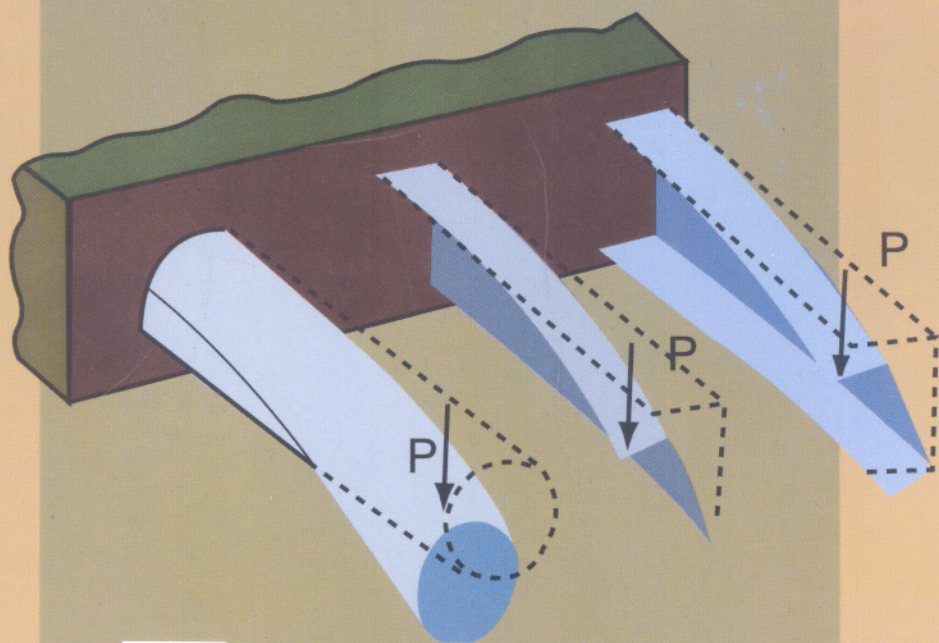


LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI

*(Tái bản lần thứ sáu)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

## CHƯƠNG XII

### TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

Trong các chương trước ta đã tính được chuyển vị mặt cắt ngang của thanh trong những trường hợp thanh chịu lực đơn giản như kéo nén đúng tâm, uốn ngang phẳng, xoắn thuần túy... Để tính chuyển vị cho hệ thanh khi chịu lực phức tạp thì ta phải sử dụng phương pháp năng lượng. Trong chương này ta sẽ đề cập đến phương pháp đó.

#### § 12-1. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ

Người đầu tiên phát biểu nguyên lý này là Bécnu-li, sau đó Lagrăng đã hoàn thiện và đã trình bày trong sách giáo khoa cơ giải tích. Sách này được dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Nga và xuất bản tại Matxcova năm 1950.

Nguyên lý được phát biểu như sau :

*Để một hệ có các liên kết lí tưởng ở trạng thái cân bằng tại một vị trí nào đó, điều kiện cần và đủ là tổng công của tất cả các lực đặt lên hệ trong các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé là bằng không.*

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé sao cho trong các chuyển vị đó các liên kết của hệ thống không bị phá vỡ.

Một liên kết lí tưởng là một liên kết mà tổng công của các phản lực trong tất cả mọi chuyển vị khả dĩ của hệ là bằng không.

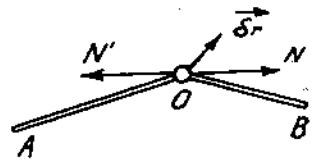
Các trường hợp sau đây có thể xem là những liên kết lí tưởng :

1. Một chất điểm hoặc một vật rắn luôn luôn tì lên một mặt nhẵn cố định. Vì mặt nhẵn nên không có lực ma sát, phản lực liên kết có phương theo pháp tuyến với bề mặt. Các chuyển vị khả dĩ chỉ có thể xảy ra trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt tì và như vậy công của các phản lực trong các chuyển vị đó là bằng không.

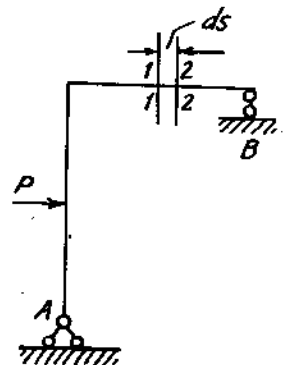
2. Các liên kết là bất động, nghĩa là phản lực liên kết không gây nên công.

3. Khớp nối giữa hai vật thể. Khớp này tạo nên các phản lực ngược chiều nên công của chúng trong các chuyển vị khả dĩ  $\delta r$  là bằng không (h. 12-1).

Ta hãy áp dụng nguyên lý trên cho một vật thể đàn hồi. Ví dụ có hệ đàn hồi được biểu diễn trên hình 12-2. Gọi  $\delta s$



H.12-1



H.12-2

là một phần tử vô cùng bé tách ra bởi hai mặt cắt (1-1) và (2-2) cách nhau một khoảng cách  $ds$ .

Hệ được xem như một tập hợp các phần tử đàn hồi  $ds$ . Dưới tác dụng của ngoại lực  $P$  và các phản lực  $R$  tại  $A$  và  $B$ , trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) xuất hiện các thành phần nội lực. Bây giờ ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ. Một chuyển vị như vậy chỉ có thể có được bằng cách đặt một hệ lực mới nào đó tạo cho hệ một trạng thái biến dạng mới hay làm cho hệ biến dạng bằng nhiệt độ. Ta nhận thấy công khả dĩ ở đây không phải chỉ có công  $A_{ng}$  do ngoại lực tạo nên mà còn có công khả dĩ  $A_n$  do nội lực tạo nên. Do đó ta có :

$$A_{ng} + A_n = 0 \quad (1)$$

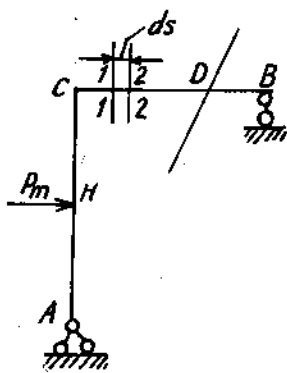
Đó là biểu thức của nguyên lý chuyển vị khả dĩ áp dụng cho một hệ đàn hồi.

## §12-2. CÔNG THỨC MO ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

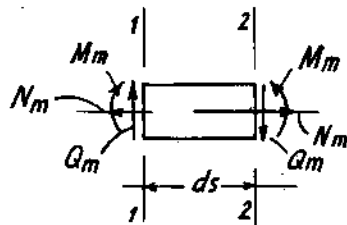
Trước hết ta hãy đề cập đến bài toán phẳng.

Bài toán đặt ra như sau : cho khung phẳng chịu lực như hình 12-3. Đòi hỏi ta phải tính chuyển vị theo phương  $k$  của trọng tâm mặt cắt qua  $D$ .

Gọi trạng thái chịu lực đã cho là trạng thái "m". Nghĩa là ngoại lực cũng như nội lực ở trạng thái này được dùng chỉ số  $m$  để đánh dấu. Chuyển vị theo phương  $k$  do lực ở trạng thái "m" gây nên được kí hiệu là  $\Delta_{km}$ . Ngoại lực và phản lực -  $P_m$  và  $R_m$  - cũng gây nên các chuyển vị cho một phần tử  $ds$  bất kì nào đó của hệ. Thực vậy, gọi  $N_m$ ,  $Q_m$  và  $M_m$  là các thành phần nội lực trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) của  $ds$  (h. 12-4) do  $P_m$  và  $R_m$  gây nên, các thành phần nội lực đó tạo nên các chuyển vị tương đối giữa hai mặt cắt (1-1) và (2-2) như sau :



H.12-3



H.12-4

1. Chuyển vị dọc theo chiều trục :

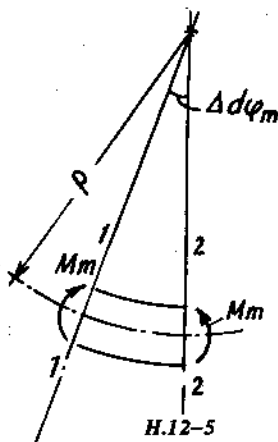
$$\Delta ds_m = \frac{N_m ds}{EF} \quad (2)$$

2. Chuyển vị góc tương đối (h. 12-5):

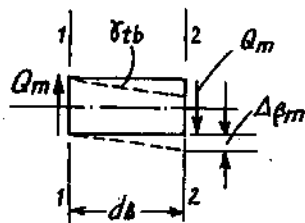
$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m ds}{EJ} \quad (3)$$

3. Chuyển vị trượt tương đối giữa hai mặt cắt (h. 12-6)

$$\Delta \beta_m = \gamma_{tb} ds \quad (4)$$



H.12-5



H.12-6

$\gamma_{tb}$  là góc trượt tỉ đối trung bình. Giá trị góc trượt đó tỉ lệ với ứng suất tiếp do  $Q_m$  gây nên trên các mặt cắt. Ta có thể tính trị số ứng suất tiếp trung bình với công thức :

$$\tau_{tb} = \eta \frac{Q_m}{F}$$

trong đó  $\eta$  là một hệ số điều chỉnh vì ứng suất tiếp do  $Q_m$  gây nên là phân bố không đều trên mặt cắt.

Ví dụ : với mặt cắt hình chữ nhật  $\eta = 1,2$

Với mặt cắt tròn  $\eta = \frac{32}{27}$

Với mặt cắt hình chữ I  $\eta \approx \frac{F}{F_{lồng}}$  ; F là diện tích toàn phần và  $F_{lồng}$  - diện tích của lòng chữ I.

Từ đó ta có :

$$\Delta\beta_m = \frac{\tau_{tb}}{G} ds = \eta \frac{Q_m ds}{GF}$$

Bây giờ ta hãy tưởng tượng tạo nên một trạng thái "k" bằng cách bỏ tất cả các ngoại lực ở trạng thái "m" và đặt vào phương "k" một lực  $P_k$  (h. 12-7).  $P_k$  và các phản lực  $R_k$  gây nên các thành phần nội lực  $N_k$ ,  $Q_k$  và  $M_k$  trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) (hình 12-8).

Vì hệ là một hệ cân bằng nên công của ngoại lực và nội lực của hệ trong bất kì một chuyển vị khả dĩ nào cũng phải bằng không.

Ta hãy chọn ngay trạng thái biến dạng của trạng thái "m" như là các chuyển vị khả dĩ. Công của ngoại lực khi đó là  $P_k \Delta_{km}$  ; còn công của nội lực thì ta chưa tính được nhưng ta phải có :

$$P_k \Delta_{km} + A_n = 0 \quad (5)$$

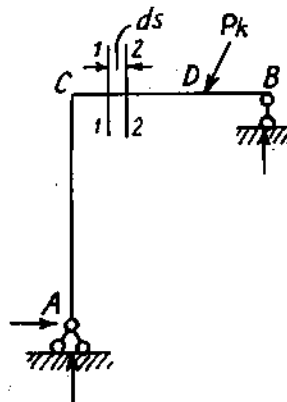
Ở đây ta chú ý thấy rằng các phản lực  $R_k$  tại A và B không sinh công vì các gối tựa đó bất động.

Để tính công  $A_n$  ta để ý đến phần tử  $ds$ . Các thành phần nội lực  $N_k$ ,  $Q_k$  và  $M_k$  trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) đối với phần tử lại là ngoại lực. Phần tử đó có các chuyển vị khả dĩ  $\Delta ds_m$ ,  $\Delta\beta_m$  và  $\Delta d\varphi_m$ . Công ngoại lực lúc này là :

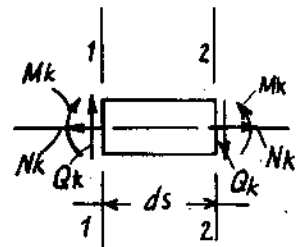
$$dA_{ng} = N_k \Delta ds_m + Q_k \Delta\beta_m + M_k \Delta d\varphi_m$$

Theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ ta phải có :

$$N_k \Delta ds_m + Q_k \Delta\beta_m + M_k \Delta d\varphi_m + dA_n = 0 \quad (6)$$



H. 12-7



H. 12-8

Từ đó ta có :

$$dA_n = - \left( \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \frac{N_k N_m ds}{EF} + \eta \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \right) \quad (7)$$

Vậy : công của nội lực của toàn hệ sẽ là :

$$A_n = - \left( \sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \eta \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \right) \quad (8)$$

Dấu tổng  $\sum$  ở đây để chỉ tổng các đoạn thanh trong hệ và dấu tích phân là để chỉ phép toán tích phân trên suốt chiều dài của mỗi đoạn thanh :

Thay (8) vào (5) ta có :

$$P_k \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \eta \quad (9)$$

Nếu đem chia cả hai vế cho  $P_k$  hay nói một cách khác trong trạng thái "k" lấy lực  $P_k = 1$  không có thứ nguyên thì từ đó ta có công thức của chuyển vị  $\Delta_{km}$ .

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m ds}{EF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_k Q_m ds}{GF} \quad (12-1)$$

Trong đó  $\bar{M}_k$ ,  $\bar{Q}_k$  và  $\bar{N}_k$  là các thành phần nội lực trong hệ do  $P_k = 1$  gây nên.

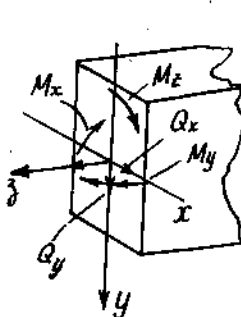
Công thức đó được gọi là công thức Mo.

Đối với bài toán không gian, khi trên các mặt cắt ngang có đầy đủ sáu thành phần nội lực thì công thức Mo sẽ có dạng như sau :

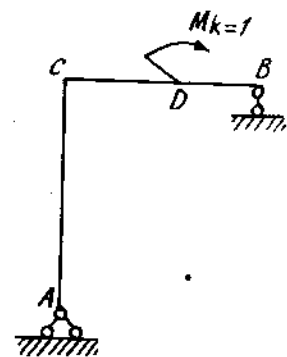
$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xm} dz}{EJ_x} + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym} dz}{EJ_y} + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm} dz}{EJ_\rho} + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_{zk} N_{zm} dz}{EF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{ym} dz}{GF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xm} dz}{GF} \end{aligned} \quad (12-2)$$

trong đó  $dz$  là độ dài của phần tử  $dz = ds$  và các thành phần nội lực được biểu diễn như trên hình 12-9.

Trên đây ta đã tìm chuyển vị thẳng theo phương k. Tất cả mọi điều ta vừa chứng minh cũng sẽ hoàn toàn đúng khi ta cần tìm góc xoay của mặt cắt ngang tại một nơi nào đó của hệ hay một cách rộng hơn, khi ta cần tìm chuyển vị thẳng tương đối hay góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại hai điểm bất kì nào đó của hệ. Khi đó ta sẽ tạo nên trạng thái "k" bằng cách đặt một mômen tập trung một hệ hai lực ngược chiều hay hai mômen ngược chiều không có thứ nguyên và có trị số bằng đơn vị.



H.12-9



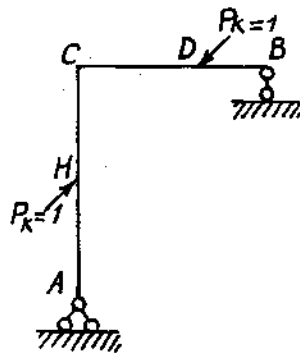
H. 12-10

Ký hiệu  $\Delta_{km}$ , tùy theo trường hợp, sẽ có nghĩa là góc xoay của mặt cắt ngang, độ dịch gần hay chuyển xa của hai trọng tâm hai mặt cắt và góc xoay tương đối của hai mặt cắt.

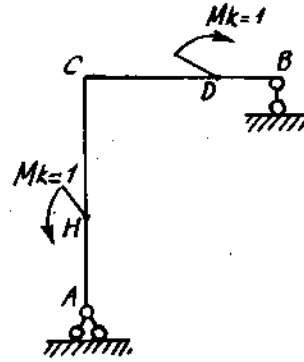
Ví dụ để tìm góc xoay của mặt cắt D ta tạo nên trạng thái "k", như trên hình 12-10.

Để tính độ dịch gần giữa hai điểm D, H ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 12-11.

Để tính góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang qua D và H ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 12-12.



H. 12-11



H. 12-12

### §12-3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG

#### 1. Định lý về công tương hỗ (còn gọi là định lý Bét-ti)

Định lý phát biểu như sau :

*Công của ngoại lực ở trạng thái "m" trên chuyển vị của trạng thái "k" là bằng công của ngoại lực ở trạng thái "k" thực hiện trên chuyển vị của trạng thái "m".*

Thực vậy, từ biểu thức "9" ta luôn luôn có :

$$P_k \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk} = \sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \frac{\eta Q_k Q_m ds}{GF}$$

2. Định lý về chuyển vị đơn vị. Nếu hai trạng thái "m" và "k" đều là trạng thái do lực đơn vị tác dụng theo phương m và phương k gây nên, khi đó các chuyển vị  $\Delta_{km}$  và  $\Delta_{mk}$  là các chuyển vị đơn vị và được kí hiệu là  $\delta_{km}$  và  $\delta_{mk}$ .

Ta dễ dàng thấy

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \quad (12-3)$$

Thật vậy vì :

$$\delta_{km} = \delta_{mk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m ds}{EF} + \sum \int \frac{\eta \bar{Q}_k \bar{Q}_m ds}{GF}$$

Do đó ta có thể phát biểu định lý như sau :

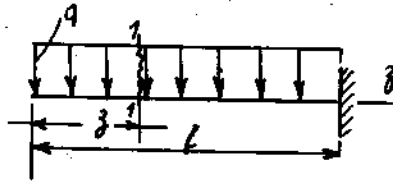
*Chuyển vị đơn vị theo phương k do lực đơn vị theo phương m gây nên là bằng chuyển vị theo phương m do lực đơn vị theo phương k gây nên.*

Ví dụ 1. Cho dầm chịu lực như hình 12-13. Xác định độ võng và góc xoay tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt đối với chuyển vị của dầm).

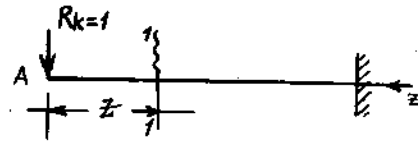
Độ cứng  $EJ_x$  của dầm là hằng số.

Bài giải :

Ta xem trạng thái đã cho của dầm là trạng thái "m". Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Gọi z là hoành độ của mặt cắt (1-1). Mômen uốn  $M_m$  trên mặt cắt đó có trị số là :



H.12-13



H.12-14

$$M_m = -q \frac{z^2}{2} \quad (a)$$

Để tính độ võng tại A ta tạo nên trạng thái "k" như hình 12-14. Mômen uốn trên mặt cắt (1-1) là :

$$M_k = -z \quad (b)$$

Ở đây ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, còn lực dọc  $N_z$  là bằng không, do đó chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ có trị số là

$$\Delta_{km} = y_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_m dz}{EJ_x} = \int_0^l q \cdot \frac{z^3}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} dz$$

$$y_A = \frac{qz^4}{8EJ_x}$$

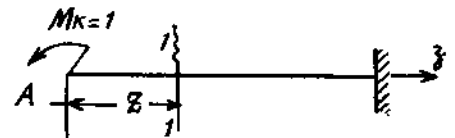
Để tính góc xoay tại A ta tạo nên trạng thái "k" như hình 12-15. Khi đó ta có :

$$M_k = -1$$

Vậy :

$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_m dz}{EJ_x}$$

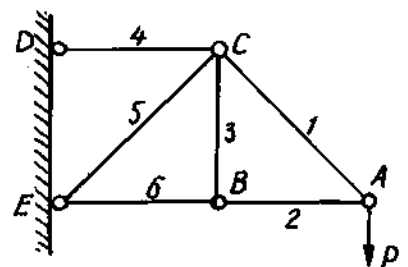
$$\theta_A = \int_0^l q \frac{z^2}{2} \cdot \frac{dz}{EJ_x} = \frac{qz^3}{6EJ_x}$$



H.12-15

Các kết quả nhận được trên đây là những trị số dương, điều đó có nghĩa là độ võng và góc xoay cùng chiều với  $P_k$  và  $M_k$ .

Ví dụ 2. Cho giàn chịu lực như hình 12-16, tìm chuyển vị thẳng đứng tại A. Các thanh đều cùng làm bằng một loại vật liệu và cùng có mặt cắt như nhau.



H.12-16



**Bài giải :**

Ta xem trạng thái đã cho của hệ là trạng thái "m". Trị số lực dọc trong các thanh như sau :

$$N_m^1 = P\sqrt{2} ; \quad N_m^2 = -P$$

$$N_m^3 = 0 ; \quad N_m^4 = 2P$$

$$N_m^5 = -P\sqrt{2} ; \quad N_m^6 = -P$$

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A ta bỏ lực P đi và thay vào đó một lực  $P_k = 1$ . Trị số nội lực trong các thanh sẽ là :

$$\bar{N}_k^1 = \sqrt{2} ; \quad \bar{N}_k^2 = -1 ; \quad \bar{N}_k^3 = 0$$

$$\bar{N}_k^5 = -\sqrt{2} ; \quad \bar{N}_k^6 = -1.$$

Ở đây mô men uốn và lực cắt bằng không nên chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là :

$$\Delta_{km} = y_A = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_k N_m ds}{EF}$$

$$y_A = \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot 1 \cdot a}{EF} + \frac{2P\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a}{EF} + \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot 1 \cdot a}{EF} = (10 + 4\sqrt{2}) \frac{Pa}{EF}$$

#### § 12-4. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ CỦA VÊRÊSAGHIN

Khi mặt cắt ngang của thanh không thay đổi hay thay đổi trên từng đoạn, khi đó các tích phân trong công thức  $M_0$  (12-1) sẽ có dạng sau đây :

$$I = \int_0^l F(z) \cdot f(z) dz \quad (10)$$

trong đó ta luôn luôn có một hàm số bậc nhất. Thực vậy vì các biểu đồ nội lực trong trạng thái "k" là do lực tập trung hay mômen tập trung gây nên. Trong trường hợp đó phép tích phân có thể thực hiện một cách đơn giản như sau :

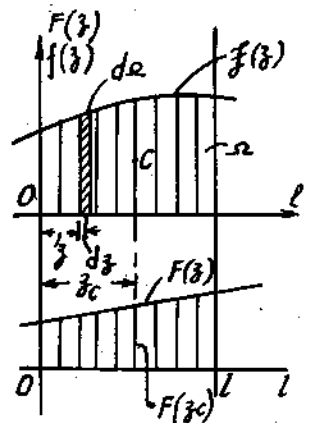
Ta giả thiết trên một đoạn dài từ 0 đến l nào đó của thanh hàm số  $f(z)$  là một đường cong bất kì còn  $F(z)$  là một đường thẳng có phương trình :

$$F(z) = az + b \quad (11)$$

Các hàm số đó được biểu diễn như trên hình 12-7.

Dem thay (11) vào (10) ta được :

$$I = \int_{\Omega} (az + b) \cdot f(z) dz \quad (12)$$



H.12-17

trong đó tích  $f(z)dz$  là vi phân diện tích  $d\Omega$  của biểu đồ  $f(z)$ . Ta có thể viết (12) lại dưới dạng :

$$I = \int_{\Omega} (az + b)d\Omega = a \int_{\Omega} z d\Omega + b \int_{\Omega} d\Omega \quad (13)$$

trong đó :  $\int_{\Omega} d\Omega$  là diện tích  $\Omega$  của biểu đồ  $f(z)$  từ 0 đến 1 và  $\int_{\Omega} z d\Omega$  là mômen tĩnh của  $\Omega$  đối với trục tung.

Trị số này có thể tính với biểu thức :

$$\int_{\Omega} z d\Omega = z_c \Omega$$

trong đó :  $z_c$  là hoành độ trọng tâm của  $\Omega$ .

Vậy biểu thức (13) có thể được viết lại dưới dạng :

$$I = az_c \Omega + b\Omega = \Omega (az_c + b) \quad (14)$$

trong đó  $az_c + b = f(z_c)$  là tung độ của biểu đồ  $F(z)$  tại hoành độ  $z_c$  của biểu đồ  $f(z)$ . Vậy :

$$I = \Omega F(z_c) \quad (12-4)$$

**Ví dụ 3.** Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như trên hình 12-18 (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).

*Bài giải :*

Ta hãy tìm góc xoay tại A. Tạo nên trạng thái "k" (h. 12-19). Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt nên góc xoay tại A sẽ được tính với biểu thức :

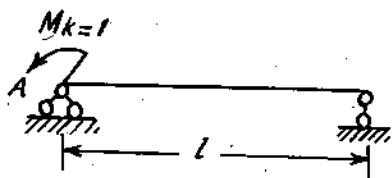
$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$



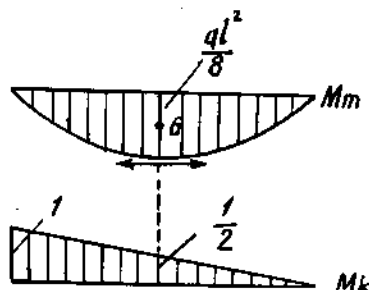
H.12-18

Các biểu đồ  $M_m$  và  $\bar{M}_k$  được biểu diễn như trên hình 12-20. Theo phép nhân Verésaghin ta có :

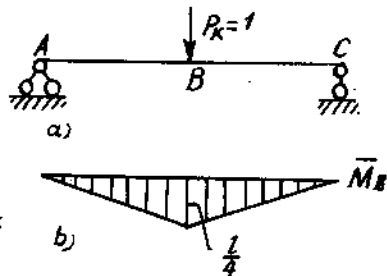
$$\theta_A = -\frac{2}{3} q \frac{l^2}{8} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}$$



H.12-19



H.12-20



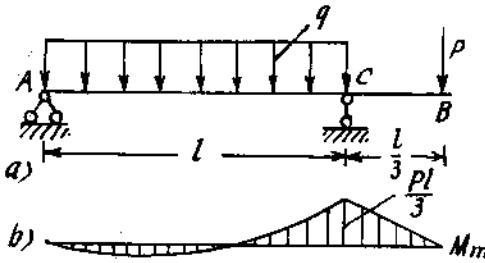
H.12-21

Kết quả mang dấu âm (vì hai biểu đồ có thứ căng khác nhau) điều đó có nghĩa là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều của  $M_k$  đã chọn. Để tìm độ võng tại B ta tạo nên trạng thái "k" (h. 12-21). Biểu đồ mômen  $M_k$  được biểu diễn trên hình 12-21b.

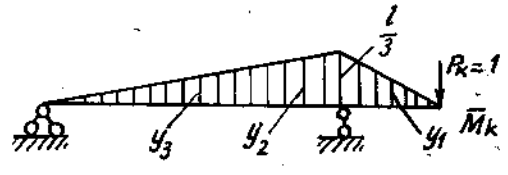
Ở đây ta nhận thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ  $\bar{M}_k$  được biểu diễn bằng các đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính biểu thức tích phân ta cũng phải chia biểu đồ  $M_m$  theo hai phần từ A đến B và từ B đến C. May mắn ở đây biểu đồ là đối xứng nên ta có thể tính một phía và đem nhân đôi để có nghiệm.

$$\Delta_{km} = y_B = 2 \frac{2}{3} q \frac{l^2}{8} \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{EJ_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$

**Ví dụ 4.** Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như trên hình 12-22a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).



H. 12-22



H. 12-23

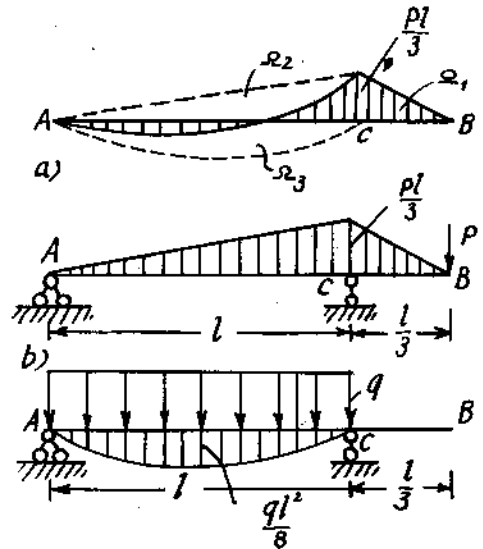
**Bài giải :**

Biểu đồ mômen ở trạng thái "m" được biểu diễn trên hình 12-22b. Để tìm chuyển vị tại B, ta tạo ra trạng thái "k" (h.12-23), biểu đồ mômen  $M_k$  cũng được biểu diễn trên hình đó.

Ta nhận thấy ngay phép nhân biểu đồ Verésaghin giữa hai biểu đồ  $M_m$  và  $\bar{M}_k$  là rất phức tạp vì khó xác định trọng tâm các diện tích của  $M_m$  trong khoảng AC. Để tránh sự phức tạp đó ta có thể xem biểu đồ  $M_m$  trong khoảng đó như tổng cộng của một biểu đồ bậc nhất và một đường bậc hai (h.12-24a). Điều đó cũng giống như chúng ta đã xem rằng trạng thái "m" là tổng cộng của hai trạng thái : trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (h.12-24b).

Với cách đó ta có thể thực hiện được phép nhân một cách dễ dàng :

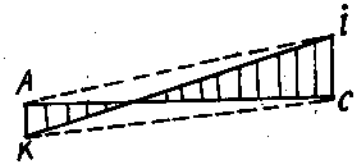
$$\begin{aligned} \Delta_{km} = y_B &= \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x} = (\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3) \frac{1}{EJ_x} = \\ &= \left( \frac{1}{2} P \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} + \frac{1}{2} \cdot P \frac{l}{3} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \right) \frac{1}{EJ_x} \end{aligned}$$



H.12 - 24

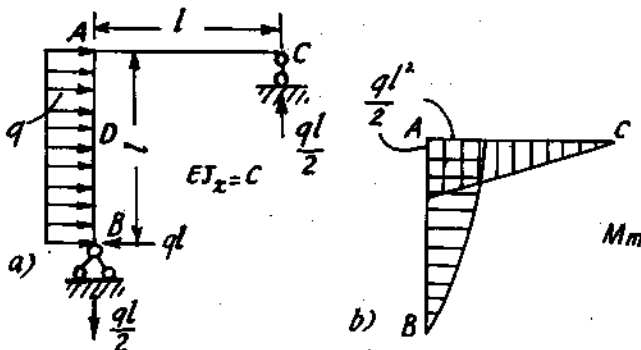
$$y_B = \frac{4Pl^3}{81EJ_x} - \frac{ql^4}{72EJ_x}$$

Ghi chú : Tương tự như trên, nếu gặp trường hợp biểu đồ trong đó nếu AC là đường thẳng IK cắt qua trục hoành (h. 12-25) thì ta có thể xem biểu đồ đó là tổng của các biểu đồ biểu diễn bởi các đường AI và KC.



H.12 - 25

Ví dụ 5. Tìm chuyển vị ngang tại A và góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt tại gối tựa A và C của khung chịu lực như hình vẽ (h. 12-26a). Giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị của khung.

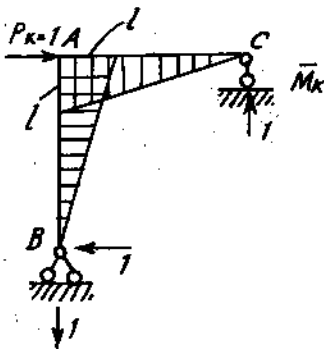


H.12 - 26

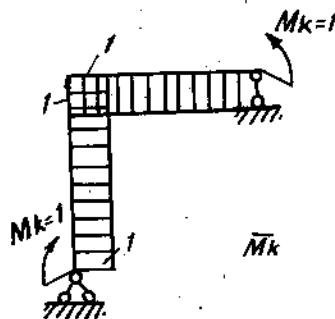
Bài giải :

Ta xem trạng thái chịu lực của khung là trạng thái "m". Biểu đồ  $M_m$  được biểu diễn như trên hình 12-26b.

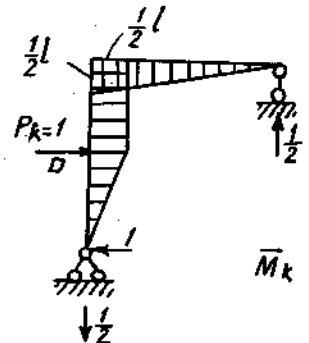
Để tìm chuyển vị ngang tại A ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 12-27.



H.12-27



H.12-28



H.12-29

Chuyển vị ngang tại A sẽ là :

$$\Delta_{km} = y_A = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x}$$

$$y_A = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} l \frac{2}{3} \cdot l + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} l \frac{5}{8} l \right) \frac{1}{EJ_x}$$

$$y_A = \frac{3ql^4}{8EJ_x}$$

Để tìm góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt B và C ta tạo nên trạng thái "k" như hình 12-28.

Ta có :

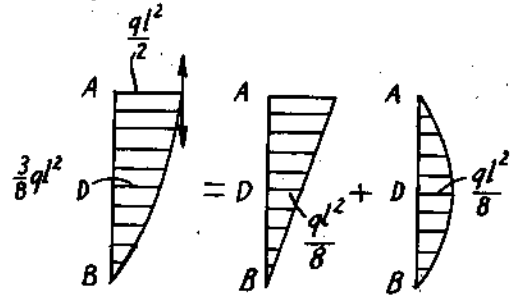
$$\Delta_{km} = \theta_{BC} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x}$$

$$q_{BC} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} l + \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \frac{1}{EJ_x} = \frac{7}{12} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}$$

Ví dụ 6. Với khung chịu lực trên đây, hãy tìm chuyển vị ngang tại D là điểm giữa của AB.

*Bài giải :*

Tạo nên trạng thái "k" như hình 12-29, ta nhận thấy phép nhân biểu đồ Verésaghin trong đoạn AB trở nên phức tạp, vì ta phải chia biểu đồ đó thành hai phần trên hai đoạn AD và DB mà trọng tâm mỗi phần ta đều chưa xác định. Để tránh khó khăn đó ta xem biểu đồ  $M_m$  trên đoạn AB như tổng hai biểu đồ (h. 12-30).



H. 12-30

Với cách đó ta thực hiện được phép nhân Verésaghin dễ dàng :

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x}$$

$$y_D = \left[ \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + 2 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \left( \frac{ql^2}{2} + \frac{2ql^2}{8} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} \right] \frac{1}{EJ_x}$$

$$y_D = \frac{89}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$

## CHƯƠNG XIII

### GIẢI BÀI TOÁN SIÊU TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

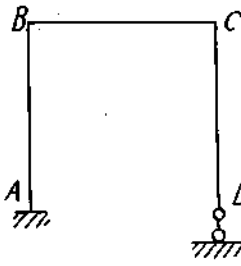
#### § 13-1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chương này ta chỉ xét bài toán phẳng. Giả sử hệ thanh là một hệ phẳng. Lực tác dụng cũng như chuyển vị của hệ chỉ xảy ra trong mặt phẳng của hệ. Nói một cách khác, ta xem như hệ chỉ có quyền di động trong mặt phẳng của hệ. Như vậy hệ có ba bậc tự do ; hai chuyển động tịnh tiến và một chuyển động quay trong mặt phẳng của hệ. Để cố định hệ ta cần ba liên kết đơn như đã nói trong chương VI. Số phương trình cân bằng tĩnh học là vừa đủ để xác định các phản lực trong các liên kết đó. Một bài toán như vậy được gọi là bài toán tĩnh định (h. 13-1).

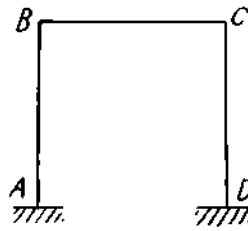
Nếu số liên kết nhiều hơn số liên kết cần thiết để giữ cho hệ cố định thì đó là một bài toán siêu tĩnh. Ví dụ với hệ trên hình 13-2. Để giữ cho hệ cố định ta chỉ cần có ngàm tại A. Liên kết đơn tại D làm tăng thêm độ cứng của hệ song để xác định các phản lực ta cần phải có bốn phương trình vì có bốn phản lực là ẩn số, nghĩa là ngoài ba phương trình cân bằng tĩnh học ta phải tìm cách thiết lập thêm phương trình thứ tư. Không có cách nào khác là phải dựa vào điều kiện biến dạng và chuyển vị của hệ để thiết lập phương trình này.



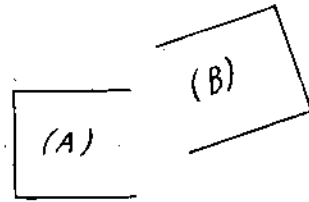
H. 13-1



H. 13-2



H. 13-3



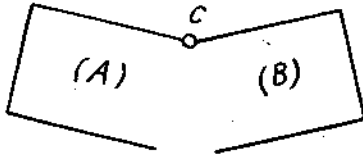
H. 13-4

Số liên kết thêm sẽ là số bậc siêu tĩnh của hệ. Có bao nhiêu liên kết thêm thì phải có thêm bấy nhiêu phương trình để giải hệ. Ví dụ với hệ trên hình 13-3 số bậc siêu tĩnh là ba vì một ngàm tương đương với ba liên kết đơn :

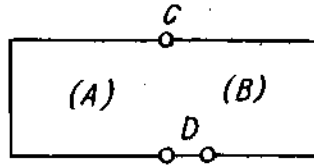
Các liên kết ta vừa nói trên đây là các liên kết ngoại. Các liên kết đó nối hệ với trái đất hay với một hệ cố định nào khác.

Tương tự ta có thể xét các liên kết giữa các phần đối với nhau trong cùng một hệ. Ví dụ xét hai hệ (A) và (B) trên hình 13-4.

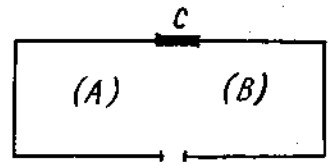
Xem (A) là cố định : (B) đối với (A) có ba bậc tự do. Nếu nối (B) vào (A) bằng khớp C (h. 13-5), khung (B) chỉ còn quay quanh C đối với (A). Vậy một khớp tương



H.13-5

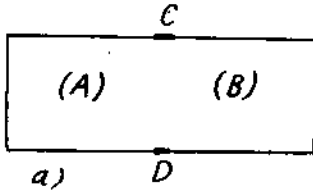


H.13-6

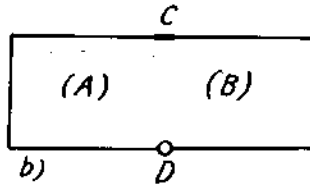


H.13-7

đương với hai liên kết đơn ; vì nó hạn chế hai bậc tự do của hệ. Để hạn chế nốt sự quay của (B) đối với (A) ta chỉ cần đặt thêm một liên kết đơn tại D (h. 13-6) theo như hình vẽ.

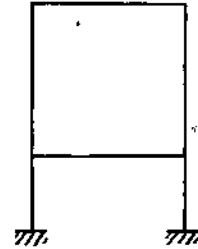


a)



b)

H.13-8



H.13-9

Vậy số liên kết cần thiết để gắn hệ này với hệ kia cũng là ba liên kết đơn (không cùng song song với nhau). Ta cũng có thể gắn khung (B) vào (A) bằng cách hàn cứng tại C (h. 13-7). Như vậy một mối hàn cứng tương đương với ba liên kết đơn.

Nếu bây giờ ta hàn thêm một mối hàn tại D (h. 13-8a) hay đặt thêm một khớp tại D (h.13-8b) hệ sẽ trở thành siêu tĩnh bậc ba hoặc bậc hai vì với các phương trình tĩnh học ta không thể xác định được các thành phần nội lực trong khung.

Đây là các liên kết giữa các thành phần của một hệ nên được gọi là siêu tĩnh nội.

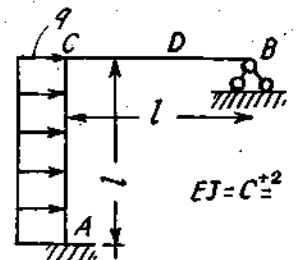
Chú ý : Như vậy một chu vi khép kín (h. 13-8a) có ba bậc siêu tĩnh. Nếu trong chu vi đó ta đặt một khớp đơn nối hai thanh (h. 13-8b) thì bậc siêu tĩnh giảm đi một. Nếu đặt ba khớp đơn (h. 13-6) thì giảm hết bậc siêu tĩnh (3 khớp đơn không thẳng hàng).

Một hệ siêu tĩnh có thể vừa có siêu tĩnh nội vừa có siêu tĩnh ngoại (h. 13-9).

Bậc siêu tĩnh của hệ là bằng tổng bậc siêu tĩnh nội và siêu tĩnh ngoại.

### § 13-2. TÍNH HỆ THANH SIÊU TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Giả sử ta có hệ siêu tĩnh chịu lực như trên hình 13-10, đòi hỏi ta phải xác định các thành phần nội lực của khung hay tính chuyển vị của khung tại một nơi nào đó. Cách giải quyết bài toán là xây dựng một hệ tĩnh định tương đương nghĩa là một hệ tĩnh định mà cách biến dạng, cách làm việc hoàn toàn giống như hệ siêu tĩnh. Khi đó để xác định nội lực hay tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh thì ta tính nội lực và chuyển vị trên hệ tĩnh định tương đương.

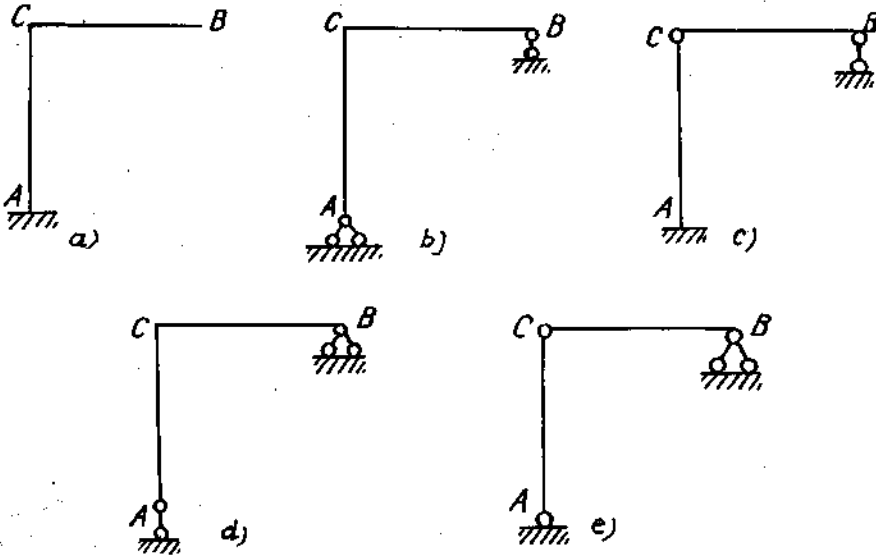


H.13-10

Như vậy tất cả vấn đề của chúng ta là xây dựng một hệ tĩnh định tương đương. Để xây dựng được một hệ tĩnh định tương đương ta thực hiện các bước sau đây :

a) Chọn một hệ cơ bản

Một hệ cơ bản là một hệ tĩnh định suy ra từ hệ siêu tĩnh bằng cách bỏ bớt liên kết. Ví dụ với hệ siêu tĩnh đã cho (h. 13-10) ta có thể chọn một trong các hệ cơ bản như trên hình 13-11.



H.13-11

Hệ a - ta đã bỏ hai liên kết tại B ;

Hệ b - ta bỏ một liên kết tại A và một liên kết tại B ;

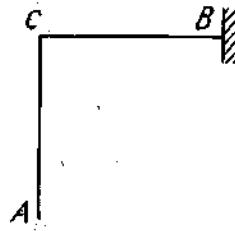
Hệ c - ta đã bỏ một liên kết nội tại C và một liên kết ngoại tại B ;

Hệ d - ta đã bỏ hai liên kết tại A ;

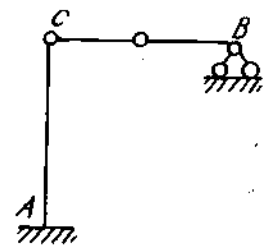
Hệ e - ta đã bỏ hai liên kết nội tại A và C.

Chú ý : Ta chỉ có quyền bỏ bớt liên kết chứ không được thêm vào. Ví dụ với hệ trên hình 13-12 không phải là hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh đã cho vì tại B ta đã thêm vào một liên kết.

Di nhiên khi bỏ bớt các liên kết ta phải tránh để cho hệ trở thành một hệ biến hình hoặc biến hình tức thời. Ví dụ hệ trên hình 13-13 ta đã bỏ hai liên kết nội trên đường CB và như vậy ta có một hệ có ba khớp thẳng hàng, hệ đó là một hệ biến hình tức thời và không thể trở thành một hệ cơ bản được.



H.13-12

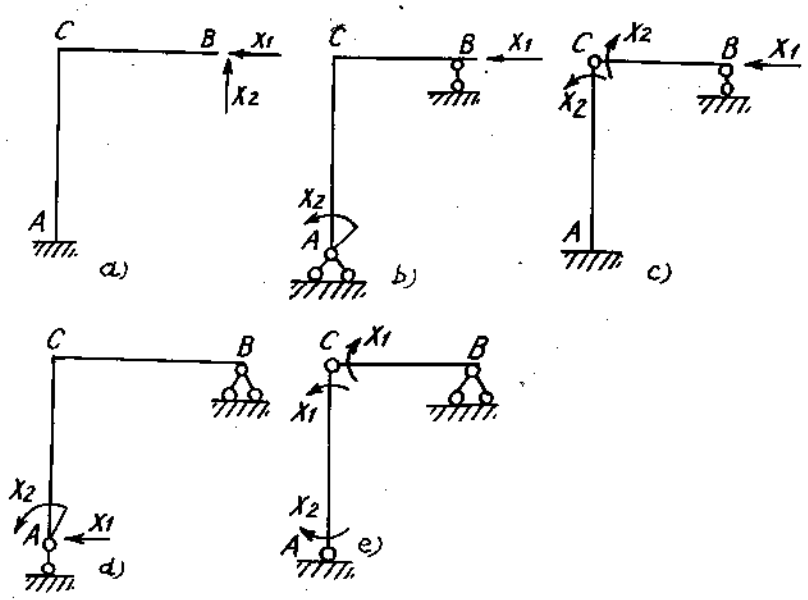


H.13-13

b) Đặt các phân lực liên kết vào hệ cơ bản

Đặt các lực liên kết vào những nơi liên kết đã bị bỏ đi (h.13-14).





H.13-14

Hệ a : Liên kết B tạo nên hai thành phần phản lực theo hai phương. Do đó khi bỏ liên kết ta phải đặt vào các phản lực theo hai phương để thay thế.

Hệ b : Ta đã thay ngàm A bằng một gối tựa cố định, vậy ta phải thêm một mômen để liên kết tương đương với ngàm A. Tại B phải đặt thêm một thành phần phản lực ngang để tương đương khớp cố định B.

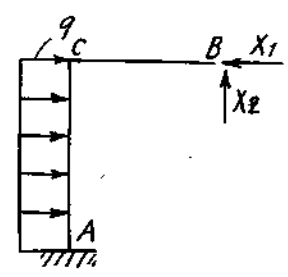
Hệ c : Tại C khi thay khớp vào cố nghĩa là ta đã bỏ thành phần mômen uốn liên kết giữa các thanh, vì vậy để tương đương như cũ ta phải đặt các mômen đó hai bên khớp C. Tại B phải đặt thêm một thành phần phản lực ngang.

Hệ d : Tại A phải đặt thêm một mômen và một phản lực ngang thì liên kết đó mới tương đương liên kết ngàm tại A.

Hệ e : Ta phải đặt các mômen liên kết  $X_1$  và  $X_2$  ở A và C.

c) Thiết lập phương trình chính tắc để xác định các phản lực liên kết

Đặt tải trọng lên hệ cơ bản đã chọn. Trị số của các phản lực liên kết được xác định từ điều kiện chuyển vị do tải trọng và do các phản lực liên kết gây nên theo các phương của phản lực liên kết phải bằng điều kiện chuyển vị thực của hệ siêu tĩnh. Ví dụ chọn hệ cơ bản a - đặt tải trọng lên hệ cơ bản đó (h. 13-15). Như vậy tải trọng và các phản lực  $X_1, X_2$  sẽ gây nên các chuyển vị theo phương thẳng đứng và phương ngang của B. Để hệ tương đương với hệ siêu tĩnh thì ta phải xác định được trị số của  $X_1, X_2$  sao cho các chuyển vị đó là bằng không. (Gối tựa cố định tại B của hệ siêu tĩnh không cho phép khung có các chuyển vị theo phương ngang và phương thẳng đứng).



H.13-15

Sau khi đã xác định được trị số của  $X_1, X_2$  thì ta đã có một hệ tĩnh định tương đương và bài toán được xem như là đã giải xong.

Gọi  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$  là các chuyển vị đơn vị theo các phương  $X_1$  và  $X_2$  do các lực đơn giản gây ra. Như vậy chuyển vị theo các phương  $X_1, X_2$  do các lực  $X_1, X_2$  và tải trọng gây nên được tính với các biểu thức :

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}$$

Từ điều kiện  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  ta có hệ phương trình chính tắc :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Từ hệ phương trình đó ta dễ dàng xác định được  $X_1$  và  $X_2$ . Một cách tổng quát ta ký hiệu  $\delta_{ij}$  là chuyển vị theo phương  $i$  do lực đơn vị theo phương  $j$  gây nên.

Tất cả những điều ta vừa nói trên đây có thể suy rộng cho một hệ siêu tĩnh bậc  $n$ . Khi đó hệ phương trình chính tắc sẽ có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0$$

$$\dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0$$

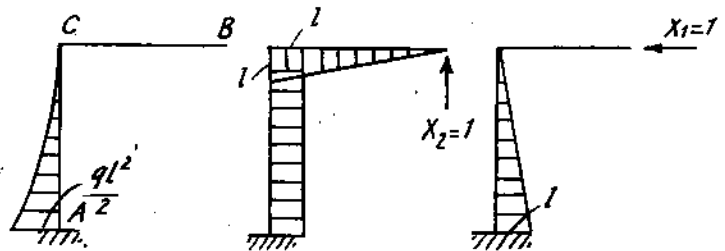
Các hệ số  $\delta_{ij}$  được gọi là hệ số chính. Các hệ số  $\delta_{ij}$  được gọi là hệ số phụ và  $\Delta_{ip}$  gọi là các số hạng tự do.

Phương pháp giải hệ siêu tĩnh như ta vừa trình bày, các ẩn số là các phản lực liên kết nên được gọi là phương pháp lực.

Ví dụ 1. Vẽ biểu đồ nội lực của hệ siêu tĩnh đã cho trên hình 13-10.

*Bài giải :*

Để xác định được hệ số phụ và các số hạng tự do ta tiến hành vẽ các biểu đồ nội lực do các đơn vị và do tải trọng gây nên trên hệ cơ bản đã chọn. Với khung chịu lực, biến dạng chủ yếu là do mômen uốn cho nên ta bỏ qua lực dọc và lực cắt. Nghĩa là ta chỉ cần vẽ các biểu đồ mômen uốn. Sự gần đúng này sẽ thực hiện cho mọi phép toán đối với khung trong các ví dụ tiếp theo. Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 13-16.



H. 13-16

Từ đó ta có :

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \left( \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right) \frac{1}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ} = \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{l \cdot l}{2} l \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{2EJ}$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{3}{4} l \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_p ds}{EJ} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} l \cdot l \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{ql^4}{6EJ}$$

Như vậy một cách tổng quát ta có :

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j ds}{EJ} \quad (13-1)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ}$$

trong đó  $\bar{M}_i$  và  $\bar{M}_j$  là các biểu đồ mômen đơn vị và  $M_p$  là biểu đồ do tải trọng gây nên trên hệ cơ bản.

Từ đó ta có hệ phương trình chính tắc :

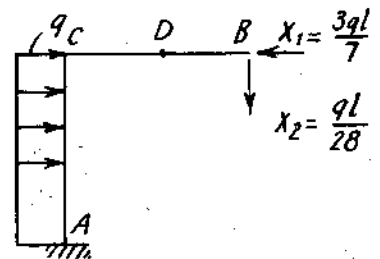
$$\begin{cases} \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2} - \frac{ql}{8} = 0 \\ \frac{X_1}{2} + \frac{4}{3} X_2 - \frac{ql}{6} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình đó ta được :

$$X_1 = \frac{3ql}{7} ; X_2 = -\frac{ql}{28}$$

Dấu âm của  $X_2$  chỉ rằng chiều thực của phản lực ngược với chiều đã chọn.

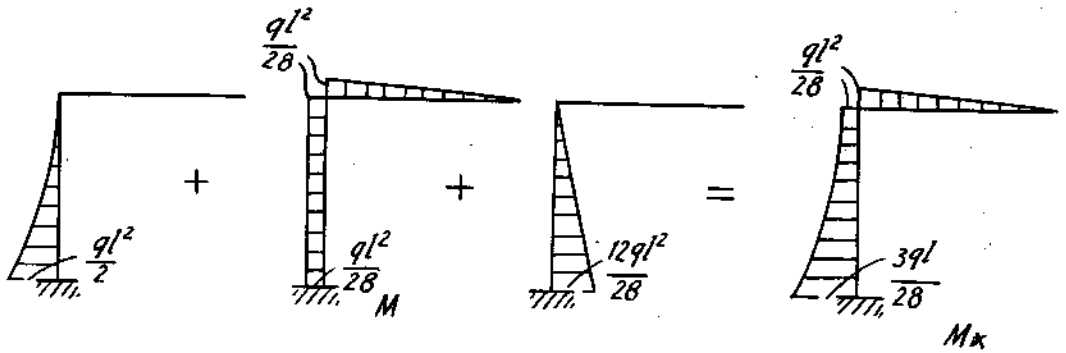
Đặt các lực  $X_1$  và  $X_2$  cùng với tải trọng lên hệ cơ bản ta được hệ tĩnh định tương đương (h. 13-17)



H. 13-17

Biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định tương đương đó cũng là biểu đồ của hệ siêu tĩnh. Riêng với biểu đồ mômen uốn ta có thể làm phép cộng như sau : Nhân trị số  $X_1$  và  $X_2$  vào các biểu đồ  $\bar{M}_1$  và  $\bar{M}_2$  xong cộng với  $M_p$  ta sẽ được biểu đồ mômen uốn của hệ (h. 13-18).

**Ví dụ 2.** Tìm chuyển vị thẳng đứng tại D điểm giữa của thanh CB của hệ siêu tĩnh (h. 13-10).



H. 13-18

Bài giải :

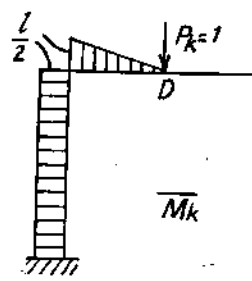
Tất nhiên là ta sẽ giải bài toán trên hệ tĩnh định tương đương (h. 13-17). Ta tạo nên trạng thái "k" bằng cách bỏ tất cả ngoại lực lên hệ và đặt lực  $P_k = 1$  theo phương thẳng đứng (h. 13-19). Chuyển vị thẳng đứng tại D sẽ được tính với biểu thức

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$

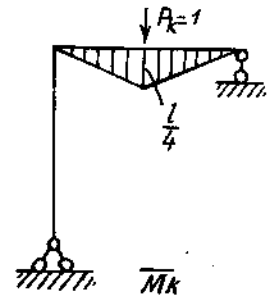
Song ta nhận thấy ngay phép nhân Verésaghin giữa các biểu đồ ở hình 13-18 và hình 13-19 không đơn giản. Ta có thể làm một cách khác như sau :

Ta biết rằng dù ta chọn bất cứ một hệ cơ bản nào thì cuối cùng biểu đồ mômen  $M_x$  (h. 13-18) cũng phải như nhau vì với bất cứ các hệ tĩnh định tương đương xây dựng trên hệ cơ bản nào thì hệ đó cũng phải làm việc như hệ siêu tĩnh.

Vậy ta không nhất thiết phải xây dựng trạng thái "k" trên hệ cơ bản đã chọn. Ta có thể xây dựng trạng thái "k" trên hệ cơ bản khác sao cho phép nhân đơn giản nhất. Ví dụ ta sẽ chọn hệ cơ bản b) hay c) để xây dựng trạng thái "k" khi tìm chuyển vị thẳng đứng tại D.



H. 13-19



H. 13-20

Phép nhân Verésaghin giữa các biểu đồ mômen  $M_k$  (h. 13-20) và  $M_x$  (h. 13-18) sẽ rất dễ dàng như sau :

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$

$$y_D = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{ql^2}{28 \cdot 2} \cdot \frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^4}{448EJ_x}$$

$$y_D = -\frac{ql^4}{448EJ_x}$$

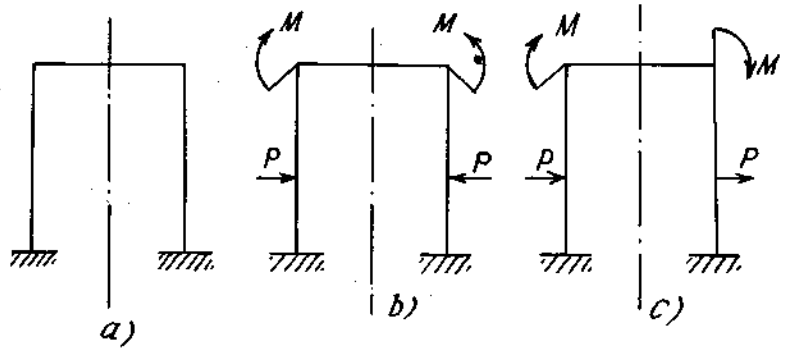
Dấu trừ có nghĩa là chuyển vị ngược với chiều của  $P_k$ .

### §13-3. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ

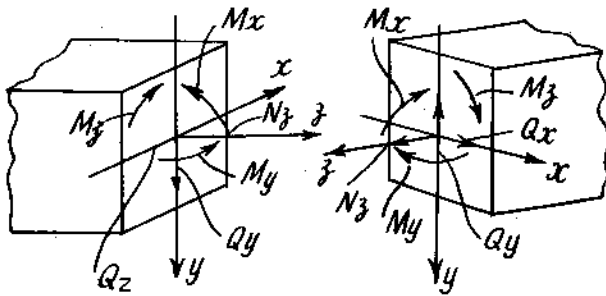
Từ một hệ siêu tĩnh ta có thể có nhiều hệ cơ bản, trong số các hệ cơ bản đó, ta có thể chọn được một hệ cơ bản hợp lý nhất nghĩa là đối với hệ cơ bản đó nhiều hệ số phụ và số hạng tự do triệt tiêu nhất. Trong mục này ta đề cập đến cách chọn hệ cơ bản khi hệ có tính chất đối xứng.

Ta gọi một hệ siêu tĩnh phẳng là một hệ đối xứng khi hệ có một trục đối xứng. Một hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng là khi tải trọng đặt lên một phần nào đó của khung là ảnh của tải trọng đặt lên phần kia qua gương phẳng đặt vuông góc với mặt phẳng của khung và đi qua trục đối xứng của hệ. Ngược lại, nếu tải trọng của phần này là ảnh của phần kia nhưng có chiều ngược lại thì ta gọi là hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng. Ví dụ khung siêu tĩnh (h. 13-21a) là một hệ đối xứng.

Nếu hệ chịu tải trọng như trên (h. 13-21b) là hệ chịu tải trọng đối xứng và như trên hình (h. 13-21c) là hệ chịu tải trọng phản đối xứng.



H. 13-21



H. 13-22

Tương tự, nếu ta xét các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang nào đó thì ta cũng có thể chia các thành phần nội lực thành các thành phần đối xứng và phản đối xứng.

Lực dọc, mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  là các thành phần nội lực đối xứng (h. 13-22). Lực cắt và mômen xoắn là các thành phần nội lực phản đối xứng.

Ta dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau đây :

*Nếu một hệ đối xứng chịu tác dụng của tải trọng đối xứng thì nội lực phản đối xứng trên mặt cắt trong mặt phẳng đối xứng của hệ là bằng không. Ngược lại nếu tải trọng là phản đối xứng thì nội lực đối xứng phải bằng không.*

Để chứng minh mệnh đề đó chúng ta chú ý các nhận xét sau đây :

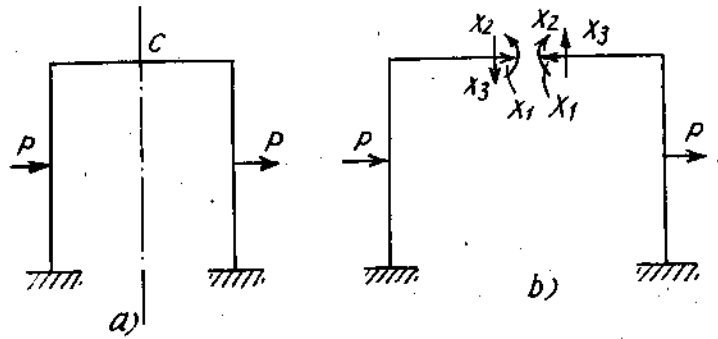
- Khi hệ là đối xứng chịu tải trọng đối xứng thì biểu đồ mômen là đối xứng. Ngược lại khi hệ là đối xứng, tải trọng phản đối xứng thì biểu đồ mômen là phản đối xứng.
- Phép nhân Verésaghin giữa biểu đồ đối xứng và phản đối xứng là bằng không.

Bây giờ, giả sử ta có hệ siêu tĩnh chịu lực phản đối xứng như trên hình 13-23a. Ta chọn hệ cơ bản này bằng cách cắt đôi khung như hình 13-23b. Ta sẽ chứng minh

ràng các thành phần nội lực : đối xứng  $X_1$  và  $X_2$  (lực dọc và mômen uốn) trên mặt cắt đối xứng C là bằng không.

Thực vậy, từ điều kiện chuyển vị tương đối giữa hai mặt cắt bằng không ta có hệ phương trình chính tắc :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$



H. 13-23

biểu đồ mômen đơn vị  $\bar{M}_1$  và  $\bar{M}_2$  là đối xứng, còn  $\bar{M}_3$  là phản đối xứng.

Biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là phản đối xứng. Vì vậy ta có :

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 0$$

Hệ phương trình chính tắc được rút gọn lại như sau :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

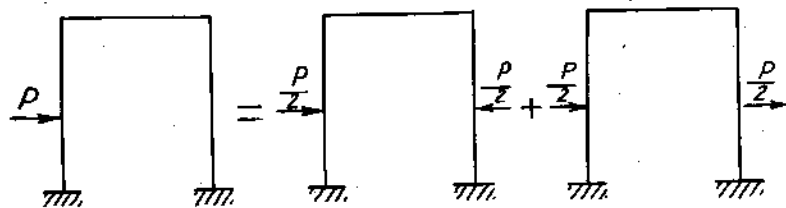
Vì các hệ số  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12}$  là khác không nên từ hai phương trình đầu ta có thể kết luận rằng  $X_1$  và  $X_2$  là bằng không.

Ngược lại, giả sử khung chịu lực đối xứng khi đó ta có :

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{3p} = 0$$

Hệ phương trình chính tắc sẽ được rút gọn như sau :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$



H. 13-24

Từ phương trình thứ ba ta có  $X_3 = 0$

Vậy mệnh đề đã được chứng minh.

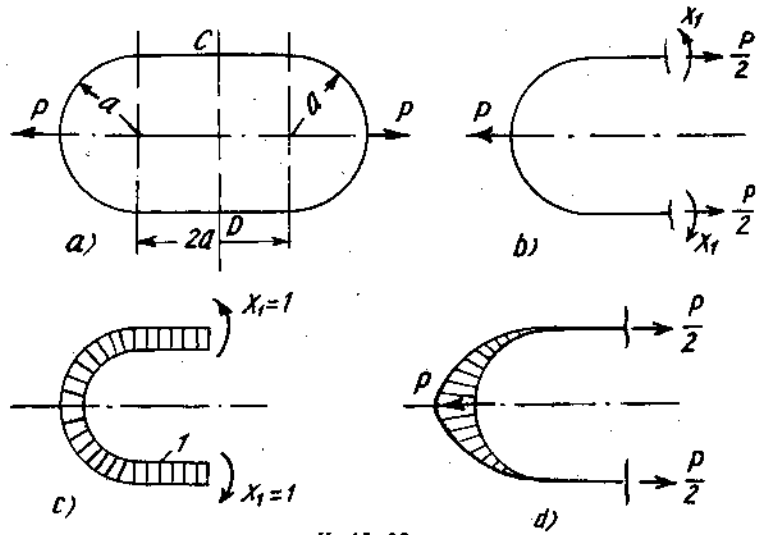
Trường hợp hệ là đối xứng nhưng tải trọng là bất kì thì ta có thể giải bài toán bằng cách xem hệ như tổng tác dụng của một hệ tải trọng đối xứng và hệ tải trọng phản đối xứng (h. 13-24).

**Ví dụ 3.** Vẽ biểu đồ mômen của khung siêu tĩnh chịu lực như hình 13-25a.

*Bài giải :*

Khung có trục đối xứng CD và chịu tác dụng của tải trọng đối xứng nên thành phần lực cắt trên mặt cắt qua trục CD phải bằng không.

Ta cắt đôi khung và xét một nửa khung (h. 13-25b) vì tính chất đối xứng nên mômen uốn và lực dọc trên của mặt cắt ở các điểm của D phải bằng nhau. Từ điều kiện cân bằng ta có :



H. 13-25

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}$$

Vậy ta chỉ còn phải tìm trị số mômen uốn  $X_1$ . Từ điều kiện chuyển vị tương đối giữa các mặt cắt tại C và D phải bằng không ta thiết lập được phương trình chính tắc :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Biểu đồ đơn vị  $\bar{M}_1$  và tải trọng  $M_p$  được biểu diễn như trên hình 13-25c, d.

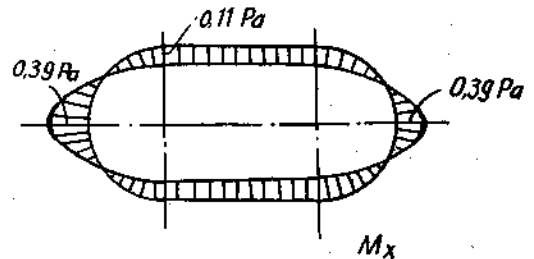
Hệ số phụ và số hạng tự do được tính như sau :

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_1 ds}{EJ} = \frac{2a}{EJ} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ} = -\frac{Pa^2}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Vậy ta có :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = 0,11Pa$$

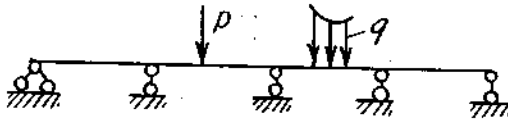


H. 13-26

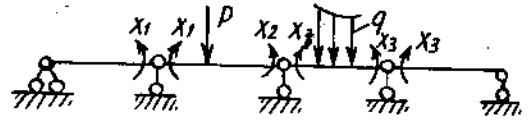
Biểu đồ mômen uốn của hệ được biểu diễn như trên hình 13-26.

### §13-4. DẦM LIÊN TỤC

Dầm liên tục là một dầm được đặt trên nhiều gối tựa tạo nên nhiều nhịp (h. 13-27). Đây là bài toán siêu tĩnh. Bậc siêu tĩnh là số liên kết đơn thêm vào, nghĩa là bằng số nhịp của dầm trừ đi một.



H. 13-27



H. 13-28

Hệ cơ bản hợp lý là đặt các khớp trên mỗi gối tựa để chia dầm thành nhiều dầm đơn (h. 13-28). Như vậy lực đặt trên một nhịp nào đó sẽ không ảnh hưởng đến các nhịp bên cạnh. Các phản lực liên kết ở đây là các mômen. Điều kiện để hệ trở thành hệ tĩnh định tương đương là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt hai phía của khớp là bằng không (vì dầm liên tục là một thanh liền nên tại đó các mặt cắt không có góc xoay tương đối với nhau). Hệ phương trình chính tắc được thiết lập từ điều kiện đó.

Chúng ta nhận xét góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt về hai phía của khớp chỉ do các lực đặt trên hai nhịp kế cận gây nên vì vậy để tính chuyển vị tương đối của gối tựa thứ n thì ta chỉ cần xét tải trọng đặt trên hai nhịp từ gối tựa n - 1 đến n + 1 (h. 13-29). Để tiện cho các kí hiệu sau này ta sẽ gọi :

$$X_{n-1} = M_{n-1} ; X_n = M_n ; X_{n+1} = M_{n+1}$$

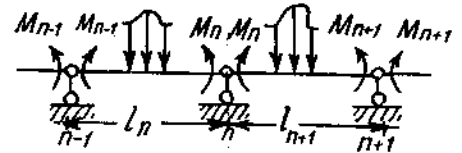
và giả thiết trên hai nhịp đang xét có các tải trọng phân bố q nào đó. Phương trình chính tắc sẽ có dạng như sau :

$$\Delta_n = \delta_{n(n-1)} M_{(n-1)} + \delta_{nn} M_n + \delta_{n(n+1)} M_{(n+1)} + \Delta_{np} = 0 \quad (a)$$

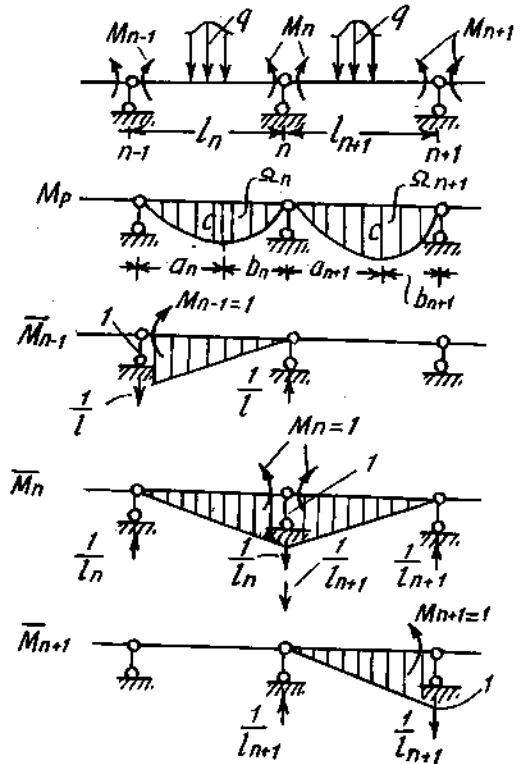
Các biểu đồ mômen đơn vị và biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên hai nhịp đang xét được biểu diễn trên hình 13-30.

Nếu độ chống uốn EJ không đổi trên suốt chiều dài của dầm thì với phép nhân biểu đồ Verésaghin, ta có trị số các hệ số phụ và các số hạng tự do như sau :

$$\delta_{n(n-1)} = \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_{n-1} \bar{M}_n ds}{EJ_x} = \frac{1}{2} l_n \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n}{6EJ_x}$$



H. 13-29



H. 13-30



$$\delta_{nn} = \sum_{i=n}^{(n+1)} \int_0^{l_{n+1}} \frac{\overline{M}_n^2 ds}{EJ_x} = \frac{l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} + \frac{l_{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n}{3EJ_x}$$

$$\delta_{n(n+1)} = \int_0^{l_{n+1}} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_{n+1} ds}{EJ_x} = \frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_x}$$

$$\Delta_{np} = \sum_{i=n}^{(n+1)} \int_0^{l_{n+1}} \frac{\overline{M}_n \overline{M}_p ds}{EJ_x} \left( \frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{(n+1)} b_{(n+1)}}{l_{(n+1)}} \right) \frac{1}{EJ_x}$$

trong đó  $l_n$  và  $l_{(n+1)}$  là độ dài của nhịp thứ  $n$  và  $(n+1)$ ;  $\Omega_n \Omega_{(n+1)}$  là diện tích của biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên hai nhịp thứ  $n$  và  $(n+1)$ ;  $a_n$  và  $b_{(n+1)}$  là khoảng cách từ trọng tâm của các diện tích đó đến gối tựa thứ  $(n-1)$  và  $(n+1)$  (h. 12-30).

Dem thay các trị số đó vào phương trình (a) và ước lược cho  $EJ_x$  ta có :

$$l_n M_{(n-1)} + 2(l_n + l_{(n+1)})M_n + l_{(n+1)}M_{(n+1)} + 6 \left( \frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{(n+1)} b_{(n+1)}}{l_{(n+1)}} \right) = 0$$

Phương trình đó được gọi là phương trình ba mômen vì các ẩn số là ba mômen tại các gối tựa liên tiếp.

Với mỗi gối tựa ta thiết lập được một phương trình ba mômen và cùng cách như vậy ta thiết lập được tất các phương trình của hệ chính tắc.

*Ghi chú* :  $\Omega_n$  và  $\Omega_{(n+1)}$  được xem là dương khi biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là căng phía dưới.

**Ví dụ 4.** Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như hình 13-31.

*Bài giải* :

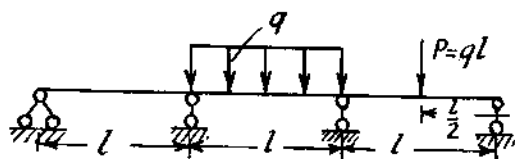
Biểu đồ mômen uốn  $M_p$  của tải trọng đặt trên hệ cơ bản được biểu diễn trên hình 13-32. Đánh số thứ tự của các gối tựa như hình vẽ.

Chú ý :  $M_0 = M_3 = 0$ . Ta có các phương trình chính tắc như sau :

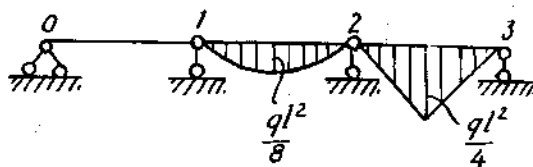
$$\begin{cases} l M_0 + 2(l + l)M_1 + l M_2 + 6 \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \right) = 0 \\ l M_1 + 2(l + l)M_2 + l M_3 + 6 \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + \frac{5ql^2}{8} = 0 \end{cases}$$



H. 13-31



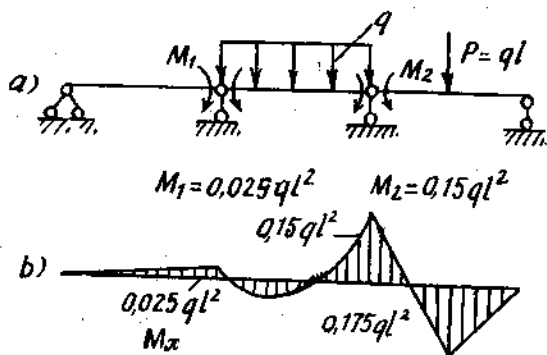
H. 13-32

Giải hệ thống phương trình đó ta tìm thấy :

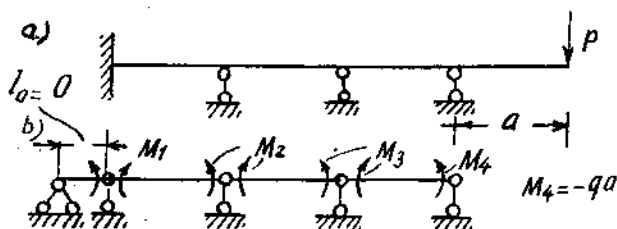
$$M_1 = -\frac{ql^2}{40} = -0,025ql^2$$

$$M_2 = -\frac{3ql^2}{20} = -0,15ql^2$$

Vậy ta có hệ tính định tương đương như hình 13-33a và biểu đồ mômen uốn được biểu diễn 13-33b.

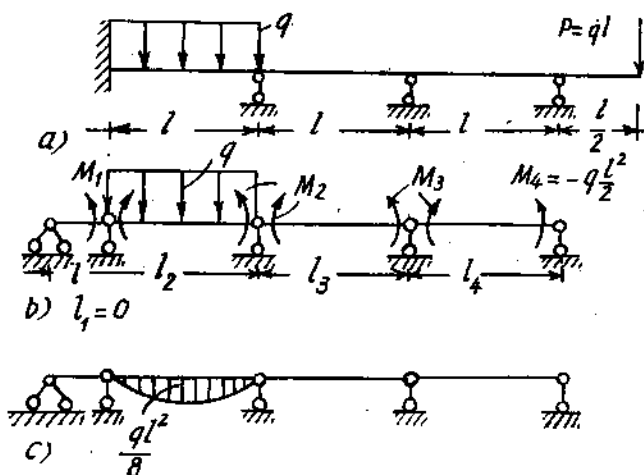


H. 13-33



H. 13-34

Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa và đầu ngàm (h. 13-34a) thì để sử dụng được phương trình ba mômen ta biến hệ như trên hình 13-34b. Mômen uốn thu gọn có thể xem là mômen liên kết của mặt cắt tại gối tựa cuối cùng. Mômen đó sẽ có trị số dương khi ngoại lực đặt lên đầu thừa làm căng thớ dưới và nó sẽ có trị số âm khi ngoại lực làm căng thớ trên. Ta cũng có thể xem là ngoại lực tác động lên nhịp cuối của dầm. Liên kết ngàm được thay bằng một nhịp với chiều dài của nhịp là bằng không.



H. 13-35

**Ví dụ 5.** Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như hình 13-35a.

**Bài giải :**

Ta có hệ cơ bản như trên hình 13-35b. Biểu đồ  $M_p$  được biểu diễn trên hình (h. 13-35c).

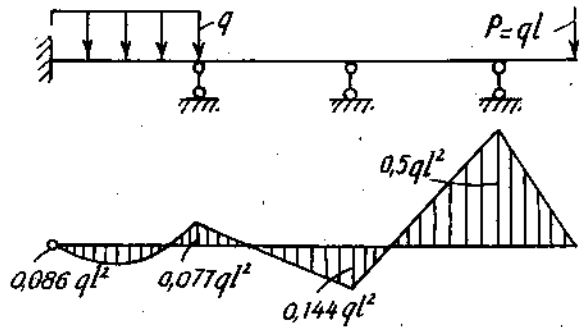
Mômen  $M_4$  có trị số là  $-\frac{ql^2}{2}$

Hệ phương trình chính tắc được viết như sau :

$$\begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l)M_1 + lM_2 + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ lM_1 + 2(l + l)M_2 + lM_3 + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ lM_2 + 2(l + l)M_3 + lM_4 = 0 \end{cases}$$

Hay rút gọn lại, với chú ý  $l_1 = 0$  và  $M_4 = -\frac{ql^2}{2}$ , ta có :

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_2 + 4M_3 - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{cases}$$



H. 13-36

Giải hệ thống phương trình đó ta được :

$$M_1 = -0,0865pl^2 ;$$

$$M_2 = -0,0769ql^2 ;$$

$$M_3 = 0,144ql^2.$$

Biểu đồ mômen được biểu diễn như trên hình 13-36.

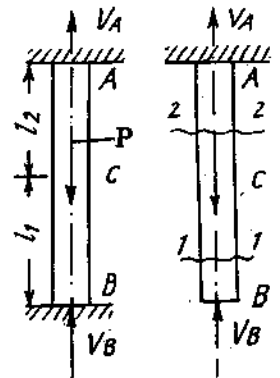
### §13-5. CÁC BÀI TOÁN SIÊU TÍNH TRONG TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC ĐƠN GIẢN CỦA THANH

#### a) Trường hợp thanh chịu kéo nén đúng tâm

**Ví dụ 6.** Ta hãy xét trường hợp thanh chịu lực như hình 13-37. Xác định ứng suất trên các mặt cắt ngang của thanh.

**Bài giải :**

Dưới tác dụng của lực P, tại các ngàm ở hai đầu A và B phát sinh các phản lực  $V_A$  và  $V_B$ . Để có thể xác định được nội lực trong thanh ta đưa sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách bỏ đi một đầu ngàm tại B. Phản lực  $V_B$  được xác định từ điều kiện



H. 13-37

độ giãn toàn phần của thanh do P và  $V_B$  gây nên là bằng không vì ngàm tại B không cho phép thanh có độ giãn dài.

$$\delta_{11} V_B + \Delta_{1p} = 0$$

trong đó :  $\delta_{11} = -\frac{l_1 + l_2}{EF}$  là độ co do lực đơn vị theo phương của  $V_B$  gây nên và  $\Delta_{1p}$  là độ giãn do P gây nên trên hệ tĩnh định. Phương trình biến dạng trên được viết lại dưới dạng :

$$-\frac{l_1 + l_2}{EF} V_B + \frac{Pl_2}{EF} = 0$$

Từ đó ta có :

$$V_B = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2}$$

Vậy ứng suất trên mặt cắt (1-1) là :

$$\sigma_{z1} = \frac{P}{F} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

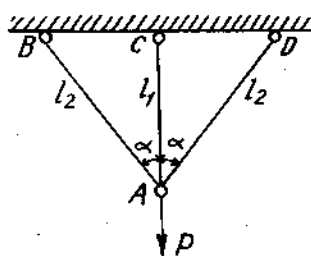
và ứng suất trên mặt cắt (2-2) là :

$$\sigma_{z2} = \frac{P}{F} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

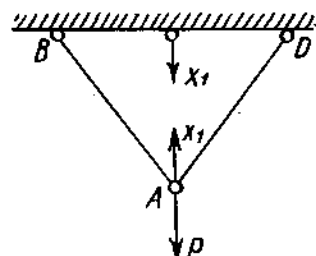
**Ví dụ 7.** Cho hệ thanh chịu lực như hình 13-38 các thanh đều cùng làm bằng một loại vật liệu như nhau và kích thước mặt cắt ngang như nhau. Tính lực dọc trong mỗi thanh.

**Bài giải :**

Ta chuyển sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách vớt bỏ thanh CA (h. 13-39). Trị số của lực liên kết  $X_1$  được xác định từ điều kiện biến dạng của hệ tĩnh định tương đương với biến dạng của hệ siêu tĩnh. Nghĩa là chuyển vị của điểm A do  $X_1$  và P gây nên theo phương thẳng đứng là bằng độ giãn của thanh AC do  $X_1$  gây nên. Ta có phương trình :



H. 13-38



H. 13-39

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = -\frac{X_1 l_1}{EF}$$

Dấu (-) cho biết lực tác động lên thanh ngược chiều với  $X_1$ .

Chuyển vị đơn vị  $\delta_{11}$  do  $X_1 = 1$  gây nên được tính từ biểu đồ lực dọc trong các thanh (h. 13-40).

$$\delta_{11} = \frac{l_2}{2\cos^2\alpha} \cdot \frac{1}{EF}$$

Mặt khác ta có tương quan giữa  $l_1$  và  $l_2$  là :  $l_2 \cos \alpha = l_1$ .  
 Vậy phương trình biến dạng được viết lại như sau :

$$\frac{1}{EF} \left( \frac{l_1}{2 \cos^3 \alpha} X_1 - \frac{l_1}{2 \cos^3 \alpha} P \right) = \frac{X_1 l_1}{EF}$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$X_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

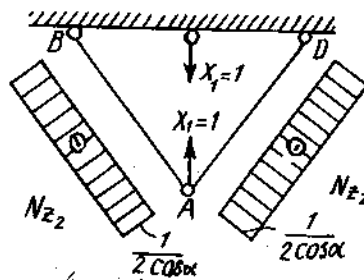
Sau khi đã có  $X_1$  ta dễ dàng xác định nội lực trong các thanh. Lực dọc trong thanh

$$AC : N_1 = X_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

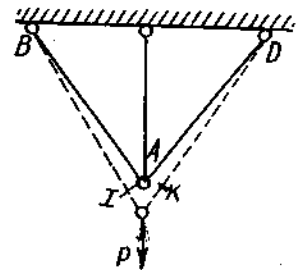
Trong các thanh AB và AD

$$N_2 = \frac{P \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Bài toán cũng có thể suy luận một cách đơn giản như sau : Dưới tác dụng của lực  $P$  điểm  $A$  của hệ siêu tĩnh có một chuyển vị thẳng đứng  $AA' = \Delta l_1$ . Đó cũng chính là độ giãn của thanh  $AC$ . Từ  $A$  hạ các đường thẳng vuông



H. 13-40



H. 13-41

góc xuống  $BA'$  và  $DA'$  (h. 13-41). Gọi  $I, K$  là chân các đường vuông góc này thì  $A'I$  và  $A'K$  có thể xem là các biến dạng của thanh  $AB$  và  $AD$ . Tương quan giữa các biến dạng của các thanh như sau :

$$A'I = \Delta l_2 = AA' \cos \alpha = \Delta l_1 \cos \alpha$$

vì biến dạng là bé nên ta xem các góc  $\alpha$  là không đổi sau khi hệ bị biến dạng. Từ đó ta có phương trình biến dạng như sau :

$$\frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{N_1 l_1}{EF} \cdot \cos \alpha$$

Hay :

$$N_2 = N_1 \cos^2 \alpha$$

Mặt khác tách nút  $A$  và chú ý lực dọc trong các thanh  $AB$  và  $AD$  là bằng nhau vì lí do đối xứng ta có phương trình cân bằng :

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha - P = 0$$

Từ đó ta có :

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

**b) Trường hợp thanh chịu xoắn**

**Ví dụ 8.** Giả sử có thanh chịu xoắn có liên kết ngàm ở hai đầu như hình 13-42. Xác định nội lực và ứng suất trên các mặt cắt.

*Bài giải :*

Cũng như trên, ta chuyển sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách tháo bỏ ngàm tại đầu B. Thay vào đó phản lực liên kết  $\mathcal{K}_B$ . Trị số của  $\mathcal{K}_B$  được xác định từ điều kiện góc xoắn tại B do  $\mathcal{K}$  và  $\mathcal{K}_B$  gây nên trên hệ tĩnh định là bằng không. Ta có :

$$\frac{\mathcal{K}_B (a+b)}{GJ_p} - \frac{\mathcal{K} a}{GJ_p} = 0$$

Vậy : 
$$\mathcal{K}_B = \frac{\mathcal{K} \cdot a}{a+b}$$

Nội lực trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) sẽ là :

$$M_{z1} = \mathcal{K}_B = \frac{\mathcal{K} \cdot a}{a+b}$$

$$M_{z2} = \mathcal{K} - \mathcal{K}_B = \frac{\mathcal{K} \cdot b}{a+b}$$



H. 13-42

**Ví dụ 9.** Cho hai lò xo hình trụ lồng vào nhau như trên hình 13-43, trục của hai lò xo là trùng nhau. Gọi  $n_1, D_1, d_1$  và  $n_2, D_2, d_2$  là số vòng làm việc, đường kính trung bình và đường kính dây của lò xo bên trong và bên ngoài. Hai lò xo cùng làm bằng vật liệu có G như nhau. Chiều cao ban đầu bằng nhau. Hỏi lực tác dụng lên mỗi lò xo cho biết lực tác dụng chung trên hai lò xo là P.

*Bài giải*

Gọi  $C_1$  là độ cứng của lò xo bên trong và  $C_2$  là của lò xo bên ngoài. Các thành phần lực tác dụng lên các lò xo  $P_1, P_2$ . Dưới tác dụng của P, các lò xo có cùng một độ co như nhau vì vậy ta có :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2} \quad (1)$$

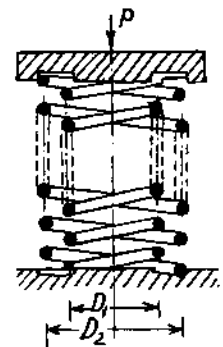
Mặt khác ta phải có :  $P_1 + P_2 = P \quad (2)$

Do 2 phương trình đó ta có : 
$$\frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2} = \frac{P}{C_1 + C_2}$$

Hay : 
$$P_1 = \frac{C_1 P}{C_1 + C_2} ; \quad P_2 = \frac{C_2 P}{C_1 + C_2}$$

Các độ cứng của các lò xo được tính với công thức :

$$C_1 = \frac{Gd_1^4}{8D_1^3 n_1} ; \quad C_2 = \frac{Gd_2^4}{8D_2^3 n_2}$$



H.13-43

## CHƯƠNG XIV TẢI TRỌNG ĐỘNG

### §14-1. KHÁI NIỆM

Trong các chương trước đây chúng ta chỉ mới xét đến tải trọng tĩnh nghĩa là tải trọng tác động lên hệ được tăng lên một cách từ từ để không xuất hiện lực quán tính. Trong thực tế nhiều khi tải trọng tăng lên đột ngột, như khi hệ bị va chạm, hay biến đổi theo thời gian như trong hệ dao động hay trong các chuyển động có gia tốc. Những trường hợp đó ta gọi là tải trọng động.

Nhiều công trình hay chi tiết được tính với một hệ số an toàn rất cao đối với tải trọng tĩnh nhưng vẫn bị phá hỏng vì tải trọng động. Ngược lại có những kết cấu hay chi tiết, thoạt nhìn tưởng rằng yếu ớt nhưng trong thực tế lại có khả năng làm việc lâu dài dưới tác dụng của tải trọng động. Vì vậy đòi hỏi người thiết kế phải chú ý nghiên cứu về lĩnh vực này.

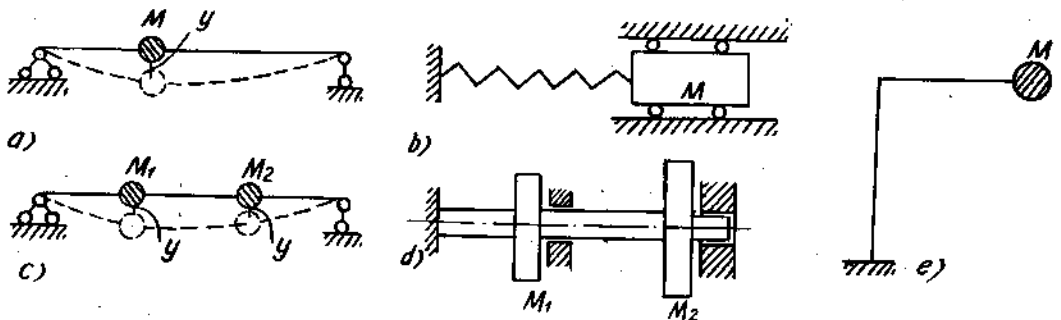
Trước hết ta hãy xét đến trường hợp dao động của hệ đàn hồi.

### §14-2. BẬC TỰ DO

Ta có định nghĩa về bậc tự do của hệ đàn hồi khi dao động như sau :

*Bậc tự do của một hệ đàn hồi khi dao động là thông số độc lập để xác định vị trí của hệ.*

Ví dụ các hệ trên hình 14-1a, b, nếu bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm hay của lò xo, xem chúng là những liên kết đàn hồi không có khối lượng và xem bài toán là phẳng thì đó là những hệ có một bậc tự do vì để xác định vị trí của hệ ta chỉ cần biết độ võng  $y$  hay hoành độ  $x$  của  $M$ . Với các hệ trên hình 14-1c, d để xác định được vị trí của hệ ta phải biết các độ võng  $y_1, y_2$  của  $M_1, M_2$  và các góc xoay  $\varphi_1, \varphi_2$  của các bánh xe  $M_1, M_2$ . Các hệ đó là các hệ có hai bậc tự do. Với hệ trên hình (h. 14-1e)



H.14-1

tuy ta chỉ có một khối lượng  $M$ , nhưng để xác định được vị trí trọng tâm của  $M$  ta phải có hai tọa độ. Nếu như mômen quán tính của  $M$  đối với trọng tâm là không đáng kể thì đó là hệ có hai bậc tự do, nếu còn phải để ý đến mômen quán tính của  $M$  đối với trọng tâm của  $M$  thì đó là 3 bậc tự do vì ngoài hai tọa độ thẳng ta còn phải để ý đến sự quay của  $M$  khi hệ dao động trong mặt phẳng của khung.

Số bậc tự do là tùy thuộc vào sơ đồ lựa chọn để tính : ví dụ khi không thể bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm thì hệ sẽ trở thành vô số bậc tự do. Cách giải là luôn luôn tìm cách đưa hệ về một hệ có bậc tự do ít hơn để tính dễ hơn. Dĩ nhiên với cách đó ta chỉ đạt được kết quả gần đúng.

### §14-3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Giả sử xét với hệ dầm hồi có một bậc tự do. Ví dụ hệ trên hình 14-2. Ta xem dầm như một liên kết dầm hồi không có khối lượng.

Độ võng  $y$  của  $M$  là do các lực sau đây gây nên :

- Ngoại lực  $P(t)$  gây nên dao động. Ta gọi lực này là lực kích thích.
- Lực quán tính  $\vec{F}_i$  do gia tốc  $\ddot{y}$  của  $M$  gây nên. Lực quán tính đó luôn luôn ngược chiều với gia tốc. Trị số của  $\vec{F}_i$  là :

$$F_i = -M\ddot{y}$$

- Lực cản  $\vec{F}_r$  do môi trường gây nên. Một cách gần đúng ta có thể xem lực cản là tỉ lệ với vận tốc  $\dot{y}$  của  $M$ .

Trị số của  $\vec{F}_r$  là :

$$F_r = -\beta\dot{y}$$

trong đó  $\beta$  là hệ số tỉ lệ. Nếu gọi  $\delta_{11}$  là chuyển vị theo phương chuyển động của  $M$  do lực đơn vị gây nên (h.14-3) thì  $y$  được tính với biểu thức :

$$y = \delta_{11}[P(t) - M\ddot{y} - \beta\dot{y}]$$

Hay có thể viết lại dưới dạng :

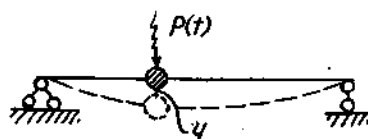
$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{M} \quad (14-1)$$

trong đó  $2\alpha = \frac{\beta}{M}$  là hệ số tương trưng cho lực cản của môi trường  $\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}M}$  có một ý nghĩa vật lý rõ rệt mà ta sẽ nói trong mục tới.

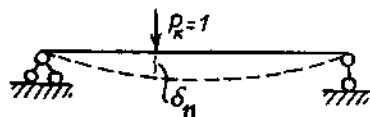
Nghiệm riêng của phương trình (14-1) tùy thuộc dạng hàm  $P(t)$ .

Ở đây ta chỉ xét trường hợp hàm  $P(t)$  là một hàm số điều hòa dưới dạng :

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t. \quad (14-2)$$



H.14-2



H.14-3



$P_0$  được gọi là biên độ của lực kích thích ;

$\Omega$  là số lần dao động của lực kích thích trong  $2\pi$  giây. Nên gọi là tần số vòng của lực kích thích.

Để giải hệ (14-1) ta phải tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất không có vế phải vì vậy ta xét các trường hợp riêng sau đây :

#### §14-4. DAO ĐỘNG TỰ DO

Ta giả thiết sau khi  $P(t)$  kích thích cho hệ dao động xong thì bị triệt tiêu. Nghĩa là  $P(t)$  chỉ tồn tại một khoảng khác rất bé ban đầu, sau đó ta có thể xem  $P(t) \equiv 0$ . Sự dao động của hệ là do lực đàn hồi sinh ra và được gọi là dao động tự do.

a) *Dao động tự do không có lực cản.* Xem lực cản của môi trường là bằng không, nghĩa là  $\alpha = 0$ . Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (14-3)$$

Nghiệm của phương trình là :

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (14-4)$$

$A$  là biên độ của dao động,  $\varphi$  là pha ban đầu. Các trị số đó được xác định từ điều kiện ban đầu của dao động. Từ phương trình (14-4) ta thấy rõ ý nghĩa của  $\omega$ . Trị số đó là tần số vòng của dao động. Ta gọi nó là tần số vòng riêng của hệ. Trị số của  $\omega$  được xác định từ biểu thức :

$$\omega^2 = \frac{1}{M\delta_{11}}$$

hay 
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} \quad (14-5)$$

trong đó :  $g$  là gia tốc trọng trường ;  $Q$  là trọng lượng của  $M$  và  $\Delta t$  là độ võng tĩnh do  $Q$  gây nên đối với hệ đã cho.

Chu kì  $T$  của dao động sẽ là :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta t}{g}} \quad (14-6)$$

và tần số  $f$  của dao động là  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  (14-6b)

b) *Dao động tự do có lực cản.*

Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (14-7)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là :

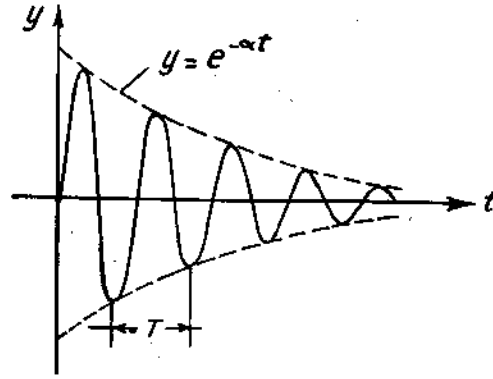
$$y(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

$\omega_1$  và  $\varphi_1$  là tần số vòng riêng của hệ khi kể đến lực cản và góc pha ban đầu của dao động. Tương quan giữa  $\omega$  và  $\omega_1$  như sau :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (14-8)$$

Ta thấy  $\omega_1$  bé hơn  $\omega$ . Biên độ của dao động là một hàm số phụ thuộc theo thời gian  $Ae^{-\alpha t}$  nghĩa là biên độ càng ngày càng nhỏ đi. Sau mỗi chu kì biên độ đó sẽ nhỏ đi với một hệ số là :

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T} = \text{const}$$



Ta nhận thấy dao động tắt rất nhanh. Đồ thị của dao động được biểu diễn như trên hình 14-4.

H. 14-4

#### §14-5. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC VỚI $P(t) = P_0 \sin \Omega t$

Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{M} \sin \Omega t \quad (14-9)$$

Nghiệm tổng quát sẽ là tổng của một nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất không có vế thứ hai. Để hệ có dao động tạt chọn nghiệm riêng dưới dạng :

$$y_1 = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (14-10)$$

Lấy đạo hàm liên tiếp của  $y$  đối với  $t$  và thay vào (14-9) ta xác định được các hằng số  $C_1$  và  $C_2$  như sau :

$$C_1 = \frac{P_0}{M} \cdot \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{M} \cdot \frac{2\alpha \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}$$

Đặt

$$\sin \Psi = \frac{2\alpha \Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}}$$

$$\cos \Psi = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}}$$

và thay  $\delta_{11} = \frac{1}{M\omega^2}$  thì biểu thức  $y_1$  có dạng :

$$y_1 = A_1 \sin (\Omega t - \Psi) = \frac{P_o \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \sin (\Omega t - \Psi)$$

Nghiệm toàn phần sẽ là :  $y = Ae^{-\alpha t} \sin (\omega_1 t + \varphi) + y_1$

Nghiệm đó biểu diễn hai dao động. Số hạng đầu biểu diễn dao động tự do tắt dần. Số hạng thứ hai biểu diễn dao động cưỡng bức gây ra do lực kích thích. Dao động tự do sẽ mất đi sau một thời gian nhất định, lúc đó sẽ dao động theo tần số  $\Omega$  của lực kích thích. Biên độ dao động là :

$$A_1 = \frac{P_o \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}}$$

Tích số  $P_o \delta_{11}$  biểu diễn chuyển vị do biên độ của lực kích thích đặt một cách tĩnh gây nên tại mặt cắt mang khối lượng  $M$  theo phương dao động. Kí hiệu chuyển vị đó là  $y_1$  và đặt :

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \quad (14-11)$$

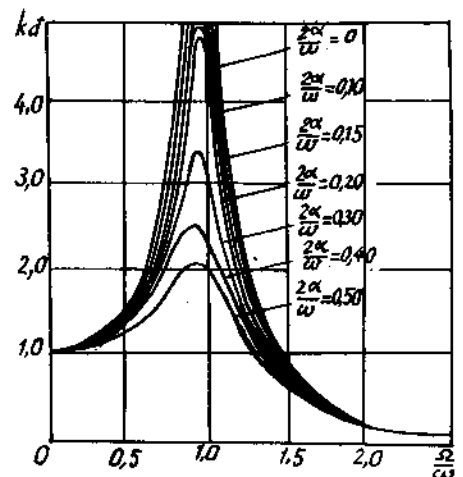
ta có thể viết :  $y_d = y_1 k_d \quad (14-12)$

Vậy : Độ võng động bằng độ võng tĩnh nhân với hệ số  $k_d$ .

Hệ số động phụ thuộc vào tỉ số  $\frac{\Omega}{\omega}$  và hệ số  $\alpha$ .

Mối tương quan đó được biểu diễn trên hình 14-5.

Khi  $\frac{\Omega}{\omega} = 1$  tức là khi tần số của lực kích thích trùng với tần số dao động riêng của hệ thì ta có hiện tượng cộng hưởng. Khi  $\alpha = 0$  thì  $k_d$  sẽ tiến tới vô cùng và khi  $\alpha \neq 0$  thì  $k_d$  sẽ có trị số cực đại hữu hạn. Khi đó độ võng động lớn hơn rất nhiều so với độ võng tĩnh và do đó kết cấu hay công trình dễ bị phá hỏng. Nhìn qua các đường biểu diễn chúng ta nhận thấy hiện tượng cộng hưởng hình thành cả một miền khi tần số lực kích thích không khác nhiều so với tần số dao động riêng của hệ. Ngược lại tỉ số  $\frac{\Omega}{\omega}$  tăng lên thì hệ số động còn nhỏ hơn cả đơn vị, do đó, người ta có thể giảm độ cứng của công trình để giảm tần số vòng riêng của hệ hay tăng tần số của lực kích thích lên. Khi đóng mở



H. 14-5

máy, một lúc nào đó tần số của lực kích thích có thể trùng với tần số riêng, cần tăng nhanh tốc độ máy để làm tăng tần số của lực kích thích làm cho hiện tượng cộng hưởng không kịp xảy ra.

Người ta cũng thường dùng các bộ phận giảm chấn để tăng độ cản  $\alpha$  nếu như hệ phải làm việc trong miền cộng hưởng lâu dài. Ta thấy tỉ số  $\frac{\Omega}{\omega}$  có trị số lớn hơn 2 thì những đường cong  $k_d$  sẽ trùng nhau. Lúc đó có thể xem  $\alpha = 0$  và trị số của  $k_d$  sẽ là :

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} \quad (14-13)$$

Biết hệ số  $k_d$  ta có thể tìm được ứng suất động bằng các biểu thức sau đây :

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d \sigma_t \\ \tau_d &= k_d \tau_t \end{aligned} \quad (14-14)$$

trong đó  $\sigma_d$  và  $\tau_d$  là ứng suất do tải trọng động gây nên,  $\sigma_t$  và  $\tau_t$  là ứng suất do biên độ của lực kích thích gây nên với giả thiết lực này được đặt một cách tĩnh lên hệ. Nếu trên hệ còn có các tải trọng tĩnh khác tác dụng trước khi dao động thì ứng suất toàn phần trên mặt cắt nào đó là tổng ứng suất động và ứng suất do tải trọng tĩnh đó gây nên.

**Ví dụ 1 :** Một động cơ điện có trọng lượng  $Q = 12.000\text{N}$  đặt trên hai dầm chữ I : No 24a, dầm dài 3m.

1. Tính tần số vòng riêng của hệ. Không kể đến trọng lượng bản thân của dầm.
2. Tính ứng suất lớn nhất trên dầm. Cho biết động cơ quay 1200 v/ph, khối lượng lệch tâm nặng là 200N, độ lệch tâm  $e = 0,3\text{cm}$ , lực cản không đáng kể ; không kể đến trọng lượng của dầm.

$$E = 2.10^7 \text{N/cm}^2 ; \quad g = 9,8 \text{m/s}^2$$

**Bài giải :**

1. Biết dầm chữ I số hiệu 24a có  $J_x = 3800\text{cm}^4$ ,  $W_x = 317 \text{cm}^3$ .

Tần số vòng riêng của hệ là :

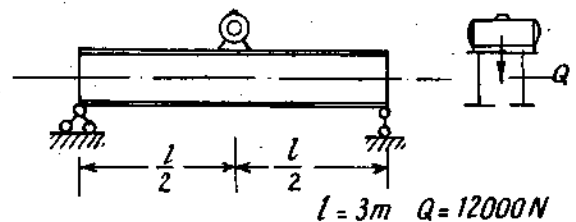
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$$

$\Delta t$  là độ võng tĩnh do trọng lượng của  $Q$  gây nên.

$$\Delta t = \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{12000.3^3.10^3}{48.2.10^7.3800} = 0,089\text{cm}$$

Vậy :

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{8.10^{-4}}} = 105 \frac{1}{\text{s}}$$



H. 14-6

2. Ta xem rằng mỗi vòng quay của động cơ lực quán tính li tâm của khối lượng lệch tâm kích thích xuống dầm một lần. Vậy tần số lực kích thích trong  $2\pi$  giây sẽ là :

$$\Omega = \frac{2\pi \cdot 1200}{60} = 125,6 \frac{1}{s}$$

$\Omega$  cũng đồng thời là tốc độ góc của động cơ.

Cường độ của lực quán tính li tâm là :

$$F_1 = m\Omega^2 r = \frac{200}{9,8} (125,6)^2 \cdot 0,003 = 972N$$

Hệ số động là

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{(125,6)^2}{(105)^2} \right|} = 2,32$$

Mômen uốn lớn nhất trên dầm do biên độ của lực kích thích  $F_1$  gây nên là :

$$M_x = \frac{F_1 l}{4} = \frac{972 \cdot 3}{4} = 729Nm.$$

Ứng suất tĩnh là :

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} = \frac{729 \cdot 10^2}{2 \cdot 317} = 115N/cm^2$$

Trị số ứng suất động sẽ là :

$$\sigma_d = \sigma_1 k_d = 115 \cdot 2,32 = 267N/cm^2$$

Ứng suất do trọng lượng của mô-tơ gây nên là :

$$\sigma' = \frac{12.000 \cdot 3 \cdot 10^2}{4 \cdot 2 \cdot 317} = 1400N/cm^2$$

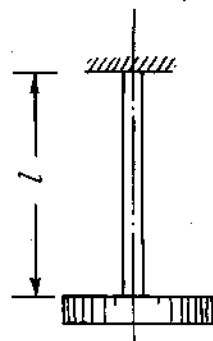
Vậy ứng suất toàn phần sẽ là :

$$\sigma = \sigma_d + \sigma' = 1667N/cm^2.$$

**Ví dụ 2.** Một đĩa tròn gắn chặt trên một thanh tròn với một đầu ngàm. Gọi  $I$  là mômen quán tính của đĩa đối với trục của thanh (h. 14-7), thanh có chiều dài  $l$  và độ cứng chống xoắn là  $GJ_p$ , bỏ qua trọng lượng của thanh. Xác định tần số vòng riêng dao động xoắn của hệ.

**Bài giải :**

Gọi  $\varphi$  là góc xoắn của hệ. Ta bỏ qua lực cản và xem mômen kích thích là bằng không thì  $\varphi$  gây nên là do mômen của lực quán tính. Mômen này luôn luôn ngược chiều với gia tốc góc :



H. 14-7

Từ đó ta có

$$\varphi = \delta_{11} \left( -I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \quad (a)$$

ở đây :  $\delta_{11}$  là góc xoắn do mômen đơn vị đặt trong mặt phẳng của đĩa gây nên :

$$\delta_{11} = \frac{I}{GJ_p}$$

Phương trình (a) được viết lại dưới dạng :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (b)$$

trong đó

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} I}$$

Nghiệm tổng quát của (b) có dạng :

$$\varphi = A \sin(\omega t + \Phi)$$

Vậy tần số vòng riêng dao động xoắn của hệ là :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} I}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{I}} \quad (14-15)$$

### §14-6. PHƯƠNG PHÁP THU GỌN KHỐI LƯỢNG

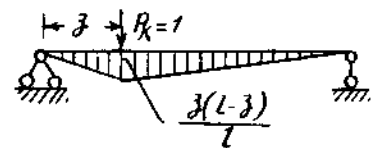
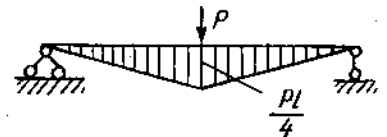
Việc bỏ qua trọng lượng bản thân của các liên kết đàn hồi như trên trong nhiều trường hợp cho ta những kết quả khá phù hợp với thực tế. Song để có thể có được những kết quả có độ chính xác cao hơn thì ta phải tìm cách tính với cả trọng lượng bản thân của các liên kết đàn hồi. Tất nhiên, trong thực tế có những trường hợp không thể không kể đến trọng lượng bản thân của những liên kết này.

Phương pháp đơn giản nhất là phương pháp thu gọn khối lượng. Ta tưởng tượng một hệ tương đương với hệ đã cho có khối lượng tập trung ở một nơi nào đó (nghĩa là hệ có một bậc tự do), sao cho năng lượng dao động trong hệ tương đương bằng năng lượng dao động trong hệ thực.

Ví dụ xét dầm mang khối lượng như trên hình 14-8. Nếu phải kể đến trọng lượng bản thân của dầm thì ta tưởng tượng thu gọn khối lượng của dầm về ngay tại M. Nghĩa là tại M có một khối lượng mới sao cho năng lượng dao động của hệ mới này bằng toàn bộ năng lượng dao động của hệ cũ, cách làm như sau : Ta so sánh độ



H. 14-8



H. 14-9

võng tại mặt cắt z nào đó đối với độ võng ngay tại M do lực P đặt tại đó gây nên. Giả sử vị trí của M là điểm giữa của dầm.

Với phép nhân Verésaghin ta tìm thấy (h. 14-9) :

$$y = \frac{Pl^3}{48EJ_x}$$

$$y_1 = \left( \frac{Pl^2}{16} z - \frac{Pz^3}{12} \right) \frac{1}{EJ_x}$$

Vậy :

$$y_1 = y \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$$

Vận tốc của các chất điểm tại mặt cắt này là

$$v = \frac{dy_1}{dt} = \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right) \frac{dy}{dt}$$

Gọi q là trọng lượng của dầm trên một đơn vị dài. Động năng của một phần tử dz tại mặt cắt đó sẽ là :

$$dT = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{qdz}{g} \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)^2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

Động năng của toàn dầm sẽ là :

$$T = \int_0^l dT = 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)^2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dz$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

Ta xem T như động năng của một khối lượng có trị số là  $\frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g}$  đặt tại giữa dầm.

Nói một cách khác, hệ tương đương là hệ có khối lượng tập trung tại giữa nhịp với trị số là :

$$M_1 = M + \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g}$$

Hệ số  $\mu = \frac{17}{35}$  được gọi là hệ số thu gọn của khối lượng  $\frac{ql}{g}$  của dầm về tại giữa nhịp.

**Ví dụ 3.** Giải ví dụ 1 khi có kể đến trọng lượng bản thân của dầm. Cho biết  $q = 294 \text{ N/m}$ .

**Bài giải :**

1. Trọng lượng của dầm sau khi nhân với hệ số thu gọn  $\mu$  là :

$$Q' = \frac{17}{35} \times 294 \times 3 \times 2 = 882 \text{ N.}$$

Độ võng tĩnh khi kể đến trọng lượng của dầm là :

$$\Delta t = \frac{(Q + Q')l^3}{48EJ_x} = \frac{(12000 + 882)3^3 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2800} = 0,095 \text{cm}$$

Tần số vòng riêng của hệ sẽ là :

$$\omega' = \sqrt{\frac{9,8}{9,5 \cdot 10^{-4}}} = 101 \frac{1}{\text{s}}$$

2. Hệ số động sẽ là :

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega'^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \left( \frac{125,6}{101} \right)^2 \right|} = 1,85$$

Ứng suất động sẽ là :

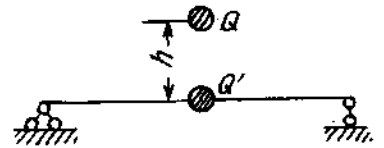
$$\sigma_d = \sigma_1 k_d = 115 \cdot 1,85 = 213 \text{N/cm}^2$$

So sánh với ví dụ 1 ta thấy  $k_d$  có trị số nhỏ hơn ; ứng suất động cũng vậy. Điều đó cũng dễ hiểu vì năng lượng dao động còn phải dành một phần lớn để làm dao động toàn thanh.

#### §14-7. VA CHẠM THẲNG ĐỨNG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

Ví dụ ta có dầm đặt trên hai gối tựa mang khối lượng  $M$  như trên hình 14-10. gọi  $Q'$  là trọng lượng của  $M$ . Giả dụ có một trọng lượng  $Q$  nào đó từ một độ cao  $h$  rơi tự do đập vào  $Q'$ . Sự va chạm đó được gọi là va chạm thẳng đứng. Mong muốn của chúng ta là tính được độ võng lớn nhất  $y_d$  do va chạm gây nên.

Ta nhận thấy vận tốc của các khối lượng trên hệ có một sự thay đổi đột ngột, gia tốc sinh ra khá lớn và sự việc xảy ra trong một khoảnh khắc rất ngắn. Để có thể giải được bài toán chúng ta hình dung ra quá trình va chạm thành các bước như sau :



H. 14-10

1. Ngay trước khi va chạm  $Q$  có vận tốc  $v_0$ . Nếu là sự rơi tự do thì trị số  $v_0$  này là :  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Khi hai vật thể tiếp xúc nhau chúng sẽ có cùng vận tốc  $v$  nào đó và cùng chuyển động đi xuống. Nếu không có một sự mất mát về năng lượng ta có thể dùng định luật bảo toàn động lượng để tính ra  $v$ . Thực vậy ta có :

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{(Q + Q')}{g} v$$

Vậy :

$$v = \frac{Q}{Q + Q'} v_0 \quad (14-16)$$

Đó là giai đoạn thứ nhất.

Chúng ta cũng nhận thấy rằng trong thực tế quá trình này phức tạp hơn. Ví dụ độ cứng của dầm khá lớn và trọng lượng  $Q$  nhỏ thì  $Q$  không gây nên một biến dạng



nào của dầm và Q sẽ bị bán ngược lại hay khi Q có vận tốc khá lớn thì sẽ tạo nên các biến dạng cục bộ. Những trường hợp đó chúng ta xem như những trường hợp đặc biệt mà ta không đề cập tới ở đây.

2. Bước thứ hai là cả hai vật cùng di động đi xuống gây nên biến dạng của dầm cho đến lúc tạo nên độ võng lớn nhất  $y_d$  thì cả hai vật thể cùng dừng lại. Quá trình này có một sự biến đổi lớn về năng lượng. Động năng của hệ khi hai vật bắt đầu di động là :

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{Q + Q'}{g} \right) v^2.$$

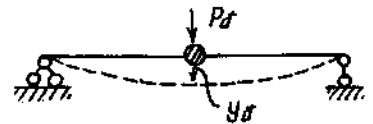
động năng đó mất dần đi do lực cản đàn hồi của hệ cho đến lúc hệ dừng lại, động năng đó là bằng không. Sự biến thiên của động năng là bằng công của ngoại lực, ở đây là công của lực cản đàn hồi. Ngoài công đó ta nhận thấy trọng lượng  $Q'$  và  $Q$  đã bị giảm đi một độ cao  $y_d$  nên tạo nên một công là :  $\Pi = (Q + Q')y_d$

Tổng công do sự biến thiên của động năng và sự giảm thế năng của hệ gây nên là bằng thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + Q'}{g} v^2 + ((Q + Q')y_d$$

Bây giờ ta chỉ còn tìm cách tính được U theo  $y_d$  thì ta sẽ được phương trình để xác định  $y_d$ .

Ta để ý đến biến dạng của hệ. Giả sử có một lực  $P_d$  nào đó đặt một cách tĩnh lên hệ, tạo cho hệ một chuyển vị  $y_d$  (h. 14-11). Công của ngoại lực trong quá trình đó sẽ là :



H. 14-11

$$A = \frac{P_d y_d}{2} + Q' y_d$$

nếu gọi  $\delta$  là chuyển vị theo phương của  $y_d$  do lực đơn vị gây nên, ta sẽ có biểu thức :

$$y_d = P_d \delta$$

Vậy công A được viết dưới dạng :

$$A = \frac{y_d^2}{2\delta} + Q' y_d$$

Công đó phải bằng thế năng U tích lũy trong hệ. Từ đó ta có phương trình :

$$\frac{y_d^2}{2\delta} + Q' y_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + Q'}{g} v^2 + (Q + Q') y_d$$

Sau khi thay trị số v được tính từ (14-16) và rút gọn ta được phương trình bậc hai đối với  $y_d$ .

$$y_d^2 - 2\Delta_1 y_d - \frac{\Delta_1 v_0^2}{g \left(1 - \frac{Q'}{Q}\right)} = 0$$

trong đó  $\Delta_1 = Q\delta$  nghĩa là độ võng do Q đặt một cách tĩnh lên dầm gây nên.

Nghiệm của phương trình bậc hai đó là :

$$y_d = \Delta_t \pm \sqrt{\Delta_t^2 + \frac{\Delta_t v_0^2}{g(1 + \frac{Q'}{Q})}}$$

Rõ ràng  $y_d$  không thể âm nên ta bỏ nghiệm âm của phương trình.

Từ đó ta có :

$$y_d = \Delta_t \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g(1 + \frac{Q'}{Q})} \Delta_t} \right)$$

hay :

$$y_d = k_d \Delta_t$$

với trị số của  $k_d$  là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\Delta_t(1 + \frac{Q'}{Q})}} \quad (14-17)$$

Thay trị số của  $v_0$  vào ta có :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{(1 + \frac{Q'}{Q}) \Delta_t}} \quad (14-17')$$

Nếu phải kể đến trọng lượng bản thân của dầm thì ta phải thêm trọng lượng thu gọn của dầm vào trọng lượng  $Q'$ . Nếu  $Q'$  là bé có thể bỏ qua được thì biểu thức  $k_d$  có dạng

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_t}} \quad (14-18)$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu trọng lượng  $Q$  được đặt đột ngột lên dầm, nghĩa là  $h = 0$  thì  $k_d = 2$ . Chuyển vị động lớn gấp hai lần chuyển vị tĩnh.

Ứng suất pháp và tiếp do tải trọng va chạm gây nên được tính với biểu thức :

$$\sigma_d = \sigma_t k_d$$

$$\tau_d = \tau_t k_d$$

$\sigma_t$  và  $\tau_t$  là ứng suất do tải trọng va chạm  $Q$  đặt một cách tĩnh trên dầm gây nên.

Để giảm  $k_d$  người ta tìm cách tăng  $\Delta_t$  bằng cách giảm độ cứng của hệ đàn hồi hoặc đặt thêm các lò xo đệm tại những nơi va chạm.

**Ví dụ 4.** Cho một dầm thép chữ I số 22a, đặt trên các gối tựa với đầu thừa như hình 14-12. Một trọng lượng  $Q = 200\text{N}$  rơi từ độ cao  $h = 4\text{cm}$  xuống đầu tự do của dầm. Không kể đến trọng lượng bản thân của dầm, tính ứng suất lớn nhất trên dầm có tải trọng va chạm gây nên. Nếu tại đầu tự do có đặt một lò xo có độ cứng là

$C = 0,01 \text{ mm/N}$ , trọng lượng của lò xo và các bộ phận giữ lò xo trên dầm nặng  $200\text{N}$ , tính lại trị số ứng suất do va chạm gây nên. Cho  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .

*Bài giải :*

Mômen uốn lớn nhất do  $Q$  gây nên khi  $Q$  được đặt một cách tính lên dầm là (h. 14-12) :

$$M_{\max} = Q \cdot 3 = 200 \cdot 3 = 600 \text{ Nm}$$

Ứng suất tĩnh lớn nhất là :  $\sigma_1 = \frac{60000}{251} = 239 \text{ N/cm}^2$

trong đó :  $W_x = 251 \text{ cm}^3$ .

Độ võng tại đầu mút tự do do lực  $Q$  đặt một cách tính lên dầm gây ra là :

$$\Delta_1 = \frac{Q l_1^2}{E J_x} (1 + \frac{l_1}{l_2}) = \frac{200 \cdot 3^2 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^7 \cdot 2700} (5 + 3) \cdot 10^2 = 0,08 \text{ cm}$$

Khi ta chưa đặt lò xo, hệ số động sẽ là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,04}{8 \cdot 10^{-4}}} = 11,4$$

Ứng suất va chạm là :

$$\sigma_d = \sigma_1 k_d = 239 \cdot 11,4 = 2724,6 \text{ N/cm}^2$$

Nếu đặt lò xo lên dầm, độ lún của lò xo do  $Q$  đặt một cách tính lên hệ gây nên là :

$$\lambda = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 200 = 0,02 \text{ m}$$

Vậy :  $\Delta_t = 0,02 + 0,0008 = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

hệ số động sẽ là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_t (1 + \frac{Q'}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,04}{(1 + \frac{200}{200}) \cdot 2,08 \cdot 10^{-2}}} = 2,7$$

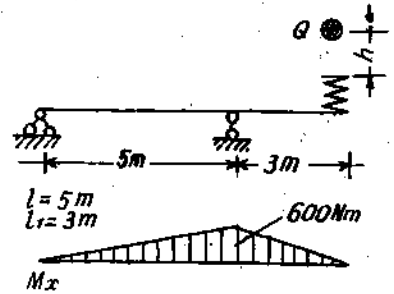
Vậy ứng suất động sẽ là :

$$\sigma_d = 239 \cdot 2,7 = 645,3 \text{ N/cm}^2$$

Nếu kể đến ứng suất tĩnh do trọng lượng của lò xo và bộ phận giữ lò xo ( $Q' = 200\text{N}$ ) gây nên thì ứng suất toàn phần là :

$$\sigma = \frac{200 \cdot 300}{251} + 645,3 = 884,3 \text{ N/cm}^2$$

Như vậy là vẫn nhỏ hơn ứng suất động trong trường hợp thứ nhất.



H. 14-12

### § 14-8. VA CHẠM NGANG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

Giả sử dầm được đặt đứng như hình 14-13. Một trọng lượng  $Q$  chuyển động bay với vận tốc  $v_0$  đập vào  $Q'$  theo phương ngang. Cách va chạm đó ta gọi là va chạm ngang.

Quá trình suy luận cho va chạm đứng đều áp dụng cho va chạm ngang. Khi hai vật thể  $Q$  và  $Q'$  đã chạm nhau chúng cùng chiều chuyển động theo phương ngang với vận tốc  $v$ . Trị số  $v$  được xác định từ biểu thức :

$$v = \frac{Qv_0}{Q + Q'}$$

Động năng lúc đó là :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 v_0^2}{g(Q + Q')}$$

Vì các khối lượng đều chuyển động theo phương ngang nên thế năng của hệ không biến đổi  $\Pi = 0$ .

Giả sử có một lực  $P_d$  nào đó tác dụng tĩnh lên hệ để gây nên một chuyển vị  $y_d$  thì công của ngoại lực là bằng :

$$A = \frac{P_d y_d}{2} = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

trong đó  $\delta$  là chuyển vị do lực đơn vị gây nên. Công đó phải bằng thế năng biến dạng đàn hồi  $U$  của hệ. Từ đó ta có phương trình :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y_d^2}{\delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 v_0^2}{g(1 + \frac{Q'}{Q})}$$

Vậy :

$$y_d = \frac{v_0 \Delta_1}{\sqrt{g \Delta_1 (1 + \frac{Q'}{Q})}}$$

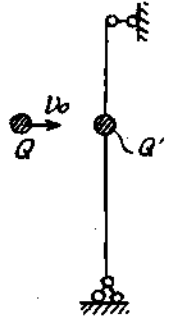
trong đó :  $\Delta_1 = \delta Q$  là chuyển vị tĩnh do một lực ngang có giá trị bằng  $Q$  đặt một cách tĩnh lên dầm gây nên.

Từ đó ta có :

$$y_d = \frac{v_0 \Delta_1}{\sqrt{g \Delta_1 (1 + \frac{Q'}{Q})}} \quad (14-19)$$

Nếu  $Q' = 0$  thì ta có :

$$k_d = \frac{v_0}{\sqrt{g \Delta_1}} \quad (14-20)$$



H. 14-13

## §14-19. TÍNH ỨNG SUẤT TRONG CÁC KẾT CẤU CÓ CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC KHÔNG ĐỔI

Ví dụ trường hợp dây cáp kéo vật nặng P lên cao với gia tốc a không đổi (h. 14-14).

Gọi  $\gamma$  và F là trọng lượng riêng và diện tích mặt cắt ngang của dây cáp.

Gia tốc a được xem là dương khi gia tốc có chiều hướng lên và là âm khi hướng xuống.

Tính nội lực trên một mặt cắt nào đó cách đầu mút mang tải trọng một khoảng x. Lực dọc  $N_d$  không những phải cân bằng với trọng lượng P và trọng lượng của dây cáp mà còn phải cân bằng với lực quán tính, do đó ta có :

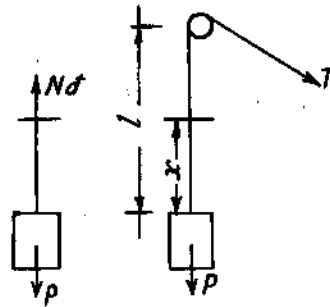
$$N_d = P + \gamma x F + (P + \gamma x F) \frac{a}{g}$$

$$N_d = (P + \gamma x F) \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

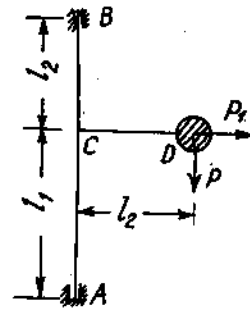
Vậy :  $\sigma_d = \sigma_t k_d$

trong đó  $\sigma_t = \frac{P + \gamma x F}{F}$

và  $k_d = 1 + \frac{a}{g}$



H. 14-14



H. 14-15

Xét ví dụ thứ hai : Một cơ cấu quay có hình dạng như hình 14-15. Bỏ qua trọng lượng bản thân của các thanh. Tính ứng suất trong các thanh khi cơ cấu quay đều với vận tốc góc  $\omega$ .

Khi quay khối lượng m chịu một lực quán tính li tâm là :

$$P_1 = m\omega^2 l_2 = \frac{P}{g} \omega^2 l_2$$

Lực quán tính đó làm cho thanh CD chịu kéo và thanh AB chịu uốn. Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt tại C là :

$$M_{\max} = \frac{P_1 l_2^2}{l_1 + l_2}$$

Vậy nếu gọi  $F_{cd}$  là diện tích mặt cắt ngang của CD và  $W_x$  là mômen chống uốn của AB thì ứng suất trong các thanh CD và AB do lực quán tính gây nên là :

$$\sigma_{CD} = \frac{P_1}{F_{cd}} = \frac{P}{g} \omega^2 l_2$$

$$\sigma_{\max(AB)} = \frac{P_1 l_2^2}{(l_1 + l_2) W_x} = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 l_2^3}{(l_1 + l_2) W_x}$$

Ngoài các thành phần ứng suất đó trên các mặt cắt ngang còn có một hệ ứng suất do tải trọng P gây nên mà ở đây ta không tính đến.

## §14-10. TỐC ĐỘ TỐI HẠN CỦA TRỤC QUAY

Xét trục quay cố mang bánh xe như hình 14-16 do chế tạo không chính xác hoặc do vật liệu không đồng nhất nên trọng tâm của bánh xe không nằm trên trục quay. Trong trường hợp tốc độ quay không lớn, lực li tâm không đáng kể, trục có thể làm việc bình thường, nhưng khi tốc độ cao đến một giá trị nào đó thì lực li tâm là rất lớn và có thể uốn cong trục, gây nên tiếng ồn trong quá trình máy làm việc. Nếu tăng tốc độ lên cao hơn nữa thì ta lại thấy hiện tượng ngược lại, tiếng ồn giảm đi và độ võng của trục cũng giảm đi. Từ đó ta có định nghĩa như sau :



Ta gọi tốc độ tối hạn là tốc độ góc của trục quay khi trục có độ võng lớn nhất.

Gọi độ võng của trục tại mặt cắt mang bánh xe là  $y$  và độ lệch tâm của khối lượng là  $e$ , tốc độ góc của trục là  $\Omega$  và  $m$  là khối lượng của bánh xe.

H. 14-16

Lực quán tính li tâm sẽ là :

$$F_i = m\Omega^2 (e + y)$$

Gọi chuyển vị tại mặt cắt mang bánh xe do lực đơn vị vuông góc với trục đặt tại đó gây ra là  $\delta$  thì :

$$y = F_i \delta = m\delta\Omega^2 (e + y)$$

Từ đó ta có :

$$y = \frac{e\Omega^2}{\frac{1}{m\delta} - \Omega^2} \quad (14-21)$$

Ta thấy  $y$  sẽ lớn nhất khi  $\Omega^2 = \frac{1}{m\delta}$

Nghĩa là tốc độ tối hạn của trục quay có trị số bằng tần số vòng riêng của hệ :

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \omega \quad (14-22)$$

Nếu  $\Omega > \omega$ , tần số vòng riêng nhỏ hơn tốc độ quay rất nhiều khi đó  $y \approx -e$  và trọng tâm của bánh xe sẽ nằm trên trục quay. Điều này có ý nghĩa quan trọng trong chế tạo tuabin và máy li tâm.

## CHƯƠNG XV

### TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT BIẾN ĐỔI CÓ CHU KÌ

#### §15-1. KHÁI NIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG MỚI

Nhiều chi tiết máy hay công trình, do điều kiện hoạt động và chịu lực của chúng, ứng suất bên trong là hàm số biến đổi theo chu kì. Ví dụ trường hợp chịu lực của bánh xe tàu hỏa (h. 15-1a). Biểu đồ mômen uốn  $M_x$  được biểu diễn trên hình 15-1b. Xét ứng suất tại một điểm M nào đó trên chu vi của mặt cắt (h. 15-1c). Trị số ứng suất tại đó được tính với biểu thức :

$$\sigma_M = \frac{M_x}{J_x} y$$

$y$  là khoảng cách từ M đến trục trung hòa của mặt cắt. Vì phương chiều của mômen uốn  $M_x$  không thay đổi nên đường trung hòa cũng không thay đổi. Nếu gọi  $\omega$  là tốc độ góc của trục và giả sử ban đầu M nằm trên trục trung hòa thì góc gồm giữa trục trung hòa  $Ox$  và bán kính  $OM$  sẽ là  $\omega t$ .

Ứng suất tại M sẽ là :

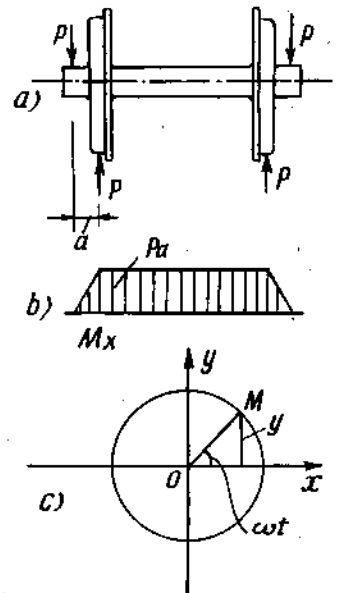
$$\sigma_M = \frac{M_x}{J_x} R \sin \omega t$$

Khi  $\omega t = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$  thì  $\sigma_M$  đạt đến trị số cực đại. Ngược lại khi  $\omega t = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi$  thì  $\sigma_M$  đạt trị số cực tiểu. Nghĩa

là ứng suất tại M biến đổi theo các chu trình hay gọi tắt là ứng suất thay đổi. Đã từ lâu người ta nhận thấy nếu vật liệu làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi thì mặc dù lực còn thấp so với giới hạn bền, vật liệu vẫn bị phá hỏng.

Sự phá hỏng xảy ra đột ngột, không có biến dạng dư dù chi tiết làm bằng vật liệu dẻo.

Trước đây để giải thích hiện tượng này người ta cho rằng dưới tác dụng của ứng suất thay đổi vật liệu bị "mệt mỏi" đến lúc không chịu lực được nữa thì bị phá hỏng. Cách giải thích này đã "ngự trị" một thời gian dài vì vậy đến ngày nay ta vẫn dùng chữ "mỏi" để chỉ hiện tượng vật liệu bị phá hỏng vì ứng suất thay đổi, dù rằng qua các thí nghiệm tỉ mỉ về tính chất cơ học của vật liệu lấy ra từ các chi tiết bị phá hỏng do ứng suất thay đổi ta không tìm thấy sự khác nhau so với vật liệu trước khi bị phá hỏng.



H.15-1

Nguyên nhân gây nên sự phá hỏng được trình bày ở lý thuyết lệch mạng trong vật lý kim loại và trong cơ học phá hủy là sự phát triển của vết nứt vi mô. Ta có thể tóm tắt lý thuyết đó như sau.

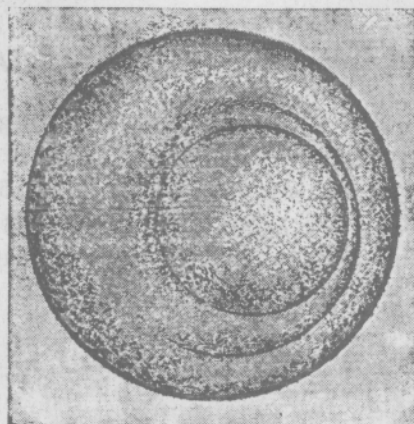
Vì một nguyên nhân nào đó, có thể vì cấu tạo của vật liệu, cũng có thể vì khi gia công kim loại, trên chi tiết máy có những vết nứt ban đầu rất bé được gọi là vết nứt vi mô. Vết nứt đó sẽ phát triển nếu có hai điều kiện sau đây :

- Vật liệu phải làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi.

- Trị số cực đại của ứng suất thay đổi đó phải vượt quá giới hạn nhất định mà ta sẽ gọi là giới hạn mỏi.

Sự phát triển đó càng ngày càng lớn cho đến khi phần diện tích còn lại của chi tiết không chịu đựng được ngoại lực nữa thì chi tiết bị phá hỏng.

Trên hình 15-2 là mặt cắt ngang của một trục chịu uốn bị phá hỏng vì mỏi. Mặt cắt đó có hai phần : một phần nhẵn và một phần xù xì. Phần nhẵn được giải thích là phần phát triển của vết nứt vi mô. Trong quá trình vết nứt này phát triển dưới tác dụng của ứng suất thay đổi các mặt bị cọ xát với nhau nên được mài nhẵn. Phần xù xì là khi diện tích còn lại của chi tiết không chịu nổi lực nữa nên bị gãy đột ngột, các tinh thể bị phá vỡ tạo nên hình dạng như ta đã thấy.



H.15-2

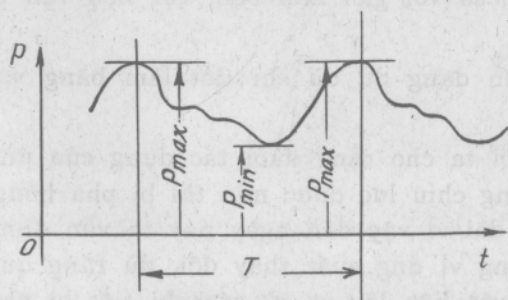
Với quan điểm đó sự nghiên cứu về mỏi tập trung vào các mặt sau đây :

- Xác định giới hạn mỏi cho những chu trình ứng suất khác nhau. Nghĩa là tìm giá trị cực đại giới hạn của ứng suất thay đổi, với giá trị đó vật liệu làm việc lâu dài không bị phá hỏng.

- Tìm những nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là tìm những nhân tố dễ gây nên các vết nứt vi mô.

- Tìm biện pháp nâng cao giới hạn mỏi nghĩa là tìm các biện pháp hạn chế sự phát sinh ra các vết nứt vi mô.

Ta sẽ lần lượt đề cập đến các vấn đề đó trong những mục tới.



H.15-3

## §15-2. PHÂN LOẠI VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CHU TRÌNH ỨNG SUẤT

Ta gọi một chu trình ứng suất là khi trị số ứng suất  $p$  biến thiên từ trị số cực đại sang trị số cực tiểu và về trở lại trị số cực đại. Thời gian thực hiện một chu trình là một chu kỳ (h. 15-3).

Qua kinh nghiệm cho thấy cách biến thiên của các hàm ứng suất không ảnh hưởng đến giới hạn mỏi. Yếu tố quyết định đến độ bền mỏi của vật liệu là trị số của ứng suất cực



đại và cực tiểu. Từ đó cho phép ta tiến hành các thí nghiệm với bất cứ cách biến thiên nào của ứng suất.

Các trị số  $p_{max}$  và  $p_{min}$  trở thành các đặc trưng của chu trình ứng suất. Ngoài hai đặc trưng đó ta còn có đặc trưng khác như sau :

Ứng suất trung bình  $p_{tb}$ . Với định nghĩa :

$$p_{tb} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} \quad (15-1)$$

Ứng suất biên độ :

$$p_{bd} = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} \quad (15-2)$$

ta nhận thấy  $p_{bd}$  bao giờ cũng có giá trị dương.

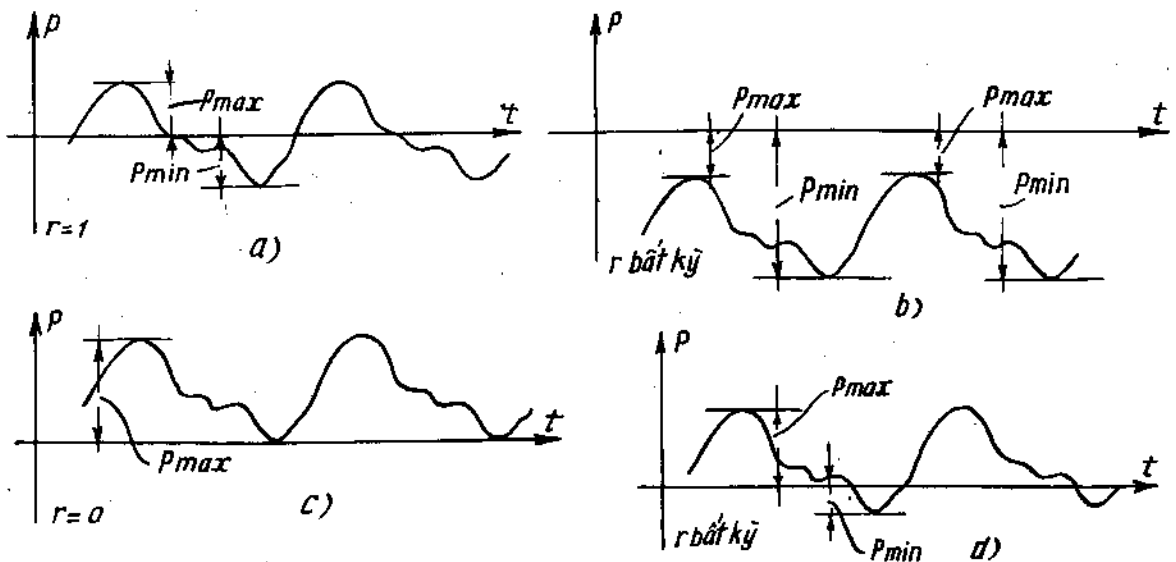
- Hệ số bất đối xứng của chu trình :

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}} \quad (15-3)$$

Từ đó ta có các thể loại chu trình ứng suất như sau :

1. Chu trình dương là khi cả  $p_{max}$  và  $p_{min}$  đều có giá trị dương (vật liệu luôn luôn chịu kéo).
2. Chu trình âm là khi cả  $p_{max}$  và  $p_{min}$  đều có giá trị âm (vật liệu luôn luôn chịu nén).
3. Chu trình đối xứng :  $p_{max} = - p_{min}$  vậy  $p_{tb} = 0$  và  $r = -1$ .
4. Chu trình bất đối xứng là khi  $r$  có trị số bất kì.
5. Chu trình mạch động là khi  $r = 0$  hoặc  $r = \infty$ .

Các chu trình đó được biểu diễn trên hình 15-4.

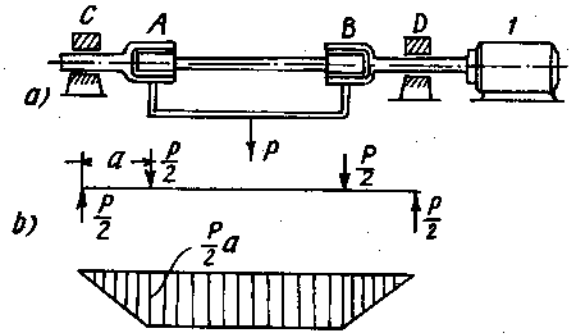


H. 15-4

Với các định nghĩa đó ta có thể xem ứng suất tĩnh như một trường hợp riêng của các chu trình ứng suất với  $p_{\max} = p_{\min}$  nghĩa là  $r = 1$ .

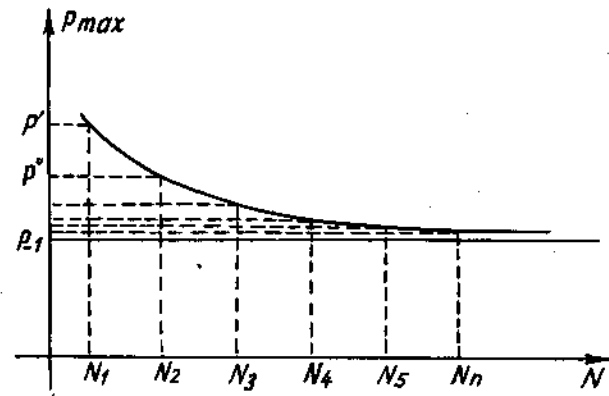
### §15-3. GIỚI HẠN MỎI VÀ BIỂU ĐỒ GIỚI HẠN MỎI

1. Giới hạn mỏi. Chúng ta phải tiến hành các thí nghiệm để tìm ra giới hạn mỏi của các chu trình có hệ số bất đối xứng khác nhau. Các thí nghiệm được thực hiện trên các máy thử mỏi. Thí nghiệm tương đối đơn giản và phổ biến nhất là thí nghiệm uốn để tạo nên một chu trình đối xứng. Sơ đồ máy được biểu diễn trên hình 15-5a.



H. 15-5

Mẫu thí nghiệm được lắp vào các ngàm A và B của máy tạo nên một thanh cứng đặt trong các ổ trượt quay C, D. Tải trọng P đặt lên giá treo qua AB tạo nên mômen uốn đối với mẫu thí nghiệm như trên sơ đồ lực (h. 15-5b). Giá treo lực đặt trên các ổ bi tại A, B do đó khi trục quay, phương của lực P không thay đổi, nghĩa là mômen uốn không đổi. Động cơ (1) có bộ phận đếm vòng và có số vòng quay từ 2000 đến 6000 vòng phút. Cách tiến hành thí nghiệm theo tiêu chuẩn V.N. Ví dụ thí nghiệm cho 10 mẫu. Với mẫu thứ nhất ta đặt tải trọng P sao cho ứng suất cực đại trên mẫu thử đạt đến giá trị quá 50% giới hạn bền. Trị số này lớn hơn giới hạn mỏi mà ta dự đoán. Sau một số vòng quay nhất định, nghĩa là sau một số chu trình nhất định, giả dụ  $N_1$  chu trình chẳng hạn, mẫu sẽ bị gãy. Ta



H. 15-6

tiến hành mẫu thử thứ hai bằng cách giảm lực P đi. Sau đó đến các mẫu khác. Lần lượt ta sẽ có các số chu trình  $N_1, N_2 \dots N_4$  (tương ứng với sự phá hỏng của vật liệu) ta lập được biểu đồ như hình vẽ (h. 15-6). Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ Vêle. Ta nhận thấy đường cong quan hệ giữa  $p_{\max}$  và số chu trình N sẽ tiến tiệm cận đến một đường ngang nào đó. Đường đó xác định cho ta giới hạn mỏi  $p_{-1}$  vì rằng ứng suất cực đại đạt đến trị số đó vật liệu sẽ làm việc lâu dài dưới tác dụng của ứng suất thay đổi.

Theo tiêu chuẩn quy định đối với thép, nếu mẫu thử chịu đựng được  $10^7$  chu trình mà không bị phá hỏng thì xem là đủ.

Đối với kim loại mẫu số chu trình ít nhất cần thực hiện là từ  $20 \cdot 10^7$  đến  $50 \cdot 10^7$ .

Giới hạn mỏi của vật liệu được ký hiệu với chỉ số r ( $p_r$ ) (r là hệ bất đối xứng). Trong trường hợp đối xứng giới hạn mỏi là  $p_{-1}$  (ở đây chữ p để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp). Trong trường hợp cụ thể chỉ có ứng suất pháp hay ứng suất tiếp ta có thể kí hiệu giới hạn mỏi là  $\sigma_{-1}$  hoặc  $\tau_{-1}$ .

Giới hạn mỗi khi uốn đối với thép thường có quan hệ với giới hạn bền khi kéo như sau :

$$\sigma_{-1}^u = 0,4\sigma_B \quad (15-4)$$

Ta có thể dùng những công thức kinh nghiệm sau đây để suy ra giới hạn mỗi  $\sigma_{-1}^{tr}$  của thép trong các biến dạng kéo nén đối xứng hoặc  $\tau_{-1}^x$  xoắn đối xứng :

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^{tr} &= 0,7\sigma_{-1}^u = 0,28\sigma_B \\ \tau_{-1}^x &= 0,55\sigma_{-1}^u = 0,22\sigma_B \end{aligned} \quad (15-5)$$

Đối với kim loại màu ta có công thức kinh nghiệm :

$$\sigma_{-1}^u = (0,25 - 0,50) \sigma_B \quad (15-6)$$

$\sigma_{-1}^{tr}$  là giới hạn mỗi của chu trình đối xứng khi thanh chịu kéo nén đúng tâm.

**2. Biểu đồ giới hạn mỗi.** Đối với mỗi loại vật liệu giới hạn mỗi phụ thuộc vào hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất. Để diễn đạt một cách tổng quát ta phải tìm cách biểu diễn giới hạn mỗi theo  $r$  trên một biểu đồ nhất định. Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ giới hạn mỗi. Có hai loại biểu đồ : một loại vẽ trên tọa độ  $P_{max}$  -  $P_{min}$  và biểu đồ vẽ trên tọa độ  $P_{bd}$  -  $P_{tb}$ . Biểu đồ thứ hai này gọi là biểu đồ Còlay. Ta sẽ nói kĩ biểu đồ này vì nó được dùng nhiều trong chế tạo máy.

Dem chia (15-2) cho (15-1) ta có :

$$\frac{P_{bd}}{P_{tb}} = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

Vậy :

$$P_{bd} = \frac{1 - r}{1 + r} P_{tb} \quad (15-7)$$

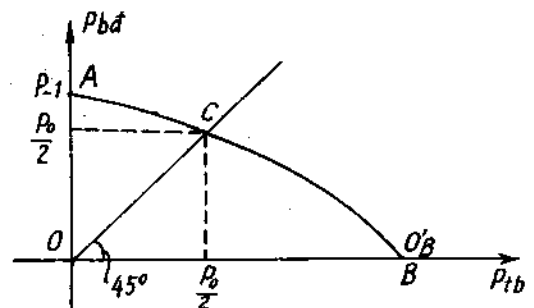
Với một trị số  $r$  nhất định tương quan giữa  $P_{bd}$  và  $P_{tb}$  là một đường thẳng qua gốc tọa độ. Nghĩa là, với các chu trình cùng có hệ số bất đối xứng như nhau thì được biểu diễn bằng các điểm trên cùng một đường thẳng. Ví dụ các chu trình mạch động  $r = 0$  được biểu diễn bằng các điểm trên đường phân giác của hệ tọa độ. h. 15-7. Rõ ràng trên đường đó ta sẽ tìm thấy một điểm C biểu diễn cho giới hạn mỗi  $p_0$ .

Tọa độ của C được suy như sau :

Dem cộng (15-1) và (15-2) ta được :

$$\begin{aligned} P_{max} &= P_{bd} + P_{tb} \quad \text{Ở đây vì : } P_{bd} = P_{tb} \text{ và} \\ P_{max} &= p_0 \text{ nên hoành độ và tung độ của C} \\ &\text{là bằng } \frac{p_0}{2}. \end{aligned}$$

Các điểm trên trục tung biểu diễn cho các chu trình đối xứng vì với các chu trình đó ta có

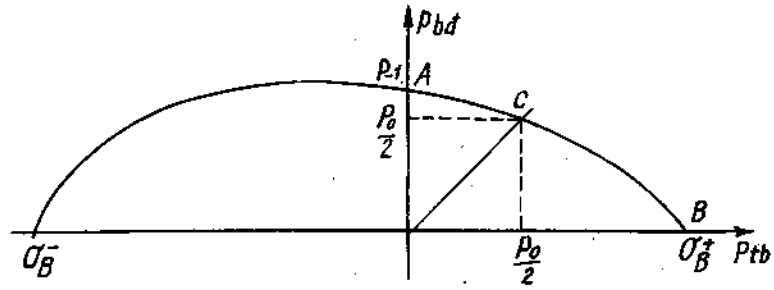


H. 15-7

$p_{tb} = 0$  và  $r = -1$ . Vì vậy trên trục tung ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn A. Tung độ của A chính là giới hạn mới của chu trình đối xứng  $p_{-1}$ .

Các điểm trên trục hoành biểu diễn cho các chu trình tĩnh vì  $r = 1$ ,  $p_{bd} = 0$ . Điểm giới hạn của các chu trình này là giới hạn bền của vật liệu. Ta có  $\sigma_B = p_{tb}$ . Điểm đó được biểu diễn bằng điểm B trên trục hoành.

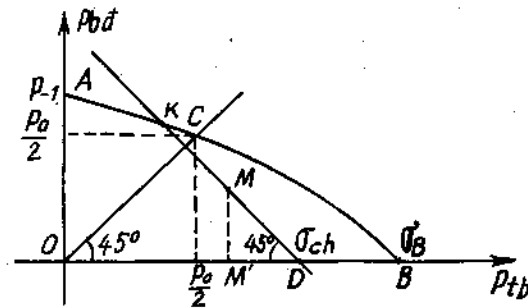
Tiến hành các thí nghiệm với  $r$  thay đổi ta sẽ xác định được các điểm giới hạn khác. Nối các điểm đó lại ta được đường cong biểu diễn giới hạn mới (h. 15-7). Đường cong đó biểu diễn cho các chu trình dương. Đối với vật liệu dẻo ta không tìm thấy giới hạn bền khi nén do đó khi có một chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối của các ứng suất và tính nó như một chu trình dương. Đối với vật liệu giòn biểu đồ giới hạn mới có dạng như trên hình 15-8.



H. 15-8

Ta nhận thấy phần âm lớn hơn phần dương vì vậy khi có chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối và tính như một chu trình dương thì hệ số an toàn bao giờ cũng cao hơn. Vì lí do đó sau đây ta chỉ để ý đến phần bên phải của biểu đồ.

Đường cong giới hạn mới ACB (h. 15-7) chia góc phần tư thứ nhất của mặt tọa độ thành hai miền. Với những chu trình ứng suất được biểu diễn bằng một điểm trong miền OACB là những chu trình an toàn, nghĩa là vật liệu có thể làm việc lâu dài dưới tác dụng của chu trình ứng suất đó. Ngược lại, với những chu trình được biểu diễn bằng một điểm bên ngoài OACB thì vật liệu thế nào cũng bị phá hỏng vì mỏi. Nhưng ta cũng không thể sử dụng hết được miền OACB. Trong ngành cơ khí, khi dùng vật liệu chúng ta không được phép để ứng suất vượt quá giới hạn chảy, nghĩa là điểm giới hạn đối với các chu trình ứng suất là khi ứng suất cực đại  $p_{max}$  đạt đến giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$ . Các điểm giới hạn này nằm trên đường thẳng xuất phát từ điểm D có hoành độ là  $\sigma_{ch}$  và tạo với trục hoành một góc nghiêng  $45^\circ$  (h. 15-9).



H. 15-9

Gọi giao điểm của đường thẳng đó với biểu đồ mới là K. Ta dễ dàng chứng minh rằng một chu trình ứng suất được biểu diễn bởi một điểm M nào đó trên KD có trị số ứng suất cực đại  $p_{max}$  bằng  $\sigma_{ch}$ . Thực vậy  $p_{max}$  của chu trình ứng suất đó có trị số là :

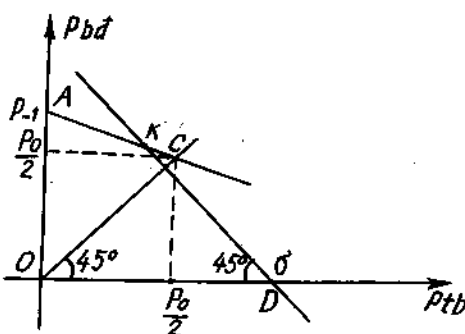
$$p_{max} = p_{bd} + p_{tb} = \overline{OM'} + \overline{M'M}$$

nhưng  $\overline{M'M} = \overline{M'D}$  vậy :

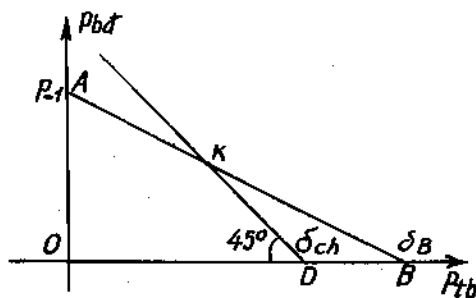
$$p_{max} = \overline{OM'} + \overline{M'D} = \overline{OD} = \sigma_{ch}$$

Như vậy khi sử dụng vật liệu dẻo, chúng ta chỉ được phép sử dụng các chu trình ứng suất trong miền AKD. Ta nhận thấy miền đó được chia ra hai vùng rõ rệt. Vùng AOK và vùng KOD. Những chu trình ứng suất có hệ số bất đối xứng  $r$  nằm trong vùng AOK, khi chúng ta tăng trị số của  $p_{max}$  lên sao cho  $r$  không thay đổi thì những chu trình đó bị phá hỏng vì mỗi trước khi  $p_{max}$  đạt đến giới hạn chảy. Ngược lại với các chu trình có  $r$  nằm trong vùng KOD trị số  $p_{max}$  sẽ đạt đến giới hạn chảy trước khi đạt đến giới hạn mỏi. Nhận xét đó dẫn đến một kết luận khá quan trọng. Như vậy chúng ta chỉ cần tính toán về mỏi khi  $r$  nằm trong miền AOK. Khi  $r$  nằm trong miền KOD thì ta chỉ cần so sánh  $p_{max}$  với giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$ . Vậy thực tế tính toán chỉ cần đoạn cong AK của biểu đồ giới hạn mỏi. Một cách gần đúng chúng ta có thể thay đoạn cong đó bằng một đoạn thẳng. Từ đó ta có các biểu đồ thu gọn của Xêrenxen và Kínaxôcvilia như sau :

- Thay đoạn cong AC bằng đoạn thẳng AC (h. 15-10)
- Thay cả đường cong ACB bằng đường thẳng AB (h. 15-11).



H.15-10



H.15-11

Với cách thu gọn đó ta chỉ cần làm một số thí nghiệm. Ví dụ với biểu đồ thứ nhất ta phải tìm  $p_{-1}$ ,  $P_0$  và  $\sigma_{ch}$ , với biểu đồ thứ hai ta phải tìm  $p_{-1}$ ,  $\sigma_{ch}$  và  $\sigma_B$ .

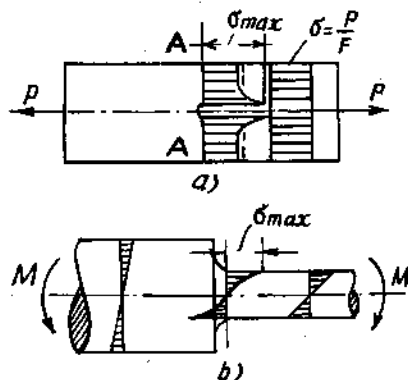
#### §15-4. CÁC NHÂN TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN GIỚI HẠN MỎI

Trong phần này chúng ta sẽ kể đến các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là những nhân tố để tạo nên các vết nứt vi mô làm giảm thấp giới hạn mỏi.

##### 1. Ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất

Nhiều thí nghiệm và công trình khoa học đã chứng tỏ rằng ở những nơi có sự thay đổi đột ngột về kích thước và những vùng lắp ghép căng giữa các chi tiết máy có hiện tượng tập trung ứng suất.

Ví dụ một tấm chịu kéo có một lỗ nhỏ (h. 15-12a) trên mặt cắt AA. Trên mặt cắt đó ứng suất không phân bố đều nữa. Trạng thái ứng suất vùng mép lỗ là trạng thái ứng suất phẳng và ứng suất tại mép lỗ



H.15-12

có trị số lớn hơn ứng suất trên mặt cắt bình thường khác. Tương tự như vậy trong trường hợp trục bậc chịu uốn (h. 15-12b) hay là trục lắp ghép căng với ống trên hình (15-13).

Vùng có ứng suất tập trung là một vùng rất bé trên mặt cắt hoặc trên thanh. Độ lớn của ứng suất tập trung là phụ thuộc vào hình dáng kích thước của vùng thay đổi diện tích.

Các trị số của ứng suất tập trung được tính bằng lí thuyết đàn hồi hoặc bằng thực nghiệm quang đàn hồi. Ta gọi hệ số tập trung ứng suất lí thuyết là tỉ số :

$$\alpha = \frac{p_{\max}}{p_{bt}} \quad (15-8)$$

Trong đó :  $p_{\max}$  là trị số của ứng suất tập trung và  $p_{bt}$  là ứng suất bình thường khi không có nhân tố tập trung ứng suất.

Ví dụ với tấm chịu kéo như trên hình (15-12)  $\sigma_{\max}$  là trị số ứng suất ở mép lỗ còn  $\sigma_{bt}$  là ứng suất trên mọi mặt cắt không có lỗ.

Hệ số  $\alpha$  được cho trong các sổ tay chế tạo máy hay trong các sách lí thuyết đàn hồi tùy theo các loại nhân tố tập trung ứng suất.

Tùy thuộc vào vật liệu và tính chất của tải trọng mà sự tập trung ứng suất có ảnh hưởng ít hay nhiều đến độ bền mỏi của vật liệu. Cũng vì vậy mà trong tính toán, người ta đưa vào một hệ số được gọi là hệ số tập trung ứng suất thực tế,  $k_r$ .

$$k_r = \frac{p_r}{p_r^*}$$

$p_r$  là giới hạn mỏi ở chu trình có hệ số bất đối xứng  $r$  trên chi tiết không có nhân tố tập trung ứng suất.

$p_r^*$  là giới hạn mỏi có nhân tố tập trung ứng suất. Ta xét trong hai trường hợp khi  $r = 1$  và  $r = -1$ .

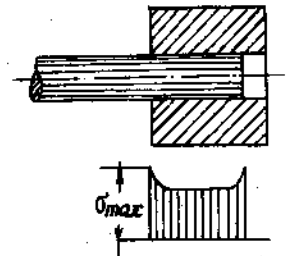
a) Khi  $r = 1$ . Chu trình ứng suất là chu trình tĩnh ;  $p_r$  là giới hạn bền của chi tiết khi không có nhân tố tập trung ứng suất. Trị số của  $p_r = \sigma_B$ .

$p_r^*$  là giới hạn bền của chi tiết khi có nhân tố tập trung ứng suất.

Đối với vật liệu dẻo thí nghiệm tĩnh chứng tỏ rằng nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của vật liệu. Thực vậy, ví dụ ở vùng có ứng suất tập trung, khi tăng lực lên, vùng đó tạo thành một vùng biến dạng dẻo nhưng vùng đó vẫn không có vết nứt, tiếp tục tăng lực lên thì vùng dẻo sẽ lan dần cho đến lúc chiếm toàn bộ diện tích mặt cắt ngang (hình dung với trường hợp tấm chịu kéo h. 15-12).

Điều đó không khác gì với thanh không có nhân tố tập trung ứng suất. Trước khi bị phá hỏng toàn bộ mặt cắt ngang của thanh cũng phải ở tình trạng biến dạng dẻo.

Đối với vật liệu giòn, ví dụ gang chẳng hạn. Trong lòng vật liệu đã có nhiều nhân tố tập trung ứng suất, do đó thí nghiệm cũng chứng tỏ rằng các nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn của gang.



H.15-13

Tóm lại đối với tải trọng tĩnh ta luôn luôn có :

$$p_r^* = \sigma_B$$

Vậy :

$$k_{+1} = 1 \quad (15-9)$$

b) Khi  $r = -1$ . Trong chu trình đối xứng hệ số tập trung ứng suất thực tế là :

$$k_{-1} = \frac{p_{-1}}{p_{-1}^*}$$

$p_{-1}$  là giới hạn mỏi của chu trình ứng suất đối xứng trong chi tiết không có nhân tố tập trung ứng suất.

$p_{-1}^*$  là giới hạn mỏi khi có nhân tố tập trung ứng suất.

Hai trị số đó chỉ có thể xác định bằng thí nghiệm.

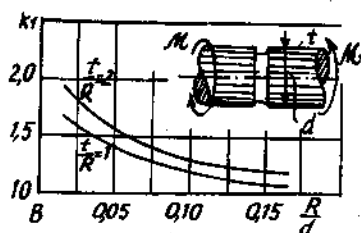
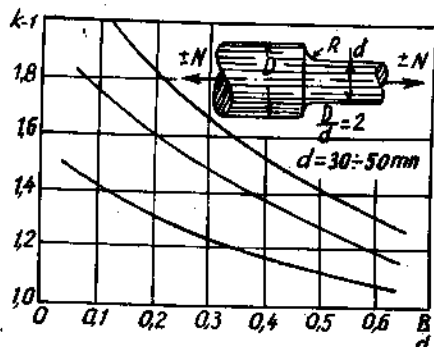
Qua các thí nghiệm người ta đã thiết lập được biểu thức tương quan giữa  $k_{-1}$  và  $\alpha$  như sau :

$$k_{-1} = 1 + q (\alpha - 1) \quad (15-10)$$

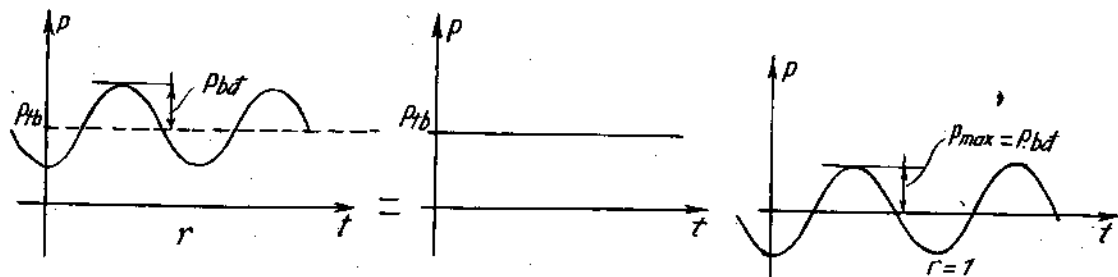
Trong đó :  $q$  được gọi là hệ số nhạy của vật liệu. Hệ số đó chỉ phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Ví dụ với thép có độ bền cao giá trị của  $q$  gần bằng đơn vị. Với thép xây dựng hoặc thép thường  $q$  biến thiên từ 0,6 - 0,8. Đối với gang  $q$  gần bằng 0, nghĩa là ảnh hưởng của nhân tố tập trung ứng suất đối với gang không đáng kể. Hệ số nhạy, với mức độ nhất định, phụ thuộc vào hình dáng của chi tiết được xét và nhân tố tập trung ứng suất.

Công thức (15-10) chỉ sử dụng khi không thể có các kết quả thí nghiệm trực tiếp và có thể tính  $\alpha$  theo lí thuyết một cách dễ dàng. Thường  $k_{-1}$  được cho trực tiếp bằng các kết quả thí nghiệm ; ví dụ trên các bảng ở hình 15-14. Trên bảng thứ nhất (h. 15-14a) là trị số của  $k_{-1}$  của trục bậc khi chịu kéo nén liên tục. Các đường cong 1, 2, 3 tương ứng với các loại thép có giới hạn bền khi kéo là  $\sigma_B = 40\text{kN/cm}^2$ ,  $80\text{kN/cm}^2$  và  $120\text{kN/cm}^2$ . Trên bảng thứ hai (h.15-14b) cho  $k_{-1}$  của thanh chịu xoắn có rãnh đối với thép than có giới hạn bền khi kéo  $\sigma_B = 50\text{kN/cm}^2$ .

Một chu trình ứng suất bất kì luôn luôn có thể được xem là sự cộng tác dụng của một chu trình tĩnh với trị số ứng suất là  $p_{tb}$  và một chu trình đối xứng với ứng suất cực đại bằng  $p_{bd}$  (h. 15-15).



H. 15-14



H. 15-15

Nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến chu trình tĩnh, nghĩa là không ảnh hưởng đến  $p_{tb}$ . Nhân tố đó chỉ ảnh hưởng đến chu trình đối xứng, nghĩa là đến  $p_{bd}$ . Nhận xét đó rất quan trọng để ta có thể tính toán độ bền sau này.

## 2. Ảnh hưởng của độ nhẵn bề mặt và kích thước của chi tiết

Ta nhận thấy bề mặt của chi tiết càng nhẵn thì giới hạn mỏi càng cao. Điều đó có thể giải thích là bề mặt càng nhẵn thì càng ít nhân tố gây nên vết nứt vi mô. Như ta đã nói các vết nứt đó chỉ phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Nghĩa là với một chu trình tĩnh thì bề mặt nhẵn hay không, không có ảnh hưởng gì đến độ bền của vật liệu; cũng vì vậy chúng ta chỉ xét đến ảnh hưởng đó đối với chu trình đối xứng. Ta gọi hệ số bề mặt là tỉ số.

$$\varepsilon_n = \frac{p_{-1x}}{p_{-1}} \quad (15-11)$$

trong đó :  $p_{-1}$  là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của mẫu có bề mặt nhẵn theo tiêu chuẩn ;  $p_{-1x}$  là giới hạn mỏi của mẫu có bề mặt tương tự bề mặt của chi tiết máy.

Trên hình 15-16 đưa ra trị số của hệ số bề mặt đối với các loại thép có giới hạn bền khác nhau :

Hệ số bề mặt của bề mặt tiêu chuẩn xem như bằng đơn vị (đường 1). Đường 2 đối với bề mặt được đánh bóng. Đường 3 đối với các bề mặt được tạo nên bằng phương pháp cát gạt. Đường 4 với các bề mặt được tạo nên bằng cách dũa tinh. Đường 5 với các bề mặt tạo nên bằng phương pháp cán. Các đường 6, 7 là các chi tiết có bề mặt bị ăn mòn trong nước ngọt và nước mặn.

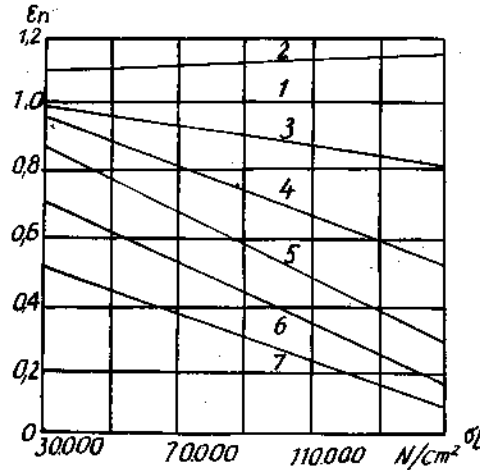
Như vậy là đối với một chu trình bất kì hệ số bề mặt chỉ ảnh hưởng đến  $p_{tb}$  hệ số đó không ảnh hưởng đến  $p_{bd}$  như lập luận ở trên.

Ta để ý đến một nhân tố khác ảnh hưởng đến giới hạn mỏi đó là hệ số kích thước. Chi tiết càng to giới hạn mỏi càng thấp. Cách giải thích của chúng ta cũng tương tự như cách giải thích đối với hệ số bề mặt. Vật càng to khuyết tật trong lòng càng nhiều càng dễ gây nên vết nứt vi mô. Rõ ràng các vết nứt đó chỉ có thể phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Do đó, một chu trình tĩnh, kích thước của chi tiết không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của vật liệu. Ảnh hưởng đó chỉ xảy ra với ứng suất thay đổi, nghĩa là với chu trình đối xứng. Ta có định nghĩa sau đây. Hệ số kích thước :  $\varepsilon_M$  là tỉ số :

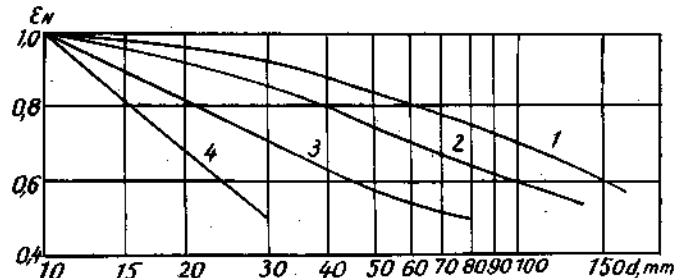
$$\varepsilon_M = \frac{p_{-1d}}{p_{-1}} \quad (15-12)$$

$p_{-1d}$  là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của chi tiết có kích thước thực.

$p_{-1}$  là giới hạn mỏi của mẫu có kích thước theo tiêu chuẩn ( $d = 8 - 12\text{mm}$ ).



H.15-16



H.15-17



Ta giả thiết rằng bề mặt của chi tiết và mẫu thí nghiệm là có chất lượng như nhau :

Trên hình (15-17) cho ta trị số của  $\epsilon_M$  đối với các trục chịu uốn và chịu xoắn theo đường kính của chúng.

Đường 1 là cho thép cacbon không có các nhân tố tập trung ứng suất. Đường 2 cho thép hợp kim có giới hạn bền từ  $100\text{kN/cm}^2 - 120\text{kN/cm}^2$  và không có các nhân tố tập trung ứng suất. Đường 4 cho các loại thép có nhiều nhân tố tập trung ứng suất.

Trong bảng 1 cho ta một số giới hạn mỗi trong chu trình đối xứng với các mẫu thí nghiệm có đường kính khác nhau.

Cũng giống như trên, đối với một chu trình bất kì hệ số kích thước chỉ ảnh hưởng trực tiếp đến  $p_{bd}$ , hệ số đó không ảnh hưởng đến  $p_{tb}$ .

Bảng 1

d(mm)		Giới hạn mỗi $\sigma_{-1}(\text{N/cm}^2)$					
		Thép cacbon		Thép hợp kim			
15	25000	26500	32000	38000	44000	50000	60000
30	21000	22500	27000	32000	37000	42000	50000
60	17500	19000	22500	27000	31000	35000	42000
100	16000	17000	20000	24000	28000	31500	38000
$\delta_b \text{N/cm}^2$	45000	55000	65000	80000	88000	98000	120000
$\delta_{ch} \text{N/cm}^2$	25000	31000	36000	56000	61000	73000	100000

### §15-5. HỆ SỐ AN TOÀN VỀ MỎI

Để kiểm tra điều kiện bền của một chu trình ứng suất với hệ số bất đối xứng r thì việc làm bình thường là phải dựa vào biểu đồ giới hạn mỗi để xác định giới hạn mỗi  $p_r$  và đem so sánh  $p_{max}$  với  $p_r$ . Điều kiện bền vì mỏi là :

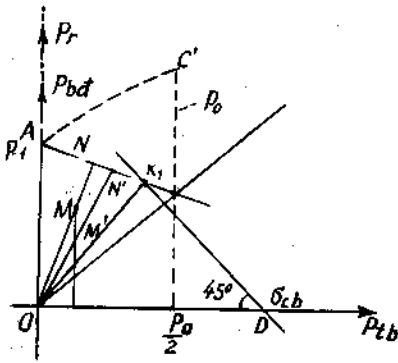
$$P_{max} \leq P_r \quad (1)$$

Tỉ số  $n = \frac{P_r}{P_{max}}$  càng lớn thì càng an toàn, vì vậy tỉ số này được gọi là hệ số an toàn.

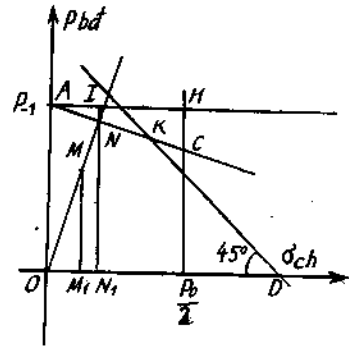
Để thuận tiện hơn người ta dựa vào biểu đồ giới hạn mỗi để thiết lập một cách tổng quát công thức của hệ số an toàn n và so sánh hệ số an toàn đó với một hệ số an toàn ấn định trước [n] được gọi là hệ số an toàn cho phép. Nếu như  $n > [n]$  thì vật liệu là an toàn về mỏi.

Cách thiết lập công thức của hệ số an toàn n như sau :

Tính đến các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi, theo đề nghị của Xêrenxen và Kinaxôcvilia ta tăng biên độ của chu trình ứng suất thực lên một lượng  $\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \cdot \epsilon_M}$ . Sở dĩ như vậy vì các nhân tố đó chỉ ảnh hưởng đến  $\sigma_{bd}$ . Cách làm đó dẫn đến việc tăng cao hệ số an toàn thực tế lên so với hệ số tính toán, nên ta có thể chấp nhận được.



H. 15-18



H. 15-19

Thực vậy gọi  $M'$  là điểm biểu diễn cho chu trình ứng suất tác dụng lên chi tiết máy.  $M'$  nằm trong miền OAK (h. 15-18). Giới hạn mới của  $M'$  là điểm  $N'$  giao điểm của tia  $OM'$  và đường AC. Nếu bây giờ ta tăng biên độ của  $M'$  lên một lượng là  $\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \epsilon_M}$  nghĩa là ta sẽ biểu diễn chu trình ứng suất đó tại  $M^*$ . Giới hạn mới tương ứng với  $M^*$  là  $N^*$ , một điểm gần với giới hạn mới trong chu trình đối xứng mà ta biết rằng giới hạn mới của chu trình đối xứng là bé nhất (quan sát biểu đồ, tại C ta lấy tung độ gấp đôi để có điểm biểu diễn cho  $p_0$ ). Vậy giới hạn mới tương ứng với  $N^*$  là bé hơn đối với  $N'$ . Do đó hệ số an toàn trong thực tế sẽ lớn hơn hệ số an toàn tính toán.

Gọi hình chiếu của M và N lên trục hoành là  $M_1$ ,  $N_1$  (h. 15-19). Xét hai tam giác đồng dạng  $OMM_1$  và  $ONN_1$  ta có :

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{ON_1 + N_1N}{OM_1 + MM_1} = \frac{P_r}{P_{max}} = n_p \quad (2)$$

Ta tìm cách tính  $ON_1$ .

Từ A vẽ đường ngang song song với trục hoành. Giao tuyến của đường đó với các đường song song với trục tung qua N và C là I và H. Sử dụng hai tam giác đồng dạng ANI và ACH ta có :

$$\frac{AI}{AH} = \frac{IN}{HC}$$

hay :

$$\frac{ON_1}{\frac{P_0}{2}} = \frac{P_{-1} - NN_1}{P_{-1} - \frac{P_0}{2}} \quad (3)$$

Do đó ta có :

$$ON_1 = \frac{P_{-1} - NN_1}{\psi} \quad (4)$$

Trong đó :

$$\psi = \frac{2P_{-1} - P_0}{P_0} \quad (15-13a)$$

Đem thay (4) vào (2) ta có :

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{P_{-1} - NN_1}{\psi OM_1} = n_p \quad (5)$$

Từ đó ta có :

$$n_p = \frac{P_{-1}}{MM_1 + \psi OM_1}$$

Hay :

$$n_p = \frac{P_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot p_{bd} + \psi p_{tb}} \quad (15-14a)$$

Nếu sử dụng biểu đồ mỗi thứ hai (h. 15-20) ta sẽ tính hệ số an toàn như sau : tương tự như trên ta sẽ sử dụng bốn tam giác :  $OM_1M$  đồng dạng với  $ON_1N$ ,  $ANI$  đồng dạng với  $ABH$ . Từ đó ta có :

$$\frac{ON_1}{\sigma_B} = \frac{P_{-1} - NN_1}{P_{-1}}$$

Hay

$$ON_1 = \frac{P_{-1} - NN_1}{\frac{P_{-1}}{\sigma_B}}$$

Từ đó ta lại có :

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{P_{-1} - NN_1}{\psi OM_1} = n_p$$

Và cuối cùng

$$n_p = \frac{P_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot p_{bd} + \psi' p_{tb}} \quad (15 - 14b)$$

trong đó :

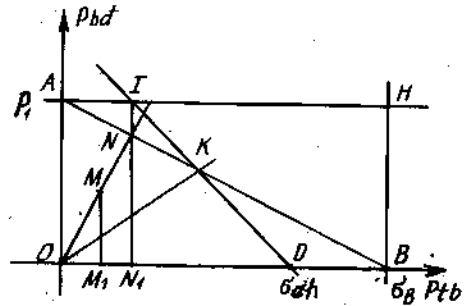
$$\psi' = \frac{P_{-1}}{\sigma_B} \quad (15-13b)$$

Trong các công thức (15-14) ta dùng chữ p để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Khi trạng thái ứng suất là trạng thái đơn ta có :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot \sigma_{bd} + \psi \sigma_{tb}}$$

trong đó :

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_o}{\sigma_o}$$



H. 15-20

Với biểu đồ mỗi thứ hai vị trí của  $\psi$  thay bằng  $\psi'$

$$\psi' = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}$$

Khi trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy ta có :

$$n_r = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot \tau_{bd} + \psi \tau_{tb}}$$

trong đó :

$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$$

Với biểu đồ mỗi thứ hai vị trí của  $\psi$  được thay bằng  $\psi'$  với :

$$\psi' = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}$$

Trường hợp uốn và xoắn đồng thời, ta có thể áp dụng công thức kinh nghiệm sau đây để tính hệ số an toàn :

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}$$

hay

$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (15-15)$$

Còn vấn đề lớn nữa mà ta phải giải quyết là làm thế nào để xác định được rằng M (điểm tương trưng cho chu trình ứng suất) nằm trong vùng AOK (h.15-21). Vì chỉ khi M nằm trong vùng đó thì ta mới tính với giới hạn mỏi. Nếu M thuộc vùng KOD thì ta chỉ cần tính như tải trọng tĩnh, nghĩa là :

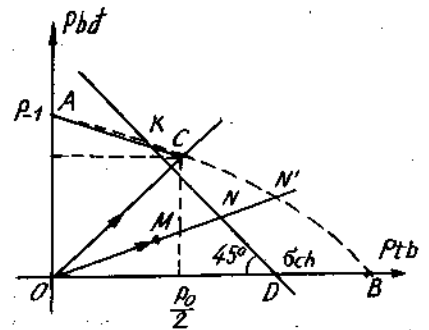
$$P_{\max} \leq \sigma_{ch}$$

hệ số an toàn sẽ là :

$$n_r = \frac{\sigma_{ch}}{P_{\max}} \quad (15-16)$$

Ta gọi  $n_T$  là hệ số an toàn về chảy. Tỉ số đó là tỉ số giữa các đoạn ON và OM (N là giao điểm của OM với đường KD). Gọi N' là giao điểm của OM với biểu đồ mỏi ta thấy ON' lớn hơn ON, do đó nếu tính  $n_p$  thì trị số của  $n_p$  sẽ lớn hơn  $n_T$ .

Ngược lại, khi M thuộc vùng AOK ta nhận thấy ON' nhỏ hơn ON nghĩa là  $n_p$  nhỏ hơn  $n_T$ .



H. 15-21

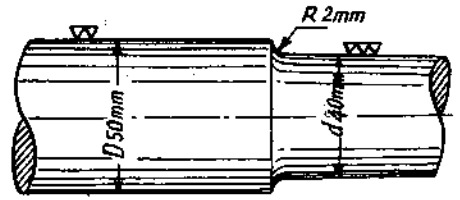
Từ đó ta để ra cách tính như sau : *Ta không cần biết M thuộc vùng nào. Ta phải tính cả hai hệ số  $n_T$  và  $n_p$ .* Luôn luôn lấy trị số nhỏ hơn để so sánh với hệ số an toàn cho phép [n].

**Ví dụ 1.** Một trục bậc (h.15-22) được chế tạo từ thép 0,6% cacbon, chịu uốn. Các đặc trưng cơ học của vật liệu là :  $\sigma_B = 75\text{kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{ch} = 42\text{kN/cm}^2$  và  $\sigma_{-1} = 32,5\text{kN/cm}^2$ . Bề mặt của trục được mài nhẵn.

Mômen uốn có trị số không đổi suốt thời gian trục quay là  $M = 64\text{kNcm}$ . Kiểm tra điều kiện bền của trục, cho biết hệ số an toàn cho phép  $[n] = 1,5$ .

*Bài giải :*

Trục chịu uốn quay đều và mômen uốn không đổi nên chu trình ứng suất ở đây là chu trình đối xứng.



H. 15-22

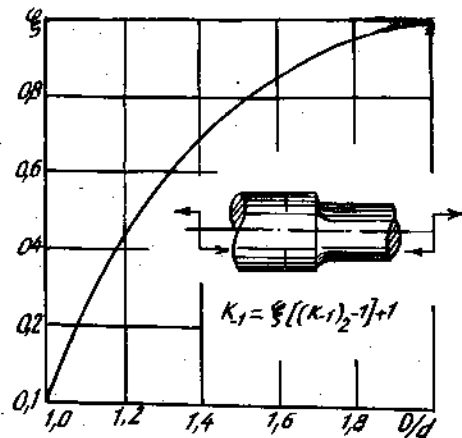
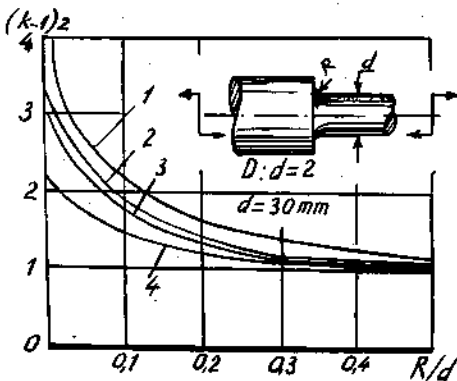
$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} = \frac{64}{0,14^3} = 10\text{kN/cm}^2$$

Hệ số an toàn chảy sẽ là :

$$n_T = \frac{42}{10} = 4,2$$

Hệ số an toàn về mỏi được tính với công thức (15-14).

Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tính theo các bảng như trên hình 15-23.



H. 15-23

Hình 15 - 23a cho trị số  $(k_1)_2$  của trục bậc khi bị uốn với tỉ số  $\frac{D}{d} = 2$ .

Đường 1 cho thép với  $\sigma_B = 120\text{kN/cm}^2$ .

Đường 2 cho thép  $\sigma_B = 100\text{kN/cm}^2$  và đường 3 cho thép  $\sigma_B = 80\text{kN/cm}^2$  và đường 4 cho các loại thép  $\sigma_B = 60 + 40 \text{ kN/cm}^2$ .

Hình 15 - 23b cho hệ số điều chỉnh khi  $\frac{D}{d}$  không phải là 2.

Trong ví dụ ta đang xét vì  $\sigma_B = 75 \text{ kN/cm}^2$  nên ta sử dụng đường 3 để xác định  $(k_{-1})_2$ . Với tỷ số  $\frac{R}{d} = \frac{2}{40}$  ta tìm thấy  $(k_{-1})_2 = 2,2$ . Với tỉ số  $\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1,25$  ta tìm thấy trị số hệ số hiệu chỉnh  $\xi = 0,52$ . Từ đó ta có :

$$k_{-1} = 1 + \xi [(k_{-1})_2 - 1] = 1 + 0,52 (2,2 - 1) = 1,63$$

Hệ số kích thước  $\varepsilon_M$  được xác định theo đường 2 của bảng trên hình 15-17. Với  $d = 40 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon_M = 0,78$ .

Bề mặt của trục được mài nhẵn vậy  $\varepsilon_n = 1$ .

Từ đó ta có :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot \sigma_{bd} + \psi' \sigma_{tb}} = \frac{0,78 \cdot 32,50}{1,63 \cdot 10,00} = 1,6$$

vì  $n_\sigma$  nhỏ hơn  $n_T$  nên ta phải lấy  $n_\sigma$  so sánh với  $[n]$  ta có :

$$n_\sigma > [n]$$

Vậy trục đạt được điều kiện an toàn.

**Ví dụ 2.** Trục bậc trên đây làm việc dưới tác dụng của mômen xoắn theo chu trình bất đối xứng. Trị số mômen xoắn lớn nhất là  $\mathcal{M} = 80 \text{ kNcm}$ , mômen xoắn cực tiểu là  $\mathcal{M} = -20 \text{ kNcm}$ . Cơ tính của vật liệu như sau :

$\tau_B = 40 \text{ kN/cm}^2$  ;  $\tau_{-1} = 19 \text{ kN/cm}^2$  ;  $\sigma_B = 60 \text{ kN/cm}^2$ . Xác định hệ số an toàn mỗi của chi tiết.

**Bài giải :**

Trị số các ứng suất cực đại và cực tiểu là :

$$\tau_{\max} = \frac{80}{0,2 \cdot 4^3} = 6,25 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\min} = \frac{-20}{0,1 \cdot 4^3} = -1,56 \text{ kN/cm}^2$$

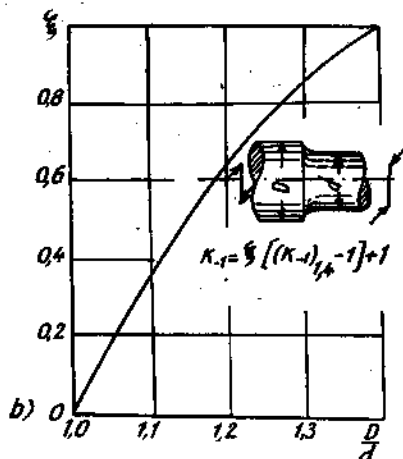
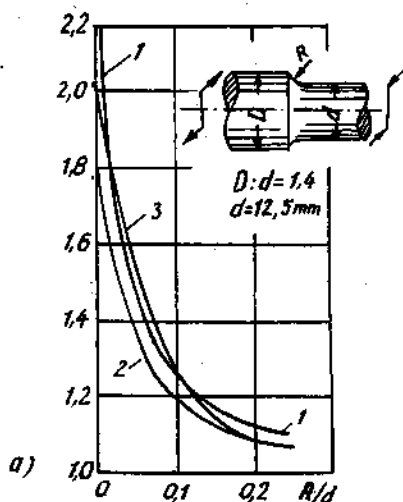
Từ đó ta có trị số ứng suất biên độ và ứng suất trung bình là :

$$\tau_{bd} = 3,9 \text{ kN/cm}^2 ; \quad \tau_{tb} = 2,35 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tra bảng ở hình 15-24.

Bảng trên hình 15-24a là hệ số tập trung ứng suất thực tế đối với các mẫu thí nghiệm có  $d = 12,5$  và tỉ số  $\frac{D}{d} = 1,4$  khi xoắn. Đường 1 cho thép có giới hạn bền  $\sigma_B = 120 \text{ kN/cm}^2$ . Đường 2 cho các loại thép có  $\sigma_B = 60 \text{ kN/cm}^2$  và đường 3 cho các loại thép có  $\sigma_B = 40 \text{ kN/cm}^2$ . Đối với các trục có tỉ lệ  $\frac{D}{d}$  khác 1,4 thì ta dùng hệ số hiệu chỉnh  $\xi$  cho trên bảng (h.15-24b),  $k_{-1}$  được tính với công thức.

$$k_{-1} = \xi [(k_{-1})_{1,4} - 1] + 1$$



H. 15-24

Trong ví dụ đang xét ta dùng đường 2. Với tỉ số  $\frac{R}{d} = 0,05$ ,  $(k_{-1})_{1,4} = 1,36$ . Với tỉ số  $\frac{D}{d} = 1,25$ , hệ số hiệu chỉnh  $\xi = 0,76$ . Từ đó ta có :

$$k_{-1} = 0,76 [1,36 - 1] + 1 = 1,27.$$

Vì trục được mài nhẵn nên  $\epsilon_n = 1$ . Hệ số kích thước cũng tra bảng như ví dụ uốn trên đây  $\epsilon_M = 0,78$

Từ đó :

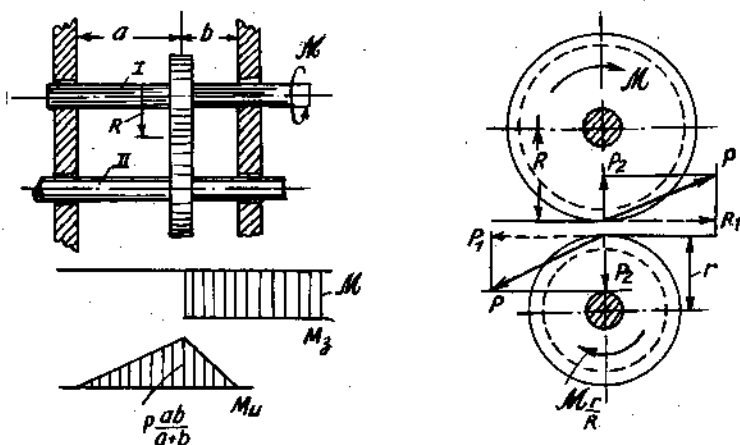
$$n_T = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \epsilon_M} \tau_{bd} + \psi'_{tb}} = \frac{19}{\frac{1,27}{0,78} \cdot 3,9 + \frac{19}{40} \cdot 2,35} = 2,5$$

**Ví dụ 3.** Xác định hệ số an toàn của trục I (h. 15-25) mômen xoắn  $\mathcal{M} = 100 \text{ kN.cm}$ . Đường kính trục là 50 mm, kích thước đến các ổ trượt là  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ . Bán kính của bánh xe là  $R = 8 \text{ cm}$ . Vật liệu của trục là thép cacbon với  $\tau_{ch} = 25 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{-1} = 30 \text{ kN/cm}^2$ . Hệ số ứng suất tập trung thực tế do lắp ghép căng là  $k_1 = 1,4$ . Trục được mài nhẵn.

**Bài giải :**

Dưới tác dụng của mômen xoắn không đổi, trên mặt cắt ngang của trục luôn có một hệ ứng suất tiếp không đổi theo thời gian.

$$\tau_B = \frac{\mathcal{M}}{0,2d^3} = 4,00 \text{ kN/cm}^2$$



H. 15-25

Hệ số an toàn chày của vật liệu là :

$$n_r = \frac{\tau_{ch}}{\tau_B} = \frac{25}{4} = 6,2$$

Ngoài mômen xoắn đó trục sẽ bị uốn bởi lực P là lực tương tác giữa hai bánh xe (h.15-25b).

Theo lí thuyết sự ăn khớp của bánh răng ta có :

$$P_2 \approx 0,4 P_1$$

Do đó :

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 1,08P_1$$

Từ điều kiện cân bằng của trục I ta có :

$$P_1 = \frac{\mathcal{M}}{R} ; \quad P = 1,08 \frac{\mathcal{M}}{R}$$

Lực đó sẽ gây nên ứng suất thay đổi trên trục. Chu trình đó là chu trình đối xứng.

$$\sigma_{max} = \sigma_{bd} = \frac{M_x}{0,1d^3} = 1,08 \frac{\mathcal{M}}{R} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{1}{0,1d^3}$$

$$\sigma_{max} = 6,16 \text{ kN/cm}^2 ; \quad \sigma_{tb} = 0$$

Theo bảng (h. 15-17) ta tìm thấy  $\varepsilon_M = 0,75$ . Từ đó ta có hệ số an toàn vì mỏi là :

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_M}{k_{-1} \sigma_{bd}} \cdot \sigma_{-1} = 2,6$$

Trạng thái ứng suất ở đây là trạng thái ứng suất phẳng vì cùng có  $\tau$  và  $\sigma$  tác dụng đồng thời, vì vậy hệ số an toàn của trục I sẽ là :

$$n_r = \frac{n_\sigma n_r}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_r^2}} = 2,4$$

## §15 - 6. NHỮNG BIỆN PHÁP NÂNG CAO GIỚI HẠN MỎI

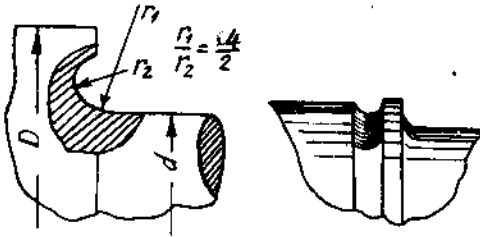
Biện pháp nâng cao giới hạn mỏi là tránh phát sinh ra các vết nứt vi mô. Những nơi có ứng suất tập trung thường là những chỗ dễ tạo nên các vết nứt vi mô, do đó phải tránh hết sức các nhân tố tạo nên ứng suất tập trung, ví dụ :

a) Tăng bán kính chỗ lượn. Để đảm bảo cho bán kính ở chỗ lượn đủ lớn ta có thể làm chỗ lượn ăn vào bên trong của chi tiết như hình 15-26.

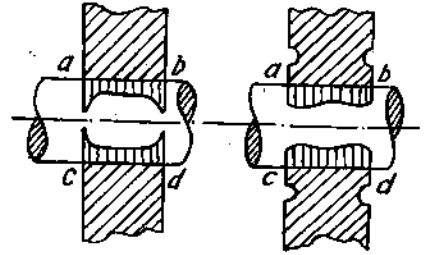
b) Làm các rãnh để điều hòa ứng suất (h.15-26). Rãnh tiện ở đầu búa tán đỉnh nhằm giảm bớt chênh lệch đột ngột giữa hai phần có độ cứng khác nhau, từ đó hạ thấp ứng suất tập trung giữa hai phần.



c) Giảm bớt ứng suất tập trung khi lắp ghép căng bánh xe bằng cách khoét rãnh trên bánh xe (h. 15-27).



H. 15 - 26



H.15 - 27

d) Mài nhẵn, đánh bóng hoặc mạ bề mặt chi tiết để trừ bỏ các vết nứt phát sinh trong quá trình gia công.

e) Làm cứng mặt ngoài bằng cách cán lăn hoặc phun hạt gang lên bề mặt, bằng phương pháp hóa nhiệt như thấm cacbon, nitơ hoặc bằng phương pháp tôi cao tần...

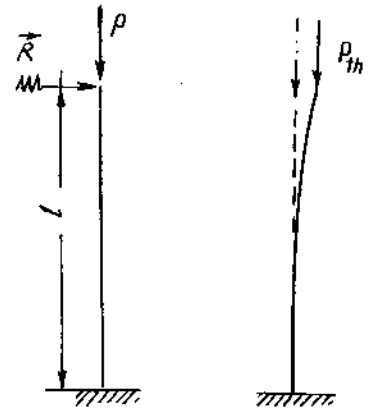
## CHƯƠNG XVI ỔN ĐỊNH

### §16 - 1. KHÁI NIỆM

Ngoài việc tính độ bền, độ cứng ta còn phải chú ý tính sự ổn định của công trình hay chi tiết máy. Sự mất ổn định của một thanh trong công trình, một chi tiết máy trong cơ cấu, có thể dẫn đến sự phá hoại cả công trình hay cơ cấu máy.

Xét thanh chịu nén đúng tâm như hình 16-1. Giả sử chiều dài  $l$  của thanh lớn gấp nhiều lần so với kích thước mặt cắt ngang. Khi trị số  $P$  chưa đáng kể, nếu ta dùng một lực xô ngang  $R$  đẩy thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng thì sau khi bỏ  $R$  đi thanh trở lại vị trí thẳng đứng ban đầu. Trạng thái đó được gọi là trạng thái ổn định của thanh.

Bây giờ ta tăng dần lực  $P$  lên, khi  $P$  đạt đến một giá trị nhất định, giá trị này được gọi là giới hạn (kí hiệu  $P_{th}$ ) ta thấy hiện tượng khác với trước. Khi chưa có lực xô ngang thanh vẫn thẳng đứng, vẫn cân bằng với  $P_{th}$ . Nhưng trạng thái đó là trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định, vì nếu có một lực  $R$  xô ngang đẩy thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng thì sau khi bỏ lực xô ngang, thanh không trở lại trạng thái thẳng đứng ban đầu nữa, thanh bị uốn cong (h. 16-2). Vật liệu lúc này vẫn còn làm việc trong giới hạn đàn hồi (vì  $P_{th} < P_{đh}$ ) nhưng thanh đang ở trong trạng thái nguy hiểm.



H. 16-1

H. 16-2

Trong một công trình lớn chỉ cần một thanh bị *mất ổn định* thì cả công trình biến thành một cơ cấu không còn khả năng chịu lực nữa. Thực tế đã có nhiều cầu lớn bị phá hỏng vì nguyên nhân này, vì vậy ta phải tính sự ổn định của công trình. Vấn đề cơ bản là xác định lực tới hạn ( $P_{th}$ ).

Hiện tượng mất ổn định đã được nhận biết từ lâu, song việc tính lực tới hạn thì phải chờ đến Olevé ta mới có được lời giải đúng đắn.

### § 16-2. BÀI TOÁN OLEVÉ (1774)

Olevé đặt vấn đề tính lực tới hạn cho một thanh chịu nén đúng tâm có liên kết hai đầu là các gối tựa (h. 16-3).

Giả sử lực  $P$  đã đạt đến giá trị lực tới hạn  $P_{th}$ , nếu có một lực xô ngang thanh sẽ bị uốn cong, sự uốn đó xảy ra trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất. Khi lực xô

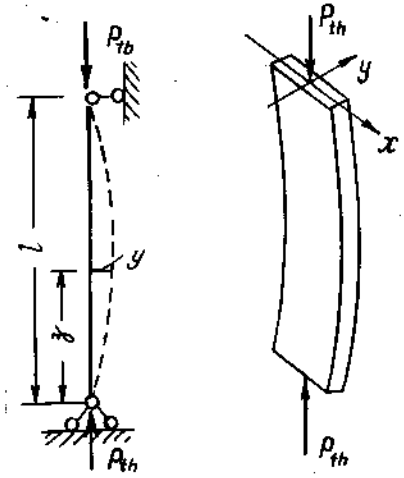
ngang đã bị bỏ đi rồi thanh vẫn ở trạng thái cong đó. Gọi độ võng tại một mặt cắt  $z$  nào đó là  $y(z)$  (h.16-3) thì mômen uốn trên mặt cắt đó là :

$$M_z = P_{th} y(z) \quad (1)$$

Trục  $x$  ở đây là trục mômen quán tính cực tiểu vì dầm sẽ bị uốn quanh trục đó. Để hình dung được dễ dàng ta ví dụ mặt cắt ngang của dầm là hình chữ nhật. Hình dạng của dầm khi bị uốn được biểu diễn như trên hình 16-4.

Giả sử vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi, phương trình vi phân của đường đàn hồi sẽ là :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (2)$$



H. 16-3

H. 16-4

Tất nhiên ở đây ta xem biến dạng là bé, độ võng  $y$  chưa đáng kể nên có thể sử dụng phương trình vi phân gần đúng đó.

Thay (1) vào (2) ta được phương trình

$$y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0 \quad (3)$$

trong đó

$$\alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ_x} \quad (16-1)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3) là :

$$y(z) = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z \quad (4)$$

$C_1$  và  $C_2$  là các hằng số tích phân được xác định bởi các điều kiện liên kết của dầm. Ta có các điều kiện đó như sau :

$$\text{Khi } z = 0, \quad y = 0 \quad (a)$$

$$\text{Khi } z = l, \quad y = 0 \quad (b)$$

Từ điều kiện (a) ta tìm thấy ngay  $C_2 = 0$ . Từ điều kiện (b) ta có :

$$y(l) = C_1 \sin \alpha l = 0 \quad (5)$$

Như vậy là ta phải có hoặc  $C_1 = 0$ , hoặc  $\sin \alpha l = 0$ . Nếu  $C_1 = 0$ , điều đó có nghĩa là  $y(z) \equiv 0$ , dầm không có độ võng. Trạng thái đó không phải là trạng thái mất ổn định. Vậy chúng ta chỉ còn lại điều kiện thứ hai là :

$$\alpha l = k\pi \quad (6)$$

Bình phương hai vế lên và thay (16-1) vào ta có :

$$P_{th} = \frac{k^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}$$

k ở đây là các trị số nguyên dương, vậy trị số lực tới hạn bé nhất là  $k = 1$ . Ta có trường hợp thanh hai đầu cố liên kết khớp lực tới hạn bằng :

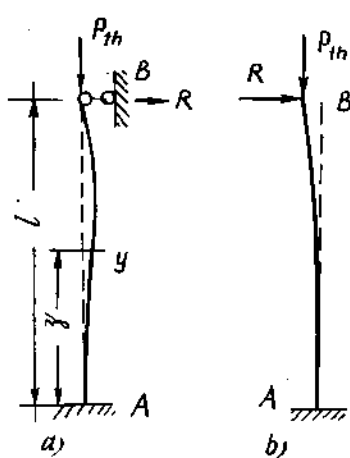
$$P_{th} = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2} \quad (16-2)$$

Như vậy, phương trình của đường đàn hồi là một đường hình sin :

$$y(z) = C_1 \sin \alpha z \quad (7)$$

và hình biến dạng của dầm là một nửa bước sóng. Nếu lấy  $k = 2, 3, \dots$  nghĩa là lực tới hạn sẽ tăng lên gấp 4, 9... lần, biến dạng của dầm lớn lên và nghiêm trọng không còn đúng nữa, vì lúc đó phương trình vi phân (2) không đúng. Nghiệm trở lại đúng nếu như ta đặt thêm các liên kết làm cho dầm có các biến dạng là hai nửa bước sóng, ba nửa bước sóng... như trên hình 16-5.

Xét một ví dụ thứ hai với thanh cố liên kết là một đầu ngàm và một đầu gối tựa di động (h. 16-6).



H. 16-6

Giả sử tại B tháo bỏ liên kết đơn, thanh sẽ bị uốn cong như hình 16-6b. Như vậy muốn thanh có được biến dạng như hình 16-6a ta phải thêm một lực R tác dụng ngang đẩy đầu B lại vị trí ban đầu. Lực R chính là phản lực tại B do liên kết đơn gây nên.

Cũng vì vậy mômen uốn trên một mặt cắt ngang nào đó sẽ là :

$$M_x = Py - R(l - z) \quad (8)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi là :

$$y'' = \frac{-Py + R(l - z)}{E J_x} \quad (9)$$

Hay có thể viết lại dưới dạng :

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{R}{E J_x} (l - z) \quad (10)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đó có dạng :

$$y = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{R}{E J_x} (l - z) \quad (11)$$

Các hằng số tích phân  $C_1, C_2$  và R được chọn sao cho phương trình thỏa mãn các điều kiện biên sau đây :

$$\begin{aligned} \text{với } z = 0, & \quad y = 0 \quad \text{và} \quad y' = 0 \\ \text{với } z = l, & \quad y = 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta có hệ phương trình thuần nhất

$$\left. \begin{aligned} C^2 + \frac{Rl}{EJ_x \alpha^2} &= 0 \\ C_1 \alpha - \frac{R}{EJ_x \alpha^2} &= 0 \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ta có hai khả năng :

1. Hệ phương trình cho nghiệm tầm thường  $C_1 = C_2 = 0, R = 0$  khi đó  $y \equiv 0$ , dầm không có biến dạng. Trường hợp này ta không quan tâm đến.

2. Khi không phải là tất cả các hằng số  $C_1, C_2$  và  $R$  là bằng không, khi đó dầm sẽ có độ võng ngang. Muốn có điều đó định thức của hệ phải bằng không.

Ta có :

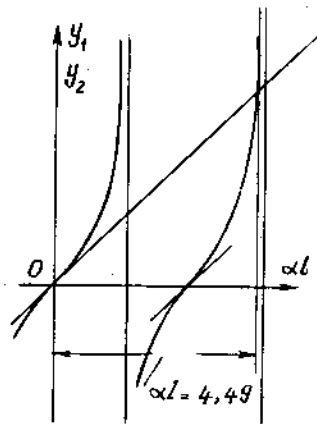
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{EJ_x \alpha^2} \\ \alpha & 0 & -\frac{1}{EJ_x \alpha^2} \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Vậy :  $\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$

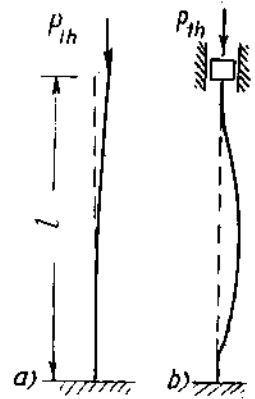
Giải phương trình đó bằng đồ thị. Vẽ trên đồ thị các hàm  $y_1 = \operatorname{tg} \alpha l$  và  $y_2 = \alpha l$  (16-7). Giao điểm của các đường biểu diễn, cho ta nghiệm của phương trình :

$$\alpha l = \sqrt{\frac{P_{th}}{EJ_x}} l = 4,49$$

Từ đó ta có :



H. 16-7



H. 16-8

$$P_{th} = \frac{4,49^2 EJ_x}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ_x}{(0,7l)^2} \quad (16-3)$$

Bằng cách chứng minh tương tự với hai trường hợp trên ta có thể tìm thấy  $P_{th}$  cho các trường hợp thanh có hai liên kết khác. Nhưng ở đây ta có thể dựa vào số nửa bước sóng để suy ra lực tới hạn. Ta thấy trường hợp khi hai đầu là các gối tựa thì đường đàn hồi có dạng là một nửa bước sóng, vậy với thanh có một đầu ngàm (h. 16-8a) nửa bước sóng có độ dài là  $2l$  vậy :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2}$$

Với hình 16-8b nửa bước sóng có độ dài là  $\frac{l}{2}$  vậy  $P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$  một cách tổng quát

ta có thể viết công thức của lực tới hạn như sau :

$$P_{th} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (16-4)$$

$\mu$  là hệ số phụ thuộc vào liên kết của thanh, ví dụ với trường hợp đầu (h. 16-3)  $\mu = 1$  ;

trường hợp (h.16-5a),  $\mu = 1/2$  ; trường hợp (h.16-5b) ,  $\mu = 1/3$  ;

trường hợp (h.16-6),  $\mu = 0,7$ , trường hợp (h.16-8a),  $\mu = 2$  ;

trường hợp (h.16-8b),  $\mu = 1/2$  v.v..

### §16-3. ỨNG SUẤT TỐI HẠN VÀ GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC OLE

Ứng suất trong thanh khi P đạt đến  $P_{th}$  là :

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{(\mu l)^2 F}$$

hay

$$\sigma_{th} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad (16-5)$$

trong đó  $\lambda$  được gọi là độ mảnh của thanh. Trị số của  $\lambda$  là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (16-6)$$

$i_{min}$  là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang. Với định nghĩa

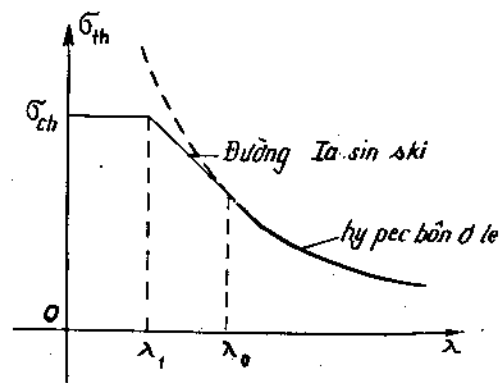
$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$$

Ta nhận thấy  $\lambda$  phụ thuộc vào hình dạng của mặt cắt ngang, độ dài của thanh và điều kiện liên kết của hai đầu. Ứng suất tới hạn  $\sigma_{th}$  là một hàm số hypecbôn đối với  $\lambda$  (h. 16-9).

Đường hypecbôn đó được gọi là hypecbôn Ole. Ta không thể sử dụng toàn bộ đường hypecbôn đó vì với  $\lambda$  càng nhỏ thì ứng suất tới hạn càng lớn và vượt quá giới hạn đàn hồi.

Điều kiện áp dụng công thức Ole là khi  $\sigma_{th}$  còn nhỏ hơn giới hạn tỉ lệ của vật liệu :

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{tl} \quad (14)$$



H. 16-9

Từ đó ta có :

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

Hay :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} = \lambda_0$$

Nghĩa là đường hyperbôn Ole chỉ đúng khi  $\lambda \geq \lambda_0$ .

Trị số  $\lambda_0$  chỉ phụ thuộc vào vật liệu. Với thép số N<sup>o</sup> 3,  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$  và  $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$  thì  $\lambda_0 \approx 100$ .

Với các trị số  $\lambda < \lambda_0$  thì đường đó không đúng nữa.

Khi đó vật liệu đã bước qua giới hạn tỉ lệ và đi vào miền dẻo. Cho đến nay ta chưa có một công trình nào chứng minh bằng lí thuyết để tính  $\sigma_{th}$  cho miền này, mà chỉ có các công thức kinh nghiệm. Một trong những công thức được áp dụng rộng rãi nhất là công thức của Iasinxki.

Iasinxki cho rằng : ứng suất tối hạn trong miền dẻo phụ thuộc vào  $\lambda$  theo đường thẳng như sau :

$$\sigma_{th} = a - b\lambda \quad (16-7)$$

$a$  và  $b$  là các hằng số phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Các trị số đó được xác định bằng thí nghiệm. Đường Iasinxki được biểu diễn như trên hình 16-9. Nhưng đường Iasinxki cũng chỉ đúng với  $\lambda \geq \lambda_1$ , khi  $\lambda \leq \lambda_1$  thì ta có  $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$  (giới hạn chảy). Đối với vật liệu giòn  $\sigma_{th} = \sigma_B$ .

Ta có thể dễ dàng xác định trị số  $\lambda_1$ . Thực vậy  $\lambda = \lambda_1$  thì ta phải có :

$$\sigma_{th} = a - b\lambda_1 = \sigma_{ch}$$

Do đó ta có :

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{ch}}{b} \quad (16-8)$$

Trị số của  $a$  và  $b$  có thể tra trong các sổ tay kĩ thuật, ví dụ với thép N<sup>o</sup>3,  $a = 336 \text{ MN/m}^2$  và  $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$ ; với gỗ,  $a = 29,3 \text{ MN/m}^2$ ,  $b = 0,194 \text{ MN/m}^2$ .

#### §16-4. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH ĐỂ TÍNH THANH CHỊU NÉN

Để tránh sự phiền phức phải để ý đến các miền phân biệt trong việc tính  $\sigma_{th}$  người ta đã đề ra một phương pháp thực hành để tính ổn định của thanh chịu nén đúng tâm như sau :

Gọi ứng suất ổn định cho phép là trị số :

$$[\sigma]_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{n_{\text{ổđ}}} \quad (16-9)$$

$n_{od}$  là hệ số an toàn vì ổn định. Cũng như trước đây ta đã có ứng suất cho phép là trị số :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (15)$$

$\sigma_o$  là ứng suất nguy hiểm. Với vật liệu dẻo ta lấy  $\sigma_o = \sigma_{ch}$  với vật liệu giòn ta có  $\sigma_o = \sigma_B$  ;  $n$  là hệ số an toàn về bền.

Thường  $n_{od}$  được chọn lớn hơn  $n$ .

Dem chia (16-9) cho (15) ta có :

$$\frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]} = \frac{n}{n_{od}} \cdot \frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} = \varphi \quad (16)$$

Ta nhận thấy  $\varphi$  luôn luôn  $< 1$  nên được gọi là hệ số giảm ứng suất. Để xác định được  $\varphi$  ta phải xác định được  $\sigma_{th}$  theo các miền khác nhau như chúng ta đã làm trên đây, phải xác định được  $\sigma_o$  theo vật liệu và phải định ra được  $n$  và  $n_{od}$ . Như vậy  $\varphi$  là một hàm số đối với độ mảnh  $\lambda$ . Trị số của  $\varphi$  được lập thành bảng theo  $\lambda$  và theo vật liệu như trên bảng 1.

Bảng 1

Độ mảnh $\lambda$	Trị số $\varphi$ đối với				
	Thép số N <sup>o</sup> , 4, 3, 2	Thép số N <sup>o</sup> 5	Thép CIIK	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,61	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Từ (16) ta có :

$$[\sigma]_{od} = \varphi[\sigma] \quad (16-10)$$

Vậy điều kiện để thanh chịu nén vừa đủ bền và không mất ổn định là :

$$\frac{P}{F} \leq [\sigma]_{od} \quad (16-11)$$



Tuy nhiên nếu trong thanh, vì một lý do nào đó, có mặt cắt ngang bị giảm yếu cục bộ, ví dụ như những lỗ khoét để bắt bulông hoặc đinh tán, thì sự giảm yếu đó chỉ ảnh hưởng đến độ bền còn ảnh hưởng không đáng kể đến tính ổn định của thanh đó. Vì thế ta phải kiểm tra cả điều kiện bền và điều kiện ổn định. Điều kiện bền phải lấy diện tích thực của mặt cắt bị yếu để tính ứng suất :

$$\sigma_z = \frac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]$$

**Ví dụ 1.** Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn của một cột làm bằng thép N<sup>o</sup>3, mặt cắt ngang hình chữ I số 22a. Cột có liên kết khớp tại hai đầu. Xét với hai trường hợp :

- a) Cột cao 3m
- b) Cột cao 2,25m

Cho biết  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$

**Bài giải :**

Mặt cắt ngang hình chữ I số 22a có  $F = 32,4 \text{cm}^2$  và  $i_{min} = 2,5 \text{cm}$ .

a) Khi cột cao 3m độ mảnh của cột sẽ là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 3}{0,025} = 120$$

Ở trên ta đã tính được, với thép số 3 có  $\lambda_0 = 100$  nên ở đây  $\lambda > \lambda_0$  do đó ta có thể sử dụng được công thức Ole.

Ứng suất tới hạn sẽ là :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{9,86 \cdot 2,1 \cdot 10^7}{120^2} = 14,3 \text{ kN/cm}^2$$

Do đó lực tới hạn của thanh bằng :

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 14,3 \cdot 32,4 = 463,32 \text{ kN.}$$

b) Khi cột cao 2,25m độ mảnh  $\lambda$  là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 2,25}{0,025} = 90 < \lambda_0$$

Vì  $\lambda < \lambda_0$  nên ta phải dùng công thức của Iasinxki để tính ứng suất tới hạn. Ta đã biết, thép số 3 có  $a = 336 \text{ MN/m}^2$ ,  $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$  nên :

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 336 - 1,47 \cdot 90 = 20,4 \text{ kN/cm}^2.$$

Vậy :

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 20,4 \cdot 32,4 = 660 \text{ kN.}$$

**Ví dụ 2.** Cho một cột gỗ cao 7m, mặt cắt ngang hình chữ nhật  $12 \times 22 \text{ cm}^2$ . Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất hai đầu bị ngàm chặt (h. 16-10) trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất hai đầu liên kết khớp (h. 16-10b). Xác định lực tới hạn. Cho biết  $E = 9.10^5 \text{ N/cm}^2$ .

**Bài giải :**

Với mặt cắt hình chữ nhật ta có :

$$i_{\max} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{22}{\sqrt{12}} = 6,36 \text{ cm}$$

$$i_{\min} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ cm}$$

Trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, độ mảnh của thanh bằng :

$$\lambda' = \frac{\mu l}{i_{\max}} = \frac{1.7}{6,36.10^{-2}} = 110$$

Trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất, độ mảnh của thanh là

$$\lambda'' = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2.7}{3,46.10^{-2}} = 101.$$

Ta thấy trong trường hợp này  $\lambda' > \lambda''$  nên khi mất ổn định cột sẽ cong trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất. Ta sẽ dùng  $\lambda'$  để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn.

Ta đã biết gỗ có  $\lambda_0 = 75$  vậy ta có thể dùng công thức Ôle vì  $\lambda' > \lambda_0$ .

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(\lambda')^2} = \frac{9,86 \cdot 9 \cdot 10^5}{110^2} = 733 \text{ N/cm}^2$$

Lực tới hạn của cột là :

$$P_{\text{th}} = \sigma_{\text{th}} \cdot F = 733 \cdot 12 \cdot 22 = 193,5 \text{ kN}$$

**Ví dụ 3.** Cho một cột cao 3m, hai đầu liên kết khớp, mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu N°30a. Cột làm bằng thép số 2 có  $[\sigma]_n = 14,00 \text{ kN/cm}^2$ . Xác định lực nén cho phép tác động trên đầu cột.

**Bài giải :**

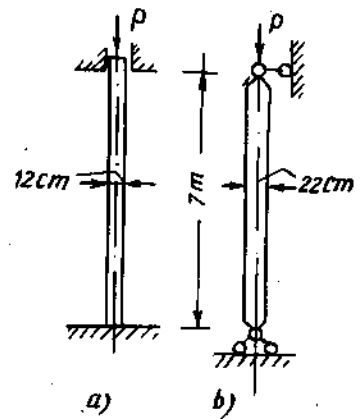
Mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu 30a có  $F = 49,9 \text{ cm}^2$ ,  $i_{\min} = 2,95 \text{ cm}$ . Hai đầu cột liên kết khớp nên hệ số  $\mu = 1$ . Ta tính độ mảnh  $\lambda$ .

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{2,95} = 101.$$

Tra bảng ta được trị số  $\varphi = 0,592$ .

Lực nén cho phép là :

$$[P]_{\text{đ}} \leq 0,592 \cdot 14 \cdot 49,9 = 413 \text{ kN}.$$



H. 16-10

**Ví dụ 4.** Chọn số hiệu thép chữ I cho một thanh dài 2m, liên kết khớp tại hai đầu và chịu một lực nén  $P = 230 \text{ kN}$ . Biết vật liệu là thép số 2 có  $[\sigma]_n = 14 \text{ kN/cm}^2$ .

**Bài giải :**

Ta phải giải bài toán theo phương pháp đúng đắn.

a) *Chọn lần thứ nhất.* Cho  $\varphi = 0,50$ . Với trị số đó ta tính được diện tích mặt cắt ngang như sau :

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]_n} = \frac{230 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 14 \cdot 10^3} = 32,8 \text{ cm}^2.$$

Tra bảng ta thấy có loại thép chữ I số hiệu 22a có diện tích gần với số liệu trên đây :  $F = 32,4 \text{ cm}^2$ . Với số liệu này ta có  $i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$ . Nếu chọn loại này ta có độ mảnh của thanh là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,5} = 80$$

Với  $\lambda = 80$  tra bảng ta được  $\varphi = 0,75$ .

Hệ số này khác nhiều so với trị số giả thiết ban đầu vậy ta cần chọn lại.

b) *Chọn lần thứ hai.* Ta có thể chọn hệ số  $\varphi$  như sau :

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Từ đó ta có :

$$F \geq \frac{230 \cdot 10^3}{0,625 \cdot 14 \cdot 10^3} = 26,2 \text{ cm}^2$$

Tra bảng ta thấy có loại thép chữ I số 20. Diện tích mặt cắt ngang  $F = 26,4 \text{ cm}^2$  ;  $i_{\min} = 2,06 \text{ cm}$ .

Độ mảnh của thanh sẽ là :

$$\lambda = \frac{1 \cdot 200}{2,06} = 97$$

Tra bảng ta được  $\varphi = 0,627$ , trị số này gần bằng trị số 0,625 ta đã giả thiết. Vậy ta chọn loại thép này.

Kiểm tra lại điều kiện ổn định :

$$\frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma]_n = 8,77 \text{ kN/cm}^2$$

$$\frac{230 \cdot 10^3}{26,4} = 8,712 \text{ kN/cm}^2$$

Ta thấy đạt yêu cầu vậy chọn thép chữ I số 20.

## §16-5. HÌNH DẠNG MẶT CẮT HỢP LÍ KHI CHỊU NÉN

Muốn cho thanh chịu nén đúng tâm được bảo đảm an toàn theo điều kiện bền thì chỉ cần mặt cắt ngang của thanh có một diện tích tối thiểu nào đó, còn hình dạng của nó, nói chung, có thể bất kì.

Nhưng muốn cho thanh ổn định thì không phải chỉ cần chú ý đến diện tích của mặt cắt ngang mà còn cần phải chú ý đến hình dạng của nó.

Phải chọn hình dạng của mặt cắt sao cho với một diện tích nhất định, thanh chịu được một lực nén lớn nhất. Hình dạng như vậy được gọi là hình dạng hợp lí. Hình dạng đó phải có các điều kiện sau đây :

a)  $i_{\min} = i_{\max}$  tức là  $J_{\min} = J_{\max}$  với liên kết hai mặt như nhau, nghĩa là khả năng chống lại sự mất ổn định theo các phương là như nhau. Muốn có được điều đó thì hình dạng của mặt cắt phải là hình tròn, hình vuông hoặc đa giác đều.

b) Các mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang càng lớn càng tốt, vì thế người ta thường dùng các hình rỗng nhưng thành phải có chiều dày vừa đủ.

## §16-6. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Nếu dầm chịu uốn có mặt cắt ngang là một hình chữ nhật hẹp (h. 16-11a) thì khi mômen uốn đạt đến một trị số tới hạn nào đó dầm sẽ bị mất ổn định. Khi đó dầm không những bị uốn mà còn bị vênh (h. 16-11b). Trên mặt cắt ngang của dầm có ba thành phần mômen :  $M_x$  ;  $M_y$  ;  $M_z$ .

Các thành phần đó được tính như sau :

Vecto mômen uốn tới hạn  $M_{th}$  luôn luôn vuông góc với mặt phẳng  $yOz$  (h. 16-11a).

Khi dầm vừa bị uốn vừa bị vênh hệ trục  $Oxyz$  xoay đi so với hệ trục cũ. Ta biểu diễn vị trí mới của hệ trục đó như trên hình 16-11b. Gọi hình chiếu của  $M_{th}$  trên mặt  $yOx$  là  $M_\alpha$ . Góc tạo bởi  $M_\alpha$  và  $M_{th}$  là góc xoay  $\alpha$  của mặt cắt ngang chung quanh trục  $y$ .

Phương trình vi phân của độ võng theo phương ngang là :

$$x'' = - \frac{M_y}{EJ_y} \quad (17)$$

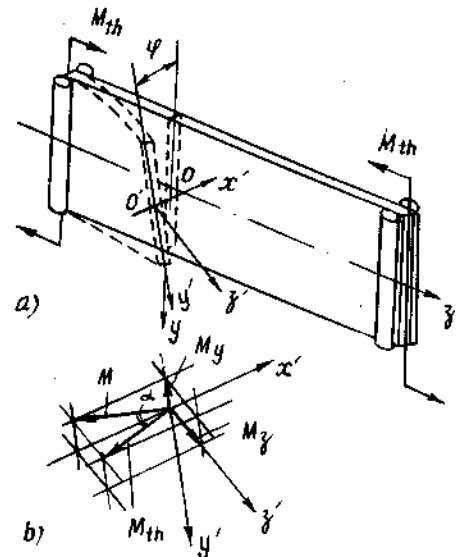
Góc xoay  $\alpha$  có trị số gần bằng  $x'$ .

Trị số của  $M_\alpha$  và  $M_z$  là :

$$\left. \begin{aligned} M_z &= M_{th} \sin \alpha \approx M_{th} \alpha \\ M_y &= M_{th} x' \\ M_\alpha &= M_{th} \cos \alpha \approx M_{th} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Phương của  $M_\alpha$  và trục  $x$  là góc xoắn  $\varphi$  của mặt cắt. Do đó ta có :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_\alpha \cos \varphi \\ M_y &= M_\alpha \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



H.16-11

Vì  $\varphi$  bé nên sau khi thay  $M_\alpha$  vào ta có :

$$\left. \begin{aligned} M_x &\approx M_{th} \\ M_y &\approx M_{th}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Góc  $\varphi$  được xác định từ phương trình vi phân :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_d} \quad (21)$$

$GJ_d$  là độ cứng khi xoắn của mặt cắt ngang :

Thay trị số  $M_z$  từ (18) vào ta có :

$$\varphi' = \frac{M_{th}x'}{GJ_d} \quad (22)$$

Lấy đạo hàm một lần nữa ta có :

$$\varphi'' = \frac{M_{th}x''}{GJ_d} \quad (23)$$

Thay  $x''$  từ (17) vào (23) và với chú ý (20) ta có :

$$\varphi'' = -\frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y} \varphi \quad (24)$$

Hay viết gọn lại :  $\varphi'' + k^2\varphi = 0$

trong đó :

$$k^2 = \frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y} \quad (16-12)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (25) có dạng là :

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (26)$$

Các hằng số tích phân  $C_1$  và  $C_2$  được xác định từ các điều kiện biên. Các điều kiện đó là.

$$z = 0, \quad \varphi = 0 \quad (a)$$

$$z = l, \quad \varphi = 0, \quad (b)$$

Từ điều kiện (a) ta tìm thấy  $C_2 = 0$

Từ điều kiện (b) ta có :

$$C_1 \sin kl = 0 \quad (27)$$

Ta lại lập luận như trước đây ta đã làm :

$C_1$  phải khác không. Nghĩa là ta phải có :

$$\sin kl = 0 \text{ hay } kl = n\pi \quad (n = 1, 2 \dots n)$$

Vậy :

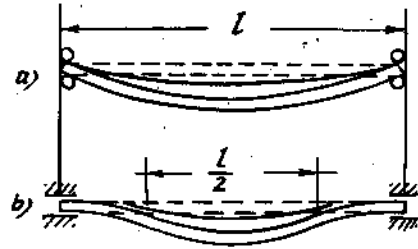
$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y}$$

với  $n = 1$  ta có mômen uốn tối hạn cho dầm có các gối tựa ở hai đầu là (h. 16.12a).

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EGJ_x J_y} \quad (16-13)$$

Đối với dầm chịu ngàm chặt hai đầu (h. 16-12b) cũng lí luận như trên ta tìm thấy mômen tối hạn như sau :

$$M_{th} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EGJ_x J_y} \quad (16-14)$$



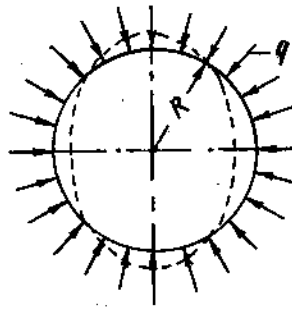
H. 16-12

### §16-7. ỔN ĐỊNH CỦA VÀNH CHỊU ÁP SUẤT BÊN NGOÀI

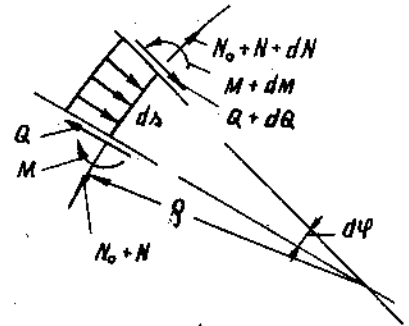
Xét sự ổn định của vành chịu áp lực phân bố đều bên ngoài cường độ  $q$  (h. 16-14).

Khi áp lực  $q$  tăng lên đến một giá trị nhất định vành không giữ được hình dạng tròn ban đầu nữa mà sẽ méo mó đi theo một hình elip. Trạng thái đó là trạng thái mất ổn định của vành.

Xét một phân tố  $d_s$  được tách ra bởi các mặt cắt vuông góc với trục. Khi vành mất ổn định bán kính cong của phân tố bị thay đổi không còn là  $R$  nữa. Ta gọi bán kính cong mới này là  $\rho$  và gọi  $\chi$  là độ thay đổi của độ cong :



H.16-13



H.16-14

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \chi \quad (28)$$

Khi vành chưa bị mất ổn định, trên mặt cắt ngang của vành chỉ có một thành phần lực dọc là :

$$N_0 = qR \quad (29)$$

Khi vành bị mất ổn định trên mặt cắt có các thành phần nội lực (h. 16-14). Các phương trình cân bằng được viết như sau :

$$\begin{cases} qds + dQ - (N_0 + N) \frac{ds}{\rho} = 0 & (a) \\ \frac{Q}{R} + \frac{dN}{ds} = 0 & (b) \\ \frac{dM}{ds} + Q = 0 & (c) \end{cases}$$

Thay (29) vào phương trình (a) ta có :

$$q \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{\rho R} = 0$$

Từ (28) ta có thể viết lại :

$$-q\chi + \frac{1}{R} \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R^2} = 0 \quad (30)$$

Trong số hạng cuối cùng ta đã lấy trị số  $\rho \approx R$ .

Với các biểu thức (c) và (b) phương trình (30) có thể viết lại dưới dạng :

$$q\chi + \frac{1}{R} \frac{d^2M}{ds^2} + \frac{1}{R^3}M = C_1 \quad (31)$$

Vế phải của (31) là hằng vì ta phải lấy tích phân phương trình (b).

Chú ý đến tương quan giữa mômen uốn và sự thay đổi độ cong  $\chi$  ta có

$$M = EJ \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = EJ\chi \quad (32)$$

Thay biểu thức đó vào (31) ta được phương trình vi phân :

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + k^2\chi = C_1 \frac{R}{EJ} \quad (33)$$

trong đó

$$k^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EJ} \quad (16-15)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó có dạng :

$$\chi + \frac{C_1 R}{k^2 \cdot EJ} + C_2 \sin ks + C_3 \cos ks$$

$\chi$  phải là một hàm tuần hoàn vì trị số của  $\chi$  phải như nhau khi có chiều dài là  $2\pi R$ . Điều đó có nghĩa là sự biến thiên của  $ks$  với chiều dài  $2\pi R$  phải là một số nguyên lần của  $2\pi$  :

$$k(s + 2\pi R) - ks = 2\pi n$$

$n$  là một số nguyên. Vậy ta có :

$$kR = n.$$

Thay trị số đó vào (16-15) ta có  $q$  tới hạn là :

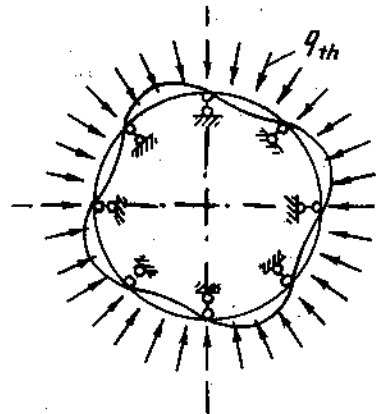
$$q_{th} = \frac{(n^2 - 1)EJ}{R^2} \quad (16-16)$$

Trị số nhỏ nhất của lực tới hạn là khi  $n = 2$ .

$$q_{th} = \frac{3EJ}{R^2} \quad (16-17)$$

Trong trường hợp đó  $\chi$  thay đổi theo chu vi của vành hai chu kì nguyên vẹn (h. 16-13). Vành bị uốn theo bốn nửa bước sóng và có hình dạng gần với hình dạng enlip.

Nếu vành được gia cố bằng  $2n$  ( $n > 2$ ) liên kết đơn (h. 16-15) phân bố đều theo chu vi của vành, sự mất ổn định sẽ tạo thành  $2n$  nửa bước sóng và lúc đó áp lực tới hạn sẽ được tính với công thức tổng quát (16-16).



H.16-15

## CHƯƠNG XVII THANH THÀNH MỎNG

### §17-1. KHÁI NIỆM

Ngày nay các kết cấu thanh thành mỏng được áp dụng rộng rãi trong nhiều ngành chế tạo máy và xây dựng, đặc biệt trong ngành chế tạo máy bay, tàu thủy, toa xe...

Trên hình 17-1 biểu diễn một thanh thành mỏng. Đặc trưng của thanh là chiều dày  $\delta$  rất bé so với đường chu tuyến  $s$  của mặt cắt ngang và  $s$  lại rất bé so với chiều dài  $l$  của thanh.

Nhờ đặc tính có trọng lượng nhỏ mà sức chịu lực lớn nên thanh được sử dụng để tạo thành khung của thân máy bay, ô tô, tàu thủy v.v.

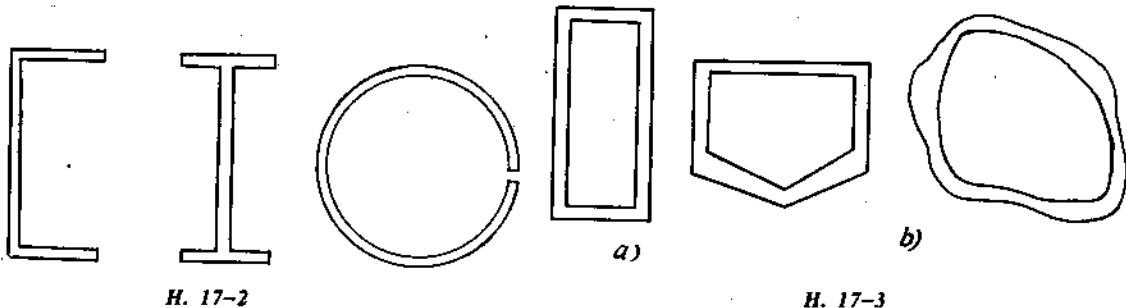
Timôscô là người đã đưa ra lý thuyết tính toán về thanh thành mỏng sau đó Volaxốp đã hoàn chỉnh và phát triển cả về lý thuyết độ bền, ổn định và dao động của thanh thành mỏng mặt cắt hở. Cũng vì vậy hiện nay người ta vẫn gọi là lý thuyết của Volaxốp.

Ta có các định nghĩa sau đây : mặt cách đều hai mặt bên của thanh được gọi là mặt trung gian. Giao tuyến của mặt trung gian với mặt cắt ngang gọi là đường trung gian. Hình dáng của đường trung gian tạo thành chu tuyến của mặt cắt ngang.

Trong thực tế thường gặp các loại thanh như sau :

a) Thanh mặt cắt hở. Chu tuyến là một đường hở.

Chu vi của mặt cắt ngang là một đường đơn liên (h. 17-2).



b) Thanh mặt cắt kín. Chu tuyến là một đường khép kín.

Chu vi của mặt cắt ngang là một đường đa liên (h. 17-3).

Căn cứ vào chiều dày ta cũng có thể phân biệt hai loại : thanh có chiều dày không đổi (h. 17-3a) và thanh có chiều dày thay đổi (h. 17-3b).



## §17-2. ĐẶC TRƯNG QUẠT CỦA MẶT CẮT NGANG CỦA THANH THÀNH MỎNG HỒ

### 1. Tọa độ quạt

Giả sử cho đường trung gian của mặt cắt ngang như trên hình 17-4. Chọn một điểm O trên đường đó làm gốc tọa độ và một điểm P bất kì trên mặt phẳng cắt ngang làm cực. Gọi s là tọa độ của một điểm A nào đó trên đường trung gian. Xét phần tử AB với chiều dài ds.

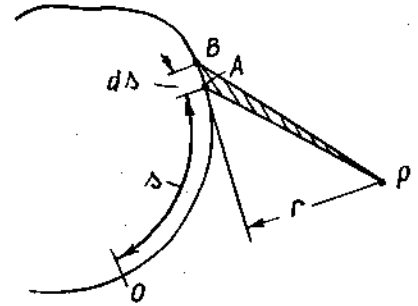
Hai lần diện tích tam giác cong PAB có trị số là :

$$d\omega = rds$$

r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến qua A.

$$\text{Tích phân : } \omega = \int_s^s d\omega = \int_0^s rds \quad (17-1)$$

được gọi là tọa độ quạt của A.



H. 17-4

Như vậy tọa độ quạt, về trị số, là bằng hai lần diện tích quạt của tia PA đã quét trong mặt phẳng của mặt cắt khi A chạy trên đường cong từ O đến điểm đang xét. Dấu của tọa độ được xem là dương khi tia PA quay quanh P theo chiều kim đồng hồ và là âm khi có chiều ngược lại.

Tọa độ quạt phụ thuộc vào vị trí của cực P và điểm gốc O đã chọn.

Ta có thể tiến hành vẽ các biểu đồ tọa độ quạt như sau. Ví dụ cho một đường trung gian của mặt cắt ngang và chọn O, P như trên hình (17-5).

Tọa độ quạt tại A là hai lần diện tích tam giác POA.

$$\omega_A = -PO.OA = -as.$$

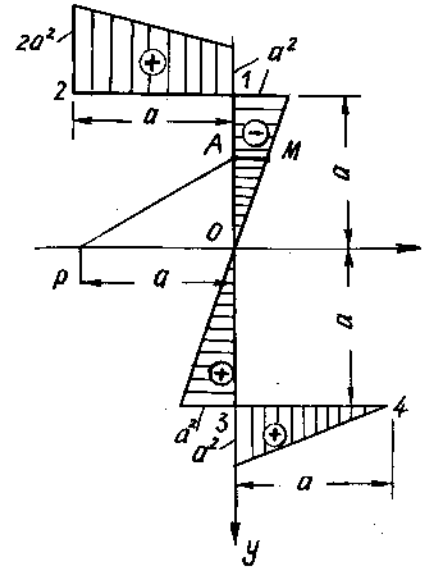
Tọa độ đó mang dấu âm vì khi A chạy từ O đến A tia PA quay quanh P theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Tại A, trên đường thẳng vuông góc với đường trung gian, theo tỉ lệ xích nhất định, ta lấy một đoạn AM biểu diễn cho trị số  $\omega_A$ . Khi A chạy trên chu tuyến, M sẽ vẽ nên biểu đồ tọa độ quạt của mặt cắt ngang (h. 17-5). Ta dễ dàng tính được các tọa độ quạt của các điểm 1, 2, 3, 4 như sau :

$$\omega_1 = -a^2 ; \omega_2 = -2a^2 ; \omega_3 = a^2 ; \omega_4 = 0.$$

Ví dụ 1. Vẽ biểu đồ tọa độ quạt của đường trung gian mặt cắt ngang được biểu diễn trên hình 17-6. P và O được chọn như hình vẽ :

**Bài giải :**

Ta nhận thấy, khi A chạy trên đường PO2 hay P3 tia PA không quay quanh O vậy tọa độ quạt của các điểm P2 và P3 là bằng không.



H. 17-5

Tọa độ quạt tại các điểm 1, 2, 3, 4 là như sau :

$$\omega_1 = 2a^2, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0, \omega_4 = -4a^2$$

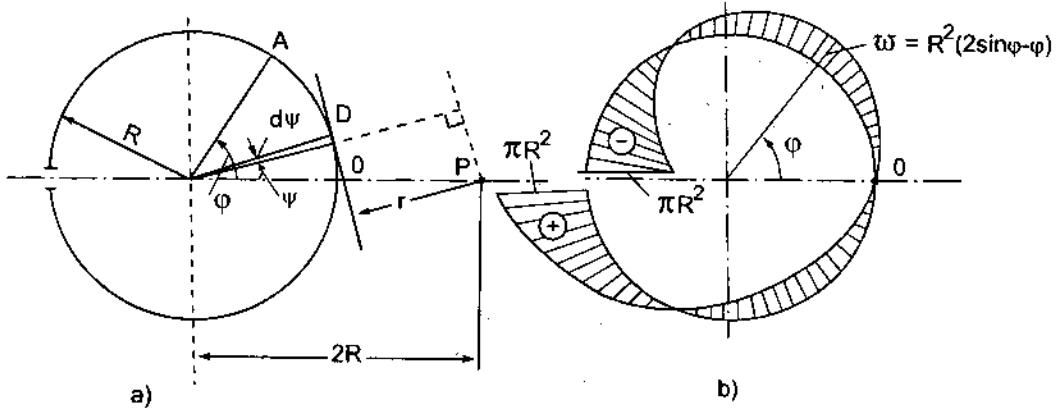
Biểu đồ được biểu diễn như trên hình 17-6.

**Ví dụ 2.** Vẽ biểu đồ tọa độ quạt cho đường chu tuyến tròn hở với vị trí cực và gốc được chọn như trên hình 17-7a.

*Bài giải :*

Gọi  $\psi$  là góc ở tâm xác định bởi cung  $s = OD$ . Khoảng cách từ P xuống đường tiếp tuyến qua D sẽ là :

$$r = 2R\cos\psi - R$$



H.17-7

Tọa độ quạt tại A là diện tích quạt do tia PD quét khi D chạy từ O đến A :

$$\omega_A = \int_s r ds = R^2 \int_0^\varphi (2\cos\psi - 1) d\psi$$

vậy :

$$\omega_A = R^2(2\sin\varphi - \varphi) \quad (b)$$

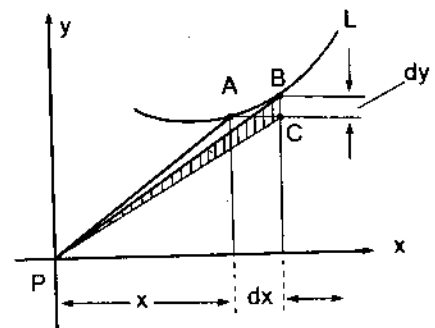
Căn cứ vào (b) ta được biểu đồ quạt như trên hình 17-7b

## 2. Tính tọa độ quạt theo hệ trục tọa độ vuông góc

Giả sử có một đường cong L biểu diễn một đoạn đường trung gian của mặt cắt ngang. Chọn một cực P và hệ trục  $Px, Py$  nằm trong mặt phẳng của mặt cắt (h. 17-8). Nếu bỏ qua vô cùng bé bậc cao thì vi phân diện tích  $d\omega$  là bằng hai lần hiệu của hai tam giác PAC và PBC, ta có

$$d\omega = ydx - xdy \quad (17-2)$$

trong đó  $x, y$  là tọa độ của A và  $(x + dx), (y + dy)$  là tọa độ của B.



H.17-8

Ta dễ dàng thiết lập tương quan giữa các tọa độ quạt đối với hai cực bất kì.

Trong mặt phẳng của L lấy hai cực  $P_1, P_2$  và hai trục tọa độ  $P_1x_1y_1, P_2x_2y_2$  có các trục song song và vuông góc với nhau (h. 17-9). Tọa độ  $P_2$  trong  $P_1x_1y_1$  là  $a, b$ .

Giả sử đã xác định được tọa độ quạt trên cung  $OI = s$  tương ứng với cực  $P_1$ : Đòi hỏi xác định tọa độ quạt của đoạn cong đó đối với  $P_2$ .

Ta có :

$$d\omega_2 = y_2 dx_2 - x_2 dy_2$$

Với tương quan giữa  $x_1y_1$  và  $x_2y_2$  là :

$$x_2 = x_1 - a$$

$$y_2 = y_1 - b$$

ta có thể biểu diễn  $d\omega_2$  theo  $x_1y_1$  như sau :

$$d\omega_2 = (y_1 - b)dx_1 - (x_1 - a)dy_1$$

Lấy tích phân hai vế dọc theo  $O_s$  ta có :

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x_1 - x_{o1}) + a(y_1 - y_{o1})$$

trong đó  $x_1$  và  $y_1$  là tọa độ của  $I$  và  $x_{o1}, y_{o1}$  là tọa độ của gốc  $O$  trong hệ trục  $P_1x_1y_1$ .

Nếu  $O$  và  $I$  được xác định trong một hệ trục tọa độ bất kì  $Oxy$  song song với các trục  $P_1x_1y_1$  và  $P_2x_2y_2$  thì ta có thể viết  $\omega_2$  dưới dạng :

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x - x_o) + a(y - y_o) \quad (17-3)$$

trong đó  $\omega_2(s)$  và  $\omega_1(s)$  là tọa độ quạt của  $I$  tương ứng với các cực  $P_2, P_1$ ;  $x, y$  và  $x_o, y_o$  là tọa độ của  $O$  và  $I$  trong hệ trục  $Oxy$ .

Từ biểu thức (17-3) cho nhận xét sau đây : khi thay đổi cực  $P$ , nghĩa là  $a$  và  $b$  thay đổi, tọa độ quạt thay đổi một trị số tỉ lệ bậc nhất đối với các tọa độ  $x, y$ . Khi thay đổi gốc  $O$  trên cung, nghĩa là thay đổi  $x_o$  và  $y_o$ , tọa độ quạt thay đổi một hằng số.

### 3. Các đặc trưng quạt và cách xác định chúng

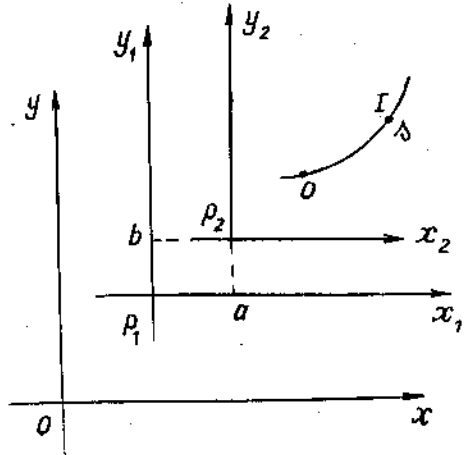
Ta có các định nghĩa sau đây :

Gọi mômen tĩnh quạt là biểu thức tích phân :

$$S_\omega = \int_F \omega dF \quad (\text{cm}^4) \quad (17-4)$$

Gọi mômen quạt đường là các biểu thức tích phân :

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega x} &= \int_F \omega y dF \quad (\text{cm}^5) \\ J_{\omega y} &= \int_F \omega x dF \quad (\text{cm}^5) \end{aligned} \right\} \quad (17-5)$$



H. 17-9

Gọi mômen quán tính quạt là biểu thức tích phân

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad (\text{cm}^5) \quad (17-6)$$

trong đó  $F$  là diện tích của mặt cắt ngang,  $x$  và  $y$  là tọa độ của  $dF$  và  $\omega$  là tọa độ quạt tương ứng của điểm đó đối với cực  $P$  đã chọn (h. 17-10).

Nếu chiều dày  $\delta$  của thành là không đổi, các biểu thức tích phân trên sẽ có dạng như sau :

$$S_{\omega} = \delta \int_S \omega ds ; \quad J_{\omega x} = \delta \int_S \omega y ds ;$$

$$J_{\omega y} = \delta \int_S \omega x ds ; \quad J_{\omega} = \delta \int_S \omega^2 ds \quad (17-5)'$$

Ta nhận thấy nếu biểu đồ tọa độ quạt  $\omega$  đã được xác định thì các biểu thức tích phân trên đây được tính dễ dàng.

Đối với các chu tuyến là những đoạn thẳng thì có thể sử dụng phương pháp nhân biểu đồ của Verésaghin để tính các tích phân.

**Ví dụ 3.** Xác định các đặc trưng quạt cho chu tuyến tròn (h. 17-7a).

*Bài giải :*

Trong ví dụ 2 chúng ta đã tính được tọa độ quạt tại một điểm A bất kì trên chu tuyến là :

$$\omega_A = R^2(2\sin\varphi - \varphi)$$

Vậy các đặc trưng quạt được tính như sau :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = R^3 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin\varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

$$J_{\omega y} = \int_F x \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi (2\sin\varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

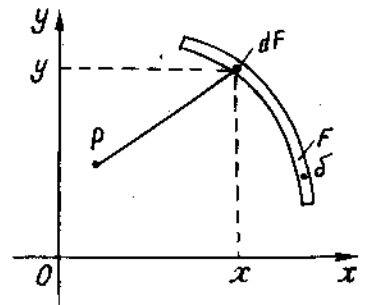
$$J_{\omega x} = \int_F y \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi (2\sin\varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = R^5 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin\varphi - \varphi)^2 d\varphi = 2\pi \left( \frac{\pi^2}{3} - 2 \right) R^5 \delta$$

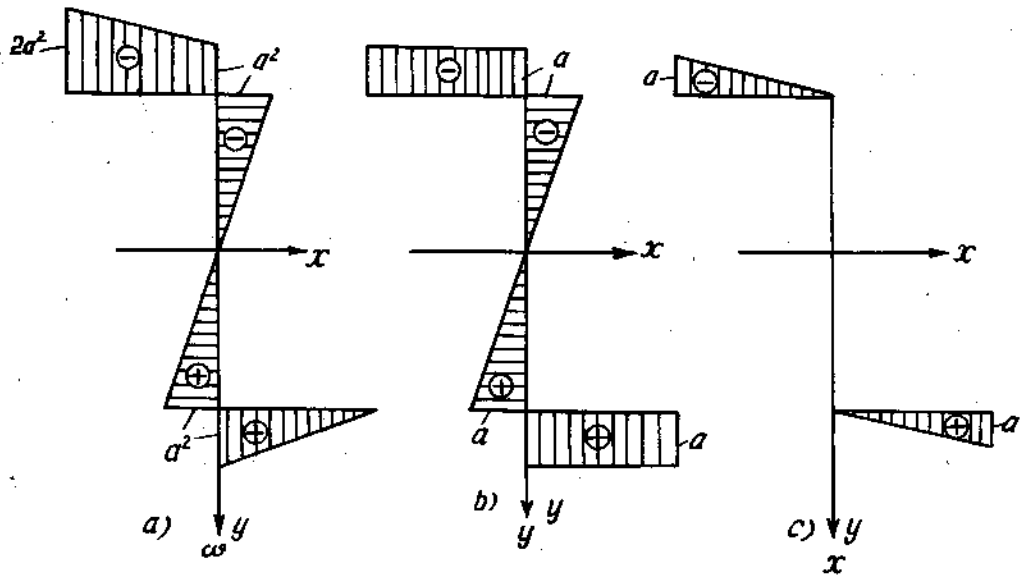
**Ví dụ 4.** Ta lấy lại ví dụ trên hình 17-5. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Tính các đặc trưng quạt.

*Bài giải :*

Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với  $P$  và  $O$  đã được xác định. Để tính được các đặc trưng quạt ta vẽ thêm các biểu đồ của  $y$  và  $x$  (h. 17-11b, c).



H. 17-10



H. 17-11

Các đặc trưng quạt được tính lần lượt như sau :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = \delta \int_S \omega ds = -\delta \frac{a^3}{2}$$

$$J_{\omega x} = \int_F \omega y dF = \frac{8}{3} \delta a^4$$

$$J_{\omega y} = \int_F \omega x dF = \delta a^4$$

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = \frac{7}{3} \delta a^5$$

Các kết quả trên thu được nhờ phép nhân theo phương pháp Vêrêsaghin giữa các biểu đồ tọa độ  $\omega$ ,  $y$  và  $x$ .

Ta có một số định nghĩa sau đây :

Nếu  $J_{\omega y} = J_{\omega x} = 0$  thì cực P tương ứng được gọi là cực chính.

Nếu  $S_{\omega} = 0$  thì góc tương ứng được gọi là góc chính.

Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với cực và góc chính được gọi là biểu đồ tọa độ quạt chính. Mômen quán tính quạt tương ứng với biểu đồ đó được gọi là mômen quán tính quạt chính. Trong trường hợp ví dụ 3 : P và O là các điểm cực và góc chính và trị số  $J_{\omega}$  đã tính được là mômen quán tính quạt chính.

Cách xác định cực và góc chính được tiến hành như sau :

Giả sử cho một chu tuyến của mặt cắt ngang như hình 17-12. Xem hệ trục Oxy và là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Chọn một cực  $P_1$  bất kì. Với  $P_1$  ta tính được  $\omega_1$  và các đặc trưng khác đối với hệ trục tọa độ  $P_1x_1y_1$ .

Gọi  $P_2$  là cực chính phải tìm. Theo định nghĩa :

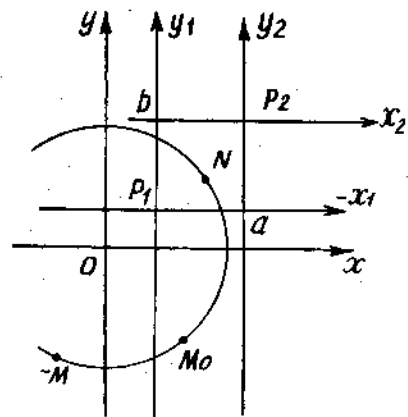
$$J_{\omega_2 y} = \int_F \omega_2 x dF = 0$$

$$J_{\omega_2 x} = \int_F \omega_2 y dF = 0$$

Theo (17-3) ta có :

$$J_{\omega_2 y} = \int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] x dF = 0$$

$$J_{\omega_2 x} = \int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] y dF = 0$$



H. 17-12

trong đó  $a$  và  $b$  là tọa độ của  $P_2$  trong hệ tọa độ

$P_1 x_1 y_1$ . Nếu gọi  $x_2 y_2$  và  $x_1 y_1$  là tọa độ của  $P_2$  và

$P_1$  trong hệ trục  $Oxy$  thì trị số của  $a$  và  $b$  là hiệu của các tọa độ  $x_2 x_1$  và  $y_2 y_1$ . Với chú ý  $Oxy$  là hệ trục quán tính chính trung tâm từ các biểu thức trên ta tìm thấy :

$$\left. \begin{aligned} a &= x_2 - x_1 = -\frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} \\ b &= y_2 - y_1 = \frac{J_{\omega_1 y}}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (17-7)$$

Đó là công thức xác định tọa độ của  $P_2$  từ vị trí của  $P_1$  được chọn bất kì. Điểm gốc chính được xác định từ điều kiện :

$$S_{\omega} = 0$$

Giả sử lúc đầu ta chọn  $M$ , một điểm bất kì trên chu tuyến làm gốc. Tọa độ quạt của  $N$  đối với  $M$  được kí hiệu là  $\frac{\omega_N}{M}$ . Nếu chọn một điểm  $M_0$  khác làm gốc ta sẽ được

tương quan sau (h. 17-12) :

$$\frac{\omega_N}{M} = \frac{\omega_N}{M_0} + \frac{\omega_{M_0}}{M}$$

Vậy

$$\frac{\omega_N}{M_0} = \frac{\omega_N}{M} - \frac{\omega_{M_0}}{M}$$

Xem  $M_0$  là điểm gốc chính, theo định nghĩa ta phải có :

$$S_{\omega_{N/M_0}} = \int_F \frac{\omega_N}{M_0} dF = 0$$

hay :

$$S_{\omega_{N/M_0}} = \int_F \left( \frac{\omega_N}{M} - \frac{\omega_{M_0}}{M} \right) dF = 0$$

Do đó :

$$\int_F \omega_N \frac{dF}{M} - \omega_{M_0} \int_F \frac{dF}{M} = 0$$

Vậy

$$\omega_{\frac{M_0}{M}} = \frac{\int_F \omega_N \frac{dF}{M}}{\int_F \frac{dF}{M}}$$

Công thức (17-7) cho phép ta xác định được tọa độ quạt của điểm  $M_0$  từ góc  $M$  bất kì đã chọn ban đầu.

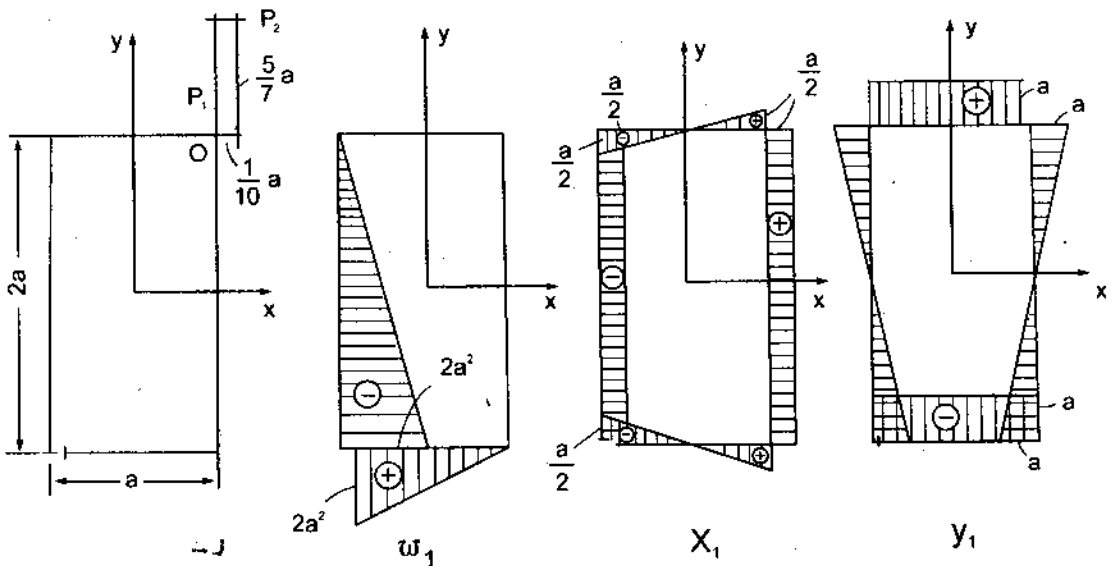
**Ví dụ 5.** Xác định điểm cực chính và điểm gốc chính của chu tuyến hình chữ nhật (h. 17-13). Chiều dày  $\delta$  là không đổi.

*Bài giải :*

Trước hết ta phải xác định hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm Oxy của mặt cắt ngang (h. 17-13). Ta dễ dàng tính được

$$J_x = \frac{10}{3} a^3 \delta$$

$$J_y = \frac{7}{6} a^3 \delta.$$



H. 17-13

Để đơn giản ta chọn cực  $P_1$  ban đầu là ở góc trên của đường trung gian. Từ đó ta có biểu đồ tọa độ quạt  $\omega_1$ . Để tính các mômen quạt ta vẽ các biểu đồ của  $x$ ,  $y$  và sử dụng phép nhân biểu đồ của Verésaghin. Sau các phép toán ta được :

$$\int_F x \omega_1 dF = \frac{5}{6} a^4 \delta$$

$$\int_F y \omega_1 dF = -\frac{1}{3} a^4 \delta$$

Vị trí  $P_2$  được xác định từ công thức (17-7)

$$x_2 = \frac{1}{10}a + x_1$$

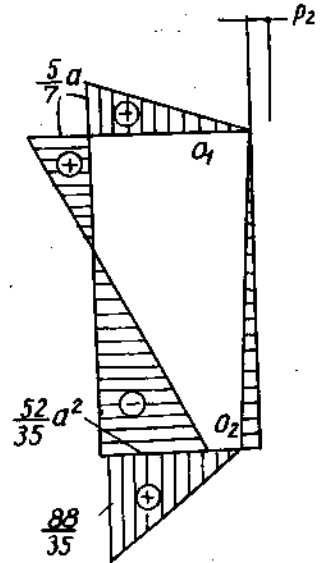
$$y_2 = \frac{5}{7}a + y_1$$

Với cực  $P_2$  và với gốc  $O$  ta vẽ được biểu đồ quạt như trên hình 17-14. Mômen tĩnh quạt đối với  $O$  là :

$$\int_F \omega_N dF = \frac{38}{70} a^3 \delta$$

Từ công thức (17-7) ta xác định được tọa độ quạt của điểm gốc chính

$$\omega^* = \frac{\int_F \omega_N dF}{F} = \frac{\frac{38}{70} a^3 \delta}{6a\delta} = 0,09a^2$$



H. 17-14

Ta nhận thấy có hai điểm  $O_1$  và  $O_2$  có tọa độ là  $0,09a^2$ . Điểm gần với  $P_2$  sẽ là điểm gốc chính (h. 17-14).

### §17-3. ỨNG SUẤT TIẾP TRONG THÀNH MỎNG KHI CHỊU UỐN NGANG

Khi chịu uốn ngang trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần nội lực : mômen uốn  $M_x$  và lực cắt  $Q_y$ .

Một cách gần đúng ứng suất pháp  $\sigma_z$  được tính với biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (17-8)$$

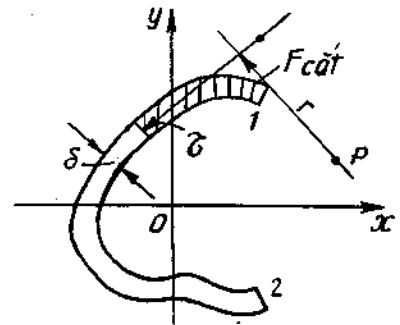
Cách lập luận như đã được thực hiện đối với mặt cắt hình chữ nhật hẹp ta tìm thấy hệ ứng suất tiếp do lực cắt  $Q_y$  gây nên có phương song song với các tiếp tuyến trên biên của mặt cắt (h. 17-15).

Trị số của ứng suất tiếp đó được tính với công thức của Giurapxki

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} \quad (17-9)$$

$S_x^*$  là mômen tĩnh của diện tích  $F$  cắt (h. 17-15) đối với hệ trục quán tính chính trung tâm  $Oxy$ .  $\delta$  là độ dày của thành.

Ở đây ta xem  $\tau$  phân bố đều ở trên  $\delta$ .



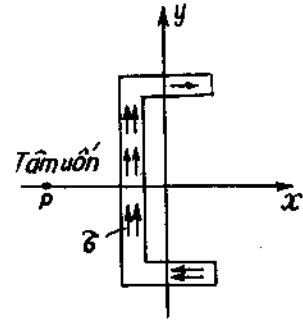
H. 17-15



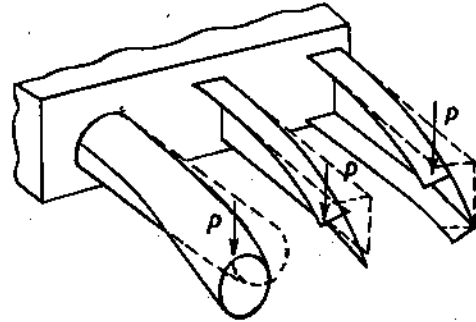
Một cách tổng quát khi trên mặt cắt ngang có hai thành phần lực cắt  $Q_x$  và  $Q_y$  thì ứng suất tiếp  $\tau$  có trị số là :

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{J_y \delta} \quad (17-10)$$

Ta để ý đến một tính chất đặc biệt sau đây của hệ ứng suất đó :  $\tau$  lập thành luồng trên mặt cắt, vì vậy ta gọi ứng suất tiếp này là ứng suất tiếp luồng. Hợp lực của  $\tau$  có hình chiếu trên các phương x và y là các lực cắt  $Q_x$ ,  $Q_y$  và nói chung khi thu gọn hợp lực đó về trọng tâm mặt cắt ta có thêm một mômen xoắn (h. 17-16). Dĩ nhiên, trên mặt phẳng của mặt cắt ngang, ta luôn luôn tìm thấy một điểm P mà tại đó sự thu gọn hệ lực do  $\tau$  gây nên chỉ còn một vectơ chính. Điểm đó được gọi là tâm uốn. Ngoại lực phải đặt đúng ở vị trí này thì thanh mới không bị xoắn. Nếu ngoại lực đặt không đúng ở vị trí này thì thanh vừa bị uốn vừa bị vênh vì xoắn (h. 17-17).



H. 17-16



H.17 - 17

Cách xác định tâm uốn như sau :

Trước hết hãy tính mômen của nội lực do  $\tau$  gây nên đối với một điểm P bất kì nào đó trên mặt cắt (h. 17-15).

$$M_p = \int_F \tau r ds$$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến phương của  $\tau$  và ds là một độ dài vô cùng bé của đường chu tuyến. Ta nhận thấy tích  $rds$  là vi phân tọa độ quạt của đường chu tuyến đối với cực P. Thay trị số của  $\tau$  được tính từ (17-10) vào biểu thức của  $M_p$  :

$$M_p = \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF + \frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y^* \frac{d\omega}{dF} dF$$

Hai biểu thức tích phân có dạng tương tự. Ta tính trước một số hạng, ví dụ với số hạng thứ nhất.

Dùng tích phân đoạn có thể viết :

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF = S_x^* \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF$$

trong đó  $S_1$  và  $S_2$  chỉ trị số của  $S_x^* \omega$  tại vị trí 1 và 2 (h. 17.15). Ta nhận thấy tại vị trí 1,  $S^* = 0$  vì diện tích  $F_{\text{cắt}} = 0$  tại vị trí 2,  $S_x^* = S_x = 0$  vì hệ trục Oxy là hệ trục trung tâm

Do đó

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF = - \int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF$$

trong đó :

$$\frac{dS_x^*}{dF} = y$$

nên biểu thức tích phân đó là mômen quạt đường của diện tích F đối với trục x

$$\int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF = \int_F y \omega dF = J_{\omega x}$$

Vậy mômen của ứng lực do  $\tau$  gây nên đối với P là :

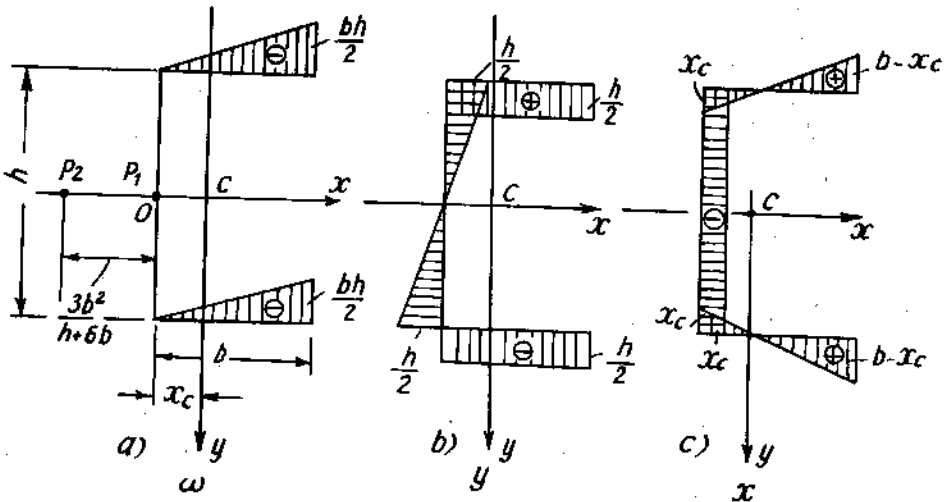
$$M_P = - \left( \frac{Q_y}{J_x} J_{\omega x} + \frac{Q_x}{J_y} J_{\omega y} \right)$$

Muốn  $M_P$  triệt tiêu với mọi giá trị của  $Q_x, Q_y$  thì :

$$J_{\omega x} = J_{\omega y} = 0 \quad (17-11)$$

Nghĩa là P phải là điểm cực chính. Nói một cách khác tâm uốn trùng với cực chính của mặt cắt. Ví dụ với mặt cắt là đường tròn hở (h. 17-7) điểm P là tâm uốn của mặt cắt. Với chu tuyến chữ nhật hở trên hình 17-13 là điểm  $P_2$ .

Ví dụ 6. Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang có hình dáng chữ C như trên hình vẽ 17-18. Chiều dầy  $\sigma$  xem như không đổi.



H. 17-18

Bài giải :

Hệ trục  $Cxy$  là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Chọn cực  $P_1$  và gốc O ban đầu như hình 17-18a. Biểu đồ tọa độ quạt  $\omega_1$  tương ứng với P cũng được biểu diễn trên hình đó. Biểu đồ các tọa độ x và y được vẽ trên hình 17-18b, c.

Vì biểu đồ tọa độ  $x$  là đối xứng và  $\omega_1$  là phản đối xứng nên chắc chắn :

$$J_{\omega_1 y} = \int_F \omega_1 x dF = 0$$

$J_{\omega_1 x}$  được xác định với biểu thức :

$$J_{\omega_1 x} = 2 \frac{bh}{2} b \cdot \frac{1h}{22} \delta = b^2 h^2 \delta / 4$$

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục  $x$  là :

$$J_x = \frac{(b + \frac{\delta}{2})(h + \delta)^3}{12} - \frac{(b - \frac{\delta}{2})(h - \delta)^3}{12}$$

$$J_x \approx \frac{\delta h^2 (h + 6b)}{12}$$

Từ công thức (17-7) ta tìm thấy tọa độ của cực chính là :

$$a = - \frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} = - \frac{3b^2}{h + 6b}$$

$$b = 0$$

Nghĩa là  $P_2$  nằm trên trục  $x$  về phía âm và cách  $P_1$  một khoảng cách là  $\frac{3b^2}{h + 6b}$ .

Ta cũng có thể suy luận một cách khác :

Xác định mômen nội lực đối với  $P_1$

$$M_{P_1} = 2 \frac{h}{2} \int_0^b z \delta ds = Q \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Tìm điểm  $P_2$  mà tổng mômen của nội lực đối với mỗi điểm đó bằng không.

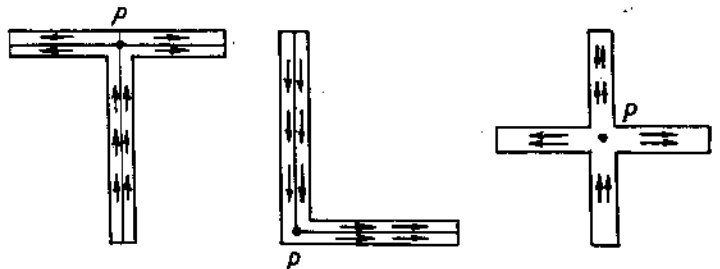
$$Q \overline{P_1 P_2} + Q \frac{3b^2}{h + 6b} = 0$$

Từ đó :

$$\overline{P_1 P_2} = - \frac{3b^2}{h + 6b}$$

như vậy ta có cùng một kết quả.

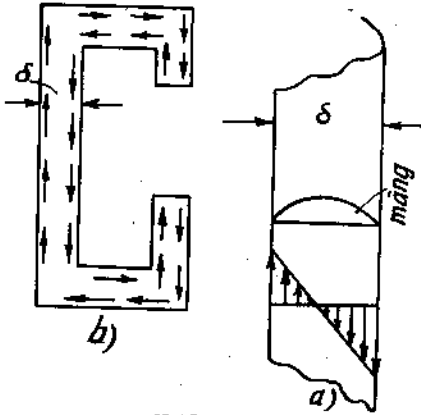
Đối với các mặt cắt có hai trục đối xứng thì tâm uốn sẽ trùng với trọng tâm mặt cắt. Đối với các mặt cắt hình chữ L, chữ T tâm uốn là giao điểm của các cánh vì tại đó mômen của tất cả các nội lực là bằng không (h. 17-19).



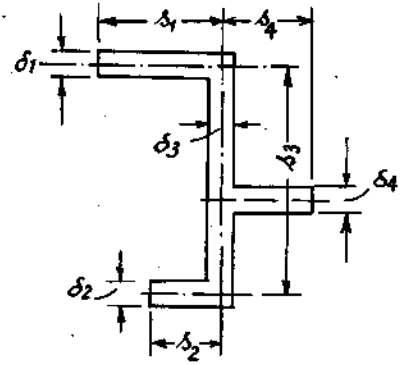
H.17-19

### § 17-4. XOẮN THANH THÀNH MỎNG

Cách phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của thanh khi chịu xoắn được xác định nhờ phương pháp tương tự màng mỏng mà ta đã trình bày trong chương xoắn.



H.17-20



H.17-21

Ta nhận thấy với các mặt cắt hờ góc nghiêng lớn nhất của màng là ở chỗ tiếp giáp giữa màng và thành (h. 17-20a) nên ở đó ứng suất tiếp có trị số lớn nhất. Ta cũng nhận thấy luật phân bố của ứng suất tiếp là đối xứng qua đường trung gian và hệ ứng suất tạo thành một vòng khép kín (h. 17-20b).

Nếu mặt cắt là gồm những đoạn thẳng mà ta có thể tưởng tượng kéo dài thành một hình chữ nhật (h. 17-20b) thì ứng suất tiếp lớn nhất là ở giữa cạnh dài và trị số của nó là :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z}{\delta^2 s} \quad (17-12)$$

Góc xoay được tính với công thức :

$$\varphi = \frac{3M_z l}{G\delta^3 s} \quad (17-13)$$

(ở đây ta xem tỉ số  $\frac{a}{b} = \infty$ )

$\delta$  và  $s$  là chiều dày và chiều dài đường chu tuyến của mặt cắt.

Trong trường hợp không thể khai triển thành hình chữ nhật như trường hợp hình 17-21, chúng ta sẽ tính toán như sau : mômen xoắn  $M_z$  là tổng các mômen xoắn trong từng phần :

$$M_z = \frac{\varphi G}{3I} [\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n]$$

từ đó ta có :

$$\varphi = \frac{3M_z I}{G[\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n]} \quad (17-14)$$

Quan sát sự biến dạng của màng mỏng ta có thể khẳng định rằng ứng suất lớn là ở phần có độ dày  $\delta_{\max}$ . Giả sử đoạn đó là đoạn thứ  $i$ , vậy :

$$\tau_i = \tau_{\max} = \frac{3M_i}{\delta_i^2 s_i} \text{ và } \varphi = \frac{3M_i l}{G \delta_i^3 s_i}$$

Trị số  $\varphi$  đó cũng là  $\varphi$  của toàn thể mặt cắt ngang.

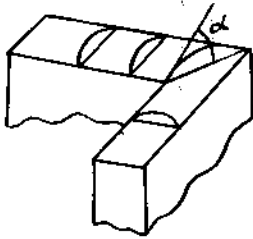
Khử  $M_i$  giữa hai biểu thức ta có :

$$\tau_{\max} = \varphi G = \frac{\delta_i}{l} = \varphi G \frac{\delta_{\max}}{l}$$

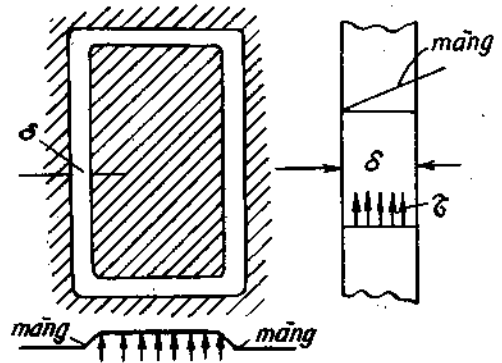
Thay trị số của  $\varphi$  được tính từ (17-14) vào ta được

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z \delta_{\max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n} \quad (17-15)$$

Cách tính trên đây chỉ là gần đúng vì không để ý đến hiện tượng tập trung ứng suất xảy ra ở các góc (h. 17-22). Bán kính lượn tại đó càng nhỏ thì ứng suất tập trung càng lớn. Điều đó dễ dàng nhận thấy khi quan sát sự biến dạng của màng mỏng. Góc nghiêng  $\alpha$  của màng tại điểm góc lớn hơn góc nghiêng tại các điểm khác rất nhiều.



H.17-22



H.17-23

Xét trường hợp mặt cắt ngang là một đường khép kín (h. 17-23). Khác với trường hợp mặt cắt hở, ứng suất trên thành là phân bố đều.

Thực vậy, giả sử có hai tấm tạo nên một khe hở  $\delta$  theo đường chu vi khép kín hình chữ nhật như trên hình 17-23. Lấy một màng mỏng phủ kín khe hở và xem tấm ngoài là cố định. Nếu có một hệ áp suất tác dụng lên màng và tấm trong thì rõ ràng cả tấm chắn bên trong sẽ chuyển dịch và kéo màng căng đều, ở mọi nơi màng có độ nghiêng đều, từ đó suy ra trị số ứng suất tiếp ở mọi nơi là như nhau.

Xét một đoạn thanh  $dz$  vô cùng bé của một thanh thành mỏng có mặt cắt ngang là một chu vi khép kín với bề dày thay đổi chịu xoắn thuần túy (h. 17-24a).

Trên đoạn thanh đó ta lại tách ra một phân tố bởi các mặt cắt theo chiều dày của thanh (h. 17-24b) và xét điều kiện cân bằng của phân tố.

Chiếu các lực lên phương trục z ta có :

$$\tau_1 \delta_1 dz = \tau_2 \delta_2 dz$$

Vậy : 
$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

Nói một cách khác tích  $\tau \delta$  là hằng trên chu vi của mặt cắt.

Như vậy nơi nào có bề dày bé thì nơi đó có trị số ứng suất lớn.

Trị số của mômen xoắn trên mặt cắt ngang là : (h. 17-25)

$$M_z = \int_s \tau \delta O A ds$$

O là một điểm bất kì trên mặt cắt, A là chân đường cao hạ từ O xuống phương của  $\tau$  và ds là vi phân độ dài trên đường chu tuyến. Vì tích  $\tau \delta$  là hằng nên ta có thể đưa ra khỏi tích phân. Do đó :

$$M_z = \tau \delta \int_s O A ds$$

Biểu thức tích phân chẳng qua là hai lần diện tích giới hạn bởi đường chu tuyến khép kín của mặt cắt (h. 17-25). Kí hiệu diện tích đó là  $F^*$ , ta có :

$$M_z = \tau \delta 2F^* \quad (17-16)$$

Từ đó ta có trị số của ứng suất tiếp cực đại là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F^* \delta_{\min}} \quad (17-17)$$

Góc xoắn  $\varphi$  được tính theo phương pháp năng lượng như sau : Ta biết rằng trong trạng thái trượt thuần túy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong một đơn vị thể tích là  $\tau^2/2G$  vậy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố sẽ là :

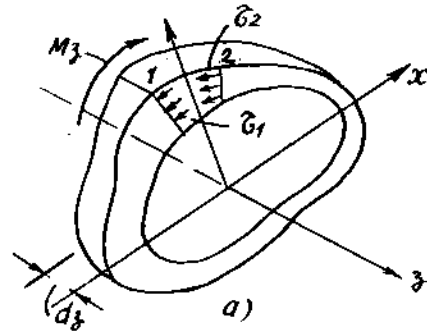
$$du = \frac{\tau^2}{2G} \delta dz ds$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong toàn thanh sẽ là :

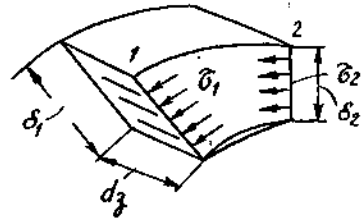
$$u = \frac{1}{2G} \int_v \tau^2 \delta dz ds = \frac{l \tau^2 \delta^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Biểu thức tích phân  $\int_s \frac{ds}{\delta}$  là tùy luật biến đổi của  $\delta$  theo chu vi của mặt cắt ngang. Trị số đó là một đặc trưng hình học. Thay trị số của tích  $\tau \delta$  tính từ (17-16) vào, ta được

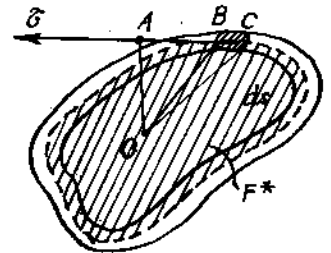
$$u = \frac{M_z^2 l}{8GF^{*2}} \int_s \frac{ds}{\delta}$$



H.17-24



H.17-25



Mặt khác, thế năng đó bằng công biến dạng đàn hồi của ngoại lực :

$$u = \frac{1}{2} \cdot \mu \varphi$$

Đây là trường hợp xoắn thuần túy nên  $\mu = M_z$ . Từ đó ta có :

$$\varphi = \frac{M_z l}{4GF^{*2}} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (17-18)$$

Nếu  $\delta$  là hằng thì :

$$\varphi = \frac{Mls}{4GF^{*2}\delta} \quad (17-19)$$

s là chiều dài đường chu tuyến của mặt cắt.

**Ví dụ 7.** Xác định ứng suất và góc xoắn trong ống thành mỏng cuốn bằng thép lá trong hai trường hợp :

- a) Khi mép ống được tự do (h. 17-26a)
- b) Khi mép ống bị dính chặt (h. 17-26b)

**Bài giải :**

Theo phương án thứ nhất ta phải xem thanh có mặt cắt hở. Bỏ qua chỗ nối, theo công thức (17-12) và (17-13) ta có :

$$\tau_a = \frac{3\mu}{\pi D \delta^2} \quad \varphi_a = \frac{3\mu l}{G\pi D \delta^3}$$

Theo phương án thứ hai thanh được xem có mặt cắt kín. Theo công thức (17-17) và (17-19) ta có :

$$\tau_b = \frac{\mu}{2 \frac{\pi D^2}{4} \delta}, \quad \varphi_b = \frac{\mu l \pi D}{4G \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \delta}$$

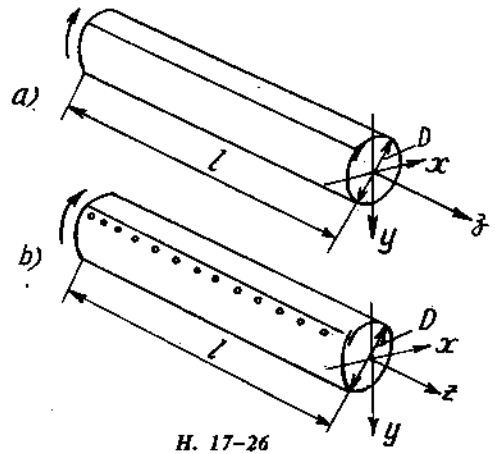
Để có thể so sánh hai trường hợp ta lập các tỉ số.

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\delta}; \quad \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2}$$

Như vậy độ lớn của các ứng suất với tỉ lệ cùng độ lớn với tỉ số  $\frac{D}{\delta}$  và các góc xoắn, có tỉ lệ cùng độ lớn với tỉ số  $\frac{D^2}{\delta^2}$ . Vì D lớn hơn  $\delta$  rất nhiều do đó với thanh có mặt cắt khép kín có độ cứng và độ chịu lực lớn hơn mặt cắt hở.

### §17-5. ĐỘ VÈNH CỦA MẶT CẮT NGANG KHI CHỊU XOẮN

Khi thanh thành mỏng hở chịu xoắn thuần túy, mặt cắt ngang của thanh bị vênh. Để tính toán độ vênh ta dựa vào giả thuyết sau đây :



H. 17-26

Ta giả thiết biến dạng của thanh là bé và như vậy trong quá trình thanh biến dạng, chu tuyến của mặt cắt ngang vẫn giữ hình dạng ban đầu.

Xét thanh thành mỏng hồ chịu xoắn như hình vẽ 17-27a.

Giả sử khi chịu xoắn mặt cắt ngang của thanh bị xoay quanh một điểm O nào đó mà được gọi là tâm xoắn.

Khảo sát phân tố ABCD như hình vẽ 17-27. Sau biến dạng điểm A đến vị trí A', B đến B' và C đến C'. DA, DA' tạo thành một góc  $\alpha$  và DC và DC' tạo thành một góc  $\beta$ . Góc trượt  $\gamma$  sẽ là tổng của  $\alpha + \beta$ . Ta tính các góc đó :

Như hình vẽ ta có :

$$\alpha = \frac{AA'}{dz}$$

Chuyển vị  $AA' = r d\varphi$  ; r là khoảng cách từ tâm xoắn đến đường tiếp tuyến với chu tuyến qua A,  $d\varphi$  là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt qua CD và AB.

Vậy :

$$\alpha = \frac{r d\varphi}{dz} = r\theta$$

Trong đó  $\theta$  là góc xoắn tỉ đối của thanh.

Gọi w là chuyển vị của các điểm trên mặt cắt theo phương của trục z.

Ta có :

$$\beta = \frac{dw}{ds}$$

Góc trượt  $\gamma$  có trị số là :  $\gamma = r\theta + \frac{dw}{ds} = \frac{\tau}{G}$

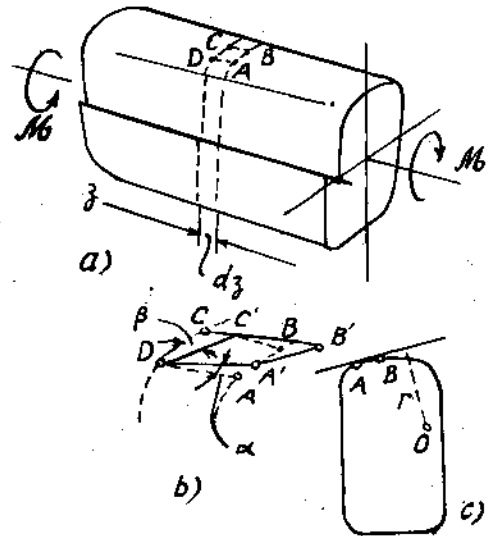
Trên đường trung gian, góc xoay của màng mỏng tại đó là bằng không nên  $\tau = 0$  vậy ta có phương trình vi phân :

$$dw = -\theta r ds = -\theta d\omega$$

trong đó  $d\omega$  là vi phân tọa độ quạt của chu tuyến mặt cắt ngang. Lấy tích phân ta có :

$$w = -\theta \int d\omega = -\theta \omega \quad (17-20)$$

Từ đó ta có kết luận : độ vênh của mặt cắt ngang dọc theo đường chu tuyến biến thiên theo tọa độ quạt của chu tuyến. Công thức (17-20) là chưa xác định, vì chưa xác định cực P và góc O của tọa độ quạt  $\omega$ , song công thức đó cho ta thấy độ vênh của mặt cắt ngang phụ thuộc vào góc xoắn tỉ đối  $\theta$ . Ngược lại nếu độ vênh bị hạn chế thì  $\theta$  sẽ thay đổi.



H.17-27



Sự thay đổi của  $\theta$  theo  $z$  tạo nên một hệ ứng suất pháp và ứng suất tiếp phụ. Thực vậy giả sử xét một đoạn thanh  $dz$  (h. 17-28a). Biến dạng theo phương  $z$  là :

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = - \frac{d\theta}{dz} \omega$$

Ứng suất pháp  $\sigma_z$  tương ứng với biến dạng đó là :

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \quad (17-21a)$$

Nếu  $\sigma_z$  là một hàm số biến thiên theo  $z$  thì nó gây nên một hệ ứng suất tiếp  $\tau_2$  phân bố đều trên mặt cắt. Xét một phần tử tách ra từ đoạn thanh  $dz$  (h. 17-28b). Vì trị số ứng suất pháp trên hai mặt cắt là khác nhau nên phải xuất hiện  $\tau_2$ . Chiều tất cả các lực xuống phương  $z$  ta tìm thấy.

$$\tau_2 \delta = - \int_{F^c} \frac{d\sigma_z}{dz} dF$$

trong đó  $F^c$  là phần diện tích trên mặt cắt ngang của phần tử đang xét. Thay trị số của  $\sigma_z$  từ (17-21) vào đây ta được :

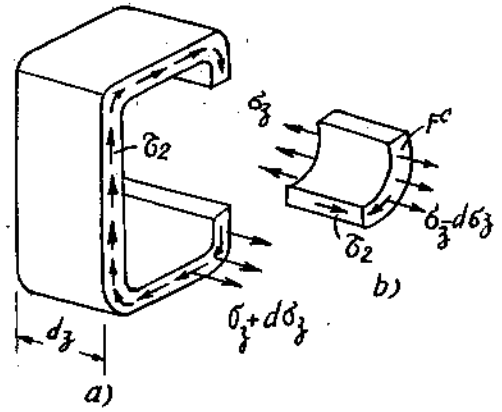
$$\tau_2 \delta = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int \omega dF. \quad (17-22)$$

Sự xuất hiện  $\tau_2$  phù định điều cho rằng ứng suất tiếp trên đường trung gian là bằng không và khi  $\theta$  thay đổi theo  $z$  thì độ vênh không tuân theo định luật phân bố của tọa độ quạt nửa. Song với một mức độ gần đúng có thể tiếp nhận các công thức  $\tau_2$  và  $\sigma_z$  như trên.

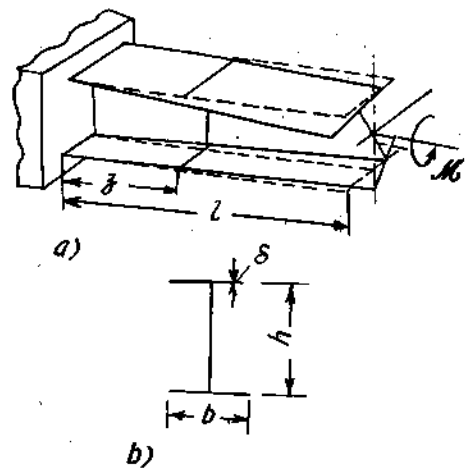
### §17-8. XOẢN KIỂM CHẾ THANH THÀNH MỎNG CÓ MẶT CẮT HỖ

Ta hiểu xoắn kiểm chế là khi có những liên kết hạn chế độ vênh của mặt cắt ngang. Ví dụ thanh chịu ngàm một đầu, một đầu tự do chịu xoắn thuần túy (h. 17-29).

Mặt cắt tại đầu ngàm có thành phần chuyển vị  $w$  bằng không. Ở đây không có độ vênh của mặt cắt ngang. Càng xa đầu ngàm sự xoắn càng tự do, độ vênh của mặt cắt ngang càng lớn vì trên mặt cắt ngang của thanh không có thành phần lực dọc và mômen uốn do ngoại lực



H.17-28



H. 17-29

gây nên, do đó thành phần ứng suất pháp  $\sigma_z$  do xoắn gây nên phải tạo nên một hệ nội lực tự cân bằng. Ta có :

$$\int_F \sigma_z y dF = 0 ; \int_F \sigma_z x dF = 0 ; \int_F \sigma_s dF = 0$$

Thay trị số  $\sigma_z$  được tính từ (17-21) vào ta được :

$$\int_F \omega_y dF = 0 ; \int_F \omega_x dF = 0 ; \int_F \omega dF = 0$$

Tọa độ quạt  $\omega$  được tính đối với tâm xoắn. Hai biểu thức đầu chứng tỏ tâm xoắn trùng với cực chính của mặt cắt. Nói một cách khác tâm xoắn cũng là tâm uốn. Biểu thức thứ ba xác định điểm gốc  $\omega$  là góc chính.

Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang tạo nên mômen xoắn gồm hai thành phần :

$$M_z = M_1 + M_2$$

$M_1$  là mômen xoắn do ứng suất tiếp vòng gây nên (h. 17-20). Trị số  $M_1$  được xác định bởi biểu thức :

$$M_1 = GJ_d \theta. \quad (17-23)$$

trong đó  $J_d$  là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta gọi là độ cứng khi xoắn (xem chương xoắn thuần túy). Ví dụ với trường hợp mặt cắt ngang có thể khai triển thành hình chữ nhật thì từ công thức (17-13) ta có :

$$J_d = \frac{\delta_s^3}{3}$$

Hay với mặt cắt không thể khai triển được thành hình chữ nhật thì :

$$J_d = \frac{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n}{3}$$

$M_2$  là mômen xoắn do ứng suất tiếp lưỡng  $\tau_2$  gây nên (h. 17-28).

$$M_2 = \int_S \tau_2 \delta r ds = \int_F \tau_2 \delta d\omega$$

Thay trị số  $\tau_2$  từ (17-22) vào ta có :

$$M_2 = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \int_F (\int_F \omega dF) d\omega$$

Sử dụng tích phân đoạn có thể viết lại như sau :

$$M_2 = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \left[ \omega \int_{s_1}^{s_2} \omega dF \Big|_{s_1}^{s_2} - \int \omega^2 dF \right]$$

Song  $\int \omega dF \Big|_{s_1}^{s_2} = 0$  (h. 17-15) do đó :

$$M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2 \theta}{dz^2} \quad (17-24)$$

Vậy mômen xoắn trên mặt cắt ngang là :

$$M_z = GJ_d \theta - E \frac{d^2 \theta}{dz^2} J_w.$$

Nếu kí hiệu  $\frac{GJ_d}{EJ_w} = \alpha^2$  thì phương trình vi phân trên có thể viết lại dưới dạng :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \alpha^2 \theta = -\alpha^2 \frac{M_z}{GJ_d} \quad (17-25)$$

trong đó  $M_z$  là một hàm đối với  $z$  được xem là đã biết.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$\theta = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + \theta^* \quad (17-26)$$

$\theta^*$  là một nghiệm riêng của (17-25).

Các hằng số  $C_1, C_2$  được xác định từ điều kiện liên kết của dầm.

**Ví dụ 8.** Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và đầu tự do chịu xoắn như hình 17-29. Các số liệu cho như sau :  $h = 200\text{mm}$  ;  $b = 100\text{mm}$  ;  $\delta = 10\text{mm}$  ;  $l = 1\text{m}$  ;  $\mu = 0,3$  ;  $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ .

*Bài giải :*

Ở đây ta có  $M_z = \mu = C^0$  do đó phương trình vi phân của góc xoắn có dạng :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \alpha^2 \theta = -\frac{\alpha^2 \mu}{GJ_d}$$

Nghiệm riêng được chọn dưới dạng

$$\theta^* = \frac{\mu}{GJ_d}$$

Vậy nghiệm tổng quát là :

$$\theta = C_1 \text{sh}\alpha z + C_2 \text{ch}\alpha z + \frac{\mu}{GJ_d}$$

$C_1, C_2$  được xác định từ các điều kiện biên sau đây :

khi  $z = 0, w = 0$ , khi  $z = l$  ứng suất pháp bằng không.

Từ các biểu thức (17-20) và (17-21) các điều kiện đó có thể viết lại như sau :

khi  $z = 0$  thì  $\theta = 0$  và khi  $z = l$  thì  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ . Do đó ta có hệ phương trình :

$$C_2 + \frac{\mu}{GJ_d} = 0$$

$$C_1 \alpha \text{ch}\alpha l + C_2 \alpha \text{sh}\alpha l = 0$$

Hệ thống phương trình đó cho ta các trị số của  $C_1$  và  $C_2$  như sau :

$$C_2 = -\frac{\mu}{GJ_d}, C_1 = \frac{\mu}{GJ_d} \text{thal}$$

Vậy phương trình của góc xoắn tỷ đối là :

$$\theta = \frac{\mu}{GJ_d} [1 + \text{thalshaz} - \text{chaz}]$$

Góc xoắn lớn nhất là tại đầu nút tự do :

$$\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{\mu l}{GJ_d} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha l} \text{thal} \right]$$

Ứng suất pháp lớn nhất là tại ngàm

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{E\mu}{GJ_d} \omega \alpha \text{thal}$$

Trị số mômen xoắn  $M_1$  và  $M_2$  tại một mặt cắt bất kì là :

$$M_1 = GJ_d \theta = \mu(1 + \text{thalshaz} - \text{chaz})$$

$$M_2 = -EJ_\omega \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} = -\mu(\text{thalshaz} - \text{chaz})$$

Để tính  $J_\omega$  ta vẽ biểu đồ quạt chính như trên hình 17-30b. Từ phép nhân biểu đồ theo Vêrêsaghin ta có :

$$J_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 \delta$$

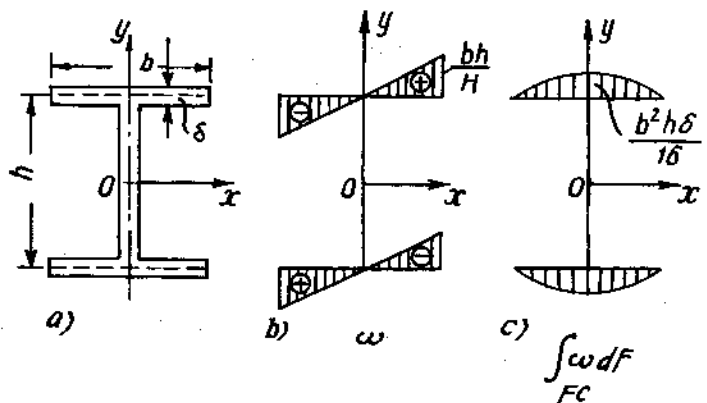
Độ cứng khi xoắn của mặt cắt là :

$$J_d = \frac{1}{3} \delta^3 (2b + h)$$

Do đó hệ số  $\alpha$  được xác định như sau :

$$\alpha^2 = \frac{4}{1 + \mu} \cdot \frac{\delta^2 (2b + h)}{b^3 h^2} = 3,08 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$\alpha = 1,75 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}}, \alpha l = 1,75.$$



H. 17-30

Tra bảng các hàm hypecbôlit ta tìm thấy :  $\frac{1}{\alpha l} \operatorname{th} \alpha l = \frac{0,9411}{1,75} = 0,537$

Từ đó ta có góc xoắn ở đầu tự do là :  $\varphi = \frac{\mu l}{GJ_d} \cdot 0,46$ .

So sánh với trường hợp thanh có hai đầu tự do, khi đó góc xoắn của thanh là  $\varphi = \frac{\mu l}{GJ_d}$ , ta thấy khi có đầu ngàm góc xoắn giảm đi một nửa.

Trị số của ứng suất pháp lớn nhất là :

$$\sigma_{\max} = \frac{E\mu bh}{GJ_d^4} \alpha \operatorname{th} \alpha l = 161.10^{-3} \mu \text{ N/cm}^2$$

Trị số của  $\mu$  phải tính theo Ncm.

Trị số ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\tau_{1\max} = \frac{3M_1}{\delta^2(2b+h)} ;$$

$$\tau_{2\max} = -\frac{M_2}{J\omega\delta} \int_{F^c} \omega dF$$

tại ngàm  $M_1 = 0, M_2 = \mu$

do đó  $\tau_{1\max} = 0$ .

$$\tau_{2\max} = -\frac{\mu}{J\omega\delta} \left( \int_{F^c} \omega dF \right)_{\max} = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu}{bh\delta} = \pm 7,5.10^{-3} \mu \text{ N/cm}^2$$

Điểm có  $\tau_{2\max}$  là giao điểm giữa lòng và đế vì tại đó  $\int_{F^c} \omega dF$  là lớn nhất (h. 17-30c).

Tại đầu tự do khi  $z = l$ ;  $M_1$  và  $M_2$  có trị số là :

$$M_1 = 0,6614\mu ; M_2 = 0,3386\mu$$

Vậy :  $\tau_{1\max} = 49,6.10^{-3} \mu \text{ N/cm}^2$  ;  $\tau_{2\max} = 2,5.10^{-3} \mu \text{ N/cm}^2$

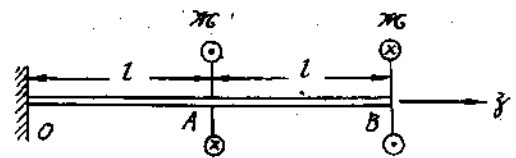
Nếu không phải là xoắn kiểm chế thì :

$$\tau_{1\max} = \frac{3\mu}{\delta^2(2b+h)} = 75.10^{-3} \mu \text{ N/cm}^2 ; \tau_{2\max} = 0$$

**Ví dụ 9.** Xác định góc xoắn tại A của thanh thành mỏng chịu tác dụng của hai mômen xoắn ngược chiều như hình (17-31).

*Bài giải :*

Nếu OB không phải là thanh thành mỏng thì góc xoắn tại A là bằng không. Ở đây vì là thanh thành mỏng nên tại A có góc xoắn.



H. 17-31

Viết phương trình góc xoắn tỉ đối cho cả hai đoạn OA và AB. Với OA vì  $M_z = 0$  nên phương trình có dạng :

$$\theta_1 = C_1 \text{sh}az + C_2 \text{ch}az$$

với đoạn AB

$$\theta_2 = C_3 \text{ch}az + C_4 \text{ch}az + \frac{\mu}{GJ_d}$$

Các điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân như sau :

Tại  $z = 0, \theta_1 = 0$

Tại  $z = l, \theta_1 = \theta_2$  và  $\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{d\theta_2}{dz}$  vì tại đó độ vênh và ứng suất phải như nhau :

tại  $z = 2l, \frac{d\theta_2}{dz} = 0$  vì  $\sigma_z = 0$ .

Với các điều kiện biên đó ta thiết lập được hệ phương trình :

$$\left. \begin{aligned} C_1 \text{sh}al - C_3 \text{sh}al - C_4 \text{ch}al &= \frac{\mu}{GJ_d} \\ C_1 \text{ch}al - C_3 \text{ch}al - C_4 \text{sh}al &= 0 \\ C_3 \text{ch}2al + C_4 \text{sh}2al &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Từ đó ta tìm thấy :  $C_1 = \frac{\mu \text{sh}al}{GJ_d \text{ch}2al}, \theta_1 = \frac{\mu}{GJ_d} \cdot \frac{\text{sh}al}{\text{ch}2al} \text{sh}az.$

Vậy góc xoắn tại A là :  $\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{\mu}{\alpha GJ_d} \cdot \frac{\text{sh}al}{\text{ch}2al} (\text{ch}al - 1)$

Trị số  $\alpha$  được xác định tính từ biểu thức  $\alpha^2 = \frac{GJ_d}{EJ_w}$

Như vậy góc xoắn tại A là do sự vênh của mặt cắt ngang giữa hai đoạn gây nên.

## §17-7. TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC TỔNG QUÁT CỦA THANH THÀNH MỎNG HỖ

### 1. Bimômen

Như chúng ta đã nói, khi  $\theta$  là một hàm đối với  $z$  thì do sự vênh của mặt cắt ngang mà trên mặt cắt xuất hiện một hệ ứng suất tiếp  $\tau_z$  và hệ ứng suất pháp phụ :

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \quad (17-21b)$$

$\tau_z$  gây nên mômen xoắn  $M_z$  mà ta đã tính,  $\sigma_z$  gây nên một hệ nội lực tự cân bằng. Để thỏa mãn điều kiện cân bằng đó  $\omega$  phải được tính từ cực chính và góc chính.

Bây giờ ta hãy chú ý đến biểu thức sau đây :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = - \int_F E \omega^2 \frac{d\theta}{dz} dF$$

hay :

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega^2 dF$$

Vậy :

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} J_\omega \quad (17-27)$$

Ta gọi trị số đó là Bimômen. Nếu thay (17-27) vào (17-21) ta sẽ có :

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (17-28)$$

Biểu thức này có dạng tương tự như ứng suất pháp do mômen uốn gây nên. Thứ nguyên của bimômen là Ncm<sup>2</sup>. Đó là một hệ nội lực tự cân bằng.

Ví dụ với thanh chữ I chịu tác dụng của bốn lực P ở các đỉnh. Bốn lực này tạo thành hai ngẫu lực tự cân bằng (h. 17-32). Theo định nghĩa ta có :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = \sum_{i=1}^4 P_i \omega_i$$

$\omega_i$  được tính với cực chính và góc chính. Ở đây các điểm đó trùng với trọng tâm của mặt cắt. Do đó ta có :

$$B = 4P \frac{bh}{4} = Pbh$$

Trên mặt cắt ngang có trị số của bimômen mà không có lực dọc cũng như mômen uốn.

## 2. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng

Trong trường hợp thanh chịu lực tổng quát, hệ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang là do lực dọc, các mômen uốn và bimômen gây nên. Vì vậy :

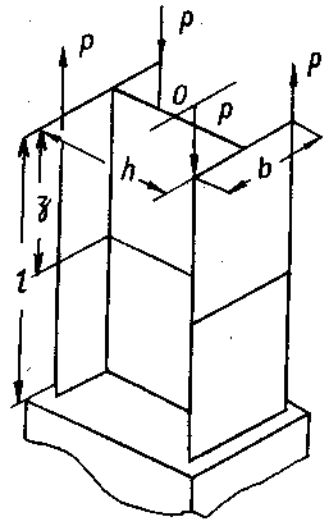
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

Ứng suất tiếp trên mặt cắt sẽ do lực cắt  $Q_x, Q_y$ , mômen xoắn  $M_z$  và do xoắn kim chế gây nên. Ta có :

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{J_y \delta} ; \quad \tau = \frac{3M_z}{\delta^2 s} \quad \text{hoặc}$$

$$\tau_1 = \frac{3M_z \delta_{\max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n} ; \quad \tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2 \theta}{dz^2} \int_F \omega dF$$

Ví dụ 10. Cho thanh chịu lực như hình vẽ 17-32 tính góc xoắn tỉ đối của thanh :



H. 17-32

**Bài giải :**

Vì  $M_z$  bằng không nên nghiệm của phương trình (17-25) có dạng :

$$\theta = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z$$

Hệ trục tọa độ xác định như hình vẽ.

Các điều kiện biên như sau :

$$\text{tại } z = 0 \quad B = Pbh$$

$$\text{tại } z = l \quad \omega = 0$$

Từ (17-27) và (17-20) ta có :

$$\left( \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=0} = C_1 \alpha = - \frac{Pbh}{EJ_\omega}$$

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_2 \operatorname{ch} \alpha l$$

Sau khi xác định được  $C_1$  và  $C_2$  ta tìm thấy :

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} [\operatorname{th} \alpha l \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z]$$

Giả sử  $l$  khá dài, khi đó  $\operatorname{th} \alpha l \approx 1$  và

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} e^{-\alpha z}$$

Ta thấy góc xoắn tỉ đối nhỏ dần đi theo  $z$ .

**Ví dụ 11.** Cho thanh chịu lực trên hình 17-33a, khảo sát góc xoắn  $\varphi$ , góc xoắn tỷ đối  $\theta$  và thành phần bimômen của các mặt cắt. Tính ứng suất trên mặt cắt ngang.

**Bài giải :**

Lực  $P$  không những gây nên kéo, uốn mà còn gây nên xoắn đối với thanh. Vì  $M_x$  ở mọi mặt cắt ngang là bằng không nên phương trình góc xoắn tỷ đối là :

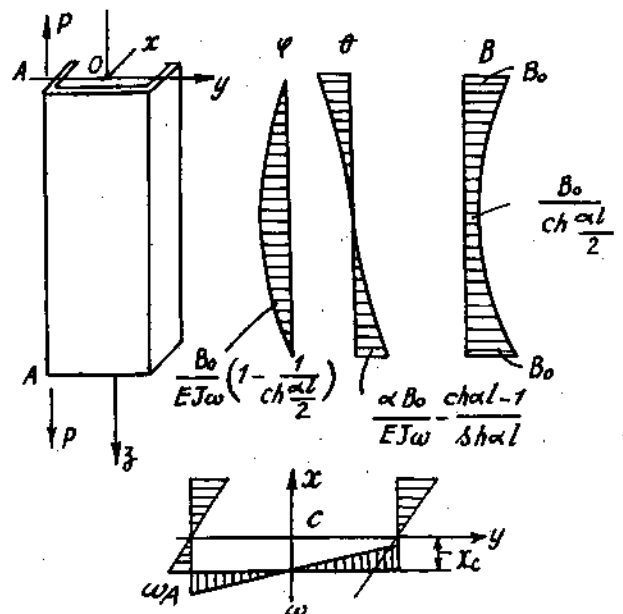
$$\theta = C_1 \operatorname{ch} \alpha z + C_2 \operatorname{sh} \alpha z.$$

Hệ trục tọa độ xác định như hình vẽ.

Các điều kiện biên là khi  $z = 0$ ,  $l = 0$  trị số bimômen phải bằng :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = P\omega_A$$

$\omega_A$  là tọa độ quạt của điểm đặt lực đối với cực chính và góc chính.



H. 17-33



Từ (17-27) ta có :  $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=l} = -\frac{P\omega_A}{EJ_\omega} = \frac{B_0}{EJ_\omega}$

Với các hệ thức đó ta xác định được  $C_1$  và  $C_2$  như sau :

$$C_1 = -\frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{\text{ch}\alpha l - 1}{\text{sh}\alpha l} ; C_2 = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega}$$

Thay vào trên ta có phương trình của góc xoắn tỉ đối là

$$\theta = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\text{ch}\alpha z - \text{ch}\alpha(l-z)]$$

Góc xoắn tương đối giữa mặt cắt ở tọa độ  $z$  và mặt cắt đi qua gốc tọa độ là :

$$\varphi = \int_0^z \theta dz = \frac{B_0}{\alpha^2 EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\text{sh}\alpha z - \text{sh}\alpha l + \text{sh}\alpha(l-z)]$$

Biểu đồ biểu diễn sự biến thiên của  $\varphi$  và  $B = -EJ_\omega \frac{d\theta}{dz}$  được biểu diễn như trên hình 17-33b, c, d.

Ứng suất pháp tại một điểm bất kì nào trên mặt cắt ngang sẽ là :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

trong đó trị số tuyệt đối của các thành phần nội lực như sau :

$$N_z = P ; M_x = P \frac{h}{2} ; M_y = Px_c$$

Bimômen được xác định với phương trình :

$$B = -\frac{B_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\alpha \text{ch}\alpha z + \text{sh}\alpha(l-z)]$$

## MỤC LỤC

Trang

### Chương XII

#### TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

§ 12-1. Nguyên lí chuyển vị khả dĩ	3
§ 12-2. Công thức Mo để xác định chuyển vị	4
§ 12-3. Một số định lí quan trọng	7
§ 12-4. Phương pháp nhân biểu đồ của Verésaghin	9

### Chương XIII

#### GIẢI BÀI TOÁN SIÊU TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

§ 13-1. Một số khái niệm cơ bản	14
§ 13-2. Tính hệ thanh siêu tĩnh bằng phương pháp lực	15
§ 13-3. Sử dụng tính chất đối xứng của hệ	21
§ 13-4. Dám liên tục	24
§ 13-5. Các bài toán siêu tĩnh trong trường hợp chịu lực đơn giản của thanh	27

### Chương XIV

#### TÁI TRỌNG ĐỘNG

§ 14-1. Khái niệm	31
§ 14-2. Bậc tự do	31
§ 14-3. Phương trình vi phân dao động	32
§ 14-4. Dao động tự do	33
§ 14-5. Dao động cưỡng bức với $P(t) = P_0 \sin \Omega t$	34
§ 14-6. Phương pháp thu gọn khối lượng	38
§ 14-7. Va chạm thẳng đứng của hệ có một bậc tự do	40
§ 14-8. Va chạm ngang của hệ có một bậc tự do	44
§ 14-9. Tính ứng suất trong các kết cấu có chuyển động với gia tốc không đổi	45
§ 14-10. Tốc độ giới hạn của trục quay	46

*Chương XV*  
**TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT BIẾN ĐỔI CÓ CHU KÌ**

§ 15-1. Khái niệm về hiện tượng mỏi	47
§ 15-2. Phân loại và các đặc trưng của chu trình ứng suất	48
§ 15-3. Giới hạn mỏi và biểu đồ giới hạn mỏi	50
§ 15-4. Các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi	53
§ 15-5. Hệ số an toàn về mỏi	57
§ 15-6. Những biện pháp nâng cao giới hạn mỏi	64

*Chương XVI*  
**ỔN ĐỊNH**

§ 16-1. Khái niệm	66
§ 16-2. Bài toán OIe	66
§ 16-3. Ứng suất tới hạn và giới hạn áp dụng công thức OIe	70
§ 16-4. Phương pháp thực hành để tính thanh chịu nén	71
§ 16-5. Hình dạng mặt cắt hợp lí khi chịu nén	76
§ 16-6. Ổn định của dầm chịu uốn ngang phẳng	76
§ 16-7. Ổn định của vành chịu áp suất bên ngoài	78

*Chương XVII*  
**THANH THÀNH MỎNG**

§ 17-1. Khái niệm	80
§ 17-2. Đặc trưng quạt của mặt cắt ngang của thanh thành mỏng hở	81
§ 17-3. Ứng suất tiếp trong thành mỏng khi chịu uốn ngang	88
§ 17-4. Xoắn thanh thành mỏng	92
§ 17-5. Độ vênh của mặt cắt ngang khi chịu xoắn	95
§ 17-6. Xoắn kiểm chế thanh thành mỏng có mặt cắt hở	97
§ 17-7. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng hở	102

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

*Biên tập tái bản :*

HOÀNG TRỌNG NGHĨA

*Trình bày bìa :*

LƯU CHÍ ĐỒNG

*Sửa bản in :*

NGUYỄN MINH THƯ

*Chế bản :*

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

---

## SỨC BỀN VẬT LIỆU - TẬP 2

Mã số: 7B006T4 - TTS

In 1.500 bản (50 TK), khổ 19 x 27cm, tại Công ty In Công Đoàn Việt Nam 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. Số in: 1867. Số xuất bản: 138/2-04. In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2004.

## TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

- |                               |                                   |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Sức bền vật liệu - Tập một | Lê Quang Minh<br>Nguyễn Văn Vương |
| 2. Sức bền vật liệu - Tập hai | Lê Quang Minh<br>Nguyễn Văn Vương |
| 3. Sức bền vật liệu - Tập ba  | Lê Quang Minh<br>Nguyễn Văn Vương |
| 4. Bài tập sức bền vật liệu   | Bùi Trọng Lựu<br>Nguyễn Văn Vương |
| 5. Vật liệu xây dựng          | Phùng Văn Lự và nhóm tác giả      |
| 6. Bài tập vật liệu xây dựng  | Phùng Văn Lự và nhóm tác giả      |
| 7. Lý thuyết đàn hồi ứng dụng | Nguyễn Văn Vương                  |
| 8. Vật liệu học (sách dịch)   | B.N.ARZAMAXOV                     |
| 9. Vật liệu cơ khí (CDSP)     | Phan Văn Khôi                     |

*Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo Dục:*

*Tại Hà Nội: 81 Trần Hưng Đạo, 57 Giảng Võ, 232 Tây Sơn, 23 Tràng Tiền, 25 Hàn Thuyên*

*Tại Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh*

*Tại Thành phố Hồ Chí Minh: 104 Mai Thị Lựu - Quận 1 - TP Hồ Chí Minh*



8 934980 423752



*Giá: 10.200đ*