

Phân II

CÁC BÀI TOÁN THUỘC VỀ THANH

Chương 5

ĐẶC TRUNG HÌNH HỌC CỦA MỘT HÌNH PHẲNG

Trong quá trình tính độ bền của thanh ta luôn luôn phải đề cập đến các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang vì vậy ở đây ta phải đưa ra các định nghĩa về các đặc trưng đó.

§5-1. ĐỊNH NGHĨA

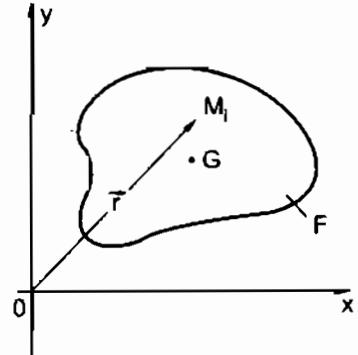
Ta có một hình phẳng diện tích F được biểu diễn như trên hình 5-1. Gọi Oxy là hệ trục tọa độ vuông trong mặt phẳng của hình. $M_i(x, y)$ là một điểm bất kỳ trên hình. Khoảng cách từ O đến M_i là r .

1. Mômen tĩnh. Ta gọi mômen tĩnh của F đối với O là biểu thức tích phân :

$$\vec{S}_o = \int_F \overrightarrow{OM}_i dF \quad (5-1)$$

Thành phần hình chiếu của biểu thức đó xuống các trục tọa độ là :

$$S_x = \int_F y dF \text{ và } S_y = \int_F x dF \quad (5-2)$$



Hình 5-1

Các thành phần đó được gọi là mômen tĩnh của F đối với các trục Ox và Oy.

Ta luôn luôn có thể tìm thấy một điểm G sao cho :

$$\vec{S}_G = \int_F \overrightarrow{GM}_i dF = 0 \quad (5-3)$$

Điểm G đó được gọi là trọng tâm của hình phẳng. Tọa độ của G được xác định như sau :

$$\text{Vì rằng : } \overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i$$

$$\text{nên ta có : } \vec{S}_o = \int_F (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) dF = \overrightarrow{OG} \cdot F \quad (5-4)$$

$$\text{Từ đó ta có : } x_G = \frac{S_x}{F}; \quad y_G = \frac{S_y}{F} \quad (5-5)$$

Một trục đi qua trọng tâm G của hình được gọi là trục trung tâm. Mômen tĩnh của hình đối với trục đó là bằng không.

2. Mômen quán tính. Gọi mômen quán tính của F đối với O là biểu thức tích phân :

$$J_p = \int_F r^2 dF \quad (5-6)$$

J_p còn được gọi là mômen quán tính đặc cực đối với O . Nếu thay r bằng khoảng cách từ M_i đến một trục nào đó thì ta sẽ có mômen quán tính của F đối với trục đó. Ví dụ thay r bằng x hoặc y ta sẽ được mômen quán tính của F đối với trục y hoặc trục x :

$$J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_x = \int_F y^2 dF \quad (5-7)$$

Vì rằng $r^2 = x^2 + y^2$ nên ta có :

$$J_p = J_x + J_y \quad (5-8)$$

3. Mômen quán tính li tâm. Gọi mômen quán tính li tâm của F đối với hệ trục tọa độ Oxy là biểu thức tích phân :

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (5-9)$$

Một hệ trục tọa độ mà mômen quán tính li tâm của F đối với hệ đó là bằng không thì hệ được gọi là hệ trục quán tính chính.

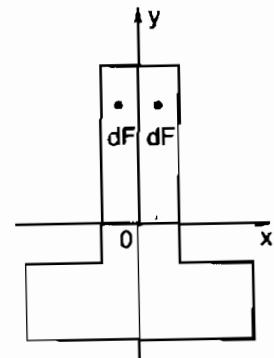
Tại mỗi điểm trên mặt phẳng của F ta đều tìm thấy một hệ trục tọa độ như vậy. Ta sẽ chứng minh điều này ở phần sau. Một hệ trục tọa độ quán tính chính đi qua G thì được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Ta dễ dàng nhận thấy rằng khi hình có một trục đối xứng thì mọi trục vuông góc với trục đối xứng đó lập thành một hệ trục quán tính chính (h.5-2).

Thực vậy vì ta luôn luôn tìm thấy một cặp diện tích dF đối xứng để :

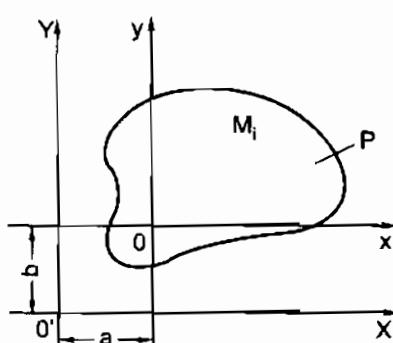
$$J_{xy} = \int_F yx dF = \int_F (xy - yx) dF = 0$$

Trong quá trình tính toán sau này ta luôn luôn cần thiết đến hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm vì vậy sau đây ta sẽ nói rõ cách xác định hệ trục tọa độ đó.



Hình 5-2

§5-2. CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG



Hình 5-3

Giả sử ta đã tính được các mômen quán tính của F đối với hệ trục tọa độ Oxy. Xác định các mômen quán tính của F đối với hệ trục $O'XY$ song song với hệ trục Oxy (h.5-3).

Gọi a, b là tọa độ của O trong hệ trục $O'XY$. Tương quan giữa các tọa độ như sau :

$$\overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}$$

$$\text{Vậy : } X = a + x; Y = b + y$$

Theo định nghĩa :

$$J_X = \int_F Y^2 dF = \int_F (b + y)^2 dF$$

Sau khi khai triển biểu thức đó ta có :

$$J_X = J_x + 2bS_x + b^2 F \quad (5-10a)$$

Tương tự ta có :

$$J_Y = J_y + 2bS_y + a^2 F \quad (5-10b)$$

Mômen quán tính li tâm là :

$$J_{XY} = \int_F XY dF = \int_F (a + x)(b + y) dF$$

$$J_{XY} = J_{xy} + bS_y + aS_x + abF \quad (5-11)$$

Nếu hệ trục Oxy là hệ trục trung tâm thì các công thức (5-10) và (5-11) sẽ có dạng :

$$\left. \begin{array}{l} J_X = J_x + b^2 F \\ J_Y = J_y + a^2 F \\ J_{XY} = J_{xy} + abF \end{array} \right\} \quad (5-12)$$

§5-3. CÔNG THỨC XOAY TRỤC

Giả sử ta đã tính được các mômen quán tính của F đối với hệ trục tọa độ Oxy. Xác định các mômen quán tính đối với hệ trục Ouv xoay đi so với Oxy một góc α (h.5-4).

Gọi M'_i là hình chiếu của M_i trên trục Ox. Ta có biểu thức vectơ :

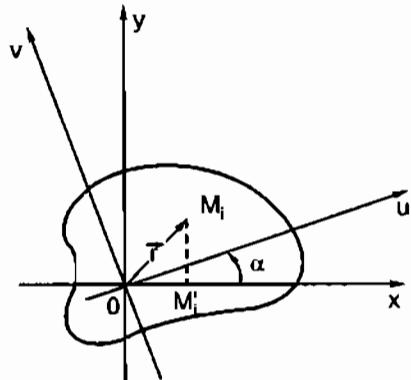
$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OM'_i} + \overrightarrow{M'_i M_i}$$

Các thành phần hình chiếu của phương trình đó trên các trục Ou và Ov là :

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Theo định nghĩa ta có :



Hình 5-4

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{uv} = \int_F uv dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) dF$$

Sau khi khai triển ta được :

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ J_v &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ J_{uv} &= (J_x - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Sau khi đổi cung cuối cùng ta có :

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_v &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{uv} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

Nếu hệ trục Ouv là một hệ trục quán tính chính thì $J_{uv} = 0$. Từ biểu thức cuối cùng của (5-13) ta có được công thức để xác định phương của trục quán tính chính như sau :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5-14)$$

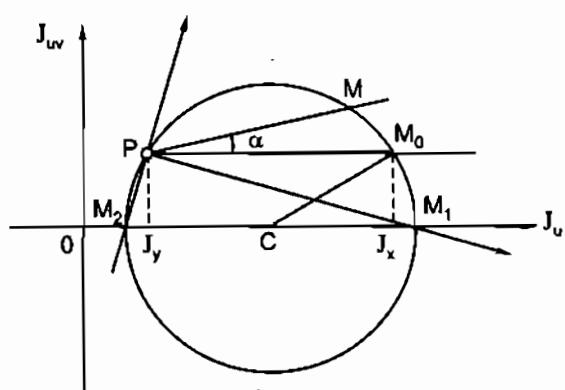
Phương trình đó luôn luôn có hai nghiệm, nghĩa là luôn xác định được hai trục quán tính chính vuông góc với nhau. Đó là điều mà ta đã phát biểu trên đây.

Các công thức của J_u và J_{uv} trong (5-13) về mặt toán học hoàn toàn giống các công thức (2-21). Vậy nếu dùng một hệ trục tọa độ với trục hoành biểu diễn cho trị số của J_u và trục tung biểu diễn cho trị số của J_{uv} thì tương quan giữa J_u và J_{uv} là tương quan của một đường tròn. Phương trình của đường tròn đó có dạng như sau :

$$\left(J_u - \frac{J_x + J_y}{2} \right)^2 + J_{uv}^2 = \left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2 \quad (5-15)$$

Vòng tròn được biểu diễn trên hình 5-5. Nếu chọn phương của trục hoành song song với phương của Ox thì lập luận tương tự như vòng MO ứng suất ta sẽ tìm thấy phương các trục quán tính chính là PM_1 và PM_2 , như trên hình 5-5.

Vòng tròn đó được gọi là vòng Mo quán tính. Điểm M_0 với tọa độ là J_x và J_{xy} được gọi là điểm gốc vì nó tượng trưng cho trị số quán tính của trục Ox và quán tính li tâm của hệ trục Oxy. Bán kính CM_0 là bán kính gốc và P là điểm cực.



Hình 5-5

Ở đây, khác với vòng tròn ứng suất, vòng tròn quán tính luôn luôn nằm về bên phải của trục tung vì J_x , J_y và J_w luôn luôn dương.

Ghi chú :

Bản chất ở đây cũng là bài toán xoay trực tọa độ đối với ma trận gồm ba thành phần.

$$\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix}$$

Với chú ý các cosin chỉ phương của các trục Ou và Ov đối với hệ trục Oxy là : $l = -\cos\alpha$, $m = \sin\alpha$; $l' = -\sin\alpha$, $m' = -\cos\alpha$ ta có thể viết :

$$J_u = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$J_v = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$J_{uv} = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân đó ta sẽ tìm thấy :

$$J_u = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - 2J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$J_v = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + 2J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$J_{uv} = (J_x - J_y) \sin\alpha \cos\alpha + J_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Trong trường hợp tổng quát, trình tự để xác định một hệ trục quán tính chính trung tâm là như sau :

1. Chọn một hệ trục Oxy bất kì ban đầu. Tính các trị số mômen tĩnh cũng như mômen quán tính của hình đối với hệ trục đó.
2. Xác định trọng tâm của hình.
3. Chuyển trục song song về trọng tâm của hình.
4. Xoay trục để xác định phương chính đi qua trọng tâm.

§5-4. MỘT SỐ VÍ DỤ

1. Bài toán về tam giác vuông ABC. Tính mômen tĩnh của tam giác đối với các cạnh của góc vuông AB, AC. Tính mômen quán tính và mômen quán tính li tâm của tam giác đối với hệ trung tâm song song với các cạnh của góc vuông (h.5-6).

Bài giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ Axy như hình vẽ.

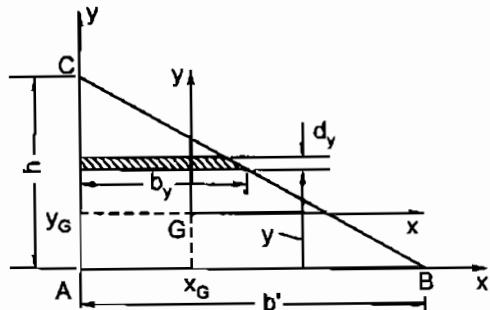
Tọa độ trọng tâm của tam giác ta đã biết :

$$x_G = \frac{b}{3}; \quad y_G = \frac{h}{3}$$

Vậy mômen tĩnh của tam giác ABC đối với các trục x, y là :

$$S_x = Fy_G = \frac{bh^2}{6}$$

$$S_y = Fx_G = \frac{hb^2}{6}$$



Hình 5-6

2. Để tính mômen quán tính ta chọn phân tố diện tích dF như hình vẽ. Từ định nghĩa ta có :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 b_y dy$$

trong đó b_y được tính với biểu thức :

$$b_y = b \frac{b - y}{h}$$

$$\text{Vậy : } J_x = b \int_0^h y^2 \left(\frac{b - y}{h} \right) dy = \frac{bh^3}{12} \quad (5-16a)$$

$$\text{Tương tự ta có : } J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (5-16b)$$

3. Mômen quán tính lì tâm đối với hệ trục Axy được tính với biểu thức :

$$J_{xy} = \int_F xy dF = \int_0^b x dx \int_0^{h/(b-x)} y dy = \frac{b^2 h^2}{24} \quad (5-17)$$

Chuyển sang hệ trục trung tâm GXY song song với Axy :

$$J_x = J_X + \left(\frac{h}{3} \right)^2 F$$

$$J_y = J_Y + \left(\frac{b}{3} \right)^2 F$$

$$\text{Từ đó ta có : } J_X = \frac{bh^3}{36}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{36} \quad (5-18)$$

$$J_{xy} = J_{XY} + \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{bh}{2}. \quad \text{Vậy } J_{XY} = -\frac{b^2 h^2}{72} \quad (5-19)$$

2. Xác định tọa độ trọng tâm của nửa hình tròn (h.5-7).

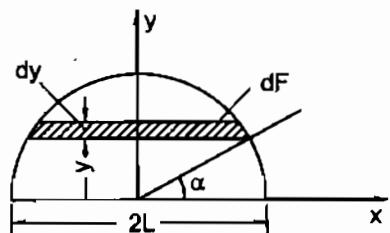
Bài giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình 5-7.

Trọng tâm đó phải nằm trên trục đối xứng, vậy $x_G = 0$. Ta chỉ còn phải tính tung độ y_G . Ta có :

$$y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{\int_F y dF}{F}$$

Sử dụng giải phân tích dF như hình vẽ. Ta có :



Hình 5-7

$$y = R \sin \alpha$$

$$dy = R \cos \alpha d\alpha$$

$$dF = 2R \cos \alpha$$

nên

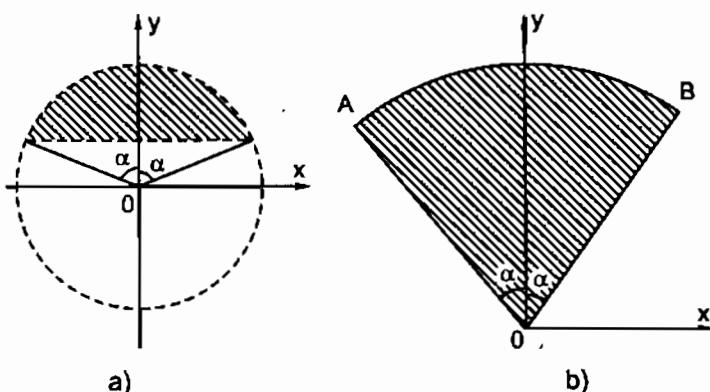
$$dF = 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$\text{Vậy } S_x = \int_F y dF = \int_0^\pi R \sin \alpha 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{2R^3}{3}$$

$$\text{Và : } y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,4244R \quad (5-20)$$

3. Xác định tọa độ trọng tâm của các diện tích được xác định bởi một phần cung tròn như hình vẽ

a) Tìm trọng tâm của diện tích được xác định bởi cung tròn và giây cung như hình vẽ (h.5-8a).



Hình 5-8

Bài giải

Tính S_x :

$$S_x = \int_F y dF \text{ với } dF = 2r \cos\varphi dy$$

$$y = r \sin\varphi$$

$$dy = r \cos\varphi d\varphi$$

$$S_x = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} r \cdot \sin\varphi \cdot 2r \cdot \cos\varphi \cdot r \cos\varphi d\varphi$$

mặt khác ta có :

$$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Vậy tung độ của trọng tâm là :

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad (5-21)$$

b) Tìm trọng tâm của diện tích được xác định bởi cung tròn và hai bán kính tạo với nhau một góc 2α như hình 5-8b.

Bài giải

Tính S_x

Lấy dF như hình 5-10 :

$$dF = \rho d\varphi d\rho$$

$$y = \rho \cos\varphi$$

$$S_x = 2 \int_0^r \int_0^\alpha \rho \cos\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \frac{2r^3 \sin \alpha}{3}$$

Diện tích của hình là : $F = \alpha \cdot r^2$

Vậy tung độ của trọng tâm là :

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} \quad (5-22)$$

Với $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ta sẽ tìm lại nghiệm như ví dụ 2.

4. Tính mômen quán tính đối với các trục
quán tính trung tâm của hình chữ nhật (h.5-11)

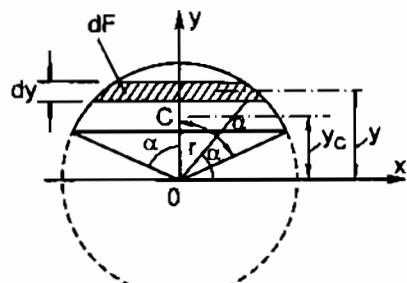
Bài giải:

Sử dụng phân tố dF như hình vẽ ta có :

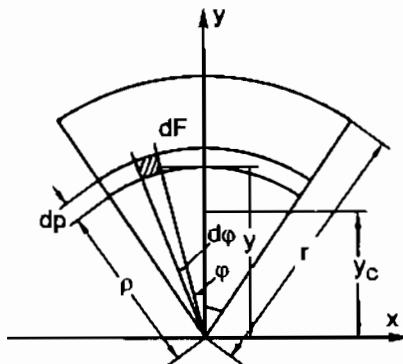
$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad (5-23)$$

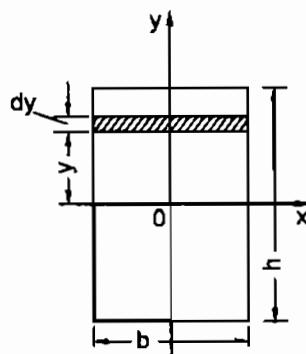
$$\text{Tương tự ta có : } J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (5-24)$$



Hình 5-9



Hình 5-10



Hình 5-11

5. Tính mômen quán tính đặc cực đối với tâm O và mômen quán tính đối với các trục Ox, Oy của hình tròn (h.5-12)

Bài giải:

$$J_p = \int_F r^2 dF; \text{ phân tố } dF \text{ được xác định như}$$

hình vẽ.

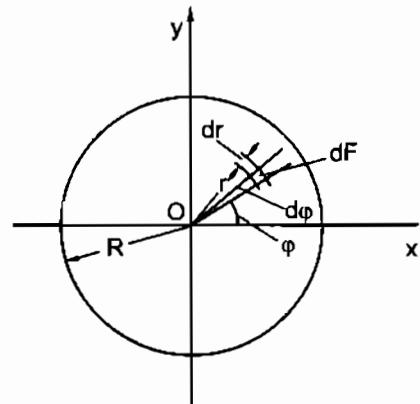
$$\text{Vậy: } J_p = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr$$

Giải tích phân ta được :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (5-25)$$

Vì lý do đối xứng nên ta có : $J_x = J_y$

$$\text{Do đó: } J_p = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$$



Hình 5-12

(5-26)

6. Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm và các mômen quán tính của hình phẳng (h.5-13) đối với các trục quán tính chính trung tâm đó.

Bài giải

Chọn hệ trục Oxy ban đầu như hình vẽ. Chia hình thành một hình chữ nhật ABEO và một hình tam giác CDE. Trọng tâm G_1 và G_2 của mỗi hình ta đã biết : $G_1(1,5 ; 3,5)$, $G_2\left(3 + \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Mômen tĩnh của hình đối với Ox và Oy được tính như sau :

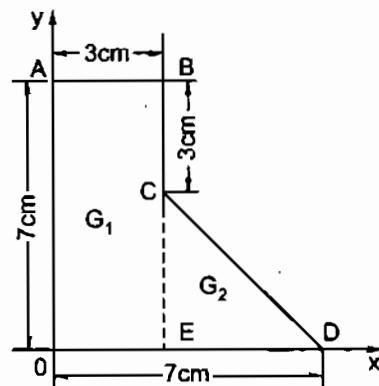
$$S_x = 3 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 84,16 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \left(3 + \frac{4}{3}\right) = 66,16 \text{ cm}^3$$

Tọa độ của trọng tâm hình :

$$y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{84,16}{29} = 2,9 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{F} = \frac{66,16}{29} = 2,28 \text{ cm}$$



Hình 5-13

Xác định một hệ trục tọa độ GXY song song với hệ trục tọa độ cũ (h.5-14). Gọi $G_1x_1y_1$ và $G_2x_2y_2$ là các trục tọa độ song song với GXY tại trọng tâm của hình chữ nhật ABEO và tam giác CDE.

Tọa độ của G_1 và G_2 đối với hệ trục GXY như sau :

$$G_1(-0,78; 0,6); G_2(2,05; -2,17)$$

Các mômen quán tính của hình đối với hệ trục trung tâm GXY là :

$$J_X = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2$$

$$J_X = \frac{3,7^3}{12} + \overline{0,6^2} \cdot 3,7 + \frac{4,4^3}{36} + \overline{2,17^2} \cdot \frac{4,4}{2} = 138,09 \text{ cm}^4$$

$$J_Y = J_{y_1} + b_1^2 F_1 + J_{y_2} + b_2^2 F_2$$

$$J_Y = \frac{7,3^3}{12} + \overline{0,78^2} \cdot 3,7 + \frac{4,4^3}{36} + \overline{2,05^2} \cdot \frac{4,4}{2} = 69,25 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY} = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2$$

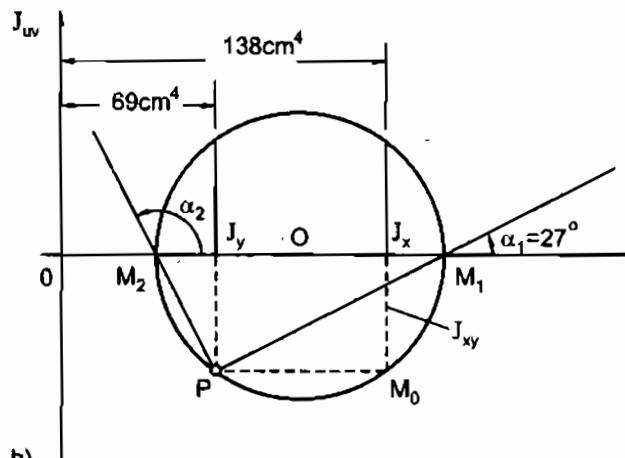
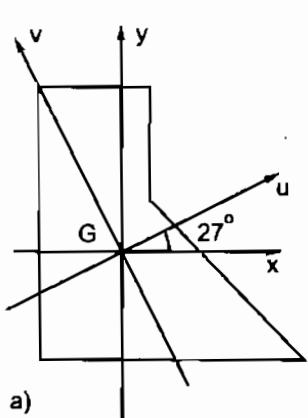
$$J_{XY} = -0,78 \cdot 0,6 \cdot 3,7 - \frac{4^2 \cdot 4^2}{72} - 2,05 \cdot 2,17 \cdot \frac{4,4}{2} = -48,97 \text{ cm}^4$$

Phương của các trục quán tính chính trung tâm được xác định bởi phương trình :

$$\tan 2\alpha = -\frac{2J_{XY}}{J_X - J_Y} = \frac{2 \cdot 48,97}{138,09 - 69,25} = 1,42$$

$$\tan 2\alpha \approx \tan 55^\circ; 2\alpha \approx 55^\circ + K\pi; \alpha \approx 27^\circ + K\frac{\pi}{2}$$

Ta có thể sử dụng vòng tròn quán tính để xác định các phương đó như trên hình 5-15b. Các phương đó được vẽ trực tiếp trên mặt phẳng như trên hình 5-15a.



Hình 5-15

7. Xác định hệ trục quán tính chính mặt ghép

Một thanh ghép gồm hai thanh định hình có mặt cắt ngang như trên hình 5-16.

Xác định các mômen quán tính chính và phương của hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

Bài giải

Số liệu về đặc trưng hình học của thép chữ [số 20 và thép góc 100. 63. 10.

$$[\text{số 20} : \quad h = 200 \text{ mm} \quad J_x = 1520 \text{ cm}^4]$$

$$F = 23,4 \text{ cm}^2 \quad J_y = 113 \text{ cm}^4$$

$$Z_o = 2,07 \text{ cm},$$

$$\text{L } 100 \times 63 \times 10 : \quad F = 15,5 \text{ cm}^2, \quad J_y = 154 \text{ cm}^4$$

$$x_o = 3,4 \text{ cm} \quad J_x = 47,1 \text{ cm}^4$$

$$y_o = 1,58 \text{ cm}, \quad J_u = J_{\min} = 28,3 \text{ cm}^4.$$

Ta có đối với thép góc :

$$J_v = J_{\max} = J_x + J_y - J_{\min} = 47,1 + 154 - 28,3 = 172,8 \text{ cm}^4$$

Mômen quán tính li tâm J_{xy} có thể tính ra từ những quan hệ :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\min}}$$

hay :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1 = \frac{J_{xy}^2}{(J_y - J_{\max})(J_y - J_{\min})}$$

$$\text{hay : } J_{xy} = -\sqrt{-(J_y - J_{\max})(J_y - J_{\min})}$$

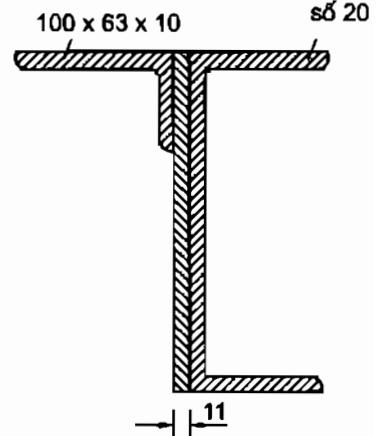
$$= -\sqrt{-(154 - 172,8)(154 - 28,3)} = -48,7 \text{ cm}^4.$$

(Lấy dấu trừ cho J_{xy} vì trục chính max nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba).

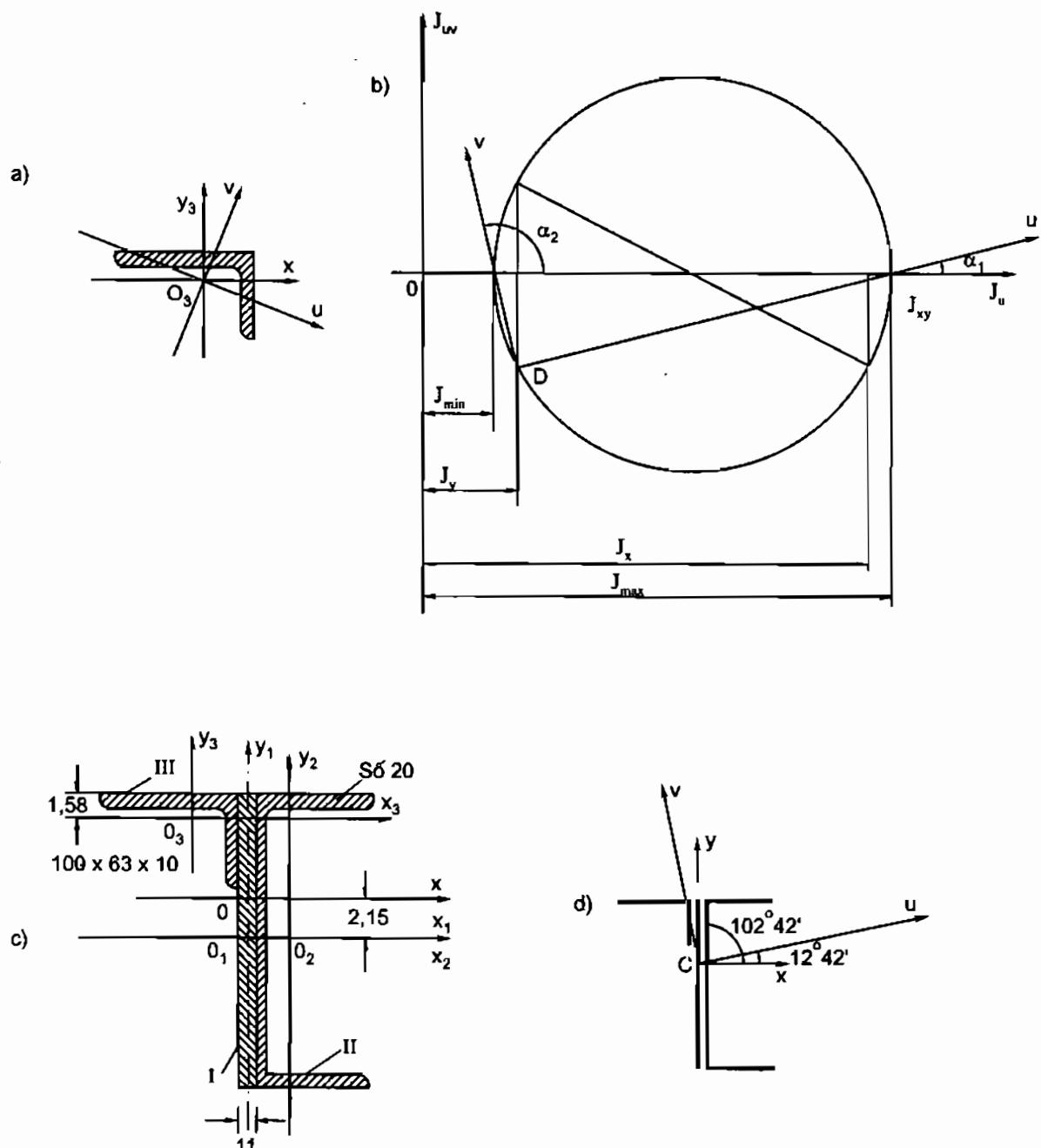
1. Xác định trọng tâm mặt cắt (h.5-17a, c) :

$$y_o = \frac{S_{x1}}{F} = \frac{8,42 \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} = 2,15 \text{ cm}$$

$$x_o = \frac{S_{y1}}{F} = \frac{2,62 \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} \approx 0 \text{ cm.}$$



Hình 5-16

**Hình 5-17**

Tọa độ trọng tâm của các hình thành phần đối với hệ trục trung tâm :

$$\text{Hình I : } x = 0, \quad y = -2,15 \text{ cm}$$

$$\text{Hình II : } x = 2,62 \text{ cm}, \quad y = -2,15 \text{ cm}$$

$$\text{Hình III : } x = -3,95 \text{ cm}, \quad y = 6,27 \text{ cm.}$$

2. Mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm :

$$J_x = \sum J_x^i = \frac{1,1 \cdot 20^3}{12} + 2,61^2 \cdot 1,1 \cdot 10 + 1520 + 2,61^2 \cdot 23,4 + 47,1 + 5,81^2 \cdot 15,5 = 3055 \text{ cm}^4.$$

$$J_y = \sum J_y^i = \frac{20 \cdot 1,1^3}{12} + 113 + 2,62^2 \cdot 23,4 + 154 + 3,95^2 \cdot 15,5 = 670 \text{ cm}^4$$

$$J_{xy} = \sum J_{xy}^i = 0 + 2,62 \cdot (-2,15) \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 6,27 \cdot 15,5 - 48,7 = -566 \text{ cm}^4.$$

3. Phương của hệ trục quán tính chính (h.5-17a, d) :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2,566}{3055 - 670} = 0,475$$

$$2\alpha = 25^\circ 24' \pm k \cdot 180^\circ;$$

$$\alpha_1 = 12^\circ 42'; \alpha_2 = 102^\circ 42'$$

4. Mômen quán tính chính :

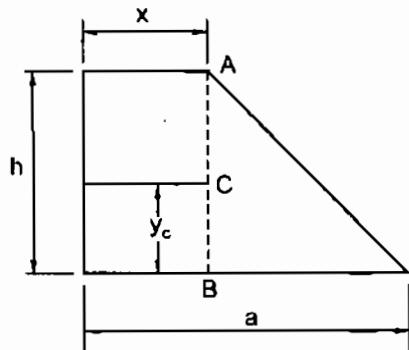
$$J_{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{3055 + 670}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3055 - 670}{2}\right)^2 + (-566)^2}$$

$$J_{\max} = 3183 \text{ cm}^4; J_{\min} = 543 \text{ cm}^4.$$

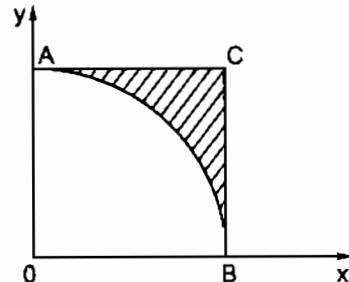
Vòng Mo quán tính cho trên hình 5-17a, b.

Bài tập về đặc trưng hình học

5.1. Xác định dây nhợ x của hình thang sao cho trọng tâm C của hình nằm trên đường thẳng AB (h.5-18). Xác định tung độ y_c của trọng tâm.



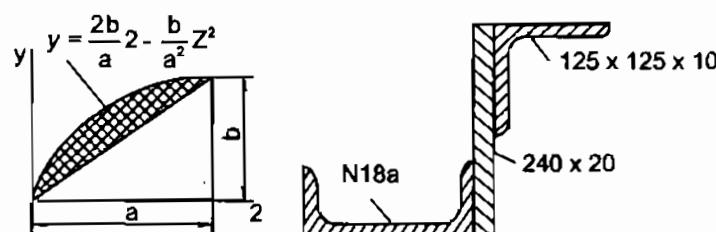
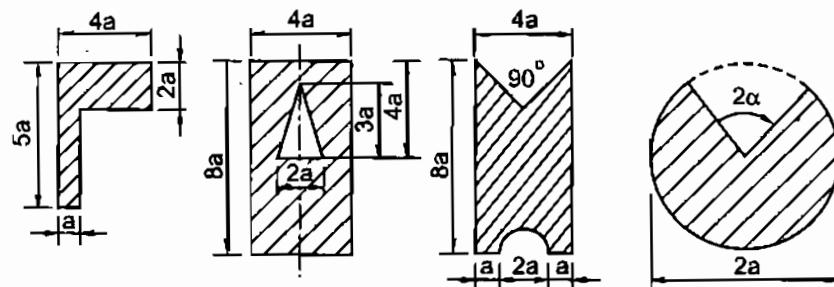
Hình 5-18



Hình 5-19

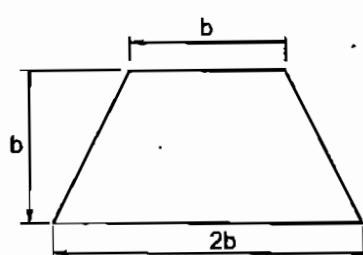
5.2. Tìm tọa độ trọng tâm của hình tam giác cong ABC như trên hình 5-19.

- 5.3. Xác định tọa độ trọng tâm của các mặt cắt cho trên hình 5–20.

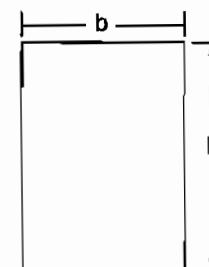


Hình 5–20

- 5.4. Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy của hình thang cân (h.5–21).



Hình 5–21



Hình 5–22

- 5.5. Xác định hệ trục quán tính chính có gốc tại A của hình chữ nhật (h.5–22). Cho biết $b = 4\text{cm}$, $h = 6\text{cm}$. Tính các mômen quán tính chính.

Chương 6

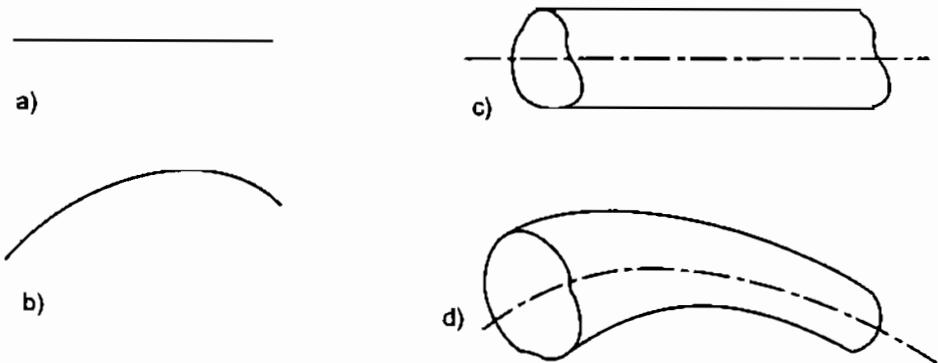
THANH, NỘI LỰC TRONG THANH

§6-1. ĐỊNH NGHĨA VỀ THANH VÀ LIÊN KẾT

Cho một hình phẳng và một đoạn đường cong trong không gian. Độ dài của đoạn đường cong đó lớn hơn kích thước lớn nhất của hình phẳng rất nhiều lần. Cho hình phẳng di chuyển trong không gian sao cho mặt phẳng của hình luôn vuông góc với đường cong và trọng tâm của hình luôn nằm trên đường cong, hình phẳng sẽ quét ra trong không gian một hình mà ta gọi là thanh. Đoạn đường cong được gọi là trục của thanh và hình phẳng được gọi là mặt cắt ngang của thanh.

Nếu trục của thanh là một đoạn thẳng thì ta gọi là thanh thẳng (h.6-1a) nếu trục của thanh là một đoạn đường cong thì ta gọi là thanh cong (h.6-1b). Trong sơ đồ tính toán, thanh thường được biểu diễn bằng đường trục của nó.

Trong quá trình hình phẳng di chuyển, hình dáng cũng như kích thước của hình có thể thay đổi. Khi đó ta có thanh với mặt cắt ngang thay đổi (h.6-1d). Nếu trong quá trình di chuyển, hình phẳng giữ nguyên hình dáng và kích thước thì ta gọi thanh là thanh có mặt cắt ngang không đổi (h.6-1c).



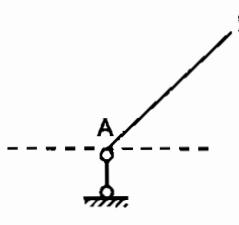
Hình 6-1

Trong không gian, thanh có sáu bậc tự do : Tự do di chuyển theo ba phương vuông góc bất kì nào đó và tự do quay chung quanh ba phương đó. Trong xây dựng cũng như trong chế tạo máy thường các thanh được liên kết với nhau và những liên kết đó chỉ cho phép thanh di động, hay biến dạng trong một mặt phẳng chứa trục thanh. Cũng vì vậy, với sơ đồ tính toán, ta có thể xem như thanh chỉ di động trong một mặt phẳng. Ngoại lực cũng chỉ tác dụng trong mặt phẳng đó. Bài toán đó được gọi là bài toán phẳng và thanh chỉ còn ba bậc tự do. Xét bài toán phẳng : Ví dụ với thanh thẳng AB chỉ có thể di chuyển trong mặt phẳng của hình vẽ (h.6-2), tại đầu A ta dùng một liên kết đơn, nghĩa là một mối nối có hai khớp thì

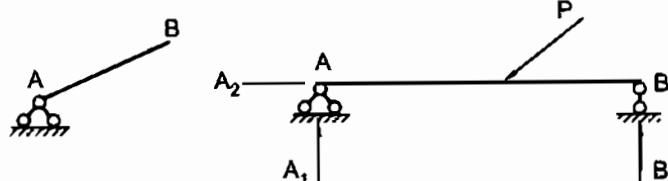
liên kết đó chỉ hạn chế sự di chuyển của thanh theo phương của liên kết, nghĩa là nó chỉ tạo nên phản lực theo phương này. Liên kết đó không hạn chế được chuyển dịch của thanh theo phương vuông góc với liên kết và không hạn chế được sự quay của thanh trong mặt phẳng của hình vẽ.

Nếu tại A ta đặt một liên kết cố định (h.6-3), liên kết đó hạn chế hai bậc tự do của thanh vì nó không cho phép thanh di chuyển theo bất cứ phương nào, nhưng liên kết đó không hạn chế được sự quay của thanh. Vì vậy liên kết này tương đương với hai liên kết đơn và nó có thể tạo nên một phản lực theo một phương bất kỳ nào đó. Phản lực đó được chia thành hai thành phần : thành phần thẳng đứng và thành phần ngang.

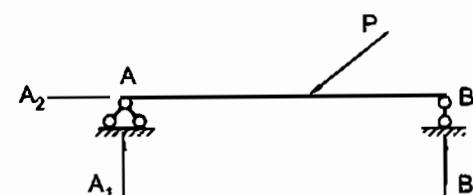
Nếu như trên thanh AB ta đặt ba liên kết (h.6-4) thì ba liên kết đó giữ thanh cố định. Một ngoại lực nào tác động lên thanh sẽ tạo nên ba thành phần phản lực như hình vẽ.



Hình 6-2

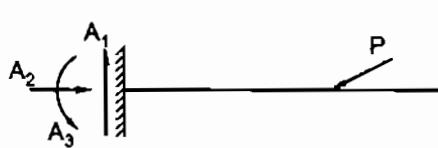


Hình 6-3

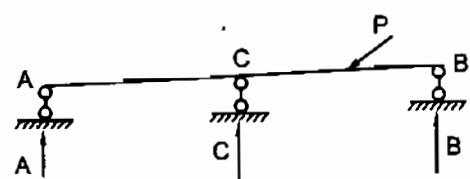


Hình 6-4

Ta còn có thể dùng một loại liên kết thứ ba là ngàm (h.6-5). Ví dụ đóng chặt thanh vào tường, hay hàn chặt thanh vào một kết cấu cố định nào đó. Liên kết này hạn chế hoàn toàn các bậc tự do của thanh, do đó liên kết tương đương với ba liên kết đơn. Khi có ngoại lực tác động, liên kết sẽ tạo nên ba thành phần phản lực : hai lực A_1 , A_2 và một mômen A_3 .



Hình 6-5



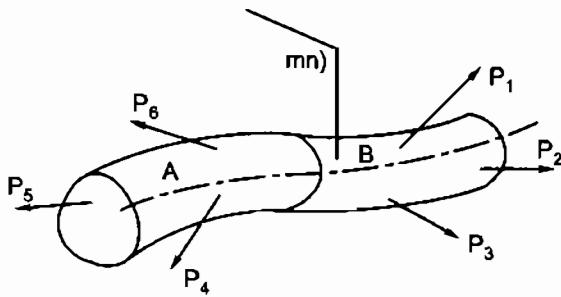
Hình 6-6

Tất nhiên nếu như ba liên kết đơn đặt đúng chỗ cũng không hạn chế hết các bậc tự do của thanh. Với kết cấu như hình vẽ (h.6-6) ta thấy rõ ràng không có thành phần phản lực nào chống lại các lực xô ngang. Thanh AB có thể di chuyển theo phương ngang dễ dàng.

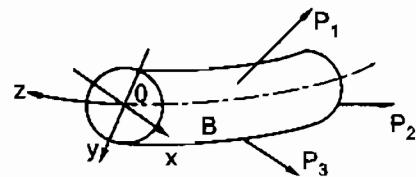
Tóm lại với bài toán phẳng ta cần có ba liên kết đơn đặt đúng chỗ để giữ cho thanh cố định. Từ đó, ta cũng có thể suy ra, với thanh trong không gian, ta cần phải có 6 liên kết đơn đặt đúng chỗ để hạn chế hết các bậc tự do của thanh.

§6 –2. NỘI LỰC

Xét thanh chịu lực như hình 6-7. Tường tượng cắt thanh bởi mặt cắt ngang ($m - n$). Mặt cắt chia thanh thành hai phần A và B. Vứt bỏ phần A và xét sự cân bằng của phần B (h.6-8). Như đã nói ở phần đầu trong chương trạng thái ứng suất, ta có thể xác định ngay được hợp lực của nội lực trên mặt cắt vì hợp lực đó phải cân bằng với ngoại lực tác dụng lên phần đang xét.



Hình 6-7



Hình 6-8

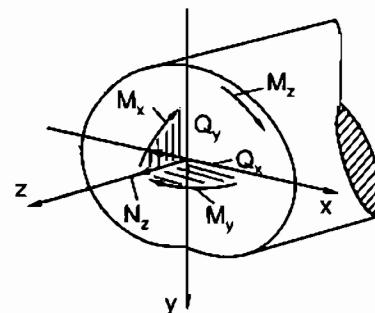
Gọi O là trọng tâm của mặt cắt. Xác định một hệ trục tọa độ vuông Oxyz với Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang và Oz nằm trên đường tiếp tuyến của trục thanh. Hệ nội lực được thu về O bằng một vectơ chính và một mômen chính. Các thành phần hình chiếu của vectơ chính xuống các trục tọa độ được kí hiệu như sau :

- Trên trục z kí hiệu là N_z và gọi là lực dọc.
- Trên trục x và y kí hiệu là Q_x , Q_y và gọi là lực cắt theo phương x và theo phương y.
- Các thành phần hình chiếu của mômen chính là các mômen quay xung quanh các trục.
- Mômen quay xung quanh trục z kí hiệu là M_z và gọi là mômen xoắn.
- Mômen quay xung quanh trục x và y kí hiệu là M_x , M_y và gọi là mômen uốn.

Ta quy ước dấu của các thành phần nội lực như sau : N_z được gọi là dương khi nó có chiều di ra khỏi mặt cắt, Q_y được xem là dương khi đứng nhìn theo phương x thấy Q_y cùng với ngoại lực tạo nên một ngẫu lực làm quay phần đang xét theo chiều kim đồng hồ. Tương tự như vậy đối với Q_x khi nhìn theo phương của y : M_x và M_y được xem là dương khi nó uốn căng phía dương của các trục x và y.

M_z là dương khi nhìn vào mặt cắt thấy chiều của M_z là chiều của kim đồng hồ.

Các chiều dương đó được biểu diễn như trên hình 6-9.



Hình 6-9

Từ điều kiện cân bằng của phần đang xét ta tìm thấy dễ dàng các trị số của các thành phần nội lực như sau :

$$N_z = \sum P_i/z \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương z)}$$

$$Q_y = \sum P_i/x \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương x)}$$

$$Q_x = \sum P_i/y \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương y)}$$

$$M_x = \sum m(P_i)/x \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục x)}$$

$$M_y = \sum m(P_i)/y \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục y)}$$

$$M_z = \sum m(P_i)/z \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục z)}$$

P_i là các lực tác dụng lên phần đang xét.

Ngoại lực mà chúng ta nói đây là bao gồm cả phản lực, vì vậy để xác định nội lực, việc làm đầu tiên là phải xác định các phản lực tác dụng lên thanh.

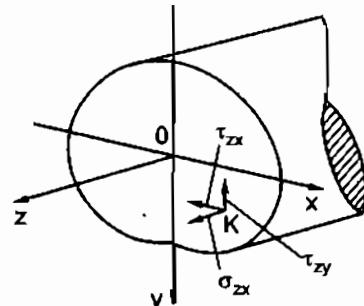
§6-3. TƯƠNG QUAN GIỮA NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT

Gọi \vec{p} là ứng suất tại một điểm $K(x, y)$ bất kỳ trên mặt cắt (h.6-10). Các thành phần hình chiếu của \vec{p} là $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Lấy một phân tố diện tích dF chung quanh K. Các thành phần lực tác động theo ba phương z, y, x trên phân tố dF sẽ là $\sigma_z dF, \tau_{zy} dF$ và $\tau_{zx} dF$. Tổng cộng tất cả các lực đó trên toàn thể mặt cắt chính là các thành phần của nội lực. Tổng mômen của các lực đó đối với các trục là các thành phần mômen của nội lực. Do đó ta có :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF; Q_y = \int_F \tau_{zy} dF; Q_x = \int_F \tau_{zx} dF$$

$$M_x = \int_F y \sigma_z dF; M_y = \int_F x \sigma_z dF; M_z = \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dF \quad (6-1)$$

Các biểu thức đó thể hiện sự tương quan giữa các thành phần nội lực và ứng suất. Nếu xét một đoạn thanh với các mặt cắt ngang đã định thì các biểu thức trên có thể xem là các điều kiện biên của bài toán.



Hình 6-10

§6-4. TƯƠNG QUAN GIỮA NỘI LỰC VÀ CƯỜNG ĐỘ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ

Ta hãy xét đối với bài toán phẳng. Giả sử ngoại lực tác dụng lên thanh nằm trong mặt phẳng yOz và có phương vuông góc với trục z. Như vậy trên các mặt cắt ngang chỉ có các

thành phần nội lực Q_y và M_x . Xét một đoạn thanh được tách ra bởi hai mặt cắt (1 – 1) và (2 – 2) cách nhau một khoảng cách vô cùng bé dz (h.6–11). q là lực phân bố trên thanh và có chiều như hình vẽ. Vì dz là vô cùng bé nên có thể xem như q phân bố đều trên dz . Gọi Q_y và M_x là lực cắt và mômen uốn trên mặt cắt (1 – 1) thì trị số của chúng trên mặt cắt (2 – 2) sẽ là :

$$Q_y + dQ_y, M_x + dM_x$$

Xét điều kiện cân bằng của phân tố. Viết phương trình hình chiếu theo phương thẳng đứng và tổng mômen của các lực đối với trục Ox đi qua mặt cắt (2 – 2), ta có :

$$Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0 \quad (1)$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y dz + q \frac{dz^2}{2} = 0 \quad (2)$$

Nếu bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao $q \frac{dz^2}{2}$ ta tìm thấy các liên hệ vi phân sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dz} &= q \\ \frac{dM_x}{dz} &= Q_y \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

Ta có thể phát biểu như sau : *Đạo hàm của lực cắt là bằng cường độ của lực phân bố* (để phù hợp với quy ước dấu của Q_y ta phải thừa nhận rằng q là dương khi q có chiều hướng đi lên).

Đạo hàm của mômen M_x là bằng lực cắt Q_y .

Từ các liên hệ đó ta có thể viết :

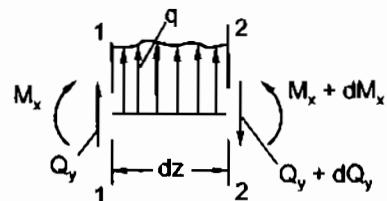
$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q \quad (6-3)$$

Vậy : *Đạo hàm bậc hai của mômen uốn là bằng cường độ của lực phân bố.* Nhưng điều ta vừa nói trên đây có thể mở rộng cho Q_x và M_y .

§6–5. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

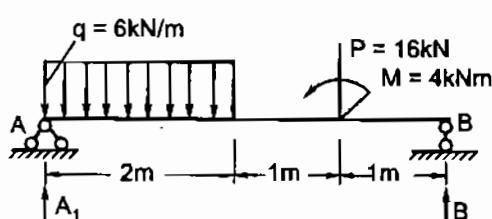
1. Trường hợp thanh thẳng

Một thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là đàm. Ví dụ đòi hỏi ta phải vẽ biểu đồ nội lực của đàm chịu lực như hình 6–12.



Hình 6-11

Bài giải:



Hình 6-12

Ở đây vì các lực đều vuông góc với trục của thanh nên phản lực tại A chỉ có thành phần phản lực thẳng đứng. Cũng vì vậy lực dọc trên các mặt cắt là bằng không. Ta chỉ còn phải vẽ biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x . Trước hết ta phải xác định các phản lực tại A và B. Viết phương trình tổng mômen đối với điểm A và phương trình hình chiếu thẳng đứng ta có :

$$\sum m_A = B \cdot 4 - 16 \cdot 3 + 4 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$\sum Y = A_1 + B - 6 \cdot 2 - 16 = 0$$

Từ đó ta tìm thấy các trị số của các phản lực là :

$$A_1 = B = 14 \text{ kN}.$$

Biểu đồ lực cắt Q_y . Ta xét trên từng đoạn dầm. Trên đoạn AD. Lực phân bố là hằng vây lực cắt phải biến thiên theo đường bậc nhất vì $\frac{dQ_y}{dz} = q$.

Dùng mặt cắt (1 – 1) (h.6-13a) tưởng tượng vứt bỏ phần bên phải và xét sự cân bằng của phần bên trái. Trị số lực cắt Q_y trên mặt cắt (1 – 1) là bằng :

$$Q_y = 14 - 6z \quad (1)$$

Ta chỉ cần biết hai điểm :

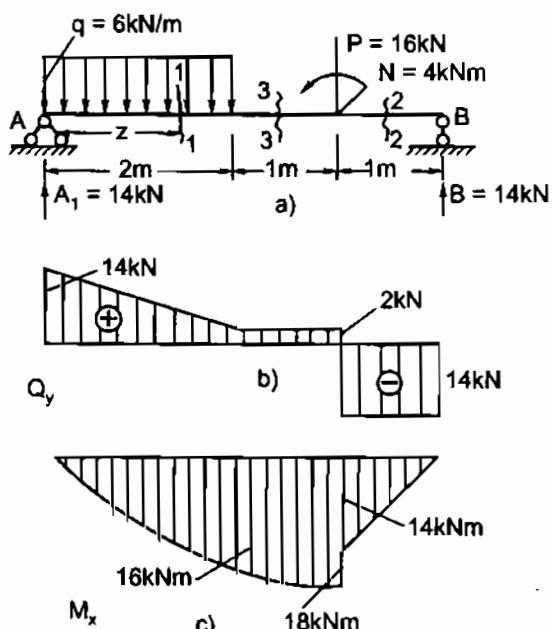
$$\text{Cho } Z = 0; Q_y = 14 \text{ kN}$$

$$\text{Cho } Z = 2; Q_y = 2 \text{ kN}$$

Với một tỉ lệ xích nhất định các trị số đó được biểu diễn bằng những đoạn thẳng vuông góc với trục của thanh (h.6-13a).

Ta được các điểm 1, 2. Nối các điểm đó ta có biểu đồ lực cắt trong đoạn AD. Trong đoạn DC vì $q = 0$ nên Q_y phải là hằng. Biểu đồ là đoạn thẳng 2 – 3 song song với trục của thanh. Sử dụng mặt cắt (2 – 2) trong đoạn CB, ta tìm thấy lực cắt trong đoạn đó là 14 kN và mang dấu âm. Trên đoạn đó $q = 0$ nên biểu đồ cũng là một đoạn thẳng (4 – 5) song song với trục của thanh.

Ta có nhận xét sau đây : Nơi nào có lực tập trung thì nơi đó biểu đồ lực cắt có bước nhảy.



Hình 6-13

Biểu đồ mômen uốn M_x . Trong đoạn AD vì lực cắt là đường bậc nhất nên biểu đồ mômen uốn phải là đường bậc hai. Vì $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$.

Dùng mặt cắt (1 – 1) (h.6–13a) ta dễ dàng viết được biểu thức mômen uốn như sau :

$$M_x = 14z - \frac{6z^2}{2} \quad (2)$$

Trong các đoạn CD và CB vì Q_y là hằng nên M_x là đường bậc nhất. Sử dụng các mặt cắt (2 – 2) và (3 – 3). Cho các mặt cắt đó đi qua những vị trí nhất định ta sẽ tìm thấy trị số mômen uốn tại những vị trí đó. Mỗi đoạn chỉ cần có hai điểm, ta sẽ vẽ được các biểu đồ của mômen uốn M_x (h.6–13c). Biểu đồ mômen được vẽ về phía thứ cảng do mômen uốn gây nên.

Ta cũng có nhận xét sau đây :

Nơi nào có mômen tập trung thì nơi đó có bước nhảy của biểu đồ mômen. Trị số của bước nhảy là bằng trị số của mômen tập trung.

Qua biểu đồ nội lực chúng ta nhìn thấy ngay những mặt cắt có giá trị mômen và lực cắt lớn nhất.

2. Trường hợp khung

Vẽ biểu đồ nội lực của khung chịu lực như hình 6–14.

Bài giải:

a) *Tính phản lực.* Các thành phần phản lực được biểu diễn như hình 6–14.

Viết các phương trình cân bằng hình chiếu theo phương thẳng đứng và phương ngang, đồng thời viết phương trình cân bằng tổng mômen đối với các điểm A ta có :

$$\sum m_A = B \cdot 2 + 6 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad (1)$$

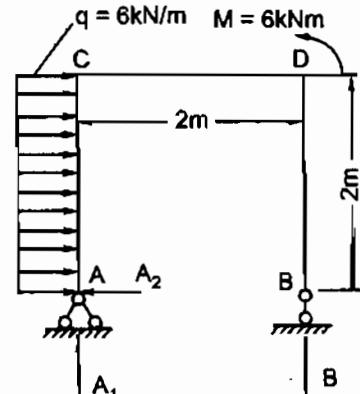
$$\sum Y = A_1 + B = 0 \quad (2)$$

$$\sum X = A_2 - 6 \cdot 2 = 0 \quad (3)$$

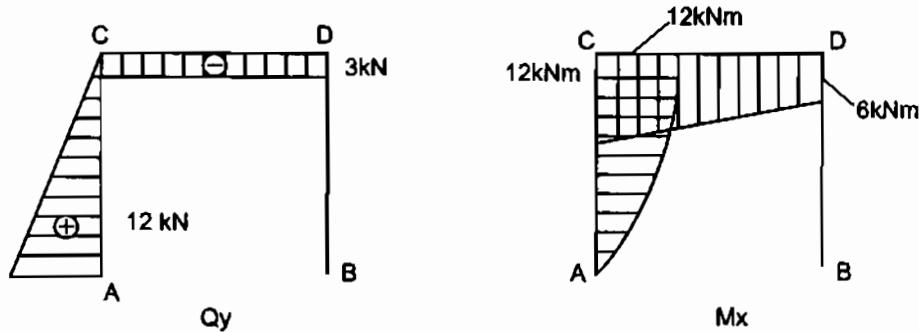
Từ ba phương trình đó ta tìm thấy :

$$B = 3kN, A_1 = -3kN, A_2 = 12kN.$$

Dấu trừ ở A_1 có nghĩa là chiều chọn của ta ban đầu là không đúng với thực tế. Chiều thực của phản lực phải ngược lại.

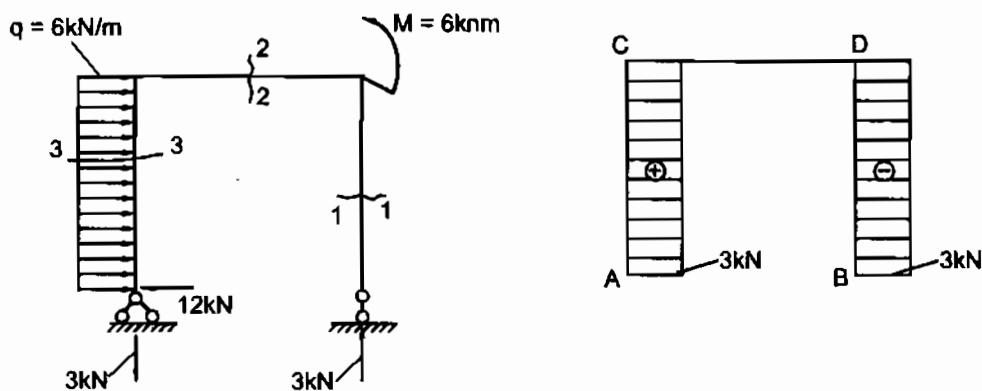


Hình 6–14



Hình 6-15

b) Các biểu đồ nội lực. Sau khi đã có phản lực, dùng các mặt cắt khác nhau trên từng đoạn thanh như đã làm đối với thanh thẳng trên đây, ta sẽ tìm thấy các biểu đồ như được biểu diễn trên hình 6-16.



Hình 6-16

3. Trường hợp thanh cong

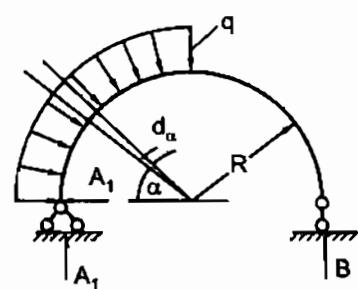
Vẽ biểu đồ nội lực của thanh cong chịu lực như hình 6-17, q phân bố đều trên chiều dài của thanh.

Bài giải: Các phản lực được xác định từ các phương trình cân bằng;

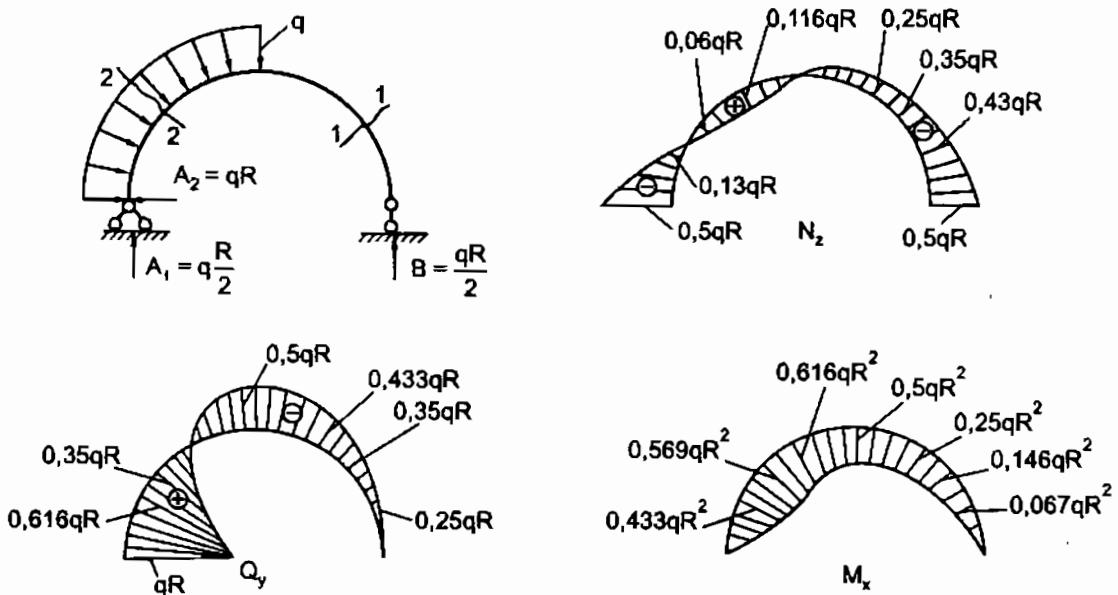
$$\sum m_A = B \cdot 2R - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin \alpha q d\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = B + A_1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \alpha q d\alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum X = A_2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \alpha q d\alpha = 0 \quad (3)$$



Hình 6-17



Hình 6-18

Từ đó ta có : $B = \frac{qR}{2}$; $A_1 = \frac{qR}{2}$; $A_2 = qR$

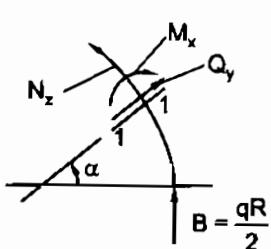
Các biểu thức của nội lực như sau :

Trên đoạn BC (h.6-19)

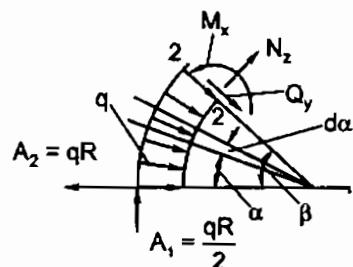
$$N_z = -\frac{qR}{2} \cos\varphi \quad (1)$$

$$Q_y = -\frac{qR}{2} \sin\varphi \quad (2)$$

$$M_x = -\frac{qR^2}{2} (1 - \cos\varphi) \quad (3)$$



Hình 6-19



Hình 6-20

Trên đoạn AC (h.6-20)

$$N_z + qR \int_0^\beta \sin(\beta - \alpha)d\alpha - qR \sin\beta + \frac{qR}{2} \cos\beta = 0 \quad (1)$$

$$Q_y + qR \int_0^\beta \cos(\beta - \alpha)d\alpha - qR \cos\beta - \frac{qR}{2} \sin\beta = 0 \quad (2)$$

$$M_x - \frac{qR^2}{2} (1 - \cos\beta) - qR^2 \sin\beta + qR^2 \int_0^\beta \sin(\beta - \alpha)d\alpha = 0 \quad (3)$$

Trị số các biểu thức tích phân như sau :

$$\int_0^\beta \sin(\beta - \alpha) d\alpha = 1 - \cos\beta ; \quad \int_0^\beta \cos(\beta - \alpha) d\alpha = \sin\beta$$

Vậy $N_z = \frac{qR}{2} (\cos\beta + 2\sin\beta - 2)$ (1)

$$Q_y = \frac{qR}{2} (2\cos\beta - \sin\beta) \quad (2)$$

$$M_x = \frac{qR^2}{2} (2\sin\beta + \cos\beta - 1) \quad (3)$$

Bảng biến thiên của các trị số nội lực như sau :

Trên đoạn BC

ϕ	0°	30°	45°	60°	90°
N_z	$-\frac{qR}{2}$	-0,433 qR	-0,35qR	-0,25qR	0
Q_y	0	-0,25qR	-0,35qR	-0,433qR	$-\frac{qR}{2}$
M_x	0	$0,067 qR^2$	$0,146 qR^2$	$0,25 R^2$	$0,5 qR^2$

Trên đoạn AC

β	0°	30°	45°	60°	90°
N_z	$-\frac{qR}{2}$	-0,067qR	0,06qR	0,116qR	0
Q_y	qR	0,616qR	0,353qR	0,067qR	-0,5qR
M_x	0	$0,433qR^2$	$0,56qR^2$	$0,616R^2$	$0,5 qR^2$

Các biểu đồ đó được biểu diễn trên hình 6-18.

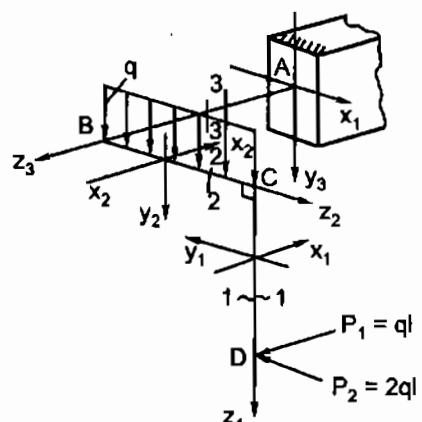
4. Trường hợp khung không gian

Vẽ các biểu đồ nội lực của khung không gian chịu lực như hình 6-21.

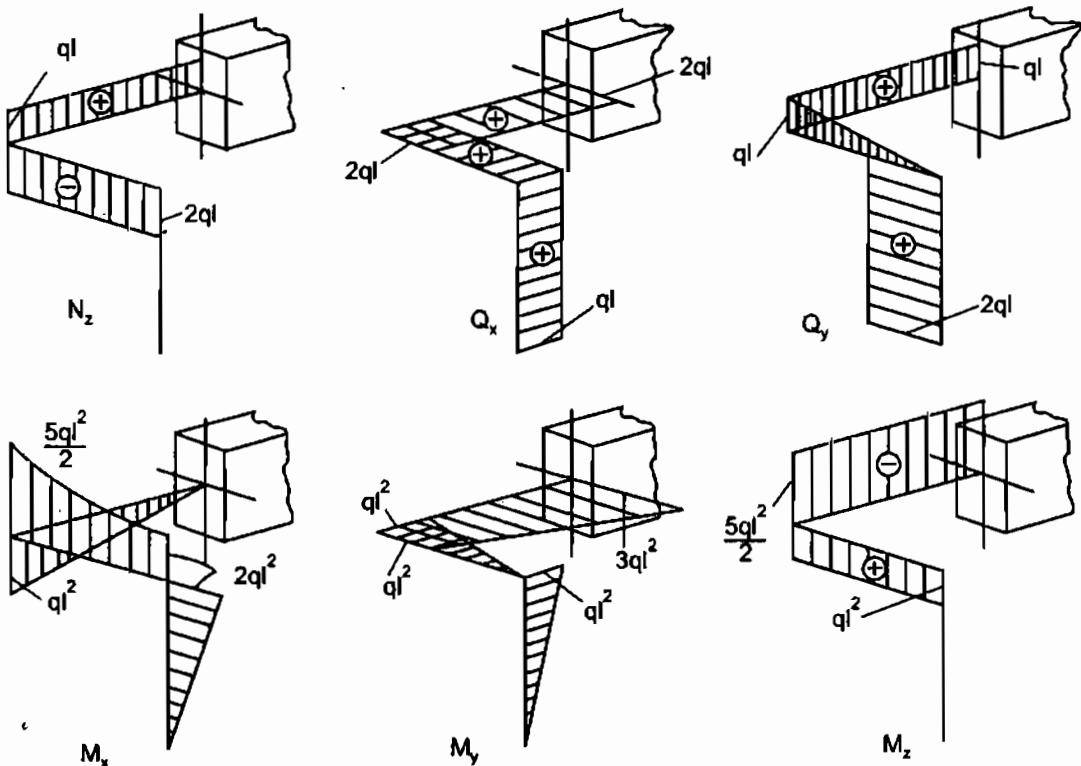
Cho biết $AB = BC = CD = 1$

Bài giải

Lần lượt dùng các mặt cắt (1 - 1), (2 - 2), (3 - 3) với các hệ trục tọa độ trên từng đoạn thanh được chọn như hình 6-21; các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 6-22.



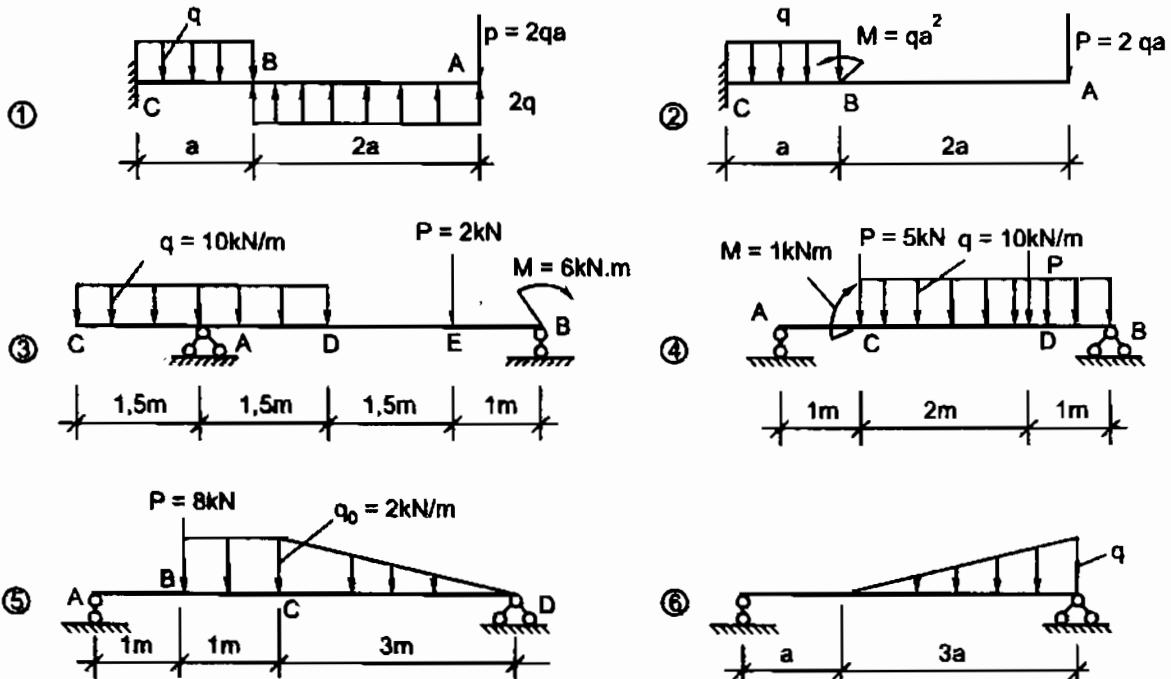
Hình 6-21



Hình 6-22

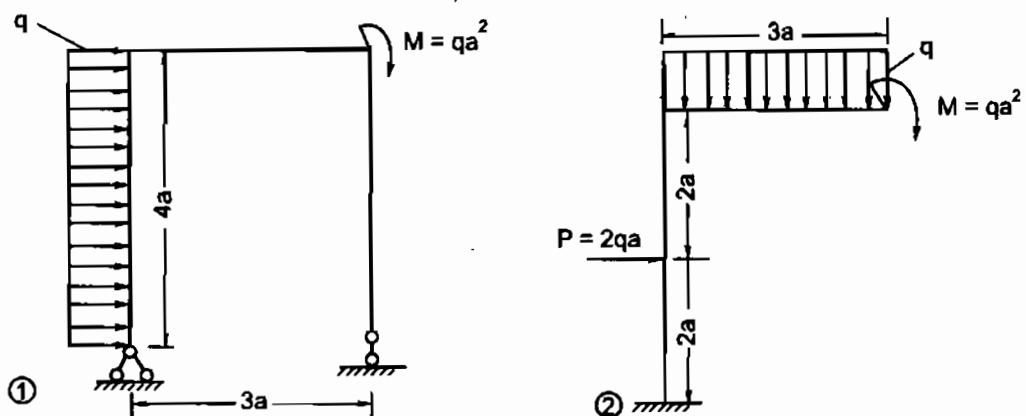
Bài tập

6.1. Vẽ biểu đồ nội lực của đầm cho trên các hình vẽ dưới đây :



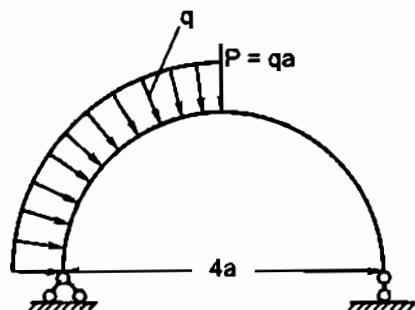
Hình 6-23

6.2. Vẽ biểu đồ nội lực của khu chịu lực như hình vẽ :



Hình 6-24

6.3. Vẽ biểu đồ nội lực của khung tròn chịu lực phân bố hướng tâm và lực tập trung P như hình 6-25.



Hình 6-25

Chương 7

BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO (hoặc nén)

§7-1. CÔNG THỨC ỨNG SUẤT

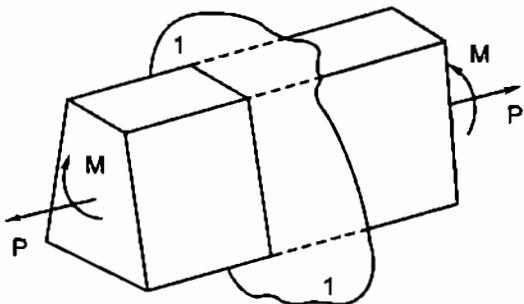
Ta hãy xét trường hợp thanh chịu kéo bởi lực P và chịu uốn bởi mômen M như hình 7-1. Từ điều kiện cân bằng, trên mặt cắt (1 - 1), chúng ta có ba thành phần nội lực N_z , M_x và M_y (h.7-2). Hệ trục Oxyz xác định trên mặt cắt là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Vấn đề đặt ra là ta phải tìm thấy quy luật phân bố của ứng suất do các thành phần nội lực đó gây nên.

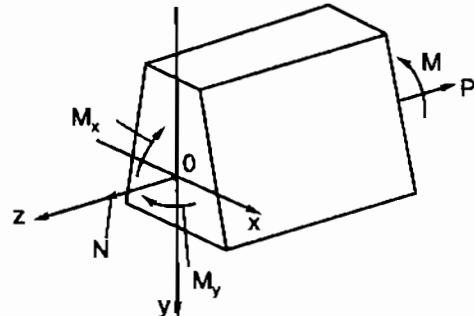
Để đơn giản bài toán ta thừa nhận giả thuyết về mặt cắt phẳng của Becnuli như sau :

Mặt cắt ngang của thanh ban đầu phẳng và thẳng góc với trục của thanh thì trong quá trình biến dạng cũng như sau biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục của thanh.

Ta cũng thừa nhận rằng vì biến dạng là vô cùng bé nên có thể xem hình dáng của mặt cắt ngang không thay đổi trong quá trình biến dạng.



Hình 7-1



Hình 7-2

Xét trạng thái ứng suất tại một điểm bất kì nào đó trong thanh. Tại đó, tách một phân tố hình hộp vô cùng bé bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ Oxyz. Phân tố được biểu diễn trên hình 7-3.

Với các giả thuyết trên ta có thể khẳng định rằng trên các mặt cắt của phân tố không có ứng suất tiếp.

Thực vậy, vì thanh không có sự xoắn và không có sự trượt do lực cắt nên các mặt cắt ngang không bị xoay đi đổi với nhau. Các cạnh (1 - 5), (2 - 6), (3 - 7) và (4 - 8) phải luôn luôn song song với trục thanh. Mặt cắt ngang lại phải vuông góc với trục của thanh như vậy các góc vuông $\widehat{126}$ và $\widehat{326}$ không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng. Điều đó đưa đến kết luận $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$. Mặt khác vì hình dạng mặt cắt ngang

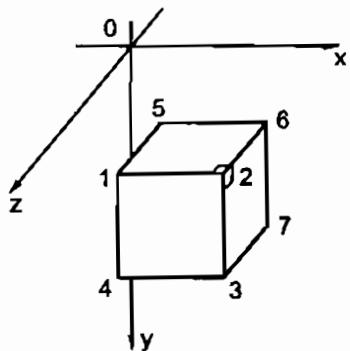
không thay đổi nên góc vuông $\widehat{123}$ cũng không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng. Do đó $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$.

Nói một cách khác các mặt của phân tố là các mặt chính.

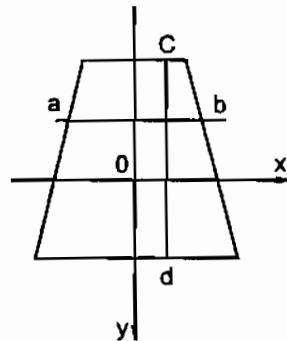
Nếu bỏ qua lực thể tích thì từ hai phương trình đầu của hệ phương trình vi phân cân bằng (2 – 45) ta có được các biểu thức sau đây :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7-1)$$

Như vậy σ_x chỉ phụ thuộc vào y và ngược lại σ_y chỉ phụ thuộc vào x ; nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng ab nào đó của mặt cắt ngang song song với x phải có cùng



Hình 7-3



Hình 7-4

trị số σ_x như nhau (h.7-4). Cũng như vậy, với những điểm nằm trên một đường cd nào đó song song với y phải có cùng trị số σ_y . Từ điều kiện mặt ngoài không chịu lực, nghĩa là tại a, b và c, d ; σ_x và σ_y bằng không nên ta suy ra tất cả mọi điểm trên ab cũng như trên cd $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Ta có thể kết luận rằng trạng thái ứng suất phân tố đang xét là trạng thái đơn. Vậy chỉ còn thành phần ứng suất σ_z ;

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7-2)$$

Từ giả thuyết mặt cắt ngang phẳng của Becluhi hàm chuyển vị w theo phương của trục z có thể biểu diễn dưới dạng :

$$w = A(z) + B(z)y + C(z)x \quad (7-3)$$

Khi lấy Z với một trị số nhất định thì phương trình trên là phương trình của một mặt phẳng.

Các hàm $A(z), B(z), C(z)$ là các hàm ta phải xác định.

Lấy đạo hàm theo z ta có :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A'(z) + B'(z)y + C'(z)x \quad (7-4)$$

Thay (7-4) vào (7-2) ta sẽ được biểu thức của ứng suất :

$$\sigma_z = E[A'(z) + B'(z)y + C(z)x] \quad (7-5)$$

Mặt khác các biểu thức tương quan giữa nội lực và ứng suất (6-1) ta có :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF; M_x = \int_F y\sigma_z dF; M_y = \int_F x\sigma_z dF \quad (7-6)$$

Thay (7-5) và (7-6) ta được :

$$\begin{aligned} N_z &= E[A'(z)F + B'(z) \int_F ydF + C(z) \int_F xdF] \\ M_x &= E[A'(z) \int_F ydF + B'(z) \int_F y^2 dF + C(z) \int_F xydF] \\ M_y &= E[A'(z) \int_F xdF + B'(z) \int_F xydF + C(z) \int_F x^2 dF] \end{aligned} \quad (7-7)$$

Vì hệ trục Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm nên ta có :

$$S_x = \int_F ydF = 0; S_y = \int_F xdF = 0; J_{xy} = \int_F xydF = 0$$

Từ đó ta tìm thấy dễ dàng :

$$A'(z) = \frac{N_z}{EF}; B'(z) = \frac{M_x}{EJ_x}; C(z) = \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7-8)$$

Thay vào (7-8) vào (7-5) ta được biểu thức của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang như sau :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x \quad (7-9)$$

Nếu bỏ qua lực thể tích, phương trình vi phân cân bằng thứ ba có dạng :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (7-10)$$

Điều đó có nghĩa là trên mọi mặt cắt ngang của thanh luật phân bố của σ_z là như nhau.

§7-2. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG QUAN TRỌNG

1. Kéo nén đúng tâm : Khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần lực dọc N_z , ta gọi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm. Khi đó trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (7-11)$$

Như vậy ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt. Biến dạng dài theo phương của z có trị số là :

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N_z}{EF} \quad (7-12)$$

So sánh (7-12) và biểu thức $A'(z)$ của (7-8) ta thấy rõ $A'(z) = \epsilon_z$. Tích số EF được gọi là độ cứng của thanh khi kéo (hoặc nén).

$$\epsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} = \frac{N_z}{EF}$$

Vậy độ giãn của toàn thanh là :

$$\Delta l = \int_0^l \delta dz = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF} \quad (7-13)$$

Nếu EF là hằng và N_z là hằng trên suốt chiều dài l ta có :

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF} \quad (7-14)$$

2. Uốn thuần túy : Khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có mômen uốn M_x hoặc M_y ta gọi là thanh chịu uốn thuần túy. Để khẳng định, ví dụ chỉ có M_x , khi đó trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_z} y \quad (7-15)$$

Ta nhận thấy khi $y = 0$, $\sigma_z = 0$ do đó $\epsilon_z = 0$, nói một cách khác các điểm trên đường Ox không có ứng suất và biến dạng. Đường đó được gọi là đường trung hòa. Vậy đường trung hòa trùng với một trục quán tính chính trung tâm. Với các điểm nằm trên đường song song với trục Ox vì cùng có y như nhau nên trị số ứng suất pháp là bằng nhau. Các điểm càng xa trục trung hòa trị số tuyệt đối của ứng suất càng lớn. Nếu gọi y_{\max}^- và y_{\max}^+ là tọa độ của các điểm xa nhất đối với đường trung hòa ở về miến chịu nén và chịu kéo thì trị số ứng suất tại những điểm đó là :

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^- = \frac{M_x}{W_x^-} \quad (7-15)'$$

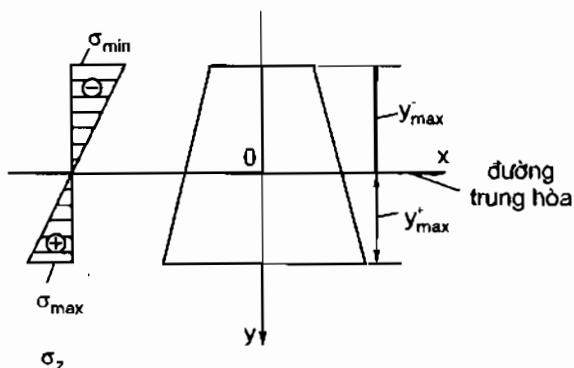
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^+ = \frac{M_x}{W_x^+} \quad (7-15)''$$

trong đó :

$$W_x^- = \frac{J_x}{y_{\max}^-} \text{ và } W_x^+ = \frac{J_x}{y_{\max}^+}$$

được gọi là các mômen chống uốn của mặt cắt ngang. Trị số của W_x càng lớn khả năng chống uốn của thanh càng lớn.

Biểu đồ biến thiên của ứng suất theo chiều cao được biểu diễn như trên hình 7-5.



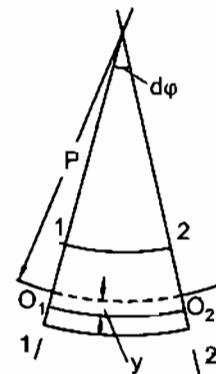
Hình 7-5

Tách một đoạn thanh dz bằng hai mặt cắt (1 – 1) và (2 – 2) rất gần nhau. Sau biến dạng vì trục thanh trở nên cong nên các mặt cắt tạo với nhau một góc $d\phi$. Nếu gọi ρ là bán kính cong của trục thanh thì vì trục không bị biến dạng nên ta có $\rho d\phi = dz$. Một đường nào đó song song với z và đi qua tung độ y sẽ có biến dạng là (h.7-6) :

$$\epsilon_z = \frac{(\rho + y)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{y}{\rho} \quad (7-16)$$

vì : $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x y}{J_x E}$ nên ta rút ra được :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \quad (7-17)$$



Hình 7-6

So sánh (7-8) với (7-17) ta có : $B'(z) = \frac{1}{\rho}$

Tích $E J_x$ biểu hiện khả năng chống uốn của thanh nên được gọi là độ cứng khi uốn.

Cùng một cách lập luận với M_y ta có :

$$\sigma_z = \frac{M_y}{J_y} x; \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_y}{E J_y} = C(z)$$

3. Uốn xiên. Ta gọi uốn xiên là khi trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần momen uốn M_x và M_y cùng tác dụng. Trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (7-18)$$

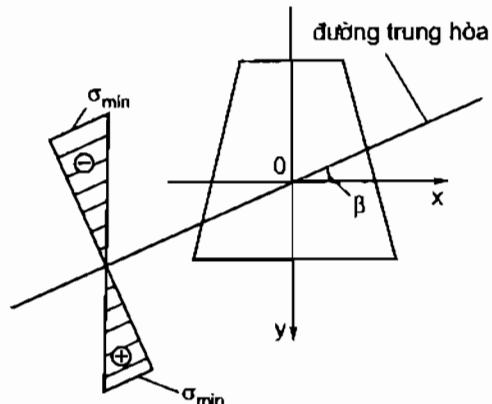
Trên một mặt cắt ngang, đường trung hòa là quỹ tích những điểm tại đó ứng suất pháp bằng không. Vậy phương trình đường trung hòa là :

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0 \quad (7-19)$$

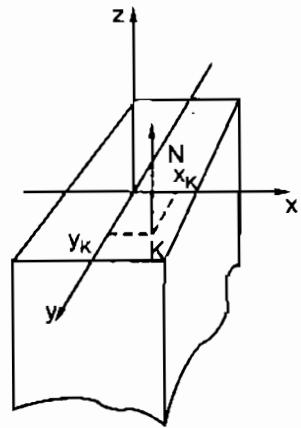
đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ với hệ số góc :

$$\operatorname{tg}\beta = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (7-20)$$

Biểu đồ ứng suất pháp được biểu diễn như trên hình 7-7. Vậy điểm xa đường trung hòa nhất là nguy hiểm nhất.



Hình 7-7



Hình 7-8

4. Kéo nén lệch tâm. Một dạng riêng của bài toán uốn cộng kéo (hoặc nén) là bài toán kéo (hoặc nén) lệch tâm. Ta gọi một thanh chịu kéo hoặc nén lệch tâm khi hợp lực của ngoại lực có thể thu về một lực N song song với trục thanh nhưng không nằm trên trục thanh. Hợp lực của nội lực trên mặt cắt cũng là N và hợp lực đó có điểm đặt là K lệch so với trọng tâm mặt cắt một khoảng cách e (h.7-8).

Gọi tọa độ K là x_K và y_K thì các thành phần nội lực trên mặt cắt sẽ là :

$$N_x = N; M_x = N y_K; M_y = N x_K$$

Công thức của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{N y_K y}{J_x} + \frac{N x_K x}{J_y}$$

Hay : $\sigma_z = \frac{N}{F} \left[1 + \frac{y_K y}{I_x^2} + \frac{x_K x}{I_y^2} \right]$ (7-21)

trong đó : $i_x^2 = \frac{J_x}{F}$ và $i_y^2 = \frac{J_y}{F}$, i_x và i_y được gọi là các bán kính quán tính.

Khi sử dụng công thức (7-21) phải chú ý đến dấu của N .

Phương trình đường trung hòa được viết lại dưới dạng :

$$1 + \frac{y_K y}{i_x^2} + \frac{x_K x}{i_y^2} = 0 \quad (7-22)$$

hay

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7-23)$$

trong đó :

$$a = -\frac{i_y^2}{x_K}; b = -\frac{i_x^2}{y_K} \quad (7-24)$$

Ta nhận thấy một số đặc tính của đường trung hòa như sau :

– Vì a và b luôn luôn ngược dấu với x_K và y_K nên đường trung hòa không cắt qua góc phân tư chứa điểm đặt lực. Nếu điểm đặt lực nằm trên một trục nào đó thì đường trung hòa song song với trục kia.

– Vị trí đường trung hòa chỉ phụ thuộc vào tọa độ x_K, y_K và i_x, i_y , không phụ thuộc vào trị số của N .

– Khi điểm đặt của tải trọng di chuyển trên một đường nào đó không qua gốc tọa độ thì đường trung hòa tương ứng sẽ quay quanh một điểm cố định.

Thực vậy trong phương trình (7-22) ta xem xét x và y là các trị số đã xác định. Nghĩa là vị trí của một điểm có ứng suất bằng không. Khi đó x_K và y_K sẽ là tọa độ quỹ tích của những điểm đặt lực để sao cho ứng suất tại điểm x, y có trị số bằng không. Ta thấy ngay quỹ tích đó là một đường. Hay nói một cách khác, khi di chuyển điểm đặt lực trên đường đó thì mọi đường trung hòa đều phải đi qua (x, y) .

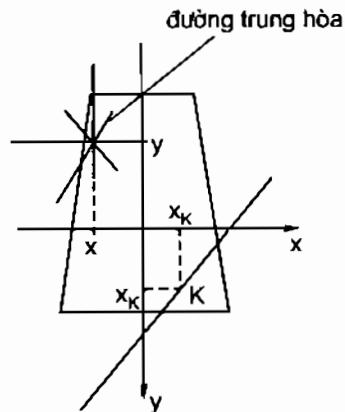
– Nếu điểm đặt tải trọng di chuyển trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ thì đường trung hòa sẽ dịch chuyển song song với chính nó :

Thực vậy, khi đó ta có : $\frac{y_K}{x_K} = m = \text{const.}$ Vậy :

$$\frac{b}{a} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \frac{x_K}{y_K} = n = \text{const}$$

Điều đó chứng tỏ rằng các đường trung hòa tương ứng song song với nhau.

Ta nhận thấy a và b càng lớn khi x_K, y_K càng nhỏ hoặc ngược lại, điều đó có nghĩa là : nếu điểm đặt tải trọng gần vào trọng tâm thì đường trung hòa lui ra khỏi trọng tâm và ngược lại, khi điểm đặt tải trọng dịch ra xa khỏi trọng tâm thì đường trung hòa dịch gần lại trọng tâm (h.7-9).



Hình 7-9

Ví dụ 1. Tính ứng suất trong thanh có mặt cắt thay đổi chịu lực như hình vẽ (h.7-10). Tính biến dạng dài của thanh cho biết $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$; $F_1 = 10\text{cm}^2$, $F_2 = 20\text{cm}^2$ và các trị số của các lực như sau : $P_1 = 2000\text{N}$, $P_2 = 5000\text{N}$, $P_3 = 7000\text{N}$.

Bài giải:

Sử dụng phương pháp mặt cắt để tính nội lực trên từng đoạn thanh. Biểu đồ lực dọc được biểu diễn như trên hình 7-10b.

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn DH có trị số là :

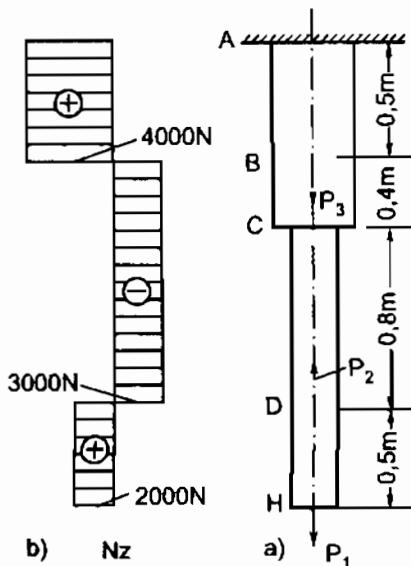
$$\sigma_I = \frac{2000}{10} = 200 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn DC có trị số là :

$$\sigma_{II} = -\frac{3000}{10} = -300 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn BC có trị số là :

$$\sigma_{III} = -\frac{3000}{20} = -150 \text{ N/cm}^2$$



Hình 7-10

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn AB có trị số là :

$$\sigma_{IV} = \frac{4000}{20} = 200 \text{ N/cm}^2$$

Độ giãn dài của thanh là :

$$\Delta l = \frac{2000.50}{2.10^7.10} - \frac{3000.80}{2.10^7.10} - \frac{3000.40}{2.10^7.20} + \frac{4000.50}{2.10^7.20}$$

$$\Delta l = -0.5.10^{-3} \text{ cm}$$

Ví dụ 2. Thanh chịu lực như hình 7-11, tính thể năng biến dạng đàn hồi trong thanh.

Bài giải:

Thể năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích là :

$$u = \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2}$$

Vậy thể năng biến dạng đàn hồi trên một đoạn thanh dz là :

$$dU = \frac{N_z^2}{2EF} dz$$

Thể năng biến dạng đàn hồi tính trong toàn thanh là :

$$U = \int_v dU = \int_0^l \frac{N_z^2}{2EF} dz$$

$$U = \frac{J_z^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{2EF} \quad (7-25)$$

Ví dụ 3. Cho thanh chịu lực như trên hình 7-11 ; tính ứng suất trên mặt cắt bất kì nào đó khi có kẽ cả trọng lượng bản thân của thanh. Gọi γ là trọng lượng riêng của thanh.

Bài giải:

Xét mặt cắt (1 – 1) cách đầu mút tự do một khoảng cách z. Lực dọc trên mặt cắt có trị số là :

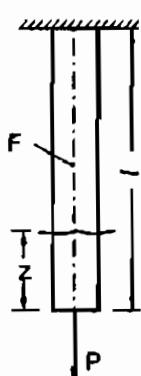
$$N_z = P + \gamma F_z$$

Vậy ứng suất trên mặt cắt là :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} + \gamma z$$

Trị số ứng suất cực đại là tại ngàm :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l$$



Hình 7-11

Biến dạng dọc của thanh được tính với biểu thức :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF} = \int_0^l \frac{P + \gamma Fz}{EF} dz$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}$$

Q là trọng lượng bản thân của thanh.

Ví dụ 4. Cho đầm chịu lực như trên hình 7-12. Mặt cắt ngang của đầm là một hình chữ nhật bề rộng b , bề cao h . Vẽ biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang đoạn đầm chịu uốn thuần túy và tính trị số ứng suất cực đại.

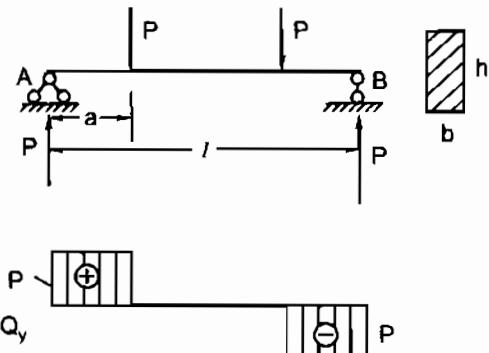
Bài giải

Biểu đồ Q_y và M_x được biểu diễn như trên hình 7-12b, c. Trên mọi mặt cắt ngang trong đoạn CD chỉ có một thành phần momen uốn M_x . Nên đoạn đó chịu uốn thuần túy. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang được xác định bởi biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y. \text{ Vậy trị số của ứng suất cực}$$

đại là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6Pa}{bh^2}$$



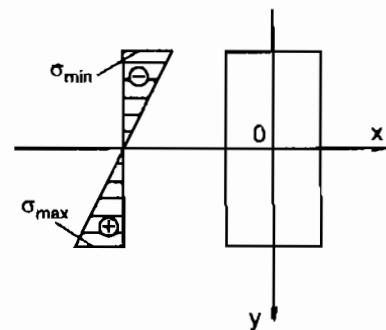
Hình 7-12

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình 7-13. Trục trung hòa là trục Ox. Nửa phần dưới của mặt cắt chịu kéo và nửa phần trên chịu nén. Điểm xa nhất đối với đường trung hòa của miền chịu nén là các điểm có tung độ là $\pm \frac{h}{2}$. Trị số tuyệt đối của σ_{\max} và σ_{\min} là bằng nhau và bằng :

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} \quad (7-26)$$

$$\text{với } W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (7-27)$$

$$\text{ở đây ta có : } W_x^+ = W_x^- = \frac{bh^2}{6}$$



Hình 7-13

Ví dụ 5. Trên một mặt cắt ngang hình chữ nhật, momen uốn M_x và M_y có chiều hướng như hình 7-14. Trị số của chúng như sau :

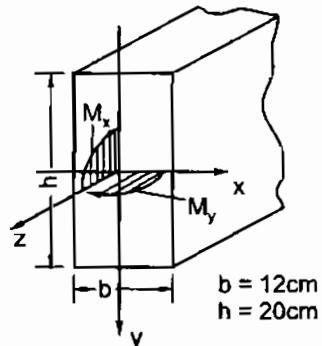
$$M_x = 45 \text{ kNm}, M_y = 25 \text{ kNm}.$$

Vẽ biểu đồ ứng suất trên mặt cắt.

Bài giải :

Đây là bài toán uốn xiên ứng suất pháp trên mặt cắt được xác định bởi biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

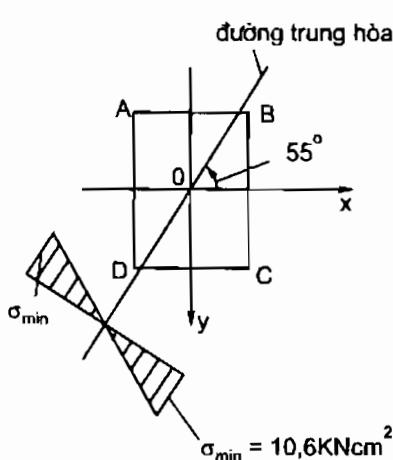


Hình 7-14

Phương trình đường trung hòa là :

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

Thay trị số vào ta được : $4,68y + 6,9x = 0$



Hình 7-15

Đường trung hòa được biểu diễn như trên hình 7-15. Các điểm có trị số tuyệt đối của ứng suất lớn nhất là những điểm A và C vì chúng xa nhất đối với đường trung hòa. Điểm C nằm trong miền kéo A nằm trong miền nén. Trị số của các ứng suất đó là :

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{M_z}{W_k} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{4500000}{800} + \frac{2400000}{480} \\ &= 10,625 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_A = -12,625 \text{ kN/cm}^2$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{bh^2}{6}$$

§7-3. THÍ NGHIỆM KÉO VÀ NÉN VẬT LIỆU

Trong những bài toán ta vừa xét trên đây, như chúng ta đã nói trạng thái ứng suất của phân tử là trạng thái ứng suất đơn. Vấn đề đặt ra cho chúng ta là phải tìm điều kiện bền cho trạng thái ứng suất đó. Để đạt được điều đó chúng ta chỉ việc tiến hành các thí nghiệm về kéo và nén vật liệu.

1. Thí nghiệm kéo. Mẫu thí nghiệm xem tiêu chuẩn (TCVN), ví dụ ta dùng mẫu kéo bằng thép như trên hình 7-16. Kí hiệu l_0 là chiều dài phân thí nghiệm và d_0 là đường kính ban đầu của mẫu.



Hình 7-16

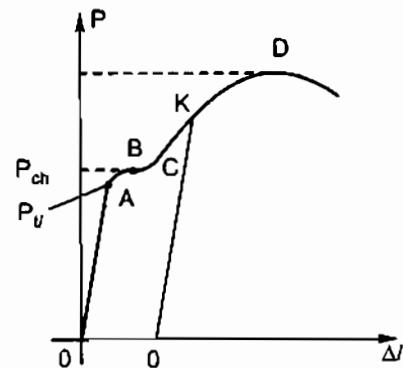
Trong quá trình mẫu chịu kéo, đoạn dài l_0 có một độ giãn Δl . Dùng bút ghi trên máy ta tìm thấy tương quan giữa Δl và P như biểu diễn bằng đồ thị trên hình 7-17. Qua biểu đồ đó ta nhận thấy sự làm việc của vật liệu có ba giai đoạn :

a) *Giai đoạn tương quan tỉ lệ bậc nhất.* Khi bắt đầu tăng lực cho đến một giá trị xác định mà ta kí hiệu là P_u . Trong giai đoạn này tương quan giữa P và Δl là đoạn thẳng OA. Nếu chúng ta thực hiện kéo mẫu đạt đến một giá trị nào đó nhỏ thua P_u , mẫu sẽ có một độ giãn dài Δl tương ứng, sau đó ta lại từ từ giảm lực đi thì ta nhận thấy bút ghi trên biểu đồ sẽ theo đường OA di về lại gốc O. Nghĩa là trên mẫu không biến dạng nữa. Điều đó thể hiện rằng định luật Hooke hoàn toàn đúng trong giai đoạn này. Cũng vì vậy ta gọi giai đoạn này là giai đoạn đàn hồi tỉ lệ. Cách làm việc của vật liệu giống như mô hình một lò xo chịu kéo. Ta gọi giới hạn tỉ lệ quy ước là tỉ số :

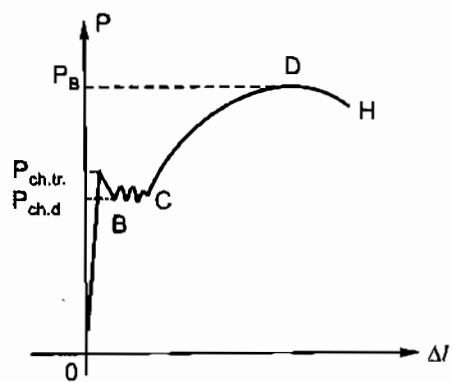
$$\sigma_u = \frac{P_u}{F_0} \quad (\text{N/cm}^2)$$

F_0 là diện tích mặt cắt ngang của mẫu thí nghiệm lúc ban đầu khi chưa biến dạng (trị số đó không phải là ứng suất thực trên thanh vì khi đó diện tích của mặt cắt ngang không còn là F_0 nữa).

b) *Giai đoạn chảy.* Ta để ý đến điểm B, điểm bắt đầu của một giai đoạn đường biểu diễn nằm ngang BC. Tất nhiên từ A đến B cũng là một giai đoạn. Tương quan giữa Δl và P được biểu diễn bởi đoạn cong AB ; song giai đoạn này hết sức ngắn nên ta không cần xét đến. Đôi khi trong thí nghiệm không có cả đoạn cong này. Do tốc độ thí nghiệm không đủ chậm, bút ghi sẽ vạch đường thẳng OA lên một điểm quá B rồi hạ xuống và tạo nên một đường ziczac trong cả độ dài BC (h.7-18). Tương ứng với B ta có lực P_{ch} và gọi giới hạn chảy quy ước là tỉ số :



Hình 7-17



Hình 7-18

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_o} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-28)$$

Trong trường hợp của hình 7-18 ta có hai điểm : Một điểm chảy trên và một điểm chảy dưới. Ta thấy điểm chảy dưới mới là điểm thể hiện tính chất thực của vật liệu. Do đó giới hạn chảy bao giờ cũng tính từ giới hạn chảy dưới.

Ta nhận thấy cách làm việc của vật liệu trong giai đoạn này là lực không tăng nhưng biến dạng tiếp tục tăng lên. Mô hình biểu diễn cách làm việc đó giống như vật trượt trên mặt có ma sát (h.4-1) mà ta đã trình bày trong chương IV. Đoạn thẳng BC trên biểu đồ được gọi là diện chảy, vật liệu càng dẻo thì diện chảy càng lớn. Cũng vì vậy đối với vật liệu ta xem là dẻo lí tưởng có nghĩa là xem như BC kéo dài ra vô cùng.

c) *Giai đoạn cứng cố*. Giai đoạn này được biểu diễn bằng đoạn cong CDH (h.7-17). Trong giai đoạn này nếu lực có tăng lên thì biến dạng mới tăng lên, nhưng tương quan giữa lực và Δl không còn là tương quan bậc nhất nữa. Nếu tăng lực đến một điểm K nào đó và nếu từ từ giảm lực đi thì bút sẽ vạch từ K một đường song song với OA đến vị trí O'. Điều đó có nghĩa là trên thanh có một biến dạng OO' không triệt tiêu sau khi bỏ hết lực. Biến dạng đó được gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng vĩnh cửu hay còn gọi là biến dạng còn dư. Nếu bây giờ ta lại tăng lực lên thì bút sẽ vạch theo đường O'KD. O'K xem như một giai đoạn tỉ lệ. Hiện tượng giới hạn tỉ lệ tăng lên được gọi là hiện tượng biến cứng nguội. Khi P đạt đến giá trị cao nhất P_B thì trên mẫu xuất hiện một chỏ thắt. Trên biểu đồ ta thấy lực giảm xuống nhưng ứng suất thực trên mặt cắt ngang ở chỏ thắt tăng lên vì diện tích thu hẹp. Khi ứng suất này đạt đến một trị số nào đó thì thanh bị đứt.

Như vậy khi lực đạt đến P_B ta có thể xem như vật liệu đã bị phá hỏng do đó ta định nghĩa giới hạn bền quy ước là tỉ số :

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_o} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-29)$$

Ba giới hạn : giới hạn tỉ lệ, giới hạn chảy và giới hạn bền thể hiện tính chịu lực của vật liệu. Trong thực tế ba giới hạn đó được tính theo tiêu chuẩn (xem TCVN). Trong chế tạo máy ta muốn các chi tiết làm việc không có biến dạng dư vì nếu có biến dạng này thì kích thước của chi tiết sẽ thay đổi sau khi chịu lực do đó ta chỉ cho phép ứng suất thực trong chi tiết nhỏ hơn σ_{ch} . Để có được một độ an toàn chắc chắn ta thường lấy :

$$\sigma_z \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (7-30)$$

n là hệ số an toàn tự chọn với giá trị lớn hơn 1. Tỉ số $\frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma]$ được gọi là ứng suất cho phép. Trong xây dựng nếu ta không cần để ý đến sự chịu lực lớn nhất của vật liệu, khi đó ta tính ứng suất cho phép từ giới hạn bền :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \quad (7-30)'$$

Đối với vật liệu giòn, biểu đồ tương quan giữa P và Δl được biểu diễn như hình 7-19. Ta không thể xác định được giới hạn tỉ lệ và không xuất hiện giới hạn chảy. Ứng suất cho phép xác định từ giới hạn bền :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-30)''$$

Tuy nhiên người ta cũng có thể chọn một trị số thích hợp mà với trị số đó ta có thể xem là giới hạn tỉ lệ, nghĩa là khi ứng suất chưa đạt đến trị số đó thì ta thừa nhận là vật liệu làm việc tuân theo định luật Hooke.

Để đánh giá tính dẻo của vật liệu chúng ta sử dụng hai đặc trưng sau đây.

Độ giãn dài tỉ đối (tính theo phần trăm) :

$$\delta = \frac{l_d - l_o}{L_o} \cdot 100\% \quad (7-31)$$

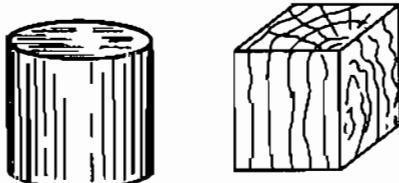
Độ thắt tỉ đối (tính theo phần trăm) :

$$\Psi = \frac{F_d - F_o}{F_o} \cdot 100\% \quad (7-32)$$

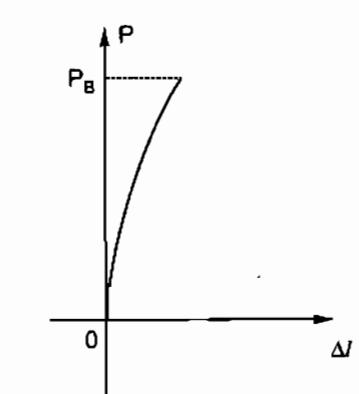
Trong đó l_d chiều dài đứt, F_d diện tích mặt cắt ngang tại chỗ đứt

Ta thấy vật liệu càng dẻo thì trị số δ và Ψ càng lớn.

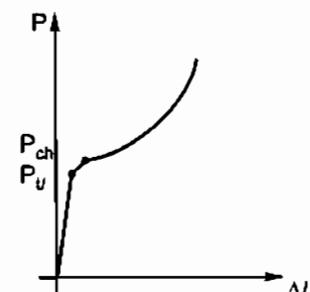
2. Thí nghiệm nén. Hình dáng mẫu thí nghiệm là một hình trụ tròn hoặc một hình hộp (h.7-20). Chiều cao của mẫu nén thường lấy từ 1 đến 1,5 lần đường kính hay kích thước lớn nhất của đáy. Đối với vật liệu dẻo, mẫu thường có dạng hình trụ, biểu đồ quan hệ giữa Δl và P như trên hình 7-21.



Hình 7-20



Hình 7-19

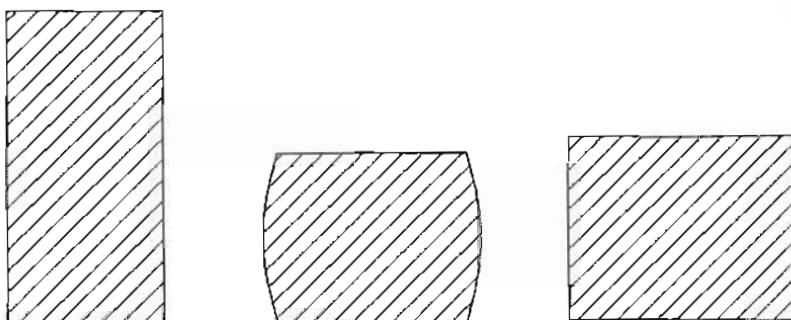


Hình 7-21

Qua biểu đồ ta nhận thấy quá trình chịu lực của vật liệu cũng có ba giai đoạn.

Giai đoạn tỉ lệ, giai đoạn chảy và giai đoạn cứng cố. Chỉ khác một điều là ta không có giới hạn bền. Càng nén mẫu càng phình ra theo chiều ngang và bẹp xuống mà không vỡ.

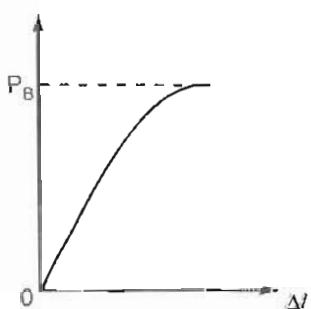
Nếu giữa mẫu nén và bàn ép có lực ma sát thì hình dáng của mẫu trong quá trình biến dạng là một hình trống (h.7-22). Nếu trên các mặt tiếp xúc được bôi trơn thì sự phình ra theo chiều ngang là như nhau đối với mọi mặt cắt ngang.



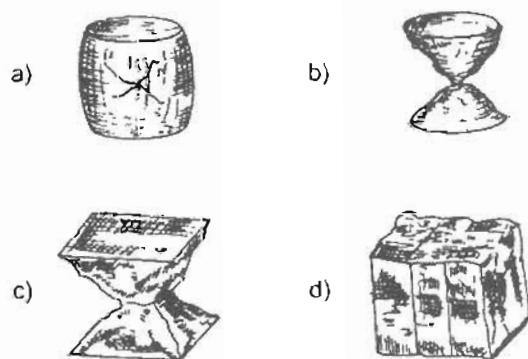
Hình 7-22

Trong trường hợp vật liệu giòn biến đổi tương quan giữa Δl và P là một đường cong (h.7-23) gần giống như khi kéo ; nhưng P_B lớn hơn nhiều so với khi kéo.

Khi P đạt đến trị số P_B thì mẫu bị phá vỡ. Nếu trên các bề mặt tiếp xúc giữa mẫu và bàn nén không có bôi trơn thì các vết nứt nghiêng một góc 45° so với phương của trực. Vật liệu sẽ bị bóc dần chung quanh, để cuối cùng còn lại hình chóp với hai đáy là những mặt tiếp xúc với bàn nén (h.7-24a), (h.7-24c). Nếu trên các bề mặt có bôi trơn thì các vết nứt là song song với trục của mẫu nén (h.7-24d).



Hình 7-23



Hình 7-24

§7-4. CÁC ĐIỀU KIỆN DỄO – ĐIỀU KIỆN BỀN

Với trạng thái ứng suất đơn, vật liệu bắt đầu có biến dạng dễ dàng khi ứng suất trong thanh đạt đến giới hạn dễ dàng. Với trạng thái ứng suất phẳng và khối ta không thể xác định giới hạn đó một cách tổng quát bằng thí nghiệm vì giới hạn đó không những phụ thuộc vào độ lớn của các ứng suất mà còn phụ thuộc vào các tỉ lệ giữa các ứng suất. Cũng vì vậy đã có

nhiều giả thuyết suy đoán một cách tổng quát giới hạn mà bắt đầu từ đó, vật liệu có biến dạng dẻo ; ví dụ với giả thuyết của Rāngkin. Giả thuyết đó cho rằng khi ứng suất pháp cực đại đạt đến một giá trị nào đó thì vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo. Giả thuyết của Xanhvonāng cho rằng khi biến dạng lớn nhất đạt đến một trị số nào đó thì vật liệu sẽ bắt đầu có biến dạng dẻo. Giả thuyết của Bentorami lại cho rằng khi thế năng biến dạng đàn hồi toàn phần đạt đến một giá trị nào đó thì vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo. Người ta đã nhận thấy tất cả những giả thuyết đó đều sai vì khi vật liệu chịu nén đều theo mọi phương thì vật liệu không có biến dạng dẻo. Cho đến nay chỉ còn hai giả thuyết là giả thuyết của Culōng và giả thuyết của Vōng Midet là còn đúng vững đối với thép vì nó tương đối phù hợp với thực tế.

Như chúng ta đã biết, ngày nay, trong công nghiệp đã sử dụng nhiều loại vật liệu khác, ví dụ các loại chất dẻo v.v.. Điều kiện dẻo phù hợp với từng loại vật liệu ở đây không đề cập đến.

1. Điều kiện dẻo của Culōng – Toretska

Qua các thí nghiệm Culōng và Toretxka nhận thấy trạng thái dẻo của vật liệu phát sinh khi hiệu của σ_1 và σ_3 đạt đến một giới hạn nhất định. Hiệu của σ_1 và σ_3 lại bằng hai lần trị số ứng suất tiếp cực đại cho nên điều kiện dẻo của Culōng và Toretxka cũng còn được gọi là điều kiện dẻo về ứng suất tiếp cực đại. Điều kiện đó viết như sau :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max} = 2K$$

2K là một giới hạn mà ta có thể dựa vào thí nghiệm của trạng thái ứng suất đơn để xác định. Qua thí nghiệm với thanh chịu kéo trên dây ta thấy ngay $2K = \sigma_{ch}$.

Như vậy, để vật liệu làm việc trong miền đàn hồi với một hệ số an toàn nhất định ta phải có điều kiện :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (7-33)$$

Điều kiện đó thường được gọi là *điều kiện bền theo ứng suất tiếp lớn nhất*.

2. Điều kiện dẻo của Vōng Midét

Vōng Midet đã suy luận hoàn toàn bằng đường lối toán học để đi đến điều kiện dẻo như sau :

Trong điều kiện vật liệu và đồng nhất dẳng hướng điều kiện dẻo không phụ thuộc vào phương của tọa độ. Như vậy điều kiện dẻo là một biểu thức tương quan giữa các bất biến của ứng suất : $f(I_1, I_2, I_3)$. Nhưng nó phải độc lập đối với tenxơ ứng suất cầu ; vậy biểu thức đó là một sự tương quan giữa các bất biến của tenxơ ứng suất lệch $f(I_1, I_2, I_3)$; vì $I_1 = 0$ nên mối tương quan đó là mối liên hệ giữa I_2 và I_3 . Nếu xem giới hạn chảy khi kéo và giới hạn chảy khi nén là như nhau thì mối tương quan đó lại phải độc lập đối với I_3 . Thực vậy ta hãy suy cho trường hợp kéo nén đơn. Khi đó ta có $I_3 = \frac{2}{27} \sigma^3$. Trị số này phải đổi

dẫu khi thay $\sigma_1 = \sigma_{ch}$ và $\sigma_1 = -\sigma_{ch}$. Như vậy nếu có I_3 thì mối tương quan f không như nhau khi vật liệu chịu kéo và chịu nén. Do đó điều kiện dẻo chỉ còn phụ thuộc vào I_2 . Võng Midét cho rằng vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo khi :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 4K'^2$$

Biểu thức về bên trái là trị số của I_2 sai kém một hằng số tỉ lệ.

Ở trạng thái ứng suất đơn vật liệu bước vào biến dạng dẻo khi $\sigma_1 = \sigma_{ch}$ do đó ta có : $2K'^2 = \sigma_{ch}^2$. Điều kiện để vật liệu làm việc trong điều kiện bền và an toàn là khi :

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{\sigma_{ch}^2}{n^2}$$

Hay :

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma] \quad (7-34)$$

Biểu thức ở về trái của (7-34) là trị số của thế năng biến đổi hình dáng sai kém một hằng số tỉ lệ. Vì vậy điều kiện (7-34) còn được gọi là điều kiện bền theo thế năng biến đổi hình dáng. Khi thế năng đó đạt đến một giá trị nhất định thì vật liệu bước vào giai đoạn chảy và ta xem như không sử dụng được nữa.

3. Biểu diễn hình học của điều kiện dẻo

Điều kiện dẻo của một thuyết nào đó thường được biểu diễn bằng một mặt trong không gian ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Gọi \overrightarrow{OP} là một vectơ có các thành phần $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ biểu diễn cho trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể ; ta có thể phân tích \overrightarrow{OP} thành hai thành phần : thành phần \overrightarrow{OH} tương trưng cho trạng thái ứng suất cầu với $\sigma_{tb} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ và thành phần \overrightarrow{OD} tương trưng cho trạng thái ứng suất lệch với :

$$\sigma_1 = \sigma_{tb} - \sigma_{lb}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{tb} - \sigma_{lb}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{tb} - \sigma_{lb}$$

Ta nhận thấy vectơ \overrightarrow{OH} phải nằm trên đường nghiêng đều đối với các trục tọa độ. Các cosin chỉ phương của \overrightarrow{OH} là bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác nếu cộng các biểu thức trên đây ta có :

$$\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3 = 0$$

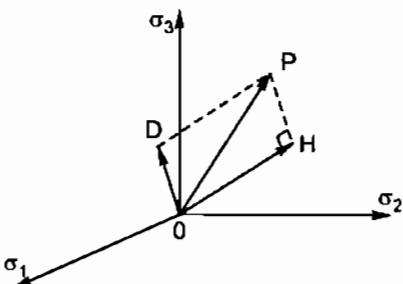
nghĩa là điểm D phải nằm trong mặt phẳng π có phương trình là :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

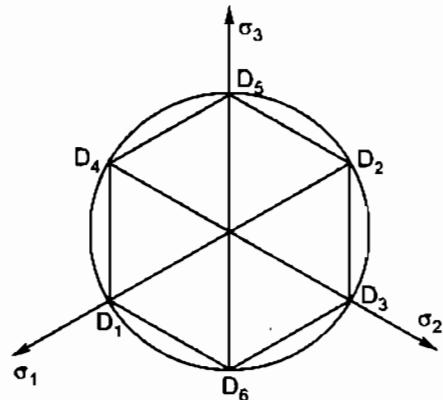
Ta nhận thấy ngay pháp tuyến của π tại O chính là đường OH (h.7-25).

Hãy xét mặt giới hạn của Culông. Theo (7-32) ta có :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ch} \quad (a)$$



Hình 7-25



Hình 7-26

Như vậy trên phương của mỗi trục, ví dụ trên phương của σ_1 chẳng hạn ta tìm thấy hai điểm giới hạn, một điểm giới hạn σ_{ch} khi kéo vật liệu theo phương đó và một điểm $-\sigma_{ch}$ khi nén vật liệu cũng theo phương đó. Nếu bỏ qua hiệu ứng Bausinhghe nghĩa là xem rằng giới hạn chảy khi nén bằng giới hạn chảy khi kéo thì hình chiếu của hai điểm này trên π cho ta hai điểm chiếu của mặt culông trên π (h.7-26).

Hai điểm đó được kí hiệu là D_1, D_2 . Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OD_1}$ chính là :

$$\sigma_{ch} \sin(O\sigma_1, OH) = \sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Trên hình 7-26 ta đã biểu diễn hình chiếu của các trục $O\sigma_1, O\sigma_2$ và $O\sigma_3$ trên mặt π , vậy vectơ \overrightarrow{OH} là vectơ vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ. Tương tự như vậy ta tìm thấy bốn điểm khác trên σ_2 và σ_3 . Để ý đến biểu thức (a) trên đây ta thấy ngay hình chiếu của mặt giới hạn trên π là hình sáu cạnh đều nối các điểm $D_1, D_4, D_5, D_2, D_3, D_6$.

Như vậy mặt giới hạn của Culông là một hình lăng trụ sáu mặt đều có trục \overrightarrow{OH} nội tiếp trong mặt trục có bán kính là $\sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$. Những trạng thái ứng suất được tượng trưng bằng những điểm trên mặt giới hạn là những trạng thái ứng suất bắt đầu có biến dạng dẻo. Ta gọi trạng thái đó là trạng thái giới hạn.

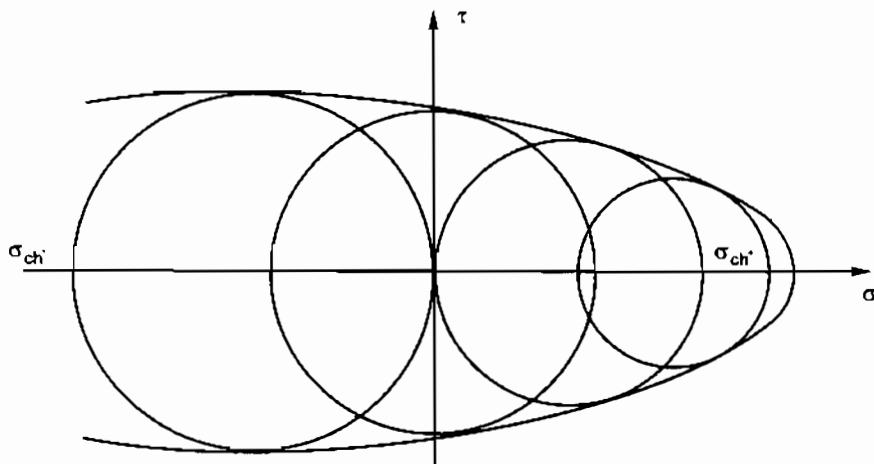
Theo điều kiện dẻo của Võng Midet ta có :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ch}^2 \quad (b)$$

Đó là phương trình của hình trụ tròn xoay với \overrightarrow{OH} là trục. Mặt trục đó cắt π bởi đường tròn, bán kính của đường tròn cũng chính là hình chiếu của σ_{ch} lên π nên đúng bằng $\sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$. Nói một cách khác mặt trục của Võng Midet là mặt trục ngoại tiếp của lăng trụ Culông.

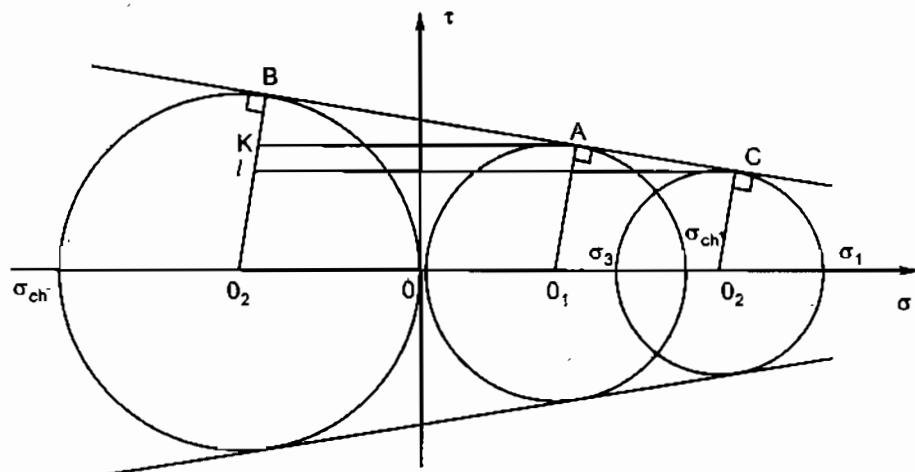
4. Đường nội tại – Thuyết bền của Mo

Hai giả thuyết của Culong và Vông Midet đều bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất cầu đến giới hạn dẻo của vật liệu. Vào năm 1880 Mo đã chỉ ra rằng khi một vật thể chịu kéo theo các phương như nhau, lực không thể tăng lên vô hạn được. Nếu ta biểu diễn các trạng thái ứng suất bằng những vòng tròn Mo ứng suất trong mặt σ , τ thì chắc chắn ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn về phía dương của trục σ tương ứng cho trạng thái kéo đều theo các phương mà khi đó vật liệu đã bắt đầu có biến dạng dẻo (h.7-27).



Hình 7-27

Thực hiện nhiều thí nghiệm khác với các trạng thái ứng suất khác nhau ta sẽ được các vòng Mo giới hạn, nghĩa là những vòng Mo tương ứng với trạng thái ứng suất đã bắt đầu có biến dạng dẻo. Đường bao là những vòng Mo đó được gọi là đường nội tại. Một cách gần đúng đường nội tại có thể xem như hai đường tiếp tuyến với hai vòng Mo giới hạn của trạng thái kéo đơn và nén đơn (h.7-28).



Hình 7-28

Giả sử một trạng thái ứng suất nào đó với σ_1 và tại σ_3 là một trạng thái giới hạn, nghĩa là vòng ứng suất tiếp xúc với đường nội tại tại C. Ta hãy tìm mối tương quan giữa σ_1 và σ_3 với các giới hạn chảy khi kéo và khi nén. Gọi A và B là các điểm tiếp xúc của các vòng tròn giới hạn khi kéo và nén với đường nội tại. Kẻ các đường song song với trục hoành từ A và từ C. Các đường đó cắt O₂B tại K và l. Từ điều kiện đồng dạng của tam giác ta có :

$$\frac{Bl}{BK} = \frac{Cl}{AK}$$

Nếu gọi v là tỉ số giữa σ_{ch} khi kéo và σ_{ch} khi nén, sau khi tính các độ dài Bl, BK, Cl, AK và thay vào trên ta được :

$$\sigma_1 - v\sigma_3 = \sigma_{ch}^+$$

Như vậy để đạt được điều kiện vừa bền vừa an toàn ta phải có :

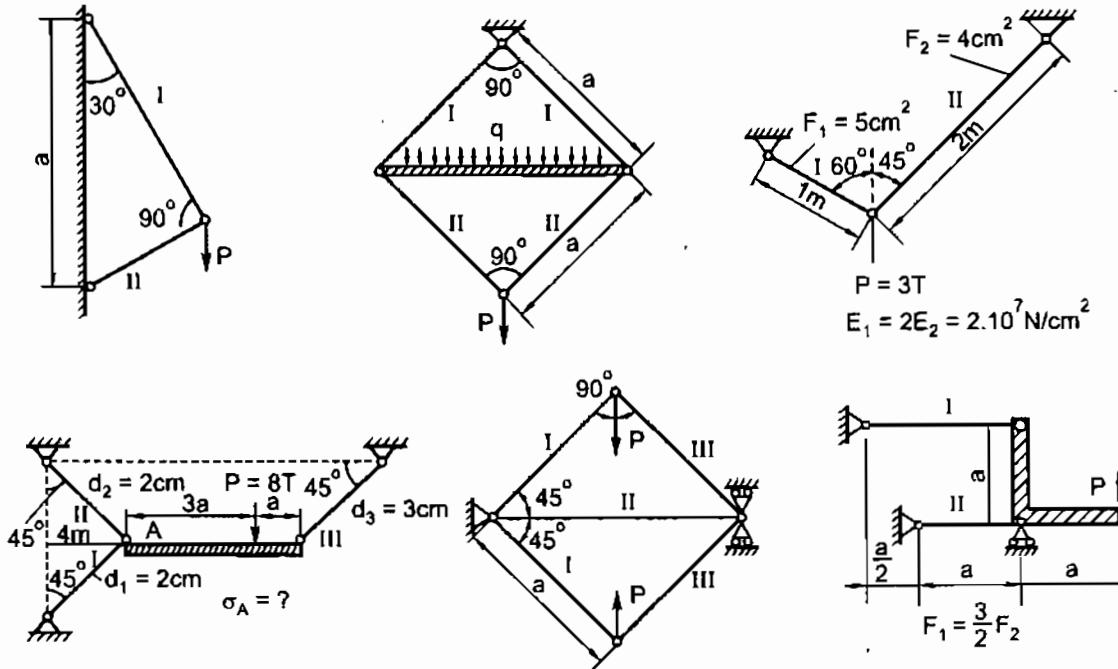
$$\sigma_1 - v\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (7-35)$$

trong đó $[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}^+}{n}$

Ta nhận thấy ngay khi $v = 1$ thì thuyết bền của Mo trùng với thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Thuyết bền này được áp dụng rộng rãi đối với vật liệu giòn vì vật liệu này có giới hạn bền khi kéo và khi nén khác nhau.

Bài tập

7.1. Tính nội lực trong các thanh giằng I, II của các hệ chịu lực như trong hình vẽ.



Hình 7-29

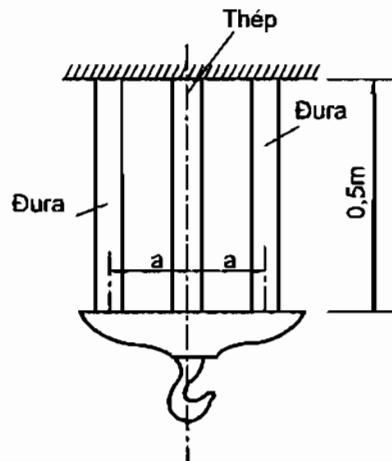
- 7.2. Một cái móc treo trọng lượng 42 kN như trên hình 1-55. Thanh treo ở giữa bằng thép, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước $0,5\text{cm} \times 2\text{cm}$. Các thanh bên bằng Đuyra, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước $1,5\text{cm} \times 2\text{cm}$.

Xác định ứng suất và biến dạng của các thanh treo.

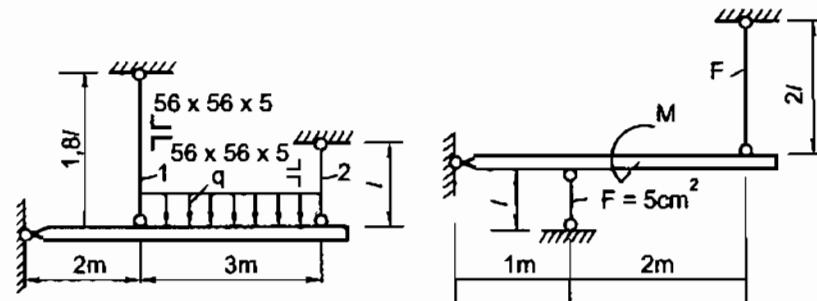
Cho : $E_{\text{th}} = 2.10^4 \text{kN/cm}^2$, $E_{\text{Đuyra}} = 0,7.10^4 \text{kN/cm}^2$.

- 7.3. Dầm tuyệt đối cứng được giữ bởi các thanh treo bằng thép có giới hạn chảy $\sigma_{ch} = 24 \text{kN/cm}^2$.

Xác định giá trị cho phép của tải trọng tác dụng lên dầm. Hệ số an toàn $n = 1,6$ módun đàn hồi của thép : $E = 2.10^4 \text{kN/cm}^2$.

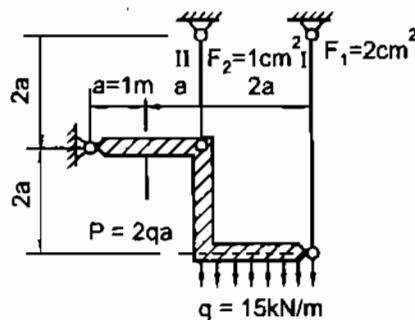


Hình 7-30

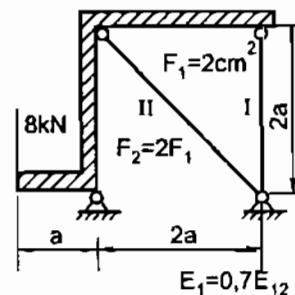


Hình 7 - 31

- 7.4. Tính ứng suất pháp trong các dây treo I, II của các hệ chịu lực như hình vẽ.

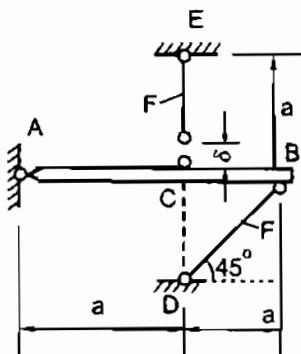


Hình 7-32

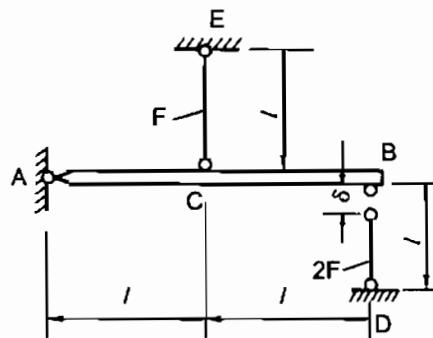


Hình 7-33

- 7.5. Xác định $[\delta]$ sao cho ứng suất trong các thanh BD và CE không vượt quá ứng suất cho phép $[\tau]$. Giả thiết AB là tuyệt đối cứng và các thanh đều cùng một loại vật liệu có môđun đàn hồi E.

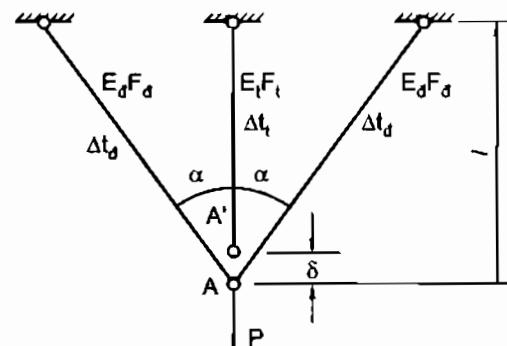


Hình 7-34



Hình 7-35

- 7.6. Một hệ thống gồm ba thanh, hai thanh bên bằng đồng có độ cứng chống kéo $E_d F_d$, thanh giữa bằng thép có độ cứng chống kéo $E_t F_t$, treo một trọng lượng P. Thanh giữa ngắn hơn chiều dài cần thiết một đoạn nhỏ δ . Khi lắp xong hệ thống và đặt lực các thanh còn bị tăng nhiệt độ lên là Δt_d đối với thanh bằng đồng, Δt_t đối với thanh bằng thép. Hệ số giãn nở của đồng và của thép là α_d , α_t . Tính nội lực ở các thanh hình 7-36.



Hình 7-36

- 7.7. Một bulông bằng thép dùng để ghép 2 ống duyra có vòng đệm bằng đồng ở giữa. Lực kéo trước trong bulông bằng $N_o = 20\text{kN}$. Tính ứng suất trong bulông và trong ống duyra khi nhiệt độ tăng lên $\Delta t = 20^\circ\text{C}$ (h.7-37).

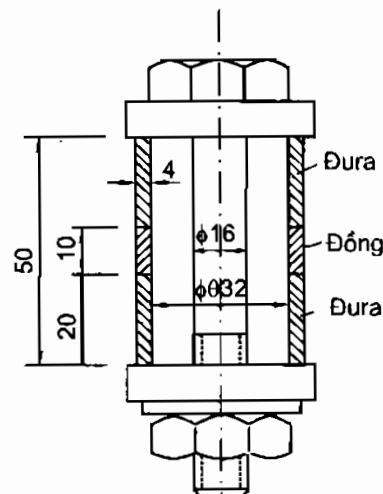
Hai tấm đệm ở đầu hai ống duyra được coi là tuyệt đối cứng.

Hệ số giãn nở :

$$\alpha_{\text{duyra}} = 22,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_d = 16,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_{th} = 12,5 \cdot 10^{-6}$$



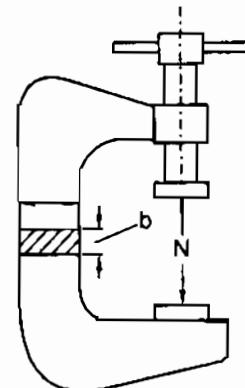
Hình 7-37

$$E_{\text{duyra}} = 0,7 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

$$E_{\text{đồng}} = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

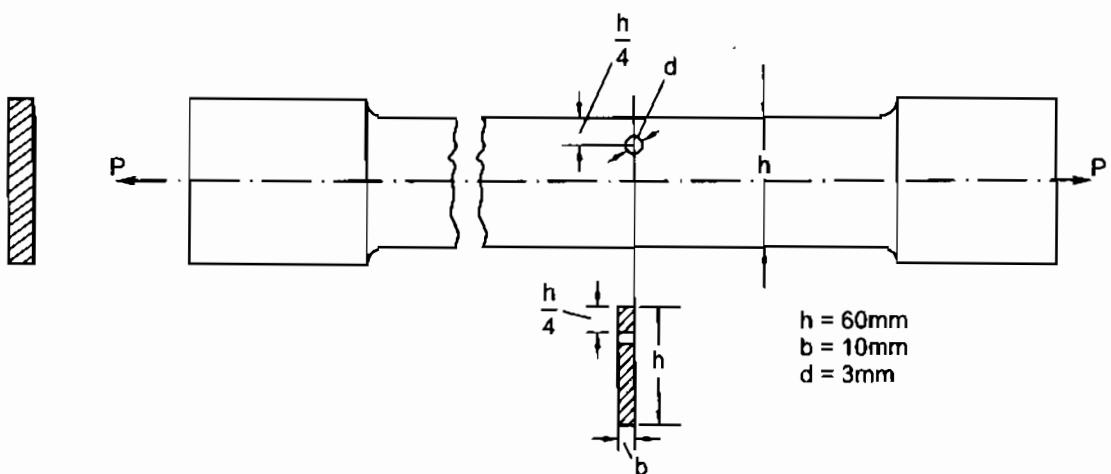
$$E_{\text{thép}} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

- 7.8. Một dụng cụ để kẹp có dạng như hình vẽ. Thân dụng cụ có mặt cắt ngang là hình chữ nhật với kích thước như sau : $h = 15\text{mm}$, $b = 5\text{mm}$, $e = 50\text{mm}$. Ứng suất cho phép của vật liệu là $[\sigma] = 160 \text{ MN/cm}^2$. Tính lực ép N lớn nhất có thể đạt được.



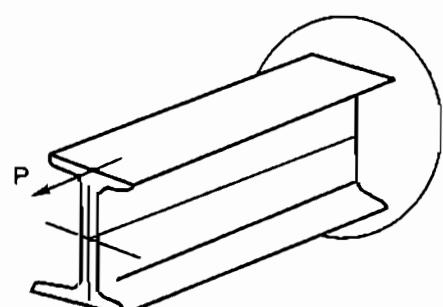
Hình 7-38

- 7.9. Một thanh thép có mặt cắt ngang hình chữ nhật (h.7-39), chịu tác dụng một lực P theo chiều trực. Sau đó thanh bị khoan thủng một lỗ nhỏ với đường kính d như hình vẽ. Tính lại trị số lực $[P]$ cho phép. Cho biết $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$.



Hình 7-39

- 7.10. Một thanh sắt định hình chữ I số hiệu N°10 được ngầm chát vào tường và chịu một lực song song với đường trục như hình 7-40. Tính lực kéo cho phép tối đa của thanh. $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$.



Hình 7-40

Chương 8

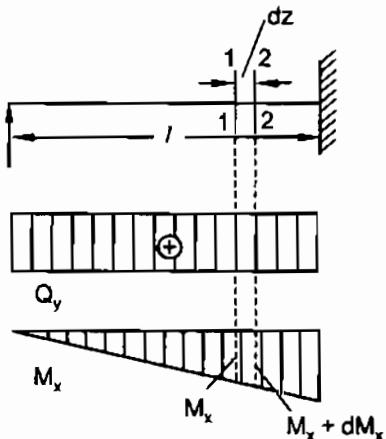
BÀI TOÁN UỐN NGANG PHẲNG

§8-1. CÔNG THỨC CỦA ỨNG SUẤT TIẾP

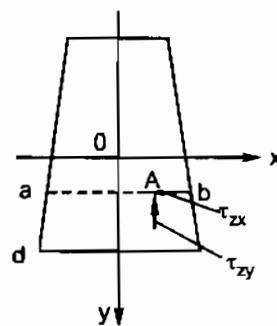
Xét dầm chịu uốn như hình 8-1. Qua các biểu đồ nội lực ta nhận thấy trên mọi mặt cắt ngang đều có hai thành phần Q_y và M_x .

Giả sử dầm có một mặt đối xứng và tải trọng cũng nằm trong mặt đối xứng của dầm. Với cách chịu lực như vậy ta gọi là dầm *chịu uốn ngang phẳng* vì trục vồng của dầm là một đường cong phẳng.

Ví dụ mặt cắt ngang của dầm có hình dáng như hình 8-2. Tại một điểm A nào đó trên mặt cắt phải có cả thành phần ứng suất pháp σ_z do mômen uốn gây nên và ứng suất tiếp do lực cắt gây nên. Ứng suất tiếp được phân thành hai phần : τ_{zy} và τ_{zx} .



Hình 8-1



Hình 8-2

Bằng một phương pháp nào đó ta có thể xác định được τ_{zy} thì cũng với phương pháp đó ta có thể xác định được τ_{zx} . Do đó, ở đây ta chỉ cần trình bày cách xác định τ_{zy} . Mặt khác, trong một số trường hợp cụ thể của thực tế mà ta sẽ trình bày dưới đây, thành phần τ_{zx} là rất bé có thể bỏ qua được.

Để xác định τ_{zy} ta hãy tách ra khỏi thanh một phần tố bằng các mặt cắt như sau :

- Hai mặt cắt ngang (1 – 1) và (2 – 2) rất gần nhau cách nhau một khoảng dz. Nội lực trên mặt cắt (1 – 1) là M_x và Q_y . Nội lực trên mặt cắt (2 – 2) là $M_x + dM_x$ và Q_y .
- Một mặt cắt qua A vuông góc với τ_{zy} .

Phân tố được biểu diễn như trên hình 8-3. Trên phân tố đó mặt abcd là phần mặt cắt (1 – 1) và efg h là phần của mặt cắt (2 – 2). Hai phần mặt cắt này có diện tích như nhau và được ký hiệu là $F_{cắt}$. Xét các lực tác dụng lên phân tố.

Trên các mặt $abcd$ và $efgh$ có các hợp lực do ứng suất pháp σ_{z1} và σ_{z2} gây nên. Các lực này có phương song song với trục z.

Vì định luật đối ứng nên trên mặt $abfe$ có hệ ứng suất tiếp $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Hệ ứng suất này tạo nên lực song song với trục z. Nếu xem τ_{zy} là phân bố đều theo chiều dài $b_{cắt}$ của ab thì trị số của lực là $\tau_{yz} dz b_{cắt}$.

Vấn đề đặt ra là phải tính σ_{z1} và σ_{z2} .

Ta biết rằng vì có ứng suất tiếp nên mặt cắt ngang không còn phẳng nữa vậy công thức ứng suất pháp như phần trên ta đã xác định là không còn đúng nữa, song vì biến dạng là vô cùng bé nên ta thừa nhận rằng : ngay cả trong trường hợp này công thức đó vẫn đúng. Vậy ta có :

$$\sigma_{z1} = \frac{M_x}{J_x} y ; \quad \sigma_{z2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (1)$$

Xét điều kiện cân bằng của phân tố. Chiều tất cả các lực lên phương của trục z ta có :

$$\int_{F_{cắt}} \sigma_{z1} dF - \int_{F_{cắt}} \sigma_{z2} dF + \tau_{yz} dz b_{cắt} = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) với chú ý rằng $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ và biểu thức tích phân $\int_{F_{cắt}} y dF$ là mômen tĩnh của diện tích $F_{cắt}$ đối với trục x kí hiệu là $S_x^{cắt}$ ta có :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{cắt}}{J_x b_{cắt}} \quad (8-1)$$

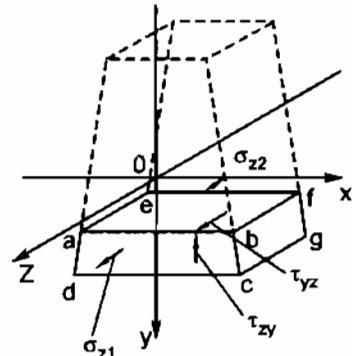
Công thức đó được gọi là công thức Durápxki.

Ta xét một số trường hợp cụ thể thường gặp trong thực tế :

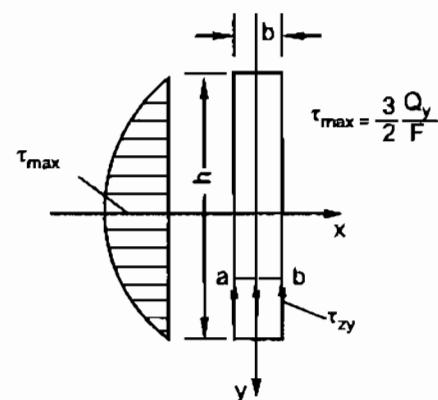
1. Mặt cắt hình chữ nhật hẹp

Ta gọi mặt cắt chữ nhật hẹp là khi chiều cao lớn hơn bê rộng nhiều lần ($\frac{h}{b} \geq 5$) (h.8-4).

Xét sự phân bố ứng suất trên đường ab song song với trục x và có tung độ y. Tại các điểm a và b thành phần ứng suất τ_{zx} phải bằng không vì $\tau_{xz} = 0$ (mặt ngoài của thanh không chịu lực) (h.8-5). Vậy tại đó τ_{zy} là ứng suất toàn phần.



Hình 8-3



Hình 8-4

Vì lí do đối xứng ứng suất tiếp tại i, điểm đối xứng của mặt cắt, cũng phải có phương của y, vậy ta có thể giả thiết ứng suất tiếp ở mọi nơi trên đường ab có phương song song với y và phân bố đều theo ab.

$$\text{Ta có : } S_x^{\text{cắt}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) \frac{1}{2}$$

$$b_{\text{cắt}} = b; J_x = \frac{bh^3}{12}$$

Thay vào công thức của Durápxki ta được :

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (8-2)$$

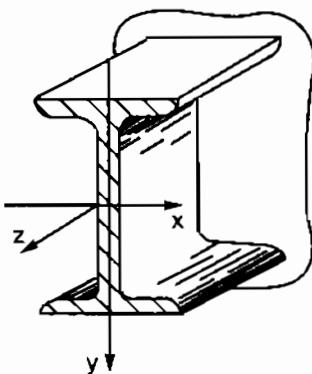
Ứng suất tiếp lớn nhất là tại các điểm trên đường trung hòa ($y = 0$)

$$\tau_{zy} = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (8-3)$$

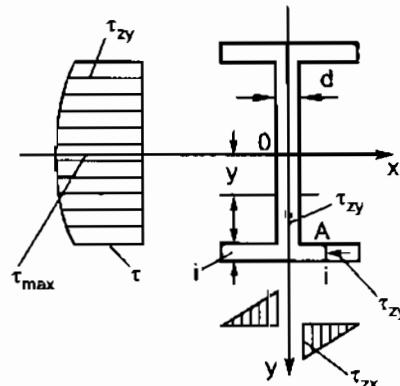
2. Mặt cắt hình chữ I

Giả sử đầm có mặt cắt ngang hình dáng chữ I như trên hình 8-6. Để đơn giản, người ta thường xem hai đế của mặt cắt là hai hình chữ nhật hẹp nằm ngang và phần lòng là một hình chữ nhật hẹp đặt thẳng đứng (h.8-7).

Các loại thép dát định hình thường được sản xuất theo tiêu chuẩn và vì vậy thép đã có sẵn các đặc trưng về hình học của mặt cắt ngang. Các đặc trưng đó được cho trong các phụ lục ở cuối sách. Trong đó có trị số của mômen tĩnh S_x của một nửa mặt cắt đối với trục x.



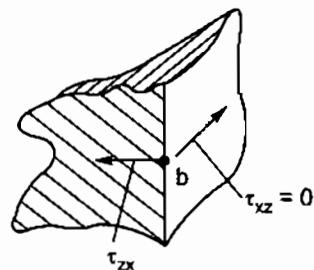
Hình 8-6



Hình 8-7

Cũng như đối với hình chữ nhật hẹp, τ_{zy} tại ab là ứng suất tiếp toàn phần. Trị số của nó được tính với công thức của Durápxki, trong đó $S_x^{\text{cắt}}$ được tính với biểu thức :

$$S_x^{\text{cắt}} = S_x - \frac{dy^2}{2}$$



Hình 8-5

và $b_{cắt} = d$.

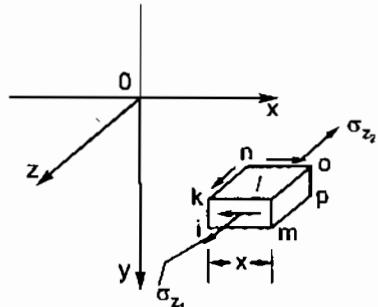
Vậy :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \left(S_x - \frac{d}{2} y^2 \right)}{J_x d} \quad (8-4)$$

Các trị số τ_{max} và τ_1 là :

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_x}{J_x d} \quad (8-5)$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x d} \quad (8-6)$$



Hình 8-8

Cùng cách lập luận như ở trên ta thấy ở để chỉ có thành phần τ_{zx} . Để tính τ_{zx} ta dùng mặt cắt thứ ba ik vuông góc với τ_{zx} (h.8-8).

Mômen tĩnh $S_x^{cắt}$ là mômen tĩnh của diện tích iklm đối với trục x. Trị số mômen tĩnh đó là :

$$S_x^{cắt} = tx \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

Chiều dài $b_{cắt}$ là bằng chiều rộng của đế $b_{cắt} = t$. Vậy :

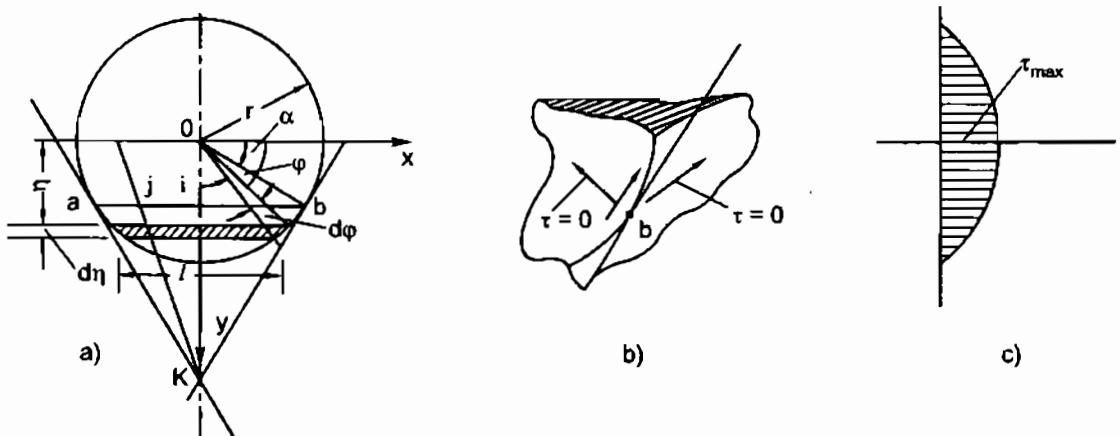
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_y (h - t)}{2 J_x} x \quad (8-7)$$

Biểu đồ phân bố của chúng được biểu diễn như trên hình 8-7. Ta không xét ứng suất tiếp ở phần giao giữa lòng và đế.

3. Mặt cắt tròn

Ta hãy xét phương của ứng suất tiếp tại các điểm trên một đường ab song song với trục Ox. Tại a và b phương của ứng suất tiếp phải là phương của các đường tiếp tuyến tại đó (h.8-9). Thực vậy, giả sử phương của ứng suất tiếp tại đó là bất kì, ta có thể phân thành hai thành phần : một thành phần vuông góc với tiếp tuyến và thành phần thứ hai song song với tiếp tuyến. Theo định luật đối ứng, ứng suất tiếp ở mặt ngoài bằng không (h.8-9b) nên thành phần vuông góc với tiếp tuyến bằng không. Vậy ứng suất tiếp toàn phần phải hướng theo đường tiếp tuyến.

Vì lí do đối xứng nên ta suy được phương của ứng suất tiếp tại i, giao điểm của trục tung và đường ab là phương của trục y. Gọi K là giao điểm của hai đường tiếp tuyến qua a và b. Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại một điểm bất kì nào đó trên ab đều có phương đi qua K và thành phần τ_{zy} phân bố đều trên ab. Vậy τ_{zy} được tính bởi công thức của Durapxki.



Hình 8-9

Mômen tịnh của phần diện tích $F_{\text{cắt}}$ đối với trục x là như sau :

$$S_x^{\text{cắt}} = \int_{F_{\text{cắt}}} \eta dF = \int_y^r \eta l d\eta$$

Các kí hiệu được biểu diễn như trên hình 8-9.

Thay biến số. Ta có :

$$\eta = r \sin \varphi$$

$$d\eta = r \cos \varphi d\varphi$$

$$b = 2r \cos \varphi$$

$$\text{Vậy : } S_x^{\text{cắt}} = -2r^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi)$$

$$S_x^{\text{cắt}} = \frac{2r^3 \cos^3 \alpha}{3}$$

Từ đó ta có :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y r^2 \cos^2 \alpha}{3J_x}$$

Trị số $\cos^2 \alpha$ có thể viết lại dưới dạng :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{y^2}{r^2}$$

Vậy :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{3J_x} (r^2 - y^2) \quad (8-8)$$

Biểu đồ của τ_{zy} được biểu diễn như trên hình 8-9c. Tại các điểm nằm trên trục trung hòa Ox, trị số ứng suất tiếp là lớn nhất. Khi đó điểm K chạy ra vô cùng nên có thể xem τ_{zy} như trị số ứng suất tiếp toàn phần.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y r^2}{3J_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (8-9)$$

§8–2. ĐIỀU KIỆN BỀN

Ta nhận thấy khi dầm chịu uốn ngang phẳng trên mỗi mặt cắt trạng thái ứng suất ở mỗi nơi là khác nhau. Do đó ta phải chọn ba điểm nguy hiểm trong dầm để kiểm tra bền.

a) Nơi có trạng thái ứng suất đơn với σ_{\max} điều kiện bền sẽ là :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

Nếu là vật liệu giòn và mặt cắt không đối xứng qua trục x thì ta phải xét cả miền nén. Nghĩa là :

$$|\sigma_{\min}| \leq [\sigma] \text{ và } \sigma_{\max} \leq [\sigma]^+$$

b) Nơi có trạng thái trượt thuận túy $\tau_{zy} = \tau_{\max}$. Sử dụng các công thức (7–32) và (7–34) với chú ý là $\sigma_1 = \tau$ và $\sigma_3 = -\tau$ ta có điều kiện bền là :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \text{ theo thuyết bền U.S.T.L.N} \quad (8-10)$$

và

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \text{ theo thuyết bền T.N.B.Đ.H.D} \quad (8-11)$$

c) Điểm thứ ba là một điểm có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Tại đây trạng thái ứng suất là trạng thái ứng suất phẳng. Điều kiện bền tính theo (7–32) và (7–33) với chú ý :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Ta sẽ được : Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8-12)$$

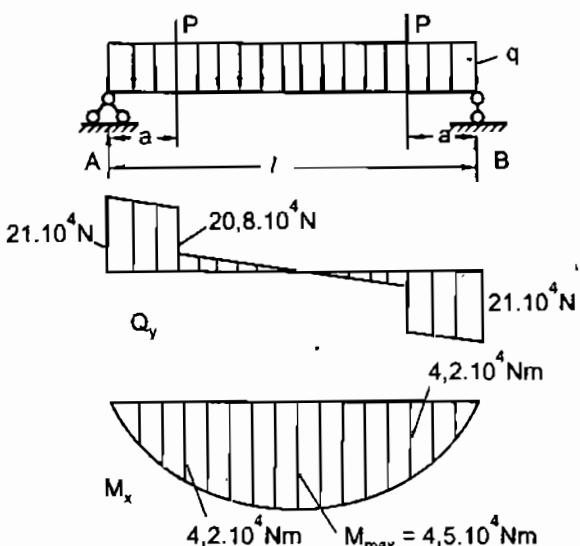
Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8-13)$$

Kí hiệu σ_{td} là để chỉ ứng suất tương đương.

Ví dụ : Kiểm tra bền dầm có mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu 36 chịu lực như trên hình 8–10.

Chiều dài của dầm $l = 2m$, cường độ tải trọng phân bố đều $q = 10 \text{ kN/m}$; lực tập trung $P = 200 \text{ kN}$, $a = 0,2 \text{ m}$. Cho biết $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 8–10

Bài giải

Biểu đồ mômen uốn M_x và lực cắt Q_y được biểu diễn như trên hình 8-10b.

1. Kiểm tra phân tố ở trạng thái ứng suất đơn

Phân tố đó được chọn trên mặt cắt có mômen uốn lớn nhất, đó là mặt cắt ở giữa đầm.

Tại đó ta có $M_{\max} = 4,5 \text{ kNm}$. Vậy trị số ứng suất pháp là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4500}{734} = 6,05 \text{ kN/cm}^2$$

Ta thấy $\sigma_{\max} < [\sigma]$

2. Kiểm tra phân tố ở trạng thái trượt thuận túy

Phân tố đó phải được chọn trên mặt cắt có lực cắt lớn nhất. Đó là mặt cắt tại các gối tựa :

$Q_{\max} = 210 \text{ kN}$.

Ta có :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{J_x d} = \frac{210.423}{13380.0,75} = 8,85 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số của ứng suất tiếp cho phép tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất là :

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ kN/cm}^2$$

So sánh ta thấy τ_{\max} vượt quá $[\tau]2\%$. Điều đó là cho phép.

3. Kiểm tra với phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng

Mặt cắt cần chọn là nơi có trị số mômen uốn và lực cắt đồng thời có trị số đáng kể. Ta chọn ngay mặt cắt ở gần điểm đặt lực tập trung. Tại đó ta có $Q_y = 2080 \text{ kN}$ và $M_x = 42 \text{ kNm}$.

Phân tố được chọn trên mặt cắt là phân tố tại điểm K (h.7-25) tiếp giáp giữa lòng và đế. Tại đó ta có :

$$\sigma_k = \frac{420}{13380} (0,18 - 1,2) = 5,2 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_k = \frac{2080.318,4}{13380.0,75} = 6,5 \text{ kN/cm}^2$$

trong đó : $S_x^{\text{cắt}} = S_x - y_k d \frac{y_k}{2} = 423 - 16,77.0,75 \cdot \frac{16,77}{2} = 318,4 \text{ cm}^3$

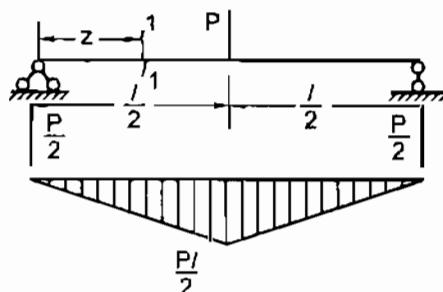
Kiểm tra theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta có :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma_k^2 + 3\tau_k^2} = \sqrt{(5,2)^2 + 3(6,5)^2} = 12,5 \text{ kN/cm}^2$$

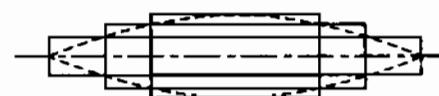
Ứng suất tương đương nhỏ hơn ứng suất cho phép vậy đầm đủ bền.

§8-3. DÂM CHỐNG UỐN ĐỀU VÀ DÂM CÓ MẶT CẮT HỢP LÍ

Trong trường hợp dâm có mặt cắt ngang không đổi, ta đã chọn kích thước của dâm theo mặt cắt có mômen uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lí với ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên các mặt cắt khác còn nhỏ hơn rất nhiều so với ứng suất cho phép. Như vậy ta chưa sử dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu ở các mặt cắt khác. Để tiết kiệm được vật liệu ta phải tìm hình dáng hợp lí của dâm sao cho ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị ứng suất cho phép. Dâm cho hình dáng như vậy gọi là dâm chống uốn đều. Ta xét vài ví dụ cụ thể sau đây :



Hình 8-11



Hình 8-12

Giả sử ta có dâm chịu lực như trên hình 8-11. Trị số mômen uốn và lực cắt trên mặt cắt ngang (1 - 1) là :

$$M_x = \frac{P}{2}z$$

$$Q_y = \frac{P}{2}$$

Giả sử thanh có mặt cắt ngang là tròn, như vậy trị số của ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Pz}{0,1d^3}$$

Muốn ứng suất đó trên mọi mặt cắt cùng đạt đến $[\sigma]$ một lúc thì luật biến thiên của đường kính d theo z là như sau :

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pz}{0,1[\sigma]}}$$

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như trên hình 8-12.

Ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mômen uốn, song không thỏa mãn điều kiện bên của lực cắt Q_y vì ứng suất tiếp cực đại tại đó phải có trị số là :

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3F} \leq [\tau]$$

Nghĩa là đường kính ít nhất cũng phải bằng :

$$d = d_1 \sqrt{\frac{4}{3} \frac{Q_y}{[\tau] \pi}}$$

Trong thực tế người ta thường chế tạo các trục bậc, nghĩa là đường kính của các mặt cắt thay đổi từng đoạn gần sát với đường chống uốn đều.

Các lò xo có sơ đồ chịu lực như trên hình 8-13 thường được ghép bởi các thép lá và có hình dáng dầm chống uốn đều (h.6-13b) ; với hình dáng đó lò xo có trọng lượng nhỏ và chuyển vị lớn : loại lò xo này thường dùng làm nhíp của các trục bánh xe.

Qua biểu đồ ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên một mặt cắt ngang khi dầm chịu uốn ngang phẳng ta thấy phần vật liệu ở xa trục trung hòa chủ yếu chịu uốn, phần vật liệu ở gần trục trung hòa chủ yếu chịu cắt. Như vậy để tăng khả năng chịu uốn thì ta phải đưa vật liệu ra tăng cường cho miền xa đường trung hòa nghĩa là tìm cách tăng W_x .

Đối với vật liệu giòn vì giới hạn cho phép khi kéo và khi nén khác nhau trên mặt cắt ngang hợp lí là khi trọng tâm của mặt cắt thiên lệch về phía chịu kéo. Ta phải có :

$$\frac{|M_x|}{J_x} y_{max}^+ = [\sigma]_k$$

$$\frac{|M_x|}{J_x} y_{max}^- = [\sigma]_n$$

Hay

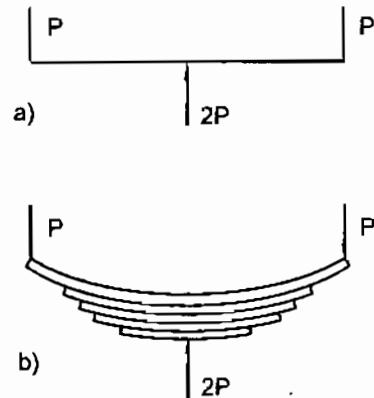
$$\frac{y_{max}^+}{y_{max}^-} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Đối với vật liệu dẻo ta xem như $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ nghĩa là trọng tâm phải nằm giữa mặt cắt để đạt điều kiện :

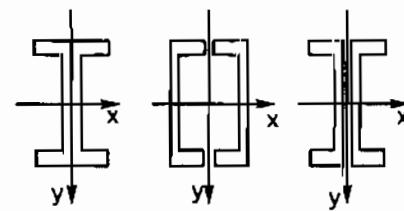
$$y_{max}^+ = y_{max}^-$$

Vì vậy hình dáng mặt cắt ngang hợp lí khi chịu uốn đối với vật liệu dẻo là những loại mặt có hình chữ I hay chữ [ghép như trên hình 8-14.

Để đánh giá mức độ tiết kiệm nguyên vật liệu của các loại hình dáng khác nhau người ta thường dùng tỉ số $W_x / \sqrt{F^3}$ để so sánh. W_x là mômen chống uốn và F là diện tích mặt cắt ngang. Hình dáng mặt cắt nào có tỉ số đó cao hơn thì càng hợp lí hơn.



Hình 8-13



Hình 8-14

Ta lấy một vài ví dụ sau đây :

Với mặt cắt ngang hình tròn $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,14$

Với mặt cắt hình chữ nhật $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,167$

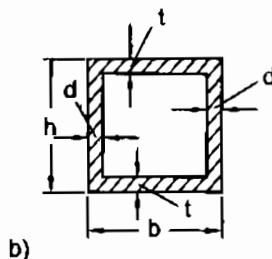
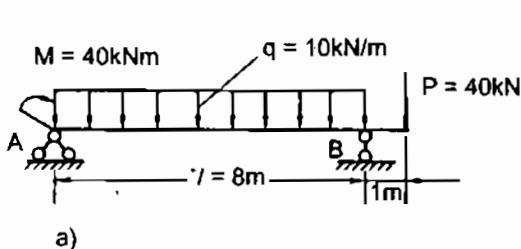
Với mặt cắt hình vành khăn $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,73 \div 0,81$

Với mặt cắt hình chữ L $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,57 \div 1,35$

Với mặt cắt hình chữ I $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 1,02 \div 1,51$

Bài tập

- 8.1. Dầm có mặt cắt ngang là hình chữ nhật thành mỏng kín với $h = 33 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $t = 1,5 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$ chịu tải trọng như trên hình 8.15a. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp và biểu đồ ứng suất tiếp ở những mặt cắt có nội lực tương ứng lớn nhất của mặt cắt ngang trên hình (h.8-15b).

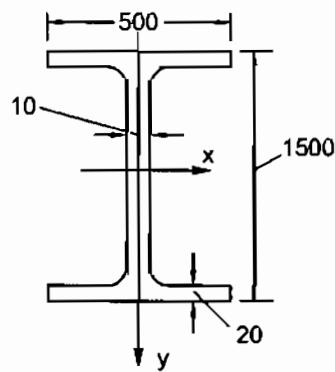


Hình 8-15

- 8.2. Một dầm dài $l = 12 \text{ m}$ có mặt cắt ngang hình chữ I là sự ghép của ba tấm phẳng : hai đế có chiều dày là 20 mm và tấm xương có chiều dày là 10 mm . Dầm được đặt lên hai gối tựa đơn và chịu tác dụng của tải trọng $q = 160 \text{ kN/m}$ phân bố đều dọc theo chiều dài của dầm.

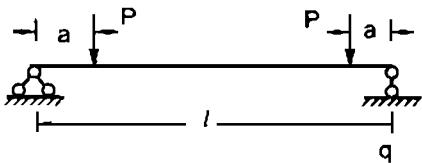
Cho $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 10 \text{ kN/cm}^2$.

Kiểm tra độ bền của dầm.

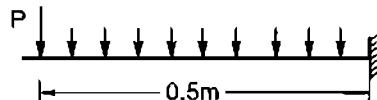


Hình 8-16

- 8.3. Một dầm chịu lực như trên hình 8.17. $P = 160\text{kN}$, $a = 0,35\text{m}$. Chọn mặt cắt chữ I.
Cho biết $[\sigma] = 16 \text{kN/cm}^2$, $[\tau] = 10 \text{kN/cm}^2$.

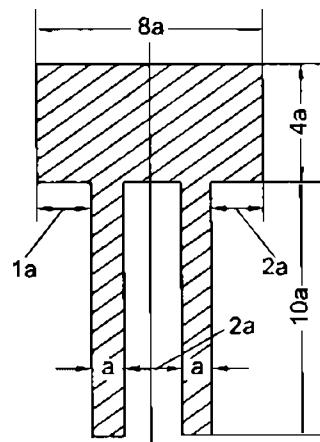


Hình 8-17

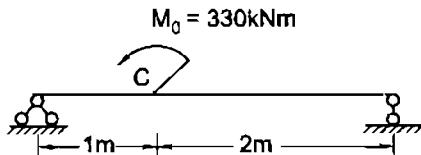


Hình 8-18

- 8.4. Cho dầm chịu lực như hình vẽ (h.8-18). Cho biết $q = 2,2 \text{kN/m}$, $P = 12 \text{kN}$, $l = 0,5\text{m}$. Xác định kích thước mặt cắt ngang của dầm khi dầm là tròn, vuông, chữ nhật và chữ I (tự chọn số liệu).
- 8.5. Cho dầm chịu lực như hình 8-19. Ứng suất cho phép khi kéo là $[\sigma]_k = 9\text{kN/cm}^2$. Ứng suất cho phép khi nén là $[\sigma]_m = 12\text{kN/cm}^2$. Kích thước và hình dáng của mặt cắt ngang được biểu diễn như hình 8-20. Dựa vào các ứng suất kéo và nén cho phép ở trên để chọn kích thước a của mặt cắt, sau đó kiểm tra lại theo điều kiện bền của ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 4,5\text{kN/cm}^2$.



Hình 8-19



Hình 8-20

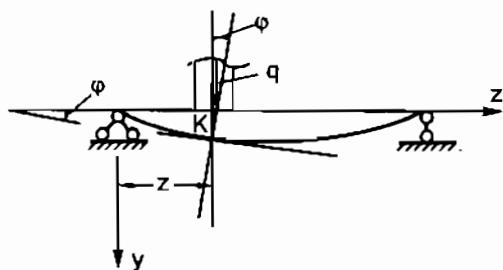
Chương 9

ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

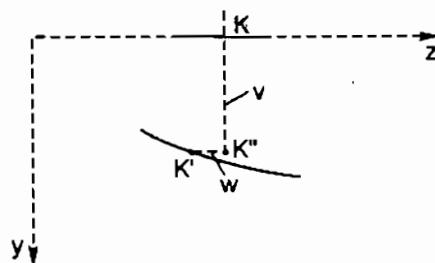
§9–1. ĐỊNH NGHĨA

Đường cong của trục dầm, sau khi bị uốn được gọi là đường đàn hồi (h.9–1).

Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm, sau biến dạng K có một vị trí K' nào đó, độ dài KK' là chuyển vị của K. Chuyển vị đó có thể phân thành hai thành phần : thành phần theo phương y là v và thành phần theo z là w (h.9–2). Ở đây ta chỉ xét với bài toán phẳng, nghĩa là khi tải trọng đặt trong mặt yOz và do đó chuyển vị u theo phương x được xem là bằng không.



Hình 9–1



Hình 9–2

trong điều kiện biến dạng của dầm là bé, thành phần w là một số vô cùng bé bắc so với v, vì vậy ta có thể bỏ qua w và xem rằng vị trí của K sau biến dạng là trên đường thẳng vuông góc với trục thanh đi qua K và với chuyển vị là v. Chuyển vị v được gọi là độ võng tại K của dầm và nó là một hàm số đối với hoành độ z của các mặt cắt ngang. Như vậy phương trình của đường đàn hồi y(z) có thể viết là :

$$y(z) = v(z) \quad (1)$$

Trong kỹ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường không chế khống cho độ võng lớn nhất của dầm vượt quá một giới hạn nhất định, điều kiện đó được gọi là điều kiện cứng. Nếu gọi f là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là :

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000} \quad (2)$$

trong đó : l là chiều dài của dầm ; tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của $\left[\frac{f}{l} \right]$.

Bây giờ nếu từ K' ta vẽ một đường thẳng tiếp tuyến với đường đàn hồi thì góc φ giữa đường tiếp tuyến đó với đường nằm ngang (h.9–1) là bằng góc giữa vị trí của mặt cắt ngang

qua điểm K trước và sau khi đầm bị biến dạng. Gọi φ là chuyển vị góc của mặt cắt hay là góc xoay. Ta nhận thấy rằng :

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi \approx y'(z) \quad (3)$$

Vậy đạo hàm của đường đàn hồi là góc xoay của mặt cắt khi đầm bị biến dạng.

§9–2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Trong chương 7 chúng ta đã thiết lập được liên hệ giữa độ cong của trục đầm sau khi biến dạng và mômen uốn, theo (7–17) thì :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Mặt khác, độ cong của nó có thể tính với công thức :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (4)$$

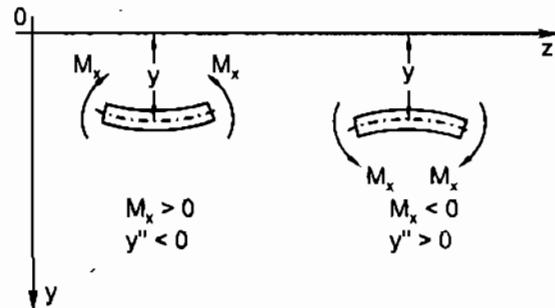
So sánh hai biểu thức đó ta có :

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EJ_x} \quad (5)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi. Ta phải chọn dấu sao cho thỏa mãn hai vế của đẳng thức. Ta nhận thấy các mẫu số trong hai vế đều là những số dương, vậy ta chỉ cần chọn dấu sao cho phù hợp với các tử số. Ta khảo sát một đoạn đầm bị uốn cong trong hai trường hợp như ở các hình 9–3.

Từ hình vẽ, ta thấy giữa y'' và M_x luôn luôn ngược dấu nhau cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi sẽ có dạng :

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (6)$$



Hình 9–3

Trong thực tế không cho phép các công trình hay chi tiết máy có chuyển vị lớn, vì thế, góc xoay cũng là bé và ta có thể bỏ qua y'^2 so với 1.

Phương trình vi phân sẽ có dạng gần đúng như sau :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (9-1)$$

trong đó tích số EJ_x được gọi là độ cứng của đầm khi uốn.

§9-3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Để có được phương trình đàn hồi ta chỉ cần tích phân (9-1) lên hai lần :

Phương trình của góc xoay sẽ là :

$$\varphi = y' = \frac{dy}{dz} = - \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (9-2)$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Tích phân lần thứ hai ta được :

$$y = \int \left(- \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D \quad (9-3)$$

Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện liên kết và liên tục của dầm.

Ví dụ 1 : Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm chịu lực như hình 9-4.

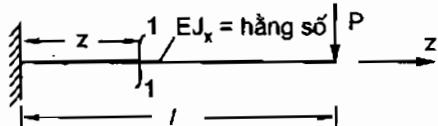
Bài giải

Biểu thức mômen uốn trên mặt cắt (1-1) là :

$$M_x = -P(l-z)$$

Vậy phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng :

$$y'' = + \frac{P(l-z)}{EJ_x}$$



Hình 9-4

Vì EJ_x là hằng số đối với z' lấy tích phân lần thứ nhất ta có :

$$\varphi = y' = \frac{Pl}{EJ_x} z - \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C$$

Tích phân lần thứ hai ta được :

$$y = \frac{Pl}{6EJ_x} z^2 - \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D$$

Các điều kiện liên kết của dầm được xác định như sau :

$$z = 0; y' = 0; y = 0$$

Từ các điều kiện đó ta tìm thấy dễ dàng : $C = D = 0$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng có dạng

$$\left. \begin{aligned} \varphi = y' &= \frac{Pl}{EJ_x} z - \frac{P}{2EJ_x} z^2 \\ y &= \frac{Pl}{6EJ_x} z^2 \left(3 - \frac{z}{l} \right) \end{aligned} \right\}$$

Độ vông và góc xoay lớn nhất là tại đầu tự do. Tại đó ta có :

$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ_x}; \varphi_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ_x}$$

Độ vông hướng xuống dưới và góc xoay theo chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 2 : Thiết lập phương trình độ vông và góc xoay của dầm đặt trên hai gối tựa chịu tải trọng phân bố q trên nhịp l (h.9-5). Độ cứng của dầm là không đổi.

Bài giải

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là :

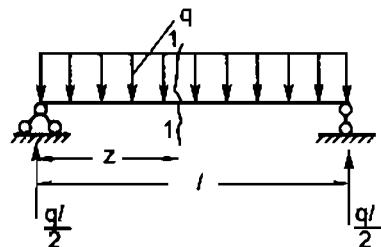
$$M_x = \frac{q}{2}z - \frac{qz^2}{2} \quad (1)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi là :

$$y'' = -\frac{q}{2EJ_x}(lz - z^2)$$

Tích phân hai lần ta được :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= y' = -\frac{q}{2EJ_x} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C \\ y &= -\frac{q}{2EJ_x} \left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + Cz + D \end{aligned} \right\}$$



Hình 9-5

Các hằng số tích phân C và D được xác định từ các điều kiện liên kết của dầm :

$$\text{Với } z = 0 \quad y = 0$$

$$\text{với } z = l \quad y = 0$$

Từ các điều kiện đó ta xác định được các hằng số tích phân như sau :

$$D = 0$$

$$C = \frac{ql^3}{24EJ_x}$$

Phương trình của góc xoay và độ vông là :

$$\varphi = y' = \frac{ql^3}{24EJ_x} \left(1 - \frac{6z^2}{l^2} + \frac{4z^3}{l^3} \right)$$

$$y = \frac{ql^3}{24EJ_x} z \left(1 - \frac{2z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$$

Độ vông lớn nhất là tại giữa nhịp :

$$y_{\max} = f = \frac{5ql^4}{384EJ_x}$$

Góc xoay lớn nhất là tại các gối tựa :

$$y_{\max} = \phi_{\max} = \pm \frac{ql^3}{24EJ_x}$$

Ví dụ 3 : Viết phương trình độ vông và góc xoay của đầm chịu lực như hình vẽ (h.9-6)

Bài giải

Ở đây ta nhận thấy phương trình của mômen uốn trong hai đoạn AC và CB biến thiên khác nhau, vì vậy các biểu thức của độ vông và góc xoay trong hai đoạn cũng khác nhau. Gọi z là hoành độ của các mặt cắt (1 – 1) và (2 – 2) trong các đoạn AC và CB. Mômen uốn trên các mặt cắt đó có trị số là :

$$M_x = \frac{Pb}{l}z \quad (0 \leq z \leq a) \quad (1)$$

$$M_x = \frac{Pb}{l}z - P(z-a) \quad (a \leq z \leq l) \quad (2)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong các đoạn đó là

$$y_1'' = -\frac{Pb}{IEJ_x}z \quad (3)$$

$$y_2'' = -\frac{Pb}{IEJ_x}z + \frac{P}{EJ_x}(z-a) \quad (4)$$

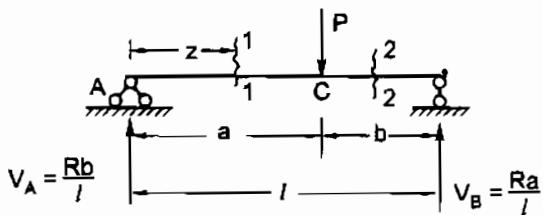
Tích phân liên tiếp hai lần các phương trình (3) và (4) ta được :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -\frac{Pb}{2IEJ_x}z^2 + C_1 \\ y_1 &= -\frac{Pb}{6IEJ_x}z^3 + C_1z + D_1 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq z \leq a) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= -\frac{Pb}{2IEJ_x}z^2 + \frac{P}{2EJ_x}(z-a)^2 + C_2 \\ y_2 &= -\frac{Pb}{6IEJ_x}z^3 + \frac{P}{6EJ_x}(z-a)^3 + C_2z + D_2 \end{aligned} \right\} \quad (a \leq z \leq l) \quad (6)$$

Để xác định các hằng số tích phân C_1, D_1, C_2, D_2 ta dựa vào các điều kiện biên sau đây :

tại $z = 0$ thì $y_1 = 0$; $z = l$ thì $y_2 = 0$ và với $z = a$ thì $y_1 = y_2$ và $y_1' = y_2'$.



Hình 9-6

Từ bốn điều kiện đó ta có :

$$D_1 = D_2 = 0$$

$$C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6IEJ_x} (l^2 - b^2)$$

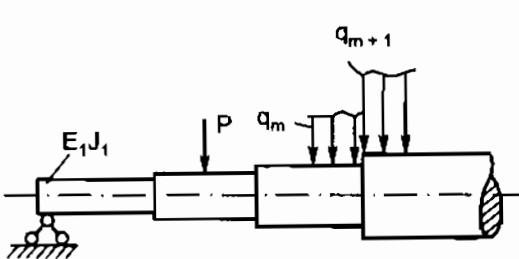
Do đó ta có các phương trình góc xoay và độ võng như sau :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= y_1 = \frac{Pb}{IEJ_x} \left(\frac{l^2 - b^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \\ y_1 &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left(\frac{l^2 - b^2}{6} z - \frac{z^3}{6} \right) \\ \varphi_2 &= y_2 = \frac{Pb}{IEJ_x} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{l(z-a)^2}{2b} - \frac{l^2 - b^2}{6} \right] \\ y_2 &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left[\frac{(z-a)^3 l}{6b} + \frac{l^2 - b^2}{6} z - \frac{z^3}{6} \right] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (0 \leq z \leq a) \\ (a \leq z \leq l) \end{array}$$

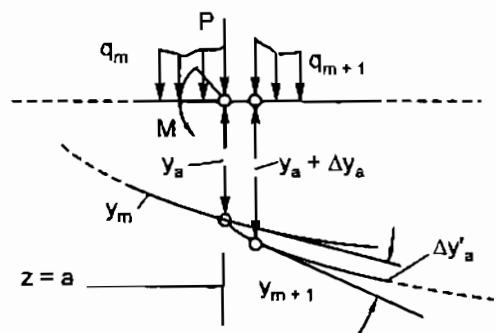
Qua ví dụ này, ta thấy rằng nếu trên dầm mõmen uốn chia làm nhiều đoạn khác nhau thì phải thiết lập phương trình vi phân của đường đàn hồi cho nhiều đoạn khác nhau. Ở mỗi đoạn ta phải xác định hai hằng số tích phân. Nếu dầm có n đoạn thì phải xác định $2n$ hằng số tích phân, tức là phải tìm $2n$ phương trình với $2n$ ẩn số. Bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn chịu lực khác nhau càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp và dầm có nhiều mặt cắt thay đổi từng đoạn.

§9-4. PHƯƠNG PHÁP THÔNG SỐ BAN ĐẦU

Xét một dầm có mặt cắt ngang thay đổi từng bậc trong từng đoạn như trên hình 9-7. Đánh số thứ tự các đoạn là 1, 2, 3... m, m + 1, ...n. Gọi độ cứng của các đoạn là $E_1 J_1, E_2 J_2, \dots, E_m J_m, \dots, E_n J_n$.



Hình 9-7



Hình 9-8

Giả sử xét hai đoạn kề nhau thứ m và m + 1. Để được tổng quát ta giả thiết tại chỗ nối giữa hai đoạn có lực tập trung, mômen tập trung, cường độ của tải trọng phân bố theo chiều dài q ở hai đoạn là khác nhau và có một liên kết đặc biệt làm cho độ vồng và góc xoay tại đó có một bước nhảy Δy_a và $\Delta y_{a'}$. Liên kết đặc biệt đó trong sơ đồ tính toán được biểu diễn bằng hai khớp liên tiếp như trên hình 9-8a.

Đường đàn hồi của hai đoạn được biểu diễn như trên hình 9-8b. Tưởng tượng kéo dài đường đàn hồi $y_m(z)$ trong đoạn thứ m sang đoạn thứ m + 1. Như vậy đường đàn hồi $y_{m+1}(z)$ trong đoạn thứ m + 1 có thể tính với biểu thức :

$$y_{m+1}(z) = y_m(z) + \Delta y(z) \quad (1)$$

Khai triển $\Delta y(z)$ theo chuỗi Taylor tại hoành độ $z = a$, ta có :

$$\Delta y(z) = \Delta y(a) + \frac{\Delta y'(a)}{1!}(z - a) + \frac{\Delta y''(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots + \frac{\Delta y^v(a)}{5!}(z - a)^5 + \dots \quad (2)$$

trong đó : $\Delta y(a)$ và $\Delta y'(a)$ là bước nhảy của độ vồng và góc xoay tại mặt cắt có hoành độ $z = a$.

$$\Delta y(a) = \Delta y_z$$

$$\Delta y'(a) = \Delta y_{a'} \quad (3)$$

Các hệ số của những số hạng khác có thể xác định như sau :

Đẳng thức (1) có thể viết lại dưới dạng :

$$\Delta y(z) = y_{m+1}(z) - y_m(z) \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai lần cả hai vế của (4) ta được :

$$\Delta y''(z) = y_{m+1}''(z) - y_m''(z) \quad (5)$$

Hay : $\Delta y''(z) = -\frac{M_{m+1}(z)}{E_{m+1}J_{m+1}} + \frac{M_m(z)}{E_mJ_m} \quad (6)$

trong đó $M_{m+1}(z)$ và $M_m(z)$ là phương trình của mômen uốn M_x trong đoạn m + 1 và m đã kéo dài sang đoạn thứ m + 1.

Bây giờ ta chọn một độ cứng qui ước EJ nào đó sao cho

$$K_m = \frac{EJ}{E_m J_m}; \quad K_{m+1} = \frac{EJ}{E_{m+1} J_{m+1}}, \dots$$

thì đẳng thức (6) có thể viết lại dưới dạng :

$$\Delta y''(z) = -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} M_{m+1}(z) - K_m M_m(z)] \quad (7)$$

Lấy đạo hàm của (7) liên tiếp và chú ý đến các liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực ta lần lượt được các đẳng thức sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y'''(z) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}Q_{m+1}(z) - K_m Q_m(z)] \\ \Delta y^{IV}(z) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(z) - K_m q_m(z)] \\ \Delta y^V(z) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(z) - K_m q_m(z)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

trong đó $Q_{m+1}(z)$, $q_{m+1}(z)$ là phương trình lực cắt, cường độ lực phân bố, đạo hàm của đường độ lực phân bố trong đoạn thứ $m + 1$ và $Q_m(z)$, $q_m(z)$, $q_m(z)$ là phương trình của các trị số đó ở đoạn m đã kéo dài sang đoạn thứ $m + 1$.

Tại hoành độ $z = a$, ta có :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y''(a) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}M_{m+1}(a) - K_m M_m(a)] \\ \Delta y'''(a) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}Q_{m+1}(a) - K_m Q_m(a)] \\ \Delta y^{IV}(a) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \\ \Delta y^V(a) &= -\frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Đem (9) thay vào cho (2) rồi thay vào cho (1) ta có :

$$\begin{aligned} y_{m+1}(z) &= y_m(z) + \Delta y_a + \Delta y_a(z - a) - \frac{1}{EJ}[K_{m+1}M_{m+1}(a) - K_m M_m(a)] \frac{(z - a)^2}{2!} - \\ &- \frac{1}{EJ}[K_{m+1}Q_{m+1}(a) - K_m Q_m(a)] \frac{(z - a)^3}{3!} - \frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \times \\ &\times \frac{(z - a)^4}{4!} - \frac{1}{EJ}[K_{m+1}q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \frac{(z - a)^5}{5!} \dots \end{aligned} \quad (9-4)$$

Để thiết lập phương trình đường đàn hồi của đoạn thứ nhất ta tưởng tượng thêm một đoạn thứ 0 mà đường đàn hồi của đoạn này trùng với z của dâng nghĩa là $y_0(z) = 0$. Nội lực và ngoại lực trong đoạn này cũng bằng không. Chọn gốc tọa độ là đầu mút của dâng, khi đó ta có (với $z = a = 0$) :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_a &= \Delta y_0 = y_0; \quad \Delta y'_a = \Delta y'_0 = y'_0 \\ M_1(0) &= M_0; \quad Q_1(0) = Q_0 \\ q_1(0) &= q_0; \quad q'_1(0) = q'_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

M_0 , Q_0 , q_0 , q'_0 là mômen tập trung, lực tập trung, cường độ lực phân bố và đạo hàm của lực phân bố tại đầu mút của dâng (tại $z = 0$).

Trong trường hợp đặc biệt khi trên suốt chiều dài của đầm có độ cứng là không đổi, nghĩa là :

$$E_1 J_1 = E_m J_m = \dots \text{, thì } K_1 = K_2 = \dots = K_m = 1$$

Phương trình đường đàn hồi đoạn 1 và đoạn thứ m + 1 tính theo đoạn thứ m được viết như sau :

$$y_1(z) = y_o + y'_o z - \frac{M_o}{EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{EJ} Q_o \frac{z^3}{3!} - \frac{1}{EJ} q_o \frac{z^4}{4!} - \frac{1}{EJ} q'_o \frac{z^5}{5!} \dots \quad (9-5)$$

$$\begin{aligned} y_{m+1}(z) &= y_m(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a \frac{(z-a)}{1!} - \frac{1}{EJ} [M_{m+1}(a) - M_m(a)] \times \frac{(z-a)^2}{2!} - \\ &- \frac{1}{EJ} [Q_{m+1}(a) - Q_m(a)] \frac{(z-a)^3}{3!} - \frac{1}{EJ} [q_{m+1}(a) - q_m(a)] \frac{(z-a)^4}{4!} - \\ &- \frac{1}{EJ} [q'_{m+1}(a) - q'_m(a)] \frac{(z-a)^5}{5!} = \dots \end{aligned} \quad (9-6)$$

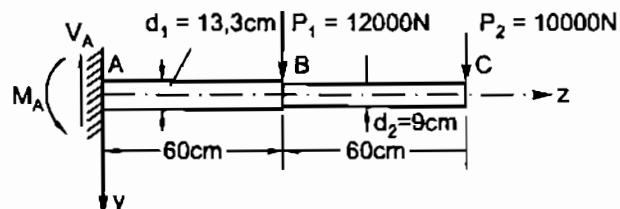
Các trị số y_o , y'_o , M_o , Q_o , q_o , q'_o được gọi là các thông số ban đầu.

Các hiệu số trong các dấu ngoặc là bước nhảy của biến độ mômen, lực cắt, cường độ lực phân bố và đạo hàm của lực phân bố... tại mặt cắt có hoành độ $z = a$. Vì vậy các hiệu số đó có trị số bằng mômen tập trung, lực tập trung v.v.. tại mặt cắt đó.

Ví dụ 4 : Tính độ võng tại đầu mút tự do của thanh chịu lực như hình 9-9.

Thanh có mặt cắt ngang là tròn, được cấu tạo thành hai bậc với các đường kính là $d_1 = 13,3\text{cm}$; $d_2 = 9\text{cm}$.

Hai đoạn thanh đều cùng cấu tạo bằng một loại vật liệu có môđun đàn hồi $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$.



Bài giải

Hình 9-9

Các phản lực tại ngầm có trị số là :

$$V_A = P_1 + P_2 = 22000\text{N}$$

$$M_A = 12000 \cdot 0,6 + 10000 \cdot 0,6 \cdot 2 = 19200 \text{ Nm.}$$

Chiều các phản lực được biểu diễn như trên hình vẽ.

Theo cấu tạo và sự phân bố của tải trọng, ta chia đầm thành hai đoạn AB, BC. Chọn độ cứng của đoạn AB làm độ cứng quy ước. Ta có các trị số của hệ số K như sau :

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} = \frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 = \left(\frac{13,3}{9} \right)^4 = 4,769$$

mômen quán tính của mặt cắt ngang trong đoạn AB là :

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi (13,3)^4}{64} = 1535 \text{ cm}^4$$

Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 9-10

Qua sơ đồ chịu lực và các biểu đồ nội lực ta có các trị số các thông số ban đầu và các trị số nội lực tại B như sau :

Tại mặt cắt A(z = 0)	Tại mặt cắt B(z = 0,6 m)
$y_o = 0$	$M_2(a) = -6000 \text{ Nm}$
$y'_o = 0$	$M_1(a) = -6000 \text{ Nm}$
$M_o = -M_A = -19200 \text{ Nm}$	$Q_2(a) = 10000 \text{ N}$
$Q_o = V_A = 22000 \text{ N}$	$Q_1(a) = 22000 \text{ N}$
$q_o = 0$	$q_2(a) = 0$
$q'_o = 0$	$q'_2(a) = 0$
	$q_1(a) = 0$
	$q'_1(a) = 0$

Phương trình đường đàn hồi trong đoạn 1 :

$$y_1(z) = -\frac{1}{EJ} K_1 M_o \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{EJ} K_1 Q_o \frac{z^3}{3!}$$

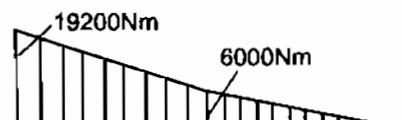
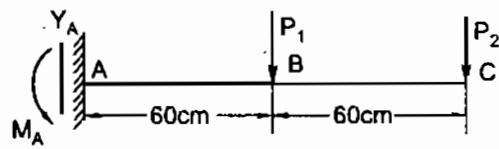
Thay số vào ta có :

$$y_1(z) = \frac{1920000}{2.10^7.1535} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{22000}{2.10^7.1535} \cdot \frac{z^3}{3!}$$

$$y_1(z) = 3,127 \cdot 10^{-5} z^2 - 119,4 \cdot 10^{-5} z^3.$$

Phương trình đường đàn hồi trong đoạn 2 :

$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{1}{EJ} [K_2 M_2(a) - K_1 M_1(a)] \frac{(z-a)^2}{2!} - \frac{1}{EJ} [K_2 Q_2(a) - K_1 Q_1(a)] \frac{(z-a)^3}{3!}$$



Hình 9-10

Sau khi thay số vào ta có :

$$y_2(z) = 3,127 \cdot 10^{-5} z^2 - 119,4 \cdot 10^{-5} z^3 + 370,9 \cdot 10^{-5} (z-0,6)^2 - 140,9 \cdot 10^{-5} (z-0,6)^3$$

Độ vông tại đầu mút tự do C là :

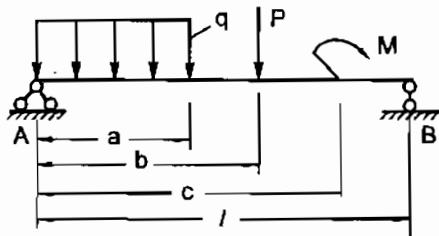
$$y_2(1,2) = 0,35 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Ví dụ 5 : Tính góc xoay của mặt cắt ngang ở gối tự A của dầm có độ cứng không đổi chịu tải trọng như hình 9-11.

Bài giải

Vì dầm có độ cứng không đổi nên căn cứ vào ngoại lực ta chia dầm thành 4 đoạn đánh số thứ tự như hình vẽ.

Các thông số ban đầu và các hệ số xác định theo điều kiện biên của mỗi đoạn được xác định như sau :



Hình 9-11

$z = 0$	$z = a$	$z = b$	$z = c$
$y_o = 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_b = 0$	$\Delta y_c = 0$
$y_o \neq 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_b = 0$	$\Delta y_c = 0$
$M_o = 0$	$\Delta M_a = 0$	$\Delta M_b = 0$	$\Delta M_c = M$
$Q_o = V_A$	$\Delta Q_a = 0$	$\Delta Q_b = -P$	$\Delta Q_c = 0$
$q_o = -q$	$\Delta q_a = q$	$\Delta q_b = 0$	$\Delta q_c = 0$
$q_o = 0$	$\Delta q_a = 0$	$\Delta q_b = 0$	$\Delta q_c = 0$

Phương trình độ vông các đoạn được viết như sau :

$$y_1(z) = y_o \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} \quad (0 \leq z \leq a)$$

$$y_2(a) = y_1(z) - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-a)^4}{4!} = y_o z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-a)^4}{4!} \quad (a \leq z \leq b)$$

$$y_3(z) = y_2(z) + \frac{P}{EJ} \cdot \frac{(z-b)^3}{3!}$$

$$y_3(z) = y_o \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q(z-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(z-b)^3}{EJ \cdot 3!} ; \quad (b \leq z \leq c)$$

$$y_4(z) = y_3(z) - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(z-c)^2}{2!}$$

$$y_4(z) = y_o \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q(z-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(z-b)^3}{EJ \cdot 3!} - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(z-c)^2}{2!} \quad (c \leq z \leq l)$$

Để xác định y_o ta dựa vào điều kiện liên kết tại B của dầm. Với $z = l$; $y_4 = 0$, ta có :

$$y_4(l) = y_o \cdot l - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{l^4}{4!} - \frac{q(l-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(l-b)^3}{EJ \cdot 3!} - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(l-c)^2}{2!} = 0$$

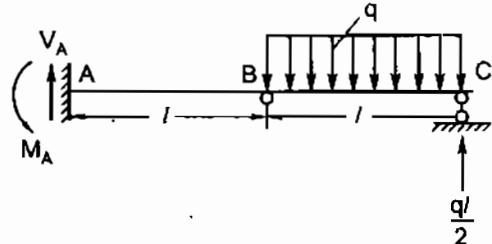
Từ đó ta rút ra được :

$$y_o = \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{l^2}{3!} - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{4!} + \frac{q(l-a)^4}{EJ \cdot 4!} - \frac{P(l-b)^3}{EJ \cdot 3!} + \frac{M(l-c)^2}{EJ \cdot 2!}$$

y_o là góc xoay của mặt cắt ngang tại A.

Ví dụ 6 : Viết phương trình đường đàn hồi của dầm tĩnh định chịu lực như hình 9-12.

Bài giải



Ta dễ dàng xác định được các phản lực tại ngầm A và ở đầu mút C là :

$$V_A = \frac{ql}{2}; M_A = \frac{ql^2}{2}; V_C = \frac{ql}{2}$$

Hình 9-12

Chiều các phản lực như hình vẽ. Chia dầm thành hai đoạn và đánh số thứ tự như hình 9-12. Từ sơ đồ chịu lực ta xác định được các thông số ban đầu và các hệ số ở biên cho mỗi đoạn như sau :

$z = a = 0$	$z = a = 1$
$y_o = 0$	$\Delta y_a = 0$
$y'_o = 0$	$\Delta y'_a \neq 0$
$M_o = -M_A = -\frac{ql^2}{2}$	$\Delta M_a = 0$
$Q_o = \frac{ql}{2}$	$\Delta Q_a = 0$
	$\Delta q_a = -q$
	$\Delta q'_a = 0$

Phương trình đường đàn hồi trong các đoạn có dạng như sau :

$$y_1(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!}$$

$$y_2(q) = y_1(z) + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-l)^4}{4!} + \Delta y_a (z-l)$$

$$y_2(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-l)^4}{4!} + \Delta y_a (z-l)$$

Để xác định Δy_a ta dựa vào điều kiện biên tại C của dầm. Với $z = 2l$; $y_2(z) = 0$, ta có :

$$\frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{4l^2}{2} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{8l^4}{6} + \frac{ql^4}{EJ \cdot 24} + \Delta y_a l = 0$$

Từ đó ta rút ra được : $\Delta y_a = -\frac{3ql^3}{24.EJ}$

Do đó :

$$y_2(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q(z-l)^4}{EJ \cdot 4!} - \frac{3ql^3}{24EJ}(z-l)$$

Từ các ví dụ trên ta thấy phương pháp thông số ban đầu cho phép ta viết dễ dàng phương trình đường đàn hồi của đầm chịu lực có nhiều đoạn khác nhau, hay mặt cắt khác nhau. Phương trình này còn rất thuận tiện khi lập phương trình máy tính nên hiện nay vẫn được sử dụng rộng rãi.

§9–5. PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO (hay phương pháp đồ toán)

Như ta đã có, liên hệ giữa nội lực và ngoại lực được thể hiện bởi biểu thức :

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z)$$

Như vậy từ $q(z)$ ta có thể suy ra M_x bằng cách lấy tích phân hai lần. Với phương pháp mặt cắt ta dễ dàng xác định được M_x từ $q(z)$. Điều đó có nghĩa là phương pháp mặt cắt có thể thay thế cho một phép tích phân hai lần.

Ta hãy để ý đến phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

Từ biểu thức đó, muốn xác định được y ta phải tích phân hai lần. Ta tìm cách sử dụng phương pháp mặt cắt để thực hiện phép tích phân đó. Muốn vậy ta phải tưởng tượng một tải trọng phân bố giả tạo $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$ đặt trên một đầm giả tạo. Mômen uốn do q_{gt} gây nên

trên đầm giả tạo là độ võng của đầm thực. Lực cắt do q_{gt} gây nên là góc xoay của đầm thực. Ta có :

$$M_{gt} = y ; Q_{gt} = y'$$

Ví dụ 7. Tìm độ võng và góc xoay tại đầu mút tự do của đầm chịu lực như hình 9–13.

Bài giải

Ta vẽ biểu đồ mômen uốn M_x của hệ như trên hình 9–13b. Đặt hệ lực q_{gt} giả tạo lên đầm giả tạo (h.9–13c). Vì :

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

do đó M_x là âm thì q_{gt} phải là dương. Với quy ước của chúng ta q là dương khi q có chiều hướng lên trên.

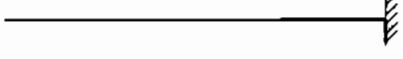
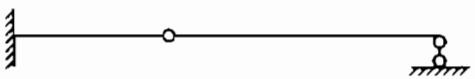
Ta phải suy ra dầm giả tạo từ điều kiện liên kết của dầm thực. Trong ví dụ đang xét, tại B độ vông và góc xoay là bằng không vậy trong dầm giả tạo phải làm sao tại đó M_{gt} và Q_{gt} phải bằng không. Muốn vậy, tại B dầm giả tạo phải được tự do. Ngược lại, tại đầu A dầm thực vừa có cả góc xoay và độ vông nghĩa là tại đó trên dầm giả tạo phải đồng thời có cả M_{gt} và Q_{gt} . Muốn vậy tại A, dầm giả tạo phải có liên kết ngầm.

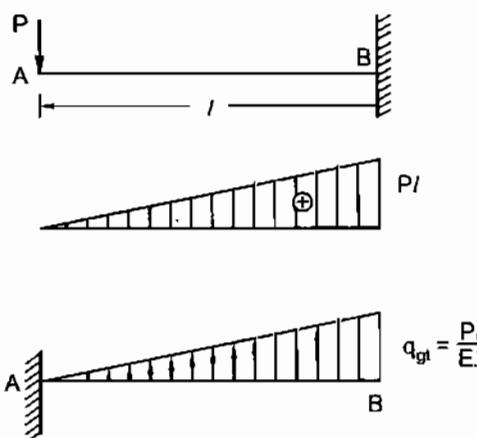
Độ vông và góc xoay tại đầu A của dầm thực là trị số mômen uốn giả tạo và lực cắt giả tạo do q_{gt} gây nên trên dầm giả tạo. Ta có :

$$Q_{gtA} = y_A = -\frac{Pl}{EJ_x} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Pl^2}{2EJ_x}$$

$$M_{gtA} = y_A = +\frac{Pl^2}{2EJ_x} \cdot \frac{2}{3}l = -\frac{Pl^3}{3EJ_x}$$

Từ điều kiện liên kết của dầm thực ta suy ra các dầm giả tạo như trong bảng sau đây :

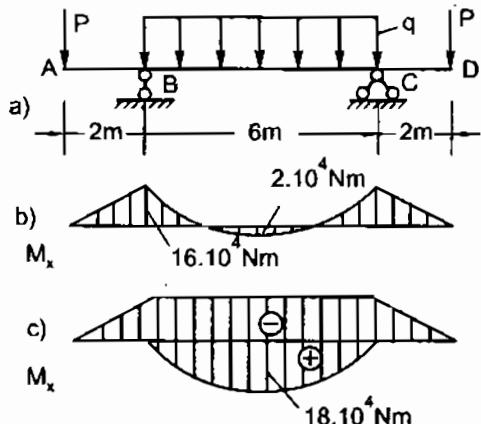
Dầm thực	Dầm giả tạo		
$y = 0$ $y' \neq 0$	$y = 0$ $y' \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
			
$y = 0$ $y' = 0$	$y \neq 0$ $y' \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gt} = 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$
			
$y \neq 0$ $y' \neq 0$	$y = 0$ $y' \neq 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
			
$y \neq 0$ $y' \neq 0$	$y = 0$ $y' \neq 0$	$M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$	$M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$
			



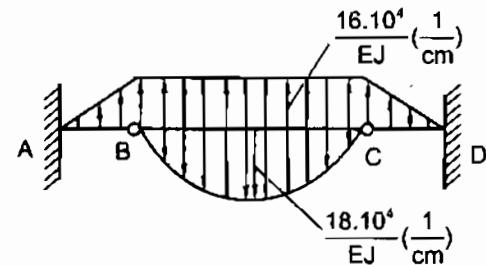
Hình 9 – 13

Phương pháp này rất thuận lợi khi ta chỉ cần tính độ vông và góc xoay ở tại một số mặt cắt nhất định.

Ví dụ 8. Xác định độ vông và góc xoay ở đầu mút D của đầm có độ cứng không đổi chịu lực như trên hình 9–14a. Trị số các lực như sau $P = 8.10^4 \text{ N}$; $q = 4.10^4 \text{ N/m}$.



Hình 9–14



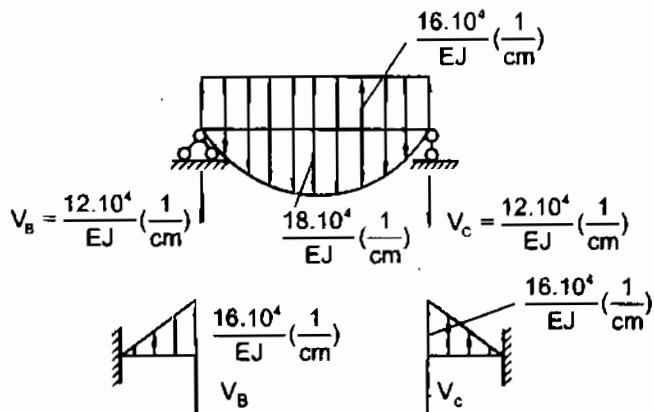
Hình 9–15

Bài giải

Biểu đồ mômen uốn M_x của đầm được biểu diễn như trên hình 9–14b. Biểu đồ đó có thể xem như tổng cộng của hai biểu đồ như trên hình 9–14c. Chọn đầm giả tạo và tải trọng giả tạo như trên hình 9–15.

Ta chia đầm thành ba đầm đơn như trên hình 9–16. Các phản ứng lực tại B và C của đầm giữa có trị số là :

$$V_B = V_C = \frac{12.10^4}{\text{EJ}} \left(\frac{1}{\text{cm}} \right)$$



Hình 9–16

Các phản lực đó có chiều như hình vẽ. Như vậy tại C, trên đoạn đầm CD, chịu một lực giả tạo tập trung có chiều ngược lại nhưng cùng có trị số với V_C .

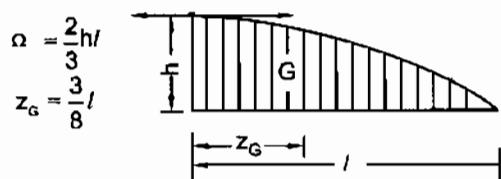
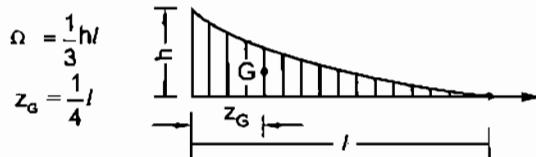
Vậy độ vông và góc xoay tại D là :

$$Q_{gt} = y_D = \frac{12.10^4}{\text{EJ}} + \frac{16.10^4}{\text{EJ}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{28.10^4}{\text{EJ}} \text{ (rad)}$$

$$M_{gt} = y_D \cdot 2 + \frac{16.10^4}{\text{EJ}} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{136.10^4}{3\text{EJ}} \text{ (m)}$$

Các kết quả mang dấu dương, có nghĩa là góc xoay có chiều theo chiều kim đồng hồ và độ vông hướng xuống dưới.

Để tiện lợi trong quá trình tính toán ta xác định trước hoành độ trọng tâm và diện tích Ω của những hình giới hạn bởi các đường cong bậc hai như hình 9-17.

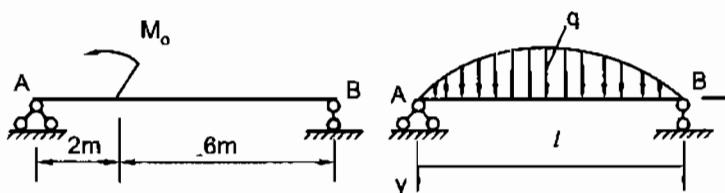


Hình 9-17

Bài tập

- 9.1. Xác định đường đàn hồi của dầm AB bằng phương pháp tích phân không định hạn :

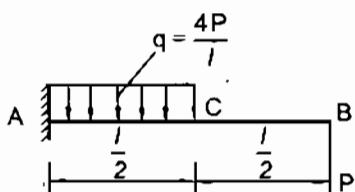
Cho biết $M_o = 20 \text{ kNm}$ (hình 9-18)



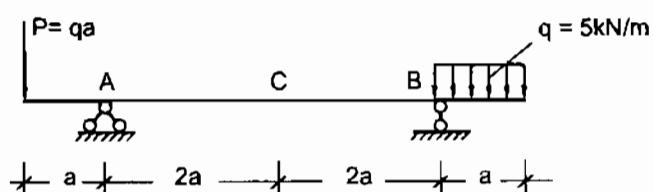
Hình 9-18

- 9.2. Tìm độ võng tại C và B của dầm chịu lực như hình vẽ (h.9-19) bằng phương pháp tích phân không định hạn.

- 9.3. Xác định góc xoay tại A và B và độ võng tại C của dầm chịu lực như hình vẽ (h.9-20)

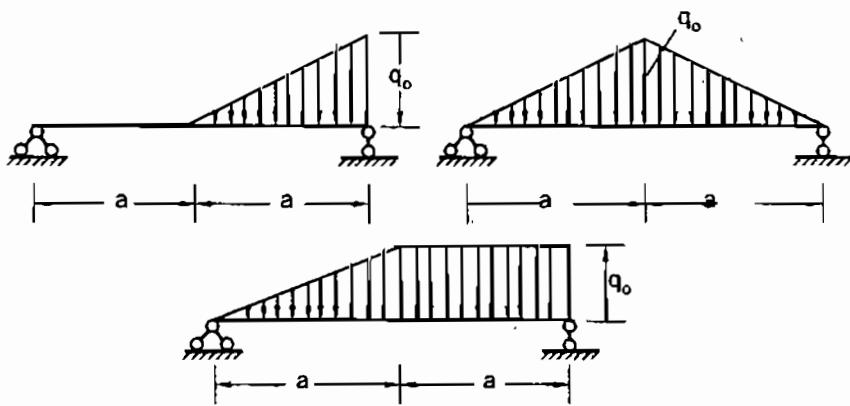


Hình 9-19



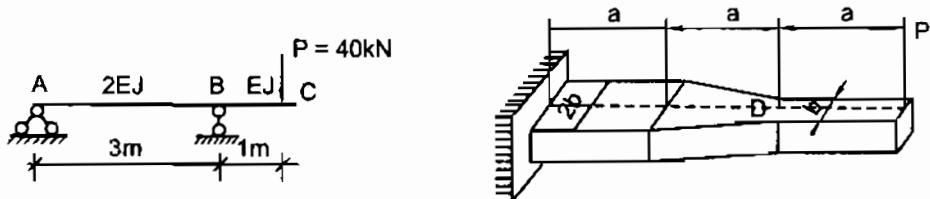
Hình 9-20

- 9.4. Tìm độ võng tại mặt cắt ngang ở giữa nhịp của những dầm chịu tải trọng như hình vẽ (h.9-21)



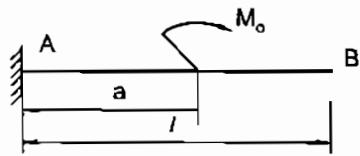
Hình 9-21

9.5. Tìm độ võng và góc xoay tại C của các dầm chịu lực như hình vẽ 9-22.

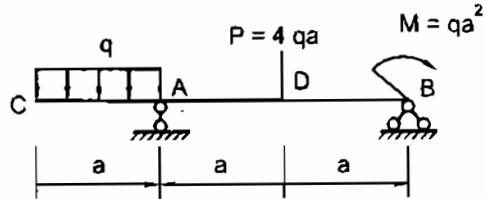


Hình 9-22

9.6. Bằng phương pháp đồ toán, tìm độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm. (h.9-23).



Hình 9-23

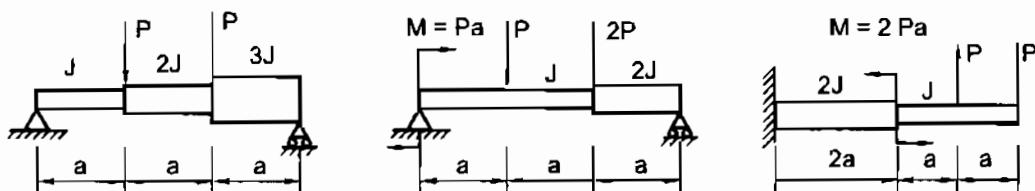


Hình 9-24

9.7. Xác định

- Độ võng và góc xoay tại C
 - Góc xoay tại hai gối tựa A và B
 - Độ võng tại mặt cắt D
- bằng phương pháp đồ toán của dầm chịu lực như hình vẽ.

9.8. Với phương pháp thông số ban đầu viết phương trình độ võng và góc xoay của các dầm chịu lực như sau :



Hình 9-25

Chương 10

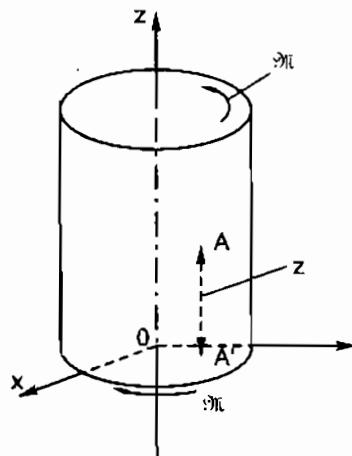
BÀI TOÁN XOẮN THUẦN TÚY

§10-1. XOẮN THANH TRÒN

Ta gọi thanh chịu xoắn thuần túy là khi trên các mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần momen xoắn M_z (h.10-1). Xác định hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ : Oz là trục của thanh và Oy, Ox là các trục bất kì trên mặt cắt ngang. Gọi u, v, w là các thành phần chuyển vị của một điểm A nào đó trong lòng thanh theo các phương của các trục tọa độ.

Dưới tác dụng của các momen xoắn ta thấy các mặt cắt ngang sẽ bị xoay tương đối với nhau quanh trục z. Ta gọi góc xoay đó là góc xoắn. Nếu gọi $d\phi$ là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách dz thì góc xoắn tỉ đối là :

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} \quad (10-1)$$



Hình 10-1

Khi trên mọi mặt cắt ngang đều cùng có trị số M_z thì θ là hằng số đối với z và như vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách z nào đó có thể tính với biểu thức :

$$\varphi = \theta z \quad (10-2)$$

Các thành phần chuyển vị u và v của A được tính theo φ như sau : Gọi A' và A* là hình chiếu của A trước và sau biến dạng trên mặt tọa độ xOy (h.10-2).

Góc A'OA* là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt : mặt cắt qua A và mặt cắt nằm trong mặt tọa độ được giữ cố định. Với biến dạng vô cùng bé ta có thể xem rằng :

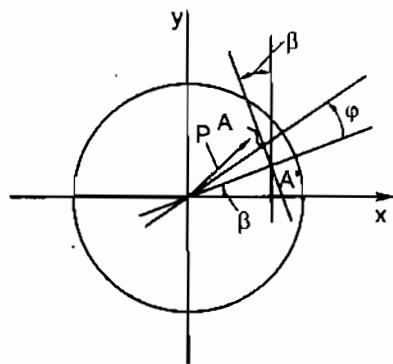
$$OA' = OA^* = \rho$$

Do đó ta có : $u = -A'A^* \sin \beta = -\rho \varphi \sin \beta$

$$v = A'A^* \cos \beta = \rho \varphi \cos \beta$$

β là góc giữa trục Ox và OA'. Với chú ý $\rho \sin \beta = y$ và $\rho \cos \beta = x$ ta có thể viết lại các biểu thức đó như sau :

$$u = -\theta z y \text{ và } v = \theta z x \quad (10-3)$$



Hình 10-2

Qua thí nghiệm ta nhận thấy mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn luôn luôn phẳng và không có chuyển vị theo phương của trục z, do đó ta đưa ra giả thuyết sau đây :

Mặt cắt ngang ban đầu phẳng và thẳng góc với trục của thanh thì trong quá trình biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục thanh. Khoảng cách giữa các mặt cắt là không đổi.

Với giả thuyết đó trị số của thành phần chuyển vị theo phương z sẽ bằng không, $w = 0$.

Từ các biểu thức của u, v, w ta dễ dàng tìm thấy :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xz} = -\theta y \text{ và } \gamma_{yz} = \theta x \quad (10-4)$$

cũng từ đó ta suy ra các thành phần ứng suất như sau :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 ; \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\theta y \quad (10-5)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = G\theta x$$

Bình phương hai vế của hai biểu thức cuối cùng và cộng lại ta được :

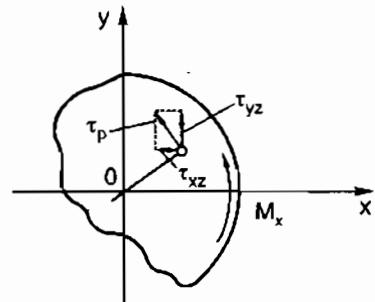
$$\tau_p = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\theta \sqrt{x^2 + y^2} = G\theta \rho$$

$$\tau_p = G\theta \rho \quad (10-6)$$

Dễ nhận thấy rằng τ_p có phương vuông góc với OA (h.10-3). Phương đó của ứng suất tiếp toàn phần hoàn toàn thỏa mãn điều kiện biên. Thực vậy nếu giả dụ A là một điểm trên chu vi thì phương đó là phương song song với đường tiếp tuyến với chu vi và rõ ràng thành phần ứng suất tiếp theo phương bán kính bằng không. Ta biết rằng mặt ngoài của thanh không có ngoại lực.

Tương quan giữa nội lực và ứng suất trên mặt cắt cho phép ta viết :

$$M_z = \int_F \rho \tau_p dF = \int_F G\theta \rho^2 dF$$



Hình 10-3

Từ đó ta rút ra được :

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (10-7)$$

Đem thay (10-7) vào (10-6) ta được :

$$\tau_p = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (10-8)$$

Điểm càng xa trục thì trị số ứng suất càng lớn. Ta có biểu đồ phân bố ứng suất trên một bán kính được biểu diễn như hình 10-4.

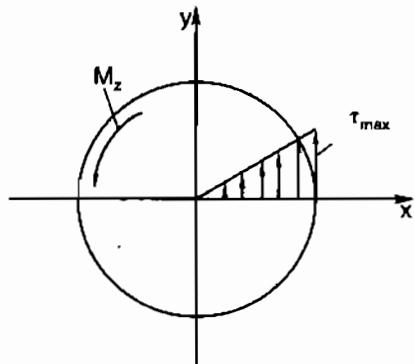
Ứng suất cực đại là tại các điểm trên chu vi của mặt cắt. Trị số đó là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} R = \frac{M_z}{W_p} \quad (10-9)$$

trong đó : $W_p = \frac{J_p}{R} \approx 0,2D^3$ (10-10)

W_p được gọi là mômen chống xoắn hay độ chống xoắn của mặt cắt.

Hình 10-4



Điều kiện bền của phân tố theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (10-11)$$

Nếu theo thuyết bền thể năng biến đổi hình dáng thì ta phải có :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách l là :

$$\varphi = \frac{M_z l}{G J_p} \quad (10-12)$$

Trên đây ta đã giải bài toán với trị số M_z là không đổi trên cả chiều dài l của thanh. Nếu như M_z là một hàm số đối với z thì cả quá trình lập luận trên đây hoàn toàn đúng cho một đoạn thanh vô cùng bé dz . Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt của đoạn thanh đó sẽ là :

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{G J_p}$$

Và như vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ở hai đầu thanh sẽ là ;

$$\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{G J_p} \quad (10-13)$$

Đối với thanh chịu xoắn, ngoài điều kiện bền, ta còn phải tính toán đường kính của thanh để sao cho thanh đủ điều kiện cứng, nghĩa là góc xoắn tỉ số phải nhỏ hơn một trị số cho phép.

$$\theta = \frac{\varphi}{l} \leq [\theta] \quad (10-14)$$

Trong trường hợp thanh tròn rỗng, trong các công thức (10-8), (10-9) và (10-12) ta phải tính trị số của J_p và W_p như sau :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \eta^4)$$

$$W_p = 0,2D^3(1 - \eta^4)$$

trong đó : η là tỉ số của bán kính trong và bán kính ngoài $\eta = \frac{r}{R}$.

Ví dụ 1. Trên mặt cắt ngang của một thanh tròn đặc chịu tác dụng bởi mômen xoắn $M_z = 2.10^4 \text{ Nm}$. Tính trị số ứng suất tiếp tại một điểm A cách tâm một khoảng cách $\rho = 0,03\text{m}$ và trị số ứng suất tiếp cực đại. Cho biết đường kính của thanh là $D = 0,1\text{m}$.

Bài giải

Trị số mômen quán tính độc cực của diện tích mặt cắt ngang đối với tâm là :

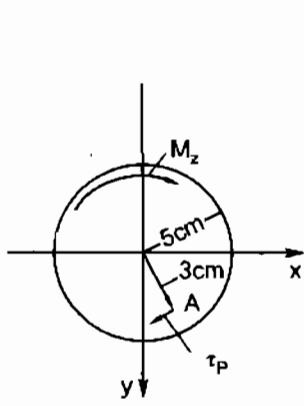
$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0,1D^4 \approx 10^3 \text{ cm}^4$$

Trị số ứng suất tiếp tại A là :

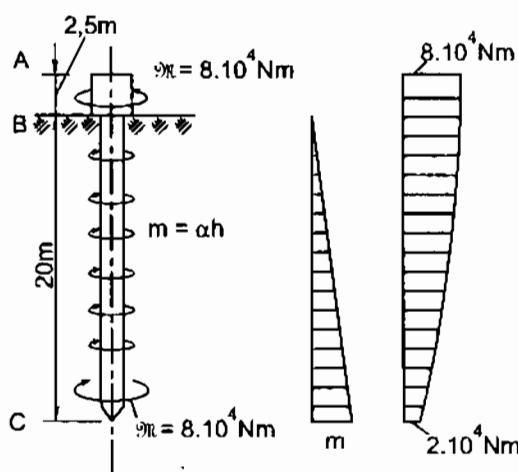
$$\tau_p = \frac{M_z}{J_p} \rho = \frac{2.10^6}{10^3} . 3 = 6000 \text{ N/cm}^2$$

Trị số ứng suất tiếp cực đại là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{2.10^6}{0,2.10^3} = 10000 \text{ N/cm}^2$$



Hình 10-5



Hình 10-6

Ví dụ 2. Một mũi khoan thăm dò chịu tác dụng bởi một mômen xoắn $\mathfrak{M} = 8.10^4 \text{ Nm}$. Sức cản của đất đối với thân mũi khoan tạo thành các mômen xoắn phân bố theo quy luật bậc nhất với cường độ ở độ sâu h là : $m = \alpha h$ ($\alpha = 0,0310^4 \text{ Nm/m}^2$).

Mômen xoắn tác dụng ở lưỡi định hướng của đầu mũi khoan là $\mathfrak{M}_1 = 2.10^4 \text{ Nm}$; cho biết $AB = 2,5\text{m}$, $BC = 20\text{m}$. Đường kính thân mũi khoan $d = 0,2\text{m}$. $G = 8.10^5 \text{ N/cm}^2$ (h.10-6).

Xác định góc xoắn trên toàn bộ chiều dài AC của mũi khoan.

Bài giải

Trên đoạn AB nội lực là hằng và có trị số là :

$$M_z^I = M = 8 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Nội lực trên mặt cắt bất kì với độ sâu h là :

$$M_z^{II} = M - m \frac{h}{2} = 8 \cdot 10^4 - 150h^2$$

Luật biến thiên của M_z trong đoạn BC là theo định luật bậc hai đối với h. Biểu đồ M_z biểu diễn như trên hình 10-6.

Góc xoắn trên toàn chiều dài AC của mũi khoan là :

$$\varphi = \frac{M_z^I a}{2GJ_p} + \int_0^b \frac{M_z^{II} dh}{GJ_p}$$

Thay số vào ta được :

$$\varphi = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 2,5}{2GJ_p} + \frac{1}{GJ_p} \int_0^b (8 \cdot 10^4 - 150h^2) dh$$

$$\varphi = 0,1010 \text{ radian } (\approx 6^\circ)$$

§10-2. XOẮN THANH MẶT CẮT BẤT KÌ

1. Công thức ứng suất và biến dạng

Khi mặt cắt ngang có hình dáng bất kì thì sau biến dạng mặt cắt đó không còn phẳng nữa. Thành phần chuyển vị w là khác không. Ta thừa nhận rằng : nếu thanh chịu xoắn thuần túy, mômen xoắn M_z không đổi với thanh có thể biến dạng tự do, không bị ràng buộc bởi các liên kết thì các mặt cắt ngang có độ vênh như nhau. Nghĩa là w không phụ thuộc vào z.

Ta có các biểu thức của u, v và w như sau :

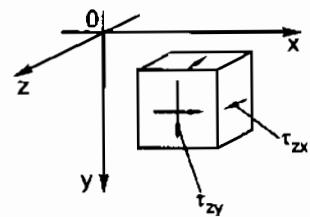
$$u = -\theta z y; v = \theta z x, w = w(x, y) \quad (10-15)$$

Từ đó ta có các thành phần biến dạng là :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (10-16)$$

Vậy trạng thái ứng suất tại một điểm nào đó được xác định bởi các thành phần ứng suất (h.10-7)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= \left(-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) G \\ \tau_{yz} &= \left(\theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) G\end{aligned}\quad (10-17)$$



Hình 10-7

Nếu xem lực thế tích là bằng không thì trạng thái ứng suất đó thỏa mãn hai phương trình đầu của hệ phương trình vi phân cân bằng (2-45).

Phương trình cân bằng thứ ba có dạng :

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (10-18a)$$

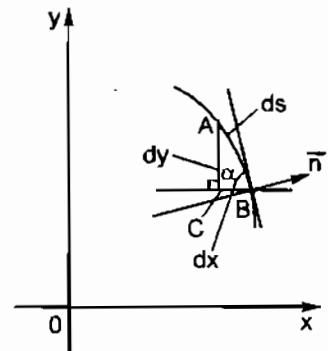
Bây giờ chú ý đến hai phương trình cuối các biểu thức (10-17). Lấy đạo hàm riêng phần của τ_{xz} đối với y và của τ_{yz} đối với x và đem trừ cho nhau ta được :

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\theta \quad (10-18b)$$

Xét đến điều kiện biên của bài toán :

Trên hình 10-8 biểu diễn một phân tố nằm trên đường chu vi của mặt cắt ngang, \widehat{AB} là một vi phân cung của chu vi đó. Gọi α là góc của tiếp tuyến đi qua B và trục x . Các cosin chỉ phương của pháp tuyến n tại B sẽ là :

$$\left. \begin{aligned} l &= \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \\ m &= \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \\ n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$



Hình 10-8

trong đó dx , dy , ds được biểu diễn như trên hình vẽ. Vì mặt ngoài của thanh không có tải trọng, các thành phần ứng suất σ_x , σ_y , σ_z và τ_{xy} lại bằng không, nên điều kiện bề mặt (4-25) rút lại còn một phương trình như sau :

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad (10-20)$$

Thay (10-19) vào (10-20) ta được điều kiện bề mặt như sau :

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} \right)_{ch.vi} = \left(\frac{dx}{dy} \right)_{ch.vi} \quad (10-21)$$

Như vậy hàm τ_{xz} và τ_{yz} đồng thời phải thỏa mãn ba phương trình (10–18a), (10–18b) và (10–21).

Để tiện lợi ta chọn một hàm U sao cho :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (10-22)$$

Một hàm U như vậy luôn luôn thỏa mãn phương trình vi phân cân bằng (10–18). Ta chỉ còn phải xét sao cho thỏa mãn (10–18b) và (10–21).

Thay (10–22) vào (10–18b) ta được phương trình vi phân :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\theta G \quad (10-23)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình Poátxông.

Thay (10–22) vào (10–21) ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial x} dx = 0$$

Vẽ trái là dạng vi phân toàn phần của U do đó ta có :

$$dU = 0 \quad (10-24)$$

Vậy dọc theo chu vi của mặt cắt hàm U phải là một hằng số. ($U = C^+ \odot$ trên chu vi), hằng số đó tùy ý vì nó không ảnh hưởng gì đến trị số của τ_{yz} và τ_{xz} [xem (10–22)]. Để thuận lợi ta chọn $U = 0$ dọc theo chu vi.

Xét đến tương quan giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt ngang

Ta có :

$$M_z = \int \int_F (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy$$

Thay (10–22) vào đây ta được :

$$M_z = - \int \int_F \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx - \int \int_F \frac{\partial U}{\partial y} y dx dy$$

Các tích phân đó được tính như sau : Ví dụ với biểu thức tích phân thứ nhất xét trường hợp chu vi của mặt cắt ngang là một miền đơn liên như hình 10–9, ta có :

$$-\int_F \int \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} x dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

Sử dụng tích phân đoạn, biểu thức tích phân đó được viết dưới dạng :

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} x dx \int_{y_1}^{y_2} dy = - \int_{y_1}^{y_2} x [U(x_2) - U(x_1)] dy + \int \int_F U dx dy$$

Vì điều kiện biên phải có $U = 0$ nên số hạng thứ nhất của vế phải là bằng không từ đó ta có :

$$-\int \int_F \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx = \int \int_F U dx dy$$

Tương tự ta có thể tính với biểu thức tích phân thứ hai. Kết quả cuối cùng là :

$$M_z = 2 \int \int_F U(x, y) dx dy \quad (10-25)$$

Từ phương trình Poátxông ta thấy U phải tỉ lệ với G và θ vậy ta chọn hàm U dưới dạng

$$U = G\theta f(x, y) \quad (10-26)$$

Hàm $f(x, y)$ cũng phải triệt tiêu tại mọi điểm trên chu vi của mặt cắt, thay (10-26) vào (10-23), phương trình Poátxông sẽ có dạng :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad (10-27)$$

f được gọi là hàm ứng suất. Thay (10-26) vào (10-25) ta có :

$$M_z = 2 \int \int_F G\theta f(x, y) dx dy = G\theta J_d$$

Với

$$J_d = 2 \int \int_F f(x, y) dx dy \quad (10-28)$$

J_d là một hàm đặc trưng hình học của mặt cắt ngang được gọi là độ cứng khi xoắn của mặt cắt.

Từ đó ta có góc xoắn tỉ đối θ là :

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_d} \quad (10-29)$$

Ta thấy J_d càng lớn thì θ càng bé.

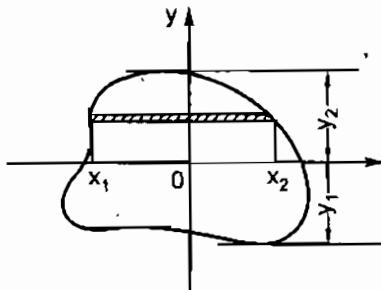
Trị số các ứng suất được tính với các công thức (10-22)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -\frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10-30)$$

Ứng suất tiếp lớn nhất cũng được viết dưới dạng :

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_d} \quad (10-31)$$

Với $W_d = \max \left[\frac{J_d}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}} \right]$ và được gọi là độ chống xoắn của mặt cắt.



Hình 10-9

2. Một số trường hợp cụ thể

a) Mặt cắt ngang là một hình elip (h.10-10)

Chu vi của mặt cắt được xác định bởi phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta chọn hàm $f(x, y)$ dưới dạng :

$$f(x, y) = D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

hàm đó thỏa mãn điều kiện : mọi điểm trên chu vi $f(x, y) = 0$, D là một hằng số tùy ý. Để xác định D ta thay $f(x, y)$ vào phương trình Poátxông (10-27)

Ta có :

$$2D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2$$

Vậy :

Hàm ứng suất có dạng như sau :

$$f(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (10-32)$$

Độ cứng J_d khi xoắn của mặt cắt được tính với biểu thức :

$$J_d = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_F \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dF$$

$$J_d = \frac{2}{a^2 + b^2} [a^2 b^2 F - b^2 J_y - a^2 J_x]$$

Trong đó J_x, J_y là mômen quán tính của hình elip đối với các trục quán tính chính trung tâm Oxy :

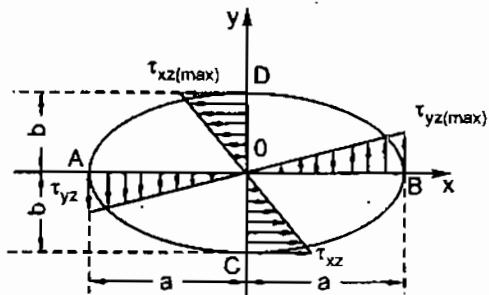
$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{\pi ab^3}{4} \quad J_y = \int_F x^2 dF = \frac{\pi ab^3}{4}$$

F – diện tích của elip ($F = \pi ab$)

$$\text{Thay vào trên ta có : } J_d = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (10-33)$$

Ta nhận thấy khi $a = b$, nghĩa là khi mặt cắt ngang là một hình tròn thì $J_d = J_p = \frac{\pi R^4}{2}$.

Trong trường hợp tổng quát J_d không phải là mômen quán tính đặc cực.



Hình 10-10

Trị số các ứng suất tiếp được tính với các biểu thức :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2M_z}{\pi ab^3} y \\ \tau_{yz} &= -\frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2M_z}{\pi ba^3} x \end{aligned} \right\} \quad (10-34)$$

Ta nhận thấy trị số của các ứng suất tiếp tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đang xét đến các trục tọa độ.

Giả sử $a > b$, ứng suất lớn nhất là tại các điểm C và D (h.10-10). Trị số ứng suất đó là :

$$\tau_{xz(\max)} = \pm \frac{2M_z}{\pi ab^2}$$

Trị số ứng suất tại các điểm A và B là :

$$\tau_{yz(\max)} = \pm \frac{2M_z}{\pi a^2 b}$$

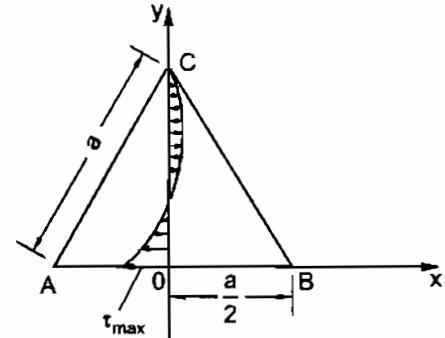
b) *Mặt cắt hình tam giác đều (h.10-11)*

Hệ trục tọa độ Oxy được xác định như hình 10-11 như vậy phương trình của các cạnh được biểu diễn như sau :

Cạnh AB : $y = 0$

$$\text{Cạnh BC : } y + x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\text{Cạnh CA : } y - x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$



Hình 10-11

Vậy hàm ứng suất sẽ có dạng :

$$f(x, y) = Ay \left(y + x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(y - x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (10-35)$$

Thay vào phương trình Poátxông (10-27) ta tìm thấy :

$$A = \frac{1}{a\sqrt{3}}$$

Độ cứng xoắn của mặt cắt ngang tính theo (10-28) là :

$$J_d = 2 \int_F f(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{82} a^4$$

Trị số các thành phần ứng suất được tính bởi các biểu thức :

$$\tau_{zx} = G\theta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} \left(3y^2 - 2\sqrt{3}ay + \frac{3}{4}a^2 - 3x^2 \right) \quad (10-36)$$

$$\tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} 6xy$$

Ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} G \theta a = \frac{20 M_z}{a^3}$$

Sự phân bố ứng suất trên chiều cao được biểu diễn như trên hình (h.10-11).

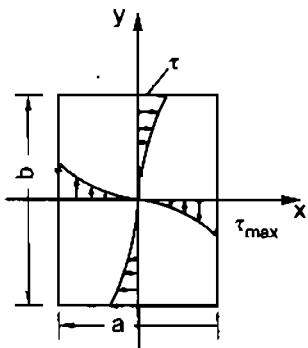
c) Xoắn thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật (h.10-12)

Ta chọn hàm số $f(x, y)$ theo lời giải của Timôxencô như sau :

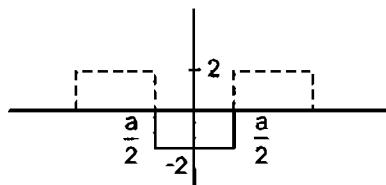
$$f(x, y) = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} g_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (10-37)$$

Hàm số đó hoàn toàn thỏa mãn trên các cạnh $x = \pm \frac{a}{2}$ (h.10-12)

Hàm $g_n(y)$ phải chọn sao cho $f(x, y)$ thỏa mãn phương trình Poátxông (10-27) và điều kiện trên các biên $y = \pm \frac{b}{2}$.



Hình 10-12



Hình 10-13

Thay $f(x, y)$ vào phương trình Poátxông ta có :

$$\sum_{n=1,2,3}^{\infty} \left[g_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} g_n(y) \right] \cos \frac{n\pi x}{a} = -2 \quad (10-38)$$

Về trái của (10-38) có thể xem là dạng khai triển với chu kỳ $2a$ của -2 trong khoảng $-\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}$. Ngoài khoảng đó, giả thiết hàm được kéo dài về hai phía như được biểu diễn trên hình 10-13.

Hệ số thứ n của phép khai triển là :

$$C_n = g_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} g_n(y)$$

Mặt khác theo lí thuyết chuỗi Phuriê hệ số đó phải bằng :

$$C_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-2) \cos \frac{n\pi x}{a} dx = -\frac{8}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} = -\frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

So sánh hai biểu thức đó ta được phương trình vi phân để xác định hàm $g_n(y)$ như sau :

$$g_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2} g_n(y) = -\frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$g_n(y) = \frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

Các hệ số A_n và B_n phải chọn sao cho $g_n(y)$ triệt tiêu tại $y = \pm \frac{b}{2}$. Với điều kiện đó $f(x, y)$ sẽ thỏa mãn điều kiện biên như ta mong muốn.

$$\text{Từ đó ta có : } B_n = 0 ; A_n = -\frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}$$

$$\text{Vậy hàm } g_n(y) \text{ có dạng như sau : } g_n(y) = \frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right)$$

Hàm ứng suất sẽ có dạng như sau :

$$f(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (10-39)$$

Sau khi đã có $f(x, y)$ rồi ta dễ dàng xác định các trị số ứng suất và góc xoắn tỉ đối θ .

Ví dụ ta hãy xác định trị số của τ_{zy} :

$$\tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial f}{\partial x} = G\theta \frac{8a}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (10-40)$$

Ứng suất lớn nhất là tại điểm giữa cạnh dài :

$$\tau_{\max} = (\tau_{zy})_{x=a/2, y=0} = G\theta a \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right)$$

Hay :

$$\tau_{\max} = G\theta a \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \quad (10-41)$$

Ta có được công thức đó bằng cách thay :

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

vào công thức của τ_{max} trên đây.

Mômen xoắn được xác định từ biểu thức :

$$M_z = 2G\theta \int \int_F f(x, y) dx dy = \\ = G\theta \frac{16a}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 - \frac{ch \frac{n\pi y}{a}}{ch \frac{n\pi b}{2a}} \right] dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

Sau khi tính biểu thức tích phân ta có :

$$M_z = G\theta \frac{32a^3 \cdot b}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(1 - \frac{2a}{n\pi b} th \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

nếu thay $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$ vào ta sẽ được :

$$M_z = G\theta \frac{a^3 b}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} th \frac{n\pi b}{2a} \right]$$

Độ cứng khi xoắn của mặt cắt là : $J_d = \beta a^3 b$ (10-42)

Với β là :

$$\beta = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} th \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (10-43)$$

Độ chống xoắn của mặt cắt sẽ là :

$$W_d = \alpha a^2 b \quad (10-44)$$

Với $\alpha = \frac{\beta}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5 ch \frac{n\pi b}{2a}}}$ (10-45)

Vậy : $\tau_{max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$ (10-46)

Các hệ số β và α chỉ phụ thuộc vào tỉ số $\frac{b}{a}$. Các trị số của các hệ số đó được tính theo bảng sau đây :

$\frac{a}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Trong bảng đó hệ số γ là tỉ số của ứng suất tiếp tại điểm giữa các cạnh ngắn so với ứng suất tiếp lớn nhất được tính với công thức (10-46) :

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau_{\max}} \quad (10-47)$$

Với những mặt cắt hình chữ nhật có tỉ số 2 cạnh $\frac{b}{a} > 4$ từ công thức (10-45) ta có :

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3} \left(1 - 0,63 \frac{a}{b} \right), \text{ với tỉ số 2 cạnh } \frac{b}{a} > 10 \text{ ta có thể lấy :}$$

$$\alpha = \beta \approx \frac{1}{3}$$

Ví dụ với mặt cắt hình chữ nhật hẹp (h.10-14)



Hình 10-14

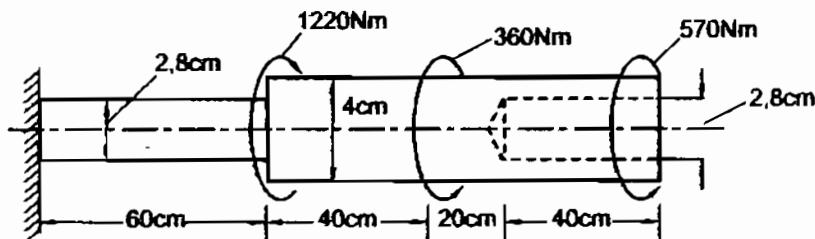
$$J_d = \frac{1}{3} a^3 b \quad (10-48)$$

Bài tập

10.1. Cho thanh chịu lực như hình vẽ (h10-15)

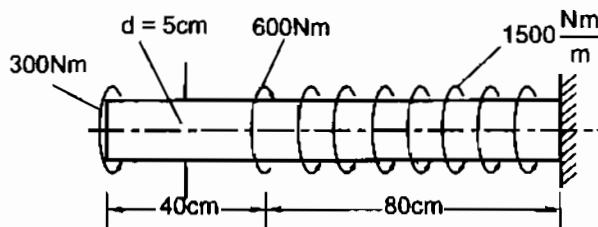
- Vẽ biểu đồ mômen xoắn của thanh.
- Tính ứng suất tiếp lớn nhất ở các mặt cắt nguy hiểm.
- Tính góc xoắn tại đầu tự do của thanh.

Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.



Hình 10-15

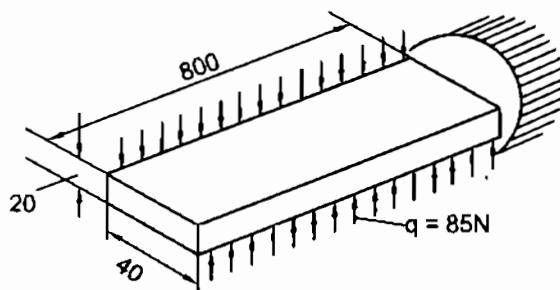
- 10.2.** Tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại các mặt cắt A và B của thanh. Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ (h.10-16).



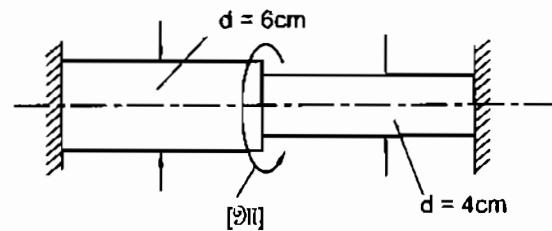
Hình 10-16

- 10.3.** Vẽ biểu đồ mômen xoắn và biểu đồ góc xoắn của thanh. (h.10-17)

– Kiểm tra bên. Biết $[\tau] = 7000 \text{ N/cm}^2$, $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.



Hình 10-17



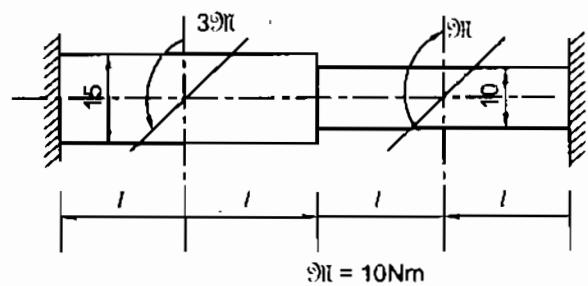
Hình 10-18

- 10.4.** Thanh tròn có đường kính thay đổi như hình vẽ (h.10-18). Thanh bị ngầm chật hai đầu và chịu một mômen xoắn tại mặt cắt ở giữa (mặt cắt có kích thước đường kính thay đổi). Hãy xác định mômen xoắn cho phép $[\vartheta]$ cho biết $[\tau] = 4500 \text{ N/cm}^2$.

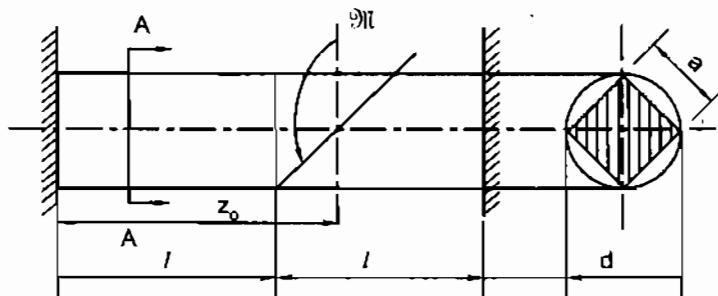
- 10.5.** Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục chịu tải và có hình dáng kích thước như trên hình vẽ. (h.10-19).

- 10.6.** Một trục thép mỏng nửa có mặt cắt ngang hình vuông, nửa còn lại là hình tròn. Xác định khoảng cách Z_o để mômen phản lực tại hai ngầm bằng nhau.

Nếu $\vartheta = 600 \text{ Nm}$, $d = 4 \text{ cm}$ $[\tau] = 4500 \text{ N/cm}^2$, thì trong trường hợp đó, trục có đủ độ bền không (h.10-20).

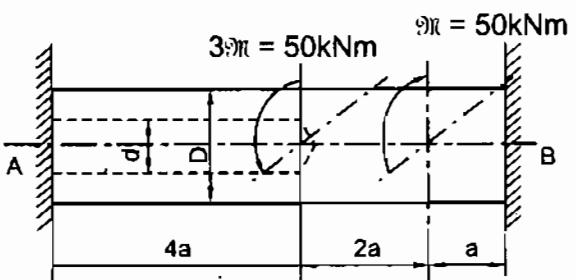


Hình 10-19



Hình 10-20

- 10.7. Trục AB, đường kính bằng D, có khoan một lỗ dọc với đường kính d = 0,5D từ đầu bên trái. Xác định giá trị của D. Cho biết $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$. Trục chịu tải như hình vẽ. (h.10-21).

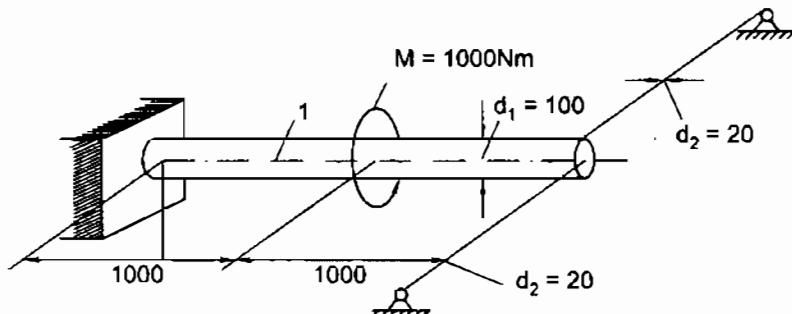


Hình 10-21

- 10.8. Xác định các đại lượng theo điều kiện ghi trên hình 10-22.

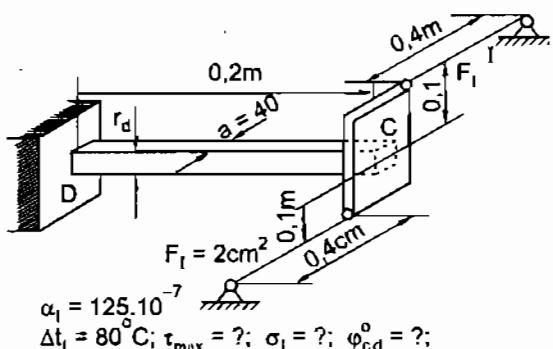
Cho biết : $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$; $G = 8.10^6 \text{ N/cm}^2$.

Hỏi τ_{\max} ở thanh 1, σ_z trong các thanh giằng 2.



Hình 10-22

- 10.9. Hai thanh giằng của kết cấu được đốt nóng lên với độ tăng nhiệt độ là 80°C . Hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu là $\alpha_1 = 125.10^{-7}$. Tính τ_{\max} trong thanh vuông chịu xoắn và σ nén trong thanh giằng và góc xoắn của thanh chịu nén.



Hình 10-23

Chương 11

TÍNH CÁC MỐI NỐI GHÉP

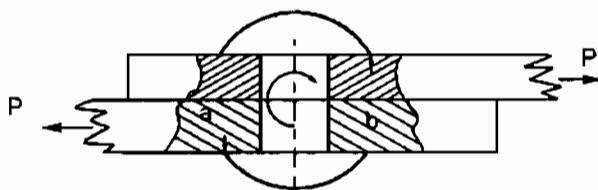
§11-1. TÍNH MỐI NỐI BẰNG ĐINH TÁN

Ta xét trường hợp hai tấm thép được nối ghép với nhau bằng một đinh tán.

Giả sử các đầu tán là đạt tiêu chuẩn tốt, nghĩa là đinh ép chặt được hai tấm lại với nhau. Lúc đó dưới tác dụng của lực P đinh tán bị cắt qua mặt phẳng ab . Trên mặt cắt chỉ có ứng suất tiếp. Xem ứng suất tiếp là phản bối đều trên mặt cắt trị số ứng suất tiếp đó sẽ là :

$$\tau = \frac{P}{\pi d^2} \cdot \frac{4}{4}$$

d là đường kính của đinh tán.

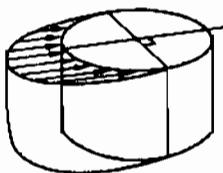


Hình 11-1

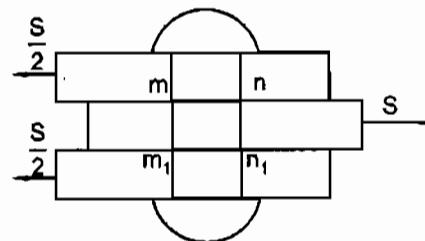
Điều kiện bền của đinh tán là τ phải nhỏ hơn trị số ứng suất tiếp cho phép $[\tau]$. Trị số này được xác định bằng thí nghiệm.

Trong thực tế, mõi đinh tán ép rất chặt vào các tấm, do đó khi lực P tác dụng tạo nên ngẫu lực có khuynh hướng làm bật mõi đinh. Thân đinh ngoài lực cắt còn chịu uốn. Trong tính toán người ta bỏ qua những lực này và chỉ xét đến sự cắt của đinh.

Ngoài hiện tượng bị cắt thân đinh còn bị dập. Lực ép khá lớn làm biến dạng thân đinh. Gọi h là chiều cao bị dập của đinh thì hình chiếu diện tích bị dập trên mặt phẳng cắt qua trục đinh vuông góc với lực P sẽ là $d.h$.



Hình 11-2



Hình 11-3

Vậy ta phải có điều kiện là

$$\sigma_{\text{dập}} = \frac{P}{dh} \leq [\sigma_d]$$

$[\sigma_d]$ cũng được đo bằng thực nghiệm.

Đôi khi mối ghép được thực hiện với ba tấm (h.11-3).

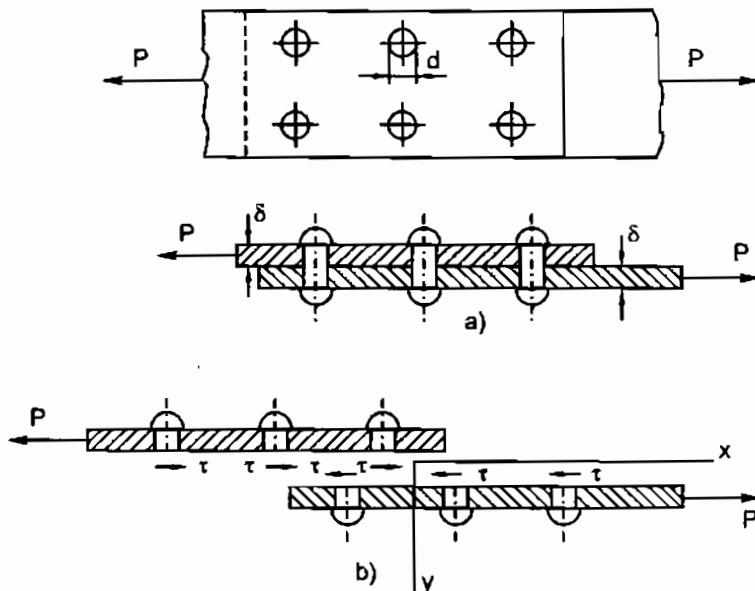
Với cách ghép này ta tránh được mômen quay làm bật mõm đinh và ở đây thân đinh bị cắt trên hai mặt cắt. Như vậy ứng suất tiếp trên các mặt cắt sẽ là :

$$\tau = \frac{P}{2 \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]$$

Ta nhận thấy khả năng chịu tải của đinh sẽ là tốt hơn về mặt chịu cắt nhưng đinh sẽ chịu dập nặng hơn nếu diện tích dập nhỏ lại.

Trong thực tế thường phải ghép với một dãy các đinh tán ví dụ như trong hình vẽ (h.11-4).

Theo thí nghiệm của Stepin P.A, sự chịu lực của các hàng đinh là khác nhau. Các hàng đinh ở ngoài cùng chịu gấp 3 đến 4 lần hàng đinh ở giữa. Song do vật liệu của đinh là vật liệu dẻo nên khi những hàng đinh ở ngoài đạt đến giới hạn chảy thì những hàng này xem như không chịu lực nữa và lúc này hàng đinh ở giữa phát huy tác dụng. Như vậy một cách chung ta xem như các đinh làm việc là như nhau và ứng suất tiếp trên mặt cắt là :



Hình 11-4

$$\tau = \frac{P}{n \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$$

Điều kiện bền là :

$$\tau \leq [\tau]$$

Ngoài việc tính độ bền của đinh ta còn phải tính độ bền của các tấm ghép. Phải xét các mặt cắt qua các hàng đinh. Ứng suất trên các mặt cắt này phải nhỏ hơn ứng suất cho phép.

Ví dụ 1. Lựa chọn sắt định hình chữ I và xác định số đinh tán của mỗi nối ghép hai thanh sắt định hình với tấm phẳng dày $\delta_\phi = 12\text{mm}$ (h.11-5).

Cho biết lực kéo $P = 720\text{kN}$

Vật liệu thép định hình có độ bền khi kéo $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Vật liệu đinh tán có $[\tau] = 14 \text{ kN/cm}^2$ và chịu dập với ứng suất dập cho phép $[\sigma]_{dập} = 3,2 \text{ kN/cm}^2$.

Bài giải

1. Xác định kích thước sắt định hình

Diện tích cần thiết :

$$F^* = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{72000}{1600} = 45 \text{cm}^2.$$

Diện tích mặt cắt sắt định hình phải lớn hơn diện tích đó. Để an toàn ví dụ chọn độ nhích hơn là 1,15 lần. Nghĩa là phải có :

$$F_{xd} = 1,15F^* = 51,75 \text{cm}^2$$

Như vậy với mặt cắt sắt định hình phải có $\frac{51,75}{2} = 25,87 \text{cm}^2$. Theo bảng số liệu của sắt [ta chọn loại số liệu N°20 với diện tích mặt cắt ngang là $25,0 \text{cm}^2$ và chiều dày của thành là $\delta = 5,2 \text{mm}$.

Xét điều kiện bền của sắt định hình

Với hai hàng đinh, đường kính của đinh là $d = 23 \text{mm}$. Vậy diện tích mặt cắt ngang của thanh đã bị yếu đi một lượng là :

$$F_{giảm} = 2d\delta = 2,39 \text{cm}^2$$

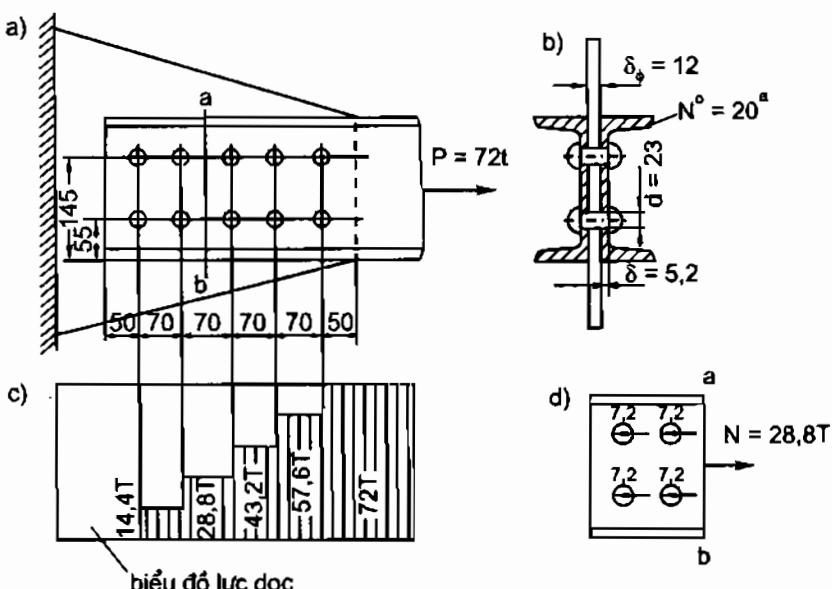
Diện tích mặt cắt ngang còn lại là :

$$F_{thực} = 2(25,0 - 2,39) = 45,22 \text{cm}^2$$

Ứng suất trên mặt cắt ngang qua tâm các đinh tán là :

$$\sigma = \frac{P}{F_{thực}} = \frac{720000}{45,22} = 15,920 \text{kN/cm}^2 < 16 \text{kN/cm}^2$$

Như vậy thanh xem như đạt điều kiện bền.



Hình 11-5

Xác định số đinh tán.

Trước hết ta phải xác định khả năng chịu cắt và chịu dập của một đinh tán.

a) Khả năng chịu cắt (với mỗi đinh tán chịu hai mặt cắt) :

$$[S_{\text{cắt}}] = \frac{\pi d^2}{2} [\tau] = \frac{\pi \cdot 2,3^2}{2} 14000 = 116000 \text{N}$$

b) Khả năng chịu dập. Nếu gọi chiều dày của tấm thép nối là $\delta_\phi = 12$ thì diện tích dập qua tấm thép sẽ là $d \cdot \delta_\phi = 2,3 \cdot 1,2 = 2,76 \text{cm}^2$. Phần diện tích dập qua bề dày của hai thép đinh hình là : $2\delta d = 2 \cdot 0,52 \cdot 2,3 = 2,39 \text{cm}^2$. Khả năng chịu dập của đinh là :

$$[S_{\text{dập}}] = 2,39 \cdot 32000 = 76,500 \text{kN}$$

Ta thấy khả năng chịu dập yếu hơn khả năng chịu cắt. Vậy ta phải căn cứ từ điều kiện dập để xác định số lượng đinh. Số đinh tán sẽ là :

$$n = \frac{P}{[S_{\text{dập}}]} = \frac{720000}{76500} = 9,4$$

Ta chọn $n = 10$.

Trên hình (h.11-5c) là biểu đồ của lực dọc trong thép đinh hình [. Ta xem như các đinh chịu lực bằng nhau. Ví dụ ta tìm lực dọc ở trên mặt cắt (a - b) (h.11-5d) ta có $7,2 \times 4 = 28,8$. Vậy lực dọc trong đoạn này là $N = 28,8$ tấn.

Một trường hợp thường gặp trong thực tế là khi mỗi ghép chịu lực lệch tâm như hình 11-6. Đưa lực về đúng trục qua tâm nối thì mỗi nối vừa chịu cắt do lực kéo (hoặc nén) đúng tâm mà còn thêm phần cắt do ngoại lực gây nên. Mômen cắt đó là bằng $P \cdot x$. Như vậy trên mặt cắt của đinh còn thêm một hệ ứng suất tiếp do mômen cắt gây nên. Phương của ứng suất tiếp này là vuông góc với bán kính r , khoảng cách nối từ tâm mặt cắt ngang của đinh đến tâm G là tâm của mỗi nối. (xem hình 11-6).

Gọi τ là ứng suất tiếp đó, trị số của τ tỉ lệ với r .

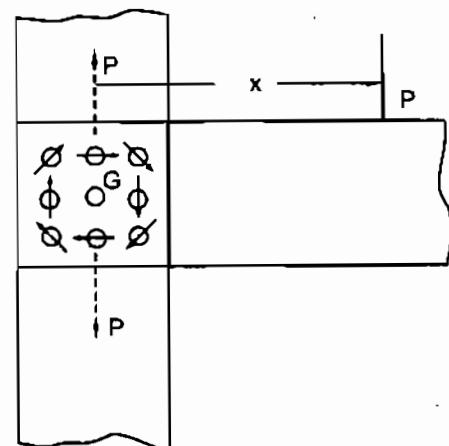
$$\tau = rk \quad (1)$$

Lực cắt trên diện tích của đinh là :

$$Q = \tau \frac{\pi d^2}{4} = r \cdot k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (2)$$

Mômen do Q gây nên đối với G là

$$M = Q \cdot r = r^2 \cdot k \frac{\pi d^2}{4}$$



Hình 11 - 6

Tổng các mômen đó là bằng mômen cắt P.x. Ta có :

$$P.x = \sum r^2 \cdot k \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Vậy

$$k = \frac{P.x}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \sum r^2} \quad (3)$$

Thay ngược vào cho (1) ta có :

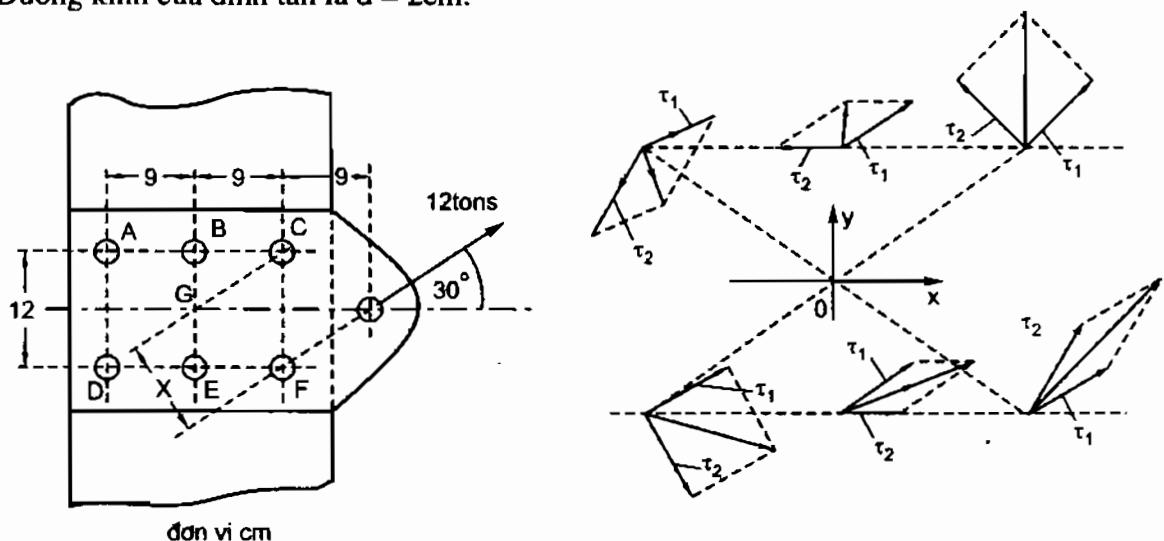
$$\tau = \frac{P.x.r}{\frac{\pi d^2}{4} \sum r^2} \quad (4)$$

Thay vào cho Q ta có :

$$Q = \frac{P.x.r}{\sum r^2} \quad (5)$$

Ví dụ 2.

Mỗi nồi trên hình (h.11-7) của một mỏc lực được nối vào tấm với sáu đinh tán chịu một lực kéo 120000N theo phương đã chỉ như hình vẽ tính ứng suất cắt trên mỗi đinh tán. Đường kính của đinh tán là $d = 2\text{cm}$.



Hình 11-7

Bài giải

$$\text{Tính } x \quad x = 18 \cdot \sin 30^\circ = 9\text{cm}$$

$$\text{Momen cắt} \quad P_x = 120000 \cdot 9 = 1080000 \text{ N.cm}$$

Thành phần ứng suất tiếp theo phương của lực cắt

$$\tau_1 = \frac{120000}{6 \times \frac{\pi}{4} \cdot 2^2} = 6360 \text{ N/cm}^2$$

Thành phần ứng suất do mômen cắt gây nên

$$\tau_2 = \frac{120000.9.r}{\frac{\pi}{4}d^2 \sum r^2}$$

Trên mặt cắt các đỉnh ở ACFD

$$\tau_2 = \frac{120000.9.10,8}{\frac{\pi}{4}.2^2 \sum (4.84 + 2.36)} = 9105 \text{ N/cm}^2$$

Trên mặt cắt các đỉnh ở B và E

$$\tau_2 = \frac{120000.9.6}{\frac{\pi}{4}.2^2 \sum (4.84 + 2.36)} = 5058 \text{ N/cm}^2$$

Tại mỗi mặt cắt ta đều có một vectơ ứng suất tổng cộng. Các vectơ ứng suất tổng cộng này hoàn toàn khác nhau. Để xác định chúng ta có thể sử dụng phương pháp vẽ hoặc xác định một hệ trục tọa độ và tìm các thành phần hình chiếu của chúng trên các trục tọa độ đó. Ví dụ dùng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ứng suất, τ_1 được tách thành hai thành phần $\tau_{1x} = \tau_1 \cos 30^\circ$ và $\tau_{1y} = \tau_1 \sin 30^\circ$

$$\tau_{1x} = \tau_1 \cdot 0,866 \quad \tau_{1y} = \tau_1 \cdot 0,5$$

đối với tất cả các điểm.

Tính ứng suất tiếp toàn phần tại A. Đường GA có $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{6}{9}$, $\alpha \approx 33^\circ 69$

$$\tau_{2y} = -\tau_2 \cos 33^\circ 69 = -\tau_2 \cdot 0,83205$$

$$\tau_{2x} = -\tau_2 \sin 33^\circ 69 = -\tau_2 \cdot 0,74535$$

Vậy τ toàn phần tại đó sẽ là

$$\tau = \sqrt{(\tau_1 \cdot 0,866 - \tau_2 \cdot 0,74535)^2 + (\tau_1 \cdot 0,5 - \tau_2 \cdot 0,83205)^2}$$

Thay trị số của τ_1 và τ_2 vào đây ta có

$$\tau = \sqrt{(6360 \cdot 0,866 - 9105 \cdot 0,74535)^2 + (6360 \cdot 0,5 - 9105 \cdot 0,83205)^2}$$

$$\tau = \sqrt{(127,4,9)^2 + (439,5,63315)^2}$$

$$\tau = 4206,6 \text{ N/cm}^2$$

Sau khi tính được vectơ tổng cộng của $\vec{\tau}_1$ và $\vec{\tau}_2$ ta sẽ xác định được đỉnh tán chịu lực lớn nhất. Phải tiến hành kiểm tra bền với đỉnh tán đó. Nếu đỉnh tán đó đủ bền thì mới nối đủ bền. Ví dụ ở đây ta nhìn thấy rõ đỉnh tán chịu lực lớn nhất là F.

Hình chiếu của τ_2 xuống các trục tọa độ tại F là

$$\tau_{2x} = 9105.0,74535$$

$$\tau_{2y} = 9105.0,83205$$

τ toàn phần tại đó là :

$$\tau = \sqrt{(6360.0,866 - 9105.0,74535)^2 + (6360.0,5 - 9105.0,83205)^2}$$

$$\tau = \sqrt{12242,2^2 + 10725,8^2} = \sqrt{264914246}$$

$$\tau = 16276 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất đó là quá cao. Cần phải tăng đường kính của đinh tán.

§11-2. TÍNH MỐI NỐI BẰNG HÀN

Cách tính độ bền của mối hàn phải thực hiện theo cách hàn.

1. Hàn đối đầu. Hai tấm ghép cùng được đặt trong một mặt phẳng và được hàn nối lại với nhau. Cách hàn này được gọi là hàn mí. Khi tính độ bền của mối hàn người ta bỏ qua phần lồi lên của mối hàn và coi bề dày của mối hàn vừa bằng bề dày của tấm thép.

Công thức kiểm tra của mối hàn là như sau :

$$\sigma = \frac{N}{b \cdot \delta} \leq [\sigma_h]$$

$[\sigma_h]$ là ứng suất cho phép của mối hàn (xem bảng 11-1)

Bảng 11-1

Ứng suất cho phép	Ký hiệu	Hàn tay		Hàn tự động
		Que hàn có lớp thuốc mỏng	Que hàn có lớp thuốc dày	
Kéo	$[\sigma_h]_k$	100MN/m ²	130MN/m ²	130MN/m ²
Nén	$[\sigma_h]_n$	110MN/m ²	145MN/m ²	145MN/m ²
Cắt	$[\tau_h]$	80MN/m ²	110MN/m ²	110MN/m ²

2. Hàn mép. Hai tấm thép được đặt chồng lên nhau và hàn gắn mép của tấm thép này với mặt của tấm thép kia. Có hai cách :

a) **Hàn ở đâu tấm :** nghĩa là mối hàn vuông góc với hướng lực kéo. Cách này sử dụng khi bề rộng của hai tấm là bằng nhau.

b) **Hàn ở cạnh tấm :** mối hàn chạy dọc theo phương của lực kéo. Cách này được thực hiện khi hai tấm có chiều rộng khác nhau.

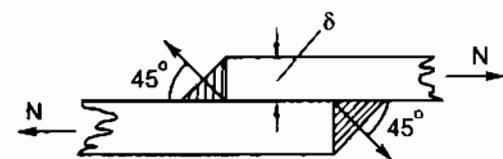
* *Trường hợp hàn ở đầu tấm* : mỗi hàn vuông góc với phương của lực như vậy ở mỗi hàn vừa có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Vì khả năng chịu kéo (nén) tốt hơn nên khi tính toán ta tính với ứng suất tiếp. Điều kiện bền sẽ là :

$$\tau = \frac{N}{0,7\delta l} \leq [\tau_h]$$

Hệ số 0,7 là xem mặt tác dụng của ứng suất tiếp nghiêng đi so với ứng suất chính một góc 45° (h.11-8).

l để chỉ chiều dài tổng cộng ở cả hai đầu các tấm.

δ chiều dày của tấm.



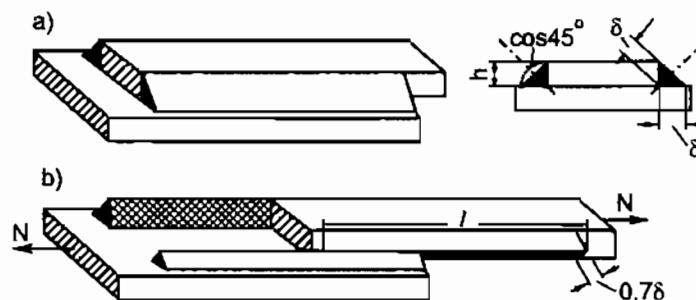
Hình 11-8

* *Trường hợp hàn theo cạnh tấm* : mỗi hàn song song với chiều tác dụng của lực. Mặt chịu cắt yếu nhất vẫn là mặt nghiêng 45° (như hình 11-9) vì diện tích này nhỏ nhất. Ứng suất τ do lực kéo gây nên là :

$$\tau = \frac{N}{2l\delta \cos 45^\circ} \leq [\tau_h]$$

l là chiều dài được hàn của hai cạnh

δ là chiều dày của tấm hàn.



Hình 11-9

Ví dụ. Chọn mặt cắt ngang của hai sắt góc được hàn chát vào tấm cố định như hình vẽ (h.11-10). Các số liệu cho phép như sau :

- Ứng suất cho phép của sắt góc khi chịu kéo $[\sigma] = 16,00 \text{ kN/cm}^2$.
- Ứng suất tiếp cho phép của mỗi hàn $[\tau] = 11,00 \text{ kN/cm}^2$.
- Lực kéo trên hai thanh sắt góc là 72 tấn.

Bài giải

Sơ bộ chọn mặt cắt của sắt góc theo ứng suất pháp. Diện tích cần thiết của hai mặt cắt của sắt góc là :

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{72000}{1600} = 45 \text{ cm}^2.$$

Tra trong bảng sắt góc ta tìm thấy loại sắt góc $125 \times 80 \times 12$ có diện tích mặt cắt ngang là $23,4\text{cm}^2$. Vậy ta chọn loại này.

Kiểm tra lại độ bền của hai thanh ta có :

$$\sigma = \frac{720000}{2.23,4} = 15,4 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2$$

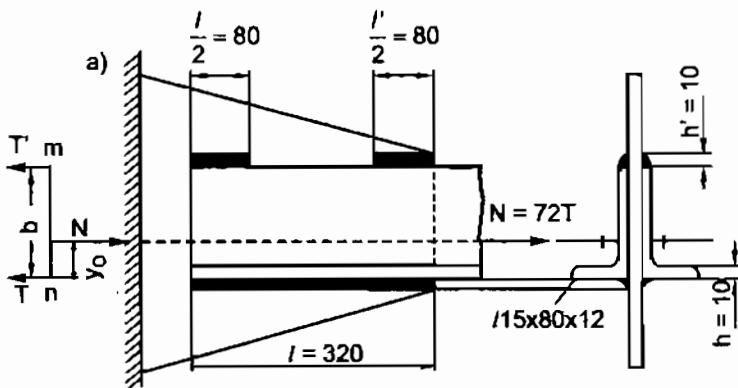
Xác định lực chịu đựng T của hai mối hàn phía trên và lực chịu đựng T của mối hàn mép dưới (h.11-10). Hai lực đó phải cân bằng với lực kéo N. Vậy ta phải có :

$$T = \frac{y_o}{b} N$$

và

$$T = \frac{b - y_o}{b} N$$

Các kí hiệu được cho như hình vẽ.



Hình 11-10

Với số hiệu sắt góc ta đã chọn ta có :

$$b = 125 \text{ mm}$$

$$y_o = 42,2 \text{ mm}$$

Vậy ta tính được :

$$T = \frac{42,2}{125} \cdot 72 = 240,000 \text{ kN}$$

$$T = \frac{82,8}{125} \cdot 72 = 480 \text{ kN}$$

Để tránh hiện tượng xoắn của thép góc ta nâng chiều cao h' của mối hàn ở phía trên lên 1 – 2 mm nhưng nhỏ hơn chiều dày $\delta = 12\text{mm}$ của thép góc. Còn mối hàn ở dưới, chiều cao h có thể lớn hơn δ nhưng không quá $1,5\delta$. Vậy cả hai phía ta nên lấy :

$$h = h' = 10\text{mm}.$$

Như vậy ta có thể xác định chiều dài l và l' của mối hàn như sau :

$$\frac{T'}{1,4l'h'} \leq [\tau] ; \quad \frac{T}{1,4lh} \leq [\tau]$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$l' = \frac{T'}{1,4.h'[\tau]} = \frac{24000}{1,4.1.1100} = 15,6\text{cm}$$

$$l = \frac{T}{1,4.h[\tau]} = \frac{48000}{1,4.1.1100} = 31,2\text{ cm.}$$

Làm tròn số ta có $l = 32\text{cm}$; $l' = 16\text{cm}$.

Ở phía trên, ta thực hiện hai mối hàn như hình vẽ.

Trên hình 11–11 c) ta biểu diễn lực dọc phân bố trong đoạn các mối hàn bằng cách dùng các mặt cắt và tính lực chịu đựng của các mối hàn đó. Ví dụ tính lực cắt trên 1cm mối hàn có thể chịu được là :

$$t = \frac{N}{2(l + l')} = \frac{720000}{2(32 + 16)} = 7500 \text{ N/cm}^2.$$

Từ đó tính với từng mặt cắt khác nhau ta sẽ có biểu đồ như hình vẽ.

§11–3. TÍNH MÔNG GỖ

Gỗ là một loại vật liệu không đẳng hướng, độ bền theo các phương khác nhau là khác nhau. Khi tính ta phải xét dọc thớ hay ngang thớ. Phải xét độ bền khi kéo, độ bền khi trượt theo thớ, theo ngang thớ và độ bền khi đập. Ta có tám nhóm gỗ. Mỗi nhóm có độ bền và dai khác nhau, đưa đến giá trị sử dụng và kinh tế khác nhau. Gỗ xây dựng thường lấy ở nhóm năm hoặc nhóm sáu như gỗ dẻ, gỗ xoan, gỗ muồng v.v.. Bảng 11–2 dưới đây giới thiệu ứng suất cho phép của gỗ nhóm sáu với độ ẩm 15%.⁽¹⁾

Bảng 11–2

Hình thức chịu lực	Kí hiệu	Ứng suất cho phép MN/m ²
Nén dọc thớ	$[\sigma]_n$	13
Kéo dọc thớ	$[\sigma]_K$	10
Uốn	$[\sigma]_u$	13,5
Đập dọc thớ	$[\sigma]_d$	13,5
Đập ngang thớ (cục bộ và toàn bộ)	$[\sigma]_{90^\circ d}$	2
Trượt dọc thớ	$[\tau]$	2,4
Trượt ngang thớ	$[\tau]_{90^\circ}$	2,4

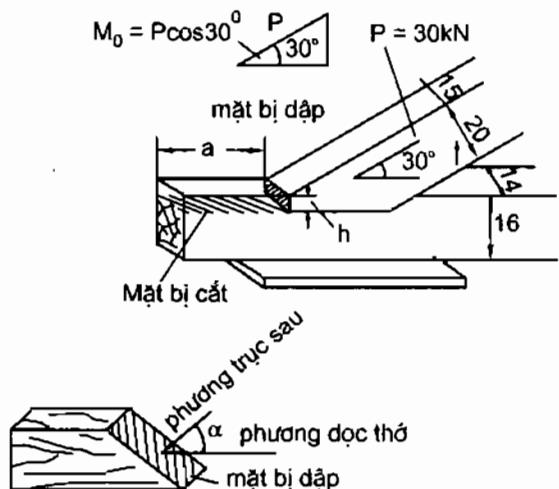
(1) Theo “Bản hướng dẫn thiết kế kết cấu gỗ” (dự thảo) của U.B.K.T.C.B.N.N.

Ví dụ ta có kết cấu mộng như hình vẽ (h.11-12).

Khi phương của lực dập (hay cắt) tạo một góc α với phương của thớ gỗ thì ứng suất cho phép $[\sigma]_{\alpha d}$ (hay $[\tau]_\alpha$) có giá trị trung gian giữa $[\sigma]_d$ và $[\sigma]_{90^\circ d}$ (hay $[\tau]$ và $[\tau]_{90^\circ}$) và được tính theo công thức sau đây :

$$[\sigma]_{\alpha d} = \frac{[\sigma]_d}{1 + \left[\frac{[\sigma]_d}{[\sigma]_{90^\circ d}} - 1 \right] \sin^3 \alpha}$$

Ví dụ. Chân của một cái kèo tựa vào đầu xà theo góc $\alpha = 30^\circ$ (hình 11-11). Lực tác dụng dọc kéo $P = 50\text{kN}$. Tính bề sâu của mộng và chiều dài đầu xà ngoài mộng. Kích thước mặt cắt của xà và kèo $20 \times 15\text{cm}$. Ứng suất cho phép $[\tau] = 2,4 \text{ MN/m}^2$, $[\sigma]_{30^\circ d} = 6,3 \text{ MN/m}^2$.



Hình 11-11

Bài giải

Đầu xà chịu một lực cắt dọc thớ N

$$N_1 = P \cdot \cos \alpha = 50 \cdot 0,865 = 43,25\text{kN}$$

Mặt cắt (dọc thớ), là hình chữ nhật rộng 15cm và dài a . Do đó ta có :

$$\frac{N_1}{0,15a} = [\tau] = 2,4 \text{ MN/m}^2$$

Từ đó ta tính được :

$$a = \frac{0,04325}{0,15 \cdot 2,4} = 0,12\text{m} = 12\text{cm}.$$

Lực N_1 từ kèo tác dụng vào đầu xà thông qua mặt thẳng đứng tiếp xúc giữa kèo và xà làm cho ở mặt đó có hiện tượng dập. Đối với xà lực N_1 song song với thớ gỗ. Đối với kèo, lực N_1 tạo một góc $\alpha = 30^\circ$ với thớ gỗ. Vì ứng suất cho phép về dập khi lực không song song với thớ gỗ nhỏ hơn ứng suất cho phép về dập khi lực song song với thớ gỗ, nên ở đây ta kiểm tra dập ở kèo với $[\sigma]_{30^\circ d} = 6,3 \text{ MN/m}^2$.

Ta tính bề sâu của mộng theo công thức :

$$\frac{N_1}{0,15h} = [\sigma]_{30^\circ d}$$

hay

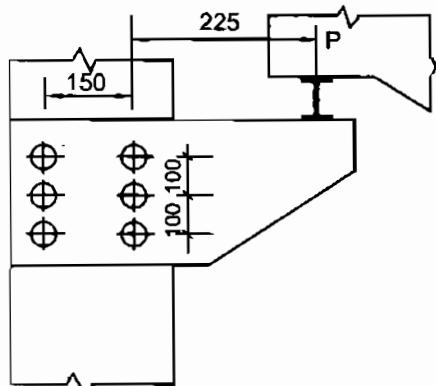
$$h = \frac{N_1}{0,15[\sigma]_{30^\circ d}}$$

$$\text{Thay số ta có : } h = \frac{0,04325}{0,15 \cdot 6,3} = 0,046\text{m} h = 4,6\text{cm}.$$

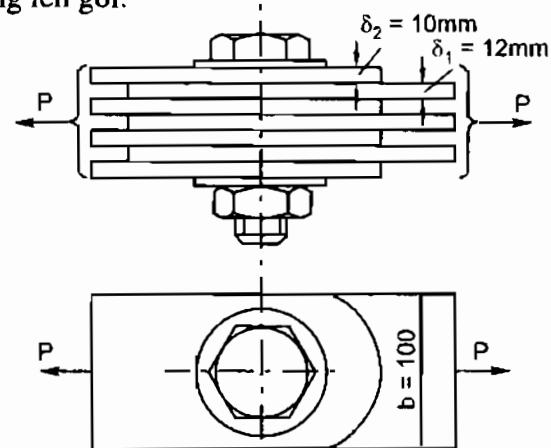
Bài tập

- 11.1. Bộ phận đỡ gối dầm cầu có cấu tạo như hình 11-12. Các đinh tán có đường kính $d = 20\text{mm}$. Ứng suất tiếp cho phép là $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$.

Hãy xác định tải trọng cho phép $[P]$ tác dụng lên gối.



Hình 11-12



Hình 11-13

- 11.2. Giữa các mắt của một dây xích chịu lực kéo $P = 300 \text{ kN}$, người ta dùng đinh bu lông đường kính làm việc $d = 35\text{mm}$ để nối ghép (xem hình 11-13). Kiểm tra độ bền của đinh và của mắt xích. Cho biết :

$$[\tau] = 140 \text{ MN/m}^2, [\sigma]_d = 320 \text{ MN/m}^2; [\sigma] = 240 \text{ MN/m}^2.$$

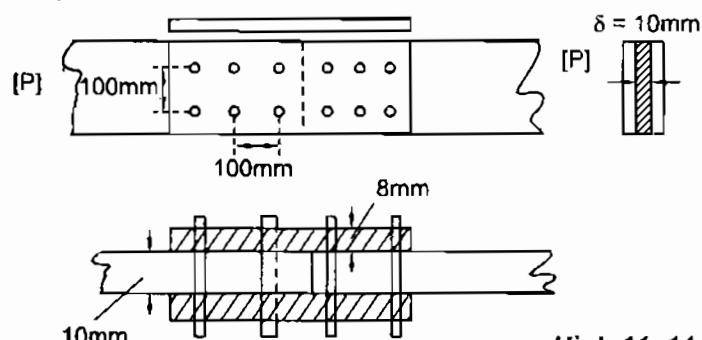
- 11.3. Hai tấm thép có bề rộng $b = 180\text{mm}$ và bề dày $\delta_2 = 10\text{mm}$ được nối với nhau bởi hai bản thép khác cùng bề rộng và có bề dày $\delta_1 = 8\text{mm}$. Đinh tán có đường kính $d = 20\text{mm}$ đặt như hình vẽ (h.12-14).

Tính lực kéo cho phép $[P]$.

$$\text{Cho biết } [\tau] = 100 \text{ MN/m}^2,$$

$$[\sigma]_d = 280 \text{ MN/m}^2,$$

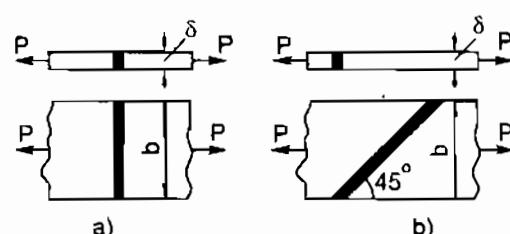
$$[\sigma]_K = 160 \text{ MN/m}^2.$$



Hình 11-14

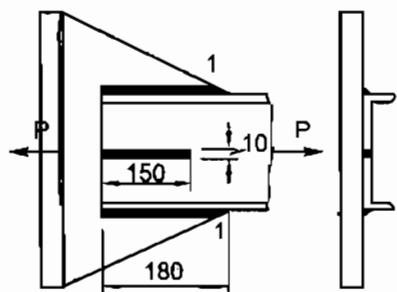
- 11.4. Tính lực kéo $[P]$ cho phép đặt vào hai bản thép được hàn với nhau theo hai cách như trên hình (h.12-15). So sánh kết quả.

Cho biết $[\sigma]_h = 100 \text{ MN/m}^2$; $[\tau]_h = 80 \text{ MN/m}^2$ ứng suất kéo của tấm $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$, $b = 150 \text{ mm}$, $\delta = 10\text{mm}$.



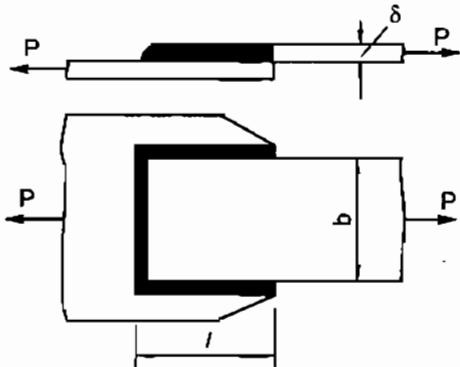
Hình 11-15

- 11.5. Một thanh thép chữ I số hiệu 16 chịu lực dọc trục được hàn liền với một bản thép bằng hai mạch hàn cạnh và một mạch hàn rãnh như trên hình (h.12-16). Mạch hàn 10mm. Mạch hàn rãnh đắp dây.

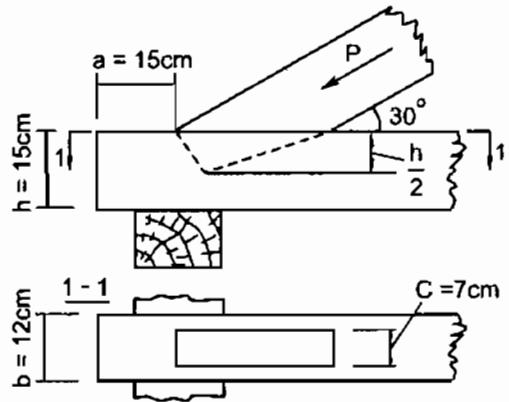


Hình 11-16

- 11.6. Tính chiều dài l cần thiết của mối hàn vê trên hình (h.12-17) biết rằng $b = 100\text{mm}$, $\delta = 10\text{mm}$, $[\tau]_h = 80\text{MN/m}^2$, $P = 150\text{ kN}$.



Hình 12-17



Hình 12-18

- 11.7. Kiểm tra độ bền của liên kết móng ở đầu dàn gõ, biết rằng :

$$P = 30 \text{ kN}, [\tau] = 2,4 \text{ MN/m}^2, [\sigma_d] = 9 \text{ MN/m}^2$$

$$[\sigma_d]_{30^\circ} = 6 \text{ MN/m}^2, [\sigma_k] = 10 \text{ MN/m}^2, \text{xem hình vẽ (h.12-18).}$$

Chương 12

BÀI TOÁN CHỊU LỰC PHÚC TẠP

Chương này đề cập đến các trường hợp chịu lực phức tạp khác của thanh như trường hợp vừa uốn vừa xoắn ; vừa uốn vừa xoắn vừa kéo ; vừa xoắn vừa cắt hay trường hợp thanh có độ cong lớn. Với các bài toán có kể đến xoắn chúng ta chỉ đề cập đến hai dạng mặt cắt đặc biệt là tròn và hình chữ nhật.

§12-1. BÀI TOÁN UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Ta gọi bài toán là "uốn và xoắn đồng thời" khi trên mặt cắt ngang của thanh vừa có thành phần mômen uốn vừa có thành phần mômen xoắn.

1. Với thanh có mặt cắt tròn

Giả sử trên mặt cắt ngang có mômen uốn M_u nằm trong mặt phẳng vOz và một mômen xoắn M_z có chiều như hình 12-1.

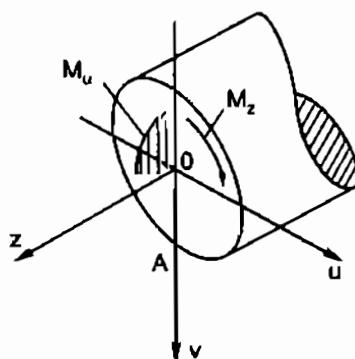
Vấn đề đặt ra là ta phải tìm thấy điểm có trạng thái ứng suất nguy hiểm nhất.

Với cách chịu lực như hình 12-1 ta nhìn thấy ngay điểm A là điểm nguy hiểm nhất vì tại đó đồng thời ta có ứng suất pháp lớn nhất và ứng suất tiếp lớn nhất. Trị số các ứng suất đó là :

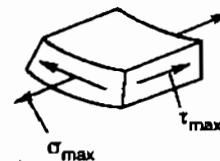
$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Trạng thái ứng suất tại A được biểu diễn như trên hình 12-2. Trạng thái ứng suất đó là trạng thái ứng suất phẳng, vậy để kiểm tra điều kiện bền của phân tử ta phải sử dụng các thuyết bền. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta phải có :

$$\sigma_{\text{td}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$



Hình 12-1



Hình 12-2

Thay trị số của σ_{\max} và τ_{\max} vào ta có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Vì $W_p = 2W_u$ nên ta có thể viết lại như sau :

$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_u} \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \leq [\sigma]$$

Biểu thức $\sqrt{M_u^2 + M_z^2}$ có thể xem là một mômen tương đương :

$$M_{td} = \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \quad (12-1)$$

và như vậy điều kiện bùn là :

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (12-2)$$

Ta thấy (12-2) có dạng của bài toán uốn thuận túy mà ta gặp trước đây.

Đôi khi hệ trục tọa độ lựa chọn ban đầu là một hệ trục Oxyz nào đó không chứa mômen uốn M_u , ta tính được hai thành phần M_x, M_y của M_u . Khi đó biểu thức của mômen tương đương sẽ có dạng :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (12-3)$$

Nếu sử dụng thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta phải có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

từ điều kiện đó ta tính được mômen tương đương như sau :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} \quad (12-4)$$

Nếu sử dụng thuyết bền của Mohr ta phải có :

$$\sigma_1 - v\sigma_3 \leq [\sigma]$$

và từ điều kiện đó ta có mômen tương đương là :

$$M_{td} = \frac{1-v}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+v}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (12-5)$$

Tóm lại trong mọi trường hợp điều kiện bùn của thanh là :

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (12-6)$$

Trị số của W_u , trong trường hợp tổng quát nhất, được tính với biểu thức :

$$W_u = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \eta^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \eta^{-4})$$

trong đó η là tỉ số của bán kính trong và bán kính ngoài của thanh rỗng. Vậy đường kính của thanh được xác định từ điều kiện bền (12-6) là :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{td}}{[\sigma] \cdot 0.1 \cdot (1 - \eta)^4}} \quad (12-7)$$

M_{td} được xác định bởi một trong các biểu thức (12-3), (12-4) hoặc (12-5)

2. Với thanh, mặt cắt là hình chữ nhật

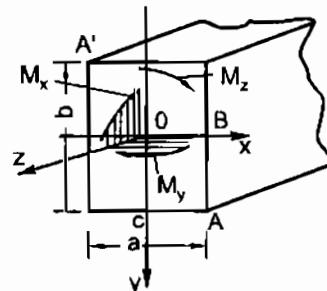
Giả sử các thành phần nội lực có chiều hướng như trên hình 12-3. Trong trường hợp này ta có ba điểm nguy hiểm cần xét. Đó là các điểm A, B, C.

Tại A ứng suất tiếp do M_z gây nên là bằng không, ứng suất pháp do M_x và M_y gây nên là lớn nhất. Trị số của ứng suất pháp đó là :

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

Trạng thái đó là trạng thái ứng suất đơn, vậy điều kiện bền là :

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (12-8)$$



Hình 12-3

Ta nhận thấy tại A', điểm đối xứng với A qua O, ứng suất pháp nén tại đó có trị số bằng trị số ứng suất kéo σ_{max} .

Tại B và C ta có hai thành phần ứng suất. Ứng suất pháp do các mômen uốn M_x , M_y gây nên và ứng suất tiếp do mômen xoắn gây nên. Trị số các ứng suất đó là :

$$\text{Tại B : } \sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} ; \tau_{max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$

$$\text{Tại C : } \sigma' = \frac{M_x}{W_x} ; \tau' = \gamma \tau_{max}$$

Trị số τ_{max} và τ' được tính từ công thức (10-46) và (10-47). Trạng thái ứng suất tại những điểm này không phải là trạng thái ứng suất đơn do đó ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra bền các phân tố.

Ví dụ sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có điều kiện bền tại B và C như sau :

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{\alpha a^2 b}\right)^2} \leq [\sigma] \\ & \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\gamma^2 \left(\frac{M_z}{\alpha a^2 b}\right)^2} \leq [\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

§12-2. BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO, CỘNG XOẮN

Ta gọi là bài toán "uốn cộng kéo, cộng xoắn" khi trên mặt cắt ngang của thanh có cả ba thành phần : lực dọc N_z , mômen uốn M_x, M_y và mômen xoắn M_z .

1. Với thanh có mặt cắt tròn

Giả sử chiều các thành phần nội lực như hình 12-4.

Điểm nguy hiểm vẫn là điểm A. Tại đó trị số ứng suất pháp là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F}$$

và trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Trạng thái ứng suất tại đó là trạng thái ứng suất phẳng vậy ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra bền. Ví dụ theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta phải có :

$$\sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)} \leq [\sigma]$$

Khi hệ trục tọa độ ban đầu không trùng với hệ Ouvz và ta có các thành phần mômen uốn của M_u là M_x, M_y thì M_u được xác định bằng biểu thức :

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

2. Với thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật

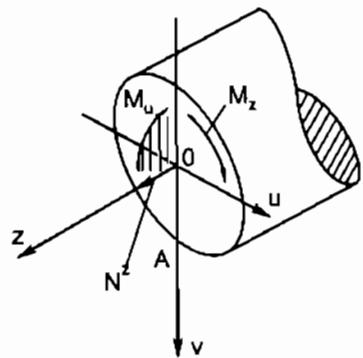
Giả sử chiều của các thành phần nội lực được biểu diễn trên hình 12-5. Các điểm nguy hiểm vẫn là các điểm A, B, C.

Tại A trạng thái ứng suất là trạng thái đơn. Điều kiện bền sẽ là :

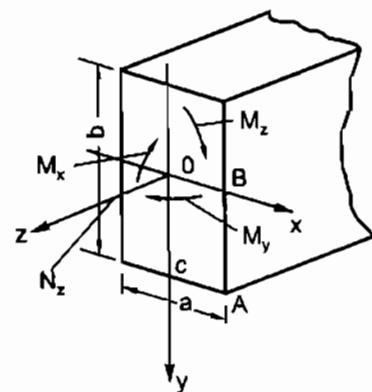
$$\sigma_A = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (12-10)$$

Tại B và C trạng thái ứng suất là trạng thái ứng suất phẳng. Các trị số ứng suất là :

$$\text{Tại B: } \sigma_B = \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}; \tau_B = \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$



Hình 12-4



Hình 12-5

$$\text{Tại C: } \sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}; \tau_C = \gamma \tau_B = \gamma \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$

Ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra điều kiện bền tại các điểm đó.

Ví dụ 1. Một trục truyền bằng thép đặt trên các gối tựa A và B mang các puli C và D. Chiều dài của trục, đường kính của các puli và khoảng cách các puli trên trục được cho như trên hình 12-6. Puli C được kéo bởi một mô tơ qua các đai truyền lực theo phương ngang và gây nên lực kéo $P_1 = 6\text{kN}$ trên đai truyền. Puli D nối với máy chịu tải cũng bằng các đai truyền lực theo phương ngang và có chiều ngược lại. Trọng lượng của các puli là $G_1 = G_2 = 1,8\text{kN}$. Xác định đường kính của trục truyền. Xem trục có mặt cắt ngang không đổi suốt chiều dài của trục và trọng lượng bản thân phân bố đều với cường độ $q = 0,45\text{kN/m}$. Ứng suất cho phép khi kéo của vật liệu làm trục là bằng $[\sigma] = 12,00\text{kN/cm}^2$. Lực ma sát ở gối tựa xem như không đáng kể.

Bài giải

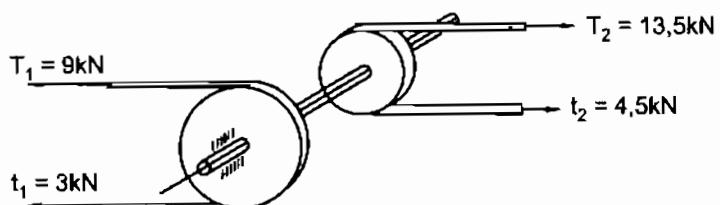
Ta phải tìm lực kéo P_2 với puli thứ hai tác động lên máy chịu tải. Từ đẳng thức cân bằng của mômen xoắn ta có :

$$\frac{P_1 D_1}{2} = \frac{P_2 D_2}{2}$$

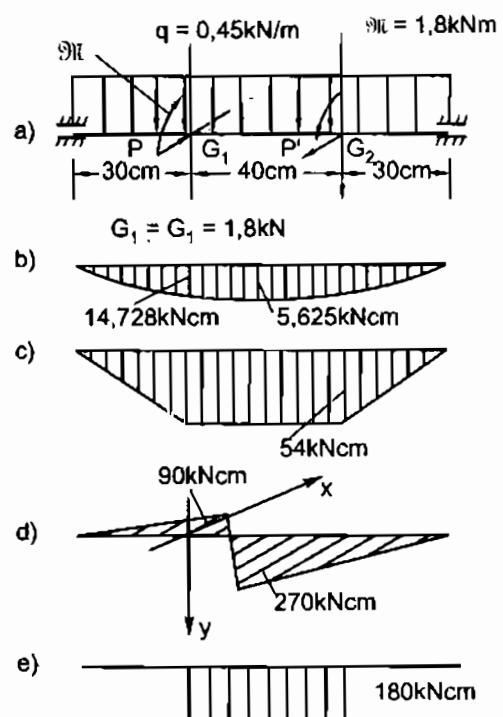
thay : $6.30 = P_2.20$; Vậy : $P_2 = 9\text{kN}$.

Để các đai truyền không bị trượt trên mặt của các puli, trên các đai phải có một sức cản ban đầu nào đó. Trị số lực cản phải đủ để tạo nên lực ma sát giữa puli và đai truyền, nó phụ thuộc nhiều yếu tố (vật liệu làm đai truyền, vật liệu của puli, chiều dài và trọng lượng của đai truyền v.v..). Song nói chung sức cản đó biến thiên trong khoảng từ 1/3 đến 1/2 của lực kéo.

Trong trường hợp đang xét, giả sử sức cản ban đầu đó là bằng một nửa của lực kéo. Như vậy sức cản trong nhánh đai chủ động là bằng $T_1 = 1,5P_1 = 9\text{kN}$ và trong nhánh đai bị động là



Hình 12-6



- b) Biểu đồ M_x do q gây nên
- c) Biểu đồ M_x do trọng lượng G_1, G_2 gây nên
- d) Biểu đồ M_y do P và P' gây nên
- e) Biểu đồ M_z do \mathcal{M} gây nên

Hình 12-7

$t_1 = 0,5P_1 = 3kN$. Tương tự như vậy ta tính được sức căng trong các nhánh dai chủ động và bị động trên puli thứ hai là $T_2 = 1,5 P_2 = 13,5kN$ và $t_2 = 0,5P_2 = 4,5kN$ (h.12-6). Gọi P và P' là hợp lực của $T_1 + t_1$ và $T_2 + t_2$. Sơ đồ chịu lực của trục có thể biểu diễn như trên hình vẽ 12-7 và các biểu đồ nội lực được biểu diễn như trên hình 12-7b, c, d, e.

Mômen uốn tổng cộng tại các mặt cắt ngang tại C và D là :

$$\text{Tại C : } M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{58,7^2 + 90^2} = 108,6 \text{ kNm.}$$

$$\text{Tại D : } M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{58,7^2 + 270^2} = 276,7 \text{ kNm.}$$

Vậy mặt cắt ngang nguy hiểm là tại D.

Mômen tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{276,7^2 + 180^2} = 330,1 \text{ kNm}$$

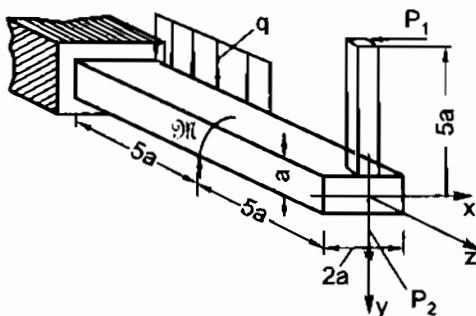
Đường kính của trục thanh là :

$$d = \sqrt[3]{\frac{330,1}{12,0,1}} = 6,5 \text{ cm.}$$

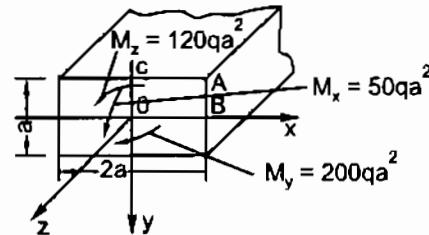
Ví dụ 2. Xác định trị số tải trọng của phép [q] tác dụng lên thanh chịu lực như hình 12-8. Các lực cho như sau :

$$P_1 = 20qa ; P_2 = 3,75qa.$$

$$M = 25qa^2.$$



Hình 12-8



Hình 12-9

Bài giải

Ta nhận thấy dễ dàng mặt cắt tại ngàm là mặt cắt nguy hiểm nhất. Các thành phần nội lực trên mặt cắt đó được biểu diễn như trên hình 12-9. Các trị số được tính như sau :

$$M_z = -25qa^2 + 5qa^2 - 20qa \cdot 5a = -120qa^2$$

$$M_x = -q5a \frac{5a}{2} - 3,75 \cdot qa \cdot 10a = -50qa^2$$

$$M_y = 200qa^2$$

Các điểm nguy hiểm trên mặt cắt là A, B, C. Đầu tiên ta dựa vào điểm A để xác định trị số tải trọng cho phép. Tại đó ta có điều kiện :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

Thay số vào ta có :

$$\sigma_{\max} = \frac{50qa^2 \cdot 6}{2a \cdot a^2} + \frac{200qa^2 \cdot 6}{a(2a)^2} \leq [\sigma]$$

Từ đó ta rút ra được :

$$450 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Với điểm C : Sử dụng thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta có :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{W_d}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Từ đó ta có :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\left(\frac{50 \cdot qa^2 \cdot 6}{2a \cdot a^2}\right)^2 + 3\left(\frac{120 \cdot qa^2}{0,2462a \cdot a^2}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Ta rút ra được :

$$449 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Với điểm B ta có :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\left(\frac{200 \cdot qa^2 \cdot 6}{a(2a)^2}\right)^2 + 3\left(0,796 \cdot \frac{120qa^2}{0,2462a \cdot a^2}\right)^2} \leq [\sigma]$$

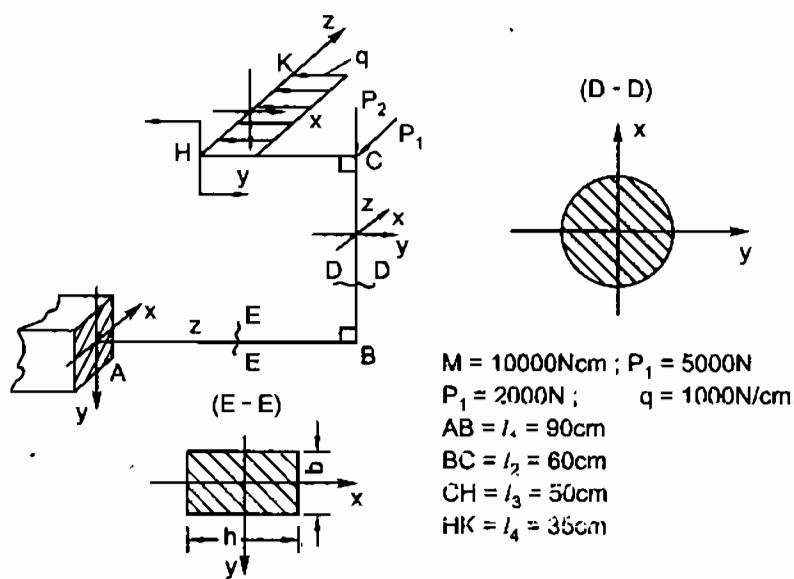
Ta rút ra được :

$$451 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Điểm nguy hiểm là tại B. Từ đó ta có :

$$[q] = \frac{a[\sigma]}{451} = 2,65 \text{ kN/m}$$

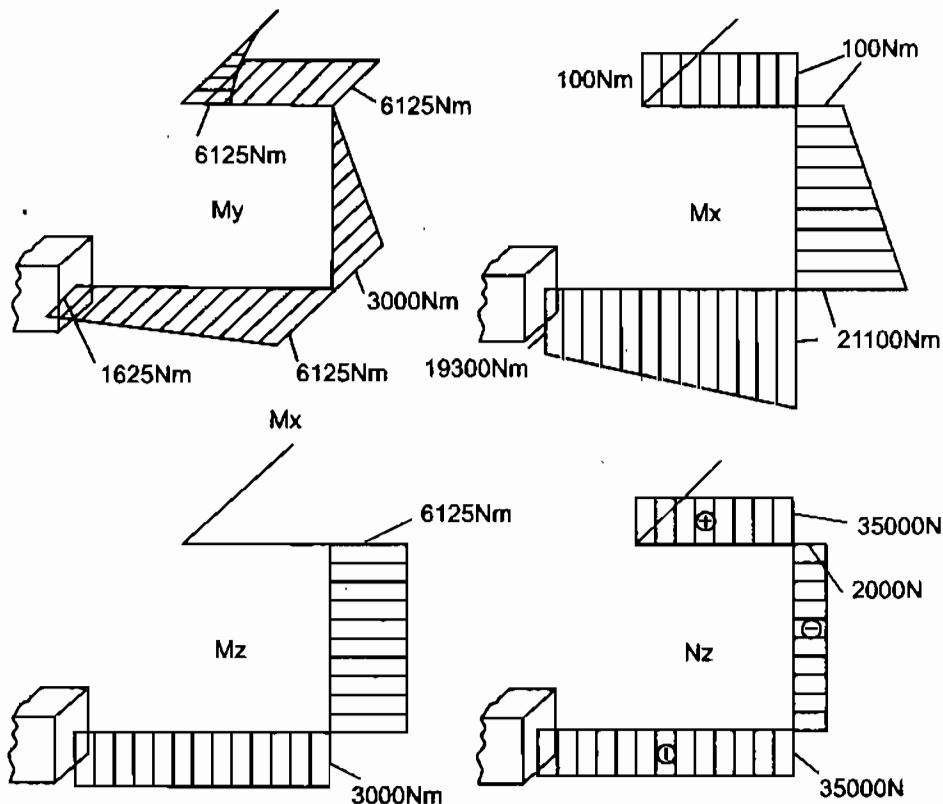
Ví dụ 3 : Cho một khung gãy khúc không gian chịu lực như hình 12-10. Xác định mặt cắt ngang nguy hiểm của khung và chọn kích thước mặt cắt ngang trong các đoạn AB và BC, biết rằng : trong đoạn AB thanh có mặt cắt hình chữ nhật với chiều cao $h = 2b$, trong đoạn BC mặt cắt ngang là hình tròn và $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 12-10

Bài giải

Hệ trục tọa độ chọn cho mỗi đoạn thanh biểu diễn trên hình 12-10. Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 12-11..



Hình 12-11

a) Chọn đường kính cho thanh BC

Mặt cắt nguy hiểm của đoạn thanh BC là mặt cắt ngang sát tại B. Trên mặt cắt đó ta có các trị số nội lực như sau :

$$N_z = -2000 \text{ N} ; M_z = -6125 \text{ Nm} ;$$

$$M_y = 3000 \text{ Nm} ; M_x = 21100 \text{ Nm}.$$

Chiều các nội lực được biểu diễn trên hình 12-12.

Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất nén lớn nhất. Trị số ứng suất pháp tại đó là :

$$\sigma_{\min} = - \left(\frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F} \right) = - \frac{\sqrt{21,1^2 \cdot 10^6 + 3^2 \cdot 10^6}}{0,1d^3} = \frac{2000 \cdot 4}{3,14d^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{21,31 \cdot 10^3}{0,1d^3} - \frac{2000}{0,785d^2}$$

Trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{6125}{0,2d^3}$$

Theo thuyết bền thể năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phân tố là :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{21,31 \cdot 10^3}{0,1d^3} + \frac{2000}{0,785d^2} \right)^2 + 3 \left(\frac{6125}{0,2d^3} \right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số $[\sigma]$ vào và rút gọn ta được phương trình :

$$d^6 - 0,065 \cdot 10^{-8} d^2 - 1,09 \cdot 10^{-7} d - 4,82 \cdot 10^{-6} = 0$$

Giải phương trình, cuối cùng ta tìm thấy : $d = 0,13 \text{ m}$.

b) Chọn kích thước cho thanh AB

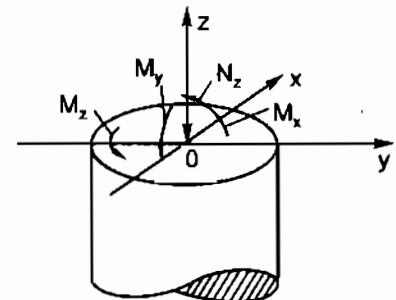
Mặt cắt nguy hiểm của đoạn thanh AB cũng là mặt cắt sát tại B. Trị số nội lực trên mặt cắt đó là :

$$N_z = -35000 \text{ N} ; M_z = -3000 \text{ Nm} ;$$

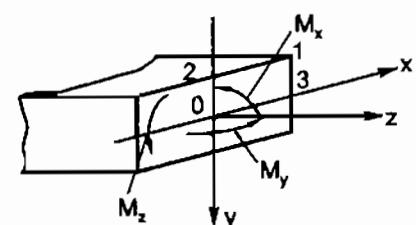
$$M_x = -21100 \text{ Nm} ; M_y = -6125 \text{ Nm}.$$

Chiều các thành phần nội lực được biểu diễn như hình 12-13.

Các điểm nguy hiểm trên mặt cắt là 1, 2, 3. Ta chọn kích thước mặt cắt ngang từ điều kiện bền của ba điểm đó.



Hình 12-12



Hình 12-13

Điều 1. Trị số ứng suất nén lớn nhất tại đó là :

$$\sigma_{\min} = - \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F} \right) = - \left(\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{b(2b)^2} + \frac{35000}{b(2b)} \right)$$

Điều kiện bền của phân tố là :

$$\left| \frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b^3} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2} \right| \leq [\sigma]$$

Thay trị số $[\sigma]$ vào, ta đi đến phương trình :

$$b^3 - 1,75 \cdot 10^{-4}b - 725 \cdot 10^{-5} = 0$$

Giải phương trình ta tìm thấy $b \approx 0,091m$.

Điểm 2. Ứng suất pháp tại điểm đó có trị số là :

$$\sigma = - \left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F} \right) = - \left(\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{35000}{2b \cdot b} \right)$$

Trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_d} = \frac{3 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phân tố là :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{21,1 \cdot 10^5 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{35000}{2b \cdot b} \right)^2 + 3 \left(\frac{3 \cdot 10^5}{0,2462b \cdot b^2} \right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số của $[\sigma]$ vào và rút gọn ta được phương trình

$$b^6 - 3,06 \cdot 10^{-8}b^2 - 2,2 \cdot 10^{-7}b - 40,8 \cdot 10^{-8} = 0$$

Giải phương trình ta được

$$b \approx 0,086m.$$

Điểm 3. Ứng suất pháp tại đó là :

$$\sigma = - \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F} \right) = - \left(\frac{6125 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2} \right)$$

Trị số ứng suất tiếp tại đó là :

$$\tau = \gamma \tau_{\max} = 0,786 \cdot \frac{3000}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phân tố là :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{6125 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2} \right)^2 + 3 \left(0,786 \frac{3 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2b^3} \right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số ứng suất cho phép vào và rút gọn ta được phương trình :

$$b^6 - 3,06 \cdot 10^{-8} b^2 - 321 \cdot 10^{-10} b - 155 \cdot 10^{-10} = 0$$

Giải phương trình ta có : $b \approx 0,075\text{m}$.

Như vậy để thỏa mãn điều kiện bền ở cả ba điểm ta phải chọn $b = 9,1\text{cm}$; $h = 2b = 18,2\text{cm}$.

Qua ví dụ trên ta thấy rằng trong bài toán chọn kích thước của mặt cắt ngang khi thanh chịu lực tổng quát, ta thường gặp phải các phương trình bậc 6 hay bậc 3. Vì vậy để đơn giản thường người ta sơ bộ chọn trước kích thước của mặt cắt với giả thiết là trên mặt cắt không có lực dọc N_z . Sau khi sơ bộ chọn kích thước, người ta kiểm tra lại độ bền của thanh, khi có cả lực dọc N_z tác dụng. Nếu điều kiện bền không thỏa mãn thì ta tăng kích thước của mặt cắt. Cách giải quyết bài toán như vậy tránh phải giải quyết các phương trình bậc 6 hay bậc 3.

Ví dụ, nếu ta chưa tính đến ảnh hưởng của lực dọc N_z , đối với điểm 1 ta có điều kiện bền là :

$$\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b^3} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{4b^3} \leq 100 \cdot 10^6$$

hay : $b^3 = 72,5 \cdot 10^{-5}$

$$b \approx 0,09\text{m}.$$

Đối với điểm 2, tương tự ta tìm thấy ; $b^6 = 40,8 \cdot 10^{-8}$; $b \approx 0,085\text{m}$.

Đối với điểm 3, ta có : $b^6 = 155 \cdot 10^{-10}$; $b \approx 0,074\text{m}$.

Ta thấy những trị số này không khác nhiều so với kết quả tính ở trên.

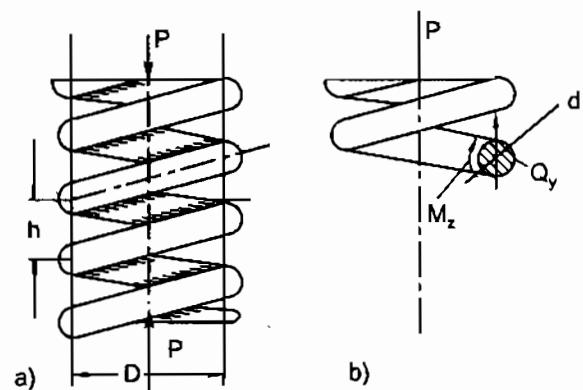
§12-3. TÍNH LÒ XO XOÁN ỐC HÌNH TRỤ BUỚC NGẮN

Ở đây ta chỉ đề cập đến việc tính toán lò xo hình trụ xoắn ốc bước ngắn có hình dáng như trên hình 12-14.

Các đặc trưng hình học của lò xo là :

- h là bước của lò xo ;
- D là đường kính trung bình của lò xo ;
- d là đường kính của dây lò xo ;
- α là góc nghiêng của các vòng dây lò xo ;
- n là số vòng dây làm việc của lò xo.

Tường tượng cắt lò xo bằng một mặt cắt dọc qua trục của lò xo (h.12-14b) chia lò xo thành hai phần, xét cân bằng của



Hình 12-14

phần trên. Trên mặt cắt của dây phải có hai thành phần nội lực $Q_y = P$ và $M_z = P \cdot R$ để cân bằng với P . Ta giả thiết rằng góc nghiêng α của vòng lò xo là rất bé (bước h của đường xoắn ốc là ngắn). Vậy ta có thể xem mặt cắt ngang của vòng lò xo là tròn. Ứng suất do mômen xoắn M_z và lực cắt Q_y gây nên trên mặt cắt là ứng suất tiếp. Một cách gần đúng ta có thể xem ứng suất tiếp do lực cắt Q_y gây nên trên mặt cắt là phân bổ đều có phương song song với Q_y và một hệ ứng suất tiếp do mômen xoắn M_z gây nên. Vậy ứng suất tiếp tại một điểm nào đó trên mặt cắt là tổng hình học của hai thành phần ứng suất tiếp đó.

Ứng suất tiếp lớn nhất là tại điểm 1. Trên chu vi mép trong của mặt cắt (h.12-15), trị số ứng suất tiếp tại đó là :

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{M_z}{W_p} + \frac{Q_y}{F} \\ \tau_{\max} &= \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right)\end{aligned}\quad (12-11)$$

Trong thực tế đường kính của dây lò xo thường là bé hơn đường kính trung bình của dây rất nhiều ($\frac{D}{d} > 5$) nên tỉ số $\frac{d}{2D}$ có thể bỏ qua so với 1, công thức (12-11) có thể viết lại dưới dạng :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (12-12)$$

Điều đó có nghĩa là đã bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt trong khi tính ứng suất, coi ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chỉ do riêng M_z gây nên.

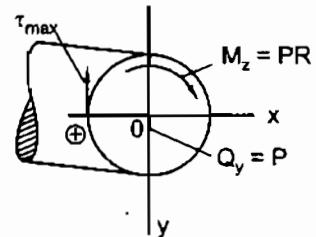
Quá trình tính toán trên đây ta đã không để ý đến độ cong của dây vì vậy sự tính toán đó chỉ là gần đúng.

Với phép tính chính xác hơn ta có :

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (12-13)$$

trong đó K là hệ số điều chỉnh có kể cả ảnh hưởng của lực cắt và độ cong của vòng dây, K có thể tính với công thức sau đây :

$$K = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1} \quad (12-14)$$



Hình 12-15

Trong thực tế người ta còn dùng loại lò xo có mặt cắt ngang của dây là hình chữ nhật hay hình vuông (h.12-16) ; nếu chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen xoắn thì ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt được tính với công thức :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b} = \frac{PD}{2\alpha a^2 b} \quad (12-15)$$

Điều kiện bền của lò xo là :

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

Ngoài việc tính độ bền thường phải tính đến độ co hay độ giãn của lò xo. Gọi λ là độ co hay độ giãn do lực P gây nên, công ngoại lực trên biến dạng đó là :

$$A = \frac{1}{2} P\lambda$$

Về trị số công đó bằng thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong lò xo. Mặt khác ta có thể tính thế năng U theo cách sau đây. Xét một đoạn thanh vô cùng bé dz . Đoạn thanh đó chịu một mômen xoắn M_z . Công biến dạng đàn hồi do M_z gây nên trên góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt là bằng thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố. Ta có :

$$dU = \frac{M_z \theta dz}{2}$$

Góc xoắn tỉ đối θ được tính với công thức (10-7) vậy từ đó ta có :

$$dU = \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}$$

Lấy tích phân trên chiều dài l của lò xo ta có :

$$U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}$$

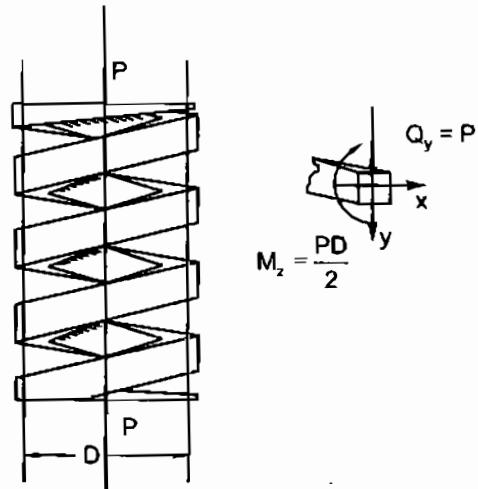
Số sánh A và U ta được : $P\lambda = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}$

Nếu gọi n là số vòng làm việc của lò xo thì $l = \pi Dn$. Vậy ta có :

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} \quad (12-16)$$

Công thức (12-16) còn có thể viết dưới dạng :

$$\lambda = \frac{P}{C} \quad (12-16')$$



Hình 12-16

C được gọi là độ cứng của lò xo,

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} \text{ N/m} \quad (12-17)$$

Ví dụ 4. Kiểm tra độ bền của lò xo hình trụ, dây lò xo có mặt cắt ngang là tròn, lực kéo tác dụng lên dây là $P = 3.10^3 \text{ N}$. Đường kính trung bình của lò xo là $D = 0,2 \text{ m}$. Đường kính của dây làm lò xo là $d = 2 \text{ cm}$. Số vòng làm việc của lò xo là $n = 18$, $[\tau] = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$, $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.

Tính độ giãn của lò xo.

Bài giải

1. Ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo là :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} = 1,91 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

Một cách chính xác hơn, ta phải tính thêm hệ số điều chỉnh. Với $\frac{D}{d} = 10$; $K = 1,14$.

Vậy :

$$\tau_{\max} = 1,14 \cdot 1,91 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2 = 2,18 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

$\tau_{\max} < [\tau]$ vậy lò xo đủ bền.

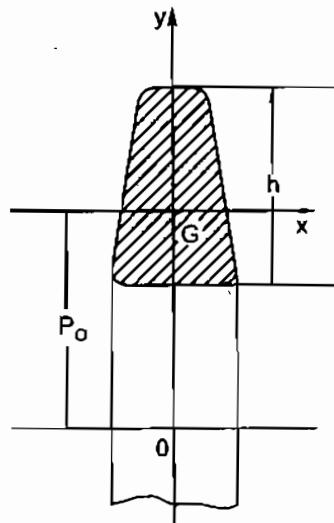
2. Độ giãn của lò xo là :

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 20^3 \cdot 18}{8 \cdot 10^6 \cdot 2^4} = 27 \text{ cm.}$$

§12-4. TÍNH THANH CÓ ĐỘ CONG LỚN

Trong các phần trên ta chỉ mới để ý tính ứng suất trong các thanh thẳng. Ở đây ta sẽ xét đến trường hợp chịu lực của các thanh cong. Ta hạn chế bài toán trong những điều kiện sau đây : Giả sử thanh có một mặt đối xứng trực của thanh cũng như ngoại lực đều nằm trong mặt đối xứng đó. Trên hình 12-17 biểu diễn một mặt cắt ngang bất kỳ của thanh. Gọi G là trọng tâm của mặt cắt ngang và O là tâm cong tương ứng với G của trực thanh. Kí hiệu h là chiều cao của mặt, ρ_o và ρ là bán kính cong OG trước và sau biến dạng của thanh.

Ta phân biệt hai trường hợp : Thanh cong có độ cong bé $\left(\frac{h}{\rho_o} \leq 0,2 \right)$ và thanh có độ cong lớn. Với thanh có độ cong



Hình 12-17

bé, để tính ứng suất, ta có thể sử dụng các công thức của thanh thẳng nhưng để tính chuyển vị ta phải sử dụng công thức :

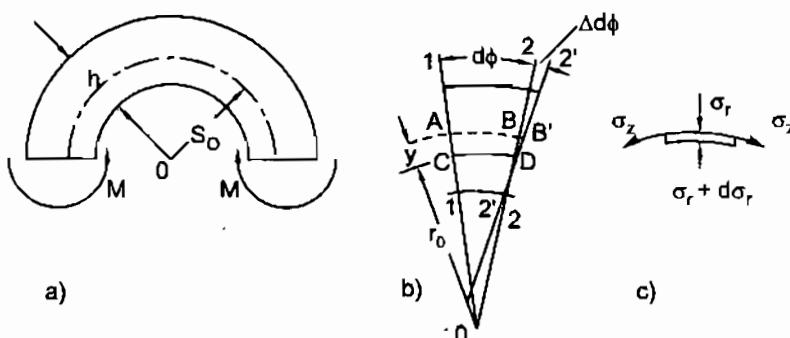
$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (12-18)$$

thay cho công thức (7-17).

Ta hãy xét trường hợp thanh có độ cong lớn.

Xét trường hợp thanh chịu uốn thuần túy như được biểu diễn trên hình 12-18. Để tính ứng suất trên mặt cắt ngang ta dựa vào các giả thuyết sau đây :

- Trong quá trình biến dạng mặt cắt ngang của thanh vẫn phẳng và thẳng góc với trục của thanh.
- Thừa nhận rằng ứng suất pháp theo các phương vuông góc với trục của thanh là bằng không.



Hình 12-18

Với các giả thuyết đó ta suy ra trạng thái ứng suất của một phân tố nào đó trong lòng thanh là trạng thái ứng suất đơn. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

là phương tiếp tuyến với trục của thanh.

Ta thấy ngay rằng giả thuyết thứ hai chỉ là một giả thuyết gần đúng. Thực vậy, nếu ta xét một dải AB vô cùng bé cắt song song với trục cong (h.12-18c). Hai đầu mút của dải chịu các ứng suất pháp σ_z có phương tạo với nhau một góc $d\phi$ thì rõ ràng trị số ứng suất theo hướng kính phải thay đổi mới tạo nên sự cân bằng của phân tố. Nói một cách khác ứng suất theo phương vuông góc với trục của thanh không thể bằng không được. Ứng suất đó sẽ làm thay đổi hình dáng của mặt cắt ngang. Song vì biến dạng là vô cùng bé, nhất là khi thanh có chiều cao h khá lớn thì sự thay đổi này không đáng kể có thể bỏ qua được.

Xét biến dạng dài của AB.

Tách khỏi thanh một phân tố vô cùng bé bởi hai mặt cắt tạo với nhau một góc $d\phi$ đi qua A và B (h.12-18b). Sau biến dạng mặt cắt đi qua B xoay đi đối với mặt cắt đi qua A một

góc $\Delta\phi$ chung quanh D ; CD là một thớ trung hòa nào đó song song với trục thanh. Độ dài của CD là không đổi trong quá trình thanh biến dạng. Vị trí của CD là chưa được xác định. Gọi r_o và r là bán kính cong của CD trước và sau biến dạng. Biến dạng dài ε_z của AB được xác định bởi tỉ số :

$$\varepsilon_z = \frac{BB'}{AB} = \frac{y\Delta\phi}{(y + r_o)\Delta\phi}$$

trong đó : y là khoảng cách từ AB đến lớp trung hòa, B' là vị trí của B sau biến dạng.

Để tính tỉ số $\frac{\Delta\phi}{d\phi}$ ta hãy tính độ dài của CD trước và sau biến dạng.

Ta có :

$$CD = r_o d\phi = r(d\phi + \Delta\phi)$$

Vậy :

$$\frac{\Delta\phi}{d\phi} = r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right)$$

Do đó ta có :

$$\varepsilon_z = \frac{y}{r_o + y} r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right)$$

Hay :

$$\sigma_z = E_y \frac{y}{r_o + y} r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \quad (12-19)$$

Biểu thức (12-19) cho ta thấy sự phân bố ứng suất theo chiều cao y không còn là sự phân bố bậc nhất như trong thanh thẳng. Qua biểu thức đó ta cũng thấy rõ rằng với thanh có độ cong bé nghĩa là khi tỉ số h/r_o là bé so với đơn vị thì biểu thức (12-19) có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_z = E_y \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right)$$

Đối với thanh thẳng, khi $\frac{1}{r_o} = 0$, ta có :

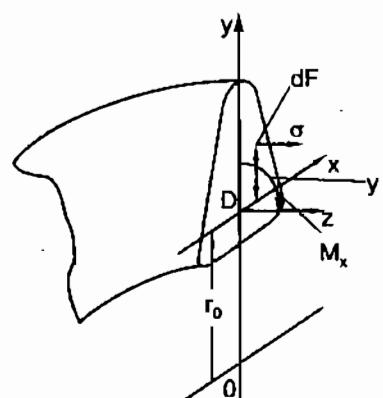
$$\sigma_z = \frac{Ey}{\rho} = \frac{M_x}{J_x} y \quad (\text{r đóng vai trò của } \rho \text{ và trị số } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x})$$

Ta xác định các tương quan giữa nội lực và ứng suất. Vì thanh chịu uốn thuần túy nên ta có (h.12-19) :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = E r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_F \frac{y dF}{r_o + y} = 0$$

$$\text{Vậy : } \int_F \frac{y dF}{r_o + y} = 0$$

$$\text{Mặt khác : } M_x = \int_F \sigma_z y dF = E r_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \int_F \frac{y^2 dF}{r_o + y}$$



Hình 12-19

Hay có thể viết dưới dạng :

$$M_x = Er_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \left(\int_F y dF - r_o \int_F \frac{y dF}{r_o + y} \right)$$

Số hạng thứ hai trong ngoặc là bằng không còn số hạng thứ nhất là mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa đi qua D. Nếu gọi e là khoảng cách từ trọng tâm G của mặt cắt ngang đến đường trung hòa thì biểu thức mômen tĩnh đó là tích của diện tích F và e. Trị số của e chẳng qua là hiệu của r_o và r_o . Từ đó biểu thức mômen được viết dưới dạng :

$$M_x = Er_o \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) F_o e \quad (12-21)$$

với

$$e = r_o - r_o \quad (12-22)$$

Thay (12-21) vào (12-19) ta được công thức của ứng suất như sau :

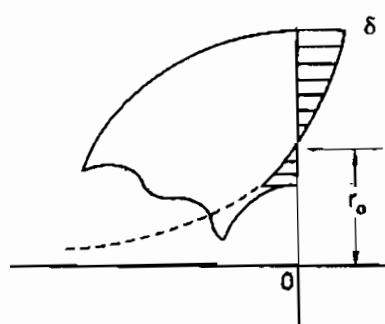
$$\sigma_z = \frac{M_x}{F_o e} \frac{y}{r_o + y} \quad (12-23)$$

Để xác định r_o ta sử dụng biểu thức tích phân (12-20). Đổi biến số mới với $u = r_o + y$. Biểu thức tích phân được viết lại dưới dạng :

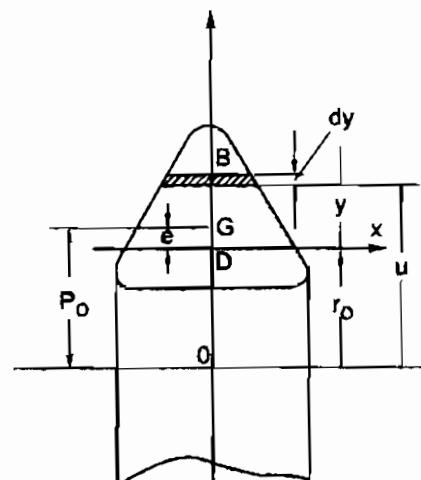
$$\int_F \frac{u - r_o}{u} dF = 0$$

Từ đó ta có :

$$r_o = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (12-24)$$



a)



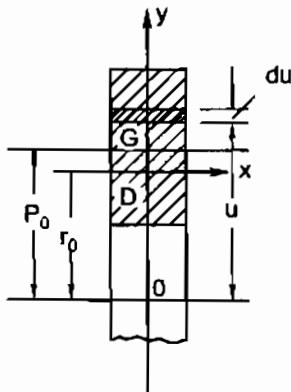
b)

Hình 12-20

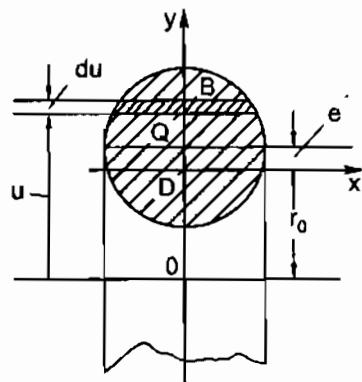
Biểu thức tích phân ở mẫu số là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta sẽ trình bày cách tính trong những ví dụ cụ thể sau.

Từ biểu thức (12-23) ta có thể vẽ được biểu đồ biểu diễn sự biến thiên của ứng suất theo chiều cao của mặt cắt ngang như trên hình 12-20a. Một trong những đường tiệm cận của hàm số đi qua tâm cong của mặt cắt ngang. Tùy theo hình dạng của mặt cắt ngang ứng suất có trị số lớn nhất có thể nằm về phía bên trong hoặc bên ngoài của mặt cắt ngang.

Ví dụ 5. Xác định bán kính cong có тор trung hòa cho thanh cong có mặt cắt ngang là hình chữ nhật (h.12-21) và hình tròn (h.12-22).



Hình 12-21



Hình 12-22

Bài giải

$$\text{Trước tiên ta hãy tính tích phân: } I = \int_F \frac{dF}{u}$$

Tích phân đó có trị số là :

$$\int_F \frac{dF}{u} = b \int_{\rho_o - \frac{h}{2}}^{\rho_o + \frac{h}{2}} \frac{du}{u} = b \ln \frac{\rho_o + \frac{h}{2}}{\rho_o - \frac{h}{2}}$$

$$\text{Vậy ta có: } r_o = \frac{h}{\ln \frac{\rho_o + h/2}{\rho_o - h/2}}$$

Độ lệch giữa trục trung hòa và trọng tâm mặt cắt ngang là

$$e = \rho_o - r_o = \rho_o - \frac{h}{\ln \frac{\rho_o + h/2}{\rho_o - h/2}} \quad (12-25)$$

Tương tự đối với hình tròn, sau khi thực hiện các phép tích phân ta có :

$$e = \frac{1}{2} (\rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - R^2}) \quad (12-26)$$

Độ lệch e cũng có thể tính như sau :

Từ (12-20) ta có :

$$\int_F \frac{y dF}{r_o + y} = \int_F \frac{y - e + e}{r_o + e + y - e} dF = \int_F \frac{y_1 + e}{\rho_o + y_1} dF = 0$$

trong đó : $y_1 = y - e$ – tọa độ của dF đối với trục qua trọng tâm.

Từ đó ta có :

$$e = - \frac{\int_F \frac{y_1}{\rho_o + y_1} dF}{\int_F \frac{1}{\rho_o + y_1} dF}$$

Sử dụng biểu thức khai triển của hàm mũ

$$\left(1 + \frac{y_1}{\rho_o}\right)^{-1} = 1 - \frac{y_1}{\rho_o} + \left(\frac{y_1}{\rho_o}\right)^2 + \dots$$

và sử dụng hai số hạng đầu ta có :

$$e \approx - \frac{\int_F y_1 \left(1 - \frac{y_1}{\rho_o}\right) dF}{\int_F \left(1 - \frac{y_1}{\rho_o}\right) dF}$$

Vì rằng $\int_F y_1 dF = 0$

nên ta có : $e \approx \frac{J_x}{\rho_o F}$ (12-27)

Trong đó J_x là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với hệ trục hệ quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

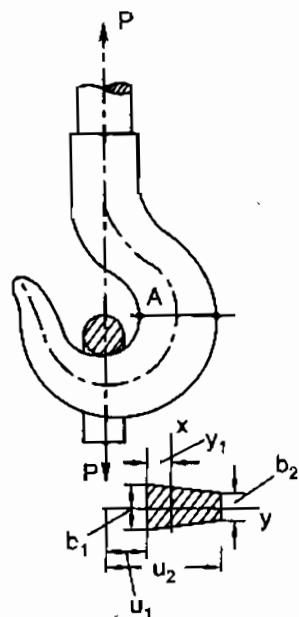
Ví dụ 6. Xác định ứng suất tại A của móng có mặt cắt ngang hình thang cân (h.12-23) với các kích thước như sau $b_1 = 4\text{cm}$, $b_2 = 1\text{cm}$, $u_1 = 3\text{cm}$, $u_2 = 10\text{cm}$, $h = 7\text{cm}$. Lực $P = 20\text{kN}$.

Bài giải

Xác định trọng tâm của mặt cắt ngang : Chọn hệ trục ban đầu qua đáy lớn của mặt cắt. Tọa độ trọng tâm của mặt cắt được xác định với biểu thức :

$$y_o = \frac{\int_F y dF}{F} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 2,8\text{m}$$

Vậy : $\rho_o = y_o + u_1 = 5,8\text{cm}$.



Hình 12-23

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với đáy lớn là :

$$\frac{b_2 h^3}{3} + \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12} = 200,1 \text{cm}^4$$

Vậy mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục quán tính chính trung tâm song song với đáy lớn là :

$$J_x = 200,1 - 2,8^2 \cdot 17,5 = 62,9 \text{cm}^4$$

trong đó diện tích mặt cắt ngang $F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 17,5 \text{cm}^2$.

$$\text{Vậy ta có : } e \approx \frac{J_x}{\rho_o F} = \frac{62,9}{5,8 \cdot 17,5} = 0,620 \text{cm}$$

Ứng suất tại A sẽ là :

$$\sigma_{3A} = \frac{P \rho_o}{Fe} \cdot \frac{y_o - e}{u_1} = 7,77 \text{kN/cm}^2$$

Đó là ứng suất do uốn thuần túy gây nên, song trên mặt cắt ngang ta còn thêm thành phần lực dọc $N_z = P$. Vậy ứng suất tại A còn phải tính thêm ứng suất do lực dọc gây nên. Trị số ứng suất đó là :

$$\sigma_{3A} = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} = 1,14 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất toàn phần tại A là : $\sigma_A = 8,91 \text{kN/cm}^2$

nếu trị số độ lệch e được tính một cách chính xác ta được :

$$e = \rho_o - \frac{F}{\left(b_2 + u_2 \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} \right) \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} = 0,598 \text{cm}$$

thì trị số $\sigma_A = 9,20 \text{kN/cm}^2$.

Nếu xét với một mặt cắt ngang bất kỳ thì ngoài các thành phần mômen uốn M_x lực dọc N_z ta còn có thành phần lực cắt. Thành phần này gây nên ứng suất tiếp, nhưng ta thường bỏ qua ảnh hưởng của nó.

Trong trường hợp mặt cắt ngang có những hình dạng khác biểu thức tích phân (12-24) được tính với phương pháp gần đúng hoặc phương pháp đồ thị, ở đây chúng ta không đề cập đến.

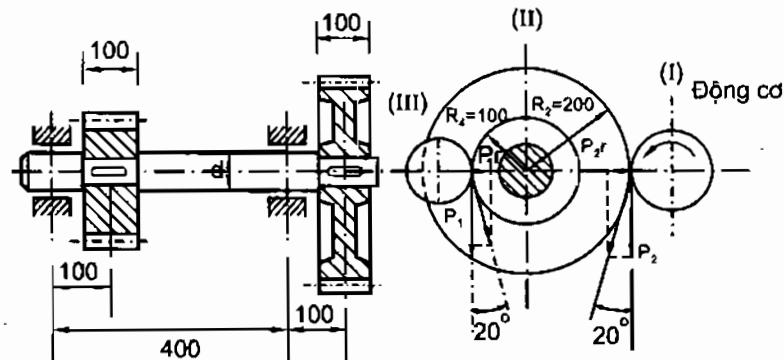
Bài tập chương 12

A. Uốn và xoắn

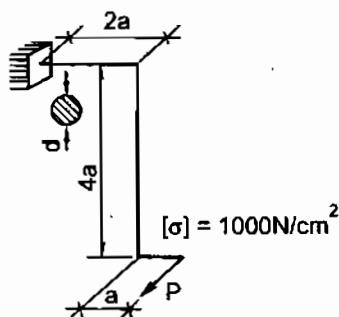
- 12.1.** Trục truyền (II) có bánh xe răng hình trụ răng thẳng truyền công suất $N = 10 \text{ mã lực}$ từ động cơ (I) quay với tốc độ $n = 100 \text{ vòng/phút}$ đến bánh xe (III). Phương các lực tác dụng được biểu diễn như trên hình (h.12-24). Ứng suất cho phép của vật liệu của trục là $[\sigma] = 10 \text{kN/cm}^2$.

Xác định kích thước của trục. Xét hai trường hợp : bỏ qua lực hướng tâm và có tính lực hướng tâm.

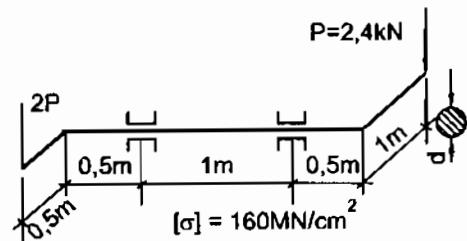
- 12.2. Cho các kết cấu chịu lực như hình vẽ (h.12-25), (h.12-26), (h.12-27), (h.12-28). Tính kích thước của mặt cắt theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.



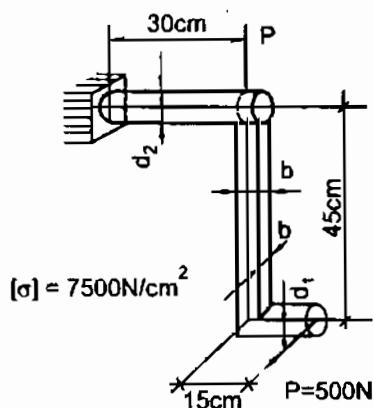
Hình 12-24



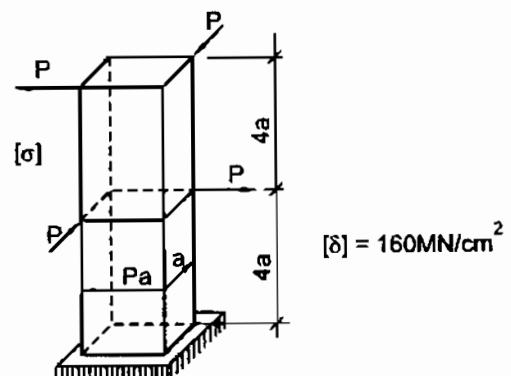
Hình 12-25



Hình 12-26



Hình 12-27

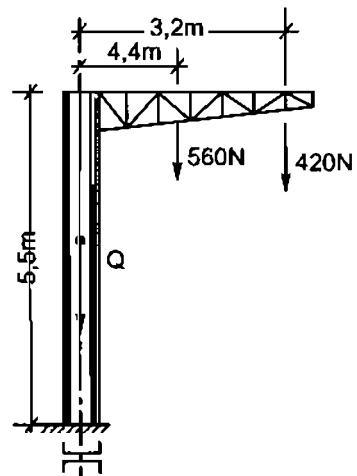


Hình 12-28

B. Ướn cộng kéo (nén)

12.3. Cột treo dây điện gồm hai thép chữ [số hiệu 14a.

(h.12-29). Trọng lượng dây 420N, trọng lượng tay với móc dây 560N. Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột. (Trọng lượng riêng của thép $\gamma = 7,8$).



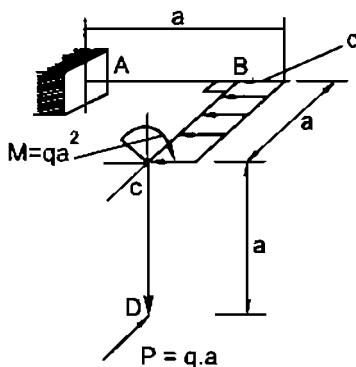
12.4. Vẽ biểu đồ nội lực của khung không gian (h.12-30). Xác định mặt cắt nguy hiểm, từ đó tính giá trị tải trọng cho phép [q]. Cho biết $a = 1m$, mặt cắt ngang của các thanh là hình vuông $6 \times 6\text{cm}$.

$$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

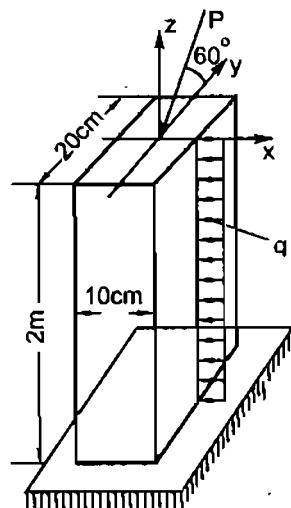
Khi tính có thể bỏ qua tác dụng của lực cắt. Tính độ bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (mômen M nằm trong mặt phẳng vuông góc với BC).

12.5. Xác định σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí trục trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột hình (12-31).

Cho biết : $q = 2\text{kN/m}$ P nằm trong mặt phẳng yOz và làm với trục y một góc 60° . $P = 80\text{kN}$, (h.12-31).



Hình 12-30

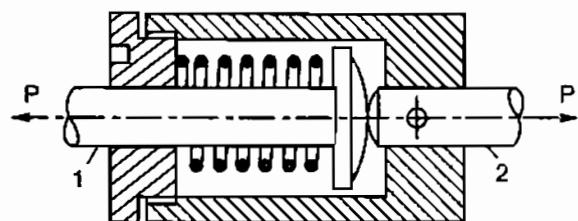


Hình 12-31

C. Tính lò xo xoắn ốc

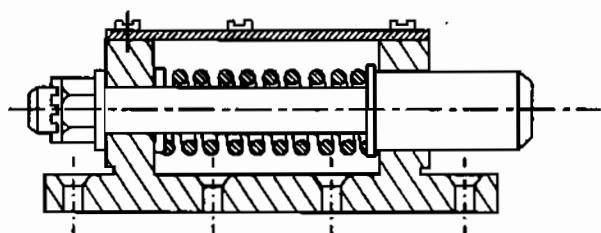
- 12.6. Một thiết bị an toàn có cấu tạo như trên hình vẽ (h.12-32). Mong muốn là khi lực $P \geq 300N$ thì thanh 1 tách khỏi thanh cố định 2. Vậy hồi lò xo trong thiết bị đã bị ép trước một độ co λ là bao nhiêu? Tính ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo ở trạng thái đó.

Cho biết : $D = 32mm$, $d = 4mm$, $n = 6$ vòng vật liệu là thép.



Hình 12-32

- 12.7. Bộ phận giảm chấn trong côn trục cầu có cấu tạo như hình (h.12-33). Lực tác dụng vào lò xo bằng 14700N. Tính đường kính và số vòng của dây lò xo. Cho biết $D = 160mm$, độ co $\lambda = 290mm$ và $[\tau] = 5.10^4 N/cm^2$.



Hình 12-33

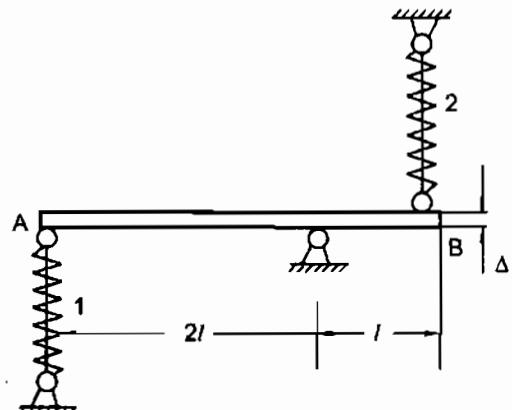
- 12.8. Thanh AB khi được nối với lò xo số 1 thì đầu B còn cách đầu lò xo 2 một khoảng cách $\Delta = 0,5cm$. Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2 khi nối thanh AB với lò xo 2. Cho biết

$D_1 = 6cm$, $d_1 = 1cm$, $n_1 = 10$

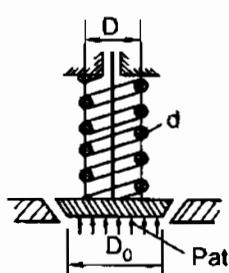
$D_2 = 5cm$, $d_2 = 0,8cm$, $n_2 = 8$

$G_1 = G_2 = 8.10^6 N/cm^2$.

(h.12-34)



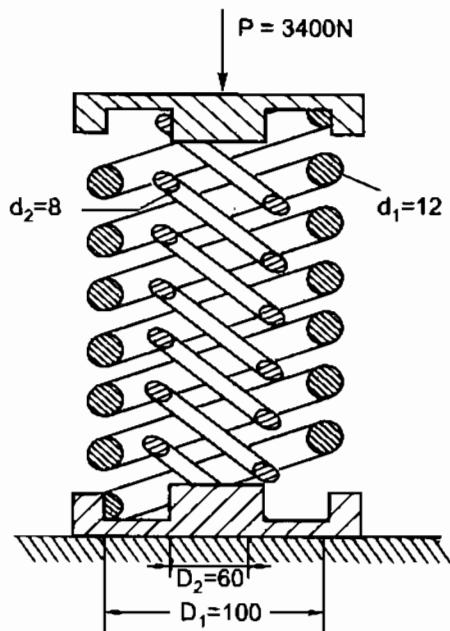
Hình 12-34



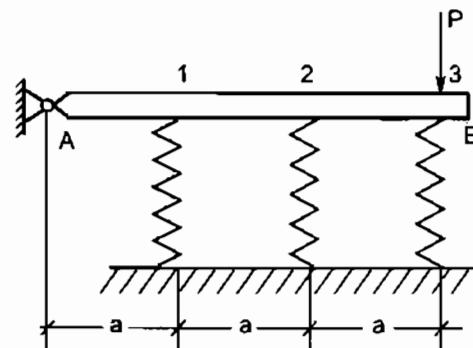
Hình 12-35

- 12.9. Một van an toàn phải giữ áp suất hơi nước $p = 5atm$. Tính τ_{max} , tính số vòng giây lò xo n và độ co ban đầu λ_0 của lò xo cho biết $D_o = 80mm$, $D = 60mm$, $d = 10mm$ bước của dây lò xo $t = 18mm$. $G = 8.10^5 kG/cm^2$. Độ lún của lò xo để cho các vòng chạm nhau là 40mm. Giả thiết khi van mở cao nhất phải còn 20mm dự trữ (h.12-35).

- 12.10.** Kiểm tra bền hai lò xo 1 và 2 khi chịu lực nén $P = 3400\text{N}$. Cho biết $n_1 = 12$, $n_2 = 10$, $[\tau_1] = [\tau_2] = 5 \cdot 10^4 \text{N/cm}^2$, $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$ (h.12-36).



Hình 12-36



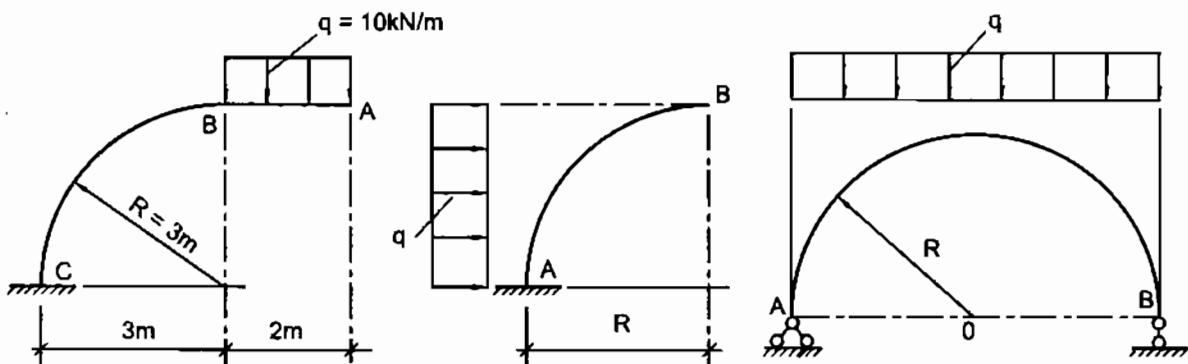
Hình 12-37

- 12.11.** Một thanh cứng AB được đặt trên ba lò xo có cùng số vòng và chịu một lực P đặt ở đầu B như trên hình 12-37.

Tính đường kính các dây lò xo sao cho ứng suất tiếp lớn nhất chúng đều bằng ứng suất cho phép. Cho biết đường kính trung bình của lò xo bằng năm lần đường kính dây lò xo.

D. Thanh cong

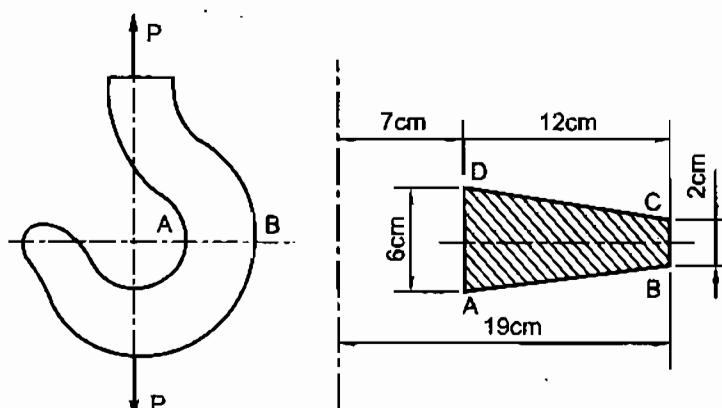
- 12.12.** Vẽ biểu đồ nội lực các thanh cong chịu lực như sau :



Hình 12-38

- 12.13. Một chi tiết máy hình móng ngựa có diện tích mặt cắt ngang hình chữ nhật 4.6cm^2 . Chịu hai lực $P = 10\text{kN}$ đặt cách trọng tâm một khoảng cách $e = 12\text{cm}$. Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt đến tâm cong $r_o = 7\text{cm}$. Tính ứng suất kéo, ứng suất nén lớn nhất. Vẽ biểu đồ phân bố ứng suất trên mặt cắt (h.12-39).

- 12.14. Kiểm tra bên mộc cần trục có mặt cắt ngang hình thang khi mộc mang một vật nặng $P = 50\text{kN}$. Cho biết $[\sigma] = 10\text{kN/cm}^2$. (h.12-40)



Hình 12-40

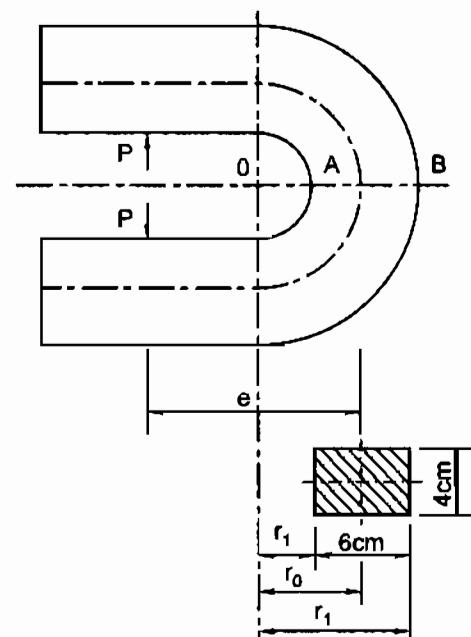
- 12.15. Một khuyên bằng gang có mặt cắt ngang hình tròn chịu lực như trên hình 12-41.

Xác định lực có thể đặt vào, biết ứng suất cho phép của gang $[\sigma]_k = 3\text{kN/cm}^2$, $[\sigma]_n = 10\text{kN/cm}^2$. Cho $R = 16\text{ cm}$, $d = 8\text{ cm}$.

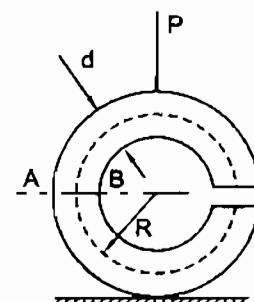
- 12.16. Một thanh cong mặt cắt ngang hình chữ nhật chịu tải trọng như hình 12-42. Xác định các kích thước h và b của mặt cắt ngang, biết rằng $P = 6\text{ kN}$,

$$q = 12 \text{ kN/m}, a = 16 \text{ cm}, \frac{h}{b} = \frac{4}{3} \text{ và}$$

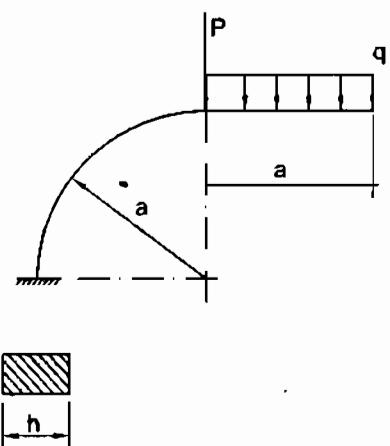
$$[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2.$$



Hình 12-39



Hình 12-41



Hình 12-42

Chương 13

DÂM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

§13-1. KHÁI NIỆM

Dâm được đặt trên nền mà tính chất của nền là đàn hồi thì ta gọi đó là bài toán dâm trên nền đàn hồi.

Ví dụ trong thực tế như dâm móng, giằng tường, đường ray tàu hỏa v.v... nên trong những trường hợp đó là nền đất, nền đá hay nói một cách rộng hơn là quả đất.

Đã có nhiều giả thuyết về sự phản ứng của đất đối với dâm nhưng cho đến nay chỉ còn giả thuyết của Vincle là còn đúng vững. Những kết quả tính toán với giả thuyết đó rất phù hợp với thực tế. Vì vậy ở đây chúng ta chỉ đề cập đến giả thuyết này.

Giả thuyết Vincle : Vincle cho rằng cường độ phản lực của nền tại một điểm tỉ lệ với độ lún của nền tại điểm đó.

$$p_o = k_o \cdot y \quad (13-1)$$

trong đó : p_o là cường độ phản lực của nền tính bằng N/m^2

y là độ lún của nền tính theo đơn vị dài

k_o là hệ số tỉ lệ. Đặc trưng cho tính cơ học của nền. k_o phải được xác định bằng thí nghiệm. Từ công thức (13-1) ta nhận thấy thứ nguyên của k_o là bằng $\frac{\text{lực}}{L^3}$ (L chiều dài)

Trong bảng 13-1 cho ta một số kết quả thí nghiệm về các loại nền thường gặp.

Nếu bê rộng b của dâm là bé so với chiều dài thì ta có thể xem phản lực của nền phân bố đều theo bê rộng. Lúc đó phản lực của nền phân bố theo chiều dài của dâm và cường độ là :

$$p = b p_o = k_o b y \quad (13-2)$$

Khi đó ta sẽ có một hệ số k với trị số là :

$$k = k_o \cdot b \quad (13-3)$$

và biểu thức (13-2) được viết lại dưới dạng

$$p = k \cdot y \quad (13-4)$$

Để dàng nhận thấy rằng khi $b = 1$ đơn vị thì $k = k_o$.

Giả thuyết của Vincle chưa phản ánh đầy đủ tính chất của nền đất. Thực tế cho thấy sự lún còn xảy ra ngoài chỗ đặt lực, phản lực còn phụ thuộc các lớp đất đá ở phía dưới chỗ đặt lực, vì vậy gần đây cũng đã có những giả thuyết mới cố gắng phản ánh tính chất của nền một cách chi tiết hơn như tính nền với hai hệ số, tính nền có trị số môđun đàn hồi tăng theo chiều sâu v.v.. Tuy nhiên kết quả tính toán cũng không đưa đến một sự khác biệt có ý nghĩa.

HỆ SỐ NỀN K_0

Đặc tính của nền	Tên của nền	Trị số k_0 (MN/m ³)
Đất có độ chặt kém	Đất chảy	1 ÷ 5
	Đất mới đắp	
	Đất sét ướt và mềm (nhão)	
Đất có độ chặt trung bình	Sỏi đắp (nhân tạo)	5 ÷ 50
	Đất sét ẩm	
Đất chặt	Cát dâm chặt	50 ÷ 100
	Sạn, sỏi	
	Dâm	
Đất rất chặt	Đất sét có độ ẩm béo	100 ÷ 200
	Đất sét pha cát dâm kỹ	
	Đất sét cứng	
Cứng	Đá mềm có vết nứt	200 ÷ 1000
	Đá voi	
	Đá sa thạch	
Nền nhân tạo	Đá rất rắn	1000 ÷ 15000
	Nền cọc	
	Gạch	
Vật liệu xây dựng	Đá xây	4000 ÷ 5000 5000 ÷ 6000 8000 ÷ 15000
	Bê tông và bê tông cốt thép	

§13-2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Xét một đoạn dâm. Giả sử trên đoạn dâm đó có một hệ lực phân bố $q(x)$. Hệ trục tọa độ được xác định như hình vẽ. Chiều Ox là chiều của trục dâm, y là độ vồng của dâm.

Nên gây nên một hệ lực phân bố dọc theo dâm với cường độ :

$$p(x) = k \cdot y$$

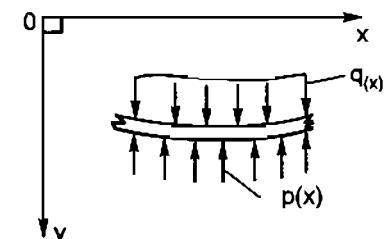
Hệ lực này ngược chiều với $q(x)$.

Vậy hệ lực phân bố tổng cộng tác dụng lên dâm là :

$$q(x) - p(x) = q(x) - ky \quad (13-5)$$

Như ta đã biết, lực phân bố là bằng đạo hàm cấp bốn của độ vồng nhân với độ cứng khi uốn của dâm. Từ đó ta có :

$$EJ \cdot y^{IV} = q(x) - ky$$



Hình 13-1

Vậy phương trình vi phân của đường đàn hồi khi đâm đặt trên nền đàn hồi là :

$$EJ.y^{IV} + ky = q(x) \quad (13-6)$$

Để thuận lợi ta viết phương trình đó dưới dạng :

$$y^{IV} + 4a^4 y = \frac{q(x)}{EJ} \quad (13-7)$$

Trong đó

$$4a^4 = \frac{k}{EJ}$$

hay :

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (13-8)$$

Thứ nguyên của a là $\frac{1}{L}$. Vậy nếu ta đưa vào một biến số mới ξ với biểu thức :

$$\xi = ax \quad (13-9)$$

thì ta có thể đưa (13-7) về dạng một phương trình vi phân có biến số không có thứ nguyên. Các đạo hàm liên tiếp của y là như sau :

$$\begin{aligned} y(\xi) &= y(ax) \\ y'(\xi) &= \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot a \\ y''(\xi) &= \frac{d^2y}{d\xi^2} a^2 \\ y'''(\xi) &= \frac{d^3y}{d\xi^3} a^3 \\ y^{IV}(\xi) &= \frac{d^4y}{d\xi^4} a^4 \end{aligned} \quad (13-10)$$

Thay vào cho (13-7) ta có :

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = \frac{q(\xi)}{EJ \cdot a^4} \quad (13-11)$$

Đó là một phương trình tuyến tính. Nghiệm của phương trình là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất :

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = 0 \quad (13-12)$$

Cộng với một nghiệm riêng của (13-11)

Nghiệm tổng quát của (13-12) có dạng :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \quad (13-13)$$

Trong đó y_1, y_2, y_3, y_4 là các nghiệm riêng của (13-12). Ta hãy tìm nghiệm riêng đó dưới dạng

$$y = e^{s \cdot \xi} \quad (13-14)$$

Đạo hàm bốn lần của (13-14) và đưa vào (13-12) ta được phương trình đặc tính :

$$s^4 + 4 = 0 \quad (13-15)$$

Ta giải phương trình đó dưới dạng nghiệm phức. Đặt ;

$$s = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\text{Vậy : } s^4 = \rho^4 (\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

Thay vào (13-15) ta có :

$$\rho^4 \cos 4\varphi + i\rho^4 \sin 4\varphi = -4 + i \cdot 0$$

So sánh các phần thực và ảo ta có :

$$\rho^4 \cos 4\varphi = -4, \rho^4 \sin 4\varphi = 0$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$\rho^4 = 4; \quad \cos 4\varphi = -1; \quad \sin 4\varphi = 0$$

Suy ra

$$\rho = +\sqrt{2} \quad 4\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Với $\varphi = \frac{\pi}{4}$ thay vào cho s ta được :

$$s_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1+i$$

Tương tự như vậy ta tìm thấy :

$$s_2 = -1+i, s_3 = -1-i, s_4 = 1-i$$

Như vậy ta lần lượt có các nghiệm riêng như sau :

$$y_1 = e^{(1+i)\xi} = e^{\xi} \cdot e^{i\xi}$$

$$y_2 = e^{-\xi} \cdot e^{i\xi}, y_3 = e^{-\xi} \cdot e^{-i\xi}, y_4 = e^{\xi} \cdot e^{-i\xi} \quad (13-16)$$

Vậy nghiệm tổng quát (13-13) có dạng là :

$$y = C_1 \cdot e^{\xi} \cdot e^{i\xi} + C_2 \cdot e^{-\xi} \cdot e^{i\xi} + C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot e^{-i\xi} + C_4 \cdot e^{\xi} \cdot e^{-i\xi} \quad (13-17)$$

Ta có thể tổng hợp các nghiệm riêng y_1, y_2, y_3, y_4 theo các cách khác nhau để có những dạng nghiệm khác nhau.

Ví dụ để tránh các số hạng phức ta có thể tổng hợp các nghiệm riêng theo cách sau đây :

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 = e^{\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} = e^{\xi} \cdot \cos \xi$$

$$\frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_4 = e^{\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = e^{\xi} \cdot \sin \xi$$

$$\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = e^{-\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} = e^{-\xi} \cdot \cos \xi$$

$$\frac{1}{2i}y_2 - \frac{1}{2i}y_3 = e^{-\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = e^{-\xi} \cdot \sin \xi$$

Từ đó ta có :

$$y = C_1 e^{\xi} \cos \xi + C_2 e^{\xi} \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi \quad (13-18)$$

Ta xét thêm một dạng khác

$$\frac{1}{4i}y_1 - \frac{1}{4i}y_2 = \frac{e^{i\xi}}{2i} \left(\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \right) = \frac{e^{i\xi}}{2i} \operatorname{sh} \xi$$

$$\frac{1}{4i}y_3 - \frac{1}{4i}y_4 = \frac{e^{-i\xi}}{2i} \left(\frac{e^{-\xi} - e^{\xi}}{2} \right) = -\frac{e^{-i\xi}}{2i} \operatorname{sh} \xi$$

Đem cộng lại với nhau ta sẽ được :

$$\operatorname{sh} \xi \left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} \right) = \operatorname{sh} \xi \cdot \sin \xi$$

Với cách đó ta tìm thấy dạng nghiệm mới sau đây :

$$y = C_1 \sin \xi \operatorname{sh} \xi + C_2 \sin \xi \operatorname{ch} \xi + C_3 \cos \xi \operatorname{sh} \xi + C_4 \cos \xi \operatorname{ch} \xi \quad (13-19)$$

Sau khi đã có nghiệm của phương trình thuần nhất ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng y^* là có được nghiệm tổng quát của (13-11).

Các nghiệm riêng y^* là được xác định từng trường hợp cụ thể.

§13-3. DÂM DÀI VÔ HẠN CHỊU MỘT LỰC TẬP TRUNG

Lấy điểm đặt của lực làm gốc tọa độ (h.13-2). Sử dụng dạng nghiệm (13-18) ta có phương trình đường đàn hồi của dâm là :

$$y = C_1 e^{\xi} \cos \xi + C_2 e^{\xi} \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi + y^* \quad (13-20)$$

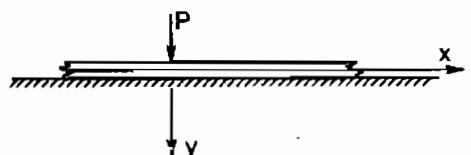
với $\xi = ax$ và $a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$

Vì $q(x) = 0$ nên nghiệm riêng $y^* = 0$.

Vì tính chất đối xứng nên ta chỉ cần xét phía phải. Ta lần lượt xác định các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4 .

Tại mặt cắt rất xa điểm đặt lực, nghĩa là $x = \infty$ độ vông của dâm phải bằng không nên hai số hạng chứa e^{ξ} phải triệt tiêu. Vậy

$$C_1 = C_2 = 0$$



Hình 13-2

Phương trình (13-20) được thu gọn lại dưới dạng :

$$y = e^{-\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) \quad (13-21)$$

Đạo hàm liên tiếp phương trình đó ta được :

$$y' = \theta = ae^{-\xi} [(C_3 - C_4) \cos \xi - (C_3 + C_4) \sin \xi]$$

$$M = -EJy'' = -EJa^2 e^{-\xi} [2C_3 \sin \xi - 2C_4 \cos \xi]$$

$$Q = -EJy''' = -EJa^3 e^{-\xi} [2(C_3 + C_4) \cos \xi + 2(C_4 - C_3) \sin \xi]$$

Vì lí do đối xứng, đường đàn hồi phải đối xứng với trục y, nên tại gốc tọa độ góc xoay θ của mặt cắt ngang phải bằng không. Ta có :

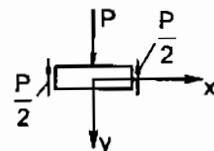
$$y'(x=0) = \theta_0 = 0$$

Cũng vì lí do đối xứng tại mặt cắt bên phải và bên trái điểm đặt lực, lực cắt Q phải có trị số bằng nhau và phải cân bằng với P, do đó ta có :

$$Q = -\frac{P}{2}$$

Từ hai điều kiện đó ta có các biểu thức :

$$\begin{cases} C_4 - C_3 = 0 \\ -2EJa^3(C_4 + C_3) = -\frac{P}{2} \end{cases}$$



Giải hệ phương trình ta có :

Hình 13-3

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8EJa^3} = \frac{P_a}{2k}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi, mômen uốn M, lực cắt Q và góc xoay θ là :

$$y = \frac{Pa}{2k} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \quad (13-22)$$

$$M = \frac{P}{4a} e^{-\xi} (\sin \xi - \cos \xi) \quad (13-23)$$

$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\xi} \cos \xi \quad (13-24)$$

$$\theta = -\frac{Pa^2}{k} e^{-\xi} \sin \xi \quad (13-25)$$

Để thuận lợi cho tính toán ta lập bảng để tính trước các hàm sau đây :

$$\eta = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) = \sqrt{2} e^{-\xi} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \xi \right)$$

$$\eta_1 = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) = \sqrt{2} e^{-\xi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \xi \right)$$

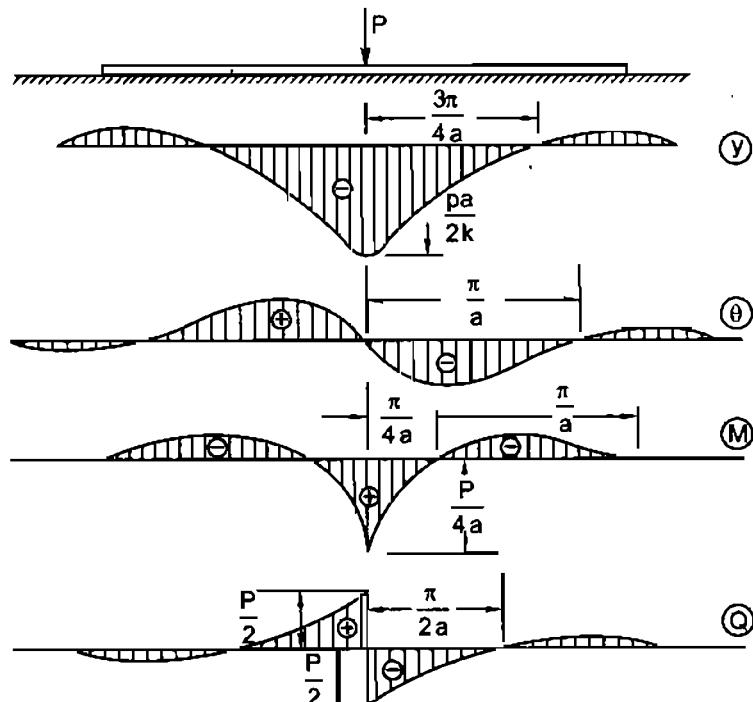
$$\begin{aligned}\eta_2 &= e^{-\xi} \cos \xi \\ \eta_3 &= e^{-\xi} \sin \xi\end{aligned}\quad (13-26)$$

(xem phụ lục trang 217)

Với các hàm số đó, độ vông, mômen uốn, lực cắt và góc xoay sẽ được tính dễ dàng với các biểu thức :

$$\begin{aligned}y &= \frac{Pa}{2k} \eta \\ M &= \frac{P}{4a} \eta_1 \\ Q &= -\frac{P}{2} \cdot \eta_2 \\ \theta &= -\frac{Pa^2}{k} \eta_3\end{aligned}\quad (13-27)$$

Sự biến thiên của các hàm số đó được biểu diễn như trên hình 13-4.



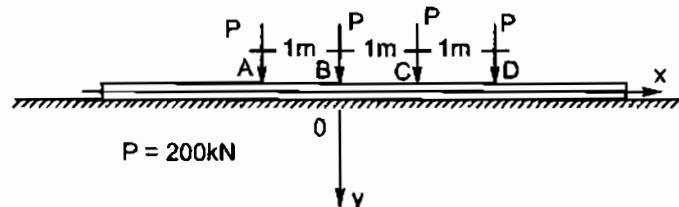
Hình 13-4

Tại mặt cắt có đặt lực tập trung độ vông và nội lực đều có trị số lớn nhất :

$$\begin{aligned}y_{\max} &= \frac{Pa}{2k} \\ M_{\max} &= \frac{P}{4a} \\ Q_{\max} &= \pm \frac{P}{2}\end{aligned}\quad (13-28)$$

Dựa vào các trị số đó ta có thể kiểm tra độ bền và độ cứng của đầm.

Ví dụ 1. Một đầm dài vô hạn chịu lực như hình vẽ (h.13-5). Tính độ vông và mômen uốn tại mặt cắt B dưới điểm đặt lực tập trung P thứ hai. Cho biết $k = 30 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, $E = 210^4 \text{ N/m}^2$, $J = 2500 \text{ cm}^4$ và $P = 200 \text{ kN}$.



Hình 13-5

Bài giải

1. Tính a

Theo công thức (13-8) ta có :

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2500 \cdot 10^{-8}}} = 1,1 \frac{1}{\text{m}}$$

2. Áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực ta lần lượt tính y và M tại B do từng lực gây ra. Lấy gốc tọa độ là ở B. Hoành độ của A, C, D đối với B sẽ là :

$$\xi_A = a \cdot x_A = 1,1; \quad \xi_B = a \cdot x_B = 0; \quad \xi_C = a \cdot x_C = 1,1; \quad \xi_D = a \cdot x_D = 2,2$$

Vì M và y có tính chất đối xứng nên hoành độ của chúng đặt là dương hay âm đều thích hợp.

Tra bảng ở phụ lục ta được các trị số của các hàm như sau :

ξ	0	1,10	2,2
η	1	0,4776	0,0244
η_1	1	-0,1457	-0,1548

Vậy ta có :

$$y_B = \frac{Pa}{2k} \sum \eta = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 30 \cdot 10^6} (1 + 2 \cdot 0,4776 + 0,0244)$$

$$y_B = 0,0071 \text{ m} = 7,1 \text{ mm}$$

$$M_B = \frac{P}{4a} \sum \eta_1 = \frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 1,1} [1 + 2(-0,1457) - 0,1548]$$

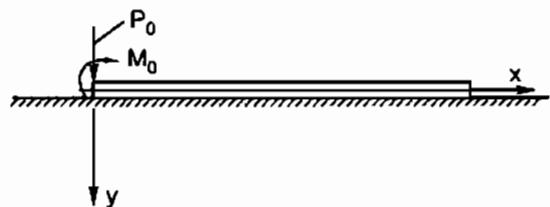
$$M_B = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Nm.}$$

§13-4. DÂM DÀI NỬA VÔ HẠN

Ta xét một dâm trên nền đàn hồi, một đầu chịu tác dụng của một lực P_0 và một mômen M_0 còn đầu kia dài vô hạn (hình 13-6).

Ta chọn gốc tọa độ ngay đầu dâm. Cùng một lập luận như trên phương trình đường đàn hồi chỉ còn lại các số hạng với tích của $e^{-\xi}$. Ta có :

$$y = e^{-\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi)$$



Hình 13-6

Các hằng số C_3 và C_4 được xác định từ các điều kiện biên ở đầu tự do.

$$(M)_\xi = 0 = M_0 \text{ và } (Q)_\xi = 0 = -P_0$$

Đạo hàm liên tiếp hai lần và ba lần của y ta được :

$$M = -EJa^2 e^{-\xi} [2C_3 \sin \xi - 2C_4 \cos \xi]$$

$$Q = -EJa^3 e^{-\xi} [2(C_3 + C_4) \cos \xi + 2(C_4 - C_3) \sin \xi]$$

với $\xi = 0$ ta có :

$$M_0 = -EJa^2 e^{-\xi} (-2C_4)$$

$$-P_0 = -EJa^3 e^{-\xi} [2(C_3 + C_4)]$$

Từ đó ta tính được :

$$C_4 = \frac{M_0}{2EJa^2} \quad C_3 = \frac{P_0 - aM_0}{2EJa^3}$$

Ta được các phương trình độ vông, góc xoay, mômen uốn và lực cắt như sau :

$$\begin{aligned} y &= \frac{2a}{k} [P_0 \eta_2 - aM_0 \eta_2] \\ \theta &= \frac{2a^2}{k} (-P_0 \eta + 2aM_0 \eta_2) \\ M &= \frac{1}{a} (-P_0 \eta_3 + aM_0 \eta) \\ Q &= -(P_0 \eta + 2aM_0 \eta_3) \end{aligned} \tag{13-29}$$

Các hàm η , η_2 , η_3 được tra trong phụ lục.

§13-5. ĐƯỜNG ÁNH HƯỞNG

Ta giả sử lực P đặt ở dâm vô hạn là bằng đơn vị, như vậy biểu đồ mômen M sẽ có dạng nét đậm như trên hình 13-7a. Ta hãy xét trị số mômen uốn tại hoành độ ξ_m . Ta ký hiệu mômen uốn đó là M_{mo} , nghĩa là mômen uốn tại điểm m so với gốc tọa độ O. Bây giờ chúng

ta di chuyển lực $P = 1$ đến đúng hoành độ ξ_m . Biểu đồ mômen tại đó được vẽ theo đường nét đứt. Để ý đến tung độ của biểu đồ nét đứt này tại gốc tọa độ O ta sẽ có được mômen uốn tại O do lực đơn vị đặt tại m gây nên. Ta kí hiệu mômen uốn này M_{om} . Ta có thể nhận thấy ngay :

$$M_{mo} = M_{om}$$

Từ đó ta có thể phát biểu như sau : Bất kể tung độ M_{mo} nào trên đường biểu diễn của M cũng đều biểu diễn mômen tại O do tải trọng đơn vị đặt ngay tại hoành độ đó gây nên.

Bây giờ ta giả dụ cho lực $P = 1$ di chuyển dọc theo chiều dài của dầm. Như vậy biểu đồ mômen M biểu diễn sự thay đổi của mômen uốn tại O khi P chuyển động. Vậy đường biểu diễn đó được gọi là đường ảnh hưởng của mômen uốn.

Nếu tại điểm ξ_m dầm chịu một tải trọng P_m thì mômen uốn tại O do P_m gây nên sẽ là $P_m \cdot M_{mo}$. Nếu tại các điểm ξ_1, ξ_2, ξ_3 dầm chịu tác dụng bởi những lực $P_1, P_2, P_3 \dots$ thì mômen uốn tại O sẽ là

$$M = P_1 M_{10} + P_2 M_{20} + P_3 M_{30} \dots \quad (13-30)$$

Thứ nguyên của $M_{10}, M_{20}, M_{30} \dots$ là thứ nguyên của $\frac{1}{4a} \eta_I$. Biểu thức này có thứ nguyên là chiều dài.

Nếu trong khoảng từ ξ_1 đến ξ_2 dầm chịu một tải trọng phân bố đều q , để tính mômen của lực phân bố đó đối với mặt cắt qua gốc tọa độ ta phải thực hiện phép toán tích phân như sau :

$$M = \lim \sum q \frac{d\xi}{a} M_{q0} = \frac{q}{a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_{q0} d\xi = \frac{q}{a} \omega$$

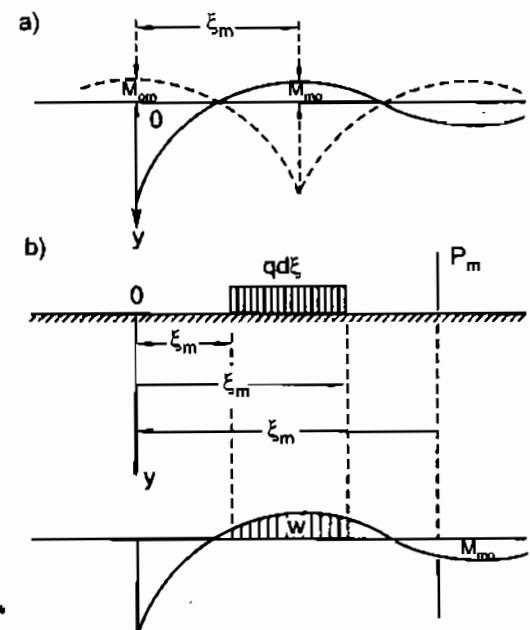
Trong đó ω là phần diện tích gạch đậm trên hình vẽ.

Thứ nguyên của ω cũng là chiều dài. Ta tính cụ thể ω . Từ công thức (13-27) ta có :

$$M_{q0} = \frac{1}{4a} \eta_I$$

vậy :

$$\omega = \frac{1}{4a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta d\xi = \frac{1}{4a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) d\xi$$



Hình 13-7

Biểu thức dưới dấu tích phân là đạo hàm của biểu thức :

$$e^{-\xi} \sin \xi$$

Thực vậy ta có $(e^{-\xi} \sin \xi)' = e^{-\xi} \cos \xi - e^{-\xi} \sin \xi = e^{-\xi}(\cos \xi - \sin \xi)$

Do đó ta có :

$$\omega = \frac{1}{4a} [e^{-\xi} \sin \xi]_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{4a} \left[\frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \right]_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{8a} [\eta - \eta_1]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-31)$$

Trong quá trình sử dụng các hàm η ta cũng thường hay gặp những tích phân tương tự như sau :

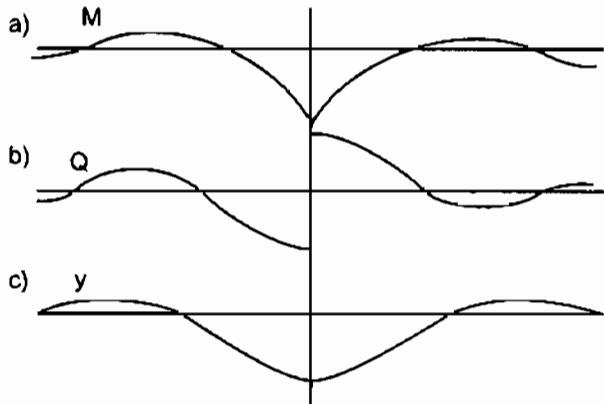
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta d\xi = [-e^{-\xi} \cos \xi]_{\xi_1}^{\xi_2} = [\eta_2]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-32)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta_2 d\xi = \frac{1}{2} [e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi)]_{\xi_1}^{\xi_2} = \left[\frac{\eta}{2} \right]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-33)$$

Vì rằng biểu đồ của đường đàn hồi y cũng đối xứng đối với O và như vậy đường đó cũng là đường ảnh hưởng của độ vông đối với gốc tọa độ. Chúng ta dễ dàng chứng minh rằng :

$$y_{mo} = y_{om}$$

Biểu đồ Q là phản đối xứng đối với điểm đặt lực $P = 1$. Ta cũng có thể sử dụng nó như trường hợp mômen nhưng phải lấy : $Q_{mo} = -Q_{om}$. Điều đó có nghĩa là đường ảnh hưởng của Q là ngược dấu lại với biểu đồ thực (h.13-8).



Hình 13-8

Ta nhận thấy các công thức của M , Q , y là những hàm tuân hoà với bước sóng bằng 2π . Nếu gọi l là độ dài của bước sóng thì ta có :

$$a(x + l) = \xi + 2\pi = ax + 2\pi$$

Từ đó ta có

$$l = \frac{2\pi}{a} = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}}$$

Nếu tra bảng ta sẽ tìm thấy với $\xi = 0$, $\eta = 1$ với $\xi = 2\pi$ thì $\eta = 0,00187$. Nói một cách khác, qua một bước sóng thì độ vông của dầm chỉ còn 0,002 phần trăm của độ vông tại điểm đặt lực. Như vậy độ dài của dầm chỉ cần gấp đôi l thì dầm đã có thể xem là dài vô hạn. Nếu dầm có độ dài ngắn hơn $2l$ thì ta phải xem là hữu hạn và ta phải tính khác. Bài toán được giải trong mục tiếp theo.

§13-6. DÂM DÀI HỮU HẠN

Xét một dâm dài hữu hạn có độ cứng EJ không đổi đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng bất kì. Tùy theo sự phân bố của tải trọng và liên kết ta chia dâm làm nhiều đoạn. Ta xét đoạn thứ $n+1$ của dâm. Tại đầu A của đoạn đó, cách đầu mút trái của dâm một đoạn $x = \alpha$ có đặt một tải trọng tập trung P_α , mômen tập trung M_α và một hệ tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất khác với tải trọng phân bố trên đoạn n . Kí hiệu q_n là tải trọng phân bố trên đoạn n và q_{n+1} là tải trọng phân bố trên đoạn $n+1$.

Kí hiệu góc xoay, độ vông, mômen uốn, lực cắt trong đoạn n với chỉ số n như sau : y_n, θ_n, M_n, Q_n và các đại lượng đó trên đoạn $n+1$ có chỉ số là $n+1$.

$$y_{n+1}, \theta_{n+1}, M_{n+1}, Q_{n+1}$$

Sự tương quan của chúng là như sau :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y(x - \alpha) \quad (1)$$

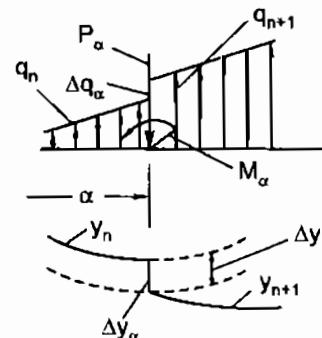
$$q_{n+1} = q_n + \Delta q(x - \alpha) \quad (2)$$

Trong đó $x > \alpha$ và Δy và Δq là các hàm thuộc $(x - \alpha)$.

Theo (13-7) ta có phương trình vi phân của đường đàn hồi của hai đoạn là như sau :

$$y_n^{IV} + 4a^4 y_n = -\frac{q_n}{EJ} \quad (3)$$

$$y_{n+1}^{IV} + 4a^4 y_{n+1} = -\frac{q_{n+1}}{EJ} \quad (4)$$



Hình 13 - 9

Đem trị số của y_{n+1} và q_{n+1} và đạo hàm của chúng được tính từ (1) và (2) thay vào cho (4) và đem trừ với (3) ta được :

$$\Delta y^{IV}(x - \alpha) + 4a^4 \Delta y(x - \alpha) = -\frac{\Delta q(x - \alpha)}{EJ} \quad (13-34)$$

Đó là phương trình vi phân cấp 4 giống hoàn toàn (13-7). Nghiệm tổng quát của nó là :

$$\begin{aligned} \Delta y(x - \alpha) = e^{a(x - \alpha)} & [C_1 \cos(a(x - \alpha)) + C_2 \sin(a(x - \alpha)) + \\ & + e^{-a(x - \alpha)} [C_3 \cos(a(x - \alpha)) + C_4 \sin(a(x - \alpha))] - \frac{\Delta q(x - \alpha)}{k}] \end{aligned} \quad (5)$$

Nếu cường độ của tải trọng phân bố là hàm bậc nhất đối với hoành độ thì sau khi khai triển Taylor đối với $\Delta q(x - \alpha)$ ta có :

$$\Delta q(x - \alpha) = \Delta q_\alpha + \Delta' q_\alpha (x - \alpha)$$

Trong đó Δq_α và $\Delta' q_\alpha$ là các bước nhảy của cường độ tải trọng phân bố và đạo hàm bậc nhất của nó tại $x = a$.

Nếu thay

$$\text{cha}(x - \alpha) = \frac{1}{2} [e^{a(x - \alpha)} + e^{-a(x - \alpha)}]$$

$$\text{sha}(x - \alpha) = \frac{1}{2} [e^{a(x - \alpha)} - e^{-a(x - \alpha)}]$$

và sử dụng các kí hiệu :

$$\begin{aligned} A_\xi &= \text{ch}\xi \cos\xi \\ B_\xi &= \frac{1}{2} (\cos\xi \text{sh}\xi + \sin\xi \text{ch}\xi) \\ C_\xi &= \frac{1}{2} \text{sh}\xi \sin\xi \\ D_\xi &= \frac{1}{4} (\sin\xi \text{ch}\xi - \cos\xi \text{sh}\xi) \end{aligned} \quad (13-35)$$

thì biểu thức (5) trên đây có thể viết lại dưới dạng :

$$\begin{aligned} \Delta y(x - \alpha) &= G_1 \cdot A_{a(x - \alpha)} + G_2 B_{a(x - \alpha)} + G_3 C_{a(x - \alpha)} + \\ &\quad + G_4 D_{a(x - \alpha)} - \frac{1}{k} [\Delta q_a + \Delta q_a'(x - \alpha)] \end{aligned} \quad (13-36)$$

G_1, G_2, G_3, G_4 là các hằng số tích phân. Các hàm $A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi$ được gọi là các hàm Crullop. Các hàm Crullop có các tương quan sau đây :

$$\begin{aligned} A_\xi &= -4aD_\xi; & B_\xi &= aA_\xi \\ C_\xi &= a \cdot B_\xi; & D_\xi &= aC_\xi \end{aligned} \quad (13-37)$$

Chú ý như phần trên chúng ta đã nói. Tương quan giữa ξ và x là :

$$\xi = ax \quad \text{với } a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Khi $\xi = 0$ hay $a(x - \alpha) = 0$ thì ta có

$$A_0 = 1 \quad B_0 = C_0 = D_0 = 0 \quad (6)$$

Trị số các hàm Crullop được cho trong Bảng phụ lục.

Để xác định các hằng số tích phân, ta đạo hàm các biểu thức của (13-36). Ta lần lượt có như sau :

$$\begin{aligned} \Delta y'(x - \alpha) &= \Delta \theta(x - a) = -4aG_1 D_{a(x - \alpha)} + aG_2 A_{a(x - \alpha)} + \\ &\quad + aG_3 B_{a(x - \alpha)} + aG_4 C_{a(x - \alpha)} - \frac{1}{k} \Delta q_n' \\ \Delta M(x - \alpha) &= -EJ \Delta y''(x - \alpha) = EJ 4a^2 \cdot G_1 \cdot C_{a(x - \alpha)} + \\ &\quad + EJ 4a^2 G_2 D_{a(x - \alpha)} - EJa^2 G_3 A_{a(x - \alpha)} - EJa^2 G_4 B_{a(x - \alpha)} \\ \Delta Q(x - \alpha) &= -EJ \Delta y'''(x - \alpha) = EJ 4a^3 G_1 \cdot B_{a(x - \alpha)} + \\ &\quad + EJ 4a^3 G_2 C_{a(x - \alpha)} + EJa^3 G_3 D_{a(x - \alpha)} - EJa^3 G_4 A_{a(x - \alpha)} \end{aligned}$$

Thay $x = \alpha$ vào các biểu thức đó và (13–36) với chú ý đến (6) ta được :

$$\begin{aligned}\Delta y(0) &= \Delta y_\alpha = G_1 - \frac{1}{k} \Delta q_\alpha \\ \Delta \theta(0) &= \Delta \theta_\alpha = aG_2 - \frac{1}{k} \Delta' q_\alpha \\ \Delta M(0) &= \Delta M = -EJa^2 G_3 \\ \Delta Q(0) &= \Delta Q_\alpha = -EJa^3 G_4\end{aligned}\quad (13-38)$$

Trong đó Δy_α , $\Delta \theta_\alpha$, ΔM_α , ΔQ_α là các bước nhảy của biến độ đê vông, góc xoay, mômen uốn lực cắt tại mặt cắt $x = \alpha$. Các bước nhảy về mômen uốn và lực cắt thì chính bằng lực tập trung và mômen tập trung tại $x = \alpha$: $\Delta M_\alpha = M_\alpha$, $\Delta Q_\alpha = P_\alpha$.

Từ các biểu thức trên ta có :

$$\begin{aligned}G_1 &= \Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} ; & G_2 &= \frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \\ G_3 &= -\frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} ; & G_4 &= -\frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3}\end{aligned}\quad (7)$$

Thay trị số của G_1 , G_2 , G_3 , G_4 vào (13–36) ta có :

$$\begin{aligned}\Delta y(x - \alpha) &= \left(\Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} + \left(\frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \right) B_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3} D_{a(x-\alpha)} - \frac{1}{k} (\Delta q_\alpha + \Delta q_\alpha(x - \alpha))\end{aligned}$$

Phương trình của đường đàn hồi ở đoạn $n + 1$ có dạng :

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \left(\Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} + \left(\frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \right) B_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3} D_{a(x-\alpha)} - \frac{1}{k} (\Delta q_\alpha + \Delta q_\alpha(x - \alpha))\end{aligned}\quad (13-39)$$

Phương trình của góc xoay, mômen uốn, lực cắt ở đoạn $n + 1$ là :

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} = y_{n+1} &= \theta_n + \left(\Delta \theta_\alpha + \frac{\Delta' q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa} B_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - 4a \left(\Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) D_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta q_\alpha}{k}\end{aligned}\quad (13-40)$$

$$\begin{aligned} M_{n+1} = -EJy''_{n+1} &= M_n + \Delta M_\alpha A_{a(x-\alpha)} + \frac{\Delta Q_\alpha}{a} B_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a^2} (k\Delta y_\alpha + \Delta q_\alpha) C_{a(x-\alpha)} + \\ &+ \frac{1}{a^3} (k\Delta \theta_\alpha + \Delta q'_\alpha) D_{a(x-\alpha)} \end{aligned} \quad (13-41)$$

$$\begin{aligned} Q_{n+1} = -EJy'''_{n+1} &= Q_n + \Delta Q_\alpha A_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a} (k\Delta y_\alpha + \Delta q_\alpha) B_{a(x-\alpha)} + \\ &+ \frac{1}{a^2} (k\Delta \theta_\alpha + \Delta q'_\alpha) C_{a(x-\alpha)} - 4a\Delta M_\alpha D_{a(x-\alpha)} \end{aligned} \quad (13-42)$$

Từ phương trình của đoạn bất kỳ $n+1$ ta suy ra được phương trình của đoạn thứ nhất y_1 ,

Gọi $y_o, \theta_o, M_o, Q_o, q_o, q'_o$ là các đại lượng ở đầu mút của đầm. Vì trước đó, ở đoạn số 0, tất cả các đại lượng đó bằng không, do đó ta có :

$$\Delta y_\alpha = y_o, \Delta \theta_\alpha = \theta_o, \Delta M_\alpha = M_o, \Delta Q_\alpha = Q_o$$

$$\Delta q_\alpha = q_o, \Delta q'_\alpha = q'_o$$

Thay tất cả vào từ (13-39) đến (13-42) ta sẽ được :

$$y_1 = \left(y_o + \frac{q_o}{k} \right) A_\xi + \left(\theta_o + \frac{q_o}{ak} \right) B_\xi - \frac{M_o}{EJa^2} C_\xi - \frac{Q_o}{EJa^3} D_\xi - \frac{q_o - q'_o x}{k} \quad (13-43)$$

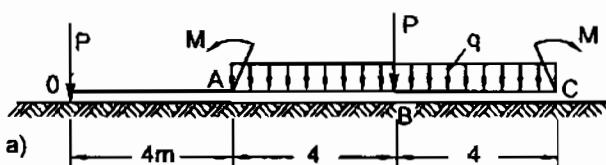
$$\theta_1 = \left(\theta_o + \frac{q_o}{k} \right) A_\xi - \frac{M_o}{EJa} B_\xi - \frac{Q_o}{EJa^2} C_\xi - 4a \left(y_o + \frac{q_o}{k} \right) D_\xi - \frac{q_o}{k} \quad (13-44)$$

$$M_1 = M_o A_\xi + \frac{Q_o}{a} B_\xi + \frac{1}{a^2} (ky_o + q_o) C_\xi + \frac{1}{a^3} (k\theta_o + q'_o) D_\xi \quad (13-45)$$

$$Q_1 = Q_o A_\xi + \frac{1}{a} (ky_o + q_o) B_\xi + \frac{1}{a^2} (k\theta_o + q'_o) C_\xi - 4a M_o D_\xi \quad (13-46)$$

Các đại lượng $y_o, \theta_o, M_o, Q_o, q_o, q'_o$ được gọi là các thông số ban đầu (phương pháp giải giống như chúng ta đã làm trong chương uốn).

Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt của đầm cho trên hình vẽ (13-10). Biết $q = 20 \text{ kN/m}$, $P = 300 \text{ kN}$, $M = 90 \text{ kNm}$, hệ số nền $k_o = 6 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$. Đầm có chiều rộng $b = 1 \text{ m}$, môđun đàn hồi của vật liệu $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$ và mômen quán tính chính của mặt cắt ngang $J = 0,0426 \text{ m}^4$.



Hình 13-10

Bài giải

Ta giải bài toán này theo trình tự sau :

a) *Tính các hệ số*

Độ cứng của đầm khi uốn : $EJ = 10^7 \cdot 0,0426 = 426 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$: Hệ số a.

$$a^4 = \frac{k_o b}{4EJ} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 1}{4 \cdot 426 \cdot 10^3} = 0,0352$$

$$a = 0,4332.$$

b) *Xác định các thông số ban đầu và các bước nhảy*

Tại O ($x = 0$)

$$y_o \neq 0, \theta_o \neq 0, Q_o = -P = -300 \text{ kN.}$$

$$M_o = 0, q_o = 0, q'_o = 0$$

Tại A ($x = 4\text{m}$)

$$\Delta y_A = 0, \Delta \theta_A = 0, \Delta M_A = -M = -90 \text{ kNm}$$

$$\Delta Q_A = 0, \Delta q_A = -q = -20 \text{ kN/m}, \Delta q'_A = 0$$

Tại B ($x = 8\text{m}$)

$$\Delta y_B = 0, \Delta \theta_B = 0$$

$$\Delta M_B = 0, \Delta Q_B = -P = -300 \text{ kN}$$

$$\Delta q_B = 0, \Delta q'_B = 0$$

Như vậy ta phải xác định hai thông số y_o và θ_o .

Điều kiện để xác định hai thông số đó là khi $x = l = 12\text{m}$

- Lực cắt $Q_c = 0$

- Momen uốn $M_c = -M = -90 \text{ kNm}$.

c) *Viết các phương trình của mômen và lực cắt*

Phương trình mômen uốn trong toàn đầm

$$M_1 = -\frac{P}{a} B_\xi + \frac{ky_o}{a^2} C_\xi + \frac{k\theta_o}{a^3} D_\xi \quad \text{với } 0 \leq x \leq 4$$

$$M_2 = M_1 - MA_{a(x-4)} - \frac{q}{a^2} C_{a(x-4)} \quad \text{với } 4 \leq x \leq 8$$

$$M_3 = M_2 - \frac{P}{a} B_{a(x-8)} \quad \text{với } 8 \leq x \leq 12$$

Phương trình lực cắt trong toàn đầm

$$Q_1 = -PA_\xi + \frac{ky_o}{a} B_\xi + \frac{k\theta_o}{a^2} C_\xi \quad \text{với } 0 \leq x \leq 4$$

$$Q_2 = Q_1 + 4aM \cdot D_{a(x-4)} - \frac{q}{a} B_{a(x-4)} \quad \text{với } 4 \leq x \leq 8$$

$$Q_3 = Q_2 - PA_{a(x-8)} \quad \text{với } 8 \leq x \leq 12$$

Tính các hệ số của các phương trình

$$\frac{P}{a} = \frac{300}{0,4332} = 693$$

$$\frac{q}{a} = \frac{200}{0,4332} = 46,2; \quad \frac{q}{a^2} = \frac{20}{0,1877} = 107$$

$$\frac{k}{a} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,4332} = 13,9 \cdot 10^4; \quad \frac{k}{a^2} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,1877} = 32 \cdot 10^4$$

$$\frac{k}{a^3} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,0813} = 73,8 \cdot 10^4$$

Viết các phương trình mômen và lực cắt của đoạn cuối

$$M_3 = -693B_\xi + 32 \cdot 10^4 \cdot y_o \cdot C_\xi + 73,8 \cdot 10^4 \cdot \theta_o \cdot D_\xi - 90A_{a(x-4)} - 107 \cdot C_{a(x-4)} - 693B_{a(x-8)}$$

$$Q_3 = -300A_\xi + 13,9 \cdot 10^4 y_o B_\xi + 32 \cdot 10^4 \theta_o C_\xi + 156D_{a(x-4)} - 46,2 \cdot B_{a(x-4)} - 300A_{a(x-8)}$$

Tra bảng để có được các trị số A, B, C, D ứng với :

$$\xi = al = 0,4332 \cdot 12 = 5,20$$

$$a(x-4) = a(l-4) = 3,47$$

$$a(x-8) = a(l-8) = 1,73$$

Chú ý : biến số $\xi = ax$, khi viết cho đoạn cuối $x = l$ do đó ta có $\xi = al$

Với $\xi = 5,20$ ta có :

$$A_\xi = 42,4661, B_\xi = -18,8057, C_\xi = -40,0350, D_\xi = -30,6346$$

Với $a(l-4) = 3,47$ ta có

$$A_{3,47} = -15,2244; B_{3,47} = -10,1913; C_{3,47} = -2,5889; D_{3,47} = 2,5018$$

Với $a(l-8) = 1,73$ ta có

$$A_{1,73} = -0,4612; B_{1,73} = 1,2196; C_{1,73} = 1,3486; D_{1,73} = 0,8263$$

Từ đó ta có :

$$M_3 = -693(-18,8057) + 32 \cdot 10^4(-40,0350)y_o + 73,8 \cdot 10^4(-30,6346)\theta_o - \\ - 90(-15,2244) - 107(-2,5889) - 693(1,2196)$$

$$Q_3 = -300 \cdot 42,4661 + 13,9 \cdot 10^4(-18,8057)y_o + 32 \cdot 10^4(-40,0350)\theta_o + 156 \cdot 2,5018 - \\ - 46,2 \cdot (-10,1913) - 300(-0,4612)$$

Sau khi thực hiện các phép tính, trị số mômen và lực cắt ở cuối darm là :

$$M_3 = -1281,12 \cdot 10^4 y_o - 2260,83348 \cdot 10^4 \theta_o + 13834,3756$$

$$Q_3 = -261,39923 \cdot 10^4 y_o - 1281,12 \cdot 10^4 \theta_o - 11740,35114$$

Từ điều kiện cuối $Q_c = 0$ và $M_c = -90$ kNm.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -1281,12 \cdot 10^4 y_o - 2260,83348 \cdot 10^4 \theta_o + 13834,3756 = -90 \\ -261,39923 \cdot 10^4 y_o - 1281,12 \cdot 10^4 \theta_o - 11740,35114 = 0 \end{cases}$$

Tính ra ta có các nghiệm :

$$y_o = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

$$\theta_o = -17,78 \cdot 10^{-4} \text{ radian}$$

d) Vẽ biểu đồ nội lực

Thay trị số y_o và θ_o vào M_1 và Q_1 , ta có phương trình của mômen và lực cắt trong đoạn một :

$$M_1 = -693B_{ax} + 1352C_{ax} - 1312D_{ax}$$

$$Q_1 = -300A_{ax} + 587,3B_{ax} - 569C_{ax}$$

Phương trình mômen và lực cắt trong đoạn hai và ba là :

$$M_2 = M_1 - 90A_{a(x-4)} - 107C_{a(x-4)}$$

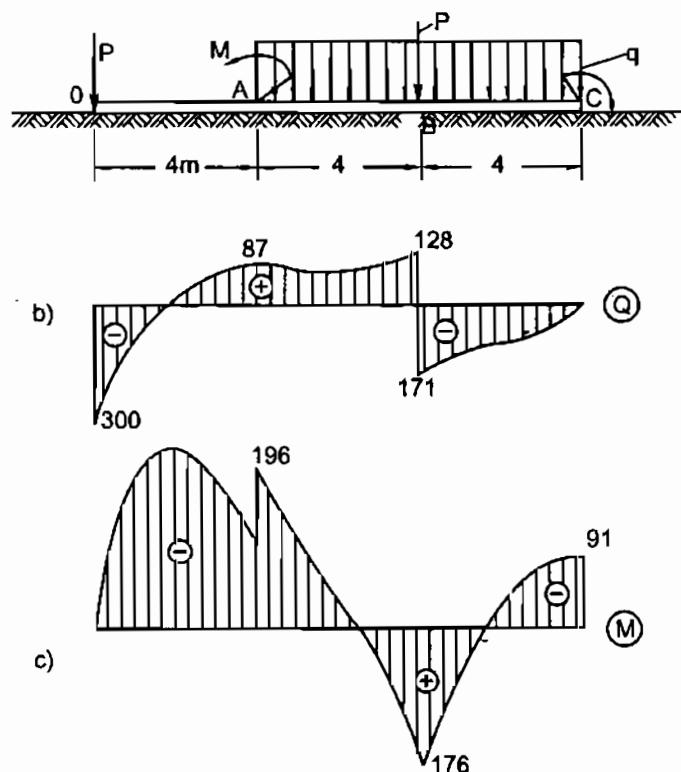
$$Q_2 = Q_1 + 156D_{a(x-4)} - 46,2B_{a(x-4)}$$

$$M_3 = M_2 - 693B_{a(x-8)}$$

$$Q_3 = Q_2 - 300A_{a(x-8)}$$

Chú ý trong đoạn hai và ba các hàm M_1 và Q_1 cũng như M_2 và Q_2 , biến số x phải được kéo dài cho đến hết dầm.

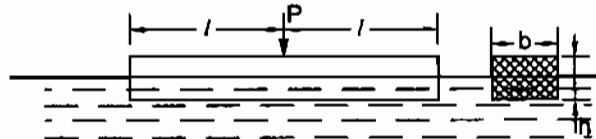
Các biểu đồ được vẽ trên hình (h.13-11).



Hình 13-11

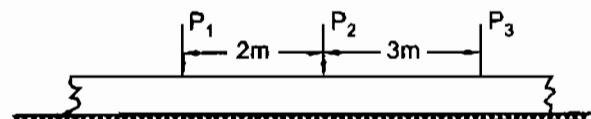
Bài tập

- 13.1. Một thanh gỗ mặt cắt ngang hình chữ nhật bề rộng b và cao h được nổi lèn bên trên nước. Đặt một lực P lên giữa thanh. Xác định mômen uốn lớn nhất trong thanh với giả thiết là lực P không làm lún và thanh không chìm xuống dưới nước (h.13-12). Cho biết tỉ trọng của nước là γ .



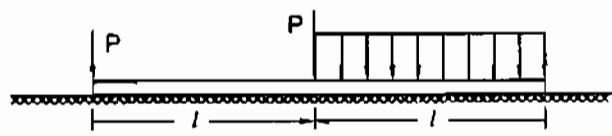
Hình 13-12

- 13.2. Dựa vào bảng 13-1 để xác định hệ số nền của một dầm ray đường sắt đặt trên đất sét pha cát dầm kỹ (h.13-13). Chiều dài l có thể xem là vô hạn, với độ cứng khi uốn là $EJ = C^{te}$. Tính mômen uốn lớn nhất dưới tác dụng của ba lực P_1, P_2, P_3 như hình vẽ. $P_1 = 2^t$, $P_2 = 3^t$, $P_3 = 4^t$.



Hình 13-13

- 13.3. Vẽ đường ảnh hưởng về mômen uốn của dầm trong bài toán 2, từ đó xác định mômen uốn lớn nhất trong dầm khi có 1 toa tàu chạy qua. Trọng lượng của toa tàu là 30^t . Khoảng cách giữa hai bánh của toa tàu đọc theo đường tàu là 3m.



Hình 13-14

- 13.4. Viết phương trình đường đàn hồi của dầm đặt trên nền chịu lực hình vẽ (h.13-14) cho biết: $l = 3m$, $q = 20kN/m$, $P = 300kN$, $k_o = 6 \cdot 10^4 kN/m^3$. Chiều rộng $b = 0,3m$, $J = 0,0426m^4$, $E = 10^7 kN/m^2$.

PHỤ LỤC

Trị số của hàm η , η_1 , η_2 , η_3 để tính dàm dâng dài vô hạn trên nền đàn hồi

$$\eta = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \quad \eta_2 = e^{-\xi} \cdot \cos \xi$$

$$\eta_1 = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \quad \eta_3 = e^{-\xi} \cdot \sin \xi$$

$\xi = ax$	η	η_3	η_1	η_2	$\xi = ax$
0,0	1,0000	0,0000	1,0000	+1,0000	0,1
0,1	0,9907	+0,0903	0,8100	+0,9003	0,1
0,2	0,9651	+0,1627	0,6398	+0,8024	0,2
0,3	0,9267	+0,2189	0,4888	+0,7077	0,3
0,4	0,8784	+0,2610	0,3564	+0,6174	0,4
0,5	0,8231	+0,2908	0,2415	+0,5323	0,5
0,6	0,7628	+0,3099	0,1431	+0,4530	0,6
0,7	0,6997	+0,3199	0,0599	+0,3708	0,7
$\pi/4$	0,6448	+0,3224	0,0000	+0,3224	0,785
0,8	0,6354	+0,3223	-0,0093	+0,3131	0,8
0,9	0,5712	+0,3185	-0,0657	+0,2527	0,9
1,0	0,5083	+0,3096	-0,1108	+0,1988	1,0
1,1	0,4476	+0,2967	-0,1457	+0,1510	1,1
1,2	0,3899	+0,2807	-0,1716	+0,1091	1,2
1,3	0,3355	+0,2626	-0,1897	+0,0729	1,3
1,4	0,2849	+0,2430	-0,2011	+0,0419	1,4
1,5	0,2384	+0,2226	-0,2068	+0,0158	1,5
$\pi/2$	0,2079	+0,2079	-0,2079	0,0000	1,571
1,6	0,1959	+0,2018	-0,2077	-0,0059	1,6
1,7	0,1576	+0,1812	-0,2047	-0,0235	1,7
1,8	0,1234	+0,1610	-0,1985	-0,0376	1,8
1,9	0,0932	+0,1415	-0,1899	-0,0484	1,9
2,0	0,0667	+0,1231	-0,1794	-0,0563	2,0
2,1	0,0439	+0,1057	-0,1675	-0,0618	2,1
2,2	0,0244	+0,0896	-0,1548	-0,0652	2,2
2,3	0,0080	+0,0748	-0,1416	-0,0668	2,3

$\xi = ax$	η	η_3	η_1	η_2	$\xi = ax$
$3\pi/4$	0,0000	+0,0670	-0,1340	-0,0670	2,356
2,4	-0,0056	+0,0613	-0,1282	-0,0669	2,4
2,5	-0,0166	+0,0491	-0,1149	-0,0658	2,5
2,6	-0,0254	+0,0383	-0,1019	-0,0636	2,6
2,7	-0,0320	+0,0287	-0,0895	-0,0608	2,7
2,8	-0,0360	+0,0204	-0,0777	-0,0573	2,8
2,9	-0,0403	+0,0132	-0,0666	-0,0534	2,9
3,0	-0,04226	+0,00703	-0,05632	-0,04929	3,0
3,1	-0,04314	+0,00187	-0,04688	-0,04501	3,1
π	-0,04321	+0,00000	-0,04321	-0,04321	3,142
3,2	-0,04307	-0,00238	-0,03831	-0,04069	3,2
3,3	-0,04224	-0,00582	-0,03060	-0,03642	3,3
3,4	-0,04079	-0,00853	-0,02374	-0,03227	3,3
3,5	-0,03887	-0,01059	-0,01769	-0,02828	3,4
3,6	-0,03659	-0,01209	-0,01241	-0,02450	3,5
3,7	-0,03407	-0,01310	-0,00787	-0,02097	3,6
3,8	-0,03138	-0,01369	-0,00401	-0,01770	3,7
3,9	-0,02862	-0,01392	-0,00077	-0,01469	3,8
$5\pi/4$	-0,02786	-0,01393	0,00000	-0,01393	3,9
4,0	-0,02583	-0,01386	+0,00189	-0,01197	3,927
4,1	-0,02309	-0,01356	0,00403	-0,00953	4,0
4,2	-0,02042	-0,01307	0,00572	-0,00735	4,1
4,3	-0,01787	-0,01243	0,00699	-0,00544	4,2
4,4	-0,01546	-0,01168	0,00791	-0,00377	4,3
4,5	-0,01320	-0,01086	0,00852	-0,00234	4,5
4,6	-0,01112	-0,00999	0,00786	-0,00113	4,6
4,7	-0,00921	-0,00909	0,00898	-0,00011	4,7
$6\pi/4$	-0,00898	-0,00898	0,00898	0,00000	4,712
4,8	-0,00748	-0,00820	0,00892	+0,00072	4,8
4,9	-0,00593	-0,00732	0,00870	0,00139	4,9
5,0	-0,00455	-0,00646	0,00837	0,00191	5,0
5,1	-0,00334	-0,00564	0,00795	0,00230	5,1

$\xi = ax$	η	η_3	η_1	η_2	$\xi = ax$
5,2	-0,00229	-0,00487	0,00746	0,00259	5,2
5,3	-0,00139	-0,00415	0,00692	0,00277	5,3
5,4	-0,00063	-0,00349	0,00636	0,00287	5,4
$7\pi/4$	0,00000	-0,00290	0,00579	0,00290	5,498
5,5	+0,00001	-0,00288	0,00578	0,00290	5,5
5,6	0,00053	-0,00232	0,00520	0,00287	5,6
5,7	0,00095	-0,00184	0,00464	0,00279	5,7
5,8	0,00127	-0,00141	0,00409	0,00268	5,8
5,9	0,00152	-0,00102	0,00356	0,00254	5,9
6,0	0,00169	-0,00069	0,00307	0,00238	6,00
6,1	0,00180	-0,00069	0,00261	0,00221	6,1
6,2	0,00185	-0,00017	0,00219	0,00202	6,2
$8\pi/4$	0,00187	0,00000	0,00187	0,00187	6,283
6,3	0,00187	+0,00003	0,00181	0,00184	6,3
6,4	0,00184	0,00019	0,00146	0,00165	6,4
6,5	0,00179	0,00032	0,00115	0,00147	6,5
6,6	0,00172	0,00042	0,00087	0,00129	6,6
6,7	0,00162	0,00050	0,00063	0,00113	6,7
6,8	0,00152	0,00055	0,00042	0,00097	6,8
6,9	0,00141	0,00058	0,00024	0,00082	6,9
7,0	0,00129	0,00060	0,00009	0,00069	7,0
$9\pi/4$	0,00120	0,00060	0,00000	0,00060	7,069

Trị số của các hàm Crullop để tính dàm có mặt cắt không đổi trên nền đòn hồi

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
0	1	0	0	0
0,001	1,0000	0,00100	0,00000	0,00000
0,002	1,0000	0,00200	0,00000	0,00000
0,003	1,0000	0,00300	0,00001	0,00000
0,004	1,0000	0,00400	0,00001	0,00000
0,005	1,0000	0,00500	0,00002	0,00000
0,006	1,0000	0,00600	0,00002	0,00000
0,007	1,0000	0,00700	0,00003	0,00000
0,008	1,0000	0,00800	0,00003	0,00000
0,009	1,0000	0,00900	0,00004	0,00000
0,010	1,0000	0,01000	0,00005	0,00000
0,011	1,0000	0,01100	0,00006	0,00000
0,012	1,0000	0,01200	0,00007	0,00000
0,013	1,0000	0,01300	0,00009	0,00000
0,014	1,0000	0,01400	0,00010	0,00000
0,015	1,0000	0,01500	0,00012	0,00000
0,016	1,0000	0,01600	0,00013	0,00000
0,017	1,0000	0,01700	0,00015	0,00000
0,018	1,0000	0,01800	0,00016	0,00000
0,019	1,0000	0,01900	0,00018	0,00000
0,020	1,0000	0,02000	0,00020	0,00000
0,030	1,0000	0,03000	0,00045	0,00001
0,040	1,0000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,06	1,0000	0,0600	0,0018	0,0001
0,07	1,0000	0,0700	0,0025	0,0001
0,08	1,0000	0,0800	0,0032	0,0001
0,09	1,0000	0,0900	0,0041	0,0001
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,11	1,0000	0,1100	0,0061	0,0002
0,12	1,0000	0,1200	0,0072	0,0003
0,13	0,9999	0,1300	0,0085	0,0004

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
0,14	0,9999	1,1400	0,0098	0,0005
0,15	0,9999	0,1500	0,0113	0,0006
0,16	0,9999	0,1600	0,0128	0,0007
0,17	0,9999	0,1700	0,0145	0,0008
0,18	0,9998	0,1800	0,0162	0,0010
0,19	0,9998	0,1900	0,0181	0,0012
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,21	0,9997	0,2100	0,0221	0,0016
0,22	0,9996	0,2200	0,0242	0,0018
0,23	0,9995	0,2300	0,0265	0,0020
0,24	0,9995	0,2400	0,0288	0,0023
0,25	0,9993	0,2500	0,0313	0,0026
0,26	0,9992	0,2600	0,0338	0,0029
0,27	0,9991	0,2700	0,0365	0,0033
0,28	0,9990	0,2800	0,0392	0,0037
0,29	0,9988	0,2900	0,0421	0,0041
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,31	0,9985	0,3099	0,0481	0,0050
0,32	0,9983	0,3199	0,0512	0,0055
0,33	0,9980	0,3299	0,0545	0,0060
0,34	0,9978	0,3399	0,0578	0,0066
0,35	0,9975	0,3498	0,0613	0,0072
0,36	0,9972	0,3598	0,0648	0,0078
0,37	0,9969	0,3698	0,0685	0,0085
0,38	0,9965	0,3797	0,0722	0,0092
0,39	0,9961	0,3897	0,0761	0,0099
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,41	0,9953	0,4096	0,0840	0,0115
0,42	0,9948	0,4196	0,0882	0,0124
0,43	0,9943	0,4295	0,0924	0,0133
0,44	0,9938	0,4395	0,0968	0,0142
0,45	0,9932	0,4494	0,1012	0,0152
0,46	0,9925	0,4594	0,1058	0,0162
0,47	0,9919	0,4693	0,1104	0,0173
0,48	0,9911	0,4792	0,1152	0,0184

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
0,49	0,9904	0,4891	0,1200	0,0196
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,51	0,9887	0,5089	0,1300	0,0221
0,52	0,9878	0,5188	0,1351	0,0234
0,53	0,9869	0,5286	0,1404	0,0248
0,54	0,9858	0,5385	0,1457	0,0262
0,55	0,9847	0,5484	0,1511	0,0277
0,56	0,9836	0,5582	0,1567	0,0293
0,57	0,9824	0,5680	0,1623	0,0309
0,58	0,9811	0,5778	0,1680	0,0325
0,59	0,9798	0,5876	0,1738	0,0342
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,61	0,9769	0,6072	0,1858	0,0378
0,62	0,9754	0,6170	0,1919	0,0397
0,63	0,9738	0,6267	0,1981	0,0417
0,64	0,9721	0,6364	0,2044	0,0437
0,65	0,9703	0,6462	0,2109	0,0457
0,66	0,9684	0,6559	0,2174	0,0479
0,67	0,9664	0,6655	0,2240	0,0501
0,68	0,9644	0,6752	0,2307	0,0524
0,69	0,9623	0,6848	0,2375	0,0547
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,71	0,9577	0,7040	0,2514	0,0596
0,72	0,9552	0,7136	0,2584	0,0621
0,73	0,9527	0,7231	0,2656	0,0648
0,74	0,9501	0,7326	0,2729	0,0675
0,75	0,9473	0,7421	0,2803	0,0702
0,76	0,9444	0,7516	0,2878	0,0730
0,77	0,9415	0,7610	0,2953	0,0760
0,78	0,9384	0,7704	0,3030	0,0790
0,79	0,9351	0,7798	0,3107	0,0820
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,81	0,9283	0,7984	0,3265	0,0884
0,82	0,9247	0,8077	0,3345	0,0917
0,83	0,9210	0,8169	0,3427	0,0951

ax	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
0,84	0,9171	0,8261	0,3509	0,0986
0,85	0,9131	0,8352	0,3592	0,1021
0,86	0,9090	0,8443	0,3676	0,1057
0,87	0,9047	0,8534	0,3761	0,1095
0,88	0,9002	0,8624	0,3846	0,1133
0,89	0,8956	0,8714	0,3933	0,1172
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
0,91	0,8859	0,8893	0,4109	0,1252
0,92	0,8808	0,8981	0,4199	0,1293
0,93	0,8753	0,9069	0,4289	0,1336
0,94	0,8701	0,9156	0,4380	0,1379
0,95	0,8645	0,9242	0,4472	0,1424
0,96	0,8587	0,9329	0,4565	0,1469
0,97	0,8528	0,9415	0,4659	0,1515
0,98	0,8466	0,9499	0,4753	0,1562
0,99	0,8339	0,9586	0,4849	0,1611
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,01	0,8270	0,9750	0,5042	0,1709
1,02	0,8201	0,9833	0,5140	0,1760
1,03	0,8129	0,9914	0,5238	0,1812
1,04	0,8056	0,9995	0,5338	0,1865
1,05	0,7980	1,0076	0,5438	0,1918
1,06	0,7902	1,0155	0,5540	0,1973
1,07	0,7822	1,0233	0,5641	0,2029
1,08	0,7740	1,0311	0,5744	0,2086
1,09	0,7655	1,0388	0,5848	0,2149
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2204
1,11	0,7479	1,0540	0,6057	0,2263
1,12	0,7387	1,0613	0,6163	0,2323
1,13	0,7293	1,0687	0,6269	0,2384
1,14	0,7196	1,0760	0,6376	0,2446
1,15	0,7097	1,0831	0,6484	0,2514
1,16	0,6995	1,0902	0,6593	0,2579
1,17	0,6891	1,0971	0,6702	0,2646
1,18	0,6784	1,1040	0,6813	0,2713

ax	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
1,19	0,6674	1,1107	0,6923	0,2782
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,21	0,6446	1,1238	0,7147	0,2923
1,22	0,6330	1,1306	0,7259	0,2997
1,23	0,6206	1,1365	0,7373	0,3068
1,24	0,6082	1,1426	0,7487	0,3142
1,25	0,5955	1,1486	0,7601	0,3218
1,26	0,5824	1,1545	0,7716	0,3294
1,27	0,5691	1,1602	0,7832	0,3372
1,28	0,5555	1,1659	0,7948	0,3451
1,29	0,5415	1,1714	0,8065	0,3531
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,31	0,5126	1,1819	0,8301	0,3695
1,32	0,4977	1,1870	0,8419	0,3778
1,33	0,4824	1,1919	0,8538	0,3863
1,34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3949
1,35	0,4508	1,2012	0,8777	0,4036
1,36	0,4345	1,2057	0,8898	0,4124
1,37	0,4178	1,2099	0,9018	0,4214
1,38	0,4008	1,2140	0,9140	0,4305
1,39	0,3833	1,2179	0,9261	0,4397
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,41	0,3474	1,2252	0,9506	0,4585
1,42	0,3289	1,2286	0,9628	0,4680
1,43	0,3100	1,2318	0,9751	0,4777
1,44	0,2907	1,2348	0,9865	0,4875
1,45	0,2710	1,2376	0,9998	0,4974
1,46	0,2509	1,2402	1,0122	0,5075
1,47	0,2304	1,2426	1,0246	0,5177
1,48	0,2095	1,2448	1,0371	0,5280
1,49	0,1882	1,2468	1,0495	0,5384
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
1,51	0,1442	1,2501	1,0745	0,5597
1,52	0,1216	1,2515	1,0870	0,5705
1,53	0,0986	1,2526	1,0995	0,5814

α_x	A_{α_x}	B_{α_x}	C_{α_x}	D_{α_x}
1,54	0,0746	1,2534	1,1121	0,5925
1,55	0,0512	1,2541	1,1246	0,6036
1,56	0,0268	1,2545	1,1371	0,6149
1,57	0,0020	1,2546	1,1497	0,0264
$\pi/2$	0	1,2546	1,1507	0,6273
1,58	-0,0233	1,2545	1,1622	0,6380
1,59	-0,0490	1,2542	1,1748	0,6496
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,61	-0,1019	1,2526	1,1998	0,6734
1,62	-0,1291	1,2515	1,2124	0,6854
1,63	-0,1568	1,2501	1,2249	0,6976
1,64	-0,1849	1,2484	1,2374	0,7099
1,65	-0,2136	1,2464	1,2498	0,7224
1,66	-0,2427	1,2441	1,2623	0,7349
1,67	-0,2724	1,2415	1,2747	0,7476
1,68	-0,3026	1,2386	1,2871	0,7604
1,69	-0,3332	1,2354	1,2995	0,7734
1,70	-0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,71	-0,3961	1,2282	1,3241	0,7996
1,72	-0,4284	1,2240	1,3364	0,8129
1,73	-0,4612	1,2196	1,3486	0,8263
1,74	-0,4945	1,2148	1,3608	0,8399
1,75	-0,5284	1,2097	1,3729	0,8535
1,76	-0,5628	1,2042	1,3850	0,8673
1,77	-0,5977	1,1984	1,3970	0,8812
1,78	-0,6333	1,1923	1,4089	0,8953
1,79	-0,6694	1,1857	1,4208	0,9094
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,81	-0,7433	1,1716	1,4444	0,9381
1,82	-0,7811	1,1640	1,4561	0,9526
1,83	-0,8195	1,1560	1,4677	0,9672
1,84	-0,8584	1,1476	1,4792	0,9819
1,85	-0,8980	1,1389	1,4906	0,9968
1,86	-0,9382	1,1297	1,5020	1,0117
1,87	-0,9790	1,1201	1,5132	1,0268

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
1,88	-1,0203	1,1101	1,5244	1,0420
1,89	-1,0623	1,0997	1,5354	1,0573
1,90	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0722
1,91	-0,1481	1,0776	1,5572	1,0882
1,92	-1,1920	1,0659	1,5679	1,1038
1,93	-1,2364	1,0538	1,5785	1,1196
1,94	-1,2815	1,0411	1,5890	1,1354
1,95	-1,3273	1,0281	1,5993	1,1514
1,96	-1,3736	1,0146	1,6095	1,1674
1,97	-1,4207	1,0007	1,6196	1,1835
1,98	-1,4683	0,9862	1,6296	1,1998
1,99	-1,5166	0,9713	1,6393	1,2161
2,00	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,01	-1,6153	0,9399	1,6584	1,2491
2,02	-1,6656	0,9235	1,6678	1,2658
2,03	-1,7165	0,9066	1,6769	1,2825
2,04	-1,7682	0,8892	1,6859	1,2993
2,05	-1,8205	0,8713	1,6947	1,3162
2,06	-1,8734	0,8528	1,7033	1,3332
2,07	-1,9271	0,8338	1,7117	1,3502
2,08	-1,9815	0,8142	1,7200	1,3845
2,09	-2,0365	0,7939	1,7280	1,4020
2,10	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4194
2,11	-2,1487	0,7523	1,7435	1,4368
2,12	-2,2058	0,7306	1,7509	1,4544
2,13	-2,2636	0,7082	1,7581	1,4720
2,14	-2,3221	0,6853	1,7651	1,4897
2,15	-2,3814	0,6618	1,7718	1,5074
2,16	-2,4413	0,6376	1,7783	1,5253
2,17	-2,5020	0,6129	1,7846	1,5253
2,18	-2,5633	0,5876	1,7906	1,5431
2,19	-2,6254	0,5616	1,7963	1,5611
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,21	-2,7518	0,5079	1,8070	1,5971
2,22	-2,8160	0,4801	1,8120	1,6152

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
2,23	-2,8810	0,4516	1,8166	1,6333
2,24	-2,9466	0,4224	1,8210	1,6515
2,25	-3,0131	0,3926	1,8251	1,6698
2,26	-3,0802	0,3621	1,8288	1,6880
2,27	-3,1481	0,3310	1,8323	1,7063
2,28	-3,2167	0,2991	1,8355	1,7247
2,29	-3,2861	0,2667	1,8383	1,7430
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,31	-3,4270	0,1996	1,8430	1,7798
2,32	-3,4986	0,1649	1,8448	1,7983
2,33	-3,5708	0,1296	1,8462	1,8167
2,34	-3,6439	0,0935	1,8473	1,8352
2,35	-3,7177	0,0567	1,8481	1,8537
2,36	-3,7922	0,0191	1,8485	1,8722
2,37	-3,8675	-0,0192	1,8485	1,8906
2,38	-3,9435	-0,0583	1,8481	1,9091
2,40	-4,0202	-0,0981	1,8473	1,9276
2,41	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461
2,42	-4,1759	-0,1800	1,8446	1,9645
2,43	-4,2548	-0,2221	1,8425	1,9830
2,44	-4,4150	-0,3089	1,8373	2,0198
2,45	-4,4961	-0,3534	1,8339	2,0381
2,46	-4,5780	-0,3988	1,8302	2,0564
2,47	-4,6606	-0,4450	1,8259	2,0747
2,48	-4,7439	-0,4920	1,8213	2,0930
2,49	-4,8280	-0,5399	1,8161	2,1111
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
2,51	-4,9984	-0,6381	1,8043	2,1474
2,52	-5,0846	-0,6885	1,7977	2,1654
2,53	-5,1716	-0,7398	1,7906	2,1833
2,54	-5,2593	-0,7920	1,7829	2,2012
2,55	-5,3477	-0,8450	1,7747	2,2190
2,56	-5,4368	-0,8989	1,7660	2,2367
2,57	-5,5266	-0,9538	1,7567	2,2543
2,58	-5,6172	-1,0095	1,7469	2,2718

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
2,59	-5,7084	-1,0661	1,7365	2,2892
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7356	2,3065
2,61	-5,8929	-1,1821	1,7141	2,3237
2,62	-5,9862	-1,2415	1,7019	2,3408
2,63	-6,0802	-1,3018	1,6892	2,3578
2,64	-6,1748	-1,3631	1,6759	2,3746
2,65	-6,2701	-1,4253	1,6620	2,3913
2,66	-6,3661	-1,4885	1,6474	2,4078
2,67	-6,4628	-1,5527	1,6322	2,4242
2,68	-6,5600	-1,6177	1,6163	2,4405
2,69	-6,6580	-1,6838	1,6327	2,4566
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5827	2,4725
2,71	-6,8558	-1,8190	1,5648	2,4882
2,72	-6,9556	-1,8881	1,5463	2,5037
2,73	-7,0560	-1,9581	1,5271	2,5191
2,74	-7,1571	-2,0292	1,5071	2,5343
2,75	-7,2588	-2,1012	1,4865	2,5493
2,76	-7,3611	-2,1743	1,4651	2,5640
2,77	-7,4639	-2,2484	1,4430	2,5786
2,78	-7,5673	-2,3236	1,4201	2,5929
2,79	-7,6714	-2,3998	1,3965	2,6070
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,81	-7,8810	-2,5553	1,3470	2,6344
2,82	-7,9866	-2,6347	1,3210	2,6477
2,83	-8,0929	-2,7151	1,2943	2,6608
2,84	-8,1995	-2,7965	1,2667	2,6736
2,85	-8,3067	-2,8790	1,2383	2,6862
2,86	-8,4144	-2,9627	1,2091	2,6984
2,87	-8,5225	-3,0473	1,1791	2,7103
2,88	-8,6312	-3,1331	1,1482	2,7220
2,89	-8,7404	-3,2200	1,1164	2,7333
2,90	-8,8471	-3,3079	1,8038	2,7443
2,91	-8,9598	-3,3969	1,0503	2,7550
2,92	-9,0703	-3,4872	1,0158	2,7653
2,93	-9,1811	-3,5784	0,9805	2,7753

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
2,94	-9,2923	-3,6707	0,9443	2,7849
2,95	-9,4039	-3,7642	0,9071	2,7942
2,96	-9,5158	-3,8588	0,8690	2,8031
2,97	-9,6281	-3,9545	0,8299	2,8115
2,98	-9,7407	-4,0514	0,7899	2,8196
2,99	-9,8536	-4,1493	0,7489	2,8273
3,00	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
3,01	-10,0804	-4,3487	0,6639	2,8414
3,02	-10,1943	-4,4501	0,6199	2,8479
3,03	-10,3083	-4,5526	0,5749	2,8538
3,04	-10,4225	-4,6562	0,5289	2,8594
3,05	-10,5317	-4,7611	0,4817	2,8644
3,06	-10,6516	-4,8670	0,4336	2,8690
3,07	-10,7665	-4,9741	0,3844	2,8731
3,08	-10,8815	-5,0823	0,3341	2,8767
3,09	-10,9966	-5,1917	0,2828	2,8798
3,10	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8823
3,11	-11,2272	-5,4139	0,1767	2,8844
3,12	-11,3427	-5,5268	0,1220	2,8859
3,13	-11,4580	-5,6408	0,0662	2,8868
3,14	-11,5736	-5,7560	0,0092	2,8872
π	-11,5919	-5,7744	0	2,8872
3,15	-11,6800	-5,8722	-0,0490	2,8870
3,16	-11,8045	-5,9898	-0,1083	2,8862
3,17	-11,9200	-6,1084	-0,1688	2,8848
3,18	-12,0353	-6,2281	-0,2305	2,8828
3,19	-12,1506	-6,3491	-0,2934	2,8802
3,20	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,21	-12,3807	-6,5943	-0,4227	2,8731
3,22	-12,4956	-6,7188	-0,4894	2,8685
3,23	-12,6101	-6,8442	-0,5571	2,8633
3,24	-12,7373	-6,9710	-0,6262	2,8573
3,25	-12,8388	-7,0988	-0,6966	2,8507
3,26	-12,9527	-7,2277	-0,7682	2,8434
3,27	-13,0662	-7,3578	-0,8411	2,8354

αx	$A_{\alpha x}$	$B_{\alpha x}$	$C_{\alpha x}$	$D_{\alpha x}$
3,28	-13,1795	-7,4891	-0,9154	2,8266
3,29	-13,2934	-7,6214	-0,9909	2,8171
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,31	-13,5168	-7,8895	-1,1460	2,7957
3,32	-13,6285	-8,0252	-1,2256	2,7839
3,33	-13,7395	-8,1620	-1,3065	2,7712
3,34	-13,8501	-8,3000	-1,3888	2,7577
3,35	-13,9601	-8,4390	-1,4725	2,7434
3,36	-14,0695	-8,5792	-1,5577	2,7282
3,37	-14,1784	-8,7205	-1,6441	2,7122
3,38	-14,2866	-8,8627	-1,7321	2,6953
3,39	-14,3941	-9,0062	-1,8214	2,6776
3,40	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
3,41	-14,6066	-9,2962	-2,0044	2,6393
3,42	-14,7118	-9,4427	-2,0980	2,6189
3,43	-14,8162	-9,5905	-2,1933	2,5974
3,44	-14,9197	-9,7392	-2,2899	2,5750
3,45	-15,0222	-9,8888	-2,3880	2,5516
3,46	-15,1238	-10,0396	-2,4876	2,5272
3,47	-15,2244	-10,1913	-2,5889	2,5018
3,48	-15,3238	-19,3441	-2,6915	2,4754
3,49	-15,4224	-10,4978	-2,7957	2,4480
3,50	-15,5198	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,51	-15,6159	-10,8081	-3,0088	2,3900
3,52	-15,7108	-10,9647	-3,1176	2,3593
3,53	-15,8046	-11,1223	-3,2280	2,3276
3,54	-15,8971	-11,2809	-3,3401	2,2948
4,09	-17,4185	-20,8423	-12,1311	-1,7168
4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,11	-17,2712	-21,1891	-12,5514	-1,9636
4,12	-17,1900	-21,3614	-12,7642	-2,0902
4,13	-17,1040	-21,5329	-12,9779	-2,2189
4,14	-17,0126	-21,7035	-13,1948	-2,3498
4,15	-16,9160	-21,8731	-13,6322	-2,4828
4,16	-16,8139	-22,0417	-13,8536	-2,6180

ax	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
4,17	-16,7064	-22,2094	-14,0765	-2,7555
4,18	-16,5934	-22,3759	-14,3011	-2,8952
4,19	-16,4748	-22,5413	-14,5274	-3,0370
4,20	-16,3505	-22,7055	-14,7551	-3,1812
4,21	-16,2203	-22,8682	-14,9847	-3,3275
4,22	-16,0842	-23,0299	-15,2158	-3,4763
4,23	-15,9423	-23,1900	-15,4484	-3,6272
4,24	-15,7939	-23,3485	-15,4484	-3,7806
4,25	-15,6398	-23,5059	-15,6827	-3,9362
4,26	-15,4793	-23,66 6	-15,9187	-4,0942
4,27	-15,3122	-23,8153	-16,1559	-4,2546
4,28	-15,1387	-23,9677	-16,3949	-4,4174
4,29	-14,9587	-24,1181	-16,6353	-4,5825
4,30	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
4,31	-14,5788	-24,4136	-17,1207	-4,9200
4,32	-14,3786	-24,5574	-17,3655	-5,0925
4,33	-14,1714	-24,7012	-17,6119	-5,2674
4,34	-13,9570	-24,8417	-17,8595	-5,4447
4,35	-13,7357	-24,9802	-18,1086	-5,6245
4,36	-13,5070	-25,1164	-18,3591	-5,8069
4,37	-13,2712	-25,2500	-18,6110	-5,9916
4,38	-13,0276	-25,3819	-18,8642	-6,1792
4,39	-12,7766	-25,5108	-19,1185	-6,3690
4,40	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,41	-12,2517	-25,7612	-19,6313	-6,7566
4,42	-11,9776	-25,8824	-19,8875	-6,9541
4,43	-11,6625	-26,0007	-20,1489	-7,1543
4,44	-11,4051	-26,1161	-20,4095	-7,3571
4,45	-11,1069	-26,2074	-20,6712	-7,5517
4,46	-10,8003	-26,3884	-20,9341	-7,7705
4,47	-10,4851	-26,4448	-21,1981	-7,9812
4,48	-10,1615	-26,5480	-21,4630	-8,1945
4,49	-9,8295	-26,6479	-21,7289	-8,4104
4,50	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-9,6290
4,51	-9,1392	-26,8377	-22,2639	-8,8504

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
4,52	-8,7805	-26,9272	-22,5327	-9,0744
4,53	-8,4133	-27,0132	-22,8023	-9,3010
4,54	-8,0368	-27,0957	-23,0730	-2,5304
4,55	-7,6509	-27,1740	-23,3442	-9,7624
4,56	-7,2556	-27,2485	-23,6164	-9,9973
4,57	-6,8510	-27,3192	-23,8892	-10,2348
4,58	-6,4366	-27,3855	-24,1628	-10,4751
4,59	-6,0127	-27,4477	-24,4369	-10,7181
4,60	-5,5791	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,61	-5,1358	-27,5593	-24,9870	-11,2123
4,62	-4,8237	-27,6086	-25,2630	-11,4636
3,55	-15,9881	-11,4403	-3,4537	2,2608
3,56	-16,0780	-11,6007	-3,5689	2,2257
3,57	-16,1663	-11,7619	-3,6857	2,1894
3,58	-16,2531	-11,9240	-3,8041	2,1520
3,59	-16,3384	-12,0870	-3,9242	2,1133
3,60	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
3,61	-16,5043	-12,4154	-4,1692	2,0324
3,62	-16,5847	-12,5808	-4,2942	1,9901
3,63	-16,6634	-12,7470	-4,4208	1,9465
3,64	-16,7405	-12,9142	-4,5491	1,9017
3,65	-16,8155	-13,0819	-4,6791	1,8555
3,66	-16,8889	-13,2504	-4,8108	1,8081
3,67	-16,9602	-13,4196	-4,9441	1,7593
3,68	-17,0296	-13,5896	-5,0792	1,7092
3,69	-17,0970	-13,7603	-5,2159	1,6577
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
3,71	-17,2253	-14,1035	-5,4945	1,5506
3,72	-17,2861	-14,2759	-5,6364	1,4950
3,73	-17,3449	-14,4492	-5,7801	1,4379
3,74	-17,4022	-14,6229	-5,9254	1,3793
3,75	-17,4552	-14,7972	-6,0725	1,3194
3,76	-17,5067	-14,9720	-6,2214	1,2579
3,77	-17,5557	-15,1473	-6,3720	1,1949
3,78	-17,6024	-15,3232	-6,5243	1,1305

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
3,79	-17,6463	-15,4994	-6,6784	1,0645
3,80	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
3,81	-17,7259	-15,8531	-6,9920	0,9278
3,82	-17,7616	-16,0304	-7,1513	0,8571
3,83	-17,7945	-16,2083	-7,3126	0,7847
3,84	-17,8245	-16,3864	-7,4755	0,7108
3,85	-17,8513	-16,5649	-7,6403	0,6352
3,86	-17,8751	-16,7434	-7,8069	0,5579
3,87	-17,8960	-16,9223	-7,9751	0,4791
3,88	-16,9135	-17,1013	-8,1453	0,3985
3,89	-17,9277	-17,2805	-8,3171	0,3161
3,90	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
3,91	-17,9464	-17,6393	-8,6664	0,1464
3,92	-17,9504	-17,8188	-8,8437	0,0587
3,93	-17,9511	-17,9983	-9,0227	-0,0305
3,94	-17,9480	-18,1779	-9,2037	-0,1217
3,95	-17,9412	-18,3572	-9,3863	-0,2147
3,96	-17,9307	-18,5366	-9,5708	-0,3095
3,97	-17,9165	-18,7159	-9,7571	-0,4061
3,98	-17,8983	-18,8949	-9,9451	-0,5046
3,99	-17,8761	-19,0738	-10,1350	-0,6050
4,00	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,01	-17,8172	-19,4307	-10,5200	-0,8115
4,02	-17,7850	-19,6088	-10,7151	-0,9176
4,03	-17,7461	-19,7865	-10,9122	-1,0258
4,04	-17,7029	-19,9638	-11,1110	-1,1359
4,05	-17,6551	-20,1406	-11,3115	-1,2481
4,06	-17,6030	-20,3169	-11,5138	-1,3622
4,07	-17,5461	-20,4926	-11,7178	-1,4783
4,08	-17,4846	-20,6677	-11,9236	-1,5966
4,63	-4,2189	-27,6531	-25,5392	-11,7175
6,64	-3,7450	-27,6928	-25,8159	-11,9743
4,65	-3,2607	-27,7277	-26,0929	-12,2338
4,66	-2,7663	-22,7581	-26,3705	-12,4962
4,67	-2,2611	-27,8032	-26,6481	-12,7612

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
4.68	-1.7449	-27.8181	-26.9262	-13.0293
4.69	-1.2187	-27.8274	-27.2042	-13.2998
4.70	-0.6812	-27.8317	-27.4823	-13.5732
4.71	-0.1327	-27.8317	-27.7608	-13.8495
$3/2\pi$	0	-27.8317	-27.8272	-13.9159
4.72	0.4268	-27.8301	-28.0390	-14.1284
4.73	0.9976	-27.8228	-28.3172	-14.4102
4.74	1.5799	-27.8101	-28.5955	-14.6948
4.75	2.1731	-27.7913	-28.8734	-14.9821
4.76	2.7782	-27.7668	-29.1514	-15.2723
4.77	3.3951	-27.7357	-29.4288	-15.5652
4.78	4.0236	-27.6988	-29.7061	-15.8609
4.79	4.6638	-27.6553	-29.9828	-16.1593
4.80	5.3164	-27.6052	-30.2589	-16.4604
4.81	5.9811	-27.5488	-30.5348	-16.7645
4.82	6.6574	-27.4859	-30.8102	-17.0712
4.83	7.3466	-27.4156	-31.0845	-17.3806
4.84	8.0477	-27.3389	-31.3584	-17.6928
4.85	8.7623	-27.2547	-31.6314	-18.0079
4.86	9.4890	-27.1634	-31.9035	-18.3257
4.87	10.2282	-27.0650	-32.1747	-18.6460
4.88	10.9806	-26.9589	-32.4448	-18.9691
4.89	11.7458	-26.8452	-32.7137	-19.2948
4.90	12.5239	-26.7239	-32.9814	-19.6232
4.91	13.3158	-26.5946	-33.2482	-19.9545
4.92	14.1202	-26.4578	-33.5135	-20.2882
4.93	14.9388	-26.3123	-33.7774	-20.6248
4.94	15.7704	-26.1588	-34.0397	-20.9638
4.95	16.6157	-25.9967	-34.3003	-21.3054
4.96	17.4750	-25.8262	-34.5595	-21.6498
4.97	18.3478	-25.6472	-34.8168	-21.9966
4.98	19.2348	-25.4594	-35.0726	-22.3462
4.99	20.1356	-25.2623	-35.3259	-22.6981
5.00	21.0504	-25.0565	-35.5775	-23.0525
5.01	21.9800	-24.8413	-35.8272	-23.4097

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
5,02	22,8474	-24,6170	-36,0745	-23,7691
5,03	23,8815	-24,3827	-36,3193	-24,1311
5,04	24,8537	-24,1392	-36,5619	-24,4954
5,05	25,8407	-23,8860	-36,8023	-24,8623
5,06	26,8427	-23,6225	-37,0398	-25,2315
5,07	27,8598	-23,3489	-37,2748	-25,6033
5,08	28,8914	-23,0651	-37,5068	-25,9771
5,09	29,9377	-22,7711	-37,7360	-26,3533
5,10	30,9997	-22,4661	-37,9619	-26,7317
5,11	32,0766	-22,1509	-38,1852	-27,1126
5,12	33,1687	-21,8246	-38,4051	-27,4955
5,13	34,2762	-21,4874	-38,6216	-27,8806
5,14	35,3991	-21,1391	-38,8348	-28,2679
5,15	36,5377	-20,7795	-39,0445	-28,6574
5,16	37,6913	-20,4084	-39,2502	-29,0486
5,17	38,8617	-20,0254	-39,4525	-29,4423
5,18	40,0474	-19,6310	-39,6509	-29,8379
5,19	41,2485	-19,2248	-39,8453	-30,2354
5,20	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,21	43,6994	-18,3754	-40,2214	-31,0361
5,22	44,9486	-17,9322	-40,4028	-31,4391
5,23	46,2148	-17,4758	-40,5796	-31,8440
5,24	47,4958	-17,0073	-40,7521	-32,2504
5,25	48,7949	-16,5258	-40,9197	-32,6590
5,26	50,1091	-16,0317	-41,0826	-33,0690
5,27	51,4399	-15,5240	-41,2404	-33,4806
5,28	52,7876	-15,0030	-41,3932	-33,8939
5,29	54,1511	-14,4684	-41,5405	-34,3084
5,30	55,5317	-13,9201	-41,6826	-34,7246
5,31	56,6296	-13,3574	-41,8187	-35,1421
5,32	58,3438	-12,7808	-41,9493	-35,5609
5,33	59,7745	-12,1903	-42,0742	-35,9810
5,34	61,2218	-11,5856	-42,1932	-36,4023
5,35	62,6869	-10,9660	-42,3061	-36,8250
5,36	64,1678	-10,3321	-42,4127	-37,2485

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
5.37	65,6657	-9,6823	-42,5124	-37,6731
5.38	67,1818	-9,0184	-42,6060	-38,0986
5.39	68,7140	-8,3390	-42,6928	-38,5251
5.40	70,2637	-7,6440	-42,7727	-38,9524
5.41	71,8308	-6,9336	-42,8459	-39,3808
5.42	73,4144	-6,2076	-42,9117	-39,8096
5.43	75,0158	-5,4652	-42,9700	-40,2390
5.44	76,6338	-4,7072	-43,0210	-40,6691
5.45	78,2687	-3,9328	-43,0642	-41,0993
5.46	79,9216	-3,1418	-43,0997	-41,5303
5.47	81,5916	-2,3340	-43,1268	-41,9613
5.48	83,2786	-1,5095	-43,1459	-42,3926
5.49	84,9829	-0,6683	-43,1568	-42,8241
5.50	86,7044	0,1901	-43,1593	-43,2557
5.51	88,4432	1,0656	-43,1531	-43,6874
5.52	90,1996	1,9589	-43,1381	-44,1189
5.53	91,9722	2,8693	-43,1141	-44,5500
5.54	93,7637	3,7984	-43,0807	-44,9812
5.55	95,5716	4,7453	-43,0378	-45,4117
5.56	97,3960	5,7095	-42,9858	-45,8418
5.57	99,2383	6,6927	-42,9238	-46,2714
5.58	101,0984	7,6950	-42,8516	-46,7003
5.59	102,9739	8,7148	-42,7695	-47,1281
5.60	104,8687	9,7544	-42,6775	-47,5558
5.61	106,7790	10,8125	-42,5744	-47,9818
5.62	108,7074	11,8903	-42,4609	-48,4071
5.63	110,6512	12,9865	-42,3366	-48,8309
5.64	112,6133	14,1029	-42,2013	-49,2538
5.65	114,5922	15,2390	-42,0547	-49,6752
5.66	116,5866	16,3950	-41,8959	-50,0944
5.67	118,5994	17,5706	-41,7277	-50,5130
5.68	120,6277	18,7666	-41,5449	-50,9292
5.69	122,6730	19,9835	-41,3507	-51,3434
5.70	124,7352	21,2199	-41,1454	-51,7563

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
5,71	126,8144	22,4785	-40,9265	-52,1666
5,72	128,9091	23,7571	-40,6952	-52,5746
5,73	131,0207	25,0568	-40,4514	-52,9806
5,74	133,1478	26,2810	-40,1365	-53,3359
5,75	135,2903	27,7192	-39,9238	-53,7842
5,76	137,4497	29,0832	-39,6396	-54,1819
5,77	139,6260	30,4693	-39,3416	-54,5770
5,78	141,8144	31,8755	-39,0304	-54,9689
5,79	144,0228	33,3053	-38,7041	-55,3574
5,80	146,2448	34,7564	-38,3640	-55,7429
5,81	148,4819	36,2301	-38,0089	-56,1246
5,82	150,7340	37,7256	-37,6395	-56,5029
5,83	153,0028	39,2449	-37,2545	-56,8776
5,84	155,2847	40,7859	-36,8546	-57,2481
5,85	157,5988	42,3504	-36,4385	-57,6143
5,86	159,8947	43,9378	-36,0077	-57,9772
5,87	162,2208	45,5484	-35,5601	-58,3349
5,88	164,5613	47,1825	-35,0964	-58,6882
5,89	166,9145	48,8394	-34,6161	-59,0363
5,90	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,3805
5,91	171,6653	52,2255	-33,6055	-59,7187
5,92	174,0609	53,9542	-33,0746	-60,0521
5,93	176,0704	55,7067	-32,5268	-60,3806
5,94	178,8917	57,4833	-31,9609	-60,7030
5,95	181,3266	59,2852	-31,3764	-61,0195
5,96	183,7730	61,7303	-30,7751	-61,0201
5,97	186,2326	63,3087	-30,1546	-61,4608
5,98	188,7034	64,8347	-29,5155	-61,9332
5,99	191,1870	66,7344	-28,8575	-62,2251
6,00	193,6813	68,6578	-28,2116	-62,5106
6,01	196,1881	70,6079	-27,4846	-62,7889
6,02	198,7051	72,5822	-26,7689	-63,0603
6,03	201,2322	74,5817	-26,0330	-63,3241
6,04	203,7710	76,6067	-25,2774	-63,5810

ax	A _{ax}	B _{ax}	C _{ax}	D _{ax}
6,05	206,3194	78,6574	-24,5009	-63,8299
6,06	208,8770	80,7331	-23,7041	-64,0708
6,07	211,4435	82,8350	-22,8855	-64,3032
6,08	214,0209	84,9622	-22,0469	-64,5282
6,09	216,6066	87,1150	-21,1870	-64,7447
6,10	219,2004	89,2947	-20,3043	-64,9518
6,11	221,8019	91,4992	-19,4005	-65,1503
6,12	224,4109	93,7300	-18,4743	-65,3394
6,13	227,0292	95,9871	-17,5263	-65,5200
6,14	229,6542	98,2709	-16,5551	-65,6906
6,15	232,2833	100,5538	-15,5602	-65,8372
6,16	234,9208	102,9168	-14,5425	-66,0010
6,17	237,5639	105,2793	-13,5016	-66,1413
6,18	240,2122	107,6680	-12,4370	-66,2711
6,19	242,8654	110,0832	-11,3485	-66,3901
6,20	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
6,21	248,1847	114,9934	-9,0980	-66,5947
6,22	250,8499	117,4888	-7,9352	-66,6796
6,23	253,5208	120,0113	-6,7484	-66,7538
6,24	256,1917	122,5599	-5,5350	-66,8150
6,25	258,8649	125,1350	-4,2969	-66,8640
6,26	261,5398	127,7369	-3,0321	-66,9005
6,27	264,2159	130,3657	-1,7414	-66,9242
6,28	266,8926	133,0195	-0,4257	-66,9354
	267,7468	133,8725	0	-66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	-66,9175
6,40	298,8909	166,9422	17,5362	-65,9486
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	-63,3105
6,60	349,2554	231,8801	57,2528	-58,6870
6,70	371,4244	267,9374	82,2255	-51,7430
6,80	390,2947	306,0558	110,9087	-42,1190
6,90	404,7145	347,3499	143,4927	-30,1819
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	-13,2842

a_x	A_{ax}	B_{ax}	C_{ax}	D_{ax}
7,10	414,8263	428,2849	220,8718	6,7296
7,20	407,4216	469,4772	265,7664	31,0281
7,30	389,3783	509,4157	314,7265	60,0189
7,40	358,7306	546,9343	367,5688	94,1019
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	113,6506
7,60	251,0334	609,0402	483,5233	179,0035
7,70	169,3472	630,2295	545,5557	230,4412
7,80	65,8475	642,1835	609,2596	288,1681
$5/2\pi$	0	643,9927	643,9926	321,9964
7,90	-62,0375	642,5872	673,6057	352,3123
8,00	-216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,10	-401,1674	598,2344	798,8179	499,7008
8,20	-617,4142	547,5808	856,2878	582,4975
8,30	-867,9091	4735998	907,5542	670,7544
8,40	-1154,6587	372,7866	950,1158	763,7226
8,50	-1479,3701	241,4136	981,0984	860,3917
8,60	-1843,2880	75,6088	997,2527	959,4484
8,70	-2247,0402	-128,5824	994,9377	1059,2289
8,80	-2690,4845	-375,1167	970,1255	1157,6839
8,90	-3172,6717	-667,9794	918,3664	1252,3561
9,00	-3691,4815	-1010,8800	834,8607	1340,3007
9,10	-4243,5551	-1407,3690	714,4085	1418,0930
9,20	-4824,0587	-1860,5365	551,4928	1481,7611
9,30	-5426,5154	-2372,9486	340,3091	1526,7834
9,40	-6042,3167	-2946,2708	74,8875	1548,0229
3π	-6195,8239	-3097,9120	0	1548,9560
9,50	-6660,9594	-3581,4756	-250,9959	-1539,7419
9,60	-7269,3664	-4278,1693	-643,4861	-1495,5985
9,70	-7851,7063	-5034,4714	-1108,6183	-1408,6174
9,80	-8389,5687	-5847,0360	-1652,2517	-1271,2663
9,90	-8860,9431	-6710,2070	-2279,7354	-1075,3680
10,00	-9240,8733	7616,1462	-2995,7095	821,3636

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Y Tô và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu*, tập I và II. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1969.
2. Bùi Trọng Lưu và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu*. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1973.
3. М.М. Филоненко – Бородич. *Курс сопротивления материалов*, том I, II. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва, 1956.
4. В.И. Феодосьев. *Сопротивление материалов*. Издательство "Наука". Москва, 1970.
5. С.Д. Пономарев. *Расчёты на прочность в машиностроении*. Москва, 1965.
6. B. Jaoul. *Etude de la plassticité et application aux metaux*. Dunod. Paris, 1965.
7. Witold Nowacki. *Teoria sprezystosci*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa, 1970.
8. С.П. Демидов. *Теория упругости*. Москва, "Высшая школа", 1979.
9. А.В. Даркова. *Строительная механика*. Москва, "Высшая школа", 1976.
10. В.А. Киселев. *Строительная механика*. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва, 1960.
11. P. Stepin. *Strength of materials*. Foreign Languages Publishing House. Moscow.
12. F.V. Warnock. *Strength of materials*. London Sir Isaac Pitman and Sons Ltd.
13. L.I. Xêđôp. *Cơ sở môi trường liên tục*, tập II. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
14. N.J. Bédukhôp. *Cơ sở lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến*. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
15. Jiri Sejnoha. Pruznos, pevnost, plasticita. Vydatelstvi cvut. Praha 1.
16. С.П. Тимошенко. *Сопротивления материалов*, том 1, 2. ОГИЗ, 1946.
17. Н.М. Беляев. *Сопротивления материалов*. Москва, 1965.
18. И.М. Воронков. *Курс теоретической механики*. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва, 1957.
19. Г.А. Смирнов – Аляев. *Сопротивление материалов пластическому деформированию*. Издательство "Машиностроение", 1978.
20. А. Илюшин. *Механика сплошной среды*. Издательство московского университета, 1978.
21. Janusz Walczaz. *Wytry malos'c' materialow oraz podstawytesru sprezystos' ci i platycznos' ci*.
22. М.М. Филоненко Бородим – Курс сопротивления материалов, 1956.
23. Trần Văn Thông. Luận án phó tiến sĩ (1986) ghép nhiều bìng.
24. Buhot G. Thuillier P. Cours de mécanique. T. 2. Résistance des matériaux Masson. Paris, 1986.
25. Đặng Việt Cương, Nguyễn Nhật Thắng, Nhữ Phương Mai. S.B.V.L, 4/2003
26. Nguyễn Lương Dũng. Phương pháp phân tử hữu hạn, 12/1993.

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU.....	3
------------------	---

PHẦN I

CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

<i>Chương 1. MỞ ĐẦU.....</i>	5
§1–1. Nhiệm vụ của môn học	5
§1–2. Những ngành khác nhau của cơ học vật rắn biến dạng	6
§1–3. Lịch sử phát triển của môn học	9
§1–4. Nguyên lí Xanh Vơňang	10
<i>Chương 2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT.....</i>	11
§2–1. Ứng suất	11
§2–2. Trạng thái ứng suất.....	12
§2–3. Phương chính và ứng suất chính.....	19
§2–4. Vòng tròn Mo (Mohr) ứng suất.....	22
§2–5. Ứng suất bát diện.....	26
§2–6. Trạng thái ứng suất cầu và trạng thái ứng suất lệch.....	27
§2–7. Mặt ứng suất pháp	28
§2–8. Phương trình vi phân cân bằng	30
<i>Chương 3. TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG.....</i>	34
§3–1. Chuyển vị	34
§3–2. Biến dạng	34
§3–3. Phương chính – Biến dạng chính	39
§3–4. Vòng tròn Mo (Mohr) biến dạng	41
§3–5. Tenxơ biến dạng cầu và biến dạng lệch.....	42
§3–6. Phương trình tương thích	42
<i>Chương 4. QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG.....</i>	49
§4–1. Các hằng số đàn hồi	48
§4–2. Trạng thái ứng suất đơn	53
§4–3. Trạng thái ứng suất khối. Định luật Húc tổng quát	54
§4–4. Thế năng biến dạng đàn hồi	55
§4–5. Các phương pháp cơ bản giải bài toán đàn hồi	57

PHẦN II
CÁC BÀI TOÁN THUỘC VỀ THANH

Chương 5. ĐẶC TRUNG HÌNH HỌC CỦA MỘT HÌNH PHẲNG	68
§5–1. Định nghĩa	68
§5–2. Công thức chuyển trực song song.....	69
§5–3. Công thức xoay trực.....	70
§5–4. Một số ví dụ	72
Chương 6. THANH, NỘI LỰC TRONG THANH	82
§6–1. Định nghĩa về thanh và liên kết.....	82
§6–2. Nội lực	84
§6–3. Tương quan giữa nội lực và ứng suất	85
§6–4. Tương quan giữa nội lực và cường độ tải trọng phân bố.....	85
§6–5. Biểu đồ nội lực	86
Chương 7. BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO (hoặc nén)	94
§7–1. Công thức ứng suất.....	94
§7–2. Các trường hợp riêng quan trọng	96
§7–3. Thí nghiệm kéo và nén vật liệu	103
§7–4. Các điều kiện dẻo – điều kiện bền	107
Chương 8. BÀI TOÁN UỐN NGANG PHẲNG	116
§8–1. Công thức của ứng suất tiếp	116
§8–2. Điều kiện bền.....	121
§8–3. Dầm chống uốn đều và dầm có mặt cắt hợp lí	123
Chương 9. ĐƯỜNG ĐÀN HỒI	127
§9–1. Định nghĩa	127
§9–2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi.....	128
§9–3. Xác định đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn ..	129
§9–4. Phương pháp thông số ban đầu	132
§9–5. Phương pháp tải trọng giả tạo	139
Chương 10. BÀI TOÁN XOẮN THUẦN TÚY	144
§10–1. Xoắn thanh tròn	144
§10–2. Xoắn thanh mặt cắt bất kì	148
Chương 11. TÍNH CÁC MỐI NỐI GHÉP	160
§11–1. Tính mối nối bằng đinh tán.....	160
§11–2. Tính mối nối bằng hàn	166
§11–3. Tính móng gỗ.....	169

Chương 12. BÀI TOÁN CHỊU LỰC PHÚC TẬP	173
§12–1. Bài toán uốn và xoắn đồng thời.....	173
§12–2. Bài toán uốn cộng kéo,cộng xoắn.....	176
§12–3. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn	183
§12–4. Tính thanh có độ cong lớn.....	186
Chương 13. DÂM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI	198
§13–1. Khái niệm.....	198
§13–2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi.....	199
§13–3. Dầm dài vô hạn chịu một lực tập trung.....	202
§13–4. Dầm dài nửa vô hạn.....	206
§13–5. Đường ảnh hưởng	206
§13–6. Dầm dài hữu hạn	209
PHỤ LỤC.....	217
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	240

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH - DN

TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập :

ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :

BÙI QUANG TUẤN

Chép bản :

MINH CHÂU

SỨC BỀN VẬT LIỆU - TẬP 1

Mã số: 7B638M6-DAI

In 1000 cuốn, khổ 19 x 27 cm. Tại Công ty Cổ phần in Anh Việt

Số đăng ký KHXB: 10 - 2006/CXB/ 153 - 2018/GD.

In xong nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2006.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN – HÀ NỘI

**TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KĨ THUẬT
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

1. Sức bền vật liệu – Tập một	Lê Quang Minh Nguyễn Văn Vượng
2. Sức bền vật liệu – Tập hai	Lê Quang Minh Nguyễn Văn Vượng
3. Bài tập Sức bền vật liệu	Nguyễn Văn Vượng
4. Tự động điều khiển các quá trình công nghệ	Trần Doãn Tiến
5. Nguyên lý máy – Tập một	Đinh Gia Tường (CB)
6. Nguyên lý máy – Tập hai	Đinh Gia Tường (CB)
7. Chi tiết máy – Tập một	Nguyễn Trọng Hiệp
8. Chi tiết máy – Tập hai	Nguyễn Trọng Hiệp
9. Thiết kế chi tiết máy	Nguyễn Trọng Hiệp Nguyễn Văn Lãm

*Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở địa phương
hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :*

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.



8934980692981



Giá: 34.500Đ