứng suất chính là những đại lượng vật lý không thay đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ. Vì vậy sáu thành phần ứng suất mà chúng ta đã nêu trên đây là những thành phần của một tenxơ ứng suất. Khi đưa về trục chính thì chỉ còn ba thành phần :

$$T_\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Tenxơ đó thể hiện trạng thái chịu lực của điểm đang xét. Điều đó có nghĩa là các hệ số của phương trình (2–22) là không đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ. Cũng vì vậy các hệ số đó được gọi là các lượng bất biến của trạng thái ứng suất. Nếu ta chọn các mặt cắt trùng với các phương chính thì ta phải có :

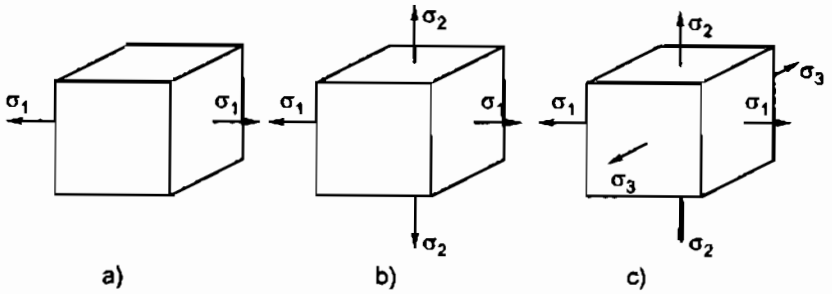
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}\right\} \quad (2\text{–}27)$$

I_1, I_2, I_3 được gọi là lượng bất biến bậc nhất, bậc hai và bậc ba của trạng thái ứng suất. Các bất biến được xem là các đặc trưng cơ bản của trạng thái ứng suất tại điểm đang xét.

Không phải lúc nào trên các mặt chính cũng tồn tại ứng suất chính có thể có mặt chính trên đó ứng suất chính bằng không. Vì vậy ta phân ba loại trạng thái ứng suất như sau :

Nếu chỉ có một mặt chính chịu ứng suất, giả sử đó là σ_1 thì trạng thái ứng suất được gọi là trạng thái ứng suất đơn (h.2–11a). Nếu trên hai mặt chính chịu ứng suất, giả sử đó là σ_1,

σ_2 thì trạng thái ứng suất được gọi là trạng thái ứng suất phẳng (h.2–11b). Nếu trên cả ba mặt chính đều có ứng suất thì được gọi là trạng thái ứng suất khối (h.2–11c).

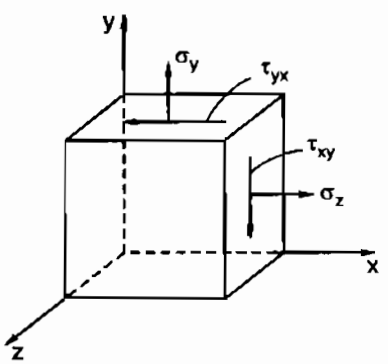


Hình 2–11

Điều kiện bền của các loại trạng thái ứng suất là hoàn toàn khác nhau. Đối với trạng thái ứng suất đơn ta có thể tìm được điều kiện bền từ thí nghiệm nhưng đối với các trạng thái ứng suất phẳng và khối ta không thể xác định được điều kiện bền từ thí nghiệm, mà phải sử dụng đến các thuyết bền để tính độ bền của chúng. Vấn đề này chúng ta sẽ đề cập lại ở một chương sau.

§2–4. VÒNG TRÒN MO (MOHR) ỨNG SUẤT

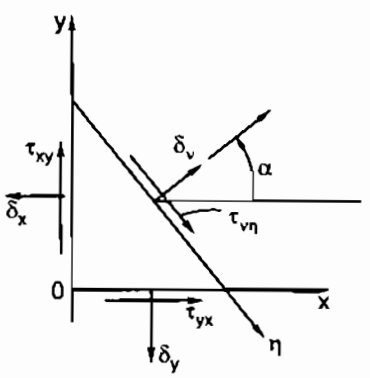
Phần lớn các bài toán thường gặp trong kĩ thuật là những bài toán đã xác định được một mặt chính và biết chắc trên mặt chính đó ứng suất bằng không. Ta cũng dễ dàng tính được ứng suất trên hai mặt cắt bất kì vuông góc với mặt chính. Vấn đề đặt ra là làm thế nào xác định rõ phân tố đó ở trạng thái ứng suất đơn hay phẳng. Muốn đạt được điều đó buộc ta phải tìm thấy các mặt chính và ứng suất chính còn lại.



Hình 2–12

Giả sử trạng thái ứng suất của phân tố được biểu diễn như trên hình 2–12. Mặt cắt vuông góc với trục z là một mặt chính. Và ứng suất trên mặt chính đó là bằng không ; còn hai mặt cắt vuông góc với các trục x và y là hai mặt cắt bất kì. Trên các mặt cắt đó có các thành phần ứng suất σ_x, σ_y và τ_{yx}, τ_{xy} ($\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$ vì mặt vuông góc với z là một mặt chính) :

Ta hãy xác định ứng suất trên một mặt nghiêng bất kì song song với z. Gọi pháp tuyến trên mặt đó là ν và trục vuông góc với nó là η (h.2–13). ν, η và z lập thành hệ trục tọa độ mới. Để xác định trị số ứng suất pháp σ_ν và ứng suất tiếp $\tau_{\nu\eta}$ chúng ta chỉ cần thực hiện phép xoay trục. Các côsin chỉ phương của ν và η so với hệ trục tọa độ cũ là như sau :



Hình 2–13

$$\nu \begin{cases} \cos(\nu, x) = -\cos\alpha \\ \cos(\nu, y) = \sin\alpha \end{cases} \qquad \eta \begin{cases} \cos(\eta, x) = \sin\alpha \\ \cos(\eta, y) = -\cos\alpha \end{cases}$$

Trị số của σ_ν và $\tau_{\nu\eta}$ là :

$$\sigma_\nu = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\nu\eta} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Sau khi khai triển ra ta có :

$$\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{yx}\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\tau_{\nu\eta} = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \qquad (2\text{–}28)$$

Sử dụng các công thức đối cung ta dễ dàng đưa (2–28) về dạng sau đây :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\nu &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_{\nu\eta} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}29)$$

Với các biểu thức đó ta dễ dàng xác định được phương chính và ứng suất chính. Theo định nghĩa mặt chính là mặt trên đó ứng suất tiếp bằng không. Vậy từ biểu thức thứ 2 của (2–29) ta có :

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2\text{–}30)$$

Đem (2–30) thay vào cho phương trình đầu của (2–29) ta sẽ tìm thấy hai nghiệm :

$$\sigma_2^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (2\text{–}31)$$

Chỉ số 1, 2 ở đây để chỉ nghiệm thứ nhất và nghiệm thứ hai.

Để thuận lợi cho việc xác định phương chính và ứng suất chính chúng ta dùng phương pháp họa đồ được trình bày sau đây :

Chuyển số hạng $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ở phương trình đầu của (2–29) sang vế trái rồi bình phương cả hai vế của cả hai phương trình và đem cộng lại, ta được :

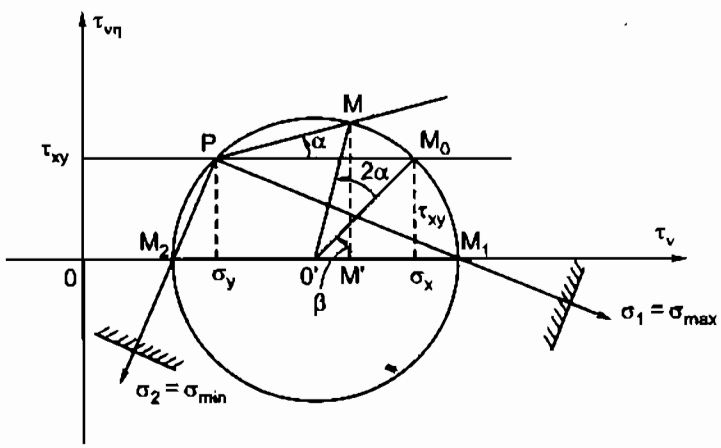
$$\left(\sigma_\nu - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\nu\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (2\text{–}32)$$

Nếu chọn một hệ trục tọa độ với trục tung biểu diễn giá trị của $\tau_{v\eta}$ và trục hoành biểu diễn giá trị của σ_v thì tương quan giữa σ_v và $\tau_{v\eta}$ là tương quan của một đường tròn. Tâm vòng tròn nằm trên trục hoành tại hoành độ $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ và bán kính là :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (2\text{–}33)$$

Vòng tròn đó được gọi là vòng tròn MO (Mohr) ứng suất (h.2–14).

Để ý đến điểm M_o trên đường tròn. Tọa độ của M_o là σ_x và τ_{xy}, vậy M_o là điểm tượng trưng cho các thành phần ứng suất trên mặt cắt vuông góc với trục x. Do đó M_o được gọi là điểm gốc, bán kính $O'M_o$ được gọi là bán kính gốc. Nếu quay bán kính gốc $O'M_o$ một góc 2α ta sẽ đến được vị trí điểm M là điểm tượng trưng cho ứng suất trên mặt nghiêng có pháp tuyến v nghĩa là hoành độ của M là trị số σ_v và tung độ của M là ứng suất tiếp $\tau_{v\eta}$.



Hình 2–14

Thực vậy, gọi β là góc giữa trục hoành và $O'M_o$, gọi M' là hình chiếu của M trên trục hoành ; thì tọa độ của M được xác định bởi các biểu thức :

$$\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = \overline{OO'} + \overline{O'M}\cos(\beta + 2\alpha) \qquad (2\text{–}34)$$

$$\overline{M'M} = \overline{O'M}\sin(\beta + 2\alpha)$$

Để ý rằng : $\overline{O'M}\cos\beta = \overline{O'M_o}\cos\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

và $\overline{O'M}\sin\beta = \overline{O'M_o}\sin\beta = \tau_{xy}$.

Các biểu thức (2–34) được viết lại như sau :

$$\left.\begin{aligned} \overline{OM'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \overline{M'M} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}35)$$

So sánh (2–35) và (2–29) ta thấy rõ ràng :

$$\overline{O'M} = \sigma_\nu$$

$$\overline{M'M} = \tau_{\nu\eta}$$

Để thuận tiện cho việc xác định các góc ta xem trục hoành σ_ν là song song với trục x của phân tố. Từ M_o kẻ một đường song song với trục hoành, giao điểm P của đường đó với đường tròn được gọi là điểm cực. Ta chỉ cần quay PM_o một góc α theo ngược chiều kim đồng hồ là ta sẽ tìm thấy M (h.2–14).

Các điểm tượng trưng cho ứng suất trên mặt chính phải là những điểm có tung độ bằng không (vì ứng suất tiếp trên mặt chính có trị số bằng không). Như vậy các điểm đó là các giao điểm M_1, M_2 của đường tròn với trục hoành. Phương pháp tuyến của các mặt chính là phương PM_1 và PM_2.

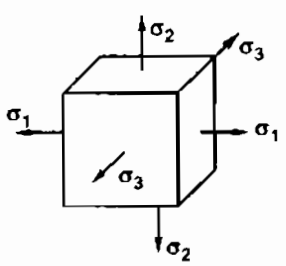
Đối với trạng thái ứng suất phẳng với vòng tròn ứng suất ta nhận thấy dễ dàng mặt cắt trên đó có ứng suất cực đại và cực tiểu. Khi vòng tròn nằm hoàn toàn về phía dương của trục hoành, ứng suất tại M_1 và M_2 đều dương thì ứng suất cực đại của trạng thái ứng suất là ứng suất được tượng trưng bởi điểm M. Còn ứng suất cực tiểu là ứng suất có trị số bằng không. Ứng suất đó nằm trên mặt chính thứ ba. Trường hợp vòng tròn cắt trục tung thì M_1 là ứng suất cực đại và M_2 là ứng suất cực tiểu. Trường hợp vòng tròn nằm về phía âm của trục hoành thì $\sigma_1 = 0$ và σ_2 và σ_3 là âm. Dĩ nhiên σ_3 là cực tiểu. Từ vòng tròn ứng suất ta lại tìm thấy các công thức đã xác định trước đây bằng giải tích.

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2\text{–}36)$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (2\text{–}37)$$

Chỉ số max và min ở đây là so với mọi mặt cắt cùng song song với trục z.

Trường hợp tổng quát khi ta có trạng thái ứng suất khối với ba ứng suất chính σ_1, σ_2, σ_3 như biểu diễn trên hình 2–15.

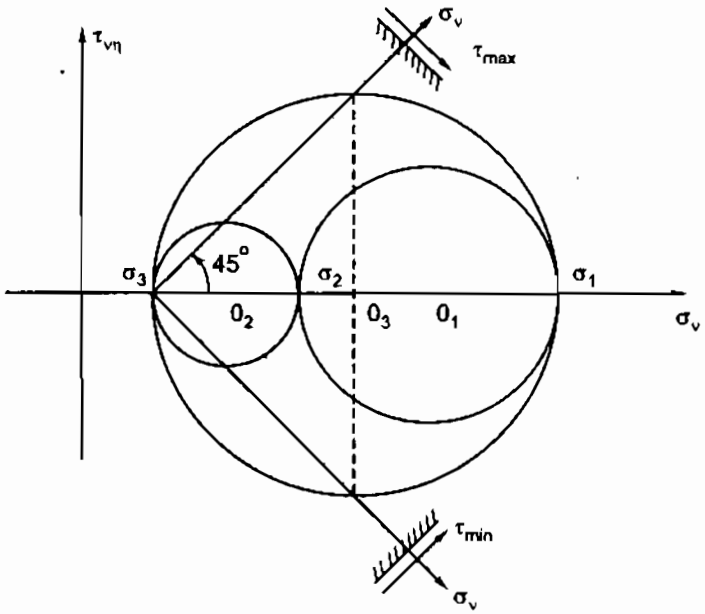


Hình 2–15

Để xác định các trị số ứng suất trên những mặt phẳng nghiêng song song với σ_3 ta có thể sử dụng vòng Mo ứng suất tạo bởi σ_1, σ_2. Với mặt nghiêng song song với σ_2 ta dùng vòng Mo tạo bởi $\sigma_1\sigma_3$ và với các mặt nghiêng song song với σ_1 thì dùng vòng Mo tạo bởi $\sigma_2\sigma_3$. Các vòng đó được vẽ trên cùng một mặt tọa độ σ_ν và $\tau_{\nu\eta}$ (h.2–16).

Như vậy là ta có ba vòng Mo để biểu diễn cho trạng thái ứng suất. Người ta cũng chứng minh được rằng : một điểm bất kì trong miền giới hạn bởi ba vòng tròn có tọa độ là các trị số ứng suất trên một mặt cắt nghiêng bất kì không song song với các phương chính.

Qua ba vòng Mo ứng suất ta nhận thấy ngay mặt nghiêng có ứng suất tiếp cực đại là mặt song song với σ_2 và có pháp tuyến tạo với σ_1 một góc 45°. Dĩ nhiên mặt cắt có ứng suất tiếp cực tiểu là mặt vuông góc với mặt trên. Trị số của ứng suất tiếp cực đại là :



Hình 2–16

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad (2–38)$$

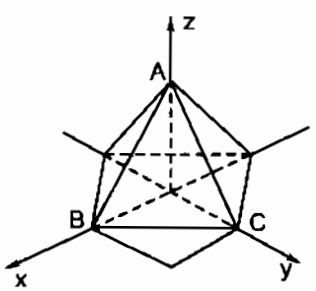
Ứng suất pháp trên mặt đó có giá trị là

$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \qquad (2–39)$$

§2 –5. ỨNG SUẤT BÁT DIỆN

Ta hãy khảo sát một mặt cắt đặc biệt : mặt nghiêng đều đối với các phương chính. Tách ra khỏi M một phân tố bởi các mặt cắt này ta sẽ được một hình bát diện h.2–17. Các côsin chỉ phương của pháp tuyến một mặt cắt có trị số là :

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Hình 2–17

Từ (2–7) ta có các thành phần song song với các trục tọa độ của ứng suất toàn phần trên mặt cắt ABC là

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Vậy ứng suất pháp trên mặt cắt nghiêng đó sẽ là :

$$\sigma_{bd} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (2\text{–}40)$$

Ứng suất tiếp có trị số là :

$$\tau_{bd} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - \sigma_{bd}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}$$

$$\tau_{bd} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad (2\text{–}41)$$

Nếu sử dụng các mặt cắt ban đầu là những mặt bất kì thì nhờ trị số các lượng bất biến ta dễ dàng tính được các trị số của các thành phần ứng suất bát diện như sau :

$$\sigma_{bd} = \frac{1}{3}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z] \qquad (2\text{–}42)$$

$$\tau_{bd} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \qquad (2\text{–}43)$$

Từ các biểu thức đó trong lí thuyết dẻo người ta đã đưa ra hai đại lượng :

Cường độ ứng suất tiếp :

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \qquad (2\text{–}44)$$

Cường độ ứng suất :

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2)} \qquad (2\text{–}45)$$

Hai đại lượng đó đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết chảy dẻo.

§2–6. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT CẦU VÀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT LỆCH

Một cách tổng quát, một trạng thái ứng suất bất kì có thể xem là sự cộng tác dụng của hai trạng thái ứng suất :

Trạng thái ứng suất cầu và trạng thái ứng suất lệch.

Trạng thái ứng suất cầu là trạng thái ứng suất mà trên mọi mặt cắt trị số ứng suất pháp là bằng giá trị ứng suất trung bình :

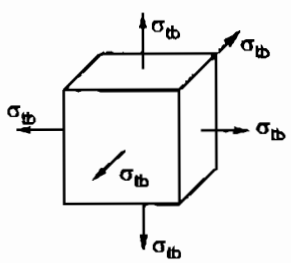
$$\sigma_{tb} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (2\text{–}46)$$

nghĩa là bằng trị số của ứng suất pháp bát diện (h.2–18).

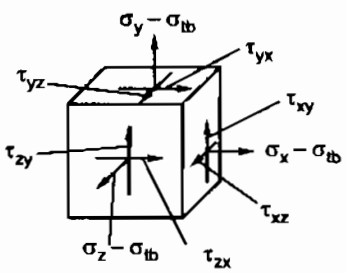
Trong trường hợp này mặt nào cũng là chính vì ba vòng tròn Mo ứng suất thu về một điểm.

Tenxơ ứng suất cầu có dạng :

$$T_\sigma^c = \begin{Bmatrix} \sigma_{tb} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{tb} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{tb} \end{Bmatrix} \qquad (2\text{–}47)$$



Hình 2–18



Hình 2–19

Trạng thái ứng suất lệch là trạng thái ứng suất có trị số ứng suất pháp trên các mặt trừ đi ứng suất trung bình (h.2–18) ; còn các trị số ứng suất tiếp vẫn giữ nguyên.

Các thành phần của tenxơ ứng suất như sau :

$$D_\sigma = \begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{tb}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{tb}) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{tb}) \end{Bmatrix} \qquad (2\text{–}48)$$

Tenxơ đó được gọi là *tenxơ lệch* hay *độ lệch của ứng suất.*

Ta nhận thấy ứng suất cầu chỉ gây nên biến dạng thể tích. Còn chính tenxơ lệch đã gây nên các biến dạng góc nghĩa là gây nên các biến dạng hình dáng.

Tenxơ lệch đóng một vai trò quan trọng trong việc xét độ bền vững, độ biến dạng dẻo của vật liệu.

§2–7. MẶT ỨNG SUẤT PHÁP

Để có một hình tượng về sự biến thiên của ứng suất tại một điểm trên những mặt cắt khác nhau trong không gian ta xét đến các mặt ứng suất pháp.

Lấy lại biểu thức (2–7). Biểu thức đó xác định các thành phần theo các trục Ox, Oy, Oz của ứng suất p_ν trên mặt nghiêng ABC (h.2–5). Thành phần của ứng suất pháp trên mặt nghiêng đó là tổng hình chiếu của X, Y, Z lên phương pháp tuyến ν.

$$\sigma_\nu = Xl + Ym + Zn$$

Thay trị số của X, Y, Z vào ta có :

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \qquad (2\text{–}49)$$

Nếu ta chọn một đoạn thẳng r có phương trùng với pháp tuyến ν và có gốc là gốc của hệ trục tọa độ với độ dài là :

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_\nu|}} \qquad (2\text{–}50)$$

thì khi ν thay đổi, nghĩa là khi mặt cắt thay đổi, đầu mút của r sẽ vạch ra một mặt bậc hai mà ta gọi là mặt ứng suất.

Thực vậy, gọi x, y, z là tọa độ của đầu mút của r. Các tọa độ đó được xác định bởi các biểu thức :

$$x = rl, \qquad y = rm, \qquad z = rn \qquad (2\text{–}51)$$

Thay trị số của l, m, n được tính từ (2–51) vào (2–49) ta được :

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx + 2\tau_{xy}xy = \pm k^2 \qquad (2\text{–}52)$$

trong đó : k là một hằng số tỉ lệ tùy ý chọn. Mặt bậc hai đó được gọi là mặt ứng suất côsi (Cauchy).

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu như các mặt tọa độ ban đầu Oxyz trùng với các mặt chính thì (2–52) có dạng thu gọn như sau :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm k^2 \qquad (2\text{–}53)$$

Từ đó ta có các trường hợp sau đây :

a) Nếu $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 > 0$ khi đó (2–53) sẽ được viết lại dưới dạng :

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{\sigma_1}} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{\sigma_2}} + \frac{z^2}{\frac{k^2}{\sigma_3}} = 1 \qquad (2\text{–}54)$$

Mặt côsi sẽ là một mặt elip.

Tương tự khi $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$.

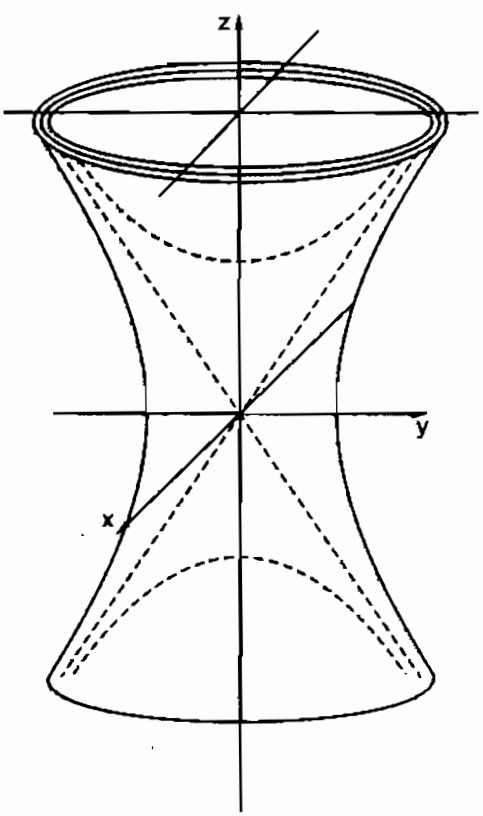
b) Khi các ứng suất chính có dấu khác nhau. Giả sử ta có $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

Phương trình (2–53) được viết lại dưới dạng :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - |\sigma_3| z^2 = \pm k^2 \qquad (2\text{–}55)$$

Đó là mặt hypecbôn một nhánh và hai nhánh (h.2–20). Các mặt đó được phân chia bởi mặt nón tiệm cận :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - |\sigma_3| z^2 = 0 \qquad (2\text{–}56)$$



Hình 2 – 20

Ngoài mặt ứng suất pháp Côsi ta còn có thể biểu diễn hình học trạng thái ứng suất một cách khác. Nếu lấy từ gốc tọa độ một đoạn thẳng có độ dài tượng trưng cho trị số ứng suất toàn phần trên mặt cắt nghiêng và có phương là phương của ứng suất đó thì khi xoay mặt cắt nghiêng theo những phương khác nhau đầu mút của đoạn thẳng sẽ vạch ra một mặt elip mà ta gọi là mặt elip ứng suất. Ta dễ dàng viết phương trình của mặt elip đó.

Giả sử hệ trục tọa độ ban đầu chọn trùng với các phương chính ứng suất. Các thành phần hình chiếu của $\vec{p}_v$, được tính bởi (2–7) sẽ là :

$$X = \sigma_1 l,\ Y = \sigma_2 n,\ Z = \sigma_3 n$$

Nếu gọi x, y, z là tọa độ của đầu mút đoạn thẳng ta đã chọn thì ta dễ dàng thấy ngay :

$$x = X = \sigma_1 l, \qquad y = Y = \sigma_2 n, \qquad z = Z = \sigma_3 n \tag{2–57}$$

Nhưng giữa l, m, n ta lại có biểu thức :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Thay các trị số l, m, n tính từ (2–55) vào ta được :

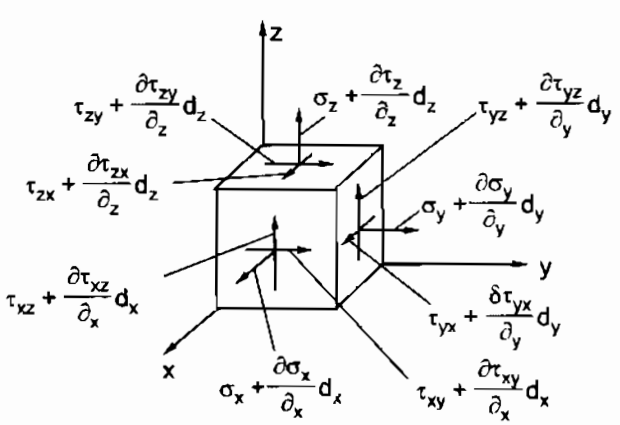
$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \tag{2–58}$$

Và đó là phương trình của một mặt elip.

§2–8. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÂN BẰNG

Trên hình 2–8 ta đã sử dụng một phân tố được tách ra bởi các mặt cắt song song vuông góc với nhau để tượng trưng cho trạng thái ứng suất tại điểm đang xét.

Ta đã nói rằng thể tích của phân tố là vô cùng bé, tiến tới không vì vậy trị số ứng suất trên các mặt song song có thể xem là bằng nhau và có chiều ngược nhau. Để nghiên cứu trường ứng suất trong vật thể dưới tác dụng của ngoại lực chúng ta phải xét các thành phần ứng suất trên những mặt cắt song song với nhau cách nhau một lượng vô cùng bé. Trị số ứng suất trên mặt đó phải khác nhau. Ví dụ xét hai mặt cắt vuông góc với trục x. Nếu trên mặt cắt đi qua gốc tọa độ có trị số ứng suất pháp là σ_x thì trên mặt cắt song song cách nó một khoảng dx ứng suất pháp phải có trị số là $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Suy luận tương tự với các thành phần ứng suất khác ta có thể biểu diễn sự biến thiên của các ứng suất như trên hình 2–21.



Hình 2 – 21

Ngoài các lực bề mặt do các ứng suất gây nên còn có các lực thể tích tác động trên toàn bộ thể tích của phân bố.

Nếu gọi X, Y, Z là các thành phần hình chiếu của lực thể tích trên một đơn vị khối lượng của phân tố và gọi là ρ và khối lượng riêng của vật thể thì từ điều kiện cân bằng ta có các phương trình hình chiếu của các lực theo các phương x, y, z như sau :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=0\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0\\
&\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}59)$$

Khi phân tố có chuyển động với gia tốc thì ngoài các lực trên ta còn có thêm lực quán tính. Gọi u, v và w là các thành phần chuyển vị của phân tố theo các trục tọa độ x, y, z thì phương trình (2–59) phải có dạng :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}60)$$

Các phương trình cân bằng đó được gọi là những phương trình của Naviê.

Bài tập

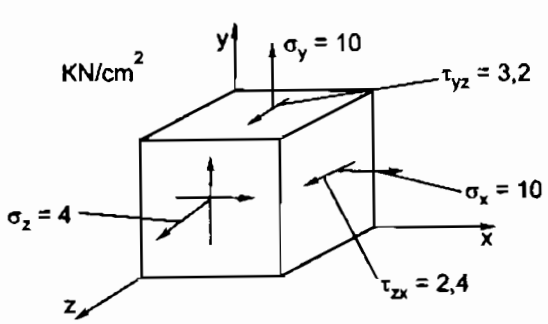
2.1. Trạng thái ứng suất tại M trong vật thể đàn hồi chịu lực cho bởi tenxơ ứng suất

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{kN/cm}^2$$

Hãy xác định giá trị các ứng suất chính và phương các mặt chính.

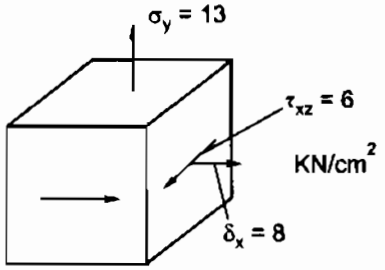
2.2. Cho trạng thái ứng suất như hình vẽ (h.2–22)

Xác định các trị số của ứng suất chính và ứng suất bát diện.

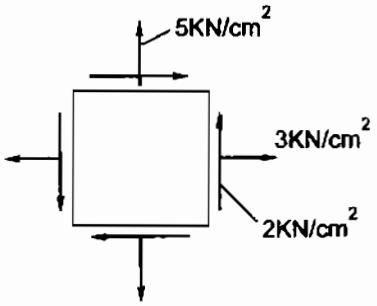


Hình 2-22

2.3. Xác định ứng suất chính cho trạng thái ứng suất như hình 2–23.



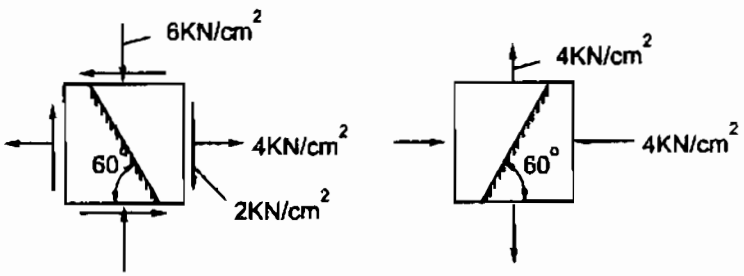
Hình 2–23



Hình 2–24

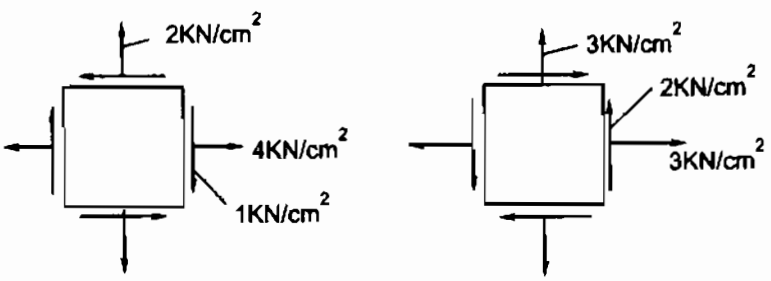
2.4. Tìm ứng suất chính và phương chính của phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng như hình 2–24 bằng phương pháp giải tích và phương pháp đồ thị.

2.5. Tìm giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt cắt xiên của phân tố biểu diễn trạng thái ứng suất như trên các hình 2–25.



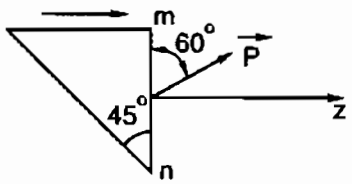
Hình 2–25

2.6. Tìm ứng suất chính và phương chính của các trạng thái ứng suất đã cho bằng phương pháp họa đồ (h.2–26).

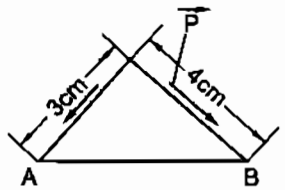


Hình 2–26

2.7. Ứng suất toàn phần $\vec{p}$ tại điểm M trên mặt cắt m – n cắt qua vật thể đàn hồi chịu lực có phương nghiêng so với mặt cắt là 60°. Được biết trạng thái ứng suất tại đó là trạng thái ứng suất phẳng. Trên mặt cắt vuông góc với m – n chỉ có ứng suất tiếp τ. Hãy xác định ứng suất trên mặt nghiêng so với m – n một góc 45° như hình 2–27. Cho biết trị số của p là 3 kN/cm^2.



Hình 2–27



Hình 2–28

2.8. Một lăng trụ hình tam giác có chiều dày là đơn vị được gắn vào một vật thể khác ở mặt AB như trên hình 2–28. Lăng trụ chịu các lực tiếp xúc phân bố đều ở mặt bên $p = 1\ kN/cm^2$.

Tính áp lực và lực tiếp xúc trên mặt AB.

2.9. Trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực được cho bởi tenxơ ứng suất.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} kN/cm^2$$

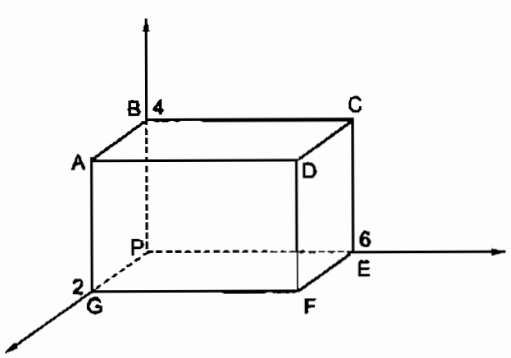
Hãy xác định vectơ ứng suất trên mặt nghiêng đi qua P và song song với mặt phẳng :

$$3x + 6y + 2z = 12.$$

2.10. Cho tenxơ ứng suất

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} kN/cm^2$$

Hãy xác định vectơ ứng suất tại điểm P trên mặt cắt song song với mặt phẳng BGE, BGFC (h.2–29)



Hình 2–29

2.11. Trạng thái ứng suất tại điểm bất kì cho bởi tenxơ ứng suất

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ với } C = C^{te} \neq 0$$

a) Tính vectơ ứng suất tại điểm P(4, –4, 7) trên mặt phẳng

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$$

b) Tại điểm P(4, –4, 7) trên mặt cầu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$$

c) Xác định các ứng suất chính, ứng suất tiếp cực đại tại P.

Chương 3

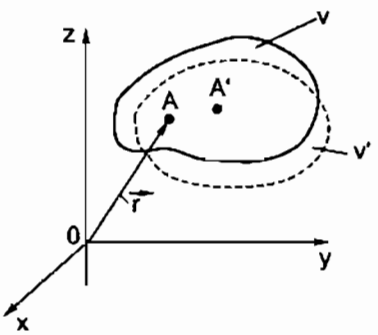
TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG

§3–1. CHUYỂN VỊ

Xét một vật thể đàn hồi chịu lực.

Giả sử ở thời điểm ban đầu t_0 vật thể chưa chịu lực. Vật thể chiếm trong không gian một thể tích V. Đến thời điểm t, sau khi chịu tác dụng của ngoại lực vật thể chiếm một thể tích mới V'.

Gọi A là một điểm trong V. Vị trí của A được xác định bởi vectơ $\vec{r}$ (x, y, z). Sau khi chịu lực A đến một vị trí mới A' trong V' và được xác định bởi $\vec{r}'$(x', y', z') (h.3–1).



Hình 3–1

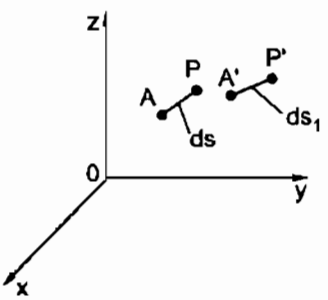
Ta gọi vectơ $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ chuyển vị của A. Nếu gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ thì :

$$\overrightarrow{AA'} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \qquad (3–1)$$

u, v, w là các thành phần chuyển vị của A. Như vậy u, v, w là các hàm số phụ thuộc ba biến số x, y, z.

Tọa độ của A' được xác định theo các thành phần chuyển vị của A như sau :

$$A'\begin{cases} x' = u + x \\ y' = v + y \\ z' = w + z \end{cases} \qquad (3–2)$$



Hình 3–2

§3–2. BIẾN DẠNG

a) Tính biến dạng dài

Xét thêm một điểm P lân cận A. Tọa độ của P được xác định bởi các biểu thức :

$$P\begin{cases} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{cases} \qquad (3–3)$$

dx, dy, dz là các vi phân của x, y, z.

Sau biến dạng P đến một vị trí mới P' trong V'. Tọa độ của P' sẽ là

$$P' \begin{cases} x + dx + u_1 \\ y + dy + v_1 \\ z + dz + w_1 \end{cases} \tag{3–4}$$

Trong đó u_1, v_1 và w_1 được xác định theo u, v, w như sau :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{3–5}$$

Gọi chiều dài của AP là ds và chiều dài của A'P' là ds_1 thì tỉ số

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} \tag{3–6}$$

được gọi là biến dạng dài theo phương của AP.

Chúng ta tìm cách xác định ε theo các hàm số u, v, w.

Các thành phần hình chiếu của ds_1 lên các trục tọa độ là như sau

$$\begin{aligned} ds_1/x &= (x + dx + u_1) - (u + x) = dx + u_1 - u \\ ds_1/y &= (y + dy + v_1) - (v + y) = dy + v_1 - v \\ ds_1/z &= (z + dz + w_1) - (w + z) = dz + w_1 - w \end{aligned}$$

Thay các trị số u_1, v_1, w_1 từ (3–5) vào đây ta sẽ có :

$$\begin{aligned} ds_1/x &= dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ ds_1/y &= dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ ds_1/z &= dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{3–7}$$

Vậy độ dài bình phương của ds_1 sẽ là :

$$\begin{aligned} ds_1^2 = &\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)^2 \\ &+ \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)^2 \end{aligned} \tag{3–8}$$

Từ biểu thức (3–6) ta có :

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 + 2\varepsilon \tag{3–9}$$

Chia cả hai vế của (3–8) cho ds^2, chú ý đến các tỷ số $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ chúng là các cosin chỉ phương l, m, n của đoạn thẳng AP đối với hệ trục tọa độ. Kết hợp với (3–9) ta có :

$$1 + 2\varepsilon = \left(l + l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(m + l\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} + n\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$

$$+ \left(m + l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

Thực hiện phép bình phương, bỏ qua những số hạng vô cùng bé bậc cao, chú ý tổng $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ta đi đến kết quả :

$$\varepsilon = l^2\frac{\partial u}{\partial x} + m^2\frac{\partial v}{\partial y} + n^2\frac{\partial w}{\partial z} + lm\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$+ ln\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + m.n\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (3–10)$$

Xét những trường hợp riêng :

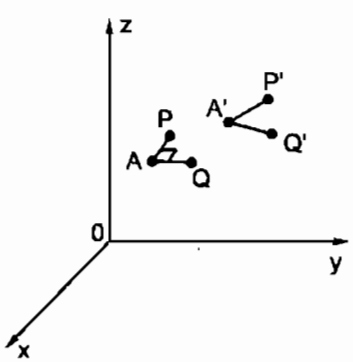
Lần lượt cho AP song song với các trục tọa độ, nghĩa là lần lượt lấy $l = 1$, $m = 1$, $n = 1$ còn những hệ số còn lại là bằng không ta sẽ được :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ và } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (3–11)$$

Như vậy, đạo hàm riêng phần của u, v và w theo các biến số là các biến dạng dài theo phương của các trục.

b) Tính biến dạng góc

Xét thêm điểm thứ hai Q lân cận điểm A sao cho AQ vuông góc với AP. Nếu xem góc vuông là đơn vị góc thì biến dạng của $\widehat{PAQ}$ được xem là biến dạng góc tỷ đối. Gọi Q' là vị trí của Q sau biến dạng.



Hình 3–3

Ta tìm cách xác định các cosin chỉ phương l_1, m_1, n_1 của A'P' và l_2, m_2, n_2 của A'Q' theo với các hàm u, v, w và các cosin chỉ phương l, m, n và l', m', n' của AP và AQ, vì chúng vuông góc nên ta có điều kiện : $ll' + mm' + nn' = 0$. Ví dụ tính l_1. Từ (3–7) ta có :

$$ds_1.l_1 = ds_1/x = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Thay trị số ds_1 tính từ (3–6) vào ta được :

$$(1+\varepsilon)ds l_1 = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Chia cả hai vế cho ds và nhân với $(1-\varepsilon)$. Xem $1-\varepsilon^2 \approx 1$ ta được :

$$l_1 = l\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)(1-\varepsilon) + m\frac{\partial u}{\partial y}(1-\varepsilon) + n\frac{\partial u}{\partial z}(1-\varepsilon)$$

Thực hiện phép nhân và bỏ các số hạng vô cùng bé bậc cao ta sẽ được biểu thức của l_1. Cùng một cách làm ta sẽ tính được m_1 và n_1. Các biểu thức đó là như sau :

$$\begin{aligned} l_1 &= l\left(1-\varepsilon+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= l\frac{\partial v}{\partial x} + m\left(1-\varepsilon+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + n\frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= l\frac{\partial w}{\partial x} + m\frac{\partial w}{\partial y} + n\left(1-\varepsilon+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (3\text{–}12)$$

Cùng cách tính tương tự ta sẽ tìm thấy các côsin chỉ phương của A'Q' theo với các côsin chỉ phương $l'm'n'$ của AQ.

$$\begin{aligned} l_2 &= l'\left(1-\varepsilon+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m'\frac{\partial u}{\partial y} + n'\frac{\partial u}{\partial z} \\ m_2 &= l'\frac{\partial v}{\partial x} + m'\left(1-\varepsilon+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + n'\frac{\partial v}{\partial z} \\ n_2 &= l'\frac{\partial w}{\partial x} + m'\frac{\partial w}{\partial y} + n'\left(1-\varepsilon+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{aligned} \qquad (3\text{–}13)$$

Góc gồm giữa hai đường (A'P', A'Q') được xác định bởi biểu thức :

$$\cos(A'P', A'Q') = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \qquad (3\text{–}14)$$

Đem (3–12) và (3–13) thay vào (3–14) với chú ý (3–11) ta sẽ được :

$$\begin{aligned} \cos(A'P', A'Q') = {} & 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y m.m' + \varepsilon_z nn') + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(lm' + ml') + \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)(mn' + nm') + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)(nl' + n'l) \end{aligned} \qquad (3\text{–}15)$$

Vì biến dạng là vô cùng bé nên ta có thể xem góc $\left[\frac{\pi}{2} - (A'P', A'Q')\right] = \gamma$ là bé. Do đó có thể viết :

$$\cos(A'P', A'Q') = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (A'P', A'Q')\right] \approx \gamma$$

Vậy (3–14) có thể viết lại như sau :

$$\gamma = 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(lm' + ml') +$$

$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)(mm' + m'n) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)(nl' + n'l) \qquad (3\text{–}16)$$

γ là biến dạng của góc vuông (AP, AQ). Nếu lần lượt lấy AP và AQ song song với các trục tọa độ, nghĩa là lần lượt cho $l = 1$ và $m' = 1$, $m = 1$ và $n' = 1$, $n = 1l' = 1$, ta sẽ tìm thấy các biến dạng của các góc vuông xOy, yOz và zOx.

Ta được các biểu thức

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{–}17)$$

Qua (3–17) ta thấy $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$.

Nếu chúng ta sử dụng u_i để chỉ các hàm chuyển vị theo các trục Ox_i và ε_{ij} để chỉ các biến dạng dài và góc thì sáu biểu thức của (3–10) và (3–17) được viết chung lại một công thức sau đây :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (3\text{–}18)$$

Trong đó ε_{ii} để chỉ các biến dạng dài theo phương i và ε_{ij} với $i \neq j$ để chỉ $\frac{\gamma_{ij}}{2}$.

Thay (3–18) vào (3–10) và (3–16) ta được các biểu thức sau đây

$$\varepsilon = l^2\varepsilon_x + m^2\varepsilon_y + n^2\varepsilon_z + lm\gamma_{xy} + ln\gamma_{xz} + mn\gamma_{yz} \qquad (3\text{–}19)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn' + \frac{\gamma_{xy}}{2}(lm' + ml') + \frac{\gamma_{yz}}{2}(mn' + m'n) + \frac{\gamma_{xz}}{2}(nl' + n'l) \qquad (3\text{–}20)$$

Như vậy, với ba biến dạng dài trên các trục tọa độ và ba biến dạng góc của các mặt tọa độ ta có thể tính biến dạng theo mọi phương và độ biến dạng góc của mọi góc vuông xác định bởi hai đoạn dài vô cùng bé vuông góc. Sáu thành phần biến dạng đó lập thành một tenxơ biến dạng.

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad (3\text{–}21)$$

Hay dưới ký hiệu thu gọn.

$$T_\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] \text{ với } i, j = 1, 2, 3 \qquad (3\text{–}22)$$

Đó là một tenxơ đối xứng hạng hai.

Ta có nhận xét sau đây về các biểu thức (3–19) và (3–20) : Các công thức đó thực sự chỉ là hai phép nội tích liên tiếp giữa tenxơ biến dạng với các cosin chỉ phương của AP và của AQ. Thực vậy, ta thực hiện các phép nhân liên tiếp đó :

$$I = \left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(\varepsilon_x l + \frac{1}{2}\gamma_{yx}m + \frac{1}{2}\gamma_{zx}n\right), \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}l + \varepsilon_y m + \frac{1}{2}\gamma_{zy}n\right), \left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + \varepsilon_z n\right)\right]\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Sau khi khai triển ta có :

$$I = l^2\varepsilon_x + m^2.\varepsilon_y + n^2\varepsilon_z + l.m.\gamma_{xy} + ln\gamma_{xz} + m.n.\gamma_{yz}.$$

$$II = \left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix}$$

$$II = \varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn' + \frac{\gamma_{xy}}{2}(lm' + ml') + \frac{\gamma_{yz}}{2}(mn' + m'n) + \frac{\gamma_{xz}}{2}(nl' + n'l)$$

So sánh hai biểu thức đó với (3–19) và (3–20) ta thấy rõ chúng là một. Vậy ta có thể viết (3–19) và (3–20) vào chung biểu thức như sau :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \{[\varepsilon_{ij}][n_{\alpha j}]\}^T[n_{\beta j}] \qquad (3\text{–}23)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

§3–3. PHƯƠNG CHÍNH – BIẾN DẠNG CHÍNH

Tính chất chung của những tenxơ hạng hai đối xứng là có thể đưa về dạng đường chéo chính. Các thành phần trên đường chéo chính được gọi là số hạng chính. Đối với tenxơ biến dạng các số hạng chính là những biến dạng dài trên các trục chính và nếu hệ tọa độ trùng với trục chính thì không còn các biến dạng góc.

Gọi ε* là một biến dạng chính và l, m, n là các cosin chỉ phương của trục chính đối với hệ trục Oxyz đã chọn ban đầu. Ta phải có điều kiện :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & e^* & 0 \\ 0 & 0 & e^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \qquad (3\text{–}24)$$

Thực vậy vì đó là phép nội tích thứ nhất trong phép xoay trục. tenxơ bên trái và bên phải muốn tương đương thì phép xoay trục của tenxơ bên trái và bên phải phải cho cùng một kết quả. Đối với tenxơ bên phải trong phép quay trục đó phải về lại chính mình. Ta hãy tính các thành phần của tenxơ trong phép quay đó

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^* & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon^* l,\ \varepsilon^*_m,\ \varepsilon^* n] \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \varepsilon^* l^2 + \varepsilon^* m^2 + \varepsilon^* n^2$$

Hay $$\varepsilon^*[l^2 + m^2 + n^2] = \varepsilon^*$$

Vậy từ (3–24), sau khi khai triển và đưa tất cả về bên trái ta có hệ thống phương trình :

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_x - \varepsilon^*).l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}.n = 0 \\ &\frac{1}{2}\gamma_{yx}l + (\varepsilon_y - \varepsilon^*).m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}.n = 0 \\ &\frac{1}{2}\gamma_{zx}l + \frac{1}{2}\gamma_{zy}.m + (\varepsilon_z - \varepsilon^*).n = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{–}25)$$

Trong đó ε^* và l, m, n là các ẩn số. Vì $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ nên muốn l, m, n có nghiệm thì định thức phải bằng 0. Từ đó ta đi đến phương trình bậc 3 như ta đã giải trong trạng thái ứng suất :

$$\varepsilon^{*3} - J_1\varepsilon^{*2} - J_2\varepsilon^* - J_3 = 0 \qquad (3\text{–}26)$$

Trong đó J_1, J_2, J_3 là các lượng bất biến :

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (3\text{–}27)$$

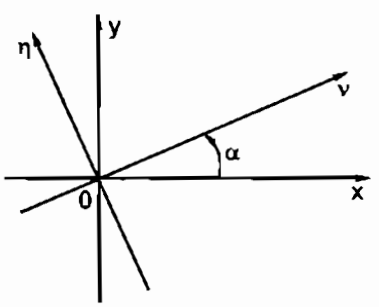
$$J_2 = -\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} \qquad (3\text{–}28)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \qquad (3\text{–}29)$$

Ta lại trở về những lập luận tương tự như trạng thái ứng suất. Phương trình bậc 3 (3–26) có ba nghiệm thực ε_1 $\varepsilon_2\varepsilon_3$ được gọi là ba biến dạng chính. Chúng nằm trên ba trục chính vuông góc với nhau từng đôi một tạo nên một hệ trục vuông góc. Các góc vuông tạo nên bởi hệ trục đó là không biến đổi trong quá trình vật thể bị biến dạng.

§3–4. VÒNG TRÒN MO (MOHR) BIẾN DẠNG

Ở trạng thái ứng suất ta đã phân chia ba trạng thái ứng suất : trạng thái ứng suất đơn, trạng thái ứng suất phẳng và trạng thái ứng suất khối. Trong biến dạng ta không thể tách biệt ba trạng thái như vậy được. Vì có biến dạng theo một phương nào đó thì lập tức có ngay biến dạng theo hai phương chính còn lại, trừ trường hợp có những liên kết cản trở. Tuy nhiên trong thực tế kĩ thuật, nhiều khi ta có thể đo được biến dạng dài trong một mặt phẳng và không cần để ý đến biến dạng theo phương vuông góc với mặt phẳng đó. Trong trường hợp như vậy ta có thể xem đó là một bài toán phẳng. tenxơ biến dạng chỉ còn lại ba thành phần



Hình 3 – 4

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Trong phép xoay trục đưa hệ trục Oxy sang vị trí mới Oνη trong phép quay α, tương quan giữa biến dạng dài ε_ν và biến dạng góc $\varepsilon_{\nu\eta}$ là quan hệ một vòng tròn như trong trường hợp ứng suất. Vòng tròn đó được gọi là vòng tròn Mo biến dạng.

Thực vậy theo công thức xoay trục (3–23) ta có :

$$\varepsilon_{\nu\eta} = \{[\varepsilon_{ij}][n_{\nu j}]\}^T[n_{\eta j}]$$

Ở đây $n_{\nu j}$ là $n_{\nu x} = -\cos\alpha$, $n_{\nu y} = \sin\alpha$

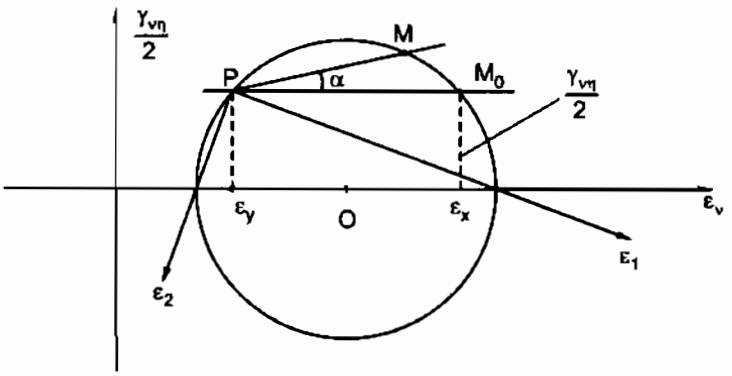
$n_{\eta j}$ là $n_{\eta x} = -\sin\alpha$, $n_{\eta y} = -\cos\alpha$

Thay các kí hiệu thường và khai triển ta sẽ được :

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\sin^2\alpha - \gamma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\frac{\gamma_{\nu\eta}}{2} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha + \gamma_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Đứng về mặt toán học là hoàn toàn giống (2–28). Vậy ta có vòng tròn biến dạng như hình 3–5.



Hình 3–5

§3–5. TENXƠ BIẾN DẠNG CẦU VÀ BIẾN DẠNG LỆCH

Tương tự như trước đây với ứng suất, tenxơ biến dạng luôn chia được thành hai tenxơ : Tenxơ biến dạng cầu và tenxơ biến dạng lệch. Kí hiệu lần lượt là T_ε^c và D_ε. Ta có tenxơ biến dạng cầu :

$$T_\varepsilon^c = \begin{bmatrix} \varepsilon_{tb} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{tb} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{tb} \end{bmatrix} \tag{3–30}$$

trong đó :

$$\varepsilon_{tb} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \tag{3–31}$$

và tenxơ biến dạng lệch :

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{tb} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{tb} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{tb} \end{bmatrix} \tag{3–32}$$

§3–6. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG THÍCH

Ở phần trên chúng ta đã thiết lập được sự tương quan giữa biến dạng và chuyển vị. Các tương quan đó được thể hiện bởi các biểu thức (3–11) và (3–17). Nhưng các biểu thức đó chưa nói lên được tương quan giữa biến dạng dài và biến dạng góc. Như ta đã biết, giữa biến dạng dài và biến dạng góc phải có một tương quan thích ứng vì nếu không có sự thích

ứng đó thì vật thể sau biến dạng có thể có những phần rỗng. Điều đó hoàn toàn trái với giả thuyết của chúng ta về môi trường liên tục. Do đó điều kiện tương quan giữa biến dạng dài và biến dạng góc để đảm bảo điều kiện liên tục của môi trường được gọi là điều kiện tương thích. Biểu thức thể hiện sự tương quan đó được gọi là phương trình tương thích.

Lấy đạo hàm riêng phần của γ_{xy} trong biểu thức (3–17) theo x và y ta được :

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Chú ý đến hai biểu thức đầu của (3–11) ta được :

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} \tag{3–33}$$

Tương tự ta có thể viết tiếp :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} &= \frac{\partial^3\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}\end{aligned}\right\} \tag{3–34}$$

Bây giờ ta lấy đạo hàm của ε_x từ (3–11) theo y và z. Ta được :

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} \tag{3–35}$$

Lần lượt lấy đạo hàm của γ_{xy}, γ_y và γ_{xz} theo z, x, y. Từ (3–17) ta có :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{3–36}$$

Cộng hai phương trình đầu và cuối của (3–36) và đem trừ cho phương trình thứ hai ta sẽ được :

$$-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \tag{3–37}$$

Đem (3–37) thay vào (3–35) ta có :

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \tag{3–38}$$

Tương tự ta có thể thiết lập được thêm hai phương trình khác :

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{–}39)$$

Sáu phương trình (3–33) và (3–39) được gọi là sáu phương trình tương thích giữa biến dạng dài và biến dạng góc của Xanh Vơ-năng (Saint Venant)

Một số ví dụ cụ thể về xác định phương chính và biến dạng chính như sau :

Ví dụ 1 : Cho tenxơ biến dạng tại M của vật thể đàn hồi chịu lực

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

a) Xác định biến dạng chính và phương chính biến dạng

b) Trạng thái biến dạng tại M là gì ?

Bài giải

a) Sử dụng phương trình (3–36) để xác định các biến dạng chính. Các lượng bất biến được xác định như sau :

$$J_1 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$J_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Vậy phương trình có dạng :

$$\varepsilon^{*3} - 6\varepsilon^{*2} + 9\varepsilon^{*} - 4 = 0 \qquad (*)$$

Các hệ số của phương trình là : $a_1 = -6$, $a_2 = 9$ và $a_3 = -4$.

Đặt $\qquad \varepsilon^{*} = x + \alpha$

với $\qquad \alpha = -\frac{a_1}{3} = 2$

ta chuyển được (*) về dạng :

$$x^3 + px + q = 0$$

với $$p = -\frac{a_1^3}{3} + a_2 = -3$$

$$q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a.a_2}{3} + a_3 = -2$$

Tính Δ.

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

Ta được nghiệm kép $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} = -1$

Từ đó ta có nghiệm kép của (*) là

$$\varepsilon^* = -1 + 2 = 1$$

Nghiệm thứ hai được xác định bởi biểu thức.

$$x = \frac{3.q}{p} = 2$$

Vậy :

$$\varepsilon^* = 2 + 2 = 4$$

Như vậy các biến dạng chính là $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 4$.

Phương trình của ε_3 là nghiệm của hệ phương trình (3–25)

$$(2-4)l + 1.m + 1.n = 0$$

$$1.l + (2-4)m + 1.n = 0$$

$$1.l + 1.m + (2-4)n = 0$$

Hay :

$$-2l + m + n = 0 \qquad (1)$$

$$l - 2m + n = 0 \qquad (2)$$

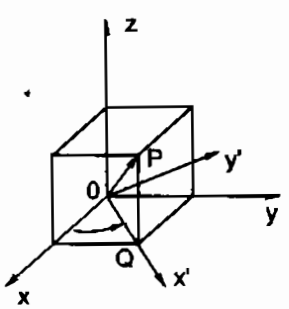
$$l + m - 2n = 0 \qquad (3)$$

l, m, n phải đáp ứng điều kiện :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (4)$$

Từ phương trình đầu ta có :

$$n = 2l - m \qquad (5)$$



Hình 3–6

Đem thay (5) vào cho (2) ta được :

$$l - 2m + 2l - m = 0$$

Hay $3(l - m) = 0$ vậy $m = l$

Tương tự từ (2) ta có $l = 2m - n$ và đem thay vào (3) ta được :

$$3(m - n) = 0 \text{ vậy } m = n$$

Ta kết luận $l = m = n$ như vậy trục của ε_3 phải nghiêng đều đối với các trục tọa độ. Từ điều kiện (4) ta có

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lấy trị số $\varepsilon_1 = 1$ hoặc $\varepsilon_2 = 1$ thay vào hệ (3–25) ta được phương trình vô định

$$l + m + n = 0$$

l, m, n được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Tất nhiên phương của ε_1 và ε_2 phải vuông góc với ε_3. Ta thực hiện phép quay trục sau đây :

Gọi Oxyz là hệ trục ban đầu của tenxơ biến dạng. $\overrightarrow{OP}$ là vectơ đơn vị trên trục nghiêng đều của phương ε_3. Q là hình chiếu của P trên mặt xOy. Quay hệ trục Oxyz quanh Oz sao cho Ox đến trùng với OQ. Ta kí hiệu vị trí đó của Ox là Ox'. Trục Oy sẽ có vị trí mới là Oy'. Các côsin chỉ phương của Oy' là như sau. $l = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $n = 0$. Ta xét xem Oy' có thể là trục biến dạng chính thứ II không. Tính biến dạng trong phép xoay trục đó. Ta có :

$$\varepsilon^*_{oy'} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thực hiện hai phép nội tích liên tiếp ta được :

$$\varepsilon^*_{oy'} = 1$$

Đúng bằng trị số của $\varepsilon_1 = 1$. Vậy Oy' đúng là trục thứ II. Để có được trục thứ III ta chỉ còn phải xoay x'Oz chung quanh Oy' để Ox' đến trùng với OP. Vị trí mới của Oz được kí hiệu là Oz'. Trục đó chính là trục chính thứ III. Vị trí đó là vị trí duy nhất vuông góc với OP và Oy'. Các côsin chỉ phương của Oz' được kí hiệu là l', m', n'. Chúng phải thỏa mãn điều kiện vuông góc với OP và Oy', nghĩa là :

$$\begin{cases} l'\frac{1}{\sqrt{3}} + m'\frac{1}{\sqrt{3}} + n'\frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \\ l'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + m'\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

và điều kiện quan hệ giữa chúng :

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$$

Từ hai điều kiện đó và từ hình vẽ ta tìm thấy :

$$n = \frac{2}{\sqrt{6}} \; ; \; m = l = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

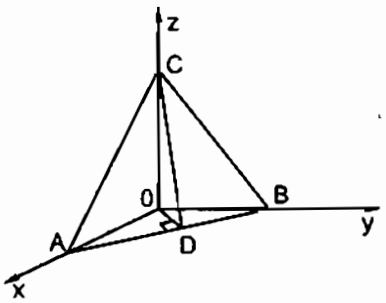
b) Trạng thái biến dạng tại M được tượng trưng bởi tenxơ biến dạng :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Đó là trạng thái biến dạng khối.

Ví dụ 2. Cho trường biến dạng xác định bởi tenxơ :

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}.10^{-2}$$



Hình 3–7

Góc $\widehat{ADC}$ sẽ thay đổi thế nào sau khi biến dạng. Cho biết OA = OB = OC = a, AD = BD.

Bài giải

Xác định các cosin chỉ phương của AD và CD.

Tính độ dài của CD :

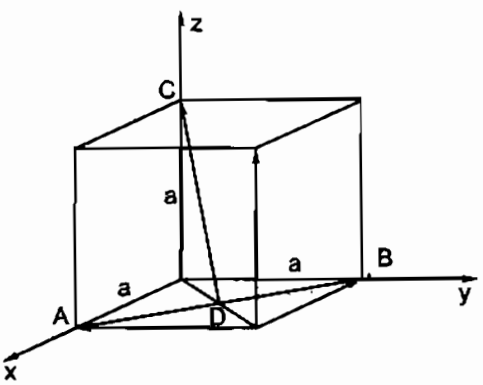
$$\overline{OD} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Vậy :

$$\overline{DC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$DC = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$



Hình 3–8

$$l = \cos(DC, x) = -\frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$m = \cos(DC, y) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n = \cos(DC, z) = \frac{a}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Các cosin chỉ phương của AD.

$$l' = \cos(AD, x) = -\frac{a}{a\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m' = \cos(AD, y) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

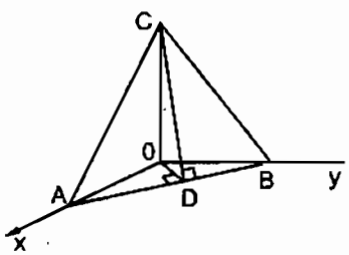
$$n' = 0$$

Vậy ta có : $\gamma_{\widehat{ADC}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[+\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}\right] = 0$$

Góc $\widehat{AOC}$ không thay đổi.

Bài tập



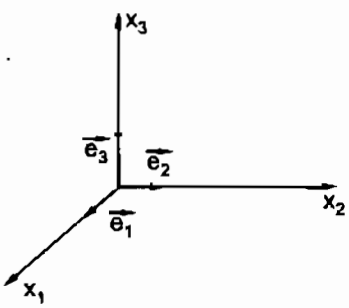
Hình 3–9

3.1. Cho tenxơ biến dạng tại điểm M của vật thể đàn hồi

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.10^{-2}$$

a) Xác định biến dạng chính và phương chính biến dạng.

b) Trạng thái biến dạng tại M là gì ?



Hình 3–10

3.2. Cho trường biến dạng (h.3–9) xác định bởi tenxơ :

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

Góc $\widehat{ADC}$ sẽ thay đổi thế nào sau khi biến dạng

Cho biết OA = OB = OC = a

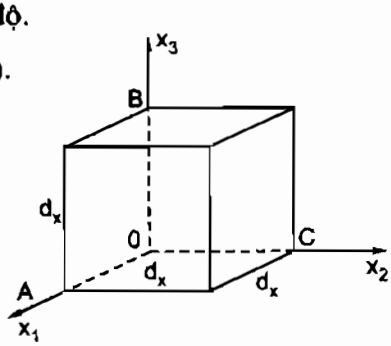
AD = BD.

3.3. Trường chuyển vị của vật thể đàn hồi theo quy luật $\vec{u} = 4x_1^2\vec{e_1} + x_2x_3^2\vec{e_2} + x_1x_3^2\vec{e_3}$

Các vectơ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

Tìm vị trí mới của các điểm A(1 ; 0 ; 2) và B(–1 ; 2 ; 1).

Xác định độ dài của $\overline{AB}$ sau biến dạng (h.3–10).



Hình 3–11

3.4. Trường chuyển vị của vật thể đàn hồi cho bởi quy luật

$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = x_2 + Ax_3$$
$$x_3' = x_3 + Ax_2$$

a) Tìm các thành phần của tenxơ biến dạng tại 0.

b) Tìm chuyển vị của các cạnh trong hình lập phương với A là hằng số.

Chương 4

QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Trong chương hai và chương ba ta đã đề cập đến trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng. Trong chương này ta đề cập đến quan hệ giữa ứng suất và biến dạng.

§4–1. CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI

Xét môi trường đàn hồi tuyến tính của Húc.

Khi vật thể đàn hồi là dị hướng, nghĩa là tính đàn hồi của vật thể theo những phương khác nhau là không giống nhau, thì tương quan giữa sáu thành phần ứng suất và sáu thành phần biến dạng phải thông qua 36 hằng số đàn hồi như sau :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} \qquad (4–1)$$

Trong trường hợp tổng quát đó ta cũng sẽ chứng minh rằng tenxơ ứng suất và tenxơ biến dạng phải có cùng phương chính.

Thực vậy, giả sử chọn trục tọa độ là trục chính của biến dạng, khi đó ta có các biến dạng chính là ε_{11}, ε_{22} và ε_{33}. Các biến dạng góc ε_{12}, ε_{23} và ε_{31} là bằng không. Từ (4–1) ta tìm thấy trị số của ứng suất σ_{23} là như sau :

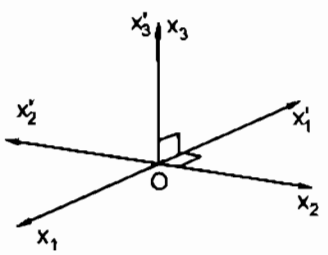
$$\sigma_{23} = a_{15}\varepsilon_{11} + a_{25}\varepsilon_{22} + a_{35}\varepsilon_{33} \qquad (4–2)$$

Bây giờ chúng ta sử dụng một phép quay trục tọa độ với Ox_3 cố định còn Ox_1 và Ox_2 quay quanh Ox_3 một góc 180° để đến chiều ngược lại như hình 4–1. Như vậy các cosin chỉ phương của các trục tọa độ trong hệ trục tọa độ $Ox_1x_2x_3$ là như sau :

$Ox'_1(-1, 0, 0)$

$Ox'_2(0, -1, 0)$

$Ox'_3(0, 0, 1)$



Hình 4–1

Theo công thức xoay trục (3–23) ta tính được các biến dạng dài theo Ox'_1, Ox'_2 và Ox'_3 là như sau :

$$\varepsilon'_{11} = \left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon'_{22} = \left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{22} \qquad (4\text{–}3)$$

$$\varepsilon'_{33} = \left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon_{33}$$

Như vậy các biến dạng dài trên ba trục đó là không đổi dù chiều trục tọa độ thay đổi.

Bây giờ ta tính trị số của ứng suất σ'_{23} theo hai cách. Theo bảng (4–1) nếu thay cột bên trái là các ứng suất σ'_{ij} thì cột bên phải cũng phải thay là ε'_{ij}. Vậy ta có :

$$\sigma'_{23} = a_{15}.\varepsilon'_{11} + a_{25}\varepsilon'_{22} + a_{35}\varepsilon'_{33} \qquad (4\text{–}4)$$

(Chú ý hệ trục tọa độ mới $Ox'_1x'_2x'_3$ cũng là hệ trục chính, biến dạng góc là bằng không).

Đưa (4–3) vào (4–4) ta tìm thấy :

$$\sigma'_{23} = \sigma_{23} \qquad (4\text{–}5)$$

Mặt khác sử dụng công thức xoay trục (2–12) ta tính được σ'_{23} như sau :

$$\sigma'_{23} = \left\{\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\sigma_{23} \qquad (4\text{–}6)$$

So sánh (4–5) và (4–6) ta có :

$$\sigma_{23} = -\sigma_{23}$$

Điều kiện đó chỉ thỏa mãn khi $\sigma_{23} = 0$.

Cùng một cách lập luận tương tự ta đi đến kết luận là $\sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$. Nói một cách khác trục chính của trạng thái biến dạng và trục chính của trạng thái ứng suất tại một điểm là trùng nhau. Điều kiện này không đòi hỏi a_{15}, a_{25} và a_{35} phải bằng nhau, nghĩa là vật liệu không nhất thiết phải đẳng hướng. Điều yêu cầu ở đây chỉ cần là vật thể có tính đàn hồi tuyến tính. Nghĩa là tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính như được biểu diễn trong biểu thức (4–1).

Nếu chọn hệ tọa độ là các trục chính thì tương quan giữa ứng suất và biến dạng là :

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\end{bmatrix} \qquad (4\text{–}7)$$

Đối với vật liệu đẳng hướng thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng dài trên bất cứ phương nào cũng như nhau, nghĩa là thay phương chịu lực đi thì biến dạng tương ứng với lực không thay đổi. Muốn đạt điều đó ta phải có :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = C_1$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{33} = a_{23} = a_{32} = C_2$$

Vậy quan hệ (4–7) được viết dưới dạng khai triển như sau :

$$\sigma_{11} = C_1\varepsilon_{11} + C_2(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{22} = C_1\varepsilon_{22} + C_2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{33} = C_1\varepsilon_{33} + C_2(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11})$$

Nếu đặt $C_1 = 2\mu$, $C_2 = \lambda$ và $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ thì có thể viết gọn lại dưới dạng :

$$\sigma_{kk} = 2\mu\varepsilon_{kk} + \lambda.\theta \qquad (4\text{–}8)$$

Trong đó lượng θ không phụ thuộc vào phép quay tọa độ.

Trong biểu thức(4–8) ta chỉ mới nói đến các tương quan giữa ứng suất chính và biến dạng chính. Để có được các tương quan giữa ứng suất và biến dạng góc ta xoay hệ trục $Ox_1x_2x_3$ có phương trùng với các trục chính đến một vị trí mới $Ox_1'x_2'x_3'$ bất kì. Các côsin chỉ phương của các trục Ox_1', Ox_2', Ox_3' đối với $Ox_1x_2x_3$ được kí hiệu là n_{ij}, chỉ số thứ nhất chỉ vị trí trục mới và chỉ số thứ hai để chỉ hệ trục cũ.

Vậy ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt vuông góc với Ox_1' và song song với Ox_2' được tính với các biểu thức sau :

$$\sigma_{11}' = \left\{\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix}\right\}^T\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix} \qquad (4\text{–}9)$$

$$\sigma_{12}' = \left\{\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix}\right\}^T\begin{bmatrix}n_{21}\\ n_{22}\\ n_{23}\end{bmatrix} \qquad (4\text{–}10)$$

Thay (4–8) vào (4–9) và khai triển ta có :

$$[(2\mu\varepsilon_{11}.n_{11} + \lambda\theta n_{11}), (2\mu\,\varepsilon_{22}.\,n_{12} + \lambda\theta.n_{12}), (2\mu\varepsilon_{33}.n_{13} + \lambda\theta n_{13})].\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân nội tích một lần nữa ta được

$$2\mu[\varepsilon_{11}.n_{11}^2 + \varepsilon_{22}.n_{12}^2 + \varepsilon_{33}.n_{13}^2] + \lambda\theta[n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2]$$

Vì tổng : $n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1$

và $$\varepsilon_{11}.n_{11}^2 + \varepsilon_{22}.n_{12}^2 + \varepsilon_{33}.n_{13}^2 = \left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix}\right\}^T\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix} = \varepsilon'_{11}$$

Nên (4–9) có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma'_{11} = 2\mu\varepsilon'_{11} + \lambda\theta \qquad (4–11)$$

Hình thức hoàn toàn giống như (4–8) nhưng chú ý ở đây σ'_{11} là ứng suất pháp trên mặt cắt có cả ứng suất tiếp.

Cùng một cách lập luận tương tự, ta viết (4–10) dưới dạng :

$$\sigma'_{12} = 2\mu\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_{11}\\ n_{12}\\ n_{13}\end{bmatrix}\right\}^T.\begin{bmatrix}n_{21}\\ n_{22}\\ n_{23}\end{bmatrix} + \lambda\theta\,[n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23}].$$

Vì $n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23} = 0$ (hai trục vuông góc với nhau). Nên biểu thức trên có dạng :

$$\sigma'_{12} = 2\mu\,\varepsilon'_{12} \qquad (4–12)$$

Đây là quan hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc.

Qua (4–11) và (4–12) ta nhận thấy ứng suất pháp gây nên biến dạng dài và ứng suất tiếp gây nên biến dạng góc. Cả hai biểu thức đó có thể viết gồm lại một như sau :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta.\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (4–13)$$

Trong đó δ_{ij} là toán tử Krô–nec–ke. Khi $i = j$ thì $\delta_{ij} = 1$, khi $i \neq j$ thì $\delta_{ij} = 0$.

(4–13) cho ta quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong môi trường đàn hồi tuyến tính đẳng hướng. **Trong môi trường đó ta chỉ còn lại hai hệ số đàn hồi là λ và μ. Các hệ số đó được gọi là các hằng số Lamé.**

Bây giờ ta hãy tìm biểu thức ngược lại, tính biến dạng qua ứng suất :

Gọi :

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad (4–14)$$

Thay trị số σ_{11}, σ_{22} và σ_{33} được tính từ (4–13) vào, ta có :

$$\sigma = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\lambda\theta = (2\mu + 3\lambda)\theta$$

Vậy :

$$\theta = \frac{\sigma}{2\mu + 3\lambda} \qquad (4–15)$$

Đem trị số θ đó thay vào (4–13) ta được :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \lambda\frac{\sigma\delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu}\right] \qquad (4–16)$$

Đó là biểu thức chúng ta cần tìm.

Biểu thức đó tách thành hai nhóm :

a) Khi $i = j$, $\delta_{ij} = 1$ ta có :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ii} - \lambda\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3\lambda + 2\mu}\right] \qquad (4–17)$$

$i = 1, 2, 3.$

b) Với $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$$

Đặt $\mu = G$ và gọi G là môđuyn trượt của vật liệu biểu thức đó được viết lại dưới dạng :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (4–18)$$

với $i \neq j$

§4–2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT ĐƠN

Ta gọi trạng thái ứng suất đơn là khi trên một phương chính ứng suất khác không, còn trên hai phương chính còn lại trị số ứng suất là bằng không.

Ta giả sử $\sigma_{11} \neq 0$ còn $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$.

Gọi môđuyn đàn hồi là tỷ số E giữa ứng suất σ_{11} và ε_{11}. Vậy ta có :

$$\sigma_{11} = E.\varepsilon_{11} \qquad (4–19)$$

Từ (4–17) ta có ngay các biểu thức :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{11} \qquad (4–20)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{11} \qquad (4–21)$$

Ta nhận thấy giữa ε_{11} và ε_{22} hay ε_{33} luôn luôn ngược dấu nhau. Nếu ε_{11} là dương nghĩa là vật liệu chịu giãn thì ε_{22} và ε_{33} là co lại. Nếu ε_{11} là âm, nghĩa là co lại thì ε_{22} và ε_{33} sẽ giãn ra. Tỉ số ν giữa ε_{22} và ε_{11} được gọi là hệ số Poát xông. **Ta dễ dàng xác định tương quan giữa E và ν với các hằng số đàn hồi λ và μ của Lamé.**

Thực vậy thay (4–20) vào (4–19) ta được :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad (4–22)$$

Đem chia (4–21) cho (4–20) ta có :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{4–23}$$

Nếu thay $\mu = G$ vào (4–23) ta dễ dàng xác định được λ theo ν và G. Ta có :

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - \nu} \tag{4–24}$$

Thay (4–24) vào (4–22) với chú ý $\mu = G$ ta tìm thấy tương quan giữa G và E.

$$G = \frac{E}{2(\nu + 1)} \tag{4–25}$$

Như vậy, một cách tổng quát công thức (4–16) có thể viết lại dưới dạng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma.\delta_{ij} \text{ với } i, j = 1, 2, 3 \tag{4–26}$$

$$\text{và } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

§4–3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

Là khi ba ứng suất chính đều khác không.

Ta hãy xét trong hệ tọa độ Oxyz, với trạng thái ứng suất khối có đầy đủ sáu thành phần của tenxơ ứng suất và biến dạng. Công thức (4–26) được viết thành hai nhóm như sau :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \tag{4–27}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \tag{4–28}$$

Các biểu thức đó được gọi là các biểu thức của định luật Húc tổng quát.

Công thức (4–13) biểu diễn tương quan giữa ứng suất và biến dạng được viết như sau :

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G.\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G.\gamma_{yz}.$$

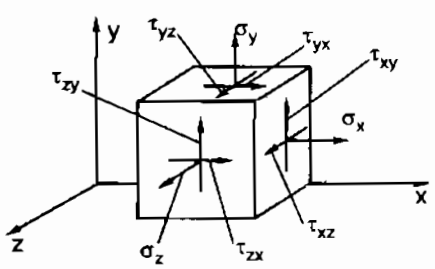
Trong đó $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Các biểu thức này được gọi là các biểu thức của Lamé.

§4–4. THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Trong tương quan của Húc ta có thể tính được thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích.

Ta hãy tưởng tượng ngoại lực gây nên biến dạng đàn hồi tăng dần từ không đến một trị số xác định trong khoảng thời gian nào đó. Xét ở một thời điểm t, trạng thái ứng suất tại một điểm nào đó trong vật thể đàn hồi có các trị số ứng suất như được biểu diễn trên hình 4–2. Đối với phân tố đang xét, ứng lực do các ứng suất gây nên trở thành ngoại lực tác động lên phân tố. Giả sử trong khoảng thời gian δt phân tố có các biến dạng $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\varepsilon_z$, $\delta\gamma_{xy}$, $\delta\gamma_{yz}$, $\delta\gamma_{xz}$. Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao ta có thể xem công của ngoại lực tác động lên phân tố như tổng cộng của các thành phần ứng lực riêng lẻ trong các độ chuyển dời tương ứng. Ta có :



Hình 4–2

$$dA = \sigma_x\delta\varepsilon_x dxdydz + \sigma_y\delta\varepsilon_y dxdydz + \sigma_z\delta\varepsilon_z dxdydz + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}dxdydz$$
$$+ \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}dxdydz + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}dxdydz \qquad (4–29)$$

Nếu không có sự mất mát về năng lượng công đó được chuyển hóa hoàn toàn thành thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố :

$$\delta(dU) = [\sigma_x\delta e_x + \sigma_y\delta e_y + \sigma_z\delta e_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}]dxdydz \qquad (4–30)$$

Kí hiệu $u = \dfrac{dU}{dV}$ là thế năng tích lũy trong một đơn vị thể tích thì (4–30) có thể viết lại :

$$\delta u = \sigma_x\delta e_x + \sigma_y\delta e_y + \sigma_z\delta e_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} \qquad (4–31)$$

Trong trường hợp biến dạng là thuận nghịch thì ta dễ dàng chứng minh được rằng δu là một vi phân toàn phần. Thực vậy, trong quá trình đó sự biến thiên của thế năng U trong quá trình đặt tải và bỏ tải là bằng không ; nghĩa là thế năng tích lũy được trong hệ sẽ hoàn toàn biến đổi thành công trong quá trình giảm tải vậy :

$$\oint \delta U = 0 \qquad (4–32)$$

Từ định nghĩa ta có :

$$U = \int_V u dv$$

Vậy :

$$\delta U = \int_V \delta u dv$$

Đem thay biểu thức đó vào (4–32) ta được :

$$\oint \int_V \delta u dv = 0$$

Điều đó chứng tỏ rằng δu là một vi phân toàn phần. Do đó ta có thể biểu diễn δu dưới dạng :

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_x}\delta\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_y}\delta\varepsilon_y + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_z}\delta\varepsilon_z + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xy}}\delta\gamma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xz}}\delta\gamma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{yz}}\delta\gamma_{yz} \qquad (4\text{–}33)$$

So sánh với biểu thức(4–31) ta có các liên hệ :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_y}, \sigma_z = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xy}}, \tau_{yz} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{yz}}, \tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xz}} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}34)$$

Các biểu thức này rất cần thiết cho chúng ta trong mục tới. Bây giờ ta hãy quay lại biểu thức (4–31), tích phân biểu thức (4–31) trong quá trình đặt tải ta được thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích của quá trình đó là :

$$u = \int(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}) \qquad (4\text{–}35)$$

Vì tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tương quan bậc nhất nên ta dễ dàng tìm thấy biểu thức tích phân đó như sau :

$$u = \frac{1}{2}[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}] \qquad (4\text{–}36)$$

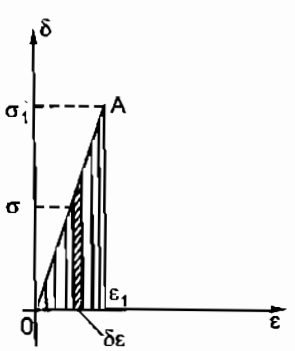
Thực vậy giả sử ta xét với trạng thái ứng suất đơn chẳng hạn. Khi đó tương quang giữa σ và ε được biểu diễn như trên hình 4–6 : Tích phân trong quá trình đặt tải từ 0 đến σ_1 ta có thế năng tích lũy trong đơn vị thể tích là :

$$u_1 = \int\sigma\delta\varepsilon = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2}$$

Trị số của u_1 được tượng trưng bằng diện tích của tam giác OAB.

Thay trị số của ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} bằng các biểu thức (4–27) và (4–28) ta được :

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \qquad (4\text{–}37)$$



Hình 4–3

Nếu phân tố được tách ra bằng các mặt chính thì biểu thức của u có dạng :

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \qquad (4\text{–}38)$$

Nếu xem trạng thái ứng suất như tổng của ứng suất cầu với $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = \sigma_{tb}$ và ứng suất lệch thì thế năng trên đây sẽ là tổng của hai thế năng, thế năng biến dạng thể tích U_{tt} và thế năng biến dạng hình dáng U_{hd} :

$$U = U_{tt} + U_{hd}$$

Ta dễ dàng tính được U_{tt} với biểu thức :

$$U_{tt} = 3\frac{1 - 2\nu}{2E}\sigma_{tb}^2$$

hay :

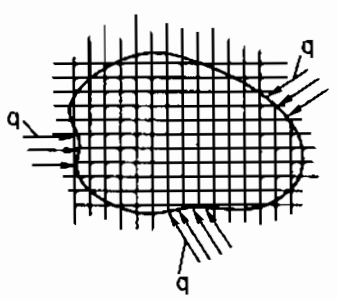
$$U_{tt} = \frac{1 - 2\gamma}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad (4\text{–}39)$$

Vậy thế năng biến đổi hình dáng tích lũy trong đơn vị thể tích là : $U_{hd} = U - U_{tt}$. Công thức của nó sẽ là :

$$U_{hd} = \frac{1 + \nu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \qquad (4\text{–}40)$$

§4–5. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI BÀI TOÁN ĐÀN HỒI

Giả sử có vật thể đàn hồi chịu lực (h.4–4). Mong muốn của chúng ta là xác định được trạng thái ứng suất tại mọi điểm trong vật thể đàn hồi, vì khi biết được trạng thái ứng suất tại mọi điểm trong vật thể ta mới biết chỗ nào vật thể có trạng thái ứng suất nguy hiểm nhất. Ta gọi chỗ đó là những điểm nguy hiểm và nếu như tại những điểm đó vật liệu vẫn đủ bền thì rõ ràng vật thể sẽ bền dưới tác dụng của ngoại lực.



Hình 4–4

Với phương pháp của đàn hồi người ta đề ra cách giải quyết bài toán như sau. Chia nhỏ vật thể đàn hồi ra thành những phân tố vô cùng bé. Nếu bài toán được giải quyết trong hệ tọa độ Đềcác thì những phân tố đó có hình dáng là những hình hộp, nếu trong tọa độ trụ thì chúng là những phần hình trụ. Rõ ràng giữa chúng có sự liên kết với nhau về ứng suất, về chuyển vị và có sự tương quan giữa ứng suất và biến dạng như ta đã xét trên đây. Dựa vào điều kiện đã biết các phân tố ở ngoài cùng, trên sát bề mặt của vật thể, vì tại đó có sự cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, hay các điều kiện chuyển vị đã biết, ta suy dần cho các lớp phân tố bên trong. Với cách đó ta biết trạng thái ứng suất trên toàn vật thể.

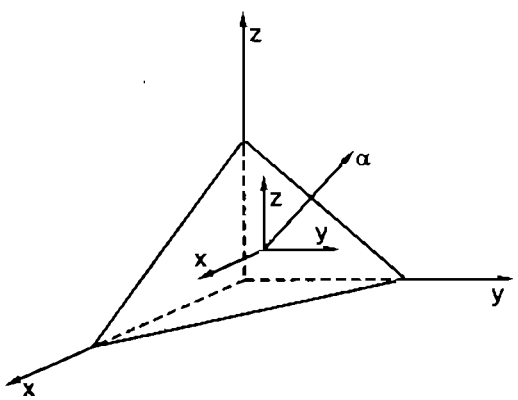
Tóm lại ta phải giải quyết bài toán với các phương trình sau đây :

a) Điều kiện cân bằng của phân tố (phương trình Naviê) :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\rho X=0\left(=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0\left(=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0\left(=\rho\frac{\partial^2 \omega}{\delta t^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$

b) Quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng (các phương trình Côsi) :

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\gamma_{yz}=\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\gamma_{zx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial\omega}{\partial z};\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(II)}$$



Hình 4–5

c) Các phương trình tương thích (phương trình Xanh – Vơnăng)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}\\
&2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

d) Tương quan giữa biến dạng và ứng suất. Định luật Húc tổng quát :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)]; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_z + \sigma_y)]; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Hoặc dùng hệ thống phương trình của Lamê (4–27) :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x \qquad & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y \qquad & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z \qquad & \tau_{zy} &= G\gamma_{zy}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Ngoài những hệ phương trình trên các nghiệm phải thỏa mãn điều kiện bề mặt. Nếu như xét một phân tố sát ngay trên bề mặt của vật thể thì có thể xem bề mặt của vật thể là một mặt nghiêng nào đó có pháp tuyến ν (h.4–5). Ngoại lực tác dụng tại đó được chia thành ba thành phần X_ν, Y_ν, Z_ν, (trên đơn vị diện tích). Điều kiện mặt ngoài được viết hoàn toàn giống như các biểu thức (2–7). Ta có :

$$\left.\begin{aligned}
X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\
Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\
Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(4–41)}$$

Giải quyết một lúc bốn hệ thống phương trình vi phân đó là một điều khó khăn lớn. Cũng vì vậy không phải bất cứ bài toán nào ta cũng giải được. Nói chung ta có hai cách giải. Cách thứ nhất xem ẩn số phải tìm ban đầu là các thành phần ứng suất σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} và τ_{zx} và cách thứ hai xem các chuyển vị u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z) là ẩn. Ta sẽ lần lượt trình bày hai cách đó :

1. Cách giải thứ nhất : Xem các thành phần ứng suất là ẩn

Bài toán đưa về việc lấy tích phân chín phương trình (I) và (III) với sáu hàm chưa biết. Như vậy trong nghiệm tổng quát sẽ có mặt các hàm tùy ý. Các hàm này được xác định từ điều kiện mặt ngoài (4–42).

Vì ta đã lấy ứng suất làm ẩn nên ta phải chuyển hệ phương trình (III) sang dạng ứng suất. Để làm được điều đó ta sử dụng hệ phương trình (IV) và hệ phương trình (I) lấy đạo hàm các phương trình đó và thay vào (III) ta sẽ tìm thấy :

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial x^2} = 0\\
&\nabla^2\sigma_y + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial y^2} = 0\\
&\nabla^2\sigma_z + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial z^2} = 0\\
&\nabla^2\tau_{yx} + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial y\partial z} = 0\\
&\nabla^2\tau_{zx} + \frac{3}{1+\gamma}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial z\partial x} = 0\\
&\nabla^2\tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial x\partial y} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}42)$$

trong đó ∇^2 là toán tử Laplatxơ (Laplace) với định nghĩa :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Các phương trình đó được thiết lập khi xem các lực thể tích bằng không và được gọi là phương trình của Bentrami Misen. Khi có kể đến lực thể tích thì các phương trình đó có dạng như sau :

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_x + \frac{3}{1+\gamma}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial X}{\partial x} = 0\\
&\nabla^2\sigma_y + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial Y}{\partial y} = 0\\
&\nabla^2\sigma_z + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial Z}{\partial z} = 0\\
&\nabla^2\tau_{yx} + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial y\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} = 0\\
&\nabla^2\tau_{zx} + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial z\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} = 0\\
&\nabla^2\tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu}.\frac{\partial^2\sigma_{tb}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}43)$$

2. Cách giải thứ hai : xem các thành phần chuyển vị là ẩn

Ta phải chuyển tất cả hệ phương trình cân bằng (I) và các điều kiện trên mặt ngoài (4–41) viết theo các thành phần chuyển vị u, v và w.

Từ các phương trình của Lamê (4–13) ta có thể viết :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u}{\partial x}\\ \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}44)$$

Lấy đạo hàm theo x, theo y và theo z sau đó thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình cân bằng (I) với chú ý :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Phương trình cân bằng thứ nhất sẽ có dạng :

$$(\lambda + g)\frac{\partial \theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + \rho X = 0 \left(= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \qquad (4\text{–}45)$$

Cùng cách thiết lập tương tự ta có hai phương trình khác :

$$\left.\begin{aligned}(\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + G\nabla^2 v + \rho Y &= 0\left(= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\\ (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial z} + G\nabla^2 \omega + \rho Z &= 0\left(= \rho\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}46)$$

Những phương trình đó được gọi là các phương trình Lamê.

Các điều kiện bề mặt sẽ được viết như sau : Từ phương trình đầu ta có

$$X_\nu = \lambda\theta l + G\left[\frac{\partial u}{\partial u} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n\right] + G\left[\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial \omega}{\partial x} n\right]$$

Chú ý rằng biểu thức ở trong dấu ngoặc vuông thứ nhất biểu thị đạo hàm của hàm số u theo pháp tuyến ν của mặt ngoài vật :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

Cũng tính toán tương tự với các phương trình thứ hai và thứ ba ta có :

$$\left.\begin{aligned}X_\nu &= \lambda\theta l + G\frac{\partial u}{\partial \nu} + G\left[\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial \omega}{\partial x} n\right]\\ Y_\nu &= \lambda\theta m + G\frac{\partial v}{\partial \nu} + G\left[\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial \omega}{\partial y} n\right]\\ Z_\nu &= \lambda\theta n + G\frac{\partial \omega}{\partial \nu} + G\left[\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial \omega}{\partial z} n\right]\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}47)$$

Từ các phương trình Lamê và các điều kiện mặt ngoài (4–41) ta sẽ tìm thấy các chuyển vị u, v và ω. Sau khi đã có các chuyển vị ta dễ dàng xác định được các biến dạng và từ các biểu thức của Húc ta sẽ tìm được ứng suất.

Ngoài hai cách giải trên đây ta còn một cách giải thứ ba được gọi là cách giải hỗn hợp, nghĩa là trên một phần này của vật thể thì giải theo chuyển vị và phần khác thì giải theo ứng suất. Ta không trình bày kĩ cách giải này nhưng những phương trình cơ bản thì ta đã thiết lập xong.

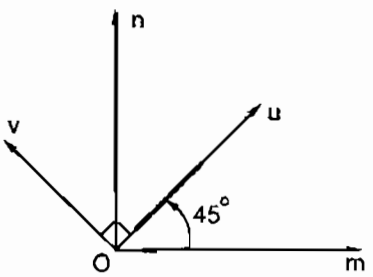
Ta nhận thấy theo cách giải trên đây sẽ gặp rất nhiều khó khăn, nhiều bài toán trong thực tế hầu như không giải được. Để có thể áp dụng tính toán cho những bài toán ứng dụng trong kĩ thuật người ta thường đưa ra một số giả thuyết. Nhờ những giả thuyết đó mà ta đã đơn giản được các phương trình vi phân trên đây và đã tìm ra nghiệm dễ dàng. Tất nhiên nghiệm đó không phải là nghiệm chính xác, nhưng độ chính xác của nó cũng đủ đáp ứng đối với yêu cầu trong thực tế. Chúng ta sẽ dùng các giả thuyết đó để tính toán về thanh mà ta sẽ đề cập tới trong các chương sau.

Ta lấy một số ví dụ về tính toán tương quan giữa biến dạng và ứng suất :

Ví dụ 1. Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực người ta đo được biến dạng tỉ đối theo các phương Om, On và Ou như sau (hình 4-6).

$$\varepsilon_m = 2{,}81.10^{-4},\ \varepsilon_n = -2{,}81.10^{-4},\ \varepsilon_u = 1{,}625.10^{-4}$$

Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm đang xét. Cho biết hệ số Poát xông ν = 0,3, môđuyn đàn hồi $E = 2.10^4 kN/cm^2$.



Hình 4–6

Bài giải

Ta nhận thấy phương vuông góc với bề mặt của vật thể là một phương biến dạng chính vì theo phương này vật thể không chịu lực. Do đó ta có thể bỏ qua biến dạng của phương này và bài toán được xem là bài toán phẳng.

Sử dụng công thức (4–27) ta có thể viết :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}[\sigma_m - \nu\sigma_n] = \frac{1}{2.10^4}[\sigma_m - 0{,}3\sigma_n] = 2{,}81.10^{-4}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}[\sigma_n - \nu\sigma_m] = \frac{1}{2.10^4}[\sigma_n - 0{,}3\sigma_m] = -2{,}81.10^{-4}$$

Từ các biểu thức đó ta tính được $\sigma_m = 4{,}32\ kN/cm^2$, $\sigma_n = -4{,}32\ kN/cm^2$.

Sử dụng công thức xoay trục (2–29) và xem Omn như tọa độ gốc ta có :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2}\cos(2.45^o) - \tau_{nm}.\sin(2.45^o)$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2}\cos(2.135^o) - \tau_{nm}.\sin(2.135^o)$$

Với chú ý $\sigma_m + \sigma_n = 0$, $\cos(2.45^o) = 0$, $\cos(2.135^o) = 0$, $\sin(2.45^o) = 1$, $\sin(2.135^o) = -1$ ta tìm thấy :

$$\sigma_u = -\tau_{mn} \quad (1)$$

$$\sigma_v = -\sigma_u \quad (2)$$

Vậy ta có thể viết :

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}[\sigma_u + \nu\sigma_u] = 1{,}625.10^{-4}$$

Từ đó ta có :

$$\sigma_u = \frac{2.10^4.1{,}625.10^{-4}}{1{,}3} = 2{,}5 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số của ứng suất tiếp τ_{nm} là :

$$\tau_{nm} = -\sigma_u = -2{,}5 \text{ kN/cm}^2$$

Phương của trục chính ứng suất được xác định từ biểu thức (2–30)

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_{nm}}{\sigma_m - \sigma_n} = \frac{2.2{,}5}{4{,}32 + 4{,}32} = 0{,}5787$$

Vậy : $2\alpha = 30^o$ và $\alpha_1 = 15^o$, $\alpha_2 = 105^o$.

Trị số của ứng suất chính được tính từ công thức (2–37). Ta có :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_n + \sigma_m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_m - \sigma_n}{2}\right)^2 + \tau_{nm}^2}$$

Thay số vào ta được :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(4{,}32 + 4{,}32)^2 + 4(2{,}5)^2} = \pm 5 \text{ kN/cm}^2$$

Ghi chú :

Ta có thể tính σ_u và σ_v theo các công thức xoay trục như sau :

$$\sigma_u = \left\{\begin{bmatrix}\sigma_m & \tau_{mn}\\ \tau_{nm} & \sigma_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos 45^o\\ \sin 45^o\end{bmatrix}\right\}^T \begin{bmatrix}-\cos 45^o\\ \sin 45^o\end{bmatrix}$$

Với trị số của $\cos 45^o = \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và chú ý tổng $\sigma_m + \sigma_n = 0$. Tích trên dẫn đến biểu thức :

$$\sigma_u = \sigma_m.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \tau_{mn}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \tau_{nm}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_n\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

và từ đó ta có :

$$\sigma_u = -\tau_{nm} \quad (1)$$

Tương tự ta có :

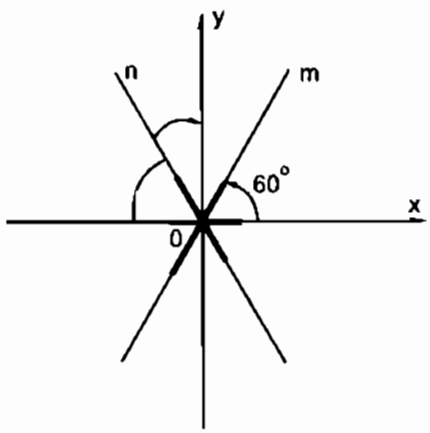
$$\sigma_v = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_m & \tau_{mn} \\ \tau_{nm} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_v = \sigma_m.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_{mn}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_{nm}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_n\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sigma_v = \tau_{mn}$ vậy theo biểu thức (1) ta có :

$$\sigma_v = -\sigma_u \qquad (2)$$

Ví dụ 2. Tại điểm A trên mặt một vật thể đàn hồi chịu lực, người ta đo được các biến dạng tỉ đối theo ba phương xếp theo hình sao góc 60° (hình 4–7). Ta ký hiệu các biến dạng đó là ε_x, ε_m, ε_n. Lập công thức tính những ứng suất chính và phương chính tại điểm đó.



Hình 4–7

Bài giải

Từ công thức (4–26) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma.\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

với $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$.

Ta có thể tính ứng suất theo biến dạng :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu}E\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma.\delta_{ij} \qquad (1)$$

Vì bề mặt của vật thể không chịu lực nên ở đây ta có thể xem như bài toán phẳng với $\sigma_{33} = 0$. Trường hợp đang xét chỉ có các biến dạng dài nên ta có thể viết biểu thức (1) dưới dạng :

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{1+\nu}[E.\varepsilon_{ii} + \nu\sigma] \qquad (2)$$

Lấy tọa độ Oxy làm tọa độ gốc, tenxơ ứng suất được viết trong tọa độ đó là :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Như vậy ứng suất pháp theo phương m được tính với công thức xoay trục :

$$\sigma_m = \frac{1}{1+\nu}[E\varepsilon_m + \nu\sigma] = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

Ở đây $l = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$ (vì tính từ trục m sang x ngược với chiều từ x sang m).

$$m = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ta có :

$$\sigma_m = \frac{1}{1+\nu}[E\varepsilon_m + \nu\sigma] = \frac{\sigma_x}{4} - \tau_{xy}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sigma_y}{4} \quad (3)$$

Tương tự như vậy với σ_n. Ta có :

$$\sigma_n = \frac{1}{1+\nu}[E\varepsilon_n + \nu\sigma] = \left\{\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\right\}^T\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{1+\nu}[E\varepsilon_n + \nu\sigma] = \frac{\sigma_x}{4} + \tau_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\sigma_y \quad (4)$$

Tương quan giữa σ_x và ε_x cũng được viết dưới dạng :

$$\frac{1}{1+\nu}[E\varepsilon_x + \nu\sigma] = \sigma_x \quad (5)$$

Ba phương trình (3), (4), (5) lập thành hệ thống ba phương trình với ba ẩn số $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$, σ_y và τ_{xy} như sau :

$$\begin{cases}\frac{1}{1+\nu}E.\varepsilon_m + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma = \frac{\sigma}{4} - \tau_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sigma_y}{2} & (3)\\ \frac{1}{1+\nu}E.\varepsilon_n + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma = \frac{\sigma}{4} + \tau_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sigma_y}{2} & (4)\\ \frac{1}{1+\nu}E.\varepsilon_x + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma = \sigma_x & (5)\end{cases}$$

Cộng vế với vế của cả ba phương trình với chú ý $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$ ta sẽ tìm thấy nghiệm thứ nhất σ :

$$\sigma = \frac{2E}{3(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_m + \varepsilon_n)$$

Lấy (4) trừ (3) ta được :

$$\tau_{xy} = \frac{E}{\sqrt{3}(1+\nu)}(\varepsilon_n - \varepsilon_m)$$

Nhân (5) lên đôi lần và trừ cho (4) và (3) ta sẽ tìm thấy :

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2E}{3(1+\nu)}(2\varepsilon_x - \varepsilon_m - \varepsilon_n)$$

Từ đó ta tìm thấy phương chính với biểu thức :

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_n - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_x - \varepsilon_m - \varepsilon_n}$$

Trị số của các ứng suất cực đại và cực tiểu là :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{E}{3(1-\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_m + \varepsilon_n) \pm \frac{\sqrt{3}E}{3(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_m)^2 + (\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_x)^2}$$

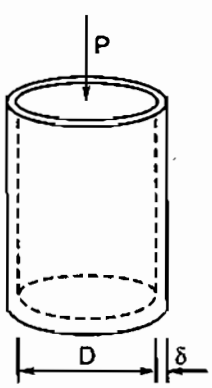
Chú ý. Chúng ta cũng có thể dùng công thức xoay trục :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

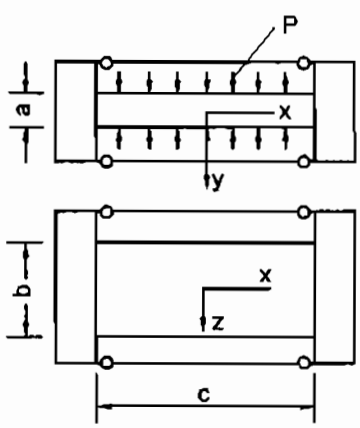
để thiết lập các phương trình (3) và (4).

Bài tập

4.1. Một hình trụ tròn đặc bằng thép có đường kính D = 50 mm đặt vừa khít vào một ống đồng có bề dày δ = 1mm. Hình trụ thép bị nén với lực P = 150 kN (hình 4–8). Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm ống. Cho ν = 0,3, E = 2.10^4 kN/cm^2.



Hình 4–8

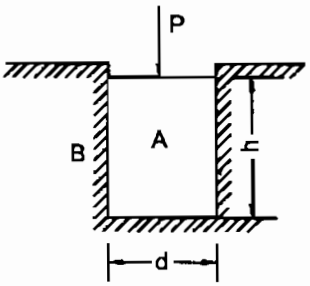


Hình 4–9

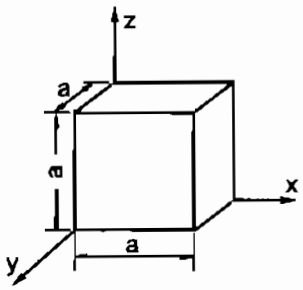
4.2. Một tấm thép kích thước a × b × c đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng, 2 tấm này được liên kết với nhau bằng 4 thanh (hình 4–9). Khi tấm thép chịu áp lực P phân bố đều trên hai mặt bên thì ứng suất kéo của thanh là bao nhiêu ?

Tính ứng suất trong tấm thép. Cho $E_{tấm} = E_{thanh}$.

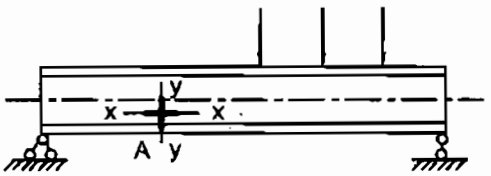
4.3. Một khối hình trụ tròn A bằng đồng được nhét khít vào một lỗ khoét của một vật cứng tuyệt đối B và chịu lực nén P = 50 kN. Xác định áp lực nén vào vách lỗ khoét. Xác định biến dạng Δh và ΔV của khối đồng. Cho đường kính của khối d = 4cm, chiều cao h = 10cm, ν = 0,31. E = $1,1.10^4$kN/cm^2 (h.4–10).



Hình 4–10



Hình 4–11



Hình 4–12

4.4. Xác định giá trị các ứng suất trên mặt bên của phân tố hình lập phương có cạnh a = 5cm. Cho biết biến dạng dài tuyệt đối $\Delta x = 5.10^{-2}$mm, $\Delta y = 1.10^{-2}$mm, $\Delta z = 7{,}5.10^{-2}$mm, và biến dạng góc $\gamma_{xy} = 2.10^{-2}$, $\nu_{yz} = \nu_{zx} = 0$, $E = 2.10^4$ kN/cm^2, $\mu = 0{,}3$; $G = 8.10^3$.

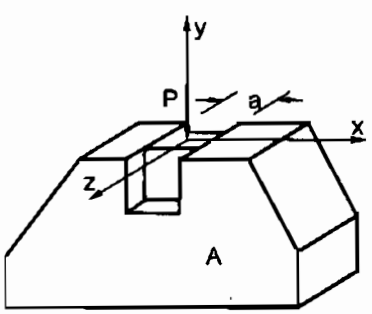
Tìm giá trị các ứng suất chính của phân tố (h.4–11).

4.5. Nhờ dụng cụ đo biến dạng (Tenxômét) người ta đo được độ giãn dài tỷ đối tại điểm A của dầm dọc theo cầu khi có tải trọng như sau :

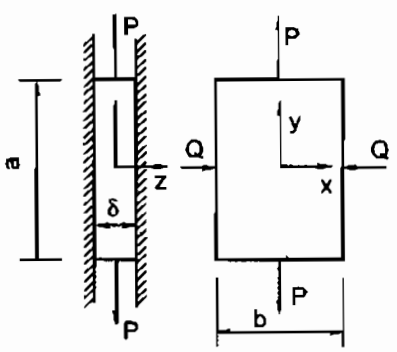
$\varepsilon_x = 0{,}0004.$ $\varepsilon_y = -0{,}00012.$

Xác định ứng suất pháp theo phương x và y (h.4–12).

4.6. Một khối lập phương bằng bêtông đặt vào vừa khít rãnh của vật thể A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên p = 1kN/cm^2. Xác định áp lực nén vào vách rãch và độ biến dạng thể tích tuyệt đối. Cho cạnh a = 5cm, $\nu = 0{,}36$, $E = 8.10^2$ kN/cm^2. Vật thể A coi như tuyệt đối cứng (h.4–13).



Hình 4–13



Hình 4–14

4.7. Một phân tố không bị biến đổi thể tích, có hai ứng suất chính $\sigma_1 = 100$ kN/cm^2, $\sigma_2 = 60$ kN/cm^2. Hỏi ứng suất chính thứ ba phải bằng bao nhiêu ?

4.8. Một tấm mỏng hình chữ nhật bề dày δ đặt giữa hai vách cứng song song. Tấm chịu lực kéo P và lực nén Q như trên (h.4–14). Tính áp lực nén của tấm vào vách và độ biến đổi thể tích của tấm. Bỏ qua lực ma sát giữa vách và tấm.