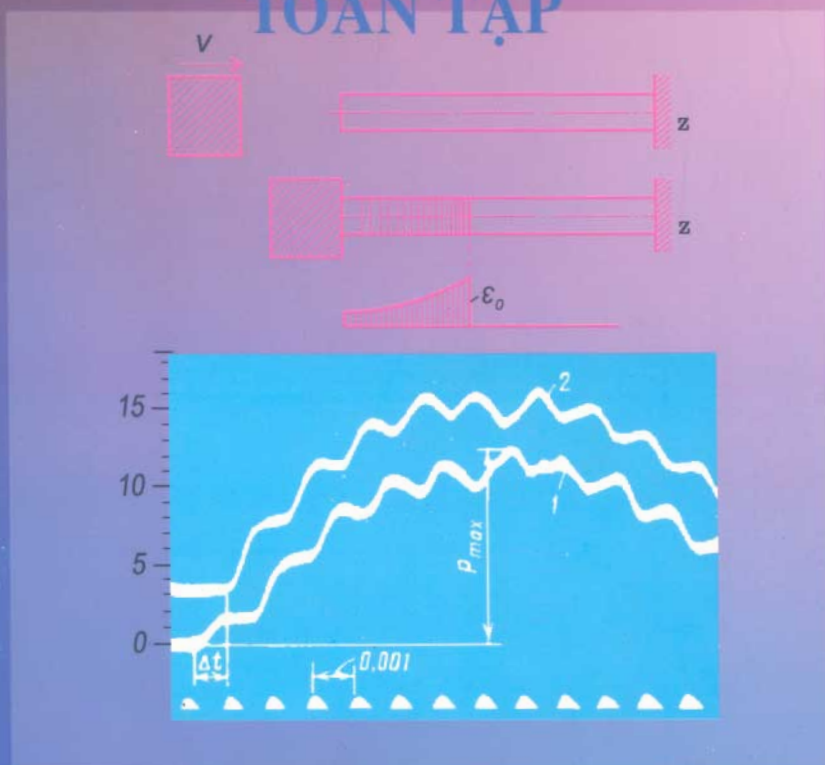


TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

## TOÀN TẬP



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

PGS. TS. GIẢNG VIÊN CAO CẤP

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

TOÀN TẬP



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT  
HÀ NỘI

# **SỨC BỀN VẬT LIỆU**

(TOÀN TẬP)

Tác giả:

**PGS.TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG – GIẢNG VIÊN CAO CẤP**

*Chịu trách nhiệm xuất bản:*

*Biên tập và sửa bài:*

*Trình bày bìa:*

**PGS.TS. TÔ ĐĂNG HẢI**

**ThS. NGUYỄN HUY TIẾN**

**NGỌC DIỆP**

**HƯƠNG LAN**

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT**

**70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội**

---

In 500 cuốn, khổ 16 × 24 cm, in tại Xí nghiệp In Thương Mại (Bộ Công Thương)

Quyết định xuất bản số: 82 – 2008/CXB/55 – 02/KHKT – 21/2/2008

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2008.

## LỜI MỞ ĐẦU

*Sức bền vật liệu là môn khoa học bán thực nghiệm thuộc khối kỹ thuật cơ sở trong các trường đại học kỹ thuật ở nước ta và trên thế giới. Mục đích của nó là tiếp tục cung cấp cho các kỹ sư tương lai những kiến thức tính toán công trình về độ bền, độ cứng và độ ổn định trong và ngoài giới hạn đàn hồi trên nền các môn khoa học cơ bản: Toán, Vật lý, Cơ học lý thuyết, Cơ học chất lỏng và Khoa học thực nghiệm, v.v... để giải quyết những vấn đề của thực tiễn liên quan tới các khâu từ thẩm định đến thiết kế, chế tạo và phục vụ cho việc nghiên cứu các môn học chuyên ngành kế tiếp trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học kỹ thuật. Hơn nữa, Sức bền vật liệu có một vị trí đặc biệt quan trọng trong cơ học, bởi nó đóng vai trò của một chiếc cầu nối về các phương pháp tư duy khoa học giữa các môn khoa học cơ bản với các môn cơ học chuyên ngành. Nó còn là viên gạch đầu tiên đặt nền móng cho lĩnh vực cơ học các vật rắn biến dạng – Một lĩnh vực chuyên nghiên cứu các quy luật tổng quát về sự hình thành và phát triển các tác dụng cơ học sinh ra ở trong lòng các vật rắn thực do các loại tác dụng ngoài khác nhau gây ra.*

*Chính vì thế, cũng như nhiều khoa học khác, đặc trưng cuối cùng của quá trình nghiên cứu đối với khoa học này là việc áp dụng các kết quả nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm vào thực tiễn và chỉ có thông qua việc áp dụng vào thực tiễn, khoa học này mới có thể đứng vững và phát triển.*

*Cuốn sách được xây dựng hết sức nghiêm túc, công phu, chặt chẽ với sự kế thừa chọn lọc và cập nhật các thông tin mới nhất. Giáo trình được biên soạn trong khuôn khổ phục vụ chương trình giảng dạy và nghiên cứu ở các trường đại học kỹ thuật, mà tác giả là người trực tiếp trải nghiệm hơn 40 năm giảng dạy cho các hệ đại học và sau đại học ở trong nước và nước ngoài thuộc các chuyên ngành khác nhau của cơ học. Giáo trình này là tài liệu rất hữu ích giúp cho không những việc học tập, nghiên cứu của sinh viên, mà còn là người bạn đường của các kỹ sư, các cán bộ khoa học trẻ thuộc các ngành: xây dựng công nghiệp và dân dụng, xây dựng cảng, xây dựng cầu đường sắt và đường bộ, xây dựng thủy lợi, cơ khí ô tô, chế tạo máy và luyện kim, kỹ thuật đóng tàu, kỹ thuật*

hàng không v.v..., đang trực tiếp thiết kế, thi công và thẩm định trong các lĩnh vực nói trên.

Ngày nay sự bùng nổ thông tin trong kỹ thuật và đời sống đã làm nảy sinh những mâu thuẫn gay gắt giữa nội dung cần truyền đạt và quỹ thời gian cho phép giảng dạy môn học này. Vì vậy, một mặt với mục đích hoàn thiện hơn nữa nội dung đào tạo chuyên sâu ở bậc đại học và sau đại học, đồng thời khắc phục những mâu thuẫn nói trên, mặt khác, để giảm bớt khó khăn cho người học, giúp các kỹ sư thiết kế, chế tạo, các nhà khoa học trẻ đang hoạt động trong các lĩnh vực khác nhau của cơ học, chúng tôi thấy cần phải giới thiệu cuốn **Sức bền vật liệu** này và kèm theo nó là bộ "**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN MÔN SỨC BỀN VẬT LIỆU**" cùng các bạn. Vẫn biết, giới thiệu là cần thiết nhưng cái chính là "hữu xạ tự nhiên hương".

Giáo trình được biên soạn trong khuôn khổ môn **Sức bền vật liệu** theo nghĩa hẹp của từ này, nên không tham vọng trình bày được đầy đủ mọi khía cạnh vốn rất phong phú và đa dạng của **Sức bền vật liệu** theo nghĩa rộng. Mặc dù rất cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong và cảm ơn sự đóng góp ý kiến trao đổi của các chuyên gia, các thầy, cô giáo và tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này, để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn trong lần tái bản sau. Các ý kiến trao đổi xin các bạn liên hệ với số điện thoại của tác giả 0983.151242.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ và kích lệ để cuốn sách được hoàn thành.

Hà Nội, ngày 15 tháng 12 năm 2007  
Tác giả

# Chương 1

## CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

---

Khác với các môn học Cơ lý thuyết và Nguyên lý máy, môn học Sức bền vật liệu nghiên cứu các tác dụng cơ học trong của các vật rắn thực sinh ra do tác dụng ngoài: tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ, độ lún gối tựa, chuyển vị cưỡng bức do chế tạo không chính xác v.v.

### §1. MÔ HÌNH NGHIÊN CỨU

#### 1. Mô hình vật lý của vật liệu

Trong giáo trình này, mô hình vật rắn biến dạng được hiểu là một tập hợp chất điểm có các thuộc tính vật lý sau đây:

##### *a) Liên tục, đồng nhất và đẳng hướng*

Vật rắn được gọi là có cấu tạo liên tục nếu một phân tử bé tùy ý của nó đều chứa vô số chất điểm sao cho trong vật thể không có lỗ rỗng và được gọi là đồng nhất khi tính chất cơ lý của nó tại mọi điểm đều như nhau và được gọi là đẳng hướng khi tính chất cơ lý của nó tại mọi điểm, theo mọi phương đều như nhau.

Những vật thể bằng kim loại và hợp kim thường dùng trong kỹ thuật đều là những vật có thể xem như liên tục, đồng nhất và đẳng hướng. Những vật bằng gỗ, tre v.v... là những vật không đẳng hướng vì tính chất chịu lực của chúng theo các phương rất khác nhau.

### ***b) Đàn hồi tuyệt đối tuyến tính, biến dạng và chuyển vị bé***

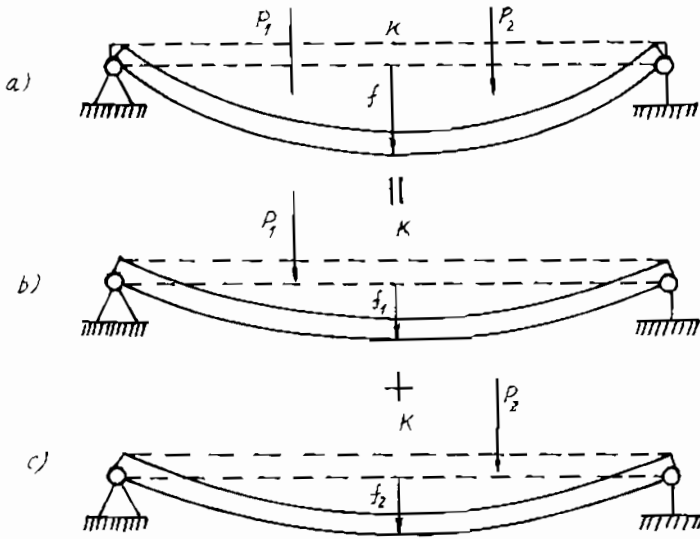
Dưới tác dụng của ngoại lực, mọi vật rắn thực đều bị biến dạng, nghĩa là biến đổi hình dạng và kích thước, đó là vì ngoại lực làm thay đổi vị trí tương đối vốn có giữa các phân tử cấu tạo nên vật rắn ấy. Lực liên kết vốn có giữa các phân tử để giữ cho vật rắn có hình dạng nhất định, lúc đó, sẽ thay đổi với xu hướng khôi phục lại vị trí ban đầu giữa các phân tử. Độ tăng đó của lực liên kết được gọi là lực đàn hồi hay nội lực.

Vật rắn được gọi là đàn hồi (hay rõ hơn, đàn hồi tuyệt đối) nếu nó có khả năng phục hồi hoàn toàn, hình dạng và kích thước vốn có sau khi không còn tác dụng ngoài nữa, biến dạng được khôi phục hoàn toàn sau khi hết tác dụng ngoài được gọi là biến dạng đàn hồi. Trong thực tế không có vật đàn hồi tuyệt đối. Đối với nhiều vật rắn, khi tác dụng ngoài chưa vượt quá một giới hạn nhất định thì biến dạng của nó là biến dạng đàn hồi, nhưng khi tác dụng này đã vượt quá giới hạn đó thì vật chỉ khôi phục lại được một phần biến dạng. Phần biến dạng không khôi phục được gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng dư.

Vật đàn hồi tuyến tính là vật mà biến dạng đàn hồi tỷ lệ bậc nhất với nội lực. Những vật đàn hồi khác được gọi là vật đàn hồi phi tuyến.

Trong các bài toán khi biến dạng bé, có thể xem điểm đặt của ngoại lực và do đó, vị trí tương đối của các ngoại lực là không thay đổi khi vật bị biến dạng. Tính chất này cùng với tính chất tuyến tính nói trên cho phép khẳng định rằng nội lực và biến dạng là những hàm bậc nhất (tuyến tính) của các ngoại lực, nói một cách khác, chúng không phụ thuộc vào trình tự đặt lực và tác dụng cơ học trong của cả

hệ nội lực bằng tổng tác dụng cơ học trong của từng lực trong hệ. Đó là nội dung của nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.



Hình 1.1.

Ví dụ, đối với dầm chịu lực như trên hình 1.1a, độ võng ở điểm K do tác dụng đồng thời của hai lực  $P_1$  và  $P_2$  bằng  $f$ . Theo nguyên lý độc lập tác dụng độ võng này bằng:

$$f = f_1 + f_2$$

trong đó  $f_1$  và  $f_2$  lần lượt là độ võng tại K do từng lực  $P_1$  và  $P_2$  tác dụng độc lập gây ra (hình 1.1b, c).

Ta hiểu chuyển vị và biến dạng bé như sau: Biến dạng được xem là bé nếu nó nhỏ đến mức có thể giải thích nó như những đại lượng vô cùng bé. Các thành phần của vectơ chuyển vị là rất bé so với kích thước của vật thể, còn bản thân đạo hàm bậc nhất của chuyển vị theo các tọa độ là rất nhỏ so với đơn vị. Trong tính toán có thể bỏ qua các tích và các bình phương của đạo hàm bậc nhất của các chuyển vị vì chúng là những đại lượng vô cùng bé bậc cao.

Mô hình vật lý mô tả ở trên là những giả thiết cơ bản của khoa học về sức bền của các vật liệu. Những giả thiết này là cơ sở để xây



dụng môn học sức bền vật liệu, cơ học kết cấu, tấm và vỏ... trong miền đàn hồi.

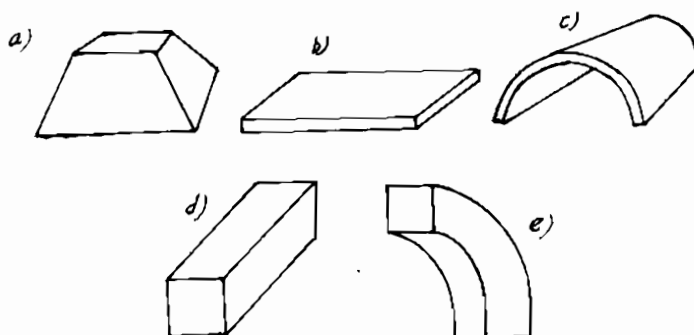
## 2. Mô hình hình học

Về mặt hình học, vật thể nghiên cứu có các dạng sau đây:

a) *Khối* là mô hình của những vật thể có kích thước theo ba phương (trục giao) đều tương đương nhau (hình 1.2a).

b) *Tấm và vỏ* là mô hình của những vật thể có kích thước theo hai phương rất lớn so với phương thứ ba (hình 1.2b, c).

c) *Thanh* là mô hình của những vật thể có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại (hình 1.2d, e).



Hình 1.2.

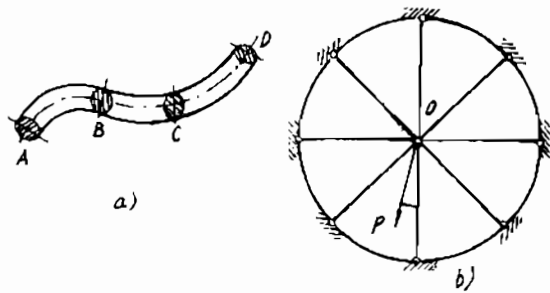
Trong giáo trình này, mô hình được khảo sát chủ yếu là mô hình thanh và hệ thanh đơn giản với những tính chất (a) và (b) đã nêu ở mục 1. Từ đây về sau ta sẽ gọi tắt là thanh đàn hồi tuyến tính. Phần lớn các chi tiết máy và kết cấu thường gặp đều được mô hình hóa thành những thanh đàn hồi tuyến tính.

Có thể làm một định nghĩa khác về thanh như sau:

- Thanh là hình khối do một hình phẳng có diện tích  $F$  vạch ra khi  $F$  di động trong không gian sao cho trọng tâm  $O$  của nó chuyển động trên một đường nhất định và  $F$  luôn luôn vuông góc với đường đó.

- Quỹ đạo của trọng tâm O gọi là trục thanh và F gọi là mặt cắt ngang (hay tiết diện) của thanh.

- Một thanh được gọi là thanh thẳng nếu trục thanh là đường thẳng và được gọi là thanh cong nếu trục thanh là đường cong (hình 1.3a).



Hình 1.3.

- Một cơ hệ gồm nhiều thanh được nối lại với nhau theo một cách nào đó, được gọi là hệ thanh (hình 1.3b).

## §2. CÁC DẠNG TẢI TRỌNG VÀ SƠ ĐỒ HÓA TẢI TRỌNG

Có nhiều nguyên nhân gây ra biến dạng trong hệ. Ví dụ, do tải trọng, do sự thay đổi của nhiệt độ, do chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, do sự chế tạo không chính xác v.v.

Trong giáo trình này ta quan tâm nhiều tới nguyên nhân gây ra biến dạng là ngoại lực (tải trọng ngoài). Ngoại lực tác dụng lên các chi tiết máy và cấu kiện công trình được phân thành các loại sau đây:

**Lực tập trung:** Nếu ngoại lực tác dụng lên công trình trên một đơn vị diện tích rất bé so với bề mặt kết cấu thì ta quy ước coi ngoại lực đó là tập trung tại một điểm. Đơn vị đo của nó là kN, MN hoặc kG, T v.v. Áp lực bánh xe lửa trên đường ray, áp lực của các viên bi truyền lên ổ là loại lực này.

**Lực phân bố:** Nếu lực truyền lên vật thể trên một diện tích đủ lớn (để không được phép xem là lực tập trung) thì ta gọi đó là lực phân bố theo bề mặt hình 1.4a. Thứ nguyên của nó là lực trên chiều dài bình phương:  $kG/cm^2$ ,  $T/m^2$  hoặc  $kN/cm^2$ ,  $MN/m^2$ ... Áp lực chất lỏng tác dụng lên thành thùng chứa, áp lực gió tác dụng lên thân và cánh máy bay... là những lực thuộc loại này.

Trong thực tế kỹ thuật nhiều khi cần phải thay thế tải trọng phân bố trên một dải diện tích hẹp bằng tải trọng phân bố theo đường (hình 1.4b), với cường độ là:

$$q = q_1 \cdot b_1$$

Thứ nguyên của tải trọng phân bố theo đường là lực trên chiều dài: T/m, kG/m hoặc MN/m, kN/m v.v.

Hợp lực của tải trọng phân bố theo đường với một quy luật bất kỳ được xác định bởi tổng vô hạn các lực sơ cấp  $q(z)dz$  sau đây (hình 1.4c):

$$R = \int_a^b q(z) dz$$

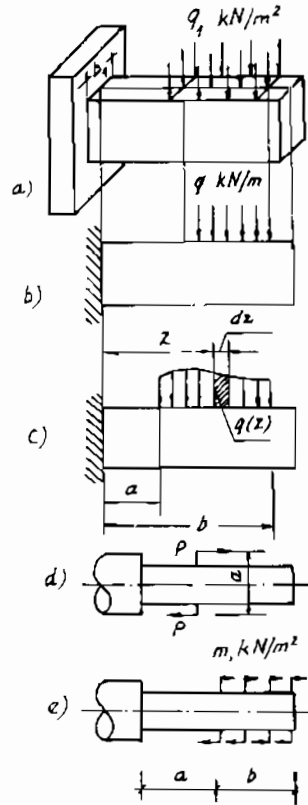
Biểu thức này chứng tỏ rằng hợp lực  $R$  của lực phân bố theo đường bằng diện tích giới hạn bởi đường cong  $q(z)$  và đoạn chiều dài của dầm trên đó  $q(z)$  đặt vào.

Mômen của tải trọng phân bố đối với một điểm nào đó được xác định bởi tổng mômen các lực sơ cấp  $q(z)dz$ :

$$M = \int_a^b q(z) z dz$$

Trên hình 1.4c,  $z$  là khoảng cách từ lực sơ cấp  $q(z)dz$  đến ngàm (điểm lấy mômen).

Ngoài ra ta còn hay gặp tải trọng ngoài dưới dạng ngẫu lực tập trung hoặc phân bố tương ứng có các giá trị mômen tổng cộng là (hình 1.4d, e):



Hình 1.4.

$$M = P \cdot a ; \quad M = \int_a^b m(z) dz$$

Tùy theo tính chất thay đổi của tải trọng theo thời gian mà tải trọng được chia ra thành tải trọng tĩnh và động như sau:

- Tải trọng tĩnh là tải trọng đặt lên kết cấu thay đổi chậm chạp đến mức khi kết cấu bị biến dạng thì các chất điểm của nó hầu như không có gia tốc, nghĩa là có thể bỏ qua lực quán tính sinh ra khi kết cấu làm việc.

- Khác với tải trọng tĩnh, tải trọng động có đặc điểm là độ lớn và vị trí của nó bị thay đổi trong một khoảng thời gian rất ngắn. Nói một cách tổng quát tải trọng gây ra gia tốc đáng kể khi kết cấu làm việc là những tải trọng động.

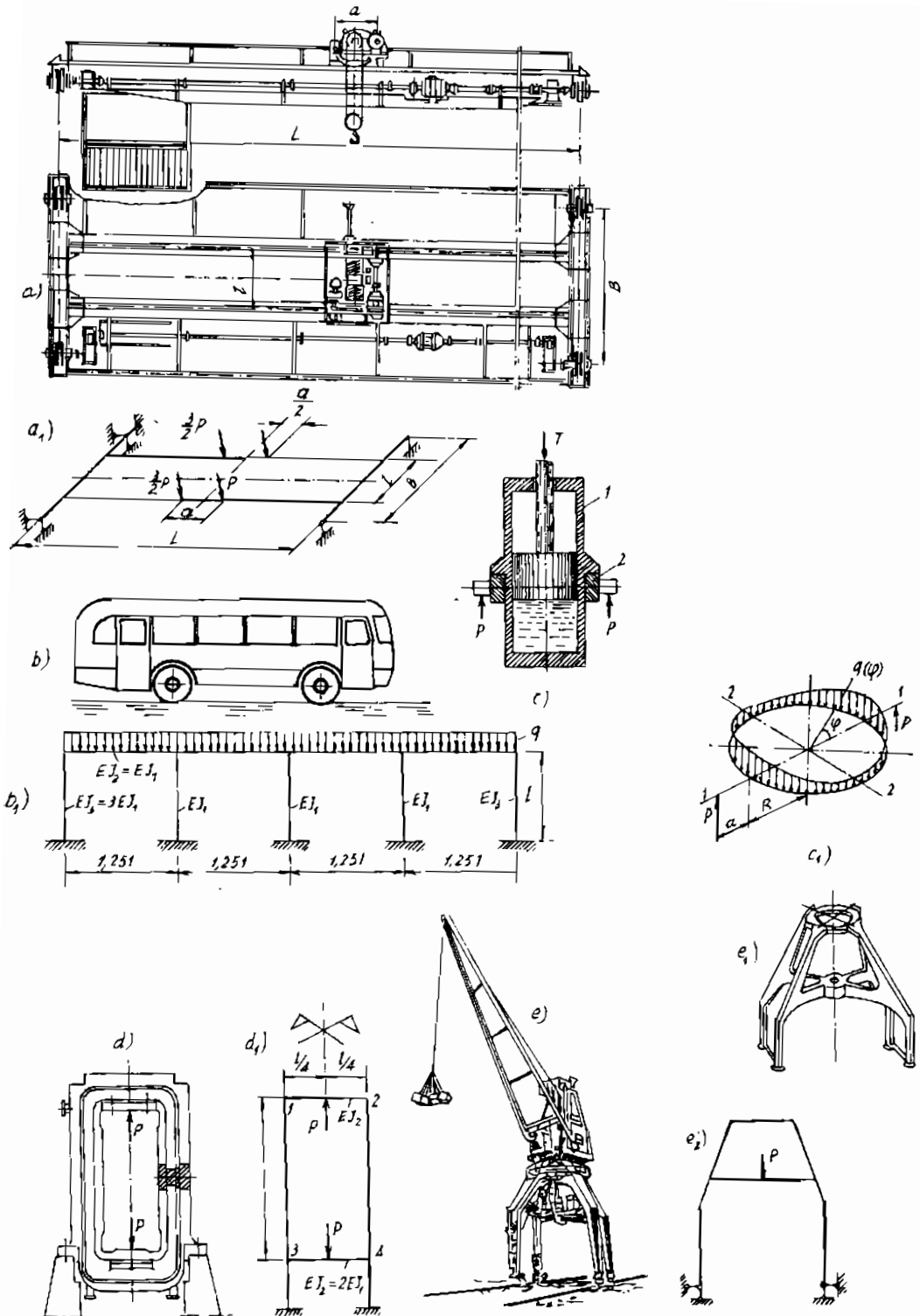
- Tùy thuộc vào thời gian tác dụng của tải trọng lên hệ, ta còn chia tải trọng thành tải trọng thường xuyên và tải trọng tạm thời.

- Tải trọng tác dụng liên tục lên hệ trong suốt thời gian phục vụ của nó gọi là tải trọng thường xuyên. Ví dụ, trọng lượng bản thân của hệ và các thiết bị cố định trên nó. Tải trọng tạm thời là tải trọng có thời gian tác dụng lên hệ không lâu. Ví dụ, áp lực của xe lửa lên cầu, trọng lượng hàng đặt lên ô tô khi ô tô chở hàng, tải trọng thi công v.v...

- Ngoài những lực tác dụng lên bề mặt của vật thể được nghiên cứu ở trên ta còn hay gặp những lực thể tích. Đó là những lực phân bố trên toàn bộ thể tích vật thể như: trọng lượng bản thân vật thể, lực quán tính, lực từ và điện trường... là những lực thuộc loại đó.

### §3. SƠ ĐỒ HÓA CÔNG TRÌNH THỰC

Để có thể tính toán kiểm tra một công trình đã có hoặc thiết kế mới một công trình hay một thiết bị nào đó, trước hết các kỹ sư phải có một sơ đồ tính tương ứng. Về sau mọi tính toán cần thiết đều được thực hiện trên sơ đồ tính này. Trên hình 1.5a, b, c, d, e là các cơ hệ thực, còn trên hình 1.5a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, c<sub>1</sub>, d<sub>1</sub>, e<sub>1</sub>, e<sub>2</sub> là các sơ đồ hóa tương ứng dùng để thực hiện mọi tính toán trong quá trình kiểm tra hoặc thiết kế mới.



Hình 1.5.

Khi tính toán các thiết bị máy móc hay công trình, như một nguyên tắc bắt buộc, ngoài việc phải xác định đầy đủ, chính xác các tác dụng ngoài lên chúng, còn cần phải sơ đồ hoá chúng để có được một sơ đồ tính phản ánh tốt điều kiện làm việc thực của công trình được thiết kế hoặc kiểm tra. Quá trình này là một bước đặc biệt quan trọng trong tính toán thiết kế. Bởi vì, mọi phương pháp toán học dù chính xác đến đâu chẳng nữa với những máy tính hiện đại đến đâu chẳng nữa cũng đều vô nghĩa, khi mà xuất phát từ một sơ đồ không đúng. Trong thực tế kỹ thuật việc lập một sơ đồ tính từ một công trình thực là một việc rất khó và phức tạp. Điều này đòi hỏi người làm công tác thiết kế và kiểm định phải có một trình độ lý thuyết uyên bác về cơ học và vốn thực tiễn kỹ thuật phong phú.

Có thể tóm tắt các bước lập sơ đồ tính như sau:

*Bước 1:* Thay các thanh bằng trục hình học, thay các tấm và vỏ bằng mặt trung bình của chúng và ghi trên đó các đặc trưng hình học (diện tích của mặt cắt ngang, mômen quán tính v.v...) và các đặc trưng về vật liệu ( $E, G, \mu$  v.v...).

*Bước 2:* Thay các đối tượng gây liên kết bằng các liên kết lý tưởng (hình 1.5).

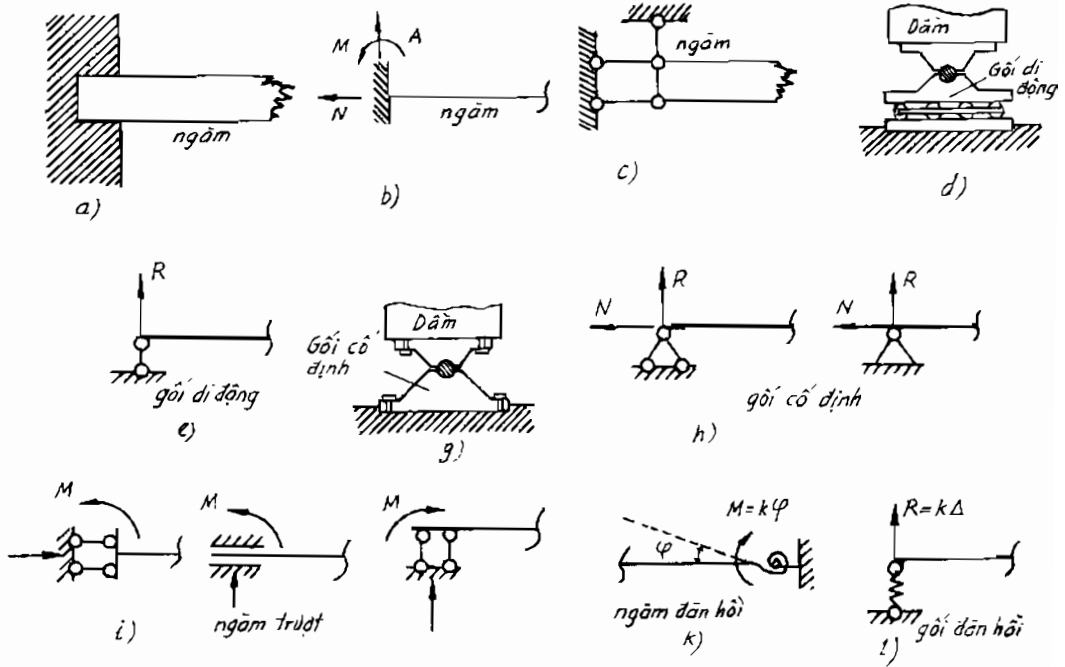
*Bước 3:* Dẫn tải trọng tác dụng trên công trình về mặt trung bình hay trục của nó.

#### **§4. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT**

Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển vị tự do của vật khảo sát.

Trong tập hợp các vật rắn (khâu, cấu kiện) nếu ta quan tâm tới vật nào thì vật ấy gọi là vật khảo sát. Các vật nối với vật khảo sát làm cản trở chuyển vị của vật khảo sát gọi là vật gây liên kết. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là lực liên kết. Lực mà vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát gọi là phản lực liên kết. Như vậy, phản lực liên kết chỉ xảy ra ở vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết. Phản lực liên kết cùng phương, trái

chiều với chiều chuyển vị bị cản trở. Cường độ của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác dụng lên vật khảo sát. Trên hình 1.6, là một số liên kết thường gặp trong kỹ thuật và ký hiệu các sơ đồ hoá chúng.

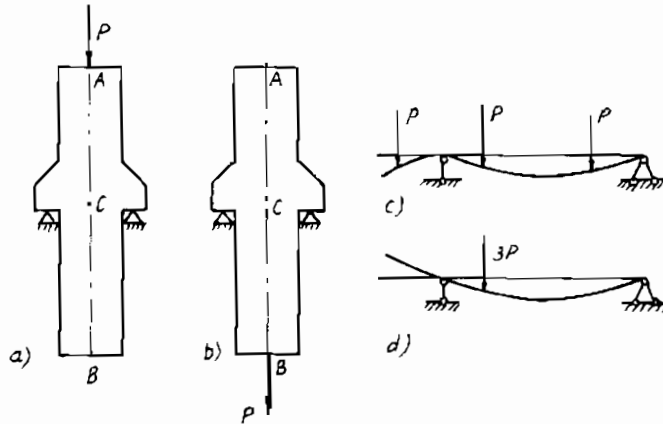


Hình 1.6.

Khi thiết lập sơ đồ tính cần chú ý rằng không được sử dụng các phép biến đổi bảo toàn vectơ chính và vectơ mômen chính của cơ học rắn tuyệt đối như: trượt lực trên đường tác dụng, di chuyển ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó, thay thế các lực bằng một hợp lực v.v... Ví dụ, hãy xét các hệ được cho trên hình 1.7.

Nếu ta dời lực đặt tại A (hình 1.7a) về B theo đường tác dụng của nó thì trạng thái cân bằng của hệ thống không bị vi phạm, phản lực ở các gối tựa không thay đổi, nhưng trạng thái làm việc của hệ bị thay đổi hoàn toàn.

Đoạn AC của thanh (hình 1.7a) bị nén còn đoạn CB không làm việc. Trong khi đó đoạn AC của chính thanh này (hình 1.7b) lại không làm việc, còn đoạn CB bây giờ lại chịu kéo và sự phá hủy chỉ có thể xảy ra trên CB.



Hình 1.7.

Hãy xét một ví dụ thứ hai. Khi nghiên cứu sự cân bằng ta có quyền thay thế một nhóm lực bằng một hợp lực hoặc ngược lại, có thể phân hợp lực ra thành các thành phần. Thế nhưng, khi nghiên cứu các hiệu ứng bên trong (biến dạng, ứng suất) thì điều này không được phép.

Trên hình 1.7c là dạng đường cong của trục dầm chịu tác dụng của ba lực, đường cong của trục dầm sẽ thay đổi về chất nếu thay ba lực này bằng hợp lực của chúng (hình 1.7d).

Tóm lại, cần nhấn mạnh rằng, bước lập sơ đồ tính là bước quan trọng bậc nhất trong tất cả các bước giải quyết một bài toán về cơ học vật rắn biến dạng. Bởi vì, tất cả những tính toán cần thiết đều thực hiện trên sơ đồ tính này. Nếu sơ đồ tính không đúng thì dù phương pháp có chính xác đến đâu đi nữa, máy tính có mạnh đến đâu đi nữa cũng chỉ là vô ích.



## §5. KHÁI NIỆM VỀ PHÂN LOẠI CƠ HỆ

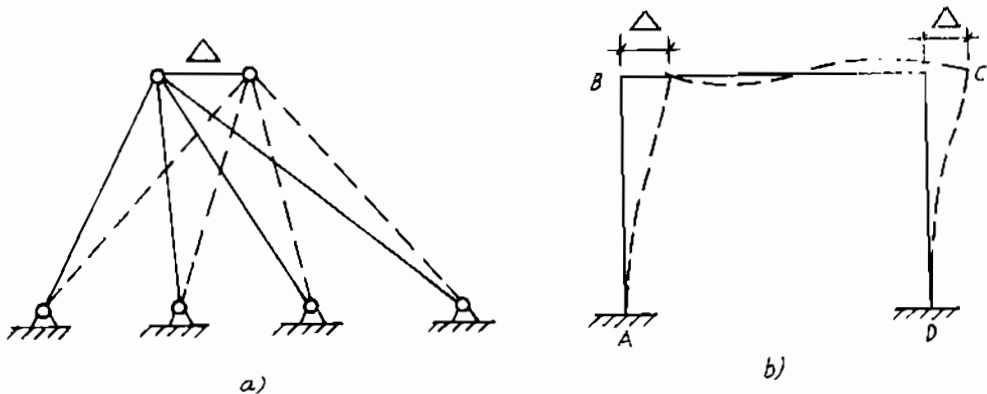
Sau khi đã sơ đồ hoá một công trình thực, chúng ta đã có một sơ đồ tính, tức là đã có một cơ hệ. Cơ hệ đó có thể là một cơ cấu hoặc một kết cấu. Cơ cấu cũng có thể là cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do. Kết cấu cũng có thể là một hệ tĩnh định hoặc siêu tĩnh và cũng có thể là hệ xác định động hoặc là một hệ siêu động.

Hệ tĩnh định là một kết cấu mà khi chịu tải trọng ta có thể xác định được nội lực trong nó chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ siêu tĩnh là một kết cấu mà khi chịu tải trọng, người ta không thể xác định được nội lực trong hệ nếu chỉ dùng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Đối với hệ này ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học còn cần phải sử dụng thêm các điều kiện động học và vật lý.

Hệ xác định động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học.

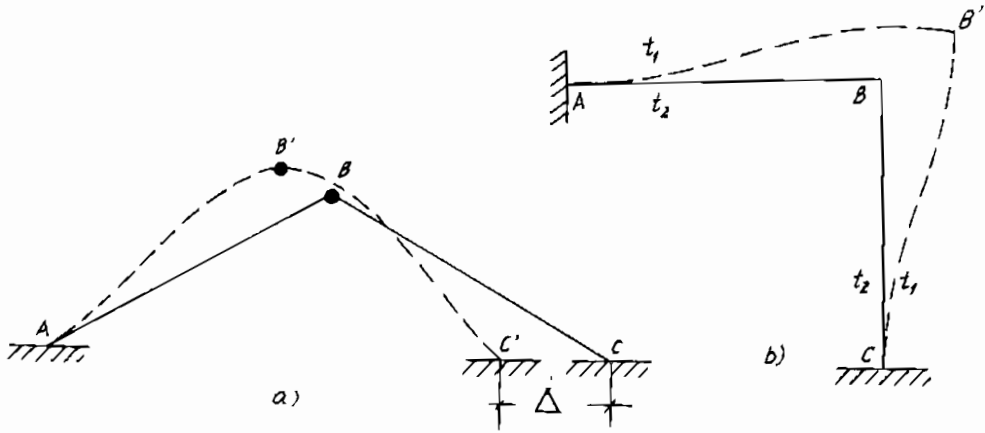
Hệ trên hình 1.8a là một hệ xác định động. Nút A chịu chuyển vị ngang cưỡng bức  $\Delta$ , bằng các điều kiện hình học ta có thể xác định được biến dạng dài của từng thanh, tức là xác định được vị trí của hệ ở trạng thái biến dạng.



Hình 1.8.

Hệ siêu động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà

phải bổ sung các điều kiện cân bằng tĩnh học. Hệ trên hình 1.8b và 1.9a, b là những hệ siêu động, vì rằng khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức  $\Delta$  thì các cấu kiện bị uốn cong và không thể xác định được đường cong đàn hồi của khung nếu chỉ dùng các điều kiện động học.



Hình 1.9.

Kết cấu là một cơ hệ gồm nhiều cấu kiện (các thanh thẳng hoặc các thanh cong) được nối lại với nhau theo một cách nào đó, sao cho hệ thu được là một hệ bất động và bất biến hình hình học. Nghĩa là, khi xem các cấu kiện là cứng tuyệt đối thì chuyển vị tương đối giữa chúng với nhau và với các liên kết tựa là không thể tồn tại. Nếu các cấu kiện đó của hệ có thể chuyển vị tương đối đối với nhau và đối với các liên kết tựa thì hệ đó là hệ biến hình hình học. Nói khác đi, nếu gọi  $W$  là bậc tự do của một cơ hệ thì nếu  $W > 0$  ta gọi cơ hệ đó là một cơ cấu (hệ biến hình hình học),  $W \leq 0$  ta gọi cơ hệ đó là một kết cấu tĩnh định ( $W = 0$ ) hoặc siêu tĩnh ( $W < 0$ ). Tùy thuộc vào đặc điểm liên kết giữa các cấu kiện với nhau và tác dụng ngoài lên chúng mà kết cấu được chia ra thành:

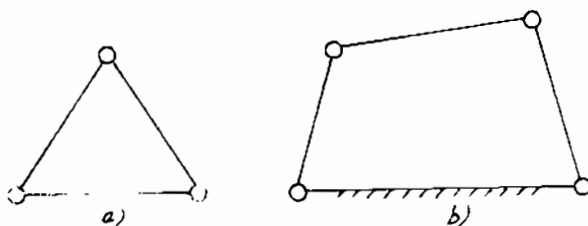
Dàn là một cơ hệ bất biến hình hình học gồm nhiều cấu kiện được nối động với nhau bằng các khớp và tải trọng chỉ tác dụng lên các nút của chúng.

Khung là một cơ hệ bất biến hình học gồm nhiều cấu kiện thẳng hoặc cong được nối cứng (nối tĩnh) với nhau và tác dụng ngoài lên khung là bất kỳ. Tổ hợp dàn và khung ta có kết cấu hỗn hợp.

## §6. KHÁI NIỆM VỀ CẤU TẠO HỆ BẤT BIẾN HÌNH HÌNH HỌC

Như đã rõ, ba đoạn thẳng chỉ dựng được duy nhất một tam giác. Do đó, một hệ gồm ba thanh nối khớp với nhau là hệ bất biến hình học và được gọi là một miếng cứng có  $W = 0$  (hình 1.10a). Một tứ giác khớp (hình 1.10b) là một hệ biến hình hình học (cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng  $W = 1$ ).

Như vậy, một hệ được gọi là bất biến hình học nếu hình dạng hình học của nó không bị thay đổi dưới các tác dụng ngoài, khi xem các cấu kiện của hệ là rắn



Hình 1.10.

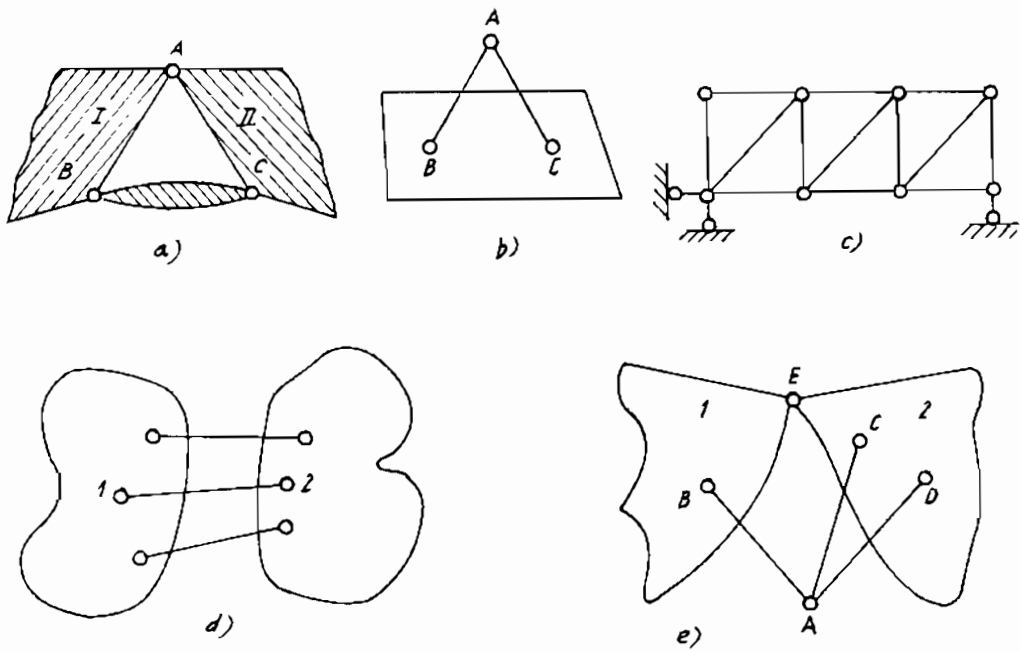
tuyệt đối. “Sức bền vật liệu” chỉ nghiên cứu các hệ bất biến hình học, tức là các kết cấu. Vì vậy, trước khi tính toán cần phải kiểm tra xem cơ hệ sẽ được tính là cơ hệ gì, có phải kết cấu hay không?

Trên hình 1.11 là một số phương án có tính nguyên tắc định hướng cách cấu tạo hệ bất biến hình học.

Nếu hai khối I và II nối khớp với nhau tại A, lại được nối khớp với khâu BC, để có một hệ bất biến hình thì đường tâm BC không được đi qua A (hình 1.11a). Khi nối nút A (hình 1.11b) với một khối bằng hai thanh AB và AC, muốn có một hệ bất biến hình thì các điểm A, B, C không được thẳng hàng. Cặp thanh BAC được gọi là một bộ đôi, nghĩa là hệ hai thanh AB và AC không được thẳng hàng.

Nếu hai khối 1 và 2 (hình 1.11d) được nối với nhau bằng ba thanh để có một hệ bất biến hình thì đường tâm của chúng không được giao nhau ở 1 điểm.

Trên hình 1.11c là một dàn bất biến hình được cấu tạo từ lý luận bộ đôi và miếng cứng. Hệ 1 bậc tự do  $1 - 2$  có khớp E được nối với nút A bằng ba thanh như hình 1.11e là hệ bất biến hình hình học.



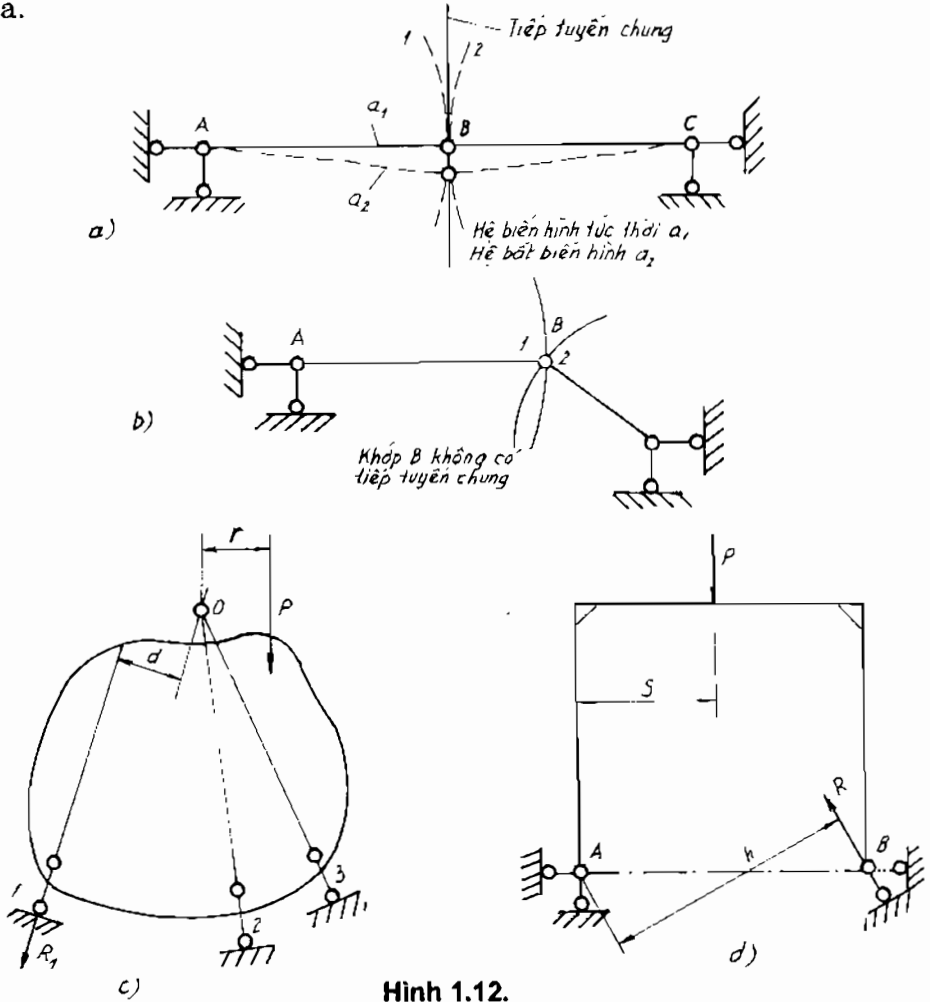
Hình 1.11.

### §7. HỆ BIẾN HÌNH TỨC THỜI

Hệ biến hình tức thời là hệ khi chịu tác dụng ngoài, hệ bị thay đổi vô cùng nhỏ về hình dáng hình học và ngay sau đó hệ trở thành bất biến hình mặc dù trong quá trình ấy các cấu kiện của hệ được xem là rắn tuyệt đối (hình 1.12a). Đối với những hệ biến hình tức thời thì dưới tác dụng của ngoại lực chúng không có trạng thái cân bằng. Vì thế, các phương trình cân bằng tĩnh không được thỏa mãn. Do đó, các yếu tố lực trong hệ biến hình tức thời được xác định bằng các phương trình tĩnh cho giá trị hoặc là vô cùng lớn hoặc là không xác định (hình 1.12c, d).

Trên hình 1.12a là hệ biến hình tức thời ( $a_1$ ) và hệ bất biến hình sau khi thực hiện một chuyển vị vô cùng bé ( $a_2$ ).

Trên hình 1.12b là hệ bất biến hình khi cấu tạo lại hệ trên hình 1.12a để khớp B không có tiếp tuyến chung như khớp B trên hình 1.12a.



Hình 1.12.

Như đã nói ở trên về tính chất bất thường của các phản lực liên kết trong các hệ biến hình tức thời, ta sẽ làm rõ điều này qua các ví dụ sau đây:

**Ví dụ 1:** Xác định phản lực  $R_1$  trên hình 1.12c với thanh gố 1 có phương bất kỳ?

Gọi  $d$  là khoảng cách từ khớp 0 đến phương của phản lực  $R_1$  ta có:

$$\sum m_o(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R_1 = Pr/d$$

Nếu  $d \rightarrow 0$  (thanh 1 qua điểm O) thì  $R_1 \rightarrow \infty$ . Nếu  $d \rightarrow 0$  và  $r \rightarrow 0$  thì  $R_1 = 0/0$  nghĩa là  $R_1$  không xác định.

**Ví dụ 2:** Xác định phản lực  $R$  (hình 1.12d) theo vị trí của thanh gối đơn B?

Giả sử thanh gối đơn B có phương như hình vẽ thì điều kiện cân bằng sẽ là:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R = P.s/h$$

Khi  $h \rightarrow 0$  thì  $R \rightarrow \infty$

Khi  $h \neq 0$  thì  $R \neq \infty$ .

Các kết quả trên cho thấy hệ biến hình tức thời và các hệ gắn với nó là rất nguy hiểm, cần phải đặc biệt quan tâm trong công tác thiết kế.

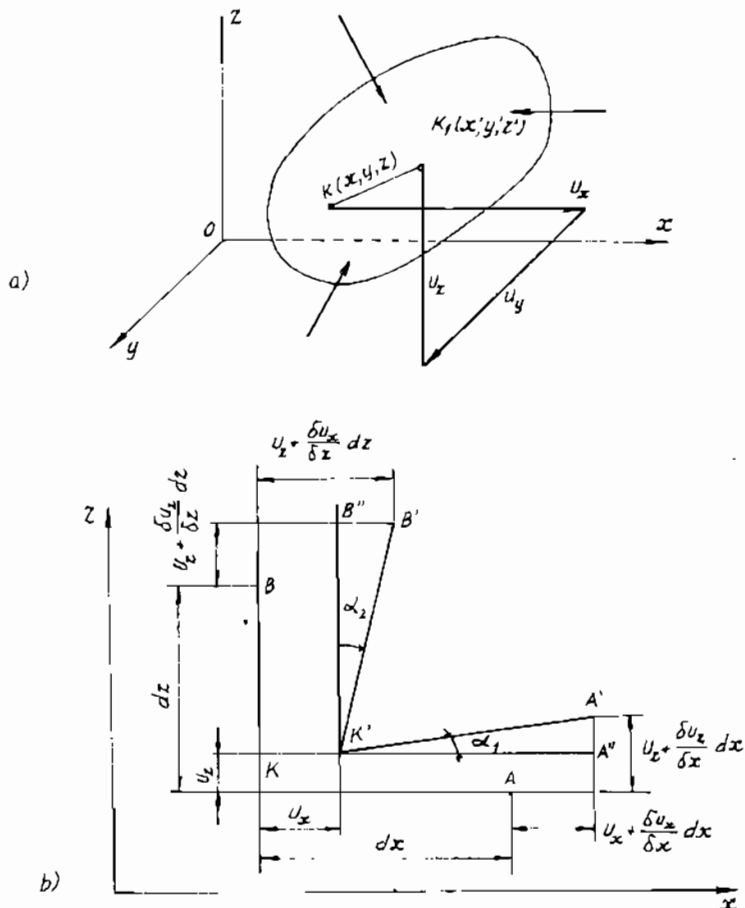
## §8. KHÁI NIỆM VỀ CHUYỂN VỊ VÀ BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Để khảo sát biến dạng của vật thể đàn hồi ta giả thiết rằng, số liên kết đặt vào đối tượng khảo sát là đủ để ngăn cản tất cả các chuyển động của hệ như một cố thể. Nghĩa là vật thể đàn hồi ấy là một kết cấu. Do đó chuyển vị của các phần tử không thể có nếu không có biến dạng. Để nghiên cứu biến dạng, ta tưởng tượng tách ra trong vật thể đàn hồi chịu lực một phần tử quanh điểm  $K$  (hình 1.13a). Do vật thể bị biến dạng mà điểm  $K(x, y, z)$  chuyển đến vị trí mới  $K_1(x', y', z')$ .

Khoảng cách  $\overline{KK_1}$  gọi là chuyển vị thẳng toàn phần  $\bar{u}$  của điểm  $K$ , các thành phần của vectơ  $\overline{KK_1} = \bar{u}$  trên các trục tọa độ  $x, y, z$  là  $u_x, u_y, u_z$ . Các thành phần này là rất bé và thay đổi liên tục theo các tọa độ  $x, y, z$  (hình 1.13b).

Vì thế, chuyển vị của điểm A lân cận K theo phương x có thể viết:

$$u_A = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$$



Hình 1.13

Như vậy là khi x tăng thì hàm  $u_x$  tăng một lượng  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ . Sự thay đổi chiều dài cạnh KA do biến dạng gây ra bằng  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ .

Ta gọi lượng  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$  là biến dạng dài tuyệt đối theo phương của đoạn thẳng có chiều dài ban đầu  $dx$ . Tỷ số:

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

được gọi là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) theo phương  $x$  của điểm  $K$ . Tương tự như thế ta có biến dạng dài tỷ đối của điểm  $K$  theo phương  $y$  và  $z$ :

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Nếu chuyển vị của điểm  $K$  theo phương  $x$  và  $z$  là  $u_x$  và  $u_z$  thì chuyển vị của điểm  $A$  theo phương  $z$  và  $B$  theo phương  $x$  là (hình 1.15b):

$$u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \quad ; \quad u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Do các chuyển vị này mà các đoạn thẳng  $KA$  và  $KB$  trong mặt phẳng  $xz$  có vị trí mới  $K'A'$  và  $K'B'$  làm với các phương ban đầu những góc bé  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  và  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ . Điều này dẫn đến góc vuông ban đầu trong mặt phẳng  $xz$  giảm đi một góc bé  $\gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$ . Tương tự như thế ta nhận được các góc  $\gamma_{yz}$  và  $\gamma_{xy}$ , trong các mặt phẳng  $yz$  và  $xy$ :

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Các đại lượng  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  và  $\gamma_{yz}$  gọi là biến dạng trượt tỷ đối hay biến dạng góc tỷ đối quanh điểm  $K$ . Các biến dạng trượt này được xem là dương nếu chúng làm giảm góc vuông ban đầu.

Như vậy, trong trường hợp tổng quát ở một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực có ba thành phần biến dạng thẳng, ba thành phần biến



dạng góc và ba thành phần chuyển vị. Chúng đều là hàm của các tọa độ điểm  $x, y, z$ .

Cụ thể là:

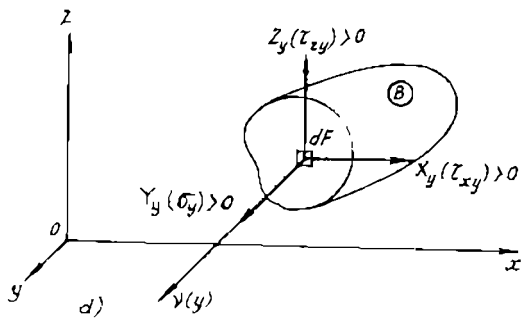
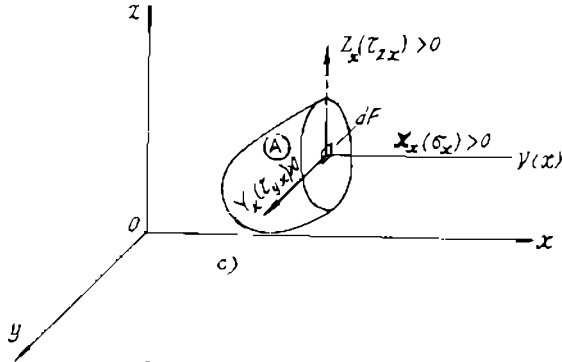
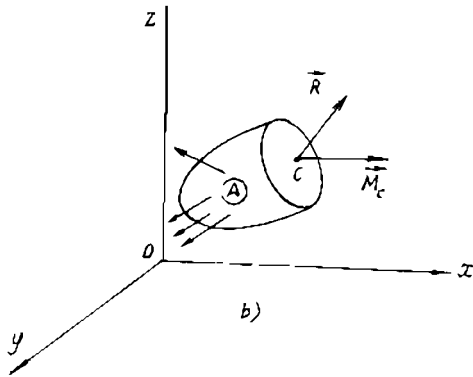
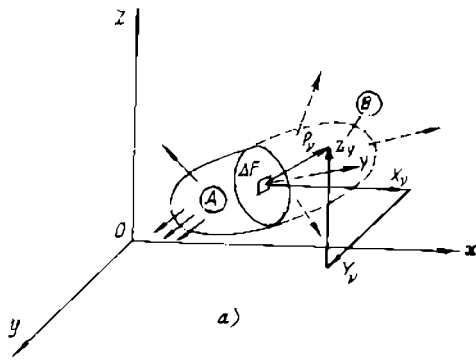
$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z); & \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_y &= u_y(x, y, z); & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ u_z &= u_z(x, y, z); & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Các phương trình (1.1) thường được gọi là các phương trình hình học hoặc các phương trình côsi.

## §9. KHÁI NIỆM VỀ ỨNG SUẤT

Hãy xét một vật rắn biến dạng chịu lực như hình 1.14a. Dưới tác dụng của hệ ngoại lực thể tích và bề mặt vật thể bị thay đổi vị trí và hình dáng. Đó là những biểu hiện bên ngoài của một vật chịu lực. Trong quá trình chịu lực như thế vị trí tương đối giữa các phần tử của vật thể bị thay đổi. Do đó lực (liên kết) tác dụng tương hỗ giữa các phần tử đảm bảo cho vật rắn có một hình dạng nhất định và đảm bảo tính liên tục của biến dạng, sẽ thay đổi với xu hướng khôi phục lại hình dáng và vị trí cũ. Độ tăng của lực (liên kết) tác dụng tương hỗ đó được gọi dưới tên chung là nội lực.

Để nghiên cứu những lực này cần phải sử dụng tiên đề giải phóng liên kết và điều kiện cân bằng. Cụ thể là tưởng tượng cắt vật thể chịu lực ở trạng thái cân bằng làm hai phần và khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần đó, ví dụ, phần A (hình 1.14c). Để phần A được cân bằng như trạng thái vốn có của nó, cần phải thay thế tác dụng của phần B lên phần A bằng một vectơ chính  $\vec{R}$  đặt vào trọng tâm  $c$  mặt cắt và một vectơ mômen chính  $\vec{M}_c$ . Các lực  $\vec{R}$  và  $\vec{M}_c$  được xác định từ điều kiện cân bằng của phần A và được gọi là các vectơ nội lực trên mặt cắt khảo sát (hình 1.14b).



Hình 1.14.

Ta hãy xét một phân tố diện tích  $\Delta F$  trên mặt cắt. Lực tác dụng của phần B lên phần A đi qua  $\Delta F$  này là  $\overline{\Delta S}$ . Tỷ số  $\frac{\overline{\Delta S}}{\Delta F}$  được gọi là ứng suất trung bình trên  $\Delta F$ , còn khi  $\Delta F \rightarrow 0$  ta nhận được ứng suất toàn phần tại một điểm trên mặt cắt khảo sát có pháp tuyến  $\vec{v}$ :

$$\vec{p}_v = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta F}$$

Trong trường hợp tổng quát  $\vec{p}_v$  không trùng với  $\vec{v}$ . Vì vậy ngoài độ lớn của  $\vec{p}_v$  còn cần phải biết phương chiều của nó trong không gian. Thuận tiện nhất thay cho việc khảo sát  $\vec{p}_v$  ta khảo sát ba thành phần  $X_v, Y_v, Z_v$  của nó trên các trục tọa độ Đêcác xoyz (hình 1.14a). Pháp tuyến trên các mặt cắt song song với các mặt tọa độ khi ấy là các trục tọa độ. Ví dụ, trên hình 1.14c pháp tuyến ngoài của mặt cắt song song với mặt tọa độ yoz là trục ox, trên đó các thành phần của ứng suất toàn phần  $\vec{p}_x$  là:  $X_x, Y_x, Z_x$ . Thành phần  $X_x$  vuông góc với mặt cắt, vì thế được gọi là ứng suất pháp tuyến, các thành phần còn lại  $Y_x, Z_x$  nằm trong mặt cắt được gọi là ứng suất tiếp tuyến. Trong “Sức bền vật liệu” người ta thường ký hiệu các ứng suất pháp và tiếp thay cho ký hiệu trên bằng các chữ Hy Lạp:  $\sigma$  và  $\tau$ . Cụ thể là:

$$\sigma_x = X_x ; \sigma_y = Y_y ; \sigma_z = Z_z$$

$$\tau_{yx} = Y_x ; \tau_{zy} = Z_y ; \tau_{xz} = X_z ; \tau_{xy} = X_y ; \tau_{yz} = Y_z ; \tau_{zx} = Z_x$$

Các thành phần ứng suất trên mặt cắt song song với mặt tọa độ zox được mô tả trên hình 1.14d.

Dấu của các thành phần ứng suất được quy ước như sau:

Nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt khảo sát trùng với chiều dương của một trục tọa độ nào đó đã chọn thì các ứng suất  $\vec{\sigma}$  và  $\vec{\tau}$  trên mặt cắt này được xem là dương khi các vectơ của chúng trùng với chiều dương các trục tọa độ tương ứng. Nếu pháp tuyến ngoài của mặt cắt khảo sát ngược với chiều dương của một trục tọa độ nào đó

thì các ứng suất  $\vec{\sigma}$  và  $\vec{\tau}$  được xem là dương khi các vectơ của chúng ngược chiều với chiều dương các trục tọa độ tương ứng đã chọn.

Quy ước dấu này gọi là quy ước dấu theo pháp tuyến ngoài. Trên hình 1.14c, d các ứng suất  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\tau}$  đều được vẽ theo chiều dương.

Các ứng suất ở những điểm khác nhau trong vật thể có thể khác nhau, vì vậy chúng là hàm của các tọa độ điểm:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z) ; \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) ; \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z) ; \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z) ; \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z) ; \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Như vậy, ứng suất là nội lực tính trên một đơn vị diện tích của mặt cắt. Nó là độ đo cường độ nội lực tại một điểm. Đơn vị thường dùng để đo ứng suất là daN/cm<sup>2</sup>, kN/cm<sup>2</sup>, MN/m<sup>2</sup> và MPa. Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, các ứng suất tiếp  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,... được viết với hai chỉ số dưới, trong đó chỉ số thứ nhất chỉ phương của ứng suất tiếp, còn chỉ số thứ hai chỉ pháp tuyến của mặt, trên đó có ứng suất tiếp tác dụng.

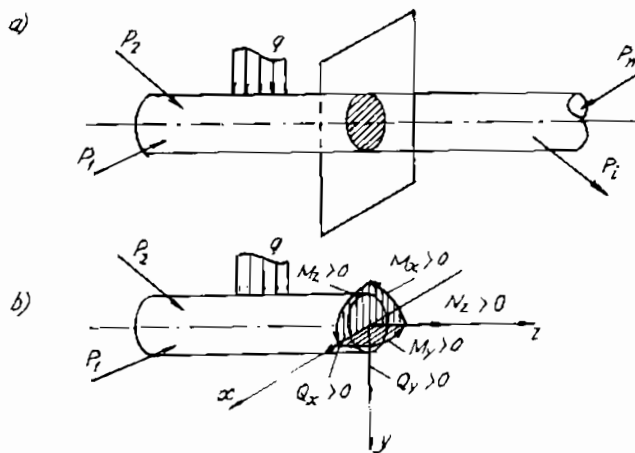
## §10. KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC TRÊN MẶT CẮT

Những tác dụng ngoài (ví dụ ngoại lực, sự biến thiên nhiệt độ) luôn luôn có khuynh hướng làm biến dạng vật thể, làm thay đổi vị trí tương hỗ giữa các phần tử của vật thể. Ngược lại, các ứng suất – những lực tác dụng tương hỗ trong tính trên một đơn vị diện tích mặt cắt là những nội lực phân bố trên mặt cắt khảo sát này lại có khuynh hướng chống lại mọi tác động ngoài gây ra sự biến dạng của vật thể. Do đó, độ lớn của các nội lực trong vật thể ở hai trạng thái chịu lực và không chịu lực là khác nhau.

Trong “Sức bền vật liệu” người ta không khảo sát và không quan tâm đến các nội lực trong vật thể ở trạng thái không chịu lực (trạng thái tự nhiên), mà chỉ nghiên cứu và tính toán các nội lực trong các vật thể chịu tác dụng ngoài. Vì thế, từ nay về sau khi nói về nội lực, ta cần phải hiểu cho đúng bản chất của nó là những lực tác

dụng tương hỗ bổ sung phát sinh chỉ trong vật thể chịu tác dụng ngoài. Để nghiên cứu những nội lực này như đã mô tả trong §9, ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một trong hai phần A và B của một vật thể vốn đang cân bằng dưới tác dụng của hệ các loại ngoại lực tự cân bằng (hình 1.15a, b). Cần chú ý rằng theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng của Newton thì những nội lực tác dụng trên hai phần khác nhau được phân chia bởi cùng một mặt cắt thì tương hỗ bằng nhau.

Trong trường hợp vật thể là một thanh chịu lực tổng quát khi thu gọn hệ ứng suất về trọng tâm mặt cắt, ta được một vectơ chính  $\bar{R}$  và một vectơ mômen chính  $\bar{M}_0$ . Về sau, để nghiên cứu cách xác định nội lực trong thanh, ta tưởng tượng cắt thanh bằng mặt cắt vuông góc với trục thanh và lập một hệ trục tọa độ Đêcác  $xOyz$  có gốc ở trọng tâm "O" mặt cắt, sao cho các trục  $Ox$ ,  $Oy$  nằm trong mặt phẳng chứa mặt cắt ngang của thanh. Phân vectơ chính  $\bar{R}$  thành ba thành phần theo ba trục tọa độ và ký hiệu là:  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ , còn vectơ mômen chính  $\bar{M}_0$  thành ba mômen:  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (hình 1.15b).



Hình 1.15.

Sáu thành phần  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  được gọi là sáu thành phần nội lực trên toàn bộ mặt cắt đang khảo sát. Mỗi một thành

phần nội lực có một tên gọi riêng. Có nhiều cách gọi tên. Trong giáo trình này, ta dùng cách gọi tên và quy ước dấu thực hành như sau:

– Thành phần  $N_z$  có phương vuông góc với mặt cắt ngang được gọi là lực dọc. Lực dọc  $N_z$  được xem là dương, nếu nó có chiều trùng với chiều pháp tuyến ngoài của mặt cắt, trong trường hợp ngược lại  $N_z$  được xem là âm.

– Các lực  $Q_x, Q_y$  có phương vuông góc với trục thanh được gọi là lực ngang hay lực cắt. Lực cắt được xem là dương, nếu nó có xu hướng làm quay phần thanh khảo sát theo chiều thuận kim đồng hồ.

– Các đại lượng  $M_x, M_y$  được gọi là mômen uốn quanh các trục  $Ox, Oy$ , còn  $M_z$  – mômen xoắn quanh trục  $Oz$ . Mômen  $M_x$  được xem là dương nếu nó làm căng thớ dưới của thanh (phía dương của trục  $Oy$ ). Hoàn toàn tương tự như thế,  $M_y$  được xem là dương nếu nó làm căng các thớ ngoài của thanh (phía dương trục  $Ox$ ). Mômen xoắn  $M_z$  được xem là dương nếu ta nhìn ngược chiều pháp tuyến ngoài của mặt cắt đến mặt cắt, thấy  $M_z$  trên nó quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 1.15b).

– Đặc trưng biến dạng của thanh chịu mômen uốn rất rõ: Một loạt các thớ dọc bị nén co lại, một loạt các thớ còn lại bị kéo giãn ra. Vì thế, về sau khi vẽ các biểu đồ mômen uốn có thể không dùng dấu mà mômen uốn nội lực căng phía nào của thanh ta sẽ đặt tung độ của mômen uốn về phía đó. Điều này rất thuận tiện cho việc bố trí vật liệu trong thanh và vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ thanh không gian.

Theo quy ước này các nội lực mô tả trên hình 1.15b là những nội lực dương.

Vì biến dạng của vật thể được xem là rất bé, nên đồng thời có thể coi như phần vật thể đã tách ra (phần A) để xét như đã được hoá rắn lại. Điều này cho phép sử dụng các phương trình cân bằng như đối với vật rắn tuyệt đối. Khi đó để có thể xác định được các nội lực đã kể trên, cần phải viết 6 phương trình cân bằng đối với mỗi phần vật thể đã được tưởng tượng cắt ra:

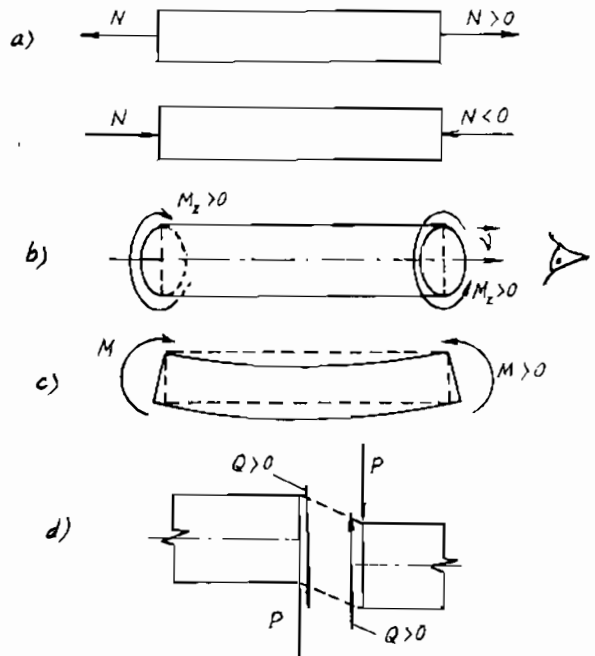
$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \Sigma X = 0 \\
 & \text{b) } \Sigma Y = 0 \\
 & \text{c) } \Sigma Z = 0 \\
 & \text{d) } \Sigma m_x = 0 \\
 & \text{e) } \Sigma m_y = 0 \\
 & \text{f) } \Sigma m_z = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Ba phương trình hình chiếu cho phép xác định các nội lực thẳng  $N_z, Q_x, Q_y$  còn ba phương trình mômen cho phép tìm các mômen nội lực  $M_x, M_y, M_z$ .

## §11. CÁC LOẠI BIẾN DẠNG CƠ BẢN VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC NỘI LỰC TƯƠNG ỨNG

Dưới tác dụng của những ngoại lực phức tạp, trên mặt cắt ngang của thanh, trong trường hợp tổng quát có thể phát sinh 6 thành phần nội lực (hình 1.15b).

Ta sẽ nghiên cứu sự làm việc của thanh bắt đầu từ những bài toán chịu lực đơn giản nhất. Bởi vì cũng như khi nghiên cứu về chuyển động phức tạp của vật rắn tuyệt đối, biến dạng của vật thể nói chung rất phức tạp, song bao giờ cũng có thể coi là một tổ hợp của các biến dạng thành phần sau đây:



Hình 1.16.

### 1) Bài toán kéo (hoặc nén) đúng tâm:

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một lực dọc  $N$  thì ta có thanh chịu kéo khi  $N > 0$  và thanh chịu nén khi  $N < 0$ . Khi đó thanh bị dãn ra hoặc co lại, song trục của nó vẫn thẳng (hình 1.16a).

### 2) Bài toán xoắn

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực  $M_z$  thì ta có thanh chịu xoắn. Khi đó các mặt cắt ngang bị xoay tương đối, đôi với nhau đi một góc nào đó quanh trục thanh, còn trục thanh vẫn luôn luôn thẳng (hình 1.16b).

### 3) Bài toán uốn

Nếu hệ nội lực trên mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực  $M_x$  hoặc  $M_y$  ta nói thanh bị uốn thuần túy phẳng quanh trục  $Ox$  (hoặc  $Oy$ ). Trong trường hợp này trục thanh bị uốn cong theo một cung tròn phẳng nào đó (hình 1.16c).

### 4) Bài toán cắt (hay trượt)

Nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực ngang  $Q$  thì ta gọi đó là hiện tượng chịu cắt của thanh (hình 1.16d). Các thành phần nội lực trên hình 1.16 rất dễ dàng được thiết lập, khi lấy tổng hình chiếu của các lực sơ cấp và tổng mômen của chúng, đôi với các trục  $Ox, Oy, Oz$  như sau:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF & M_x &= \int_F y \sigma dF \\ Q_y &= \int_F \tau_{yz} dF & M_y &= \int_F x \sigma dF \\ Q_x &= \int_F \tau_{xz} dF & M_z &= \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó,  $F$  là diện tích mặt cắt ngang – miền lấy tích phân. Các công thức này cho phép xác định các thành phần nội lực theo các ứng suất, nếu như đã biết các quy luật phân bố của ứng suất trên mặt cắt.



Để thấy là không thể giải được bài toán ngược, bởi vì quan hệ (1.4) là quan hệ phiến hàm. Ví dụ, cùng một giá trị của lực dọc  $N$  có thể tương ứng với nhiều quy luật phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ấy. Bài toán xác định ứng suất theo các thành phần nội lực là một bài toán cơ bản nhất của cơ học vật rắn biến dạng. Bài toán này chỉ có thể được giải quyết khi khảo sát đồng thời ba phương diện sau đây của nó:

- Phương diện tĩnh học;
- Phương diện hình học;
- Phương diện vật lý.

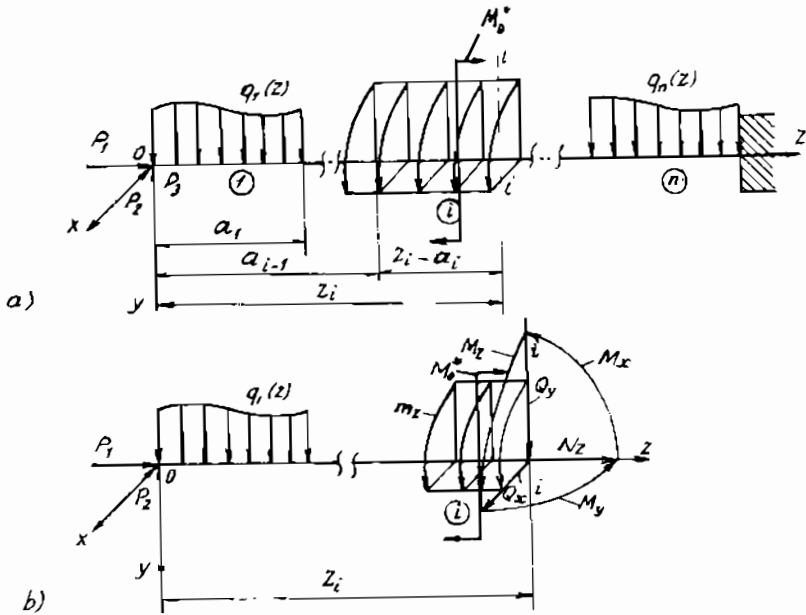
Phương diện tĩnh học cho mối liên hệ giữa các ứng suất và nội lực dạng (1.4). Phương diện hình học cho mối liên hệ giữa các biến dạng và chuyển vị (1.1). Phương diện vật lý (trong trường hợp của chúng ta là định luật Húc) cho phép tạo ra một cái cầu nối hai phương diện tĩnh học và hình học với nhau (nội dung này sẽ được nghiên cứu ở các chương sau).

Để có thể tính toán về độ bền của thanh chịu lực, cần phải biết ở mặt cắt nào của thanh nội lực có giá trị lớn nhất và quy luật biến thiên của từng thành phần nội lực dọc theo chiều dài thanh. Có nhiều cách xác định nội lực, trước hết ta nghiên cứu một phương án đơn giản nhất đã được giới thiệu ở §9 và §10.

Với mục đích cần thiết phải vẽ được đồ thị của các hàm nội lực, ta gọi các hàm nội lực theo các tọa độ là các biểu thức giải tích, còn đồ thị của chúng là các biểu đồ nội lực.

Ta hãy khảo sát một thanh chịu lực sau đây (hình 1.17a).

Căn cứ vào các ngoại lực đặt lên thanh, ta chia thanh thành các đoạn đánh số từ 1 đến  $n$ . Trên mỗi đoạn thứ  $i$  của thanh các hàm nội lực biến thiên liên tục theo cùng một quy luật trong đoạn đó.



Hình 1.17.

Để xác định nội lực tại mặt cắt có tọa độ  $z_i$  thuộc đoạn  $i$ , như đã làm trong §9 và §10, ta tưởng tượng cắt thanh làm hai phần bằng mặt cắt ngang  $i-i$  và khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần đã cắt ra, ví dụ phần trái, sau khi đã thay thế tác dụng của phần đã bỏ đi lên phần khảo sát bởi các thành phần nội lực. Các thành phần nội lực này được xác định từ một số hoặc tất cả các phương trình cân bằng (1.3) tùy thuộc vào đặc trưng tác dụng của ngoại lực và hình dạng thanh.

Để tiện lợi cho việc tính toán ta nên đặt các nội lực trên mặt khảo sát  $i-i$  theo chiều dương (hình 1.17b) như đã quy ước ở §10.

Các thành phần nội lực được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \sum F_z^T - N &= 0 ; \quad \sum F_x^T - Q_x = 0 ; \quad \sum F_y^T - Q_y = 0 \\ \sum m_x^T - M_x &= 0 ; \quad \sum m_y^T - M_y = 0 ; \quad \sum m_z^T - M_z = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Do đó ta nhận được các hàm nội lực cần tìm tại mặt cắt  $i-i$  phụ thuộc vào ngoại lực đặt ở phần trái của thanh và tọa độ  $z_i$  như sau:

$$\begin{aligned}
N &= \sum F_z^T = f_1(F^T, z_i); & Q_y &= \sum F_y^T = f_2(F^T, z_i) \\
Q_x &= \sum F_x^T = f_3(F^T, z_i); & M_x &= \sum m_x^T = f_4(F^T, z_i) \\
M_y &= \sum m_y^T = f_5(F^T, z_i); & M_z &= \sum m_z^T = f_6(F^T, z_i)
\end{aligned} \quad (1.6)$$

Các hàm này xác định trong miền  $a_{i-1} \leq z_i \leq a_i$ .

trong đó:

$F^T$  là ngoại lực tổng quát tác dụng lên phần thanh bên trái của mặt cắt  $i-i$ ;

$\sum F_z^T$ ,  $\sum F_y^T$ ,  $\sum F_x^T$  tương ứng là tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên đoạn thanh bên trái của mặt cắt  $i-i$  đang khảo sát lên các trục  $z, y, x$ ;

$\sum m_z^T$ ,  $\sum m_y^T$ ,  $\sum m_x^T$  tương ứng là tổng mômen của tất cả các ngoại lực tác dụng vào đoạn thanh này đối với các trục  $z, y, x$ .

Khi khảo sát không phải phần trái mà là phần phải của mặt cắt  $i-i$ , ta có:

$$\begin{aligned}
N &= -\sum F_z^P; & Q_x &= -\sum F_x^P; & Q_y &= -\sum F_y^P \\
M_x &= -\sum m_x^P; & M_y &= -\sum m_y^P; & M_z &= -\sum m_z^P
\end{aligned} \quad (1.7)$$

Trên cơ sở của các công thức nhận được dễ dàng xác định các hàm nội lực đối với mặt cắt bất kỳ, sau đó vẽ được các biểu đồ của chúng. Cần chú ý các công thức (1.6) chỉ khác với công thức (1.7) về dấu. Trong các tính toán thực hành cần phải chú ý đến điều này. Phương pháp xác định nội lực như trên thường được gọi là phương pháp mặt cắt.

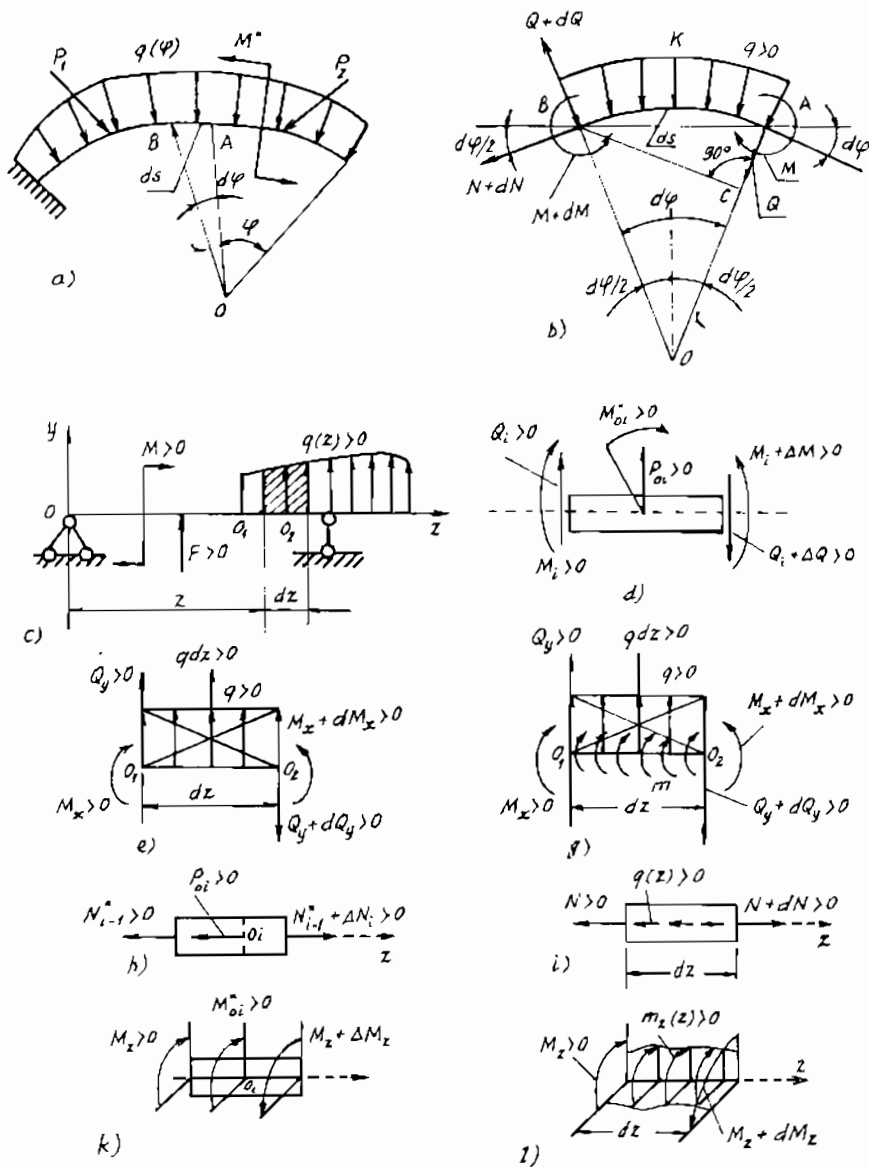
## §12. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC

### a) Trường hợp thanh cong

Giả sử thanh cong chịu lực như hình vẽ 1.18a. Để tìm mối liên hệ giữa nội lực và ngoại lực ta làm như sau. Ta tưởng tượng tách ra khỏi thanh một đoạn thanh rất bé có chiều dài  $dS$  bằng các mặt cắt

qua A và B vuông góc với trục thanh. Dưới tác dụng của các ngoại lực:  $q(\varphi)$ ,  $P_i$ ,  $M_i^*$  trong mặt phẳng chứa trục thanh, trên các mặt cắt ngang xuất hiện các nội lực tương ứng sau đây (hình 1.18b):

$$N, N + dN ; Q, Q + dQ ; M_x, M_x + dM_x$$



Hình 1.18.

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của phân tố  $dS = r d\varphi$  với các nội lực và ngoại lực như hình 1.18b, ta đi đến:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= -\frac{Q}{r} \\ \frac{dQ}{d\varphi} &= N + qr \\ \frac{dM}{d\varphi} &= Q \cdot r \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

Do  $r d\varphi = dS$  cho nên có thể viết (1.8a) dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dS} &= -\frac{Q}{r} \\ \frac{dQ}{dS} &= q + \frac{N}{r} \\ \frac{dM}{dS} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (1.8b)$$

*b) Trường hợp thanh thẳng*

Khi  $r = \infty$  thì trục cong  $S$  trùng với trục  $Z$  của thanh thẳng (hình 1.8c) và các quan hệ (1.8b) trở thành với quy ước chiều dương của ngoại lực và nội lực như từ hình 1.18c đến hình 1.18f).

- Uốn phẳng (hình 1.18c, d, e, g):

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i &= P_{oi} \\ \Delta M_i &= M_{oi}^* \\ \frac{dQ}{dz} &= q \\ \frac{dM}{dz} &= Q + m \\ \frac{d^2M}{dz^2} &= q + \frac{dm}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (1.8c)$$

- Thanh chịu kéo nén (hình 1.18h, i):

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_i &= P_{oiz} \\ \frac{dN}{dz} &= q(z) \\ \dots &\dots \\ \frac{d^n N}{dz^n} &= q^{(n-1)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.8d)$$

- Thanh chịu xoắn (hình 1.18k, l):

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_{zi} &= M_{oi}^* \\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z) \\ \dots &\dots \\ \frac{d^n M_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (1.8e)$$

Các kết quả từ (1.8a) đến (1.8e) được gọi là mối liên hệ vi phân giữa các ngoại lực với nội lực và nội lực với chính nội lực.

Ta có thể phát biểu các kết quả này đối với các thanh thẳng như sau:

1) Đạo hàm cấp một theo tọa độ  $z$  của lực cắt  $Q_y(z)$ ; lực dọc  $N_z(z)$ , mômen xoắn  $M_z(z)$  tương ứng bằng cường độ của tải trọng phân bố  $q_y(z)$ ,  $q_z(z)$ ,  $m_z(z)$  đặt tại mặt cắt tương ứng.

2) Đạo hàm cấp một theo hoành độ  $z$  của mômen uốn  $M_x$  bằng lực cắt  $Q_y(z)$  tại mặt cắt tương ứng.

3) Đạo hàm cấp hai theo hoành độ  $z$  của mômen uốn  $M_x(z)$  bằng cường độ tải trọng phân bố  $q_y(z)$  tại mặt cắt tương ứng.

4) Bước nhảy của lực cắt  $\Delta Q_y$ ,  $\Delta Q_x$ , của các mômen uốn  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ , của lực dọc  $\Delta N$  và của mômen xoắn  $\Delta M_z$  bằng chính vectơ tập trung tương ứng:  $P_{oiz}$ ,  $P_{oix}$ ,  $M_{oix}^*$ ,  $M_{oiz}^*$ ,  $P_{oiz}$ ,  $M_{oiz}^*$ .

## §13. QUY ƯỚC VỀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC VÀ CÁC NHẬN XÉT

### 1. Quy ước vẽ biểu đồ

Để vẽ biểu đồ nội lực ta quy ước chọn hệ trục tọa độ xyz đặt vào sơ đồ tính như sau: trục z trùng với trục thanh, trục y hướng xuống dưới, trục x hướng ra ngoài (hướng về phía người quan sát).

Đối với biểu đồ lực dọc  $N$  và mômen xoắn  $M_z$ , ta chọn tùy ý về một phía của trục thanh làm chiều dương của trục tung  $N$  hoặc  $M_z$ , phía ngược lại là âm.

Đối với các biểu đồ mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  các mômen uốn tương ứng làm căng thớ nào của thanh thì tung độ của các biểu đồ này được đặt về phía đó. Với quy ước dấu về nội lực đã nói ở §10 thì khi  $M_x > 0$  tung độ cần đặt ở phía dưới trục thanh (phía  $y > 0$ ), còn  $M_y > 0$  thì tung độ của nó cần đặt ở phía ngoài kể từ trục thanh (phía  $x > 0$ ).

Đối với các biểu đồ lực cắt: khi  $Q_y > 0$  thì tung độ của nó cần đặt lên phía trên trục thanh (phía  $y < 0$ ),  $Q_y < 0$  đặt phía dưới (phía  $y > 0$ ). Khi lực cắt  $Q_x > 0$  thì tung độ của nó cần đặt phía trong trục thanh (phía  $x < 0$ ), các tung độ âm của  $Q_x$  đặt ở phía ngoài trục thanh (phía  $x > 0$ ). Các quy ước về dấu của nội lực và cách vẽ biểu đồ của chúng cùng với các liên hệ vi phân đã mô tả trong §12 sẽ đặc biệt có lợi khi thực hành vẽ nhanh các biểu đồ nội lực và nó có ý nghĩa rất lớn khi bố trí vật liệu trong kết cấu.

### 2. Các nhận xét để vẽ nhanh và kiểm tra kết quả

Khi đi từ trái sang phải trên cơ sở của các liên hệ vi phân từ (1.8c đến 1.8e) ta có các nhận xét:

- Tại mặt cắt có đặt lực tập trung  $P_y$  hoặc  $P_z$ , biểu đồ lực cắt và lực dọc tương ứng có bước nhảy, trị số và chiều của bước nhảy, bằng trị số và chiều của lực tập trung đó.
- Tại mặt cắt có đặt mômen ngoại lực tập trung  $M'_x$  hoặc  $M'_z$ , các biểu đồ mômen uốn  $M_x$  và xoắn  $M_z$  tương ứng có bước nhảy chiều và trị số bước nhảy bằng chiều và trị số của vectơ mômen tập trung đó.

- Nếu trên đoạn trục nào đó chịu mômen xoắn ngoại lực phân bố  $m_z$  có dạng một đa thức bậc  $n$  thì trên đoạn đó biểu đồ mômen xoắn nội lực  $M_z(z)$  là một đường cong bậc  $(n + 1)$ .
  - Tương tự như vậy, nếu trên đoạn thanh mà  $q_z(z)$  hoặc  $q_y(z)$ , là một đa thức bậc  $n$  thì biểu đồ  $N_z$  và biểu đồ  $Q_y$  là một đường bậc  $(n + 1)$  và biểu đồ mômen uốn  $M_x$  là đường bậc  $(n + 2)$ . Tại  $z = z_0$  mà  $q_z(z_0) = 0$ ,  $q_y(z_0) = 0$  thì  $N$  và  $Q_y$  tương ứng đạt cực trị.
  - Nếu trên đoạn thanh có  $q_y > 0$  (hướng lên) thì  $Q_y$  đồng biến; nếu trên đoạn có  $q_y < 0$  (hướng xuống) thì  $Q_y$  nghịch biến.
  - Nếu trên đoạn thanh có  $Q_y > 0$  thì  $M_x$  đồng biến và nếu trên đoạn thanh có  $Q_y < 0$  thì  $M_x$  nghịch biến. Tại mặt cắt có  $Q_y = 0$  thì  $M_x$  đạt cực trị. Nếu  $q < 0$  thì biểu đồ  $M_x$  là đường cong lõm, còn nếu  $q > 0$  thì biểu đồ  $M_x$  là đường cong lồi.
- Những nhận xét nêu trên dùng để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực nhưng cũng đồng thời là những tiêu chí để kiểm tra tính đúng đắn của các biểu đồ nội lực được vẽ bằng bất kỳ phương pháp nào.

### 3. Các bước vẽ các biểu đồ nội lực

Biểu đồ nội lực (thường gặp là biểu đồ lực dọc, lực cắt, biểu đồ mômen xoắn, mômen uốn) là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực trên toàn thanh (hay kết cấu) khi thanh (hay kết cấu) chịu tác dụng ngoài. Nếu vẽ được biểu đồ nội lực thì ta dễ dàng thấy được độ lớn của nội lực trên tất cả các mặt cắt ngang của thanh (hay kết cấu).

Khi vẽ biểu đồ nội lực ta cần thực hiện các bước chính sau đây:

a. Xác định các phản lực liên kết (bằng cách lập các phương trình cân bằng tĩnh học theo các nguyên tắc cơ bản của vật rắn tuyệt đối hoặc các điều kiện biến dạng thực tại các liên kết).

b. Lập biểu thức giải tích của các nội lực ( $N_z$ ,  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x, \dots$ ) đối với một mặt cắt bất kỳ cho từng đoạn thanh bằng phương pháp nào đó thích hợp nhất.

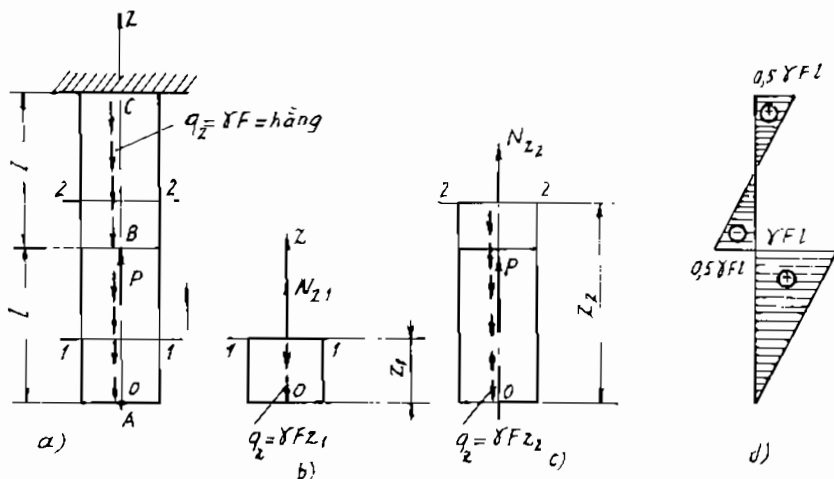
c. Trên cơ sở các biểu thức giải tích của nội lực, vẽ các biểu đồ của chúng theo chỉ dẫn ở mục 1, §13.



## §14. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

### Vi dụ 1

Cho một thanh thẳng đứng chịu tác dụng của trọng trường và lực  $P = 1,5\gamma.F.l$ , trong đó  $\gamma$  – trọng lượng riêng của vật liệu thanh,  $F$  – diện tích của mặt cắt ngang ;  $l$  – nửa chiều dài của thanh. Vẽ biểu đồ  $N(z)$ ?



Hình 1.19.

### GIẢI

Tưởng tượng cắt thanh tại mặt cắt 1-1 và giữ lại phần dưới và khảo sát điều kiện cân bằng:

$$\Sigma Z = 0 \rightarrow N_{z_1} - \gamma F \cdot z_1 = 0$$

Do đó:

$$N_{z_1} = \gamma F \cdot z_1 \text{ với } N_z > 0, 0 \leq z_1 \leq l$$

Tương tự như vậy, tại mặt cắt  $z_2$  (hình 1.19c) ta xét cân bằng phần dưới:

$$\Sigma Z = 0 \rightarrow N_{z_2} + P - \gamma F \cdot z_2 = 0$$

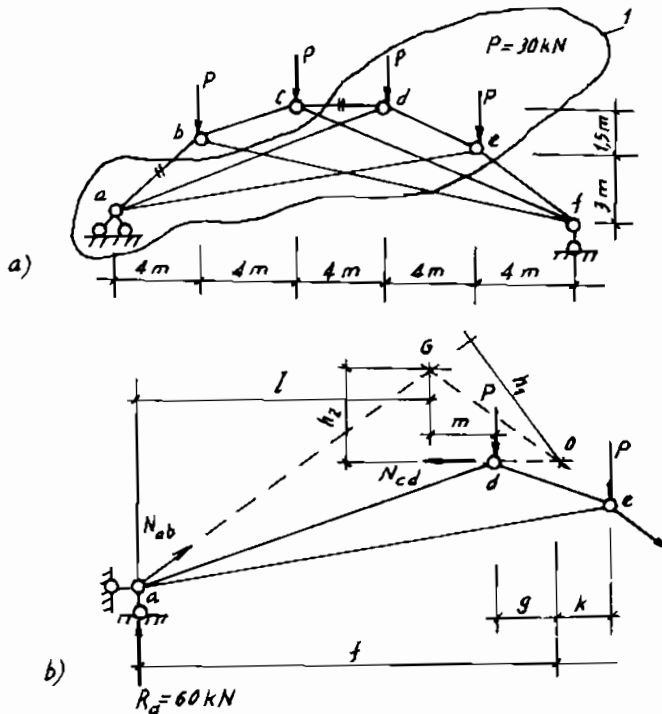
Suy ra:

$$N_{z2} = F\gamma(z_2 - 1,5l) \quad \text{với } l \leq z_2 \leq 2l$$

Vì các biểu thức  $N_{z1}$  và  $N_{z2}$  khác nhau nên rõ ràng không thể biểu diễn sự biến thiên của các lực dọc  $N_z$  trong toàn thanh bởi cùng một biểu thức. Sự khác nhau đó xảy ra tại các mặt cắt có lực tập trung đặt trùng với trục thanh hoặc có sự thay đổi đột ngột của trường lực phân bố dọc trục thanh. Dựa vào đặc điểm tác dụng của ngoại lực dọc theo thanh người ta chia thanh ra thành hai đoạn và lập biểu thức của  $N$  trên từng đoạn. Hình 1.19d là biểu đồ lực dọc  $N$  của thanh được khảo sát. Tại mặt cắt B có lực tập trung  $P = 1,5 \gamma Fl$  nên tại đó biểu đồ  $N$  có bước nhảy bằng  $\bar{P} < 0$ .

### Vi dụ 2

Một hệ khớp chịu lực như hình 1.20a. Hãy xác định lực dọc trong các thanh a-b và c-d đánh dấu trên hình 1.20a.



Hình 1.20.

## GIẢI

Để xác định  $N_{ab}$  và  $N_{cd}$  ta sẽ sử dụng phương pháp đã giới thiệu trong §10 với mặt cắt kín 1 qua các thanh cần tìm  $N$  và các thanh ef, cf, bf. Trong đó các thanh cf, bf bị cắt hai lần. Hệ cân bằng nên mỗi phần được tưởng tượng cắt ra cũng phải cân bằng. Ta xét điều kiện cân bằng của phần bị cắt nằm trong đường cong 1. Cụ thể là (hình 1.20b):

$$\sum m_0(\bar{P}) = 0 = R_a \cdot f + N_{ab} \cdot h_1 - P \cdot g + P \cdot k = 0 \Rightarrow N_{ab} = -175 \text{ kN}$$

trong đó:  $h_1 = 4,8 \text{ m}$ ,  $f = 14 \text{ m}$ ,  $g = 2 \text{ m}$ ,  $k = 2 \text{ m}$ ,  $R_a = 60 \text{ kN}$ .

$$\sum m_G(\bar{P}) = 0 = R_a \cdot l + N_{cd} \cdot h_2 + P \cdot m + P(m+4) = 0 \Rightarrow N_{cd} = 280 \text{ kN}$$

trong đó:  $l = 10 \text{ m}$ ,  $h_2 = 3 \text{ m}$ ,  $m = 2 \text{ m}$ .

### Ví dụ 3

Một dầm chịu lực cân bằng như hình 1.21a. Hãy viết biểu thức của  $M_x$ ,  $Q_y$  và vẽ  $(M_x)$ ,  $(Q_y)$  theo phương pháp mặt cắt đã giới thiệu ở các §10, §11.

## GIẢI

Thanh được chia làm hai đoạn, trên mỗi đoạn phải thực hiện một mặt cắt di động, trên đó các nội lực được đặt theo chiều dương. Khảo sát điều kiện cân bằng của một trong hai phần đã tưởng tượng cắt ra. Trong đoạn 1 – 2 thực hiện mặt cắt 1 – 1 gốc tọa độ chọn ở 2. Trong đoạn 0 – 1 thực hiện mặt cắt 2 – 2 gốc tọa độ chọn ở 2 (hình 1.21b, c).

Cụ thể là:

Đoạn 1 – 2 ( $0 \leq z_1 \leq 2a$ ) gốc ở 2:

$$q(z_1) = \frac{3qz_1}{3a} = \frac{qz_1}{a} ;$$

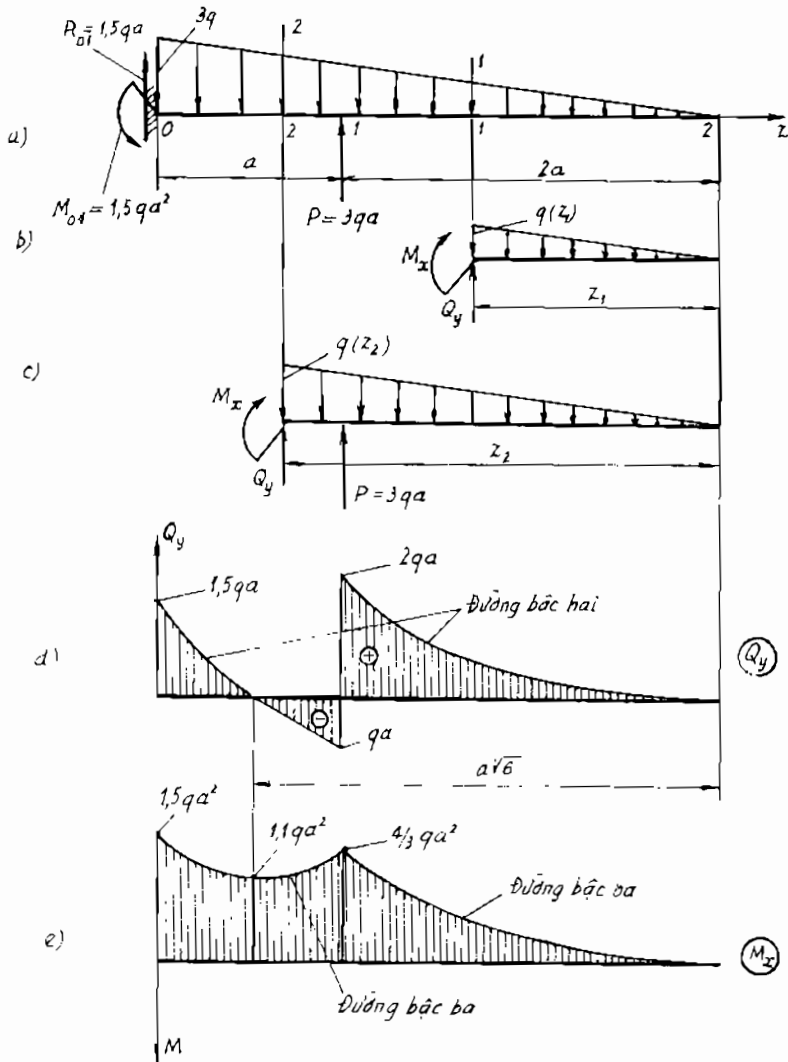
$$Q_y = \frac{q(z_1)z_1}{2} = -\frac{qz_1^2}{2a}$$

$$M_x = -\frac{q(z_1)}{2} \frac{z_1}{3} = -\frac{qz_1^3}{6a} \quad (a)$$

Đoạn 0 – 1 ( $2a \leq z_2 \leq 3a$ ) góc ở 2:

$$q(z_2) = \frac{3qz_2}{3a} = \frac{qz_2}{a};$$

$$Q_y = \frac{qz_2^2}{2a} - 3qa; \quad (b)$$



Hình 1.21.

$$M_x = -\frac{qz_2^3}{6a} + 3qa(z_2 - 2a).$$

Trước hết, vẽ biểu đồ lực cắt  $Q_y$ , ta thấy  $Q_y$  có giá trị bằng không trong đoạn 0 – 1, tại:

$$\frac{qz_2^2}{2a} - 3qa = 0 \Rightarrow z_2 = a\sqrt{6}$$

Tại mặt cắt này, mômen uốn  $M_x$  có giá trị cực trị

$$M_x(z_2 = a\sqrt{6}) = -q \frac{(a\sqrt{6})^3}{6a} + 2qa(a\sqrt{6} - 2a) = -1,1qa^2$$

Giá trị của  $Q_y$  và  $M_x$  tại  $z_2 = 3a$  cho ta giá trị phản lực tại ngàm "O". Cụ thể là:

$$R_{01} = 1,5qa; M_{01} = 1,5qa^2 \text{ chiều như hình 1.21a.}$$

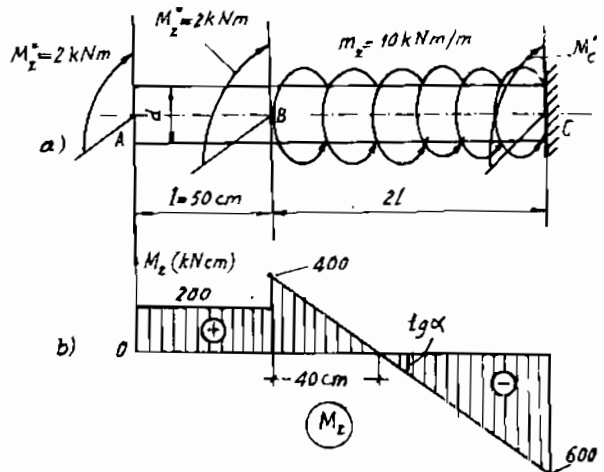
Biểu đồ ( $M_x$ ) và ( $Q_y$ ) được cho trên hình 1.21d, e.

#### Ví dụ 4

Một trục chịu xoắn như hình 1.22a. Hãy vẽ biểu đồ mômen xoắn  $M_z$  từ các nhận xét trong §13 và từ công thức (1.8e) về thanh chịu xoắn?

### GIẢI

Tại A và B có mômen tập trung dương với  $M_A^* = 200$  kNcm,  $M_B^* = 200$  kNcm, nên khi đi từ trái sang phải tại A biểu đồ  $M_z$  có bước nhảy theo chiều dương bằng 200 kNcm. Trên đoạn AB không có mômen



Hình 1.22.

phân bố ( $m_z = 0$ ) nên trên đoạn này  $M_z = \text{hằng} = 200 \text{ kNcm}$ . Tại B biểu đồ  $M_z$  cũng có bước nhảy dương  $\Delta M_B = M'_B = 200 \text{ kNcm}$ . Trên đoạn BC trục chịu mômen phân bố hằng  $m_z = -10 \text{ kNcm/cm}$ , nên biểu đồ  $M_z$  trong đoạn này là đường bậc nhất giảm (đi xuống) với hệ số góc  $\text{tg}\alpha = \frac{dM_z}{dz} = m_z = -10$ . Giao của đường thẳng xiên này với đường thẳng đứng qua c cho ta giá trị mômen xoắn phản lực ở ngàm c,  $M'_c = 600 \text{ kNcm}$ . Biểu đồ  $M_z$  được cho trên hình 1.22b.

### Ví dụ 5

Một dầm có sơ đồ hình học và liên kết như hình 1.23a. Cho biết biểu đồ mômen uốn. Hãy tái hiện lại sơ đồ tải trọng và vẽ biểu đồ lực cắt  $Q_y$ ?

### GIẢI

Trên cơ sở các liên hệ vi phân (1.8c) ta giải bài này như sau:

Trong đoạn 0 – 1, 1 – 2 và 2 – 3 biểu đồ mômen là những đoạn thẳng xiên cắt trục dầm. Cho nên trên các đoạn này biểu đồ  $Q$  là những đoạn thẳng song song với trục dầm. Trên đoạn 3 – 4 biểu đồ mômen là một parabol bậc 2, nên biểu đồ  $Q$  là một đoạn xiên, có tung độ bằng không tại vị trí  $M_{\text{max}} = 62,5 \text{ kNm}$ .

Từ liên hệ vi phân  $\frac{dM}{dz} = Q(z)$  ta có lực cắt trong các đoạn như sau:

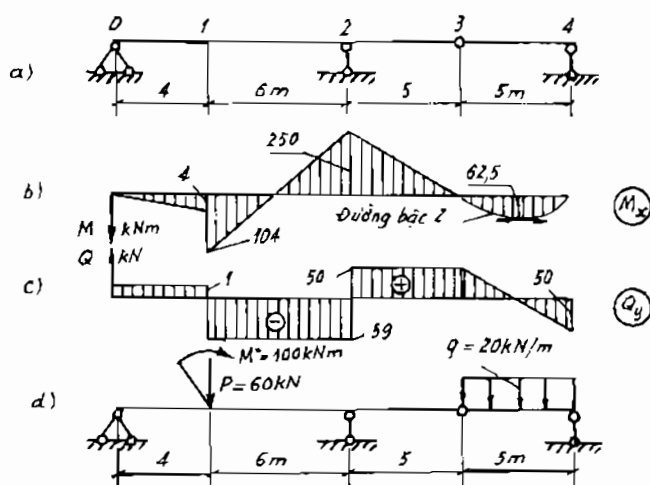
$$\text{Đoạn 0 – 1: } Q_{0-1} = \frac{dM_1}{dz} = \frac{4}{4} = 1 \text{ kN} > 0$$

$$\text{Đoạn 1 – 2: } Q_{1-2} = -\frac{dM_2}{dz} = -\frac{250+104}{6} = -59 \text{ kN} < 0$$

$$\text{Đoạn 2 – 3: } Q_{2-3} = \frac{dM_3}{dz} = \frac{250}{5} = 50 \text{ kN} > 0$$

Đoạn 3 – 4:

Tại 3 không có lực tập trung nên tại đó trên biểu đồ  $Q$  không có bước nhảy. Từ tung độ  $Q_3 = 50 \text{ kN}$  tại điểm 3 nối với  $Q = 0$  tại điểm giữa trên đoạn 3 – 4 và kéo dài ta được  $Q_4 = -50 \text{ kN} < 0$ .



Hình 1.23.

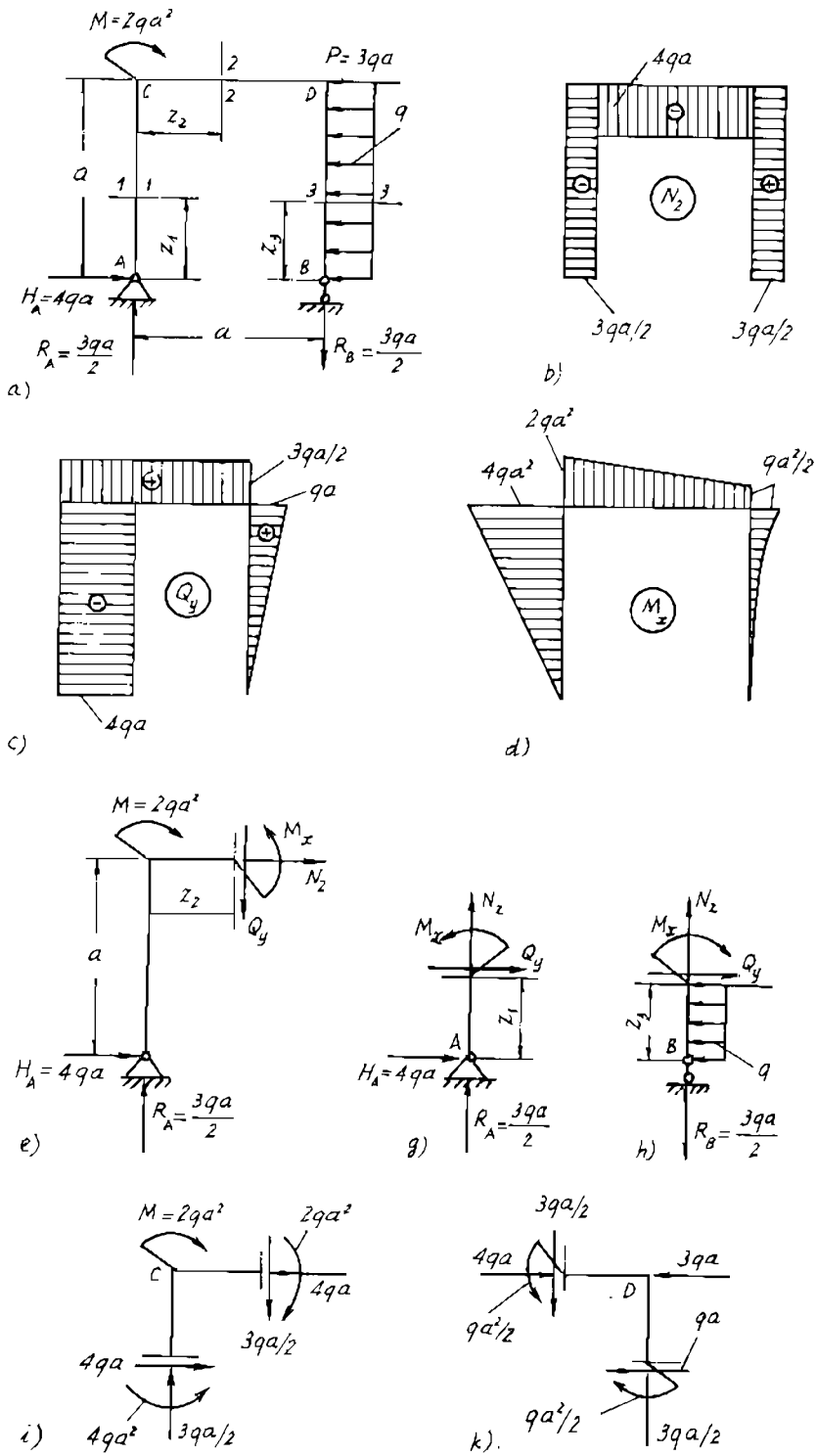
Các giá trị lực cắt tại 0, 1, 2, 4 chính là các phản lực liên kết và ngoại lực tập trung tại các điểm nói trên. Biểu đồ lực cắt được dựng lại trên hình 1.23c. Tại điểm 1 trên biểu đồ  $M$  có bước nhảy bằng 100 kNm từ trên xuống cho nên tại đây có mômen ngoại lực tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ. Trên đoạn 3 – 4 biểu đồ  $M$  là đường bậc 2 lồi và  $Q$  là bậc 1 giảm dần như trên hình 1.23b, c cho nên trên đoạn này ngoại lực phải âm và phân bố đều. Sơ đồ tải trọng được dựng lại trên hình 1.23d.

### Ví dụ 6

Vẽ biểu đồ nội lực trong khung tĩnh định bằng phương pháp mặt cắt cho trên hình 1.24a, sau đó kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ đã vẽ được.

### GIẢI

Để vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt trong khung, trước hết phải xác định các phản lực liên kết bằng điều kiện cân bằng. Cụ thể là:



Hình 1.24.



$$\sum m_A(\bar{P}) = 0 ; \quad \sum m_B(\bar{P}) = 0 ; \quad \sum X = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{3qa}{2} \downarrow ; \quad R_A = \frac{3qa}{2} \uparrow ; \quad H_A = 4qa$$

Tường tượng cắt khung tại các đoạn AC, CD, DB như hình 1.24a. Chiều của mômen uốn trên các thanh đứng AC, DB được chọn tùy ý, nếu kết quả tính toán là dương, vẽ tung độ của biểu đồ  $M_x$  về phía thứ căng của mômen đã chọn. Chiều dương của lực cắt và lực dọc vẫn theo qui ước như thanh thẳng:

Đoạn AC ( $0 \leq z \leq a$ ) (hình 1.14e):

$$N_z = -\frac{3qa}{2} ; \quad Q_y = -4qa ; \quad M_x = -4qa.z$$

Đoạn CD ( $0 \leq z_2 \leq a$ ) (hình 1.24g):

$$N_z = -4qa ; \quad Q_y = \frac{3qa}{2} ; \quad M_x = \frac{3qa}{2} z_2 + 2qa^2 - 4qa^2 = \frac{3qa}{2} z_2 - 2qa^2$$

Đoạn DB ( $0 \leq z_3 \leq a$ ) (hình 1.24h):

$$N_z = \frac{3qa}{2} ; \quad Q_y = qz_3 ; \quad M_x = -\frac{qz_3^2}{2}$$

Biểu đồ  $N_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  được vẽ trên hình 1.24b, c, d. Biểu đồ  $N_z$ ,  $Q_y$  có đánh dấu dương âm. Để kiểm tra kết quả vẽ biểu đồ, ta kiểm tra bằng cách xét cân bằng các nút C và D (hình 1.24i). Căn cứ biểu đồ nội lực, vẽ các nội lực tác dụng lên các nút. Nếu biểu đồ nội lực vẽ đúng thì các thành phần nội lực và ngoại lực cân bằng nhau. Cụ thể là các phân tử trên các hình 1.24e, g, h, i, k phải cân bằng.

### **Ví dụ 7**

Vẽ biểu đồ nội lực của một khung cho trên hình 1.25a.

## **GIẢI**

Phải thiết lập biểu thức của các nội lực trên mỗi mặt cắt di động (1-1) và (2-2) (hình 1.25a) để từ đó vẽ các biểu đồ nội lực cho từng đoạn. Khi đi ở trong khung từ 0 đến 2, mômen được xem là dương

nếu căng trong, căng phía ngoài là âm, lực cắt và lực dọc vẫn giữ quy ước như trong thanh thẳng. Do đó, để thuận tiện ta ngầm định các nội lực cần tính trên mỗi mặt cắt di động (1 - 1) và (2 - 2) trên các đoạn 0 - 1 và 1 - 2 tương ứng đều đặt theo chiều dương.

Đối với đoạn 0 - 1:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$N_1 = -P_2 = -\frac{3}{28} qa$$

$$Q_1 = P_1 - qz_1 = \frac{3}{7} qa - qz_1$$

$$M_1 = P_1 z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = \frac{3}{7} qaz_1 - q \frac{z_1^2}{2}$$

Đối với đoạn 1 - 2:  $0 \leq z_2 \leq a$

$$N_2 = \frac{3}{7} qa - qa = -\frac{4}{7} qa$$

$$Q_2 = \frac{3}{28} qa$$

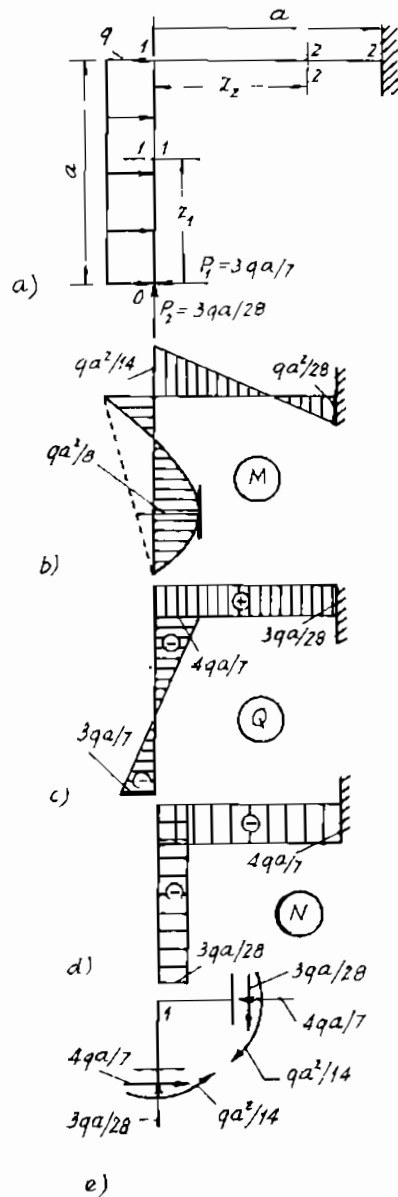
$$M_2 = -P_2 z_2 - P_1 a + q \frac{a^2}{2}$$

Biểu đồ M, Q, N được cho trên hình 1.25b, c, d.

Tính đúng đắn của các biểu đồ đã vẽ được thể hiện ở sự cân bằng nút "1" (hình 1.25e).

### Vi dụ 8

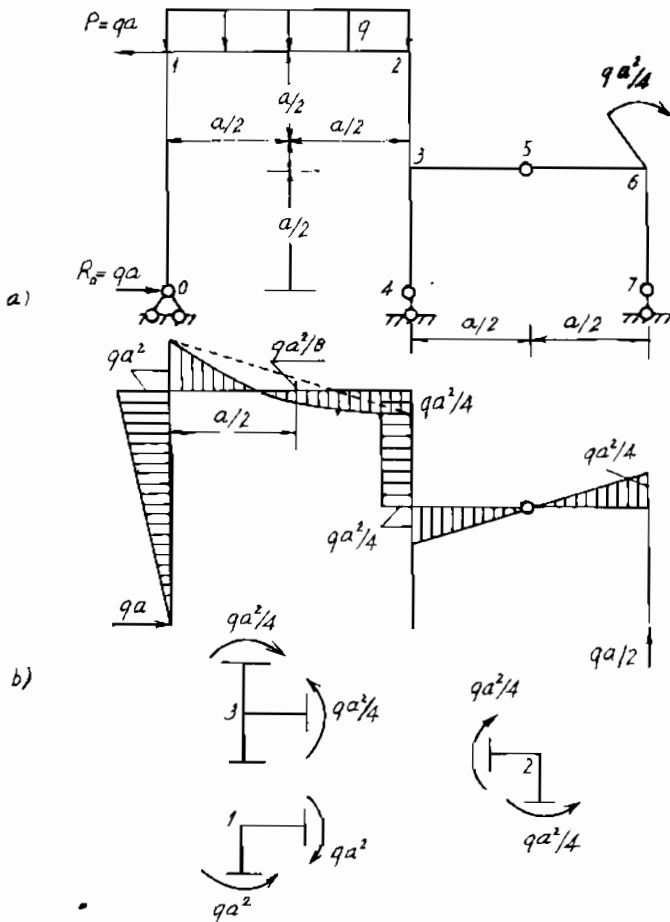
Một khung tính định cân bằng như hình 1.26a. Hãy vẽ nhanh biểu đồ M (không viết biểu thức của M cho các đoạn).



Hình 1.25.

## GIẢI

Nhận xét do liên kết như hình cho nên đoạn 3 – 4 và 6 – 7 không có mômen. Tại khớp 5 không có mômen, tại điểm 6 có mômen tập trung quay thuận kim đồng hồ, tại đây biểu đồ M có bước nhảy bằng  $qa^2/4$  căng trên. Biểu đồ M trên đoạn 3 – 6 là đường xiên qua khớp 5.



Hình 1.26.

Từ điều kiện cân bằng nút 3, suy ra mômen đoạn 2 – 3 là hằng, căng trong.

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của khung ta xác định được phản lực tại 0, như hình 1.26a. Mômen tại 1 thuộc đoạn 0 – 1 căng ngoài và có giá trị:  $q\alpha^2$ . Điều kiện cân bằng nút 1 và 2 cho ta các tung độ và chiều căng của M tại mặt cắt 1 và 2 thuộc đoạn 1 – 2. Các nhận xét trên cho phép vẽ biểu đồ M như hình 1.26b.

### Ví dụ 9

Một thanh cong một phần tư vòng tròn chịu lực  $q$  phân bố đều theo phương thẳng đứng (hình 1.27a). Hãy vẽ các biểu đồ N, Q, M?

### GIẢI

Nội lực trên mặt cắt ngang có tọa độ  $\varphi$  so với phương thẳng đứng do lực sơ cấp  $dP = qdS = qp d\alpha$  (hình 1.27b).

$$dN = -dP \sin \varphi = qp \sin \varphi d\varphi;$$

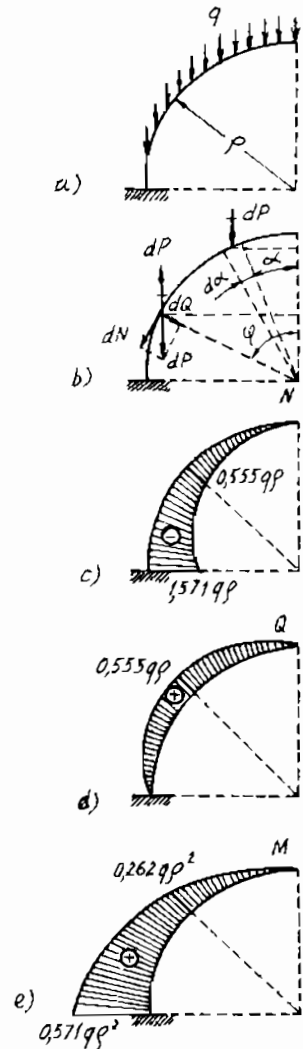
$$dQ = dP \cos \varphi = qp \cos \varphi d\varphi;$$

$$\begin{aligned} dM &= dP \cdot \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) = \\ &= qp^2 (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Nội lực do toàn bộ ngoại lực tác dụng lên phần khảo sát từ  $0 \div \varphi$  (phần trên) (hình 1.27b):

$$N = -qp \sin \varphi \int_0^\varphi d\alpha = -qp\varphi \sin \varphi;$$

$$Q = qp \cos \varphi \int_0^\varphi d\alpha = qp\varphi \cos \varphi;$$



Hình 1.27.

$$M = q\rho^2 \int_0^\varphi (\sin \varphi - \sin \alpha) d\alpha =$$

$$= q\rho^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1);$$

tại  $\varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0$ ; tại  $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow N_{\pi/4} \approx -0,555 q\rho$

tại  $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N_{\pi/2} = -q\rho \frac{\pi}{2} = -1,571 q\rho$ .

Tương tự:

$$Q_0 = 0; \quad Q_{\pi/4} \approx 0,555 q\rho; \quad Q_{\pi/2} = 0$$

$$M_0 = 0; \quad M_{\pi/4} \approx q\rho^2 \left( \frac{\pi}{4} 0,707 + 0,707 - 1 \right) \approx 0,262 q\rho^2$$

$$M_{\pi/2} = q\rho^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 0,57 + q\rho^2$$

Biểu đồ N, Q, M được cho trên hình 1.27c, d, e.

### ***Vi dụ 10***

Một thanh cong là một nửa vòng tròn bán kính R chịu tải trọng phân bố đều q theo phương tiếp tuyến (hình 1.28a). Hãy vẽ các biểu đồ N, Q, M.

## **GIẢI**

Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi mặt cắt ngang phương hướng kính và phương ngang thì hợp lực của lực sơ cấp tại đây là:

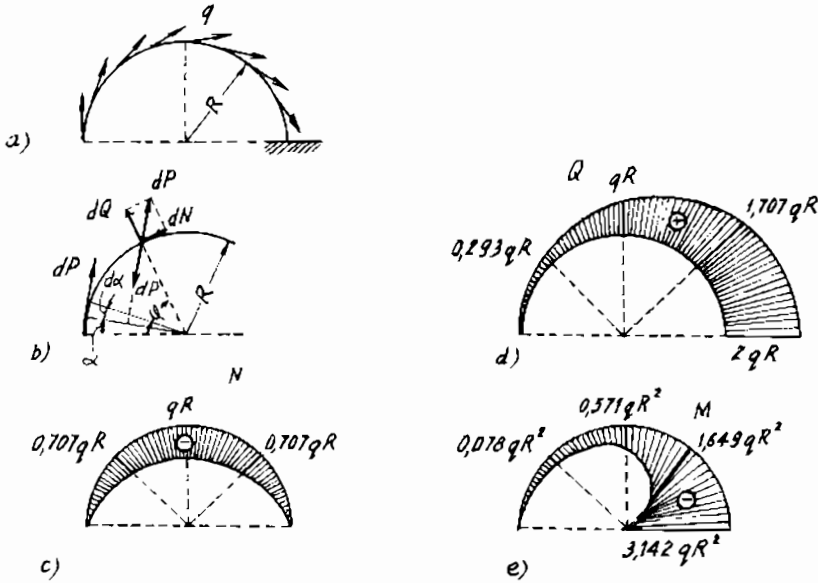
$$dP = qdS = qRd\alpha$$

Các nội lực sơ cấp tại mặt cắt  $\varphi$  do dP gây ra là:

$$dN = -dP \cos(\varphi - \alpha) = -qR \cos(\varphi - \alpha) d\alpha$$

$$dQ = dP \sin(\varphi - \alpha) = qR \sin(\varphi - \alpha) d\alpha$$

$$dM = -dP [R - R \cos(\varphi - \alpha)] = -qR^2 [1 - \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha$$



Hình 1.28

Nội lực tổng cộng tại  $\varphi$  do toàn bộ tải trọng  $q$  tác dụng trên phần từ  $0 \div \varphi$  là:

$$N = -qR \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha = -qR \sin \varphi$$

$$Q = qR \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) d\alpha = qR (1 - \cos \varphi)$$

$$M = -qR^2 \left[ \int_0^{\varphi} d\alpha - \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) d\alpha \right] = qR^2 (\sin \varphi - \varphi);$$

tại  $\varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0 ; Q_0 = 0 ;$

$$M_0 = 0$$

tại  $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow N_{\pi/4} = -0,707 qR;$

$$Q_{\frac{\pi}{4}} = 0,293 qR ; M_{\pi/4} = -0,0789 R^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$N_{\frac{\pi}{2}} = -qR ; Q_{\pi/2} = qR ;$$

$$M_{\pi/2} = -0,571 qR^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$N_{\frac{3\pi}{4}} = 0,707 qR;$$

$$Q_{\frac{3\pi}{4}} = 1,707 qR;$$

$$M_{\frac{3\pi}{4}} = -1,649 qR^2.$$

$$\text{Tại } \varphi = \pi$$

$$N_{\pi} = 0 ; Q_{\pi} = 2qR;$$

$$M_{\pi} = -3,142 qR^2.$$

Các biểu đồ N, Q, M được cho trên hình 1.28c, d, e.

### ***Ví dụ 11***

Một thanh cong hình êlip  $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}$  hở tại "O", chịu áp lực

q. Hãy xác định nội lực tại mặt cắt có tọa độ x, y bất kỳ theo q, a, b đã biết và biểu thức nội lực khi  $a = b$ ? (hình 1.29a).

## **GIẢI**

Do tính đối xứng với trục Ox nên ta chỉ cần khảo sát một nửa phía trên. Gọi  $q_x$ ,  $q_y$  là hình chiếu của q lên các phương x, y. Nguyên lý cộng tác dụng cho ta:

$$N = qy \cos\beta - qx \sin\beta$$

$$Q = qx \cos\beta - qy \sin\beta$$

$$M = -\frac{q}{2} (x^2 + y^2).$$

Chú ý đến:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dx}{dy} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

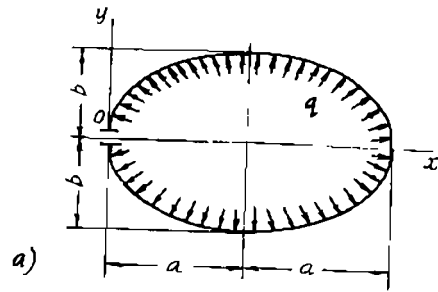
ta có:

$$\sin\beta = \frac{a-x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

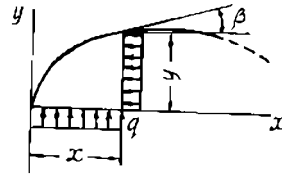
$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{b} \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

Do đó:

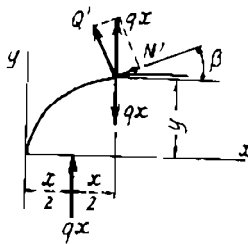
$$N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} (2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$



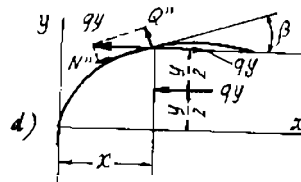
a)



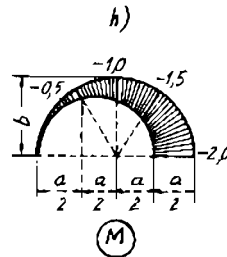
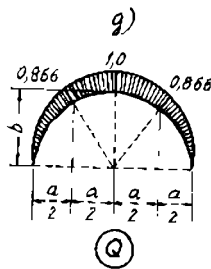
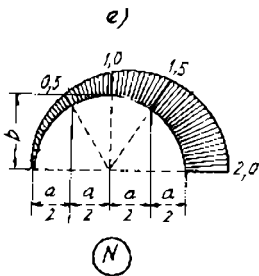
b)



c)



d)



Hình 1.29.



$$Q = \frac{q \left[ \frac{a}{b}x + \frac{b}{a}(a-x) \right] \sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(2ax-x^2) + (a-x)^2}}$$

$$M = -\frac{q}{2} \left[ \frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2) + x^2 \right].$$

Khi  $a = b$  ta có một thanh cong tròn hở tại "O". Trong trường hợp riêng này ta có:

$$N = q.x ; \quad Q = q\sqrt{2ax-x^2} ; \quad M = -qax$$

Biểu đồ lực dọc N, lực cắt Q và mômen M được cho trên hình 1.29e, g, h.

## CHƯƠNG 2

### ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

---

Để đảm bảo cho hệ làm việc được an toàn về độ bền, độ cứng và độ ổn định thì ta cần phải biết đặc tính ứng xử của từng loại vật liệu trong các điều kiện chất tải khác nhau. Điều này chỉ có thể giải quyết bằng con đường thí nghiệm. Các thí nghiệm này cho ta các đặc trưng bằng số của từng loại vật liệu. Những đặc trưng như thế gọi là đặc trưng cơ học của vật liệu. Từ những đặc trưng này người ta tìm những điều kiện toán học để đảm bảo sự làm việc an toàn cho hệ.

Thí nghiệm thường dùng nhất là thí nghiệm kéo và nén. Vì kết quả của thí nghiệm này có thể ứng dụng cho những trường hợp biến dạng khác nhau. Trong mục này chúng ta lần lượt nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén đối với vật liệu khác nhau.

Các vật liệu cổ điển được chia làm hai loại là vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

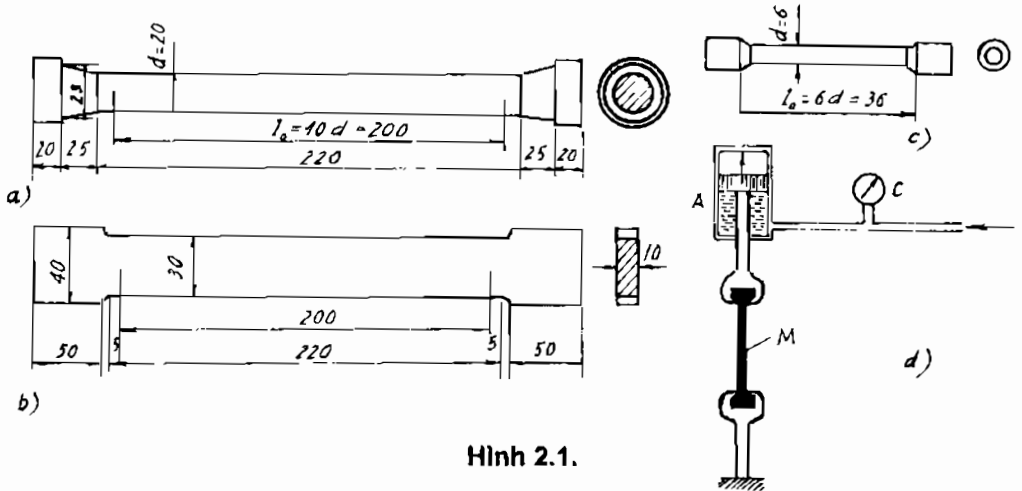
– Vật liệu dẻo là vật liệu có biến dạng dư (biến dạng dẻo) tương đối lớn trước khi cấu kiện bị phá hủy (như thép, đồng...).

– Vật liệu giòn là vật liệu hầu như không có biến dạng dư trước lúc bị phá hỏng (gang, gạch, đá, bê tông v.v...).

Nói một cách chính xác không phải về vật liệu dẻo hay giòn mà là về sự phá hủy chúng là phá hủy dẻo hay giòn.

## §1. THÍ NGHIỆM KÉO VẬT LIỆU DẸO

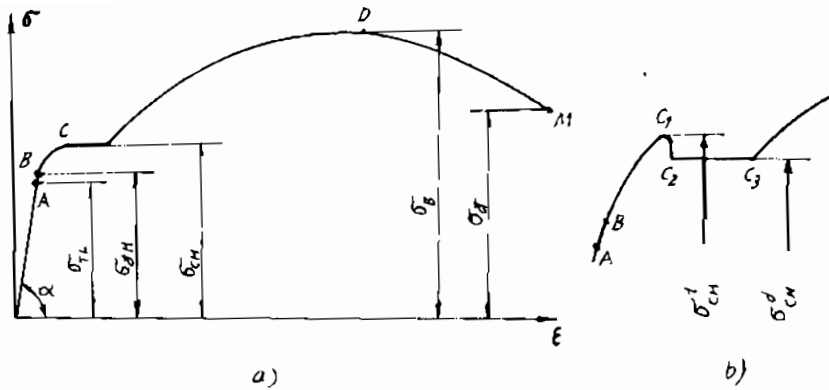
Để tiến hành thí nghiệm trước hết phải chế tạo các mẫu thí nghiệm theo tiêu chuẩn từng nước. Trên hình 2.1 là những mẫu thử tròn và dẹt được dùng ở Việt Nam.



Hình 2.1.

Phần thanh có chiều dài  $l_0$ , gọi là phần làm việc của mẫu. Thiết bị tạo lực kéo mẫu trong thí nghiệm có thể là các thiết bị cơ khí hoặc thủy lực. Hình 2.1d là sơ đồ nguyên lý của máy thí nghiệm có thiết bị thủy lực. Nhờ áp lực dầu trong trụ A tăng lên từ từ mà piston được nâng lên và tạo ra lực kéo trong mẫu M. Lực kéo mẫu có thể xác định bởi giá trị cho trên đồng hồ đo áp lực C.

Để có những kết quả thí nghiệm chuẩn xác, sau khi kẹp chặt mẫu vào máy, người ta cho lực kéo mẫu tăng chậm chậm từ giá trị không. Quá trình biến dạng của mẫu được máy vẽ thành biểu đồ ( $\sigma - \epsilon$ ) trên hình 2.2. Ta thấy chiều dài mẫu tăng dần, chiều ngang hẹp dần cho đến khi lực kéo P đạt trị số cực đại  $P_0$ , thì có một chỗ nào đó trên mẫu bị thắt hẳn lại (ứng với điểm D). Sau đó thanh tiếp tục bị giãn dài trong khi lực kéo giảm dần và đến một giá trị  $P_a$  nào đó (ứng với điểm M) thì mẫu bị đứt tại chỗ thắt. Biểu đồ quan hệ giữa lực kéo P và độ giãn U gọi là biểu đồ kéo của vật liệu.



Hình 2.2.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu các thuộc tính của vật liệu, người ta sử dụng biểu đồ quan hệ  $(\sigma - \epsilon)$ . Biểu đồ  $(\sigma - \epsilon)$  nhận được trực tiếp từ biểu đồ  $(P - U)$  bằng cách chia tung độ  $P$  cho diện tích mặt cắt ngang ban đầu  $F_0$  của mẫu và chia hoành độ  $U$  cho chiều dài ban đầu  $l_0$ . Quan hệ  $\sigma = f(\epsilon)$  đối với thép CT3 có biểu đồ lực kéo như trên hình 2.2 với các điểm đặc trưng A, B, C, D và M. Biến dạng kéo của vật liệu gồm 3 giai đoạn chính sau:

*\* Giai đoạn thứ nhất*

Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối, quan hệ  $\sigma = f(\epsilon)$  là quan hệ tuyến tính được biểu diễn bởi đoạn thẳng OA:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.1)$$

Giai đoạn này gọi là giai đoạn tỷ lệ. Quan hệ (2.1) được gọi là định luật Húc khi kéo.  $E$  là môđun đàn hồi dọc (hay Young) của vật liệu. Gọi  $P_{\text{đ}}$  là giá trị lớn nhất của lực kéo trong giai đoạn này và  $F_0$  là diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu thử, ta có:

$$\sigma_{\text{đ}} = \frac{P_{\text{đ}}}{F_0} \quad (2.2)$$

Ứng suất  $\sigma_{\text{đ}}$  gọi là giới hạn tỷ lệ (đối với thép CT3,  $\sigma_{\text{đ}} = 21 \text{ kN/cm}^2 \approx 210 \text{ MN/m}^2$ ).

Độ dốc của đoạn OA xác định bằng môđun đàn hồi  $E$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Kể từ trên điểm A biểu đồ không còn quan hệ tuyến tính nữa và từ đó định luật Húc mất hiệu lực. Ở rất gần điểm A trên đoạn cung này của biểu đồ có một điểm B, ứng suất ứng với nó ký hiệu là  $\sigma_{dh}$  và được gọi là giới hạn đàn hồi. Trong các tiêu chuẩn kỹ thuật  $\sigma_{dh}$  được xác định khi mà biến dạng dư của mẫu thử đạt được 0,05% và viết  $\sigma_{dh} = \sigma_{0,05}$ .

#### *\*Giai đoạn thứ hai*

Biến dạng đồng biến với lực chút ít rồi tăng rõ rệt trong khi lực không tăng được nữa (đoạn nằm ngang kể từ C). Ta gọi đoạn này là giai đoạn chảy dẻo. Lực kéo ứng với giai đoạn này được ký hiệu là  $P_{ch}$ .

$$\text{Ứng suất:} \quad \sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (2.4)$$

được gọi là giới hạn chảy (đối với thép CT3,  $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2 \approx 240 \text{ kN/m}^2$ ).

Trong giai đoạn chảy, nếu quan sát mẫu làm bằng thép ít cacbon được mài nhẵn, ta thấy những vết gợn nghiêng với trục thanh một góc  $45^\circ$ . Đó là những vết gây ra do sự trượt giữa các tinh thể vật liệu. Những vết trượt này được gọi là đường Liudertrenop.

#### *\*Giai đoạn thứ ba*

Sau khi kết thúc giai đoạn chảy dẻo, trong vật liệu lại xuất hiện khả năng "tự củng cố". Cụ thể là biến dạng chỉ có thể tăng nếu lực kéo mẫu tăng. Biểu đồ trong giai đoạn này là một đường cong trơn.

Ứng suất với điểm D cao nhất trong giai đoạn này gọi là giới hạn bền.

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.5)$$

(đối với thép CT3,  $\sigma_B = 40 \text{ kN/cm}^2 \approx 400 \text{ kN/m}^2$ ).

Sau khi đạt giới hạn bền thì có một chỗ nào đó trên mẫu thử bị thất lại và từ lúc đó biến dạng tiếp tục tăng nghịch biến với lực cho đến khi mẫu bị đứt ứng với điểm M.

Cần lưu ý rằng giới hạn bền được quy định ở trên chỉ mang một đặc trưng quy ước nào đó. Giới hạn bền này không phải là ứng suất gây ra sự phá hủy vật liệu. Bởi vì, khi phá hủy mặt cắt ngang của mẫu thử nhỏ hơn nhiều so với mặt cắt ngang ban đầu của nó.

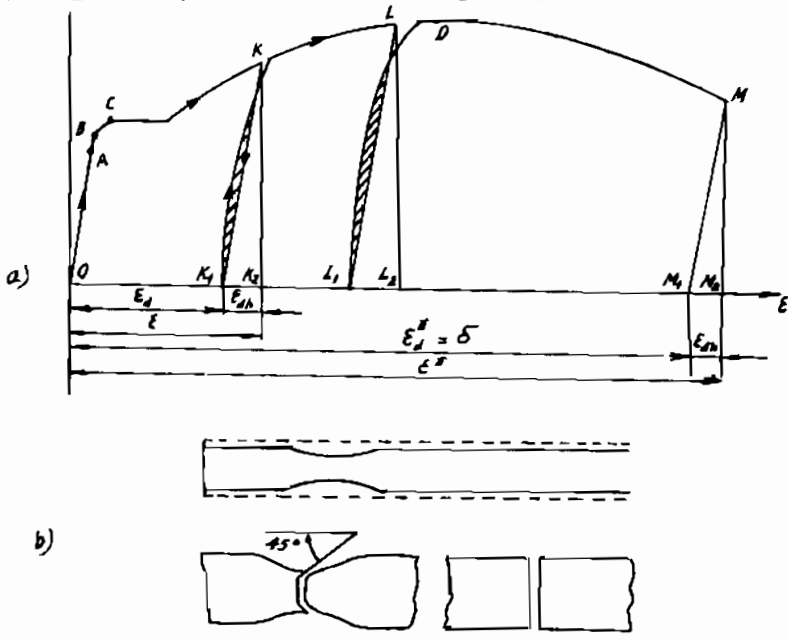
Nếu bắt đầu từ một điểm K nào đó trên biểu đồ (hình 2.3), ta hạ tải cho mẫu thì biểu đồ  $(\sigma - \epsilon)$  diễn ra theo đường  $KK_1$  hầu như song song với đoạn OA. Biến dạng tỷ đối của mẫu ứng với điểm K là:

$$\epsilon = OK_2 = OK_1 + K_1K_2 = \epsilon_d + \epsilon_{dh}$$

trong đó:  $OK_1 = \epsilon_d$  là phần biến dạng dư;

$K_1K_2 = \epsilon_{dh}$  là phần biến dạng đàn hồi.

Nếu sau khi hạ tải đến điểm  $K_1$ , ta lại tăng tải lên mẫu thì biểu đồ diễn ra theo đường cong  $K_1KDM$  thay cho đường cong OACDM ứng với mẫu lúc ban đầu chưa hạ tải lần nào. Qua biểu đồ cho thấy khi đã chất tải vào mẫu quá giới hạn chảy và sau đó là quá trình hạ tải thì thuộc tính cơ học của vật liệu mẫu bị thay đổi. Cụ thể là thêm chảy biến mất, giới hạn tỷ lệ được nâng cao và biến dạng toàn phần khi đứt bị giảm ( $K_1M_2 < OM_2$ ), nghĩa là mẫu thử hình như trở nên giòn hơn. Sự thay đổi thuộc tính như vậy của vật liệu được gọi là hiện tượng (hoá giòn hoặc tái bền) biến cứng nguội.



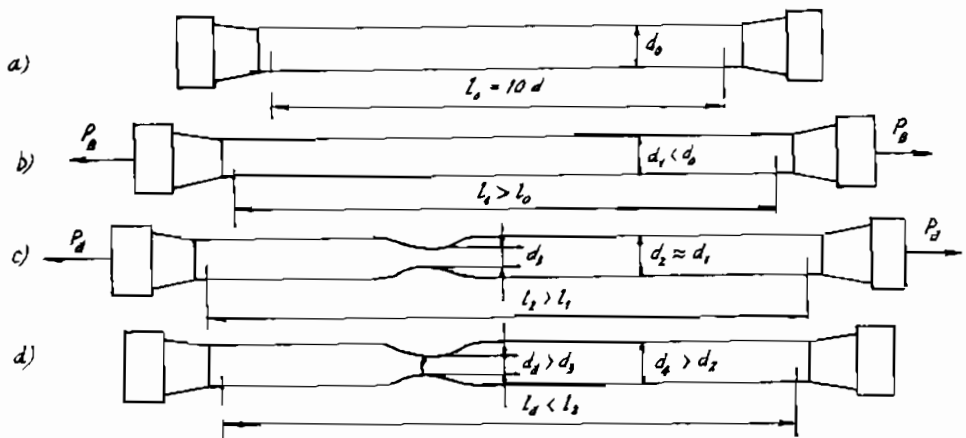
Hình 2.3.

Phần diện tích gạch sọc trên biểu đồ gọi là miền trể. Hiện tượng tái bền không chỉ phát sinh khi chịu biến dạng kéo (nén) mà còn phát sinh ở bất kỳ loại biến dạng nào.

Nếu lặp lại quá trình hạ tải rồi tăng tải ở điểm L nào đó thì biểu đồ ( $\sigma - \epsilon$ ) lặp lại hoàn toàn hiện tượng đã mô tả ở trên.

Tính song song của các đoạn OA, K<sub>1</sub>K, L<sub>1</sub>L, M<sub>1</sub>M chứng tỏ là khi hạ tải môđun đàn hồi dọc của vật liệu không thay đổi.

Một vài hình ảnh của một mẫu thử tiêu chuẩn ở những thời điểm khác nhau, khi thử kéo cho trên (hình 2.4).



Hình 2.4.

Trong đó:

a là hình ảnh mẫu trước thí nghiệm;

b là hình ảnh mẫu chịu ứng suất nhỏ hơn giới hạn bền;

c là hình ảnh trước khi đứt;

d là hình ảnh mẫu sau khi đứt.

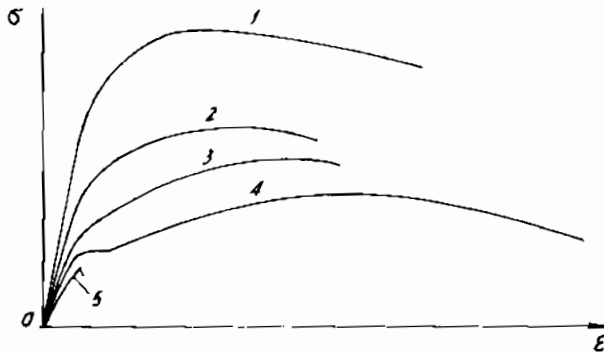
Sau khi đứt biến dạng đàn hồi không còn nữa, vì thế  $l_d < l_2$ .

Các ứng suất đặc trưng cho ba giai đoạn biến dạng khảo sát ở trên, cụ thể  $\sigma_{el}$ ,  $\sigma_{ch}$ ,  $\sigma_B$ , được gọi là những đặc trưng về độ bền của vật liệu. Để xác định khả năng về biến dạng của vật liệu cho đến lúc đứt, người ta căn cứ vào hai đại lượng sau đây:

- Độ dài dư tương đối của mẫu sau khi đứt:

$$\delta = \frac{l_d - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l_d}{l_0} \quad (2.6)$$

(đối với thép CT3,  $\delta = 21 \div 23\%$ ).



Hình 2.5.

- Độ thất dư tương đối của mặt cắt ngang nơi bị đứt:

$$\psi = \frac{F_0 - F_d}{F_0} = \frac{\Delta F_d}{F_0} \quad (2.7)$$

ở đây:  $F_0$  – diện tích mặt cắt ngang của mẫu trước biến dạng;

$F_d$  – diện tích mặt cắt ngang của mẫu tại chỗ bị đứt (đối với thép CT3,  $\psi \approx 60 \div 70\%$ ).

Để thấy rõ đặc điểm làm việc khác nhau trong suốt quá trình biến dạng kéo của những vật liệu khác nhau, ta hãy quan sát và so sánh các biểu đồ kéo được vẽ trên cùng hệ tọa độ ( $\sigma - \epsilon$ ). Trên hình 2.5, đường 1 là thép hợp kim titan, đường 2 là thép CT6, đường 3 là đũa 16, đường 4 là thép CT3 và đường 5 là biểu đồ kéo một mẫu gang xám.

Ngày nay việc tạo ra những thép có độ bền cao với tính dẻo dầy đủ là một nhiệm vụ rất quan trọng của các nhà luyện kim. Điều đó



cất nghĩa rằng, khi thép có cường độ cao thì tính dẻo giảm và thép trở nên giòn hơn. Và, nếu như vậy khả năng chịu tải trọng động của loại vật liệu này sẽ bị giảm. Để khắc phục những mâu thuẫn nói trên, người ta thường pha vào thép những lượng nhất định của các chất phụ trợ như đồng, niken, crôm v.v... Những thép như thế được gọi là thép hợp kim.

## §2. THÍ NGHIỆM KÉO VẬT LIỆU GIÒN

Vật liệu giòn chịu kéo rất kém, nên bị phá hỏng đột ngột ngay khi độ giãn còn rất nhỏ. Nhìn biểu đồ đường 4 (hình 2.6) ta thấy không có giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy dẻo, biểu đồ là một đường cong ngay từ khi ứng suất còn rất nhỏ. Tuy vậy, trong giới hạn làm việc, thông thường đối với vật liệu giòn, vẫn có thể áp dụng định luật Húc, nghĩa là thay thế gần đúng đoạn cong của biểu đồ bằng một đoạn thẳng. Với vật liệu giòn ta chỉ có giới hạn bền là:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.8)$$

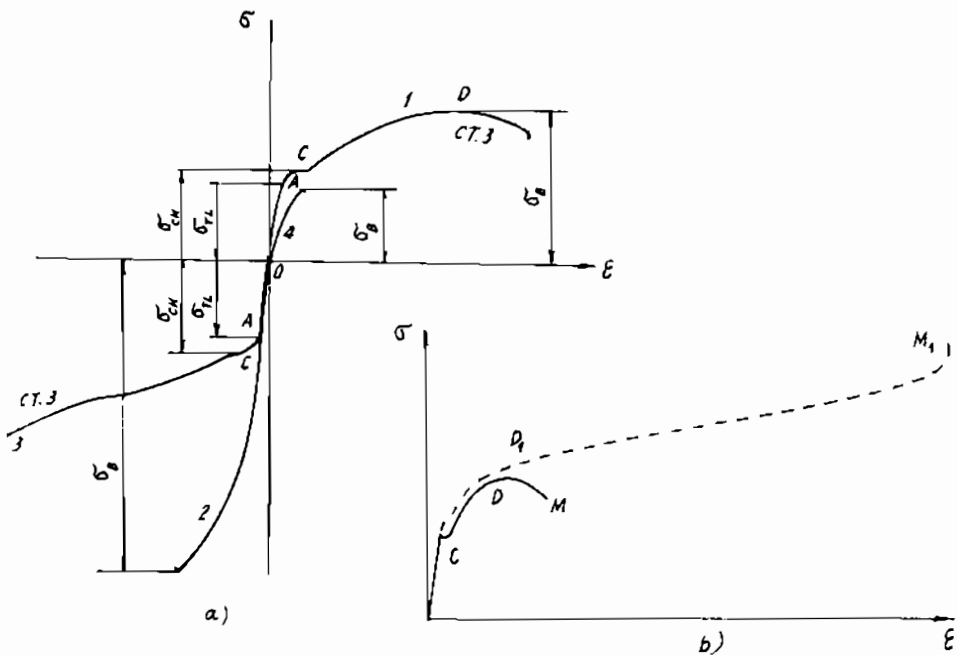
Môđun đàn hồi E khi ấy gọi là môđun đàn hồi cát tuyến.

Nếu đem so sánh với vật liệu dẻo thì giới hạn này nhỏ hơn nhiều.

Khi bị nén vật liệu cũng bị phá hủy ngay khi biến dạng còn bé, nhưng giới hạn bền có trị số lớn hơn nhiều so với khi kéo.

**Ví dụ:** đối với gang xám, khi kéo  $\sigma_{Bk} = 0,12 \div 0,38 \text{ kN/mm}^2$ , khi nén  $\sigma_{Bn} = 0,60 \div 1,5 \text{ kN/mm}^2$ .

Biểu đồ ( $\sigma - \epsilon$ ) thực và quy ước đối với thép ít cacbon được cho trên (hình 2.6b). Qua đây ta thấy biểu đồ thực ( $\sigma - \epsilon$ ) chỉ có ý nghĩa lý thuyết. Bởi vì, trong các tính toán thực hành, ứng suất tính toán không được vượt quá giới hạn chảy và trong giới hạn này biểu đồ thực và quy ước trùng nhau.



Hình 2.6.

### §3. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU KHI NÉN

Để nghiên cứu sự ứng xử của vật liệu dẻo và giòn khi nén, người ta phải làm các thí nghiệm nén. Các mẫu thử nén bằng kim loại có dạng hình trụ (thông thường  $d = h = 20 \text{ mm}$ ), còn đối với các loại vật liệu khác, mẫu thử có dạng hình lập phương cạnh là  $a$ .

Đối với gỗ:  $a = 50 \text{ mm}$ , xi măng  $a = 70 \text{ mm}$ , bê tông  $a = 200 + 300 \text{ mm}$ .

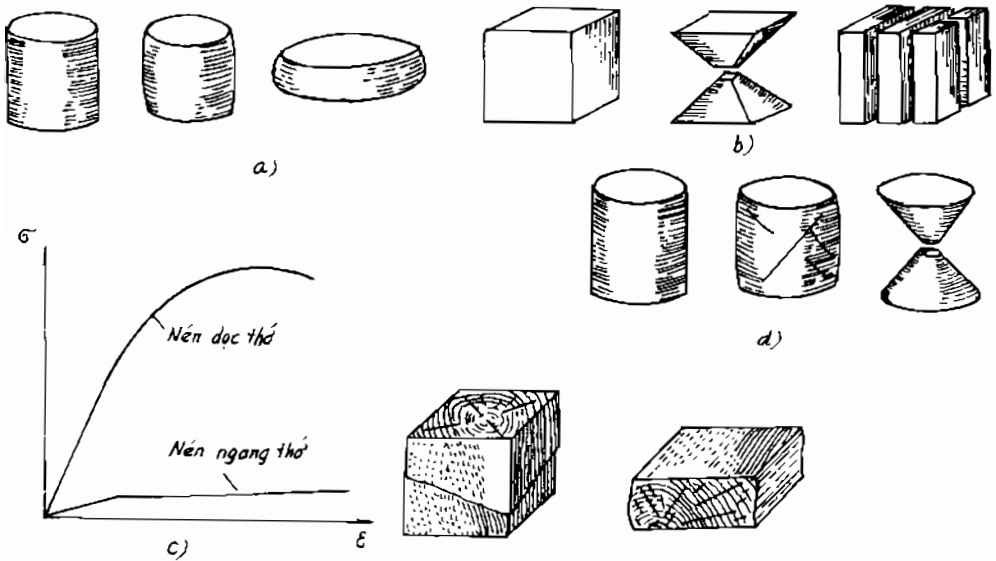
Biểu đồ  $(\sigma - \epsilon)$  của vật liệu dẻo được cho bởi đường 3, còn biểu đồ nén  $(\sigma - \epsilon)$  của vật liệu giòn được biểu diễn bằng đường 2 trên hình 2.6a. Trên hình 2.7 là những hình dạng của các loại mẫu thử dẻo và giòn ở các thời điểm khác nhau trong quá trình biến dạng. Đặc trưng cơ học chủ yếu nhận được từ các thí nghiệm nén này là:

– Vật liệu dẻo có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy:

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0} \quad \text{và} \quad \sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (2.9)$$

– Vật liệu giòn chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.10)$$



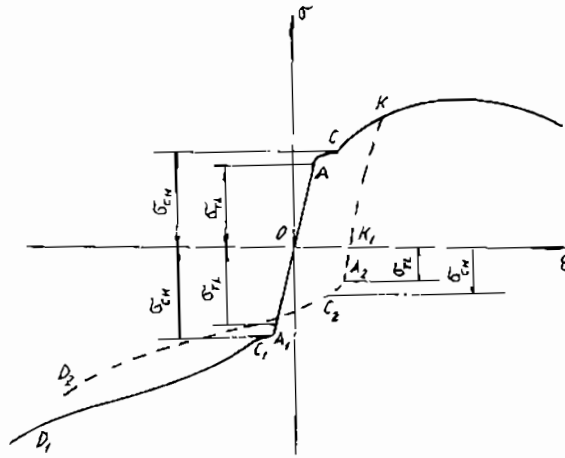
Hình 2.7.

Trên hình 2.7a là hình ảnh biến dạng của một mẫu thép chịu nén, trên hình 2.7b là hình ảnh của một mẫu bê tông hình lập phương chịu nén trước và sau khi bị phá hủy. Quá trình chịu nén của hai mẫu thử bằng gỗ dọc thớ và ngang thớ được mô tả trên hình 2.7c. Trên hình 2.7d là hình ảnh biến dạng của một mẫu gang chịu nén cho đến lúc phá hủy.

#### §4. HIỆU ỨNG BAO-XING-GHE VÀ HỆ SỐ POÁT-XÔNG

##### 1. Hiệu ứng Bao-xing-ghe

Một hiện tượng cơ học rất đặc biệt và thú vị xảy ra đối với một mẫu thử kéo làm bằng vật liệu có tính dẻo, khi đã đạt được biến dạng dẻo thì quá trình hạ tải về không diễn ra và sau đó là quá trình chất tải ngược dấu (nén). Ta hãy khảo sát quá trình này qua biểu đồ ứng suất khi kéo và nén một mẫu thép (hình 2.8).



Hình 2.8.

Nếu bắt đầu từ một điểm K nào đó của biểu đồ kéo, mẫu bị hạ tải theo đường  $KK_1$  và từ điểm  $K_1$  mẫu được chất tải ngược dấu (nén) thì biểu đồ diễn ra theo đường  $K_1A_2C_2D_2$  và hầu như song song với biểu đồ nén của một mẫu không bị kéo trước  $OA_1C_1D_1$ . Khi chưa có biến dạng dẻo trong một mẫu thử kéo và nén thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy của chúng là như nhau, nhưng khi mẫu kéo đang làm việc ở trạng thái dẻo mà ta lại hạ tải và nén tiếp tục như đã mô tả ở trên thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy khi nén bị giảm đáng kể. Nghĩa là, sau khi kết thúc giai đoạn chảy dẻo và khả năng tự củng cố của vật liệu xuất hiện mà vật liệu lại chịu biến dạng ngược dấu thì giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy bị giảm. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng Bao-xing-ghe.

## 2. Hệ số Poát-xông hay hệ số biến dạng ngang

Bằng thí nghiệm S. D. Poisson (Poát – xông) đã tìm thấy mối tương quan giữa độ lớn và dấu giữa biến dạng dọc và ngang tỷ đối như sau:

$$\varepsilon_x = -\mu\varepsilon_y$$

$\mu$  được gọi là hệ số Poát – xông và có giá trị từ 0 đến 0,5.

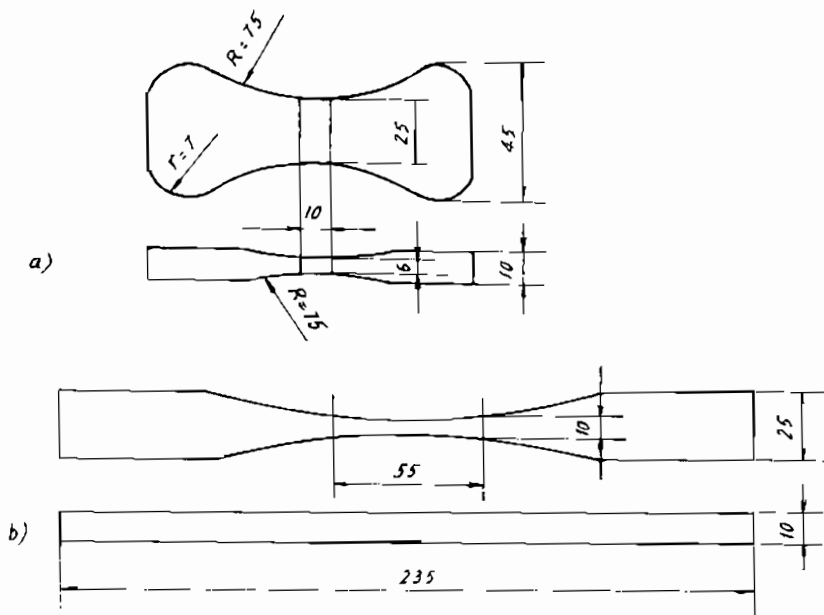
## §5. ĐẶC TRUNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU MỚI

Trong những năm gần đây các loại vật liệu tổng hợp như các chất dẻo, cao su, nhựa và sơn được sử dụng rất nhiều trong kỹ thuật. Đặc biệt một số lớn các chất dẻo khác nhau đã được sử dụng rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật và đời sống.

Những chất dẻo có thuộc tính thuận nghịch được gọi là chất nhiệt dẻo. Loại này thường có môđun đàn hồi thấp và khả năng chịu kéo cao (ví dụ, pôlyêtylen có  $E = (1,5 \div 2,5) \cdot 10^3 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\delta = 150 \div 600\%$ ).

Những chất dẻo có thuộc tính không thuận nghịch được gọi là chất cứng dẻo. Chất dẻo này có môđun đàn hồi cao và tính chịu kéo kém (ví dụ, nhựa êpôcxy có  $E = (30 \div 40) \cdot 10^3 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\delta = 2,5 \div 8\%$ ). Đối với tuyệt đại đa số các trường hợp, ngoài thành phần pôlyme trong chất dẻo còn chứa các thành phần phụ (chất độn). Vật liệu độn được sử dụng với mục đích làm giảm lượng tiêu thụ pôlyme và làm tăng độ bền của chất dẻo. Các chất độn này thường được sử dụng dưới dạng bột (tre, gỗ, đá...), dạng sợi (bông, thủy tinh...) và dạng lá (giấy, vải bông, vải thủy tinh...). Thuộc tính cơ học của chất dẻo phụ thuộc nhiều vào sự bố trí và thành phần chất độn. Ví dụ, giới hạn bền khi kéo của chất dẻo phenôn không có chất độn là  $350 \text{ daN/cm}^2$ , có độn bột gỗ là  $400 \text{ daN/cm}^2$ , có độn vải thủy tinh là  $2800 \text{ daN/cm}^2$  và có độn sợi thủy tinh định hình là  $3000 \text{ daN/cm}^2$  còn CBAM 10:1 là  $9000 \div 9500 \text{ daN/cm}^2$  (10 sợi dọc, một sợi ngang với công nghệ nung chảy nhựa êpôcxy và ép đồng thời). Các chất dẻo dạng lớp sợi và dạng lớp vải có độ bền cao hơn các loại bố trí khác với cùng một loại chất dẻo và công nghệ gia công. Có thể giải thích điều này như sau: Những sợi rất mảnh dùng làm cốt trong các mẫu chất dẻo nói trên thì bền hơn các mẫu dạng khối cùng vật liệu. Các chi tiết càng mảnh thì khuyết tật do chế tạo càng giảm và do đó độ bền của chúng càng cao và ngược lại.

Khác với mẫu thí nghiệm làm bằng vật liệu cổ điển, các mẫu thí nghiệm làm bằng vật liệu mới (hình 2.9a) chế tạo bằng cách ép, chỉ các mẫu làm bằng chất dẻo dạng lớp sợi và dạng lớp vải mới có thể chế tạo bằng công nghệ tiện hoặc mài (hình 2.9b).



Hình 2.9.

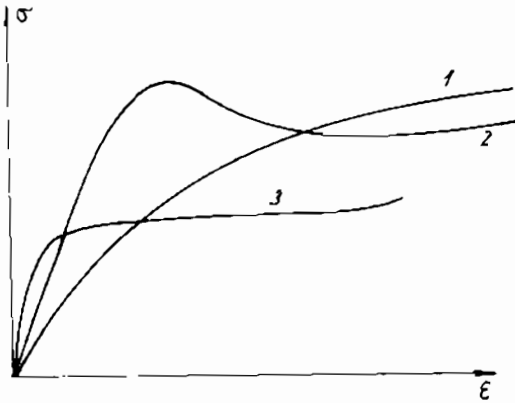
Để thấy rõ sự khác biệt về giới hạn bền khi kéo, trọng lượng riêng và độ bền riêng của một vài vật liệu khác nhau, bạn đọc có thể tham khảo bảng 2.1.

Bảng 2.1

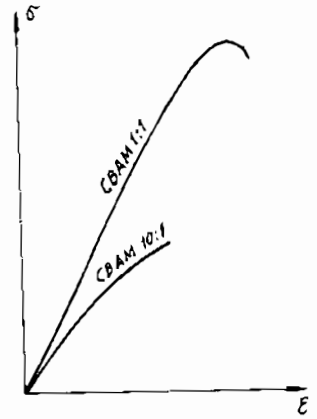
Tên vật liệu	Giới hạn bền kéo, daN/mm <sup>2</sup>	Trọng lượng riêng, g/cm <sup>3</sup>	Độ bền riêng (daN/mm <sup>2</sup> )/(g/cm <sup>3</sup> )
Thép cacbon CT3	40	7,85	5,1
Hợp kim titan BT4	85	4,5	18,9
Vải thủy tinh nhựa êpôcxyl CBAM 1:1	5,0	1,9	26,3
Vải thủy tinh nhựa êpôcxyl CBAM 10:1	90	1,9	47,4
Tếchtôlít ПTK	10	1,35	7,4

Trên hình 2.10 và hình 2.11 là một số biểu đồ kéo của chất nhiệt dẻo (1-pôlyêtylen; 2-polyprôpulen; 3 - polyvyninlorit) và CBAM 1:1 và CBAM 10:1.

Vật liệu cao su đóng một vai trò quan trọng trong kỹ thuật. Cao su gồm nhiều chủng loại như cao su mềm, cao su cứng, cao su chịu nhiệt, cao su chịu dầu v.v... Trên hình 2.12 là biểu đồ kéo cao su mềm (đường liên tục là quá trình chất tải, đường gián đoạn là quá trình hạ tải).

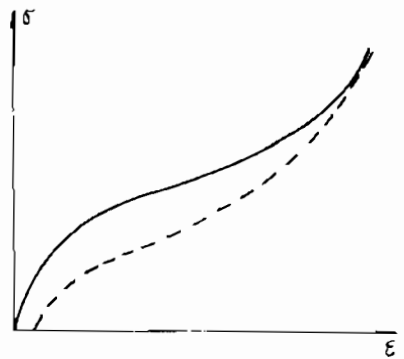


Hình 2.10.



Hình 2.11.

Đối với cao su này giới hạn bền là  $\sigma_B \approx 4,5 \text{ MN/m}^2$ , biến dạng khi đứt  $\epsilon_d = 400\%$ , còn biến dạng dư khi đứt  $\delta = 20\%$ . Từ biểu đồ cho thấy môđun đàn hồi của cao su là một đại lượng biến thiên. Ứng với  $\epsilon = 200\%$  thì  $E = E_{\min} = 0,4 \text{ MN/m}^2$  và ứng với lúc đứt  $E = E_{\max} \approx 8 \text{ MN/m}^2$ . Hệ số Poát - xông  $\mu$  cũng là đại lượng biến thiên.  $\mu_{\max} = 0,45$  khi  $\epsilon = 10\%$  và  $\mu_{\min} = 0,11$  khi đứt, còn đối với cao su nguyên chất  $\mu = 0,5$ .



Hình 2.12.

## §6. CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

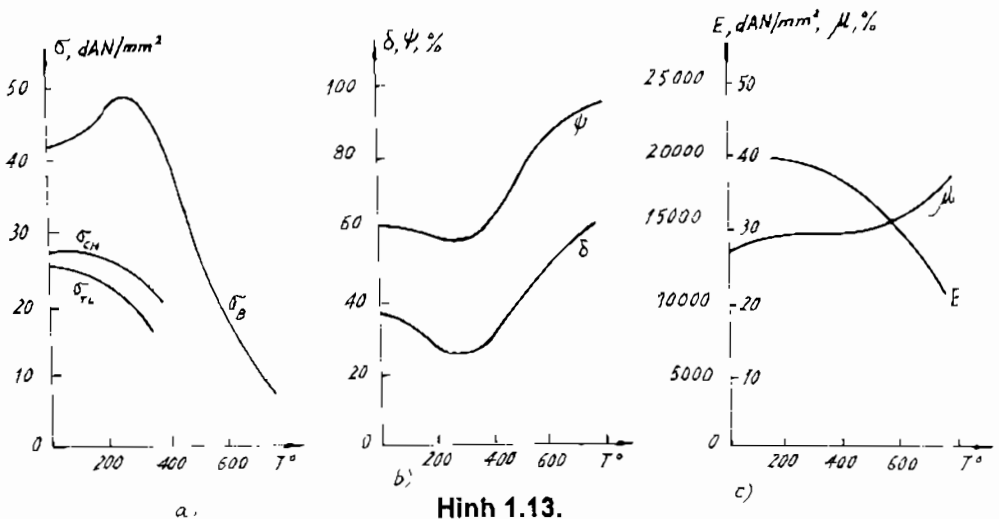
Các số liệu thí nghiệm về đặc trưng cơ học của vật liệu được giới thiệu trong các tiết trên của chương này là những số liệu thí nghiệm được tiến hành ở nhiệt độ trong phòng ( $20^{\circ}\text{C}$ ). Tuy nhiên, rất nhiều chi tiết máy và cấu kiện công trình làm việc ở chế độ nhiệt rất cao (tuốcbin khí, nồi hơi, động cơ đốt trong, động cơ phản lực, v.v.). Tuyệt đại đa số các vật liệu khi nâng cao nhiệt độ thì các đặc trưng về độ bền ( $\sigma_B$ ,  $\sigma_{ch}$ ,  $\sigma_U$ ) bị giảm, còn khi hạ thấp nhiệt độ thì các đặc trưng này lại tăng. Ngược lại, các đặc trưng dẻo ( $\delta$ ,  $\psi$ ) khi nâng cao nhiệt độ thì các đặc trưng này tăng, còn khi hạ nhiệt độ thì chúng giảm. Các hằng số vật liệu  $E$  tăng khi nhiệt độ giảm còn  $\mu$  giảm khi nhiệt độ giảm, còn khi tăng nhiệt độ thì hiện tượng này diễn ra ngược lại. Một số vật liệu lại không tuân thủ quy luật nói trên. Ví dụ như khi nung nóng thép cacbon, ban đầu giới hạn bền tăng và đạt được giá trị lớn nhất ở nhiệt độ  $300^{\circ}\text{C}$  ( $\sigma_{B300^{\circ}} = 1,2 \sigma_{B20^{\circ}}$ ), sau đó lại giảm ( $\sigma_{B400^{\circ}} = \sigma_{B20^{\circ}}$ ,  $\sigma_{B600^{\circ}} = 0,4 \sigma_{B20^{\circ}}$ ). Môđun đàn hồi khi tăng nhiệt độ ban đầu giảm chậm, sau đó giảm rất nhanh ( $E_{600^{\circ}} = 0,7 E_{20^{\circ}}$ ,  $E_{800^{\circ}} = 0,5 E_{20^{\circ}}$ ), còn khi làm lạnh  $E$  lại tăng ( $E_{200^{\circ}} = 1,1 E_{20^{\circ}}$ ). Hệ số  $\mu$  tăng khi thép được nung nóng, còn  $\mu$  giảm khi thép bị làm lạnh. Trên hình 2.13a là quan hệ nhiệt độ và  $\sigma_B$ ,  $\sigma_{ch}$ ,  $\sigma_U$ , trên hình 2.13b là quan hệ  $\delta$ ,  $\psi$  và nhiệt độ, còn trên hình 2.13c là quan hệ  $E$ ,  $\mu$  và nhiệt độ đối với thép dẻo cacbon. Đặc biệt khi nung nóng các chất dẻo và cao su thì giới hạn bền của chúng giảm rất nhanh (ví dụ, chất dẻo vinyl  $\sigma_{B100^{\circ}} = 0$ ). Khi làm lạnh các chất dẻo này trở nên giòn và các đặc trưng dẻo của chúng bị giảm.

Trong các tiết trên chúng ta đã khảo sát quá trình chất tải lên mẫu là quá trình chất tải tĩnh. Nếu quá trình chất tải diễn ra trong một khoảng thời gian ngắn thì biến dạng dẻo không kịp phát triển. Trên hình 2.14 là biểu đồ ứng suất kéo đến trạng thái dẻo một mẫu thép cacbon với quá trình chất tải tĩnh 1 và động 2. Từ các biểu đồ này rõ ràng là các đặc trưng bền và dẻo của cùng một loại thép phụ thuộc vào tốc độ chất tải. Với tốc độ chất tải cao, các vật liệu có tính dẻo thì quá trình biến dạng



Đối với các vật liệu có tính dẻo, giới hạn bền giảm đáng kể khi chịu tác dụng của nhiệt độ cao và của tải trọng dài hạn. Trên hình 2.15,  $\sigma_B^*$  là giới hạn bền tức thời,  $\sigma_B$  là giới hạn bền theo thời gian hay giới hạn bền dài lâu.

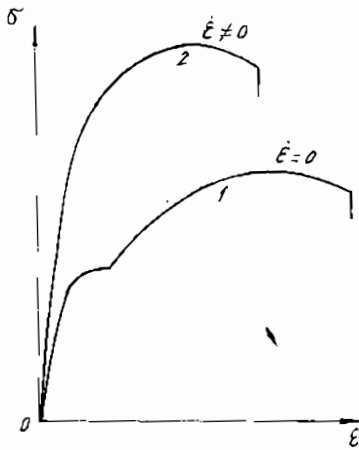
Người ta gọi độ bền dài lâu của vật liệu là ứng suất phá hủy mẫu sau một thời gian dài tác dụng của ứng suất ở một nhiệt độ nhất định. Giới hạn bền dài lâu được ký hiệu  $\sigma$  với hai chỉ số. Chỉ số trên chỉ nhiệt độ thí nghiệm, °C, chỉ số dưới cho biết thời gian thí nghiệm đến khi phá hủy, giờ. Ví dụ,  $\sigma_{10}^{700}$  là giới hạn bền dài lâu khi thí nghiệm ở nhiệt độ 700°C, trong một thời gian 1000 giờ.



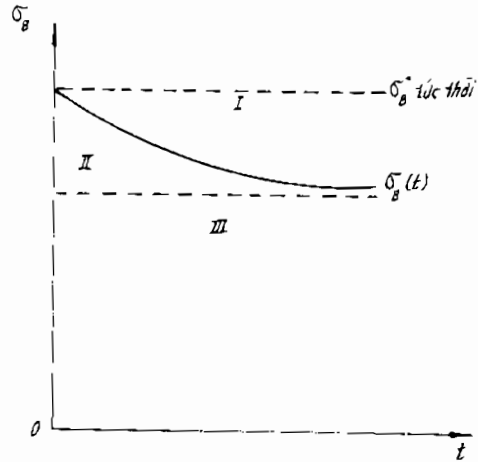
Hình 1.13.

Những điểm nằm trong miền I của đồ thị tương ứng với các ứng suất mà thanh chịu kéo không thể chịu được, vì  $\sigma > \sigma_B$ . Những điểm nằm trong miền II tương ứng với các ứng suất mà thanh có thể chịu được trong một khoảng thời gian cho đến khi sự phá hủy xuất hiện. Các điểm nằm trong miền III có ứng suất  $\sigma < \sigma_B$  và vì vậy không xảy ra sự phá hủy. Tương tự như vậy, biến dạng xảy ra trong thanh chịu lực gồm hai phần: biến dạng tức thời  $\epsilon_1$  và biến dạng đàn nhớt do chất tải dài hạn  $\epsilon_2$ . Tổng của hai biến dạng này là biến dạng dài lâu  $\epsilon_t$ :

$$\epsilon_t = \epsilon_1 + \epsilon_2$$



Hình 2.14.



Hình 2.15.

Nếu khi ấy ứng suất lớn hơn giới hạn bền dài lâu thì biến dạng dẻo phát sinh  $\epsilon_d$ . Biến dạng này cùng với biến dạng dài lâu  $\epsilon_t$  tạo thành biến dạng toàn phần:

$$\epsilon = \epsilon_t + \epsilon_d$$

## §7. XÁC ĐỊNH ĐỘ CỨNG CỦA VẬT LIỆU

Trong một số trường hợp để đánh giá độ bền tức thời ta có thể sử dụng phương pháp gián tiếp thông qua độ cứng của vật liệu. Độ cứng của vật liệu là khả năng chống đâm xuyên lên bề mặt của vật khảo sát từ một vật rắn khác có độ cứng lớn hơn.

Để xác định độ cứng người ta ép lên vật đo một vật có dạng hình cầu, hình nón hoặc hình tháp. Căn cứ vào vết lõm trên vật đo người ta xác định được độ cứng của vật liệu chế tạo ra nó. Phương pháp xác định độ cứng phổ biến nhất là phương pháp Brinel (hình 2.16). Cụ thể là, người ta ép một viên bi hình cầu đường kính  $D$  lên vật thí nghiệm với một lực bằng  $P$  trong một thời gian nhất định. Sau khi bỏ lực nén  $P$  người ta đo đường kính vết lõm trên vật thí nghiệm. Số độ cứng Brinel HB được xác định bằng tỷ số lực  $P$ , daN và diện tích bề mặt vết cầu lõm,  $\text{mm}^2$ , hoặc theo công thức:

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \text{ daN/mm}^2 \quad (2.12)$$

trong đó:

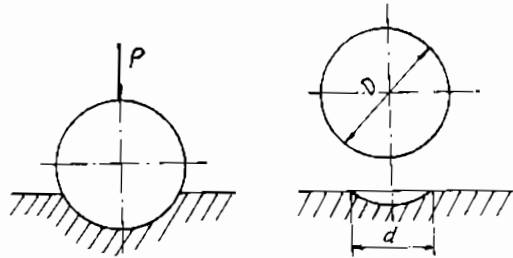
$P$  – lực nén, daN;  $D$  - đường kính viên bi, mm;

$d$  - đường kính vết lõm, mm.

Nếu độ cứng được đo bởi một viên bi  $D = 10$  mm, lực  $P = 300$  daN, duy trì nén trong 10 giây thì số độ cứng Brinel được ký hiệu là HB300. Trong các điều kiện đo khác thì số độ cứng được ký hiệu HB kèm các chỉ số theo thứ tự. Ví dụ HB 5/250/30–200 biểu thị số độ cứng Brinel là 200, khi thí nghiệm với  $D = 5$  mm,  $P = 250$  daN, thời gian nén 30 giây.

Khi độ cứng của vật liệu  $HB \geq 400$  daN/mm<sup>2</sup> thì thay cho bi cầu người ta dùng những mũi nhọn hình tháp hoặc hình nón bằng kim cương. Ngoài ra, những phương pháp khác cũng hay được sử dụng. Ví dụ, độ cứng được xác định bằng độ cao bật trở lại của vật rơi từ độ cao cho trước lên bề mặt mẫu thí nghiệm hoặc theo chu kỳ qua lại của con lắc được đặt trên bề mặt mẫu.

Độ cứng nhận được bằng những phương pháp khác nhau đều có thể quy đổi theo độ cứng Brinel và bằng con đường thí nghiệm người ta xác định được quan hệ giữa độ cứng Brinel và độ bền tức thời khi phá hủy. Ví dụ, đối với thép ít cacbon  $\sigma_B \approx 0,36$  HB, đối với gang xám  $\sigma_B = \frac{HB - 40}{6}$ . Đặc trưng



Hình 2.16.

cơ học của các loại vật liệu khác nhau được cho trên các bảng từ 2.1 đến 2.8 dưới đây để bạn đọc tiện tra cứu.

Giới hạn bền của một số vật liệu

Vật liệu	Giới hạn bền daN/mm <sup>2</sup> , khi	
	Kéo	Nén
<b>Gang xám:</b>		
thông thường	14 – 18	60 – 100
hạt nhỏ	21 – 25	đến 140
<b>Chất dẻo:</b>		
bakelit	2 – 3	8 – 10
xenluloit	5 – 7	–
téchôlít	8,5 – 10	13 – 25
<b>Gỗ (độ ẩm 15%)</b>		
hêtinac	15 – 17	15 – 18
gỗ dán tấm bakelit	13	11,5
thông dọc thớ	8	4
thông ngang thớ	–	0,5
sồi dọc thớ	9,5	5
sồi ngang thớ	–	1,5
<b>Đá xây:</b>		
Granit	0,3	12 – 26
Sa thạch	0,2	4 – 15
Đá vôi	–	5 - 15
Gạch xây	–	0,74 – 3
Bê tông	–	0,5 – 3,5
Khối xây đá có vữa	0,02 – 0,05	0,25 – 0,90

**Đặc trưng cơ học của gang**

Mác	Giới hạn bền, daN/mm <sup>2</sup> , khi				Độ cứng HB	Giới hạn mỏi daN/mm <sup>2</sup> , khi	
	Kéo $\sigma_B$	Nén $\sigma_B$	Uốn $\sigma_B$	Xoắn $\tau_B$		Uốn $\sigma_{-1}$	Xoắn $\tau_{-1}$
CY 12-28	12	50	28	-	143 - 229	-	-
CY 15-32	15	65	32	24	163 - 229	7	5
CY 18-36	18	70	36	-	170 - 229	-	-
CY 21-40	21	75	40	28	171 - 241	10	8
CY 22-44	24	85	44	30	187 - 217	12	10
CY 28-48	28	100	48	35	170 - 241	14	11
CY 32-52	32	110	52	39	187 - 255	14	11
CY 35-56	35	120	56	40	197 - 269	15	11,5
CY 38-60	38	140	60	46	207 - 269	15	11,5
BY 40-10	40	160 - 170	-	48 - 51	156 - 197	15 - 17	19,8
BY 50-1,5	50	186 - 200	-	74 - 79	187 - 255	23 - 27	17 - 21
BY 60-2	60	204 - 229	-	66 - 81	197 - 269	17 - 23	15 - 16

Đặc trưng cơ học của thép kết cấu carbon

Mác thép	$\sigma_B$	$\sigma_{ch}$	$\tau_{ch}$	Độ dẫn tỷ đối $\delta\%$ khi $l = 10d$	Độ dai va chạm $a_k$	$\sigma_{-1}^u$	$\sigma_{-1}^o$	$\tau_{-1}^x$		
	Không nhỏ hơn					daN/mm <sup>2</sup>				
	daN/mm <sup>2</sup>									
10	34	21	14	31	24	16 – 22	12 – 15	8 – 12		
20	42	25	16	25	–	17 – 22	12 – 16	10 – 13		
25	46	28	–	23	9	19 – 25	–	–		
30	50	30	17	21	8	20 – 27	17 – 21	11 – 14		
35	54	32	19	20	7	22 – 30	17 – 22	13 – 18		
40	58	34	–	19	6	23 – 32	18 – 24	14 – 19		
45	61	36	22	16	5	25 – 34	19 – 25	15 – 20		
50	64	38	–	14	4	27 – 35	20 – 26	16 – 21		
55	66	39	–	13	–	–	–	–		
60	69	41	–	12	–	31 – 38	22 – 28	18 – 22		
20Г	46	28	–	24	–	–	–	–		
30Г	55	32	–	20	8	22 – 32	–	–		
50Г	66	40	–	13	4	29 – 36	–	–		
20X	80	65	–	11	6	38	–	17 – 23		
40X	100	80	–	10	6	35 – 38	25	22,5		
45X	105	85	–	9	5	40 – 50	–	–		
30XM	95	75	–	11	8	31 – 41	37	23		
35XM	100	85	–	12	8	47 – 51	–	–		
40XH	100	80	39	11	7	40	29	24		
50XH	110	90	–	9	5	55	–	–		
40XΦA	90	75	–	10	9	38 – 49	–	–		
38XMЮA	100	85	–	14	9	32 – 42	–	–		
12XH3A	95	70	40	11	9	39 – 47	27 – 32	22 – 26		
20XH3A	95	75	–	12	10	43 – 45	30 – 32	24,5-25,5		
30XH3A	100	80	–	10	8	52 – 70	–	32 – 40		
40XHMA	100	95	–	12	10	50 – 70	–	27 – 38		
30XГCA	110	85	–	10	5	51 – 54	50-53,5	22-24,5		

Đặc trưng cơ học của hợp kim bền nhiệt

Mác thép	$\sigma_B$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{-1}$	E	$\delta$	$\psi$	$a_k$ daN/cm <sup>2</sup>
	daN/mm <sup>2</sup>				%		
ЭИ734	100	60	-	17 200	20	25	3
ЭИ589	91,8-102	79,5	-	21 100	15	15-25	3
ЭИ590	76,5-85,6	33,6-40,8	-	-	31-44	40-49	10
ХН77ТЮ	100	60	36,7	19 400	25	28	8
ЭИ826	105	72	38,8	20 400	10	12	2
ВЖ98	75	38,8	31	-	40	-	-
ХН55ВТЮ	135	94	-	22 300	14	15-29	3,5-7
ЭП105	95	70	-	19 000	10	13	2,5
ХН35ВТР	80	45	-	21 400	20	35	10
ВТ5	77	72	45,9	10 700	8,5	40	4
ОТ4	80	68	38,8-43,8	11 000	13	25-50	4
ВН-2 ở T = 20°C	65 - 75	53 - 70	48,0	11 200	25-30	60-70	27,0
" " T = 1200°C	18 - 20	11 - 12	-	10 900	30-35	100	-
" " T = 1600°C	4 - 5	2,0	-	10 700	50-60	100	-
ВМ-1 ở T = 20°C	76,0	50,0	50	32 800	25	55	0,2
" " T = 1200°C	25,0	20,0	-	25 900	22	90	-
" " T = 1600°C	6,0	4,0	-	21 200	55	100	-

Bảng 2.4 tiếp

Mác thép	$\sigma_B$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{-1}$	E	$\delta$	$\psi$	$a_k$ daN.m/cm <sup>2</sup>
Ta+10% W ở T = 20°C	60,0	48-50	-	18 400	36,0	96	-
" " T = 1250°C	18,5	10,0	-	15 500	45,0	94	-
Ta+10% W ở T = 1500°C	15,0	8,5	-	14 700	50 - 53	95	-
BB-2 ở T = 1000°C	20 - 24	-	-	36 000	45 - 48	80 - 90	-
" " T = 1500°C	14 - 15	-	-	34 000	48 - 58	90 - 95	-
" " T = 2000°C	8 - 8,5	-	-	28 000	60 - 70	95 - 96	-

Bảng 2.5

**Đặc trưng cơ học của thép lò xo**

Kéo				Nén			Giới hạn mỏi $\tau_o$ của lò xo daN/mm <sup>2</sup>
$\sigma_B$	$\sigma_{CH}$	$\sigma_{TL}$	E	$\tau_B$	$\tau_{CH}$	G	
daN/mm <sup>2</sup>							
150-160	100-120	75 - 90	$2,1 \cdot 10^4$	85-110	60 - 80	$8,1 \cdot 10^3$	50 - 65
145-170	95-135	80 - 100	$2,0 \cdot 10^4 - 2,2 \cdot 10^4$	110-140	65 - 90	$7,6 \cdot 10^3 - 8,3 \cdot 10^3$	50 - 70
160-175	150-160	90 - 100	$2,01 \cdot 10^4$	170-130	95 - 100	$8,0 \cdot 10^3$	55 - 60
160-170	140-150	90 - 95	$2,05 \cdot 10^4$	135	95 - 100	$7,6 \cdot 10^3$	50 - 55
140-150	95 - 105	60 - 65	$2,3 \cdot 10^4$	120-125	90	$8,3 \cdot 10^3$	45 - 50



**Bảng 2.6****Đặc trưng cơ học của một số hợp kim mẫu**

Mác thép hợp kim	$\sigma_{CH}$	$\sigma_B$	$\delta, \%$	HB	Phạm vi sử dụng
	daN/mm <sup>2</sup>				
Л68	9,1; 52	32; 66	55; 3	55; 150	ống, dây, lá
ЛA77-2	14; -	40; 65	55; 12	60; 170	ống, ống ngưng tụ nhỏ
ЛМЦ58-2	15,6; -	40; 70	40; 10	85; 175	lá, thanh
Бр. 010	-	25; -	11; -	80; -	cốt
Бр. ОФ10-1	14; -	20; 30	-; 3	80; 100	ổ (trục), bánh răng nhỏ
Бр. А5	16; 50	38; 40	65; 4	60; 200	băng, dải
Бр. К3	-	25; -	10-20	-	sản phẩm đúc
Д1	11; 24	21; 42	18; 15	45; 113	ống
Д6	5; 38	18; 50	8; 20	50; 125	ống, thép hình
АМг	10; 21	18; 25	6; 23	45; 60	ống, tấm lá

Bảng 2.7

Đặc trưng cơ học của các chất dẻo cơ bản

Vật liệu	Trọng lượng riêng G/cm <sup>3</sup>	Giới hạn $\sigma_B$ khi			E	G	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$
		Kéo	Nén	Uốn			
daN/mm <sup>2</sup>							
Chất dẻo thủy tinh nền vải	1,4 – 1,85	26 – 40	10 – 30	13 – 15	1800 – 2200	350 – 400	0,22 – 0,25
Chất dẻo thủy tinh nền sợi vuông góc	1,7 – 1,9	30 – 50	–	23 – 46	2400 – 3500	–	0,25 – 0,28
Tectolit	1,3 – 1,4	6 – 11	13 – 15	9 – 16	600 – 1000	250	0,25 – 0,3
Chất dẻo gỗ ép	1,2 – 1,4	14 – 22	12 – 15,5	16,5 – 22	1200 – 3400	80 – 250	0,25 – 0,3
Hetinac (nhựa cách điện)	1,3 – 1,4	7,0 – 10	–	8 – 14	1000 – 1800	80 – 250	0,2 – 0,3
Thớ, tấm xơ ép	1,1 – 1,25	6,5 – 10	8 – 14	6 – 9,5	700	–	0,2 – 0,3
Xơ, sợi	1,35 – 1,9	3,0 – 13,0	11 – 13	4,0 – 10,0	500 – 850	–	0,25 – 0,30
Bột ép nhiệt rắn	1,4 – 1,9	3,5 – 6,0	15 – 18	5,0 – 8,0	–	–	0,3 – 0,4
Thủy tinh hữu cơ	1,18	7,1 – 9,2	–	9,9 – 15,3	290 – 410	–	0,1 – 0,16
Chất dẻo nhiệt	0,92 – 2,10	1,2 – 8,0	–	1,2 – 10,0	15 – 70	–	0,15 – 0,2
Chất dẻo xốp	0,06 – 0,22	0,04 – 0,42	0,017 – 0,45	0,07 – 0,50	3,7 – 20,0	1,5 – 1,9	–
Teflon-4	2,1 – 2,3	1,4 – 2,5	2,0	1,1 – 1,4	47 – 85	–	–
Capron	1,14	3,5 – 7,0	6 – 8	4,5 – 7	140 – 200	45 – 48	–
Capron	1,14	6 – 8	7 – 8	9	70 – 105	–	–
Poliamic-68	1,13	4,5 – 5	4,5 – 5	7 – 9	120	–	–
Nhựa Vinyl	1,38 – 1,4	4 – 6	8 – 16	9	300 – 400	–	–
Polietylen	1,38 – 1,4	2,5 – 3,5	2,8 – 4	3	55 – 88	–	–
Poristirolen	1,05 – 1,07	3,5	10	9,5 – 10,0	120 – 320	–	–

Môđun đàn hồi và hệ số Poát Xông

Vật liệu	Môđun đàn hồi, daN/cm <sup>2</sup>		Hệ số Poát Xông, $\mu$
	E	G	
Gang xám và trắng	$(1,15 \div 1,60) 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	0,23 – 0,27
Gang rèn	$1,55 \cdot 10^6$	–	–
Thép cacbon	$(2,0 \div 2,1) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,24 – 0,28
Thép hợp kim hoá	$(2,1 \div 2,2) 10^6$	$(8,0 \div 8,1) 10^5$	0,25 – 0,30
“ Đồng cán	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	0,31 – 0,34
“ kéo nguội	$1,3 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	–
“ đúc	$0,84 \cdot 10^6$	–	–
“ photphơ cán	$1,15 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	0,32 – 0,35
“ mắnggan cán	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	0,35
“ nhôm đúc	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	–
“ thau kéo nguội	$(0,91 \div 0,99) 10^6$	$(3,5 \div 3,7) 10^5$	0,32 – 0,42
“ thau cán dùng trong đóng tàu	$1,0 \cdot 10^6$	–	0,36
. Nhôm cán	$0,69 \cdot 10^6$	$(2,6 \div 2,7) 10^5$	0,32 – 0,36
. Dây nhôm kéo	$0,7 \cdot 10^6$	–	–
. Đura cán	$0,71 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	–
. Kẽm cán	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	0,27
. Chì	$0,17 \cdot 10^6$	$0,70 \cdot 10^5$	0,42
. Thủy tinh	$0,56 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^5$	0,25
. Granit	$0,49 \cdot 10^6$	–	–
. Đá vôi	$0,42 \cdot 10^6$	–	–
. Đá cẩm thạch	$0,56 \cdot 10^6$	–	–
. Sa thạch	$0,18 \cdot 10^6$	–	–
. Khối xây đá granit	$(0,09 \div 0,1) 10^6$	–	–
“ “ vôi	$0,06 \cdot 10^6$	–	–
“ “ gạch	$(0,027 \div 0,030) 10^6$	–	–

*Bảng 2.8 tiếp*

Bê tông theo giới hạn bền daN/cm <sup>2</sup>			
100	$(0,146 \div 0,196)10^6$	–	0,16 – 0,18
150	$(0,164 \div 0,214)10^6$	–	0,16 – 0,18
200	$(0,182 \div 0,232)10^6$	–	0,16 – 0,18
Gỗ dọc thớ	$(0,1 \div 0,12) 10^6$	$0,055 \cdot 10^5$	–
Gỗ ngang thớ	$(0,005 \div 0,01) 10^6$	–	–
Cao su	$0,00008 \cdot 10^6$	–	0,47
Tectôlit	$(0,06 \div 0,1) 10^6$	–	–
Hetinắc	$(0,1 \div 0,17) 10^6$	–	–
Bakêlit	$43 \cdot 10^6$	–	0,36
Xenlulo	$(14,3 \div 27,5) 10^6$	–	0,33 – 0,38

*Bảng 2.9*

**Giá trị gần đúng của ứng suất cho phép khi kéo và nén**

Vật liệu	Ứng suất cho phép daN/cm <sup>2</sup> khi	
	Kéo	Nén
Gang xám	280 – 800	1200 – 1500
Thép CT2	1400	
Thép CT3	1600	
Thép CT3 trong cầu	1400	
Thép cacbon trong cơ khí và xây dựng	600 – 2500	
Thép hợp kim trong cơ khí và xây dựng	1000 – 4000	
Đồng	300 – 1200	
Đồng thau	700 – 1400	

*Bảng 2.9 tiếp*

Đồng thanh	600 – 1200	
Nhôm	300 – 800	
Đồng thanh nhôm	800 – 1200	
Đura	800 – 1500	
Tectôlít	300 – 400	
Hêtinắc	500 – 700	
Gỗ dán tấm bakêlít	400 – 500	
Gỗ thông dọc thứ	70 – 100	100 – 120
Gỗ thông ngang thứ	–	15 – 20
Gỗ sồi dọc thứ	90 – 130	130 – 150
Gỗ sồi ngang thứ	–	20 – 35
Khối đá xây	đến 3	4 – 40
Khối gạch xây	đến 2	6 – 25
Bê tông	1 – 7	10 – 90

# CHƯƠNG 3

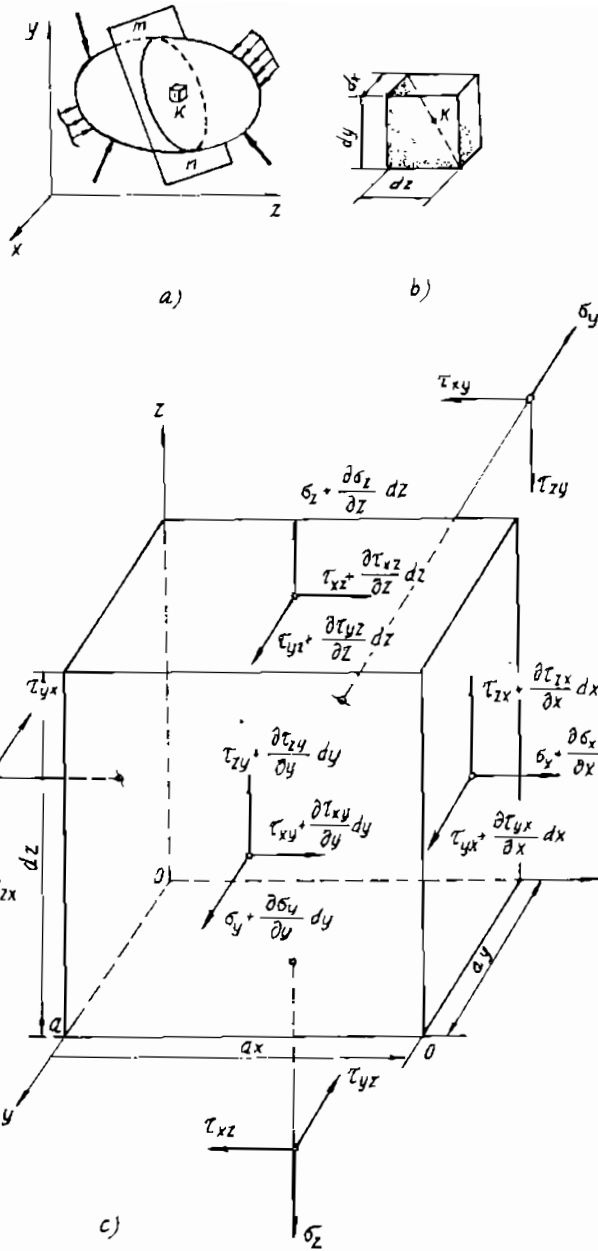
## CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

---

### §1. KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Xét một điểm  $K$  trong vật thể đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực. Như đã nói trong tiết §9 của chương 1 trên mỗi mặt cắt qua  $K$  tồn tại trên mặt cắt đó có 3 thành phần ứng suất.

Để nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực, ta tưởng tượng tách ra quanh điểm  $K$  một phân tố hình hộp có kích thước vô cùng bé  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (hình 3.1a, b). Trên những mặt vô cùng nhỏ của phân tố, nói chung, có ba thành phần ứng suất pháp tuyến  $\sigma$  và tiếp tuyến  $\tau$ . Những ứng suất này khác nhau tùy theo từng vị trí của mặt cắt. Các thành phần ứng suất trên các mặt cắt song song nhau chỉ khác nhau một lượng vô cùng bé. Do đó theo mô hình vật liệu liên tục ta có thể biểu diễn các thành phần ứng suất trên các mặt đối diện với các mặt tọa độ như trên hình 3.1c. Từ điều kiện cân bằng của phân tố, các phương trình tổng hình chiếu và tổng mômen của các lực kể cả các lực khối đơn vị  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  đối với các trục tọa độ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ta có:



Hình 3.1.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.1b)$$

Hệ phương trình (3.1a) gọi là hệ phương trình cân bằng của Navier.

Quan hệ (3.1b) biểu thị định luật đối ứng của các ứng suất tiếp.

Bởi vậy, từ 18 thành phần ứng suất chưa biết tác dụng trên các mặt của phân tử thu về chỉ còn sáu thành phần:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z), \\ \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z), \end{aligned} \right\} (a); \quad T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Sáu thành phần ứng suất (a) đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại điểm K của vật thể đàn hồi chịu lực. Ta gọi tập hợp tất cả những ứng suất trên tất cả các mặt cắt đi qua một điểm là trạng thái ứng suất tại điểm đó. Tập hợp ứng suất này được gọi là một tenxơ ứng suất và được ký hiệu  $T_\sigma$  có dạng (3.2).

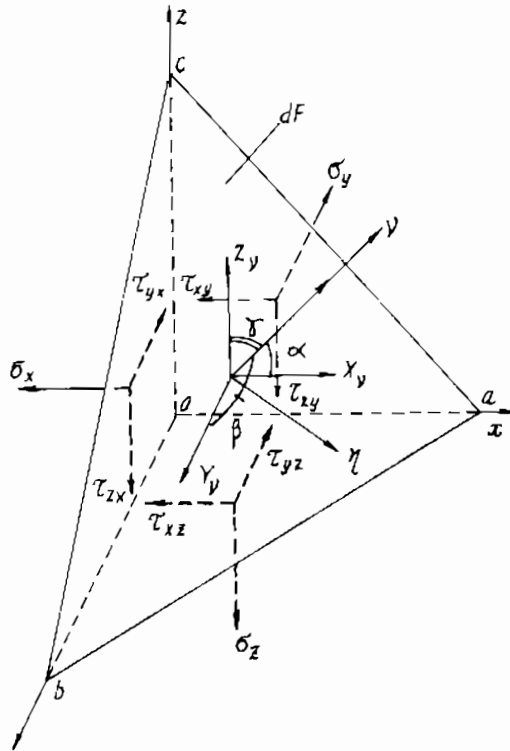
## §2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI VÀ PHÂN LOẠI TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Để nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm trong trường hợp tổng quát nhất, cần phải tìm được các ứng suất trên mặt nghiêng



abc bất kỳ so với các trục tọa độ  $x, y, z$  (hình 3.2). mặt nghiêng abc này có pháp tuyến  $\vec{v}$ , diện tích  $dF$  và các côsin chỉ phương là

- $\cos\alpha = \cos(x, v) = l$       và       $Obc = dF.l$
- $\cos\beta = \cos(y, v) = m$       và       $Oca = dF.m$
- $\cos\gamma = \cos(z, v) = n$       và       $Oab = dF.n$ .



Hình 3.2.

Ta ký hiệu  $X_v, Y_v$  và  $Z_v$  là hình chiếu của ứng suất toàn phần  $\vec{p}_v$  trên mặt nghiêng và được biểu diễn qua các ứng suất trên các mặt phẳng tọa độ bằng các phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu lần lượt lên các trục tọa độ  $x, y, z$  như sau:

$$X_v = \sigma_x.l + \tau_{xy}.m + \tau_{xz}.n$$

$$Y_v = \tau_{yx}.l + \sigma_y.m + \tau_{yz}.n \quad (3.3)$$

$$Z_v = \tau_{zx}.l + \tau_{zy}.m + \sigma_z.n$$

Khi gọi  $l_1, m_1, n_1$  là côsin chỉ phương của trục  $\eta$  nằm trên mặt nghiêng so với các trục tọa độ  $x, y, z$  thì ứng suất tiếp trên mặt nghiêng theo phương  $\eta$  là

$$\begin{aligned} \tau_{\eta v} = X_v.l_1 + Y_v.m_1 + Z_v.n_1 = \sigma_x.l.l_1 + \sigma_y.m.m_1 + \sigma_z.n.n_1 + \\ + \tau_{xy}(lm_1 + l_1m) + \tau_{yz}(mn_1 + m_1n) + \tau_{zx}(nl_1 + n_1l) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mặt cắt mà trên đó ứng suất tiếp  $\tau_v = 0$  được gọi là mặt chính, các ứng suất pháp trên mặt này được gọi là ứng suất pháp chính và ký hiệu là  $\sigma$ .

Để có ứng suất pháp tuyến  $\sigma_v$ , ta chỉ việc chiếu các thành phần  $X_v, Y_v, Z_v$  lên phương  $\vec{v}$  cụ thể là:

$$\sigma_v = \sigma_x.l^2 + \sigma_y.m^2 + \sigma_z.n^2 + 2\tau_{xy}.lm + 2\tau_{yz}.m.n + 2\tau_{zx}.nl \quad (3.5)$$

Giả sử rằng mặt nghiêng  $\vec{v}$  (hình 3.2) đã là mặt chính, nghĩa là  $\tau_v = 0$  và  $\vec{p}_v = \vec{\sigma}_v$ . Ta ký hiệu ứng suất chính là  $\sigma$ , khi đó quan hệ (3.3) trở thành:

$$\begin{aligned} \sigma.l = X_v ; \quad \sigma.m = Y_v ; \quad \sigma.n = Z_v \quad \text{hay:} \\ \left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0, \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a) \end{aligned}$$

Ngoài ra, như đã biết từ hình giải tích các côsin chỉ phương có quan hệ:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (b)$$

Hệ bốn phương trình (a) và (b) chứa bốn ẩn cần tìm là: một ứng suất chính  $\sigma$  và ba côsin chỉ phương  $l, m, n$  của nó. Hệ phương trình (a) không cho phép nhận nghiệm tầm thường:  $l = m = n = 0$ , vì trái với (b).

Điều kiện để hệ (a) có nghiệm và không tầm thường là:

$$\det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (c)$$

Dưới dạng khai triển phương trình (c) có dạng:

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + \\ & + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma \\ & - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{hay} \quad \sigma^3 - S_1 \sigma^2 + S_2 \sigma - S_3 = 0 \quad (3.6)$$

Trong (3.6) ta đã ký hiệu:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

Nghiệm của phương trình (3.6) không phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ  $x, y, z$ ; vì thế, các hệ số  $S_1, S_2, S_3$  trong (3.6) luôn luôn không đổi khi biến đổi hệ trục tọa độ và được gọi là các bất biến thứ nhất, thứ hai và thứ ba của trạng thái ứng suất. Giải phương trình (3.6) ta nhận được ba nghiệm thực, lần lượt theo giá trị đại số được ký hiệu là  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Vì vậy, ở mỗi điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực ta luôn tìm được ba ứng suất chính. Để xác định mặt trên đó có ứng suất chính  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ta mang ứng suất chính  $\sigma_i$  vào phương trình (a) và giải hệ gồm hai phương trình của (a) và phương trình (b) ta có các côsin chỉ phương  $l_i, m_i, n_i$  xác định vectơ của ứng suất chính  $\sigma_i$ .

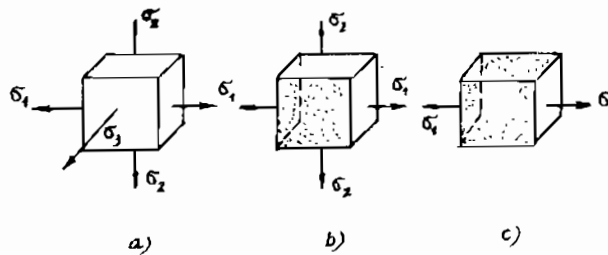
Ta đã chứng minh rằng tại mỗi điểm của vật thể chịu lực, bao giờ cũng có thể tìm được ba mặt vuông góc với nhau, trên đó chỉ có ứng suất pháp  $\sigma$  mà không có ứng suất tiếp  $\tau$ . Những mặt ấy được gọi là *mặt chính*, phương pháp tuyến của chúng được gọi là các *phương chính*, và ứng suất pháp trên các mặt ấy được gọi là ứng suất chính. Những ứng suất chính còn là những ứng suất pháp cực trị của một trạng thái ứng suất.

Nếu cả ba ứng suất chính của một trạng thái ứng suất đều khác không thì *trạng thái ứng suất ấy được gọi là trạng thái ứng suất khối* (hình 3.3a), nếu một ứng suất chính bằng không gọi là *trạng thái ứng suất phẳng* (hình 3.3b)) nếu hai ứng suất chính bằng không gọi là *trạng thái ứng suất đơn* (hay đường) (hình 3.3c):

Khi phân tố được tách ra đã là phân tố chính thì ứng suất tiếp và pháp trên mặt nghiêng bất kỳ  $\bar{v}$  nhận được từ (3.4) và (3.5) có dạng:

$$\tau_{\eta\nu} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - \sigma_v^2} \quad (3.7)$$

$$\sigma_v = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma \quad (3.8)$$



Hình 3.3.

Nếu mặt nghiêng  $\bar{v}$  nào đó song song với một phương ứng suất chính  $\sigma_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) thì từ (3.7) và (3.8) ta rút ra các ứng suất  $\sigma$ ,  $\tau$  và ứng suất toàn phần  $p$  trên mặt nghiêng này như sau:

\* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất  $\sigma_3$  (hình 3.4b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_3 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_3 ; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_3 \\ p &= \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_3 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_3} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

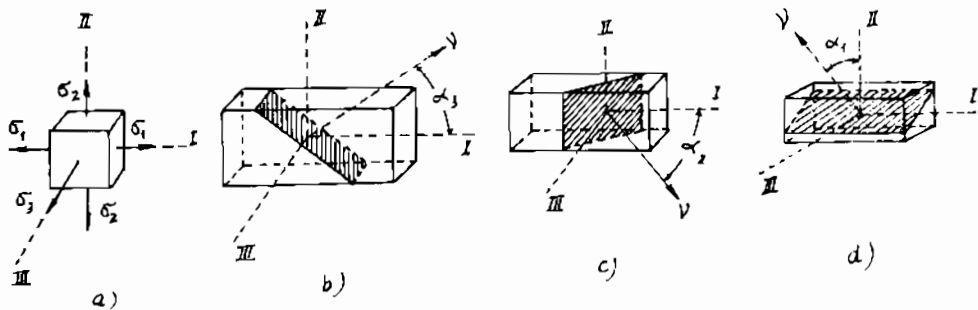
\* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất  $\sigma_2$  (hình 3.4c)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_2 ; \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_2 \\ p &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_2} \end{aligned} \right\} (3.10)$$

\* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất  $\sigma_1$  (hình 2.4d)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 ; \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_1 \\ p &= \sqrt{\sigma_2^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha_1} \end{aligned} \right\} (3.11)$$

Ngoài ra, trạng thái ứng suất còn có thể là trạng thái ứng suất thuần nhất hoặc không thuần nhất. Trong trạng thái ứng suất thuần nhất thì kích thước của phân tử được tách ra không có vai trò gì, bởi vì các ứng suất là như nhau ở mọi điểm trên một mặt cắt bất kỳ và trên mọi mặt cắt song song với nó. Ngược lại, đối với trạng thái ứng suất không thuần nhất, phân tử được tách ra phải vô cùng bé. Khi đó, ứng suất trên các bề mặt phân tử với độ chính xác đến vô cùng bé bậc hai có thể được xem là phân bố đều và do đó phân tử được tách ra sẽ luôn luôn ở trong trạng thái ứng suất thuần nhất.



Hình 3.4.

### §3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

Giả sử ta đã tách ra được một phân tử chịu ứng suất từ một tấm vách ngăn chịu lực trên chu vi và từ một dầm mặt cắt hình chữ I như hình 3.5, mà những mặt vuông góc với trục Z là những mặt chính trên đó ứng suất pháp cũng bằng không.

## 1. Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

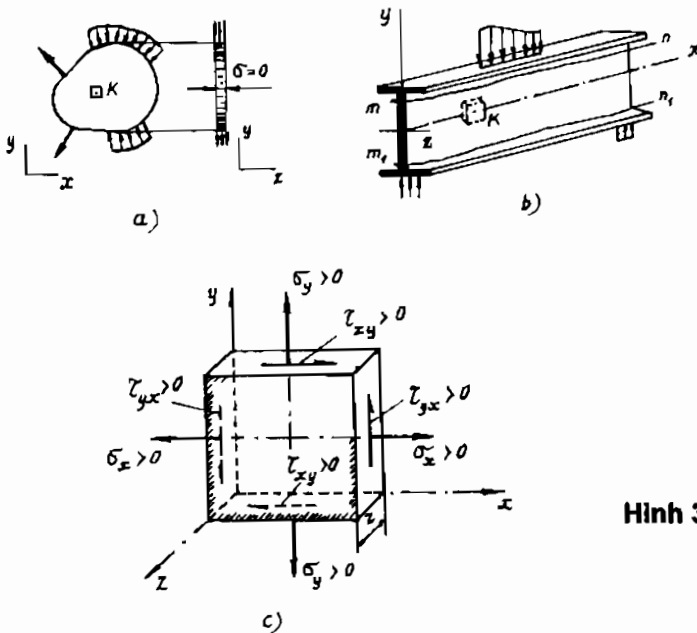
Theo công thức (3.1b) trong trường hợp này ta có:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.12)$$

Có thể thu được kết quả này từ phương trình cân bằng mômen của các lực đối với trục Z:  $\Sigma m_z = 0$ .

Như vậy, ứng suất tiếp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau có trị số bằng nhau, còn chiều của hai ứng suất tiếp này cùng hướng vào hoặc cùng hướng ra khỏi cạnh chung của hai mặt cắt (hình 3.5c). Đó là định luật đối ứng của ứng suất tiếp và được phát biểu như sau:

*Nếu trên mặt cắt nào đó có ứng suất tiếp thì trên mặt cắt vuông góc với nó cũng phải có ứng suất tiếp với cùng trị số và cùng chiều.*



Hình 3.5.

## 2. Ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt nghiêng bất kỳ song song với một phương chính

Giả thử một mặt cắt bất kỳ có pháp tuyến ngoài  $\vec{n}$  làm với trục x một góc  $\alpha$ . Tưởng tượng cắt ra tại O một phân tử lăng trụ tam giác như hình 3.6. Tại điểm O được xét, trên mặt nghiêng song song với

phương chính OZ ta lập một hệ trục  $\eta Ov$ . Ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt này được ký hiệu là:  $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha$ ;  $\tau_{\eta v} = \tau_\alpha$  và được xác định trực tiếp từ các công thức tổng quát (3.4) và (3.5). Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + 2\tau_{xy} \cdot lm \\ \tau_\alpha &= \sigma_x \cdot ll_1 + \sigma_y \cdot m \cdot m_1 + \tau_{xz} (lm_1 + l_1 m) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

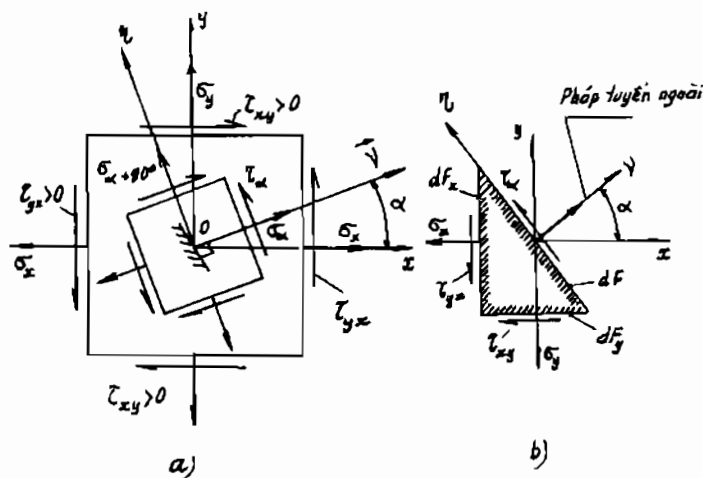
Thay các quan hệ lượng giác sau đây:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  vào (3.13) ta xác định được giá trị của  $\sigma_\alpha$  và  $\tau_\alpha$  trên mặt nghiêng có pháp tuyến  $\bar{v}$  theo  $\alpha$  là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Rõ ràng là khi  $\alpha = 0$  hoặc  $\frac{\pi}{2}$  thì  $\sigma_\alpha$  và  $\tau_\alpha$  có giá trị bằng  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  và  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ .



Hình 3.6

### 3. Các trường hợp đặc biệt

#### a) Trạng thái ứng suất đơn

Giả sử rằng, trên các mặt bên của phân tử (hình 3.6) tất cả các ứng suất đều bằng không, trừ ứng suất pháp  $\sigma_x = \sigma_1 \neq 0$ . Khi đó ta có

trạng thái ứng suất đơn. Tương ứng với trường hợp này các công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng  $\alpha$  suy ra từ (3.13) có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

*b) Trạng thái ứng suất trượt thuần túy*

Giả sử, phân tố trên hình 3.6 chỉ chịu các ứng suất tiếp trên các mặt bên  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , còn các ứng suất khác đều bằng không. Trạng thái ứng suất như thế gọi là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Với điều kiện đó ứng suất trên mặt cắt nghiêng  $\alpha$  (hình 3.6b) được rút ra từ (3.13) như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \tau_{yx} \sin 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= \tau_{yx} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Các kết quả (3.15) và (3.16) được rút ra trực tiếp từ (3.13). Bạn đọc có thể nhận lại được các kết quả từ các công thức (3.14).

**4. Ứng suất cực trị**

*a) Ứng suất chính*

Khi xoay hệ trục  $\eta, \nu$  gắn chặt trên mặt cắt nghiêng, ta sẽ nhận được một mặt cắt nghiêng  $\alpha_1$  nào đó.

Trên mặt  $\alpha_1$  này ứng pháp  $\sigma_1$  sẽ đạt được giá trị lớn nhất đối với điểm khảo sát, còn trên mặt nghiêng  $\alpha_2$  vuông góc với mặt nghiêng  $\alpha_1$  ứng suất pháp  $\sigma_2$  có giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ tìm các mặt và các ứng suất pháp cực trị này đối với những mặt đi qua một điểm theo điều kiện toán học sau đây.

Giả sử mặt nghiêng của phân tố (hình 3.6b) là một mặt chính nào đó. Ta sẽ ký hiệu góc xác định vị trí của mặt chính có ứng suất pháp lớn nhất  $\sigma_{\max} = \sigma_1$  là  $\alpha_1$ , còn mặt có ứng suất pháp bé nhất  $\sigma_{\min} = \sigma_2$  là  $\alpha_2$ .

Để tìm các góc  $\alpha_{1,2}$ , ta chiếu tất cả các lực tác dụng trên phân tố (hình 3.6b) lên phương thẳng đứng (trục y) và nhận được:

$$\sigma_{1,2} dF \sin \alpha_{1,2} - \sigma_y dF \sin \alpha_{1,2} - \tau_{xy} dF \cos \alpha_{1,2} = 0$$

Từ phương trình này, các phương chính  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  có dạng cuối cùng:



$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y} \quad (2.17)$$

Giá trị các ứng suất chính tương ứng được tìm từ điều kiện toán học sau đây:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$$

Chú ý đến biểu thức thứ hai trong (3.14):

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha = 0$$

và kí hiệu góc cần tìm  $\alpha = \alpha_0$  ta có:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.18)$$

Thay  $\alpha = \alpha_0$  vào công thức thứ nhất của (3.14) ta được các ứng suất chính  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.19)$$

Trong công thức này dấu cộng (+) ứng với ứng suất pháp cực đại,  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ , dấu trừ (-) ứng suất pháp cực tiểu  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ .

Ngoài công thức (3.17) và (3.19) cũng có thể tìm được giá trị ứng suất chính theo công thức (3.19) và phương chiều của nó theo công thức (3.18) với việc khảo sát đồng thời dấu của đạo hàm bậc hai  $\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2}$ . Trong thực hành thường thay thế cho việc khảo sát dấu của  $\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2}$  bằng nhận xét toán học sau đây.

Từ  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$ , rút ra là, khi  $\tau_\alpha > 0$  ta có  $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} > 0$ . Điều này nói lên rằng  $\sigma_\alpha$  đồng biến cùng với  $\alpha$  (hình 3.7a); Tương tự, khi khảo sát trường hợp  $\tau_\alpha < 0$ , ta rút ra kết luận thực hành sau đây:

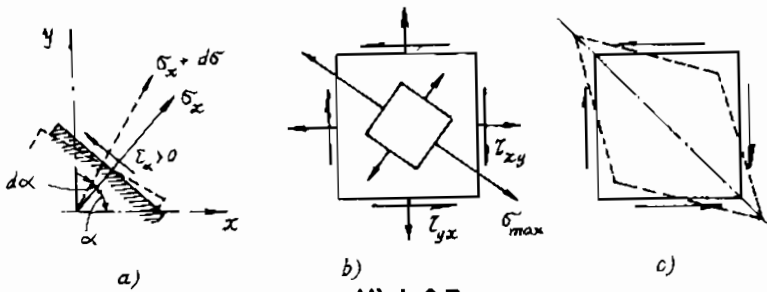
Chiều ứng suất  $\sigma_{\max}$  luôn luôn đi qua hai góc phân tư của các trục tọa độ, trên đó mũi tên của các ứng suất tiếp  $\tau_{xy}$  và  $\tau_{yz}$  hội tụ vào cạnh chung (hình 3.7b).

Bạn đọc có thể nhận được  $\sigma_1, \sigma_2$  trực tiếp từ phương trình (3.6) dưới dạng:

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sigma + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.20)$$

Các  $l_1, m_1$  và  $l_2, m_2$  lần lượt là nghiệm của hệ:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) l + \tau_{xy} m &= 0 \\ l^2 + m^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ với } i = 1, 2.$$



Hình 3.7.

### b) Ứng suất tiếp cực trị

Cùng một trạng thái ứng suất có thể biểu diễn bằng những mặt cắt và các ứng suất khác nhau. Vì thế ta sẽ thừa nhận phân bố chính (hình 3.8a) làm trạng thái ứng suất, xuất phát tại một điểm. Để đơn giản ta kí hiệu  $\sigma_{\max} = \sigma_1$  và  $\sigma_{\min} = \sigma_2$ .

Ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt có pháp tuyến làm với phương  $\sigma_1$  một góc  $\alpha$  được xác định theo công thức (3.14) với chú ý là  $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \tau_{xy} = 0$ :

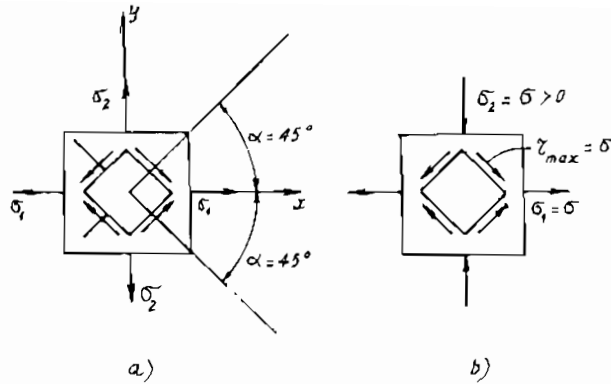
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (3.21)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (3.22)$$

Khi  $\alpha = -45^\circ$ ,  $\tau_\alpha$  có giá trị cực đại

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3.23)$$

Vậy, ứng suất tiếp có giá trị cực trị ở trên mặt cắt nghiêng so với các mặt chính một góc  $45^\circ$  (hình 3.8a).



Hình 3.8.

Thay (3.19) vào (3.23) ta nhận được  $\tau_{\max}$  theo các ứng suất cho trước  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  và  $\tau_{xy}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.25)$$

Trong trường hợp riêng khi  $\sigma_1 = -\sigma_2$  (hình 2.8b).

$$\tau_{\max} = \sigma$$

Khi đó, trên mặt cắt có ứng suất tiếp đạt cực trị, còn ứng suất pháp bằng không. Ta gọi trạng thái ứng suất này là trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Các kết quả nhận được trong tiết 1 và 2 này bằng con đường giải tích, đều có thể nhận được bằng con đường hình học đơn giản hơn – vòng tròn MO dưới đây.

#### §4. VÒNG TRÒN MO

##### 1) Trạng thái ứng suất phẳng

Mối quan hệ giữa các ứng suất  $\sigma_\alpha$  và  $\tau_\alpha$  vào góc nghiêng  $\alpha$  của mặt nghiêng có dạng hình học đơn giản – dạng một đường tròn do MO (OTTO MORH) nhà bác học Đức đề xuất.

Công thức (3.21) có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= a + R \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -R \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (3.24)$$

trong đó,

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} ; \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Trong hệ tọa độ  $\sigma - \tau$  các đẳng thức (3.24) là phương trình vòng tròn bán kính  $R$  dưới dạng thông số (hình 3.9). Vòng tròn này gọi là:

Vòng tròn MO hay vòng tròn ứng suất.

Khử  $\alpha$  trong (3.24) ta được:

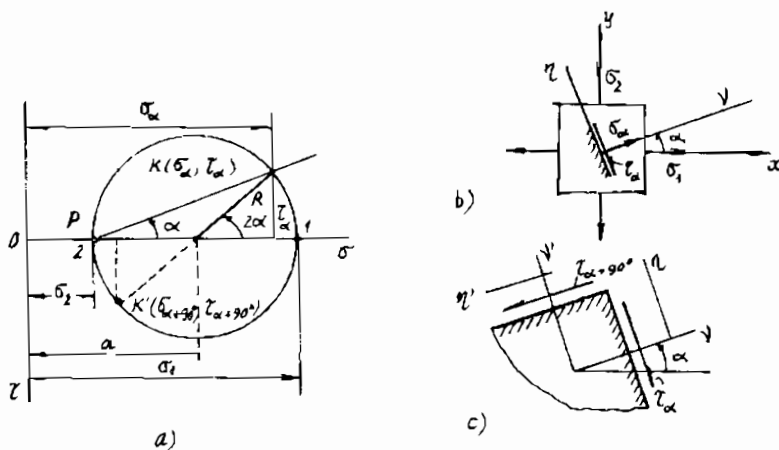
$$(\sigma_\alpha - a)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2$$

Ta gọi một điểm  $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  nào đó ứng với mỗi mặt nghiêng xác định bởi góc  $\alpha$  là điểm biểu diễn (hình 3.9b). Từ công thức (3.24) rút ra rằng:

Khi  $\alpha > 0$  thì  $\sin 2\alpha > 0$ , do đó  $\tau_\alpha < 0$ . Vì vậy trục  $\tau$  cần phải hướng ngược chiều với trục  $y$  (trong trường hợp này trục  $\tau$  hướng xuống dưới khi trục  $y$  hướng lên).

Điểm  $K'(\sigma_{\alpha+90}, \tau_{\alpha+90})$  đối xứng với  $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  qua tâm vòng tròn có  $\tau_{\alpha+90} = -\tau_\alpha$  (hình 3.9a, c).

Nếu biết các ứng suất chính và các mặt chính, thì vòng tròn ứng suất được vẽ theo các điểm 1 và 2.



Hình 3.9.

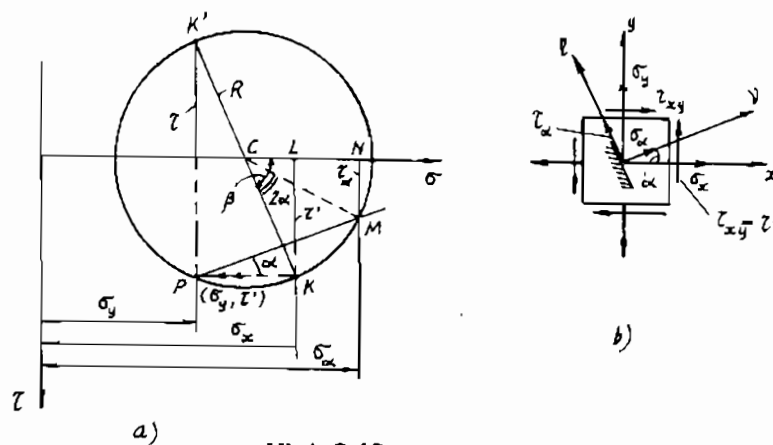
Để thiết lập sự tương ứng giữa mặt cắt và điểm biểu diễn trên vòng tròn ta sẽ sử dụng điểm P (gọi là cực của vòng tròn). Trong trường hợp này điểm cực P trùng với điểm 2. Tia PK song song với pháp tuyến của mặt nghiêng  $\alpha$  sẽ cắt vòng tròn tại K ( $\sigma_x, \tau_x$ ) cho ta điểm biểu diễn cần tìm. Điều này thấy rất rõ trên hình vẽ.

Nếu phân tố cho trước không phải là phân tố chính thì cần phải đặt  $\tau_{xy}$  và  $\tau_{yx}$  trên biểu đồ các tung độ bằng nhau nhưng ngược dấu.

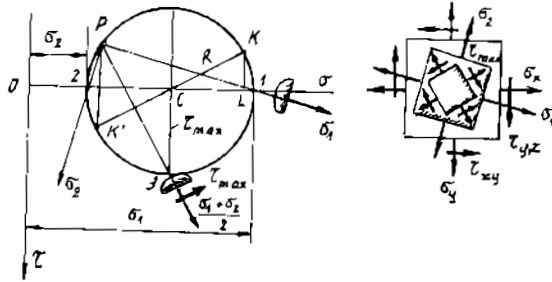
Ta sẽ ký hiệu chúng tương ứng là  $\tau$  và  $\tau'$  (hình (3.10b)), các điểm biểu diễn tương ứng với các mặt thẳng đứng và nằm ngang là: K( $\sigma_x, \tau$ ) và K'( $\sigma_y, \tau$ ). Tâm C của vòng tròn là giao điểm của đường K K' và trục  $\sigma$ . Vòng tròn có tâm C và bán kính R được xác định. Điểm cực P có tọa độ là P ( $\sigma_y, \tau_{yx}$ ). Trong thực hành cực P được xác định bằng cách vẽ các tia KP và K'P song song với các pháp tuyến của các mặt tương ứng. Trên hình 3.10a các mũi tên kép biểu diễn cách tìm giao điểm P của các tia KP và K'P.

Tia PM song song với pháp tuyến của mặt nghiêng cắt vòng tròn tại M. Đó chính là điểm biểu diễn ứng suất cần tìm trên mặt cắt nghiêng  $\alpha$  (hình 3.10a).

Điều này dễ dàng chứng minh từ hình vẽ 3.10a.



Hình 3.10 .



Hình 3.11.

$$\sigma_{\alpha} = ON = OC + CN = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos(\beta - 2\alpha)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos \beta \cdot \cos 2\alpha + R \sin \beta \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Tương tự có thể chứng minh rằng:

$$MN = R \sin(\beta - 2\alpha) = \tau_{\alpha}$$

Nguyên tắc thực hành nêu trên cho phép thiết lập rất đơn giản sự tương ứng giữa mặt cắt nghiêng và điểm biểu diễn M trên vòng tròn Morh. Theo cách đo độ nghiêng của các mặt chính đối với phân tố (hình 3.11) được xác định bởi các điểm 1 và 2 trên vòng Morh (hình 3.11). Các mặt chính vuông góc với các tia P-1 và P-2. Hoàng độ các điểm 1 và 2 cho ta  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$  và  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ . Điểm 3 có tung độ lớn nhất cho ta  $\tau_{\max} = R$ . Mặt cắt tương ứng với phương tia P-3 sẽ chịu ứng suất này.

Từ vòng Morh dễ thấy là:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= OC \pm R = OC \pm \sqrt{CL^2 + KL^2} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Kết quả này trùng với công thức (3.19) tìm được bằng con đường giải tích.

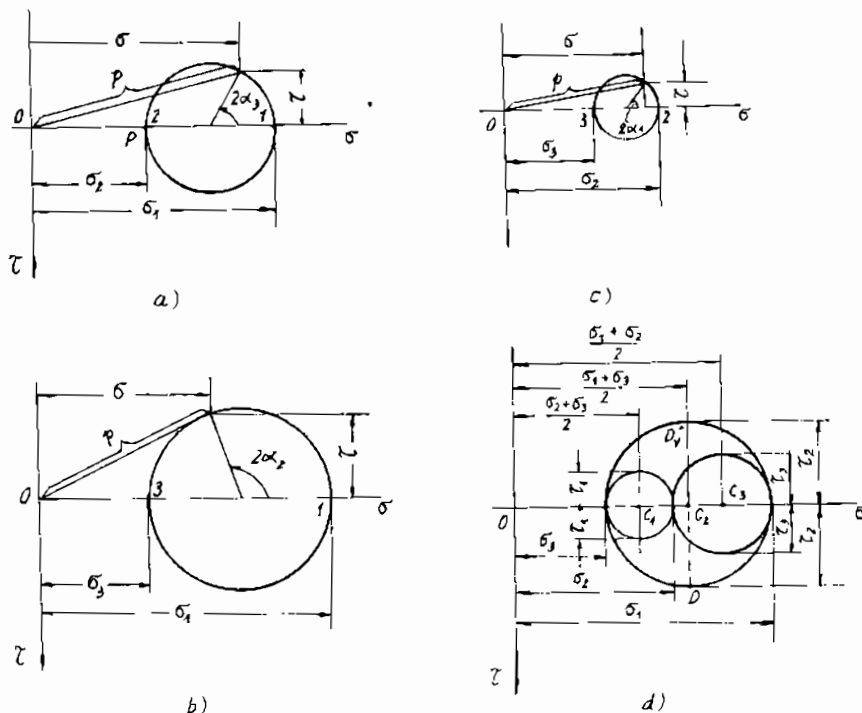
## 2) Trạng thái ứng suất khối

Ta khảo sát một phân tố chịu trạng thái ứng suất khối mà các mặt của nó đã là các mặt chính (hình 3.4a).

Để tính các ứng suất trên các mặt không phải là mặt chính, ta đã thiết lập được các công thức từ (3.9) đến (3.11). Các công thức này cho ứng suất tiếp và ứng suất pháp trên các mặt song song với phương ứng suất chính  $\sigma_1$  nào đó không phụ thuộc vào ứng suất chính đó. Trạng thái ứng suất như thế có thể được mô tả bằng vòng tròn Mohr như đã làm ở mục 1 của §4. Cụ thể là:

Đối với mặt nghiêng song song với  $\sigma_3$  (hình 3.4b) vòng tròn Mohr được cho trên hình 3.12a.

Mặt nghiêng song song với  $\sigma_2$  (hình 3.4c) vòng tròn Mohr có dạng như hình 3.12b. Tương tự khi có mặt nghiêng song song với  $\sigma_1$



Hình 3.12.

(hình 3.4d) vòng tròn Mohr tương ứng với hình 3.12c. Bằng cách xếp chồng ba vòng Mohr này trên cùng hệ tọa độ  $\tau\sigma$  ta được đồ thị vòng tròn Mohr đối với trạng thái ứng suất khối tổng quát (hình 3.12d).

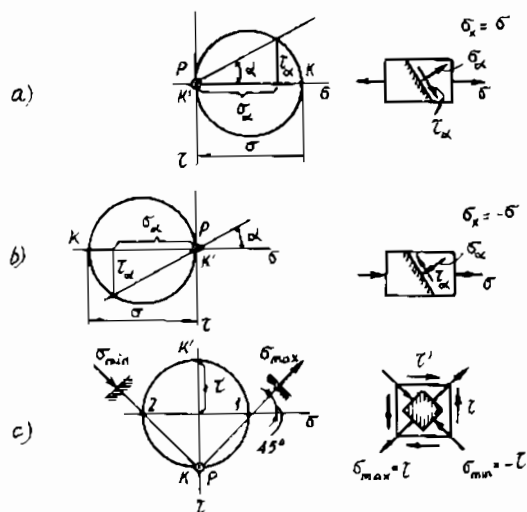
Khi phân bố là phân bố chính thì ứng suất trên mặt nghiêng có pháp tuyến  $\vec{n}$  bất kỳ không song song với một trục chính nào được xác định bởi các điểm  $D_v(\sigma_v, \tau_v)$  nằm trong miền giới hạn giữa ba vòng tròn Mohr (hình 3.12d). Các ứng suất  $\sigma_v$  và  $\tau_v$  được xác định bởi các công thức (3.7) và (3.8). Điểm  $D$  nằm trên vòng tròn tâm  $C_2$  là điểm đặc trưng cho trạng thái ứng suất, ở đó có ứng tiếp  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Như vậy, với trạng thái ứng suất khối bất kỳ ứng suất tiếp lớn nhất nằm trên mặt song song với phương  $\sigma_2$  và nghiêng  $45^\circ$  so với các phương  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$ .

## §5. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

### *Vi dụ 1*

Các phân tử chịu kéo, nén như hình 3.13 ab. Bằng vòng Mohr hãy xác định ứng suất trên mặt nghiêng  $\alpha$  và  $\sigma_{\max/\min}$  đối với phân tử chịu trượt thuần túy (hình 3.13c).



Hình 3.13.



## GIẢI

Kết quả giải bằng vòng Mohr được cho tương ứng trên các hình 3.13a, b, c.

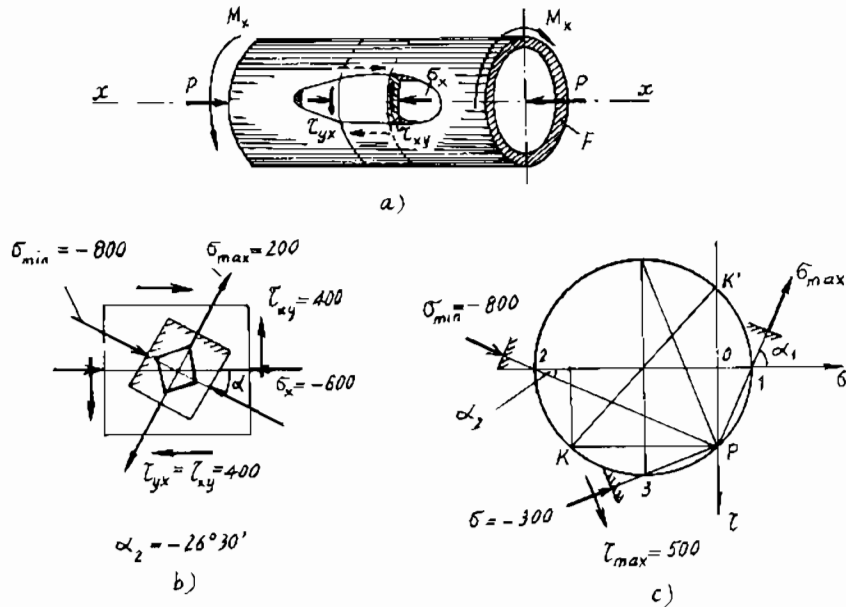
**Vi dụ 2:** Giả sử rằng một ống mỏng chịu tác dụng đồng thời mômen xoắn  $M_x$  và lực dọc  $P$  gây ra các ứng suất trên các mặt của phân tố  $\sigma_x = -600 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 400 \text{ daN/cm}^2$  (hình 3.14a). Hãy tìm các phương chính, ứng suất chính và  $\tau_{\max}$  bằng giải tích và vòng Mohr.

Phân tố chịu ứng suất nói trên được cho trên hình 3.14b

## GIẢI

Theo công thức (3.19) ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= -300 \pm \frac{1}{2} \sqrt{600^2 + 4 \cdot 400^2} = -300 \pm 500 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}\end{aligned}$$



Hình 3.14.

Vì vậy  $\sigma_1 = 200 \text{ daN/cm}^2$ ;  $\sigma_2 = -800 \text{ daN/cm}^2$ .

Theo công thức (3.23)  $\tau_{\max}$  sẽ là:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 500 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

Phương các ứng suất chính có thể tìm theo công thức (3.17) hoặc (3.18).

Theo (3.17) ta có:

$$\text{tg}\alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y};$$

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{400}{200} = 2;$$

$$\alpha_1 = 63^\circ.30'.$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{400}{-800} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = -26^\circ.30'.$$

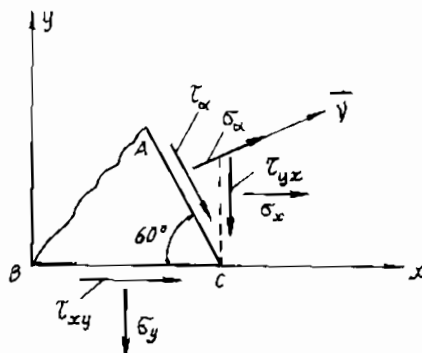
Lời giải bài toán bằng vòng Mohr được cho trên hình 3.14c.

### Ví dụ 3

Hai mặt cắt AC và BC đi qua điểm C (hình 3.15) nằm trong trạng thái ứng suất phẳng. Hãy tính các ứng suất chính và ứng suất  $\sigma_\alpha$  trên mặt cắt xiên AC theo các ứng suất đã biết trên các mặt của phân tố ACB đã được tách ra:  $\sigma_y = 3 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\tau_{yx} = -5 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\tau_{xy} = -5 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\tau_\alpha = -6 \text{ kN/cm}^2$ .

### GIẢI

Trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến  $\bar{v}$  ta có công thức:



Hình 3.15.

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Phương của pháp tuyến ngoài  $\bar{v}$  trên mặt cắt nghiêng làm một góc  $\alpha = 30^\circ$  với trục  $x$  theo chiều dương. Vậy:

$$-6 = -\frac{\sigma_x - 3}{2} \sin 60^\circ - 5 \cos 60^\circ.$$

Suy ra  $\sigma_x = 11,07 \text{ kN/cm}^2$ .

Các ứng suất chính và  $\sigma_{\alpha}$  có trị số:

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{11,07 + 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11,07 - 3}{2}\right)^2 + 5^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 13,27 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_{\min} = 0,61 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{11,07 + 3}{2} + \frac{11,07 - 3}{2} \cos 60^\circ - 5 \sin 60^\circ = 4,73 \text{ kN/cm}^2.$$

#### **Vi dụ 4**

Một phân tử ở trạng thái ứng suất phẳng như hình 3.16a. Hãy xác định phân tử chính tương ứng. Tìm phương và trị số của các ứng suất trên phân tử có ứng suất tiếp lớn nhất, trạng thái ứng suất này là gì?

#### **GIẢI**

Phân tử đã cho có  $\sigma_x = 3 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_y = -3 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\tau_{xy} = 2 \text{ kN/cm}^2$ .

Phương và trị số của ứng suất chính

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{3 - 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 + 3}{2}\right)^2 + 2^2}$$

$$\sigma_{\max} = 3,6 \text{ kN/cm}^2; \sigma_{\min} = -3,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y} = \frac{2}{3,6 + 3,0} = 0,303; \quad \alpha_1 = 16^\circ 59'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\min} - \sigma_y} = \frac{2}{-3,6 + 3,0} = -3,33; \quad \alpha_2 = 106^\circ 51'$$

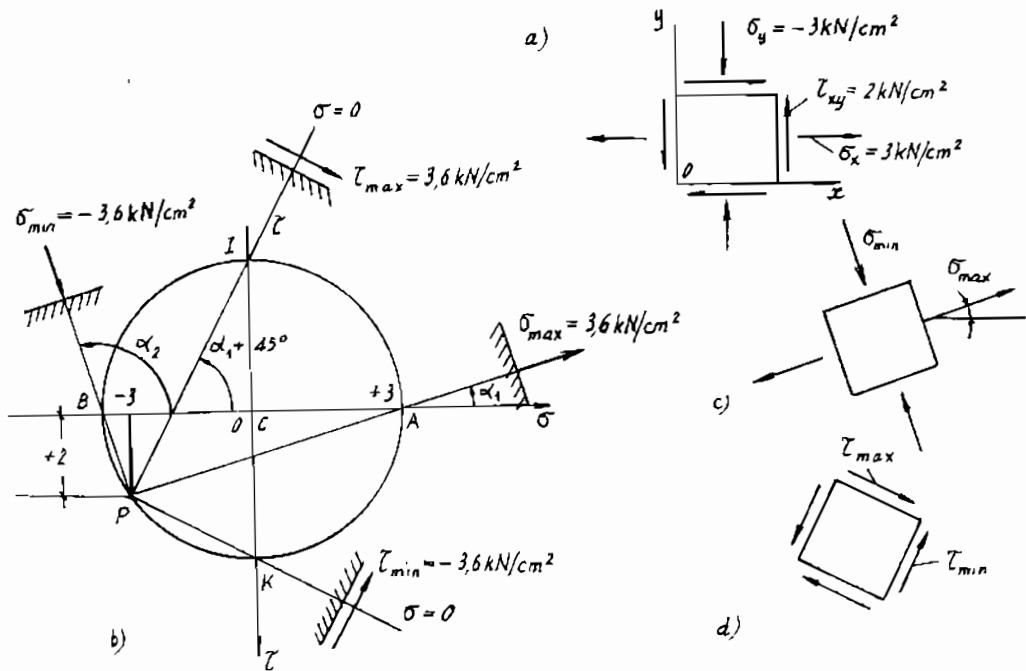
Vòng tròn ứng suất có tâm tại  $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$ ;

Cực P của vòng tròn ứng suất được xác định từ

$$\sigma = \sigma_y = -3; \quad \tau = \tau_{xy} = 2$$

Bán kính của vòng Mohr là CP (hình 3.16b).

Từ P kẻ các tia PA và PB cho phương chính của phân tố chính, phân tố chính được vẽ trên hình 3.16c.



Hình 3.16.

Từ P kẻ các tia PI và PK cho phương của các mặt cắt có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu, các phương này làm một góc  $45^\circ$  với các phương chính.

Phân tố này được vẽ trên hình (3.16d). Trị số của các ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu là:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}} = \pm \sqrt{\left(\frac{3+3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \pm 3,6 \text{ kN/cm}_2$$

Ta thấy trạng thái ứng suất của phân tố là trạng thái trượt thuần túy vì trên các mặt chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp.

### **Vi dụ 5**

Một phân tố chính có các ứng suất chính được cho như trên hình 3.17a. Hãy xác định ứng suất tiếp và pháp trên các mặt nghiêng so với mặt chính các góc  $\beta = -20^\circ$  và  $\alpha = 70^\circ$ .

## **GIẢI**

Ta ký hiệu các mặt nghiêng lần lượt là  $(\beta)$  và  $(\alpha)$  có pháp tuyến là  $\vec{n}_\beta$  và  $\vec{n}_\alpha$ . Trạng thái ứng suất chính đã cho có:

$$\sigma_1 = 900 \text{ daN/cm}^2, \sigma_2 = 600 \text{ daN/cm}^2, \sigma_3 = 0, \alpha = +70^\circ$$

Ứng suất pháp và tiếp trên các mặt  $\beta$  và  $\alpha$  được tính theo công thức (3.9):

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha = (900 \cdot 0,884 + 600 \cdot 0,117) = 866 \text{ daN/cm}^2$$

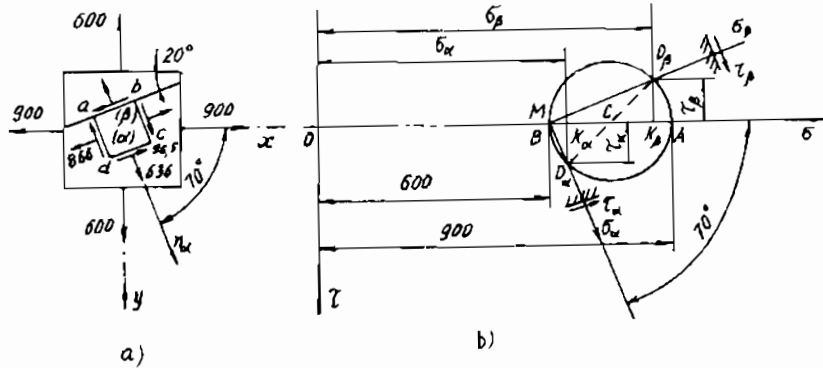
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = (900 \cdot 0,117 + 600 \cdot 0,884) = 636 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{900 - 600}{2} (0,643) = 96,5 \text{ daN/cm}^2$$

Các ứng suất này được biểu diễn trên các mặt  $(\beta)$  và  $(\alpha)$  như hình 3.17a.

Kết quả trên có thể nhận được bằng vòng tròn Mohr ứng suất. Cụ thể là:

Theo  $\sigma_1, \sigma_2$  ta dựng vòng tròn Mohr. Từ cực P = B vẽ các tia song song với  $\bar{n}_\beta$  và  $\bar{n}_\alpha$ . Giao của các tia này với vòng tròn vừa vẽ là các điểm  $D_\beta$  và  $D_\alpha$ . Hoành độ của chúng cho ta  $\sigma_\beta = OK_\beta = 866 \text{ daN/cm}^2$ ,  $\sigma_\alpha = OK_\alpha = 636 \text{ daN/cm}^2$ .



Hình 3.17.

Tung độ cho :  $\tau_\beta = K_\beta.D_\beta = -96,5 \text{ daN/cm}^2$ ;

$\tau_\alpha = K_\alpha.D_\alpha = 96,5 \text{ daN/cm}^2$ .

Trên hình 3.17b, tỷ lệ xích đã thực hiện: 1 cm ứng với 200 daN/cm<sup>2</sup> và đơn vị tính là daN, cm.

### Ví dụ 6

Một phân tố chịu ứng suất được cho trên hình 3.18a. Hãy xác định phân tố chính và các ứng suất trên nó.

### GIẢI

Ứng suất trên các mặt của phân tố đã cho (hình 3.18a) là:

$$\sigma_x = 1000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_y = -800 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = 500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = 500 \text{ daN/cm}^2$$

Các ứng suất chính và phương chính được tính theo các công thức:

$$\sigma_{1/3} = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right)$$

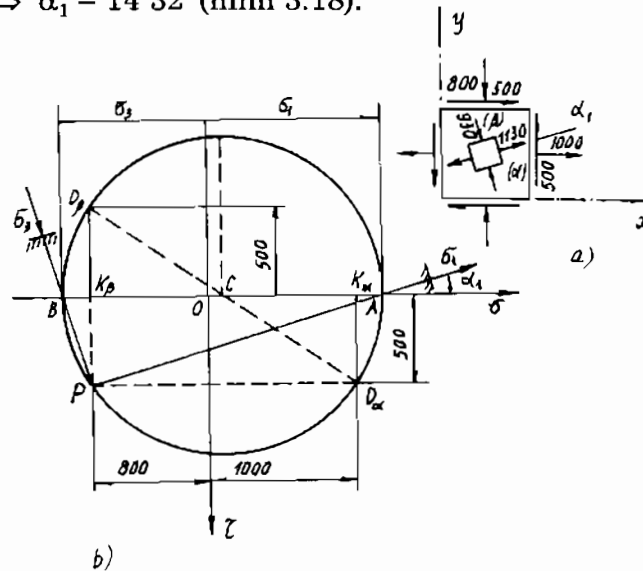
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (1000 - 800) + \sqrt{(1000 + 800)^2 + 4.500^2} =$$

$$= \frac{1}{2} (200 + 2060) = 1130 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (200 - 2060) = -930 \text{ daN/cm}^2;$$

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{500}{1130 - (-800)} = \frac{500}{1930} = 0,259 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 14^\circ 32' \text{ (hình 3.18).}$$



Hình 3.18.

Trên hình 3.18b, giới thiệu cách giải bài toán bằng phương pháp hình học (vòng Mohr ứng suất). Trong hệ tọa độ  $\tau\sigma$ , theo các ứng suất đã cho trên phân tử ta dựng vòng tròn ứng suất và xác định

điểm cực  $P(\sigma_y, \tau_{yx})$ . Sau đó vẽ các tia PA và PB. Các tia này là pháp tuyến của các mặt chính tương ứng với  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  (hình 3.18b).

## §6. BIẾN DẠNG Ở TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI. ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

### 1. Trạng thái biến dạng tại một điểm

Ở trên ta đã đưa ra định nghĩa về trạng thái ứng suất tại một điểm nó được đặc trưng bởi tenxơ ứng suất tại điểm đó. Khi xét biến dạng ở §8 của chương 1, ta đã đặc trưng các biến dạng dài và góc ở lân cận điểm đang xét bằng sự thay đổi chiều dài của một đoạn thẳng hoặc góc giữa hai đoạn thẳng vô vùng nhỏ vuông góc ở lân cận điểm khảo sát. Tương tự tenxơ ứng suất bằng các thành phần biến dạng bé lân cận điểm khảo sát xét trong hệ tọa độ vuông góc là những thành phần của một đại lượng vật lí không biến đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ được gọi là tenxơ biến dạng và kí hiệu  $T_\epsilon$ :

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Nó đặc trưng cho trạng thái biến dạng tại lân cận điểm khảo sát. Tại mỗi điểm, tương tự khi khảo sát trạng thái ứng suất, sẽ tồn tại một hệ trục tọa độ vuông góc gọi là hệ trục chính biến dạng sao cho tenxơ biến dạng trong hệ trục tọa độ này có dạng đường chéo

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  là các thành phần của tenxơ biến dạng theo phương chính được gọi là biến dạng chính. Cũng như trong trạng thái ứng suất ta quy ước kí hiệu  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$  về trị số đại số. Các giá trị này được xác định từ phương trình



$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (3.27)$$

trong đó:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.28)$$

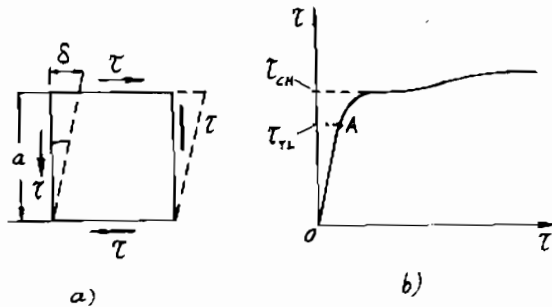
$$J_2 = - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \quad (3.30)$$

## 2. Định luật Húc khi trượt

Mô hình vật lý về vật liệu đã được mô tả trong chương 1, ở đó vật liệu được xem là tuân theo định luật Húc, còn biến dạng là bé.

Ta khảo sát sự biến dạng của phân tử chịu trượt thuần túy như trên hình 3.19a. Trên đó đường liền nét biểu diễn phân tử khi chưa chịu lực, đường nét đứt là phân tử ở trạng thái biến dạng. Hình thức biến dạng này, gọi là trượt.  $\delta$  là độ trượt tuyệt đối. Tỷ số  $\frac{\delta}{a}$  giữa độ trượt tuyệt đối của hai mặt cắt rất gần nhau với khoảng cách của chúng, được gọi là độ trượt tương đối. Vì biến dạng bé, nên:



Hình 3.19.

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\delta}{a} \quad (3.31)$$

Vậy biến dạng góc  $\gamma$  cũng chính là độ trượt tương đối.

Đối với vật rắn đàn hồi tuyến tính thí nghiệm chứng minh rằng ứng suất tiếp tỷ lệ bậc nhất với độ trượt tương đối  $\gamma$ .

$$\tau = G\gamma \quad (3.32)$$

Quan hệ này gọi là định luật Húc về trượt. Trong đó hệ số tỷ lệ  $G$  được gọi là *môđun đàn hồi khi cắt* (hoặc *môđun đàn hồi trượt*) đặc trưng cho tính chống biến dạng trượt của vật liệu, đơn vị là  $\text{MN/m}^2$ , hoặc  $\text{kG/cm}^2$  v.v.

Bảng 1 giới thiệu trị số trung bình của môđun đàn hồi  $G$  của một số vật liệu:

**Bảng 1**

Vật liệu	$G$ ( $\text{MN/m}^2$ )
Thép	$8,1 \cdot 10^4$
Gang	$4,5 \cdot 10^4$
Đồng	$4 \cdot 10^4 - 4,9 \cdot 10^4$
Nhôm	$2,6 \cdot 10^4$
Gỗ	$0,055 \cdot 10^4$

Môđun đàn hồi trượt  $G$  là một hằng số vật lý đối với từng loại vật liệu. Giữa ba hằng số vật liệu  $E$ ,  $\mu$  và  $G$  có quan hệ sau đây.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.33)$$

Dạng điển hình của biểu đồ biến dạng trượt  $\tau - \gamma$  đối với thép ít cacbon được cho trên hình 3.19b.

Biểu đồ này nhận được đồng thời ngay cả từ thí nghiệm về xoắn. Ứng suất  $\tau_{TL}$  – giới hạn tỷ lệ khi trượt. Định luật Húc về trượt có hiệu lực với các giá trị  $\tau \leq \tau_{TL}$ .

$\tau_{ch}$  – giới hạn chảy khi trượt.

Quá trình biến dạng xảy ra tương tự như khi kéo mẫu cùng loại thép.

Đối với phần lớn các vật liệu  $\tau_{ch}$  liên hệ với  $\sigma_{ch}$  khi kéo đơn như sau:

$$\tau_{ch} \approx \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \quad (3.34)$$

Kết luận này sẽ được giải thích kĩ trong các chương sau.

### 3. Định luật Húc tổng quát

Ta đã biết ở trong chương 2, mối liên hệ giữa ứng suất  $\sigma$  và biến dạng dài tương đối  $\varepsilon$  như sau:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.35)$$

Ta gọi quan hệ này là định luật Húc khi kéo (nén) đơn. Định luật Húc về trượt cũng như định luật Húc kéo (nén) đơn được Robốt Húc tìm ra bằng thực nghiệm

Khi thí nghiệm về kéo (nén) đơn ta đã thấy rằng, đồng thời với  $\varepsilon$  thì theo phương vuông góc với nó có kèm theo biến dạng dài  $\varepsilon'$  ngược dấu với  $\varepsilon$ .

Cụ thể là:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (3.36)$$

Bây giờ xét một phân tử ở trạng thái ứng suất khối thuộc vật đàn hồi tuyến tính với các ứng suất chính  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  và  $\sigma_3$  theo các phương I, II, III (hình 3.20).

Trước hết hãy tìm biến dạng dài tương đối  $\varepsilon'_1$  theo phương I của phân tử.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta xét biến dạng dài tương đối do từng ứng suất gây ra theo phương I.

Biến dạng do  $\sigma_1$  sinh ra bằng:

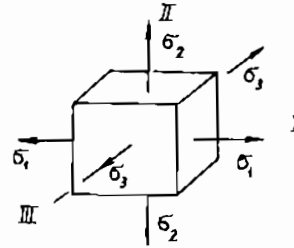
$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$$

Biến dạng do  $\sigma_2$  sinh ra bằng:

$$\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$

Biến dạng do  $\sigma_3$  sinh ra bằng:

$$\varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$



Hình 3.20.

Cộng các biến dạng độc lập trên ta được biến dạng dài tương đối theo phương I do cả ba ứng suất  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  và  $\sigma_3$  sinh ra:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$$

$$\text{hay: } \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Cũng lý luận như trên, ta được quan hệ biến dạng dài tương đối theo phương II và phương III của phân tố theo ứng suất. Mỗi quan hệ giữa các biến dạng và ứng suất pháp nói trên tạo thành một hệ phương trình sau đây và gọi là định luật Húc tổng quát khi kéo (nén) phức tạp:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Vì biến dạng là rất bé, nên hoàn toàn có thể coi ứng suất pháp chỉ gây ra biến dạng dài, còn ứng suất tiếp chỉ gây ra biến dạng trượt; Vì thế, nếu phân tố khảo sát không phải là phân tố chính mà là phân tố bất kì (hình 3.1) thì công thức (3.31) vẫn đúng và định luật Húc tổng quát dạng thuận như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\tag{3.38}$$

Khi biểu diễn ứng suất theo biến dạng ta có định luật Húc dạng ngược sau đây:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta \quad ; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\end{aligned}\tag{3.39}$$

Trong đó,  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  ;  $\lambda = 2\mu G/(1 - 2\mu)$ .

## §7. THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Năng lượng tích lũy trong vật thể khi chịu biến dạng đàn hồi là thế năng biến dạng.

Ta hãy khảo sát một thanh có chiều dài  $l$ , diện tích mặt cắt ngang  $F$  chịu kéo bởi lực  $P$  tăng dần từ 0 đến  $P$  và bị dài thêm một đoạn  $\Delta$  (hình 3.21a).

Khi chất tải tĩnh như thế, lực  $P$  sinh một công  $A$ . Trong giới hạn đàn hồi công  $A$  này về trị số bằng thế năng biến dạng  $U$ :

$$A = U\tag{3.40}$$

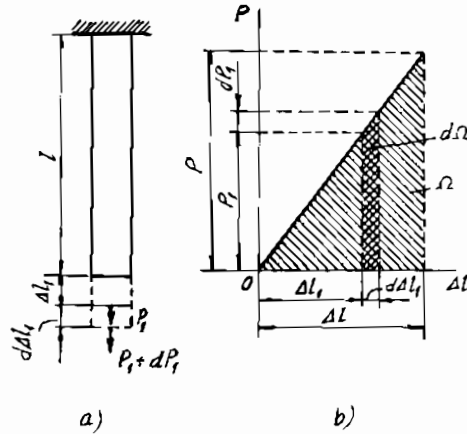
Giả sử trong quá trình chất tải lực  $P$  có giá trị  $P_1$  và độ dãn tương ứng  $\Delta l_1$ . Cho  $P_1$  một số gia  $dP_1$  và  $\Delta l_1$  tăng một lượng  $d\Delta l_1$ .

Công của lực  $P_1$  trên chuyển vị  $d\Delta l_1$  này là:

$$dA = P_1 d\Delta l_1$$

Quan hệ giữa lực kéo  $P$  và  $\Delta$  được cho trên hình 3.21b. Từ hình vẽ này ta thấy:

$$dA = d\Omega \Rightarrow A = \int_0^{\Omega} d\Omega = \Omega$$



Hình 3.21.

Bởi vậy, công (nghĩa là thế năng) bằng diện tích biểu đồ kéo và trong giới hạn đàn hồi biểu đồ này là một hình tam giác, vì thế:

$$U = A = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l \quad (3.41)$$

Khi thay lực  $P$  bằng nội lực  $N$  ta có:

$$U = \frac{N \cdot \Delta l}{2} \quad (3.42)$$

Thế năng biến dạng riêng là tỷ số:

$$u = \frac{U}{F \cdot l} = \frac{N \cdot \Delta l}{2 F \cdot l} = \frac{\sigma \cdot \epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (3.43)$$

Bây giờ ta tính thế năng biến dạng riêng trong trường hợp trạng thái ứng suất khô. Muốn vậy, ta xét phân tử chính chiều dài các cạnh bằng đơn vị nằm ở trạng thái ứng suất khô (hình 3.20). Các ứng suất  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sinh công trên các chuyển vị của các mặt phân tử. Trong trường hợp này về số là bằng các độ dãn dài chính  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  vì các cạnh bằng đơn vị. Vì vậy theo (3.43):

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \epsilon_3}{2} \quad (3.44)$$

Thay  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  và  $\varepsilon_3$  từ (3.37) vào (3.44) ta có thể năng biến dạng riêng được biểu diễn trực tiếp qua  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  :

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \quad (3.45)$$

Khi biến dạng thì phân tố trên hình 3.20 sẽ bị thay đổi cả về thể tích và hình dáng. Do đó, thế năng riêng toàn phần có thể mô tả như tổng của thế năng riêng thay đổi thể tích  $u_v$  và thế năng riêng thay đổi hình dáng  $u_h$ .

$$u = u_v + u_h \quad (3.46)$$

Thế năng riêng thay đổi thể tích được xác định bởi:

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (3.47)$$

Do đó, thế năng riêng thay đổi hình dáng sẽ là:

$$u_h = u - u_v = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

hay

$$u_h = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (3.48)$$

### Ví dụ 7

Một khối thép được đặt khít trong rãnh khuôn (hình 3.22) được xem là cứng tuyệt đối. Khối thép chịu nén bởi áp lực đều  $p$ . Hãy xác định áp lực đặt vào khối thép và áp lực khối thép tác dụng vào thành khuôn? Biết  $E_T = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ ;  $\mu = 0,28$ ,  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

### GIẢI

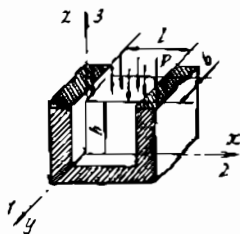
Theo hệ trục đã chọn trên hình vẽ, ta có điều kiện:

$$\sigma_z = -p \quad ; \quad \sigma_y = 0 \quad ; \quad \varepsilon_x = 0$$

Theo định luật Húc:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

Suy ra:  $\sigma_x = -\mu p$  (a)



Hình 3.22.

Vậy theo phương x, khối thép bị nén. Theo qui ước dấu ứng suất chính ta có:  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = -\mu p$ ;  $\sigma_3 = -p$ .

Theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất, điều kiện bền là:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad \text{hay} \quad p \leq [\sigma] \quad (b)$$

Theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất điều kiện bền là:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} &\leq [\sigma] \Rightarrow \\ \sqrt{\mu^2 p^2 + p^2 - \mu p^2} = 0,8p \leq [\sigma] &\Rightarrow p \leq 1,25 [\sigma] \quad (c) \end{aligned}$$

Trị số lớn nhất có thể của p tác dụng lên khối thép là  $p \leq [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ .

Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng thì thành khuôn chịu áp lực do khối thép tác dụng vào  $q = -\sigma_x = \mu p = 0,28.p$ . Áp lực q này được dùng để tính khuôn.

### Ví dụ 8

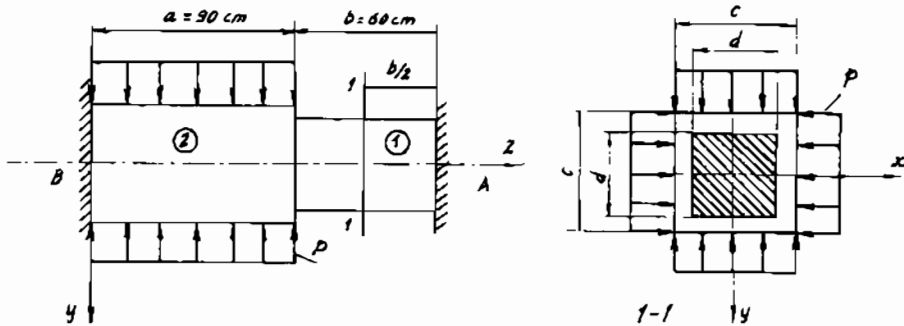
Cho thanh có kích thước và chịu lực như hình 3.23a.

1. Tính ứng suất trong các đoạn thanh.
2. Tính chuyển vị của mặt cắt 1-1.



Cho  $a = 0,9 \text{ m}$ ;  $b = 0,6 \text{ m}$ ;  $c = 6 \text{ cm}$ ;  $d = 4 \text{ cm}$ ;  $p = 15 \text{ kN/cm}^2$ ;  
 $\mu = 0,3$ ,  $E = 2,1.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

## GIẢI



Hình 3.23.

Đoạn I:  $\sigma_x^I = \sigma_y^I = 0$

$$\epsilon_z^I = \frac{1}{E} [\sigma_z^I - \mu (\sigma_x^I + \sigma_y^I)] = \frac{\sigma_z^I}{E}$$

Đoạn II:  $\sigma_x^{II} = \sigma_y^{II} = -p$

$$\epsilon_z^{II} = \frac{1}{E} [\sigma_z^{II} - \mu (\sigma_x^{II} + \sigma_y^{II})] = \frac{1}{E} (\sigma_z^{II} + 2\mu p)$$

Điều kiện biến dạng:

$$u_I + u_{II} = 0$$

hay:  $\epsilon_z^I \cdot b + \epsilon_z^{II} \cdot a = 0$

Vậy:  $\sigma_z^I \cdot 60 + (\sigma_z^{II} + 2\mu p) \cdot 90 = 0$  (a)

Mặt khác:  $\sigma_z^I = \frac{N}{F_1}$  ;  $\sigma_z^{II} = \frac{N}{F_2}$  (b)

Thay (b) vào (a), ta được:  $N = -129,6 \text{ kN}$ .

$$\sigma_z^I = \frac{N}{F_1} = -8,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N}{F_2} = -3,6 \text{ kN/cm}^2.$$

Chuyển vị của mặt cắt 1-1:

$$U_{1-1} = \frac{-N \cdot b/2}{EF_1} = \frac{129,6 \times 30}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 16} = +6 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

### ***Vi dụ 9***

Một trụ thép tròn đặc đường kính  $d = 50 \text{ mm}$  đặt khít trong ống đồng chiều dày  $\delta = 1 \text{ mm}$ . Trụ thép chịu lực nén phân bố đều có hợp lực  $P$ . Hãy xác định ứng suất trong ống đồng. Cho biết  $E_T = 2E_d$ ;  $\mu_T = 0,3$ ; bỏ qua ma sát giữa các chi tiết của hệ (hình 3.24a).

### **GIẢI**

Lập hệ trục như trên hình 3.24a, ứng suất nén theo phương  $z$  có trị số là:

$$\sigma_z = -\frac{P}{F} = -\frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 5^2} = -7,6 \text{ kN/cm}^2$$

Ở đây chúng ta có bài toán biến dạng phẳng, cụ thể là:

Vì bề dày của ống đồng mỏng nên trong ống phát sinh ứng suất kéo được xem như phân bố đều dọc theo chiều dày và theo chiều cao ống, gọi ứng suất pháp đó là  $\sigma$ . Mặt khác khối trụ bằng thép chịu áp lực phân bố đều của ống đồng tác dụng dọc chiều cao, gọi áp lực này là  $q$ . Xét cân bằng của nửa ống đồng (hình 3.24b) có chiều cao bằng đơn vị, lực kéo trên thành ống là  $N$  cân bằng với hình chiếu của áp lực  $q$  theo phương  $x$  đã biết, ta có:

$$2N = qD \Rightarrow q = \frac{2\delta\sigma}{D}$$

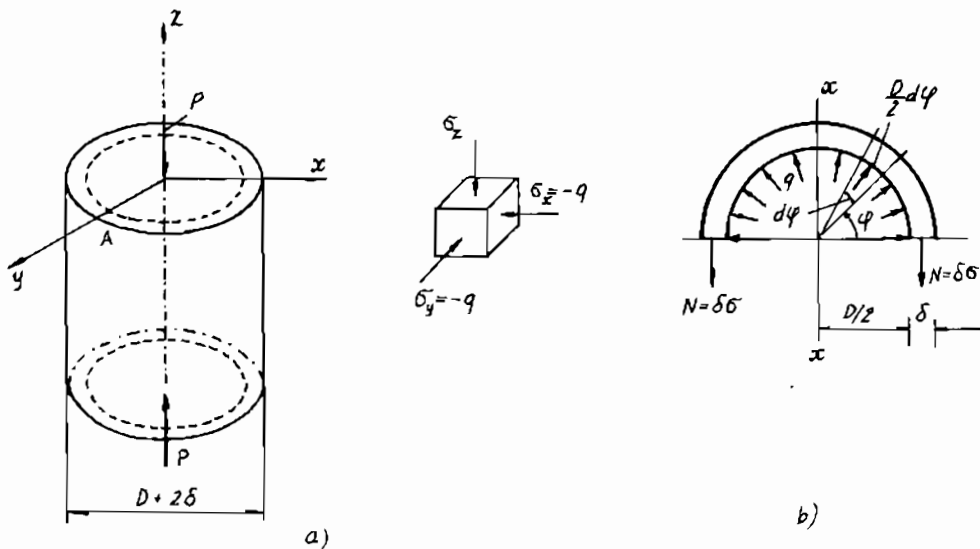
Tách phân tố A trên trục y của lõi thép, ta thấy phân tố chịu ứng suất  $\sigma_z$  và ứng suất  $\sigma_x = \sigma_y = -q$ . Vì ống đồng và lõi thép đặt khít nên điều kiện biến dạng tương thích của lõi thép và ống đồng là:  $\varepsilon_T = \varepsilon_d$ :

trong đó,  $\varepsilon_d = \frac{\sigma_d}{E_d}$  ;  $\varepsilon_T = \frac{1}{E_T} [\sigma_x - \mu_T \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$

Vậy:  $\frac{\sigma}{E_d} = \frac{1}{E_T} [-q - \mu_T \cdot (-q - 7,6)]$  (a)

Thay các giá trị bằng số của  $\mu_T$ ,  $\sigma_z$ ,  $E_T = 2E_d$  và  $q = \frac{2\delta\sigma}{D}$  vào phương trình (a), ta có ứng suất trong ống đồng:

$$\sigma = \frac{\mu_T \sigma_z}{2 \frac{\delta}{D} (1 - \mu_T) + \frac{E_T}{E_d}} = \frac{0,3 \cdot 7,6}{2 \frac{0,1}{5} (1 - 0,3) + 2} = 1,12 \text{ kN/cm}^2$$



Hình 3.24.

# CHƯƠNG 4

## KÉO VÀ NÉN

---

Hiện tượng kéo và nén rất hay gặp trong các chi tiết máy và cấu kiện công trình. Ví dụ, hiện tượng kéo phát sinh trong các nhánh căng của dây đai trong truyền động đai, trong mối ghép ren không xiết giữa vít và đai ốc. Mối ghép ren của móc cần trục là một ví dụ của loại mối ghép này. Hiện tượng kéo và nén luôn xuất hiện trong các nan hoa xe đạp, xe máy, trong các cáp cầu treo, trong các thanh của những kết cấu giàn nhà, giàn cầu và giàn cần trục v.v.

### §1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC GIẢ THIẾT TÍNH TOÁN

Giả sử ta có một thanh chịu kéo như hình 4.1a.

Để thống nhất cách viết, ta dùng các ký hiệu:

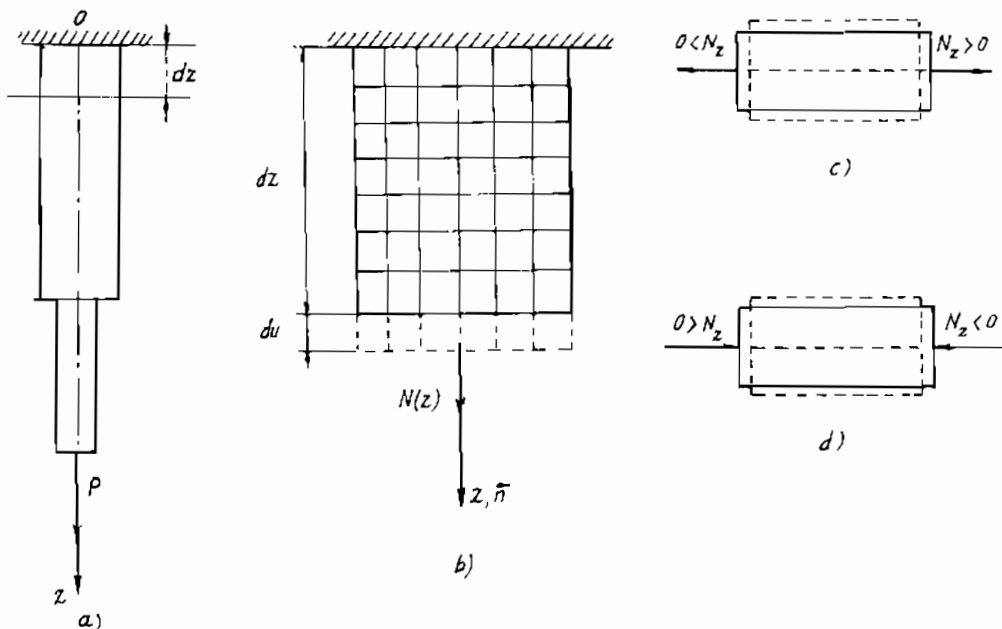
{ } – biểu diễn vectơ, ví dụ {S} biểu diễn vectơ  $\vec{S}$ .

[ ] – biểu diễn ma trận.

Ta hãy xét một đoạn thanh chịu kéo có chiều dài dz (hình 4.1b).

Hệ nội lực trên các mặt cắt ngang của cấu kiện nói trên tương

đương với một lực dọc  $N$  trùng với trục của thanh. Nếu  $\{N\} \cdot \{n\} > 0$ , ta nói thanh chịu kéo, còn nếu  $\{N\} \cdot \{n\} < 0$  ta nói thanh chịu nén. Trong đó  $\{n\}$  là vectơ pháp tuyến ngoài của mặt cắt ngang (hình 4.1b, c, d).



Hình 4.1.

Vậy ta có định nghĩa:

*Một thanh được gọi là chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm nếu trên mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc  $N$  trùng với trục của thanh, còn tất cả các thành phần nội lực khác đều bằng 0.*

*Các giả thiết tính toán*

a. Mặt cắt ngang của thanh trước và sau biến dạng vẫn luôn luôn phẳng và vuông góc với trục của thanh.

b. Trong quá trình biến dạng các thớ dọc luôn luôn thẳng, song song với trục của thanh và không tác dụng tương hỗ lên nhau (hình 4.1b).

## §2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Theo các giả thiết ở trên được rút ra từ thí nghiệm thì trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có biến dạng dài tỷ đối theo phương trục  $z$  và là hằng với mọi điểm trên mặt cắt, nghĩa là (hình 4.1b):

$$\varepsilon_z = \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (4.1)$$

Theo định luật Húc (được tìm ra bằng thí nghiệm) thì quan hệ  $\sigma = f(\varepsilon)$  có dạng:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (4.2)$$

Mặt khác:

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F \quad \text{hay} \quad \sigma = \frac{N}{F} \quad (4.3)$$

Từ (4.2) và (4.3) ta rút ra phương trình vi phân của chuyển vị dọc trục  $u(z)$  như sau:

$$\frac{du}{dz} = \frac{N(z)}{EF} \quad (4.4)$$

$$\text{Do đó:} \quad u = \int \frac{N(z)}{EF(z)} dz \quad (4.4a)$$

trong các công thức từ (4.1) đến (4.4a):

$N(z)$ ,  $F(z)$ ,  $u(z)$  lần lượt là nội lực dọc, diện tích mặt cắt ngang và chuyển vị dọc trục  $z$  tại mặt cắt có hoành độ  $z$ .

$EF(z)$  là độ cứng của mặt cắt ngang tại  $z$ .

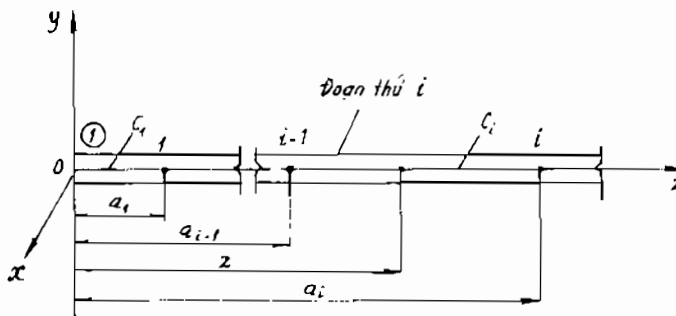
$EF(z)/l$  là độ cứng của đoạn thanh có chiều dài  $l$ .

## §3. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC BẰNG PHƯƠNG PHÁP VẠN NĂNG - TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Chúng ta hãy khảo sát một thanh chiều dài  $l$  gồm  $n$  đoạn mặt cắt ngang khác nhau, chịu tác dụng của hệ ngoại lực bất kỳ, chịu liên

kết bất kỳ. Do tác dụng ngoài mà trên mặt cắt ngang của thanh có hoành độ  $z$  xuất hiện những tác dụng cơ học trong cần xác định. Ta gọi chúng là các đại lượng cần tính và ký hiệu là  $F(z)$ .

Để thống nhất cách trình bày và tiện sử dụng các đại lượng cần tính  $F(z)$  được thiết lập trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz. Gốc tọa độ "O" được đặt cố định ở đầu trái của thanh, trục  $z$  trùng với trục thanh và hướng sang phải, các mặt cắt phân chia giữa các đoạn thanh được đánh số là "i" ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tên gọi của mỗi đoạn sẽ mang tên nút cuối phải của đoạn đó. Đầu trái của mỗi đoạn (mặt cắt  $i-1$ ) được ký hiệu là "O<sub>i</sub>" như là gốc tọa độ địa phương của đoạn "i" có chiều dài  $l_i = a_i - a_{i-1}$ . Hoành độ các mặt cắt phân chia giữa các đoạn được ký hiệu là  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n$  (hình 4.2).



Hình 4.2.

Giả sử đại lượng cần tính tổng quát  $F_i(z)$  mô tả hiệu ứng cơ học trong của đoạn thanh thứ  $i$  là một hàm nào đó và các đạo hàm của nó là những hàm liên tục từng khúc trong khoảng  $a_{i-1} \leq z \leq a_i$ . Bây giờ chúng ta hãy tìm cách xác định đại lượng cần tính  $F(z)$  thuộc đoạn thứ  $i$ , có chiều dài  $l_i = a_i - a_{i-1}$ .

Ta có thể bằng nhiều cách, tìm được  $F_i(z)$  tổng quát theo  $F_{O_i}$  và các đạo hàm của nó tại đầu trái O<sub>i</sub> (khai triển Taylor là một trong những giải pháp như vậy). Cụ thể là:

$$F_i(z) = F_{O_i} + F'_{O_i}(z - a_{i-1}) + F''_{O_i} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + F'''_{O_i} \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \dots$$

Khi ký hiệu

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } \forall z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } \forall 0 \leq z < a_{i-1} \end{cases} \quad (4.5)$$

với  $(k = \overline{0, n})$

Ta có thể viết đại lượng  $F(z)$  và các đạo hàm của nó tại hoành độ  $z$  như sau:

$$\left. \begin{aligned} F_{i(z)} &= F_{O_i} \Phi_0 + F'_{O_i} \Phi_1 + F''_{O_i} \Phi_2 + F'''_{O_i} \Phi_3 + \dots \\ F'_{i(z)} &= 0 + F'_{O_i} \Phi_0 + F''_{O_i} \Phi_1 + F'''_{O_i} \Phi_2 + \dots \\ F''_{i(z)} &= 0 + 0 + F''_{O_i} \Phi_0 + F'''_{O_i} \Phi_1 + F^{(IV)}_{O_i} \Phi_2 + \dots \\ F'''_{i(z)} &= 0 + 0 + 0 + F'''_{O_i} \Phi_0 + F^{(IV)}_{O_i} \Phi_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Dưới dạng ma trận hệ (4.6) sẽ là:

$$\vec{S}_i(z) = [C_i] \vec{D}_{O_i} \quad (4.7)$$

trong đó:

$$[C_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \dots \end{vmatrix}$$

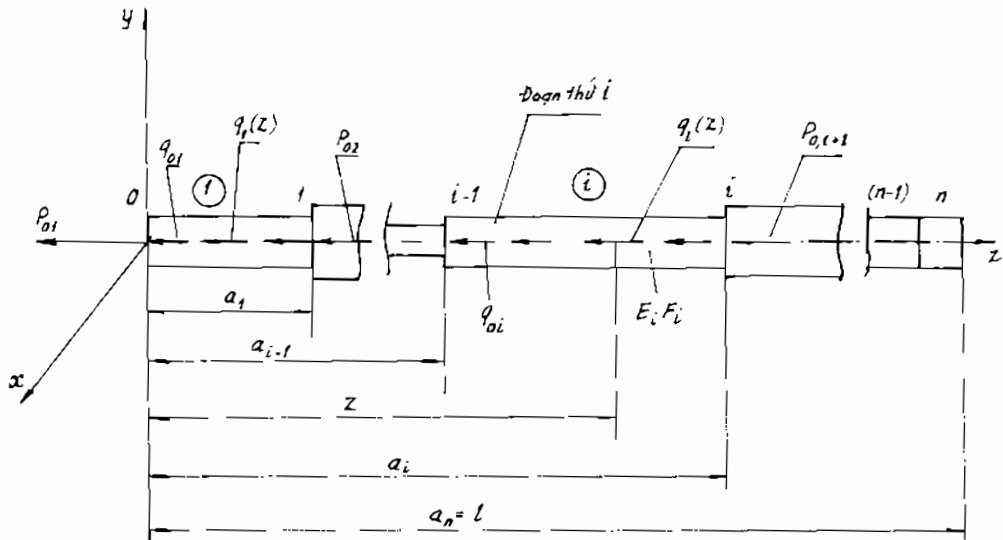
$\vec{S}_i(z) = (F_i(z), F'_i(z), F''_i(z), F'''_i(z))^T$  là véctơ các đại lượng cần tính tại hoành độ  $z$  thuộc đoạn thứ "i".

$$\vec{D}_{O_i} = (F_{O_i}, F'_{O_i}, F''_{O_i}, F'''_{O_i}, F^{(IV)}_{O_i}, F^{(V)}_{O_i}, \dots)^T \quad (4.8)$$



#### §4. CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC $U(z)$ , $N(z)$ TRONG BÀI TOÁN KÉO (NÉN)

Đối với thanh chịu kéo, nén thì sơ đồ tính hình 4.2 có dạng cụ thể (hình 4.3).

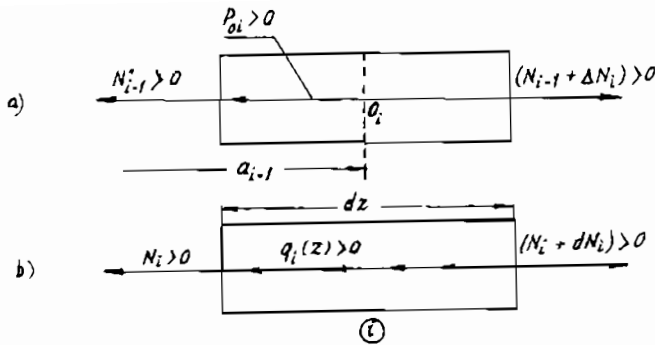


Hình 4.3.

##### 1. Liên hệ vi phân giữa nội lực, chuyển vị và tải trọng ngoài

Liên hệ này nhận được khi ta xét điều kiện cân bằng của các đoạn thanh  $dz$  (hình 4.4a, b) được tách từ thanh hình 4.3. Các điều kiện cân bằng của các đoạn thanh này và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta kết quả (4.9) như đã làm ở §12 chương 1). Bằng cách đạo hàm liên tiếp hai vế của phương trình (4.4) ta có hệ thống (4.10):

$$\begin{aligned}
 \Delta N_i &= P_{0i} & \frac{dU_i}{dz} &= \frac{N_i}{E_i F_i} \\
 \frac{dN_i}{dz} &= q_i(z) & \frac{d^2 U_i}{dz^2} &= \frac{q_i(z)}{E_i F_i} & (4.9) & & (4.10) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
 \frac{d^n N_i}{dz^n} &= q_i^{(n-1)}(z) & \frac{d^n U_i}{dz^n} &= \frac{q_i^{(n-2)}(z)}{E_i F_i}
 \end{aligned}$$



Hình 4.4.

## 2. Dạng ma trận

Nhờ các liên hệ vi phân (4.9) và (4.10) mà vectơ  $\bar{D}_{O_i}$  trong (4.8) được viết:

$$\bar{D}_{O_i} = \left( U_{O_i}, \frac{N_{O_i}}{E_i F_i}, \frac{q_{O_i}}{E_i F_i}, \frac{q'_{O_i}}{E_i F_i}, \frac{q''_{O_i}}{E_i F_i} \dots \right)^T \quad (4.11)$$

là vectơ mà các thành phần của nó là giá trị của hàm  $U_i$  và các đạo hàm của nó ở đầu trái "O<sub>i</sub>" thuộc đoạn "i". Nghĩa là ở mặt cắt (i-1).

Biểu thức vectơ (4.7) trong trường hợp kéo, nén được viết lại như sau:

$$\bar{S}_i(z) = [B_i] \bar{S}_{O_i} \quad (4.12)$$

trong đó:  $\bar{S}_{O_i}$  là vectơ chỉ các thông số trạng thái tại đầu trái "O<sub>i</sub>" thuộc đoạn "i" được khảo sát khi đã loại bỏ phần thanh  $a_{i-1}$  và bổ sung vào đó tác dụng của phần đã bỏ đi.

$[B_i]$  là ma trận biến đổi của đoạn i.

$\bar{S}_i(z)$  là vectơ chỉ các đại lượng cần tính tại z thuộc đoạn "i".

Cụ thể là:

$$\bar{S}_{O_i} = \left\{ U_{O_i}, N_{O_i}, q_{O_i}, q'_{O_i}, q''_{O_i} \dots \right\}^T \quad (4.12a)$$

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i F_i} & \frac{\Phi_2}{E_i F_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} & \frac{\Phi_4}{E_i F_i} & \frac{\Phi_5}{E_i F_i} \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \dots \end{vmatrix} \quad (4.12b)$$

$$\bar{S}_i(z) = \begin{Bmatrix} U_i(z) \\ N_i(z) \end{Bmatrix} \quad (4.12c)$$

Khi thay  $(z - a_{i-1})$  bằng chiều dài  $l_i$  của đoạn "i" thì  $\bar{S}_i(z)$  trở thành  $\bar{S}_i^*(a_i)$ ,  $[B_i(z)]$  trở thành  $[B_i^*(l_i)]$  và quan hệ (4.12) sẽ là:

$$\bar{S}_i^* = [B_i^*] \bar{S}_{0i} \quad (4.12d)$$

Ta ký hiệu  $\Delta \bar{S}_{0i}$  là bước nhảy của vectơ các thông số trạng thái ở đầu trái "0i" nếu có của đoạn "i" sẽ được bổ sung vào  $\bar{S}_{i-1}^*$  là vectơ các thông số trạng thái của đại lượng cần tính tại cuối phải đoạn "i-1" thì ta có thể viết  $\bar{S}_{0i}$  như sau:

$$\bar{S}_{0i} = \bar{S}_{i-1}^* + \Delta \bar{S}_{0i} \quad (4.12e)$$

\* Đối với đoạn thứ nhất  $i = 1$  biểu thức (4.12) có dạng:

$$\bar{S}_1(z) = [B_1] \left( \bar{S}_0^* + \Delta \bar{S}_{01} \right) = [B_1] \cdot \Delta \bar{S}_{01}$$

(Chú ý là  $\bar{S}_{i-1}^* = \bar{S}_0^* = 0$ ) và

$$\bar{S}_1(a_1) = [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01}$$

\* Đối với đoạn  $i = 2$ :

$$\bar{S}_2(z) = [B_2] \left\{ [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + \Delta \bar{S}_{02} \right\} = [B_2] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2] \Delta \bar{S}_{02}$$

$$\bar{S}_2^*(a_2) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02}$$

Bằng giải pháp bước tiếp bước kể từ đoạn đầu tiên như vậy, ta thiết lập được công thức tổng quát để xác định các đại lượng cần tính cho thanh có n đoạn độ cứng  $E_i F_i$  khác nhau dưới dạng:

Đối với đoạn thứ i:

$$\bar{S}_i(z) = [B_i] \left( \bar{S}_{i-1}^* + \Delta \bar{S}_{0,i} \right) = [B_i] \bar{S}_{i-1}^* + [B_i] \Delta \bar{S}_{0,i} \quad (4.13)$$

$$\bar{S}_i^*(a_i) = [B_i^*] [B_{i-1}^*] \bar{S}_{i-2}^* + [B_i^*] [B_{i-1}^*] \Delta \bar{S}_{0,i-1} + [B_i^*] \Delta \bar{S}_{0,i} \quad (4.13a)$$

Đổi với đoạn thứ n:

$$\bar{S}_n(z) = \left. \begin{aligned} & [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_i^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} \\ & + \dots + [B_n] \Delta \bar{S}_{0n} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

$$\bar{S}_n(a_n) = \left. \begin{aligned} & [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_i^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} \\ & + \dots + [B_n^*] \Delta \bar{S}_{0n} \end{aligned} \right\} \quad (4.14a)$$

trong đó:

$$\Delta \bar{S}_{0i} = \left\{ \Delta U_{0i}, \Delta N_{0i} = P_{0i}, \Delta q_{0i}, \Delta q'_{0i}, \Delta q''_{0i} \dots \right\}^T, \quad i = \bar{1}, n$$

\* Khi  $E_i F_i = \text{const}$  và  $l_i = \text{const}$  với mọi "i" các phương trình (4.14) và (4.14a) được thu về:

$$\left\{ \bar{S}_n(z) \right\} = [B_n] [B^*]^{n-1} \Delta \bar{S}_{01} + [B_n] [B^*]^{n-2} \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B_n] [B^*] \Delta \bar{S}_{0,n-1} + [B_n] \Delta \bar{S}_{0n} \quad (4.15)$$

$$\bar{S}_n^*(a_n) = [B^*]^n \Delta \bar{S}_{01} + [B^*]^{n-1} \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B^*] \Delta \bar{S}_{0n} \quad (4.15a)$$

Các công thức từ (4.13) đến (4.15a) được xây cho mọi bài toán kéo, nén, uốn, xoắn. Sự khác nhau chỉ là các ma trận  $[B_i(z)]$  và  $\Delta \bar{S}_{0i}$ .

### 3. Dạng biểu diễn tổng

Trong nhiều trường hợp các đại lượng cần tính được biểu diễn dưới dạng tổng lại tỏ ra thuận lợi hơn. Vì vậy, khi  $EF = \text{const}$  và  $l_i \neq \text{const}$  với mọi "i" thì phương trình (4.14) có dạng tổng quát như sau:

$$U_K(z) = \sum_{i=1}^{k=\bar{1},n} \left( \Delta U_{0i} \Phi_0 + P_{0i} \frac{\Phi_1}{EF} + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_2}{EF} + \Delta q'_{0i} \frac{\Phi_3}{EF} + \dots \right) \quad (4.16)$$

$$N_K(z) = \sum_{i=1}^{k=\bar{1},n} \left( P_{0i} \Phi_0 + \Delta q_{0i} \Phi_1 + \Delta q'_{0i} \Phi_2 + \Delta q''_{0i} \Phi_3 + \dots \right) \quad (4.16a)$$

Ở đây k chỉ tên đoạn thanh trên đó cần tính  $U(z)$  và  $N(z)$ .

Đối với thanh có cấu tạo liên tục ( $\Delta U_{0i} = 0$  với  $i > 1$ ), các công thức từ (4.13) đến (4.15a) cho thấy, để tính được chuyển vị và nội lực thì phải biết rõ tất cả các thành phần vectơ  $\overline{\Delta S}_{0i}$ , dù đó là thanh siêu tĩnh hay tĩnh định. Trong số các thành phần của vectơ  $\overline{\Delta S}_{0i}$ , thì các đại lượng  $\Delta q_{0i}$ ,  $\Delta q'_{0i}$ ,  $\Delta q_{0i}$  ... được biết trước từ điều kiện chất tải, còn một trong hai đại lượng  $\Delta U_{0i}$  và  $P_{0i}$  hoặc đã biết từ điều kiện liên kết hoặc đã biết từ điều kiện chất tải tập trung tại mặt cắt  $z = a_{i-1}$ . Đại lượng chưa biết còn lại nhận được từ điều kiện liên kết của thanh với môi trường xung quanh (các điều kiện biên). Khi sử dụng các phương trình vạn năng đã thiết lập sẵn ở trên, trong nhiều trường hợp không cần một phương trình phụ nào để xác định  $\overline{\Delta S}_{0i}$ , nếu chỉ muốn xác định nội lực. Thuật toán xác định chuyển vị và nội lực trong các thanh đàn hồi chịu lực mà thanh chịu kéo (nén) là một trường hợp riêng vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình máy tính bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán bằng chương trình BK45 của tác giả được viết bằng ngôn ngữ Pascal 7.0 nhờ thuật toán này được cho ở cuối chương này và các chương tiếp sau.

## **§5. ỨNG SUẤT CHO PHÉP, ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ CỨNG**

### **1. Ứng suất cho phép**

Để đảm bảo sự làm việc an toàn, ứng suất lớn nhất phát sinh trong thanh phải nhỏ hơn giới hạn chịu lực của vật liệu. Ta gọi giới hạn chịu lực này là ứng suất nguy hiểm  $\sigma_0$ .

Với vật liệu dẻo thường chọn giới hạn chảy làm ứng suất nguy hiểm  $\sigma_0 = \sigma_{ch}$  để chi tiết không bị biến dạng quá lớn khi làm việc, còn đối với vật liệu giòn thường chọn giới hạn bền  $\sigma_0 = \sigma_b$ . Nhưng để đảm bảo an toàn cần phải hạn chế ứng suất lớn nhất có thể xuất hiện trong chi tiết máy hoặc kết cấu do tác dụng ngoài gây ra sao cho không vượt quá một trị số nhỏ hơn ứng suất nguy hiểm. Trị số này gọi là ứng suất cho phép.

Ứng suất cho phép được ký hiệu là  $[\sigma]$  và được xác định theo công thức:

$$[\sigma] = \frac{1}{n} \sigma_0 \quad (4.17)$$

trong đó:

$\sigma_0$  là ứng suất nguy hiểm,  $n$  được gọi là hệ số an toàn về bền ( $n > 1$ ).

Muốn chọn hệ số an toàn một cách đúng đắn cần kể đến những nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của chi tiết máy hay kết cấu như:

- Tính chất của vật liệu: dẻo hay giòn, đồng chất nhiều hay ít. Tính chất phân tán của  $\sigma_{ch}$  và  $\sigma_b$  tìm được bằng thí nghiệm.

- Tính chất quan trọng và thời gian sử dụng của thiết bị và công trình.

- Tính chất của tác dụng ngoài (tĩnh hay động,...) và độ chính xác của việc xác định chúng.

## 2. Điều kiện bền – ba bài toán thường gặp

Muốn đảm bảo sự làm việc an toàn khi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (4.18)$$

Điều kiện này được gọi là điều kiện bền.

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể gặp ba bài toán cơ bản sau đây:

a. *Kiểm tra bền*: Kiểm tra bền là bài toán kiểm tra điều kiện (4.18) đối với mọi mặt cắt của thanh, cụ thể là:

$$\sigma_{\max(\min)} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_{k(n)} \quad (4.19)$$

trong đó:

$[\sigma]_{k(n)}$  – ứng suất cho phép khi kéo (k) hoặc nén (n).

*b. Chọn kích thước mặt cắt:* Yêu cầu của bài toán này là xác định kích thước tối thiểu của mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện sau:

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \quad (4.20)$$

Để đảm bảo an toàn và tiết kiệm nên chọn  $F$  xấp xỉ tỷ số  $\frac{N_z}{[\sigma]}$  chừng  $\pm 5\%$  là đủ.

*c. Xác định tải trọng cho phép:* Khi biết kích thước mặt cắt và ứng suất cho phép, cần xác định tải trọng trong trường hợp tổng quát là tác dụng ngoài  $P$  lớn nhất cho phép đặt lên chi tiết máy hoặc kết cấu. Muốn thế phải có:

$$N = f(p) \leq F[\sigma] \quad (4.21)$$

### 3. Điều kiện cứng - ba bài toán thường gặp

Điều kiện cứng là điều kiện hạn chế biến dạng và chuyển vị đàn hồi dọc trục của thanh tùy thuộc vào yêu cầu kỹ thuật cụ thể cho trước của từng cấu kiện. Các biến dạng và chuyển vị này phải nhỏ hơn biến dạng và chuyển vị cho phép:  $[\varepsilon]$  và  $[u]$ .

Điều kiện cứng được diễn đạt như sau:

$$\varepsilon \leq [\varepsilon] \text{ hoặc } u \leq [u] \quad (4.22)$$

Từ quan hệ (4.22) có thể rút ra ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng.

*a. Bài toán kiểm tra điều kiện cứng* tức là kiểm tra điều kiện (4.22).

*b. Bài toán chọn mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện:*

$$F \geq \frac{N}{E[\varepsilon]} \quad (4.23)$$

*c. Bài toán chọn tải trọng cho phép  $P$ :* chọn chế độ tác dụng ngoài cho phép là thực hiện điều kiện:

$$N = f(p) \leq EF[\varepsilon] \quad (4.24)$$

## §6. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

### Ví dụ 1

Cho một thanh chịu lực dọc trục như hình 4.5a. Hãy tính và vẽ biểu đồ  $N$  và  $\sigma$  dọc theo thanh. Tính chuyển vị tại A? Biết  $F = 40 \text{ cm}^2$ ,  $E = 1.10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

### GIẢI

#### 1. Phương pháp mặt cắt và tích phân trực tiếp

Xét nội lực trong ba đoạn AB, BC, CD (hình 4.5a):

$$\text{Đoạn AB: } (0 \leq z_1 \leq 2\text{m}) \quad ; \quad N_z = -60 - 15z_1$$

$$\text{Đoạn BC: } (2\text{m} \leq z_2 \leq 4\text{m}) \quad ; \quad N_z = -20 - 15z_2$$

$$\text{Đoạn CD: } (4\text{m} \leq z_3 \leq 6\text{m}) \quad ; \quad N_z = -80 - 15z_3$$

Ứng suất trong các đoạn được tính theo công thức  $\sigma_z = \frac{N_z}{F}$ .

Biểu đồ lực dọc  $N_z$  và ứng suất pháp  $\sigma_z$  được vẽ trên hình 4.5b, c.

– Chuyển vị của điểm A là tổng đại số biến dạng dài trong các đoạn. Vì lực dọc là hàm số của  $z$  nên công thức tính biến dạng dài có dạng:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF}$$

– Chuyển vị của điểm A là tổng biến dạng dài trong từng đoạn:

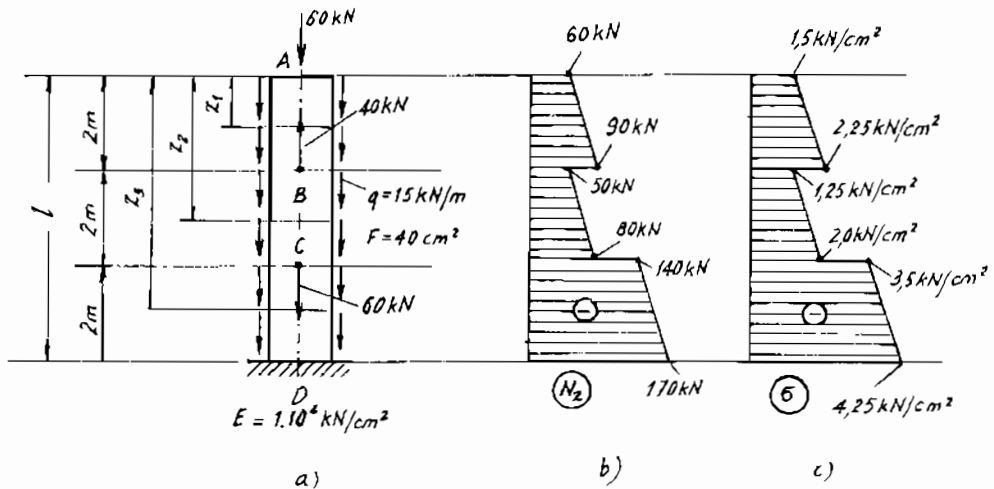
$$\Delta l = u_A = \int_{AB} \frac{N_z dz_1}{EF} + \int_{BC} \frac{N_z dz_2}{EF} + \int_{CD} \frac{N_z dz_3}{EF}$$

Sau khi đổi đơn vị và thay cận tích phân tương ứng, ta có:

$$u_A = \int_0^2 \frac{-60 - 15z_1}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_1 + \int_2^4 \frac{-20 - 15z_2}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_2 + \int_4^6 \frac{-80 - 15z_3}{1.10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} dz_3$$

$$u_A = -1,475 \cdot 10^3 \text{ m.}$$





Hình 4.5.

## 2. Phương pháp vạn năng

Khi chọn gốc tọa độ tại A, chiều dương trục z hướng xuống theo (4.16), ta có:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \Delta u_{01} - \frac{60z}{EF} - \frac{15z^2}{2EF} \Bigg|_1 + \frac{40(z-2)}{EF} \Bigg|_2 - \frac{60(z-4)}{EF} \Bigg|_3 \\
 N(z) &= \begin{array}{ccc} -60 & -15z & \\ \hline & | & \\ & 1 & \end{array} & \begin{array}{ccc} +40 & & \\ \hline & | & \\ & 2 & \end{array} & \begin{array}{ccc} -60 & & \\ \hline & | & \\ & 3 & \end{array}
 \end{aligned} \tag{a}$$

$0 \leq z \leq 2m \quad 2m \leq z \leq 4m \quad 4m \leq z \leq 6m$

Tại  $z = 6m$  thì  $u(6m) = 0$  suy ra  $\Delta u_{01} = u_A = 1,475 \cdot 10^{-3} m$ .

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F} = \frac{1}{F} \left[ \begin{array}{ccc} (-60 - 15z) & +40 & -60 \\ \hline & | & \\ & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Biểu đồ lực dọc (N) và ứng suất ( $\sigma$ ) được cho trên hình 4.5b, c.

## Ví dụ 2

Một vành tròn bằng thép được ghép có độ dôi với một vành nhôm (hình 4.6a). Thí nghiệm cho thấy trong một vài trường hợp sau khi nung nóng hệ đã ghép đến một nhiệt độ xác định rồi làm lạnh bề mặt này thì vành nhôm bên trong tách khỏi vành thép ngoài.

Hãy cho biết trong điều kiện nào hiện tượng này có thể xảy ra. Những số liệu như thế nào cần có để có được một sự đánh giá bằng số của hiện tượng nói trên?

## GIẢI

Hiện tượng nêu ra trong đề bài là có thể, nếu khi nung nóng trong vành nhôm sẽ phát sinh biến dạng dẻo đủ lớn. Nếu ký hiệu  $\Delta$  là hiệu giữa bán kính ngoài của vành nhôm và bán kính trong của vành thép trước khi ghép thì ta có:

$$\varepsilon_{nh} + \varepsilon_{th} = \frac{\Delta}{R} \quad (a)$$

$\varepsilon_{nh}$  và  $\varepsilon_{th}$  lần lượt là độ co và độ giãn tương đối hướng kính của vành nhôm và thép.

Trong giới hạn đàn hồi khi có thêm sự nung nóng thì:

$$\varepsilon_{nh} = \frac{\sigma_{nh}}{E_{nh}} - \alpha_{nh} \cdot T, \quad \varepsilon_{th} = \frac{\sigma_{th}}{E_{th}} + \alpha_{th} \cdot T \quad (b)$$

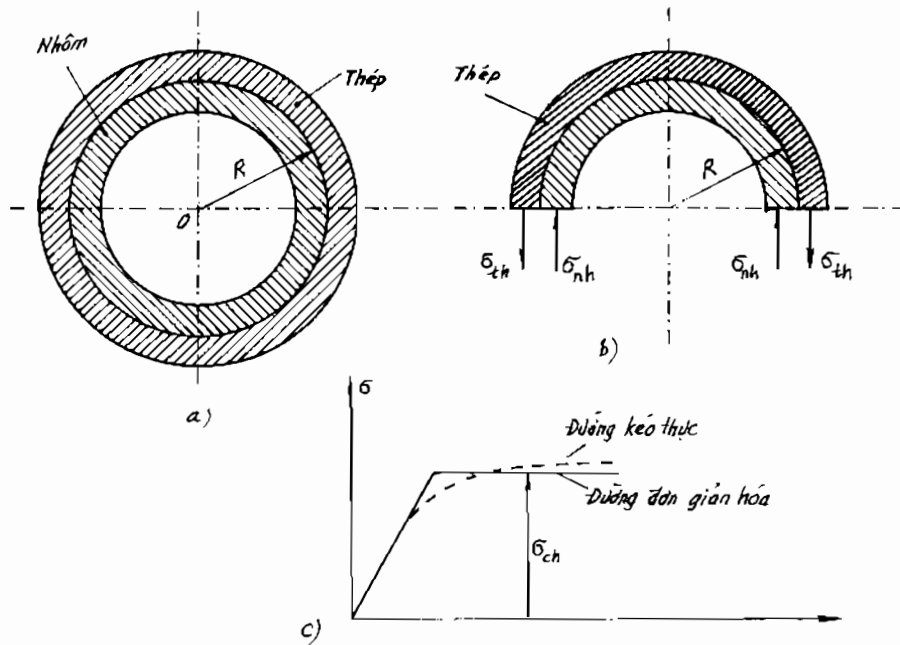
trong đó:

$\sigma_{nh}$ ,  $\sigma_{th}$  là ứng suất trong vành nhôm và thép;

$\alpha_{nh}$ ,  $\alpha_{th}$  là hệ số giãn nở dài tương ứng của nhôm và thép.

Mặt khác với chiều dày  $h$  như nhau thì điều kiện cân bằng (hình 4.6b) cho ta:  $\sigma_{th} = \sigma_{nh} = \sigma$  và phương trình (a) được viết lại khi chú ý đến hệ (b) như sau:

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta}{R} + T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (c)$$



Hình 4.6.

Giả thiết nhận biểu đồ  $\sigma$  ( $\epsilon$ ) kéo hoặc nén của nhôm là đàn hồi dẻo lý tưởng (hình 4.6c). Giới hạn chảy của nhôm  $\sigma_{nh}^{ch}$  thấp hơn giới hạn chảy của thép. Do ứng suất trong cả hai vành thép và nhôm là như nhau như đã chỉ ra ở trên, cho nên khi vành nhôm đã chảy dẻo thì vành thép vẫn đàn hồi. Ứng suất ban đầu khi ghép căng  $\sigma_0$  bằng:

$$\sigma_0 = \frac{\Delta/R}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (d)$$

Thay (d) vào (c) ta đi đến:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (e)$$

Điều này cho thấy  $\sigma$  không thể lớn hơn  $\sigma_{nh}^{ch}$ . Nếu nhiệt độ nung nóng:

$$T > (\sigma_{nh}^{ch} - \sigma_0) \left( \frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}} \right) \frac{1}{\alpha_{nh} - \alpha_{th}}$$

thì trong vành nhôm biến dạng dẻo xuất hiện và  $\sigma = \sigma_{nh}^{ch}$ .

Bị làm lạnh các vành sẽ biến dạng đàn hồi. Khi đó ứng suất dư sẽ là tổng đại số  $\sigma_{nh}^{ch}$  và ứng suất do làm lạnh rút ra từ (e) khi T đổi dấu. Nghĩa là:

$$\sigma_{dư} = \sigma_{nh}^{ch} - \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}} \quad (g)$$

Khi mà  $\sigma_{dư} < 0$  thì vành nhôm bật ra khỏi vành thép. Do đó, điều kiện bật này sẽ là:

$$T(\alpha_{nh} - \alpha_{th}) > \sigma_{nh}^{ch} \left( \frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}} \right) \quad (h)$$

Có thể có trường hợp biến dạng dẻo trong vành nhôm xuất hiện ngay trong khi lắp ghép trước khi nung thì bản chất hiện tượng vật lý được mô tả bởi quan hệ (g) và (h) vẫn được bảo toàn bất kể  $\sigma_{nh}^{ch}$  đạt được bằng cách nào.

### ***Ví dụ 3***

Cho một thanh chịu lực như trên hình 4.7a. Bằng phương pháp vạn năng, hãy viết bằng tay các biểu thức, vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực, tính ứng suất và chuyển vị lớn nhất, kiểm tra bền và cứng. Biết  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $F = 10^{-3} \text{ m}^2$ ;  $[\sigma] = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ;  $[u] = 0,1 \text{ cm}$ .

### **GIẢI**

Trong trường hợp bài toán, thanh được chia làm 3 đoạn, biểu thức của  $U(z)$  và  $N(z)$  lần lượt là:

Gọi  $R_0$  là phản lực tại ngàm trái, ta có phương trình  $U(z)$  và  $N(z)$  được viết theo (4.16) và (4.16a) như sau:

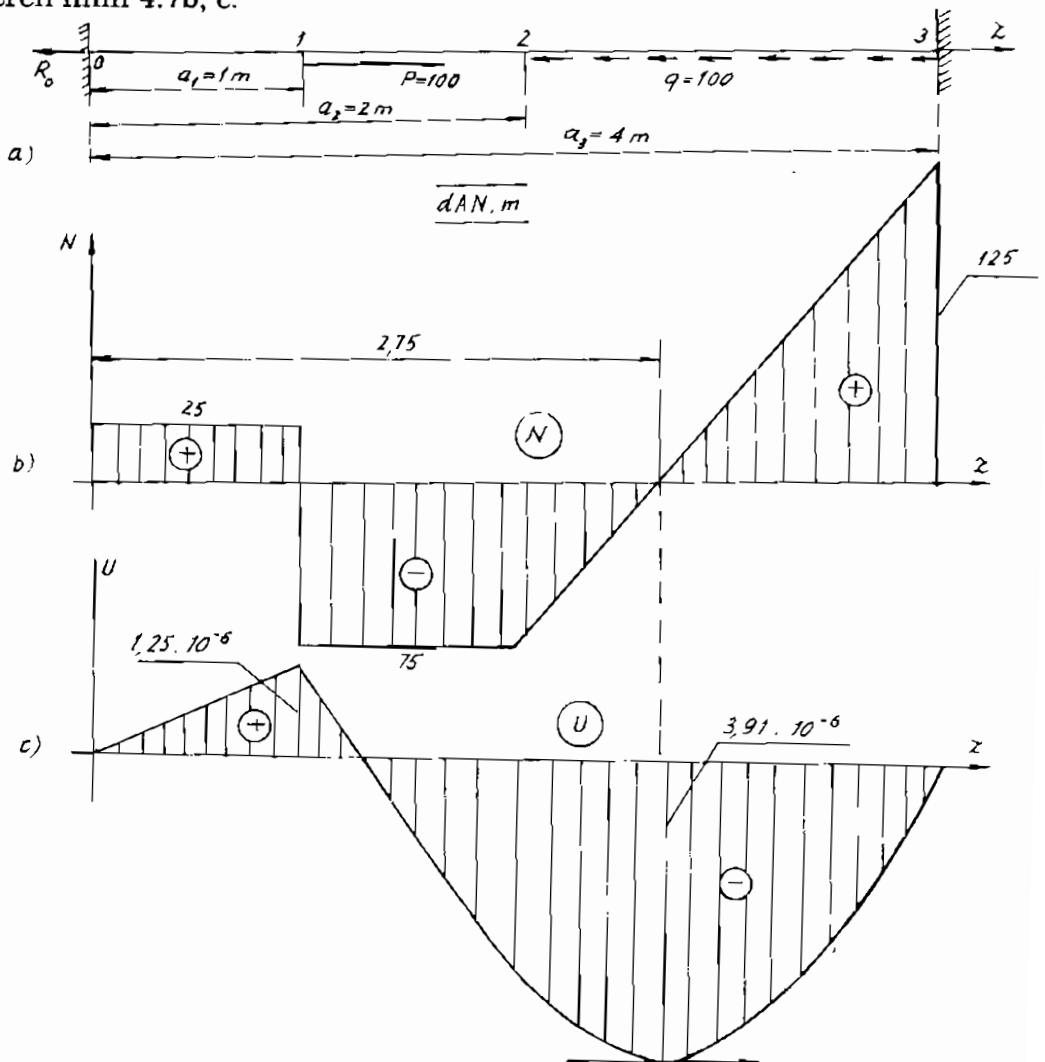
$$EFU(z) = R_0 z \left| \frac{-100(z-1)}{i=1} \right| \frac{+100(z-2)^2}{i=2 \quad 2!} \left| \frac{}{i=3} \right|$$

$$N(z) = R_0 \left| \frac{-100}{i=1} \right| \frac{+100(z-2)}{i=1} \left| \frac{}{i=3} \right|$$

$U(z = a_3 = 4\text{m}) = 0$ , cụ thể là:

$$4R_0 - 100 \times 3 + 100 \times 2 = 0 \Rightarrow R_0 = 25 \text{ daN}$$

Thay  $R_0 = 25 \text{ daN}$  vào phương trình  $U(z)$ ,  $(N(z))$  và vẽ các biểu đồ trên hình 4.7b, c.



Hình 4.7.

Ứng suất và chuyển vị lớn nhất lần lượt là:

$$\sigma_{\max} = \frac{125}{10^{-3}} = 125 \cdot 10^3 \text{ daN/m}^2 < [\sigma] = 16 \cdot 10^2 \text{ daN/cm}^2.$$

$$U_{\max}(z = 2,75 \text{ m}) = 3,91 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,91 \cdot 10^{-4} \text{ cm} < [u] = 0,1 \text{ cm}.$$

Điều kiện bền và điều kiện cứng đều thỏa mãn tốt.

#### ***Ví dụ 4***

Một thanh chịu lực dọc trục  $z$ , có quy luật  $q(z) = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{l^n} \cdot z^n$ .

Cho biết:  $l = 80 \text{ cm}$ ,  $F = 20 \text{ cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $q_0 = 0,1 \text{ kN/cm}$ ,  $q_1 = 1 \text{ kN/cm}$  (hình 4.8a).

Hãy vẽ biểu đồ  $U(z)$  và  $N(z)$  với  $n = 0, 1, 2, 3$ .

### **GIẢI**

a) Trường hợp  $n = 0$

$$q(z) = q_1 = 1 \text{ kN/cm}$$

$$EFU(z) = R_{01}z + \frac{1 \cdot z^2}{2}$$

$$N(z) = R_{01} + 1 \cdot z$$

Tại  $z = l$ ,  $U(l) = 0 \Rightarrow R_{01} = -40 \text{ kN}$ .

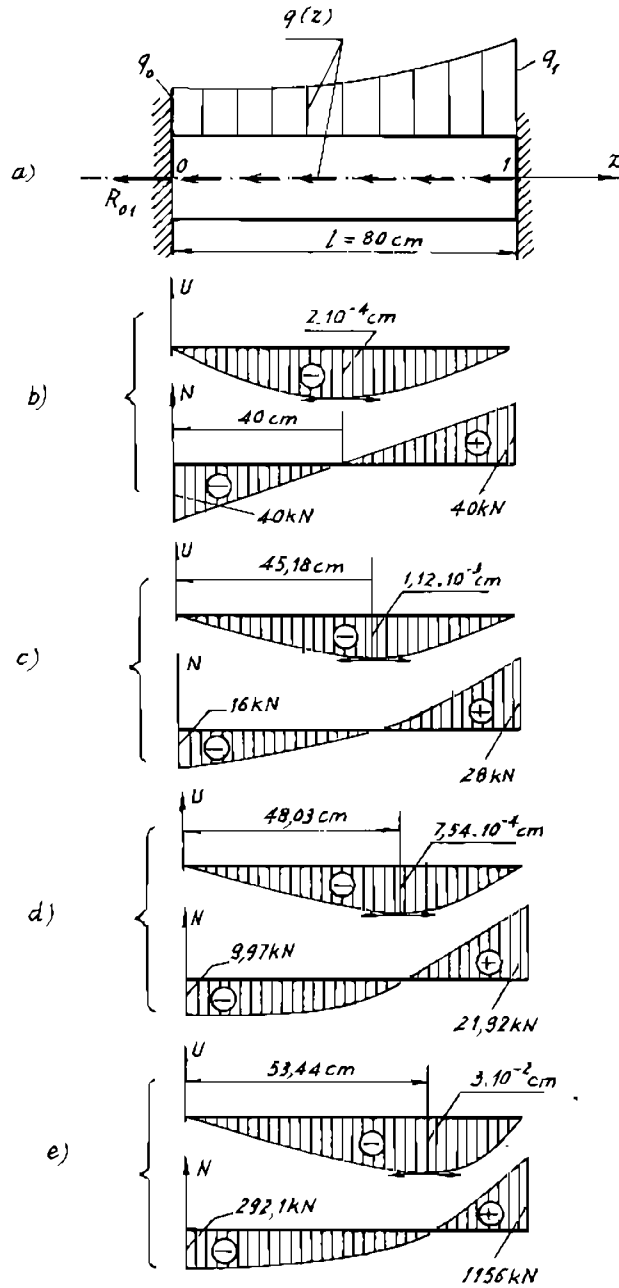
Biểu đồ  $U(z)$  và  $N(z)$  được cho trên hình 4.8b.

b) Trường hợp  $n = 1$

$$q(z) = 0,1 + \frac{0,9z}{80}; \Delta q_{01} = 0,1; \Delta q'_{01} = 0,01125$$

$$EFU(z) = R_{01}z + 0,1 \frac{z^2}{2} + 0,01125 \frac{z^3}{3!}$$

$$N(z) = R_{01} + 0,1z + 0,01125 \frac{z^2}{2}$$



Hình 4.8.

Tại  $z = l = 80 \text{ cm}$ ,  $U(l) = 0$ . Cụ thể là:

$$R_{01} \cdot l + 0,1 \frac{l^2}{2} + 0,01125 \frac{l^3}{6} = 0 \Rightarrow R_{01} = -16 \text{ kN.}$$

Thay  $R_{01} = -16 \text{ kN}$  vào  $U(z)$  và  $N(z)$  và vẽ các biểu đồ  $U(z)$  và  $N(z)$  như hình 4.8c.

### 3. Trường hợp $n = 2$

$$q = 0,1 + \frac{0,9z^2}{80^2} ; \quad \Delta q_{01} = 0,1 ; \quad \Delta q'_{01} = \frac{1,8 \cdot 0}{80^2} = 0$$

$$\Delta q''_{01} = \frac{1,8}{80^2} = 0,00028.$$

$$EFU(z) = R_{01} \cdot z + 0,1 \frac{z^2}{2} + 0,00028 \frac{z^4}{4!}$$

$$N(z) = R_{01} + 0,1 z + 0,00028 \frac{z^3}{3!}.$$

Tại  $z = 80 \text{ cm}$ ,  $U(80 \text{ cm}) = 0$ . Cụ thể là:

$$R_{01} \cdot 80 + 0,1 \cdot \frac{80^2}{2} + 0,00028 \frac{80^4}{4!} = 0 \Rightarrow R_{01} = -9,973 \text{ kN.}$$

Theo các hàm của  $U$  và  $N$  với  $R_{01} = -9,873 \text{ kN}$  và các số liệu đề bài, biểu đồ ( $U$ ) và ( $N$ ) được cho trên hình 4.8d.

### 4. Trường hợp $n = 3$

Các bước tính toán trong trường hợp này hoàn toàn tương tự các bước trước. Với các số liệu của đề bài và  $n = 3$ , hàm chuyển vị dọc trục  $U(z)$  và hàm lực dọc  $N(z)$  dưới dạng tường minh là:

$$U(z) = 1,758 \cdot 10^{-11} z^5 + 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot z^2 - 7,302 \cdot 10^{-4} \cdot z$$

$$N(z) = 3,517 \cdot 10^{-5} \cdot z^4 + 0,1 z - 292,1$$

$$0 \leq z \leq 80 \text{ cm.}$$

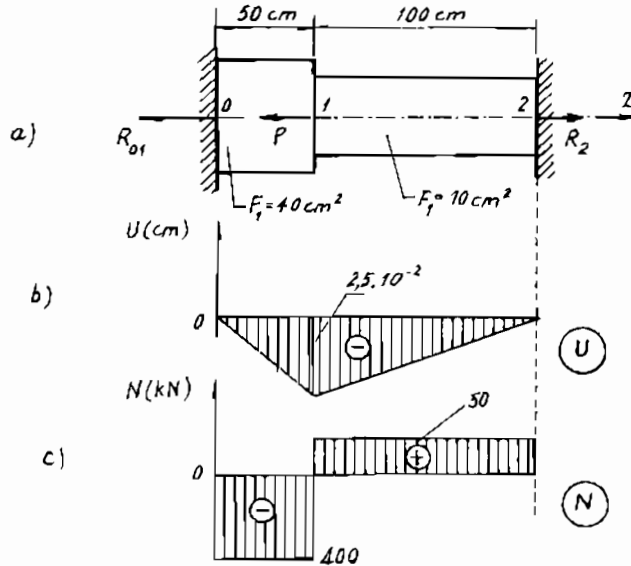


Biểu đồ  $(U(z))$  và  $(N(z))$  được cho trên hình 4.8e.

**Ví dụ 5**

Một thanh mặt cắt ngang thay đổi chịu lực như hình 4.9a. Hãy kiểm tra bền và cứng cho thanh. Biết  $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$  ;  $[u] = 0,1 \text{ cm}$  ;  $P = 450 \text{ kN}$ .

**GIẢI**



Hình 4.9.

Chuyển vị và nội lực theo phương pháp vạn năng dạng ma trận theo công thức (4.14) có dạng:

$$\vec{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z/EF_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

$$\vec{S}_2(z) = [B_2] [B_1'] \Delta S_{01} + [B_2] \Delta S_{02}$$

$$\begin{aligned}
S_2^*(150) &= [B_2^*] [B_1^*] \Delta S_{01} + [B_2^*] \Delta S_{02} = \\
&= \begin{Bmatrix} U_2^* \\ N_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{10E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{50}{40E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 100/10E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 450 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình này ta có:

$$R_{01} = -400 \text{ kN (ngược chiều hình 4.9a).}$$

$$R_2 = 50 \text{ kN.}$$

Thay  $R_{01} = -400 \text{ kN}$  vào  $\bar{S}_1(z)$  và  $\bar{S}_2(z)$  ta có các phương trình của  $U(z)$ ,  $N(z)$  trong các đoạn 1 và 2. Đồ thị của chúng cho trên hình 4.9b, c.

$$\max |\sigma| = \frac{400}{40} < [\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2 ;$$

$$\max |u| = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm} < [u] = 0,1 \text{ cm.}$$

Vậy thanh làm việc an toàn theo cả hai điều kiện bền và cứng.

### ***Vi dụ 6***

Một thanh chịu lực như hình 4.10.

Khe hở giữa đầu dưới của thanh và nền cứng là  $\Delta$ . Hãy tính chuyển vị  $\delta$  của điểm đặt lực  $P$  khi  $P \geq \frac{EF\Delta}{l}$ , thế năng biến dạng đàn hồi trong thanh và vẽ đồ thị quan hệ  $P = f(\delta)$ ?

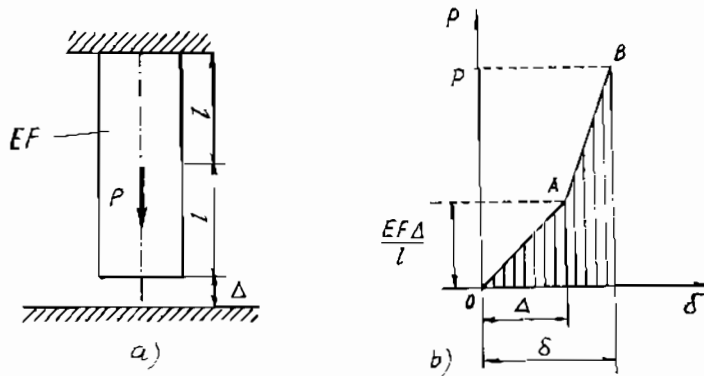
### **GIẢI**

Khi  $P \geq \frac{EF\Delta}{l}$  thì khe hở đã được đóng lại. Phản lực  $N$  đặt vào đầu dưới thanh được tìm từ điều kiện:

$$\frac{(P - N)l}{EF} - \frac{Nl}{EF} = \Delta$$

Do đó, nội lực trong phần dưới và phần trên thanh sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{P}{2} - \frac{\Delta EF}{2l} \\ P - N &= \frac{P}{2} + \frac{\Delta EF}{2} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 4.10.

Chuyển vị của điểm đặt lực  $P$  có biểu thức:

$$\delta = \frac{Pl}{2EF} + \frac{\Delta}{2}$$

Thế năng tích lũy trong hai đoạn thanh sẽ là tổng thế năng biến dạng sau đây:

$$U = \frac{(P-N)^2 l}{2EF} + \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{4EF} + \frac{EFA^2}{4l}$$

Đồ thị của quan hệ  $P = f(\delta)$  (hình 4.10b).

Đoạn OA tương ứng khi  $P \leq \frac{EFA}{l}$  còn đoạn AB tương ứng khi  $P \geq$

$\frac{EFA}{l}$ . Diện tích phần gạch sọc là công của lực  $P$  và có giá trị là  $U$ .

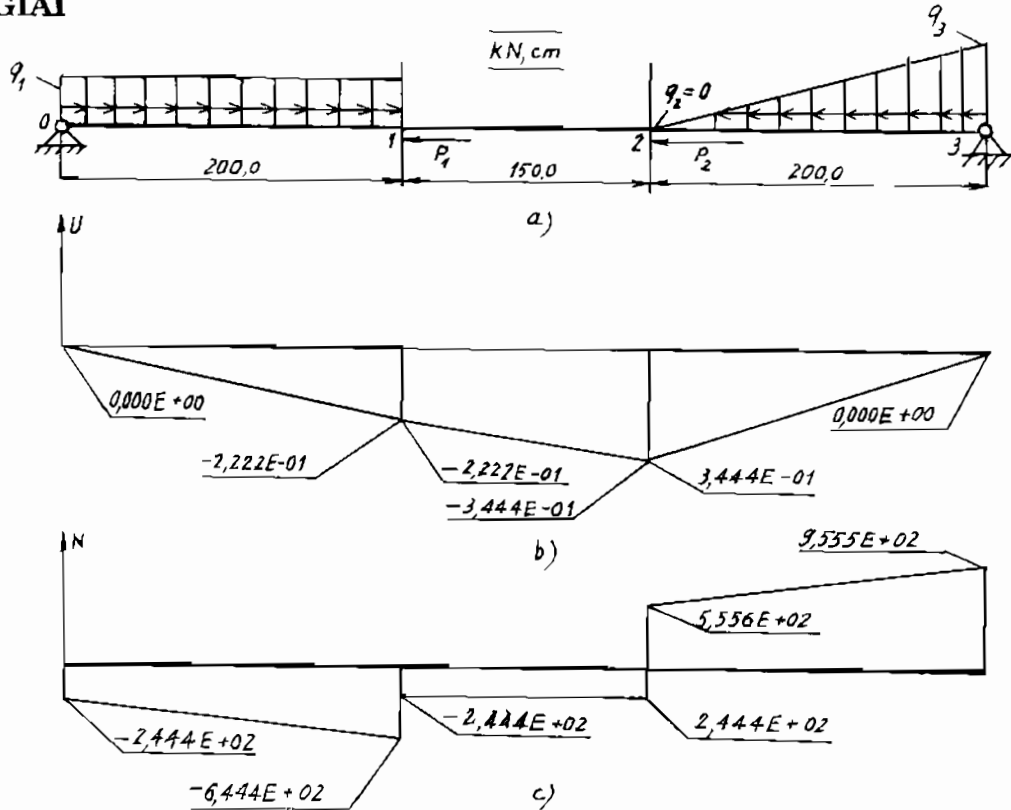
### Ví dụ 7

Một thanh chịu kéo, nén như hình 4.11a. Hãy viết biểu thức của

$U(z)$  và  $N(z)$  và vẽ biểu đồ của chúng. Cho biết:  $q_1 = -2 \text{ kN/cm}$ ;  $q_2 = 0$ ;  $q_3 = 4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $P_1 = 400 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 800 \text{ kN}$ .

$$E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2, F_1 = 20 \text{ cm}^2, F_2 = 15 \text{ cm}^2, F_3 = 20 \text{ cm}^2.$$

### GIẢI



Hình 4.11.

Phương trình ma trận của  $U(z)$  và  $N(z)$  đối với bài toán này theo công thức tổng quát từ (4.13) ÷ (4.14) của phương pháp vụn năng có dạng:

Đối với đoạn 0 – 1 :  $0 \leq z \leq 200 \text{ cm}$ ;

$$\bar{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} N_1(z) \\ N_1(z) \end{Bmatrix} = [B_1(z)] \bar{\Delta S}_{01}; \quad \bar{S}_1(z=200 \text{ cm}) = [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01}$$

Đối với đoạn 0–2 :  $200 \text{ cm} \leq z \leq 350 \text{ cm}$ ;

$$\bar{S}_2(z) = [B_2] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_2] \bar{\Delta S}_{02}$$

$$\bar{S}_2^*(z = 350 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02}$$

Đối với đoạn 0-3 :  $350 \text{ cm} \leq z \leq 550 \text{ cm}$  ;

$$\bar{S}_3(z) = [B_3] [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_3] [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02} + [B_3] \bar{\Delta S}_{03}$$

$$\bar{S}_3(z = 550 \text{ cm}) = [B_3^*] [B_2^*] [B_1^*] \bar{\Delta S}_{01} + [B_3^*] [B_2^*] \bar{\Delta S}_{02} + [B_3^*] \bar{\Delta S}_{03}$$

trong đó:

$$\bar{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 400 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \bar{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ 800 \\ 0 \\ 1/50 \end{vmatrix} ;$$

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{EF_i} & \frac{\Phi_2}{EF_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} \quad (i = \bar{1}, \bar{3})$$

Phản lực dọc trục  $R_{01}$  tại gối 0 được xác định từ phương trình  $U(z = 550 \text{ cm}) = 0$ . Cụ thể là:

$$R_{01} = 244,4 \text{ kN}$$

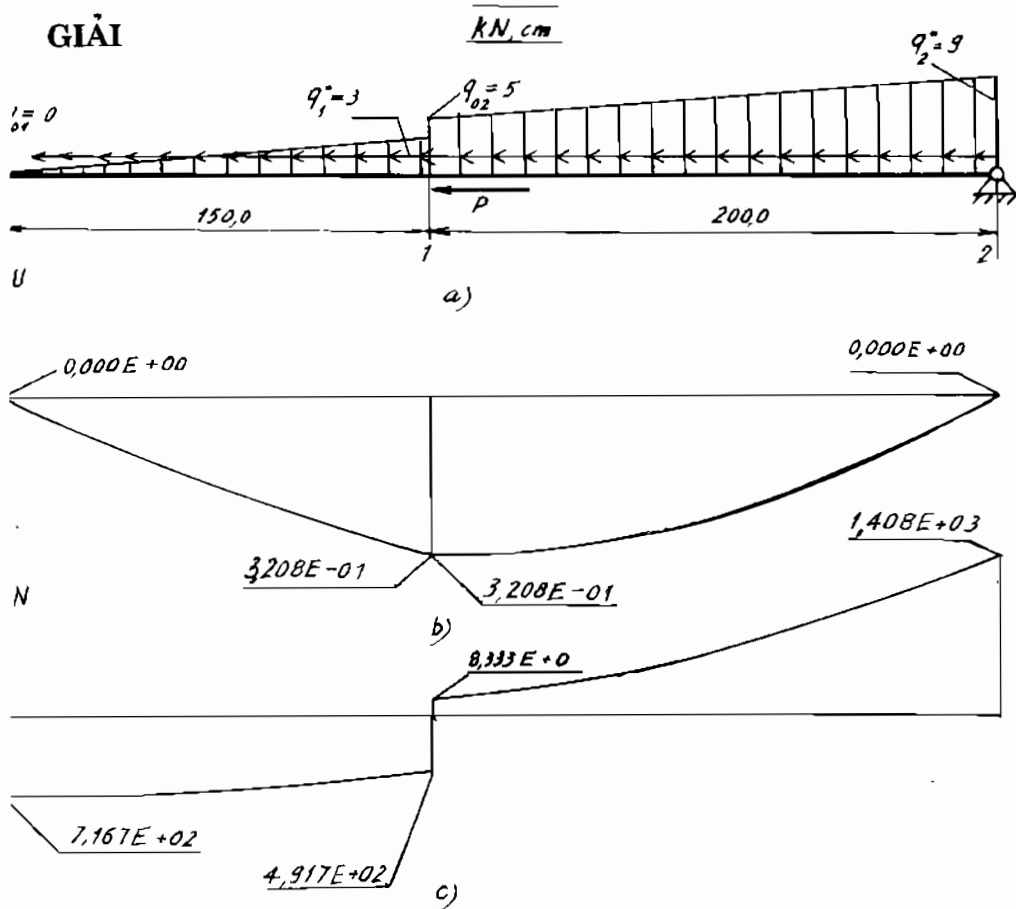
Thay  $\bar{\Delta S}_{01}$  với  $R_{01} = -244,4 \text{ kN}$ ,  $\bar{\Delta S}_{02}$ ,  $\bar{\Delta S}_{03}$  vào các phương trình của  $\bar{S}_1(z)$ ,  $\bar{S}_2(z)$ ,  $\bar{S}_3(z)$  và từ các phương trình ấy ta có các biểu đồ (U) và (N) như hình 4.11b, c.

### ***Vi dụ 8***

Cho một thanh chịu kéo nén như hình 4.12a. Hãy chỉ ra mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền và độ cứng và vẽ các biểu đồ U và N?

Cho biết:  $P = 500$ ,  $q_1^* = 3$ ,  $q_{02} = 5$ ,  $q_2^* = 9 \text{ kN/cm}$ ,

$E = 2e4$ ,  $F_1 = 15$ ,  $F_2 = 20$ , đơn vị tính là: kN, cm.



Hình 4.12.

Phương trình chuyển vị  $U(z)$  và lực dọc  $N(z)$  trong trường hợp này theo (4.13) có dạng:

Đoạn 1 :  $0 \leq z \leq 150$  cm,

$$\bar{S}_1(z) = [B_1(z)] \Delta \bar{S}_{01} ; \quad \bar{S}_1^*(150 \text{ cm}) = [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01}$$

Đoạn 2 :  $150 \text{ cm} \leq z \leq 350$  cm,

$$\bar{S}_2(z) = [B_1(z)] \cdot [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2(z)] \Delta \bar{S}_{02} ;$$

$$\bar{S}_2^*(350 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02}$$

trong đó:

$$\overline{\Delta S}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_{01} \\ -2 \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} ; \quad \overline{\Delta S}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \\ 2 \\ \frac{1}{50} \end{bmatrix} ;$$

$$B_2(z) = [B_2(z)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(z-150)}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{(z-150)^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{(z-150)^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} \\ 0 & 1 & (z-150) & \frac{(z-150)^2}{2} \dots \end{bmatrix}$$

$$[B_2^*] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{200}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{200^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} & \frac{200^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 20} \dots \\ 0 & 1 & 200 & \frac{200^2}{2} \dots \end{bmatrix} ;$$

$$[B_1(z)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{EF_1} & \frac{z^2}{2EF_1} & \frac{z^3}{3!EF_1} \dots \\ 0 & 1 & z & \frac{z^2}{2} \dots \end{bmatrix}$$

$R_{01}$  được xác định từ điều kiện:

$$U_2(z = 300 \text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -716,7 \text{ kN.}$$

Thay giá trị  $R_{01} = -716,7 \text{ kN}$  và các  $\overline{\Delta S}_{01}$ ,  $\overline{\Delta S}_{02}$  vào  $\bar{S}_1(z)$ ,  $\bar{S}_2(z)$  rồi vẽ biểu đồ (U), (N) từ các hàm vừa nhận được. Các biểu đồ này được cho trên hình 4.12b, c.

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền là mặt cắt "2" với  $N = 1408 \text{ kN}$  và  $\sigma_{\max} = \frac{N}{F_2} = \frac{1408}{20} = 70,4 \text{ kN/cm}^2$ .

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ cứng là mặt cắt "1". Tại mặt cắt này chuyển vị có giá trị tuyệt đối lớn nhất bằng 0,321 cm.

### Ví dụ 9

Một thanh thép có  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$  chịu lực dọc trục và liên kết như hình 4.13a. Hãy thiết lập phương trình các đại lượng cần tính  $U(z)$  và  $N(z)$  dưới dạng ma trận tương minh và tính  $\max |\sigma|$  và  $|\varepsilon|$ ?

### GIẢI

Phương trình ma trận đối với từng đoạn:

Đoạn 1 :  $0 \leq z \leq 200 \text{ cm}$ ;

$$\bar{S}_1(z) = [B_1] \cdot \Delta \bar{S}_{01} ; \bar{S}_1^*(200 \text{ cm}) = [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01}$$

Đoạn 2 :  $200 \leq z \leq 400 \text{ cm}$ ;

$$\bar{S}_2(z) = [B_2(z)] \cdot [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2(z)] \Delta \bar{S}_{02} ;$$

$$\bar{S}_2^*(400 \text{ cm}) = [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02}$$

Đoạn 3 :  $400 \text{ cm} \leq z \leq 600 \text{ cm}$  ;

$$\bar{S}_3(z) = [B_3] [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_3(z)] [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + [B_3(z)] \Delta \bar{S}_{03} ;$$

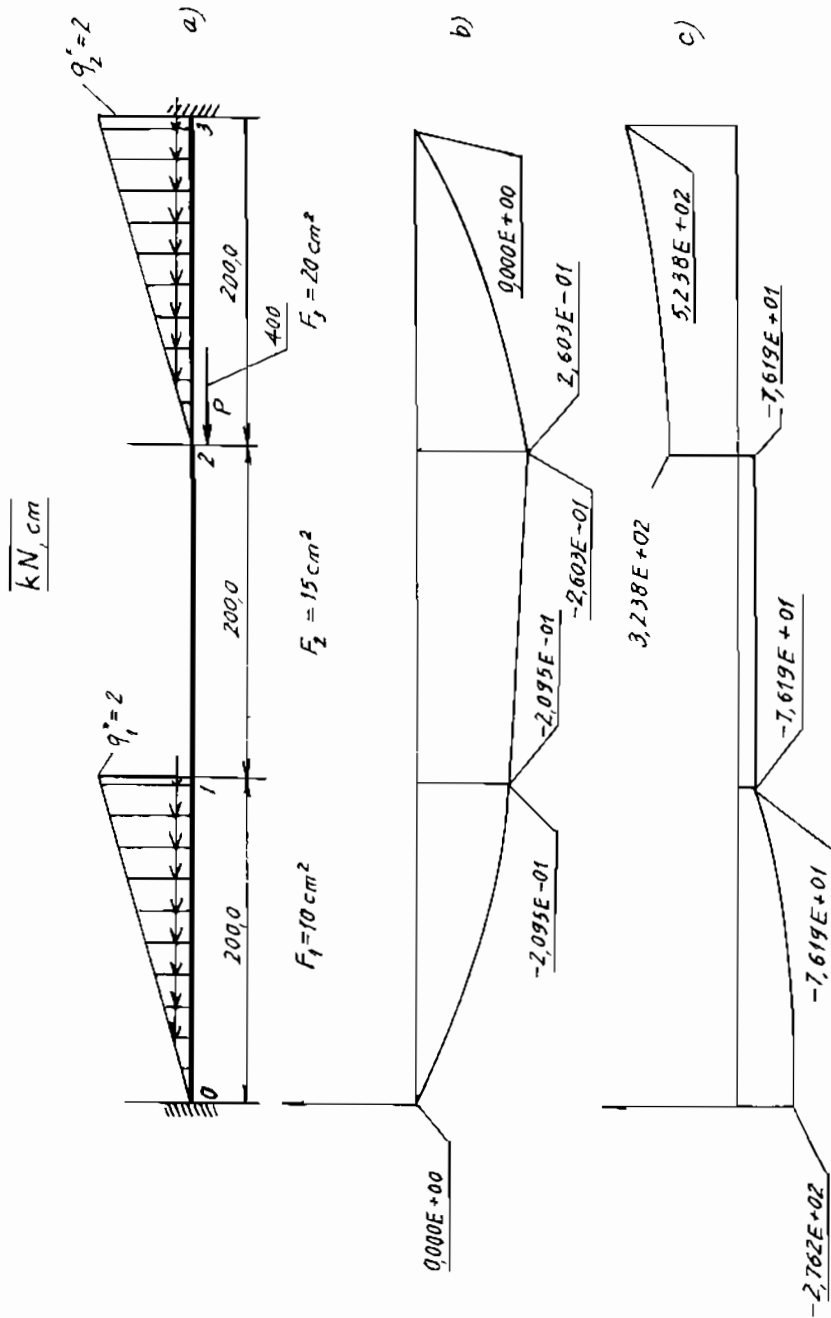
$$\bar{S}_3^*(z = 600 \text{ cm}) = [B_3^*] [B_2^*] [B_1^*] \Delta \bar{S}_{01} + [B_3^*] [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + [B_3^*] \Delta \bar{S}_{03}$$

Trong các phương trình này các ma trận  $[B_i(z)]$  và  $[B_i^*]$  với  $i = \overline{1,3}$  có dạng không đổi và được xác định theo (4.13). Ví dụ:

$$[B_2^*(z = 400 \text{ cm})] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{200}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} & \frac{200^2}{2! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 15} & \frac{200^3}{3! \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 15} \dots \\ 0 & 1 & \frac{200}{1} & \frac{200^2}{2!} \dots \end{vmatrix}$$

Các  $\Delta \bar{S}_{0i}$  trong bài toán này có dạng cụ thể như sau:





Hình 4.13.

$$\overline{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ 0 \\ \frac{1}{100} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix} ; \overline{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \text{ kN/cm} \\ -\frac{1}{50} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix} ; \overline{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ 400 \text{ kN} \\ 0 \\ \frac{1}{50} \text{ kN/cm}^2 \end{vmatrix}$$

$R_{01}$  được tìm từ điều kiện:

$$U(z = 600 \text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -276,2 \text{ kN.}$$

Thay  $\overline{\Delta S}_{01}$  với  $R_{01} = -276,2 \text{ kN}$  và  $\overline{\Delta S}_{02}$ ,  $\overline{\Delta S}_{03}$  vào các phương trình  $\bar{S}_1(z)$ ,  $\bar{S}_2(z)$  và  $\bar{S}_3(z)$  ta được các phương trình tường minh dạng ma trận cần tìm.

Biểu đồ của  $U(z)$  và  $N(z)$  được vẽ trên các hình 4.13b, c.

Ứng suất pháp lớn nhất về trị tuyệt đối xảy ra ở mặt cắt "0". Cụ thể

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-276,2}{10} \right| = 27,62 \text{ kN/cm}^2$$

Biến dạng tỷ đôi lớn nhất về trị tuyệt đối cũng xảy ra ở mặt cắt "0" và có giá trị là:

$$\max |\varepsilon| = \left| \frac{-N_{01}}{EF_1} \right| = \left| \frac{-276,2}{10} \right| = 13,81 \cdot 10^{-4}$$

# CHƯƠNG 5

## CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ

---

Như đã thấy ở trên, thanh là đối tượng nghiên cứu chủ yếu của “Sức bền vật liệu”. Sức bền của thanh (đối tượng) phụ thuộc không chỉ vào bản thân vật liệu, kích thước, liên kết mà còn vào tính chất tác dụng ngoài (tĩnh hay động), hình dạng thanh, dạng mặt cắt ngang, vị trí mặt cắt ngang. Vì vậy trong chương này chúng ta cần khảo sát trước đặc trưng hình học cơ bản của đối tượng nghiên cứu.

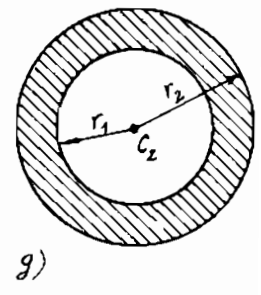
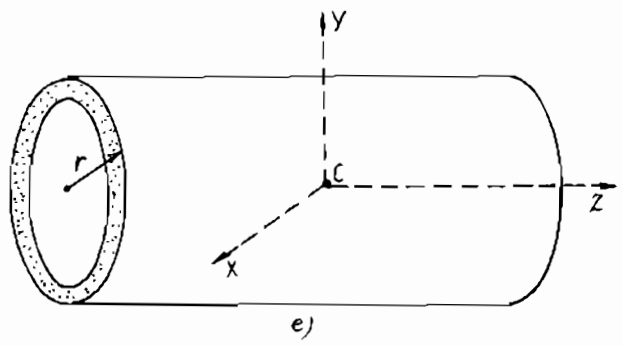
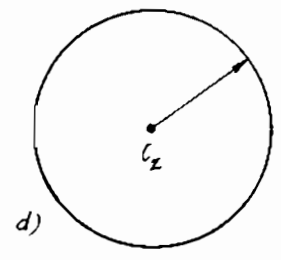
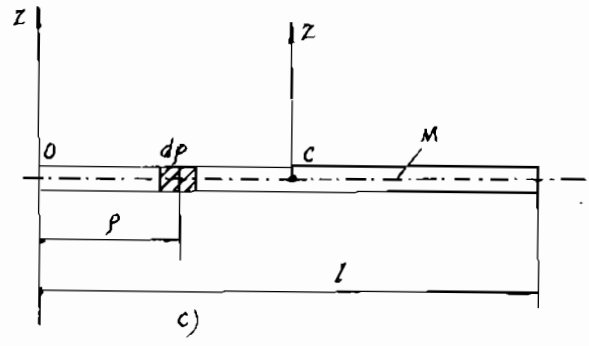
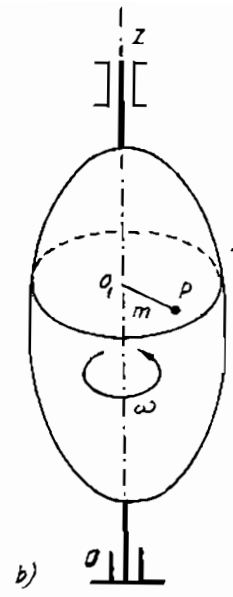
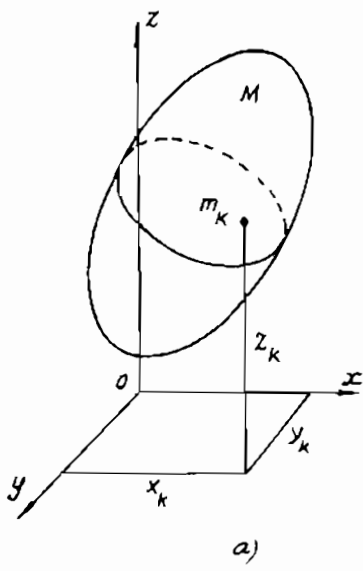
### §1. MÔMEN KHỐI LƯỢNG

Sự phân bố của khối lượng có ảnh hưởng rất nhiều tới chuyển động của cơ hệ. Đặc trưng cho sự phân bố khối lượng này là các mômen khối lượng.

#### 1. Các định nghĩa

*\* Mômen của một đại lượng đối với một chuẩn nào đó là tích của khoảng cách lũy thừa  $k$  với đại lượng ấy.*

Xét cơ hệ gồm  $n$  chất điểm, mỗi chất điểm thứ  $K$  nào đó có tọa độ và khối lượng  $x_K, y_K, z_K$  và  $m_K$ . Mômen khối lượng cấp  $k = \alpha + \beta + \gamma$  được định nghĩa như sau (hình 5.1a, b).



Hình 5.1.

Biểu thức  $\sum_{k=1}^n m_k x_k^\alpha y_k^\beta z_k^\gamma$  đối với hệ chất điểm rời rạc,  $\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm$  đối với hệ chất điểm liên tục, được gọi là mômen khối lượng cấp  $k = \alpha + \beta + \gamma$  của cơ hệ đối với hệ tọa độ  $Oxyz$ .

**a) Mômen khối lượng cấp không**

Nếu  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  ta có mômen khối lượng cấp không.

Khối lượng của cơ hệ:

$$\Sigma m_k = M \text{ hay } \int_M dm = M \quad (5.1)$$

**b) Mômen khối lượng cấp một**

Nếu  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$  ta có  $\Sigma m_k x_k = S_{(yz)}$

hoặc 
$$\int_M x \cdot dm = S_{(yz)} \quad (5.2)$$

gọi là mômen khối lượng cấp một của hệ đối với mặt phẳng tọa độ  $yz$ .

Các mômen khối lượng cấp một  $S_{(yz)}, S_{(xy)}$  cũng được định nghĩa tương tự.

**c) Vị trí của khối tâm**

$$x_C = \frac{S_{(yz)}}{M}; \quad y_C = \frac{S_{(zx)}}{M}; \quad z_C = \frac{S_{(xy)}}{M} \quad (5.3)$$

**d) Mô mômen khối lượng cấp hai**

Nếu  $\alpha = 2, \beta = \gamma = 0$  ta có:  $\Sigma m_k x_k^2 = J_{(yz)}$

hoặc 
$$\int_M x^2 \cdot dm = J_{(yz)} \quad (5.4)$$

gọi là mômen khối lượng cấp hai của hệ đối với mặt phẳng tọa độ  $yz$ .

Các mômen khối lượng cấp hai khác cũng được định nghĩa tương tự.

Cụ thể là: 
$$J_o = \Sigma m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$$

$$\text{hoặc } J_o = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm \quad (5.5)$$

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \quad \text{hoặc } J_{xy} = \int_M xy \cdot dm \quad (5.6)$$

### e) Trục quán tính chính trung tâm

Trục  $Ox$  được gọi là trục quán tính chính của hệ tại điểm  $O$  nếu ta có:  $J_{xy} = J_{xz} = 0$ . Các trục  $Oy$  và  $Oz$  cũng sẽ là những trục quán tính chính, nếu  $J_{xy} = J_{yz} = 0$ ;  $J_{zx} = J_{yz} = 0$ .

Hệ trục  $Oxyz$  được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm nếu " $O$ " là khối tâm của vật và:  $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ . Cụ thể hơn:  $S_x = S_y = S_z = J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ .

## 2. Các trường hợp thường gặp của mômen khối lượng cấp hai

### a) Thanh mảnh đồng chất (hình 5.1c)

$$J_{Oz} = \frac{Ml^2}{3} \quad ; \quad J_{Cz} = \frac{Ml^2}{12} \quad (5.7)$$

### b) Vành tròn đồng chất và ống trục mỏng (hình 5.1de).

$$J_{Cz} = Mr^2 \quad (5.8)$$

### c) Đĩa vành khăn đồng chất (hình 5.1g)

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M (r_2^2 + r_1^2) \quad (5.9)$$

$$\text{Khi } r_1 = 0 \text{ và } r_2 = r \text{ thì } J_{Cx} = \frac{1}{2} Mr \quad (5.10)$$

## §2. MÔMEN DIỆN TÍCH

Trong mục §1 ta đã làm quen với các mômen khối lượng của một vật thể đối với hệ tọa độ vuông góc  $Oxyz$  mà trên đó vị trí các vật thể được xác định. Cụ thể là:

$$\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm \quad (5.11)$$

Mômen khối lượng này có cấp  $k = \alpha + \beta + \gamma$ .

Dễ thấy là khi thể tích  $V$  của vật thể (mà trong đó khối lượng  $M$  được xác định) suy biến theo một phương nào đó. Ví dụ: theo phương  $Oz$ , thì ta sẽ nhận được một hình phẳng  $F$  trong mặt phẳng  $Oxy$  giới hạn bởi đường cong  $f(x,y) = 0$ . Nói cách khác, tích phân (5.11) tương đương với trường hợp đặc biệt mà ở đó  $\gamma = 0$  và khối lượng phân bố đều trên hình phẳng  $F$  và bằng đơn vị.

Từ nay về sau, ta sẽ chỉ khảo sát các đặc trưng hình học của hình phẳng trong mặt phẳng này và ký hiệu diện tích của nó là  $F$  (hình 5.2). Các đặc trưng hình học của hình phẳng trong các mặt phẳng  $Oxz$ ,  $Oyz$  do sự suy biến của  $dv$  tương ứng theo các phương  $Oy$  và  $Ox$  cũng được giải quyết hoàn toàn tương tự.

Theo cách đặt vấn đề nói trên, ta có thể dễ dàng rút ra một cách trực tiếp các mômen tương ứng từ công thức đã biết về các mômen khối lượng của vật thể.

### 1. Mômen diện tích cấp $k$

$$\int_F x^\alpha y^\beta dF = 0 \quad \text{với } k = \alpha + \beta \quad (5.12)$$

Đại lượng này gọi là mômen diện tích cấp  $k$  của hình phẳng  $F$  đối với hệ trục  $xy$  (hình 5.2a, b).

### 2. Mômen diện tích cấp 0

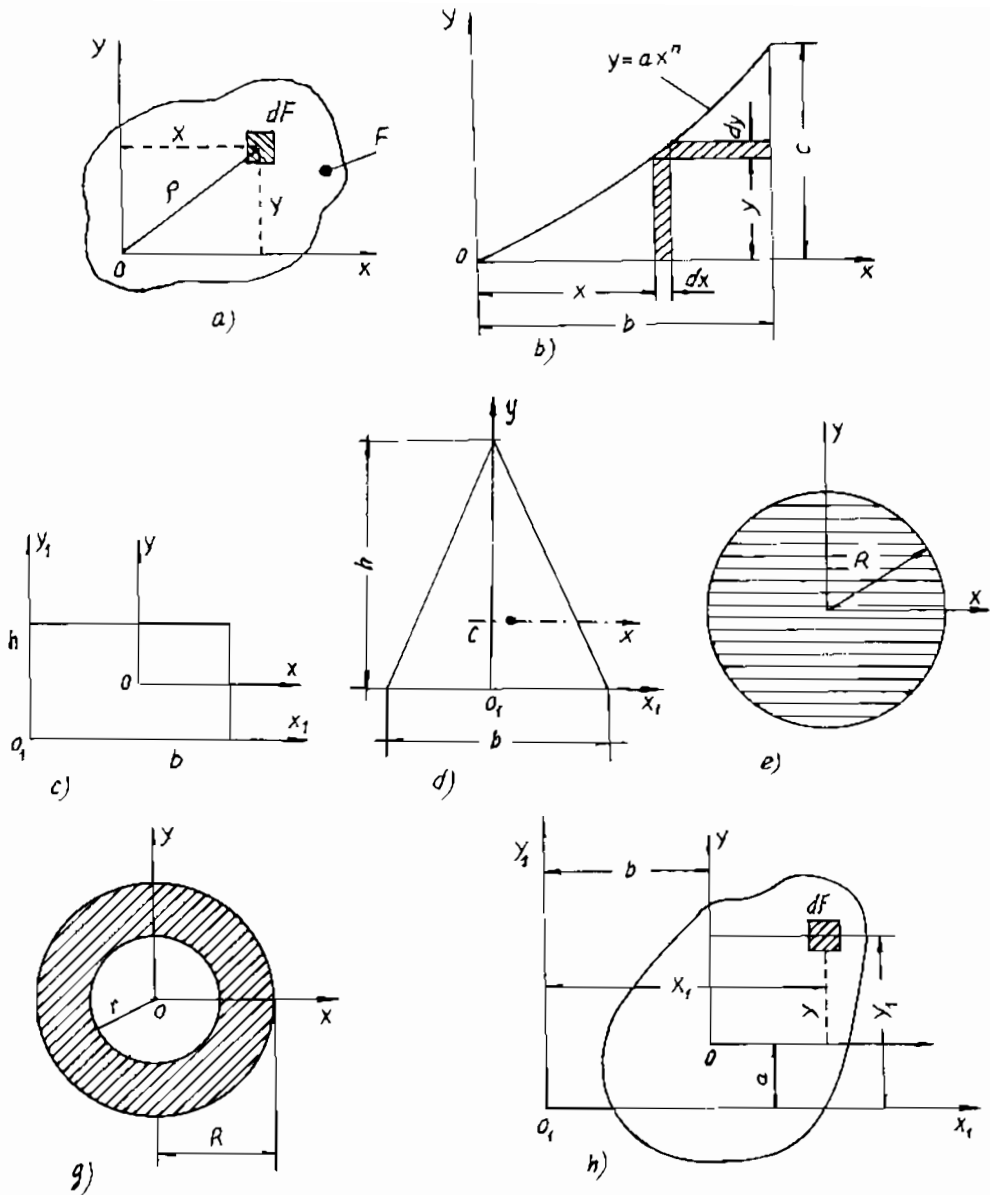
Khi  $\alpha = \beta = 0$ , tích phân (5.12) có dạng:

$$F = \int_F dF \quad (\text{cm}^2, \text{m}^2) \quad (5.13)$$

### 3. Mômen diện tích cấp 1

Khi  $\alpha = 0, \beta = 1$  và  $\alpha = 1, \beta = 0$ , tương ứng ta có:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \quad \text{và} \quad S_y = \int_F x \cdot dF \quad (\text{cm}^3, \text{m}^3) \quad (5.14)$$



Hình 5.2.



Các tích phân  $S_x, S_y$  có tên gọi là mômen tĩnh của hình phẳng đối với các trục  $x$  và  $y$ .

\* Khi mômen tĩnh của hình phẳng  $F$  đối với một trục nào đó bằng không thì trục ấy gọi là trục trung tâm. Giao điểm của hai trục trung tâm gọi là trọng tâm của hình phẳng.

Nếu ký hiệu tọa độ trọng tâm của hình phẳng  $F$  trong hệ tọa độ  $xOy$  là  $X_C$  và  $Y_C$ , còn  $x, y$  là tọa độ phân tố  $dF$  trong hệ tọa độ  $xCy$  ta có:

$$X_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\int x \cdot dF}{F} \quad (5.15)$$

$$Y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\int y \cdot dF}{F}$$

#### 4. Mômen diện tích cấp 2

Khi  $\alpha = 1, \beta = 1$ , tích phân (5.12) cho ta:

$$J_{xy} = \int_F xy \cdot dF \quad (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.16)$$

$J_{xy}$ : còn gọi là mômen quán tính ly tâm của hình phẳng  $F$  đối với hệ trục  $xOy$ .

Khi  $\alpha = 2, \beta = 0$  và  $\alpha = 0, \beta = 2$ , ta nhận từ (5.12):

$$J_x = \int_F y^2 dF \quad \text{và} \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad , (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.17)$$

Các đại lượng này gọi là mômen quán tính của hình phẳng  $F$  đối với trục  $x$  và  $y$ .

Nếu gọi  $\rho$  là khoảng cách từ phân tố khảo sát  $dF$  đến gốc tọa độ thì:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

và ta có: 
$$J_\rho = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F \rho^2 dF \quad (\text{cm}^4, \text{m}^4) \quad (5.18)$$

Tích phân  $J_p$  gọi là mômen quán tính độc cực của hình phẳng  $F$  đối với gốc tọa độ và bằng tổng mômen quán tính đối với các trục vuông góc với nhau tại  $O$ .

Từ các công thức định nghĩa các mômen quán tính cấp hai ở trên ta rút ra:

$$J_{xy} \geq \leq 0 ; J_x > 0 ; J_y > 0 ; J_p > 0$$

Khi  $J_{xy} = 0$  thì hệ trục  $xOy$ , gọi là hệ trục quán tính chính.

Hệ trục quán tính chính có gốc tọa độ đặt tại trọng tâm  $C$  của hình phẳng  $F$  được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng đó. Nghĩa là:  $J_{xy} = 0 ; S_x = 0 ; S_y = 0$ .

## 5. Mômen diện tích cấp hai đối với các hình đơn giản

a) Hình chữ nhật (hình 5.2c)

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12} ; J_y = \frac{b^3h}{12} \quad (5.19)$$

b) Hình tam giác (hình 5.2d)

Gọi trục  $x$  là trục qua trọng tâm và  $x_1$  là trục trùng với cạnh đáy. Khi đó, theo định nghĩa ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \cdot \frac{b}{h} \left( \frac{2}{3}h - y \right) dy = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \frac{b}{h} \int_0^h y_1^2 (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12} \quad (5.20)$$

c) Hình tròn (hình 5.2e)

Theo định nghĩa của mômen quán tính độc cực, ta tính được:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F \int_F \rho^2 \rho d\phi d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = 0,1 D^4 \quad (5.21)$$

Do tính chất đối xứng tỏa tròn và quan hệ  $J_p = J_x + J_y$ , ta rút ra mômen quán tính đối với các trục trung tâm:

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi R^4}{2} = 0,05 D^4 \quad (5.22)$$

d) Hình vành khăn (hình 5.2g)

Trong trường hợp này ta sẽ tìm các mômen quán tính của hình vành khăn như là hiệu giữa hai mômen quán tính của hai hình tròn đặc có bán kính  $R$  và  $r$ :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \eta^4) \quad (5.23)$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_p = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) = 0,05 D^4 (1 - \eta^4) \quad (5.24)$$

### §3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI CÁC TRỤC SONG SONG

Giả sử mômen quán tính đối với trục  $Ox$ ,  $Oy$  và diện tích hình phẳng như đã biết. Ta cần tìm các mômen quán tính của hình phẳng này đối với các trục mới  $O_1x_1$  và  $O_1y_1$  tương ứng song song với các trục  $xOy$  (hình 5.2h).

Từ (hình 5.2h) ta có:

$$Y_1 = y + a$$

$$X_1 = x + b$$

Vì vậy theo định nghĩa về mômen quán tính ta nhận được:

$$J_{x_1} = \int_F Y_1^2 dF = \int_F (Y + a)^2 dF = \int_F Y^2 dF + 2a \int_F Y dF + a^2 \int_F dF$$

$$J_{x_1} = J_x + 2aS_x + a^2F \quad (a)$$

$$\text{Tương tự như thế: } J_{y_1} = J_y + 2aS_y + b^2F \quad (b)$$

Đối với mômen quán tính ly tâm:

$$J_{x_1 y_1} = \int_F X_1 Y_1 dF = J_{XY} + abF + aS_Y + bS_X \quad (c)$$

Nếu các trục cũ  $Ox$ ,  $Oy$  là những trục trung tâm (đối với các trục này  $S_x = S_y = 0$ ), thì các công thức (a), (b), (c) có dạng:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 F \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F \\ J_{x_1 y_1} &= J_{xy} + abF \end{aligned} \quad (5.25)$$

Chú ý đến  $J_{p_1} = J_{x_1} + J_{y_1}$ , ta rút ra:

$$J_{p_1} = J_p + (a^2 + b^2) F$$

Trong trường hợp cần tìm các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm khi đã biết các mômen quán tính đối với hệ trục bất kỳ, ta giải các phương trình (5.25).

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} - a^2 F \\ J_y &= J_{y_1} - b^2 F \\ J_{xy} &= J_{x_1 y_1} - abF \end{aligned} \quad (5.26)$$

#### §4. QUAN HỆ GIỮA CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH CẤP 2 KHI XOAY TRỤC TỌA ĐỘ

Bài toán được đặt ra như sau: Giả sử mômen quán tính của diện tích  $F$  đối với hệ trục  $Oxy$  đã biết. Hãy xác định các mômen quán tính của  $F$  đối với hệ trục  $Ox_1 y_1$  xoay đi một góc  $\alpha$  đối với hệ trục  $Oxy$ . Từ hình 5.3 ta có quan hệ giữa các tọa độ của  $dF$  trong hai hệ tọa độ này là:

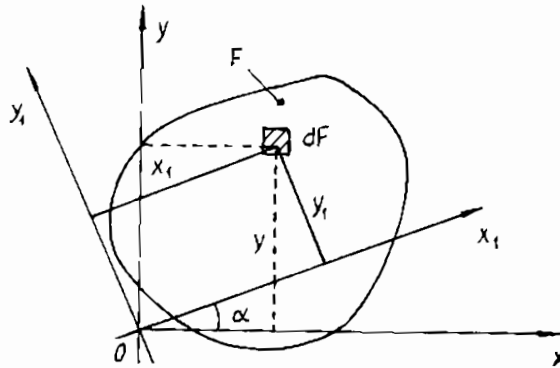
$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned}$$

Theo công thức (5.17), ta có:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF$$



Hình 5.3.

Khai triển các tích phân này ta được:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Nếu hệ trục  $Ox_1y_1$  là hệ trục quán tính chính ( $J_{x_1 y_1} = 0$ ) thì công thức xác định phương các trục quán tính chính được rút ra từ công thức thứ ba của (5.27):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5.28)$$

Phương trình này luôn có hai nghiệm xác định 2 trục quán tính chính  $Ox_1y_1$ .

Đối với những hình phẳng là những thép cán định hình chữ I, [ , L, thì các đặc trưng hình học của chúng được tính theo các công thức lý thuyết ở trên và được cho sẵn trong bảng 5.1 “Quy cách thép định hình” dưới đây:

Quan hệ giữa  $J_{x_1}$  và  $J_{y_1}$  trong (5.27) tương tự như quan hệ  $\sigma_\alpha$  và  $\tau_\alpha$  trong (3.14) phụ thuộc vào góc nghiêng  $\alpha$ , mà dạng hình học của nó là một đường tròn do Mo (OTTO Mohr) đề xuất. Vì vậy, mọi thao tác tính toán bằng phương pháp hình học trong hai trường hợp hoàn toàn giống nhau.

## §5. ÊLIP QUÁN TÍNH VÀ THUỘC TÍNH CỦA NÓ

Chúng ta đưa ra một đặc trưng hình học mới và gọi nó là bán kính quán tính, ký hiệu là  $i$  và có biểu thức là:

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} \quad (5.29)$$

Giả sử có một hình phẳng diện tích  $F$  nào đó nhận trục  $Ox$  và  $Oy$  là các trục quán tính chính trung tâm và  $Ou$  là trục bất kỳ  $\alpha$  (hình 5.4). Thì:

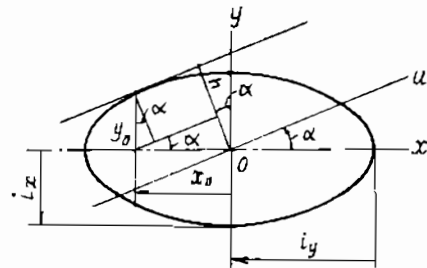
$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad (a)$$

Chia cả hai vế của (a) cho  $F$  ta được:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha \quad (b)$$

Ta dựng một êlip với bán trục là  $i_x$  và  $i_y$  (hình 5.4) có phương trình tương ứng là:

$$\frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1 \quad (5.30)$$



Hình 5.4.

Êlip này gọi là êlip quán tính.

Gọi  $h$  khoảng cách giữa trục nghiêng  $Ou$  bất kỳ và tiếp tuyến với êlip thì (5.30) có dạng:

$$\frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} + \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} = 1$$

Do đó:

$$h^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha \quad (c)$$

Phương trình (c) cho thấy  $h$  chính là bán kính quán tính đối với trục  $Ou$ . Thuộc tính này của êlip quán tính cho phép tính ngay được  $J_u$  bất kỳ:

$$J_u = h^2 F \quad (5.31)$$

## §6. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

### *Vi dụ 1*

Một hình phẳng vuông cạnh  $7a\sqrt{2}$  được khoét một lỗ vuông cạnh  $a = 2$  cm (hình 5.5). Hãy xác định trọng tâm  $c$  của mặt cắt, hệ trục và mômen quán tính chính trung tâm?

### GIẢI

Mặt cắt ngang đối xứng đối với trục  $x$ , vậy  $y_c = 0$ , để xác định  $x_c$ , ta chọn hệ trục  $x_0Oy_0$  có gốc tọa độ tại tâm hình vuông lớn:

$$x_c = \frac{\sum S_{y_0}}{\sum F} = \frac{-a^2 \cdot a\sqrt{2}/2}{(7a/\sqrt{2})^2 - a^2} = -0,03a = -0,06 \text{ cm.}$$

Hệ trục  $xcy$  là hệ trục quán tính chính trung tâm.

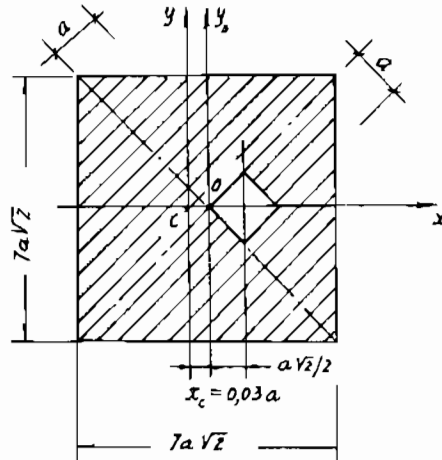
Mômen quán tính chính trung tâm  $J_x$  và  $J_y$  là:

$$J_x = \frac{(7a/\sqrt{2})^4}{12} - \frac{a^4}{12} = 50,02 a^4 - 0,08 a^4 = 799,04 \text{ cm}^4.$$

$$J_y = \frac{(7a/\sqrt{2})^4}{12} + (7a/\sqrt{2})^2 (-0,03a)^2 - \left[ \frac{a^4}{12} + a^2 \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= 50,04 a^4 - 0,58 a^4 = 49,46 a^4 = 791,36 \text{ cm}^4.$$

Trong đó  $\frac{a^4}{12}$  là mômen quán tính chính trung tâm của hình vuông nhỏ đối với trục  $x$  được suy ra từ công thức xoay trục các mômen quán tính.



Hình 5.5.

### Ví dụ 2

Hãy xác định vị trí trọng tâm các trục quán tính chính, mômen quán tính chính và bán kính quán tính đối với hình phẳng chữ L như hình 5.6a.

### GIẢI

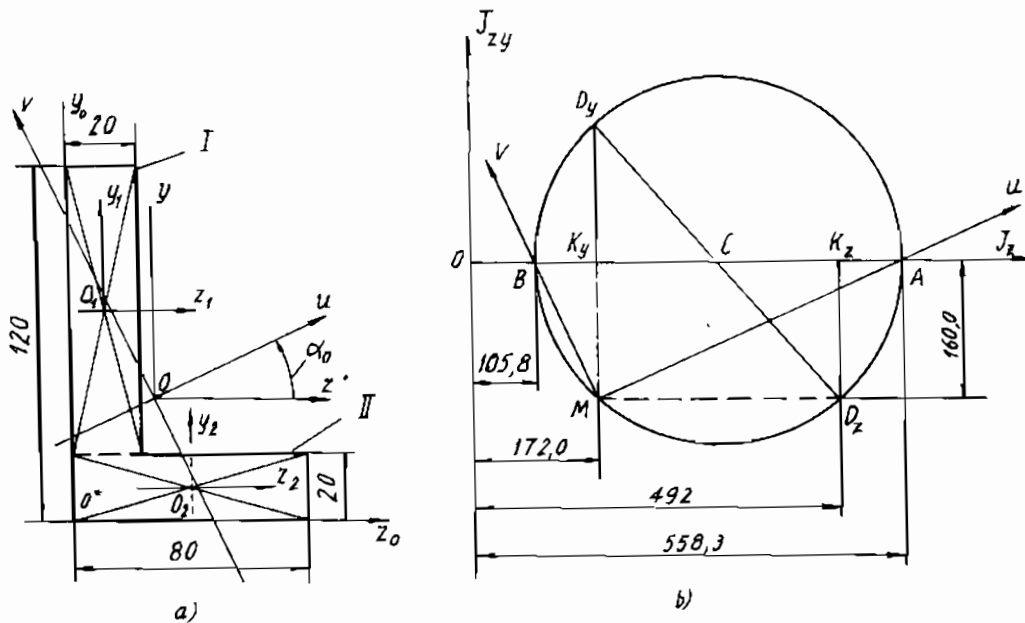
Tọa độ trọng tâm "O" của hình trong hệ tọa độ  $y_0z_0$ :

$$z_0 = \frac{S_{y_0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{20 + 64}{20 + 16} = \frac{84}{36} = 2,33 \text{ cm},$$



$$y_0 = \frac{S_{z_0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{140 + 16}{20 + 16} = \frac{156}{36} = 4,33 \text{ cm.}$$

Qua trọng tâm "O" ta lập hệ trục  $zOy \parallel z_0O^*y_0$  và chia hình đã cho thành các hình đơn giản I và II (hình 5.6a), sau đó qua trọng tâm của các hình này lập các trục tọa độ  $z_1, y_1$  và  $z_2, y_2$  song song với các cạnh  $O^*z_0$  và  $O^*y_0$ .



Hình 5.6.

Do đó:

$$J_{z_1}^{(I)} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166,7 \text{ cm}^4 ; \quad J_{y_1}^{(I)} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,7 \text{ cm}^4$$

$$J_{z_2}^{(II)} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ cm}^4 ; \quad J_{y_2}^{(II)} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,3 \text{ cm}^4$$

Theo công thức chuyển trục song song (5.25) ta tính được:

$$J_z^{(I)} = J_{z_1}^{(I)} + F_{(I)} \cdot a_{(I)}^2 = 166,7 + 20 \cdot 2,67^2 = 308,1 \text{ cm}^4;$$

$$J_{zy}^{(I)} = J_{z_1 y_1}^{(I)} + F_{(I)} a_{(I)} b_{(I)} = 0 - 20 \cdot 2,67 \cdot 1,33 = -71 \text{ cm}^4.$$

Tương tự ta có:

$$J_y^{(I)} = 42,1 \text{ cm}^4 ;$$

$$J_z^{(II)} = 182,7 \text{ cm}^4 ; J_y^{(II)} = 129,9 \text{ cm}^4 ; J_{zy}^{(II)} = -89 \text{ cm}^4.$$

Do đó, mômen quán tính của toàn hình đối với hệ trục qua trọng tâm "O" là:

$$J_z = J_z^{(I)} + J_z^{(II)} = 309,3 + 182,7 = 492 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_y^{(I)} + J_y^{(II)} = 42,1 + 129,9 = 172 \text{ cm}^4$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(I)} + J_{zy}^{(II)} = -71 + (-89) = -160 \text{ cm}^4.$$

Các góc nghiêng của các trục quán tính chính trung tâm uOv so với hệ zOy được xác định theo công thức (5.28):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 160}{172 - 402} = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 22^\circ 30'$$

Các mômen quán tính chính trung tâm, khi ấy là:

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (664 + 452,5) = 558,3 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_v &= \frac{1}{2} \left[ (J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (664 - 452,5) = 105,8 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Bán kính quán tính đối với trục  $\Delta$  nào đó được thừa nhận và ký hiệu là  $i_{\Delta}$ :

$$J_{\Delta} = \int_F y^2 dF = F i_{\Delta}^2$$

Vì vậy:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558,3}{36}} = 3,94 \text{ cm,}$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105,8}{36}} = 1,71 \text{ cm.}$$

Nghiệm của bài toán được giải bằng vòng tròn Mohr quán tính cho trên hình 5.6b.

### ***Ví dụ 3***

Một hình phẳng hình chữ Z có kích thước tính bằng cm như hình 5.7a. Hãy xác định trọng tâm, hệ trục và các mômen quán tính chính trung tâm.

## **GIẢI**

Đối với mặt cắt không có trục đối xứng, muốn xác định mômen quán tính chính trung tâm, cần xác định các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm, rồi dùng công thức xoay trục của mômen quán tính để xác định hệ trục chính và các mômen quán tính chính trung tâm.

### ***Xác định trọng tâm***

Lấy gốc tọa độ tại trọng tâm của hình chữ nhật đứng, lập hệ trục  $x_0, y_0$ , ta tính:

$$x_c = \frac{\sum S_{y_0}}{\sum F} = \frac{2.4(-3) + 6.2.4}{2.4 + 2.14 + 2.6} = 0,5 \text{ cm ;}$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum F} = \frac{4.2.6 + 6.2.(-6)}{2.4 + 14.2 + 2.6} = -0,5 \text{ cm.}$$

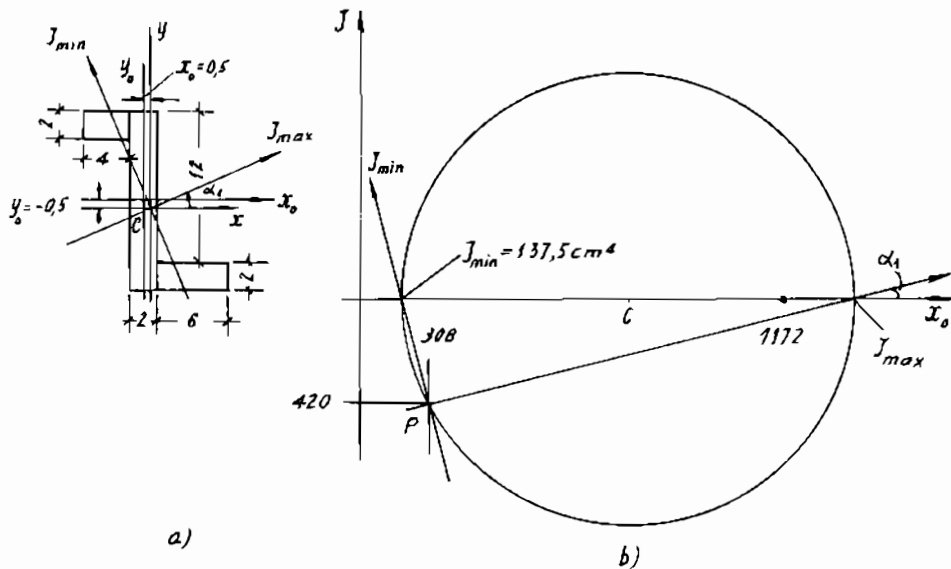
Lập hệ trục trung tâm xCy (hình 5.7a):

Tính các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm xCy:

$$J_x = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 2 \cdot (5,5)^2 + \frac{2 \cdot 14^3}{12} + 2 \cdot 14(0,5)^2 - \frac{4 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 4 \cdot (6,5)^2 = 1172 \text{ cm}^4.$$

$$J_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 2 \cdot 6 \cdot (3,5)^2 + \frac{14 \cdot 2^3}{12} + 14 \cdot 2(0,5)^2 + \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 2 \cdot 4(3,5)^2 = 308 \text{ cm}^4.$$

$$J_{xy} = 2 \cdot 6(3,5)(-5,5) + 14 \cdot 2(-0,5)(-0,5) + 4 \cdot 2(-3,5)(6,5) = -420 \text{ cm}^4.$$



Hình 5.7.

Tính mômen quán tính chính trung tâm:

Các mômen quán tính  $J_{max}$ ,  $J_{min}$  và phương chính tính từ các công thức:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1172 + 308}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1172 - 308}{2}\right)^2 + 420^2}$$

$$J_{\max} = 1342,5 \text{ cm}^4; J_{\min} = 137,5 \text{ cm}^4.$$

Phương chính  $J_{\max}$  được xác định:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}} = \frac{-420}{308 - 1342,5} = 0,41; \alpha_1 = 22^\circ 20'$$

Vòng tròn quán tính và các phương chính được vẽ trên hình 5.7a, b.

#### **Vi dụ 4**

Một hình phẳng hình chữ Z có kích thước như hình 5.8. Hãy tính các mômen quán tính, hệ trục chính trung tâm.

### **GIẢI**

Ta phải chia hình đã cho ra thành 3 hình đơn giản I, II, III.

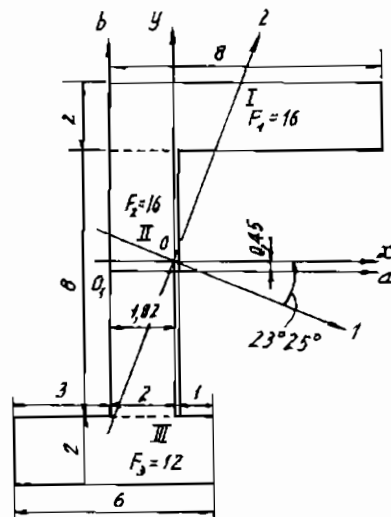
a) *Xác định tọa độ trọng tâm*

Lập hệ trục  $O_1a$  và  $O_1b$ . Trong đó  $O_1a$  đi qua trọng tâm hình II.

$$a_0 = \frac{16 \times 4 + 16 \times 1}{16 + 16 + 12} = 1,82 \text{ cm}$$

$$b_0 = \frac{16 \times 5 - 12 \times 5}{16 + 16 + 12} = 0,45 \text{ cm}$$

Từ  $a_0, b_0$  nhận được lập hệ trục trung tâm  $xOy$  như hình 5.8.



**Hình 5.8.**

b) Tính mômen quán tính đối với hệ trục  $xOy$

$$J_x = \left( \frac{8+2^3}{12} + 4,55^2 \times 16 \right) + \left( \frac{2 \times 8^2}{12} + 0,45^2 \times 16 \right) + \\ + \left( \frac{6 \times 2^3}{12} + 5,45^2 \times 12 \right) = 785,6 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \left( \frac{2+8^3}{12} + 2,18^2 \times 16 \right) + \left( \frac{8+2^3}{12} + 0,82^2 \times 16 \right) + \left( \frac{2 \times 6^3}{12} + 1,82^2 \times 12 \right) \\ = 253,2 \text{ cm}^4.$$

c) Tính mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục  $xOy$

$$J_{xy} = 4,55 \times 2,18 \times 16 + (-0,82) (-0,45) \times 16 + (-5,45) (-1,82) \times 12 \\ = 283,6 \text{ cm}^4.$$

d) Tính mômen quán tính chính:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} = \frac{785,6 + 253,2}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{(785,6 - 253,2)^2 + 4 \times 283,6^2} = 908,2 \text{ cm}^4;$$

$$J_{\min} = 519,4 - 388,8 = 130,6 \text{ cm}^4.$$

e) Tính góc nghiêng của các trục chính

$$\text{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2 \times 283,6}{785,6 - 253,2} = -1,065 \Rightarrow \alpha_0 = -23^\circ 25'$$

Hệ trục quán tính chính trung tâm 102 được cho trên hình 5.8.

# CHƯƠNG 6

## CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẪO

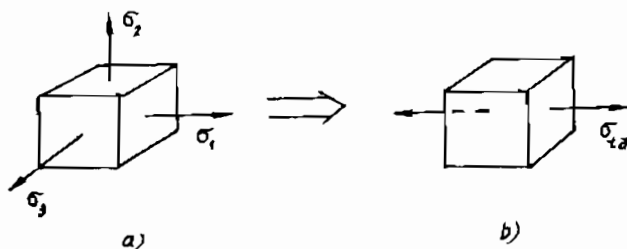
---

### §1. NHIỆM VỤ VÀ CÁCH ĐẶT BÀI TOÁN LÝ THUYẾT BỀN

Việc đánh giá độ bền của các chi tiết máy hay các cấu kiện công trình đối với một trạng thái ứng suất đã biết là một bài toán quan trọng nhất của các tính toán kỹ thuật. Khác với trạng thái ứng suất đơn khi kéo (nén) việc đánh giá độ bền của các chi tiết chịu trạng thái ứng suất này (như đã làm ở chương 4) là rất đơn giản nhờ các kết quả thí nghiệm. Tuy nhiên đối với trạng thái ứng suất phức tạp, thí nghiệm đã chứng minh rằng cùng một loại vật liệu trạng thái nguy hiểm có thể xảy ra đối với những giá trị giới hạn khác nhau của các ứng suất chính  $\sigma_{1,gh}$ ,  $\sigma_{2,gh}$ ,  $\sigma_{3,gh}$  phụ thuộc vào tỷ số giữa chúng. Vì thế việc xác định bằng thí nghiệm các giá trị giới hạn của các ứng suất chính là không thể vì, thứ nhất là chưa có những máy thí nghiệm đủ sức giải quyết được việc đó, thứ hai là khối lượng thí nghiệm quá lớn.

Một con đường khác giải quyết bài toán này là việc thiết lập các tiêu chuẩn bền (tiêu chuẩn về trạng thái ứng suất – biến dạng giới hạn). Để thiết lập các tiêu chuẩn bền người ta đưa ra những giả thuyết về các nhân tố có ảnh hưởng quyết định đến độ bền của vật

liệu và trên cơ sở đó thiết lập các quan hệ toán học để dẫn trạng thái ứng suất khảo sát về trạng thái ứng suất đơn tương đương với cùng một hệ số an toàn (hình 6.1a, b).



Hình 6.1.

Việc xác định chính xác nguyên nhân phá hủy vật liệu hay nguyên nhân chuyển nó vào trạng thái ứng suất giới hạn là một bài toán rất khó, cho đến nay vẫn còn chưa được giải quyết đầy đủ. Điều này đã không cho phép tạo ra một tiêu chuẩn bền duy nhất. Và, vì vậy đã có rất nhiều thuyết về trạng thái ứng suất biến dạng giới hạn được đề xuất như: tiêu chuẩn bền theo ứng suất pháp lớn nhất. Thuyết này cho rằng “Biến dạng dẻo hay sự phá hủy của các vật liệu giòn xuất hiện khi ứng suất chính lớn nhất về trị tuyệt đối đạt được giá trị giới hạn nào đó”.

Tiêu chuẩn bền về biến dạng dài lớn nhất lại thừa nhận rằng “Sự phá hủy hay sự chảy dẻo của vật liệu được bắt đầu khi biến dạng dài lớn nhất về trị tuyệt đối đạt được giá trị giới hạn nào đó”.

Các tiêu chuẩn bền và dẻo dựa trên quan điểm năng lượng như thuyết của Bentrami, thì thừa nhận rằng “Vật liệu chuyển vào trạng thái dẻo hoặc giòn khi năng lượng biến dạng riêng toàn phần đạt được một giá trị giới hạn nào đó”. Theo tiêu chuẩn bền và dẻo của Sláyer thì “đối với vật liệu có khả năng chịu kéo và nén khác nhau thì giá trị của năng lượng biến dạng toàn phần với điều kiện giá trị giới hạn của nó không thể là một đại lượng hằng mà là hàm nào đó của ứng suất trung bình được thừa nhận làm tiêu chuẩn bền của vật liệu”.



Ngoài ra còn các tiêu chuẩn bền và dẻo như của Balandin, của Miroljubov, của Genhiev và Kixiuk v.v. Tuy nhiên thực tiễn cho thấy ba tiêu chuẩn bền và dẻo dưới đây cho kết quả phù hợp với thực nghiệm và được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật. Đó là các tiêu chuẩn: theo ứng suất tiếp lớn nhất, thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất và tiêu chuẩn của Mo. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn này.

## §2. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN ỨNG DỤNG CỦA VẬT LIỆU ĐẲNG HƯỚNG

### 1. Tiêu chuẩn bền và dẻo của Torexcơ (thuyết bền thứ III)

Thuyết này được xây dựng trên cơ sở của giả thuyết “Biến dạng dẻo của kim loại và hợp kim hình thành khi ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \text{ đạt được giá trị giới hạn nào đó”}.$$

Qua các thí nghiệm trên kim loại và hợp kim Torexcơ nhận thấy trạng thái dẻo của vật liệu phát sinh khi hiệu của  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  đạt đến một giới hạn nhất định. Hiệu của  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  lại bằng hai lần trị số ứng suất tiếp cực đại cho nên điều kiện dẻo của Torexcơ cũng còn được gọi là điều kiện dẻo về ứng suất tiếp cực đại. Điều kiện đó được viết như sau:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ch}$$

$\sigma_{ch}$  là một giới hạn chảy của vật liệu được xác định bằng thí nghiệm của trạng thái ứng suất đơn.

Như vậy để vật liệu làm việc trong miền đàn hồi với một hệ số an toàn nhất định ta phải có điều kiện:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.1)$$

Điều kiện đó thường được gọi là *điều kiện bền theo ứng suất tiếp lớn nhất hay thuyết bền thứ III*.

Đối với trạng thái ứng suất phẳng thì từ điều kiện (6.1) sau khi thay vào trong nó biểu thức ứng suất chính ta có:

$$\sigma_{T3} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma] \quad (6.2)$$

Đối với trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt thì  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = \tau$ ,  $\sigma_{T3}$  có dạng:

$$\sigma_{T3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (6.3)$$

## 2. Tiêu chuẩn bền và dẻo của Huybe - Midet - Henkin (thuyết bền thứ IV)

Thuyết này cho rằng “Vật liệu sẽ bị phá hủy tại một phân tử nào đó khi thế năng riêng biến đổi hình dáng ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới giá trị giới hạn ở trạng thái ứng suất đơn”.

Theo thuyết này chỉ có phần thế năng riêng tích lũy do sự biến đổi hình dáng của phân tử là nguyên nhân gây ra trạng thái ứng suất giới hạn.

Trong trường hợp trạng thái ứng suất đơn thì theo công thức (3.48) thế năng biến đổi hình dáng là:

$$u_h = \frac{(1+\mu)\sigma^2}{3E}$$

Điều kiện để thế năng riêng biến đổi hình dáng trong trường hợp này đạt được giá trị giới hạn là:

$$u_h = \frac{(1+\mu)\sigma^2}{3E} = \frac{(1+\mu)\sigma_{ch}^2}{3E} \quad (6.4)$$

Vì vậy trong trường hợp tổng quát của trạng thái ứng suất, điều kiện dẻo và do đó là điều kiện bền của phân tử là:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.5)$$

hay:

$$\sigma_{T4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \sigma(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.6)$$

Đối với trạng thái ứng suất phẳng tổng quát (khi  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$ ) công thức (6.6) có dạng:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.7)$$

Khi  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau$  công thức (6.7) trở thành:

$$\sigma_{T4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (6.8)$$

Biểu thức ở vế trái (6.5), (6.6) là trị số của thế năng biến đổi hình dạng sai kém một hằng số tỷ lệ. Vì vậy điều kiện (6.5), (6.6) còn được gọi là điều kiện bền theo thế năng biến đổi hình dáng. Khi thế năng đó đạt đến một giá trị nhất định thì vật liệu chuyển vào giai đoạn chảy và ta xem như kết cấu không sử dụng được nữa.

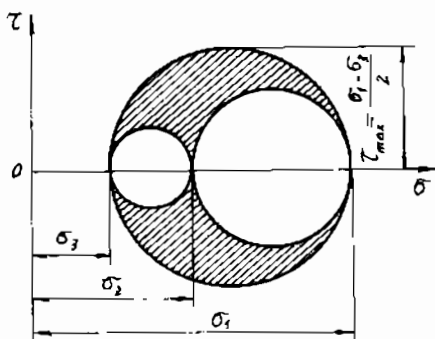
Cần lưu ý rằng các tiêu chuẩn dẻo và bền thứ ba và thứ tư chỉ phù hợp tốt với các vật liệu có tính dẻo đã được thí nghiệm và thực tế kỹ thuật khẳng định.

### 3. Tiêu chuẩn bền của Mo

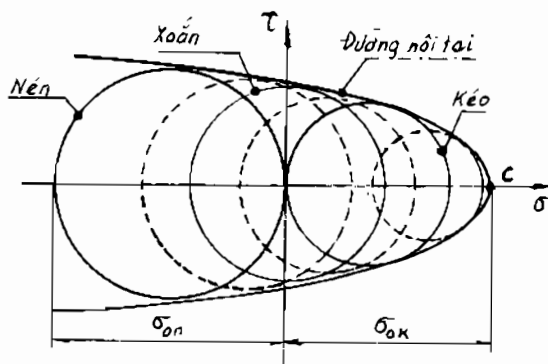
Trong tiêu chuẩn của Mo khác với các thuyết đã giới thiệu, Mo đã không sử dụng một giả thuyết nào về nguyên nhân gây ra trạng thái ứng suất giới hạn, mà thiết lập các thuộc tính bền của vật liệu từ những số liệu thí nghiệm đơn giản và các vòng tròn ứng suất do chính Mo đề ra. Như đã biết vòng tròn Mo đối với trạng thái ứng suất khối có dạng hình 6.2.

Tuy nhiên trong các thí nghiệm, ảnh hưởng của  $\sigma_2$  đã không được kể đến và các thuộc tính bền của vật liệu, do đó chỉ liên quan đến  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$ . Vì vậy, từ ba vòng tròn, Mo đã khảo sát chỉ một vòng tròn lớn nhất. Vòng tròn này được gọi là vòng tròn chính và được gọi

là vòng tròn giới hạn nếu trạng thái ứng suất khảo sát là trạng thái ứng suất giới hạn.



Hình 6.2.



Hình 6.3.

Hai giả thuyết thứ ba và thứ tư đều bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất cầu đến giới hạn dẻo của vật liệu. Vào năm 1880, Mo đã chỉ ra rằng khi một vật thể chịu kéo theo các phương như nhau, lực không thể tăng lên vô hạn được. Nếu ta biểu diễn các trạng thái ứng suất bằng những vòng tròn Mo ứng suất trong tọa độ  $\sigma$ ,  $\tau$  thì chắc chắn ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn về phía dương của trục  $\sigma$  (điểm c) tượng trưng cho trạng thái kéo đều theo các phương) mà khi đó vật liệu đã bắt đầu có biến dạng dẻo (hình 6.3).

Thực hiện nhiều thí nghiệm khác nhau với các trạng thái ứng suất khác nhau ta sẽ được các vòng Mo giới hạn, nghĩa là những vòng Mo tương ứng với trạng thái ứng suất đã bắt đầu có biến dạng dẻo. Đường bao của những vòng Mo đó được gọi là đường nội tại. Một cách gần đúng đường nội tại có thể xem như hai đường tiếp tuyến với hai vòng Mo giới hạn của trạng thái kéo đơn và nén đơn (hình 6.4). Một trạng thái ứng suất khảo sát nào đó, mà vòng Mo của nó tiếp xúc với đường nội tại này là trạng thái ứng suất giới hạn ở điểm khảo sát.

Giả sử một trạng thái ứng suất nào đó có  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  là một trạng thái giới hạn, nghĩa là vòng tròn ứng suất tiếp xúc với đường nội tại, tại C (hình 6.4). Ta hãy tìm mối tương quan giữa  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  với các giới hạn chảy khi kéo và khi nén. Gọi A và B là các điểm tiếp xúc của các vòng

tròn giới hạn khi kéo và nén với đường nội tại. Kẻ các đường song song với trục hoành từ A và từ C. Các đường đó cắt  $O_2B$  tại K và l. Từ điều kiện đồng dạng của tam giác ta có:

$$\frac{Bl}{BK} = \frac{Cl}{AK} \quad (a)$$

Nếu gọi k là tỷ số giữa  $\sigma_{k,gh}$  khi kéo và  $\sigma_{n,gh}$  khi nén, sau khi tính các độ dài Bl, BK, Cl, AK và thay vào (a) ta được:

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_{ch}$$

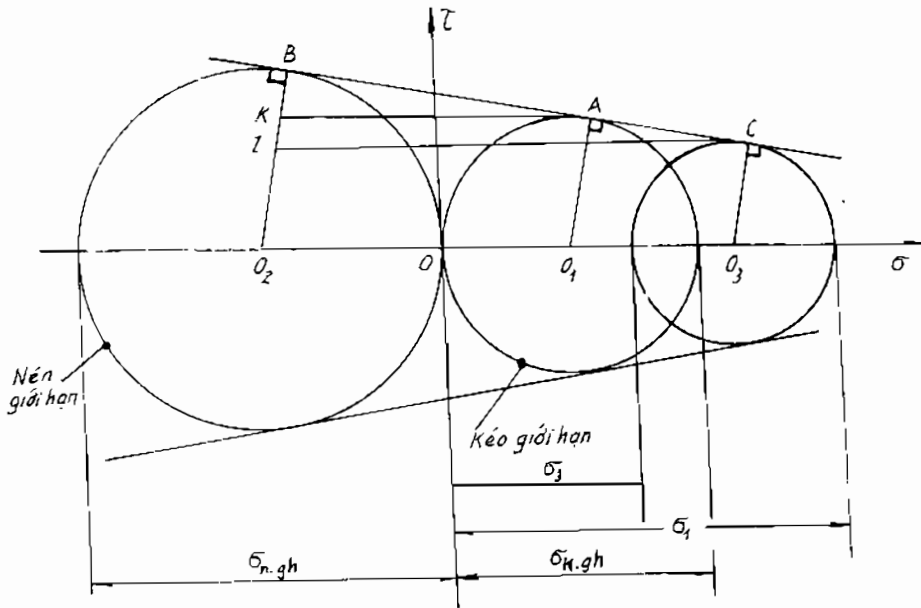
Như vậy để đạt được điều kiện vừa bền vừa an toàn ta phải có:

$$\sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (6.9)$$

trong đó

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$$

Thuyết bền này được áp dụng rộng rãi đối với vật liệu giòn vì vật liệu này có giới hạn bền khi kéo và khi nén khác nhau và ngay cả vật liệu dẻo (vật liệu có tính dẻo).



Hình 6.4.

Ta nhận thấy khi  $K = \frac{\sigma_{kgh}}{\sigma_{ngh}} = 1$  thì tiếp tuyến AB song song với

trục hoành Oσ và điều kiện (6.9) trùng với thuyết bền thứ III.

Cuối cùng cần chú ý rằng tiêu chuẩn bền của Mo cho kết quả rất tin cậy đối với các trạng thái ứng suất mà vòng Mo của chúng nằm giữa hai vòng tròn chính kéo và nén.

### §3. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẼO CỦA VẬT LIỆU DỊ HƯỚNG

Khác với vật liệu đẳng hướng, giới hạn bền và chảy của các vật liệu dị hướng không phải là những đại lượng vô hướng, vì theo các hướng khác nhau thì các giới hạn này khác nhau. Đặc điểm này làm cho việc nghiên cứu thiết lập các tiêu chuẩn bền và dẻo đối với các vật liệu dị hướng trở nên rất phức tạp.

Cũng như các vật liệu đẳng hướng, ngày nay đối với vật liệu dị hướng đang tồn tại rất nhiều tiêu chuẩn bền và dẻo khác nhau như các tiêu chuẩn của Phiserơ, của Zakharôv, của Marin, của Zucôv, của Midetkhil, của Catranôv v.v. Để giúp bạn đọc sử dụng các tiêu chuẩn bền và dẻo đối với vật liệu dị hướng, dưới đây chúng tôi giới thiệu một số công thức tính toán trên cơ sở của lý thuyết bền tổng quát của những vật liệu này với những dạng khác nhau của trạng thái ứng suất phức tạp. Các công thức này được sử dụng chỉ với các vật liệu mà các hằng số bền của chúng thỏa mãn điều kiện tương thích:

$$\frac{1}{\sigma_1^k} - \frac{1}{\sigma_2^k} - \frac{1}{\sigma_1^n} + \frac{1}{\sigma_2^n} = \frac{1}{\tau_{b45}^+} - \frac{1}{\tau_{b45}^-} \quad (6.10)$$

Các điều kiện bền cho trong “Bảng các công thức tính toán” được viết trong hệ tọa độ cơ bản. Nghĩa là hệ tọa độ mà các trục của nó trùng với các trục đối xứng của các tính chất cơ học của vật liệu dị hướng. Các đại lượng trong (6.10) và trong “Bảng các công thức tính toán” được hiểu là:



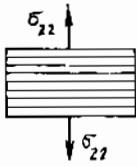
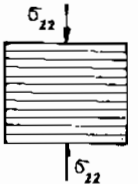
$\sigma_1^k$  là giới hạn bền kéo của vật liệu dị hướng có khả năng chịu kéo và nén khác nhau;

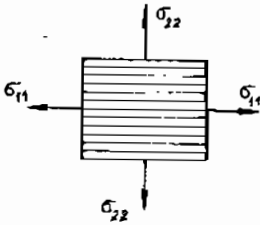
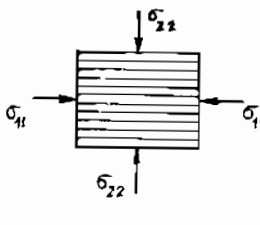
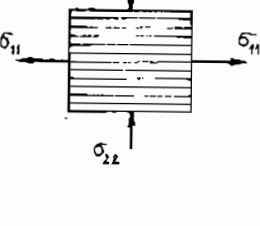
$\sigma_1^n$  là giới hạn bền khi nén của vật liệu dị hướng có khả năng chịu kéo, nén khác nhau;

$\tau_{b45}^+$ ,  $\tau_{b45}^-$  là giới hạn bền khi trượt trên mặt nghiêng  $45^\circ$  so với các phương cơ bản.

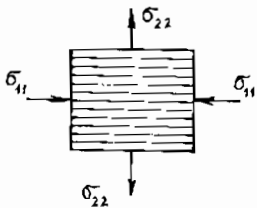
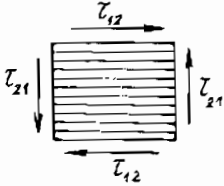
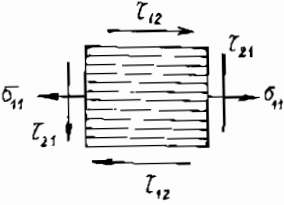
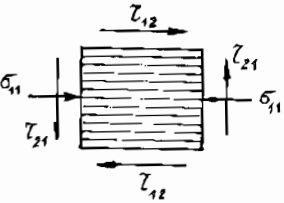
$\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  là các thành phần ứng suất viết trong hệ tọa độ Đêcác đánh số.

**Bảng các công thức tính toán**

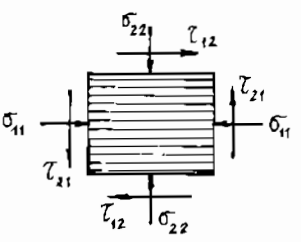
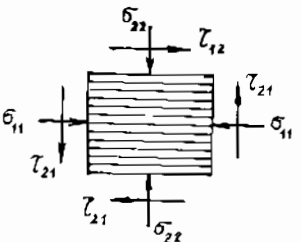
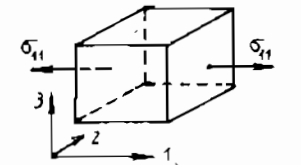
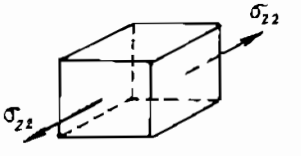
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
1		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^k$
2		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^n$
3		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^k$
4		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^n$

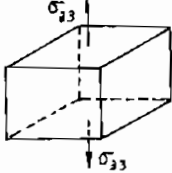
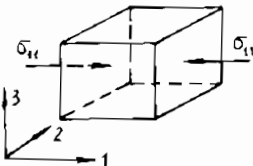
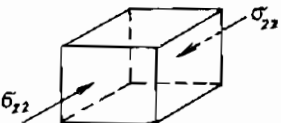
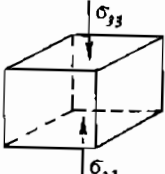
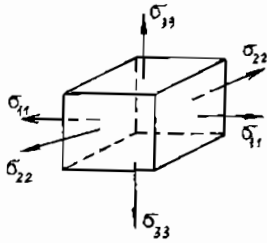
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
5		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $+ \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
6		$- \frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} - \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $+ \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
7		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $- \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$

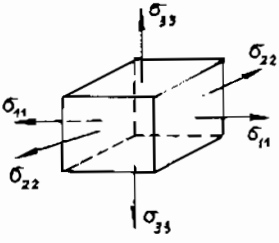
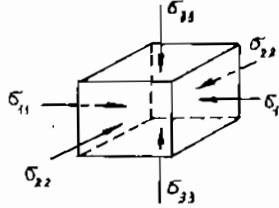


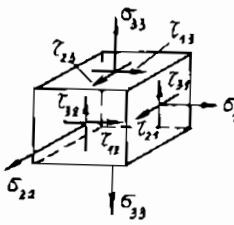
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
8		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $- \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
9		$\tau_{12} \leq \tau_{B0}$
10		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} +$ $+ \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
11		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} +$ $+ \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$

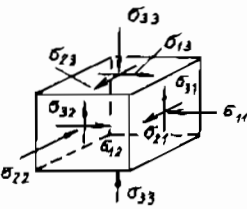
TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
12		$\frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
13		$\frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^n \sigma_2^k} \sigma_{22} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2}} \leq 1$
14		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
15		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
16		$\frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^k - \sigma_2^n}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 - \right.$ $\left. - \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
17		$\frac{\sigma_1^k - \sigma_1^n}{2\sigma_1^k \sigma_1^n} \sigma_{11} - \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} +$ $+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right.$ $+ \left[ \left( \frac{\sigma_1^k + \sigma_1^n}{\sigma_1^k \sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2^k + \sigma_2^n}{\sigma_2^k \sigma_2^n} \right)^2 - \right.$ $\left. \left. - \left( \frac{\tau_{b45}^+ + \tau_{b45}^-}{\tau_{b45}^+ \tau_{b45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1$
18		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^k$
19		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^k$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
20		$\sigma_{33} \leq \sigma_3^k$
21		$\sigma_{11} \leq \sigma_1^n$
22		$\sigma_{22} \leq \sigma_2^n$
23		$\sigma_{33} \leq \sigma_3^n$
24		$\begin{aligned} & \frac{\sigma_1^n - \sigma_1^k}{2\sigma_1^n \sigma_1^k} \sigma_{11} + \frac{\sigma_2^n - \sigma_2^k}{2\sigma_2^k \sigma_2^n} \sigma_{22} + \frac{\sigma_3^n - \sigma_3^k}{2\sigma_3^k \sigma_3^n} \sigma_{33} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right) \sigma_{22}^2 + \right. \\ & + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \left( \frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \right. \\ & + \left. \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \right. \end{aligned}$

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
24		$  \begin{aligned}  & - \left[ \frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right]^2 \sigma_{11} \sigma_{33} + \\  & + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \\  & \left. - \left[ \frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right]^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq 1  \end{aligned}  $
25		$  \begin{aligned}  & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^n} + \frac{1}{\sigma_1^k} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{\sigma_2^n} - \frac{1}{\sigma_2^k} \right) \sigma_{22} + \right. \\  & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^n} - \frac{1}{\sigma_3^k} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \right. \\  & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \right. \\  & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right. \\  & \left. - \left[ \frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right]^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \right. \\  & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \left[ \frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right]^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \\  & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \right. \\  & \left. - \left[ \frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right]^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} \Big\}^{\frac{1}{2}} \leq 1  \end{aligned}  $

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
26		$  \begin{aligned}  & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} - \frac{1}{\sigma_1^n} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} - \frac{1}{\sigma_2^n} \right) \sigma_{22} + \right. \\  & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} - \frac{1}{\sigma_3^n} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right) \sigma_{11}^2 + \right. \\  & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right) \sigma_{22}^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right) \sigma_{33}^2 + \right. \\  & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right) + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right) - \right. \right. \\  & \left. \left. - \left( \frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right) + \right. \right. \\  & \left. \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right) - \left( \frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} + \right. \\  & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right) + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right) - \right. \right. \\  & \left. \left. - \left( \frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \right. \\  & \left. + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{12(0)}^2} + \frac{4\tau_{13}^2}{\tau_{13(0)}^2} + \frac{4\tau_{23}^2}{\tau_{23(0)}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1  \end{aligned}  $

TT	Trạng thái ứng suất	Điều kiện bền
27		$ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^n} - \frac{1}{\sigma_1^k} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{\sigma_2^n} - \frac{1}{\sigma_2^k} \right) \sigma_{22} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^n} - \frac{1}{\sigma_3^k} \right) \sigma_{33} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 \sigma_{33}^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{\tau_{12(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{12(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_2^k} + \frac{1}{\sigma_2^n} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \left( \frac{1}{\tau_{23(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{23(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{22} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{1}{\sigma_1^k} + \frac{1}{\sigma_1^n} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_3^k} + \frac{1}{\sigma_3^n} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{\tau_{13(45)}^+} + \frac{1}{\tau_{13(45)}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{33} + \right. \\ & \left. + \frac{4\tau_{12}^2}{\tau_{12(0)}^2} + \frac{4\tau_{13}^2}{\tau_{13(0)}^2} + \frac{4\tau_{23}^2}{\tau_{23(0)}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1 \end{aligned} $

# CHƯƠNG 7

## XOẮN THANH THẲNG

---

### §1. ĐỊNH NGHĨA VÀ KHÁI NIỆM

Một thanh chịu xoắn thuần túy là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có duy nhất một thành phần nội lực là ngẫu lực xoắn có mômen  $M_x$  (còn gọi là mômen xoắn nội lực quanh trục  $x$ ).

Các chi tiết chịu biến dạng xoắn được cho trên hình 7.1a, b, c, d lần lượt là: tuốcnovít chịu xoắn đàn hồi, thanh làm bằng vật liệu giòn bị phá hủy theo mặt xoắn ốc, thanh làm bằng vật liệu dẻo bị phá hủy theo mặt cắt ngang dưới dạng cắt, thanh bằng gỗ bị phá hủy do xoắn dọc theo các thớ dọc.

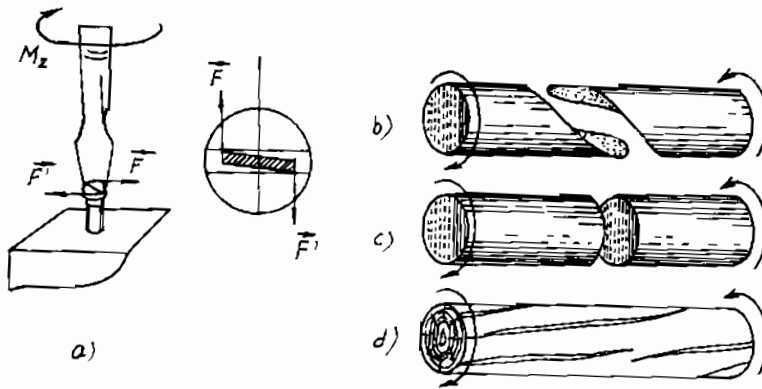
Trên hình 7.2 là bức tranh biến dạng trong miền đàn hồi của thanh tròn chịu xoắn.

Khi tác dụng ngoài đặt lên các trục quay được cho bởi thông số vận tốc góc  $n$  (vg/ph) và công suất  $N$  (W) thì mômen xoắn ngoài tác dụng lên trục quay được quy đổi theo công thức:

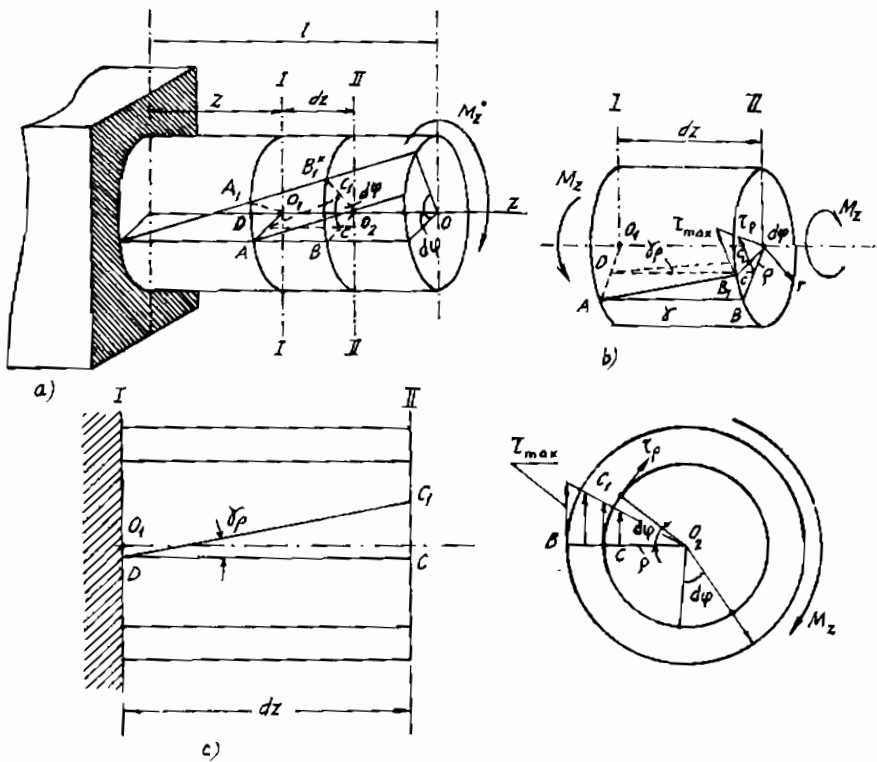
$$M^* = \frac{N}{\omega} = 9,55 \frac{N}{n}, \text{ Nm.} \quad (7.1a)$$

$\omega$  – là vận tốc góc tính bằng 1/s.





Hình 7.1.



Hình 7.2.

hoặc là:

$$M^* = 97360 \frac{N}{n}, \text{ daNcm} \quad (7.1b)$$

$N$  – là công suất tính bằng kW.

Nếu công suất đo bằng mã lực thì công thức trên có dạng:

$$M'_2 = 7162 \frac{N}{n}, \text{ Nm} \quad (7.2)$$

## §2. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Từ các kết quả nghiên cứu thí nghiệm xoắn đối với các loại vật liệu khác nhau, các nhà khoa học đã đúc kết thành các giả thiết sau đây:

### 1. Các giả thiết tính toán

- Tập hợp các chất điểm trước biến dạng nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, ở trạng thái biến dạng vẫn nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh. Vắn tắt hơn, các mặt cắt ngang luôn luôn phẳng, vì biến dạng bé nên khoảng cách giữa các mặt cắt ngang coi như không thay đổi.

- Tập hợp các chất điểm trên mặt cắt vuông góc với trục thanh là hình phẳng rắn tuyệt đối, cụ thể hơn là các bán kính của mặt cắt ngang luôn luôn thẳng, có độ dài không đổi và làm thành những góc không đổi trong quá trình biến dạng.

### 2. Ứng suất và biến dạng

Các giả thiết trên cho thấy trạng thái ứng suất của phân tố được tách ra quanh điểm “C” hình 7.2 là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Vì thế trên các mặt cắt ngang của thanh (hình 7.2) chỉ có biến dạng trượt thuần túy. Khi đó bán kính  $\rho$  tại điểm C của mặt cắt bị xoay đi một góc  $d\varphi$ , điểm C trên mặt cắt rời tới vị trí mới  $C_1$ . Do đó trên mặt cắt ngang (vuông góc với trục z) chỉ có ứng suất tiếp  $\tau_\rho$ , ứng suất này vuông góc với bán kính  $\rho$  tại C.

Gọi  $\gamma_\rho$  và  $\tau_\rho$  là góc trượt (độ trượt tương đối), ứng suất trượt tại điểm C (ứng với bán kính  $\rho$ ),  $d\varphi$  là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt chỉ cách nhau một đoạn  $dz$ . Ta thấy từ (hình 7.2c):

$$\gamma_\rho \approx \operatorname{tg} \gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho d\varphi}{dz} \quad (\text{a})$$

Theo định luật Húc (3.32) đối với trạng thái biến dạng trượt thuần túy thì quan hệ  $\tau = f(\gamma)$  là:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (\text{b})$$

Khi thu gọn hệ ứng suất  $\{\tau_\rho\}$  về tâm mặt cắt ta được:

$$\int_F \rho \tau_\rho dF = M_z \quad (\text{c})$$

Kế đến (b) thì công thức (c) trở thành:

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_\rho = M_z \quad (\text{d})$$

Từ (d) ta có phương trình vi phân của góc xoắn  $\varphi(z)$  như sau:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \quad (7.3)$$

trong đó:

$J_\rho = \int_F \rho^2 dF$  trong (d) và (7.3) được gọi là mômen quán tính độ cực của mặt cắt ngang đối với trọng tâm mặt cắt.

Đại lượng  $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  được gọi là góc xoắn tỷ đối của mặt cắt ngang tại hoành độ  $z$ .

$G$  là môđun đàn hồi trượt của vật liệu.

Khi thay (7.3) vào (b) ta được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm C bất kỳ trên mặt cắt ngang:

$$\tau_\rho = G\theta\rho = \frac{M_z}{J_\rho} \rho \quad (7.4)$$

Công thức (7.4) cho ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất dọc theo bán kính  $\rho$ . Khi  $\rho = R$ , ứng suất có giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = G\theta R = \frac{M_z}{\frac{J_p}{R}} = \frac{M_z}{W_p} \quad (7.5)$$

trong đó:

$R$  – bán kính mặt cắt ngang của thanh;

$W_p = J_p/R$  – mômen chống xoắn của mặt cắt ngang của thanh.

### §3. ĐIỀU KIỆN BỀN - ĐIỀU KIỆN CỨNG

#### 1. Điều kiện bền – ba bài toán thường gặp

Tương tự các bài toán thường gặp khi kéo (nén), trong trường hợp bài toán xoắn ta cũng có ba bài toán sau đây:

##### a) Bài toán kiểm tra điều kiện bền

Mục đích của bài toán là kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (7.6)$$

Trong (7.6),  $[\tau]$  được gọi là ứng suất tiếp cho phép.

##### b) Bài toán thiết kế

Đó là bài toán chọn mặt cắt ngang sao cho thỏa mãn bất đẳng thức:

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} \quad (7.7)$$

Cụ thể hơn, đối với thanh mặt cắt ngang tròn đường kính  $D$ :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau] \cdot (1 - \eta^4)}} \quad (7.7a)$$

trong đó:  $\eta = \frac{d}{D}$ ,  $d$  và  $D$  là đường kính trong và ngoài của mặt cắt,

$\eta = 0$  ứng với thanh có mặt cắt tròn đặc.

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(z, P) \leq W_p [\tau] \quad (7.8)$$

Mômen xoắn nội lực  $M_z$  trong (7.8) là hàm được xác định theo tải trọng ngoài và hoành độ  $z$ . Quan hệ này cho phép suy ra tải trọng ngoài tác dụng lên hệ.

## 2. Điều kiện cứng – Ba bài toán thường gặp

Nếu gọi  $[\theta]$  và  $[\varphi]$  là góc xoắn tỷ đối và góc xoắn tuyệt đối cho phép của thanh thì tương tự thanh chịu kéo (nén) ta có ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện cứng

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{và} \quad \varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (7.9)$$

b) Bài toán thiết kế

$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} \quad (7.10)$$

Cụ thể hơn: 
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0.1 \cdot [\theta] \cdot (1 - \eta^4) G}} \quad (7.11)$$

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(z, P) \leq GJ_p[\theta] \quad (7.12)$$

Để có thể thực hiện được các tính toán theo các công thức từ (7.3) cho đến (7.12) ta phải biết trước quy luật biến thiên của các hàm  $M_z(z)$  và  $\varphi_z(z)$ . Dưới đây ta sẽ giải quyết nội dung rất quan trọng này.

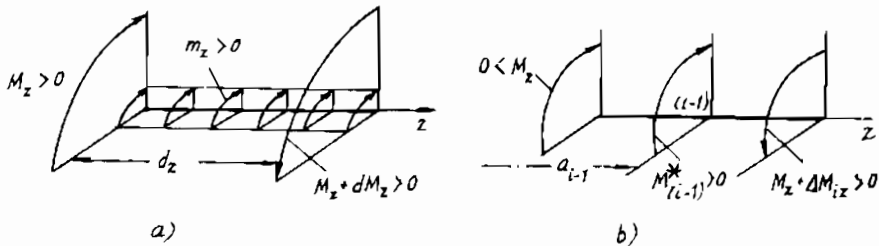
## §4. CHUYỂN VỊ, NỘI LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÚNG

### 1. Các quan hệ vi phân giữa chuyển vị, nội lực và tải trọng ngoài

Ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một đoạn thanh có chiều dài  $dz$  (hình 7.3a,b) như đã làm ở §12 chương 1. Kết quả của việc khảo sát cân bằng và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta quan hệ

(7.13). Bằng cách đạo hàm liên tiếp theo  $z$  hai vế phương trình (7.3) ta nhận được quan hệ (7.14):

$$\begin{aligned} \Delta M_{iz} &= M_{(i-1)}^* = M_{oi}^+ & \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M_z(z)}{G_i J_{pi}} \\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z) & \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= \frac{m_z(z)}{G_i J_{pi}} & (7.14) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n M_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z) & \frac{d^n \varphi}{dz^n} &= \frac{m_z^{(n-2)}(z)}{G_i J_{pi}} \end{aligned}$$



Hình 7.3.

## 2. Cách xác định $M_z(z)$ và $\varphi_z(z)$ bằng phương pháp mặt cắt và tích phân trực tiếp

Việc xác định biểu thức và biểu đồ mômen xoắn  $M_z(z)$  có thể được thực hiện bằng phương pháp mặt cắt như đã nghiên cứu kỹ ở chương 1. Tuy nhiên phương pháp này không thể sử dụng để tính chuyển vị (góc xoắn)  $\varphi_z(z)$  được mà phải tích phân trực tiếp phương trình vi phân (7.3). Cụ thể là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn  $l$  là:

$$\varphi = \int \frac{M_z(z) dz}{GJ_p(z)} \quad (7.15)$$

Khi tỷ số  $\frac{M_z}{GJ_p} = \text{hằng}$  với mọi  $0 \leq z \leq l$  thì (7.15) trở thành:

$$\varphi = \theta.l = \frac{M_z.l}{GJ_p} \quad (7.16)$$

Để xác định đồng thời mômen xoắn  $M_z(z)$  và chuyển vị góc  $\varphi_z(z)$  với cùng một công thức thuật toán duy nhất và tránh được phép tính tích phân (7.15) thì thuận lợi nhất là sử dụng phương pháp vạn năng được giới thiệu dưới đây và rút ra từ trường hợp tổng quát đã xây dựng ở §3 chương 4 với sơ đồ tính hình 7.4.

### 3. Phương pháp vạn năng

#### a) Dạng ma trận

Theo phương pháp vạn năng vectơ các đại lượng cần tính trong bài toán này gồm hai thành phần là góc xoắn  $\varphi_z(z)$  và mômen xoắn  $M_z(z)$  được xác định theo các công thức tổng (4.1), (4.16) đã thiết lập trong §3 của chương 4 với sơ đồ tính như hình 7.4.

$$\bar{S}_i(z) = [B_i][B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + [B_i][B_{i-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B_i] \Delta \bar{S}_{0i} \quad (7.17)$$

$$\bar{S}_i^*(a_i) = [B_i^*][B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + [B_i^*][B_{i-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \bar{S}_{02} + \dots + [B_i^*] \Delta \bar{S}_{0i}$$

$$i = \overline{1, n} \quad (7.18)$$

trong đó:

$$\Delta \bar{S}_{0i} = \left\{ \Delta \varphi_{0i}, M_{0i}^*, \Delta m_{0i}, \Delta m'_{0i}, \Delta m''_{0i} \dots \right\}^T ; \quad (7.19)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_3}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_4}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_5}{G_i J_{pi}} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \dots \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$\bar{S}_i(z) = \bar{S}_i = \begin{Bmatrix} \varphi_i(z) \\ M_i(z) \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } 0 \leq z \leq a_{i-1} \end{cases} \quad (7.22)$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

$G_i$  – môđun đàn hồi trượt của vật liệu của đoạn thanh  $i$ ;

$J_{pi}$  – mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang đối với trọng tâm mặt cắt ngang thuộc đoạn  $i$ ;

$\Delta\varphi_{0i}$  – bước nhảy của góc xoắn bổ sung ở đầu trái đoạn  $i$ ;

$M^*_{0i}$  – mômen xoắn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$ ;

$\Delta m_{0i}, \Delta m'_{0i}, \Delta m''_{0i}$  – lần lượt là bước nhảy của mômen xoắn ngoại lực phân bố và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở đầu trái đoạn  $i$  có hoành độ  $z = a_{i-1}$  (hình 7.4).

### b) Dạng biểu diễn tổng

$$\left. \begin{aligned} a/ \varphi_m(z) &= \sum_{i=1}^{m=1, \bar{n}} \left( \Delta\varphi_{0i} \Phi_0 + M^*_{0i} \frac{\Phi_1}{GJ_p} + \Delta m_{0i} \frac{\Phi_2}{GJ_p} + \Delta m'_{0i} \frac{\Phi_3}{GJ_p} + \dots \right) \\ b/ M_m(z) &= \sum_{i=1}^{m=1, \bar{n}} \left( M^*_{0i} \Phi_0 + \Delta m_{0i} \Phi_1 + \Delta m'_{0i} \Phi_2 + \Delta m''_{0i} \Phi_3 \dots \right) \end{aligned} \right\} (7.23)$$

với  $l_i \neq \text{const}$  và  $G_i J_{pi} = \text{const}$  với  $\forall i$ . Nếu thanh có cấu tạo liên tục thì  $\Delta\varphi_{0i} = 0$  với  $\forall i > 1$ .

Trong (7.23)  $\Delta\varphi_{0i}$  là bước nhảy của góc xoắn ở đầu trái đoạn “ $i$ ”.

$M^*_{0i}$  là mômen xoắn ngoại lực tập trung ở “ $O_i$ ” có hoành độ  $z = a_{i-1}$ .

$\Delta m_{0i}, \Delta m'_{0i}, \Delta m''_{0i} \dots$  lần lượt là bước nhảy của mômen xoắn ngoại lực phân bố và của các đạo hàm các cấp của nó ở “ $O_i$ ” có hoành độ  $z = a_{i-1}$ .

$m = \overline{1, n}$  là tên gọi của đoạn thanh thứ  $m$  trên đó cần tính  $\bar{S}_m(z)$ .

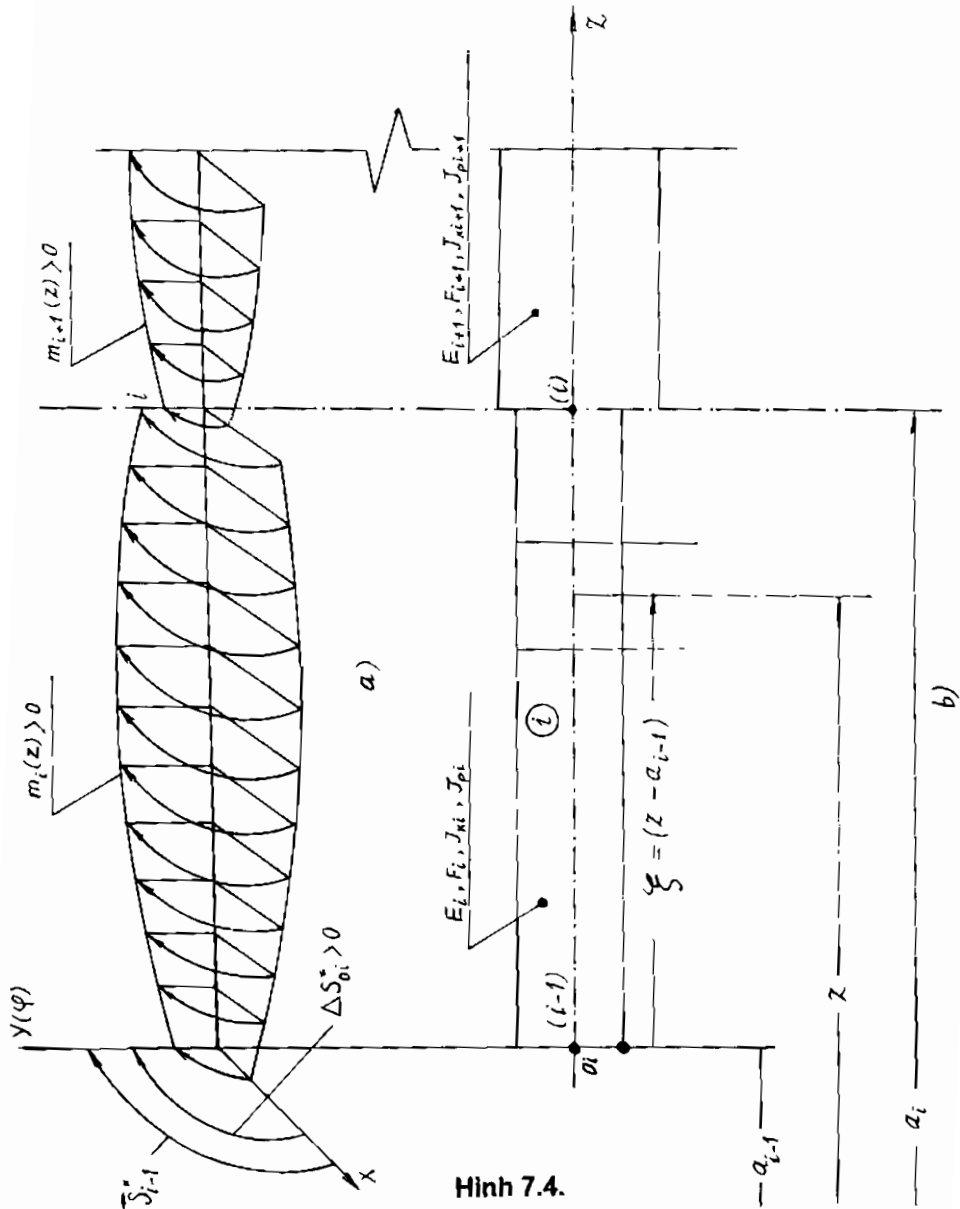
Cần nhấn mạnh rằng trong các công thức từ (7.17) đến (7.23):

- $\Delta\varphi_{0i}, M^*_{0i}, \Delta m_{0i}, \Delta m'_{0i}, \Delta m''_{0i}$  v.v. lần lượt là bước nhảy của góc xoắn, mômen xoắn ngoại lực tập trung, bước nhảy của mômen xoắn phân bố và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của mômen xoắn phân bố ở đầu trái đoạn thứ  $i$  tức là ở mặt cắt  $(i-1)$  có hoành độ  $z = a_{i-1}$  và được tính theo quy tắc thông thường của toán học:



$$\Delta\varphi_{O_i} = \varphi_{O_{if}} - \varphi_{O_{itr}} ; \Delta m_{O_i} = m_{O_{if}} - m_{O_{itr}} .$$

$$\Delta m'_{O_i} = m'_{O_{if}} - m'_{O_{itr}} ; \Delta m''_{O_i} = m''_{O_{if}} - m''_{O_{itr}} \text{ v.v.}$$



Hình 7.4.

- $G_i J_p$  là độ cứng của mặt cắt ngang của thanh khi xoắn.
- $[B_i]$  là ma trận biến đổi với các phần tử hằng thuộc đoạn  $i$  nhận được khi thay  $z - a_{i-1} = a_i - a_{i-1} = l_i$  vào ma trận  $[B_i]$ .

Việc tính toán các nội lực và chuyển vị bằng thuật toán của phương pháp vạn năng nói trên đã được tự động hoá trên chương trình BK45 với một lớp rất rộng các bài toán Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45 và cách sử dụng chương trình được cho ở chương 8.

## §5. XOẮN THANH MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN

### 1. Thanh mặt cắt ngang chữ nhật

Đối với các thanh có mặt cắt ngang không tròn, sau khi bị xoắn các mặt cắt không còn phẳng nữa mà bị vênh đi. Những nghiên cứu sâu hơn của cơ học vật rắn biến dạng cho thấy trên mặt cắt ngang của thanh cũng chỉ có ứng suất tiếp. Đối với thanh mặt cắt ngang chữ nhật, luật phân bố ứng suất tiếp được biểu diễn trên hình 7.5.

Ứng suất ở các điểm biên của mặt cắt phân bố không đều dọc theo chiều dài của các cạnh. Điểm giữa của cạnh dài có ứng suất lớn nhất  $\tau_{\max}$ . Cụ thể là:

– Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh dài:

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (7.24)$$

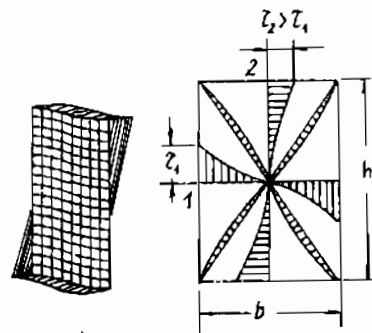
– Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh ngắn:

$$\tau_2 = \gamma \tau_1 \quad (7.25)$$

– Góc xoắn tương đối:

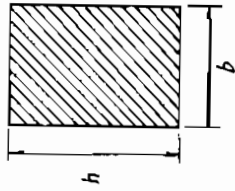
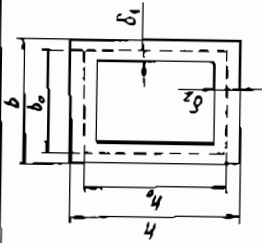
$$\theta = \frac{M_z}{G \cdot \beta h b^3} \quad (7.26)$$

Các hệ số  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  phụ thuộc vào tỷ số  $h/b$  và được cho trong bảng 7.1.

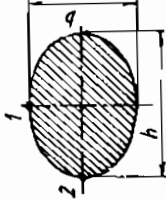
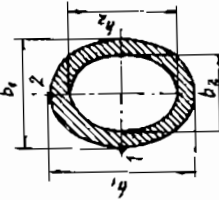
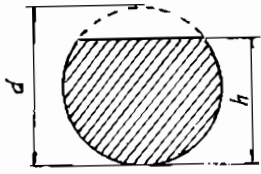


Hình 7.5.

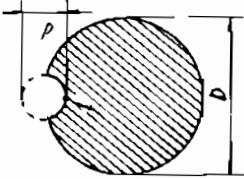
Bảng 7.1.

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực $J_p$ , $\text{cm}^4$	Momen chống xoắn $W_p$ , $\text{cm}^3$	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chú giải			
				$\frac{h}{b}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
	$J_p = \beta hb^3$	$W_p = \alpha hb^2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Điểm giữa cạnh dài: <math>\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}</math>;</li> <li>Điểm giữa cạnh ngắn: <math>\tau = \gamma \tau_{\max}</math>; ở góc <math>\tau = 0</math></li> </ul>	1 1,5 1,75 2,0 2,5 3,0 4,0 6,0 8,0 10,0 $\infty$	0,208 0,231 0,239 0,246 0,256 0,267 0,282 0,299 0,307 0,313 0,333	0,141 0,196 0,214 0,229 0,249 0,263 0,281 0,299 0,307 0,313 0,333	1 0,859 - 0,795 - 0,753 0,745 0,743 0,743 0,743 0,743
	$J_p = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{p1} = 2h_0 b_0 \delta_1$ $W_p = 2h_0 b_0 \delta_2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Điểm giữa cạnh dài: <math>\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}</math>;</li> <li>Điểm giữa cạnh ngắn: <math>\tau_2 = \frac{M_z}{W_p}</math></li> </ul>	Hệ số tập trung ứng suất ở các điểm góc trong: $\alpha_p = 1,74 \sqrt{\frac{\delta_{\max}}{r}}$ $r$ là bán kính góc lượn.			

Bảng 7.1 (tiếp theo)

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực $J_p, \text{cm}^4$	Momen chống xoắn $W_p, \text{cm}^3$	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chú giải
	$J_p = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2)$	$W_p = \frac{\pi b^2 h}{16}$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$ $\tau_2 = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$
	$J_p = \frac{\pi m^3 b_1^4 (1 - \alpha^4)}{16 (m^2 + 1)}$	$W_p = \frac{\pi b_1^3}{16} \times$ $\times (1 - \alpha^4) m$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$ $\tau_2 = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$
	$J_p = \frac{d^4}{16} \cdot$ $\left( 2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$W_p = \frac{d^3}{8} \cdot$ $2,6 \frac{h}{d} - 1$ $\left( 0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)$	$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$	$\frac{h}{d} > 0,5$

Bảng 7.1 (tiếp theo)

Dạng mặt cắt	Momen quán tính độc cực $J_p$ , $\text{cm}^4$	Momen chống xoắn $W_p$ , $\text{cm}^3$	Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất, $\tau_{\max}$	Chú giải					
				$d/D$	$\alpha$	$\beta$	$d/D$	$\alpha$	$\beta$
	$J_p = \alpha \frac{D^4}{16}$	$W_p = \beta \frac{D^3}{8}$	$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_z}{W_p}$	0,00	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22
				0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92
				0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63
				0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38

## 2. Thanh mặt cắt ngang hình thang và elip

Trong tính toán các thanh chịu xoắn có mặt cắt ngang là hình thang cân, để có các giá trị gần đúng của  $\tau_{\max}$  và  $\theta_{\max}$  ta có thể sử dụng công thức từ (7.24) + (7.26) khi thay hình thang bằng hình chữ nhật tương đương (hình 7.6a). Cụ thể là:

Từ tâm C của hình thang vẽ các tia vuông góc với các cạnh bên của hình thang. Sau đó, từ chân đường vuông góc A và B vẽ các tia thẳng đứng. Hình chữ nhật abcd nhận được là mặt cắt tương đương với mặt cắt hình thang.

Nếu thanh chịu xoắn có mặt cắt ngang hình elip thì  $\tau_{\max}$  nằm ở điểm trên chu vi thuộc bán trục bé (hình 7.6b):

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16 M_z}{\pi b^2 h} \quad (7.27)$$

Trên chu vi thuộc bán trục lớn có:

$$\tau_2 = \frac{b}{h} \cdot \tau_{\max} \quad (7.28)$$

Mômen quán tính độc cực quy ước của mặt cắt elip khi xoắn là:

$$J_p = \frac{\pi b h}{64} (h^2 + b^2) \quad (7.29)$$

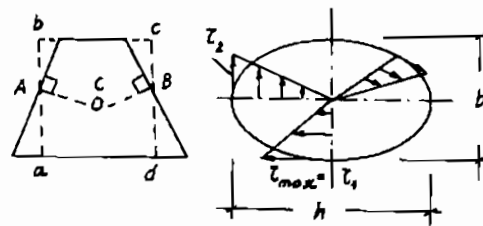
Công thức tính  $J_p$ ,  $W_p$  và  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  đối với các mặt cắt ngang không tròn khác nhau được cho trong bảng 7.1.

Đối với những mặt cắt ngang hở phức tạp, ta cần chia chúng thành những mảng nhỏ để có  $J_{pi}$ ,  $W_{pi}$  rồi lấy tổng:

$$J_p = \sum_{i=1}^n J_{pi} \quad (7.30)$$

Do đó, góc xoắn tỷ đối của toàn bộ mặt cắt và của từng phần là như nhau và bằng:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{M_{z1}}{GJ_{p1}} = \dots = \frac{M_{zn}}{GJ_{pn}} \quad (7.31)$$



Hình 7.6.

Mômen xoắn  $M_z$  được phân bố trên từng mảng của mặt cắt tổng thể tỷ lệ với độ cứng của chúng. Nghĩa là:

$$M_{z1} = M_z \cdot \frac{J_{p1}}{J_p} ; \dots ; M_{zn} = M_z \cdot \frac{J_{pn}}{J_p}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất trên mỗi phần thứ (i) của mặt cắt là:

$$\tau_i = \frac{M_{zn}}{W_{pi}} = \frac{M_z}{W_{pi}} \left( \frac{J_{pi}}{J_p} \right) = \frac{M_z}{J_p} \left( \frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)$$

Khi  $\frac{J_{pi}}{W_{pi}}$  đạt cực đại thì  $\tau_i$  đạt  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} \left( \frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (7.32)$$

trong đó:

$$W_p = \frac{J_{pi}}{\left( \frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)_{\max}} \quad (7.33)$$

#### 4. Xoắn thanh thành mỏng

Trong kỹ thuật (nhất là kỹ thuật hàng không, kỹ thuật đóng tàu) người ta thường dùng thanh thành mỏng. Lý thuyết thanh thành mỏng (ví dụ của Vlasov) cung cấp cho ta đầy đủ nhất cách xác định sự ứng xử của các loại thanh này đối với những vật liệu khác nhau.

##### a) Thanh có thành mỏng kín (hình 7.7a)

Khi bị xoắn, trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều dày của thành. Ứng suất tại một điểm bất kỳ A của thành được cho bởi:

$$\tau_A = \frac{M_z}{2F^* \cdot b_A} \quad (7.34)$$

trong đó:  $b_A$  – chiều dày của thành tại A;

$F^*$  – diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành (còn gọi là đường chu vi trung gian  $S$  của thành).

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{4GF'^2} \oint_S \frac{dS}{b} \quad (7.35)$$

trong đó:

$\oint_S$  – tích phân theo đường cong kín S.

**b) Thanh có thành mỏng hở**

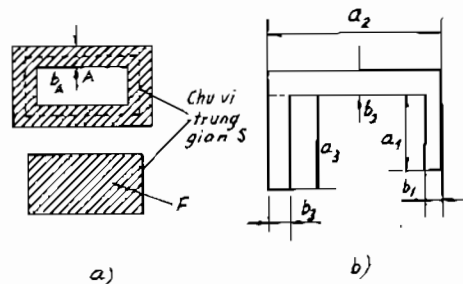
Giả sử mặt cắt ngang của thanh gồm nhiều mảnh chữ nhật ghép lại (hình 7.7b). Ký hiệu  $a_i, b_i$  là bề dài và bề rộng của dải chữ nhật thứ  $i$ . Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm giữa cạnh  $a_i$  được tính theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J^*} b_i \quad (7.36)$$

trong đó:

$$J^* = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^m a_i b_i^3 \quad (7.37)$$

$\eta$  – hệ số điều chỉnh được cho trong bảng 7.2.



Hình 7.7.

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ^*} \quad (7.38)$$



**Bảng 7.2.**

Mặt cắt ngang	$\eta$
L	1,00
I	1,20
T	1,15
□	1,12

Nếu mặt cắt ngang là một dải cong thì khi tính ứng suất và góc xoắn tỷ đối được coi như một dải chữ nhật có chiều dài bằng chu vi.

## §6. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

### Ví dụ 1

Một trục chân vịt của tàu thủy loại trung bình có đường kính ngoài  $D = 25$  cm, đường kính trong  $d = 17$  cm. Trục quay với vận tốc góc  $n = 250$  vg/ph. Hãy xác định công suất của trục này và đánh giá độ an toàn cho trục. Biết góc xoắn đo trực tiếp trên đoạn trục dài 5 m là  $1^\circ$  và vật liệu làm trục có:  $[\tau] = 1156$  daN/cm<sup>2</sup>;  $\tau_{CH} = 1500$  kN/cm<sup>2</sup>;  $G = 8 \cdot 10^6$  N/cm<sup>2</sup>.

## GIẢI

1) Xác định công suất  $N$  của trục

Công thức xác định công suất  $N$  được suy ra từ công thức liên hệ giữa  $M_z^*$  và  $N$  dưới đây:

$$M_z^* = 97400 \frac{N}{n} \Rightarrow N = \frac{M_z \cdot n}{97400} \quad (1)$$

Mặt khác giữa góc xoắn và  $M_z$  có hệ thức:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{GJ_p} \Rightarrow M_z = \frac{\varphi GJ_p}{l} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta tìm được:

$$N = \frac{\varphi G J_p \cdot n}{97400 \cdot l} = \frac{\pi \cdot 1^\circ \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot 30700 \cdot 250}{180 \cdot 97400 \cdot 500} = 2200 \text{ kW},$$

trong đó:

$$\varphi = 1^\circ = \frac{\pi}{180}; J_p = 0,1D^4(1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 25^4 \left(1 - \frac{17}{25}\right)^4 = 30700 \text{ cm}^4.$$

Ứng suất tiếp lớn nhất  $\tau_{\max}$  có giá trị:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{97400 \cdot 2200}{250 \cdot 0,2 \cdot 25^3 \left(1 - \frac{17}{25}\right)^4} = 3500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} = 350 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}.$$

Độ an toàn theo ứng suất cho phép là:

$$n_1 = \frac{[\tau]}{\tau_{\max}} = \frac{1156}{350} = 3,3.$$

Độ an toàn theo giới hạn chảy là:

$$n_2 = \frac{\tau_{ch}}{\tau_{\max}} = \frac{1500}{350} = 4,286.$$

### Ví dụ 2

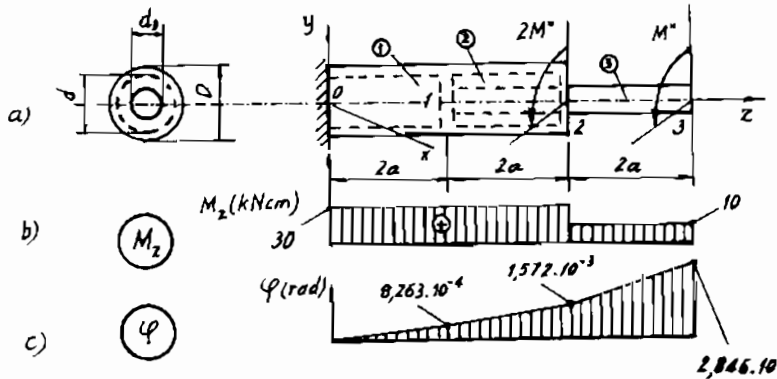
Một trục tổ hợp chịu xoắn gồm một trục rỗng dài 4a liên kết cứng với trục đặc dài 4a tại các mặt cắt 1. và 2. Trục tổ hợp có mặt cắt thay đổi từng khúc được làm bằng thép, chịu lực, có kích thước và liên kết như hình 7.8. Cho biết đường kính phần trục đặc  $d_3 = \frac{D}{2} = \frac{d}{1,6} = 10 \text{ cm}$ , môđun đàn hồi trượt của phần rỗng và đặc là  $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$ .

Hãy tính ứng suất tiếp lớn nhất trong phần trục đặc và phần trục rỗng.

Vẽ biểu đồ ( $M_z$ ) và ( $\varphi_z$ ).

## GIẢI

Trong đoạn 2 – 3 mômen xoắn nội lực  $M_z = M^*$ . Mômen phản lực tại ngàm 0 có giá trị:  $M_0 = 3M^*$ . Mômen xoắn nội lực trong phần 0 – 1 là  $M_z = 3M^*$ .



Hình 7.8.

Ta ký hiệu  $M_2$  là mômen xoắn mà trục đặc 1 – 2 phải chịu trong đoạn 1 – 2;  $M_1$  là mômen xoắn mà phần trục rỗng 1 – 2 phải chịu. Theo điều kiện cân bằng tĩnh ta có:

$$M_1 + M_2 = 3M^* \quad (a)$$

Vì tại các mặt cắt 1 và 2 liên kết giữa hai trục là cứng tuyệt đối nên ta có góc xoắn trong phần 1 – 2 của cả hai loại trục phải bằng nhau, nghĩa là:

$$\frac{M_2 2a}{GJ_{3p}} = \frac{M_1 2a}{GJ_{1p}} \Rightarrow M_1 = M_2 \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \quad (b)$$

Thay quan hệ (b) vào (a) ta được:

$$M_2 \left( 1 + \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \right) = 3M^* \Rightarrow M_2 = \frac{3M^*}{1 + \frac{J_{1p}}{J_{3p}}}; \quad M_1 = \frac{3M^*}{1 + \frac{J_{3p}}{J_{1p}}}$$

trong đó:

$$J_{1p} = 0,1D^4 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] ; \quad J_{3p} = 0,1d_3^4 \Rightarrow \frac{J_{1p}}{J_{3p}} \approx 9,45$$

Vậy ta có:

$$M_2 = \frac{3M^*}{1+9,45} \approx 0,287 M^* ; \quad M_1 = 2,713 M^*$$

Ứng suất tiếp lớn nhất xảy ra:

– Đối với trục đặc trong phần 2 – 3:

$$\tau_{2\max} = \frac{M^*}{W_{3p}} = \frac{M^*}{0,2d_3^3} = 5,09 \frac{M^*}{d_3^3} = 5,09 \frac{10}{10^3} = 0,051 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

– Đối với trục rỗng trong đoạn 0 – 1:

$$\tau_{\max 1} = \frac{3M^*}{0,2D^3 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]} \approx 0,636 \tau_{\max 2} = 3,24 \frac{M^*}{d_3^3} = 0,0324 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Góc xoắn tại mặt cắt 3 là:

$$\begin{aligned} \varphi_{3-0} = \varphi_3 = \varphi_{3-2} + \varphi_{2-1} + \varphi_{1-0} &= \frac{M^* a}{GJ_{3p}} + 0,287 \frac{M^* \cdot 2a}{GJ_{3p}} + \frac{3M^* \cdot 2a}{GJ_{3p} \cdot 9,45} = \\ &= 2,21 \frac{M^* a}{GJ_{3p}} \approx 22,5 \frac{M^* a}{Gd_3^4} = 2,846 \cdot 10^{-3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

Biểu đồ ( $M_x$ ) và ( $\varphi_x$ ) được cho trên hình 7.8b, c.

### Ví dụ 3

Một trục thép tròn đường kính  $d$ , có liên kết và chịu lực như hình 7.9a. Cho biết  $l = 50 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $M^* = 2 \text{ kNm}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$  (đĩa tuyệt đối cứng có  $D = 8 \text{ cm}$ ).

Tính ứng suất pháp  $\sigma$  trong thanh giằng 2 và ứng suất tiếp  $\tau$  trong trục? (thanh giằng có chiều dài  $a = 2 \text{ m}$ , mặt cắt ngang  $F = 4 \text{ cm}^2$ . Hai thanh cùng vật liệu như trục thép có  $E = 2,5 G$ ).

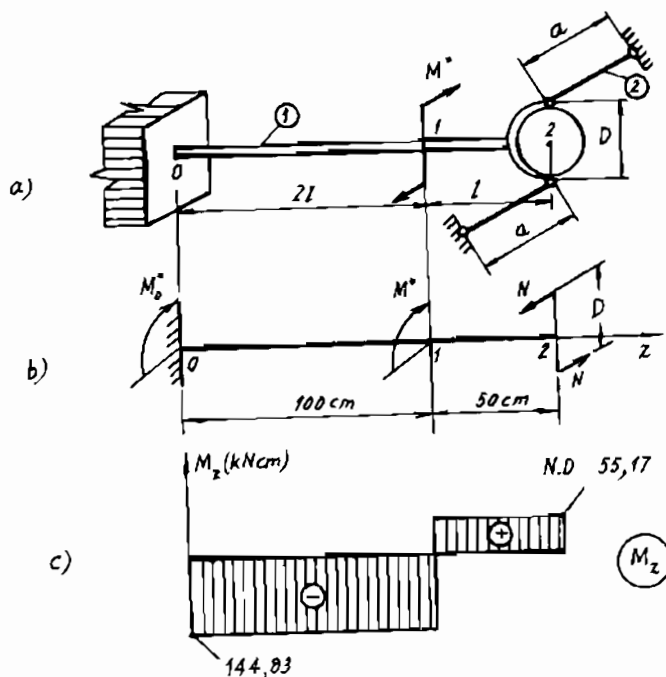
## GIẢI

Ký hiệu  $N$  là lực dọc trong các thanh giằng, ta có sơ đồ tính trục như hình 7.9b. Phương trình cân bằng mômen đối với trục  $Oz$ :

$$M_0 + M^* - N.D = 0 \quad (a)$$

Điều kiện biến dạng của trục là góc xoắn của trục tại  $z = 3l$  phải bằng góc quay của đĩa do các lực dọc  $N$  gây ra. Cụ thể là:

$$-\frac{M_0 \cdot 100}{GJ_p} + \frac{N.D.50}{GJ_p} = \frac{2N.a}{EF.D} \quad (b)$$



Hình 7.9.

Thay (a) vào (b) ta có:

$$\frac{100}{GJ_p} (N.D - M^*) + \frac{N.D.50}{GJ_p} = \frac{400N}{2,5G.4}$$

Do đó, lực dọc  $N$  được xác định:

$$N = \frac{20000}{2900} = 6,896 \text{ kN}$$

Ứng suất trong các thanh giằng là:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{6,896}{4} = 1,724 \text{ kN/cm}^2$$

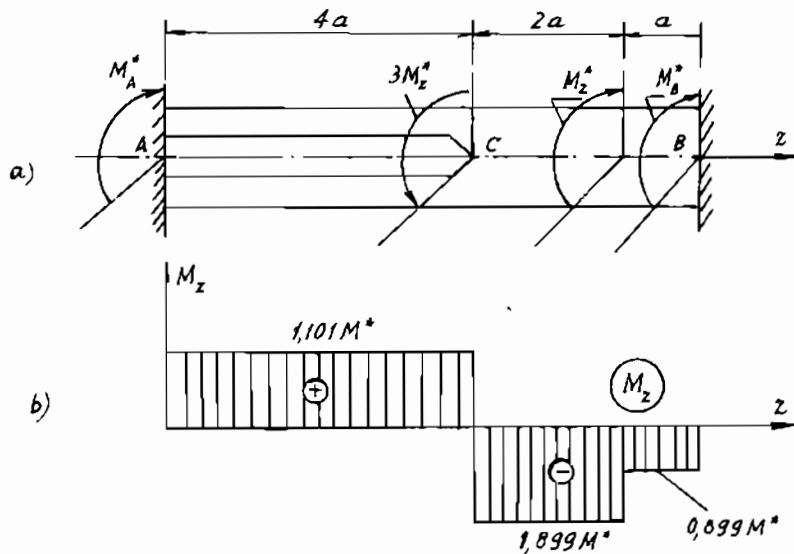
Ứng suất tiếp lớn nhất trong trục có giá trị:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{144,83}{0,2 \cdot 5^3} = 5,783 \text{ kN/cm}^2$$

#### Ví dụ 4

Một trục chịu xoắn như hình 7.10a có khoan một lỗ dọc trục từ đầu trái A. Hãy xác định mômen xoắn ngoài  $M_z^*$  cho phép tác dụng lên trục để trục làm việc an toàn về độ bền? Biết:

$$[\tau] = 6 \text{ kN/cm}^2 ; D = 20 \text{ cm} ; d = 0,5D.$$



Hình 7.10.

## GIẢI

Đây là bài toán siêu tĩnh bậc 1. Giải phóng ngàm B và thay vào đó  $M_B^*$ . Theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện biến dạng của trục được viết:

$$\frac{M_B \cdot 3a}{GJ_{p1}} + \frac{M_B \cdot 4a}{GJ_{p2}} + \frac{M^* \cdot 2a}{GJ_{p1}} + \frac{M^* \cdot 4a}{GJ_{p2}} - \frac{3M^* \cdot 4a}{GJ_{p2}} = 0$$
$$\Rightarrow M_B = 2 \cdot \frac{4J_{p1} - J_{p2}}{4J_{p1} + 3J_{p2}} \cdot M^* = 2 \cdot \frac{4D^4 - D^4(1-\alpha^4)}{4D^4 + 3D^4(1-\alpha^4)} \cdot M^* \approx 0,899 M^*$$

Ở đây  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,5$ . Biểu đồ mômen xoắn  $M_z$  của trục được vẽ trên hình 7.10b.

Giá trị của  $M^*$  được xác định theo điều kiện bền của hai đoạn trục 1 và 2.

**Đối với đoạn trục 1 đường kính  $D = 20$  cm:**

$$\max |\tau_1| = \frac{\max |M_{z1}|}{W_{p1}} = \frac{1,899 M^*}{\pi D^3 / 16} \leq [\tau] \Rightarrow M_D^* = 4960,5 \text{ kNcm.}$$

**Đối với đoạn trục 2 đường kính  $(D - d) = 10$  cm:**

$$\max |\tau_2| = \frac{\max |M_{z2}|}{W_{p2}} = \frac{1,101 M^*}{\pi D^3 (1-\alpha^4) / 16} \leq [\tau] \Rightarrow M_d^* = 8021 \text{ kNcm.}$$

So sánh hai kết quả (1) và (2) ta chọn  $M_D^* = 4960,5 \text{ kNcm}$ .

### Vi dụ 5

Một trục chịu xoắn có sơ đồ như hình 7.11a, trên đó:  $m = 80 \text{ Nm/m}$ ,  $M^* = 400 \text{ Nm}$ ,  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $[\tau] = 40 \text{ MN/m}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$ . Hãy tính đường kính  $d$  và vẽ biểu đồ góc xoắn  $\varphi(z)$ ?

## GIẢI

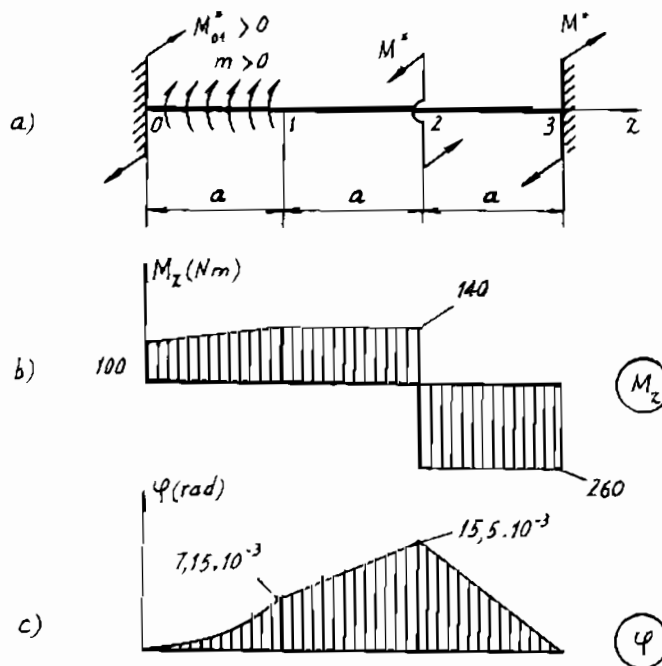
Phương trình góc xoắn  $\varphi$  theo phương pháp vạn năng:

$$\varphi(z) = M_{01}^* \frac{z}{GJ_p} + \frac{m \cdot z^2}{2GJ_p} \Big|_0^z - \frac{m(z-a)^2}{2GJ_p} \Big|_a^z - \frac{M^*(z-2a)}{GJ_p} \Big|_{2a}^z \quad (a)$$

Tại  $z = 3a$  thì  $\varphi(z = 3a) = 0$ .

Do đó:  $M_{01}^* = \frac{1}{3} (M^* - 2,5ma) = 100 \text{ Nm}$ .

$$M(z) = M_{01}^* + mz \Big|_0^z - m(z-a) \Big|_a^z - M \Big|_{2a}^z$$



Hình 7.11.

Tại  $z = 0$  thì  $M_1(0) = M_{01}^* = 100 \text{ Nm}$ .

Tại  $z = a$  thì  $M(a) = 100 + 80 \cdot 0,5 = 140 \text{ Nm}$ .

Tại  $z = 3a$  thì  $M(3a) = 100 + 80 \cdot 1,5 - 80 \cdot 1 - 400 = 260 \text{ Nm}$ .



Biểu đồ mômen xoắn được mô tả trên hình 7.11b. Mômen xoắn lớn nhất về trị số ở đoạn 2 – 3, cho nên điều kiện để xác định đường kính  $d$  như sau:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{\max M_z}{[\tau]} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{260}{40 \cdot 10^6}} = 3,2 \text{ cm.}$$

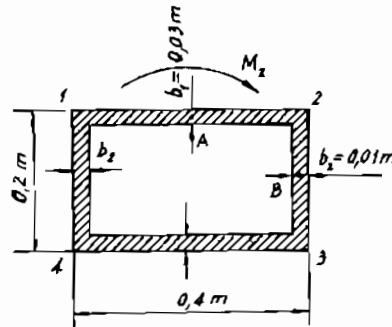
Thay  $M_{01}$  và  $d$  vào (a) ta có:

$$\varphi(z = a) = 0,00715 \text{ rad} ; \varphi(z = 2a) = 0,0155 \text{ rad.}$$

Xuất phát từ hàm (a) và các giá trị này chúng ta vẽ được biểu đồ  $\varphi(z)$  như hình 7.11c.

### Vi dụ 6

Tính ứng suất  $\tau_{\max}$  tại các điểm A, B và góc xoắn của thanh dài 2 m có thành mỏng kín bị xoắn, mặt cắt ngang của thanh như hình 7.12. Mômen xoắn  $M_z = 2.10^4 \text{ Nm}$ . Vật liệu gang có  $G = 5,2.10^{10} \text{ N/m}^2$ .



Hình 7.12.

Diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành:

$$F_0 = (0,4 - 0,01) \cdot (0,2 - 0,03) = 0,0663 \text{ m}^2$$

Ứng suất tại A là:

$$\tau_A = \frac{2.10^4}{2.0,0663.0,03} = 5.10^6 \text{ N/m}^2$$

Ứng suất tại B là:

$$\tau_B = \frac{2.10^4}{2.0,0663.0,01} = 15.10^6 \text{ N/m}^2$$

Góc xoắn của thanh:

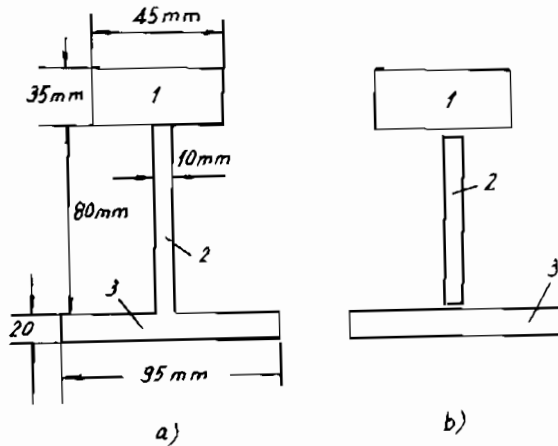
$$\begin{aligned}\varphi &= \theta \cdot l = \frac{M_z \cdot l}{4GF^2} \int_S \frac{dS}{b} \\ &= \frac{M_z \cdot l}{4GF^2} \cdot \left( \int_{1-2} \frac{dS}{b_1} + \int_{2-3} \frac{dS}{b_2} + \int_{3-4} \frac{dS}{b_1} + \int_{4-1} \frac{dS}{b_2} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 2}{4 \cdot 5,2 \cdot 10^{10} \cdot (0,0663)^2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{0,39}{0,03} + 2 \cdot \frac{0,17}{0,01} \right) \\ &\approx 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}\end{aligned}$$

### Vi dụ 7

Một thanh thép chiều dài  $l = 5 \text{ m}$  có mặt cắt ngang như hình 7.13. Thanh chịu xoắn bởi hai mômen xoắn đặt ở hai đầu thanh là  $M_z^* = 5000 \text{ daNcm}$ . Hãy tính ứng suất tiếp lớn nhất và kiểm tra độ cứng cho thanh nếu  $[\varphi] = 0,06 \text{ rad}$ .

### GIẢI

Để tính ứng suất và biến dạng của thanh chịu xoắn loại này, ta cần chia mặt cắt ra thành ba phần như hình 7.13b.



Hình 7.13.

Ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{pi}^*}$$

với

$$W_{pi}^* = \frac{J_p}{\left( \frac{J_{pi}}{W_{pi}} \right)}$$

Ta cần tính các đặc trưng hình học:

$$J_p = J_{p1} + J_{p2} + J_{p3}$$

*Đôi với phần 1:*  $h_1 = 45 \text{ mm}$ ;  $b_1 = 35 \text{ mm}$ ;  $\frac{h_1}{b_1} = 1,285 \Rightarrow$

$$J_{p1} = \beta h_1 b_1^3 = 0,172.4,5.3,5^3 \text{ cm}^4 = 33,2 \text{ cm}^4$$

$$W_{p1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,221.4,5.3,5^2 \text{ cm}^3 = 12,2 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p1}}{W_{p1}} = \frac{33,2}{12,2} = 2,72 \text{ cm.}$$

*Đôi với phần 2:*  $h_2 = 80 \text{ mm}$ ;  $b_2 = 10 \text{ mm}$ ;  $\frac{h_2}{b_2} = 8$ . Do đó:

$$J_{p2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,307.8.1^3 \text{ cm}^4 = 2,5 \text{ cm}^4$$

$$W_{p2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,307.8.1^2 \text{ cm}^3 = 2,5 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p2}}{W_{p2}} = 1 \text{ cm.}$$

*Phần 3:*  $h_3 = 95 \text{ mm}$ ;  $b_3 = 20 \text{ mm}$ ;  $\frac{h_3}{b_3} = \frac{95}{20} = 4,75$

$$J_{p3} = \beta_3 h_3 b_3^3 = 0,288.9,5.2^3 \text{ cm}^4 = 21,9 \text{ cm}^4$$

$$W_{p3} = \alpha_3 h_3 b_3^2 = 0,288.9,5.2^2 \text{ cm}^3 = 10,9 \text{ cm}^3$$

$$\frac{J_{p3}}{W_{p3}} = \frac{2,19}{10,9} = 2 \text{ cm.}$$

Cuối cùng ta có:

$$J_p = 33,2 + 2,5 + 21,9 = 57,6 \text{ cm}^4.$$

Vì  $W_{pl}^*$  là lớn nhất, nên  $\tau_{\max}$  ở giữa cạnh trên:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{pl}^*} = \frac{5000}{21,2} = 236 \text{ daN/cm}^2,$$

trong đó:  $W_{pl}^* = \frac{J_p}{J_{pl} / W_{pl}} = \frac{57,6}{2,72} = 21,2 \text{ cm}^3.$

Góc xoắn lớn nhất và điều kiện cứng:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_z \cdot l}{GJ_p} = \frac{5000 \cdot 500}{8 \cdot 10^5 \cdot 57,6} \text{ rad} = 0,0542 \text{ rad} < 0,06 \text{ rad}.$$

Điều kiện cứng của thanh hoàn toàn thỏa mãn.

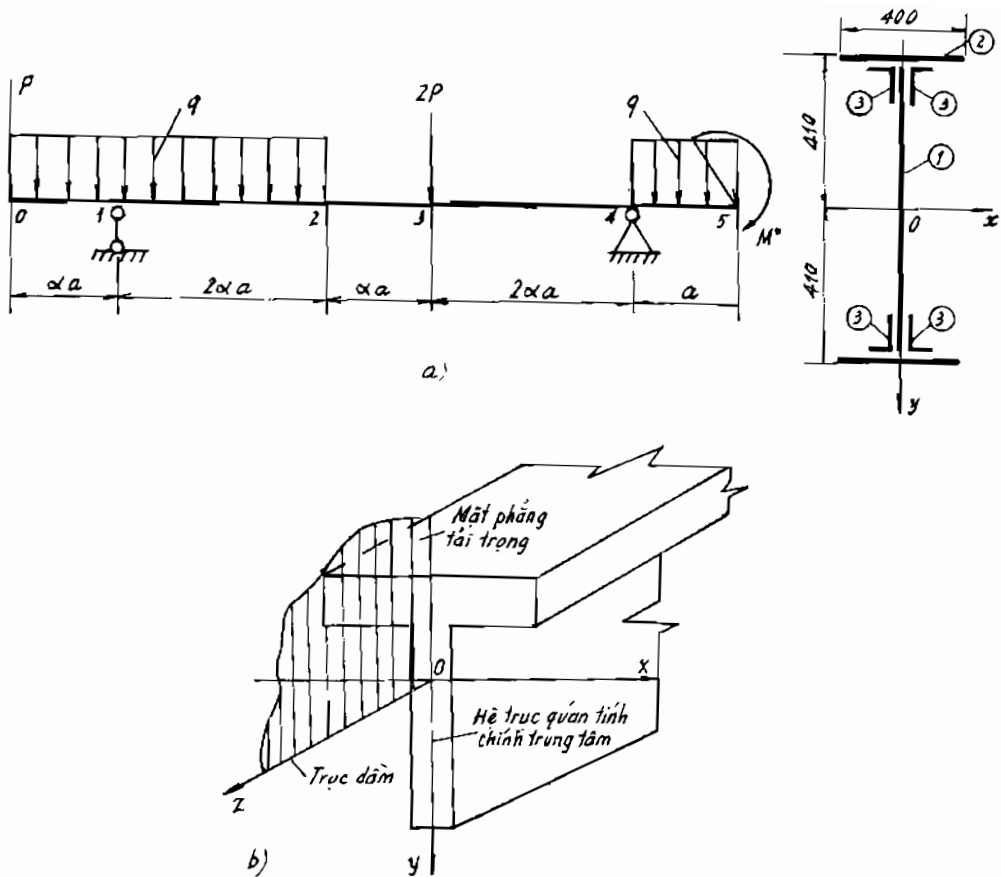
# CHƯƠNG 8

## UỐN PHẪNG VÀ CẮT

---

### §1. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

Ta thường gặp trong kỹ thuật những chi tiết máy và các cấu kiện công trình khi chịu tác dụng ngoài thì trục của chúng bị cong. Hiện tượng biến dạng như thế được gọi là hiện tượng uốn. Ví dụ như các dầm cầu trục, trục truyền, dầm cầu, dầm đỡ cầu thang, dầm đỡ sàn v.v... Những thanh sinh ra để chịu uốn được gọi là dầm. Ngoại lực gây uốn có thể là những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh, nhưng thường là các tập trung hoặc phân bố vuông góc với trục thanh. Mặt phẳng chứa ngoại lực và trục thanh gọi là mặt phẳng tải trọng (hình 8.1). Giao tuyến giữa mặt cắt ngang và mặt phẳng tải trọng gọi là đường tải trọng. Mặt phẳng tạo bởi trục thanh và một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang gọi là mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Khi chịu biến dạng uốn mà trục của dầm là một đường cong phẳng nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì hiện tượng uốn đó được gọi là uốn phẳng. Ngược lại, nếu mặt phẳng tải trọng không chứa một trục quán tính chính trung tâm nào của mặt cắt ngang thì ta gọi đó là thanh bị uốn xiên.



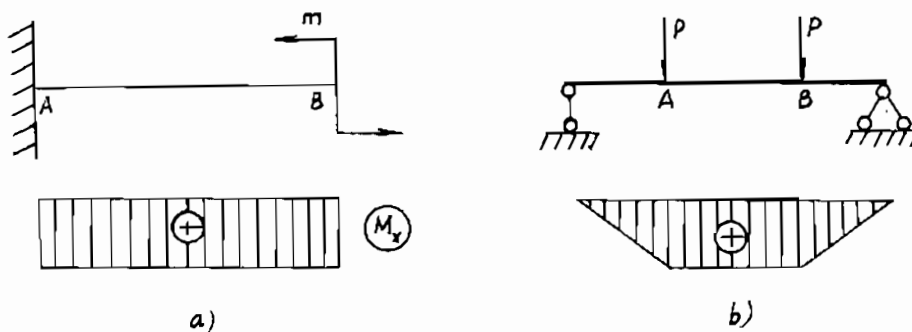
Hình 8.1.

Trong thực tế những thanh chịu uốn thường là những thanh mà mặt cắt ngang của nó có ít nhất một trục đối xứng. Trong chương này ta chỉ nghiên cứu những ngoại lực tác dụng trong mặt phẳng chứa trục dầm và trục đối xứng của mặt cắt ngang.

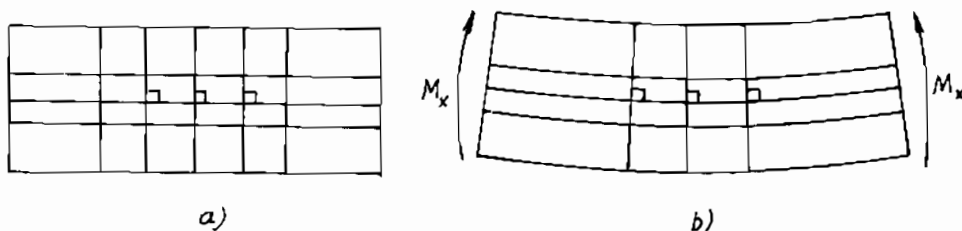
Khi thanh bị uốn phẳng bởi các lực vuông góc với trục thanh thì trên mặt cắt ngang của thanh chỉ xuất hiện nhiều nhất hai thành phần nội lực sau đây: lực cắt  $Q_y$  (hoặc  $Q_x$ ), mômen uốn  $M_x$  (hoặc  $M_y$ ). Mômen uốn là nội lực chủ yếu, còn ảnh hưởng của lực cắt đến sự làm việc của thanh rất bé, nên trong tính toán các dầm dài và khung về độ bền và độ cứng ảnh hưởng này được bỏ qua.

Nếu thanh bị uốn mà trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen uốn  $M_x$  (hoặc  $M_y$ ), thì ta gọi đó là trường hợp uốn thuần túy phẳng.

**Ví dụ.** Các đoạn dầm AB dưới đây chịu uốn thuần túy phẳng (hình 8.2a, b).



Hình 8.2.



Hình 8.3.

## §2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG KHI UỐN THUẦN TÚY

### 2.1. QUAN SÁT BIẾN DẠNG CỦA THANH CHỊU UỐN TUẦN TÚY

Trước khi thanh bị uốn ta kẻ trên các mặt biên những đoạn thẳng song song và vuông góc với trục của nó (hình 8.3a).

Trong suốt quá trình biến dạng ta thấy:

– Những đoạn thẳng kẻ song song với trục thanh biến thành những đoạn đường cong đều song song với nhau, chiều dài của chúng thay đổi: các phần trên co lại, các phần dưới dãn ra.

– Các đoạn thẳng kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng và vuông góc với các đường cong nói trên (hình 8.3b).

– Hình dáng của mặt cắt ngang ở 2 đầu thanh coi như không thay đổi.

Dựa vào những kết quả quan sát và đo đạc thực nghiệm người ta đưa ra các giả thiết sau đây về biến dạng của thanh chịu uốn thuần túy phẳng.

## 2.2. CÁC GIẢ THIẾT

1. Tập hợp các chất điểm trước khi biến dạng nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, sau khi biến dạng vẫn nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, hay vắn tắt, các mặt cắt ngang luôn luôn phẳng.

2. Tập hợp các chất điểm trước khi biến dạng nằm trên đường cách đều trục thanh, sau khi biến dạng vẫn nằm trên đường cách đều trục thanh hay vắn tắt hơn, các thớ dọc không nén ép, xô đẩy nhau.

## 2.3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHI UỐN THUẦN TÚY PHẪNG

Tách ra khỏi thanh một phân tố hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ (hình 8.4).

Dựa vào hai giả thuyết trên ta thấy:

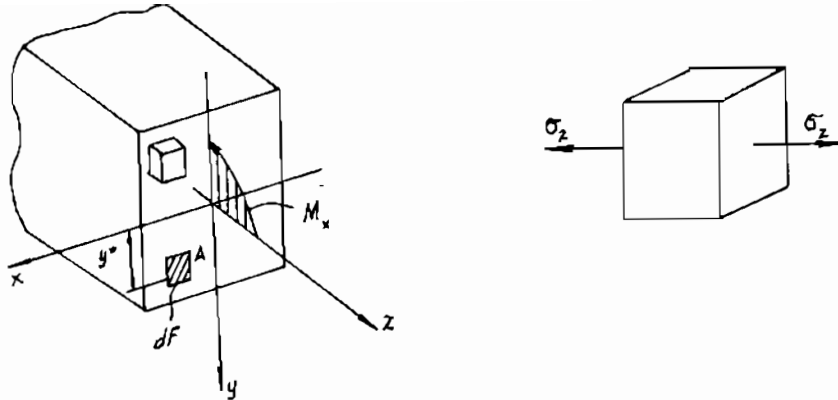
– Phân tố không có biến dạng góc hay nói cách khác đó là phân tố chính. Trên mỗi phân tố chính chỉ có ứng suất chính  $\sigma_z$  song song với trục thanh, còn hai ứng suất chính kia bằng không.

Vậy trạng thái ứng suất trong thanh chịu uốn thuần túy phẳng là trạng thái ứng suất đơn. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của thanh là ứng suất chính:

$$\sigma_z = \sigma_1 \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (1)$$

hoặc: 
$$\sigma_z = \sigma_3 < 0 \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

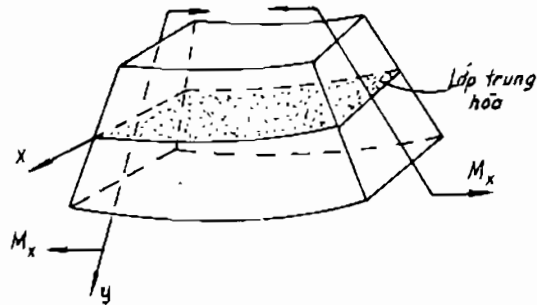




Hình 8.4.

#### 2.4. BIẾN DẠNG CỦA CÁC THỚ DỌC

Khi thanh bị uốn thuần túy phẳng thì các thớ dọc bị co lại hoặc dãn ra. Lớp thớ trên cùng bị co nhiều nhất, lớp thớ dưới cùng bị dãn ra khi  $M_x$  căng dưới (hình 8.3b). Nếu mômen uốn đổi chiều thì kết quả sẽ ngược lại. Từ lớp thớ bị co sang lớp thớ bị dãn tồn tại lớp thớ không co không dãn. Lớp thớ này gọi là lớp trung hoà. Giao tuyến của lớp trung hoà với mặt cắt ngang là một đoạn thẳng trên mặt cắt, gọi là trục trung hoà (hình 8.5). Dễ dàng thấy khi thanh bị uốn thì mặt cắt ngang của nó chỉ quay tương đối với nhau quanh trục trung hoà.



Hình 8.5.

Trên cơ sở phân tích này ta có thể xác định được biến dạng tương đối của các thớ dọc. Xét một đoạn thanh giữa 2 mặt cắt 1-1, 2-2. Sau biến dạng hai mặt cắt này tạo với nhau một góc  $d\varphi$  (hình 8.6a, b).

Gọi  $\rho$  là bán kính cong của lớp trung hoà, vì các thớ thuộc lớp trung hoà không bị co, dãn nên độ dài của nó vẫn bằng  $dz$ .

$$\text{Vậy} \quad dz = \rho d\varphi \quad (a)$$

Một thớ AB nào đó song song với lớp trung hoà  $O_1O_2$  và cách nó một khoảng  $y^*$ , khi biến dạng có độ dài bằng:

$$dz + \Delta dz = (\rho + y^*) d\varphi \quad (b)$$

Từ (a) và (b) suy ra:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{(\rho + y^*) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y^*}{\rho} \quad (2)$$

Đại lượng  $\frac{1}{\rho}$  là độ cong của lớp trung hoà.

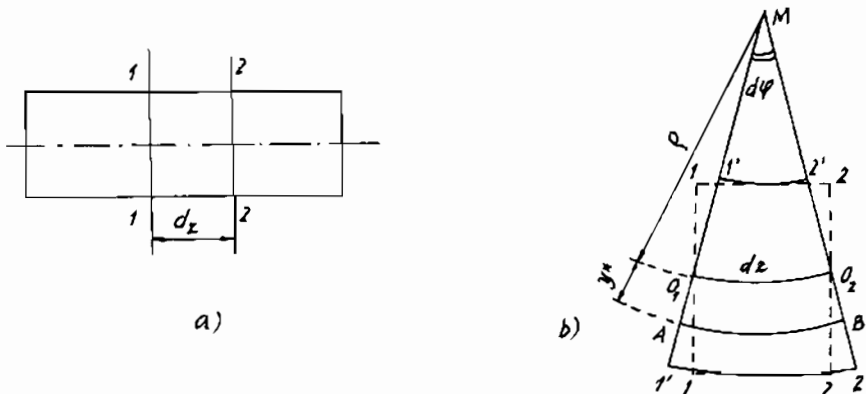
## 2.5. VỊ TRÍ TRỤC TRUNG HOÀ VÀ ĐỘ CONG CỦA TRỤC DẪM

Dựa vào kết luận (1) về trạng thái ứng suất trong thanh chịu uốn thuần túy và định luật Húc ta có:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (3)$$

thay (2) vào (3) ta được:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} y^* \quad (4)$$



Hình 8.6.

Từ (4) ta thấy ứng suất pháp  $\sigma_z$  tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm cần tính ứng suất đến lớp trung hoà (trục trung hoà).

Nhưng ta chưa xác định được vị trí của trục trung hoà, nghĩa là  $y^*$ ?

Ta sẽ chứng minh trục trung hoà trùng với trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Lấy quanh điểm A một phân tố diện tích  $dF$ . Ta có vectơ chính  $N_z$  của hệ ứng suất trên mặt cắt ngang (hình 8.4) theo định nghĩa phải bằng không:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0$$

Thay giá trị của  $\sigma_z$  từ (4) vào tích phân này ta được:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^* dF = 0 \quad \text{mà} \quad S_x = \int_F y^* dF,$$

Còn  $E \neq 0$ ;  $\rho \neq 0$ .

Từ đó, suy ra mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà bằng không. Vậy theo định nghĩa về trục trung tâm thì trục trung hoà phải đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Ngoài ra như ta đã phân tích ở trên, trục trung hoà là một đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng tải trọng, mà mặt phẳng tải trọng chính là mặt phẳng đối xứng. Do đó trục trung hoà vuông góc với trục đối xứng  $Oy$  của mặt cắt ngang tức vuông góc với trục quán tính chính trung tâm  $Oy$  của nó.

Vậy ta kết luận: Trục trung hoà là một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang, mà ta đã ký hiệu là  $Ox$ .

Do đó:  $y^* = y$ .

Và công thức (4) được viết dưới dạng:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} y \quad (5)$$

Mặt khác ta có quan hệ giữa  $M_x$  và  $\sigma_z$  khi thu gọn  $\sigma_z$  về trọng tâm mặt cắt:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x.$$

Suy ra độ cong: 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (8.1)$$

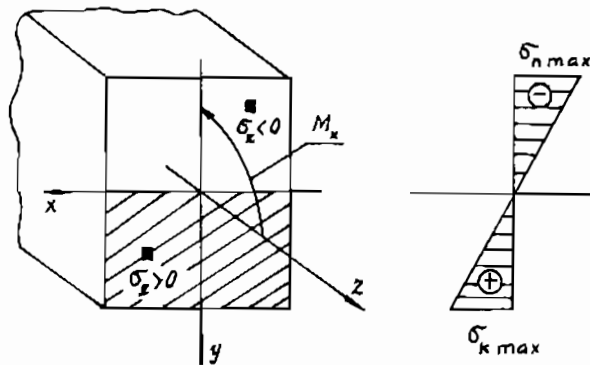
Độ cong của trục dầm tỉ lệ nghịch với tích số  $EJ_x$ , do đó  $EJ_x$  gọi là độ cứng chống uốn của dầm. Cuối cùng từ (5) và (8.1) ta tìm được công thức sau đây dùng để tính ứng suất trên mặt cắt ngang:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (8.2)$$

Như vậy ứng suất pháp tại điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn thuần túy tỉ lệ thuận với mômen uốn và khoảng cách từ điểm đó đến trục trung hoà và tỉ lệ nghịch với mômen diện tích cấp 2 của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà  $x$ .

## 2.6. ỨNG SUẤT CỰC TRỊ TRÊN MẶT CẮT NGANG

Ta nhận thấy tại các điểm biên trên và biên dưới, tức là tại các điểm xa nhất đối với trục trung hoà của mặt cắt ngang, ứng suất pháp có trị số tuyệt đối lớn nhất.



Hình 8.7.

Nếu mặt cắt ngang đối xứng qua trục trung hoà và ký hiệu chiều cao của mặt cắt ngang là  $h$  thì tọa độ các điểm biên là  $y = h/2$ . Ứng

suất kéo lớn nhất và ứng suất nén lớn nhất trên mặt cắt ngang đó được xác định bởi các công thức (hình 8.7).

$$\sigma_{z \max}^k = \frac{|M_x|}{W_x} \quad ; \quad \sigma_{z \max}^n = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (8.3)$$

Trong đó ta ký hiệu:  $W_x = J_x / y_{\max} = J_x / h/2 = \frac{2J_x}{h}$

$W_x$  gọi là mômen chống uốn của mặt cắt ngang.

– Nếu mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hoà thì trị số tuyệt đối của ứng suất kéo và ứng suất nén lớn nhất sẽ khác nhau.

Nếu ký hiệu khoảng cách từ điểm chịu kéo (nén) xa nhất tới trục trung hoà là  $y_{\max}^k$  ( $y_{\max}^n$ ). Khi đó ta có công thức tính ứng suất kéo (nén) lớn nhất như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z \max}^k &= \frac{|M_x|}{J_x / y_{k \max}} = \frac{|M_x|}{W_{kx}} \\ \sigma_{z \min}^n &= \frac{|M_x|}{J_x / y_{n \max}} = \frac{|M_x|}{W_{nx}} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

## 2.7. MÔMEN CHỐNG UỐN CỦA MỘT SỐ MẶT CẮT NGANG ĐƠN GIẢN

### a) Mặt cắt ngang hình chữ nhật (hình 8.8a)

Ta có:

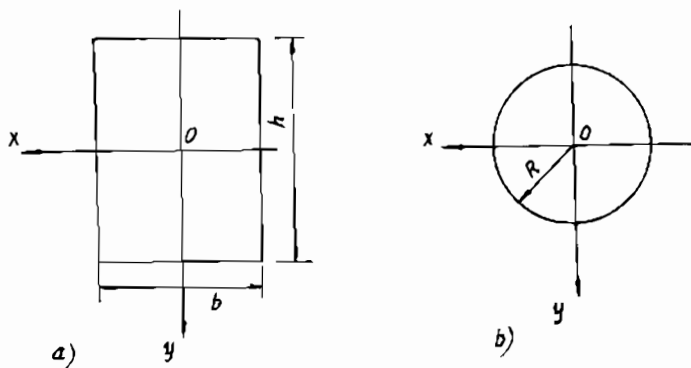
$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad y_{k \max} = \frac{h}{2}$$

Do đó:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}$$

Ta thấy khi bố trí mặt cắt sao cho cạnh dài của nó song song với phương tải trọng thì khả năng chống uốn của dầm sẽ lớn hơn khi đặt cạnh ngắn song song với phương tải trọng (vì lúc này mômen chống

uốn bằng  $\frac{hb^2}{6} < \frac{bh^2}{6}$ ). Điều này một lần nữa cho ta thấy rõ thêm ý nghĩa của các đặc trưng hình học: mômen diện tích các cấp.



Hình 8.8.

**b) Mặt cắt ngang hình tròn (hình 8.8b)**

Ta có:

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4} \approx 0,05 D^4.$$

$$y_{k \max} = y_{n \max} = R$$

Do đó:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3$$

Với mặt cắt ngang hình vành khăn:

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4) ; y_{k \max} = y_{n \max} = \frac{D}{2}$$

Do đó:

$$W_x = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \eta^4) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1 D^3 (1 - \eta^4)$$

trong đó:  $\eta = \frac{d}{D}$ .

Với một số loại thép định hình (mặt cắt ngang hình chữ L, chữ I, chữ T, v.v...) các đặc trưng hình học được cho sẵn trong các bảng số liệu theo kích thước của mặt cắt ngang.

### §3. HÌNH DẠNG HỢP LÝ CỦA MẶT CẮT NGANG

Hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang là hình dạng sao cho dầm có khả năng chống uốn lớn nhất đồng thời tốn ít vật liệu nhất.

*Đặc điểm của dầm bằng vật liệu giòn* là khả năng chịu kéo và khả năng chịu nén khác nhau, do đó mặt cắt của dầm sẽ hợp lý nhất khi:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{k \max} = [\sigma]_k$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{n \max} = [\sigma]_n$$

chia hai vế của các đẳng thức trên cho nhau ta được:

$$\frac{y_{k \max}}{y_{n \max}} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \quad (a)$$

Như vậy, mặt cắt ngang phải có hình dạng sao cho đường trung hoà chia chiều cao của mặt cắt theo tỉ số (a). Ví dụ, các mặt cắt hình chữ T, hoặc chữ I không đối xứng (hình 8.9a, b).

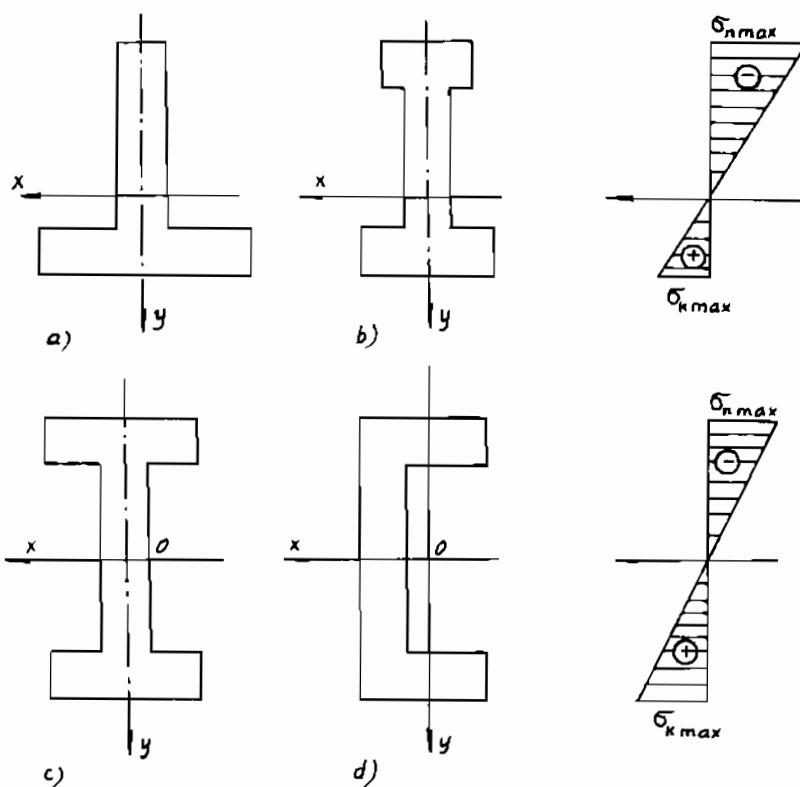
*Đối với dầm bằng vật liệu dẻo* thì khả năng chịu kéo và chịu nén như nhau, do đó tỉ số (a) trên đây bằng 1, nghĩa là  $y_{k \max} = y_{n \max}$  cho nên trục trung hoà phải là trục đối xứng của mặt cắt ngang.

Qua biểu đồ ứng suất (hình 8.9) ta thấy ở những điểm càng gần trục trung hoà, trị số ứng suất pháp càng nhỏ, vì vậy để tiết kiệm vật liệu, mặt cắt ngang nên có hình dạng sao cho phần lớn vật liệu được phân bố xa trục trung hoà. Ví dụ: các mặt cắt hình chữ I chữ  $\square$  (hình 8.8c, d).

a) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có  $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$

– Nếu dầm có mặt cắt đối xứng đối với trục trung hoà thì điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (8.4a)$$



Hình 8.9.

– Khi dầm có mặt cắt không đối xứng qua trục trung hoà, điều kiện bền là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_{x \min}} \leq [\sigma] \quad (8.4b)$$

trong đó:  $W_{x \min}$  là mômen chống uốn bé nhất của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà.



b) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có  $[\sigma]_k < [\sigma]_n$  điều kiện bền của dầm sẽ bao gồm cả hai điều kiện sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k \max} &\leq [\sigma]_k \\ \sigma_{n \max} &\leq [\sigma]_n \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Nếu dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hoà thì  $\sigma_{k \max} = |\sigma_{n \max}| = \sigma_{\max}$ , nên chỉ cần thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad (8.6)$$

## §4. ĐƯỜNG ĐÀN HỒI, ĐỘ VÔNG VÀ GÓC XOAY

### 1. Khái niệm và định nghĩa

Khi bị uốn phẳng, trục của dầm không bị co dãn (vì nó nằm trên lớp trung hoà) nhưng bị cong đi trong mặt phẳng tải trọng (hình 8.10). Trục của dầm sau khi bị uốn cong được gọi là đường đàn hồi của dầm. Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm và K' là vị trí của K sau khi dầm bị biến dạng thì khoảng cách KK' được gọi là *chuyển vị thẳng hay độ võng tại K*. Có thể phân KK' thành hai thành phần u và V song song với các trục z và y. Vì biến dạng rất bé nên có thể coi  $u \approx 0$ ,  $y = KK' \approx V(z)$ . Nghĩa là khi biến dạng, điểm K chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm. Chuyển vị V(z) theo phương y được gọi là *độ võng tại K của dầm*. Độ võng V phụ thuộc hoành độ z của điểm K nghĩa là  $V = V(z)$ , như vậy phương trình của đường đàn hồi V(z) là:

$$V = V(z) \quad (a)$$

Tiếp tuyến tại K' của đường đàn hồi làm với phương ban đầu của trục dầm (trục z) một góc  $\varphi_x$  và gọi là *chuyển vị góc hay góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục Ox*. Do tính bé của chuyển vị nên ta có thể viết:

$$\varphi_x \approx \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{dV}{dz} = V'(z) \quad (b)$$

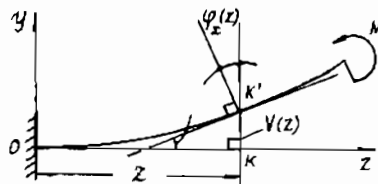
### 2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi

Khi dầm bị biến dạng, độ cong của nó có thể tính theo công thức gần đúng (8.1):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Công thức xác định bán kính cong đối với đường cong phẳng  $V(z)$  trong hình học vi phân có dạng:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

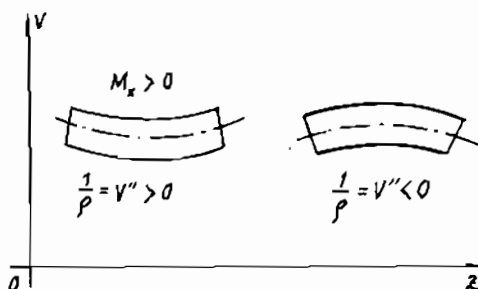


Hình 8.10.

So sánh hai công thức trên, ta thu được phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi của trục dầm chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng VOz như hình 8.11.

$$\frac{d^2V/dz^2}{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M_x^{(z)}}{EJ_x(z)} \quad (c)$$

Trong thực tế kỹ thuật không cho phép các công trình hay chi tiết máy bị biến dạng nhiều, vì thế góc xoay  $\varphi_x = V'(z)$  thường rất bé và ta có thể bỏ qua  $(V'(z))^2$  so với 1. Do đó phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng gần đúng sau:



Hình 8.11.

$$V''(z) = + \frac{M_x(z)}{EJ_x(z)} \quad \text{hay} \quad EV''(z) = \frac{M_x(z)}{J_x(z)}, \quad (8.6)$$

Phương trình này được gọi là phương trình Becnuli – Ôle.

### 3. Điều kiện cứng khi uốn

Nếu bằng một phương pháp nào đó ta giải được phương trình vi phân (8.6) với nghiệm thỏa mãn điều kiện biên của bài toán khảo sát thì ta luôn luôn xác định được các độ võng và góc xoay lớn nhất  $V_{\max}$ ,  $\varphi_{\max}$ . Điều kiện cứng của một công trình là điều kiện được đưa ra nhằm hạn chế sự phát triển của các chuyển vị đàn hồi do tác dụng ngoài gây ra, sao cho thỏa mãn yêu cầu kỹ thuật của một loại công nghệ cụ thể nào đó.

Điều kiện cứng của dầm chịu uốn được diễn đạt như sau:

$$\begin{aligned} \max |V| &\leq [V] \\ \max |\varphi| &\leq [\varphi] \end{aligned} \quad (8.7)$$

Trong đó:  $[V]$  và  $[\varphi]$  là chuyển vị thẳng (độ võng) và góc xoay cho phép đối với kết cấu khảo sát được quy định bởi yêu cầu kỹ thuật của công nghệ.

Để thực hiện các tính toán về độ bền và độ cứng cho dầm thì từ các công thức mô tả các điều kiện bền và cứng (8.5) và (8.7), ta cần phải biết quy luật biến thiên của mômen uốn, lực cắt, độ võng và góc xoay dọc theo trục của dầm. Với mục đích xác định các đại lượng này người ta đã phải sử dụng nhiều phương pháp khác nhau. Tuy nhiên, có những phương pháp giải quyết được nội dung này nhưng lại không giải quyết được nội dung khác. Ví dụ, phương pháp mặt cắt có thể xác định được nội lực trong kết cấu tĩnh định mà không thể xác định được ngay cả nội lực và chuyển vị đối với các kết cấu siêu tĩnh. Ngày nay, chưa có một phương pháp nào cho phép giải quyết đồng thời hai mục tiêu là nội lực và chuyển vị trên cùng một thuật toán, ngay cả đối với các thanh chịu lực và liên kết đơn giản nhất, trừ phương pháp vạm năng. Phương pháp này cho phép giải quyết đồng thời tất cả các nội dung của sức bền vật liệu với các quy luật chịu lực và liên kết bất kỳ theo cùng một mô hình toán mà tác giả đã đề xuất, xây dựng và giới thiệu ở chương 4.

Dưới đây là một vài phương pháp cổ điển và vạm năng.

## §5. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Lấy tích phân lần thứ nhất phương trình (8.6) ta được phương trình của góc xoay:

$$\varphi_x(z) = \frac{dV}{dz} = \int \frac{M_x}{EJ_x(z)} dz + C \quad (a)$$

Lấy tích phân lần thứ hai phương trình (8.6) ta được phương trình của đường đàn hồi:

$$V(z) = \int \left[ \int \frac{M_x}{EJ_x(z)} dz \right] dz + Cz + D \quad (b)$$

trong đó C và D là các hằng số tích phân được xác định bằng các *điều kiện biên* của từng đoạn.

Chú ý rằng  $\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z)$ , cho nên trong kỹ thuật phương trình vi phân của đường đàn hồi thường được viết trực tiếp qua tải trọng  $q(z)$  như sau:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ_x(z) \frac{d^2 V(z)}{dz^2} \right] = q(z) \quad (8.8)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi dạng (8.8) thường được sử dụng để tính dầm trên nền đàn hồi và tính toán dao động của dầm.

Theo phương pháp tích phân không xác định, nếu quy luật tác dụng của tải trọng và của  $J_x(z)$  trên mỗi đoạn dầm khác nhau thì biểu thức của mômen uốn  $M_x(z)$  và  $J_x(z)$  sẽ khác nhau. Do đó, phương trình vi phân của đường đàn hồi trong những đoạn như thế cũng khác nhau. Vì vậy, dễ thấy là nếu dầm có  $n$  đoạn thì ta cần phải xác định  $2n$  hằng số tích phân. Muốn xác định  $2n$  hằng số này ta phải tìm được  $2n$  điều kiện biên và thiết lập  $2n$  phương trình đại số tuyến tính với các ẩn là các hằng số tích phân đó.

Vì thế phương pháp này không có tính khả thi trong các tính toán kỹ thuật. Do những khó khăn trong tính toán như thế mà

phương pháp tích phân không xác định nói trên chỉ có ý nghĩa lý thuyết. Đây cũng chính là lý do làm xuất hiện nhiều phương pháp khác nhau khi tính toán độ cứng của kết cấu và cũng là nội dung khó và phức tạp nhất của sức bền vật liệu.

## §6. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN (DÂM VÀ TẢI TRONG GIẢ TẠO)

Đối với các dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng ngoài đơn giản thì phương pháp đồ toán cho kết quả nhanh bằng chính phương pháp mặt cắt xác định mômen uốn và lực cắt đã biết ở chương 1.

Trong chương 1 và chương này ta đã biết:

*a) Trường hợp mặt cắt không đổi dọc theo trục dầm*

$$\frac{d^2 M_x(z)}{dz^2} = q(z) \quad (a)$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x} \quad (b)$$

Hai phương trình (a) và (b) hoàn toàn tương tự nhau về phương diện toán học. Do đó, bài toán xác định độ võng và góc xoay dẫn về việc xác định mômen uốn và lực cắt do một tải trọng giả tạo nào đó gây ra trên một dầm giả tạo tương ứng, nếu ta đặt:

$$\frac{M_x(z)}{EJ_x} = q_{gt}(z) \quad \text{và} \quad V(z) = M_{gt}(z) \quad (c)$$

(c)

thì phương trình (b) có dạng tương tự (a):

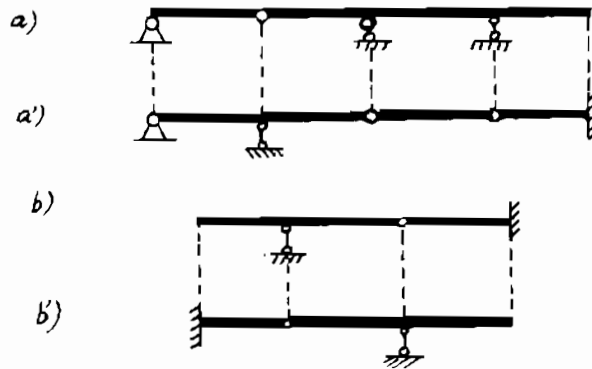
$$\frac{d^2 M_{gt}}{dz^2} = q_{gt}(z) \quad (8.9)$$

Nghiệm của phương trình (8.9) cho ta:

$$M_{gt}(z) = V(z) \quad \text{và} \quad Q_{gt}(z) = \varphi(z) \quad \text{với} \quad \forall z. \quad (8.10)$$

Các quan hệ (c) và (8.10) cho thấy  $M_x(z)$  và  $q_{gt}(z)$  cùng dấu, mômen  $M_{gt}(z)$  và lực cắt  $Q_{gt}(z)$  trong dầm giả tạo do tải trọng giả tạo gây ra cũng chính là độ võng  $V(z)$  và góc xoay  $\varphi(z)$  trong dầm thực đã

cho cả về dấu và giá trị. Do đó, điều kiện (8.10) cho ta quy tắc để cấu tạo liên kết cho dầm giả tạo. Theo quy tắc đó các dầm thực trên hình 8.12a, b có các dầm giả tạo tương ứng trên hình 8.12a', b'.



Hình 8.12.

**b) Trường hợp dầm có mặt cắt thay đổi dọc theo trục dầm**

Trong §4 của chương này ta đã thiết lập được đối với mỗi đoạn dầm phương trình vi phân (8.6):

$$EV'' = \frac{M_x}{J_x(z)}$$

Thay cho phương trình này ta có thể sử dụng phương trình sau đây bằng cách nhân cả hai vế với  $J_0 \neq 0$ :

$$EJ_0V'' = M_x \cdot \frac{J_0}{J_x(z)} = M_{dx}, \quad (8.11a)$$

trong đó:  $J_0$  là mômen quán tính ở mặt cắt nào đó được chọn trước làm chuẩn so sánh.

$M_{dx}$  được gọi là mômen uốn dẫn xuất.

Trong trường hợp này tải trọng giả tạo tác dụng trên dầm giả tạo không phải là  $M_x / EJ_x(z)$ , mà là mômen  $M_{dx}$  theo quan hệ (8.11a). Khi đó, các chuyển vị được xác định như sau:

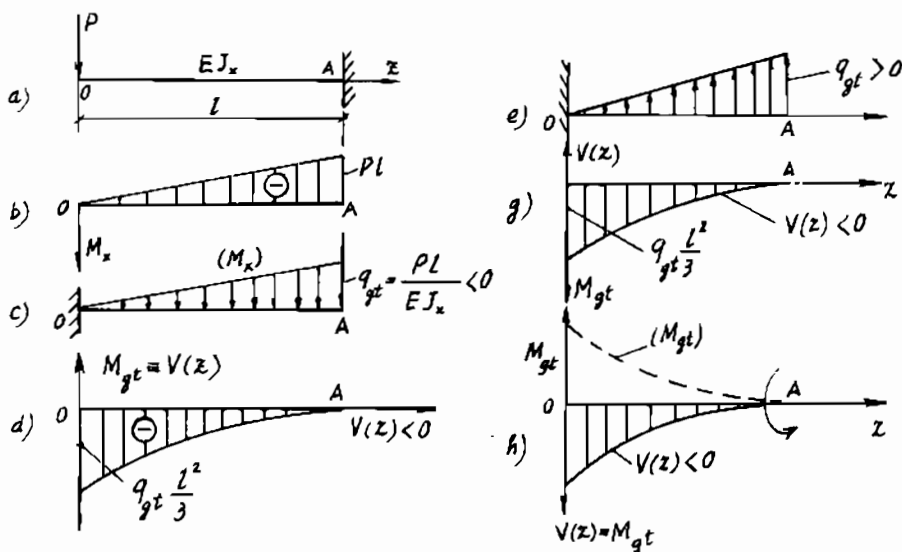
$$\varphi_x = \frac{Q_{gt}}{EJ_0}, \quad V = \frac{M_{xgt}}{EJ_0} \quad (8.11b)$$

Để nhận được đồ thị của các hàm  $V(z)$  và  $\varphi_x(z)$  cho cả trường hợp (a) và (b), trong thực hành ta có thể thực hiện theo các phương án sau đây thông qua một minh họa cụ thể là một dầm chịu lực như hình 8.13a với biểu đồ mômen uốn thực (hình 8.13b).

*Phương án 1:*

Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo theo công thức (8.9) và (8.10) có dạng như hình 8.13c.

Vẽ biểu đồ  $M_{gt}$  trong hệ tọa độ  $M_{gt}Oz$  như hình 8.13d.



Hình 8.13.

*Phương án 2:*

Lấy tải trọng giả tạo ngược dấu với  $M_x$  và vẽ  $M_{gt}$  (vẽ theo thứ cẳng) trong hệ tọa độ  $M_{gt}OZ$  (hình 8.13e, g).

*Phương án 3:*

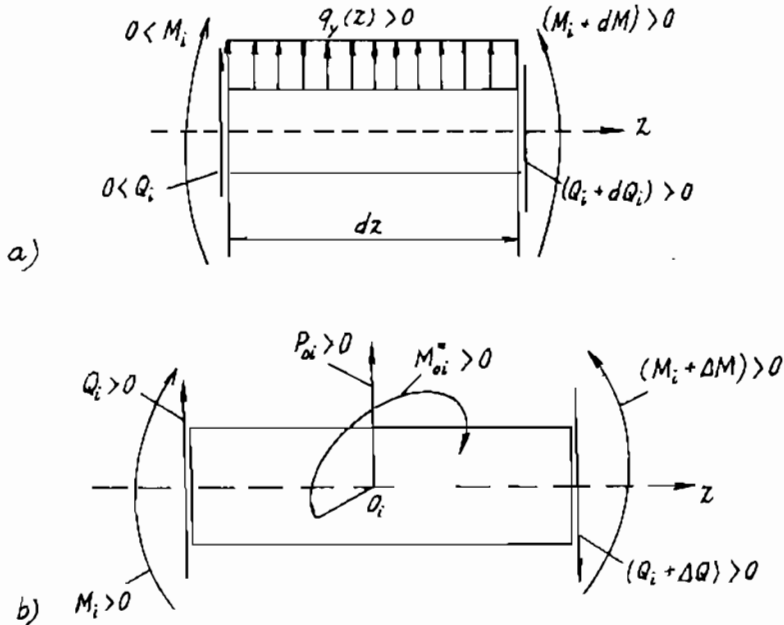
Vẽ biểu đồ  $M_{gt}$  (đường nét đứt) trong hệ tọa độ như hình 8.13h với  $q_{gt}$  như hình 8.13c. Sau đó quay đường cong  $M_{gt}$  (đường nét đứt) đi một góc  $180^\circ$  quanh trục  $z$  để có biểu đồ  $V(Z)$ .

## §7. PHƯƠNG PHÁP VẠN NĂNG

Như đã giới thiệu ở cuối §4 của chương này và ở chương 4. Phương pháp vạn năng là một phương pháp rất mạnh cho phép giải quyết đồng thời hai nội dung cơ bản của sức bền vật liệu là chuyển vị và nội lực do tính duy nhất của thuật toán của nó. Dưới đây là sự vận dụng phương pháp vào bài toán uốn.

### 1. Các liên hệ vi phân trong bài toán uốn ngang phẳng

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của một phân tố có chiều dài  $dz$  của dầm chịu uốn phẳng và đạo hàm liên tiếp theo  $z$  phương trình (8.6), ta có các liên hệ vi phân sau đây (hình 8.14a):

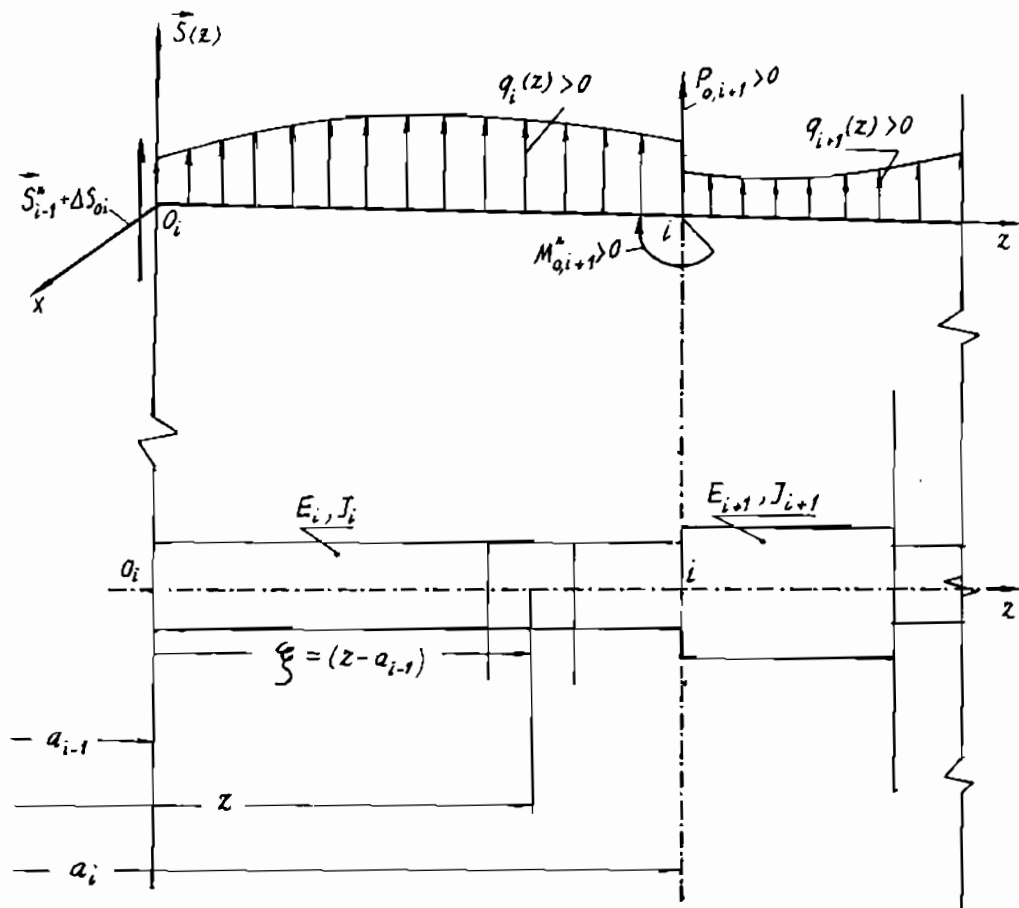


Hình 8.14a.

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i = P_{oi} \\ \frac{dV}{dz} = \varphi(z) \\ \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (8.12a)$$



$$\left. \begin{aligned}
 \Delta M_i &= M_{oi}^* & \frac{d^3 V}{dz^3} &= \frac{Q(z)}{EJ} \\
 \frac{dQ}{dz} &= q(z) & \frac{d^4 V}{dz^4} &= \frac{q(z)}{EJ} \\
 \frac{dM}{dz} &= Q(z) & \dots & \\
 \frac{d^2 M_x}{dz^2} &= q(z) & \frac{d^n V}{dz^n} &= \frac{q^{(n-4)}(z)}{EJ} \\
 \dots & & & \\
 \frac{d^n M_x}{dz^n} &= q^{(n-2)}(z). & &
 \end{aligned} \right\} (8.12a)$$



Hình 8.14b.

## Dạng ma trận

Trong trường hợp này vectơ các đại lượng cần tìm ở mặt cắt  $z$  bất kỳ thuộc đoạn  $i$ ,  $\bar{S}_i(z)$  có bốn thành phần là chuyển vị thẳng  $V_i(z)$ , chuyển vị góc (góc xoay)  $\varphi_i(z)$ , mômen uốn  $M_i(z)$  và lực cắt  $Q_i(z)$ . Vectơ này được xác định theo công thức tổng quát (4.13) ở §3 của chương 4 với sơ đồ thuật toán như trên hình 8.14b. Cụ thể là:

$$\bar{S}_i(z) = [B_i] [B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + \dots + [B_i] \Delta \bar{S}_{0i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (8.12b)$$

$$\bar{S}_i(z) = [B_i^*] [B_{i-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \bar{S}_{0i} + \dots + [B_i^*] \Delta \bar{S}_{0i}$$

Trong đó:

$$\Delta \bar{S}_{0i} = \{\Delta V_{0i}, \Delta \varphi_{0i}, M_{0i}^*, P_{0i}, \Delta q_{0i}, \Delta q_{0i}', \Delta q_{0i}''\}^T \quad (8.13)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \frac{\Phi_5}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i J_i} & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$\bar{S}_i(z) = \begin{bmatrix} V_i(z) \\ \varphi_i(z) \\ M_i(z) \\ Q_i(z) \end{bmatrix}; \quad \phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } \forall z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } 0 \leq z \leq a_{i-1} \\ k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{cases} \quad (8.15)$$

## 2. Dạng biểu diễn tổng

Trong trường hợp  $l_i \neq \text{const}$  và  $E_i J_i = \text{const}$  với mọi "i" ta có dạng biểu diễn tổng của uốn  $\bar{S}_i(z)$  trong uốn ngang phẳng:

$$V_m(z) = \sum_{i=1}^{m=\overline{1, n}} \left\{ \Delta V_{0i} \cdot \Phi_0 + \Delta \varphi_{0i} \cdot \Phi_1 + M_{0i}^* \frac{\Phi_2}{EJ} + P_{0i} \frac{\Phi_3}{EJ} + \right. \\ \left. + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_4}{EJ} + \Delta q_{0i}' + \frac{\Phi_5}{EJ} + \Delta q_{0i}'' + \frac{\Phi_6}{EJ} \dots \right\}; \quad (8.16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m-1, n}} \left( \Delta\varphi_{0i} \cdot \Phi_0 + M_{0i}^* \frac{\Phi_1}{EJ} + P_{0i} \frac{\Phi_2}{EJ} + \Delta q_{0i} \frac{\Phi_3}{EJ} + \right. \\
 &\quad \left. + \Delta q'_{0i} \frac{\Phi_4}{EJ} + \Delta q''_{0i} + \frac{\Phi_5}{EJ} \dots \right); \\
 M_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m-1, n}} \left( M_{0i}^* \cdot \Phi_0 + P_{0i} \cdot \Phi_1 + \Delta q_{0i} \cdot \Phi_2 + \Delta q'_{0i} \cdot \Phi_3 + \Delta q''_{0i} \cdot \Phi_4 \dots \right) \\
 Q_m(z) &= \sum_{i=1}^{\overline{m-1, n}} \left( P_{0i} \cdot \Phi_0 + \Delta q_{0i} \cdot \Phi_1 + \Delta q'_{0i} \cdot \Phi_2 + \Delta q''_{0i} \cdot \Phi_3 \dots \right)
 \end{aligned} \right\} (8.16)$$

$m = \overline{1, n}$  là tên gọi của đoạn thanh trên đó cần tính  $\bar{S}_m(z)$

Trong các công thức từ (8.12) đến (8.16) (hình 8.14):

$E_i$  – môđun đàn hồi kéo (nén) của vật liệu của đoạn thanh  $i$ ;

$J_i$  – mômen quán tính của mặt cắt ngang thuộc đoạn  $i$  đối với trục trung hoà;

$\Delta V_{0i}$  – chuyển vị thẳng bổ sung vào đầu trái đoạn  $i$  (bước nhảy của  $V$  tại  $z = a_{i-1}$ ).

$\Delta\varphi_{0i}$  – góc xoay bổ sung vào đầu trái đoạn  $i$  (bước nhảy của  $\varphi$  tại  $z = a_{i-1}$ ).

Khi thanh có cấu tạo liên tục thì  $\Delta V_{0i} = \Delta\varphi_{0i} = 0$  với  $\forall i > 1$ .

$M_{0i}^*$  là mômen uốn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$  (ở mặt cắt  $z = a_{i-1}$ ).

$P_{0i}$  là ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$  (ở mặt cắt  $z = a_{i-1}$ ).

$\Delta q_{0i}, \Delta q'_{0i}, \Delta q''_{0i} \dots$  là bước nhảy của tải trọng ngang phân bố  $q(z)$  và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở mặt cắt  $(i-1)$  có hoành độ  $z = a_{i-1}$ . Trong (8.12) dấu của tất cả các ngoại lực đều dương để chúng gây ra các nội lực dương như đã quy ước trong chương 1.

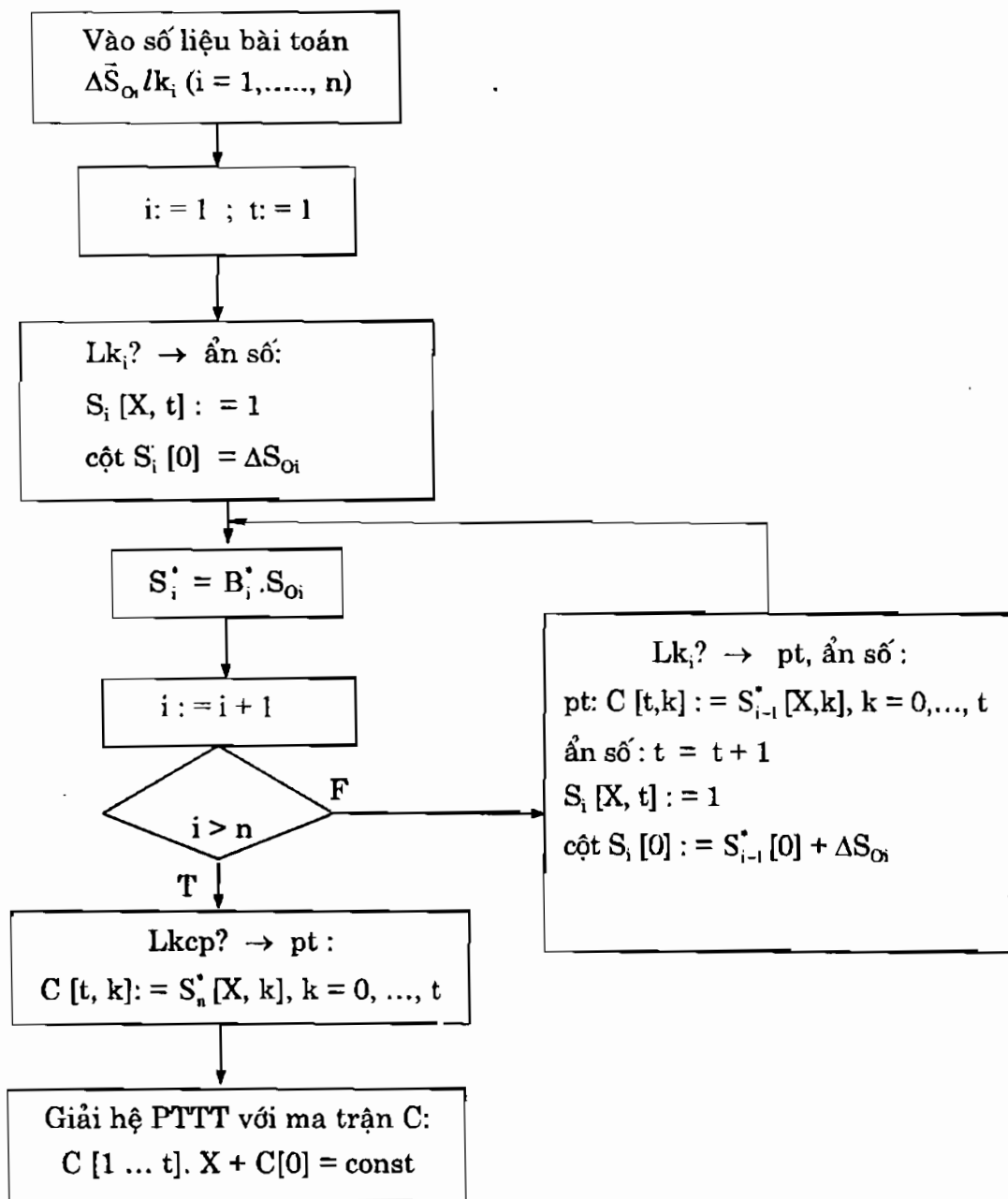
Phương pháp vạn năng và các công thức thuật toán của nó đã được giới thiệu và thiết lập cận kẽ ở trên cho phép tính toán tất cả các loại thanh chịu các loại biến dạng đàn hồi có mặt cắt thay đổi,

chế độ chất tải và liên kết tùy ý cả về số lượng và thể loại. Nhiệm vụ của cơ học vật rắn biến dạng nói chung và “Sức bền vật liệu” nói riêng là xác định trường chuyển vị và nội lực trong hệ do tác dụng ngoài gây ra.

Như đã giới thiệu ở các mục trên của chương này, để xác định chuyển vị và nội lực bằng phương pháp vạn năng đã xây dựng sẵn ở trên thì vấn đề còn lại đối với bài toán cơ bản của “Sức bền vật liệu” là làm rõ các thành phần của vectơ  $\Delta\bar{S}_{O_i}$ . Trong số đó các thành phần liên quan đến bước nhảy của tải trọng phân bố và các đạo hàm các cấp của nó được biết trước theo điều kiện chất tải lên thanh. Các thành phần còn lại của vectơ  $\Delta\bar{S}_{O_i}$  dù là bài toán kéo hay nén, uốn hay xoắn, tĩnh định hay siêu tĩnh với bất kỳ số lượng và loại liên kết thừa như thế nào, đều có thể xác định được bằng các điều kiện biên nhờ sử dụng trực tiếp các chương trình vạn năng đã thiết lập sẵn dưới dạng ma trận hay dưới dạng biểu diễn tổng mà không nhất thiết phải dùng đến các phương trình cân bằng tĩnh học. Đối với các bài toán tĩnh định bất kể số đoạn thanh có chế độ chất tải như thế nào, số các thành phần cần xác định trước trong  $\Delta\bar{S}_{O_i}$  không quá hai đối với dầm chịu uốn, không quá một đối với thanh chịu kéo (nén) và xoắn. Trong nhiều trường hợp không cần phải xác định một thành phần nào của  $\Delta\bar{S}_{O_i}$  nếu chỉ muốn tính nội lực. Thuật toán xác định đồng thời nội lực và chuyển vị vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán với chương trình BK45 được cung cấp bởi tác giả, bằng chính thuật toán của mình sẽ được giới thiệu dưới đây.

## §8. SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN CHƯƠNG TRÌNH BK45 VÀ CÁCH SỬ DỤNG CHƯƠNG TRÌNH

### 1. Sơ đồ khối thuật toán tìm các ẩn số tại đầu trái của đoạn



## 2. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình gồm ba cửa sổ làm việc, dùng phím sang phải, sang trái hoặc kích chuột để chuyển đổi cửa sổ.

Cửa sổ thứ nhất để xác định bài toán cần tính (kéo, nén, uốn hay xoắn), số đoạn của thanh và các thông số tại cuối phải  $z = a_n$  của thanh (lực tập trung, mômen tập trung, liên kết).

Cửa sổ thứ hai dùng để nhập thông số cho từng đoạn như sau:

a) Trên hộp thoại “đoạn thứ” khi chọn sẽ xuất hiện cửa sổ cho phép nhập số thứ tự của đoạn đang quan tâm.

b) Trên hộp thoại “chiều dài” khi chọn cho phép nhập chiều dài của đoạn đó.

c) Trên hộp thoại “liên kết” khi chọn cho phép nhập liên kết đầu trái mỗi đoạn.

d) Trên hộp thoại “E, G” khi chọn cho phép nhập môđun đàn hồi E với bài toán kéo, nén và uốn hoặc G đối với bài toán xoắn của mỗi đoạn.

e) Trên hộp thoại “F, J” khi chọn cho phép nhập các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang đối với từng loại bài toán.

g) Trên hộp thoại “P, M” khi chọn cho phép nhập các thông số về các yếu tố lực và mômen tập trung trong vectơ  $\Delta \vec{S}_{O_i}$  ở đầu trái mỗi đoạn thứ i đang quan tâm.

h) Trên hộp thoại “lực phân bố” khi chọn cho phép nhập bước nhảy của ngoại lực phân bố và các đạo hàm các cấp của nó, nếu có trong vectơ  $\Delta \vec{S}_{O_i}$  ở đầu trái đoạn i này (tức là ở mặt cắt phân chia giữa đoạn i và đoạn i-1 có hoành độ  $z = a_{i-1}$ ).

Cửa sổ thứ ba dùng để xem kết quả của bài toán.

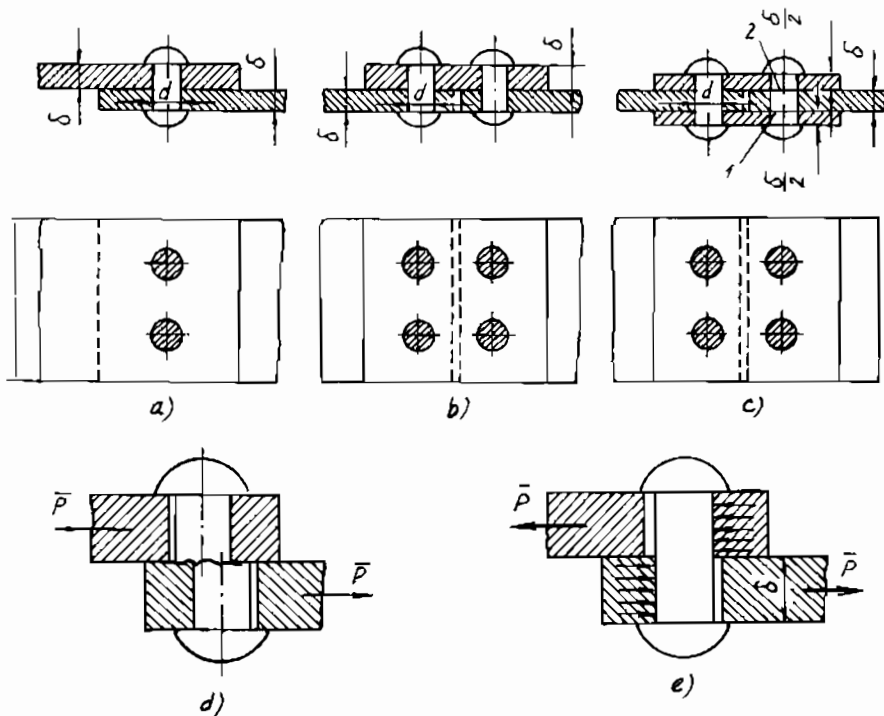
Chọn nút “Tính” và “Vẽ đồ thị” chương trình sẽ làm việc và xuất kết quả:

– Dưới dạng bảng các giá trị max của hàm chuyển vị, nội lực và vị trí các mặt cắt có giá trị max đó.

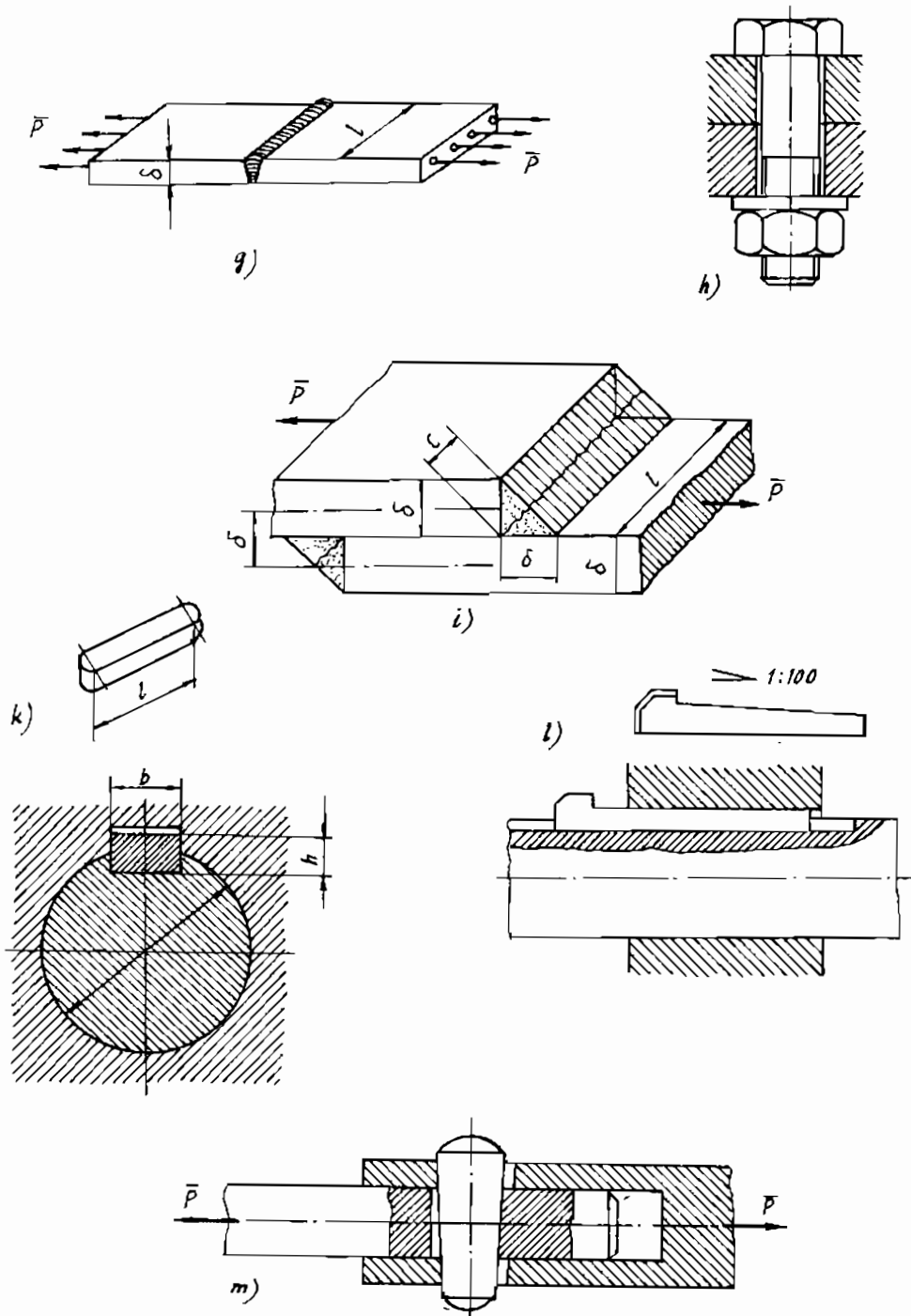
- Dưới dạng đồ thị, bảng số đối với mỗi đoạn và giá trị của  $\bar{S}(z)$  tại một mặt cắt cụ thể nào đó nếu có nhu cầu tính.
- Dưới dạng biểu thức giải tích của chuyển vị và nội lực.

### §9. TRƯỢT THUẦN TÚY VÀ CÁC TÍNH TOÁN THỰC HÀNH CÁC MỐI GHÉP

Trong tất cả các lĩnh vực kỹ thuật, đặc biệt trong ngành chế tạo máy và xây dựng ta thường hay gặp những chi tiết làm việc trong điều kiện trạng thái ứng suất phức tạp khó xác định. Đó là những bài toán về cắt và dập trong các mối ghép: đinh tán, bulông, hàn, then, chêm, chốt (hình 8.15). Để giải quyết đầy đủ những bài toán đó đòi hỏi người thực hiện phải có một kiến thức sâu sắc về cơ học và toán học. Điều này vượt ra ngoài giới hạn của giáo trình này. Nhưng do tính chất thực dụng của những vấn đề nói trên, trong tiết này ta sẽ làm quen với cách tính thực hành và những khái niệm cơ bản về cách giải quyết những bài toán đó.



Hình 8.15.

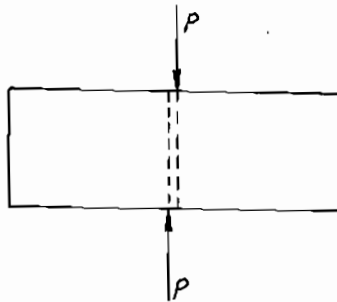


Hình 8.15.



## 1. Khái niệm về hiện tượng trượt

Trong một số trường hợp độ bền cũng như độ cứng của các cấu kiện kết cấu liên quan trực tiếp tới khả năng chịu trượt của vật liệu. Do đó cần thiết phải nghiên cứu biến dạng trượt và trạng thái ứng suất tương ứng với nó. Không nên quên rằng, trong trường hợp tổng quát biến dạng trượt là một bộ phận tổ thành của trạng thái biến dạng tại một điểm.



Hình 8.16.

Như đã rõ từ chương 3, một dạng của trạng thái ứng suất và biến dạng phẳng, mà ở nó trên hai mặt cắt vuông góc của phân tử chỉ có các ứng suất tiếp tác dụng, được gọi là trạng thái ứng suất trượt thuần túy. Từ đó ta định nghĩa một thanh được gọi là chịu trượt thuần túy như sau.

**Định nghĩa:** Một thanh được gọi là chịu trượt thuần túy, nếu trên các mặt cắt ngang của thanh chỉ có một loại nội lực là lực cắt ngang  $Q$ .

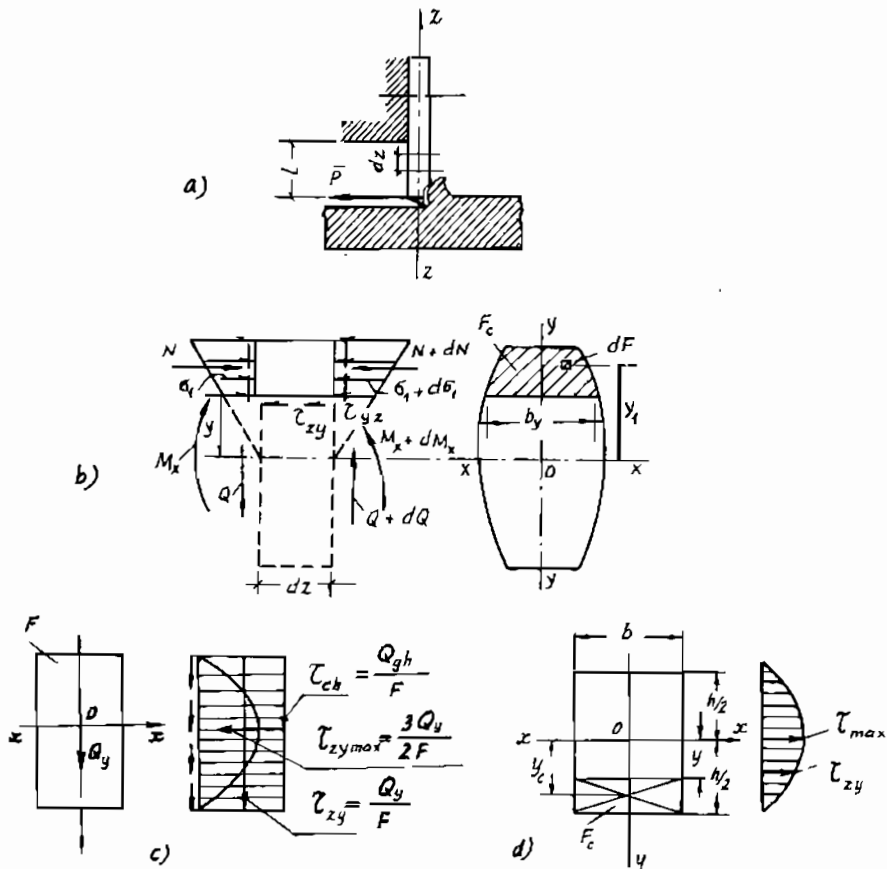
Trong thực tế rất ít gặp những thanh chịu lực lý tưởng như thế. Nghĩa là những thanh chịu cắt bởi hai lực trực đối  $P$  (hình 8.16).

Theo mối liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt, hiện tượng trượt luôn luôn kèm theo hiện tượng uốn. Trong trường hợp mômen uốn của ngẫu ( $\bar{P}$ ,  $\bar{P}$ ) rất bé (khoảng cách giữa hai đường tác dụng của các lực  $\bar{P}$  rất nhỏ), trong tính toán kỹ thuật có thể bỏ qua ngẫu này và chỉ kể đến lực cắt  $Q$ .

Ví dụ, những dầm chịu các lực ngang có thể xem là những thanh chỉ chịu cắt, nếu chiều dài  $l$  của chúng là khá bé. Cụ thể là  $l \leq 5h$ ,  $h$  – kích thước lớn nhất của mặt cắt.

## 2. Ứng suất tiếp khi trượt

Để xác định ứng suất tiếp khi trượt ta tưởng tượng tách ra khỏi dầm (hình 8.17a) một phân tử chiều dài  $dz$  bằng hai mặt cắt vuông góc với trục dầm và mặt cắt vuông góc với hai mặt cắt trên. Sau đó



Hình 8.17.

khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần của phân tố đã được tách ra, ví dụ phần trên (hình 8.17b).

$$dN = \int_{F_c} d\sigma_1 dF = \int_{F_c} \frac{dM_x}{J_x} \cdot y_1 \cdot dF = \frac{dM_x}{J_x} \int_{F_c} y_1 dF$$

Tích phân  $S_x^c = \int_{F_c} y_1 dF$  theo định nghĩa là mômen tĩnh của phần

diện tích bị cắt  $F_c$  đối với trục trung hoà  $ox$ .

Vì thế:

$$dN = \frac{dM_x}{J_x} S_x^c$$

Để phân tố đã được tách ra cân bằng thì trên mặt cắt dọc phải tồn tại các ứng suất tiếp  $\tau_{zy}$ . Những ứng suất này tạo thành hợp lực  $dT$ .

Theo điều kiện cân bằng của phân tố khảo sát, ta có:

$$\Sigma z = 0 \Rightarrow dT = dN,$$

Hoặc:

$$dT = \frac{dM_x}{J_x} S_x^c \quad (a)$$

Để xác định ứng suất tiếp  $\tau_{zy}$  cần phải biết quy luật phân bố của nó theo chiều rộng  $b_y$  của mặt cắt ngang. Thực tế quy luật này phụ thuộc vào hình dáng mặt cắt ngang. Tuy nhiên, đối với phần lớn các mặt cắt ngang hẹp có thể giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng  $b_y$  của mặt cắt.

Thừa nhận giả thiết này, ta có thể tính lực trượt  $dT$  như sau:

$$dT = \tau_{zy} dz b_y \dots \quad (b)$$

ở đây  $b_y$  – là chiều rộng mặt cắt ngang tại điểm, mà ở đó cần xác định ứng suất tiếp  $\tau = \tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Chú ý đến công thức (a) và (b) ta có:

$$\tau_{zy} = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^c}{J_x b_y}$$

Nhưng:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Vì vậy, theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang bất kỳ sau đây:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot b_y} \quad (8.17)$$

Công thức này gọi là công thức tính ứng suất tiếp của Zuravski. Nếu một lần nữa giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều trên toàn bộ mặt cắt thì rõ ràng là:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{F} \quad (8.18)$$

Khi biến dạng trượt còn chưa vượt quá giới hạn đàn hồi, về thực chất ứng suất tiếp được tìm theo (8.18) là ứng suất trung bình hoá nào đó. Nó luôn luôn nhỏ hơn ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo (8.17). Nếu biến dạng trượt ở tất cả các điểm trên mặt cắt đã vượt quá giới hạn đàn hồi và chuyển vào trạng thái dẻo thì công thức xác định ứng suất tiếp (8.18) là đúng. Khi đó:

$$\tau_{ch} = \frac{Q_{gh}}{F} \quad (8.19)$$

trong đó:  $F$  – diện tích mặt cắt ngang;

$Q_{gh}$  – lực cắt giới hạn, còn  $\tau_{ch}$  – ứng suất tiếp chảy (giới hạn chảy khi cắt).

Hình 8.17c biểu diễn sự phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt dạng chữ nhật được xác định theo các công thức tương ứng từ (8.17) đến (8.19).

#### 4. Tính toán thực hành các mối ghép

Trong mục này ta sẽ làm quen với cách tính toán thực hành một số mối ghép thường gặp như: đinh tán, bulông, hàn, then, chêm và chốt.

Biến dạng thực của những mối ghép này rất phức tạp và chỉ có thể được khảo sát gần đúng như những biến dạng trượt. Vì vậy những tính toán trình bày trong mục này là dựa trên những giả thiết khá thô và chúng chỉ có đặc trưng quy ước. Nhưng do tính an toàn và đơn giản của các giả thiết đó mà cách tính toán này được sử dụng rất rộng rãi trong thực tế thiết kế.

Ngoài ra một số đại lượng sử dụng trong tính toán được lấy từ những số liệu thí nghiệm. Điều này có nghĩa là những sự hiệu chỉnh tương ứng đã đưa vào trong tính toán và làm cho những tính toán này trở thành đủ tin cậy.

Ta khảo sát sự làm việc của một đinh tán có ba tấm ghép (hình 8.15c và 8.18). Đinh tán có thể bị cắt tại các mặt cắt 1 và 2. Đó là một trong những dạng phá hỏng chủ yếu của mối ghép này. Ta gọi đinh tán như thế là đinh tán có hai mặt bị cắt. Mỗi ghép bulông (hình 8.15h) cũng làm việc trong những điều kiện tương tự như mối ghép đinh tán. Phương pháp tính toán mối ghép đinh tán được trình bày dưới đây cũng đúng đối với một số loại liên kết bulông (mối ghép bulông thô).

## A. PHƯƠNG PHÁP TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

### 1. Mối ghép đinh tán

Ta cần tìm lực giới hạn  $P_{gh}$  mà đinh tán có hai mặt bị cắt có thể chịu được theo điều kiện cắt. Chúng ta sẽ xem trạng thái chảy trên các mặt bị cắt là lúc mối ghép hết khả năng làm việc. Ở trạng thái này sự trượt đáng kể của các tấm ghép đồng thời xảy ra. Thực tế, sự phá hỏng mối ghép loại này có thể xảy ra với tải trọng vượt quá tải trọng gây ra sự chảy khoảng 1,5 – 2 lần.

Có thể xem ở thời điểm xuất hiện hiện tượng chảy ở mỗi điểm của mặt bị cắt ứng suất đạt được giới hạn chảy tính toán  $R_c$ . Do đó, giả sử rằng ở trạng thái giới hạn các ứng suất tiếp phân bố đều trên diện tích bị cắt và bằng  $R_c$ .

Vậy ta có:

$$P_{gh} = F_c R_c \quad (8.20)$$

trong đó:  $F_c$  là diện tích của hai mặt bị cắt 1 và 2 của đỉnh tán.

Nếu gọi  $d$  là đường kính của đỉnh tán thì:

$$F_c = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (8.21)$$

Khi thay (8.21) vào công thức (8.20) ta tìm được lực giới hạn  $P_{gh}$  đối với đỉnh tán có hai mặt bị cắt sau đây:

$$P_{gh} = \frac{\pi d^2}{2} \cdot R_c \quad (8.22)$$

Nếu mỗi ghép có số tấm ghép lớn hơn ba thì đỉnh tán có thể có không phải hai mà là một số mặt bị cắt lớn hơn. Bởi vậy, nếu đỉnh tán có  $k$  mặt bị cắt thì lực giới hạn  $P_{gh}$  được xác định theo công thức:

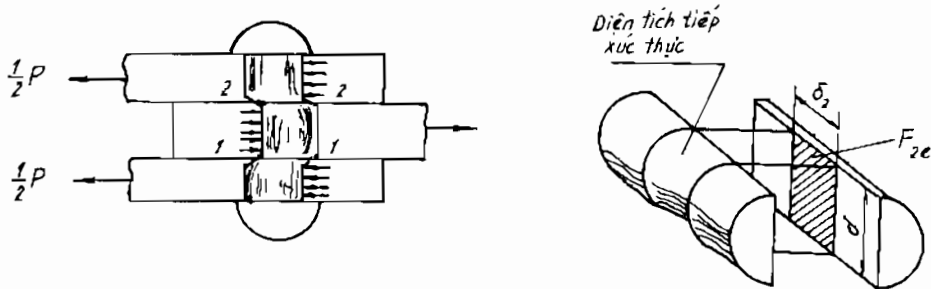
$$P_{gh} = k \frac{\pi d^2}{4} R_c \quad (8.23)$$

Ngoài sự phá hỏng do đỉnh tán bị cắt, sự phá hỏng mỗi ghép có thể xảy ra khi những tấm ghép tương đối mỏng, do đó mặt tiếp xúc giữa lỗ và thân đỉnh bị dập (ép mặt). Quy luật phân bố thực của ứng suất trên bề mặt tiếp xúc này rất phức tạp. Tuy nhiên sự nguy hiểm do ép mặt (dập) có thể đánh giá không phải giá trị thực của ứng suất tiếp xúc, mà là giá trị trung bình của ứng suất này tính trên diện tích ép mặt quy ước  $F_e$  (hình 8.18).  $F_e$  là hình chiếu của diện tích tiếp xúc trực tiếp trên mặt phẳng vuông góc với phương lực kéo tấm ghép  $P$ .

Các diện tích ép mặt quy ước đối với liên kết cho trên hình (8.18)  $F_{1e} = \delta_1 d$  và  $F_{2e} = \delta_2 d$ . Cả hai diện tích ép mặt này chịu cùng một lực vì thế cần phải lấy diện tích nhỏ nhất trong chúng làm diện tích để tính toán  $F_e^{\min}$ . Trong trường hợp tổng quát:

$$F_e^{\min} = d \Sigma \delta \quad (8.24)$$

ở đây  $\Sigma\delta$  là chiều dày tổng cộng nhỏ nhất của các tấm ghép được đặt theo một phương.



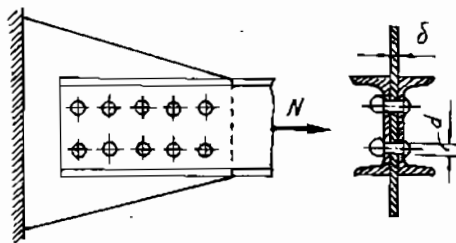
Hình 8.18.

Giá trị tính toán của ứng suất ép mặt quy ước  $R_e$  được tìm bằng thực nghiệm. Lực tính toán giới hạn cho một đỉnh tán theo điều kiện chịu ép mặt là:

$$P_e = F_c^{\min} \cdot R_e \quad (8.25)$$

Rõ ràng là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn tìm được theo điều kiện chịu cắt và ép mặt là lực tính toán giới hạn đối với đỉnh tán.

Một câu hỏi được đặt ra là số lượng đỉnh tán cần thiết đối với một mối ghép chịu tác dụng của lực dọc  $N$  là bao nhiêu? (hình 8.19). Để giải quyết vấn đề này ta giả thiết là lực  $N$  được chia đều cho các đỉnh tán. Cần chú ý là trong giai đoạn đàn hồi các đỉnh tán trong mỗi ghép làm việc không giống nhau: Trên các



Hình 8.19.

đầu cuối của mỗi ghép các đỉnh tán chịu lực nhiều hơn, còn ở giữa các đỉnh tán chịu lực ít hơn.

Tuy nhiên, trong giai đoạn biến dạng dẻo do hiện tượng chảy mà các nội lực trong các đỉnh tán được san đều. Điều này cho phép sử dụng những giả thiết đã nêu trên về sự chịu tải đều của tất cả các đỉnh tán của mỗi ghép.

Bởi vậy, số đỉnh tán cần thiết được xác định theo công thức dưới đây:

$$n = \frac{N}{P^{\min}} \quad (8.26)$$

trong đó:  $P^{\min}$  là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn nói trên mà một đỉnh tán phải chịu theo điều kiện cắt và ép mặt.

Việc chọn mặt cắt ngang và kiểm tra bên các cấu kiện ghép cần phải kể đến sự giảm yếu của mặt cắt do lỗ đỉnh tán. Nghĩa là diện tích mặt cắt ngang tính toán là diện tích bị giảm yếu  $F_{gy}$ .

## 2. Tính mỗi hàn chịu cắt

Dưới đây giới thiệu nguyên tắc tính toán mỗi hàn qua một ví dụ cụ thể của hai tấm ghép được liên kết với nhau bằng những mối hàn góc (hình 8.20). Liên kết hàn không gây ra sự giảm yếu các cấu kiện. So với những mối ghép khác, mỗi ghép hàn cần một khối lượng lao động ít hơn, vì thế, về mặt này nó kinh tế hơn.

Biến dạng xảy ra trong các mối hàn khá phức tạp, nhưng thí nghiệm đã chứng tỏ rằng sự phá hỏng mối hàn chủ yếu xảy ra do bị cắt theo mặt cắt dọc yếu nhất. Mặt cắt này làm với mép tấm một góc  $45^\circ$ . Khi đó mặt cắt ngang tính toán của mỗi hàn được thừa nhận dưới dạng một hình tam giác.

Nếu ký hiệu chiều cao mỗi hàn là  $h$ , thì diện tích bị cắt của hai mối hàn:

$$F_c = 2 lh \cos 45^\circ = 1,4 lh \quad (8.27)$$



Quy luật biến thiên của ứng suất tiếp trên diện tích bị cắt của mối hàn được xem là phân bố đều. Khi đó điều kiện bền có dạng:

$$\frac{N}{F_c} = \frac{N}{1,4lh} \leq R_c \quad (8.28)$$

trong đó:  $R_c$  – sức bền tính toán của vật liệu mối hàn góc khi cắt;

$l$  – chiều dài tính toán của một mối hàn (thường được lấy nhỏ hơn chiều dài thực của mối hàn là 10 mm do chất lượng hàn không tốt ở các đầu mối hàn).

Như một nguyên tắc, vật liệu mối hàn không có thêm chảy rỗ rành. Vì thế khác với mối ghép đỉnh tán, ứng suất tiếp ở trạng thái giới hạn trong mối hàn hoàn toàn không được san bằng. Chính vì lý do đó người ta hạn chế chiều dài mối hàn là:  $l \leq 60 h$ . Khi đó độ sai lệch với giả thiết về sự phân bố đều của ứng suất tiếp trong mối hàn sẽ không lớn lắm. Mặt khác, chiều dài mối hàn cần phải là  $l \geq 40$  mm và  $l \geq 4 h$ .

Từ công thức (8.28) khi quy định trước chiều cao mối hàn  $h$ , ta dễ dàng tìm được chiều dài yêu cầu của mối hàn  $l$ .

Khi tính toán mối hàn đối đầu chịu kéo ta sẽ sử dụng công thức tính toán đối với tấm ghép. Khi đó cần lấy sức bền tính toán  $R_k$  nhỏ hơn sức bền kéo của tấm ghép khoảng 10%. Điều này là do tính dẻo của vật liệu mối hàn và vật liệu tấm ghép quanh mối hàn giảm đi trong quá trình hàn.

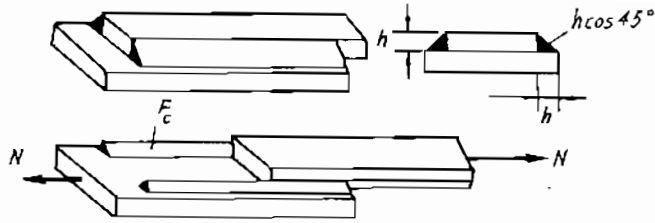
## B. PHƯƠNG PHÁP ỨNG SUẤT CHO PHÉP

Khi tính toán các chi tiết chịu cắt theo ứng suất cho phép cần phải đảm bảo điều kiện bền cắt sau đây:

$$\tau_{\max} \leq [\tau_c] \quad (8.29)$$

trong đó:  $\tau_{\max}$  là ứng suất tiếp phát sinh trong chi tiết do tải trọng ngoài gây ra và được xác định theo các công thức (8.17) hoặc (8.18);

$[\tau_c]$  – ứng suất cắt cho phép.



Hình 8.20.

Như đã nói ở trên hiện tượng cắt thường đi đôi với hiện tượng ép mặt (dập). Điều kiện ép mặt theo ứng suất cho phép là như sau:

$$\sigma_{\max}^c = \frac{N}{F_c^{\min}} \leq [\sigma_e] \quad (8.30)$$

trong đó:  $\sigma_{\max}^c$  – là ứng suất ép mặt gây ra do ngoại lực  $N$ ;

$F_c^{\min}$  – được xác định theo công thức (8.24);

$[\sigma_e]$  – ứng suất ép mặt cho phép.

### 1. Tính mối ghép đinh tán

Gọi  $n$  là số đinh trong mối ghép đinh tán. Giả thiết tải trọng  $P$  phân bố đều cho các đinh tán, thì tải trọng trên mỗi đinh là:

$$p = \frac{P}{n} \quad (8.31)$$

Để tránh các khả năng hỏng do cắt và dập các điều kiện bên sau đây phải được thỏa mãn:

#### a. Đinh không bị cắt đứt

$$\tau_{\max} = \frac{p}{k \cdot \pi d^2 / 4} \leq [\tau_c] \quad (8.32)$$

trong đó:  $\tau_c$  – ứng suất cắt cho phép của đinh tán.

### ***b. Mặt lỗ và đỉnh không bị dập***

$$\sigma_{\max}^c = \frac{P}{F_{\varepsilon}^{\min}} \leq [\tau_c] \quad (8.33)$$

trong đó:  $F_{\varepsilon}^{\min}$  là hình chiếu trên mặt phẳng vuông góc với p của mặt (trụ) tiếp xúc giữa lỗ đỉnh và đỉnh, được tính theo công thức (8.27).

Khi giải bài toán về chọn kích thước mặt cắt của đỉnh tán, người ta thường xuất phát từ *điều kiện bền đều* của đỉnh và tấm ghép. Chẳng hạn, các công thức (8.33) và (8.34) suy ra:

$$d = \frac{4}{\pi k} \frac{[\sigma]_E}{[\tau_c]} \sum \delta \quad (8.35)$$

### **2. Tính mối hàn**

Dưới đây giới thiệu cách tính mối hàn góc song song với lực kéo (hình 8.20).

Ứng suất tiếp (cắt) trên mặt cắt của mối hàn bằng:

$$\tau = \frac{N}{1,4lh}$$

và điều kiện bền là:

$$\tau = \frac{N}{1,4lh} \leq [\tau_c] \quad (8.36)$$

$[\tau_c]$  – ứng suất tiếp khi cắt của vật liệu mối hàn góc.

### **3. Tính mối ghép then, chêm và chốt**

Then, chêm và chốt thường bị hỏng vì cắt và dập và cách tính cũng tương tự như trường hợp đỉnh tán.

Dưới đây, giới thiệu cách tính then lạng trụ làm ví dụ:

Giả thiết áp lực phân bố đều trên mặt tiếp xúc của then với các chi tiết được ghép (trục và lỗ) và P là hợp lực của lực phân bố đó, ta có:

$$P = \frac{h}{2} \cdot l \cdot \sigma_d$$

trong đó:

$l$  – chiều dài của then;

$h$  – chiều cao của then.

Gọi  $M_z$  là mômen của ngoại lực đối với trục, dễ dàng thấy:

$$P \cdot y = M_z$$

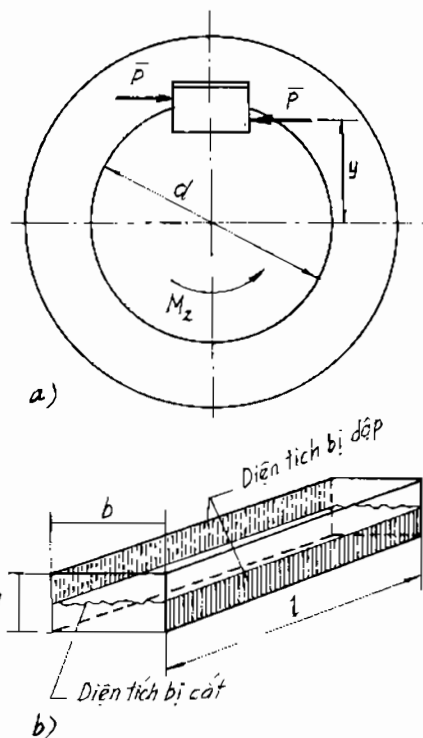
Có thể coi  $y = d/2$  ( $d$  – đường kính trục).

Từ đó suy ra điều kiện bền về dập của then:

$$\tau_d = \frac{2P}{hl} = \frac{4M_z}{hld} \leq [\sigma_d]$$

Điều kiện bền về cắt của then:

$$\tau_c = \frac{P}{F_c} = \frac{P}{b \cdot l} = \frac{2M_z}{b \cdot l \cdot d} \leq [\tau_c].$$



Hình 8.21.

## §10. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

**Ví dụ 1:** Cho một dầm với mặt cắt hình chữ T có kích thước, hình dạng và sơ đồ chịu lực như trên hình 8.22a, c.

Hãy kiểm tra điều kiện bền của dầm khi chỉ kể đến tác dụng của mômen uốn.

Biết:  $[\sigma]_k = 30 \text{ MN/m}^2$ ,  $[\sigma]_n = 100 \text{ MN/m}^2$

## GIẢI

Nếu chọn hệ tọa độ oxy như hình 8.22c thì trục trung hoà x của mặt cắt ngang song song với trục  $x_1$  và cách  $x_1$  một khoảng là:

$$y_o = \frac{(2.10^{-2})(10.10^{-2})(9.10^{-2}) + (8.10^{-2})(2.10^{-2})(4.10^{-2})}{(2.10^{-2})(10.10^{-2}) + (2.10^{-2})(8.10^{-2})} = 6,78.10^{-2} \text{ m.}$$

Mômen diện tích cấp hai của mặt cắt đối với trục trung hoà x (cũng là mômen quán tính chính trung tâm) bằng:

$$J_x = \frac{(10.10^{-2})(2.10^{-2})^3}{12} + (2.10^{-2})(10.10^{-2})(2,22.10^{-2})^2$$
$$\frac{(2.10^{-2})(8.10^{-2})^3}{12} + (2.10^{-2})(8.10^{-2})(2,78.10^{-2})^2 = 314.10^{-8} \text{ m}^4.$$

Biểu đồ mômen uốn của dầm như hình 8.22b.

Vì vật liệu làm dầm có khả năng chịu kéo và chịu nén khác nhau nên mặt cắt nguy hiểm cần kiểm tra là các mặt cắt trong đoạn BC và DE.

Tại các mặt cắt trong đoạn DE mômen uốn  $M_x = -3000 \text{ Nm}$ , phần đầu chữ T bị kéo và phần chân chữ T bị nén. Theo công thức (8.4) ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{3000}{314.10^{-8}} 3,22.10^{-2} = 30,7.10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{3000}{314.10^{-8}} 6,78.10^{-2} = 64,7.10^6 \text{ N/m}^2.$$

Ta thấy:

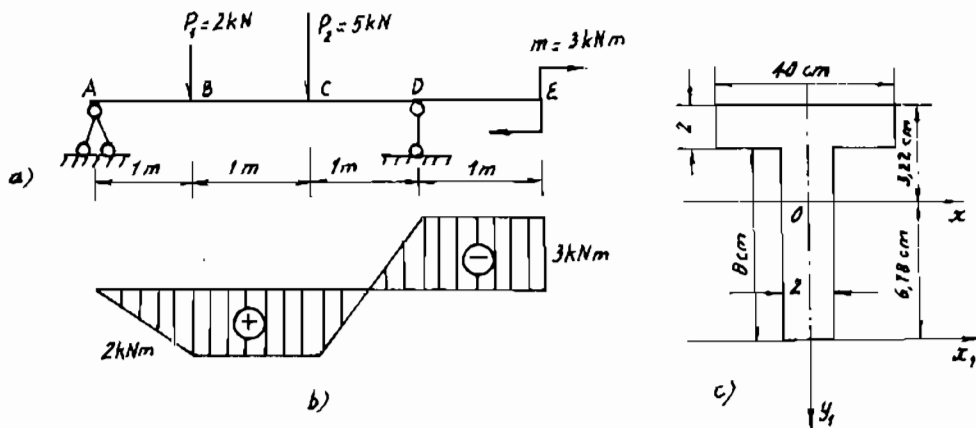
$$\sigma_{\min} = 64,7 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_n = 100 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{\max} = 30,7 \text{ MN/m}^2 > [\sigma]_k = 30 \text{ MN/m}^2$$

Tuy  $\sigma_{\max} > [\sigma]_k$  nhưng chưa quá 5% mà chỉ mới vượt quá

$$\frac{30,7 - 30}{30} 100\% = 2,5\%$$

trong đoạn DE điều kiện bền của dầm vẫn được bảo đảm.



Hình 8.22.

Tại các mặt cắt trong đoạn BC mômen uốn  $M_x = 2000$  Nm, phần đầu chữ T bị nén, phần chân chữ T bị kéo. Do đó:

$$\sigma_{\min} = - \frac{2000}{314 \cdot 10^{-8}} 3,22 \cdot 10^{-2} = -20,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2000}{314 \cdot 10^{-8}} 6,78 \cdot 10^{-2} = 43,2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Ta thấy:

$$|\sigma_{\min}| = 20,5 \text{ MN/m}^2 < [\sigma]_n$$

$$\sigma_{\max} = 42,2 \text{ MN/m}^2 > [\sigma]_k$$

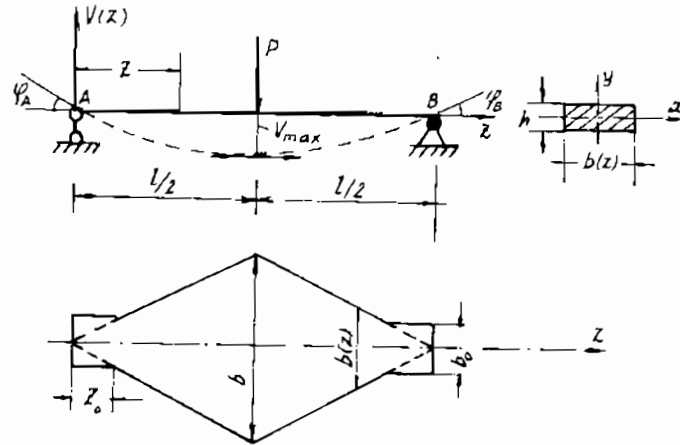
Do đó tại các mặt cắt trong đoạn BC điều kiện bền của dầm không được bảo đảm.

**Ví dụ 2:**

Một dầm độ bền đều mặt cắt ngang chữ nhật (hình 8.23) có chiều cao  $h = \text{const}$ , chiều rộng thay đổi  $b = b(z)$  dọc theo  $z$ . Cho trước:

$P, l, h$  và  $[\sigma], [\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]$

Hãy xác định:  $b(z)$  để dầm có độ bền đều và sau đó tính  $\varphi_{\max}$  và  $V_{\max}$ ?



Hình 8.23.

**GIẢI**

a) Tính  $b(z)$

$$M_x(z) = \frac{Pz}{2}$$

Mômen chống uốn tại mặt cắt z:

$$W_x(z) = \frac{b(z)h^2}{6}$$

Từ điều kiện bền tại mặt cắt bất kỳ z, ta rút ra:

$$W_x(z) = \frac{M_x(z)}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{b(z).h^2}{6} = \frac{P.z}{2[\sigma]} \Rightarrow b(z) = \frac{3Pz}{h^2 [\sigma]}$$

$$b(z=0) = 0 ; b(z=l/2) = \frac{3Pl}{2h^2 [\sigma]} \quad (1)$$

Tại mặt cắt gối A và B thì  $M_z = 0$ ,  $Q_y = \frac{P}{2}$ . Do đó, nếu chỉ xét đến ảnh hưởng của  $M_x$  thì chiều rộng  $b$  tại các mặt cắt này phải bằng không. Tuy nhiên tại các mặt cắt này có  $Q_{\max} = \frac{P}{2}$  và trong thực tế thiết kế đòi hỏi phải kể đến lực cắt tại đây. Cụ thể là:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{4b_0 h} \leq [\tau] \Rightarrow b_0 \geq \frac{3P}{4h[\tau]} = \text{const}$$

trong đó  $b_0$  là chiều rộng mặt cắt tại các gối tựa trên một chiều dài  $z_0$  được tìm từ điều kiện (hình 8.23):

$$b_0 = \frac{3P}{4h[\tau]} = \frac{3Pz_0}{h^2[\tau]} \Rightarrow z_0 = \frac{h[\sigma]}{4[\tau]} \approx (0,5 \div 0,42) h$$

#### b. Tính $\varphi_{\max}$ và $V_{\max}$

$$I_x = \frac{b(z)h^3}{12} = \frac{Phz}{4[\sigma]} \quad ; \quad M_x = \frac{Pz}{2}$$

Phương trình vi phân (8.6) có dạng cụ thể như sau:

$$EV'' = \frac{M_x(z)}{I_x(z)} = \frac{2[\sigma]}{h} \quad \text{hoặc là} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} V'' = 1$$

Câu phương liên tiếp ta có:

$$\frac{Eh}{2[\sigma]} V' = z + C \quad \text{và} \quad \frac{Eh}{2[\sigma]} V = \frac{z^2}{2} + Cz + D$$

Điều kiện liên kết của dầm cho ta:

$$\text{tại } z = 0, V(z = 0) = 0 \quad ; \quad \text{tại } z = \frac{l}{2}, \varphi(z = l/2) = 0 \Rightarrow C = -\frac{l}{2}, c_2 = 0$$

Vì vậy:

$$\varphi_{\max} = \varphi_A = -\varphi_B = (V') \Big|_{z=0} = \frac{2C[\sigma]}{Eh} = -\frac{l[\sigma]}{Eh}$$



và 
$$V_{\max} = (V)_{z=l/2} = - \frac{l^2 [\sigma]}{4Eh}$$

Theo (1) ở trên, ta biết rằng:

$$[\sigma] = \frac{3Pl}{2h^2b}$$

Do đó:

$$\varphi_{\max} = - \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{Eh^3b} \quad \text{và} \quad V_{\max} = - \frac{3}{8} \frac{Pl^3}{Eh^3b}$$

#### ***Ví dụ 4:***

Một dầm thép mặt cắt chữ I thay đổi từng khúc chịu lực và liên kết như hình 8.24a. Cho trước:  $P = 5 \text{ kN}$ ,  $a = 100 \text{ cm}$ ,  $M^* = 2Pa = 10^3 \text{ kNcm}$ ,  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $J = 3460 \text{ cm}^4$ . Bằng phương pháp tải trọng giả tạo. Hãy tính độ võng tại các điểm H, A, D và góc xoay tại các điểm A, B, G và vẽ các biểu đồ  $(V)$ ,  $(\varphi)$ ?

#### **GIẢI**

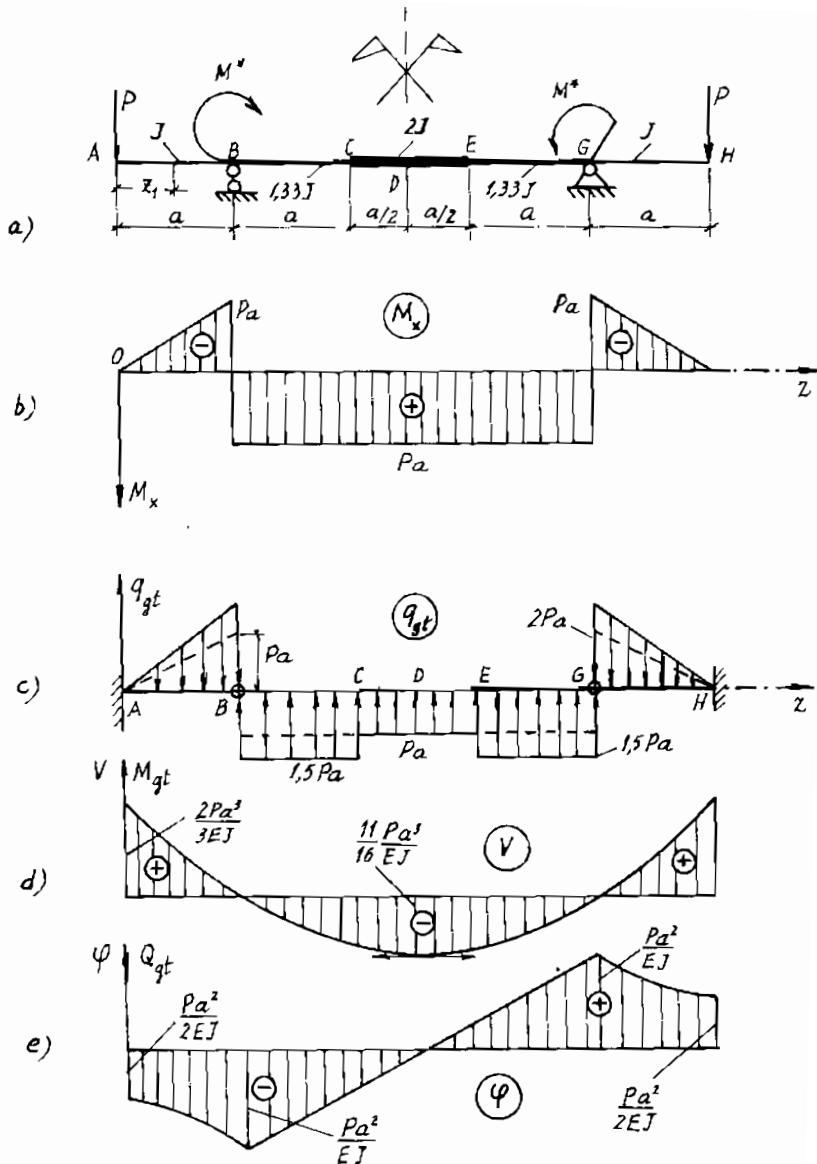
· Biểu đồ mômen uốn trên dầm thực được cho trên hình 8.24b. Ta chọn  $J_0 = 2J$  và tính mômen dẫn xuất theo công thức (8.12a) cho từng đoạn dầm. Cụ thể là:

$$M_{dx1} = M_{x1} \cdot \frac{2J}{J} = - 2Pz_1$$

$$M_{dx2} = M_{x2} \cdot \frac{2J}{1,33J} = 1,5 \text{ Pa}$$

$$M_{dx3} = M_{x3} \cdot \frac{2J}{2J} = \text{Pa}$$

Dầm giả tạo và tải trọng giả tạo được xây dựng như hình 8.24c.



Hình 8.24.

Tách dầm phụ BG ra khỏi dầm chính AB và GH. Thực hiện các tính toán trên dầm phụ, sau đó truyền tác dụng của dầm phụ lên dầm chính qua các khớp B, G. Cụ thể ta có:

Lực tác dụng tương hỗ qua các khớp B, G giữa dầm phụ và các dầm chính là:

$$R_B = R_G = 1,5 Pa^2 + 0,5 Pa^2 = 2Pa^2.$$

Mômen giả tạo và lực cắt giả tạo và do đó là độ võng và góc xoay tại A là:

$$M_{gtA} = \frac{4}{3} Pa^3 \Rightarrow V_A = \frac{M_{gtA}}{2EJ} = \frac{2Pa^3}{3EJ} = V_H = +0,0303 \text{ cm.}$$

$$Q_{gtA} = -Pa^2 \Rightarrow \varphi_A = \frac{Q_{gt}}{2EJ} = -\frac{Pa^2}{2EJ} = -\varphi_H = -1,825 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Đối với điểm B:

$$\begin{aligned} M_{gt} = V = 0, Q_{gt} = -2 Pa^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_B = \frac{Q_{gt}}{2EJ} = -\frac{Pa^2}{EJ} = -\varphi_G = -5,437 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Đối với điểm D:

$$M_{gt} = -\frac{11Pa^3}{8} \Rightarrow V_D = \frac{M_{gt}}{2EJ} = -\frac{11}{16} \frac{Pa^3}{EJ} = -0,0279 \text{ cm}$$

Biểu đồ mômen giả tạo và lực cắt giả tạo được vẽ trong hệ tọa độ có các trục tung cùng chiều với các trục V và  $\varphi$  hướng lên trên (hình 8.24d, e) xem phương án 1§6.