

CHƯƠNG 9

KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP

§1. NGUYÊN TẮC TÍNH TOÁN KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP

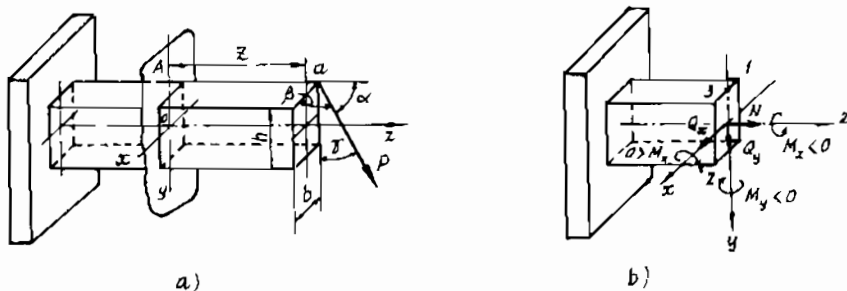
Một kết cấu được xem là chịu lực phức tạp, nếu trên các mặt cắt ngang của nó có ít nhất hai trong số sáu thành phần nội lực N , Q_y , Q_x , M_y , M_x , M_z .

Ta hãy xét một mặt cắt ngang A nào đó và gắn trên đó một hệ trục quán tính chính trung tâm $oxyz$ của dầm chịu lực như hình 9.1a. Lực P nghiêng với các trục tọa độ z , x , y tương ứng những góc α , β , γ . Các nội lực trên mặt cắt A gồm có (hình 9.1b).

$$N = P \cos \alpha ; M_x = -P \left(\frac{h}{2} \cos \alpha + Z \cos \gamma \right) ;$$

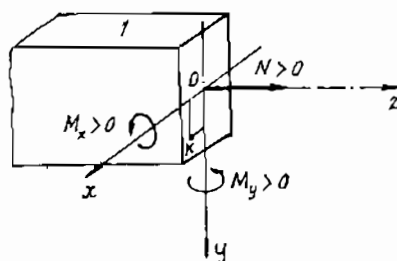
$$Q_y = P \cos \gamma ; M_y = -P \left(\frac{b}{2} \cos \alpha + Z \cos \beta \right) ;$$

$$Q_x = P \cos \beta ; M_z = P \left(\frac{b}{2} \cos \gamma - h/2 \cos \beta \right) .$$



Hình 9.1.

Các nội lực dọc N và mômen uốn M_x , M_y gây ra ở mỗi điểm $K(x, y)$ của mặt cắt ngang hệ các ứng suất pháp đồng phương: $\bar{\sigma}_N$, $\bar{\sigma}_{M_x}$, $\bar{\sigma}_{M_y}$, còn các lực cắt Q_x , Q_y và mômen xoắn M_z gây ra tại $K(x, y)$ hệ các ứng suất tiếp đồng phẳng: $\bar{\tau}_{Q_x}$, $\bar{\tau}_{Q_y}$, $\bar{\tau}_{M_z}$.



Hình 9.2.

1. Đối với nhóm các ứng suất tiếp

Ứng suất tiếp toàn phần do các nội lực Q_x , Q_y và M_z gây ra tại điểm $K(x, y)$ nào đó, theo nguyên lý độc lập tác dụng, bằng tổng hình học các ứng suất tiếp thành phần do riêng từng nội lực gây ra. Cụ thể là:

$$\tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} \quad (9.1)$$

trong đó:

$$\tau_{yz(1)} = \tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \delta_y} ; \quad \tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_{\rho}} \cdot \rho$$

$$\tau_{xz(2)} = \tau_{Q_x} = \frac{Q_x \cdot S_y^c}{J_y \delta_x} ;$$

Chú ý đến $\bar{\tau}_p = \bar{\tau}_{yz(3)} + \bar{\tau}_{xz(4)}$, ta có:

$$\bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{yz(1)} + \bar{\tau}_{yz(3)} ; \quad \bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{xz(2)} + \bar{\tau}_{xz(4)}$$

2. Nhóm các ứng suất pháp tại điểm K(x, y)

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_N + \bar{\sigma}_{M_x} + \bar{\sigma}_{M_y}$$

hay dưới dạng tổng đại số ta có:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (9.2)$$

Dấu các số hạng trong (9.2) phụ thuộc dấu của các nội lực và dấu của tọa độ điểm K(x, y).

Nếu trên các mặt cắt ngang chỉ có N, M_x , M_y thì ta gọi bài toán đó là bài toán uốn và kéo (nén) đồng thời hoặc kéo (nén) lệch tâm với độ lệch tâm e (hình 9.18 và 9.20 thuộc §7).

Trong thực hành ta xác định dấu của σ như sau:

$$\sigma = \pm \frac{|N|}{F} \pm \frac{|M_x| |y|}{J_x} \pm \frac{|M_y| |x|}{J_y} \quad (9.3)$$

Trong công thức này dấu dương (+) ứng với điểm cần tính ứng suất nằm ở miền chịu kéo do các nội lực tương ứng gây ra; dấu (-) ứng với điểm cần tính ứng suất nằm ở miền chịu nén do các nội lực tương ứng gây ra. Bản thân các nội lực và tọa độ điểm tính ứng suất trong công thức (9.3) được lấy theo các trị tuyệt đối. Như vậy theo cách xác định thực hành dấu của σ ta không phải quan tâm đến chiều các trục tọa độ và dấu các nội lực. Tuy nhiên, ta cũng có thể xác định dấu của σ theo dấu của các nội lực và tọa độ x, y bằng cách đặt vào mặt cắt khảo sát một hệ trục tọa độ (hình 9.2) sao cho các mômen uốn dương gây ra các ứng suất kéo ở các điểm thuộc góc phần tư dương thứ nhất của hệ tọa độ.

Ví dụ: cần xác định ứng suất tại điểm $K(x, y)$ thuộc góc phần tư thứ nhất của mặt cắt có hoành độ z do các nội lực gây ra (hình 9.1). Theo công thức (9.2) ta có:

$$\sigma = + \frac{N}{F} + \frac{-M_x(+y)}{J_x} + \frac{-M_y(+x)}{J_y}$$

Do đó:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_x \cdot y}{J_x} - \frac{M_y \cdot x}{J_y} \quad (a)$$

Theo công thức (9.3) số hạng thứ nhất lấy dấu dương vì N gây ứng suất kéo trên toàn bộ mặt cắt chứa điểm $K(x, y)$. Số hạng thứ hai và ba lấy dấu âm vì M_x và M_y gây ra các ứng suất nén ở điểm $K(x, y)$.

Vậy theo (9.3) ta cũng nhận lại được kết quả (a):

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{|M_x| |y|}{J_x} - \frac{|M_y| |x|}{J_y} \quad (b)$$

Tương tự như các trường hợp chịu lực đơn giản, muốn biết vật liệu có bị phá hoại hay không tại một phân tử nào đó trên mặt cắt ngang của thanh chịu lực phức tạp ta phải sử dụng một cách thích hợp các thuyết bền đã được trình bày ở §2 của chương 6. Nghĩa là, cần phải tính các ứng suất tương đương theo hai nhóm ứng suất pháp và tiếp nối trên, sau đó so sánh với các ứng suất cho phép (theo phương pháp ứng suất cho phép) hoặc các cường độ ứng suất (theo phương pháp trạng thái giới hạn). Đó là nội dung của bài toán kiểm tra bền đối với thanh chịu lực phức tạp.

Một câu hỏi được đặt ra là: đối với mỗi mặt cắt xác định thì điểm nào trên mặt cắt là điểm nguy hiểm nhất?

Câu trả lời có tính chất nguyên tắc là: điểm nào có ứng suất tương đương lớn nhất sẽ là điểm nguy hiểm nhất.

Trong trường hợp tổng quát không thể chỉ ngay ra được điểm nguy hiểm nhất. Vì thế, trên cơ sở các ứng suất thành phần ta có thể phán đoán được một số điểm trên mặt cắt khảo sát có khả năng là

những điểm nguy hiểm và việc kiểm tra bền được tiến hành đối với tất cả những điểm này. Việc kiểm tra bền này đối với hệ phải được thực hiện đối với mặt cắt nguy hiểm nhất. Mặt cắt nguy hiểm này được thể hiện trên các biểu đồ nội lực và quy luật biến thiên của mặt cắt ngang dọc theo trục dầm.

Ta sẽ minh họa những chỉ dẫn ở trên qua việc kiểm tra bền đối với hệ cho trên hình 9.1a theo một thuyết bền nào đó.

Mặt cắt nguy hiểm nhất là mặt cắt ở ngàm (đầu trái của dầm) với các nội lực có độ lớn như sau:

$$N = P \cos \alpha \quad ; \quad M_x = -P \left(\frac{h}{2} \cos \alpha + l \cos \gamma \right) \quad (\text{căng trên})$$

$$Q_y = P \cos \gamma \quad ; \quad M_y = -P \left(\frac{b}{2} \cos \alpha + l \cos \beta \right) \quad (\text{căng trong})$$

$$Q_x = P \cos \beta \quad ; \quad M_z = P \left(\frac{b}{2} \cos \gamma - \frac{h}{2} \cos \beta \right) \quad (\text{thuận kim đồng hồ})$$

Phương và chiều của các nội lực này trên mặt cắt tại ngàm giống như phương, chiều các nội lực trên mặt cắt có hoành độ z (hình 9.1b).

Các điểm có tọa độ sau đây có thể là những điểm nguy hiểm cần kiểm tra:

$$1 \left(-\frac{b}{2} - \frac{h}{2} \right); \quad 2(b/2, h/2); \quad 3(0, -h/2); \quad 4(0, h/2); \quad 5\left(\frac{b}{2}, 0\right); \quad 6\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$$

Đối với điểm 1:

$$\tau_1 = 0 \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{|N|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất như sau:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau_1^2} = \sigma_1 = \frac{|N|}{F} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9.4)$$

Đối với điểm 2:

$$\tau_2 = 0 ; \sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

Do đó:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4\tau_2^2} = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \leq [\sigma] \quad (9.5)$$

Đối với điểm 5:

$$\sigma_5 = \frac{|N|}{F} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

$$\bar{\tau}_{yz5} = \frac{3Q_y}{2F} \text{ (do lực cắt } Q_y \text{ gây ra);}$$

$$\tau_{yz5}^* = \frac{M_z}{\alpha hb^2} \text{ (do mômen xoắn } M_z \text{ gây ra);}$$

$$\tau_5 = \bar{\tau}_{yz5} + \tau_{yz5}^* = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} + \frac{M_z}{\alpha hb^2}$$

Vậy điều kiện bền là:

$$\sigma_{td} = \sigma_{T3} = \sqrt{\sigma_5^2 + 4\tau_5^2} \leq [\sigma] \quad (9.6)$$

Việc kiểm tra bền đối với các điểm còn lại cũng được tiến hành tương tự.

Thực tế tính toán cho thấy rằng đối với thanh dài chịu lực phức tạp ảnh hưởng của lực cắt đến độ bền của thanh không đáng kể so với các thành phần nội lực khác. Vì thế, trong các tính toán có thể bỏ qua lực cắt đối với những thanh có chiều dài $l > 5h$ (h – là kích thước lớn nhất của mặt cắt ngang).

Cần phải nhấn mạnh lại một lần nữa là việc chọn thuyết bền này hay thuyết bền khác để tiến hành kiểm tra bền cho kết cấu chịu lực phụ thuộc vào vật liệu chế tạo kết cấu đó và vào quan điểm của người tính toán. Ví dụ, đối với vật liệu có khả năng chịu kéo và nén

khác nhau, ta nhất thiết phải dùng thuyết bền MO trong số các thuyết bền được trình bày ở chương 6. Đối với vật liệu đẳng hướng có khả năng chịu kéo và nén như nhau thì có thể sử dụng một trong ba thuyết bền: thuyết bền thứ ba, thuyết bền thứ tư và thuyết bền MO. Đối với các vật liệu dị hướng cần phải sử dụng các tiêu chuẩn bền và dẻo cho loại vật liệu này đã được mô tả ở §3 của chương 6. Dưới đây là cách áp dụng lý thuyết tổng quát ở trên vào bài toán hệ chịu lực phức tạp thường gặp.

§2. TÍNH DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Trong thực hành ta rất hay gặp những dầm chịu tác dụng của ngoại lực vuông góc với trục dầm, sao cho trên mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực: mômen uốn M_x và lực cắt Q_y cùng nằm trong mặt phẳng đối xứng yz của dầm. Người ta thường gọi dầm chịu lực như thế là dầm chịu uốn ngang phẳng. Nó là sự tổ hợp của bài toán uốn thuần túy phẳng và cắt (theo quan điểm của nguyên lý độc lập tác dụng). Đây là một bài toán về thanh chịu lực phức tạp hay gặp nhất trong kỹ thuật và được khảo sát đầu tiên.

Ứng suất pháp do mômen uốn gây ra:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Ứng suất tiếp do lực cắt Q_y gây ra:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \delta_y}$$

Như vậy, trạng thái ứng suất tại một điểm bất kỳ này của dầm chịu uốn ngang phẳng là trạng thái ứng suất phẳng.

Điều kiện bền của dầm theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng như sau:

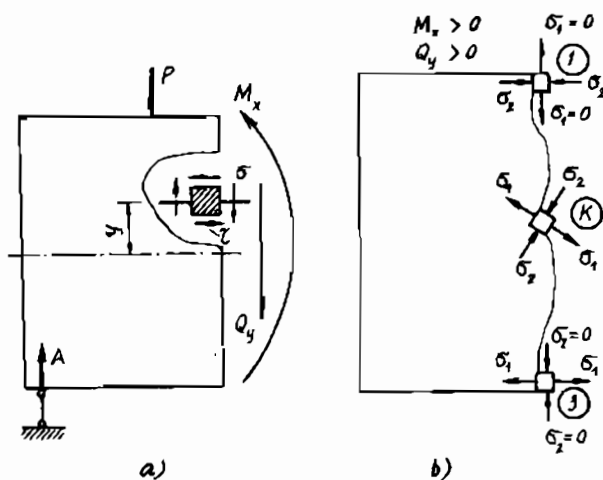
$$a) \quad \tau_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với M_x và Q_y và ở điểm K có σ và τ đều lớn ở trên mặt cắt này.

$$b) \quad \sigma_{T_1} = |\sigma_{\max/\min}| \leq [\sigma]_{K/n}$$

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với M_x và ở điểm (1, 3) có ứng suất pháp cực trị $\sigma_{\max/\min}$ trên mặt cắt đó so với tất cả các ứng suất pháp lớn nhất trên các mặt cắt còn lại.

$$c) \quad \sigma_{T_1} = \sqrt{3} \tau_{\max} \leq [\sigma]$$



Hình 9.3.

Điều kiện này được thực hiện ở mặt cắt nguy hiểm nhất đối với Q_y và ở điểm có ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt đó so với tất cả các ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt còn lại.

Đối với dầm chịu uốn và cắt đồng thời cần phải kiểm tra bền theo cả ba điều kiện (a), (b), (c) là vì trạng thái ứng suất của các phần tử dọc theo chiều cao mặt cắt ngang được đặc trưng bởi những phần tử chính khác nhau cả về phương (hình 9.3b) của các ứng suất chính và trị số của chúng.

§3. VÍ DỤ MINH HỌA

Một dầm tĩnh định mặt cắt không đổi hình chữ I, chịu lực và liên kết như hình 9.4a. Biết: $a = 200 \text{ cm}$, $E = 2.10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $[\sigma] = 16 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $[V] = \frac{l}{400}$, $[\varphi] = 0,05 \text{ rad}$, $q = 0,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$, $J_x = 218200 \text{ cm}^4$, 4 thép góc không đều cạnh $80 \times 50 \times 5 \text{ (mm)}$, chiều dày bản bụng $\delta = 12 \text{ mm}$, chiều dày bản cánh $t = 10 \text{ mm}$.

Yêu cầu:

1. Viết các phương trình lực cắt $Q_y(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, độ võng $V(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và vẽ các biểu đồ này?
2. Hãy chỉ ra các mặt có $\max|Q_y|$, $\max|M_x|$, $\max|V|$ và $\max|\varphi|$?
3. Hãy kiểm tra toàn diện điều kiện làm việc cho dầm?

GIẢI

1. Viết phương trình và vẽ biểu đồ lực cắt $Q_y(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, độ võng $V(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$.

– Chọn trục z trùng với trục thanh hướng sang phải.

– Chọn gốc tọa độ ở đầu trái của dầm.

Gọi phản lực tại gối đỡ 1 là R_1 .

Gọi phản lực tại gối đỡ 4 là R_4 .

Giả định chúng có phương chiều như hình 9.4a.

Đối với dầm đã cho và với yêu cầu đề bài, phương pháp tối ưu nhất trong số các phương pháp đã giới thiệu là phương pháp vạn năng.

a) Tính phản ứng tại gối đỡ 1 (R_1) và 4 (R_4)

$$\Sigma m_4 = P.9,6a - R_1.8a + 4,8aq.7,2a + 2P.3,2a - aq.0,5a - M^* = 0$$

$$= qa.9,6a - R_1.8a + 4,8aq.7,2a + 2qa.3,2a - aq.0,5a - qa^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot 8a = 9,6qa^2 + 34,56qa^2 + 6,4qa^2 - 0,5qa^2 - qa^2$$

$$\Rightarrow R_1 \cdot 8a = 49,06qa^2$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{49,06qa^2}{8a} = 6,132qa \text{ (kN)}$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_1 &= P \cdot 1,6a - 4,8aq \cdot 0,8a - 2P \cdot 4,8a + R_4 \cdot 8a - aq \cdot 8,5a - M^* = 0 \\ &= qa \cdot 1,6a - 4,8aq \cdot 0,8a - 2qa \cdot 4,8a + R_4 \cdot 8a - aq \cdot 8,5a - qa^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow R_4 \cdot 8a = 3,84qa^2 + 9,6qa^2 + 8,5qa^2 - 1,6qa^2 + qa^2$$

$$\Rightarrow R_4 \cdot 8a = 21,34qa^2$$

$$\Rightarrow R_4 = \frac{21,34qa^2}{8a} = 2,667qa \text{ (kN)}$$

b) Phương trình lực cắt $Q_x(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và độ võng $V(z)$

Theo phương pháp vụn năng ta có:

$$\bullet Q_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[p_{oi} + \Delta q_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q'_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + \Delta q''_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q(z) &= -P - qz \Big|_1 + R_1 \Big|_2 + q(z - 4,8a) \Big|_3 - 2P \Big|_4 + R_4 - q(z - 9,6a) \Big|_5 \\ &= -qa - \frac{qz}{1} + 6,132qa \Big|_2 + q(z - 4,8a) \Big|_3 - 2qa \Big|_4 \\ &\quad + 2,667qa - q(z - 9,6a) \Big|_5 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} b) M_k(z) &= \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[M^*_{oi} + P_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + \Delta q'_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^3}{3!} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta q''_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^4}{4!} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(z) = -P - \frac{qz^2}{2} \Big|_1 + R_1(z - 1,6a) \Big|_2 + \frac{q(z - 4,8a)^2}{2} \Big|_3 -$$

$$\begin{aligned}
& -2P(z-6,4a) \Big|_4 + R_4(z-9,6a) - \frac{q(z-9,6a)^2}{2} \Big|_5 \\
\Rightarrow M(z) = & -qaz - \frac{qz^2}{2} \Big|_1 + 6,132(z-1,6a) \Big|_2 + \frac{q(z-4,8a)^2}{2} \Big|_3 - \\
& -2qa(z-6,4a) \Big|_4 + 2,667qa(z-9,6a) - \frac{q(z-9,6a)^2}{2} \Big|_5 \quad (b) \\
c) \varphi_k(z) = & \Delta\varphi_{01} - \frac{Pz^2}{2!EJ} - \frac{qz^2}{3!EJ} \Big|_1 + R_1 \frac{(z-1,6a)^2}{3!EJ} \Big|_2 + \frac{q(z-4,8a)^3}{3!EJ} \Big|_3 - \\
& -2P \frac{(z-6,4a)^2}{2!EJ} \Big|_4 + R_4 \frac{(z-9,6a)^2}{2!EJ} - \frac{q(z-9,6a)^3}{3!EJ} \Big|_5 \quad (c) \\
d) V_k(z) = & \Delta V_{01} + \Delta\varphi_{01}z - \frac{Pz^2}{3!EJ} - \frac{qz^4}{4!EJ} \Big|_1 + R_1 \frac{(z-1,6a)^3}{3!EJ} \Big|_2 + \\
& + \frac{q(z-4,8a)^4}{4!EJ} \Big|_3 - 2P \frac{(z-6,4a)^3}{3!EJ} \Big|_4 + R_4 \frac{(z-9,6a)^3}{3!EJ} - \frac{q(z-9,6a)^4}{4!EJ} \Big|_5 \quad (d)
\end{aligned}$$

Trong hệ phương trình a, b, c, d có 4 ẩn số cần xác định là: R_1 , R_4 và ΔV_{01} , $\Delta\varphi_{01}$. Các phản lực R_1 và R_4 đã được xác định nhờ điều kiện cân bằng ở trên. Tuy nhiên, thuận tiện hơn cả là sử dụng chính hai hệ phương trình độc lập của phương pháp vụn năng để xác định đồng thời các ẩn số này. Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} Q(z=2120\text{ cm}) &= 0 \\ M(z=2120\text{ cm}) &= -qa^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_1 &= 6,132qa = 613,3\text{ kN} \uparrow \\ R_4 &= 2,667qa = 366,7\text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} V(z=320\text{ cm}) &= 0 \\ V(z=1920\text{ cm}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta\varphi_{01} &= -3,91 \cdot 10^{-3}\text{ rad} \\ \Delta V_{01} &= 1,426\text{ cm} \end{aligned}$$

Sau khi thay các giá trị R_1 , R_4 , ΔV_{01} , $\Delta\varphi_{01}$ vào các phương trình a, b, c, d ta có các biểu thức tường minh của lực cắt $Q(z)$, mômen uốn $M_x(z)$, góc xoay $\varphi_x(z)$ và độ võng $V(z)$.

Với các số liệu đề bài, phương trình độ võng $V(z)$ trong các đoạn, cụ thể như sau:

$$V_1(z) = -4,774 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 - 3,82 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 - 3,90 \cdot 10^{-3} \cdot z + 1,420, \\ 0 \leq z \leq 320 \text{ cm}$$

$$V_2(z) = -4,774 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 + 1,34 \cdot 10^{-8} \cdot z^3 - 6,59 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 - 5,70 \cdot 10^{-3} \cdot z \\ + 3,41 \cdot 10^{-13}, \quad 320 \leq z \leq 960 \text{ cm}$$

$$V_3(z) = 1,27 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 + 7,57 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 - 2,58 \cdot 10^{-3} \cdot z - 3,62, \\ 960 \leq z \leq 1280 \text{ cm}$$

$$V_4(z) = -6,365 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 + 8,79 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 + 2,65 \cdot 10^{-3} \cdot z - 3,629 \\ 1280 \leq z \leq 1920 \text{ cm}$$

$$V_5(z) = -4,77 \cdot 10^{-12} \cdot z^4 + 3,81 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 - 3,43 \cdot 10^{-6} \cdot z^2 + 6,078 \cdot 10^{-3} \cdot z \\ - 1,60, \quad 1920 \leq z \leq 2120 \text{ cm}$$

Hoàn toàn tương tự như vậy, ta dễ dàng viết được phương trình góc xoay, mômen uốn và lực cắt với hệ số bằng số cho mỗi đoạn khi trực tiếp sử dụng các phương trình c, b, a hoặc bằng các liên hệ vi phân đã biết giữa các đại lượng khảo sát: chuyển vị, nội lực, ngoại lực.

Biểu đồ của (Q_y) , (M_x) , (V) , (φ_x) được cho trên hình 9.4b, c, d, e.

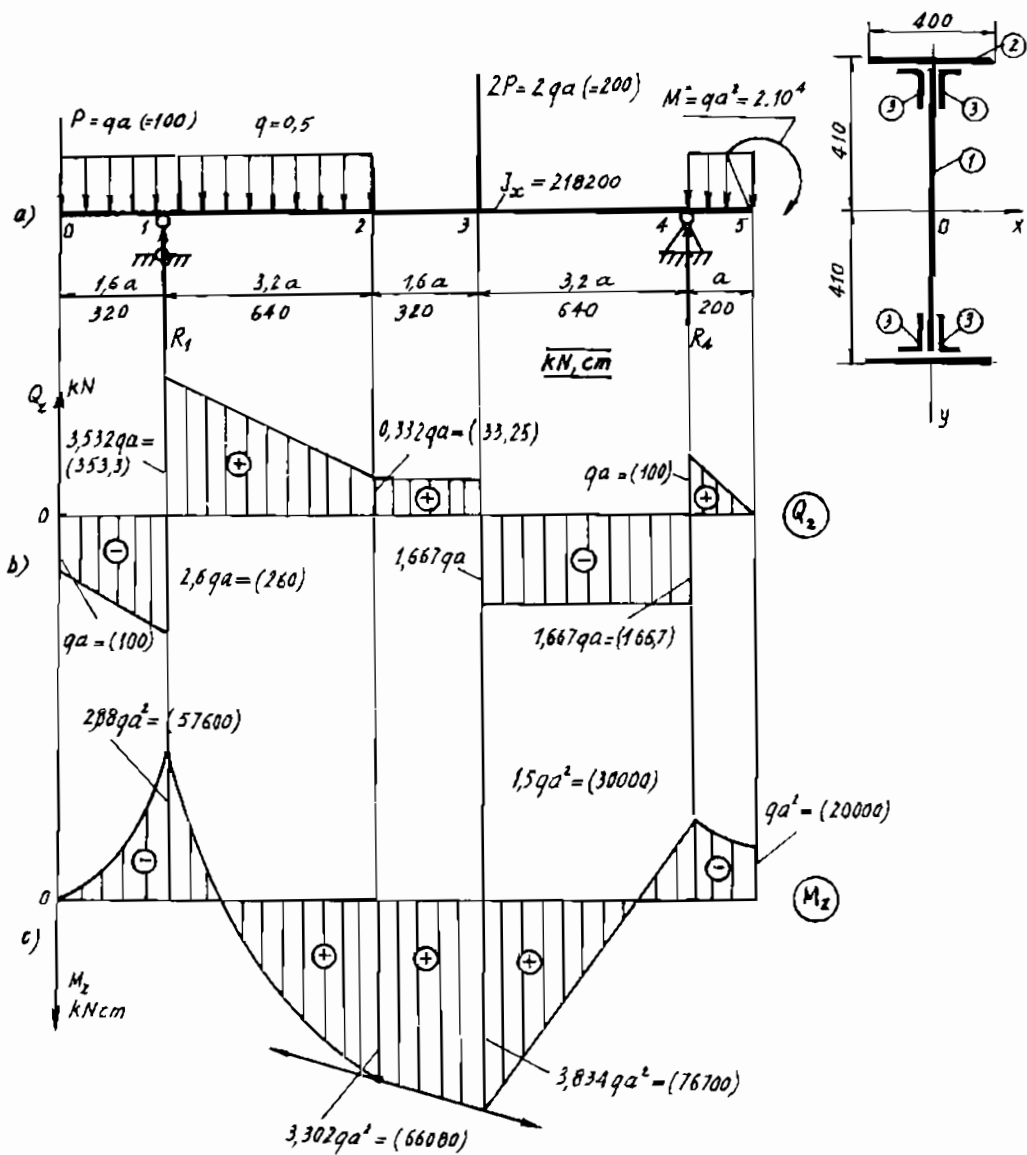
2. Các đại lượng cực trị phải tìm tại các mặt cắt tương ứng (hình 9.4b, c, d, e)

$$\max |Q_y| = 353,3 \text{ kN} \quad (\text{bên phải gối tựa 1});$$

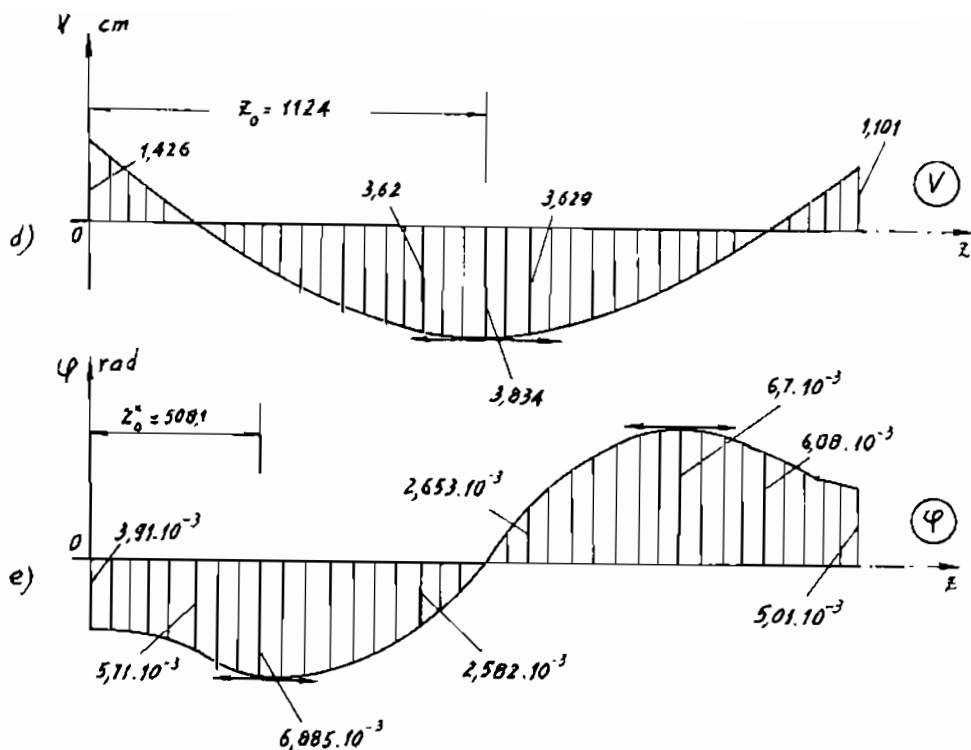
$$\max |M_x| = 76700 \text{ kNcm} \quad (\text{ở mặt cắt 3});$$

$$\max |V| = 3,834 \text{ cm} \quad (\text{tại } z_0 = 1124 \text{ cm});$$

$$\max |\varphi_x| = 6,885 \quad (\text{tại } z_0^* = 508,10 \text{ cm}).$$



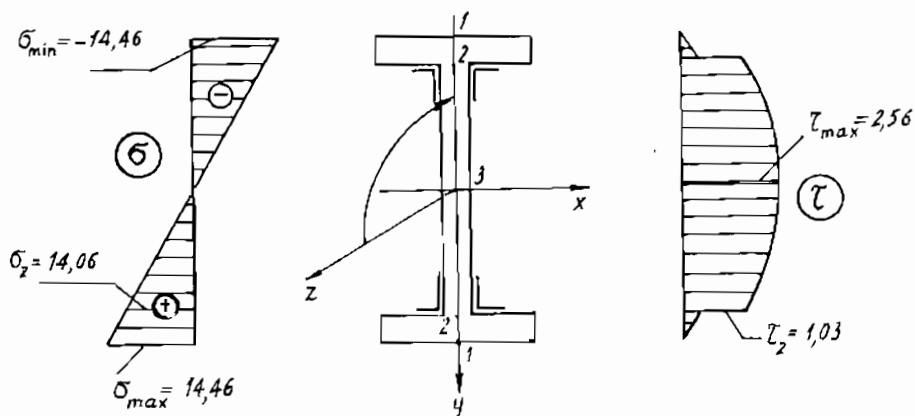
Hình 9.4a, b, c.



Hình 9.4d, e.

3. Kiểm tra toàn diện điều kiện làm việc của dầm

a) Kiểm tra bền toàn diện



Hình 9.5.

a. Kiểm tra phân bố ở trạng thái ứng suất đơn và phẳng nguy hiểm nhất.

Từ biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x ta thấy tại $z = 1280 \text{ cm}$, $M_{x\max} = 3,834 \text{ qa}^2 = 3,834 \cdot 0,5 \cdot 200^2 = 76700 \text{ kNcm}$.

Tương ứng ở bên phải mặt cắt “3” này lực cắt có giá trị:

$$Q_y = 1,667 \text{ qa} = 1,667 \cdot 0,5 \cdot 200 = 166,7 \text{ kN}$$

Trên mặt cắt này cần kiểm tra tại 2 điểm 1 và 2 (hình 9.5) như sau:

Tại điểm 1:

$$\sigma_{\max} = \frac{76700}{218200} \cdot 41 = 14,41 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Tại điểm 2: tiếp giáp giữa lòng và đế nhưng thuộc về lòng:

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} y_2 = \frac{76700}{218200} \cdot 40 = 14,06 \text{ kN/cm}^2$$

• Tính ứng suất tiếp:

$$\tau_2 = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \cdot \delta_c} = \frac{166,7 \cdot 40 \cdot 40,5}{218200 \cdot 1,2} = 1,03 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất tương đương tại 2:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \tau_2^2} = 14,21 \text{ kN/cm}^2 \leq [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Vậy tại các điểm 1, 2 của mặt cắt 3 đảm bảo điều kiện bền. Quy luật phân bố ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt 3 được cho trên hình 9.5.

b. Kiểm tra phân bố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy nguy hiểm nhất

Mặt cắt có lực cắt lớn nhất là mặt cắt tại bên phải gối tựa 1, có $Q_{\max}^{(1)} = 3,532 \text{ qa} = 353,3 \text{ kN}$.

Do đó:

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{Q_{\max}^{(1)} S_x^c}{J_x \delta_c} = \frac{353,2.4015,73}{218200.1,2} = 5,42 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2.$$

Như vậy tại điểm 3 trên mặt cắt bên phải gối 1 điều kiện bền được đảm bảo rất tốt.

b. Kiểm tra toàn diện điều kiện cứng

Từ các kết quả ở mục 2 và các biểu đồ (φ), (V) ta rút ra:

$$\max |V| = 3,834 \text{ cm} < [V] = \frac{l}{400} = \frac{1580}{400} = 3,95 \text{ cm}$$

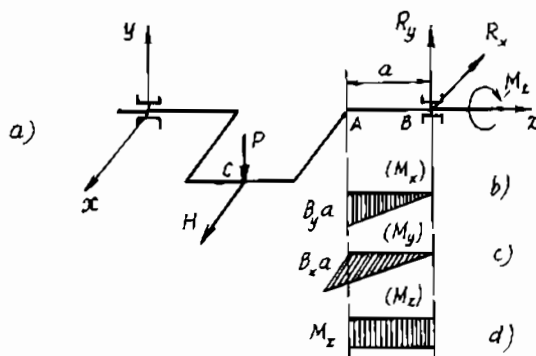
$$\max |\varphi| = 6,885.10^{-3} \text{ rad} < [\varphi] = 0,05 \text{ rad}.$$

Các điều kiện cứng cũng được thỏa mãn.

§4. TÍNH KẾT CẤU CHỦ YẾU CHỊU UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Đây là bài toán thường gặp trong các chi tiết máy, mà trục khuỷu là một ví dụ điển hình và cũng là rất phức tạp.

Hãy xét một trục khuỷu chịu tác dụng của lực thẳng đứng P và lực ngang ở mặt cắt C của khuỷu như hình 9.6a. Khuỷu như thế tiếp thu chủ yếu mômen xoắn, ngoài ra còn tiếp thu cả mômen uốn và lực cắt. Giả sử rằng do hai lực này ở ổ B có các phản lực R_y , R_x và M_z . Khi chỉ xét một đoạn trục AB thì các biểu đồ mômen uốn trong hai mặt phẳng vuông góc và mômen xoắn có dạng như hình 9.6b, c, d.



Hình 9.6.

Đối với trục có mặt cắt ngang tròn thì mọi trục trung tâm đều là những trục quán tính chính. Do đó, ta có thể tính mômen uốn tổng:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Nếu xác định được mômen uốn tổng ở một dãy các mặt cắt ngang thì có thể dựng được biểu đồ M_u cho tất cả các đoạn trục và trong trường hợp tổng quát biểu đồ này là một đường cong. Ngoài ra, nếu đặt các tung độ của biểu đồ này vào mặt phẳng tác dụng của mômen uốn tổng thì đối với một lớp rộng các bài toán, biểu đồ này là một đường cong không gian.

Ở mỗi mặt cắt có M_u , M_z xác định (bỏ qua tác dụng của các nội lực khác), ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} \quad \text{và} \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Một câu hỏi được đặt ra ở đây là ứng suất nào trong hai ứng suất này là nguy hiểm hơn theo quan điểm về độ bền của vật liệu làm trục. Câu trả lời cuối cùng cho câu hỏi này là nội dung của chương 6 – “Các tiêu chuẩn bền và dẻo”.

Trong tiết này ta sẽ xét cách tính toán cụ thể các thanh có mặt cắt ngang là hình tròn và hình chữ nhật chịu uốn và xoắn đồng thời.

1. Trường hợp thanh mặt cắt ngang tròn

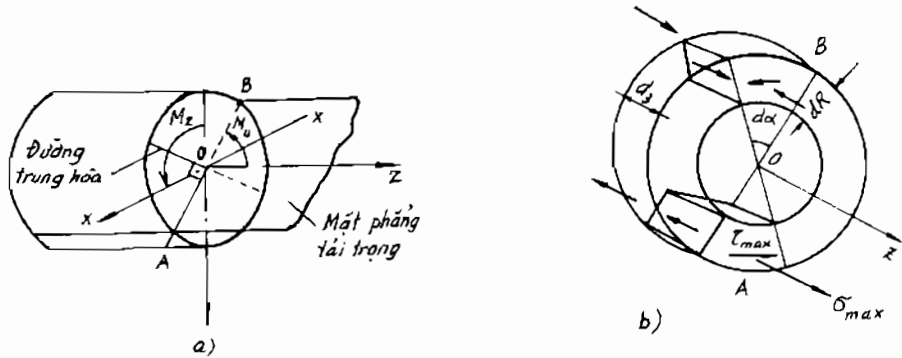
Các thanh tròn không bao giờ bị uốn xiên, cho nên nếu trên mặt cắt ngang có hai ngẫu lực uốn M_x và M_y thì luôn luôn có thể hợp hai ngẫu lực đó thành một ngẫu lực uốn M_u trong mặt quán tính chính trung tâm. Như vậy, ta được mô hình của thanh chịu uốn phẳng. Đường trung hoà vuông góc với mặt phẳng tải trọng và ứng suất pháp có trị số lớn nhất tại các giao điểm A và B giữa mặt phẳng tải trọng với đường chu vi của mặt cắt ngang (hình 9.7a). Tại đây:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} \quad (a)$$

trong đó:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$W_u = W_x = W_y$$



Hình 9.7.

Ngoài ứng suất pháp do ngẫu lực uốn M_u gây nên ở trên mặt cắt ngang còn ứng suất tiếp do ngẫu lực xoắn M_z gây nên. Ứng suất tiếp lớn nhất tại các điểm trên đường chu vi của mặt cắt. Vậy tại các điểm A và B trên đây, ngoài ứng suất pháp lớn nhất, còn ứng suất tiếp lớn nhất.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (b)$$

Vậy các điểm A và B là các điểm nguy hiểm nhất. Tại A và B, ta tách ra những phân tố hình hộp với các mặt cắt như sau (hình 9.7b): hai mặt trụ đồng trục với hiệu bán kính vô cùng bé dR , hai mặt cắt đi qua trục thanh và làm với nhau một góc vô cùng bé $d\alpha$, hai mặt cắt ngang với khoảng cách vô cùng bé dz , ta thấy trạng thái ứng suất của các phân tố trên là trạng thái ứng suất phẳng. Do đó điều kiện bền của phân tố theo thuyết bền thứ 3 và thứ 4 như sau:

– Theo giả thiết ứng suất tiếp lớn nhất

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Thay σ và τ từ các công thức (a) và (b) vào công thức trên và chú ý rằng đối với mặt cắt ngang hình tròn.

$W_p = W_x + W_y = 2 W_x$, ta được:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

– Theo giả thiết thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Cụ thể hơn:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2} \leq [\sigma] \quad (9.8)$$

Có thể viết các công thức (9.7) và (9.8) dưới dạng chung sau đây:

$$\sigma_{T_1} = \frac{M_{T_1}}{W_x} \quad (9.9)$$

trong đó:

M_{T_1} – gọi là mômen tương đương theo các thuyết bền tương ứng:

$$M_{T_1} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad , \quad M_{T_1} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + \frac{3}{4} M_z^2}$$

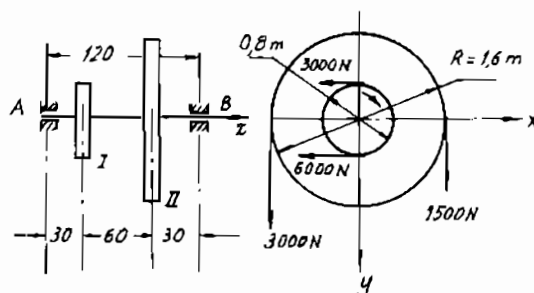
2. Trường hợp thanh mặt cắt chữ nhật

Đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất ở điểm giữa của cạnh dài và có trị số tương đối lớn ở điểm giữa của cạnh ngắn. Trong số các điểm góc và các điểm giữa của các cạnh, rất khó xác định điểm nào là nguy hiểm nhất. Vì vậy khi kiểm tra bền, thường phải kiểm tra tất cả các phân tố tại các điểm nói trên. Cách thiết lập điều kiện bền cũng tương tự như trường hợp trên, do đó ở đây không nhắc lại nữa. Để minh họa nguyên tắc tính toán vừa mô tả ta xét vài ví dụ bằng số sau đây.

§5. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Trên trục AB (hình 9.8a) có hai bánh đai: bánh bị dẫn I của truyền động đai theo phương x và bánh dẫn II của truyền động đai theo phương y. Sức căng trên các nhánh đai được ghi trên hình 9.8a.

Ứng suất cho phép của trục: $[\sigma] = 6 \text{ kN/cm}^2$. Hãy xác định đường kính của trục (bỏ qua trọng lượng của trục và bánh đai).



GIẢI

Xác định ngoại lực trên trục. Gọi

S'_1 và S'_2 là sức căng trên nhánh căng và nhánh chùng thuộc bánh đai I. Do các sức căng đó, trục chịu một tải trọng tập trung tại mặt cắt I bằng:

$$P' = S'_1 + S'_2 \quad (a)$$

Trong bài toán này do $S'_1 \parallel S'_2$ ta có:

$$P' = P_x = 6 + 3 = 9 \text{ kN}$$

Tương tự như vậy, tại mặt cắt II, có tải trọng tập trung:

$$P'' = P_y = 3 + 1,5 = 4,5 \text{ kN}.$$

Vẽ biểu đồ nội lực

Trong mặt phẳng Axz (hình 9.8b)

$$\Sigma M_B = A_x \cdot 120 - P' \cdot 90 = 0$$

Suy ra:

$$A_x = \frac{9 \cdot 90}{120} = 6,75 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = -B_x \cdot 120 + P' \cdot 30 = 0$$

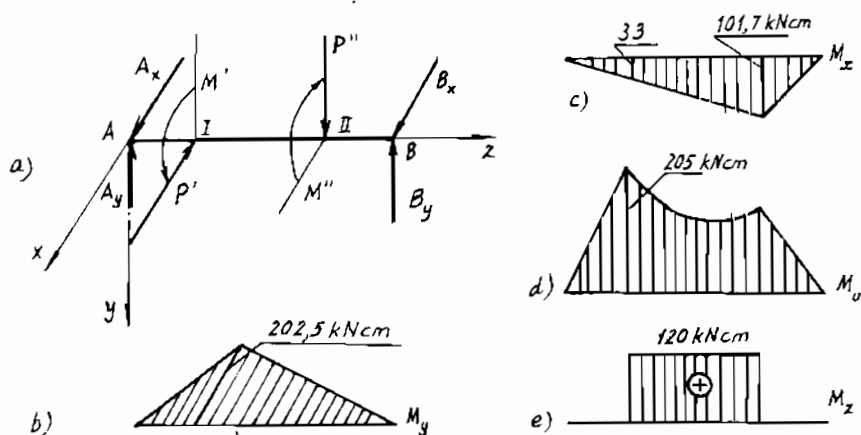
Suy ra: $B_x = \frac{9 \cdot 30}{120} = 2,25 \text{ kN}$

Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt I:

$$M_y^I = A_x \cdot 30 = 6,75 \cdot 30 = 202,5 \text{ kNcm}$$

Trong mặt phẳng Ayz:

$$\Sigma M_B = -A_y \cdot 120 + P'' \cdot 30 = 0$$



Hình 9.8b.

Suy ra:

$$A_y = \frac{4,5 \cdot 30}{120} = 1,13 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = B_y \cdot 120 - P'' \cdot 90 = 0$$

Suy ra:

$$B_y = \frac{4,5 \cdot 90}{120} = 3,37 \text{ kN}$$

Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt II:

$$M_x^{II} = A_y \cdot 90 = 1,13 \cdot 90 = 101,7 \text{ kNcm}$$

Mômen uốn tổng hợp được tính theo công thức:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Biểu đồ mômen uốn tổng hợp $M_u(z)$ có dạng hình 9.8d. Ta thấy mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt I:

$$M_{\max} = \sqrt{(202,5)^2 + (33,9)^2} = 205 \text{ kNcm.}$$

Biểu đồ mômen xoắn M_z được vẽ trên hình 9.8e.

Xác định đường kính của trục

Tại mặt cắt nguy hiểm I, điều kiện bền của trục là:

$$\begin{aligned} \sigma_{T_1} &= \frac{1}{W_x} \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \leq [\sigma] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{0,1d^3} \sqrt{(202,5)^2 + (120)^2} \leq [\sigma] \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra đường kính của trục:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(205)^2 + (120)^2}}{0,1[\sigma]}} = 7,34 \text{ cm}$$

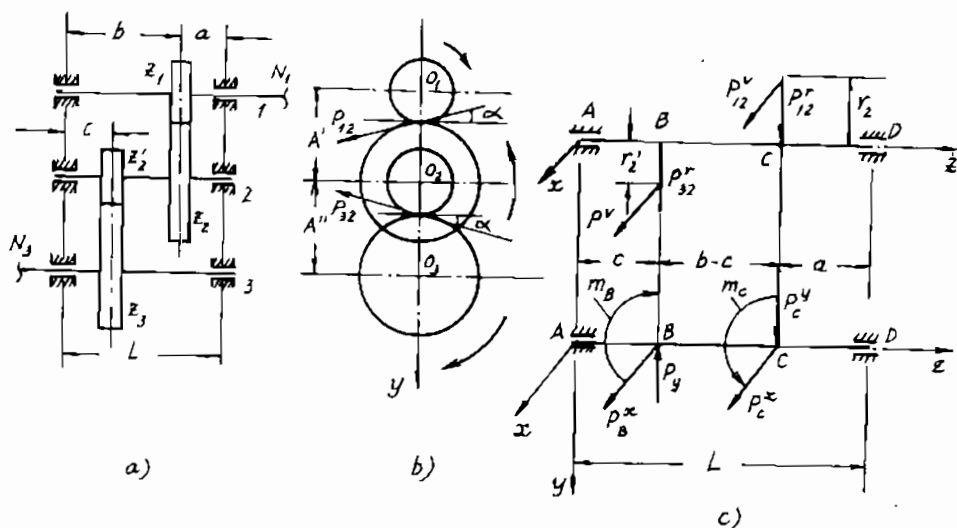
Theo tiêu chuẩn TCVN, ta chọn $d = 7,5 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Xác định đường kính d_2 của trục 2 trong hộp giảm tốc hai cấp, làm bằng bánh răng trụ tròn răng thẳng thân khai như trên hình 9.9a. Cho trước: các kích thước a, b, c ; số răng z và môđun m của các bánh răng, góc ăn khớp α ; công suất ra N_3 và số vòng quay trong một phút n_3 của trục ra 3, hiệu suất η_i của các cặp ổ và hiệu suất η_{ij} của các cặp bánh răng; ứng suất cho phép của vật liệu $[\sigma] \text{ N/mm}^2$.

GIẢI

Công suất trên trục 2 bằng:

$$N_2 = \frac{1}{\eta_3 \eta_{32} \eta_2} N_3, \text{ kW}$$



Hình 9.9.

Dời lực tác dụng trên các bánh răng về trục hình học z của trục 2, ta có sơ đồ tính trục 2 như hình 9.9c.

Trị số mômen xoắn trong đoạn BC trên trục 2 là:

$$M_2 = \frac{9,55 \cdot 10^6 N_1}{n_2} = \frac{9,55 \cdot 10^6 N_2}{i_{23} n_3}, \text{ Nmm}$$

trong đó: n_2, n_3 – số vòng quay trong một phút của trục 2 và trục 3 với tỷ số truyền i_{23} :

$$i_{23} = \frac{z_3}{z_2}$$

Lực vòng và lực hướng tâm trên bánh răng 2' hình 9.9c:

$$P_{32}^v = P_B^x = \frac{M_2}{r_2'} = \frac{2M_2}{m z_2'}$$

$$P_{32}^r = P_B^y = P_B \cdot \tan \alpha$$

Lực vòng và lực hướng tâm trên bánh răng 2:

$$P_{12}^V = P_C^* = \frac{M_2}{r_2} = \frac{2M_2}{m.z_2}$$

$$P_{12}^r = P_C^v = P_C \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Sau khi đã có sơ đồ tải trọng có thể dễ dàng xác định phản lực ở các ổ A và D và vẽ biểu đồ nội lực trong từng mặt phẳng Axz và Ayz. Ta thấy ở trong đoạn BC, trục 2 bị uốn và xoắn đồng thời. Trị số mômen uốn tại mặt cắt nguy hiểm phụ thuộc trị số cụ thể của ngoại lực. Trong bài toán này chỉ có một trong hai mặt cắt B và C thuộc BC là nguy hiểm nhất.

Đường kính d_2 của trục tại mặt cắt nguy hiểm này được xác định theo công thức:

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{0,1 [\sigma]}} \text{ , mm}$$

Ví dụ 3:

Hãy xét một trường hợp riêng của bài toán trên. Đó là bài toán trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có hai thành phần nội lực là mômen xoắn M_z và lực dọc N_z . Bài toán này có tên gọi là *xoắn và kéo (nén) đồng thời*.

Đối với thanh tròn, tại các điểm trên đường chu vi của mặt cắt ngang ta có:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} = \frac{4N_z}{\pi d^2} \text{ , } \tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16M_z}{\pi d^3}$$

Theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất, điều kiện bền tại các điểm đó là:

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < [\sigma]$$

hay:

$$\sigma_{T_1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{16N^2}{d^4} + \frac{1024 M_z^2}{d^6}} \leq [\sigma]$$

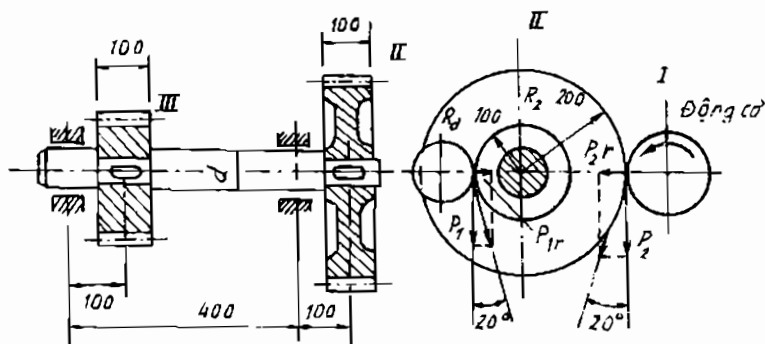
Đối với thanh mặt cắt chữ nhật $b \times h$ thì điểm nguy hiểm nhất cần kiểm tra là điểm ở giữa cạnh dài h . Cụ thể là theo thuyết bet. 4:

$$\sigma_{T_1} = \sqrt{\left(\frac{4N_z}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{\alpha h b^2}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Ví dụ 4:

Một trục truyền được lắp bánh răng II hình trụ răng thẳng để nhận năng lượng từ một động cơ có công suất $W = 10$ mã lực, quay 100 vòng trong một phút và truyền chuyển động cho bánh răng III. Phương các lực tác dụng được cho trên hình 9.10a. Ứng suất cho phép của vật liệu chế tạo trục là $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.

Xác định kích thước cần thiết của trục truyền theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng và thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Xét hai trường hợp có kể đến thành phần lực hướng tâm và không kể đến lực này. Khi tính bỏ qua trọng lượng trục và sự mất mát lực truyền chuyển động giữa các bánh răng và ổ trục.



Hình 9.10a.

GIẢI

Mômen xoắn tác dụng vào trục:

$$M_z = 716200 \frac{W}{n} = 716200 \frac{10}{100} = 71620 \text{ Ncm}$$

Trường hợp 1 (không kể đến lực hướng tâm P_r). Trục chịu uốn bởi lực P_1 và P_2 :

$$P_1 = \frac{M_z}{r_1} = \frac{71620}{10} = 7162 \text{ N}$$

$$P_2 = \frac{M_z}{r_2} = \frac{71620}{20} = 3581 \text{ N}$$

Từ biểu đồ mômen uốn M_x (hình 9.10b) ta có $M_{x\max} = 447 \text{ Nm}$ tại mặt cắt I.

Đường kính tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + M_z^2}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{44700^2 + 71620^2}{0,1 \cdot 10000}} \approx 4,1 \text{ cm.}$$

Tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng:

$$d_4 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x\max}^2 + 0,75 M_z^2}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{44700^2 + 0,75 \cdot 71620^2}{0,1 \cdot 10000}} \approx 3,9 \text{ cm.}$$

Trường hợp 2 (có kể đến lực hướng tâm P_r). Ngoài mômen uốn và xoắn M_x , M_z , trục còn bị uốn do mômen uốn M_y (hình 9.10b).

Thành phần lực hướng tâm:

$$P_{1r} = P_1 \tan 20^\circ = 762 \cdot 0,364 = 2160 \text{ N,}$$

$$P_{2r} = P_2 \tan 20^\circ = 3581 \cdot 0,364 = 1305 \text{ N.}$$

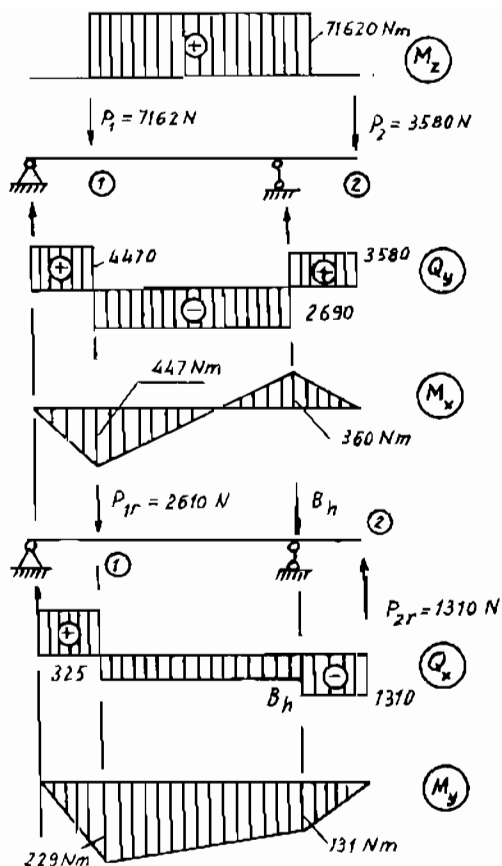
Từ biểu đồ mômen uốn M_y , ta có $M_{y\max} = 229 \text{ Nm}$ ở cùng mặt cắt với $M_{x\max}$.

Mômen tương đương tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\begin{aligned} M_{t3} &= \sqrt{M_{x\max}^2 + M_{y\max}^2 + M_z^2} = \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 71620^2} = \\ &= 76450 \text{ Ncm.} \end{aligned}$$

Đường kính trục:

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{M_{t3}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{76450}{0,1 \cdot 10000}} \approx 4,3 \text{ cm.}$$



Hình 9.10b.

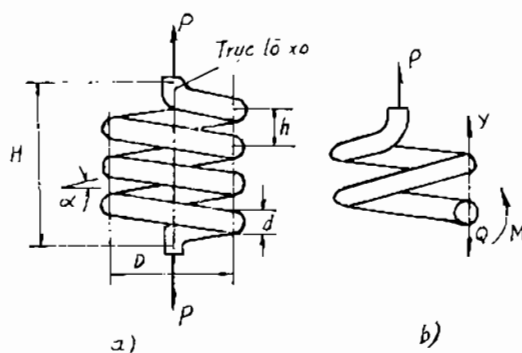
§6. TÍNH LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN CHỊU KÉO HOẶC NÉN

Lò xo là một chi tiết được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật, ví dụ trong các bộ phận giảm chấn, các thiết bị bảo vệ của các máy chịu áp lực lớn.

Hình 9.11a biểu diễn một lò xo xoắn ốc hình trụ bị kéo bởi lực P với:

- h là bước của dây lò xo;
- d là đường kính dây lò xo;

- D là đường kính trung bình của vòng dây lò xo;
- α là góc nghiêng của các dây lò xo so với mặt phẳng nằm ngang;
- n là số vòng dây lò xo.



Hình 9.11.

Nội lực trong các lò xo chịu kéo (nén), xét một cách đầy đủ có các nội lực sau đây: Mômen xoắn $M_x = \frac{PD}{2} \cos \alpha$, mômen uốn $M_u = \frac{PD}{2} \sin \alpha$, lực cắt $Q = P \cos \alpha$, lực dọc $N = P \sin \alpha$.

Để đơn giản việc tính toán, ta giả thiết:

1. Góc nghiêng α rất bé ($\alpha \leq 8^\circ \div 10^\circ$). Với góc α đó thì nội lực M_x trên mặt cắt ngang của dây lò xo đóng vai trò quan trọng nhất;
2. Đường kính d của dây lò xo và đường kính trung bình D của lò xo thỏa mãn điều kiện về chỉ số $C = \frac{D}{d}$ của lò xo như sau: $4 \leq C \leq 12$.

1. Ứng suất

Ta tưởng tượng cắt lò xo bằng một mặt phẳng chứa trục của lò xo và vuông góc với dây lò xo. Xét sự cân bằng của một trong hai phần đó, thí dụ phần trên (hình 9.11b).

Với lò xo bước ngắn, ta có thể coi mặt phẳng của tiết diện dây lò xo trùng với mặt phẳng chứa trục lò xo. Để cân bằng với lực kéo P , trên mặt cắt dây lò xo phải xuất hiện hai thành phần nội lực là lực cắt Q và mômen xoắn M_x :

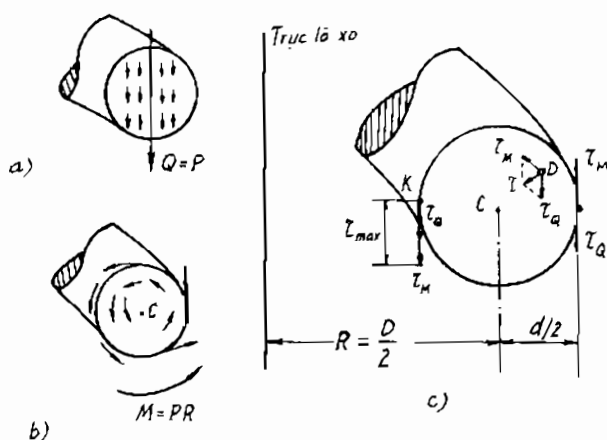
$$Q = P \quad ; \quad M_z = P \cdot \frac{D}{2} \quad (a)$$

Lực cắt Q sinh ra ứng suất tiếp τ_Q cùng chiều với nó. Một cách gần đúng, ta xem ứng suất tiếp τ_Q phân bố đều (hình 9.12a):

$$\tau_Q = \frac{Q}{F} \quad (b)$$

hoặc tính chính xác:

$$\tau_{Qmax} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \quad (c)$$



Hình 9.12.

Mômen xoắn M_z sinh ra ứng suất tiếp τ_M . Vì góc nghiêng α rất bé nên ta có thể tính theo thanh tròn thẳng:

$$\tau_M = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad (d)$$

Ứng suất τ_M có giá trị lớn nhất tại những điểm trên chu vi mặt cắt (hình 9.12b, c).

$$\tau_M^{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.10)$$

Theo hình 9.12c ta thấy, điểm K mép trong của tiết diện (tức là tại điểm nằm gần trục lò xo) là điểm nguy hiểm vì hai ứng suất tiếp

thành phần cùng chiều. Vậy ứng suất tiếp tổng cộng đạt giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \tau_M^{\max} + \tau_Q = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2}$$

hay:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \quad (9.11)$$

Trong thực tế, đường kính của dây lò xo thường bé hơn rất nhiều so với đường kính trung bình của lò xo (theo giả thiết 2 thì tỉ số $\frac{d}{2D} < 0,1$), do đó ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai. Khi đó ta có:

$$\tau_{\max} = K_1 \cdot \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.12)$$

trong đó K_1 – hệ số điều chỉnh, kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q và ảnh hưởng của độ cong vòng dây lò xo, kể đến sự phân bố và giá trị của ứng suất tiếp do mômen xoắn M_x gây ra.

Các trị số của K_1 được cho trong bảng 9.1.

Bảng 9.1.

D/d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K_1	2,06	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1
K_2	1,12	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1

Trong trường hợp mặt cắt ngang dây lò xo là hình chữ nhật (hình 9.13) thì do chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen xoắn nên công thức tính $\tau_{\max}$ sẽ có dạng sau:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_{\text{XOẮN}}} = \frac{PD}{2\alpha ab^2} \quad (9.13)$$

Muốn lò xo đảm bảo độ bền thì ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo không được vượt quá ứng suất cho phép, tức là:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

2. Biến dạng của lò xo

Gọi λ là độ giãn hay co của lò xo do lực P gây ra. Công của ngoại lực trên biến dạng đó là:

$$A = \frac{1}{2} P \lambda \quad (9.14)$$

Công này chuyển hoá thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong lò xo. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q thì:

$$U = \frac{M_z^2 \cdot l}{2GJ_p} \quad (9.15)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$A = U \quad (9.16)$$

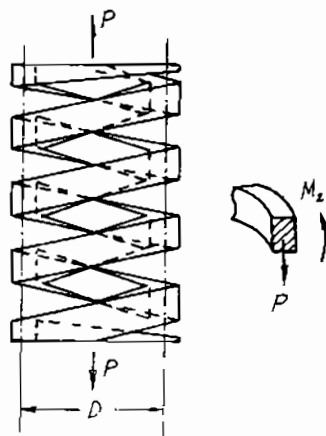
Cân bằng công ngoại lực và thế năng với chú ý $l = n\pi D$ (n là số vòng dây lò xo) và $J_p = \pi d^4/32$, ta tính được độ giãn (hay co) λ của lò xo:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \quad (9.17a)$$

hay:
$$\lambda = \frac{P}{C} \quad (9.17b)$$

trong đó: $C = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ gọi là độ cứng của lò xo, đơn vị là N/mm, N/cm.

Nghĩa là lực cần thiết đặt vào lò xo để độ co hoặc độ giãn λ bằng một đơn vị dài.

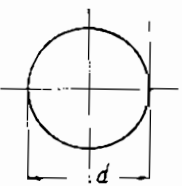
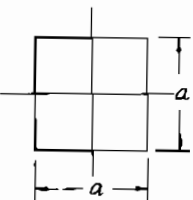
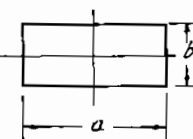


Hình 9.13.

Các công thức tính toán lò xo trụ bước ngắn chịu kéo – nén được cho ở bảng 9.2.

Bảng 9.2

Công thức tính toán lò xo trụ chịu kéo – nén

Dạng mặt cắt	$\tau_{\max}$ daN/cm ²	$P_{\max}$ daN	λ , cm	C daN/cm
	$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} = 2,55 \frac{PD}{d^3}$	$P_{\max} = \frac{\pi d^3}{8D} [\tau] = 0,392 \frac{d^3}{D} [\tau]$	$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Gd^4}{8D^3 n}$
	$\tau_{\max} = \frac{2,4 \cdot PD}{a^3}$	$P_{\max} = 0,416 \frac{a^3}{D} [\tau]$	$\lambda = 5,567 \cdot \frac{PD^3 n}{Ga^4} = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Ga^4}{5,567 \cdot D^3 \cdot n}$
	$\tau_{\max} = \gamma \frac{PD^3}{b^3}$	$P_{\max} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{b^3}{D} [\tau]$	$\lambda = \Delta \frac{PD^3 \cdot n}{Gb^4} = \frac{P}{C}$	$C = \frac{Gb^4}{\Delta D^3 \cdot n}$
Giá trị của các hệ số γ , Δ được cho trong bảng 9.3				

Bảng 9.3

$\frac{a}{b}$	γ	Δ	$\frac{a}{b}$	γ	Δ
1,0	2,404	5,567	2,5	0,775	1,256
1,5	1,442	2,670	3,0	0,625	0,995
1,75	1,195	2,086	4,0	0,442	0,698
2,00	1,016	1,713	6,0	0,278	0,439
			10,0	0,160	0,252

Ví dụ

Hai lò xo có cùng số vòng $n = 10$, cùng đường kính dây $d = 8 \text{ mm}$. Đường kính trung bình $D_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 100 \text{ mm}$, tổng chiều dài của hai lò xo là $l_1 + l_2 = 400 \text{ mm}$, chịu lực nén Q như (hình 9.14a).

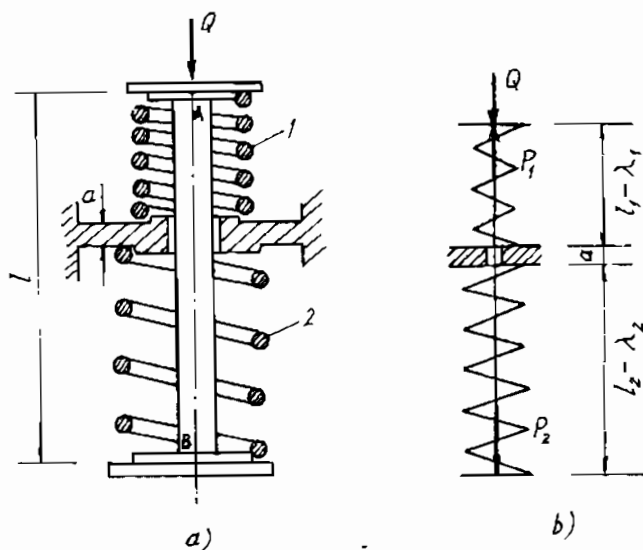
- 1) Tính ứng suất và biến dạng của mỗi lò xo sau khi lắp ghép?
- 2) Xác định lực Q cần thiết để lò xo 2 không làm việc?
- 3) Xác định lực Q theo ứng suất cho phép $[\tau]$ và lực Q theo trạng thái dẻo giới hạn?

Cho $l = 210 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$, $G = 8.106 \text{ N/cm}^2$, $[\tau] = 50000 \text{ N/cm}^2$, $\tau_{CH} = 75000 \text{ N/cm}^2$.

GIẢI

Gọi lực mà lò xo 1 và lò xo 2 phải chịu là P_1 và P_2 , phương trình cân bằng của thanh thép AB là:

$$P_1 - P_2 - Q = 0 \quad (a)$$



Hình 9.14.

Đặt λ_1 và λ_2 là độ co của hai lò xo, ta có phương trình biến dạng trong trường hợp này là:

$$l = l_1 - \lambda_1 + l_2 - \lambda_2 + a$$

hay $210 = 410 - \lambda_1 - \lambda_2$

hay $\lambda_1 + \lambda_2 = 200 \text{ mm.}$

Thay λ bằng biểu thức tính theo lực nén các lò xo ta có:

$$\frac{8P_1 D_1^3 n}{Gd^4} + \frac{8P_2 D_2^3 n}{Gd^4} = 20 \text{ cm}$$

hay $\frac{8.8^3.10}{8.10^6.0,8^4} P_1 + \frac{8.10^3.10}{8.10^6.0,8^4} P_2 = 20 \text{ cm}$

hay $0,0125 P_1 + 0,0244 P_2 = 20 \text{ cm} \quad (b)$

Giải hệ phương trình (a), (b) ta rút ra:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 540 + 0,661Q \\ P_2 &= 542 - 0,339Q \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Sau khi lắp $Q = 0 \Rightarrow P_1 = P_2 = 542 \text{ N.}$

Ứng suất sau khi lắp chưa có ngoại lực Q là:

$$\tau_1 = k_1 \frac{8P_1 D_1}{\pi d^3} = 1,14 \frac{8.542.8}{3,14.0,8^3} = 24600 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_2 = k_2 \frac{8P_2 D_2}{\pi d^3} = 1,14 \frac{8.542.8}{3,14.0,8^3} = 29900 \text{ N/cm}^2$$

Biến dạng nén của mỗi lò xo sau khi lắp:

$$\lambda_1 = \frac{8P_1 D_1^3 n}{Gd^4} = \frac{8.542.8^3.10}{8.10^6.0,8^4} = 6,78 \text{ cm}$$

$$\lambda_2 = \frac{8P_2 D_2^3 n}{Gd^4} = \frac{8.542.810^3.10}{8.10^6.0,8^4} = 13,2 \text{ cm}$$

Điều kiện để lò xo 2 ở trạng thái tự do khi $Q \neq 0$ thì $P_2 = 0$ và từ (c) ta suy ra:

$$Q = \frac{542}{0,339} = 1600 \text{ N}$$

Tải trọng cho phép tính theo điều kiện bền của lò xo 1 (vì theo (c) khi có Q lò xo 2 giảm ứng suất).

$$\tau_1 = k \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi d^3} \leq 50000 \Rightarrow [Q] \leq 0,847 \text{ kN.}$$

Lực Q dẻo giới hạn đạt được khi ứng suất tiếp ở mọi điểm trên các mặt cắt của lò xo 1 đạt được giới hạn chảy τ_{CH} với giả thiết vật liệu là đàn dẻo lý tưởng ta có:

$$M_{CH} = W_d \cdot \tau_{CH} \Rightarrow P_1 R_1 \cdot \cos \alpha = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \tau_{CH} \Rightarrow Q_1 = Q_{gh}^d$$

$$Q_{gh}^d \approx \frac{\tau_{CH} \cdot 2\pi r^3 - 542 R_1}{3 \cdot 0,661 R_1} = 2980,33 \text{ N} = 2,98 \text{ kN.}$$

Lực nén Q trong hai trường hợp có tỷ lệ:

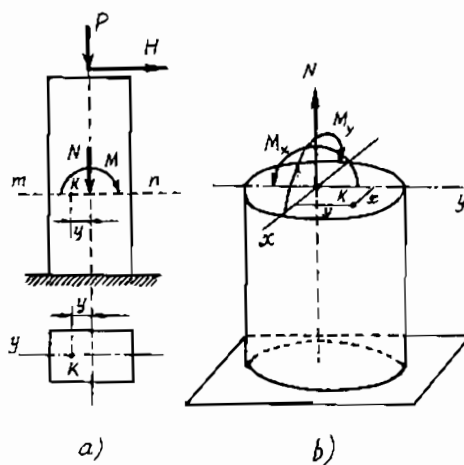
$$\frac{Q_{gh}^d}{[Q]} = 35$$

§7. ĐƯỜNG TRUNG HOÀ VÀ LỖI MẶT CẮT

1) Đường trung hoà

Đường trung hoà, như đã biết trong bài toán uốn, là đường trên đó ứng suất pháp bằng không. Nó là giao tuyến giữa mặt cắt ngang và mặt các ứng suất pháp σ .

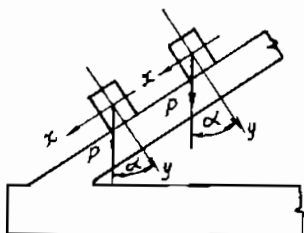
Ta hãy xét trường hợp chịu lực tổng quát nhất như hình 9.1a, b. Từ (9.2), theo định nghĩa về đường trung hoà $\sigma = 0$ ta có:



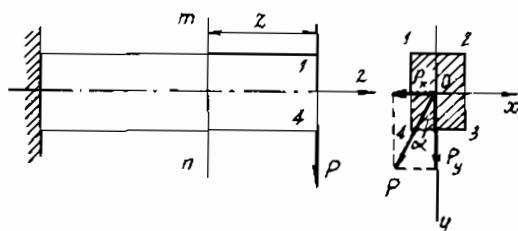
Hình 9.15.

$$\frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = 0 \quad (9.18)$$

Nếu trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp hình 9.15a, b do cả ba nội lực: N , M_x , M_y gây ra, ta có đường trung hoà dạng (9.18). Nếu trong công thức (9.2) hoặc (9.18) $N = 0$, còn $M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$. Khi ấy ta có một dầm chịu uốn xiên (hình 9.16).



Hình 9.16.



Hình 9.17.

Ứng suất tại điểm 1, 2, 3, 4 trên mặt cắt z bất kỳ là (hình 9.17)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_y \cdot z}{W_x} - \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{P_y \cdot z}{W_x} + \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \\ \sigma_3 &= -\frac{P_y \cdot z}{W_x} + \frac{P_x \cdot z}{W_y} ; \sigma_{\min} = \sigma_4 = -\frac{P_y \cdot z}{W_x} - \frac{P_x \cdot z}{W_y} \end{aligned}$$

Ứng suất tại một điểm bất kỳ (x, y) trên mặt cắt bất kỳ z là:

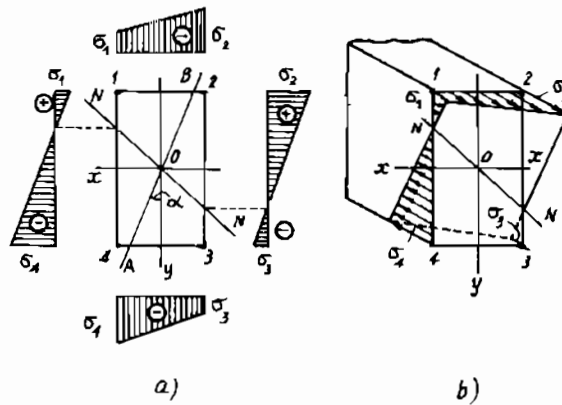
$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x \quad (a)$$

Từ bốn ứng suất tại 4 điểm: 1, 2, 3, 4 ta có thể dựng được mặt ứng suất σ như hình (9.18a, b).

Ứng với các điểm không trên biểu đồ ứng suất ta tìm được các điểm $N - N$ trên biên của mặt cắt. Nhờ các điểm này ta vẽ được một đường thẳng $N - N$ trên mặt cắt. Ứng suất ở mọi điểm trên đường

này đều bằng không. Theo định nghĩa, đường này gọi là đường trung hoà.

Thực chất phương trình (a) là phương trình mặt phẳng đi qua đường không. Khoảng cách từ một điểm của mặt phẳng này đến mặt cắt ngang bằng ứng suất σ được xác định từ phương trình (a) (hình 9.18b).



Hình 9.18.

Vì vậy, đường trung hoà khi uốn xiên được xác định từ phương trình:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y} = 0 \quad \text{hay} \quad y = ax \quad (9.19)$$

trong đó:

$$a = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (9.19a)$$

Đường trung hoà được dùng để tìm điểm có ứng suất pháp cực trị (điểm xa nhất đối với trục trung hoà) đối với những dầm có mặt cắt ngang bất kỳ không có một trục đối xứng nào cả và chủ yếu để tìm lõi của mặt cắt ngang thường gặp trong công tác thiết kế các công trình xây dựng. Ví dụ, thiết kế các móng đơn.

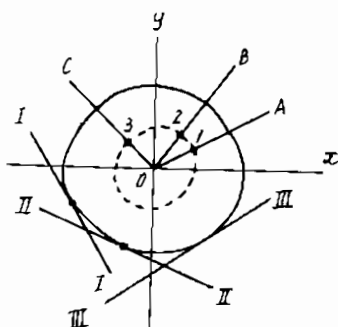
2. Lõi mặt cắt

Ta hãy tiếp tục khảo sát một mặt cắt ngang bất kỳ chịu một lực nén lệch tâm P di chuyển theo đường OA kể từ tâm O của mặt cắt. Khi lực P di chuyển như thế thì đường trung hoà di chuyển ngược lại từ vô cùng về tâm O và luôn luôn song song với chính nó hình 9.19a. Giả sử ở thời điểm mà đường trung hoà vừa tiếp xúc với chu vi mặt cắt (đường $I - I$) thì lực P di chuyển theo phương OA có vị trí tương ứng là điểm 1 (hình 9.19a). Nếu tiếp tục cho P di chuyển xa hơn đoạn $O1$ thì đường trung hoà di chuyển vào trong mặt cắt và chia mặt cắt thành hai phần kéo và nén. Nếu muốn trên mặt cắt chỉ tồn tại một loại ứng suất nén thì điểm 1 là điểm giới hạn vị trí của P di chuyển theo tia OA . Hoàn toàn tương tự như vậy, có thể xác định được các điểm 2, 3 theo các tia tương ứng OB và OC . Khi lực P dừng di chuyển ở các điểm này ta có các tiếp tuyến tương ứng $II - II$ và $III - III$. Chúng là những đường trung hoà. Cứ mỗi một tia đi ra từ O ta luôn có một điểm giới hạn. Tập hợp tất cả những điểm giới hạn như thế bao quanh trọng tâm O của mặt cắt, xác định một miền chứa trọng tâm O gọi là *lõi mặt cắt*. Một lực nén P bất kỳ đặt ở trong lõi mặt cắt đều gây ra trên toàn bộ mặt cắt chỉ những ứng suất nén. Hiện tượng cũng diễn ra tương tự, nếu có một lực kéo P đặt ở vùng lõi mặt cắt cũng gây ra chỉ những ứng suất kéo trên toàn bộ mặt cắt. Những điều nói trên đặc biệt quan trọng khi thiết kế các cấu kiện chịu nén làm bằng các vật liệu giòn như gang, bê tông, gạch, đá v.v. và cần phải xác định trước kích thước của lõi mặt cắt. Tức là phải xác định vị trí của các điểm giới hạn. Ta hãy xét một cột chịu nén lệch tâm (hình 9.19b). Với cột này, công thức tính ứng suất (9.2) có dạng mới:

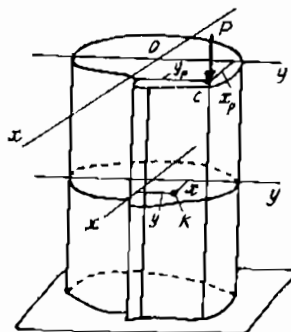
$$\sigma = - \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p}{i_x^2} \cdot y + \frac{x_p}{i_y^2} \cdot x \right) \quad (9.20)$$

Khi ký hiệu x_N và y_N là tọa độ của một điểm bất kỳ trên đường trung hoà, ta có phương trình đường trung hoà trong trường hợp này:

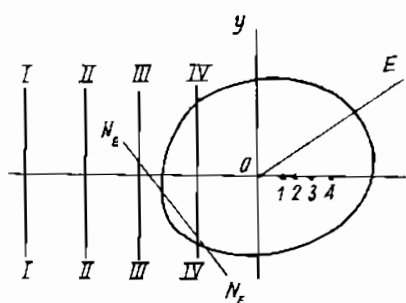
$$1 + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} = 0 \quad (9.21)$$



a)



b)



c)

Hình 9.19.

Nếu gọi a_x và a_y là tọa độ của các giao điểm của đường trung hoà với các trục tọa độ (hình 9.20a) thì những đoạn thẳng này xác định đường trung hoà N – N. Cụ thể là:

Khi đặt $x_N = 0$, $y_N = a_y$ và đặt $y_N = 0$, $x_N = a_x$, từ (9.21) ta thu được hệ phương trình:

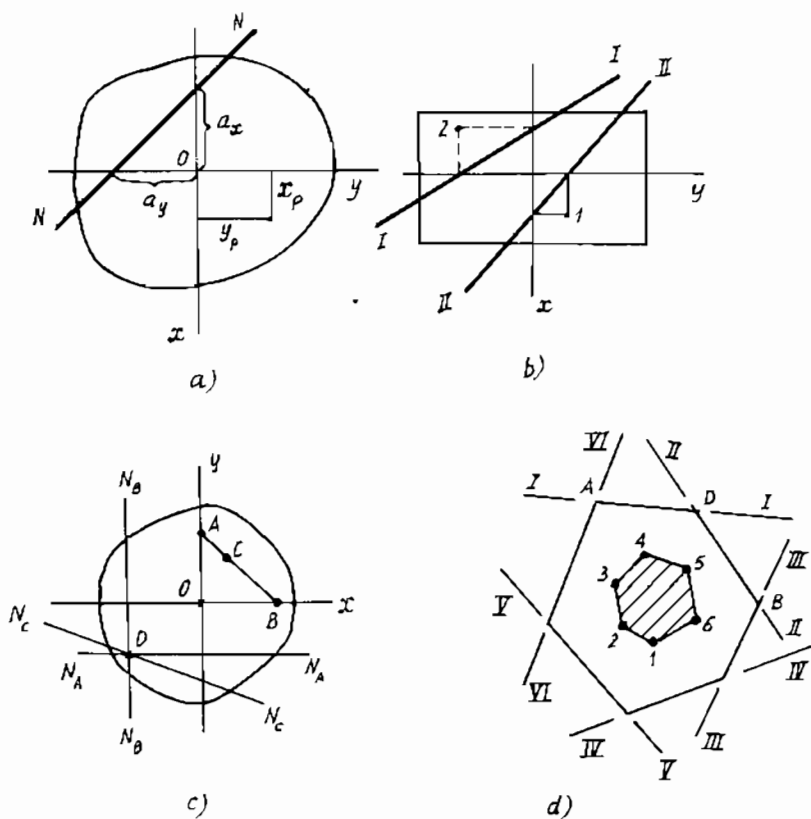
$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{y_p a_y}{i_x^2} &= 0 \\ 1 + \frac{x_p a_x}{i_y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{i_y^2}{x_p} \\ a_y &= -\frac{i_x^2}{y_p} \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Từ phương trình (9.22) suy ra:

$$\frac{a_x}{a_y} = \left(\frac{i_x}{i_y} \right)^2 \cdot \frac{x_p}{y_p} = \left(\frac{i_x}{i_y} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (9.23)$$

Ngược lại, ta cũng có tọa độ của điểm đặt lực x_p, y_p khi đã có a_x, a_y như sau:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -\frac{i_y^2}{a_x} \\ y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y} \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$



Hình 9.20.

Các nhận xét:

a) Nếu đặt lực vào điểm có tọa độ a_x và a_y thì đường trung hoà cắt các trục tọa độ ở các điểm x_p và y_p . Từ hình 9.20b ta thấy khi lực đặt vào điểm 1 thì đường trung hoà tương ứng là I – I.

Khi lực đặt vào điểm 2 thì đường trung hoà tương ứng là II – II.

b) Khi lực P di chuyển trên trục Oy thì đường trung hoà cắt trục Ox tại $a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{i_y^2}{0} = \infty$ và ngược lại. Ví dụ như khi lực P đặt lần lượt vào các điểm 1, 2, 3, 4 trên trục x thì đường trung hoà tương ứng là I – I, II – II, III – III, IV – IV v.v. (hình 9.19c).

c) Khi lực P di chuyển trên đường OE qua tâm O nhưng không trùng với một trục quán tính chính nào thì đường trung hoà di chuyển song song với chính nó và quan hệ (9.23) cho thấy tang góc nghiêng của đường trung hoà $\operatorname{tg}\beta = \frac{a_y}{a_x}$ chỉ phụ thuộc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_p}{y_p}$ mà không phụ thuộc vào giá trị của các tọa độ x_p và y_p (hình 9.19c).

d) Khi lực P di chuyển trên một đường AB nào đó không qua gốc tọa độ thì đường trung hoà quay quanh điểm D nào đó (hình 9.20c) và ngược lại.

e) Nếu đường trung hoà tiếp tuyến với chu vi mặt cắt thì điểm đặt lực tương ứng là x_p , y_p được tính theo (9.24). Đối với mặt cắt ngang dạng đa giác lồi (hình 9.20d) theo nhận xét, để có được lõi mặt cắt, ta cho các tiếp tuyến (các đường trung hoà) ví dụ tiếp tuyến I – I (cạnh AD của mặt cắt) quay quanh D đến vị trí DB, khi đó lực P sẽ di chuyển trên đường 1 – 2 tạo ra một cạnh của lõi v.v... Lõi nhận được cũng là một đa giác 123456 (hình 9.20d).

§8. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 6

Hãy thực hành xây dựng lõi mặt cắt đối với các trường hợp thường gặp nhất được cho trên hình 9.21a, b, c, d.

Trường hợp a: (hình 9.21a)

Đối với tiếp tuyến I-I: $a_x = \infty$, $a_y = h/2$. Tọa độ của đỉnh 1 của lõi được tìm theo công thức (9.24):

$$x_p = 0; y_p = -\frac{i_x^2}{(h/2)} = -\frac{2J_x}{hF} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}.$$

Điểm “1” này nằm trên trục y đối diện với tiếp tuyến I-I.

Tương tự như vậy, ta sẽ xác định được tọa độ các điểm (“3”, “2” và “4”) tương ứng như sau:

$$(0, h/6); (\pm \frac{b}{6}, 0). \text{ Lõi của mặt cắt chữ nhật là miền hình thoi}$$

1234. Có thể nhận được lõi này bằng cách quay các tiếp tuyến quanh các góc của chữ nhật như các nhận xét d và e.

Trường hợp b (hình 9.21b)

Tương ứng với 4 tiếp tuyến ta có 4 điểm là 4 đỉnh của lõi 1234. Do tính đối xứng của mặt cắt, nên chỉ cần xác định hai điểm:

$$C_y = \pm \frac{i_x^2}{(h/2)} \quad \text{và} \quad C_x = \pm \frac{i_y^2}{(b/2)}$$

Những giá trị bằng số của các C_y , C_x phụ thuộc vào kích thước cụ thể của mặt cắt chữ I. Lõi của mặt cắt chữ I cũng là một hình thoi (hình 9.21b).

Trường hợp c (hình 9.21c)

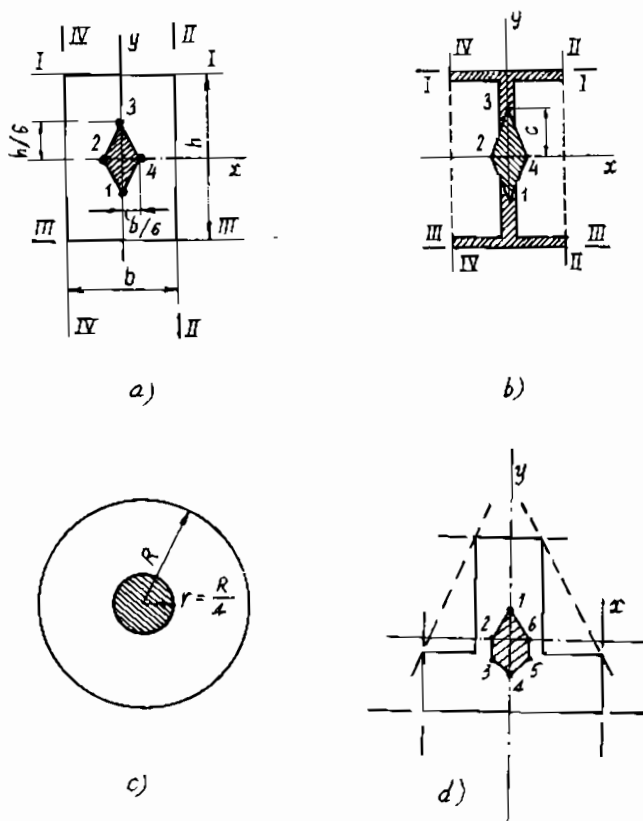
Mặt cắt là hình tròn đặc bán kính R . Do tính đối xứng tỏa tròn của mặt cắt nên chỉ cần xác định một điểm bất kỳ trên chu vi lõi. Điểm đó là:

$$r = -\frac{J_x}{FR} = -\frac{\pi R^4}{4\pi R^2 \cdot R} = -\frac{R}{4}.$$

Lõi mặt cắt là một hình tròn đồng tâm với mặt cắt và có bán kính r .

Trường hợp d (hình 9.21d)

Mặt cắt là một hình chữ T (một đa giác lõm). Hệ các đường tiếp tuyến với chu vi tạo thành một lục giác, vì thế mặt cắt này cũng là một lục giác 123456 (hình 9.21d).



Hình 9.21a, b, c, d.

Chương 10

CÁC NGUYÊN LÝ VÀ CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU

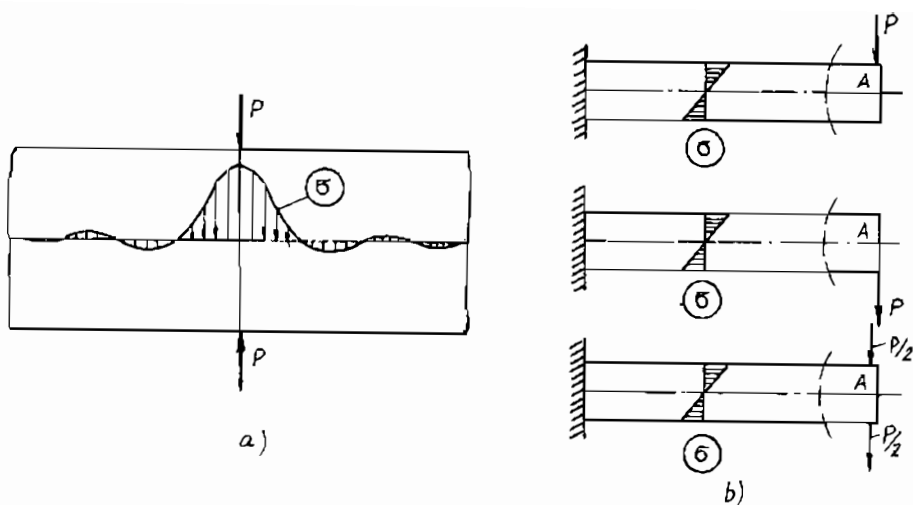
I. CÁC NGUYÊN LÝ TỔNG QUÁT

§1. NGUYÊN LÝ ĐỘC LẬP TÁC DỤNG

Do tính bé của chuyển vị cũng như biến dạng và do quan hệ tuyến tính giữa ứng suất – biến dạng, nên có thể sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực trong các tính toán. Nguyên lý này có nội dung như sau: “Tác dụng đồng thời của nhiều yếu tố (lực) bằng tổng các tác dụng riêng rẽ của từng yếu tố (lực) gây ra:

§2. NGUYÊN LÝ SAINTEVENANT

Nguyên lý này có ý nghĩa rất lớn trong các bài toán của sức bền vật liệu. Theo nguyên lý này thì nếu một hệ lực tương hỗ cân bằng đặt vào một miền nhỏ nào đó của vật thể thì nó chỉ gây ra những ứng suất cục bộ quanh vùng đặt lực và tắt rất nhanh khi càng đi xa miền (này) (hình 10.1a).



Hình 10.1.

Một cách diễn đạt khác nguyên lý này như sau:

Ở những điểm đứng đủ xa miền đặt lực thì các ứng suất phụ thuộc rất ít vào quy luật đặt lực trên bề mặt vật thể ở miền đó. Ví dụ, ứng suất trong dầm (hình 10.1b) sẽ rất khác nhau trong miền đặt lực A, nhưng ở ngoài miền này thì các ứng suất khác nhau rất ít và các kết quả tính toán của sức bền vật liệu chỉ phù hợp ở phần vật thể xa miền đặt lực. Trên cơ sở của nguyên lý này trong tính toán ta có thể thay tải trọng phân bố trên một miền đủ bé của bề mặt vật thể bằng một lực tập trung hoặc một mômen tập trung.

§3. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG CƠ HỌC

Nếu một kết cấu chịu tác dụng của ngoại lực thì nó bị biến dạng.

Giả sử dầm AB (hình 10.3b) chịu một lực đặt tĩnh (tăng dần từ 0 đến P). Độ võng của dầm ở điểm đặt lực là V. Trong quá trình biến dạng P thực hiện một công:

$$A_e = \frac{1}{2} P \cdot V \quad (10.1)$$

Dưới tác dụng của ngoại lực, vật thể đàn hồi bị biến dạng và trong lòng nó sẽ xuất hiện các thành phần nội lực. Công do các nội lực này được ký hiệu là A_i . Khi xem lực là bảo toàn, nghĩa là sau khi bỏ tải thì kết cấu hoàn toàn trở về trạng thái và vị trí ban đầu, thì công cũng như biến dạng là thuận nghịch (không có sự mất mát nào về năng lượng xảy ra). Năng lượng mà kết cấu tích lũy được trong quá trình bị biến dạng để đưa kết cấu từ trạng thái biến dạng về trạng thái hoàn toàn ban đầu gọi là thế năng. Thế năng này phụ thuộc vào vị trí của các chất điểm, nghĩa là phụ thuộc vào biến dạng. Thế năng của các nội lực được gọi là thế năng biến dạng và được ký hiệu là U . Nó bằng công của nội lực với dấu ngược lại:

$$U = - A_i \quad (10.2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$A_e = - A_i \quad (10.3)$$

hay

$$A_e + A_i = 0 \quad (10.4)$$

Đây chính là nội dung của nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học.

§4. NĂNG LƯỢNG BIẾN DẠNG VÀ NĂNG LƯỢNG BÙ

Chúng ta hãy tưởng tượng một thanh chịu kéo bởi lực P (hình 10.3c), được tăng dần từ 0 đến P_1 (hình 10.2a), độ giãn dài khi ấy là Δ_1 . Một cách tổng quát biến dạng đó trong miền đàn hồi là phi tuyến. Công mà lực P sinh ra là:

$$A = \int_0^{\Delta_1} P d\Delta \quad (10.5)$$

Tích phân này tương ứng với diện tích tam giác cong Oac trên hình 10.2a. Công này được lưu trữ lại trong thanh dưới dạng thế năng biến dạng:

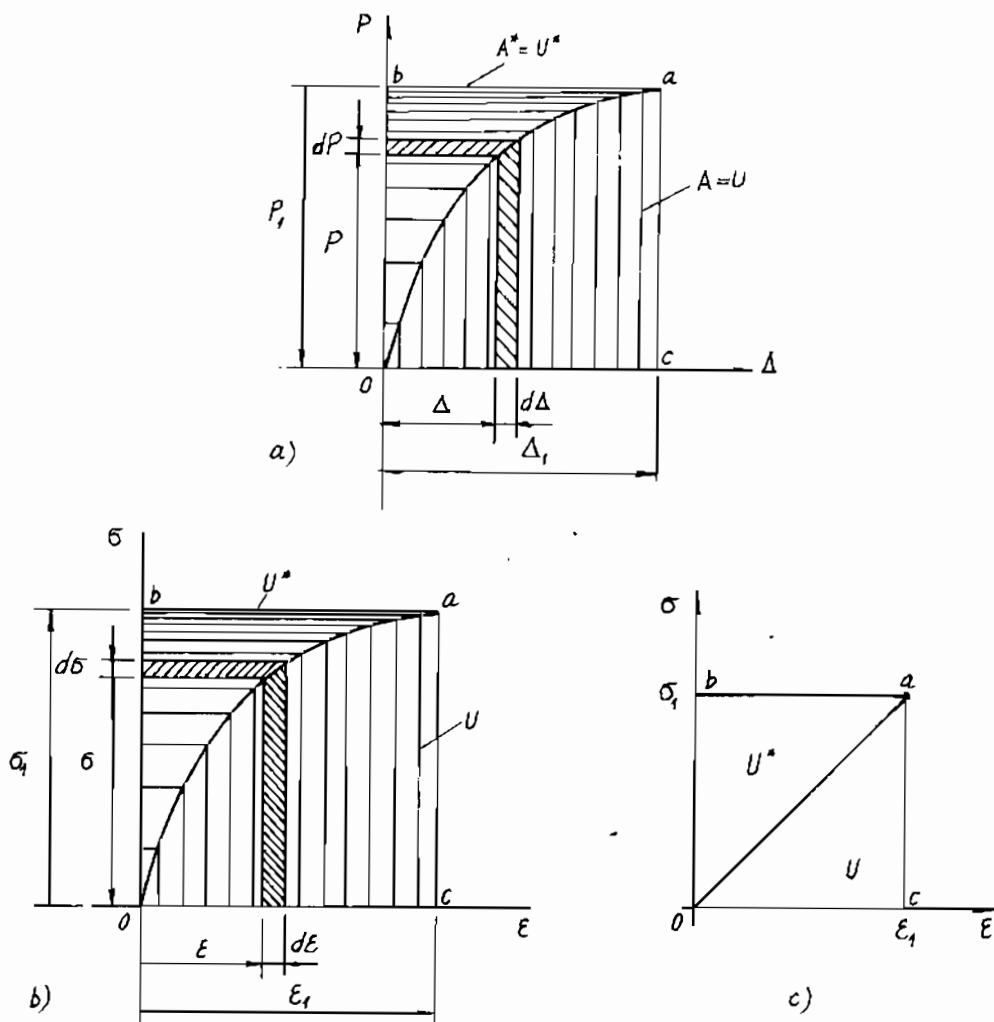
$$A = U \quad (10.6)$$

Tương tự ta có năng lượng riêng (hình 10.2b):

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon \quad (10.7)$$

Do đó, năng lượng toàn phần là:

$$U = \int_V u dV \quad (10.8)$$



Hình 10.2.

Trong trường hợp biến dạng là tuyến tính (hình 10.2c):

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} \quad (10.9)$$

Bây giờ chúng ta khảo sát phần diện tích Oab (hình 10.2a). Diện tích này được gọi là công bù và ký hiệu là A^* và được xác định bởi tích phân:

$$A^* = \int_0^{P_1} \Delta dP \quad (10.10)$$

Chúng ta gọi độ lớn của công bù A^* là năng lượng bù và ký hiệu là U^* . Cụ thể là:

$$U^* = A^* \quad (10.11)$$

Từ hình 10.2a, ta rút ra:

$$A + A^* = P_1 \cdot \Delta_1 \quad (10.12)$$

Năng lượng bù riêng và năng lượng bù toàn phần tương ứng có biểu thức:

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (10.13)$$

và

$$U = \int_V u^* dV \quad (10.14)$$

Trường hợp các quan hệ $P = P(\Delta)$ và $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ là tuyến tính thì:

$$A = A^* ; U = U^* ; u = u^* \quad (10.15)$$

§5. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN PHÂN VÀ PHIẾM HÀM

Ta hãy xét hai đường cong $y(x)$ và $y_1(x)$ cùng đi qua hai điểm A và B trong mặt phẳng xOy (hình 10.3a). Hiệu giữa $y(x)$ và $y_1(x)$ là vô cùng bé được gọi là biến phân (chính xác là biến phân loại 1) và ký

hiệu là δy . Biến phân δy biểu thị sự thay đổi vô cùng bé của hàm tại một giá trị biến x cố định.

Khi ký hiệu độ dài của đường cong $y(x)$ là L thì đường cong $y_1(x)$ sẽ có chiều dài khác. Vì vậy, nói chung có thể nói rằng:

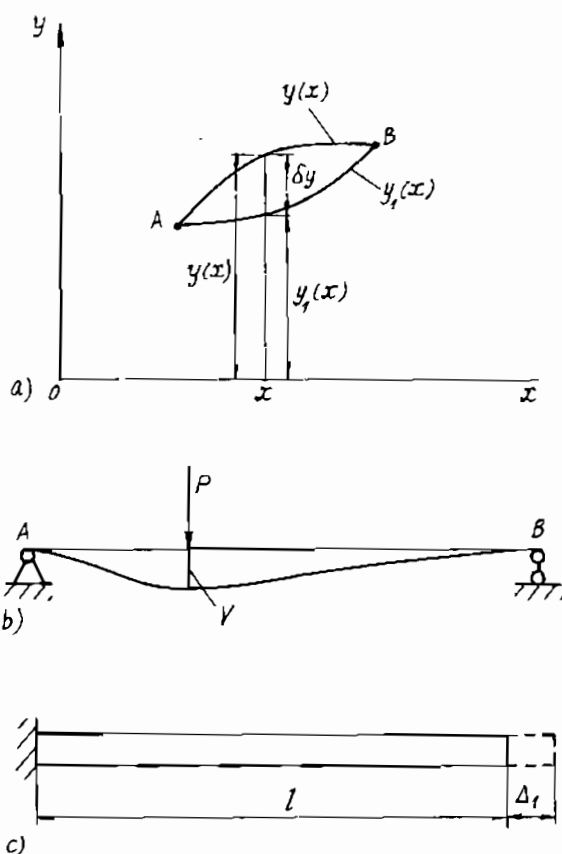
$$L = L[y(x)] \quad (10.16)$$

hay là

$$\Pi = \Pi[y(x)] \quad (10.17)$$

Đại lượng biến đổi L hoặc Π được gọi là phiếm hàm. Nó là hàm của hàm $y(x)$ và ứng với mỗi hàm $y(x)$ ta có L hoặc Π là một số xác định. Về sau chúng ta hiểu Π là một đại lượng năng lượng nào đó (một tích phân xác định) và được gọi là thế năng toàn phần.

Thế năng này có thể được biểu diễn qua chuyển vị hoặc ứng suất. Chúng là những hàm của 1, 2 hoặc 3 biến tùy thuộc vào dạng bài toán. Về sau ta sẽ thấy, việc tìm nghiệm của các bài toán liên quan đến việc tìm cực tiểu (chính xác hơn là giá trị bình ổn) của một phiếm hàm nào đó. Bài toán của phép tính biến phân chính là ở đó. Chính vì vậy mà những phương pháp giải các bài toán trong cơ học có dùng đến phép tính biến phân được gọi là phương pháp biến phân.

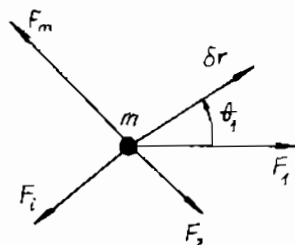


Hình 10.3.

§6. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA LAGRANGE ĐỐI VỚI MỘT CHẤT ĐIỂM

Giả sử có một chất điểm tự do m chịu tác dụng của một hệ lực $\{F_i\}$ cân bằng (hình 10.4).

Chúng ta ký hiệu δr là chuyển vị khả dĩ của chất điểm m không do các lực F_i này mà do một nguyên nhân khác nào đó gây ra, còn độ lớn cũng như phương chiều của các lực được xem là không đổi.



Hình 10.4.

Khi đó, công khả dĩ của lực F_1 được tính:

$$F_1 \delta r \cos \theta_1 = F_{1r} \delta r$$

ở đây, F_{1r} là hình chiếu của F_1 lên phương δr . Vì vậy, công nguyên tố của tất cả các lực có dạng:

$$\delta A = F_{1r} \delta r + F_{2r} \delta r + \dots + F_{nr} \delta r = \left(\sum_{i=1}^n F_{ir} \right) \delta r \quad (10.18)$$

Vì chất điểm ở trạng thái cân bằng cho nên $\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0$. Do đó:

$$\delta A = 0 \quad (10.19)$$

Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý Lagrange) đối với một chất điểm được phát biểu như sau:

“Nếu một chất điểm ở trạng thái cân bằng thì tổng công của các lực trên các chuyển vị khả dĩ bằng không”.

Nhân tiện, ta cũng có thể chứng minh điều kiện cân bằng của hệ lực như sau: Vì δr là chuyển vị khả dĩ tùy ý nên $\delta r \neq 0$, do vậy từ (10.19) ta rút ra: $\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0$.

Đây là điều kiện cân bằng của hệ lực $\{F_i\}$ đặt vào điểm m .

§7. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA POISSON – LAGRANGE ĐỐI VỚI HỆ THANH ĐÀN HỒI

1. Công khả dĩ của ngoại lực

Bởi vì, công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ do một nguyên nhân bất kỳ nào đó không phải do các lực này gây ra, cho nên để tính công khả dĩ đối với hệ thanh đàn hồi ta cần tạo ra trạng thái “k” và trạng thái “m” và được hiểu như sau:

– Trạng thái “k” là trạng thái chịu các lực P_k .

– Trạng thái “m” là trạng thái chịu các nguyên nhân “m”. Các nguyên nhân này có thể là tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và có thể là các chuyển vị cưỡng bức của các liên kết v.v (khác với các lực P_k ở trạng thái “k”).

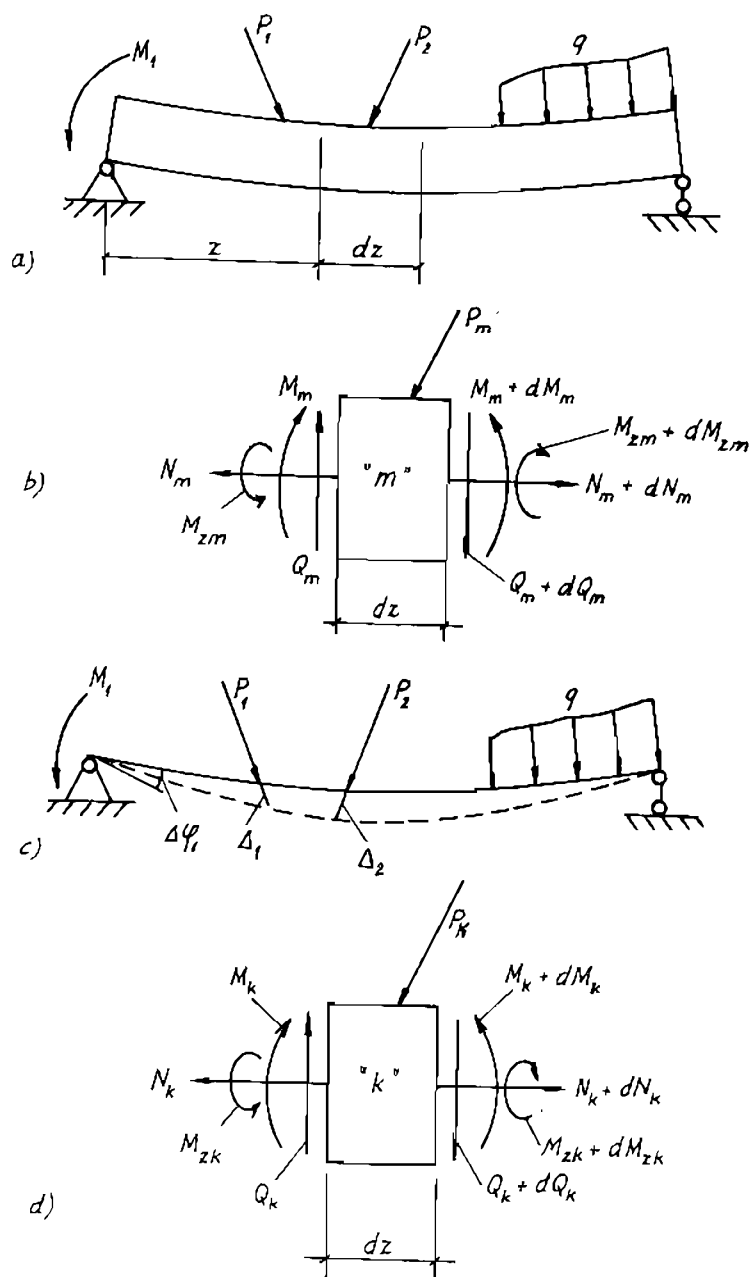
Giả sử dưới tác dụng của tác dụng ngoài (hình 10.5a) dầm bị biến dạng và nằm ở trạng thái cân bằng.

Ta tách từ dầm bị biến dạng một phân tố có chiều dài dz , trên các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực như hình 10.5b. Bây giờ chúng ta truyền cho dầm ở trạng thái biến dạng một chuyển vị khả dĩ (đường nét đứt trên hình 10.5c) khi không phá hủy các liên kết nội và ngoại của dầm. Ngoại lực và nội lực tác dụng lên phân tố khảo sát khi chịu các chuyển vị khả dĩ Δ_k đều có trị số và phương chiều không đổi. Khi đó tổng công khả dĩ của các ngoại lực P_m ở trạng thái thực “m” (hình 10.5a) trên các chuyển vị khả dĩ Δ_k là:

$$\delta A_{me} = P_1 \Delta_1 + M_1 \Delta_{\phi 1} + P_2 \Delta_2 + \dots \quad (10.20)$$

Khác với công thức, trong công thức (10.1), ở đây không có thừa số $1/2$ vì lực sinh công trong quá trình thực hiện các chuyển vị khả dĩ là bất biến về độ lớn và phương. Hoàn toàn tương tự, nếu gọi Δ_{km} là các chuyển vị ở trạng thái “m” do các nguyên nhân “m” gây ra tương ứng với các lực P_k ở trạng thái “k”, ta có thể mở rộng định nghĩa công khả dĩ như sau:

$$\delta A_{ke} = \sum P_{ik} \Delta_{km} \quad (10.21)$$



Hình 10.5.

Nghĩa là tổng công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” bằng tổng các tích giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái “k” với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái “m”.

2. Công khả dĩ của nội lực

Công của nội lực có thể được xác định qua các thành phần nội lực, ứng suất và biến dạng. Đối với dầm (hình 10.5a), ta có thể lấy chuyển vị do một hệ lực mới bất kỳ P_k nào đó gây ra làm chuyển vị khả dĩ. Giả sử dưới tác dụng của hệ ngoại lực mới này, trên các mặt cắt của phân tố (hình 10.5d) có các thành phần nội lực là: M_k , Q_k , M_{zk} và N_k . Khi đó, ví dụ biến dạng góc do M_k gây ra là: $\frac{M_k dz}{EJ}$. Biến

dạng này có thể xem như một chuyển vị khả dĩ đối với M_m v.v... Tương tự như vậy, ta có thể viết công khả dĩ của các nội lực như sau:

$$\begin{aligned} \delta A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M_{xm} M_{xk} dz}{EJ_x} + \sum \int_{l_j} \frac{M_{ym} M_{yk} dz}{EJ_y} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_{ym} Q_{yk} dz}{GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_{xm} Q_{xk} dz}{GF} + \sum \int_{l_j} \frac{N_m N_k dz}{EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk} dz}{GJ_p} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Để thấy rằng công thức của các nội lực M , Q , M , N được viết như công thức (10.22) nhưng có thừa số 1/2. Cụ thể là:

$$\begin{aligned} A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \sum \int_{l_j} \frac{M_y^2 dz}{2GJ_y} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \frac{N^2 dz}{2EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} \end{aligned} \quad (10.23)$$

ở đây γ – hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang do Q gây ra.

Các tích phân trong (10.22) và (10.23) là những tích phân xác định được lấy trên tất cả các đoạn l_j của hệ.

Bây giờ ta xác định công khả dĩ của nội lực khi hệ chịu sự biến thiên của nhiệt độ. Ta gọi t_{1m} và t_{2m} là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh.

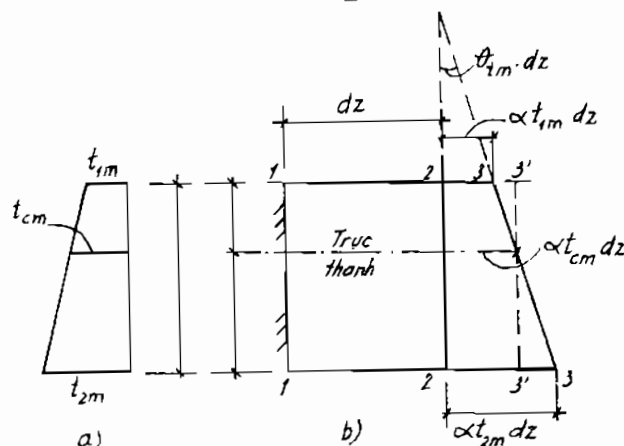
Giả sử rằng quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao mặt cắt là luật bậc nhất thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng như trên hình 10.6a.

Từ hình 10.6a, ta xác định luật biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu $a = b = h/2$; ta có:

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2} \quad (a)$$



Hình 10.6.

Để lập công thức tính công này ta giả thiết $t_{1m} > 0$ và $t_{2m} > t_{1m}$; mặt cắt 1-1 ở đầu trái của phân tố là cố định. Gọi α là hệ số dẫn nở vì nhiệt của vật liệu, ta có: thớ trên của phân tố sẽ dẫn dài bằng $\alpha t_{1m} dz$, trục phân tố sẽ dẫn dài là $\alpha t_{cm} dz$ và thớ dưới phân tố sẽ dẫn dài là $\alpha t_{2m} dz$ (hình 10.6b). Như vậy phân tố có hai thành phần biến dạng vì nhiệt như sau:

Độ dẫn dài dọc trục δz do nhiệt độ t_{cm} gây ra:

$$\delta z = \epsilon_{tm} dz = \alpha t_{cm} dz \quad (b)$$

Góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt 1-2 và 2-2 là $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \theta_{cm} dz = \frac{\alpha t_{2m} dz - \alpha t_{1m} dz}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz \quad (c)$$

Vậy công khả dĩ δA_{it} của các nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” do sự biến thiên nhiệt độ gây ra bằng:

$$\delta A_{it} = \sum_{l_i} \int M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{l_i} \int N_k \cdot \alpha t_{cm} dz \quad (10.24)$$

Năm 1833, S. D. Poisson đã phát biểu nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đối với hệ đàn hồi như sau:

Nếu một cơ hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ δA_e của các ngoại lực trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng và tổng công khả dĩ của các nội lực δA_i trên các biến dạng khả dĩ tương ứng phải bằng không.

Cụ thể là:

$$\delta A_e + \delta A_i = 0 \quad \text{hay} \quad \delta A_e = -\delta A_i \quad (10.25)$$

§8. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP MAXWELL – MOHR – ВЕРЕСЦАГИН

1. Công thức Maxwell - Mohr

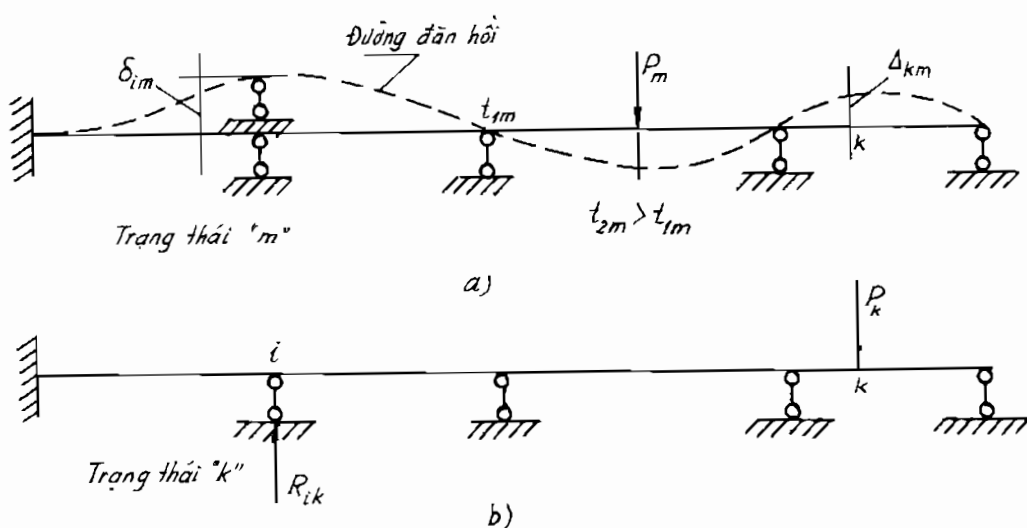
Trong mục này ta sẽ áp dụng nguyên lý công khả dĩ vào việc xây dựng một công thức tổng quát nhất để tính những chuyển vị bất kỳ của các hệ đàn hồi bất kỳ dạng hệ thanh. Giả sử có một hệ đàn hồi bất kỳ ở trạng thái “m” chịu đồng thời các tác dụng ngoài cho trước như: tải trọng P_m ; các chuyển vị cưỡng bức δ_{im} tại liên kết “i”; sự thay đổi nhiệt độ t_{2m}, t_{1m} (hình 10.7a).

Yêu cầu tính chuyển vị Δ_{km} bất kỳ tại mặt cắt k bất kỳ?

Ví dụ, tính chuyển vị thẳng đứng tại k? Để có công khả dĩ ta cần tạo ra một trạng thái khả dĩ “k” suy ra từ trạng thái thực “m”, trên

đó hệ chỉ chịu một lực P_k đặt tại k theo phương cần tính chuyển vị (hình 10.7b). Theo công thức (10.25) về công khả dĩ của nội lực và ngoại lực ở trạng thái “ k ” trên các chuyển vị và biến dạng ở trạng thái “ m ”, ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
 P_k \Delta_{km} + \sum_{i=1}^n R_{ik} \delta_{im} = & \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\
 & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk}}{GJ_p} dz + \quad (10.26) \\
 & + \sum_{j=1} \int_{l_j} M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} N_k \alpha t_{cm} dz
 \end{aligned}$$



Hình 10.7.

Khi ký hiệu:

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k} ; \quad \bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k} ; \quad \bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k} ; \quad \bar{M}_{kz} = \frac{M_{kz}}{P_k} ; \quad \bar{R}_{ik} = \frac{R_{ik}}{P_k} ,$$

(chúng là những nội lực và phản lực do lực $\bar{P}_k = 1$ gây ra ở trạng thái “k”), ta có công thức tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính trong trường hợp tổng quát như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & - \sum_i^n \bar{R}_{ik} \delta_{im} + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{xk} M_m}{EJ_x} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym}}{EJ_y} dz + \\ & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{N}_k N_m}{EF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma \bar{Q}_{xk} Q_{xm}}{GF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma \bar{Q}_{yk} Q_{ym}}{GF} dz + (10.27) \\ & + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{N}_k \alpha t_{cm} dz \end{aligned}$$

Chú ý khi sử dụng công thức:

- Công thức (10.27) chỉ đúng với các hệ thanh thẳng và thanh cong có độ cong bé $h/\rho_{\min} < 1/5$, trong đó:
 - Lực $\bar{P}_k = 1$ được chọn chiều tùy ý, còn phương thì phụ thuộc vào phương chuyển vị cần tìm. Nếu kết quả tính ra $\Delta_{km} > 0$ thì chiều chuyển vị cần tính là chiều của lực $\bar{P}_k = 1$ đã chọn. Nếu $\Delta_{km} < 0$ thì chiều chuyển vị cần tính là chiều ngược với chiều $\bar{P}_k = 1$ đã chọn.
 - Dấu tổng trong số hạng thứ nhất ở vế phải được lấy theo “i” (số liên kết có chuyển vị cưỡng bức $i = \overline{1, n}$). $\bar{R}_{ik}$ là phản lực ở liên kết “i” do $\bar{P}_k = 1$ gây ra ở trạng thái “k”. δ_{im} là chuyển vị cưỡng bức ở liên kết “i” của trạng thái “m” do các nguyên nhân ở trạng thái “m” gây ra. Khi $\bar{R}_{ik}$ cùng chiều với δ_{im} thì $\bar{R}_{ik} \cdot \delta_{im} > 0$.
 - Các tích phân trong (10.27) là những tích phân xác định trong đoạn thanh thứ j có chiều dài l_j , trên đó hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng $\left(\sum_{j=1} \int_{l_j} \dots \right)$ được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh của hệ. Các đại lượng $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{M}_{zk}, M_m, N_m, Q_m, M_{zk}$ lần lượt là các hàm nội lực trong đoạn l_j ở trạng

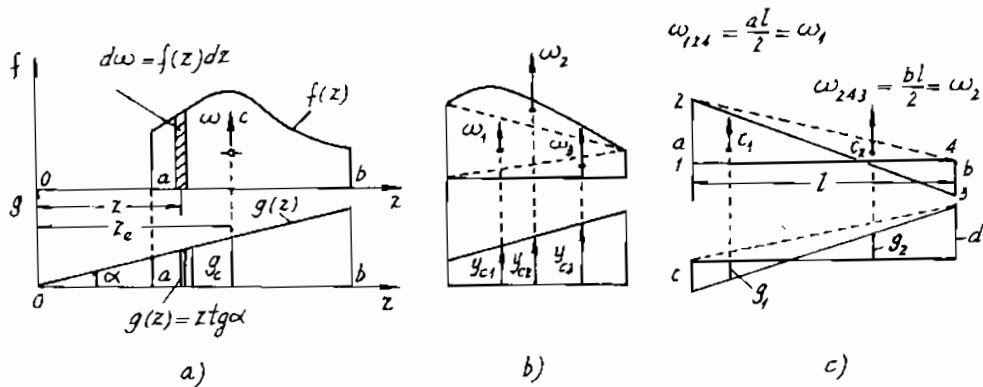
thái “k” có bậc không hoặc bậc 1, và trạng thái thực “m” có bậc tùy ý.

- h là chiều cao của mặt cắt ngang ; $\rho_{\min}$ là bán kính cong nhỏ nhất của thanh ở trạng thái chưa biến dạng.

2. Thuật toán Vêrêxaghin (Верещагин)

Ta sẽ chứng minh rằng nếu độ cứng của mặt cắt không đổi trong một đoạn nào đó thì mỗi tích phân Maxwell – Mohr trong (10.27) có thể được tính bằng cách nhân diện tích ω của biểu đồ nội lực gây ra do tải trọng ngoài cho trước với tung độ g_c của biểu đồ nội lực đó nhưng do lực ảo suy rộng $\bar{P}_k = 1$ gây ra. Tung độ g_c đi qua trọng tâm “C” của biểu đồ thứ nhất ω .

Thật vậy, giả sử trong khoảng $[a, b]$ hàm $f(z)$ có bậc bất kỳ, còn hàm $g(z)$ là hàm bậc nhất (hình 10.8a).



Hình 10.8.

Ta có thể viết tất cả các tích phân trong (10.27) dưới cùng một mô hình toán sau:

$$\Delta = \int_a^b \frac{f(z)g(z)dz}{\beta_k} = \operatorname{tg} \alpha \int_a^b \frac{z d\omega}{\beta_k} = \operatorname{tg} \alpha \frac{Z_c \omega}{\beta_k} = \omega g_c / \beta_k$$

Do đó, mỗi tích phân Mohr có giá trị là:

$$\Delta = \frac{\omega \cdot g_c}{\beta_K} \quad (\beta_K = \overline{1,4}) \quad (10.28a)$$

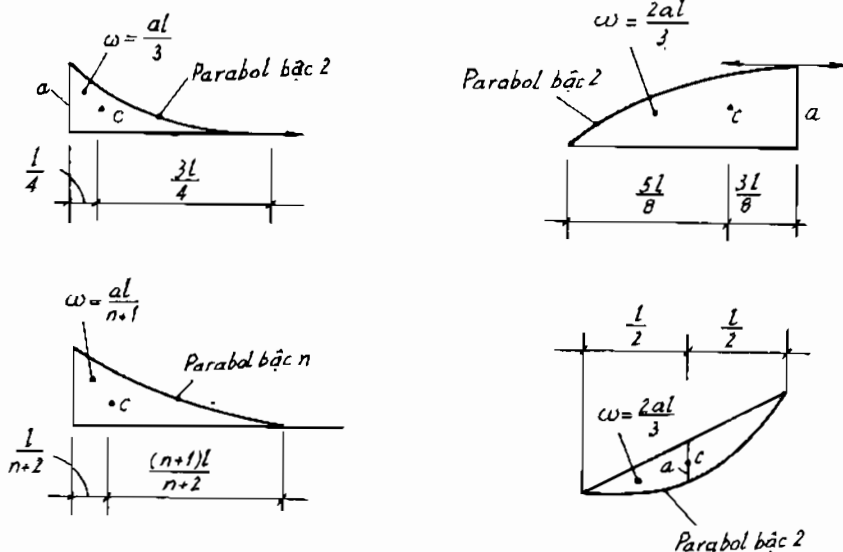
Với β_K tương ứng là các độ cứng của mặt cắt khi uốn EJ, khi kéo (nén) EF, khi cắt GF / γ , khi xoắn GJ_p.

Chuyển vị chỉ do các ngoại lực gây ra là Δ_{kp} có công thức theo Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot g_{ci}}{\beta_K} \quad (10.28b)$$

Khi chịu tác dụng đồng thời của ngoại lực, nhiệt độ biến thiên, chuyển vị cưỡng bức, công thức (10.27) có dạng:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & \sum_{i=1}^n \overline{R}_{ik} \delta_{im} + \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \cdot g_{cj}}{\beta_K} + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \overline{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) + \\ & + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \overline{N}_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot dz \end{aligned} \quad (10.29)$$



Hình 10.9.

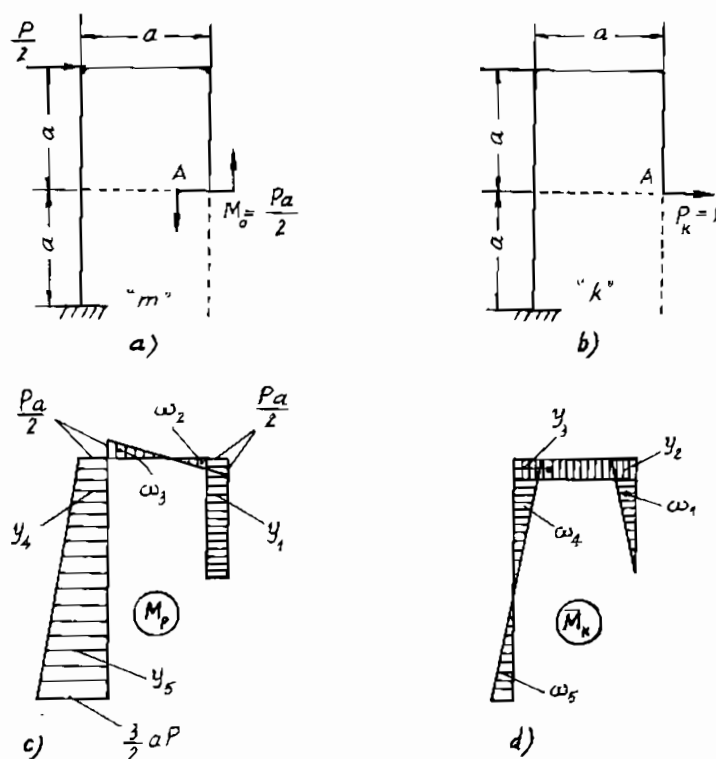
Cách tính tích phân Maxwell – Mohr bằng cách “nhân” biểu đồ này được gọi là thuật toán Vêrêxaghin.

Khi diện tích ω là một hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để tính diện tích và trọng tâm để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình đơn giản rồi cộng kết quả lại (hình 10.8b, c). Diện tích và trọng tâm của một số biểu đồ dạng đường cong bậc n thường gặp được cho trên hình 10.9.

Ví dụ 1:

Cho một khung chịu lực và liên kết cân bằng như hình 10.10. Cho trước P , a , E , J . Hãy tính chuyển vị ngang tại A ?

GIẢI



Hình 10.10.

Biểu đồ mômen do tải trọng và $\bar{P}_k = 1$ gây ra được cho trên hình 10.10c, d.

$$\omega_1 = \frac{a^2}{2} ; \omega_2 = \frac{P \cdot a^2}{8} = \omega_3 ; \omega_4 = \frac{a^2}{2} = \omega_5$$

$$y_1 = \frac{P \cdot a}{2} ; y_2 = a = y_3 ; y_4 = \frac{2P \cdot a}{3} ; y_5 = \frac{4P \cdot a}{3}$$

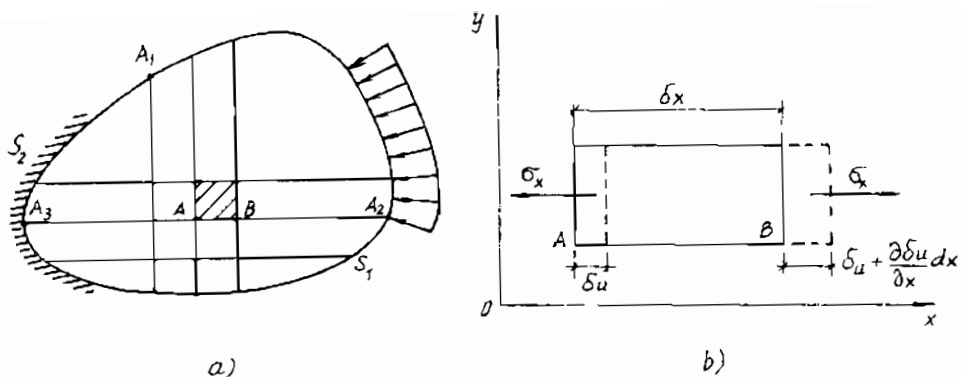
Theo công thức (10.28b) ta có:

$$\Delta_{KP} = U_A = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5}{EJ} = \frac{7Pa^2}{12EJ} \text{ (điểm A di chuyển sang phải)}$$

§9. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ ĐỐI VỚI VẬT THỂ ĐÀN HỒI BA CHIỀU. PHƯƠNG TRÌNH BIẾN PHÂN CỦA LAGRANGE

Có thể xem vật thể đàn hồi như một hệ chất điểm (hình 10.11a). Giả sử rằng mỗi chất điểm của vật chịu một chuyển vị khả dĩ và công khả dĩ của các lực đặt vào chất điểm đó bằng không. Vì vậy công khả dĩ tổng cộng cũng phải bằng không. Bạn đọc hãy chú ý đến một đặc điểm quan trọng của chất điểm thuộc vật (ví dụ, điểm A) so với chất điểm tự do. Tất cả các chất điểm của vật đều được ràng buộc với nhau để tạo thành vật. Liên kết này không bị phá hủy mỗi khi có chuyển vị khả dĩ nào đó. Nói khác đi, điều kiện liên tục phải luôn được bảo đảm. Điều kiện này sẽ luôn được thực hiện nếu chuyển vị khả dĩ được biểu diễn qua những hàm liên tục. Chuyển vị của điểm A không được cố định và ở đây việc lấy biến phân là được phép. Hoàn toàn như vậy có thể lấy biến phân của chuyển vị trên phần bề mặt tự do S_1 (ví dụ, điểm A_1 hoặc điểm A_2). Nếu điểm (ví dụ, điểm A_3) thuộc phần bề mặt ngàm chặt S_2 (các chuyển vị được cố định và bằng không) thì biến phân của chuyển vị bằng không.

Ta hãy xét một phân tố được tách ra từ vật thể đàn hồi (hình 10.11a). Gọi các chuyển vị thực của điểm A là u, v, w và các chuyển vị khả dĩ tương ứng là $\delta u, \delta v, \delta w$. Chúng là những hàm liên tục của các tọa độ x, y, z phù hợp các điều kiện biên.



Hình 10.11a, b.

Chúng ta hãy khảo sát chuyển vị và công theo phương x . Nếu cho chuyển vị u một số gia δu , thì phân tố có vị trí mới khi điểm A có chuyển vị δu , còn điểm B nhận chuyển vị $\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx$ (hình 10.11b).

Công khả dĩ của các lực tác dụng lên phân tố sẽ là:

$$\delta dA = \sigma_x \left(\delta u + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x \delta u dydz = \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dydz \quad (a)$$

Số gia của biến dạng:

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (b)$$

Nhưng với $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ thì $\delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ (c)

Từ đó:

$$\delta \epsilon_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \quad (d)$$

Chú ý đến (d) thì biểu thức (a) được viết:

$$\delta dA = \sigma_x \delta \epsilon_x dx dydz = E \epsilon_x \delta \epsilon_x dx dydz \quad (10.30)$$

Năng lượng biến dạng phân tố theo phương x:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz = \frac{E}{2} \epsilon_x^2 dx dy dz \quad (e)$$

Khi lấy biến phân theo ϵ_x , ta có số gia của thế năng phân tố:

$$\delta dU = E \epsilon_x \delta \epsilon_x dx dy dz \quad (10.31)$$

Từ đó theo (10.30) và (10.31) ta có:

$$d\delta A = d\delta U \quad (10.32)$$

Khi tích phân (10.32) ta nhận được công toàn phần δA của các lực tác dụng tương hỗ giữa các phân tố và bằng số gia của thế năng δU . Cụ thể là:

$$\delta A = \delta U \quad (10.33)$$

hoặc là:

$$\delta U - \delta A = 0 ; \delta(U - A) = \delta \Pi = 0 \quad (10.34)$$

Ở đây ta đã đặt:

$$\Pi = U - A \quad (10.35)$$

là thế năng toàn phần của hệ.

Đó là nguyên lý biến phân của Lagrange.

Nguyên lý được diễn đạt như sau: *“Trong số tập hợp các chuyển vị khả dĩ phù hợp các điều kiện biên thì những chuyển vị thỏa mãn điều kiện cân bằng sẽ cho thế năng của hệ một giá trị bình ổn. Ở trạng thái cân bằng ổn định đại lượng Π có giá trị cực tiểu”*.

Phương trình biến phân của Lagrange là cơ sở để xây dựng các phương trình cân bằng và điều kiện biên. Nó còn là cơ sở của nhiều phương pháp tính trong cơ học các vật rắn biến dạng và các lĩnh vực khác.

Trong trường hợp tổng quát của bài toán trong không gian đàn hồi thì (10.34) viết như thế nào?

Giả sử vật T có thể tích V chịu các lực thể tích đơn vị X, Y, Z, lực bề mặt đơn vị trên phần bề mặt S_1 , và phần bề mặt S_2 được ngâm

chặt (hình 10.12a). Khi lấy biến phân các chuyển vị, ta viết biểu thức δA như sau:

$$\delta A = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_i} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS \quad (10.36a)$$

Trên cơ sở (10.36a) biểu thức (10.34) được viết:

$$\iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_i} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS - \delta U = 0 \quad (10.36b)$$

Bởi vì khi lấy biến phân các chuyển vị thì các thành phần lực X , Y , Z và $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ không thay đổi, cho nên dấu δ có thể đưa ra ngoài tích phân như một thừa số. Khi đó:

$$\delta \left[\iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV + \iint_{S_i} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS - U \right] = 0 \quad (10.37)$$

Trong dấu móc vuông là hiệu giữa công của các lực thể tích, lực bề mặt trên các chuyển vị khả dĩ và thế năng (năng lượng biến dạng với dấu ngược lại).

Năng lượng biến dạng riêng:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (10.38)$$

Khi sử dụng định luật Hooke dạng thuận và dạng ngược, biểu thức u có dạng:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (10.39)$$

Và dạng ngược của u theo biến dạng:

$$u = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_0 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (10.40)$$

trong đó:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z ; \lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (10.41)$$

Đôi khi năng lượng biến dạng riêng u thường được viết qua các thành phần chuyển vị. Đối với dầm và tấm các thành phần chuyển vị chỉ có một. Cụ thể là độ võng w.

Con đường giải bài toán được mô tả ở trên khi các chuyển vị được lấy biến phân, tương đương với phương pháp chuyển vị. Có thể giải bài toán bằng con đường khác khi không phải chuyển vị được lấy biến phân mà các lực hoặc ứng suất được lấy biến phân. Quá trình này tương đương với phương pháp lực. Khi đó cần phải thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong cũng như trên biên S_1 của vật thể.

§10. NGUYÊN LÝ NĂNG LƯỢNG BÙ CỦA CASTIGLIANO

Đối với vật thể T (hình 10.12a) lực thể tích X, Y, Z ở trong toàn bộ vật thể và lực bề mặt $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ cố định trên phần S_1 , vì vậy không thể lấy biến phân. Trên phần mặt S_2 chuyển vị được cho trước, lực bề mặt chưa biết, vì vậy có thể lấy biến phân. Do đó, tương tự (10.36b) ta có:

$$\int_{S_1} (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS - dU = 0 \quad (10.42)$$

Vì khi lấy biến phân các lực bề mặt thì các chuyển vị không đổi, nên dấu δ được đưa ra ngoài dấu tích phân:

$$\delta \left[\int_{S_1} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS - U \right] = 0 \quad (10.43)$$

Người ta gọi đại lượng:

$$A^* = \int_{S_1} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS \quad (10.44)$$

là công bù, còn:

$$U - A^* = \Pi^* \quad (10.45)$$

là năng lượng bù.

Từ đó nguyên lý mới được rút ra:

$$\delta\Pi^* = 0 \quad (10.46)$$

được gọi là nguyên lý Castigliano hay nguyên lý năng lượng bù.

Nguyên lý được phát biểu như sau:

“Trong tập hợp các ứng suất tĩnh thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong vật thể và trên phần bề mặt có ngoại lực cho trước thì các ứng suất thỏa mãn điều kiện liên tục sẽ cho năng lượng bù giá trị bình ổn. Trong điều kiện cân bằng ổn định đại lượng Π có giá trị cực tiểu”.

§11. PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH – RITS

1. Nội dung của phương pháp

Phương pháp biến phân được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học là phương pháp dựa trên nguyên lý cực tiểu của thế năng toàn phần “ Π ” đã được nghiên cứu ở trên. Khi không làm giảm tính tổng quát của phương pháp chúng ta hãy minh họa nó qua bài toán uốn tấm (và dầm). Ta biểu diễn mặt đàn hồi của tấm dưới dạng chuỗi:

$$w(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots c_n f_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \quad (10.47)$$

Ở đây $f_i(x, y)$ là những hàm liên tục và được gọi là hàm tọa độ hay hàm cơ sở. Mỗi một hàm riêng biệt $f_i(x, y)$ phải thỏa mãn các điều kiện biên động học và phản ánh tốt nhất mặt võng thực của tấm: $c_1, c_2, \dots, c_n$ là những thông số chưa biết được xác định từ điều kiện cực tiểu của thế năng toàn phần. Đối với dầm các $f_i(x, y)$ trong (10.47) được thay bằng $f_i(x)$.

Điều kiện:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.48)$$

dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các c_i . Giải hệ này ta được các hệ số c_i và thay chúng vào (10.47) để được mặt võng cần tìm.

2. Công khả dĩ của ngoại lực và thế năng biến dạng

Nếu gọi u, v, w là các thành phần của chuyển vị thực, q_x, q_y, q_z là các thành phần của cường độ tải trọng phân bố, P_i là lực tập trung, Δ_i là chuyển vị của điểm đặt lực này, M_i là mômen tập trung, θ_i là góc xoay tương ứng (hình 10.12b), thì công khả dĩ của các ngoại lực này có biểu thức:

$$A_e = - \left[\int_F (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy + \sum_i P_i \Delta_i + \sum_i M_i \theta_i \right] \quad (10.49)$$

Nếu biên của tấm cho phép chuyển vị thì các lực biên $\bar{v}_n, \bar{m}_n, \bar{m}_{nt}$ cũng sẽ sinh công khả dĩ:

$$A_l = - \int \left[\bar{v}_n \cdot w + \bar{m}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{m}_{nt} \frac{\partial w}{\partial t} \right] dS \quad (10.50)$$

Trong trường hợp tổng quát năng lượng biến dạng gồm hai thành phần U_u do uốn và U_m do lực màng:

$$U_u = \frac{1}{2} \iint_F (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dx dy \quad (10.51)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy$$

Trong hệ tọa độ Đêcac vuông góc đại lượng trong (10.51) như sau:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) ; \\ M_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.52)$$

$$\chi_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad \chi_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \quad \chi_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Thay biểu thức (10.52) vào (10.51) ta có:

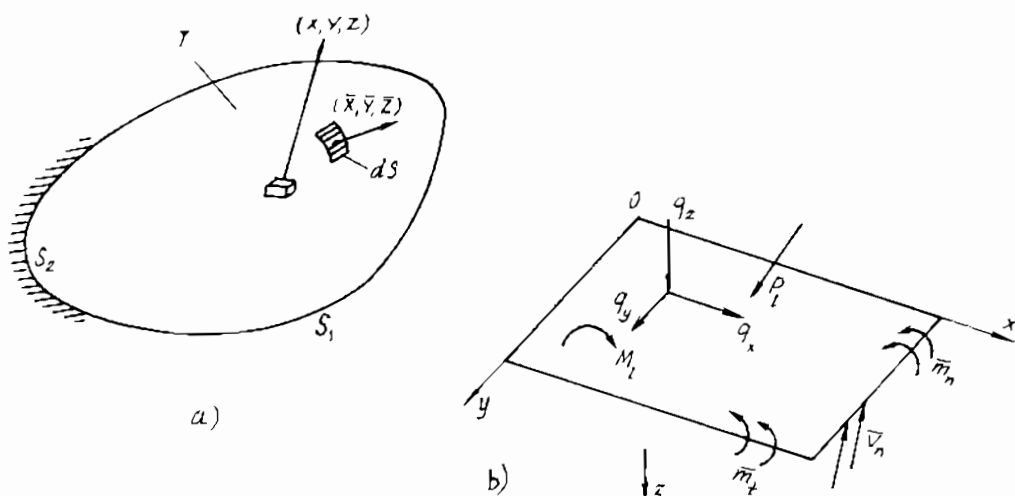
$$U_u = \frac{1}{2} \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10.53)$$

Đối với tấm đa giác có chu vi ngàm và tấm chữ nhật tựa trên chu vi, biểu thức (10.53) có dạng đơn giản:

$$U_u = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (10.54a)$$

Đối với hệ thanh dàn hồi theo (10.3) và (10.23) U có dạng:

$$U = \sum \int \frac{M^2 dz}{2EJ} + \sum \int \frac{N^2 dz}{2EF} + \sum \int \gamma \frac{Q^2 dz}{2GF} \quad (10.54b)$$



Hình 10.12.

Hiệu ứng màng

Phần năng lượng màng là:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \iint_F (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_F \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (10.55)$$

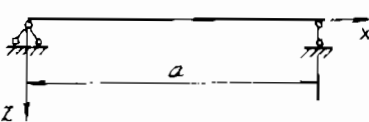
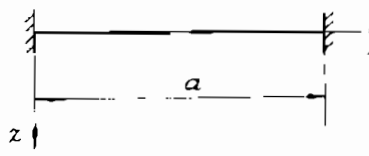
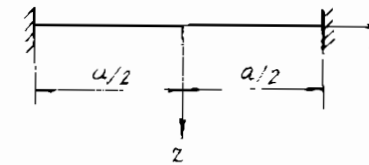
Biểu thức của U_m được viết qua chuyển vị có dạng:

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10.56)$$

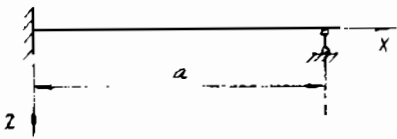
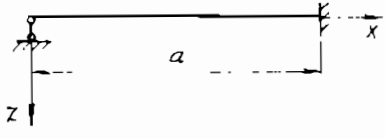
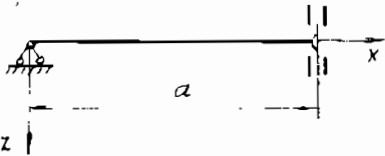
Cũng có thể viết U_m qua ứng suất:

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint_F \left[(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] dx dy \quad (10.57)$$

Bảng 1

Số	Điều kiện biên	Hàm tọa độ
1		$\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$
2		$\sum_m X_m = \sum_m \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right)$ $(m = 1, 3, 5, \dots)$ $\sum_m X_m' = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \sum_m (-1)^m \times$ $\times \frac{x^2}{a^2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
3		$\sum_m X_m = \sum_m (a^2 - 4x^2)^2 x^m$ $(m = 0, 1, 2, 3, \dots)$ $\sum_m X_m = \sum_m \left[1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right]$ $(m = 1, 3, 5)$

Tiếp bảng 1

No	Điều kiện biên	Hàm tọa độ
4		$\sum_m X_m = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \left(\frac{x}{2a} - 1 \right) - \sum_m \frac{x}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
5		$\sum_m X_m = \sum_m \frac{x}{2a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) (-1)^m - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$
6		$\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a}$

Đối với phương pháp Rayleigh – Rits vấn đề quan trọng là chọn các hàm tọa độ thích hợp $f_i(x)$ đối với dầm hoặc $f_i(x, y)$ đối với tấm thỏa mãn các điều kiện biên động học và xấp xỉ tốt nhất dạng đường hoặc mặt đàn hồi của cấu kiện, mà không cần thỏa mãn phương trình vi phân. Độ chính xác của phương pháp này phụ thuộc rất nhiều vào việc chọn các hàm tọa độ có phản ánh được gần đúng đường hoặc mặt đàn hồi hay không? Đối với tấm, nghiệm có dạng dưới đây thường được sử dụng nhất:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (10.58)$$

$$\text{Đối với dầm: } V(x) = \sum_m C_m X_m(x) \quad (10.59)$$

trong đó: $X_m(x)$ và $Y_n(y)$ là những hàm tọa độ dạng lượng giác hoặc đại số đã được tách biến. Ý nghĩa của những hàm này trong một số trường hợp được cho sẵn trong bảng 1.

Ưu điểm của phương pháp này là ở tính đơn giản và cho kết quả tốt. Những tấm và dầm khác nhau có thể có hình dạng, chiều dày, v.v... khác nhau, nhưng thủ tục giải luôn luôn gắn liền với việc tính các tích phân xác định và giải hệ các phương trình. Cái khó của phương pháp này và ngay cả các phương pháp năng lượng khác là ở việc chọn hàm tọa độ. Khi xác định chuyển vị bằng phương pháp này dễ dàng đạt được độ chính xác cao, nhưng khi xác định nội lực thì độ chính xác giảm, bởi vì nội lực liên quan đến các đạo hàm cấp cao của chuyển vị.

3. Ví dụ

Ví dụ 1. Tấm vuông ($a \times a$) chiều dày không đổi tựa tự do trên chu vi chịu tải dạng mái nhà như hình 10.13a.

$$p_z = \frac{2p_0 x}{a} \quad \text{khi } 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$p_z = 2p_0 - \frac{2p_0 x}{a} \quad \text{khi } \frac{a}{2} < x < a$$

Theo công thức (10.58) và bảng 1, ta chọn hàm tọa độ như sau:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

Tính công khả dĩ của ngoại lực δA_e và thế năng biến dạng uốn U_u . Cụ thể là:

$$\delta A_e = - \int_f [p_z(x, y) w(x, y)] dx dy$$

và

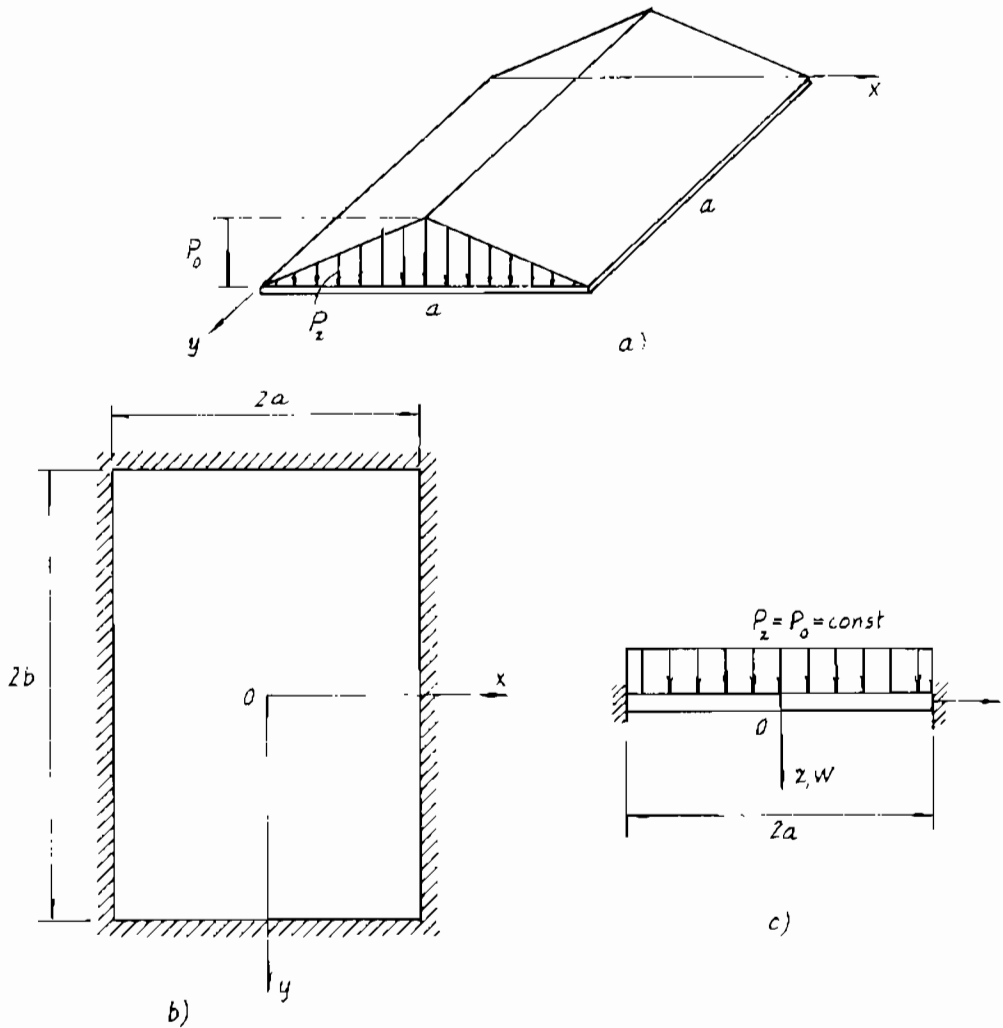
$$U_u = \frac{1}{2} \iint_f D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Khi làm cực tiểu năng lượng toàn phần, ta có:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{mn}} = \frac{\partial \delta A_e}{\partial c_{mn}} - \frac{\partial U_u}{\partial c_{mn}} = 0$$

hay là:

$$\frac{D\pi^4 a^2}{4} c_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 - \frac{8p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$



Hình 10.13.

Từ đây ta rút ra:

$$c_{mn} = \frac{32 p_0 a^4 \sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n \pi^2 D (m^2 + n^2)^2}$$

Phương trình độ võng cần tìm sẽ là:

$$w(x, y) = \frac{32 p_0 a^4}{D \pi^2} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n (m^2 + n^2)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left(\begin{matrix} n = 1, 3, 5, \dots \\ m = 1, 3, 5, \dots \end{matrix} \right)$$

Độ võng cực đại tại $x = y = \frac{a}{2}$ với ba số hạng đầu tiên ($m = 1$; $n = 1$; $m = 1$; $n = 3$; $m = 3$; $n = 1$) là:

$$w_{\max} = 0,002625 \frac{p_0 a^4}{D} \text{ với } p_0 = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2, a = 400 \text{ cm}, \mu = 0,3; h = 10 \text{ cm} \text{ thì } w_{\max} = 3,6 \text{ cm}.$$

$$\text{Nghiệm chính xác hơn có giá trị: } w_{\max} = 0,00263 \frac{p_0 a^4}{D}.$$

Ví dụ 2. Tấm chữ nhật $2a \times 2b$ với $b = 1,5a$ hình 10.13b, c, chịu tải trọng phân bố đều $q_z = q_0 = \text{const}$. Tìm hàm độ võng và độ võng lớn nhất?

Trên cơ sở bảng 1, ta chọn hàm chuyển vị $w(x, y)$ như sau:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{mn}}{4} \left[1 - (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{b} \right]$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Chuỗi này thỏa mãn điều kiện biên:

$$w_{x=\pm a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = 0$$

Tính với một số hạng của chuỗi:

$$w(x, y) = \frac{C_{11}}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

Khi đó thế năng biến dạng có giá trị:

$$U_u = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\nabla^2 w)^2 dx dy = \frac{D\pi^4 c_{11}^2}{32} \left(\frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab} \right)$$

Công khả dĩ của ngoại lực:

$$\delta A_e = -p_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b w(x, y) dx dy = -p_0 c_{11} ab$$

Thực hiện điều kiện $\partial \pi / \partial c_1 = 0$, ta suy ra:

$$c_{11} = \frac{16 p_0 a^4}{D\pi^4} \frac{1}{3 + 3 \left(\frac{a^4}{b^4} \right) + 2 \left(\frac{a^2}{b^2} \right)}$$

Nếu $\frac{a}{b} = 1,5$; $\mu = 0,3$ thì độ võng ở tâm của tấm là:

$$w_{\max} = 0,379 \frac{p_0 a^4}{Eh^3} \text{ với } p_0 = 0,40 \text{ kN/cm}^2; E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2;$$

$\mu = 0,3$; $a = 200 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$ thì $w_{\max} = 3,032 \text{ cm}$.

Nghiệm chính xác có giá trị:

$$w_{\max} = 0,386 \frac{p_0 a^4}{Eh^3}$$

§12. PHƯƠNG PHÁP BUBNOV – GALOORKIN

1. Nội dung của phương pháp

Phương pháp Bubnov – Galoorkin là một phương pháp tổng quát rất mạnh được dùng để giải các bài toán tuyến tính cũng như phi tuyến, các bài toán dao động và ổn định cũng như các bài toán khác nhau của cơ học kết cấu, của lý thuyết đàn hồi, của vật lý toán.

Ví dụ, giả sử điều kiện cân bằng của vật thể theo chuyển vị trong trường hợp của bài toán không gian có dạng:

$$L_1(u, v, w) - q_x = 0$$

$$L_2(u, v, w) - q_y = 0$$

$$L_3(u, v, w) - q_z = 0$$

trong đó: L_1, L_2, L_3 là các toán tử vi phân trên các hàm của các chuyển vị; q_x, q_y, q_z là cường độ của tải trọng ngoài.

Chúng ta cho các chuyển vị những biến phân vô cùng bé $\delta u, \delta v, \delta w$. Mặc dù các chuyển vị u, v, w bị ràng buộc với nhau, nhưng các biến phân bất kỳ của chúng thì không bị ràng buộc với nhau. Các toán tử L_1, L_2, L_3 được xem như những nội lực, vì thế có thể trực tiếp viết công khả dĩ của các ngoại lực và nội lực khi không cần xác định thế năng của hệ.

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V [L_1(u, v, w) - q_x] \delta u dV &= 0 \\ \iiint_V [L_2(u, v, w) - q_y] \delta v dV &= 0 \\ \iiint_V [L_3(u, v, w) - q_z] \delta w dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.60)$$

Một cách chặt chẽ mà nói, phương trình biến phân (10.60) chỉ đúng khi và chỉ khi các hàm u, v, w là nghiệm chính xác của bài toán. Tuy nhiên, cũng như phương pháp Rayleigh – Ritz, ở đây nghiệm chính xác được thay thế bằng nghiệm gần đúng dưới dạng:

$$u = \sum_{i=1}^m a_i \beta_i(x, y, z) ; v = \sum_{i=1}^m b_i \eta_i(x, y, z) ; w = \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x, y, z) \quad (10.61)$$

trong đó: $\beta_i(x, y, z), \eta_i(x, y, z), \varphi_i(x, y, z)$ là những hàm thỏa mãn đồng thời cả các điều kiện biên động học và tĩnh học;

a_i, b_i, c_i là các thông số chưa biết.

Các hàm (10.61) phải có các đạo hàm phù hợp với các toán tử, mặc dù không đòi hỏi phải thỏa mãn hệ phương trình (10.60).

Khi lấy biến phân các chuyển vị u, v, w , ta nhận được:

$$\delta u = \sum \beta_i(x, y, z) \delta a_i; \quad \delta v = \sum \eta_i(x, y, z) \delta b_i; \quad \delta w = \sum \varphi_i(x, y, z) \delta c_i \quad (10.62)$$

Thay $\delta u, \delta v, \delta w$ vào phương trình biến phân (10.60) và chú ý là các phương trình này đúng đối với mọi $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$ và vì $\delta u_i \neq 0, \delta v_i \neq 0, \delta w_i \neq 0$, cho nên $\delta a_i \neq 0, \delta b_i \neq 0, \delta c_i \neq 0$, ta rút ra hệ phương trình biến phân cơ bản của bài toán ba chiều như sau:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V [L_1(u, v, w) - q_1] \beta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V [L_2(u, v, w) - q_2] \eta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V [L_3(u, v, w) - q_3] \varphi_i(x, y, z) dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.63)$$

Hệ ba phương trình (10.63) cho một hệ $m + n + r$ phương trình với cùng số các hệ số a_i, b_i, c_i . Chúng ta hãy áp dụng kết quả trên vào bài toán tấm. Nghiệm của bài toán – chuyển vị $w(x, y)$ được tìm dưới dạng:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \quad (10.64)$$

Mỗi một số hạng của chuỗi đều phải thỏa mãn các điều kiện biên, nhưng không nhất thiết phải thỏa mãn phương trình vi phân sau đây của bài toán:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q_z(x, y) \quad (10.65)$$

Bởi vì phương trình (10.65) là phương trình cân bằng vi phân của các ngoại và nội lực theo phương z , công của các lực này trên các chuyển vị khả dĩ δw cho ta:

$$\iint [D \nabla^4 w - q_z(x, y)] \delta w dx dy = 0 \quad (10.66)$$

Chuỗi lượng giác này thỏa mãn các điều kiện biên động học:

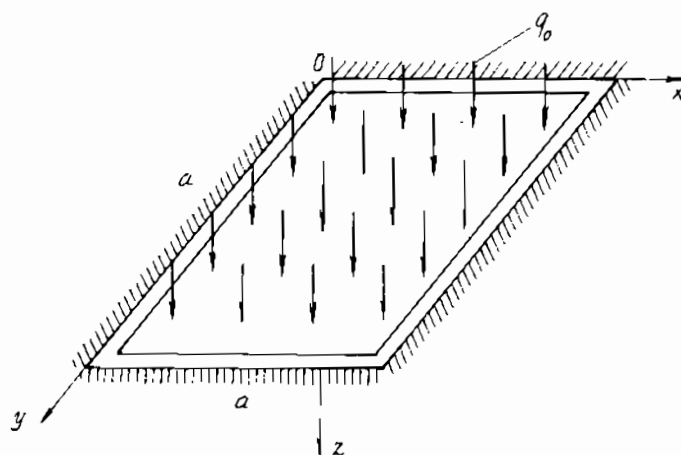
$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \\ (w)_{x=a} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0; \\ (w)_{y=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \\ (w)_{y=a} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=a} = 0; \end{aligned}$$

Khi giữ lại chỉ một số hạng của chuỗi ($m = n = 1$):

$$w(x, y) = c_{11} \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

Ta có phương trình biến phân theo Bubnov – Galoorkin trong trường hợp này như sau:

$$\int_0^a \int_0^a \left[D c_{11} \nabla^2 \nabla^2 f_1(x, y) - q_0 \right] f_1(x, y) dx dy = 0 \quad (a)$$



Hình 10.14.

Thay $f_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$ vào (a) và thực hiện phép tính tích phân này. Ta rút ra thông số chưa biết c_{11} như sau:

$$c_{11} = \frac{q_0 a^4}{8 D \pi^4}.$$

Độ võng lớn nhất tại tâm $x = y = \frac{a}{2}$ là:

$$w_{\max} = c_{11} = \frac{q_0 a^4}{8 D \pi^4} = 0,00128 \frac{q_0 a^4}{D}$$

Giá trị chính xác $w_{\max} = 0,00126 \frac{q_0 a^4}{D}$ sai khác cỡ 1,6%.

Phương trình mặt đàn hồi gần đúng chỉ với một số hạng của chuỗi có dạng:

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{32 D \pi^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

§13. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

1. Nội dung của phương pháp

Cũng như phương pháp Bubnov – Galoorkin, phương pháp bình phương tối thiểu là phương pháp giải gần đúng các phương trình vi phân và được sử dụng nhiều trong cơ học các vật rắn biến dạng.

Nội dung của phương pháp như sau:

Giả sử cần tìm nghiệm của một phương trình vi phân thường hay đạo hàm riêng nào đó xác định trong một miền nào đó.

Ví dụ, xét phương trình vi phân thường bất kỳ sau đây:

$$L(x, v, v', v'') = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (10.68a)$$

Ta sẽ tìm nghiệm phương trình này dưới dạng gần đúng và ít nhất phải thỏa mãn điều kiện biên hình học:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(x) \quad (10.68b)$$

Thay (10.68b) vào (10.68a) ta được hàm sai lệch:

$$L(x, a_i) = f(x) \neq 0 \text{ (vì (10.68b) là nghiệm gần đúng).}$$

Các hằng số a_i được chọn như thế nào đó để tích phân của bình phương làm sai lệch $f^2(x)$ có giá trị cực tiểu. Điều này có nghĩa là ta đã biến hàm sai lệch $f(x)$ thành hàm có độ lệch trung bình nhỏ nhất so với không.

Vì thế, lấy tích phân hàm $f^2(x)$ trong miền biến thiên của x , ta sẽ xác định được các hằng số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ từ các phương trình sau đây:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_3} \int_a^b f^2(x) dx = 0$$

.....

.....

.....

Hay là:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b f(x) \frac{\partial f(x)}{\partial a_1} dx &= 0 \\ \int_a^b f(z) \frac{\partial f(x)}{\partial a_2} dx &= 0 \\ \int_a^b f(z) \frac{\partial f(x)}{\partial a_3} dx &= 0 \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

Dưới đây ta sử dụng phương pháp này để giải bài toán được nêu ra sau đây.

Ví dụ

Hãy xác định độ võng và ứng suất lớn nhất sinh ra ở trong dầm chịu lực và liên kết như hình 10.15.

GIẢI

Với sự gần đúng thứ nhất ta chọn gần đúng chỉ một số hạng của chuỗi (10.68b) dưới dạng một hàm lượng giác thỏa mãn tất cả các điều kiện biên hình học. Cụ thể là:

$$V(x) = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \text{ tại } x = 0 \Rightarrow V = 0, V' = 0.$$

Thay $V(x)$ vào phương trình (10.69) ta có:

$$f(x) = EJ_z a \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - \frac{q}{2} (l - x)^2$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial a} = EJ_z \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

Thực hiện phép tính đã chỉ ra ở (10.69) ta tìm được:

$$V_{\max}(x=l) = a = \frac{ql^4}{EJ_z} \frac{32}{\pi^4} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,11937 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Nghiệm chính xác là:

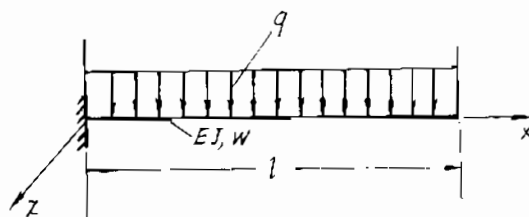
$$V_{\max} = 0,125 \frac{ql^4}{EJ_z}$$

Tính ứng suất:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} = \frac{EJ_z V''}{W_z} = 0,2946 \frac{ql^4}{W_z}$$

Nghiệm chính xác là:

$$\sigma_{\max} = 0,45936 \frac{ql^4}{W_z}.$$



Hình 10.15.

II. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG HỆ ĐÀN HỒI

§14. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÔNG KHẢ DĨ CỦA NGOẠI LỰC

Ta hãy khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở trạng thái “k” và trạng thái “m”, chịu các ngoại lực tương ứng P_{ik} và P_{qm} . Theo công thức (10.25) và (10.21), (10.22) ta có thể viết.

Công khả dĩ của các ngoại lực P_{ik} ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ik} \Delta_{km} &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_m M_k}{EJ} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{N_m N_k}{EF} dz + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma \frac{Q_m Q_k}{GF} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (a)$$

Mặt khác, công khả dĩ của các ngoại lực P_{qm} ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k” bằng:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{qm} \Delta_{mk} &= \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma \frac{Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (b)$$

Thay (a) và (b) vào (10.25) ta rút ra:

$$\sum_{i=1}^n P_{ik} \Delta_{km} = \sum_{i=1}^n P_{qm} \Delta_{mk} \quad (10.70)$$

Công thức này do E. Betti đề xuất năm 1872 và được phát biểu dưới dạng một định lý sau đây:

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” bằng công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “m” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “k”.

§15. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ

Giả sử có một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” như hình 10.16. Ở mỗi trạng thái hệ chỉ chịu một lực tập trung suy rộng tương ứng là P_m và P_k .

Theo định lý Betti ta có thể viết:

$$P_k \cdot \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk}$$

hay

$$\Delta_{km} / P_m = \Delta_{mk} / P_k \quad (a)$$

Tỷ số $\Delta_{km} / P_m = \delta_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra.

Tương tự như vậy ta có:

$$\delta_{km} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k} \text{ là chuyển}$$

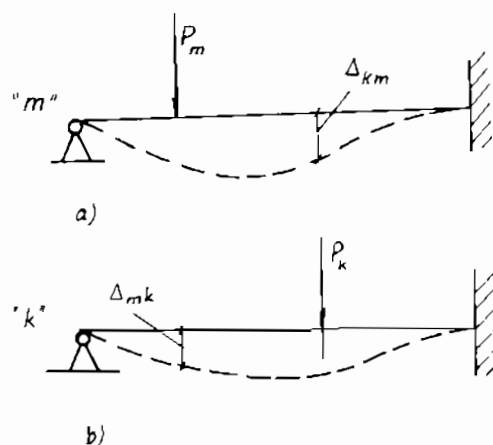
vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực $P_k = 1$ gây ra.

Từ (a) rút ra:

$$\delta_{mk} = \delta_{km} \quad (10.71)$$

Kết quả này do J. Maxwell đề xuất năm 1834 cho thấy nếu ở mỗi trạng thái chỉ chịu một lực bằng đơn vị thì các chuyển vị theo phương của lực này do lực kia gây ra sẽ bằng nhau.

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k gây ra tương hỗ bằng

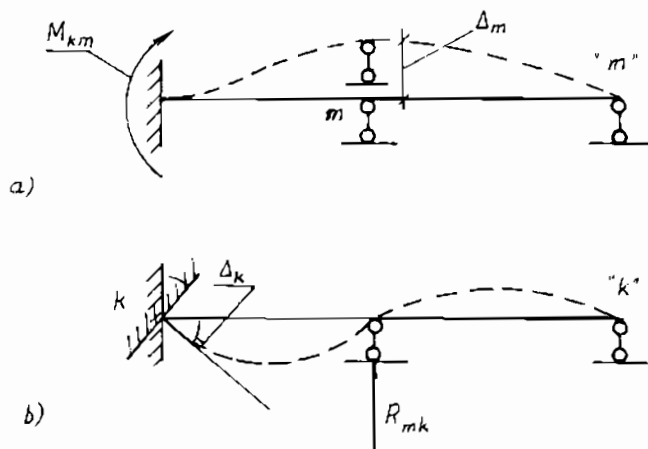


Hình 10.16.

chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m gây ra.

§16. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỖ VỀ CÁC PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Chúng ta hãy xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” chịu các chuyển vị cưỡng bức ở các liên kết m và k (hình 10.17).



Hình 10.17.

Theo định lý về công tương hỗ của ngoại lực (10.70) ta có:

$$R_{mk}\Delta_m = M_{km}\Delta_k$$

hay:

$$R_{mk} / \Delta_k = M_{km} / \Delta_m \quad (b)$$

Tỷ số $\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = r_{mk}$ là phản lực “đơn vị” tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

Tương tự tỷ số $\frac{M_{km}}{\Delta_m} = r_{km}$ là phản lực “đơn vị” tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Theo (b) ta có:

$$r_{mk} = r_{km} \quad (10.72)$$

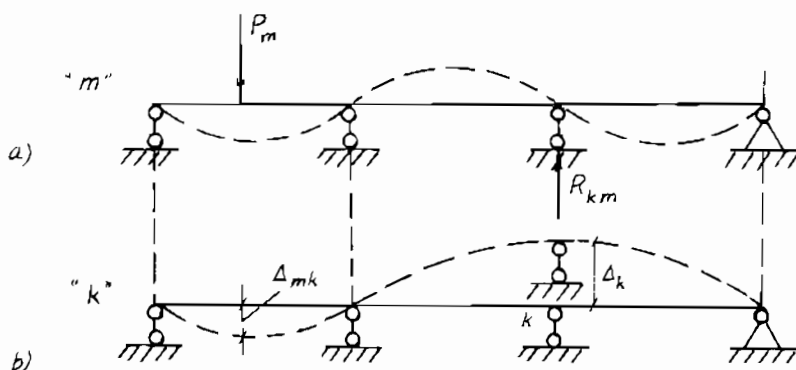
Kết quả (10.72) do L. Rayleigh đề xuất năm 1875 và được phát biểu như sau:

Định lý: Đối với với hệ đàn hồi tuyến tính phản lực “đơn vị” tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

Cần chú ý rằng thuật ngữ phản lực “đơn vị” ở đây là do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra chứ không phải nó bằng đơn vị.

§17. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỖ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ VÀ PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Ta lại khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái “m” và “k” (hình 10.18).



Hình 10.18.

Ở trạng thái “m” hệ chịu một lực P_m , còn ở trạng thái “k” hệ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k .

Nếu gọi δA_c^k là công khả dĩ của các phản lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị tương ứng của hệ ở trạng thái “m” ta có:

$$\delta A_c^k = 0$$

Theo định lý Betti (10.70) thì:

$$P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = \delta A_c^k = 0$$

hay:

$$R_{km} / P_m = -\Delta_{mk} / \Delta_k$$

Tỷ số $R_{km} / P_m = \tilde{r}_{km}$ là phản lực tại liên kết k do lực $\bar{P}_m = 1$ gây ra.

Tỷ số $\Delta_{mk} / \Delta_k = \tilde{\delta}_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí đặt lực P_m nhưng do chuyển vị cường bức $\bar{\Delta}_k = 1$ gây ra.

Do đó với ký hiệu trên ta có:

$$\tilde{r}_{km} = -\tilde{\delta}_{mk} \quad (10.73)$$

Đây là công thức của định lý Rayleigh thứ hai.

Định lý: Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực $\bar{P}_m = 1$ gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực $\bar{P}_m$ do chuyển vị cường bức $\bar{\Delta}_k = 1$ tại liên kết k gây ra nhưng ngược dấu.

§18. ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

1. Định lý Castigliano

Giả sử có một hệ đàn hồi dạng bất kỳ (thanh, tấm, vỏ, khối) chịu tác dụng tĩnh của một hệ ngoại lực bất kỳ Q và một yếu tố lực tập trung tổng quát $\bar{F}$ (lực hoặc mômen) đặt tại K (hình 10.19).

Ta ký hiệu Δ_{FF} là chuyển vị của điểm đặt lực F và theo phương của chính nó khi không có Q và Δ_{FQ} là chuyển vị của điểm đặt lực $\bar{F}$ theo phương của lực này nhưng do hệ lực bất kỳ Q gây ra.

Do đó chuyển vị toàn phần của điểm đặt lực F và theo phương của chính nó do cả F và Q gây ra là:

$$\Delta_F = \Delta_{FF} + \Delta_{FQ} \quad (a)$$

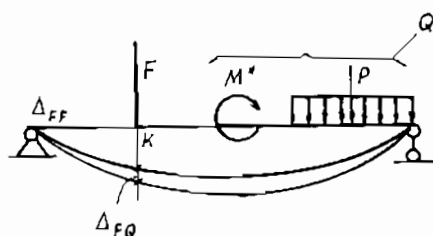
Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ theo (10.6) ta có:

$$U = A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta_{FF} + F \cdot \Delta_{FQ} + U_{QQ} \quad (b)$$

trong đó: U_{QQ} là thế năng tích lũy trong hệ chỉ do Q gây ra bằng công của Q trên những chuyển vị gây ra bởi chính nó.

Số hạng $F \cdot \Delta_{FQ}$ không chứa hệ số $1/2$ vì trên đoạn Δ_{FQ} lực $\bar{F}$ luôn bằng hằng.

Gọi δ_{FF} là chuyển vị của điểm đặt lực $\bar{F} = 1$ theo phương của nó do chính nó gây ra, ta có thể viết lại (b) như sau:



Hình 10.19.

$$U = \frac{1}{2} F^2 \delta_{FF} + F \cdot \Delta_{FQ} + U_{QQ} \quad (c)$$

Đạo hàm (c) theo F , ta được:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = F \cdot \delta_{FF} + \Delta_{FQ} = \Delta_F \quad (d)$$

và

$$\frac{\partial^2 U}{\partial F^2} = \delta_{FF} \quad (10.74a)$$

$$\text{Suy ra:} \quad \Delta_F = \frac{\partial U}{\partial F} \quad (10.74b)$$

Kết quả này là định lý Castigliano và được phát biểu như sau:

“Chuyển vị của điểm đặt lực tổng quát theo phương tác dụng của nó bằng đạo hàm riêng của thế năng biến dạng theo lực này”.

Định lý này cho một phương pháp tổng quát để xác định chuyển vị không chỉ đối với hệ thanh mà cho hệ bất kỳ (tám, vỏ, khối).

Đối với trường hợp hệ thanh phẳng, trên các mặt cắt chỉ tồn tại 3 nội lực là $M(z)$, $N(z)$, $Q(z)$ thì khi sử dụng quy tắc vi phân theo thông số công thức (10.54b), ta tìm được:

$$\Delta_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum \int \frac{M dz}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} + \sum \int \frac{N dz}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial F} + \sum \int \frac{Q dz}{GF} \cdot \frac{\partial Q}{\partial F} \quad (10.75)$$

Khi không kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc, ta có:

$$\Delta_F = \sum \int \frac{M dz}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial F} \quad (10.76)$$

2. Định lý Lagrange

Khi biểu diễn thế năng biến dạng theo hàm của các chuyển vị độc lập $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, có thể chứng minh rằng: “Đạo hàm riêng của thế năng theo chuyển vị bất kỳ nào đó bằng lực tác dụng theo phương của chuyển vị đó”.

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \quad (10.77)$$

Đó là nội dung của định lý mang tên Lagrange.

§19. ĐỊNH LÝ MENABREA VỀ SỰ CỤC TIỂU CỦA THẾ NĂNG

Ta khảo sát một hệ bất biến hình thừa liên kết chịu lực cân bằng như hình 10.20a. Để xác định các phản lực X_1, X_2, X_3 tại các liên kết thừa (hình 10.20b) thì các điều kiện cân bằng tĩnh là không thể. Hệ như thế gọi là hệ không xác định tĩnh hay gọn hơn là hệ siêu tĩnh.

Phản lực tại các liên kết thừa nội hoặc ngoại gọi là phản lực thừa. Theo định lý Castigliano thì các chuyển vị $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ của các

điểm đặt phản lực X_1, X_2, X_3 theo phương của các phản lực này hoàn toàn được xác định theo thế năng biến dạng của hệ:

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} ; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} ; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} \dots$$

Ở đây $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots P)$.

Khi các liên kết gối tựa 1, 2, 3 là cứng tuyệt đối thì $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$ và ta có hệ phương trình:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \dots \quad (10.78)$$

Phương trình này là điều kiện cần để hàm U đạt cực trị. Để thấy cực trị này là cực tiểu. Thật vậy, theo công thức (10.74a) ta có:

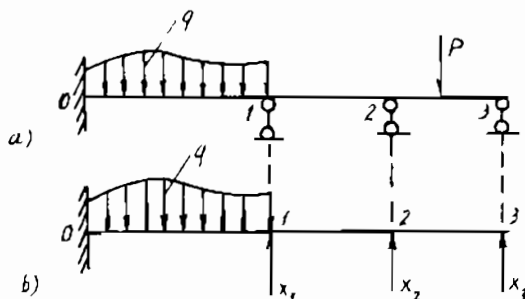
$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33} > 0 \dots \quad (10.79)$$

Dấu dương của các đạo hàm bậc hai chứng tỏ rằng điều kiện (10.79) là điều kiện cực tiểu của hàm U . Vì vậy, ta đi đến định lý về sự cực tiểu của thế năng mang tên Menabrea như sau:

“Trong những hệ siêu tĩnh các phản lực thừa nhận các giá trị sao cho thế năng biến dạng của hệ có giá trị cực tiểu”.



Hình 10.20.

Ví dụ:

Một thanh cong siêu tĩnh có độ cong nhỏ chịu lực và liên kết như hình 10-21. Hãy xác định phản lực thừa tại gối "1".

GIẢI

Theo công thức (10.78) của định lý cực tiểu của thế năng biến dạng ta có:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \text{ mà}$$

$$U = \int_s \frac{M^2(\varphi) dS}{2EJ} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)}{EJ} \frac{dM(\varphi)}{dX_1} = 0 \quad (a)$$

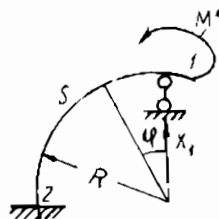
Trong đó:

$$M(\varphi) = M^* + X_1 \cdot R \sin \varphi ; \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial X_1} = R \sin \varphi ; \quad dS = R d\varphi$$

Thay các giá trị này vào (a) ta thu được:

$$M^* + X_1 R \frac{\pi}{4} = 0 ; \quad X_1 = - \frac{4M^*}{\pi R} \quad (\text{dấu } (-) \text{ biểu thị chiều của } X_1$$

hướng xuống dưới).



Hình 10.21.

Chương 11

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH HỆ SIÊU TĨNH

I. PHƯƠNG PHÁP LỰC

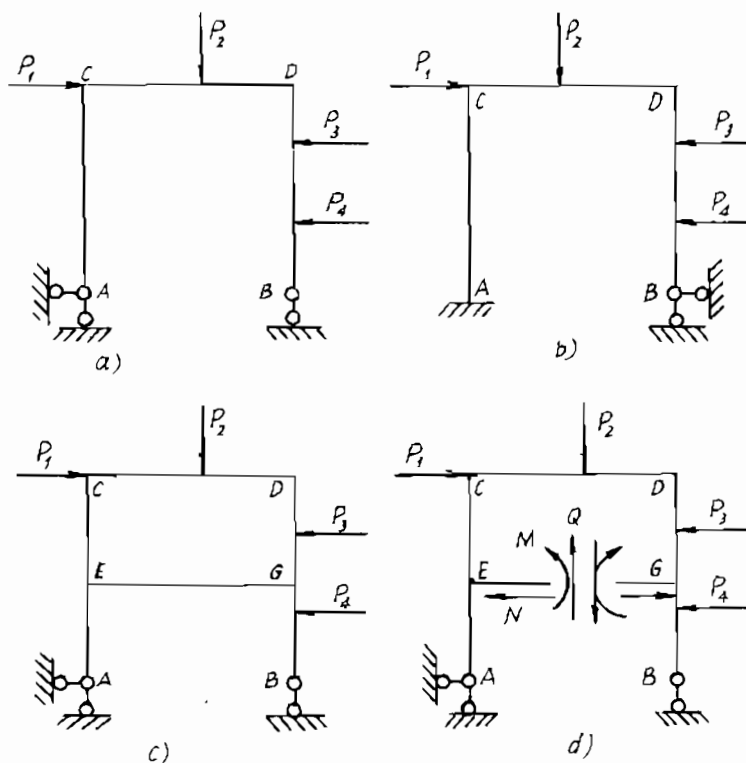
Như đã thấy ở chương 1, hệ siêu tĩnh là một hệ cân bằng, bất biến hình hình học và thừa liên kết. Đối với hệ loại này, các phương trình cân bằng tĩnh học không cho phép xác định đầy đủ tất cả các nội lực và phản lực trong hệ.

§1. SỰ HÌNH THÀNH HỆ SIÊU TĨNH

1. Liên kết thừa và liên kết cần thiết

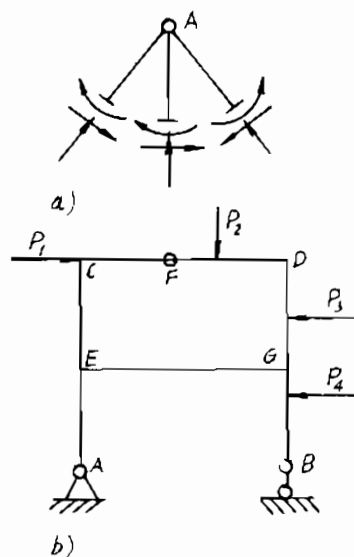
Ta hãy xét một hệ bất biến hình – một khung tĩnh định – chịu lực cân bằng như trên hình 11.1a.

Khi bổ sung vào A một liên kết chống xoay và vào B một liên kết chống chuyển vị thẳng ngang thì khung 11.1a có dạng hình 11.1b. Những liên kết được bổ sung vào mặc dù làm tăng độ cứng của hệ, nhưng về phương diện hình học và tĩnh học thì chúng là “thừa” bởi vì có chúng hay không có chúng thì hệ vẫn cân bằng và bất biến hình. Ngược lại, nếu ta loại đi một liên kết bất kỳ trong khung (hình 11.1a) thì khung trở thành hệ biến hình hình học (một cơ cấu). Do đó, tất cả các liên kết đặt vào khung (hình 11.1a) là những liên kết cần thiết để đảm bảo cho hệ cân bằng và bất biến hình hình học.



Hình 11.1.

Nếu ta thêm vào khung (hình 11.1a) một thanh ngang EG và hàn cứng vào các thanh đứng thì độ cứng của khung tăng, nhưng về phương diện đảm bảo tính bất biến hình học thì thanh này là “thừa” (cũng như những liên kết thừa ngoài). Các nội lực trong thanh “thừa” này (hình 11.1d) không thể được xác định chỉ từ các điều kiện cân bằng. Sự có mặt của liên kết “thanh thừa” EG trong khung (hình 11.1c) đã tạo ra ba ẩn số thừa tương ứng. Đối với khung



Hình 11.2.

phẳng (hình 11.1c) để có thể xác định được nội lực trên tất cả các mặt cắt của khung thì trước hết cần phải xác định phản lực ở các liên kết “cần thiết” A, B và ba phản lực thừa (tức là các nội lực trên các mặt cắt ngang của liên kết “thừa” nội GE). Nghĩa là, mỗi chu vi kín CDGE có ba phản lực “thừa”. Số liên kết “thừa” xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu. Nếu mỗi chu vi kín có một khớp thì số bậc siêu tĩnh của chu vi này bằng 2 (hình 11.2b). Khớp này gọi là khớp đơn. Mỗi khớp đơn làm triệt tiêu một ẩn số là mômen. Nếu có s thanh nối với nhau bằng một khớp thì khớp này tương đương với $s - 1$ khớp đơn (hình 11.2a). Khớp A tương đương với $s - 1 = 3 - 1 = 2$ khớp đơn.

2. Bậc siêu tĩnh

Để xác định bậc siêu tĩnh n của kết cấu, ta có thể dùng các công thức đơn giản sau đây:

$n = \text{số phản lực liên kết ngoại và nội cần xác định trừ đi số phương trình cân bằng cần thiết.}$

Ví dụ đối với hệ trên hình 11.1c: $n = (3 + 3) - 3 = 3$.

Ngoài ra có thể tính bậc siêu tĩnh của hệ như sau:

- 1) Tính số liên kết đơn “thừa” ngoại (số thanh gối đơn “thừa” nối kết cấu với nền): T
- 2) Tính số chu vi kín: K
- 3) Tính số khớp đơn trong khung: D

Đối với hệ phẳng:

$$n = 3K + T - D \quad (1)$$

Ví dụ hệ trên hình 11.1c có:

$$K = 1 ; T = D = 0$$

$$\Rightarrow n = 3 \cdot 1 + 0 - 0 = 3$$

Đối với hệ không gian mỗi chu vi kín có 6 bậc siêu tĩnh. Bởi vì mỗi mặt cắt có sáu ẩn số là sáu thành phần nội lực gồm 2 mômen.

uốn, 1 mômen xoắn, 2 lực cắt và 1 lực dọc. Do đó, bậc siêu tĩnh của hệ không gian được tính như sau:

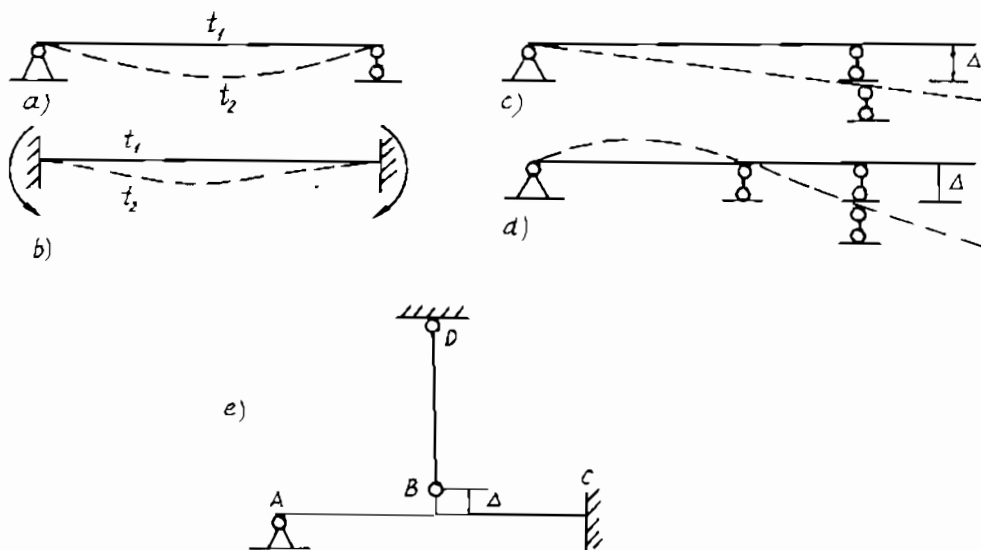
$$n = 6K + T - Đ \quad (2)$$

Từ các phân tích trên ta thấy liên kết “thừa” cũng có thể là những liên kết ngoại hoặc những liên kết nội. Ta gọi những hệ có những liên kết ngoại “thừa” là những hệ siêu tĩnh ngoại và gọi hệ có liên kết “thừa” nội là những hệ siêu tĩnh nội. Cần phải hiểu rằng thuật ngữ “liên kết thừa” chỉ có tính chất quy ước. Bởi vì, chỉ để đảm bảo cho hệ cân bằng và bất biến hình hình học thì chúng là “thừa”, nhưng sự có mặt của chúng sẽ tạo cho hệ làm việc tốt hơn rất nhiều so với hệ tĩnh định cùng loại.

3. Đặc điểm làm việc của hệ siêu tĩnh

Tất cả các hệ siêu tĩnh đều có những thuộc tính chung sau đây:

- Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào quan hệ độ cứng của các cấu kiện.
- Các liên kết thừa được cấu tạo thích hợp sẽ tạo ra sự phân bố nội lực hợp lý trong các cấu kiện kết cấu.



Hình 11.3.

- c) Chuyển vị gây ra do tác dụng ngoài ở trong hệ siêu tĩnh nhỏ hơn so với hệ tĩnh định tương ứng, bởi vì các liên kết thừa làm tăng độ cứng của hệ.
- d) Dưới tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ của môi trường xung quanh hoặc do sự nung nóng các cấu kiện của kết cấu, cũng như sự có mặt các chuyển vị cưỡng bức do lắp ráp hoặc chế tạo không chính xác v.v. trong các hệ siêu tĩnh sẽ xuất hiện các nội lực. Điều này không xảy ra trong các hệ tĩnh định. Trên hình 11.3a, c là các hệ tĩnh định, còn trên các hình 11.3b, d là các hệ siêu tĩnh tương ứng. Trên hình 11.3e mô tả chuyển vị cưỡng bức do chế tạo không chính xác ở mỗi nối B.
- e) Khi các liên kết “thừa” vì một lý do nào đó bị loại bỏ thì kết cấu vẫn không thể bị phá hủy, bởi vì khi đó kết cấu vẫn là hệ bất biến hình.

Ngày nay tồn tại nhiều phương pháp tính toán các hệ siêu tĩnh, chủ yếu dựa trên các tiên đề “Giải phóng liên kết” (trong phương pháp lực) và tiên đề “Bổ sung liên kết” (trong phương pháp chuyển vị). Dưới đây trong chương này và chương “Động lực học kết cấu” chúng ta sẽ nghiên cứu cách triển khai hai tiên đề nói trên vào các bài toán “Sức bền vật liệu”.

I. PHƯƠNG PHÁP LỰC

§2. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC ĐỐI VỚI HỆ CHỊU TẢI TRỌNG

Để tính toán hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực người ta không trực tiếp tính trên hệ đã cho (hệ xuất phát) mà tính trên hệ tương đương với trợ giúp của hệ cơ bản, sao cho biến dạng của hệ tương đương phản ánh đúng biến dạng của hệ đã cho. Hệ tương đương này được xây dựng trên cơ sở của tiên đề “Giải phóng liên kết” và được định nghĩa như sau:

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho sau khi đã loại đi các liên kết “thừa” và thay thế vào đó các phản lực “thừa”.

Hệ cơ bản là hệ nhận được từ hệ tương đương sau khi đã bỏ đi tất cả các phản lực thừa và tải trọng ngoài.

Như vậy, đối với một kết cấu siêu tĩnh cho trước ta có thể xây dựng được vô số hệ tương đương và do đó là hệ cơ bản.

Để thấy rõ tư tưởng và trình tự tính toán của phương pháp ta hãy khảo sát một ví dụ cụ thể (hình 11.4a). Đó là một dầm liên tục có hai bậc siêu tĩnh. Một phương án có thể của hệ tương đương được cho trên (hình 11.4b). Đối với phương án này, phương trình biến dạng được viết như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1x_1} + \Delta_{1x_2} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2x_1} + \Delta_{2x_2} + \Delta_{2p} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

trong đó: Δ_{1x_1} là chuyển vị tại vị trí của X_1 theo phương của lực X_1 do chính lực X_1 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1x_2} là chuyển vị theo phương lực X_1 do lực X_2 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1p} là chuyển vị theo phương lực X_1 do tải trọng đặt lên hệ gây ra trong hệ cơ bản. Các chuyển vị Δ_{2x_1} , Δ_{2x_2} , Δ_{2p} cũng có ý nghĩa tương tự.

Δ_1 là chuyển vị (góc xoay tại ngàm A) theo phương lực X_1 (trong trường hợp này X_1 là mômen) do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra bằng không. Chuyển vị Δ_2 cũng có ý nghĩa tương tự. Từ điều kiện biến dạng tại những liên kết bị loại bỏ ta thấy rõ ý nghĩa của phương trình thứ hai của hệ (11.1) là chuyển vị thẳng Δ_2 tại gối tựa cứng C theo phương lực X_2 do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra phải bằng không.

Chuyển vị do các ảnh hưởng X_1 , X_2 gây ra có thể biểu diễn như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1x_1} &= \delta_{11}X_1 ; & \Delta_{1x_2} &= \delta_{12}X_2 \\ \Delta_{2x_1} &= \delta_{21}X_1 ; & \Delta_{2x_2} &= \delta_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (11.1a)$$

Khi thay (11.1a) vào (11.1) ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1b)$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các số hạng tự do của hệ các phương trình chính tắc.}$$

Các hệ số của hệ các phương trình chính tắc trên đường chéo chính được gọi là các hệ số chính hay các chuyển vị chính; chúng luôn luôn dương.

Các hệ số còn lại của ma trận A gọi là các hệ số phụ. Chúng có thể có dấu âm, hoặc dương, hoặc bằng không và $\delta_{kj} = \delta_{jk}$.

Nghiệm của hệ (3.3) viết dưới dạng ma trận như sau:

$$A = A^{-1} \cdot B \quad (11.4)$$

trong đó: A^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Việc giải hệ (11.2) hoặc việc tính ma trận nghịch đảo sẽ đơn giản đáng kể khi giải hệ (11.4), nếu có nhiều hệ số phụ δ_{kj} bằng không. Điều này phụ thuộc vào việc chọn hệ cơ bản.

Cần chú ý là tất cả những lập luận trong tiết 1 này chỉ đúng với hệ cho phép sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.

Ví dụ. Hãy vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 11.4a.

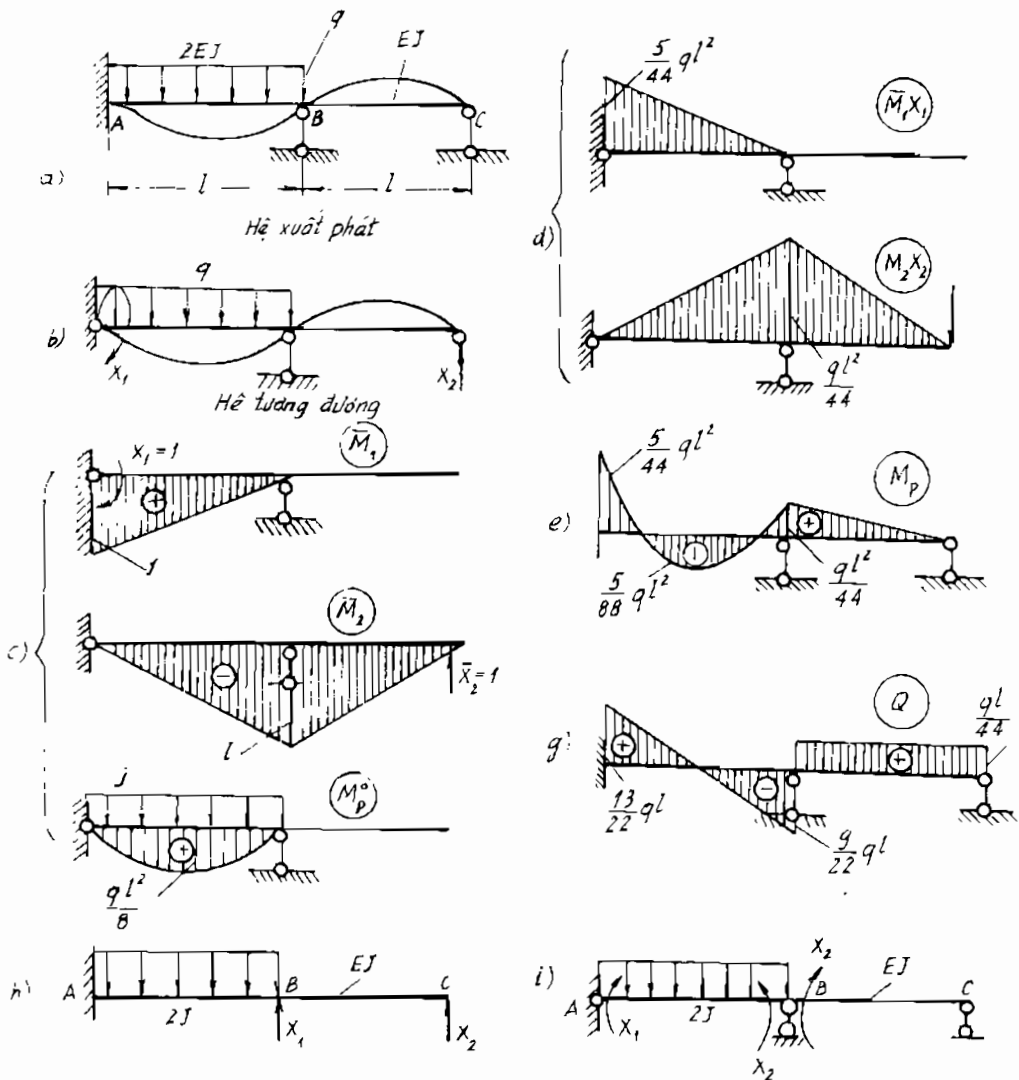
GIẢI

Ta chọn hệ tương đương như hình 11.4b. Biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do các lực $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ và tải trọng gây ra được cho trên hình vẽ (hình 11.4c). Bằng cách nhân biểu đồ ta sẽ xác định được các hệ số và số hạng tự do trong các phương trình chính tắc của hệ (11.1b) như sau:

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] \frac{1}{2FJ} = \frac{l}{6FJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{3} \cdot l \right] \frac{1}{2GJ} = \frac{l^2}{12EJ}$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2 = \frac{l^3}{2EJ}$$



Hình 11.4.

$$\Delta_{1p} = \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{1}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{48EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{l}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^4}{48EJ}$$

Thay các hệ số δ_{mn} và các số hạng tự do Δ_{kp} này vào hệ các phương trình chính tắc (11.1b) và giải nó ta tìm được:

$$X_1 = -\frac{5}{44} ql^2 \quad ; \quad X_2 = -\frac{ql}{44}$$

Theo nguyên lý độc lập tác dụng của các lực, tung độ của biểu đồ mômen cuối cùng M_p đối với hệ siêu tĩnh đã cho được tính như sau:

$$(M_p) = (M_p^o) + (\bar{M}_1) X_1 + (\bar{M}_2) X_2$$

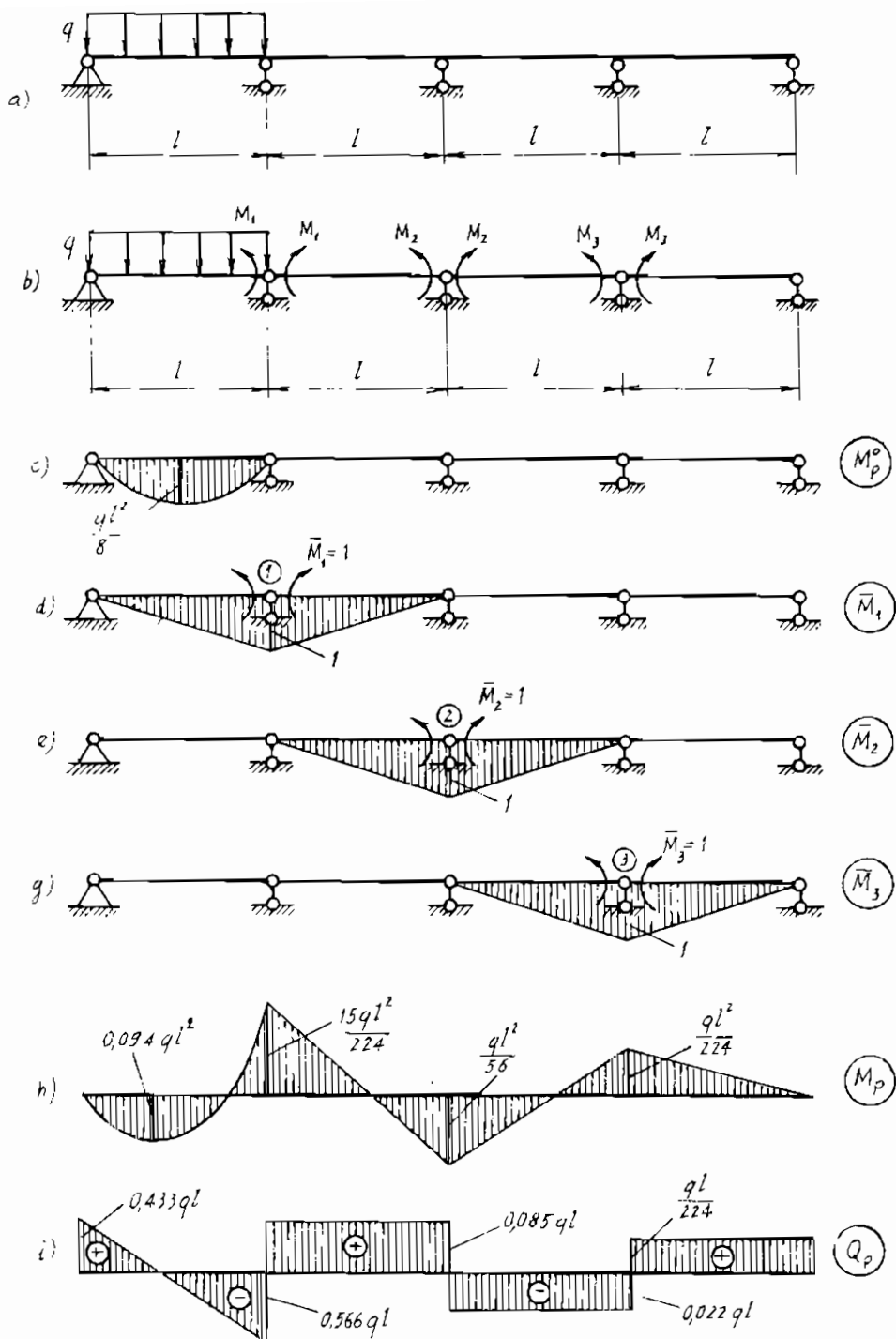
Hình 11.4d là biểu đồ mômen uốn $(\bar{M}_1) X_1$ và $(\bar{M}_2) X_2$ ứng với chiều đúng của X_1 và X_2 .

Biểu đồ mômen và lực cắt trong hệ siêu tĩnh được cho trên hình 11.4e, g. Ta sẽ có lại kết quả này khi sử dụng các hệ tương đương được chọn như hình 11.4h, i. Đặc biệt đối với các dầm liên tục nhiều nhịp hình 11.5a thì hệ tương đương dạng hình 11.4i và hình 11.5b, sẽ dẫn hệ n phương trình (11.2) bất kỳ, về hệ n phương trình mà mỗi phương trình chỉ có 3 ẩn số X_i là 3 mômen uốn M_{i-1} , M_i , M_{i+1} ở các gối trung gian (hình 11.5a, b). Sau khi vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_p^o)$, $(\bar{M}_j)$ (hình 11.5c, d, e, g) và tính các hệ số δ_{kj} , Δ_{kp} ($k, j = \overline{1,3}$) rồi thay vào (11.2) và giải ta có:

$$M_1 = -\frac{15ql^2}{224} \quad ; \quad M_2 = \frac{ql^2}{56} \quad ; \quad M_3 = -\frac{ql^2}{224}$$

Biểu đồ mômen uốn và lực cắt cuối cùng trong dầm liên tục được cho trên hình 11.5h, i.

Phương pháp lực đối với dầm liên tục với các hệ tương đương tối ưu nhất cũng vẫn rất công kênh, tốn kém giấy mực và công sức mà kết quả nhận chỉ ở nội lực.



Hình 11.5.

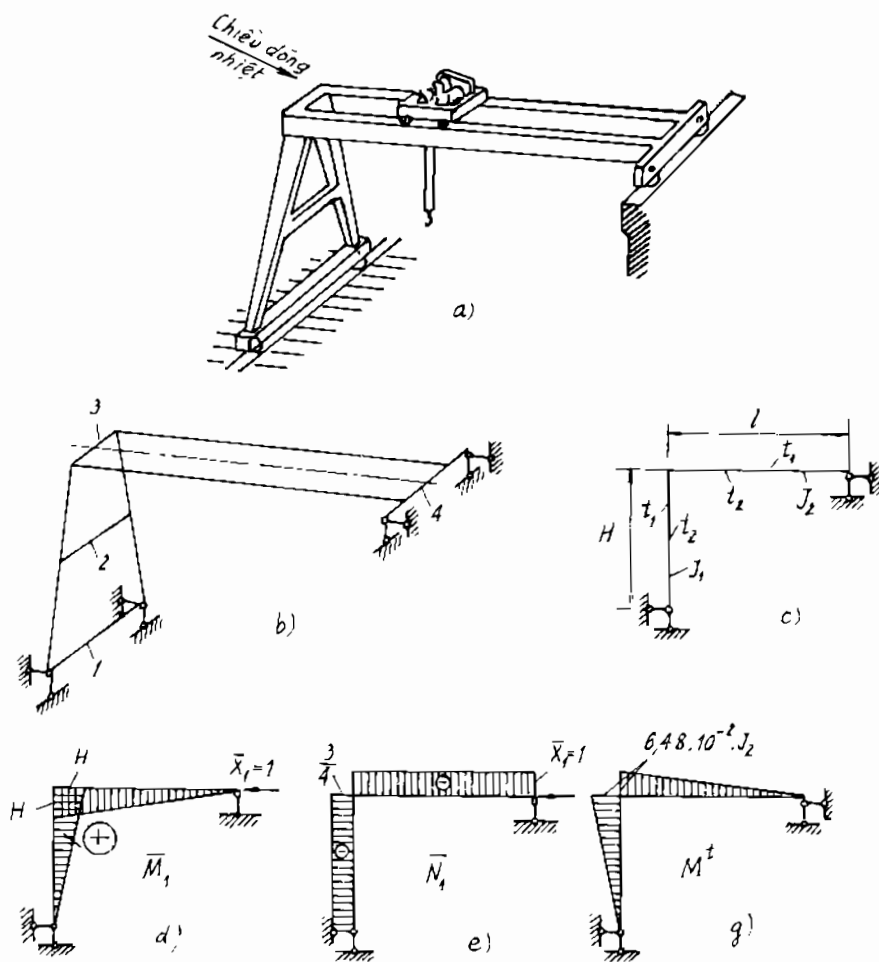
Ví dụ

Một cầu trục trượt bằng thép làm việc trong điều kiện nhiệt độ dưới tác dụng của ánh nắng mặt trời (hình 11.6a) và có sơ đồ tính hình 11.6b. Hãy vẽ biểu đồ nội lực trong trường hợp cầu trục bị nung nóng không đều nhưng đối xứng đối với trục dọc của nó.

GIẢI

Theo điều kiện đề bài thì không có một lực nào sinh ra trong các thanh 1, 2, 3, 4 và chỉ cần tính một nửa khung cầu trục như một khung phẳng (hình 11.6c) với các số liệu như sau:

$$l = 8 \text{ m} ; H = 6 \text{ m} ; t_1 = 60^\circ ; t_2 = 40^\circ ; J_2 = 2 J_1.$$



Hình 11.6.

Chiều cao mặt cắt chân cầu trục $h_1 = 0,4$ m. Chiều cao mặt cắt của dầm chính $h_2 = 1,5.h_1 = 0,6$ m. Tất cả các mặt cắt đều có hai trục đối xứng. Các biểu đồ nội lực đơn vị $\overline{M}_1$ và $\overline{N}_1$ được cho trên hình 11.6d, e.

Trong trường hợp này hệ có một bậc siêu tĩnh và phương trình chính tắc tương ứng có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t}^o = 0$$

trong đó:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ_2} \left[\frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] + \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] = \\ &= \frac{240 \cdot 10^6}{EJ_2}, \text{ cm/daN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1t}^o &= \alpha \frac{(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{\overline{N}_1} + \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{h} \Omega_{\overline{M}_1} = -0,12 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot \\ &\cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 600 + 800 \right) + 0,12 \cdot 10^{-6} \frac{(60 - 40)}{60} \frac{1}{2} 800 \cdot 600 + 0,12 \cdot 10^{-6} \cdot \\ &\cdot \frac{(60 - 40)}{60} \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 = 0,0129 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Phương trình chính tắc với hệ số bằng số là:

$$\frac{240 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 J_2} X_1 + 0,0129 = 0$$

Do đó:

$$X_1 = -1,076 \cdot 10^{-1} J_2, \text{ daN}.$$

Biểu đồ mômen uốn trong cầu trục do nung nóng không đều được cho trên hình 11.6g.

§4. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Để tính toán những hệ siêu tĩnh có các gối tựa chịu chuyển vị cường bức ta cũng sẽ sử dụng những lý luận vừa mô tả ở trên. Khác

với các trường hợp trên trong trường hợp này nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do các gối tựa chịu các chuyển vị cưỡng bức.

Để áp dụng hệ phương trình chính tắc (11.2) vào trường hợp này ta phải chú ý khi chọn hệ cơ bản không nên loại bỏ các liên kết có chuyển vị cưỡng bức mà phải cắt các liên kết ấy.

Giả sử cho một dầm như hình 11.7a, nếu chọn hệ tương đương bằng cách loại bỏ liên kết tại gối tựa B có chuyển vị cưỡng bức thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số X_1 do các ẩn số X_k nếu có (trên hình 11.7a không chỉ ra những ẩn số này) và chuyển vị cưỡng bức gây ra sẽ không bằng 0. Cụ thể là:

$$\Delta_{x_1} = (X_1, X_2, \dots, X_n) = \delta \neq 0$$

Bây giờ nếu ta chọn hệ tương đương bằng cách cắt liên kết có chuyển vị cưỡng bức B thì điều kiện chuyển vị theo phương liên kết ấy vẫn bằng 0. Vì lúc này điều kiện vừa nói này là điều kiện mô tả chuyển vị tương đối của hai mặt cắt của liên kết vừa bị cắt.

$$\Delta_{x_1} = (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Ngoài ra còn có thể chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết không có chuyển vị cưỡng bức. Nếu chọn hệ tương đương bằng cách cắt các liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức thì phương trình thứ K có dạng:

$$\delta_{K1}X_1 + \delta_{K2}X_2 + \dots + \delta_{KK}X_K + \dots + \delta_{Kn}X_n + \Delta_{K\Delta}^0 = 0, \quad (k = \overline{1, n}) \quad (11.6)$$

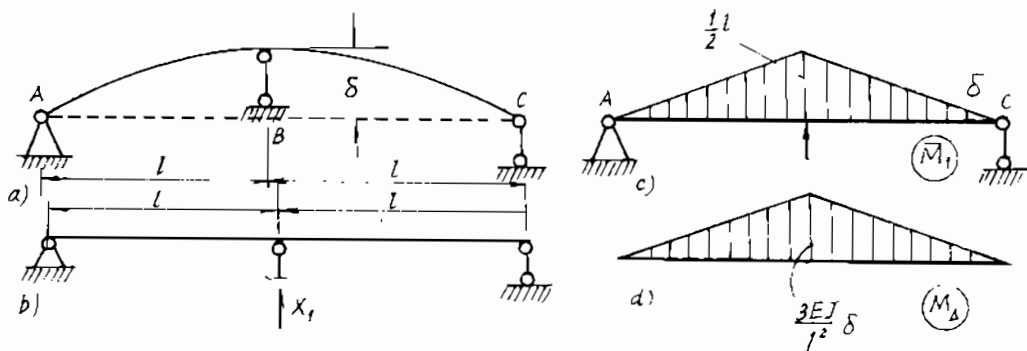
Các hệ số δ_{kj} tính như đối với trường hợp hệ chịu tải trọng.

$\Delta_{K\Delta}^0$ là chuyển vị theo phương của lực X_K do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Nó được xác định theo công thức sau đây:

$$\Delta_{K\Delta}^0 = - \sum_{i=1}^n \bar{R}_{iK} \Delta_{i\Delta} - \sum_{i=1}^n \bar{M}_{iK} \theta_{i\Delta} \quad (11.7)$$

trong đó: $\bar{R}_{iK}$, $\bar{M}_{iK}$ là phản lực theo phương liên kết thứ i do lực $\bar{X}_K = 1$ gây ra trong hệ cơ bản. $\Delta_{i\Delta}$ là chuyển vị thẳng cho trước theo

phương liên kết thứ i và $\theta_{i\Delta}$ là góc xoay biết trước tại liên kết thứ i trong hệ siêu tĩnh đã cho.



Hình 11.7.

Ví dụ:

Tính mômen uốn lớn nhất trong trục được cho trên hình 11.7a, nếu khi chế tạo tâm của ổ đỡ giữa bị lệch một đoạn δ .

GIẢI

Hệ tương đương chọn như hình 11.7b. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta}^0 = 0, \quad (a)$$

trong đó:

$$\Delta_{1\Delta}^0 = -\bar{R}_1 \cdot \delta = -1 \cdot \delta = -\delta$$

Biểu đồ $\bar{M}_1$ cho trên hình 11.7c và sau khi nhân biểu đồ, này với chính nó ta có:

$$\delta_{11} = 2 \left[\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right] = \frac{l^3}{6EI}$$

Thay $\Delta_{1\Delta}^0$ và δ_{11} vừa tìm được vào phương trình (a) và giải nó ta đi đến:

$$X_1 = \frac{6EJ}{l^3} \delta$$

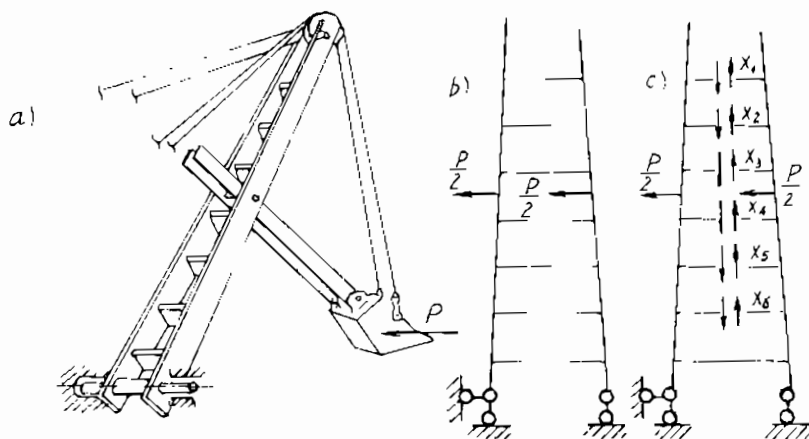
Biểu đồ mômen uốn và giá trị mômen uốn lớn nhất được cho trên hình 11.7d.

§5. SỬ DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG KHI TÍNH HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Với một hệ đối xứng hình học chịu tải trọng bất kỳ ta luôn luôn có thể phân tích thành hai hệ chịu tải trọng đối xứng và phản xứng.

Hệ đối xứng qua trục Δ chịu tải trọng cũng đối xứng thì như đã rõ trong các chương trên, các hàm nội lực mômen uốn, lực dọc và do đó là biểu đồ của chúng là đối xứng qua trục đối xứng Δ . Ngược lại đối với hệ đối xứng hình học chịu tải phản xứng, biểu đồ lực cắt là đối xứng qua trục đối xứng Δ . Nghĩa là ở mặt cắt trên trục đối xứng đối với hệ đối xứng chịu tải đối xứng thì các nội lực đối xứng khác không, các nội lực phản xứng bằng không. Ngược lại đối với hệ đối xứng chịu tải trọng phản xứng thì trên trục đối xứng Δ các nội lực đối xứng bằng không, các nội lực phản xứng khác không.

Các nhận xét đó cho phép giảm nhẹ rất nhiều tính toán hệ siêu tĩnh đối xứng và phản xứng. Ta hãy xét trường hợp trục đối xứng không trùng với một thanh nào của hệ (hình 11.8). Trên đó a) là công trình thực; b) là sơ đồ hoá kết cấu; c) là sơ đồ tính.



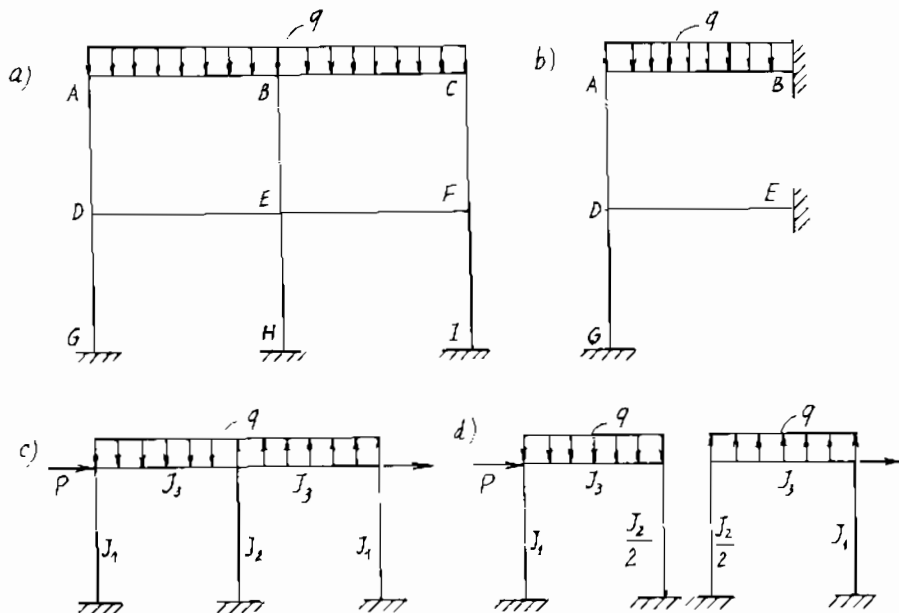
Hình 11.8.

Hãy xét các trường hợp trục đối xứng hình học trùng với một thanh nào đó của hệ (hình 11.9a).

– Khi hệ chịu tải trọng đối xứng thì thanh trùng với trục đối xứng (BEH) không thể uốn được. Các mặt cắt B, E của nó không có chuyển vị xoay và thẳng. Do đó, hệ đã cho được thay bằng hệ trên hình 11.9b và việc tính toán được thực hiện trên hệ này. Cuối cùng, theo tính chất đối xứng suy ra kết quả của nửa còn lại.

– Khi hệ chịu tải trọng phản xứng (hình 11.9c) thì thanh trùng với trục đối xứng bị uốn, các biểu đồ lực cắt của hệ là đối xứng, còn các biểu đồ mômen uốn và lực dọc là phản xứng. Từ đây rút ra sơ đồ tính cho hệ loại này như trên hình 11.9d.

Để tính hệ đối xứng có một thanh trùng với trục đối xứng, hệ chịu tải trọng phản xứng ta có thể chia đôi hệ để tính cho một nửa. Khi ấy độ cứng của thanh trùng với trục đối xứng phải chia đôi (hình 11.9d). Theo tính chất phản xứng ta suy ra nội lực cho nửa còn lại với chú ý là mômen uốn trong thanh trùng với trục đối xứng phải nhân đôi.



Hình 11.9.

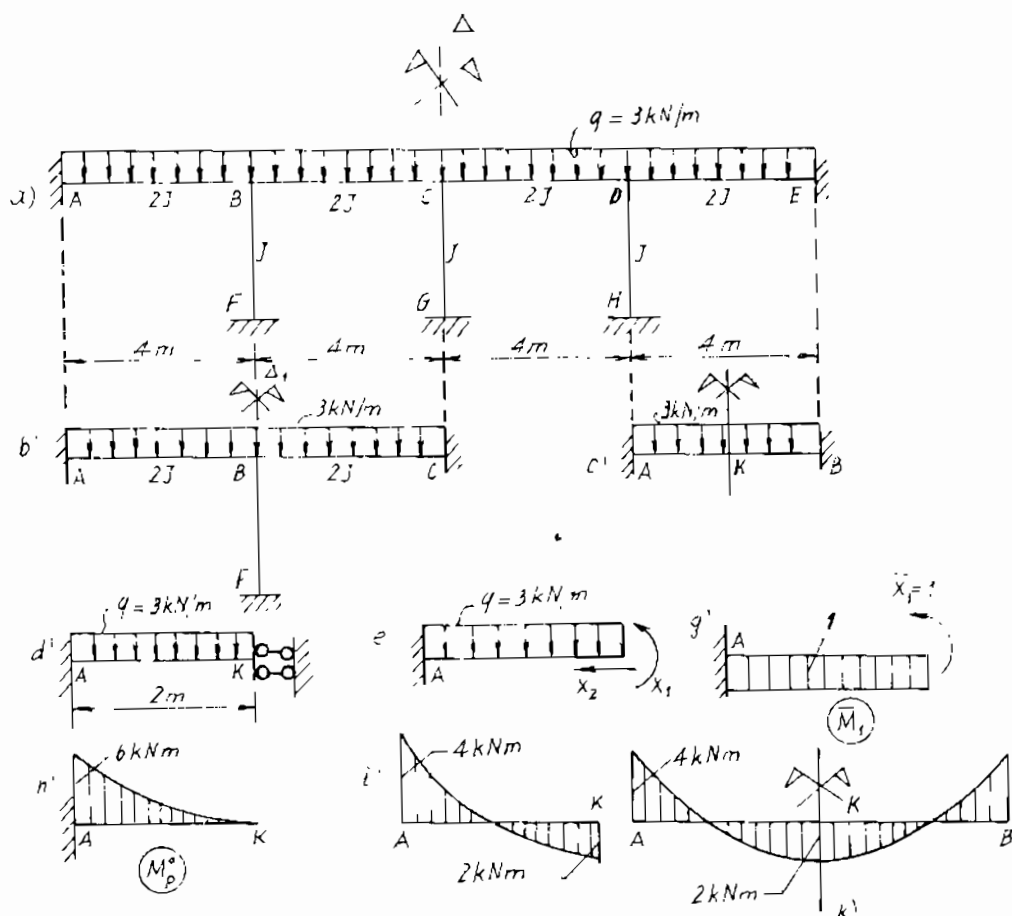
Ví dụ

Cho một khung có số liệu chịu lực như hình 11.10.

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn M sinh ra trong khung?

GIẢI

Ta nhận thấy khung đã cho là một khung đối xứng qua thanh CG cả về tải trọng và cả về hình học. Trong trường hợp này khung là một hệ siêu tĩnh bậc 12 và nếu không kể đến tính đối xứng ta cần phải thiết lập và giải một hệ gồm 12 phương trình chính tắc của phương pháp lực. Việc làm đó tốn rất nhiều công sức, cho nên trong ví dụ này ta triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ để giải quyết bài toán.

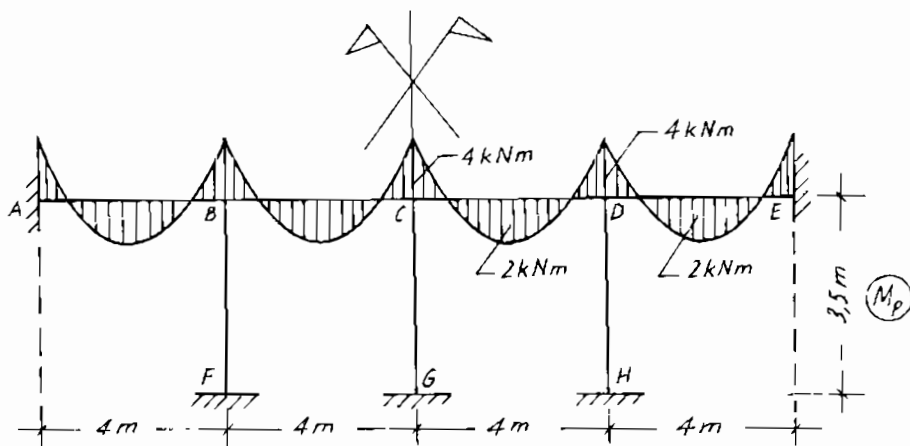


Ta thấy rằng mặt cắt C trên trục đối xứng sẽ không bị xoay, vì nếu xoay thành CG bị cong và làm cho tính đối xứng không còn nữa. Mặt khác mặt cắt C cũng không có chuyển vị ngang bởi vì nếu có thì hệ sẽ mất tính đối xứng. Do mặt cắt C không thể xoay và cũng không có chuyển vị ngang nên có thể thay liên kết nội tại C như một ngàm cứng (hình 11.10b). Hệ trên hình 11.10b cũng là một hệ đối xứng qua thanh BF cả về tải trọng và hình học. Do đó, thay cho các tính toán trên hệ hình 10.10b ta tính toán trên hệ tương đương được cho trên hình 11.10c. Một lần nữa hệ trên hình 11.10c cũng là đối xứng có trục đối xứng Δ_2 thẳng đứng qua trung điểm K của đoạn AB. Tại K lực cắt $Q_K = 0$ còn $M_K \neq 0$, $N_K \neq 0$, vì vậy sơ đồ tính cho nửa dầm AK có dạng như hình 11.10d.

Phương trình chính tắc của hệ hình (11.10e) có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}^0 = 0$$



Hình 11.11.

Do $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$; $\Delta_{2p}^0 = 0$, cho nên ta có:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

trong đó:

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot 2}{2EJ} \cdot 1 = \frac{1}{EJ} \quad ; \quad \Delta_{1p} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2EJ} = \frac{-2}{EJ}$$

$$\text{Suy ra} \quad X_1 = \frac{2 \cdot EJ}{EJ} = 2 \text{ kNm.}$$

Biểu đồ mômen uốn trong hệ (hình 11.10d) được cho trên hình 11.10i. Bằng cách lấy đối xứng qua K ta có biểu đồ mômen hình 11.10k cho hệ trên hình 11.10c. Từ biểu đồ mômen hình 11.10k lấy đối xứng qua trục BF, sau đó lại lấy đối xứng qua trục CG ta có biểu đồ mômen uốn cuối cùng trong hệ đã cho (hình 11.11).

II. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

§6. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

1. Các giả thiết, ẩn số và hệ tương đương

Việc tính toán các hệ khung dầm siêu tĩnh trong rất nhiều trường hợp sẽ đơn giản đáng kể, nếu ta không chọn “tiên đề giải phóng liên kết” làm điểm xuất phát, nghĩa là không chọn lực trong các liên kết thừa làm ẩn số như trong phương pháp lực, mà chọn “tiên đề bổ sung liên kết” làm điểm xuất phát, nghĩa là chọn các chuyển vị ở các nút cứng làm ẩn cơ bản và được tìm ra đầu tiên. Sau khi đã tìm được các ẩn cơ bản là những chuyển vị nút ta có thể dễ dàng tính được các nội lực và chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ nhờ các liên hệ vì phân đã biết trong các chương trên.

$$M = EJ V''(z) \quad ; \quad Q = EJ V'''(z)$$

Thực chất của phương pháp chuyển vị, cũng như phương pháp lực đều xuất phát từ ý tưởng giải bài toán của lý thuyết đàn hồi theo chuyển vị (phương pháp Lamé) và theo ứng suất (phương pháp Saintvenant). Vì chọn các chuyển vị nút làm ẩn cơ bản nên phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị hay phương pháp biến dạng. Phương pháp này cũng như phương pháp lực là những phương pháp chính xác, bởi vì chúng chỉ sử dụng những giả thiết thông thường đã mô tả ở §1 chương 1.

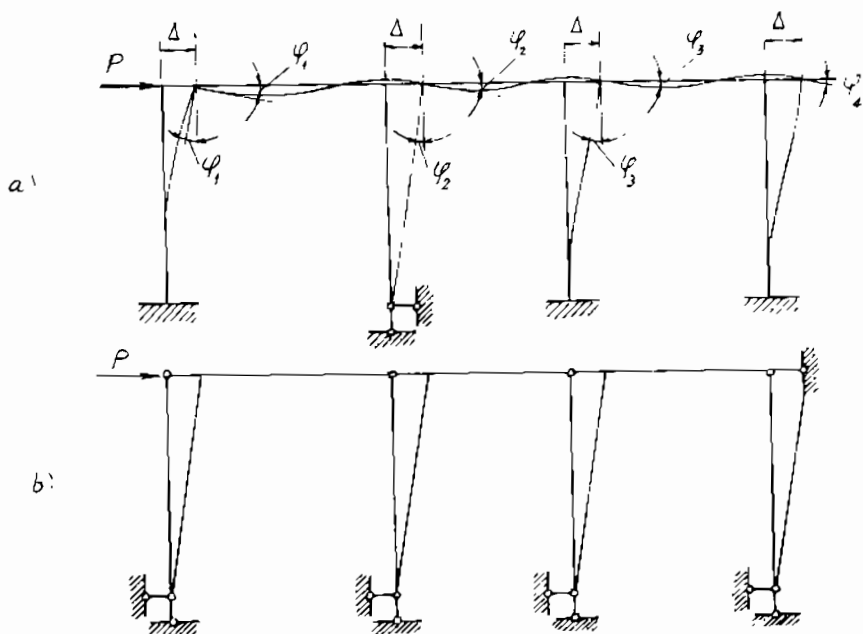
Phương pháp chuyển vị để tính các hệ siêu động được xây dựng trên các giả thiết sau đây:

1. Các nút của hệ được xem là rắn tuyệt đối. Vì vậy, khi hệ bị biến dạng các thanh đồng quy tại một nút sẽ có chuyển vị góc như nhau (hình 11.12a). Đối với mỗi thanh, đó là góc φ_i (ở đây $i = 1, 2, 3, 4$) giữa tiếp tuyến của đường đàn hồi ở vùng nút với phương ban đầu của cấu kiện. Do đó, số ẩn số là góc xoay bằng n_1 (bằng số nút cứng không cố định của khung).

2. Khi xác định số ẩn là các chuyển vị thẳng ở các nút, biến dạng của các thanh do lực dọc và lực cắt gây ra là rất bé so với biến dạng uốn, do đó được phép bỏ qua.

Giả thiết này dẫn đến kết luận là độ dịch gần giữa các nút ở hai đầu một thanh lên phương ban đầu do ngoại lực gây ra là không đổi.

Do đó các nút của khung trên hình 11.12a chỉ có duy nhất một chuyển vị thẳng theo phương ngang Δ . Nghĩa là $n_2 = 1$ và đối với khung này $n = 4 + 1 = 5$.



Hình 11.12.

Số ẩn số tổng quát còn gọi là bậc siêu động của hệ siêu động của phương pháp chuyển vị là:

$$n = n_1 + n_2, \quad (11.8)$$

trong đó:

n – số ẩn số tính theo phương pháp chuyển vị;

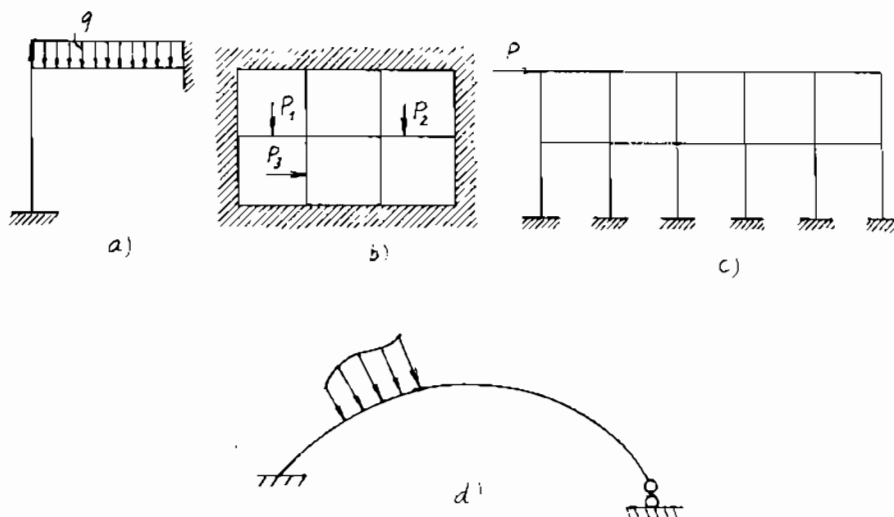
n_1 – số chuyển vị góc cần xác định ở các nút cứng không cố định;

n_2 – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút.

Trên cơ sở của giả thiết hai, ta đưa ra cách xác định thực hành các ẩn số n_2 như sau:

Tưởng tượng thay thế tất cả các nút cứng và các liên kết ngầm với bên ngoài bằng các khớp bản lề, ta sẽ thu được một cơ cấu. Sơ đồ cơ cấu này cho ta thấy rõ chuyển vị thẳng độc lập n_2 của các nút của hệ. Muốn cho các nút của hệ đứng yên ta phải thêm vào cơ cấu vừa nhận được những thanh gối đơn hợp lý sao cho tất cả các chuyển vị thẳng của các nút đều bị chặn. Số thanh ít nhất cần thiết phải thêm vào để vừa đủ làm cho cơ cấu trở thành kết cấu bất biến hình học, nghĩa là khi ấy bậc tự do của hệ bằng không ($W = 0$), chính là số chuyển vị thẳng n_2 của các nút trong hệ ban đầu (hình 11.12b).

Trên hình 11.13 và bảng 1 đưa ra các kết quả so sánh một số khung nếu tính toán chúng bằng phương pháp chuyển vị sẽ giảm rất nhiều sức lao động so với phương pháp lực. Tuy nhiên, có những hệ nếu dùng phương pháp lực thì ẩn số sẽ ít hơn rất nhiều so với khi dùng phương pháp chuyển vị. Ví dụ hệ trên hình 11.13d có ẩn số theo phương pháp lực là 1, trong khi đó số ẩn số theo phương pháp chuyển vị bằng ∞ . Vì vậy, trong tính toán đòi hỏi phải có tư duy sáng tạo, có kiến thức lý thuyết tốt và có kinh nghiệm tính toán mới có thể đưa ra một hệ tương đương thích hợp, đặc biệt là khi sử dụng phương pháp lực, còn đối với phương pháp chuyển vị thì chỉ có một hệ tương đương duy nhất, dù hệ xuất phát là như thế nào.



Hình 11.13.

Bảng 1

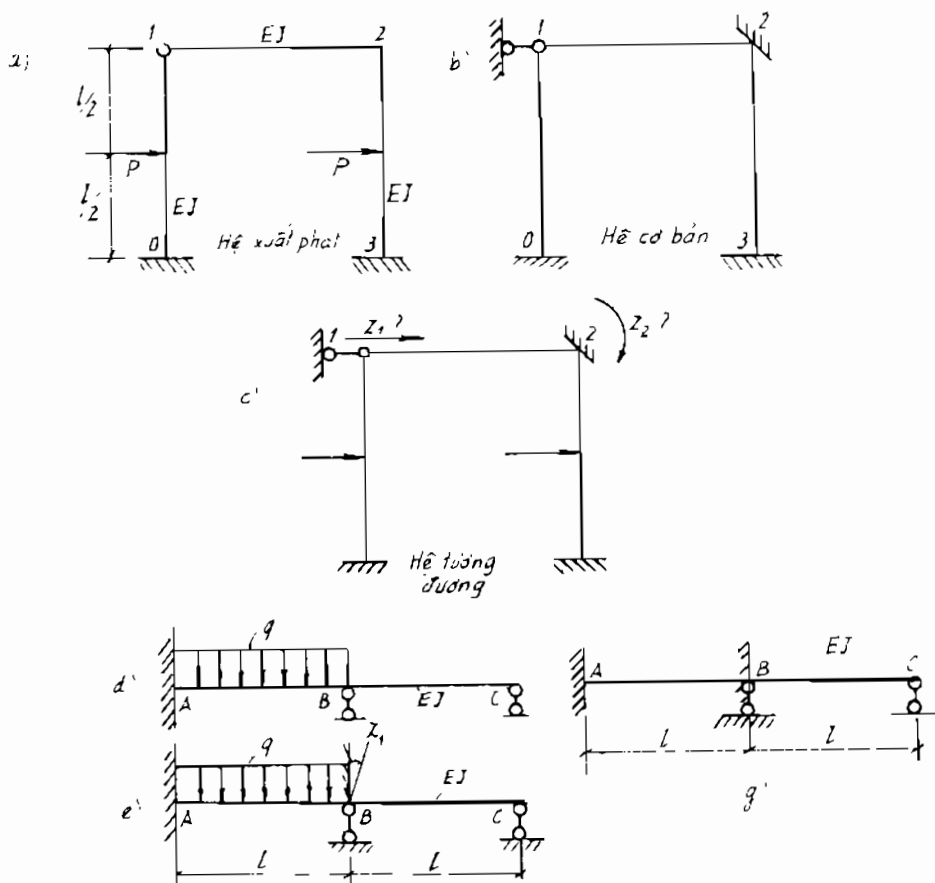
Dạng khung	Phương pháp chuyển vị			Phương pháp lực. Số ẩn (bậc siêu tĩnh)
	Số chuyển vị góc	Số chuyển vị thẳng	Số ẩn	
Hình 11.13a	1	0	1	3
Hình 11.13b	2	0	2	15
Hình 11.13c	12	2	14	30
Hình 11.13d	∞	∞	∞	1

Để tính toán hệ bằng phương pháp chuyển vị, cũng như trong phương pháp lực, người ta không tính trên hệ đã cho mà trên hệ tương đương với sự trợ giúp của hệ cơ bản. Chúng được định nghĩa như sau:

Ta hãy xét hai hệ siêu tĩnh hình 11.14a và hình 11.14d.

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho (hình 11.14a, d) sau khi đã bổ sung vào đó các liên kết chống xoay Z_i và chống chuyển vị thẳng Z_k của các nút (hình 11.14c, e) ($i = 1, n_1$, $k = 1, n_k$). Hệ cơ bản

là hệ suy ra từ hệ tương đương trên đó không có ngoại lực và các chuyển vị nút tác dụng (hình 11.14b,g).



Hình 11.14.

Cần chú ý rằng các liên kết ngầm bổ sung vào hệ đã cho chỉ có tác dụng chống xoay mà không có tác dụng chống chuyển động thẳng của các nút. Trong những liên kết ngầm như thế chỉ có các phản lực mômen.

§7. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Tư tưởng chủ đạo để thiết lập phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị là sự phủ định sự có mặt của các mômen

phản lực ở các ngàm bổ sung và các phản lực thẳng ở các thanh gối bổ sung. Bởi vì trong hệ xuất phát không có những liên kết này cho nên phản lực tại những vị trí có liên kết bổ sung phải bằng không.

Chúng ta sẽ minh họa nội dung này thông qua một ví dụ cụ thể đối với khung cho trên hình 11.14a với số ẩn $n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$. Hệ cơ bản (hình 11.14b) và hệ tương đương (hình 11.14c).

Trong hệ tương đương phản lực R_1 trong thanh gối 1 do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng không, tương tự như vậy đối với phản lực R_2 .

Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 &= R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

trong đó:

R_{11} là phản lực ở thanh gối 1 do chuyển vị thẳng z_1 đặt vào nút 1 gây ra;

R_{12} là phản lực cũng trong thanh gối 1 do chuyển vị góc z_2 đặt vào nút 2 gây ra;

R_{1P} là phản lực trong thanh gối 1 do tải trọng ngoài cho trước gây ra. Tương tự như vậy đối với R_{21} , R_{22} và R_{2P} .

Trong các ký hiệu trên chỉ số thứ 2 chỉ nguyên nhân gây ra phản lực tại các liên kết tương ứng với chỉ số thứ nhất.

Theo nguyên lý cộng tác dụng các phản lực R_{11} , R_{21} và R_{12} , R_{22} có thể viết như sau:

$$R_{11} = r_{11}Z_1 \text{ và } R_{12} = r_{12}Z_2 ; R_{22} = r_{22}Z_2 ; R_{21} = r_{21}Z_1.$$

Ở đây ta đã gọi r_{11} là phản lực trong các thanh gối 1 do chuyển vị thẳng $\bar{Z}_1 = 1 \text{ cm}$ gây ra. r_{12} là phản lực trong thanh gối 1 do góc xoay $\bar{Z}_2 = 1 \text{ rad}$ gây ra, hoàn toàn tương tự đối với r_{22} , r_{21} .

Phương trình (11.9) với ký hiệu ở trên có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{11}Z_1 + \mathbf{r}_{12}Z_2 + \mathbf{R}_{1p} &= 0 \\ \mathbf{r}_{21}Z_1 + \mathbf{r}_{22}Z_2 + \mathbf{R}_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

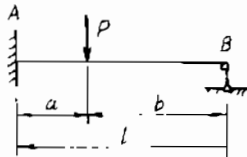
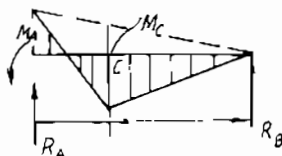
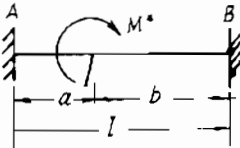
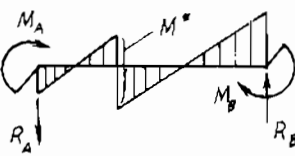
$$Z = -K^{-1} R_p, \quad (11.13)$$

trong đó K^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận K .

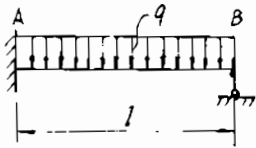
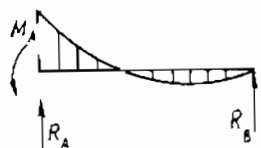
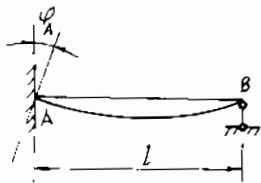
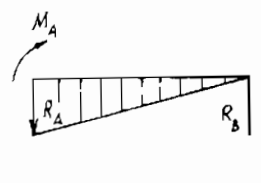
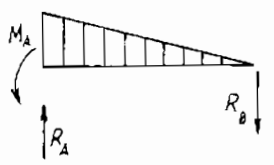
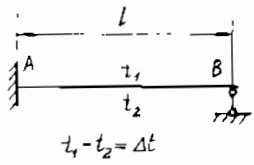
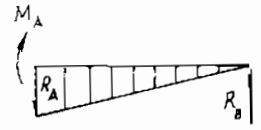
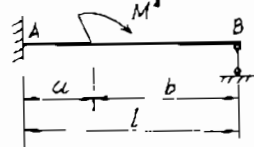
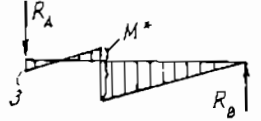
§8. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC PHẦN TỬ TRONG CÁC MA TRẬN K VÀ R_p BẰNG PHƯƠNG PHÁP TĨNH

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định các phần tử trong các ma trận K và R_p nghĩa là xác định các hệ số r_{kj} và R_{kp} của các hệ phương trình (11.12). Một lần nữa ta cần nhắc lại ý nghĩa vật lý của chúng. Cụ thể là: các hệ số r_{kj} và R_{kp} lần lượt là những phản lực tại các liên kết thứ K theo phương K trong hệ cơ bản chịu các chuyển vị cưỡng bức áp đặt đơn vị $\bar{Z}_j = 1$ và do tải trọng ngoài gây ra. Có nhiều cách xác định chúng, nhưng đơn giản và thuận tiện nhất là sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học (phương pháp tĩnh). Ngoài ra, bạn đọc cũng có thể sử dụng nguyên lý công khả dĩ (phương pháp động) để xác định các hệ số này.

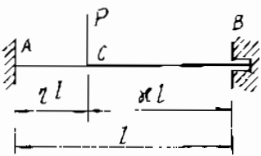
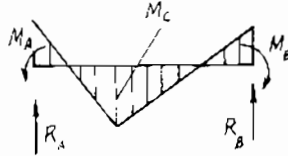
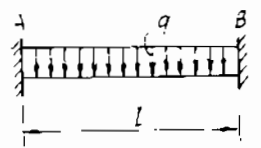
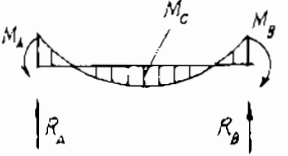
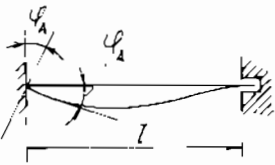
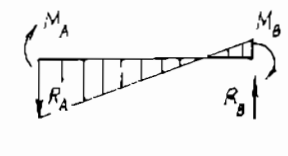
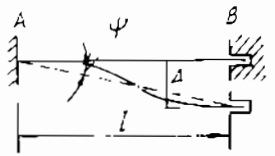
Bảng 2

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\frac{Pab}{2l^2} (2l - a)$ $M_C = \frac{P \cdot ab}{l};$ $R_A = \frac{Pl}{2l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right);$ $R_B = \frac{Pa^2}{2l^2} \left(3 - \frac{a}{b} \right)$
		$R_B = \frac{M^* \cdot a \cdot b}{l^3} = -R_A$ $M_B = \frac{-M^* \cdot a}{l^2} (2a - b)$ $M_A = \frac{M^* \cdot b}{l^2} (2a - b)$

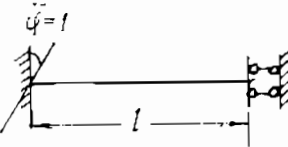
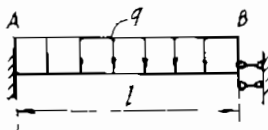
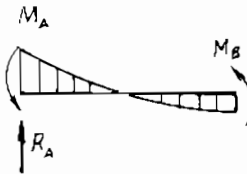
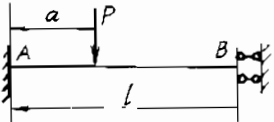
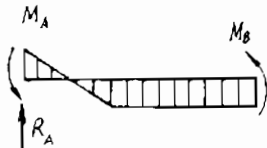
Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} ql;$ $R_B = \frac{3}{8} ql$
		$M_A = \frac{3EJ}{l} \varphi_A;$ $-R_A = +R_B = +\frac{3EJ}{l} \varphi_A$
		$M_A = -\frac{3EJ}{l^2} \Delta =$ $= -\frac{3EJ}{l} \Psi$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta =$ $= \frac{3EJ}{l^2} \cdot \Psi$
		$M_A = \frac{3EJ(\Delta t)\alpha}{2h}$ h – chiều cao của mặt cắt ngang $-R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{EJ\alpha(\Delta)}{hl}$
		$M_A = \frac{M^*}{2l^2} [l^2 - 3(l-a)^2]$ $M_B = 0$ $R_A = \frac{3M^*}{2l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) = -R_B$

Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = -\eta \chi^2 P l$ $M_B = -\eta^2 \chi P l$ $M_C = 2\eta^2 \chi^2 P l$ $R_A = \chi^2 (1 + 2\eta) P$ $R_B = \eta^2 (1 + 2\chi) P$
		$M_A = M_B = -\frac{q l^2}{12};$ $R_A = R_B = +\frac{q l}{2};$ $M_C = +\frac{q l^2}{24}$
		$M_A = \frac{4EJ}{l} \varphi_A;$ $M_B = \frac{2EJ}{l} \varphi_A$ $R_B = -R_A = \frac{6EJ}{l^2} \varphi_A$
		$M_B = -M_A = \frac{6EJ}{l^2} \Delta =$ $= \frac{6EJ}{l} \psi$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3} \cdot \Delta =$ $= \frac{12EJ}{l^2} \cdot \psi$

Bảng 2 tiếp theo

Sơ đồ tính	Biểu đồ M và phản lực	Công thức
		$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $R_R = R_A = 0$
		$M_A = -\frac{ql^2}{3};$ $M_R = \frac{ql^2}{6}; R_A = ql;$ $R_B = 0$
		$M_A = -\frac{pa}{2} \left(2 - \frac{a}{l} \right)$ $M_R = \frac{pa^2}{2l}$ $R_A = P; R_R = 0$

Với cách chọn hệ tương đương và hệ cơ bản như ở trên thì hệ siêu động xuất phát đã được chia ra thành các phần tử mà mỗi phần tử là một dầm đơn có liên kết ở mỗi đầu có thể là: ngàm, khớp, ngàm trượt. Vì vậy khi tải trọng tác dụng lên hệ cơ bản, cũng như các chuyển vị cưỡng bức ở các nút chỉ gây ra biến dạng trong phạm vi của mỗi thanh mà chúng tác dụng. Biểu đồ các đại lượng cần tính S_p^o trong hệ cơ bản do các tác dụng ngoài nói trên gây ra có thể được xây dựng dễ dàng bằng phương pháp lực và vụn năng. Biểu đồ các đại lượng cần tính này thường được thiết lập sẵn và được cho ở bảng 2.

Biểu đồ nội lực S_p do tải trọng gây ra trong hệ xuất phát chính là tổng biểu đồ nội lực S_p^o do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản và do các chuyển vị cưỡng bức áp đặt $Z_1, Z_2 \dots, Z_n$ [nghiệm của hệ (11.11)] gây

ra. Nếu gọi $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ lần lượt là biểu đồ nội lực do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị gây ra ở những liên kết bổ sung trong hệ cơ bản, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$S_{Z_1} = \bar{S}_1 Z_1 ; S_{Z_2} = \bar{S}_2 Z_2 ; S_{Z_3} = \bar{S}_3 Z_3, \dots, S_{Z_n} = \bar{S}_n Z_n$$

Và

$$S_p = S_p^0 + \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots + \bar{S}_n Z_n$$

Như vậy, để có được biểu đồ S_p bằng phương pháp chuyển vị ta cần phải làm các bước sau đây:

- Vẽ biểu đồ S_p^0 trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra.
- Vẽ các biểu đồ nội lực $\bar{S}_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) do các chuyển vị áp đặt bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.
- Giải hệ phương trình chính tắc (11.11) hoặc (11.12) để có các chuyển vị thực cần tìm tại các liên kết bổ sung.

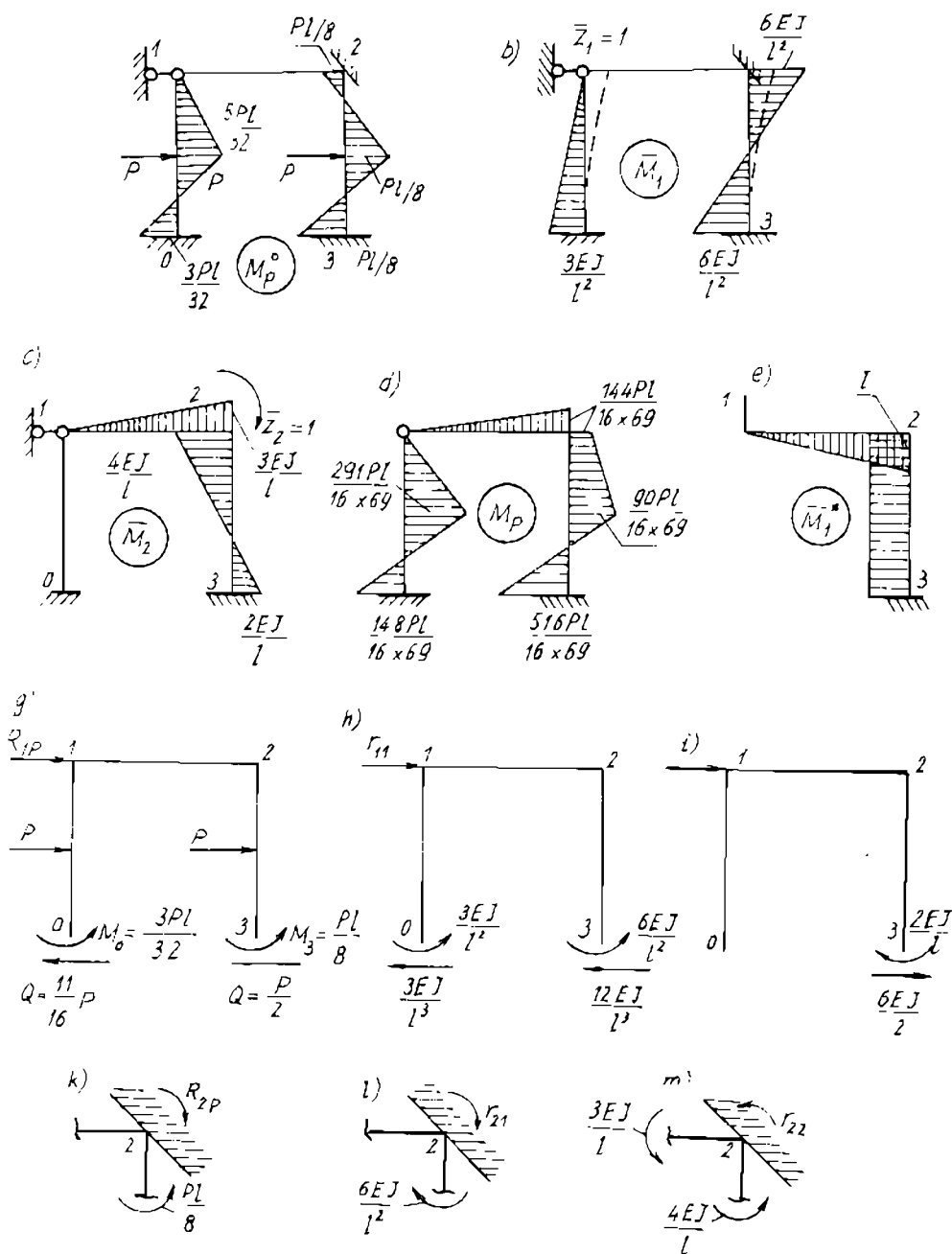
Nội dung này sẽ được giải quyết trong các mục dưới đây thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1

Để xác định các r_{kj} và R_{kp} ta cần phải xây dựng các biểu đồ mômen uốn trong các thanh của hệ cơ bản dưới tác dụng của ngoại lực và các chuyển vị đơn vị áp đặt. Các biểu đồ mômen tương ứng đối với khung trên hình 11.14 được cho trên hình 11.15a, b, c.

Khi vẽ các biểu đồ này ta sử dụng bảng 2, trên đó cho sẵn các biểu đồ mômen uốn đối với các dầm có hai đầu ngàm và dầm có một đầu ngàm, một đầu còn lại là khớp. Chú ý rằng khi vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị thẳng của các nút cần phải xác định chuyển vị tương đối giữa các đầu cuối của mỗi thanh theo phương vuông góc với trục của nó.

Các hệ số r_{21}, r_{22}, R_{2p} trong hệ phương trình (11.10) được xác định cụ thể từ điều kiện cân bằng của từng bộ phận khung được tách ra. Cụ thể là tách nút 2 trong các biểu đồ tương ứng (hình 11.15k, l, m) ta có:



Hình 11.15.

$$R_{2p} = \frac{Pl}{8} ; r_{21} + \frac{6EJ}{l^2} = 0 \Rightarrow r_{21} = -\frac{6EJ}{l^2} = r_{12}$$

$$r_{22} - \frac{4EJ}{l} - \frac{3EJ}{l} = 0 \Rightarrow r_{22} = \frac{7EJ}{l}$$

Để xác định R_{1p} , r_{11} , r_{12} ta tưởng tượng cắt các chân của khung và thay vào đó các mômen uốn và lực cắt được biết từ các biểu đồ đã vẽ trên hình 11.15a, b, c sau đó khảo sát các điều kiện cân bằng dưới dạng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần khảo sát (phần khung) (hình 11.15g, h, i). Cụ thể là:

$$R_{1p} = \frac{11}{16} P + \frac{P}{2} - 2P = -\frac{13}{16} P$$

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l^3} + \frac{12EJ}{l^3} = \frac{15EJ}{l^3}$$

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{l^2} = r_{21}.$$

Chú ý dấu của r_{kj} và R_{kp} được quy ước là dương khi xây dựng hệ phương trình chính tắc (11.10). Nghĩa là nếu chiều tác dụng của các phản lực trùng với chiều của các chuyển vị nút áp đặt cần tìm.

Với các hệ số vừa xác định, hệ phương trình (11.10) có dạng cụ thể như sau:

$$\frac{15EJ}{l^3} Z_1 - \frac{6EJ}{l^2} Z_2 - \frac{13}{16} P = 0$$

$$- \frac{6EJ}{l^2} Z_1 + \frac{7EJ}{l} Z_2 + \frac{Pl}{8} = 0$$

Giải hệ phương trình ta được các chuyển vị nút Z_1 và Z_2 :

$$Z_1 = \frac{79}{1104} \frac{Pl^3}{EJ} ; Z_2 = \frac{1}{23} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Biểu đồ mômen trong hệ siêu tĩnh đã cho M_p hình 11.15d được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng:

$$M_p = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + M_p^o \quad (11.14)$$

Một cách tổng quát ta có thể viết lại một lần nữa:

$$S_p = \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots + \bar{S}_n Z_n + S_p^0 \quad (11.15)$$

trong đó:

S_p là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ siêu động cần tính. S_p^0 là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản của phương pháp này. $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ lần lượt là biểu đồ nội lực do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\bar{Z}_1 = 1$ tại từng liên kết áp đặt thứ j gây ra trong hệ cơ bản.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ là các chuyển vị cần tìm thỏa mãn phương trình chính tắc 11.12.

Để kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ nội lực S_p đã vẽ, ta có thể nhân biểu đồ S_p với một biểu đồ đơn vị nào đó trên hệ cơ bản được tính bằng phương pháp lực. Ví dụ, biểu đồ M_p trên hình 11.15d và biểu đồ đơn vị trên hệ cơ bản theo phương pháp lực (hình 11.15e):

$$M_p \times \bar{M}_1 = 0$$

Ví dụ 2

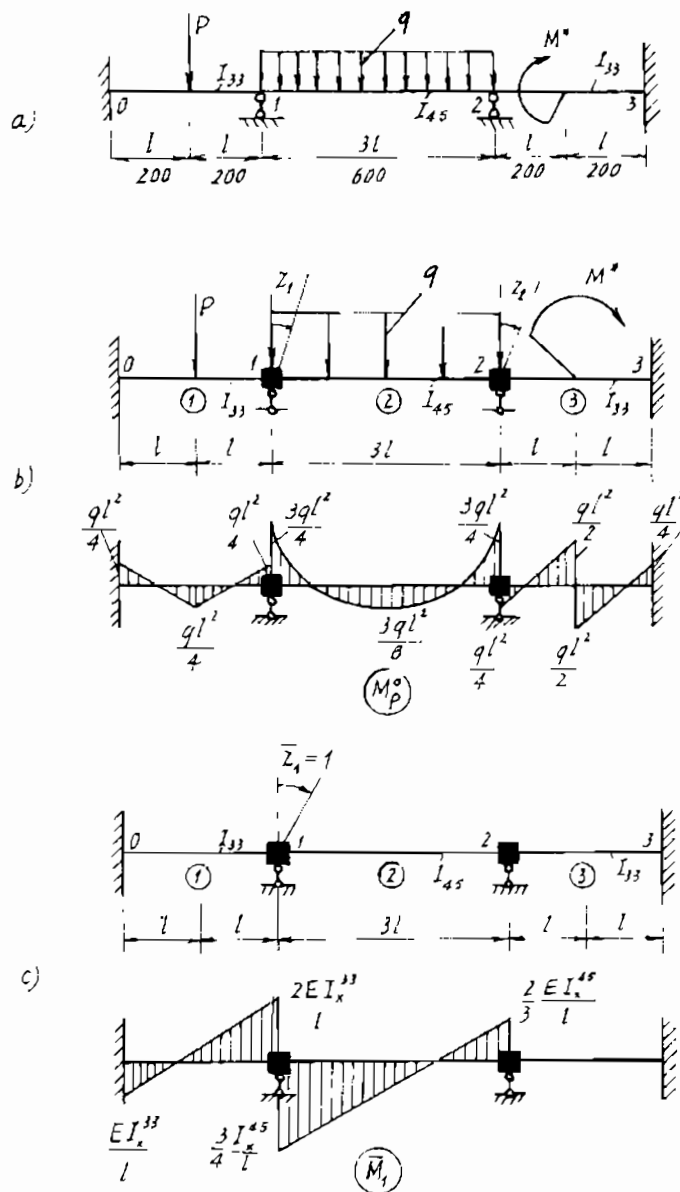
Một dầm liên tục mặt cắt thay đổi từng khúc chịu lực và liên kết cân bằng như hình 11.16a. Hãy vẽ biểu đồ (M) và (Q) trong dầm đã cho. Biết $P = ql$; $M^* = ql^2$, $q = 0,5 \text{ kN/cm}$, $l = 200 \text{ cm}$, đoạn (1) và đoạn (3) làm bằng thép chữ I_{33} , đoạn (2) thép I_{45} ; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $J_{33} = 9840 \text{ cm}^4$; $J_{45} = 27450 \text{ cm}^4$.

GIẢI

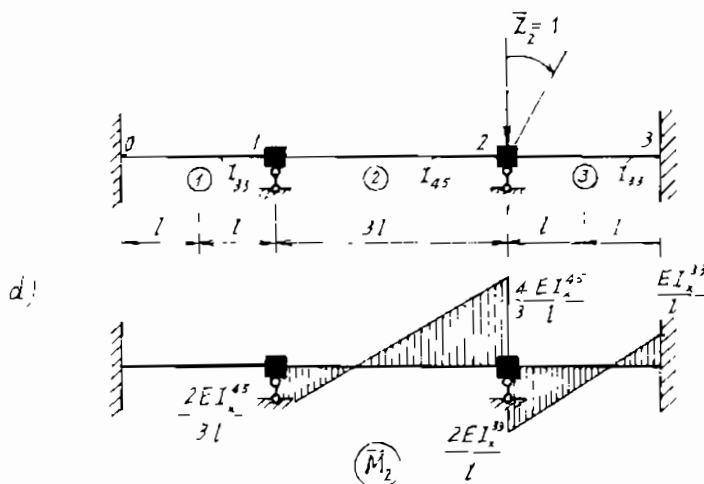
Với bài toán này ta không nên giải bằng phương pháp lực mà nên giải bằng phương pháp chuyển vị có hệ tương đương như hình 11.16b.

Các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do tải trọng ngoài và các chuyển vị góc cưỡng bức bằng đơn vị $\bar{Z}_1 = 1$, $\bar{Z}_2 = 1$ được vẽ nhờ bảng 2 lần lượt cho trên các hình 11.16b, c, d. Phương trình chính tắc:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 11.16.



Hình 11.16 d.

Các hệ số và số hạng tự do trong (a) là những mômen phản lực được tính bằng điều kiện cân bằng các nút tương ứng. Cụ thể là:

Phản lực tại ngàm 1 do $\bar{Z}_1$ gây ra:

$$r_{11} = \frac{4}{3} \frac{EI_v^{(45)}}{l} + 2 \frac{EI_x^{(33)}}{l} = \frac{E}{l} \left(\frac{4}{3} I_v^{(45)} + 2 I_x^{(33)} \right) = 5628000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do $\bar{Z}_1$ gây ra:

$$r_{12} = r_{21} = \frac{E}{l} \frac{2}{3} I_v^{(45)} = 1830000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 1 do ngoại lực gây ra:

$$R_{1p} = -\frac{3ql^2}{4} + \frac{ql^2}{4} = -\frac{ql^2}{2} = -10000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do ngoại lực gây ra:

$$R_{2p} = \frac{ql^2}{4} + \frac{3ql^2}{4} = ql^2 = 20000 \text{ kN.cm}$$

Phản lực tại ngàm 2 do $\bar{Z}_2$ gây ra:

$$r_{22} = \frac{4}{3} \frac{EI_x^{(45)}}{l} + 2 \frac{EI_x^{(33)}}{l} = \frac{E}{l} \left(\frac{4}{3} I_x^{(45)} + 2 I_x^{(33)} \right) = 5628000 \text{ kN.cm}$$

Phương trình chính tắc và nghiệm của phương trình chính tắc dưới dạng số:

$$\begin{cases} 5628000(Z_1) + 1830000(Z_2) - 10000 = 0 \\ 1830000(Z_1) + 5628000(Z_2) + 20000 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 0,0013279 \text{ rad} \\ Z_2 = -0,004620 \text{ rad} \end{cases}$$

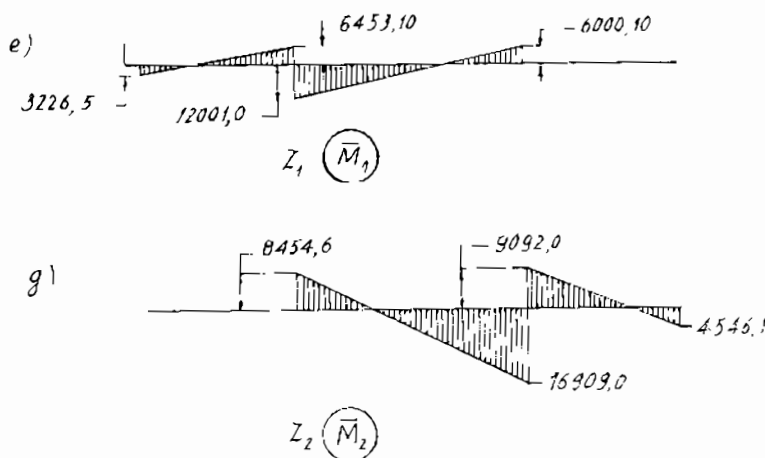
Biểu đồ mômen do các chuyển vị Z_1 , Z_2 và ngoại lực gây ra sau khi thay số (hình 11.16e, g, h).

Biểu đồ mômen uốn cuối cùng trong dầm liên tục đã cho được tìm theo nguyên lý cộng tác dụng:

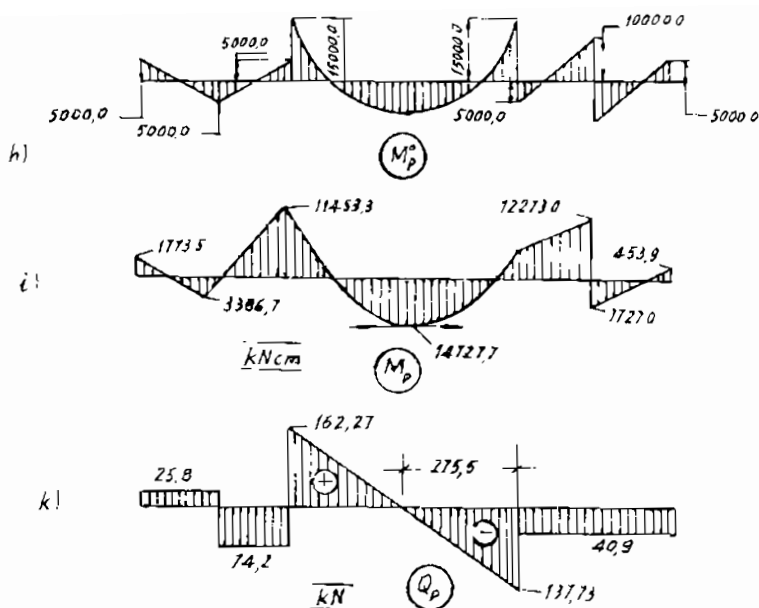
$$(M_p) = (M_p^0) + Z_1 (\bar{M}_1) + Z_2 (\bar{M}_2)$$

Biểu đồ lực cắt được tìm từ biểu đồ mômen theo quan hệ:

$\frac{dM}{dZ} = (QZ)$ hoặc khảo sát cân bằng mômen của từng đoạn một nhờ các mômen ở hai đầu mỗi đoạn đã biết. Các biểu đồ này được cho trên hình 11.16i, k.



Hình 11.16e, g.



Hình 11.16 h, i, k.

Bạn đọc có thể nhanh chóng nhận được kết quả cả về nội lực và chuyển vị mà không tốn công sức và giấy mực để vẽ các biểu đồ hỗ trợ từ (b) đến (h) khi bạn dùng công thức vạn năng cho sẵn (8.12b). Trong trường hợp này tại mặt cắt $Z_0 = 712,4$ cm, chuyển vị cực trị $\max |V| = |-0,902 \text{ cm}|$ và tại $Z^* = 968,5$ cm, góc xoay đạt cực đại $\varphi_{\max} = 4,735 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

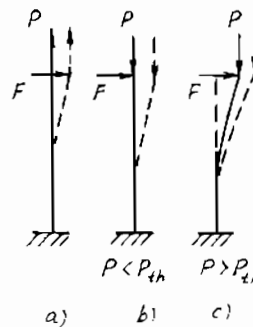
Chương 12

ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐÀN HỒI

§1. KHÁI NIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG ỔN ĐỊNH

Trong các chương trên, ta đã xét độ bền và độ cứng của các thanh trong những trường hợp chịu lực khác nhau. Trong thực tế có nhiều trường hợp nếu chỉ tính độ bền và độ cứng thì chưa đủ bảo đảm an toàn cho cơ hệ (chi tiết máy hoặc công trình). Cơ hệ còn có thể bị phá hoại vì một nguyên nhân khác đó là sự mất ổn định. Để có khái niệm về sự ổn định của hệ đàn hồi, ta hãy xét ví dụ đơn giản sau:

Xét một thanh thẳng mảnh, được ngàm ở một đầu, còn đầu kia chịu lực kéo đúng tâm (hình 12.1a). Nếu có một kích động ngang nhỏ ngẫu nhiên nào đó (chẳng hạn, một lực đẩy rất nhỏ F , vuông góc với trục thanh) làm cho trục thanh cong đi (tức là dời khỏi vị trí cân bằng thẳng ban



Hình 12.1.

đầu) thì khi kích động triệt tiêu, thanh sẽ luôn luôn trở về dạng thẳng vốn có, không phụ thuộc giá trị của lực P .

Ta nói rằng trạng thái cân bằng của thanh luôn luôn ổn định dạng thẳng.

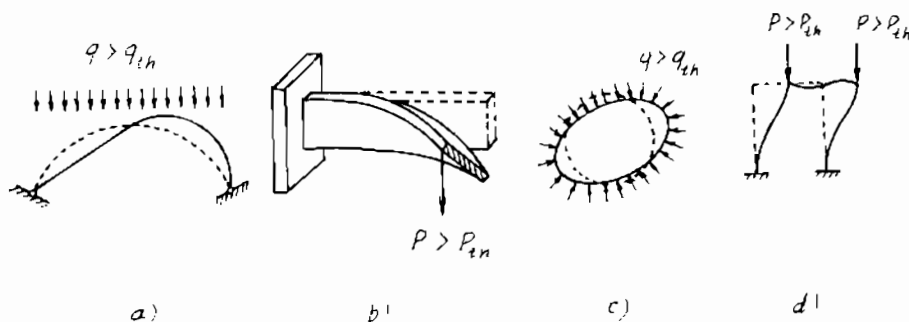
Trong trường hợp P là lực nén đúng tâm, tình hình sẽ khác. Khi lực P còn nhỏ hơn một giới hạn nhất định (hình 12.1b) thì thanh vẫn còn thẳng và vẫn trở về dạng đó sau khi kích động triệt tiêu. Nhưng khi lực P vượt quá giới hạn nói trên thì thanh không còn thẳng nữa và sẽ dời khỏi vị trí cân bằng ban đầu với biến dạng ngày càng tăng ngay cả khi kích động đã triệt tiêu cho đến khi cong hẳn về một phía, không trở về dạng thẳng ban đầu nữa. Lúc này ta nói rằng: *trạng thái cân bằng dạng thẳng của thanh không ổn định* (chú ý rằng trạng thái cân bằng mới của thanh – dưới dạng cong (hình 12.1c) lại được coi là dạng ổn định mới).

Tải trọng P ở giá trị giới hạn nói trên được gọi là *tải trọng tới hạn*. Trạng thái cân bằng ứng với tải trọng tới hạn là *trạng thái cân bằng bất định* (nghĩa là biến dạng giữ nguyên sau khi kích động triệt tiêu).

Như vậy một cơ hệ đàn hồi cũng có những trạng thái cân bằng khác nhau tương tự như một cơ hệ tuyệt đối.

Sau đây là vài ví dụ khác về mất ổn định (hình 12.2).

Một dầm một đầu ngàm còn một đầu tự do có mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp (hình 12.2b) bị uốn phẳng bởi lực P có đường tác



dụng trùng với trục đối xứng thẳng đứng của mặt cắt, khi P lớn hơn lực tới hạn P_{th} dầm sẽ bị mất ổn định: dầm bị vênh đi và bị uốn – xoắn đồng thời.

Khi mất ổn định, biến dạng của hệ tăng rất nhanh so với mức tăng của tải trọng. Chẳng hạn, với thanh thẳng chịu nén như hình 12.3.

Khi $P = 1,010 \cdot P_{th}$ thì $f = 9\% l$;

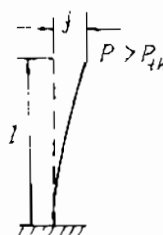
Khi $P = 1,015 \cdot P_{th}$ thì $f = 22\% l$.

Như vậy khi mất ổn định, cơ hệ làm việc trong trạng thái không bình thường và có thể bị phá hoại một cách bất ngờ. Trong thực tế đã có nhiều tai nạn lớn xảy ra (cầu cống hoặc công trình xây dựng bị sập) chỉ vì một bộ phận nào đó bị mất ổn định. Vì vậy, đối với các chi tiết máy hoặc công trình, ngoài việc đảm bảo an toàn về độ bền và độ cứng, còn phải bảo đảm cả độ ổn định nữa. Muốn thế phải đảm bảo sao cho tải trọng tác động nhỏ hơn tải trọng tới hạn.

$$P \leq \frac{P_{th}}{n_\delta} \quad (12.1)$$

trong đó: n_δ – hệ số an toàn về ổn định.

Như vậy, vấn đề cơ bản của bài toán ổn định là xác định tải trọng tới hạn. Trong bài này, ta chỉ xét bài toán đơn giản nhất là xác định lực tới hạn của thanh bị nén đúng tâm (còn gọi là bài toán uốn dọc thanh thẳng hay bài toán Ôle (Euler).

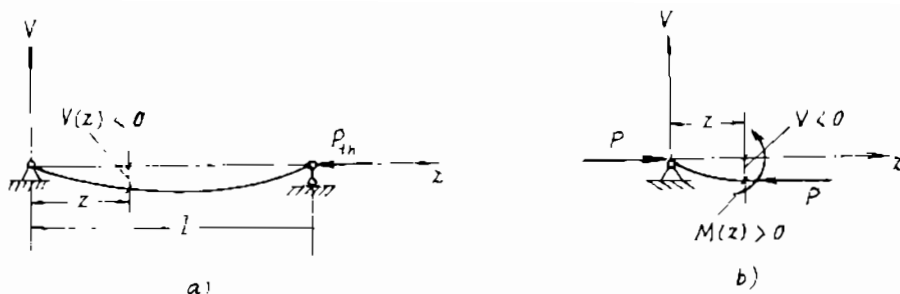


Hình 13.3.

§2. BÀI TOÁN UỐN DỌC

Xét một thanh thẳng chịu lực nén đúng tâm P (hình 12.4a). Khi P đạt tới giá trị tới hạn P_{th} thanh sẽ bị uốn cong trong mặt phẳng mà thanh có độ cứng nhỏ nhất. Để xác định lực tới hạn P_{th} ta hãy xét một đoạn thanh giới hạn bởi mặt cắt ngang ứng với tọa độ z và độ võng $V(z)$ (hình 12.4b). Bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh, phương trình cân bằng mômen của đoạn thanh trên có dạng:

$$M - P \cdot V = 0 \quad (a)$$



Hình 12.4.

Giả sử khi mất ổn định, thanh vẫn còn tính chất đàn hồi tuyến tính, do đó có thể dùng công thức tính mômen uốn ở chương 8 với chú ý $|M| = |P \cdot V|$ còn dấu của $V(z)$ và $V''(z)$ luôn ngược nhau:

$$M(z) = - EJ \frac{d^2 V}{dz^2} \quad (b)$$

Thay (b) vào (a), ta có:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V(z) = 0 \quad (c)$$

Trong đó ta đã đặt:

$$k^2 = \frac{P}{EJ} \quad (12.2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (c) là:

$$V(z) = A \sin kz + B \cos kz \quad (d)$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định từ điều kiện biên. Trong trường hợp được khảo sát (hình 12.4a).

Điều kiện biên có dạng:

a) Khi $z = 0$ thì $V(0) = 0$

b) Khi $z = l$ thì $V(l) = 0$

Điều kiện a) cho ta: $B = 0$ và (d) trở thành:

$$V(z) = A \sin kZ.$$

Điều kiện b) $\Rightarrow A \sin kl = 0$.

Nếu $A = 0$ thì $V(z) = 0$ và thanh luôn luôn cân bằng ở dạng thẳng (nghiệm tầm thường). Nếu $A \neq 0$ thì $\sin kl = 0$ hay $k = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Thay giá trị của k vào (12.2) ta được công thức xác định lực P ứng với các dạng cân bằng của thanh:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (e)$$

Vì lực tới hạn P_{th} là lực khiến dạng cân bằng thẳng của thanh bắt đầu mất ổn định, nên P_{th} là giá trị nhỏ nhất trong các giá trị (e), ứng với $n = 1$. Ngoài ra vì thanh bị uốn trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất nên J trong (e) là mômen quán tính chính trung tâm nhỏ nhất J_{min} của mặt cắt ngang. Do đó, lực tới hạn bằng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (12.3)$$

Công thức này do Öle tìm ra năm 1774.

Đối với các thanh thẳng khác, bằng những suy diễn toán học tương tự như trên ta được công thức Euler dưới dạng tổng quát sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (12.4)$$

trong đó: μ là hệ số chiều dài dẫn suất phụ thuộc vào dạng liên kết ở hai đầu thanh; $\mu l = l_0$ – gọi là chiều dài dẫn suất (chiều dài tự do) (hình 12.5). Chiều dài tự do l_0 có thể giải thích như một chiều dài quy ước nào đó của thanh tựa khớp có cùng lực tới hạn như thanh đã cho.

Sau khi tính được lực tới hạn, có thể tính được ứng suất tới hạn σ_{th} của thanh. Vì khi $P = P_{th}$ thanh vẫn còn dạng thẳng ban đầu, nên vẫn còn bị nén thuần túy. Do đó ứng suất tới hạn bằng:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2 F}$$

hay:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2}$$

trong đó: $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{F}$ là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang.

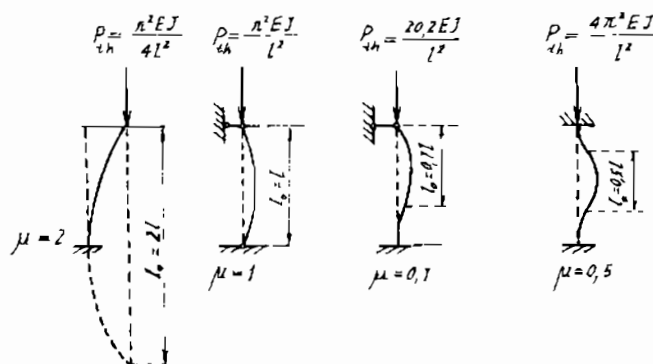
Đặt:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (12.5)$$

Công thức tính ứng suất tới hạn sẽ có dạng:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.6)$$

Nếu σ_{th} của thanh càng bé thì tính ổn định của thanh càng kém, do đó, trị số λ càng lớn, thanh càng dễ mất ổn định. Đó là trường hợp của những thanh mảnh. Vì thế hệ số λ được gọi là độ mảnh của thanh.



Hình 12.5.

§3. GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC ÔLE

Các công thức Ôle để tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn trên đây được thành lập với giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính, vì vậy

chúng chỉ đúng khi ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỉ lệ σ_{Tl} . Như vậy muốn áp dụng các công thức Ôle, cần thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{Tl}$$

hay:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{Tl}$$

Suy ra:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Tl}}}$$

Như vậy công thức Ôle chỉ đúng với các thanh có độ mảnh lớn hơn độ mảnh giới hạn.

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Tl}}} \quad (12.7)$$

Với thép $E \approx 2.10^5 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{Tl} = 200 \text{ N/mm}^2$, ta thấy:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2.10^5}{200}} \approx 100$$

Với gỗ $\lambda_o \approx 75$, với gang $\lambda_o \approx 80$.

Những thanh có độ mảnh $\lambda > \lambda_o$ được gọi là những thanh có *độ mảnh lớn*.

Những thanh có độ mảnh $\lambda < \lambda_o$ được gọi là những thanh có *độ mảnh vừa và bé*.

Đối với những thanh có độ mảnh vừa và bé, thường dùng công thức kinh nghiệm sau đây của F. S. Yaxinxky:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (12.8)$$

trong đó: a, b và c là các hằng số phụ thuộc vật liệu của thanh được xác định bằng thực nghiệm và được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Ví dụ, đối với thép nói trên:

$$\sigma_{th} = 3100 - 11,4 \lambda;$$

đối với gỗ:

$$\sigma_{th} = 293 - 1,94 \lambda.$$

Các công thức Öle và Yaxinxky cho phép giải bài toán ổn định của các thanh chịu nén trên toàn khoảng độ mảnh thường gặp trong thực tế kỹ thuật.

§4. CÔNG THỨC ÖLE TRONG MIỀN ĐÀN DẼO

Trong thực tế kỹ thuật ta còn gặp những thanh chịu nén làm việc trong miền đàn dẻo.

Rất nhiều nhà nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm đã kiến nghị cách xác định lực tối hạn P_{th} đối với các thanh loại này. Trong số những nghiên cứu này trước hết cần phải dẫn ra công trình của Yaxinxki. Trong đó, Yaxinxki đề nghị sử dụng công thức Öle đối với miền đàn hồi dẻo, nhưng thay thế cho mô đun đàn hồi thông thường E bằng mô đun đàn hồi dẫn xuất E_r , cụ thể là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_r J}{(\mu l)^2} \quad (12.9)$$

trong đó: $E_r = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2};$

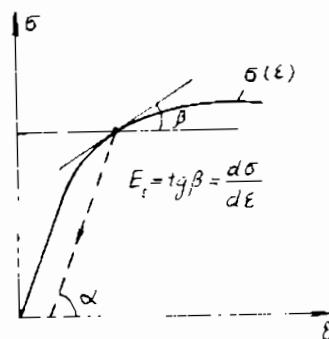
E_1 – mô đun đàn hồi khi hạ tải bằng mô đun đàn hồi ban đầu (ví dụ, đối với thép $E_1 = E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$);

$E_2 = E_t$ – mô đun đàn hồi lấy với ứng suất dọc trục ứng với thời điểm bắt đầu hạ tải. Mô đun này bằng tang góc nghiêng của tiếp tuyến với đường cong nén $\sigma = \sigma(\epsilon)$, vì thế ta gọi là mô đun tiếp tuyến (hình 12.6).

Tư tưởng của việc sử dụng mô đun dẫn xuất E_r là như sau:

Ta hình dung rằng có một thanh chịu nén đúng tâm và ứng suất trong thanh đã vượt quá giới hạn đàn hồi, còn lực tác dụng lên thanh

gần tới lực tới hạn. Khi đã đạt được giá trị của lực tới hạn thanh bắt đầu chịu uốn. Bắt đầu từ thời điểm chịu uốn này một phần của mặt cắt ngang của thanh bắt đầu xuất hiện ứng suất nén phụ, còn phần khác của mặt cắt ngang lại xuất hiện ứng suất kéo phụ. Chính vì vậy trong miền này xảy ra sự hạ tải.



Hình 12.6.

Như đã rõ môđun đàn hồi hạ tải trùng với môđun đàn hồi thông thường E , còn môđun đàn hồi của vật liệu ứng với đường đặt tải ở điểm bắt đầu hạ tải bằng tang góc nghiêng của tiếp tuyến với biểu đồ nén. Vì vậy, nếu thanh chịu nén đúng tâm có ứng suất vượt quá giới hạn đàn hồi và sau đó bắt đầu chịu uốn, thì khi uốn nó làm việc như một thanh có những môđun đàn hồi khác nhau khi kéo và nén.

§5. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH THANH CHỊU UỐN DỌC

Khi xác định kích thước của thanh chịu nén, trước hết phải quan tâm đến điều kiện sao cho thanh không bị mất ổn định dạng thẳng trong suốt quá trình sử dụng. Vì thế ứng suất trong thanh nhất thiết phải nhỏ hơn ứng suất tới hạn:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} < \frac{P_{th}}{F_{ng}} = \sigma_{th} \quad (12.10)$$

trong công thức (12.10):

N – lực dọc trong thanh; P_{th} – lực tới hạn;

F_{ng} – diện tích nguyên của mặt cắt ngang (diện tích mặt cắt ngang của thanh ở nơi không bị giảm yếu).

Nhiều nghiên cứu cho thấy rằng, những nơi mặt cắt ngang bị giảm yếu cục bộ, ví dụ, những lỗ ghép bằng đinh tán, những mộng

ghép v.v..., không gây ảnh hưởng thực chất đến trị số của lực tới hạn. Vì thế khi xác định nó, ta sẽ sử dụng công thức (12.10). Trong những trường hợp đặc biệt khi có sự giảm yếu đáng kể ta sẽ tiến hành việc kiểm tra bổ sung điều kiện bền ở những mặt cắt ngang bị giảm yếu khi chịu nén thuần túy.

Để thanh chịu uốn dọc làm việc tin cậy cần phải chỉ ra mức độ an toàn về ổn định, bởi vậy ứng suất trong thanh cần phải nhỏ hơn cường độ tính toán và cường độ tính toán này lại cần phải nhỏ hơn ứng suất tới hạn:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} \leq \frac{\sigma_{th}}{n_{\delta}} \quad (12.11)$$

ở đây: n_{δ} – hệ số an toàn về ổn định.

Như đã biết ở chương 2, điều kiện bền để chọn diện tích mặt cắt ngang của thanh chịu kéo là:

$$\sigma = \frac{N}{F_{gy}} \leq R, \quad (12.12)$$

trong đó: R – cường độ tính toán khi kéo.

F_{gy} – diện tích thực của mặt cắt ngang ở nơi có giảm yếu.

So sánh công thức (12.11) với công thức (12.12) và ký hiệu tỷ số các vế phải của các công thức này qua φ ta có:

$$\varphi = \frac{\sigma_{th}}{n_{\delta} R}, \text{ từ đây rút ra là: } \frac{\sigma_{th}}{n_{\delta}} = \varphi \cdot R$$

Đại lượng φ được gọi là hệ số giảm cường độ tính toán cơ bản khi uốn dọc. Người ta thường gọi là hệ số uốn dọc. Hệ số φ phụ thuộc vào ứng suất tới hạn, và do đó, nó là hàm của độ mảnh và vật liệu của thanh:

$$\varphi = \frac{\sigma_{th}}{n_{\delta} R} = f(\lambda) \quad (12.13)$$

Giá trị của φ đối với những độ mảnh khác nhau được thiết lập theo tiêu chuẩn thiết kế và thường được cho dưới dạng bảng I. Những

bảng này đã kể đến sự phụ thuộc của φ vào độ lệch tâm có thể của điểm đặt lực.

Bảng 1

Bảng hệ số φ

Độ mảnh của thanh λ	Giá trị φ đối với các thanh theo mức thép		Độ mảnh của thanh	Giá trị φ đối với các thanh theo mức thép	
	CT.3, CT.4	CT.5		CT.3, CT.4	CT.5
0	1,00	1,00	120	0,45	0,37
10	0,99	0,98	130	0,40	0,32
20	0,97	0,96	140	0,36	0,28
30	0,95	0,93	150	0,32	0,25
40	0,92	0,89	160	0,29	0,23
50	0,89	0,85	170	0,26	0,21
60	0,86	0,80	180	0,23	0,19
70	0,81	0,74	190	0,21	0,17
80	0,75	0,67	200	0,19	0,15
90	0,69	0,59	210	0,17	0,14
100	0,60	0,50	220	0,17	0,13
110	0,52	0,43			

Đối với các thanh bằng gỗ chịu nén đúng tâm φ được xác định như sau:

$$\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{ứng với } \lambda \leq 75 ;$$

$$\varphi = \frac{3100}{\lambda^2} \quad \text{ứng với } \lambda > 75.$$

Có thể viết lại công thức (12.11) dưới dạng:

$$\sigma = \frac{N}{F_{ng}} \leq \varphi.R.$$

Sau khi chia tất cả các số hạng của phương trình này cho φ , ta nhận được:

$$\frac{\sigma}{\varphi} = \frac{N}{\varphi \cdot F_{ng}} \leq R$$

ta sẽ gọi tỷ số $\frac{\sigma}{\varphi}$ là ứng suất tính toán σ_t :

$$\sigma_t = \frac{\sigma}{\varphi}.$$

$$\text{Do đó,} \quad \sigma_t = \frac{N}{\varphi \cdot F_{ng}} \leq R \quad (12.13)$$

Từ công thức (12.13) ta thấy rằng, về hình thức công thức này trùng với công thức (12.12) đối với thanh chịu kéo. Cách viết như thế là rất thuận tiện; bởi vì, nó cho phép sử dụng chỉ một cường độ tính toán đối với thanh chịu nén, cũng như đối với thanh chịu kéo.

Bài toán về việc chọn mặt cắt ngang của thanh chịu nén là bài toán phức tạp hơn so với bài toán về thanh chịu kéo. Lý do là đại lượng φ trong công thức (12.13) phụ thuộc vào chính kích thước, vật liệu và hình dáng mặt cắt ngang. Vì thế cần phải quy định trước φ . Cho nên việc chọn mặt cắt ngang được tiến hành bằng cách thử dần. Cụ thể là, ban đầu ta chọn trước một cách gần đúng kích thước mặt cắt ngang (hoặc là chọn trước một cách gần đúng giá trị φ , ví dụ $\varphi = 0,5$) và đối với mặt cắt ngang này ta tính diện tích mặt cắt ngang, mômen quán tính, bán kính quán tính và cuối cùng là độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$$

Với trị số λ này ta tìm φ theo bảng I. Sau đó theo công thức (12.13) ta sẽ xác định được ứng suất. Có thể xảy ra điều là, với phép thử đầu tiên ứng suất tìm được sẽ có sự sai lệch lớn so với cường độ tính toán R .

Nếu ứng suất này nhỏ hơn cường độ tính toán R nhiều lần, thì cần phải giảm kích thước của mặt cắt ngang. Ngược lại, nếu ứng suất

tìm được lớn hơn cường độ tính toán, thì phải tăng kích thước của mặt cắt ngang. Quá trình thử dần như thế được tiếp tục cho đến khi độ sai lệch giữa σ_t và R không nhỏ hơn trị số quy định theo thiết kế. Thông thường quá trình thử này được dừng lại khi độ sai lệch nói trên không vượt quá $\pm (3 \div 5\%)$.

Ví dụ: Hãy chọn mặt cắt ngang hình chữ I của một cột chịu nén đúng tâm được làm bằng thép CT3. Cột được ngàm chặt ở một đầu còn một đầu tự do. Cột có chiều dài $l = 2,6$ m. Chịu một lực nén $P = 120000$ daN. Cường độ tính toán $R = 2100$ daN/cm².

GIẢI

Hệ số chiều dài dẫn suất là $\mu = 2$.

Phép thử thứ nhất: Ta chọn gần đúng $\varphi = 0,5$. Từ điều kiện $\frac{N}{\varphi \cdot F} = R$ ta có diện tích yêu cầu là:

$$F = \frac{N}{R \cdot \varphi} = \frac{120000}{2100 \cdot 0,5} = 114 \text{ cm}^2.$$

Diện tích này ứng với thép chữ I số hiệu №55 có $F = 114 \text{ cm}^2$, bán kính quán tính $i_{\min} = 3,44 \text{ cm}$.

Từ những số liệu này ta tìm được độ mảnh của thanh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,44} = 151.$$

Theo bảng I ta tìm được $\varphi = 0,32$ và sau đó là σ_t :

$$\sigma_t = \frac{N}{\varphi \cdot F} = \frac{120000}{0,32 \cdot 114} = 3289 \text{ daN/cm}^2 > R.$$

Vì $\sigma_t > R$ nên theo chỉ dẫn trên ta phải tăng mặt cắt ngang của cột.

Phép thử thứ hai: Ta chọn thép chữ I số hiệu №60 có $F = 132 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 3,60 \text{ cm}$.

$$\lambda = \frac{2.260}{3,60} = 144; \quad \varphi = 0,34;$$

Do đó,
$$\sigma_t = \frac{120000}{0,34.132} = 2674 \text{ daN/cm}^2 > R.$$

Phép thử thứ ba: Chọn thép chữ I số hiệu №65 có $F = 153 \text{ cm}^2$; $i_{\min} = 3,77 \text{ cm}$.

Ta tìm được:

$$\lambda = \frac{2.260}{3,77} = 138 \quad ; \quad \varphi = 0,37$$

Do đó,
$$\sigma_t = \frac{120000}{0,37.153} = 2120 \text{ daN/cm}^2 \approx R = 2100 \text{ daN/cm}^2.$$

Ta kết thúc quá trình thử ở đây, vì σ_t gần trùng với R . Bởi vậy mặt cắt ngang cần thiết là №65.

Chương 13

CƠ SỞ TÍNH TOÁN VỎ MỎNG KHÔNG MÔMEN

§1. KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT CÓ VÀ KHÔNG MÔMEN

Trong kỹ thuật ta thường phải tính các nồi hơi, bể chứa dầu, khí, các kết cấu bay và hơi. Đó là kết cấu vỏ.

Trong chương này ta chỉ khảo sát những vỏ có chiều dày không đổi, vì vậy dạng hình học của vỏ được xác định bởi dạng mặt trung bình và chiều dày δ của nó. Ta tách ra một phân tố trên mặt trung bình của vỏ (hình 13.1a).

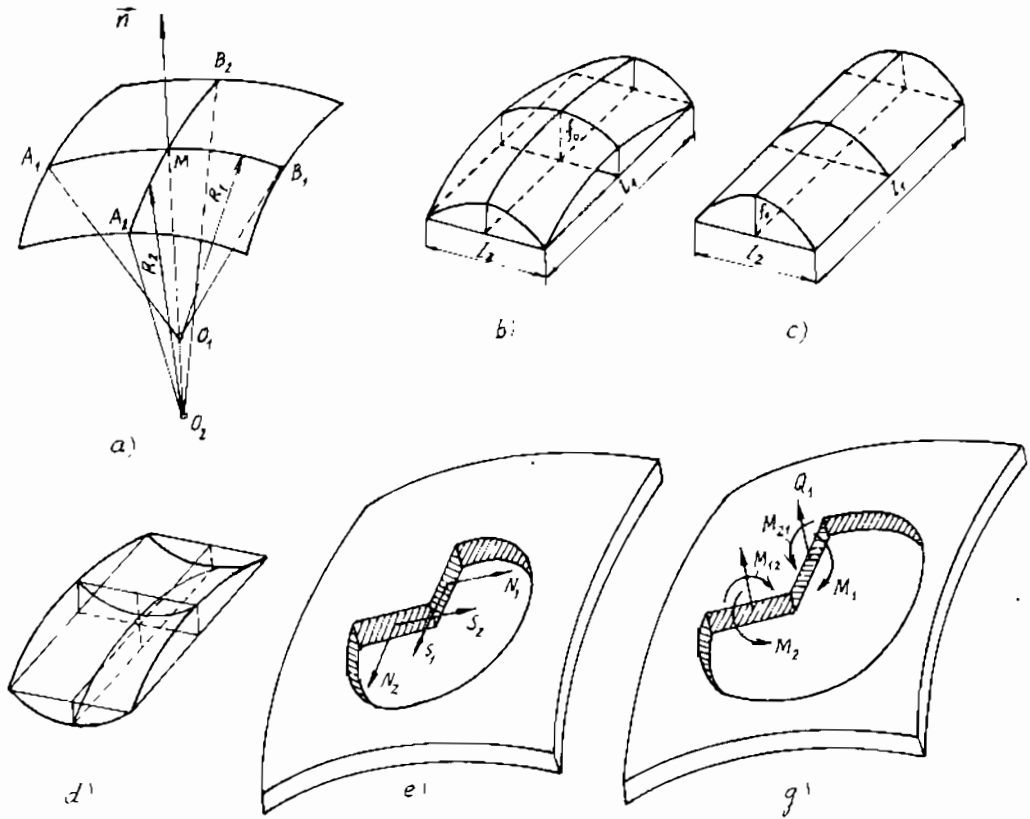
Giao của hai mặt phẳng vuông góc với nhau và cùng chứa pháp tuyến $\bar{n}$ cho ta các đường cong A_1MB_1 và A_2MB_2 trên mặt trung bình, có bán kính cong và độ cong tương ứng $R_1, k_1 = \frac{1}{R_1}$ và $R_2, k_2 = \frac{1}{R_2}$.

Ta luôn luôn có thể tìm được qua mỗi điểm M trên mặt trung bình hai đường cong chính vuông góc nhau mà độ cong của chúng có thuộc tính cực trị: một cực đại và một cực tiểu. Ta ký hiệu những độ cong chính này là k_1 và k_2 . Tích k_1k_2 trên mặt trung bình gọi là độ cong Gauss của vỏ và ký hiệu là:

$$G = k_1 \cdot k_2$$

Căn cứ vào độ cong Gauss người ta phân chia vỏ ra thành:

- Vỏ có độ cong $G > 0$ như vỏ cầu, vỏ elip (hình 13.1b);
- Vỏ có độ cong $G = 0$ như vỏ trụ, vỏ côn (hình 13.1c);
- Vỏ có độ cong $G < 0$ như vỏ hypecbol (hình 13.1d).



Hình 13.1.

- Vỏ có độ cong hỗn hợp – đó là những vỏ gồm nhiều phần có độ cong khác nhau được ghép lại với nhau.

Dưới tác dụng của tải trọng ngoài bất kỳ ở trong vỏ tồn tại hai nhóm nội lực:

1) Các lực dọc N_1 , N_2 và lực trượt S_1 , S_2 tác dụng trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trung bình (hình 13.1e).

2) Các mômen uốn M_1 , M_2 , mômen xoắn M_{12} và M_{21} và các lực cắt Q_1 , Q_2 (hình 13.1g).

Trạng thái ứng suất trong vỏ do nhóm nội lực 1 gây ra gọi là trạng thái ứng suất không mômen và lý thuyết tính toán vỏ chỉ kể đến nhóm nội lực này gọi là lý thuyết vỏ không mômen. Những điều kiện dẫn đến trạng thái ứng suất không mômen là như sau:

1. Bề mặt vỏ phải thay đổi liên tục và đủ trơn.
2. Tải trọng ngoài tác dụng lên vỏ phải trơn và liên tục.
3. Biên của vỏ phải có khả năng dịch chuyển tự do theo phương vuông góc với mặt vỏ. Tuy nhiên những điều kiện biên phải đảm bảo cho vỏ là một hệ bất biến hình hình học.
4. Lực đặt vào biên của vỏ phải nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trung bình.

Trạng thái ứng suất ở trong vỏ do nhóm nội lực 2 gây ra được gọi là trạng thái ứng suất có mômen. Lý thuyết tính toán vỏ có kể đến nhóm nội lực 2 này gọi là lý thuyết có mômen.

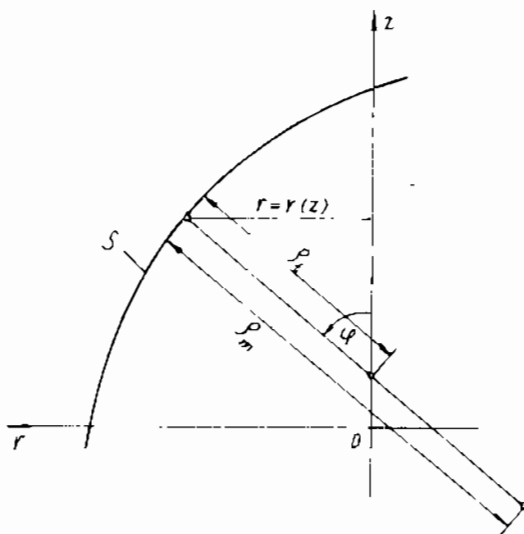
Căn cứ vào chiều dày δ của vỏ, mà vỏ được chia ra thành vỏ dày nếu $\frac{\delta}{\rho_{\min}} \geq \frac{1}{20}$ và vỏ mỏng nếu $\frac{1}{20} \geq \frac{\delta}{\rho_{\min}} \geq \frac{1}{500} \div \frac{1}{1000}$.

Một phân bố của mặt trung bình được tách ra bởi hai mặt kinh tuyến và hai mặt nón rất gần nhau (hình 13.3) sẽ bị kéo theo hai phương vuông góc với nhau. Ngoài ra, phân tố còn bị uốn cong. Sự phân bố đều của ứng suất pháp theo chiều dày δ của thành vỏ tương ứng với trường hợp kéo phân tố theo hai phương. Sự thay đổi độ cong của phân tố trong các mặt kinh tuyến và mặt nón gây ra ứng suất pháp thay đổi theo chiều dày của thành vỏ theo quy luật bậc nhất (hình 13.1g), giống như quy luật phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn thuần túy. Ứng với trường hợp thứ nhất trên các mặt cắt của phân tố chỉ chịu tác dụng của các lực dọc, còn ứng với trường hợp thứ hai các mômen uốn. Trong nhiều bài toán kỹ thuật khi mà ứng suất do các lực dọc gây ra lớn hơn rất nhiều ứng suất gây ra do các mômen uốn, ta có thể bỏ qua ứng suất khi uốn. Điều này có được khi dạng thành vỏ và tải trọng tác dụng lên nó phải

thỏa mãn các điều kiện trên để các nội lực dọc và các ngoại lực tạo thành một hệ lực cân bằng.

Về dạng mà nói, nét đặc trưng của phần lớn các vỏ mỏng là chúng có dạng của những vật thể tròn xoay. Nghĩa là bề mặt của chúng được tạo ra bởi sự xoay của một đường cong phẳng S nào đó quanh trục oz nằm trong mặt phẳng của đường cong đó (hình 13.2). Đường cong này được gọi là “kinh tuyến” và mặt phẳng chứa kinh tuyến và trục quay là “mặt phẳng kinh tuyến”.

Giao tuyến giữa mặt vỏ và mặt nón (có đỉnh trên trục quay) vuông góc với nó gọi là “đường tròn song song”. Mặt chia đôi chiều dày vỏ gọi là mặt trung bình.



Hình 13.2.

Vỏ mỏng là một trường hợp riêng của một lớp rộng các vỏ, lý thuyết tính

toán thường rất rộng và khá phức tạp. Lý thuyết này được nghiên cứu trong những phần riêng của cơ học vật rắn biến dạng. Đối với vỏ có chiều dày lớn cần phải kể đến không những các mômen uốn mà còn không được phép thừa nhận quy luật tuyến tính của sự phân bố ứng suất pháp theo chiều dày. Điều này làm cho bài toán phức tạp hơn nhiều và nó được giải quyết theo lý thuyết vỏ dày. Ở đây ta khảo sát lý thuyết không mômen của vỏ mỏng đối với các trường hợp khi mà bài toán xác định ứng suất ở trong thành vỏ là bài toán tĩnh định. Chúng ta cũng sẽ làm quen với khái niệm của lý thuyết có mômen qua một ví dụ đơn giản nhất về hiện tượng uốn của vỏ trụ.

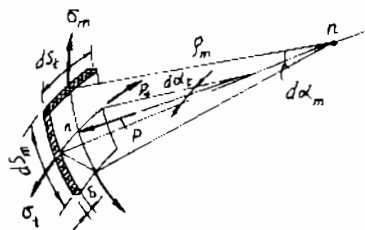
§2. TÍNH TOÁN VỎ MỎNG TRÒN XOAY THEO LÝ THUYẾT KHÔNG MÔMEN

Ta khảo sát một vỏ mỏng đối xứng trục chịu tác dụng của trọng lượng chất lỏng hoặc là áp lực khí (hình 13.3). Ta sẽ tách ra từ thành vỏ một phân tố vô cùng bé bởi hai mặt kinh tuyến và hai mặt nón và khảo sát sự cân bằng của nó (hình 13.3).

Do tính đối xứng mà 2 phần vỏ tách ra bởi các mặt nón và các mặt kinh tuyến không có xu hướng trượt lên nhau, vì thế ở mặt cắt này của vỏ không có ứng suất tiếp, mà chỉ có những ứng suất pháp chính tác dụng trên các cạnh của phân tố đã tách ra. Ta ký hiệu những ứng suất này như sau:

σ_m – là ứng suất kinh tuyến,

σ_t – là ứng suất vòng.



Hình 13.3.

Ứng với lý thuyết không mômen ta xem rằng ứng suất σ_m và σ_t trên các diện tích của các cạnh phân tố là phân bố đều. Ngoài ra, tất cả các kích thước của vỏ ta sẽ biểu diễn trên mặt trung bình của nó. Mặt trung bình của vỏ là mặt có hai độ cong. Bán kính cong của kinh tuyến ở điểm khảo sát ta ký hiệu là ρ_m ; bán kính cong còn lại bằng đoạn thẳng trên pháp tuyến với bề mặt vỏ nằm giữa điểm khảo sát của mặt trung bình và trục oz (hình 13.2), ta ký hiệu là ρ_t .

Các lực $\sigma_m \cdot \delta \cdot ds_t$ và $\sigma_t \cdot \delta \cdot ds_m$ tác dụng trên các cạnh của phân tố, còn ở mặt trong của phân tố này chịu tác dụng của áp lực chất lỏng p. Áp lực này có hợp lực là $p ds_t ds_m$. Hình chiếu của tất cả các lực lên phương pháp tuyến n-n có dạng:

$$2 \sigma_m \delta ds_t \sin \frac{d\alpha_m}{2} + 2 \sigma_t \delta ds_m \sin \frac{d\alpha_t}{2} - p ds_t ds_m = 0 \quad (a)$$

Khi thay thế ở trong phương trình (a) sin bởi đối số của nó (do góc α_m rất bé) và khi chia tất cả cho $\delta ds_t ds_m$, ta nhận được:

$$\sigma_m \frac{d\alpha_m}{ds_m} + \sigma_t \frac{d\alpha_t}{ds_t} = \frac{p}{\delta}$$

Hoặc là, khi kể đến $\frac{d\alpha_t}{ds_t} = \frac{1}{\rho_t}$ và $\frac{d\alpha_m}{ds_m} = \frac{1}{\rho_m}$, cuối cùng ta tìm được:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \quad (13.1)$$

Quan hệ (13.1) gọi là phương trình Laplace, người đã nhận được phương trình này vào đầu thế kỷ XIX khi nghiên cứu sức căng bề mặt của các chất lỏng. Ở đây cần chú ý đến sự tương tự giữa màng mỏng của chất lỏng chịu sức căng bề mặt và thành vỏ. Sự tương tự này là ở chỗ màng mỏng cũng như là thành vỏ khi chịu kéo đều duy trì một thể tích nào đó của chất lỏng có dạng bề mặt xác định ở trạng thái cân bằng. Ví như một giọt chất lỏng nằm ở trên bề mặt khô không bị tràn ra là nhờ có lực căng bề mặt. Ví dụ đã chỉ ra gọi cho các nhà kết cấu dạng giọt nước của những bể chứa. Những bể chứa này được dùng để chứa các sản phẩm dầu mỏ và có hàng loạt những ưu điểm so với những bể chứa khác.

Phương trình Laplace là để tìm σ_t . Để xác định σ_m ta sẽ thiết lập phương trình hình chiếu của tất cả các lực tác dụng trên phần vỏ đã được tách ra lên trục oz (hình 13.4b). Diện tích của mặt cắt vòng của thành vỏ bằng: $2\pi R\delta$. Do tính đối xứng của hệ đối với trục oz mà các ứng suất σ_m được phân bố đều trên diện tích này. Do đó:

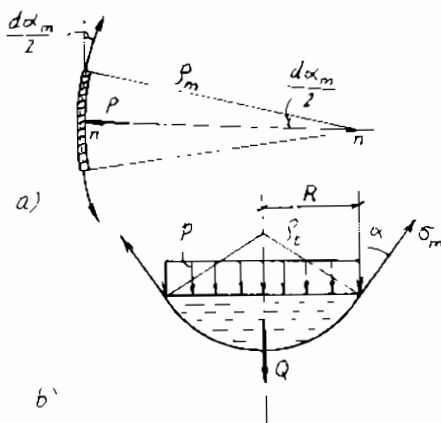
$$\sigma_m 2\pi R\delta \cos\alpha - p\pi R^2 - Q = 0$$

Từ đó rút ra:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta \cos\alpha} + \frac{Q}{2\pi R\delta \cos\alpha} \quad (13.2)$$

trong đó: Q là trọng lượng của phần thùng và phần chất lỏng ở phía dưới của vỏ kể từ mặt cắt song song.

p là áp lực ở một điểm trong chất lỏng, áp lực này là như nhau theo tất cả các phương và bằng $\gamma \cdot h$; ở đây h là độ sâu của điểm khảo sát, còn γ là trọng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng. Đôi khi chất lỏng được chứa ở trong vỏ có áp lực dư q nào đó so với áp lực khí quyển. Trong trường hợp này $p = \gamma h + q$. Phương trình (13.1) và công thức (13.2) cho phép tìm cả hai ứng suất σ_m và σ_t ở mỗi điểm của thành vỏ. Ta sẽ khảo sát những ví dụ cụ thể dưới đây:



Hình 13.4.

a) Vỏ cầu chịu áp lực khí phân bố đều bên trong q , ta sẽ bỏ qua trọng lượng bản thân của thành thùng và trọng lượng khí. Do tính đối xứng của thùng mà các ứng suất σ_m và σ_t như nhau ở tất cả các điểm của nó, rõ ràng trong phương trình (13.1) $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$, $\rho_t = \rho_m = R$, còn $p = q$, ta sẽ có:

$$\sigma = \frac{qR}{2\delta} \quad (13.3)$$

b) Một nồi hơi hình trụ chịu áp lực khí hoặc hơi nước phân bố đều bên trong $p = q$ (hình 13.5). Đường sinh có $\rho_m = \infty$ là đường kinh tuyến ở trong phần hình trụ của nồi hơi. Vì thế từ phương trình (13.1) chúng ta sẽ tìm được ứng suất vòng khi đặt $\rho_t = R$, còn $p = q$:

$$\sigma_t = \frac{qR}{\delta} \quad (13.4)$$

Theo công thức (13.2) ta tìm được ứng suất kinh tuyến, khi xem $\cos \alpha = 1$, còn $Q = 0$:

$$\sigma_m = \frac{qR}{2\delta} \quad (13.5)$$

Khi so sánh biểu thức (13.4) với biểu thức (13.5) ta thấy rằng các ứng suất kéo thành nổi hơi theo phương vòng bằng hai lần lớn hơn ứng suất tác dụng dọc theo đường sinh.

Ở các đáy hình cầu của nổi hơi ứng suất được xác định theo công thức (13.3), với bán kính của chòm cầu này là R_1 .

c) Một bể chứa hình trụ có đáy là hình nón chịu tác dụng của trọng lượng chất lỏng (hình 13.6). Trong tính toán ta sẽ bỏ qua trọng lượng của thành bể.

Bán kính cong của các kinh tuyến $\rho_m = \infty$. Theo công thức (13.1) σ_t được xác định như sau:

$$\sigma_t = \frac{p \rho_t}{\delta} \quad (b)$$

Ở độ sâu $(H + h - y)$ áp lực bằng:

$$p = \gamma (H + h - y) \quad (c)$$

Đối với phần hình nón ta có:

$$R_y = \frac{y}{h} R ; \quad \rho_t = \frac{R_y}{\cos \alpha} = \frac{yR}{h \cos \alpha} \quad (d)$$

Thay các biểu thức (c) và (d) vào công thức (b), ta được công thức để xác định ứng suất vòng đối phần hình nón:

$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta h \cos \alpha} (H + h - y) y \quad (13.6)$$

Đối với phần hình trụ có $\rho_t = R$, ứng suất vòng có dạng:

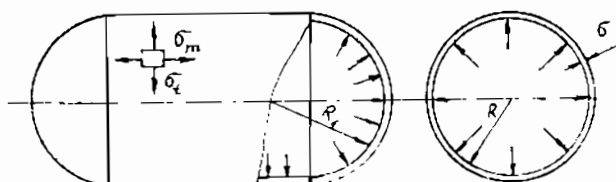
$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta} (H + h - y) \quad (13.7)$$

Biểu đồ σ_t được cho ở bên trái hình 13.6. Trên phần hình nón biểu đồ này là một parabol có cực đại tại $y = 0,5 (H + h)$. Khi $H > h$, cực đại này có giá trị quy ước, còn khi $H \leq h$ nó có giá trị thực nằm trong giới hạn của hình nón và bằng:

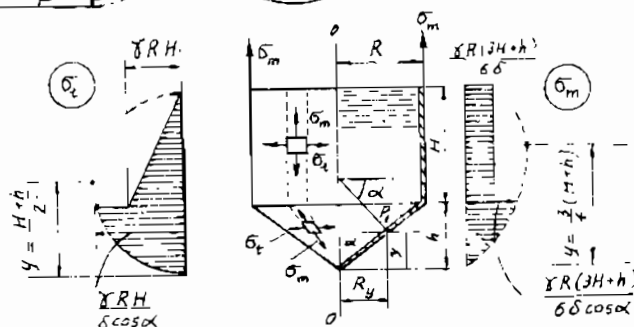
$$\max \sigma_t = \frac{1}{4} \frac{\gamma R (H + h)^2}{\delta h \cos \alpha} \quad (13.8)$$

Bây giờ ta chuyển sang tính σ_m . Trọng lượng Q của khối chất lỏng ở phần hình nón xác định bởi tọa độ y là:

$$Q = \frac{1}{3} \gamma \cdot y \cdot \pi \cdot R_y^2 = \frac{\gamma}{3} \frac{\pi y^3 R^2}{h^2} \quad (g)$$



Hình 13.5



Hình 13.6.

Thay các biểu thức (c), (d) và (g) vào công thức (13.2) ta có biểu thức σ_m như sau:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R}{6 \delta h \cos \alpha} [3 (H + h) - 2y] y \quad (13.9)$$

Biểu đồ σ_m được cho ở bên phải hình 13.6.

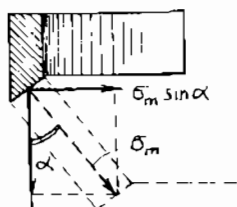
Biểu đồ σ_m trên phần hình nón cũng là một parabol. σ_m có cực đại quy ước ở tọa độ $y = 0,75 (H + h)$ và có giá trị cực đại thực khi $H \leq \left(\frac{1}{3} h\right)$ và bằng:

$$\max \sigma_m = \frac{3}{16} \frac{\gamma R (H + h)^2}{\delta h \cos \alpha} \quad (13.10)$$

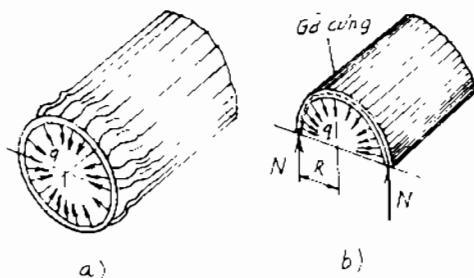
Trong phần hình trụ σ_m là một hằng và bằng ứng suất ở biên trên của vỏ:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R (3H + h)}{6\delta} \quad (13.11)$$

Qua những ví dụ trên ta thấy rằng ở những miềm mà mặt vỏ có sự thay đổi đột ngột, ví dụ, miềm tiếp giáp giữa phần hình trụ với phần hình cầu (hình 13.5) và với phần hình nón hình (13.6), thành phần hướng kính của ứng suất kinh tuyến $\sigma_m \sin \alpha$ không được cân bằng (hình 13.7).



Hình 13.7.



Hình 13.8.

Thành phần này tạo ra tải trọng phân bố theo chu vi $q = \delta \sigma_m \sin \alpha$ và có xu hướng bóp méo vỏ trụ vào phía trong (hình 13.8a). Vì thế để khắc phục hiện tượng uốn này cần phải cấu tạo ở đây một đai gia cố bằng các thép chữ L hoặc chữ I. Đai gia cố sẽ chịu tải trọng hướng kính q (hình 13.8b),

Nếu bỏ qua sự tác dụng tương hỗ của đai gia cố và vỏ, thì từ điều kiện cân bằng của nửa đai ta sẽ tìm được lực dọc nén đai $N = Rq$.

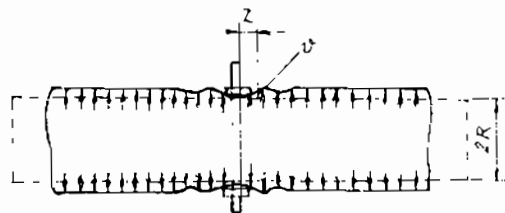
Tuy nhiên việc cấu tạo đai gia cố như thế không thể khắc phục được hoàn toàn hiện tượng uốn của thành vỏ. Vì rằng, đai gia cố lại cản trở sự giãn nở của mép vỏ liên kết với đai. Do đó, các đường sinh của vỏ ở gần đai lại bị uốn. Hiện tượng này gọi là hiệu ứng biên. Nó có thể gây ra sự tăng cục bộ đáng kể ứng suất ở thành vỏ. Dưới đây ta sẽ khảo sát một bài toán đơn giản nhất khi kể đến hiệu ứng biên của vỏ trụ.

§3. HIỆU ỨNG BIÊN TRONG VỎ TRỤ

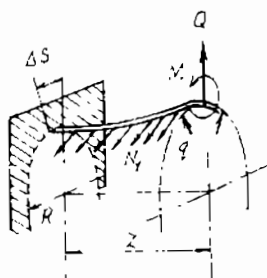
Ta xét một vỏ trụ dài thành mỏng chịu áp lực bên trong q . Hai đoạn vỏ được nối với nhau bằng các mặt bích. Nếu không có mặt bích, thì dưới tác dụng của q đường kính vỏ sẽ nở đều dọc theo suốt chiều dài vỏ. Giả sử mặt bích rất cứng, khi đó có thể xem rằng đường kính vỏ ở nơi đặt mặt bích không thay đổi (hình 13.9).

Rõ ràng là vỏ chỉ dãn nở được ở những miền xa nơi có mặt bích, còn ở miền gần mặt bích thành vỏ sẽ bị uốn. Ta sẽ nghiên cứu hiệu ứng biên này của vỏ.

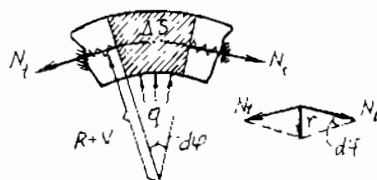
Giả sử là ban đầu trên các mặt cắt ngang của vỏ lực dọc bằng không ($N_m = 0$). Gọi R là đường kính trung bình của vỏ trước biến dạng, δ là chiều dày thành vỏ. Tương tượng tách ra khỏi vỏ một dải có chiều rộng là cung ΔS bởi các mặt cắt dọc qua trục vỏ. Trên hình 13.10 chỉ ra dải vỏ đó và các lực tác dụng lên nó.



Hình 13.9.



Hình 13.10



Hình 13.11.

Trước biến dạng và sau biến dạng vỏ luôn luôn có dạng một vật thể tròn xoay; vì thế, toàn bộ dải đều có cùng một điều kiện làm việc (hình 13.11).

Về sau ta sẽ lấy $\Delta S = 1$. Dải này có dạng của một dầm bị ngàm chặt ở nơi có mặt bích. Số gia của bán kính vỏ ta ký hiệu là v . Số gia v này chính là độ võng của dầm dải $V = V(z)$.

Áp lực bên trong là một trong những tải trọng ngoài tác dụng lên dầm có trị số là $q \cdot \Delta S = q$ (vì $\Delta S = 1$). Ngoài ra trên các mặt cắt dọc còn chịu các lực vòng phân bố N_t . Lực N_t này tỷ lệ với độ dẫn của chu vi mặt cắt ngang của vỏ. Vì thế, trên hình 13.11 là mặt cắt ngang của dầm dải với các lực vòng N_t được biểu diễn quy ước như những phản lực đàn hồi nào đó. Hợp lực của N_t là r . Dễ thấy là có thể xem hợp lực r này như một loại tải trọng thứ hai tác dụng lên dầm dải.

Từ hình 13.11 ta tìm được:

$$r = 2N_t \sin \frac{d\varphi}{2} = N_t \frac{\Delta S}{R + v}$$

Khi $\Delta S = 1$ và $R \gg v$ thì:

$$r = \frac{N_t}{R} \quad (13.12)$$

Độ dẫn tương đối của bán kính R , và do đó là độ dẫn tương đối của chu vi mặt cắt ngang bằng:

$$\varepsilon_t = \frac{v}{R}$$

Ứng suất vòng tương ứng với định luật Huc là:

$$\sigma_t = \varepsilon_t E = \frac{v}{R} E.$$

Từ đó rút ra lực N_t :

$$N_t = \sigma_t \cdot \delta \cdot 1 = \frac{\delta E}{R} v$$

Do đó tải trọng r có dạng:

$$r = \frac{N_1}{R} = \frac{\delta E}{R^2} v \quad (13.13)$$

Có thể xem lực r như là phản lực đàn hồi nào đó. Nó có tác dụng chống lại độ võng v của dầm dài với hệ số tỷ.

$$K = \frac{\delta E}{R^2} \text{ [kN/cm}^3\text{]}$$

Như vậy, tải trọng tác dụng lên dầm dài gồm có: q và r có chiều ngược nhau.

Gọi p là áp lực tổng cộng tác dụng vào dầm dài, ta có:

$$p = q + r = q - kv \quad (h)$$

Theo các liên hệ vi phân giữa nội lực với ngoại lực và phương trình vi phân của đường đàn hồi ta có:

$$\frac{d^2 v}{dZ^2} = \frac{M}{E_1 J}$$

hoặc là:

$$\frac{d^4 v}{dZ^4} = \frac{p}{E_1 J} \quad (i)$$

Thay $p = q - kv$ vào (i) ta được phương trình sau đây:

$$\frac{d^4 v}{dZ^4} = \frac{q - kv}{E_1 J}$$

$$\text{Đặt: } \frac{k}{E_1 J} = 4 \beta^4; \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E_1 J}} \quad (k)$$

Cuối cùng ta có:

$$\frac{d^4 v}{dZ^4} + 4 \beta^4 v = \frac{q}{E_1 J} \quad (13.14)$$

Trong (13.14) J – mômen quán tính mặt cắt ngang của dầm dài, khi $\Delta S = 1$, $J = \frac{\delta^3}{12}$.

E_1 – môđun đàn hồi khác nào đó được thay thế cho môđun đàn hồi thông thường E . Lý do là do sự tác dụng tương hỗ của các dải bên cạnh mà biến dạng dọc ε_1 phải thay đổi như thế nào đó, để biến dạng ngang tương ứng bằng không ($\varepsilon_2 = 0$). Từ công thức của định luật Húc đối với trạng thái ứng suất phẳng (hình 13.12).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Khi $\varepsilon_2 = 0$, rút ra là:

$$\sigma_2 = \mu \sigma_1.$$

Thay kết quả này vào phương trình thứ nhất của (1) ta có:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} (1 - \mu^2)$$

Hay là:

$$\sigma_1 = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon_1$$

trong đó:

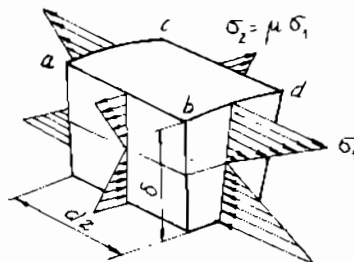
$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

Quy luật phân bố ứng suất trên các mặt cắt phân tố được cho trên hình (13.12). Vì thế, độ cứng khi uốn của dầm dải là:

$$E_1 J = \frac{\delta^3 E}{12(1 - \mu^2)}, [\text{lực} \cdot \text{L}^2]$$

Khi đó, hệ số β có thứ nguyên $\left[\frac{1}{\text{chiều dài}} \right]$ sẽ là:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{E_1 J}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \mu^2)}{R^2 \delta^2}} \quad (13.15)$$



Hình 13.12.

Nếu trên mặt cắt ngang của vỏ có lực dọc N_m (nó được đặc trưng bởi sự phân bố đều của σ_m), thì độ dãn tỷ đối theo phương vòng sẽ là:

$$\varepsilon_t = \frac{v}{R} = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_m}{E}$$

Từ phương trình này ta tìm được σ_t và sau đó là N_t :

$$N_t = \sigma_t \cdot \delta \cdot l = \frac{\delta E}{E} v + \mu \delta \sigma_m$$

Tải trọng r bây giờ được tìm theo công thức (11.12):

$$r = \frac{\delta E}{R^2} v + \frac{\mu \delta \sigma_m}{R} \quad (m)$$

Như vậy khi chú ý đến các biểu thức (h), (i) và (m) phương trình vi phân của dầm dãi chịu uốn trong trường hợp này là:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\beta^4 v = \frac{1}{E_t J} \left(q - \frac{\mu \delta \sigma_m}{R} \right) \quad (13.16)$$

Dễ thấy sự xuất hiện của số hạng thứ hai trong vế phải của phương trình (13.16) là do vỏ chịu kéo theo phương dọc với ứng suất σ_m thì đồng thời kèm theo sự thắt lại theo phương ngang. Do đó, số hạng này có dấu ngược lại với q .

Các phương trình (13.14) và (13.16) đúng đối với tải trọng đối xứng bất kỳ.

Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của bài toán này đối với trường $q = \text{const}$ và $\sigma_m = 0$. Nghiệm tổng quát của phương trình (13.14) được tìm dưới dạng:

$$v = e^{-\beta z} (C_1 \sin \beta z + C_2 \cos \beta z) + e^{\beta z} (C_3 \sin \beta z + C_4 \cos \beta z) + \frac{q}{4\beta^4 E_t J} \quad (13.17)$$

Căn cứ vào ý nghĩa vật lý của bài toán ta thấy rằng, khi z tăng thì v cần phải tiến tới một giá trị xác định. Thế nhưng, từ (13.17) ta thấy có một sự mâu thuẫn là khi $z \rightarrow \infty$ thì đồng thời đại lượng $e^{\beta z} \rightarrow \infty$. Vì thế, cần phải lấy $C_3 = C_4 = 0$. Hai hằng số C_1, C_2 được tìm

từ điều kiện liên kết giữa mặt bích và vỏ. Nghĩa là, khi $z = 0$, $\frac{dv}{dz} = 0$ và $v = 0$. Thực hiện các điều kiện này ta có:

$$C_1 = C_2 = -\frac{q}{4\beta^4 E_1 J} = -\frac{qR^2}{8E}$$

và

$$v = \frac{qR^2}{8E} \left[1 - e^{-\beta z} (\sin \beta z + \cos \beta z) \right] \quad (13.18)$$

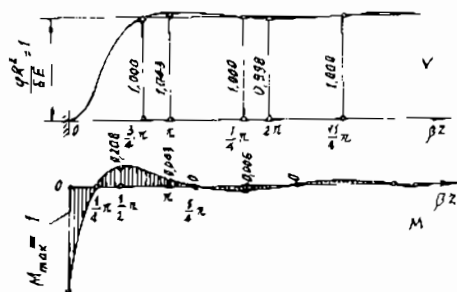
Mômen uốn M và lực cắt Q đối với dầm dài có chiều rộng $\Delta S = 1$ được tìm như sau:

$$M = E_1 J \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{qR\delta}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) \quad (13.19)$$

$$Q = \frac{dM}{dz} = -\frac{q\sqrt{R\delta}}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}} e^{-\beta z} \cos \beta z \quad (13.20)$$

Biểu đồ v và M có dạng như trên hình 13.13. Ở đó trên trục hoành được biểu diễn bởi tọa độ không thứ nguyên βz .

Từ các biểu đồ trên hình 13.13 có thể thấy rõ là sóng biến dạng uốn của thành vỏ càng xa mặt bích thì tắt càng nhanh. Cụ thể là khi $\beta z = \pi$, độ võng v chỉ khác với độ tăng bán kính vỏ $\frac{qR^2}{8E}$ khi dãn nở tự do không có mặt bích là 4,3%. Ở tọa độ này mômen uốn cũng bằng 4,3% mômen uốn lớn nhất tại mặt bích.



Hình 13.13.

với $\mu = 0,3$ ta có:

$$Z = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi \sqrt{2\delta}}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 2,4 \sqrt{R\delta}$$

Khi $\delta = 0,1R$ thì $Z = 0,76 R$.

Vì thế, với độ chính xác đến 5% ta có thể xem rằng, hiệu ứng biên chỉ có hiệu quả trên một chiều dài nhỏ hơn bán kính vỏ. Đến đây ta thấy rõ là, vì sao ta lại gọi hiện tượng vừa nghiên cứu là hiệu ứng biên. Đây là một minh chứng nữa về nguyên lý Xanh-vơ-năng

Do hiệu ứng biên mà ứng suất cực đại có thể có những giá trị rất lớn.

Ví dụ: khi $z = 0$ và $\mu = 0,3$ ta có:

$$M_{\max} = \frac{qR\delta}{2\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot 6}{\delta^2} = \frac{3qR}{\delta \sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 1,82 \frac{qR}{\delta}$$

Nghĩa là trong trường hợp này ứng suất cực đại do hiệu ứng biên lớn hơn ứng suất cực đại xác định theo lý thuyết không mômen là 1,82 lần.

Đối với vật liệu dẻo thì sự nâng cao ứng suất do hiệu ứng biên không làm giảm độ bền tổng thể của vỏ, mà chỉ dẫn đến biến dạng dẻo cục bộ. Tuy nhiên, ứng suất này lại rất nguy hiểm đối với vật liệu giòn. Ví dụ, đối với các bể chứa bằng bê tông cốt thép, ứng suất nói trên có thể gây ra những vết nứt. Do đó, điều kiện không bị thấm của bể chứa bị vi phạm. Một trong những giải pháp kết cấu để khắc phục nhược điểm này là tạo ra những ứng suất nén trước trong các thành bể chứa. Đôi khi có thể liên kết giữa thành vỏ với đáy bằng một kết cấu cho phép thành bể dẫn nở hoàn toàn tự do hoặc hầu như tự do. Giải pháp kết cấu này làm giảm đáng kể hoặc hoàn toàn khắc phục được những ứng suất của hiệu ứng biên.

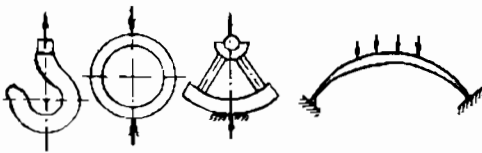
Lý thuyết tổng quát về hiệu ứng biên được trình bày trong các tài liệu riêng của cơ học vật rắn biến dạng với việc sử dụng lý thuyết vỏ có mômen.

CHƯƠNG 14

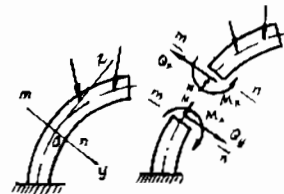
TÍNH TOÁN THANH CONG

§1. KHÁI NIỆM CHUNG

Trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật đặc biệt là trong ngành xây dựng và chế tạo máy thường gặp những chi tiết và cấu kiện kết cấu có trục cong. Trên hình 14.1 là một vài ví dụ về những chi tiết và cấu kiện đó. Móc cần trục, đai vành tròn, bánh xe, vòm cầu hai khớp, v.v...



Hình 14.1.



Hình 14.2.

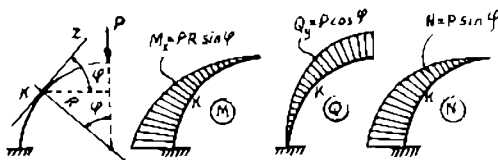
Những chi tiết và cấu kiện kết cấu có trục là đường cong không gian rất ít gặp, vì thế trong chương này ta sẽ chỉ quan tâm đến những thanh có trục là những đường cong phẳng và mặt cắt ngang của nó có một trục đối xứng trùng với đường tải trọng. Với những điều kiện như thế nội lực trên mặt cắt ngang bất kỳ của thanh cong chỉ có ba thành phần: lực dọc N , lực cắt Q và mômen uốn M_x (hình 14.2). Các thành phần nội lực này được xác định như thường lệ bằng phương pháp mặt cắt. Cũng như trước, trục Oz trùng với tiếp tuyến của trục thanh. Còn trục Oy trùng với trục đối xứng của mặt cắt ngang. Trên hình 14.3 là sơ đồ tính của một thanh cong tròn và các biểu đồ nội lực M_x , Q_y và N .

Khi tính toán thanh cong nên xác định vị trí của các mặt cắt ngang bằng tọa độ độ dọc cực R và φ .

§2. THANH CONG CHỊU KÉO VÀ NÉN

Khi ngoại lực tác dụng vuông góc với một mặt cắt ngang nào đó của thanh cong thì ở những mặt cắt ngang khác của nó sẽ phát sinh những mômen uốn. Vì thế, nếu chỉ có những lực tập trung tác dụng lên thanh cong thì không thể tạo ra được một thanh cong chỉ chịu kéo (hoặc nén).

Một thanh cong tròn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều vuông góc với trục thanh sẽ làm việc trong điều kiện kéo (hoặc nén) đúng tâm. Trong trường hợp này, độ co và giãn tỷ đối của tất cả các thớ, và do đó là các ứng suất đều như nhau.



$$\epsilon = \text{hằng} ; \sigma = \text{hằng}.$$

Hình 14.3.

Trên cơ sở giả thiết mặt cắt ngang phẳng ta xét biến dạng của mặt phân tố thanh như trên hình 14.4:

Khi biến dạng mặt cắt ngang của thanh bị xoay đi một góc $\Delta d\varphi$ quanh tâm cong. Chiều dài ban đầu của một thớ bất kỳ cách trọng tâm mặt cắt một khoảng y bằng:

$$dS_y = d\varphi (R + y),$$

Còn độ dãn của thớ này là:

$$\Delta dS_y = \Delta d\varphi (R + y).$$

Vì thế, độ dãn tỷ đối:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dS_y}{dS_y} = \frac{\Delta d\varphi (R + y)}{d\varphi (R + y)} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \text{hằng}.$$

Nếu xem rằng các thớ dọc không nén ép lên nhau trong quá trình biến dạng thì theo định luật Húc ta có:

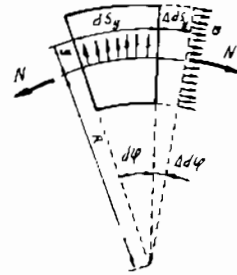
$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E = \text{hằng}.$$

Biểu đồ ứng suất được cho trên hình 14.4. Lực dọc được đặt vào trọng tâm mặt cắt bằng:

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma \cdot F \quad (a)$$

Từ công thức (a) rút ra:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$



Hình 14.4.

§3. THANH CONG CHỊU UỐN THUẦN TÚY

Khi xác định ứng suất trong thanh cong phẳng chịu uốn thuần túy, ta vẫn sử dụng giả thiết mặt cắt ngang phẳng và bỏ qua ứng suất bé theo phương hướng kính.

Xét phân tố thanh chiều dài dS có mặt cắt ngang đối xứng đối với trục Oy (hình 14.5b). Trục Ox là trục trung hoà của mặt cắt ngang. Biểu đồ biến dạng dài tuyệt đối và tỷ đối của các thớ được cho trên hình 14.5c, d. Độ dãn tuyệt đối theo chiều cao mặt cắt biến thiên theo quy luật đường thẳng, còn độ dãn tỷ đối theo quy luật đường cong (hyperbol). Điều này được giải thích bởi biểu thức sau đây:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta dS_p}{\rho dS_p} = \frac{\Delta d\varphi \cdot y}{d\varphi \cdot \rho} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y}$$

Theo định luật Húc:

$$\sigma = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} \quad (14.1)$$

Trong trường hợp này:

$$N = \int_F \sigma dF = \int_F E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r + y} dF = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y}{r + y} dF = 0$$

Nhưng thừa số

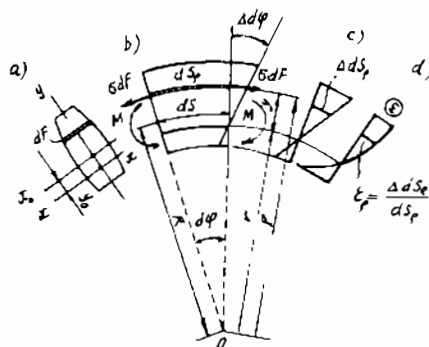
$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ trước dấu

tích phân không thể bằng không, nên:

$$\int_F \frac{y}{r + y} dF = 0$$

(14.2)

Điều kiện này cho phép xác định vị trí trục trung hoà



Hình 14.5.

(lớp trung hoà). Từ điều kiện xác định vị trí trục trung hoà (14.2) rõ ràng là trục trung hoà trong thanh cong không đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Tổng mômen của các lực sơ cấp σdF trên mặt cắt ngang đối với trục trung hoà sẽ là:

$$M = \int_F (\sigma dF) y = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2}{r+y} dF \quad (14.3)$$

Có thể viết tích phân trong (14.3) dưới dạng:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F \left(y - \frac{ry}{r+y} \right) dF = \int_F y dF - r \int_F \frac{y}{r+y} dF$$

Kể đến (11.2) ta nhận được:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F y dF = S_x = F \cdot y_0 \quad (14.4)$$

trong đó: $S_x = F \cdot y_0$ – là mômen tĩnh (mômen diện tích cấp không) của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà (y_0 – khoảng cách từ trọng tâm của mặt cắt đến trục trung hoà (hình 14.5)).

Thay (14.4) vào (14.3) ta có:

$$M = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_x.$$

$$\text{Do đó:} \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES_x} \quad (14.5)$$

Thay kết quả (14.5) vào biểu thức (14.1) với chú ý là $r + y = \rho$ (ρ – khoảng cách từ tâm cong đến điểm cần xác định ứng suất) công thức tính ứng suất trong thanh cong có dạng cuối cùng:

$$\sigma = \frac{My}{S_x \rho} \quad (14.6)$$

Công thức (14.6) khác với công thức tính ứng suất trong thanh thẳng trước hết bởi đại lượng thay đổi $\rho = \rho(y)$ ở mẫu số.

Để thấy là biểu đồ ứng suất trên mặt cắt của thanh cong thay đổi theo quy luật hyperbol.

Để thấy công thức tính ứng suất trong thanh thẳng là một trường hợp riêng của công thức tính ứng suất trong thanh cong ta làm các phép toán sau đây:

$$S_x = \int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \frac{1}{r} \int_F \frac{y^2}{1+y/r} dF = \frac{1}{r} J_x^* \quad (b)$$

trong đó: $J_x^* = \int_F \frac{y^2}{1+y/r} dF$ được gọi là mômen quán tính của mặt cắt ngang của thanh cong.

Rõ ràng là đối với thanh thẳng $r = \infty$ thì $J_x = J_x^* \int_F y^2 dF$.

Khi kể đến (b) công thức (11.6) có dạng:

$$\sigma = \frac{M}{J_x^*} \cdot \frac{y}{1+y/r} \quad (14.7)$$

Nếu $r \rightarrow \infty$, thì công thức (14.7) đến giới hạn trùng với công thức tính ứng suất trong thanh thẳng chịu uốn thuần túy.

§4. VỊ TRÍ TRỤC TRUNG HOÀ

Để tính được ứng suất theo công thức (11.6) ta cần phải biết được vị trí trục trung hoà.

Gọi r là bán kính cong của lớp trung hoà, R – bán kính cong của trục thanh. Còn y – khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt đến trục trung hoà (hình 14.6). Khi đó ta có:

$$y = R - r.$$

Khi xuất phát từ điều kiện (14.2) ta có thể tìm được lời giải chính xác cho bài toán này đối với từng mặt cắt ngang cụ thể.

Nếu đặt: $r + y = \rho$; $y = \rho - r$.

Ta có:
$$\int_F \frac{y}{r+y} dF = \int_F \frac{\rho - r}{\rho} dF = \int_F dF - r \int_F \frac{dF}{\rho} = 0,$$

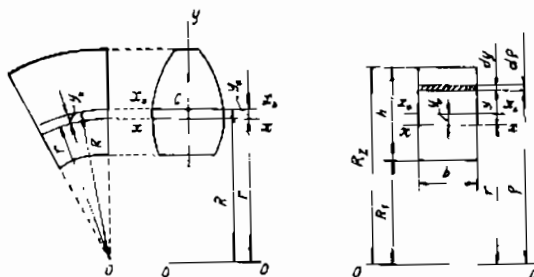
Từ đây rút ra là:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}} \quad (14.8)$$

Đối với trường hợp mặt cắt chữ nhật (hình 14.6):

thì
$$\int_F \frac{dF}{\rho} = b \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = b (\ln R_2 - \ln R_1) = b \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Do đó,
$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (14.9)$$



Hình 14.6.

Trong nhiều trường hợp việc xác định vị trí trục trung hoà có thể được thực hiện theo các phương pháp gần đúng.

Để tìm nghiệm gần đúng ta dùng công thức:

$$S_x = \frac{1}{r} J_x^*.$$

Mặt khác:

$$S_x = F \cdot y_o ;$$

$$\text{Vì vậy ta tìm được: } y_o = \frac{J_x^*}{r F}$$

Ta nhận xét rằng, bán kính cong càng lớn, thì mômen quán tính J_x^* của dầm cong càng gần tới mômen quán tính thông thường. Vì thế để giải gần đúng có thể đặt:

$$J_x^* \approx J_{xo} ; \quad r \approx R ;$$

$$\text{do đó: } y_o \approx \frac{J_{xo}}{R F} .$$

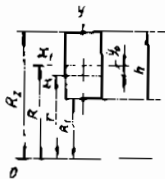
Đối với trường hợp khảo sát:

$$y_o \approx \frac{b}{12} \cdot \frac{h^3}{R \cdot b h} = \frac{h^2}{12 R}$$

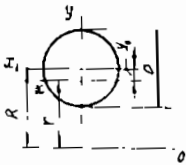
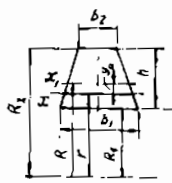
Lời giải của bài toán đối với một số dạng mặt cắt thường gặp được cho trong bảng 14.1 dưới đây. Những công thức gần đúng cho trong bảng này phù hợp tốt đối với những thanh có độ cong trung bình, khi:

$$\frac{h}{R} < \frac{1}{2}$$

Bảng 14.1.

Dạng mặt cắt	Nghiệm	
	đúng	gần đúng
	$y_o = \frac{h^2}{12 R}$	$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$

Bảng 14.1 tiếp theo

Dạng mặt cắt	Nghiem	
	dùng	gần đúng
	$y_0 = \frac{D^2}{16R}$	$r = \frac{D^2}{8 \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$
	$y_0 = \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{18(b_1 + b_2)^2} \times \frac{h^2}{R}$	$r = \frac{(b_1 + b_2) h^2}{2 [(b_1 R_2 - b_2 R_1) \ln \frac{R_2}{R_1} + (b_1 - b_2) h]}$

§5. ỨNG SUẤT TRONG THANH CHỊU UỐN VÀ KÉO (NÉN) ĐỒNG THỜI

Nếu trên mặt cắt ngang của thanh cong chịu tác dụng dùng đồng thời của mômen uốn và lực dọc thì ứng suất tại một điểm theo nguyên lý độc lập tác dụng:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{S_x} \cdot \frac{y}{\rho} \quad (14.10)$$

Trong công thức (14.10) mômen uốn M được lấy đối với trục đi qua trọng tâm $x_0 - x_0$, bởi vì ứng suất do lực dọc được tìm từ điều kiện lực dọc đặt ở trọng tâm mặt cắt ngang.

Ví dụ: Tìm ứng suất lớn nhất trong một móc cần trục chịu lực như hình 14.7.

Mặt cắt ngang của móc được xem là hình thang có $b_1 = 4 \text{ cm}$, $b_2 = 1 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$, $R_1 = 3 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$, $P = 2,5 \text{ tấn}$.

GIẢI

Khoảng cách từ tâm cong đến trọng tâm mặt cắt là:

$$R = R_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 6,6 \text{ cm}.$$

Bán kính cong của lớp trung hoà được tìm theo công thức chính xác cho trong bảng (14.1).

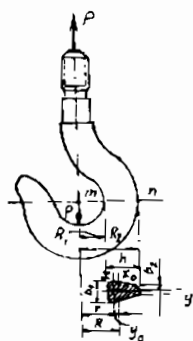
$$r = \frac{(4 + 1) 9^2}{2 \left[(4 \cdot 12 - 1 \cdot 3) \ln \frac{12}{3} - 9 (4 - 1) \right]} = 5,72 \text{ cm}.$$

Do đó:

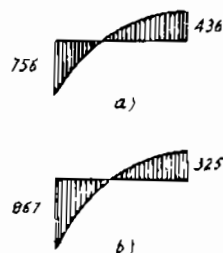
$$y_o = R - r = 0,88 \text{ cm}$$

Diện tích mặt cắt ngang:

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 22,5 \text{ cm}^2$$



Hình 14.7.



Hình 14.8.

Vì thế:

$$S_x = Fy_o = 22,5 \cdot 0,88 = 19,8 \text{ cm}^3.$$

Tọa độ các điểm biên của mặt cắt:

$$y_n = R_2 - r = 12,00 - 5,72 = 6,28 \text{ cm}$$

$$y_m = R_1 - r = 3,00 - 5,72 = -2,72 \text{ cm}$$

$$\rho_n = R_2 = 12 \text{ cm} ; \rho_m = R_1 = 3 \text{ cm}.$$

Lực dọc và mômen ở trên mặt cắt:

$$N = 2500 \text{ kG} ; \quad M = P \cdot R = 16.500 \text{ kGcm}.$$

Theo công thức (14.10) ta tìm được ứng suất ở các thớ biên:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{N}{F} + \frac{M}{S_x} \cdot \frac{y_m}{\rho_m} = \frac{2500}{22,5} + \frac{16500}{19,8} \cdot \frac{2,72}{3} = \\ &= 111 + 756 = 867 \text{ kG/cm}^2.\end{aligned}$$

$$\sigma_n = \frac{N}{F} - \frac{M}{S_x} \cdot \frac{y_n}{\rho_n} = 111 - 436 = -325 \text{ kG/cm}^2.$$

Biểu đồ ứng suất chỉ do mômen uốn gây ra được cho trên hình 14.8a, còn biểu đồ ứng suất do cả N và M đồng thời gây ra có dạng như trên hình 14.8b.

Nếu ứng suất uốn được tính theo công thức thông thường đối với thanh thẳng, ta có:

$$\sigma_m = \frac{M}{J_{xo}} y_m = \frac{16500}{134} \cdot 3,6 = 443 \text{ kG/cm}^2$$

$$\sigma_n = \frac{M}{J_{xo}} y_n = \frac{16500}{134} \cdot 5,4 = -665 \text{ kG/cm}^2$$

Những con số này thật là lý thú. Bởi vì chúng cho phép kết luận rằng, để tính toán thanh cong tuyệt đối không được sử dụng công thức đối với thanh thẳng. Sai số có thể rất lớn không những chỉ về trị số của ứng suất, mà còn cả bức tranh về chất của trạng thái ứng suất cũng bị thay đổi đột ngột. Ví dụ, điểm m là điểm chịu ứng suất lớn

nhất do uốn ($\sigma_m = 756 \text{ kG/cm}^2$), nhưng theo tính toán đối với thanh thẳng ($\sigma_m = 443 \text{ kG/cm}^2$) điểm này lại không phải nguy hiểm nhất mà ngược lại điểm n lại nguy hiểm nhất ($\sigma_n = -665 \text{ kG/cm}^2$). Sai số này sẽ khác nhau khi độ cong của thanh có những trị số khác nhau. Vì thế, thanh cong được chia làm hai nhóm: thanh có độ cong bé $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ và thanh có độ cong lớn $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$. Để xác định ứng suất trong thanh cong có độ cong bé với sai số cho phép có thể sử dụng công thức đối với thanh thẳng.

Bảng 14.2 dưới đây cho sự sai lệch theo phần trăm giữa các ứng suất tính theo lý thuyết thanh thẳng đối với thanh mặt cắt chữ nhật có độ cong khác nhau.

Bảng 14.2.

	Thanh độ cong lớn			Thanh độ cong nhỏ		
R/h	2	3	5	8	10	
$\Delta\sigma, \%$	18,2	11,8	6,9	4,8	3,4	0

Từ bảng 14.2 thấy rõ là với $\frac{R}{h} < 5$ cho phép xác định ứng suất theo công thức đối với thanh thẳng.

CHƯƠNG 15

ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN

§1. KHÁI NIỆM VỀ SỰ PHÁ HỦY DO MỎI VÀ NGUYÊN NHÂN CỦA NÓ

Thực tế kỹ thuật cho thấy các chi tiết máy và cấu kiện công trình như đường ray, cánh tuốc bin, lò xo lá đỡ thùng xe v.v... khi làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi theo thời gian thường bị phá hủy đột ngột không phải ngay lập tức mà đôi khi sau một thời gian làm việc lâu dài với ứng suất khi phá hủy nhỏ hơn giới hạn bền tĩnh của vật liệu rất nhiều lần. Hình ảnh một trục toa xe lửa bị phá hủy được cho trên hình 15.1.

Ta hãy quan sát sự thay đổi của ứng suất theo thời gian đối với điểm K trên chu vi của trục quay như hình 15.2a với sơ đồ tính hình 15.2b. Tọa độ của điểm K ở thời điểm bất kỳ được xác định bởi $y = r \sin \varphi(t)$. Ứng suất ở điểm K trên mặt cắt m – n có mômen M:

$$\sigma_K = \frac{M}{J} \cdot y = \frac{M \cdot r}{J} \cdot \sin \varphi = \sigma_{\max} \sin \varphi$$

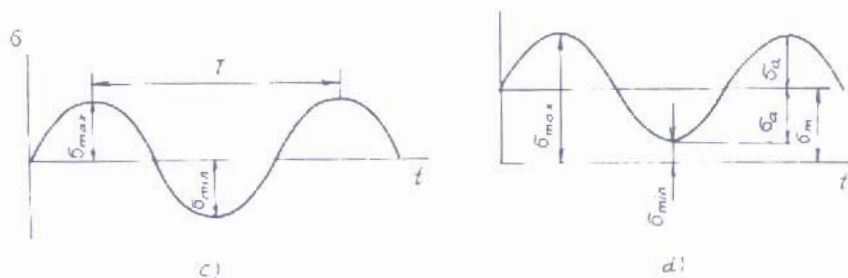
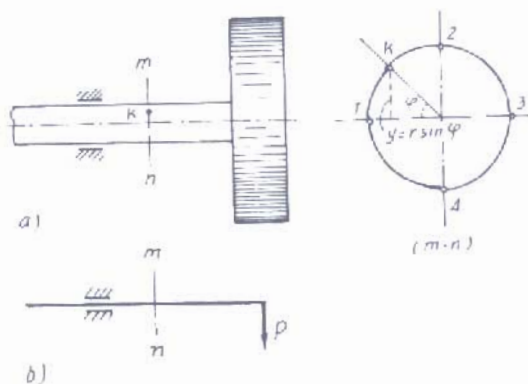
Khi trục quay với vận tốc góc không đổi ω thì

$$\sigma_K = \sigma_{\max} \sin \omega t. \quad (a)$$

Ứng suất kéo lớn nhất ở điểm 2: $\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{M \cdot r}{J}$. Ứng suất nén lớn nhất ở điểm 4: $\sigma_{\min} = -\frac{M \cdot r}{J} = \sigma_4$. Khi điểm K nằm trên trục trung hoà $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$. Đồ thị của σ_K được cho trên hình 15.2c. Nếu trên trục này còn chịu thêm một lực kéo không đổi thì σ_K thay đổi theo quy luật hình 15.2d.



Hình 15.1.



Hình 15.2.

Cần nhấn mạnh rằng, đã từ lâu, người ta nhận thấy các chi tiết chịu ứng suất biến đổi theo thời gian thường bị phá hoại đột ngột (không có biến dạng dư tuy làm bằng vật liệu dẻo) với ứng suất còn

rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu. Hiện tượng đó được gọi là *hiện tượng mỏi* của vật liệu.

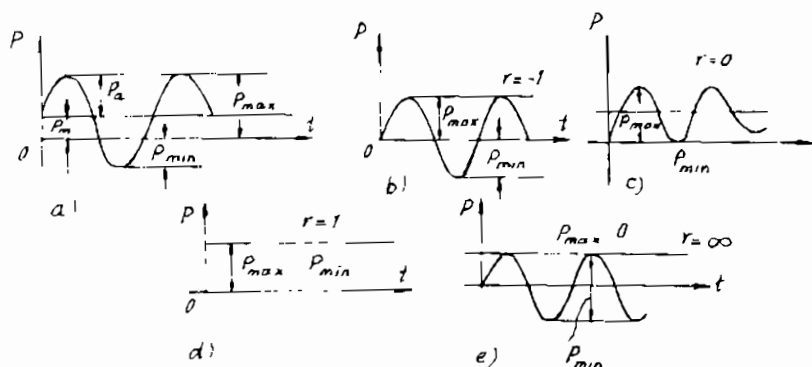
Sở dĩ xảy ra hiện tượng trên là vì khi chịu tác dụng của ứng suất biến đổi, tuy giá trị còn thấp hơn giới hạn đàn hồi của vật liệu, những biến dạng dẻo rất nhỏ bắt đầu xuất hiện và phát triển ở những nơi yếu nhất của vật thể (thí dụ ở những chỗ có sự tập trung ứng suất do thiếu sót khi chế tạo hoặc do ảnh hưởng của môi trường), dần dần tại những chỗ đó xuất hiện những vết nứt rất bé. Những vết nứt này ngày càng sâu và phát triển (do ứng suất biến đổi và sự tập trung ứng suất ở đáy kẽ nứt), dần dần trở thành những vết nứt lớn, mặt cắt ngang của vật thể bị yếu dần và cuối cùng khi không còn đủ để chịu lực nữa thì vật thể bị phá hoại đột ngột.

Hiện tượng mỏi được đặc biệt chú ý trong kỹ thuật. Chừng 90% các chi tiết máy bị hỏng đều do nguyên nhân mỏi. Vì thế, khi tính toán các chi tiết chịu ứng suất biến đổi, cần kiểm tra *độ bền mỏi* của chúng.

§2. CHU TRÌNH ỨNG SUẤT VÀ GIỚI HẠN MỎI

1. Chu trình ứng suất

Quá trình biến đổi của ứng suất theo thời gian, qua hai giá trị giới hạn kế tiếp nhau và lặp lại giá trị ban đầu, gọi là *chu trình ứng suất*. Thời gian T thực hiện một chu trình ứng suất gọi là *chu kỳ ứng suất*.



Hình 15.3.

Gọi $p_{\max}$ và $p_{\min}$ là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của ứng suất p (p có thể là σ hoặc τ tùy theo loại biến dạng). Đại lượng:

$$p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (15.1)$$

được gọi là *ứng suất trung bình*, còn đại lượng:

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} > 0 \quad (15.2)$$

được gọi là *biên độ của chu trình* hay *biên độ ứng suất*:

Biên độ luôn luôn có giá trị dương.

Từ (15.1) và (15.2) ta có:

$$\left. \begin{aligned} p_{\max} &= p_m + p_a \\ p_{\min} &= p_m - p_a \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

Chu trình có $p_{\max} = -p_{\min}$ (hình 15.3b) gọi là chu trình đối xứng (lúc này $p_m = 0$). Chu trình có $p_{\max} \neq -p_{\min}$ (hình 15.3a) gọi là *chu trình không đối xứng*. Chu trình có $p_{\min}$ (hoặc $p_{\max}$) = 0, gọi là *chu trình mạch động* (hình 15.3c, e).

$$\text{Tỷ số} \quad r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (15.4)$$

Gọi là *hệ số không đối xứng* của chu trình.

Theo định nghĩa này, ta có:

Khi $r = -1$ – chu trình đối xứng;

Khi $r = 1$ – chu trình hằng (ứng suất không đổi hình 15.3d);

Khi $r = 0$ – chu trình mạch động (dương);

Khi $r = \infty$ – chu trình mạch động (âm).

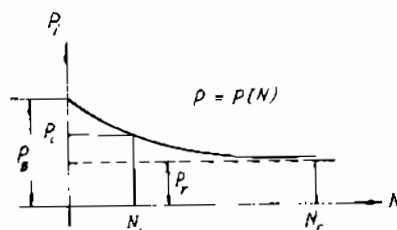
$-1 < r < 1$ – chu trình không đối xứng dương ($0 < r < 1$ hình 15.2d) và đối dấu ($-1 < r < 0$, hình 15.3a).

2. Giới hạn mỏi

Để tính độ bền mỏi của các chi tiết máy, người ta phải làm các thí nghiệm để xác định giới hạn mỏi của vật liệu ứng với các chu trình

có hệ số không đối xứng khác nhau. Đó là giá trị lớn nhất của ứng suất biến đổi tuần hoàn mà vật liệu có thể chịu đựng được với một số chu trình không hạn định và không xuất hiện vết nứt vì mỏi.

Gọi N_i là số chu trình mà vật liệu chịu đựng được (cho đến khi bị hỏng) với ứng suất p_i ; bằng thực nghiệm, người ta lập biểu đồ $p = p(N)$ – gọi là biểu đồ mỏi – như hình (15.4). Giá trị ứng suất ứng với đường tiệm cận của đường cong mỏi được coi là giới hạn mỏi p_r , vì đó là ứng suất lớn nhất mà vật liệu



Hình 15.4.

có thể chịu đựng được với một số chu kỳ vô hạn mà không bị hỏng. Thực nghiệm cho thấy, với mỗi loại vật liệu, có một số chu trình N_r mà nếu vật liệu đã chịu đựng được thì sẽ chịu đựng được mãi mãi, nghĩa là với mọi $N > N_r$.

Đối với thép $N_r = 10^7$, đối với kim loại màu:

$$N_r = 20 \cdot 10^7 + 50 \cdot 10^7.$$

Giới hạn mỏi của vật liệu được ký hiệu với chỉ số không đối xứng r . Giới hạn mỏi uốn đối xứng của thép thường bằng:

$$\sigma_{-1}^u = 0,4 \sigma_B \quad (15.5)$$

Các giới hạn mỏi khi kéo (nén) đối xứng (σ_{-1}^{Kn}) hoặc xoắn đối xứng (τ_{-1}^x) có thể tính theo công thức:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{-1}^{Kn} &= 0,7 \sigma_{-1}^u = 0,28 \sigma_B \\ \tau_{-1}^x &= 0,55 \sigma_{-1}^u = 0,22 \sigma_B \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

Đối với kim loại màu:

$$\sigma_{-1}^u = (0,25 - 0,50) \sigma_B \quad (15.7)$$

§3. BIỂU ĐỒ GIỚI HẠN MỖI

Thực nghiệm cho thấy giới hạn mỗi phụ thuộc vào hệ số không đối xứng r . Với mỗi loại chu trình có thể xác định được một giới hạn mỗi với cặp giá trị (p_a, p_m) tương ứng. Tập hợp những điểm biểu thị giới hạn mỗi của những chu trình khác nhau, trong hệ tọa độ $Op_a p_m$ (hình 15.5), gọi là biểu đồ giới hạn mỗi. Điểm A $(p_a, 0)$ ứng với chu trình đối xứng. Điểm B $(0, p_B)$ ứng với chu trình hằng (ứng suất tĩnh p_B – giới hạn bền của vật liệu).

Xét một chu trình bất kỳ biểu thị bởi điểm L (p_a, p_m) . Nối OL cho cắt đường cong trên biểu đồ tại điểm M (p'_a, p'_m) . Ta nói rằng *điểm M biểu thị một chu trình giới hạn có cùng một hệ số không đối xứng (hay là đồng dạng) với chu trình đã cho*.

Thực vật, với chu trình cho trước, biểu thị bởi điểm L, ta có:

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p_m - p_a}{p_m + p_a} = \frac{1 - \frac{p_a}{p_m}}{1 + \frac{p_a}{p_m}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta}$$

Đối với chu trình giới hạn biểu thị bởi điểm M, ta có:

$$r' = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} = \frac{1 - \frac{p'_a}{p'_m}}{1 + \frac{p'_a}{p'_m}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \theta} = r$$

Như vậy, những chu trình được biểu thị bằng những điểm nằm trên một tia vẽ từ gốc tọa độ là những chu trình đồng dạng.

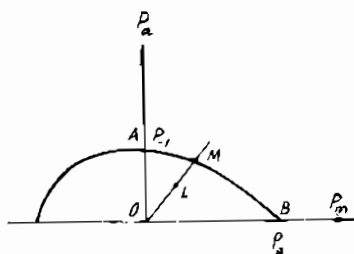
Tỷ số đồng dạng

$$n_r = \frac{OM}{OL} = \frac{p'_m}{p_m} = \frac{p'_a}{p_a} \quad (15.8)$$

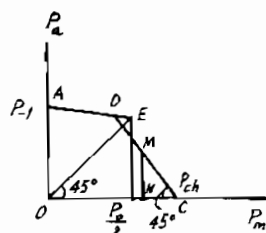
được gọi là *hệ số an toàn của chu trình cho trước*, vì nếu một chu trình được biểu thị bằng một điểm nằm trong đoạn thẳng OM ($n_r > 1$) thì chu trình đó là chu trình an toàn (vật liệu chưa bị hỏng vì mỏi),

ngược lại nếu một chu trình được biểu thị bằng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng OM ($n_r < 1$) thì chu trình đó là chu trình không an toàn.

Để vẽ biểu đồ giới hạn mỗi của mỗi loại vật liệu phải làm khá nhiều thí nghiệm với các loại chu trình khác nhau, cho nên, trong thực tế, khi tính toán người ta thường chỉ dùng những biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng được lập dựa vào một số ít kết quả thí nghiệm. Đối với các vật liệu dẻo theo R. S. Kinaxosvili, có thể dựa vào các giới hạn p_{-1} , p_0 và p_{ch} (giới hạn chảy). Cách vẽ biểu đồ này như sau (hình 15.6).



Hình 15.5.



Hình 15.6.

Nối điểm A(p_{-1} , 0) biểu thị chu kỳ đối xứng với điểm E $\left(\frac{p_0}{2}, \frac{p_0}{2}\right)$ biểu thị chu kỳ mạch động, bằng 1 đường thẳng, sau đó từ điểm C(0, p_{ch}) biểu thị ứng suất tĩnh bằng giới hạn chảy, kẻ một đường thẳng làm với trục p_m một góc 45° .

Hai đường thẳng trên cắt nhau tại điểm D, đường ADC được coi là biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng của Kinaxosvili.

Những điểm nằm trên đoạn thẳng CD biểu thị chu trình giới hạn có ứng suất cực đại bằng giới hạn chảy p_{ch} . Chẳng hạn với điểm M ta có:

$$p_{max} = p_m + p_a = ON + NM = ON + NC = p_{ch}$$

4. Các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi

Thực nghiệm cho thấy giới hạn mỗi không những chỉ phụ thuộc vào hệ số không đối xứng của chu trình mà còn phụ thuộc vào rất

nhiều nhân tố khác nữa, như sự tập trung ứng suất, chất lượng bề mặt, kích thước tuyệt đối của chi tiết, v.v... Để xét ảnh hưởng của các nhân tố đó, người ta dùng hệ số thực tế α_r , là tỷ số giữa giới hạn mỗi p_{-1} của một mẫu thử có đường kính $d = 7 - 10$ mm, bề mặt đánh bóng, với giới hạn mỗi p_{-1t} của chi tiết thực tế:

$$\alpha_r = \frac{p_{-1}}{p_{-1t}} \geq 1 \quad (15.9)$$

Như vậy, giới hạn mỗi của một chi tiết thực tế làm việc theo chu trình đối xứng bằng:

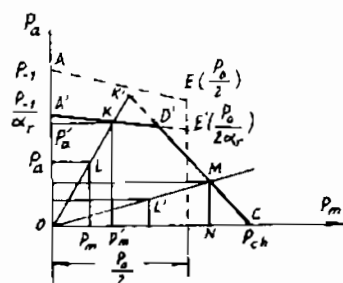
$$p_{-1} = \frac{p_{-1t}}{\alpha_r} \quad (15.10)$$

Hệ số α_r là tích của các hệ số: α_{tt} – xét đến ảnh hưởng của hiện tượng tập trung ứng suất (nhân tố tập trung ứng suất làm giảm giới hạn mỗi); α_{kt} – xét đến ảnh hưởng của kích thước tuyệt đối của chi tiết (trong những điều kiện như nhau, kích thước càng lớn giới hạn mỗi càng giảm) và α_m – xét đến ảnh hưởng của trạng thái bề mặt (bề mặt được đánh bóng hoặc được tăng cứng có tác dụng làm tăng giới hạn mỗi).

$$\alpha_r = \alpha_{tt} \alpha_{kt} \alpha_m \quad (15.11)$$

Các hệ số này được xác định bằng thực nghiệm và được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Đối với các chu trình không đối xứng, các nhân tố nói trên chỉ ảnh hưởng đến biên độ ứng suất và hệ số ảnh hưởng cũng giống như đối với



Hình 15.7.

chu trình đối xứng. Như vậy trên biểu đồ giới hạn mỗi (hình 15.7) nếu chia các tung độ (biên độ của chu trình) của đoạn AE (biểu thị giới hạn mỗi của mẫu thử) cho α_r ta sẽ được đoạn A'E' biểu thị giới hạn mỗi của chi tiết thực. Đường A' D' C là biểu đồ giới hạn mỗi gần đúng.

§4. CÁCH TÍNH ĐỘ BỀN MỖI

Khi tính độ bền mỗi của một chi tiết, người ta thường so sánh hệ số an toàn n_r (giữa chu trình cho trước và chu trình giới hạn đồng dạng với nó) với hệ số an toàn cho phép $[n]$ theo điều kiện:

$$n_r \geq [n] \quad (15.12)$$

Cách các định hệ số an toàn n_r của các chi tiết chịu ứng suất biến đổi như sau:

1. Trường hợp kéo, uốn, nén hoặc xoắn thuần túy

Giả thử có một chu trình ứng suất bất kỳ được biểu thị bằng điểm L nằm trong miền OA'D'CO (hình 15.7) nếu tia OL cắt đường giới hạn mỗi trong đoạn A'D' thì chu trình đã cho đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn mỗi (chi tiết bị phá hoại vì mỏi). Nếu tia OL' cắt đường giới hạn mỗi trong đoạn D'C thì chu trình đã cho đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn chảy (chi tiết bị phá hoại theo giới hạn chảy).

a. Trong trường hợp thứ nhất: hệ số an toàn của chu trình đã cho là:

$$n_r = \frac{OK}{OL} = \frac{p'_m}{p_m} = \frac{p'_a}{p_a}$$

do đó:

$$\left. \begin{aligned} p'_m &= n_r p_m \\ p'_a &= n_r p_a \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

vì điểm K nằm trên đường thẳng A'E' nên tọa độ của nó thỏa mãn phương trình:

$$p'_a = ap'_m + b \quad (b)$$

trong đó các hệ số a, b , có thể xác định nhờ tọa độ của các điểm A', E' .

$$\text{Tại điểm } A', \text{ khi } p_m = 0, \quad p'_a = \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

$$\text{Tại điểm } E', \text{ khi } p'_m = 0,5 p'_o, \quad p'_a = \frac{0,5 p_o}{\alpha_r}.$$

Thay các giá trị trên vào phương trình (b), suy ra:

$$a = \frac{p_{-1} - 0,5 p_o}{0,5 \alpha_r p_o} = - \frac{\gamma}{\alpha_r}$$

trong đó:

$$\gamma = \frac{p_{-1} - 0,5 p_o}{0,5 p_o} = \frac{2p_{-1} - p_o}{p_o} \quad (15.13)$$

$$b = \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

Như vậy phương trình (b) có dạng:

$$p'_a = -\frac{\gamma}{\alpha_r} p'_m + \frac{p_{-1}}{\alpha_r}$$

$$\text{hay:} \quad \gamma p'_m + \alpha_r p'_a = p_{-1} \quad (c)$$

Thay (a) vào (c), ta được:

$$n_r \gamma p_m + n_r \alpha_r p_a = p_{-1}$$

Từ đó rút ra hệ số an toàn n_r :

$$n_r = \frac{p_{-1}}{\gamma p_m + \alpha_r p_a} \quad (15.14)$$

Trong một số tài liệu khác hệ số α_r được xác định như sau, và để cho tiện ta ký hiệu α_r :

$$\alpha_r = \frac{K_p}{\beta \cdot \varepsilon_p} \quad (15.15)$$

trong đó K_p – hệ số tập trung ứng suất thực tế khi uốn và xoắn;

β – hệ số độ nhạy bề mặt.

ε_p – hệ số kích thước.

Tất cả các hệ số này có thể xác định theo các bảng hoặc biểu đồ cho sẵn.

Kể đến công thức (15.15), công thức (15.14) có dạng:

$$n_r = \frac{P_{-1}}{\gamma p_m + \frac{K_p}{\beta \varepsilon_p} p_a} \quad (15.16)$$

b. Trong trường hợp thứ hai:

Giả sử chu trình đã cho được biểu thị bởi điểm L'. Ứng với điểm M (hình 15.7), ta có:

$$p'_m + p'_a = ON + NM = ON + NC = p_{ch} \quad (d)$$

Thay (a) vào (d) suy ra:

$$n_r = \frac{P_{ch}}{p_m + p_a} \quad (15.17)$$

Vì đoạn D'C trên biểu đồ là tập hợp những điểm biểu thị giới hạn phá hủy vì chảy nên trong công thức (15.17) không có các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi.

Như vậy, trong trường hợp kéo (nén) uốn hoặc xoắn thuần túy, ta có hai công thức (15.14) hoặc (15.16) và (15.17) để tính hệ số an toàn n_r , tùy theo chu trình cho trước đồng dạng với chu trình giới hạn theo giới hạn mỏi hay theo giới hạn chảy. Khi tính toán, có thể tính theo cả hai công thức đó và lấy hệ số nhỏ trong hai kết quả để kiểm tra theo điều kiện (15.12).

2) Trường hợp uốn và xoắn biến đổi đồng thời

Trong trường hợp uốn và xoắn biến đổi đồng thời, ứng suất pháp và ứng suất tiếp thay đổi đồng bộ, có thể áp dụng giả thuyết ứng suất tiếp lớn nhất hay giả thuyết thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất, để suy ra công thức tính hệ số an toàn n_r như sau:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (15.18)$$

hay:
$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (15.18')$$

trong đó n_σ và n_τ là các hệ số an toàn tính theo công thức (15.14) hoặc (15.16) hoặc (15.17) cho biến dạng uốn và biến dạng xoắn.

§5. VÍ DỤ ỨNG DỤNG

Các trục truyền động như trục bánh răng hoặc bánh đai v.v... bị uốn và xoắn đồng thời vì thế cần được kiểm tra độ bền mỗi, theo điều kiện (15.12). Hệ số an toàn của trục tại mặt cắt nguy hiểm nào đó được tính theo công thức (13.18') trong đó n_σ và n_τ được tính theo công thức (15.14) hoặc (15.16).

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma_\sigma \sigma_m + \alpha_\sigma \sigma_a} \quad (15.19)$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\gamma_\tau \tau_m + \alpha_\tau \tau_a} \quad (15.20)$$

$$\text{Ở đây } \gamma_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad ; \quad \gamma_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$$

Các hệ số α_σ và α_τ được xác định theo công thức (15.11).

Nếu sử dụng công thức (15.16) thì theo (15.15) α_τ có dạng:

$$\alpha_\sigma = \frac{K_\sigma}{\beta \epsilon_\sigma} \quad ; \quad \alpha_\tau = \frac{K_\tau}{\beta \epsilon_\tau} \quad (15.21)$$

trong đó: K_σ và K_τ – hệ số tập trung ứng suất thực tế khi uốn và xoắn.

β – hệ số độ nhạy bề mặt phụ thuộc trạng thái bề mặt (độ nhẵn bề mặt);

ϵ_σ và ϵ_τ – hệ số kích thước mặt cắt ngang.

Tất cả các hệ số trên đều có thể xác định nhờ các bảng hay các biểu đồ cho sẵn trong các sổ tay kỹ thuật “Chi tiết máy”.

Trong điều kiện làm việc thông thường, hệ số an toàn cho phép $[n] = 1,5 - 2,5$. Khi cần tăng cường có thể lấy $[n] = 2,5 - 3$. Trong trường hợp này có thể không cần kiểm tra độ cứng của trục.

2. Tính ổ lăn

Những ổ lăn có số vòng quay $n \geq 10$ vg/ph, dưới tác dụng của ứng suất thay đổi, thường bị hỏng vì mỏi bề mặt tiếp xúc. Trên cơ sở thí nghiệm, người ta đã lập được quan hệ sau đây giữa tải trọng Q tác dụng lên ổ và tuổi thọ của ổ, biểu thị bằng số chu trình $N = 60 nh$, trong đó n – số vòng quay trong một phút, h – số giờ làm việc của ổ.

$$Q(nh)^{0,3} = C \quad (15.22)$$

hoặc là: $Q^{3,33} \cdot N = C$

hằng số C được gọi là hệ số khả năng làm việc của ổ lăn. Hệ số khả năng làm việc cho phép $[C]$ của các loại và các cỡ ổ lăn được cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Ổ lăn thường chịu đồng thời cả tải trọng ngang (hướng tâm) và tải trọng dọc, tải trọng có thể không đổi hoặc thay đổi theo thời gian, êm hoặc va đập; có trường hợp vòng trong của ổ hoặc vòng ngoài của ổ quay; Nhiệt độ làm việc có thể bình thường, cao hoặc thấp... Tất cả các nhân tố đó đều ảnh hưởng đến khả năng làm việc của ổ, và được xét đến khi tính tải trọng Q . Vì thế Q được gọi là *tải trọng qui ước*.

Đối với ổ đỡ chặn, tải trọng qui ước Q được tính theo công thức kinh nghiệm:

$$Q = (RK_v + mA) K_d K_f \quad (15.23)$$

trong đó: R – tải trọng ngang;

A – tải trọng dọc;

n – hệ số qui đổi, qui tải trọng dọc thành tải trọng ngang;

K_v – hệ số động học, nếu vòng trong quay $K_v = 1$, nếu vòng ngoài quay $K_v = 1,35$.

K_d – hệ số tải trọng động, xét đến ảnh hưởng do tải trọng biến đổi;

K_t – hệ số nhiệt độ, xét đến ảnh hưởng do nhiệt độ của môi trường làm việc.

Tất cả các hệ số trên đều được cho dưới dạng bảng trong các sổ tay kỹ thuật.

Đối với ổ chặn:

$$Q = AK_d K_t \quad (15.24)$$

Điều kiện bền mỏi của ổ lăn là:

$$C \leq [C] \quad (15.25)$$

Những hướng dẫn và tính toán đầy đủ hơn được khảo sát trong giáo trình chi tiết máy.

Ví dụ 1.

Một trục nhỏ dạng ống của động cơ (hình 15.8a) chịu tác dụng của lực P thay đổi trong giới hạn từ $P = 60000 \text{ N}$ đến $P = -20000 \text{ N}$. Các đặc trưng cơ học của vật liệu trục như sau:

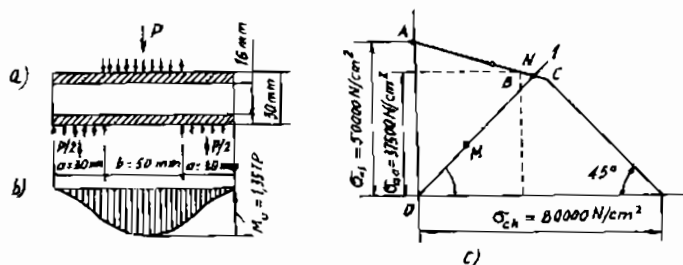
$$\begin{aligned} \sigma_B &= 100000 \text{ N/cm}^2 & \sigma_{ch} &= 80000 \text{ N/cm}^2; \\ \sigma_{-1} &= 50000 \text{ N/cm}^2 & \sigma_o &= 75000 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Mặt ngoài của trục được đánh bóng $\beta = 1$; $\varepsilon_\sigma = 0,9$; $K_\sigma = 1,1$.

Xác định hệ số an toàn về mỏi?

GIẢI

Hình 15.8a, b là sơ đồ truyền lực cho trục và biểu đồ mômen uốn. Mômen uốn ở mặt cắt tính toán là:



Hình 15.8.

$$M_u = \frac{1}{2} P \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{2} P \frac{b}{4}$$

Mômen chống uốn của mặt cắt:

$$W_u = \frac{\pi 3^3}{32} \left[1 - \left(\frac{1.6}{3.0} \right)^4 \right] = 2,44 \text{ cm}^3.$$

Giá trị lớn nhất và bé nhất của mômen uốn là:

$$M_{u \max} = 1,375 P_{\max} = 1,375 \cdot 60000 = 82500 \text{ Ncm.}$$

$$M_{u \min} = 1,375 P_{\min} = 1,375 (-2000) = -27300 \text{ Ncm.}$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất bằng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{u \max}}{W_u} = \frac{82500}{2,44} = 33800 \text{ N/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{u \min}}{W_u} = - \frac{27300}{2,44} = -11300 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình làm việc được tìm theo công thức:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{33800 - (-11300)}{2} = 22550 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{33800 + (-11300)}{2} = 11250 \text{ N/cm}^2$$

Trị số giới hạn của ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình mạch động là:

$$\sigma'_{ao} = \sigma'_{mo} = \frac{\sigma_o}{2} = 37500 \text{ N/cm}^2$$

Từ các giá trị đã biết của σ_{-1} , σ'_{ao} và σ_{ch} ta lập được biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng như trên hình 15.8c.

Vì chu trình giới hạn có cùng một hệ số không đối xứng với chu trình làm việc nên ta có:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma_a K_a}{\sigma_m \beta \varepsilon_\sigma} = \frac{22550}{11250} \cdot \frac{1,1}{1,0,9} = 2,45$$

$$\theta = 68^\circ.$$

Chu trình làm việc được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ $\sigma_a^* = 27200 \text{ N/cm}^2$ và $\sigma_m = 11250 \text{ N/cm}^2$. Chu trình giới hạn đồng dạng được biểu diễn bởi điểm N có tọa độ $n_r \sigma_a = 43500 \text{ N/cm}^2$ và $n_r \sigma_m = 17850 \text{ N/cm}^2$, các tọa độ này được tìm từ biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng vừa vẽ. Theo định nghĩa của hệ số an toàn ta có:

$$n_r = \frac{43500}{27200} = 1,6.$$

Hệ số này còn có thể xác định bằng cách sử dụng trực tiếp công thức (15.16):

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma \sigma_m + \frac{K_\sigma}{\beta \varepsilon_\sigma} \cdot \sigma_a} = \frac{50000}{0,333 \cdot 11250 + \frac{1,1}{1,0,9} \cdot 22550} = 1,59$$

$$\text{trong đó: } \gamma = \frac{\sigma_{-1} - 0,5 \sigma_o}{0,5 \sigma_o} = \frac{50000 - 37500}{37500} = 0,333.$$

Vi dụ 2.

Một trục quay có đường kính $d = 50 \text{ mm}$, chiều dài $l = 500 \text{ mm}$. Trên trục có một bánh răng đường kính $D = 300 \text{ mm}$ được liên kết với trục bằng mối ghép then. Công suất truyền cho trục $N = 50 \text{ kW}$ số vòng quay của trục $n = 60 \text{ vg/ph}$ (hình 15.9).

Các đặc trưng cơ học của vật liệu trục như sau:

$$\sigma_B = 50000 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{ch} = 36000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\sigma_o = 35000 \text{ N/cm}^2 ; \sigma_{-1} = 24000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\tau_{ch} = 22500 \text{ N/cm}^2 ; \tau_{-1} = 18000 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\tau_o = 27000 \text{ N/cm}^2.$$

GIẢI

Mômen xoắn trục:

$$M_z = 97360 \frac{N}{n} = 97360 \frac{50}{600} = 81133 \text{ Ncm}$$

Lực vòng P bằng:

$$P = \frac{2M_z}{D} = \frac{2 \cdot 81133}{30} = 5409 \text{ N}$$

Mômen uốn ở mặt cắt giữa trục là:

$$M_u = \frac{pl}{4} = \frac{5409 \cdot 50}{4} = 67600 \text{ Ncm}$$

Các ứng suất lớn nhất tại mặt cắt này:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{67600}{0,1 \cdot 125} = 5400 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2W_u} = \frac{81133}{0,2 \cdot 125} = 3240 \text{ N/cm}^2.$$

Khi trục quay, các thớ biên của nó sẽ chịu kéo và nén lớn nhất thay đổi. Bởi vậy, đối với ứng suất pháp ta có chu trình đối xứng và với chu trình đó:

$$\sigma_a = 5400 \text{ N/cm}^2 ; \quad \sigma_m = 0.$$

Mômen xoắn không đổi, do đó $\tau_a = 0$; $\tau_m = 3240 \text{ N/cm}^2$.

Các hệ số β , K_σ , ε_σ trong trường hợp này là:

$$\beta = 0,9 ; \quad K_\sigma = 2,8 ; \quad \varepsilon_\sigma = 0,86.$$

$$\gamma = \frac{\tau_{-1} - 0,5\tau_o}{0,5\tau_o} = \frac{18000 - 13500}{13500} = 0,33$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1} \frac{\beta \varepsilon_\sigma}{K_\sigma}}{\gamma \sigma_m + \sigma_a} = \frac{24000 \frac{0,9 \cdot 0,86}{2,8}}{0 + 540} = 1,23$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1} \frac{\beta \varepsilon_{\tau}}{K_{\tau}}}{\gamma \tau_{m} + \tau_a} = \frac{18000 \frac{0,9 \cdot 0,86}{2,8}}{0,33 \cdot 3240 + 0} = 4,14.$$

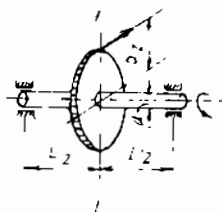
Hệ số an toàn đối với giới hạn chảy là:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_n + \sigma_m} = \frac{36000}{540 + 0} = 6,67 ;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_{max}} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_a + \tau_m} = \frac{22500}{0 + 3240} = 6,94.$$

Để tính toán ta phải lấy các giá trị bé nhất của n_{σ} và n_{τ} . Hệ số an toàn chung là:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,23 \cdot 4,14}{\sqrt{(1,23)^2 + (4,14)^2}} = 1,2.$$



Hình 15.9.

Chương 16

ĐỘNG LỰC HỌC ĐỘ BỀN

I. HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Động lực học kết cấu là một phần quan trọng của cơ học vật rắn biến dạng, mục đích của nó là nghiên cứu sự làm việc của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng động đủ loại.

Kết cấu nói chung được đặc trưng bởi các đại lượng đặc trưng cho tính quán tính m , J và thuộc tính đàn hồi để có thể thực hiện được các chuyển động tương đối dưới tác dụng của tải trọng động. Nếu những chuyển động này là chuyển động lặp lại thì ta gọi nó là những chuyển động dao động.

Thông thường người ta hiểu “ứng xử động” là các chuyển động sinh ra bởi các lực biến đổi khá nhanh theo thời gian và chúng sinh ra các lực quán tính trong từng chất điểm của kết cấu.

Giả thiết rằng quan hệ giữa các lực và chuyển động là quan hệ tuyến tính và do đó, các dao động được nghiên cứu là các dao động tuyến tính. Trong mục này ta sẽ nhắc lại một số khái niệm cơ bản về hệ dao động tuyến tính có một bậc tự do mà ta đã biết trong các môn cơ học cơ sở để tiện sử dụng.

Để mô tả sự ứng xử vật lý của một hệ như vậy, ta cần một mô hình toán học. Mỗi phần tử của mô hình toán học được đặc trưng bởi các tính chất vật lý của hệ dao động.

Trong quá trình chuyển động, xảy ra sự biến đổi liên tục về mặt năng lượng: Thế năng biến dạng của hệ chuyển hóa thành động năng của hệ dao động và ngược lại. Theo quan điểm cơ học, chuyển động được đặc trưng bởi sự biến thiên của chuyển vị $x(t)$ và sự biến đổi của vận tốc $v(t)$. Chúng là các hàm của thời gian mà từ đó người ta có thể xác định được thế năng và động năng của đối tượng dao động.

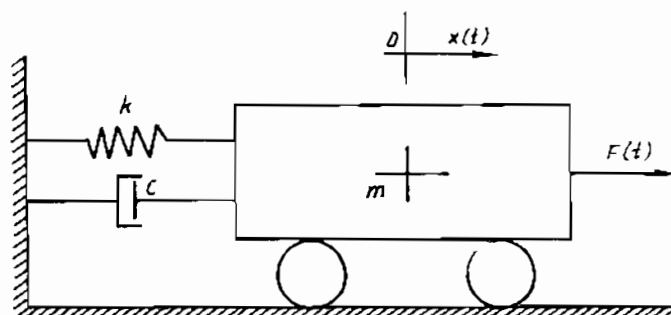
Các hệ dao động có năng lượng tổng không đổi được gọi là hệ bảo toàn. Chuyển động của chúng là những dao động tự do không cản.

Các hệ bị mất mát năng lượng do ma sát được gọi là các hệ không bảo toàn. Chúng thực hiện các chuyển động dao động tắt dần.

Khi một hệ liên tục nhận được kích động (năng lượng) từ bên ngoài, thì ta có các dao động cưỡng bức hoặc các dao động duy trì.

§1. DAO ĐỘNG TỰ DO

Xét một hệ dao động có một bậc tự do được mô hình hóa từ một chiếc xe lăn như hình 16.1.



Hình 16.1.

Khi đã xác định gốc tọa độ O, các yếu tố đặc trưng cho hệ (khối lượng, ma sát, độ cứng,...) và lực kích động $F(t)$, phương trình tổng quát mô tả chuyển động sẽ có dạng sau:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (16.1)$$

trong đó: m – khối lượng của hệ dao động;

c – hệ số cản nhớt;

k – hệ số cứng của hệ đàn hồi, nghĩa là lực cần thiết phải đặt lên khối lượng m theo phương dao động để gây ra một chuyển vị bằng đơn vị;

$x(t)$ – tọa độ (li độ) xác định chuyển vị của khối lượng m theo chiều bậc tự do tại một thời điểm t .

Phương trình (16.1) có thể viết dưới dạng sau:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t) \quad (16.2)$$

trong đó: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tính bằng radian/giây (rad/s) đại diện cho tần số góc của hệ dao động riêng ;

$2\beta = \frac{c}{m}$ – hệ số cản thu gọn;

$C_{th} = 2m \cdot \omega = 2m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ – hệ số cản tới hạn.

Phương trình vi phân (16.2) có nghiệm tổng quát là:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t), \quad (16.3)$$

trong đó: $x_L(t)$ đặc trưng cho nghiệm của phương trình thuần nhất, tương ứng với các dao động riêng và $x_F(t)$ là nghiệm của phương trình tương ứng với chế độ cưỡng bức.

Trong các phần sau ta sẽ xét cụ thể từng trường hợp dao động: tự do, tắt dần và cưỡng bức.

1. Các dao động tự do không cản (không tắt dần)

Ta giả thiết là hệ dao động sẽ thực hiện các dao động tự do ngay sau khi bị một kích động ban đầu kết thúc trong một khoảng thời gian rất ngắn. Ta cũng thừa nhận trong trường hợp này, hệ là bảo toàn ($c = 0$), nghĩa là không có sự mất mát năng lượng ra bên ngoài.

Phương trình (16.1) sẽ có dạng đơn giản nhất như sau:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (16.4)$$

và có nghiệm dưới dạng hàm điều hòa.

$$x(t) = x_L(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (16.5)$$

Trong đó hằng số tích phân A (biên độ của chuyển động) và φ (góc pha ban đầu, được tính thông qua các điều kiện ban đầu):

$$t = 0 ; x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = V_0$$

$$\text{Cụ thể là: } A = \sqrt{x_0^2 + V_0^2} ; \sin\varphi = x_0 / \sqrt{x_0^2 + V_0^2} .$$

Đặc tính cơ bản của hệ dao động có một bậc tự do không cản là giá trị riêng đặc trưng bởi tần số vòng ω , tần số f , và chu kỳ T . Biểu thức của các đại lượng đó như sau:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} \approx \frac{31,32}{\sqrt{\Delta T_Q}}, \text{ rad/s ;} \quad (16.6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} \approx \sqrt{\frac{5}{\Delta T_Q}}, \text{ Hz} \quad (16.7)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta T_Q}{g}} \approx 0,2 \sqrt{\Delta T_Q}, \text{ s} \quad (16.8)$$

trong đó: $m = Q/g$ – đặc trưng cho khối lượng của hệ dao động (Q là trọng lượng của khối lượng lao động);

$\delta = \frac{1}{k}$ – hệ số độ mềm hay là chuyển vị đơn vị do một lực bằng một đơn vị đặt vào khối lượng m theo phương của bậc tự do gây ra;

$\Delta T_Q = Q \cdot \delta = Q/k$ – độ võng tĩnh, sinh ra do một lực bằng trọng lượng của m đặt vào m theo phương của bậc tự do gây ra.

2. Các dao động tự do có cản nhớt

Phương trình chuyển động trong trường hợp này có dạng:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (16.9)$$

Để giải phương trình này, chúng ta cần xác định các nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0 \quad (16.10)$$

$$\text{Cụ thể là: } r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \quad (16.11)$$

Tùy thuộc vào giá trị của nghiệm, ta có ba trường hợp tắt dần sau đây:

3. Tắt dần tới hạn

Khi mà căn thức bằng không:

$$\beta^2 - \omega^2 = 0 ; \text{ ta có } \beta_{th} = \omega$$

$$\text{nên } \frac{C_{th}}{2m} = \omega, \text{ từ đó } C_{th} = 2m\omega = 2\sqrt{mk} = \frac{2k}{\omega}$$

C_{th} là hệ số cản tới hạn biểu diễn đặc tính riêng của hệ dao động.

Quan hệ giữa hệ số cản thực C và hệ số cản tới hạn C_{th} biểu thị mức cản tới hạn và có biểu thức như sau:

$$\nu = \frac{C}{C_{th}} = \frac{C}{2m\omega} = \frac{2m\beta}{2m\omega} = \frac{\beta}{\omega} \quad (16.12)$$

Mức cản tới hạn đặc trưng cho khả năng tắt dần bên trong của kết cấu khảo sát.

Trong trường hợp này: $r_{1,2} = -\beta = -\nu\omega = -\omega$ (ν có giá trị bằng đơn vị).

Nghiệm của phương trình (16.9) sẽ là:

$$x(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot t \cdot e^{r_2 t} = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t) \quad (16.13)$$

Khi thừa nhận rằng tại $t = 0$ thì $x(0) = x_0$ và $\dot{x}(0) = V_0$, ta có:

$$x(t) = e^{-\omega t} [x_0 + (V_0 + \omega \cdot x_0) \cdot t] \quad (16.14)$$

Ta nhận thấy chuyển động mô tả bởi phương trình (16.14) là chuyển động không điều hoà (đường cong 1, hình 16.2).

4. Tắt dần quá tới hạn

Trong trường hợp mà $C > C_{th}$ ta nói độ tắt dần đã quá tới hạn, điều này dẫn đến $\beta > \omega$ và $\nu > 1$. Do đó r_1 và r_2 là các số thực và đều âm. Nghiệm của phương trình (16.9) sẽ là:

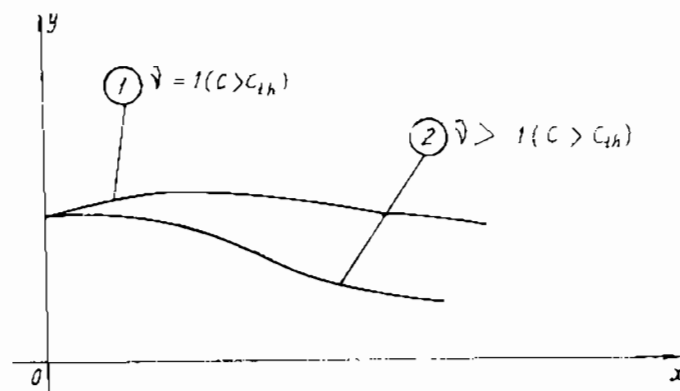
$$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = e^{-\beta t} \left(A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} \right) \quad (16.15)$$

Từ các điều kiện đầu ta có:

$$A = \frac{V_0 + x_0 (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

$$B = - \frac{V_0 + x_0 (\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

Chuyển động này cũng là chuyển động không chu kỳ (đường cong 2, hình 16.2).



Hình 16.2.

5. Tắt dần dưới tới hạn

Trong trường hợp này: $C_{th} > C$, do vậy $\beta < \omega$ và các giá trị của căn thức sẽ là ảo:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (16.16)$$

hay là: $r_{1,2} = -\beta \pm i\omega^*$.

trong đó: $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ đặc trưng cho tần số riêng của hệ khi ta kể tới ảnh hưởng của lực cản.

Phương trình mô tả chuyển động trong trường hợp này có dạng:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot e^{i\omega^* t} + B e^{-i\omega^* t})$$

$$\text{hay là: } x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \quad (16.17)$$

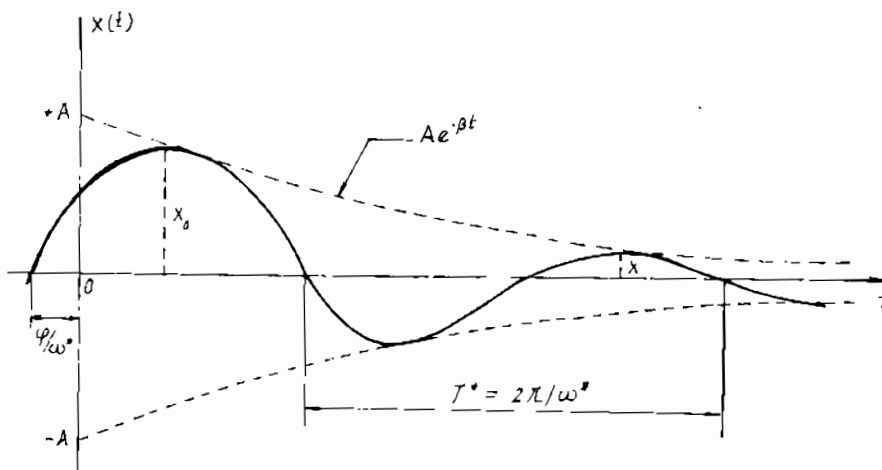
$$\text{Từ đó có: } x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \varphi) = A(t) \cdot \sin(\omega^* t + \varphi) \quad (16.18)$$

$$\text{với: } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ và } \tan \varphi = C_2 / C_1.$$

Từ các điều kiện đầu ta nhận được:

$$C_1 = \frac{V_0 + \beta x_0}{\omega} ; \quad C_2 = x_0$$

Cuối cùng ta có thể xác định được A và φ .



Hình 16.3

Trong trường hợp này các tần số vòng, tần số và chu kỳ khi dao động có cản được viết:

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu^2} \approx \omega \quad (16.19)$$

$$f^* = f \sqrt{1 - \nu^2} \approx f \quad (16.20)$$

$$T^* = T \sqrt{1 - \nu^2} \approx T \quad (16.21)$$

Trong đa số các trường hợp người ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của sự cản, bởi vì trong thực tế ta thường gặp: $\nu < 0,1$.

Đối với các hệ chỉ có một bậc tự do, ta còn tìm được một đặc tính cơ bản nữa là độ cản tới hạn. Đặc tính này chỉ có thể được xác định theo thực nghiệm, bằng cách sử dụng gần đúng lượng giảm logarit của độ tắt dần Δ .

Theo hình 16.3 trên đó ta miêu tả các nghiệm dao động riêng có cản (biểu thức 16.18). Sự tắt dần của dao động được xác định bởi logarit tự nhiên của tỷ số 2 biên độ liên tiếp nhau và có cùng dấu nghĩa là:

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \approx 2\pi\nu \quad (16.22)$$

Lúc này tỷ số tắt dần tới hạn sẽ là:

$$\nu = \frac{C}{C_m} = \frac{\Delta}{2\pi} \quad (16.23)$$

Giá trị của độ cản tới hạn phụ thuộc chủ yếu vào loại kết cấu và vật liệu được sử dụng. Dưới đây là một vài độ cản tới hạn:

Các kết cấu bằng bê tông cốt thép đổ toàn khối:

$$\nu = 0,02 \div 0,14$$

Kết cấu là tường chịu lực (khối xây hoặc panel đúc sẵn trong nhà máy):

$$\nu = 0,06 \div 0,18$$

Kết cấu kim loại: $\nu = 0,02 \div 0,06$.

- Các loại kết cấu bằng:
 - Bê tông cốt thép $\nu = 0,03 \div 0,16$
 - Thép $\nu = 0,02 \div 0,08$
- Kết cấu có cấu trúc lớn dạng khối $\nu = 0,05 \div 0,10$
- Nền đất $\nu = 0,06 \div 0,04$

§2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

1. Dao động cưỡng bức

Nếu khối lượng m bị kích thích trực tiếp bởi một ngoại lực có dạng $F(t) = F_0 \cdot \sin \theta t$, trong đó F_0 là biên độ của lực kích động và θ là tần số vòng của lực đó, phương trình chuyển động (16.1) trở thành:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (16.24)$$

Bởi vì nghiệm ở chế độ bình ổn là rất trội nên người ta có thể bỏ qua các nghiệm tự do, do đó nghiệm của phương trình (16.24) có dạng:

$$x(t) = \Delta_{d\max} \sin \theta t \quad (16.25)$$

Thay vào phương trình (16.24) và nhớ rằng:

$$\ddot{x}(t) = -\Delta_{d\max} \cdot \theta^2 \sin \theta t$$

Ta nhận được:

$$-\Delta_{d\max} \cdot \theta^2 \sin \theta t + \Delta_{d\max} \cdot \omega^2 \sin \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t$$

hay là:
$$\Delta_{d\max} (\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m}$$

Từ đây rút ra:
$$\Delta_{d\max} = \frac{F_0 / m}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{F_0 / m}{k / m - \theta^2} = \frac{F_0}{k - m\theta^2}.$$

Chia cả tử số và mẫu số cho k ta có:

$$\Delta_{dmax} = \frac{F_0}{k - m\theta^2} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{m}{k}\theta^2} = \frac{\Delta T_0}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = k_{dd} \cdot \Delta T_0 \quad (16.26)$$

trong đó: ΔT_0 là chuyển vị tĩnh do tác dụng tĩnh của lực F_0 theo phương dao động gây ra. Tuy nhiên, điều mà ta quan tâm ở đây là quan hệ giữa Δ_{dmax} và ΔT_0 . Tỷ số giữa biên độ dao động và độ võng tĩnh ΔT_0 gọi là hệ số động lực. Khi xuất phát từ (16.26) ta có:

$$k_{dd} = \frac{\Delta_{dmax}}{\Delta T_0} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad (16.27)$$

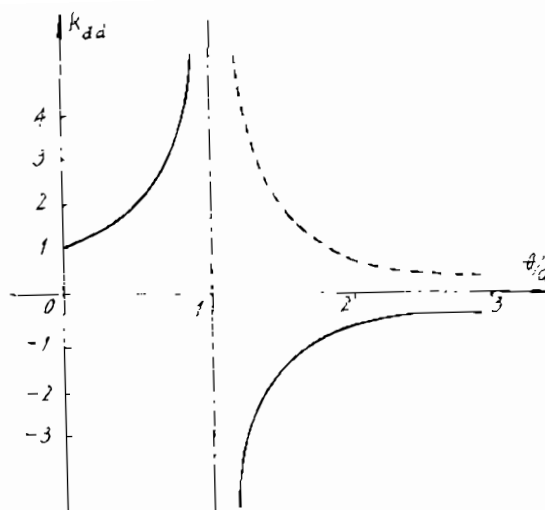
Giá trị của hệ số này phụ thuộc chủ yếu vào quan hệ giữa tần số vòng của lực kích động với tần số riêng của hệ (tần số dao động tự do). Trên hình 16.4 chỉ ra sự thay đổi của hệ số động lực k_{dd} , theo quan hệ θ/ω . Ta nhận thấy rằng với $\theta/\omega < 1$, biên độ của chuyển động có giá trị dương và cùng góc pha với lực kích động, còn với quan hệ $\theta/\omega > 1$, biên độ của chuyển động là âm và ngược pha so với lực kích động một góc là π .

Đối với trường hợp chuyển động được sinh ra dưới tác dụng của lực kích động có $\omega = \theta$, thì các biên độ của dao động có thể tăng lên vô cùng (theo lý thuyết). Hiện tượng này gọi là hiện tượng cộng hưởng và tần số riêng của hệ (ω) thường được gọi là “tần số cộng hưởng”. Cũng chính vì lý do trên mà đường cong trên hình 16.4 được gọi là “đường cong cộng hưởng”.

Cần nhấn mạnh rằng hệ số động k_{dd} còn cho khả năng tính được lực tác động tĩnh tương đương với hiệu ứng động của F_0 .

$$\text{Cụ thể là:} \quad F_d = F(t)_{max} = \pm k_d \cdot F_0 \quad (16.28)$$

$$\text{Cũng như vậy:} \quad x(t)_{max} = \Delta_{dmax} = k_d \cdot \Delta T_0 \quad (16.29)$$



Hình 16.4.

2. Dao động cưỡng bức có cản nhớt

Trong trường hợp này, ta xét loại lực kích động có dạng $F(t) = F_0 \sin \theta t$ đặt lên hệ dao động, phương trình của chuyển động sẽ trở thành:

$$\ddot{x}(t) + 2v\omega x(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \theta t \quad (16.30)$$

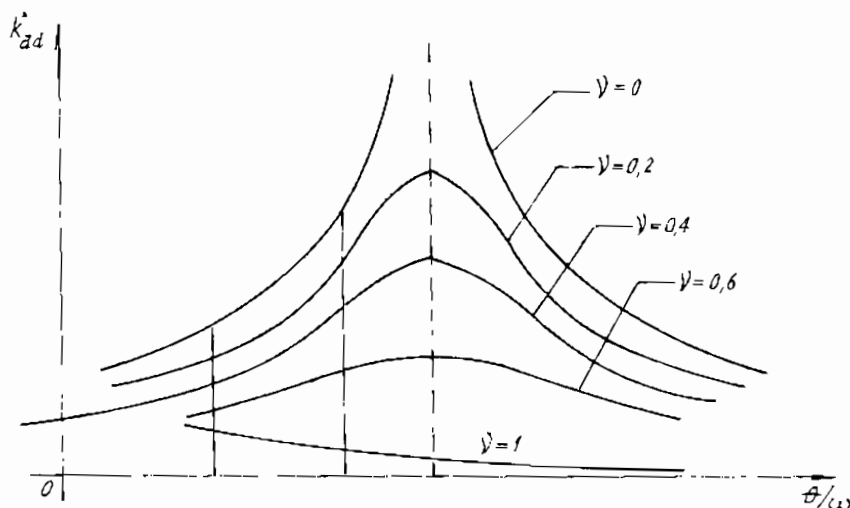
Nghiệm của (16.30) ở chế độ bình ổn có dạng:

$$x(t) = k_{dd}^* \Delta T_0 \sin \theta t \quad (16.31)$$

Hệ số động lực mới k_{dd}^* kể đến tính tắt dần có biểu thức:

$$k_{dd}^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4v^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} \quad (16.32)$$

Trong hình 16.5 ta chỉ ra sự biến thiên của hệ số động lực k_{dd}^* theo tỷ số θ/ω và độ cản tối hạn ν . Dễ thấy là khi $\nu = 0$ thì $k_{dd}^* = k_{dd}^*$.



Hình 16.5.

Các giá trị cực đại của nghiệm ở chế độ bình ổn sẽ là:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = k_{dd}^* \Delta T_0 \quad (16.33)$$

$$F(t)_{\max} = F_d = k_{dd}^* F_0 \quad (16.34)$$

3. Dao động cưỡng bức gây ra bởi các vật quay không cân bằng

Trong trường hợp dao động sinh ra bởi vật không cân bằng khi quay, biên độ của lực kích động có biểu thức như sau:

$$F(t) = m_0 \cdot e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.35)$$

trong đó: θ là vận tốc góc của trục quay, m_0 là khối lượng mất cân bằng và e là độ lệch tâm của khối lượng m_0 . Phương trình (16.30) có dạng:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = m_0 e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.36)$$

hoặc là:

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{m_0}{m} e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (16.37)$$

trong đó: $F_o = m_o \cdot e \cdot \theta^2$ đặc trưng cho giá trị biên độ của lực kích động biến đổi tuần hoàn.

Trong chế độ kích động duy trì, nghiệm của phương trình chuyển động trên có biểu thức:

$$x(t) = \frac{m_o}{m} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right) k_{dd}^* \sin \theta t = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd}^* \sin \theta t \quad (16.38)$$

trong đó: $Q = mg$ là trọng lượng bản thân động cơ gây kích thích và $Q_o = m_o \cdot g$ – trọng lượng của khối lượng mất cân bằng của rôto động cơ, e là độ lệch tâm.

* Các giá trị của biên độ đối với các chuyển động có biểu thức như sau:

– Khi bỏ qua sự tắt dần:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd} \quad (16.39)$$

– Khi không bỏ qua sự tắt dần:

$$x(t)_{\max} = \Delta_{d\max} = \frac{Q_o}{Q} \cdot e \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_{dd}^* \quad (16.40)$$

* Các lực động cực đại sẽ có giá trị:

$$F(t)_{\max} = F_d = m \cdot \Delta_{d\max} \cdot \omega^2 = m_o \cdot e \cdot \theta^2 \cdot k_{dd}^* = F_o \cdot k_{dd}^* \quad (16.41)$$

– Khi bỏ qua sự cản:

$$F(t)_{\max} = F_d = m_o \cdot e \cdot \theta^2 \cdot k_{dd} = F_o \cdot k_{dd} \quad (16.42)$$

II. HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Một kết cấu bất kỳ đều có thể được mô hình hoá gần đúng như là một hệ dao động có số bậc tự do hữu hạn khi giả thiết các yếu tố quán tính tập trung trên một số đoạn xác định. Trong chương này ta sẽ nghiên cứu các dao động tự do và cưỡng bức của các kết cấu kiểu này bằng hai phương pháp sau đây:

– Thứ nhất, phương pháp lực quán tính hay là phương pháp ma trận độ mềm.

– Thứ hai, phương pháp chuyển vị hay là phương pháp ma trận độ cứng.

§3. DAO ĐỘNG TỰ DO

1. Phương pháp ma trận độ mềm

Xét một hệ dao động có n bậc tự do như trên hình 16.6. Dưới tác dụng của một xung ban đầu, hệ sẽ thực hiện các chuyển động dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh của nó. Tại một thời điểm bất kỳ của chuyển động, các chuyển vị thẳng tương ứng của các khối lượng $m_1, m_2, m_k, \dots, m_n$ là $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots, x_n(t)$. Do vậy theo phương dao động các lực quán tính đặt vào các khối lượng có biểu thức:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = -m_1 \ddot{x}_1(t) \\ I_2 = -m_2 \ddot{x}_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ I_k = -m_k \ddot{x}_k(t) \\ \dots\dots\dots \\ I_n = -m_n \ddot{x}_n(t) \end{array} \right. \quad (16.43)$$

Nếu gọi δ_{kj} là chuyển vị của m_k do một lực bằng đơn vị đặt vào m_j , theo phương dao động gây ra thì dưới tác dụng của các lực quán tính, khối lượng thứ k bất kỳ m_k ($k, j = 1, \dots, n$) có chuyển vị $x_k(t)$ và được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng như sau:

Phương trình thứ k dạng khai triển

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k(t) = I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} & & & & & & (16.44a) \\ \dots & \dots & (k = 1, n) & \dots & \dots & & \end{array}$$

Dạng ma trận:

$$\{X\} = [D] \{I\} \quad (16.44b)$$

Nghiệm của hệ phương trình vi phân (16.45) được tìm dưới dạng:

$$\left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_k(t) = A_k \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (16.46)$$

Thay (16.46) với $\ddot{x}_i(t) = -A_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) vào hệ (16.45) ta đi đến hệ phương trình dạng khai triển:

Phương trình thứ k của hệ:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{m}_1 \cdot \delta_{k1} \cdot \omega^2 \cdot A_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \delta_{k2} \cdot \omega^2 \cdot A_2 + \dots + (\mathbf{m}_k \cdot \delta_{kk} \omega^2 - 1) \cdot A_k + \dots + \\
& \quad + \dots + \mathbf{m}_n \cdot \delta_{kn} \cdot \omega^2 \cdot A_n = 0, \quad (16.47) \\
& \dots \dots \dots (k = \overline{1, n}) \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Hệ phương trình (16.47) đặc trưng cho chuyển động của hệ dao động tự do nhiều bậc tự do. Trong các biểu thức trên ta đã ký hiệu:

$(A_1, A_2 \dots A_k \dots A_n)$ là các biên độ dao động tự do của hệ;

ω là tần số dao động tự do của hệ;

δ_{ij} là các hệ số ảnh hưởng biểu thị chuyển vị theo phương i do lực bằng đơn vị đặt vào khối lượng m_j (hình 16.6c) theo phương dao động gây ra.

Theo định lý của J. Maxwell, ta luôn có: $\delta_{ji} = \delta_{ij}$.

Các ẩn số của hệ (16.47) là các biên độ A_i . Các nghiệm tầm thường $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$ không làm chúng ta quan tâm bởi vì chúng đặc trưng cho trạng thái cân bằng tĩnh. Để hệ có thể thực hiện các dao động thì điều kiện cần và đủ là định thức chính của hệ (16.47) phải bằng 0:

$$\Delta(\omega) = 0 \quad \text{hoặc là} \quad \left| \omega^2 [D][M] - [E] \right| = 0 \quad (16.48)$$

Sau khi khai triển định thức, ta nhận được phương trình đại số bậc n của ω^2 , được gọi là “phương trình đặc trưng” hay “phương trình tần số”.

Giải phương trình (16.48) ta sẽ nhận được các nghiệm thực dương của ω thể hiện các tần số dao động tự do ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) của hệ dao động.

Để đơn giản tính toán, ta chia hai vế của (16.48) cho ω^2 và đặt $\lambda = 1/\omega^2$ và định thức (16.48) có dạng:

$$i(\lambda) = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}-\lambda) & m_2\delta_{12} & \dots m_k\delta_{1k} & \dots m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22}-\lambda) & \dots m_k\delta_{2k} & \dots m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{k1} & m_2\delta_{k2} & \dots (m_k\delta_{kk}-\lambda) & \dots m_n\delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots m_k\delta_{nk} & \dots (m_n\delta_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = |[D][M] - \lambda[E]| = 0 \quad (16.49)$$

Khai triển định thức ta nhận được phương trình:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (16.50)$$

Giá trị lớn nhất của λ (trong số các nghiệm) tương ứng với giá trị nhỏ nhất của ω và được ký hiệu là ω_1 . Bất kỳ một nghiệm ω_i nào khác cũng sẽ có giá trị $\omega_i > \omega_1$, được gọi là tần số dao động tự do ứng với một thứ i .

Nhờ có các tần số riêng ω_i mà ta xác định được các tần số $f_i = \omega_i / 2\pi$ và các chu kỳ riêng $T_i = 1/f_i = 2\pi/\omega_i$. Số lượng các giá trị riêng sẽ tương ứng với số bậc tự do động lực. Do vậy quan hệ của các giá trị riêng được sắp xếp như sau:

Đối với phương trình thứ k:

$$m_2 \delta_{k_2} \phi_{21} + \dots + (m_k \delta_{kk} - \lambda_i) \phi_{ki} + \dots + m_n \delta_{kn} \phi_{ni} = -m_1 \delta_{k_1} \quad (16.52)$$

..... (k = $\overline{1, n}$)

Hệ phương trình (16.52) là hệ có n phương trình với $(n - 1)$ ẩn số là $\phi_{2i}, \dots, \phi_{ni}$. Các tọa độ tìm được bằng cách giải hệ phương trình với $(n - 1)$ phương trình đầu của hệ trên, còn phương trình cuối dùng để kiểm tra. Sau khi giải hệ này ứng với mỗi giá trị xác định của ω_i hay λ_i , ta sẽ được một vectơ cột xác định dạng của một dao động tự do thứ i :

$$\{\phi\}_i = \{\phi_{1,i}, \phi_{2,i}, \phi_{3,i}, \phi_{4,i}, \dots, \phi_{n,i}\}^T$$

$\{\phi_i\}$ – được gọi là vectơ riêng, nó mô tả một dạng riêng của dao động, nghĩa là mô tả cấu hình của hệ ứng với tần số thứ i , thường gọi là một thứ i của dao động. Trên hình 16.7 là ba một đầu tiên của dao động ứng với các tần số $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Dưới dạng ma trận các phương trình (16.47), (16.51) và (16.52) được viết lại như sau:

$$(\omega^2 [D][M] - [E])[A] = [0]; \quad (16.53)$$

$$([D][M] - \lambda [E])[A] = [0]; \quad (16.54)$$

$$([D] [M] - \lambda [E]) [\Phi] = [0]. \quad (16.55)$$

$$\text{trong đó: } [D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1k} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2k} & \dots & \delta_{2n} \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{kk} & \dots & \delta_{kn} \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nk} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} ; [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m_k & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} ;$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ở đây: $[D]$ – ma trận độ mềm;

$[M]$ – ma trận khối lượng hay ma trận quán tính;

$[E]$ – ma trận đơn vị;

$[\Phi]$ – ma trận cột, biểu diễn một một dao động tự do.

Các trị riêng sẽ được tìm từ các phương trình đặc trưng sau đây:

$$\Delta(\omega) = \left| \omega^2 [D] [M] - [E] \right| = 0 \quad (16.56)$$

hoặc:

$$\Delta(\lambda) = \left| [D] [M] - \lambda [E] \right| = 0 \quad (16.57)$$

Các vectơ riêng có thể tìm bằng cách thay thế mỗi một lần giá trị λ_i vào phương trình (16.55), từ đó ta xác định được:

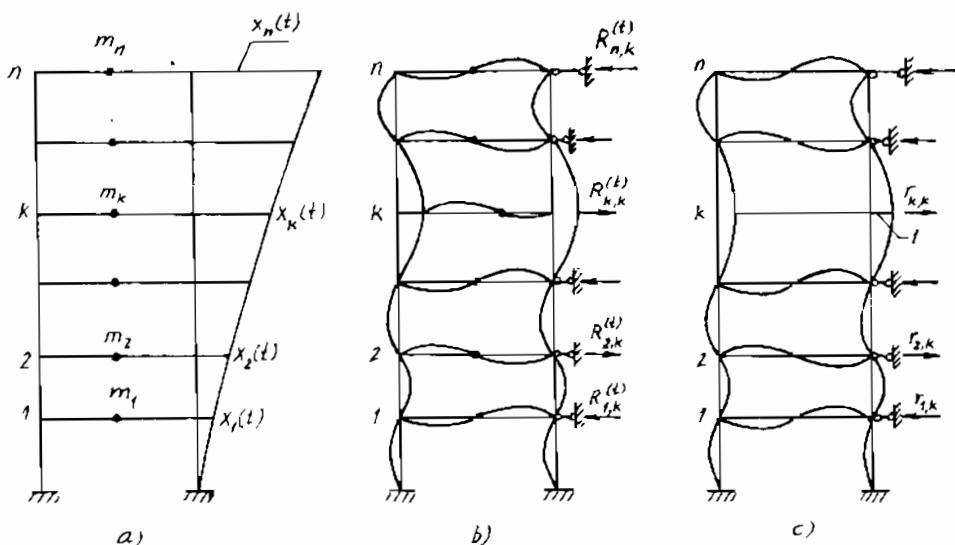
$$[\Phi]_i = \{\Phi_k\}_{k=1, \dots, n} \quad (16.58)$$

Đối với hệ 1 bậc tự do phương trình (16.55) và (16.56) cho ta:

$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 = 0. \text{ Do đó: } \omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m_1} \text{ hay } \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}}.$$

2. Phương pháp ma trận độ cứng

Một hệ động lực được biểu diễn trên hình (16.8a) như là một ví dụ, có n bậc tự do, có thể thực hiện một chuyển động dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh sau một kích động tức thời bên ngoài. Khi ấy các chuyển vị ngang của các khối lượng là $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$.



Hình 16.8.

Nếu ta tưởng tượng rằng tất cả các bậc tự do đều bị chặn bởi các gối tựa đơn áp đặt theo phương các chuyển vị ngang $x(t)$ trừ chuyển vị $x_k(t)$, tại đó hệ chỉ chịu một lực $R_{kk}(t)$ và gây ra chuyển vị của m_k , thì ở các gối tựa áp đặt sẽ xuất hiện các phản lực R . Tương tự như vậy có thể lặp lại quá trình nói trên đối với mỗi mức đặt khối lượng và sẽ nhận được mỗi

lần như thế một lực quán tính $I_k(t)$ và các phản lực liên kết tương ứng R_j tại các gối đỡ áp đặt. Thực tế hệ là tự do chứ không có gối chặn các chuyển vị của các khối lượng, vì thế phản lực ở các gối tựa do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng 0. Cụ thể là:

$$R_k = -I_k(t) + \sum_{j=1}^n r_{kj} \cdot x_j(t) = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (16.59)$$

trong đó:

$$I_k = -m_k \ddot{x}_k(t) \text{ là lực quán tính đặt vào } m_k \quad (16.60)$$

Dưới dạng khai triển, hệ phương trình (16.59) được viết:

Đối với phương trình thứ k:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_k \ddot{x}_k(t) + r_{k1} x_1(t) + r_{k2} x_2(t) + \dots + r_{kk} x_k(t) + \dots + r_{kn} x_n(t) = 0 & (16.61) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Nếu thừa nhận nghiệm riêng của hệ này dưới dạng:

$$x_k(t) = A_k \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

thì hệ (16.61) trở thành:

Đối với phương trình thứ k:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} A_1 + r_{k2} A_2 + \dots + (r_{kk} - m_k \omega^2) A_k + \dots + r_{kn} A_n = 0 & (16.62) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

trong đó r_{jk} biểu diễn các phản lực tìm được tại liên kết j, khi ta áp đặt một chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại gối k theo phương k. Theo định lý của L. Rayleigh ta luôn có: $r_{jk} = r_{kj}$.

Hệ (16.62) là hệ tuyến tính và thuần nhất. Do đó, để có nghiệm khác 0, thì định thức chính của nó phải bằng 0. Định thức này cho ta phương trình đặc trưng và các nghiệm của nó là các tần số dao động riêng của hệ ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k < \dots < \omega_n$).

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1 \omega^2) & r_{12} & r_{1k} & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2 \omega^2) & r_{2k} & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & (r_{kk} - m_k \omega^2) & r_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{nk} & (r_{nn} - m_n \omega^2) \end{vmatrix} \quad (16.63)$$

Dưới dạng ma trận, hệ phương trình (16.62) sẽ có dạng:

$$([R] - \omega^2 [M]) [A] = [0] \quad (16.64)$$

$$\text{Tương tự ta có: } ([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.65)$$

Trong đó ma trận $[R]$ gọi là ma trận độ cứng chứa các hệ số cứng r_{jk} , là ma trận vuông đối xứng cấp $n \times n$.

Các trị riêng ω_i là các nghiệm của phương trình:

$$\Delta(\omega) = |[R] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (16.66)$$

Các vectơ riêng được tìm bằng cách thay thế lần lượt mỗi một lần các tần số riêng ω_i vào trong hệ (16.62) hoặc (16.65):

$$([R] - \omega_i^2 [M]) [\Phi_i] = [0] \quad (16.67)$$

Trường hợp hệ 1 bậc tự do, từ phương trình (16.65) ta rút ra:

$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_1} \text{ hay } \omega_1 = \sqrt{\frac{r_{11}}{m_1}}.$$

3. Quan hệ giữa ma trận $[D]$ và $[R]$

Từ các phương trình (16.53) và (16.64), ta có thể tìm được mối liên hệ giữa hai ma trận $[D]$ và $[R]$. Thật vậy từ (16.53) ta có:

$$([E] - \omega^2 [D]) [\Phi] = [0] \quad (16.68)$$

Mặt khác từ phương trình (16.65) ta có:

$$([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.69)$$

Nhân trái 2 vế của (16.69) với $[R]^{-1}$ ta nhận được:

$$([R]^{-1} [R] - \omega^2 [R]^{-1} [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.70)$$

Vì rằng $[R]^{-1} [R] = [E]$, nên ta có:

$$([I] - \omega^2 [R]^{-1} [M]) [\Phi] = [0] \quad (16.71)$$

So sánh 2 phương trình (16.68) và (16.71) ta rút ra:

$$[D] = [R]^{-1} \text{ hay } [D][R] = [E] \quad (16.72)$$

Vậy ma trận độ mềm chính là ma trận nghịch đảo của ma trận độ cứng.

§4. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

1. Phương pháp lực quán tính – ma trận độ mềm

Ta hãy xét một hệ dao động có n bậc tự do chịu các lực kích động có cùng tần số θ : $F_j(t) = F_{j0} \cdot \sin \theta t$ ($j = 1, 2, \dots, n$) như trên hình 16.9a trong đó các biên độ F_{j0} và các tần số θ cho trước. Tại một thời điểm chuyển vị ngang của các khối lượng theo phương dao động là: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t), \dots, X_n(t)$.

Dưới tác dụng đồng thời của các lực quán tính I_k và lực kích động $F_j(t)$ (hình 16.9b) thì các chuyển vị này có thể được xác định qua các hệ số ảnh hưởng (độ mềm) theo nguyên lý công tác dụng:

Chuyển vị của khối lượng thứ k :

$$\left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ x_k(t) = I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} + \sum_{j=1}^n F_j(t) \delta_{kj} \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right\} \quad (16.73)$$

Thay các $I_k(t)$ trong (16.43) vào (16.73) ta được đối với phương trình thứ k của hệ:

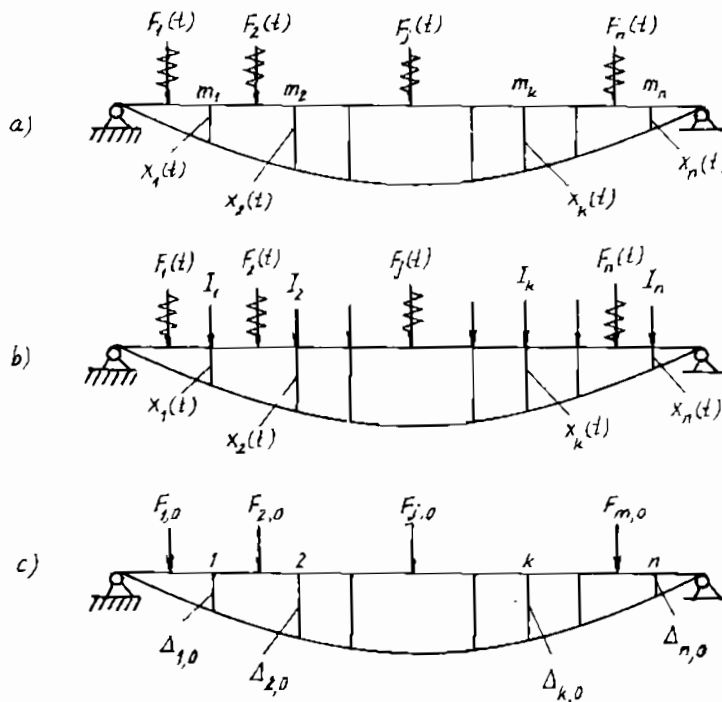
$$\left. \begin{aligned}
 & x_k(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{k1} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{k2} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{kk} + \dots + \\
 & \quad + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{kn} - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{kj} = 0 \\
 & \dots\dots\dots k = \overline{1, n} \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (16.74)$$

trong đó:

δ_{kj} là chuyển vị theo phương khối lượng m_k do lực $\bar{F}_j = 1$ gây ra.

δ_{ki} là chuyển vị theo phương dao động của khối lượng m_k do lực đơn vị đặt vào khối lượng m_i theo phương dao động của m_k gây ra. Nghiệm của hệ phương trình (16.74) trong trường hợp tổng quát có dạng:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$



Hình 16.9.

trong đó: $x_L(t)$ là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (nghiệm dao động tự do);

$x_F(t)$ là nghiệm riêng của hệ phương trình có vế phải (nghiệm dao động cưỡng bức).

Do tác dụng của lực cản mà các dao động tự do chỉ tồn tại trong giai đoạn chuyển tiếp. Sau một khoảng thời gian nào đó dao động này mất đi và chỉ còn lại chế độ bình ổn với những dao động cưỡng bức $x(t) \approx x_F(t)$.

Giả sử rằng nghiệm của hệ trên (chuyển vị cưỡng bức theo phương dao động của các khối lượng) có dạng:

$$x_k(t) = B_k \sin \theta t, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (16.75)$$

trong đó: B_k là biên độ của chuyển vị cưỡng bức của khối lượng thứ k và θ là tần số của nó.

Bằng cách thay vào hệ (16.74) các biểu thức trên của $x_k(t)$ và các quan hệ:

$$\ddot{x}_k(t) = -\theta^2 B_k \sin \theta t \quad (k = \overline{1, n})$$

$$F_j(t) = F_{j,0} \sin \theta t \quad (j = \overline{1, m})$$

ta thu được một hệ phương trình đại số biểu diễn dao động cưỡng bức theo biên độ chuyển vị:

Đối với phương trình thứ k :

$$\left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ m_1 \delta_{k1} \theta^2 B_1 + m_2 \delta_{k2} \theta^2 B_2 + \dots + (m_k \delta_{kk} \theta^2 - 1) B_k + \dots + \\ \qquad \qquad \qquad + m_n \delta_{kn} \theta^2 B_n + \Delta_{k,0} = 0 \\ \dots\dots\dots k = \overline{1, n} \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (16.76)$$

Hệ phương trình (16.76) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\{ \theta^2 [D][M] - [E] \} \{B\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.77)$$

Để biểu diễn dao động cưỡng bức theo biên độ các lực quán tính, ta có thể viết phương trình (16.77) dưới dạng:

$$\theta^2 [D][M]\{B\} - [E]\{B\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.78)$$

Ma trận cột các biên độ lực quán tính có biểu thức:

$$\{J\} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} = \theta^2 [M]\{B\} = \begin{bmatrix} \theta^2 \cdot m_1 B_1 \\ \theta^2 \cdot m_2 B_2 \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_k B_k \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_n B_n \end{bmatrix} \quad (16.79)$$

Ta nhân (16.79) với $[M]^{-1}$. Cụ thể là:

$$[M]^{-1}\{J\} = \theta^2 [M]^{-1}[M]\{B\} \quad (16.80)$$

Mặt khác ta lại có: $[M]^{-1}[M] = [E]$

Phương trình (16.80) trở thành:

$$[E]\{B\} = \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}\{J\} \quad (16.81)$$

Thay các kết quả (16.79) và (16.81) vào phương trình (16.78) ta có:

$$[D]\{J\} - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}\{J\} + \{\Delta\} = \{0\}$$

Hoặc là:

$$\left([D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right) \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.82)$$

Nếu ký hiệu:

$$[D^*] = [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \quad (16.83)$$

Phương trình (16.82) trở thành:

$$[D^*] \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (16.84)$$

Đây là phương trình biểu diễn dao động cưỡng bức theo biên độ lực quán tính dưới dạng ma trận. Nó cho phép ta tìm được ma trận cột $\{J\}$.

Dễ thấy rằng ma trận $[D^*]$ nhận được bằng cách thay đường chéo chính của ma trận $[D]$ bằng đường chéo chính với các phần tử:

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2} \quad (k = \overline{1, n})$$

Để cho phương trình (16.84) có nghiệm khác không thì định thức của nó phải khác không.

Trong trường hợp đó ta có:

$$\theta^2 [D][M] - [I] \neq 0 \quad (16.85)$$

$$\text{Hay là: } |D^*| = \left| [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right| \neq 0 \quad (16.86)$$

Nếu $|D^*| = 0$ thì vectơ biên độ lực quán tính $\{J\}$ và vectơ biên độ dao động cưỡng bức $\{B\}$ có các giá trị tiến tới vô cùng, nghĩa là điều kiện cộng hưởng xảy ra: $\theta = \omega_1^*$.

2. Phương pháp chuyển vị - ma trận độ cứng

Giả sử rằng hệ khảo sát chịu tác dụng của các lực kích động điều hòa như mục trên. Khi ấy chuyển vị của các khối lượng theo phương dao động sẽ nhận được từ việc giải phương trình ma trận sau đây:

$$[R^*] \{B\} + \{R\} = \{0\} \quad (16.87)$$

Với: $[R^*] = [R] - \theta^2 [M]$ là ma trận độ cứng thu gọn.

Sau khi giải hệ này, ma trận biên độ chuyển vị được xác định và do đó các lực tương đương tĩnh cực đại sẽ là:

$$\{P_d\} = [R]\{B\} \quad (16.86)$$

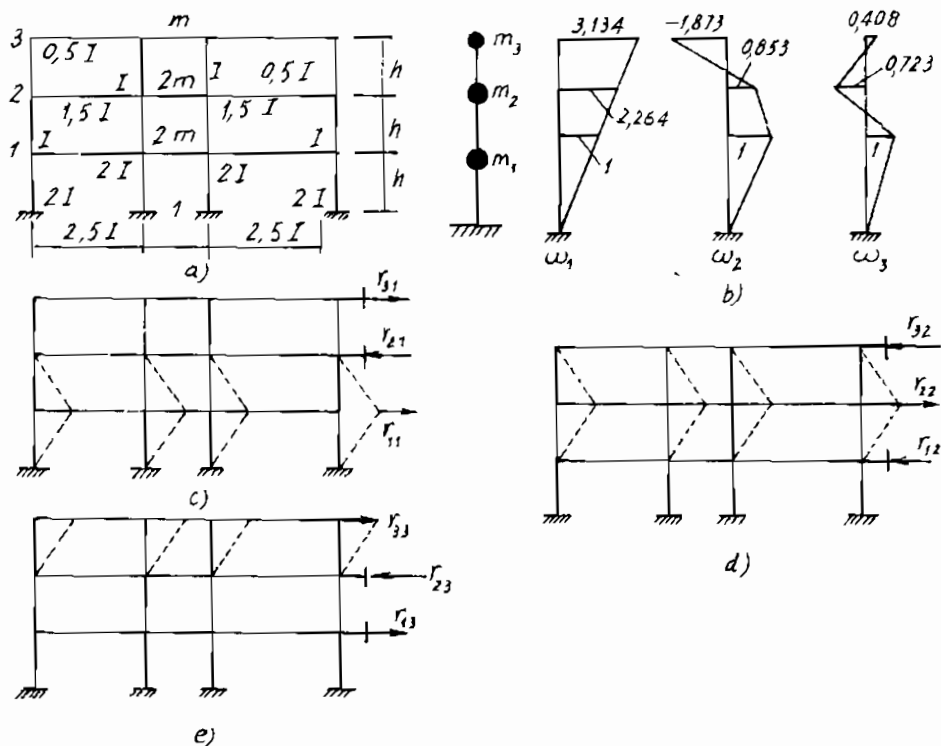
Để tránh cộng hưởng thì $[R]$ cần phải khác không, cụ thể là:

$$|[R] - \theta^2 [M]| \neq 0.$$

§5. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Đối với khung 3 tầng như trên hình 16.10a bị dao động ngang do động đất gây ra, hãy xác định các giá trị riêng và vectơ riêng khi sử dụng phương pháp ma trận độ cứng. Giả thiết các dầm có độ cứng vô hạn.



Hình 16.10.

GIẢI:

Khi nghiên cứu dao động ngang của khung, chúng ta có thể giả thiết các khối lượng tập trung trên từng tầng, vì vậy hệ có 3 bậc tự do. Việc tính toán các chu kỳ riêng của nó nhờ vào phương trình sau:

$$| [R] - \omega^2 [M] | = 0$$

Các hệ số cứng hay còn gọi là các phản lực đơn vị được xác định như trong chương 11. Các hệ số này có giá trị như sau:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 156 EJ/h^3; & r_{12} &= -60 EJ/h^3; & r_{13} &= 0; \\ r_{21} &= -60 EJ/h^3; & r_{22} &= 96 EJ/h^3; & r_{23} &= -36 EJ/h^3; \\ r_{31} &= 0; & r_{32} &= -36 EJ/h^3; & r_{33} &= 36 EJ/h^3; \end{aligned}$$

Kể đến các giá trị đã chỉ ra ở trên và các khối lượng trên hình 16.10b, c, d, e, ta có các ma trận tương ứng:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \frac{12EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đưa vào ký hiệu: $\alpha = \frac{mh^3}{12EJ} \omega^2$, phương trình đặc trưng trở thành:

$$\left| \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 13-2\alpha & -5 & 0 \\ -5 & 8-2\alpha & -3 \\ 0 & -3 & 3-\alpha \end{bmatrix} \right| = 0$$

Hoặc là ở dạng khai triển:

$$4\alpha^3 - 54\alpha^2 + 187\alpha - 120 = 0$$

Từ đó các nghiệm của phương trình này là:

$$\alpha_1 = 0,827 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_1^2 ; \quad \alpha_2 = 4,366 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_2^2 ;$$

$$\alpha_3 = 8,307 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_3^2 .$$

Từ các α_i , các tần số riêng ω_i được rút ra như sau:

$$\omega_1 = 3,150 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \quad \omega_2 = 7,238 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \quad \omega_3 = 9,984 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} .$$

Các vectơ riêng được xác định từ phương trình tổng quát (16.67). Đó là hệ ba phương trình 3 ẩn:

$$\left. \begin{aligned} (13 - 2\alpha_i) \phi_{1,i} - 5\phi_{2,i} &= 0 \\ -5\phi_{1,i} + (8 - 2\alpha_i) \phi_{2,i} - 3\phi_{3,i} &= 0 \\ -3\phi_{2,i} + (3 - \alpha_i) \phi_{3,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ứng với mỗi giá trị của i sẽ có một tần số, ta giả thiết: $\phi_{1,1} = \phi_{1,2} = \phi_{1,3} = 1,000$.

– Để tìm dạng riêng thứ nhất của dao động, chúng ta lấy:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,827 \\ \phi_{1,1} = 1,000 \end{cases}$$

Sau đó thay vào hệ phương trình tổng quát, ta được:

$$\left. \begin{aligned} (13 - 2 \cdot 0,827) \cdot 1 - 5\phi_{2,1} &= 0 \\ -5 \cdot 1 + (8 - 2 \cdot 0,827) \phi_{2,1} - 3\phi_{3,1} &= 0 \\ -3\phi_{2,1} + (3 - 0,827) \phi_{3,1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Từ đó chúng ta nhận được: $\phi_{2,1} = 2,264$ và $\phi_{3,1} = 3,134$.

– Để tìm dạng riêng thứ hai của dao động, ta lấy:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 4,366 \\ \phi_{1,2} = 1,000 \end{cases}$$

Tương tự như trên, ta có: $\phi_{2,2} = 0,853$; $\phi_{3,2} = -1,873$.

– Để tìm dạng riêng thứ ba của dao động, ta lấy:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 8,307 \\ \phi_{1,3} = 1,000 \end{cases}$$

Chúng ta tìm được: $\phi_{2,3} = -0,723$; $\phi_{3,3} = 0,408$.

Với các giá trị vừa tìm được, chúng ta có thể biểu diễn các dạng dao động riêng như trên hình 16.10b.

Ta thấy rằng các dao động riêng ở trên trực giao với nhau. Thật vậy:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,2} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 2,269 \cdot 0,853 + m \cdot 3,134 \cdot (-1,873) \cong 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,2} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 0,853 \cdot (-0,723) + m \cdot (-1,873) \cdot 0,428 \cong 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot (-0,723) \cdot 2,269 + m \cdot 0,408 \cdot 3,134 \cong 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn động lực, tính các độ võng động cực trị và kiểm tra bền đối với trục liên tục đường kính D cho trên hình 16.11a. Trục này chịu tác dụng đồng thời của tải trọng tĩnh $Q = m \cdot g = 50 \text{ kN}$ và lực kích động $F(t) = F_0 \sin \theta t$. Cho trước các giá trị: $F_0 = 30 \text{ kN}$; $\theta = 35 \text{ rad/s}$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $l = 6,00 \text{ m}$; $D = 19,68 \text{ cm}$, $[\sigma] = 23 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

Sau khi tính toán tĩnh, chúng ta thấy rằng dưới tác dụng của tải trọng Q, độ võng tĩnh của dầm siêu tĩnh này tại vị trí đặt khối lượng m có giá trị như sau:

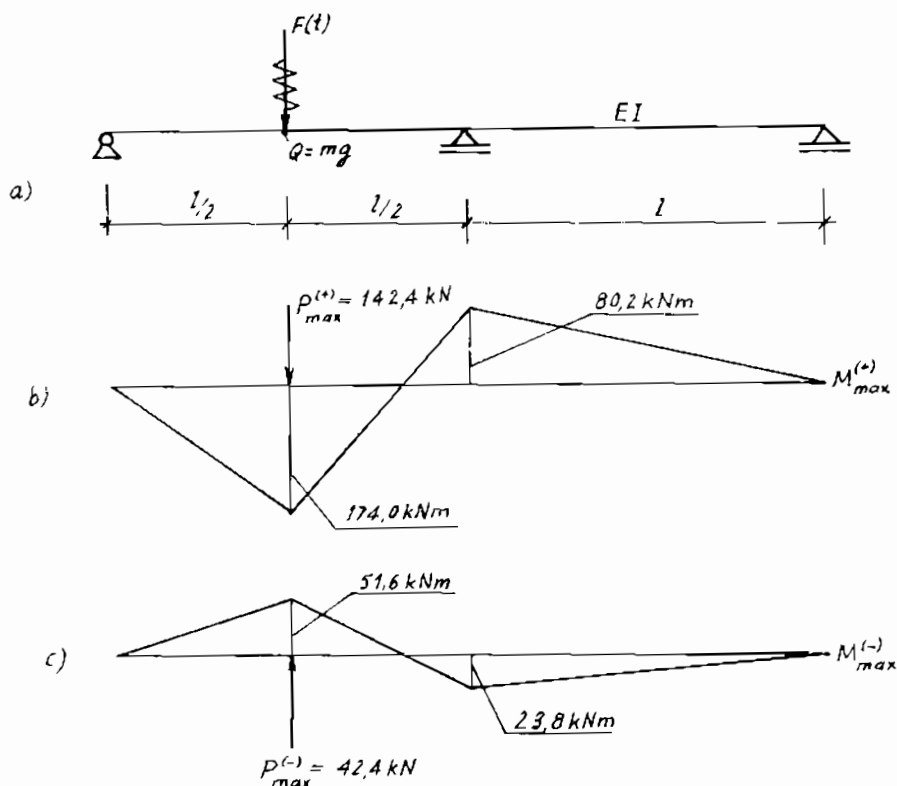
$$\Delta T_Q = \frac{23}{1536} \cdot \frac{Ql^3}{EI} = \frac{23}{1536} \cdot \frac{50 \cdot 6^3}{30000} = 0,0054 \text{ m} = 0,54 \text{ cm}$$

Vì vậy tần số riêng của hệ là:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta T_Q}} = \sqrt{\frac{981}{0,54}} = 42,6 \text{ rad/s}$$

và do đó hệ số động lực có giá trị:

$$k_d = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (35/42,6)^2} = \frac{1}{1 - 0,675} = 3,08$$



Hình 16.11.

Biên độ lớn nhất sẽ là:

$$\Delta_{dmax} = k_d \Delta_{T_{F_0}} = k_d \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{F_0 l^3}{EI} = \pm 3,08 \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{30 \cdot 6^3}{3000} = \pm 0,0099 \text{ m} \approx \pm 1 \text{ cm.}$$

Giá trị lực tĩnh tương đương do ảnh hưởng động lực của lực kích động sẽ là:

$$F_d = \pm k_d F_0 = \pm 3,08 \cdot 30 = \pm 92,4 \text{ kN}$$

Lực này có thể tác dụng theo chiều này hoặc chiều kia, theo chiều này lực tổng cộng có giá trị lớn nhất:

$$P_{\max}^{(+)} = Q + F_d = 50 + 92,4 = 142,4 \text{ kN}$$

còn theo chiều kia có giá trị nhỏ nhất:

$$P_{\max}^{(-)} = Q - F_d = 50 - 92,4 = -42,4 \text{ kN}$$

Các biểu đồ mômen uốn tương ứng được cho trên hình 8.11b và c.

Đối với độ võng, ta có 2 giá trị ngược dấu nhau:

$$\Delta_{\max}^{(+)} = \Delta_{T_0} + \Delta_{d\max} = 0,54 + 0,99 = +1,53 \text{ cm}$$

$$\Delta_{\max}^{(-)} = \Delta_{T_0} - \Delta_{d\max} = 0,50 - 0,99 = -0,45 \text{ cm}.$$

Từ đó chúng ta tính được:

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \frac{M_{\max}^{+}}{W} = \frac{174.100}{762,2} = 22,83 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \frac{M_{\max}^{-}}{W} = \frac{51,6.100}{762,2} = 6,77 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

Thực làm việc an toàn về bền.

III. DAO ĐỘNG HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Trong mục này ta xét dao động ngang của dầm, một bài toán điển hình và thường gặp trong kỹ thuật.

§6. DAO ĐỘNG TỰ DO

Phương trình vi phân của dầm chịu tải trọng tĩnh đã gặp trong chương 8 có dạng:

$$V''(z) = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \text{hoặc} \quad V^{(IV)}(z) = \frac{q(z)}{EJ_x} \quad (16.87)$$

Khi thay vào phương trình vi phân này tải trọng ngang bằng lực quán tính với $q(z) = 0$, theo nguyên lý D'Alembert ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} = -m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (16.88)$$

ở đây m là khối lượng tính trên một đơn vị chiều dài của dầm.

Ta biểu diễn nghiệm (16.88) dưới dạng tách biến:

$$V(z, t) = \Psi(z) \cdot \varphi(t) \quad (a)$$

Thay (a) vào (16.88) với ký hiệu $\lambda^2 = \frac{m}{EJ_x}$ ta được:

$$\frac{1}{\lambda^2 \cdot \Psi(z)} \cdot \frac{d^4 \Psi(z)}{dz^4} = - \frac{1}{\varphi(t)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \text{hằng}$$

Ta ký hiệu hằng này bằng ω^2 , khi ấy thu được hai phương trình vi phân thường là:

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot \varphi(t) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d^4 \Psi(z)}{dz^4} - \omega^2 \cdot \lambda^2 \cdot \Psi(z) = 0 \quad (c)$$

Nghiệm của (b) có dạng:

$$\omega(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

Nghiệm của (c) có thể viết:

$$\Psi(z) = a \cdot \sin(z \sqrt{\lambda \omega}) + b \cdot \cos(z \sqrt{\lambda \omega}) + c \cdot \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega}) + d \cdot \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega})$$

Bởi vì phương trình đặc trưng của (c) là: $k^4 - \omega^2 \lambda^2 = 0$.

có nghiệm $k_1 = \sqrt{\lambda \omega}$, $k_2 = -\sqrt{\lambda \omega}$, $k_3 = i\sqrt{\lambda \omega}$, $k_4 = -i\sqrt{\lambda \omega}$.

Bây giờ nghiệm (a) sẽ là:

$$V(z, t) = \Psi(z) \cdot \varphi(t) =$$

$$= \left[A \cdot \sin(z \sqrt{\lambda \omega}) + B \cdot \cos(z \sqrt{\lambda \omega}) + C \cdot \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega}) + D \cdot \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega}) \right] \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (16.89)$$

Các hằng số A, B, C, D và δ được xác định từ các điều kiện biên và điều kiện đầu. Ví dụ, đối với dầm tựa khớp trên hai đầu cuối:

$$\text{tại } z = 0, \quad V(0, t) = 0, \quad V''(0, t) = 0$$

$$\text{tại } z = l, \quad V(l, t) = 0, \quad V''(l, t) = 0$$

Bốn điều kiện này xác định bốn phương trình thuần nhất tìm A, B, C, D. Để có nghiệm không tầm thường định thức của hệ này phải bằng không. Điều kiện này cho ta:

$$\sin(l \sqrt{\lambda \omega}) \cdot \text{sh}(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0 \quad (16.90)$$

Khi $\text{sh}(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0$ ta có nghiệm tầm thường $\sqrt{\lambda \omega} = 0$, do đó:

$$\sin(l \sqrt{\lambda \omega}) = 0 \quad (16.91)$$

Hay: $l \sqrt{\lambda \omega} = k\pi$ với $k = 1, 2, 3, \dots$

Do đó ω_k được xác định:

$$\omega_k = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{m l^4}} \quad (16.92)$$

Đối với một cơ bản của dao động, tần số vòng là:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{EJ_x / m l^4}$$

Nghiệm đầy đủ của bài toán sẽ là:

$$V(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \sin(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + B_k \cos(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + C_k \text{sh}(z \sqrt{\lambda \omega_k}) + D_k \text{ch}(z \sqrt{\lambda \omega_k}) \right] \sin(\omega_k t + \delta_k) \quad (16.93)$$

§7. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

Khi có mặt ngoại lực kích động $q_y(z, t)$ thì phương trình dao động cưỡng bức có dạng:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q_y(z, t) \quad (16.94)$$

Xét trường hợp kích động là lực tập trung tại $z = z_0$ và có dạng:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t$$

Đối với dầm tựa khớp ở hai đầu, ta có thể biểu diễn nghiệm cần tìm dưới dạng thỏa mãn điều kiện biên:

$$\bar{V}(z, t) = a(t) \cdot \sin(\pi z/l) \quad (16.95)$$

Nhân cả hai vế của (16.94) với (16.95) và tích phân từ 0 đến l ta đi đến:

$$\int_0^l \left[EJ_x \frac{\partial^4 \bar{V}}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} - q_y(z, t) \right] \bar{V} dz = 0$$

Hay là:

$$a(t) \cdot \left[EJ_x a(t) \frac{\pi^4}{l^4} + m \ddot{a}(t) \right] \cdot \frac{l}{2} - a(t) \cdot \int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0$$

Có thể xem lực tập trung $P(t)$ như là lực phân bố trên đoạn $z_0 - \varepsilon \leq z \leq z_0 + \varepsilon$ có cường độ $q_y = P_0 \delta(z - z_0)$, khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz &= \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} P_0 \delta(z - z_0) \sin \theta t \sin \frac{\pi z}{l} dz = \\ &= P_0 \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \end{aligned}$$

Cuối cùng ta thu được:

$$\ddot{a}(t)m + EJ_x \frac{\pi^4 a(t)}{l^4} = \frac{2P_0}{l} \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)$$

hay là:

$$\ddot{a}t + \omega_1^2 a(t) = Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) = f(t) \quad (a)$$

Trong đó ta đã đặt: $\omega_1^2 = EJ_x \frac{\pi^4}{l^4}$ và $Q_0 = \frac{2P_0}{ml}$.

Nghiệm riêng của (a) theo tích phân Duhamel như sau:

$$a_r(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(t) \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)}{\theta^2 - \omega_1^2}$$

Nghiệm tổng quát của (a) là:

$$a(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t) + B \cdot \cos(\omega_1 t) + a_r(t) \quad (16.96)$$

Do đó nghiệm của (16.94) với điều kiện nêu trên là:

$$\bar{V}(z, t) = a(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right) \quad (16.97)$$

Các hằng số A, B trong (16.96) được xác định từ điều kiện đầu.

Ví dụ, tại $t = 0$, $V(z, 0) = 0$, $\dot{V}(z, 0) = 0$ thì $B = 0$ và

$$A = - \frac{Q_0 \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \cdot \theta}{(\theta^2 - \omega_1^2) \cdot \omega_1}.$$

IV. HỆ CHỊU TẢI TRỌNG VA CHẠM

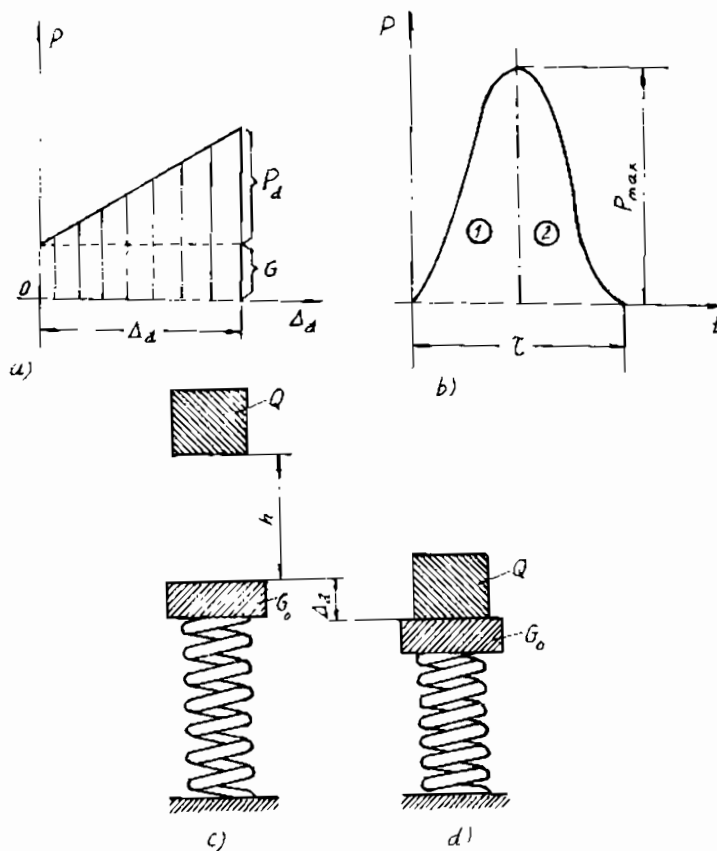
Va chạm là hiện tượng tác dụng tương hỗ cơ học diễn ra trong một khoảng thời gian rất ngắn và gây ra sự đột biến vận tốc của các chất điểm trong hệ (hình 16.12).

Trong giáo trình này chúng ta chỉ nghiên cứu va chạm giữa hai vật rắn khi sóng biến dạng truyền lan theo phương va chạm và sóng biến dạng truyền theo phương vuông góc với phương va chạm với thời gian va chạm kéo dài cỡ từ $10^{-3} \div 10^{-6}$ giây.

§8. PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG TRONG VA CHẠM

Đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên theo thời gian của lực va chạm giữa hai vật rắn được cho trên hình 16.12b. Ứng với điểm c lực va chạm có giá trị lớn nhất. Tung độ của đồ thị $P(t)$ qua c chia đồ thị thành hai phần, tương ứng với hai pha của va chạm.

Trong pha thứ nhất: trọng tâm của các vật va chạm dịch gần lại với nhau, còn lực va chạm (lực tương hỗ) tăng dần và đạt được giá trị cực đại ở thời điểm vận tốc tương đối giữa chúng bằng không và có độ dịch gần lớn nhất.



Hình 16.12.

Trong pha thứ hai: (pha phục hồi) trọng tâm của các vật va chạm dần xa nhau, còn lực tương hỗ giảm dần về không khi hai vật ngừng tiếp xúc hoặc dần đến giá trị hằng bằng trọng lượng vật gây va chạm, nếu va chạm là không đàn hồi tuyệt đối. Do quá trình va chạm diễn ra trong một khoảng thời gian rất ngắn, nên việc xác định chính xác các tác dụng ngoài lên đối tượng bị va chạm là hết sức khó khăn và phức tạp.

Chính vì lý do đó ta cần phải tính toán gần đúng quá trình này với giả thiết là vật gây va chạm truyền cho vật bị va chạm tại điểm va chạm chỉ một tốc độ ban đầu, còn vật bị va chạm chưa kịp chuyển vị. Bài toán đặt ra là xác định chuyển vị động lực của điểm bị va chạm. Khi đã biết chuyển vị này, ta hoàn toàn có thể giải quyết bài toán về ứng suất sinh ra trong hệ chịu va chạm bằng cách dẫn bài toán động lực này về bài toán tĩnh tương đương. Cụ thể là xác định một lực đặt tĩnh vào điểm va chạm sao cho nó gây ra chuyển vị động lớn nhất trong hệ. Người ta quy ước gọi lực như thế là lực động hay lực tĩnh tương đương và được ký hiệu là P_{dmax} . Dưới đây, chúng ta sẽ nghiên cứu hai giải pháp dẫn bài toán va chạm về bài toán tĩnh tương đương nói trên.

1. Giải pháp 1

Giả sử có một vật trọng lượng Q va chạm vào một vật khác trọng lượng G_0 gắn vào đầu một lò xo không trọng lượng (hình 16.12c). Va chạm được xem là tuyệt đối không đàn hồi. Gọi k là độ cứng của lò xo, chuyển vị tĩnh của lò xo do lực Q này đặt tĩnh gây ra là:

$$\Delta T_Q = \frac{Q}{k} \quad (a)$$

Sau va chạm, do nhận được tốc độ ban đầu ở đầu lò xo, mà lò xo bị co lại một đoạn Δ_d (hình 16.12d) do một lực động P_d nào đó gây ra là:

$$\Delta_d = \frac{P_d}{k} \quad (b)$$

Vận tốc của vật gây va chạm ngay trước lúc va chạm có biểu thức:

$$V_0^2 = 2gh \quad (c)$$

Gọi V_1 là vận tốc của hai vật sau khi kết thúc va chạm và cùng nén lò xo. Theo định lý biến thiên động lượng, ta có:

$$\frac{Q}{g} \cdot V_0 = \left(\frac{Q}{g} + \frac{G_0}{g} \right) V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{Q+G_0} V_0 \quad (d)$$

Ở thời điểm chịu nén lớn nhất thì lực nén lò xo đạt cực đại: $P_d + G_0$ và vận tốc V_2 ở thời điểm này cũng bằng không. Theo định lý biến thiên động năng ta có:

$$T_2 - T_1 = A \quad (e)$$

trong đó:

$$T_2 = 0 ; \quad T_1 = \frac{Q + G_0}{2g} V_1^2 = \frac{Q^2}{2g(Q + G_0)} \cdot V_0^2 ;$$

$$A = (Q + G_0) \Delta \quad (g)$$

Một lực thay đổi tác dụng từ lò xo vào G_0 trong quá trình va chạm được mô tả trên hình 16.12a.

Công của các lực này là âm (vì chúng ngược chiều với chiều chuyển động) và bằng diện tích của biểu đồ (hình 16.12a):

$$A = (G + G_0) \Delta_d - \left(G_0 \Delta_d + \frac{P_d \Delta_d}{2} \right) = Q \Delta_d - \frac{k \Delta_d^2}{2} .$$

Bây giờ, phương trình (e) trở thành:

$$\frac{Q^2 \cdot V_0^2}{2g(Q + G_0)} = Q \Delta_d - \frac{k \Delta_d^2}{2}$$

Thay (a), (c) và (d) ta đi đến:

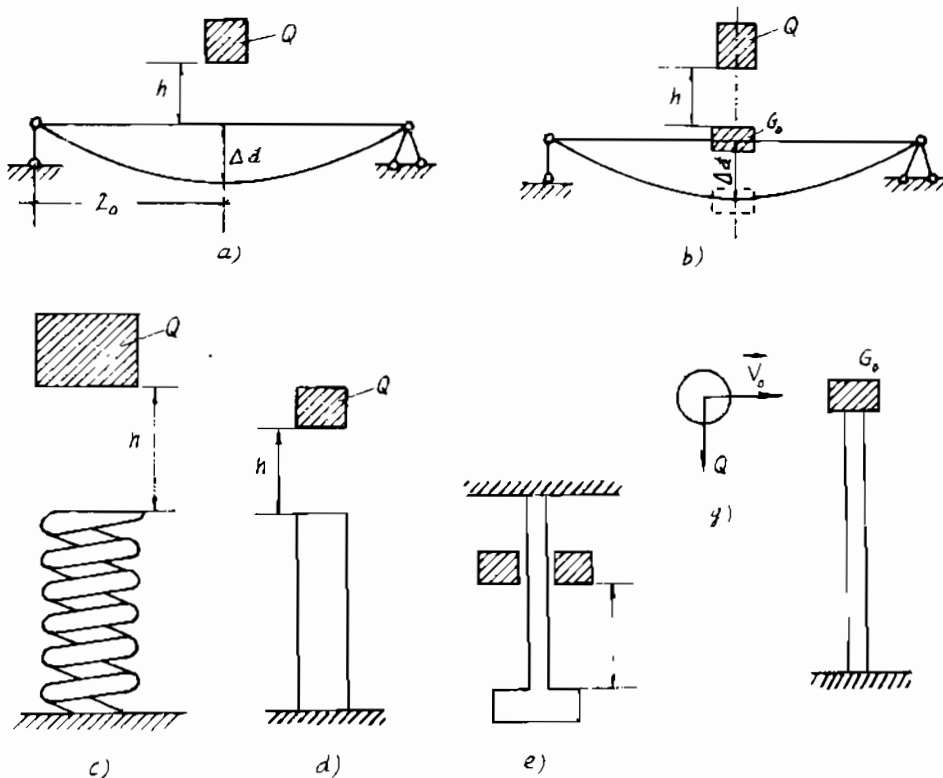
$$\Delta_d^2 - 2 \Delta T_Q \cdot \Delta_d - 2h \frac{\Delta T_Q}{1 + \frac{G_o}{Q}} = 0 \quad (16.98)$$

Giải phương trình này ta tìm được:

$$\Delta_d = \Delta T_Q + \sqrt{\Delta T_Q^2 + 2h \frac{\Delta T_Q}{1 + \frac{G_o}{Q}}} = k_{dv} \cdot \Delta T_Q \quad (16.99)$$

trong đó: k_{dv} gọi là hệ số động lực khi va chạm và bằng:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta T_Q} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_o}{Q}}} \quad (16.100)$$



Hình 16.13.

Nghiệm nhận được là nghiệm gần đúng, bởi vì khi thiết lập công thức (16.99) ta đã bỏ qua rất nhiều yếu tố ảnh hưởng đến nghiệm thực của bài toán.

Ví dụ, va chạm được xem là tuyệt đối không đàn hồi trên thực tế không hoàn toàn như vậy. Ngoài ra, ta đã bỏ qua biến dạng cục bộ ở vùng bị va chạm. Biến dạng cục bộ này có ảnh hưởng thực chất đến kết quả cuối cùng. Vì vậy công thức (16.99) cho nghiệm gần đúng thiên về an toàn. Nghĩa là giá trị chuyển vị động Δ_d nhận được từ (16.99) luôn lớn hơn chuyển vị động thực mà hệ phải chịu.

Trong phương án 1 để xây dựng công thức tính Δ_d ta đã sử dụng liên tiếp hai định lý đã biết trong giáo trình “Cơ học lý thuyết” là định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên động năng. Có thể thiết lập công thức tính Δ_d một cách đơn giản hơn khi sử dụng trực tiếp nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học dưới đây.

2. Phương án 2

Giả sử một lực Q tác dụng rất nhanh lên dầm ở điểm có tọa độ $z = z_0$ (hình 16.13a). Chuyển vị động lực cần tìm được xem là tỷ lệ với chuyển vị tĩnh.

$$\Delta_d(z) = k_{dv} \cdot \Delta_T(z) \quad (16.101)$$

$\Delta_T(z)$ – là chuyển vị tĩnh tại hoành độ z do lực P đặt tĩnh tại z_0 gây ra;

k_{dv} – hệ số động lực khi va chạm.

Theo định luật bảo toàn năng lượng cơ học thì tổng động năng T và thế năng U của hệ bảo toàn ở mỗi thời điểm là như nhau:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const}$$

Ta chọn trạng thái không biến dạng và vị trí xuất phát của vật gây ra va chạm cách mặt dầm một khoảng là h làm vị trí thứ nhất của hệ. Ở trạng thái này mức thế năng của hệ được quy ước bằng không, nghĩa là $U_1 = 0$ và $T_1 = 0$, suy ra $T_1 + U_1 = 0$.

Trạng thái thứ hai là trạng thái hệ có chuyển vị lớn nhất, ở đó tốc độ của các điểm bằng không, do đó $T_2 = 0$.

Ở trạng thái này U_2 gồm có U'_2 của vật gây va chạm. U''_2 của trọng lượng vật bị va chạm (dầm) và thế năng biến dạng của vật bị va chạm U'''_2 cụ thể là:

$$U_2 = U'_2 + U''_2 + U'''_2 = 0$$

Cụ thể hơn:

$$U_2 = -Q[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz + \int_0^l \int_F \frac{E}{2} (\epsilon_d)^2 dF dz = 0$$

hay là:

$$k_{dv}^2 U_T - Q[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz = 0$$

Chú ý đến (16.101), phương trình này trở thành:

$$k_{dv}^2 U_T - k_{dv} \left[Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right] - Qh = 0 \quad (16.102)$$

Trong (16.102): U_T – thế năng biến dạng của dầm khi chịu uốn tĩnh:

Δ_{TO} – độ võng tĩnh của dầm tại $z = z_0$ do Q gây ra.

Từ (16.102) ta rút ra:

$$2k_{dv} U_{TO} = Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \pm \sqrt{\left(Q\Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right)^2 + 4Qh U_{TO}}$$

Ở đây $U_{TO} = \frac{Q\Delta_{TO}}{2}$. Nếu bỏ qua trọng lượng của vật bị va chạm (dầm) thì:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T(z_0)}} \geq 2 \quad (16.103)$$

Đối với ứng suất σ_{dmax} ta có:

$$\sigma_{dmax} = E\varepsilon_{dmax} = Ey_{dmax} \left| \frac{d^2 \Delta_{dmax}}{dz^2} \right| = Ey_{max} k_{dv} \left| \frac{d^2 \Delta_{Tmax}}{dz^2} \right| = k_{dv} \cdot \sigma_{Tmax}$$

Công thức (16.103) có thể được viết theo vận tốc v_o của vật va chạm ngay lúc sắp tiếp xúc với vật bị va chạm:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_T(z_o)}} \quad (16.104)$$

Khi $h \gg \Delta_T(z_o)$ thì có thể bỏ qua đơn vị ở trong căn so với số hạng thứ hai trong nó và (16.104) trở thành:

$$k_{dv} = 1 + \frac{v_o}{\sqrt{g\Delta_T(z_o)}} \quad (16.105)$$

Khi va chạm ngang thì công thức trên được viết:

$$k_{dv} = \frac{v_o}{\sqrt{g\Delta_T(z_o)}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_T(z_o)}} \quad (16.106)$$

Trong trường hợp phải kể đến trọng lượng của đối tượng bị va chạm thì k_{dv} có dạng:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_T(z_o)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu \cdot \frac{Q_o}{Q}\right)}} \quad (16.107)$$

Q_o là trọng lượng tổng cộng của vật bị va chạm.

μ – hệ số thu gọn trọng lượng phân bố của vật bị va chạm về điểm va chạm ($\mu < 1$). Hệ số μ được xác định gần đúng trên cơ sở cân bằng động năng của hệ khảo sát và hệ dẫn xuất có khối lượng dẫn xuất đặt ở điểm bị va chạm.

Khi đối tượng gây ra va chạm thực hiện chuyển động quay mà không phải chuyển động tịnh tiến như ở trên và gây ra chuyển vị góc trong vật bị va chạm thì có thể sử dụng trực tiếp các công thức trên

với điều kiện thay vào trong các công thức này v_o bởi ω_o , $\frac{Q}{g}$, $\frac{Q_o}{g}$ bởi mômen quán tính các khối lượng J_m và J_{mo} đối với trục quay của chúng.

Điều kiện bền của bài toán động lực như sau:

$$\max \sigma_d = k_{dv} \cdot \sigma_{Tmax} \leq [\sigma_d] \text{ hoặc } \max \tau_d = k_{dv} \cdot \tau_{Tmax} \leq [\tau_d]$$

trong đó:

$\max \sigma_d$ và $\max \tau_d$ là ứng suất động tính toán lớn nhất;

σ_{Tmax} , τ_{Tmax} là ứng suất lớn nhất do Q đặt tĩnh gây ra;

$[\sigma_d]$ và $[\tau_d]$ là ứng suất động lực cho phép.

§9. KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT SÓNG VA CHẠM

Những phương pháp nghiên cứu va chạm ở tiết §8 là dựa trên cơ sở thay thế hệ vô hạn bậc tự do bằng hệ một bậc tự do. Vì thế kết quả nhận được là gần đúng. Hệ có độ cứng càng lớn thì những kết quả tính toán theo phương pháp này càng kém chính xác hơn. Để có nghiệm chính xác phù hợp với kết quả thí nghiệm cần phải sử dụng lý thuyết truyền sóng va chạm.

Ta hãy nghiên cứu trường hợp một vật rắn tuyệt đối chuyển động với vận tốc V , đập vào đầu tự do của một thanh như hình 16.14a.

Nhiều nghiên cứu vấn đề này đã chỉ rõ rằng biến dạng nén ở thời điểm bắt đầu va chạm chỉ phụ thuộc vào tốc độ va chạm mà không phụ thuộc vào khối lượng của đối tượng bị va chạm. Quá trình hình thành và phát triển sóng va chạm trong thanh được mô tả trên hình 16.14b. Biến dạng lớn nhất ε_o và do đó là σ_o phát sinh ở thời điểm đầu của quá trình va chạm. Sau đó sóng biến dạng được truyền đi với tốc độ xác định dọc theo trục thanh. Sau khi sóng tới lan đến đầu ngàm của thanh thì bị phản xạ trở lại và tiếp tục lan truyền với cùng tốc độ trên theo hướng ngược lại. Ở thời điểm xuất hiện sóng

phản xạ thì ứng suất tại ngàm bằng $2\sigma_0$. Khi đi đến đầu tự do sóng lại phản xạ trở lại và đi đến đầu ngàm, quá trình cứ thế được lặp đi lặp lại liên tục. Bởi vậy biến dạng tổng cộng ở một mặt cắt nào đó sẽ bị thay đổi theo thời

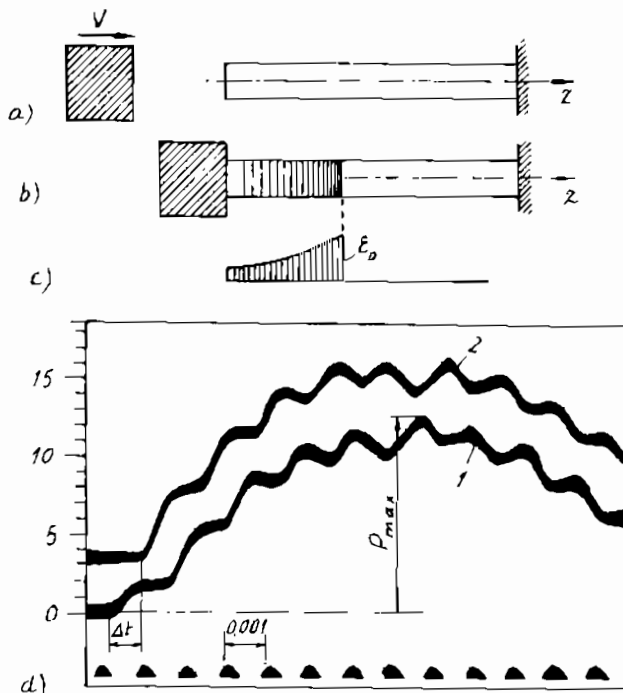
gian và theo một quy luật phức tạp.

Ngày nay, các nghiên cứu bằng thí nghiệm cho phép xác định đủ chính xác tốc độ truyền sóng và giá trị cực đại của biến dạng.

Ta hãy quan sát biến dạng theo thời gian ở hai mặt cắt tự do và ngàm của một sợi dây thép

có chiều dài $l = 4,4$ m, đường kính $d = 0,8$ mm, một vật trọng lượng $Q = 0,5$ daN rơi tự do dọc theo dây từ độ cao $h = 10$

cm. Quá trình biến dạng thay đổi theo thời gian ở hai mặt cắt nói trên được mô tả trên hình 16.14d.



Hình 16.14.

Đường cong 1 là quá trình biến dạng ở đầu dưới (tự do) của dây, đường cong 2 là quá trình biến dạng ở đầu trên (ngàm). Trục hoành hình rằng của là thước đo thời gian. Đồ thị này cho thấy đầu trên bắt đầu biến dạng chậm sau đầu dưới một khoảng thời gian Δt . Đó là thời gian cần thiết để sóng chạy từ đầu dưới đến đầu trên và được tính theo tốc độ truyền sóng: $t_1 = l/a$. Đối với thép $a = 5120$ m/s. Trong trường hợp này:

$$t_1 = \frac{4,4}{5120} = 0,00086 \text{ gy}$$

Thời gian này được đo trên đồ thị $\Delta t = 0,0008 \text{ gy}$.

Lực kéo lớn nhất trong dây khi va chạm được cho từ đồ thị này là:

$$P_{dmax} = 12 \text{ daN.}$$

Do đó, ứng suất động lớn nhất là:

$$\sigma_{dmax} = \frac{P_{dmax}}{F} = \frac{12}{0,005} = 2400 \text{ daN/cm}^2$$

Khi đó hệ số động lực k_{dv} theo định nghĩa là:

$$k_{dv} = P_{dmax} / Q = \frac{12}{0,5} = 24.$$

Độ dãn dài tĩnh của thanh:

$$\Delta T_Q = \frac{0,5 \cdot 440}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,005} = 0,021.$$

Trọng lượng của đĩa chặn ở đầu dưới $G_0 = 0,475 \text{ daN}$. Do đó, $G_0 / Q = 0,95$.

Theo công thức gần đúng (16.107) ta có:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,021} \cdot \frac{1}{1 + 0,95}} = 23,1 \approx k_{dv}^*$$

Khi G_0 rất nhỏ thì hệ số động lực k_{dv} hầu như không phụ thuộc Q . Điều này rất phù hợp với lý thuyết sóng va chạm.

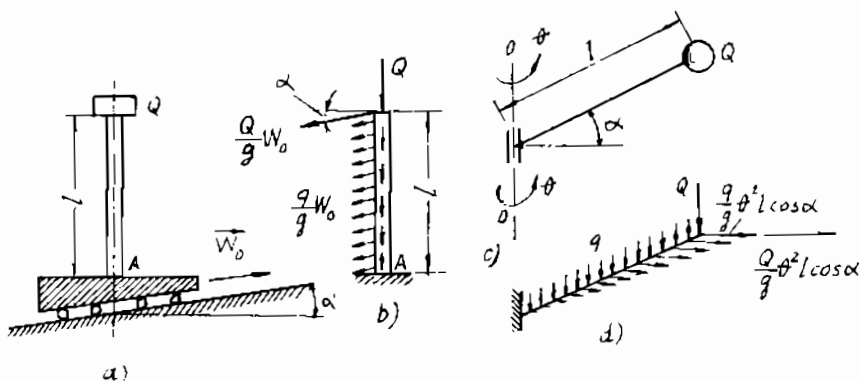
§10. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Vi dụ 1.

Một thiết bị như hình (16.15a) chuyển động với gia tốc $\bar{W}_0$ trên mặt nghiêng α . Hãy tính ứng suất cực đại tại ngàm A. Biết Q và trọng lượng 1 m của thanh là q , diện tích mặt cắt ngang của thanh là F , mômen chống uốn W .

GIẢI

Sơ đồ tính như hình 10.15b.



Hình 16.15.

Ứng suất nén do tải trọng tĩnh và động tại mặt cắt A là:

$$\sigma_n = - (Q + ql) \frac{W_0}{gF} \sin \alpha - \frac{Q + ql}{F}$$

Ứng suất uốn do lực quán tính sinh ra tại A như sau:

$$\sigma_u = \pm (Ql + 0,5 ql^2) \frac{W_0 \cos \alpha}{gW}$$

Giá trị ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm là:

$$\sigma = \pm (Ql + 0,5 ql^2) \frac{W_0 \cos \alpha}{gW} - \frac{(Q + ql) \cdot \left(1 + \frac{W_0 \cos \alpha}{g} \right)}{F}$$

Ví dụ 2

Một thanh nghiêng chịu trọng lượng Q và trọng lượng bản thân q quay quanh trục thẳng đứng $O-O$ với tốc độ góc θ như trên hình (16.15c). Hãy tính ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm nhất của thanh, nếu diện tích mặt cắt ngang và mômen chống uốn là F và W .

GIẢI

Mômen uốn tại ngàm A do Q, q và lực quán tính (hình 16.15d) tương ứng do chúng gây ra là:

$$M_u = (Q + 0,5 ql). l \cos \alpha + \left(Q + \frac{ql}{3} \right) \cdot \frac{\theta^2 l^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Lực dọc do tác dụng tĩnh và động lực có dạng:

$$N = (Q + 0,5 ql) \cdot \frac{\theta^2 l \cos^2 \alpha}{g} - (Q + ql) \sin \alpha$$

Ứng suất pháp lớn nhất tại mặt cắt nguy hiểm của thanh là:

$$\begin{aligned} \max \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u}{W} = & \frac{(Q + 0,5 ql) \theta^2 l \cos^2 \alpha}{g} - (Q + ql) \sin \alpha \\ & + \frac{\left[\left(Q + \frac{ql}{3} \right) \theta^2 l \sin 2\alpha / 2g + (Q + 0,5 ql) \cos \alpha \right] \cdot l}{W} \end{aligned}$$

Ví dụ 3

Một thanh mặt cắt thay đổi chịu va chạm dọc như hình 16.16. Hãy tính ứng suất động lớn nhất?

GIẢI

Độ co ngắn tĩnh của thanh là:

$$\Delta L_{TQ} = \left(\frac{Q}{E} \right) \cdot \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Theo công thức tính hệ số động lực ta có:

$$k_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta L_T}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^3}{1,8}} = 101$$

Ứng suất tĩnh ở phần dưới của cột là:

$$\sigma_{TQ} = \frac{100}{50} 2 \text{ daN/cm}^2$$

Ứng suất động là $\sigma_{d\max} = k_{dv} \cdot \sigma_{TQ} = 2.101 = 202 \text{ daN/cm}^2$.

Ví dụ 4

Một dầm chịu va chạm như hình 16.17. Hãy xác định các đại lượng động lực sau đây: M_{dA} , V_{dB} , V_{dK} ?

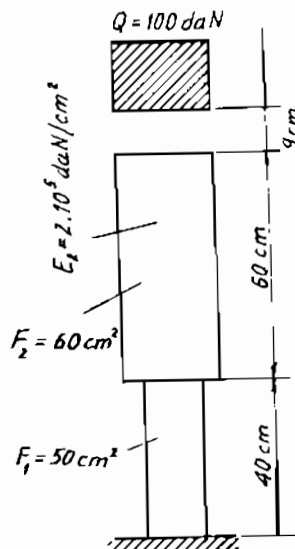
GIẢI

Chuyển vị tĩnh thẳng đứng tại điểm K là:

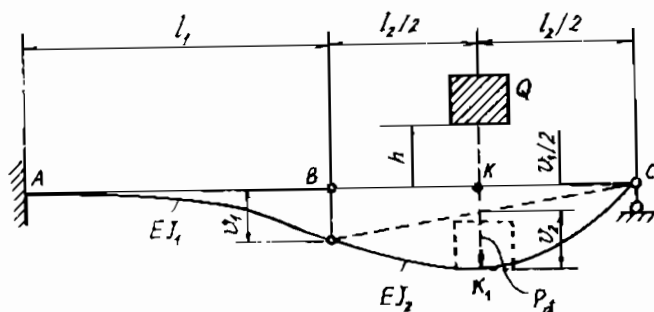
$$\begin{aligned} \Delta_{TQ} &= \frac{V_1}{2} + V_2 = \\ &= G \cdot \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right) \end{aligned}$$

Do đó hệ số động lực có giá trị:

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{TQ}}}$$



Hình 16.16.



Hình 16.17.

Mômen động lực tại A là:

$$M_{dA} = K_{dv} \cdot M_{TA} = 0,5 K_{dv} \cdot Q \cdot l_1$$

Độ võng động tại điểm B và K lần lượt là:

$$\Delta_{dB} = K_{dv} \cdot Q \cdot \frac{l_1^3}{6EJ_1} ; \quad \Delta_{dk} = K_{dv} \cdot Q \cdot \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right).$$

Ví dụ 5

Một vật nặng $Q = 10 \text{ kN}$ rơi từ độ cao $h = 10 \text{ cm}$ xuống dầm thép mặt cắt ngang I_{20} (hình 16.18a). Tính độ võng và ứng suất động tại mặt cắt C đối với hai trường hợp:

a) Gối B và D là gối cứng.

b) Gối B và D là các gối đàn hồi có độ cứng $C_B = 2000 \text{ N/cm}$ và $C_D = 5000 \text{ N/cm}$.

GIẢI

a) Các đặc trưng của dầm I_{20} :

$J_x = 1840 \text{ cm}^4$, $W_x = 184 \text{ cm}^3$, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$. Độ võng tĩnh do Q gây ra tại C và A được tính bằng phương pháp Mohr – Vérechtchaguinne là:

$$|\Delta_T^C| = 0,363 \text{ cm} ; \quad |\Delta_T^A| = 0,454 \text{ cm} \text{ (điểm A đi xuống, điểm C đi lên).}$$

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T^A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,454}} = 7,8 \text{ cm}$$

Do đó ta có:

$$V_d^C = -0,363 \times 7,8 = -2,80 \text{ cm}$$

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{tmax} \cdot K_{dv} = \frac{M_c}{W_x} \cdot K_{dv} = \frac{5 \cdot 10^5}{184} \cdot 7,5 = 21000 \text{ N/cm}^2$$

b) Trường hợp gối B và D tựa trên lò xo. Gọi Δ^A , Δ^B , Δ^C , Δ^D là chuyển vị tại A, B, C, D của dầm cứng tuyệt đối do độ lún của lò xo ở hai bên gối B và D gây ra, ta có:

$$\Delta^B = \frac{R_B}{C_B} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^3} = 6,25 \text{ cm}$$

$$\Delta^D = \frac{R_D}{C_{BD}} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 0,5 \text{ cm}$$

Từ hình vẽ suy ra:

$$\Delta^A = 7,94 \text{ cm} ; \Delta^C = 2,875 \text{ cm}$$

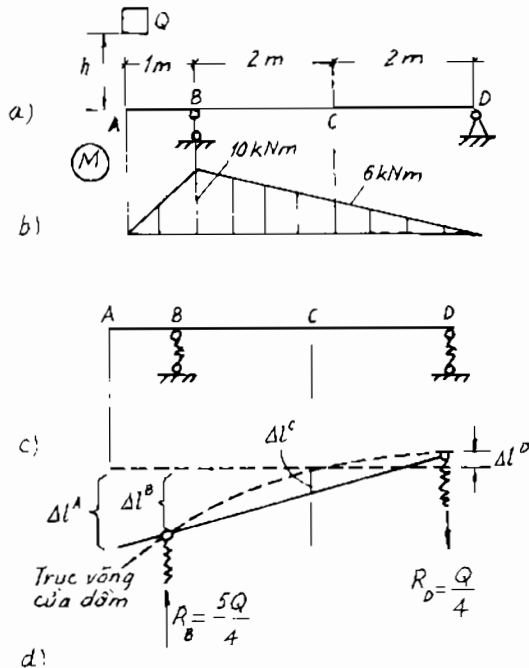
Độ võng tĩnh thực tại A, C (có kể đến độ lún hoặc giãn của lò xo).

$$\Delta_{TA} = \Delta_{TQ}^A = 0,454 + 7,94 = 8,394 \text{ cm}$$

$$\Delta_{TC} = \Delta_{TQ}^C = 2,875 - 0,364 = 2,512 \text{ cm}$$

Tính:

$$K_{dv} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{8,394}} \approx 2,84$$



Hình 16.18.

Do đó ta có:

$$V_d^C = 2,512 \times 2,84 = 7,13 \text{ cm}$$

$$\sigma_{d\max} = \sigma_{t\max} \cdot K_{dv} = \frac{5 \cdot 10^5}{184} \times 2,84 = 7725 \text{ N/cm}^2.$$

Ví dụ 6

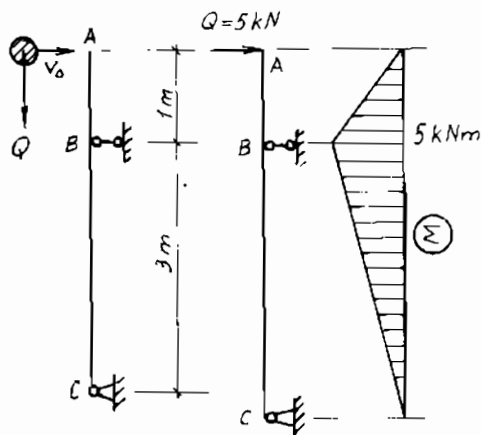
Một vật nặng $Q = 5 \text{ kN}$ bay ngang với vận tốc đều đến chạm vào đầu mút thừa A của một dầm chữ I (hình 16.19). Xác định vận tốc tối đa của vật nặng Q theo điều kiện bền? Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

GIẢI

Mặt cắt có: $I_x = 1080 \text{ cm}^4$; $W_x = 120 \text{ cm}^3$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

Từ điều kiện bền:

$$\max \sigma_d = \max \sigma_t \cdot k_{dv} \leq [\sigma]$$



Hình 16.19.

hay:

$$\frac{\max M_x}{W_x} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \Delta t_Q}} \leq [\sigma]$$

hay:

$$\frac{5.10^2}{120} \cdot \frac{v_o}{\sqrt{981.0,306}} \leq 16 \text{ kN/cm}^2$$

Ta rút ra:

$$v_o = 66,5 \text{ cm/s.}$$

Chương 17

TÍNH TOÁN KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

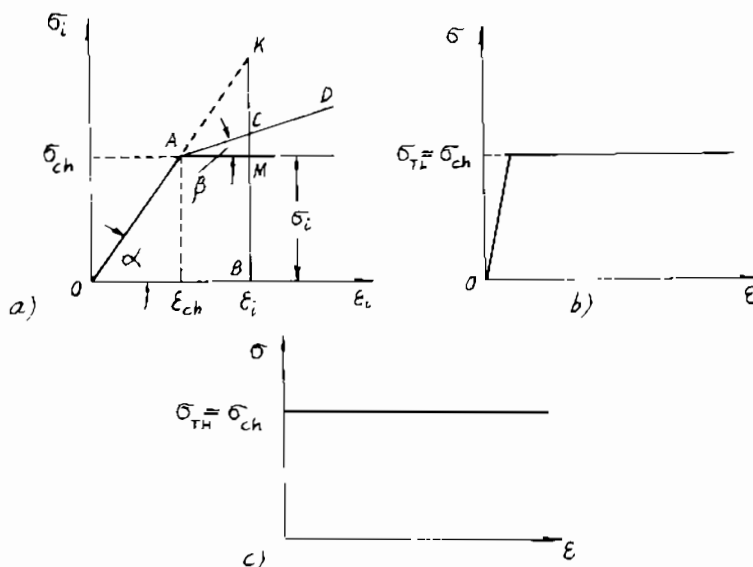
§1. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu những vật rắn biến dạng mà thuộc tính vật liệu của chúng không tuân theo định luật Hooke. Đối với vật liệu này, sau khi triệt tiêu toàn bộ tác động ngoài, vật thể không thể phục hồi lại hình dạng ban đầu, nghĩa là trong vật thể xuất hiện biến dạng dư.

Vật thể được gọi là đàn hồi – dẻo nếu trong quá trình chịu tải như thế nào đó để trong nó tồn tại cả biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo.

Khi tính toán kết cấu, ngoài giới hạn đàn hồi theo truyền thống, người ta thường bắt đầu bằng việc nghiên cứu trạng thái đàn hồi, sau đó là trạng thái đàn dẻo và cuối cùng là xác lập tải trọng giới hạn. Đó là tải trọng mà dưới tác dụng của nó kết cấu không thể tiếp tục làm việc được nữa, nghĩa là khả năng làm việc của kết cấu đã được khai thác hết.

Về phương diện lý thuyết, điều đáng nói ở cách giải này là nó cho ta một bức tranh đầy đủ về cách ứng xử của kết cấu trong suốt quá trình chịu lực. Tuy nhiên, cách giải như thế quá cồng kềnh và phức tạp mà thực tế kỹ thuật thường lại chỉ yêu cầu xác định khả năng chịu tải thực của kết cấu.



Hình 17.1.

Để giảm bớt sự phức tạp không cần thiết khi tính toán kết cấu ngoài giới hạn đàn hồi người ta thường thay thế các biểu đồ thí nghiệm kéo bằng những đường cong hoặc thẳng, có biểu thức toán học đơn giản nhưng xấp xỉ tốt đường cong thí nghiệm đã biết trong chương 2 (hình 17.1).

Trong quá trình sơ đồ hóa này, dấu hiệu phân biệt giữa σ_{TL} và σ_{ch} không còn nữa. Điều này cho phép gọi giới hạn tỷ lệ là giới hạn chảy.

§2. UỐN THUẦN TÚY DẦM LÀM BẰNG VẬT LIỆU ĐÀN HỒI DỄ LÝ TƯỢNG (hình 17.1b)

1. Mômen uốn giới hạn M_{gh}

Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng phương pháp ngược theo ứng suất. Cụ thể là:

Trong miền đàn hồi, nghiệm của bài toán này là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M \cdot y}{J_x} \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong miền dẻo đối với vật liệu có $\sigma_{ch}(k) = \sigma_{ch}(n)$, thì các ứng suất trong miền dẻo bây giờ là:

$$\sigma_{td} = |\sigma_z| = \sigma_{ch}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (b)$$

Trên hình (17.2) là biểu đồ ứng suất pháp σ_z dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang. Tương ứng với biểu đồ này, các qui luật của ứng suất theo chiều cao như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\sigma_{ch} & \text{khi } y \leq -\frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} \frac{2y}{h_{ch}} & \text{khi } -\frac{h_{ch}}{2} \leq y \leq \frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} & \text{khi } y \geq \frac{h_{ch}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

ở đây $h_{ch}/2$ là khoảng cách từ biên giới giữa vùng đàn hồi và dẻo đến lớp trung hòa.

Do các ứng suất trong (c) không phụ thuộc z , cho nên qui luật này như nhau trên mọi mặt cắt ngang bất kỳ.

Điều kiện cân bằng giữa mômen ngoại lực M và mômen nội lực do các σ_z tạo thành cho ta:

$$M = \int_F \sigma_z y \cdot dF = \int_{-h_{ch}/2}^{h_{ch}/2} \frac{2\sigma_{ch} y^2}{h_{ch}} b(y) dy + 2\sigma_{ch} \int_{h_{ch}/2}^{h/2} y \cdot b(y) dy \quad (d)$$

Nếu đặt:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{-h_{ch}/2}^{h_{ch}/2} y^2 b(y) dy \\ S_x &= 2 \int_{h_{ch}/2}^{h/2} y \cdot b(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

trong đó: J_x là mômen quán tính của nhân đàn hồi của mặt cắt đối với trục x và $S_x/2$ là giá trị tuyệt đối của mômen tĩnh của một trong hai miền dẻo đối với trục này. Khi đó công thức (d) có dạng thu gọn như sau:

$$M = \frac{2\sigma_{ch}}{h_{ch}} J_x + \sigma_{ch} S_x \quad (17.2)$$

Công thức này thiết lập quan hệ chiều cao vùng đàn hồi h_{ch} và mômen uốn M . Khi tăng M thì h_{ch} dẫn tới giới hạn $h_{ch} = 0$. Mômen uốn này được gọi là mômen uốn giới hạn M_{gh} của dầm chịu uốn thuần túy:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x \quad (17.3)$$

Ứng suất đạt được giá trị giới hạn chảy ở mọi điểm trên mặt cắt và trên toàn dầm.

Các biểu đồ ứng suất trong trường hợp dầm dẻo lý tưởng vừa nghiên cứu được cho trên hình 17.2. Hình 17.2b là biểu đồ ứng suất khi biến dạng dầm hồi dẻo; hình 17.2c, d là biểu đồ ứng suất khi hạ tải và biểu đồ ứng suất dư. Hình 17.2e là biểu đồ ứng suất với trạng thái hoàn toàn dẻo. Từ biểu đồ này thấy rằng mặt phẳng trung hòa ở trạng thái giới hạn trở thành mặt phẳng gián đoạn của ứng suất. Trên thực tế không hình thành mặt phẳng gián đoạn này, bởi vì luôn còn một vùng đàn hồi chuyển tiếp rất nhỏ. Tuy nhiên khái niệm về mômen uốn giới hạn vẫn còn nguyên ý nghĩa, vì với chiều cao vùng dẻo không lớn thì mômen uốn cũng đã gần bằng M_{gh} .

Để khẳng định điều này ta hãy tính M_{gh} đối với mặt cắt hình chữ nhật có:

$$b(y).h = b.h, \quad J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad S_x = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_{ch}^2}{4} \right) \quad (d)$$

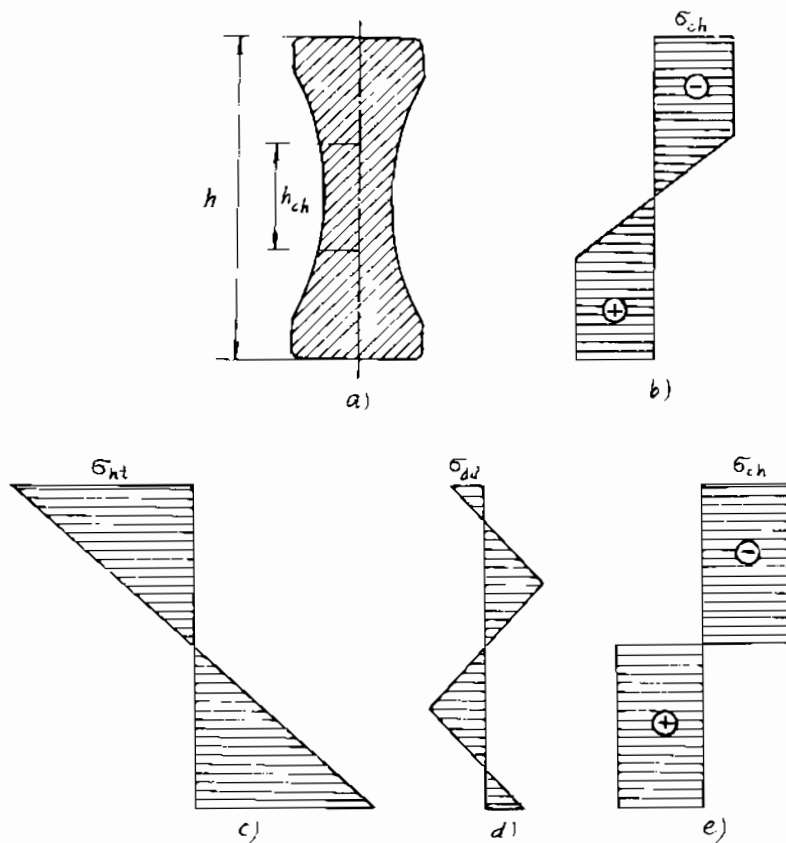
Thay các kết quả (b) vào biểu thức (17.2) ta tìm được:

$$M = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_{ch}}{h} \right)^2 \right) \quad (đ)$$

Khi $h_{ch} = 0$ thì $M_{gh} = \sigma_{ch}bh^2/4$.

Khi $\frac{h_{ch}}{h} = \frac{1}{3}$, ta có tỷ số:

$$\frac{M_{gh}}{M} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_{ch}}{h} \right)^2 = 0,963 \quad (17.4)$$



Hình 17.2.

Điều này cho thấy khi chiều cao vùng đàn hồi mới đạt được 1/3 chiều cao mặt cắt thì mômen uốn chỉ nhỏ hơn mômen giới hạn cỡ 4% và thực chất mặt cắt được xem như không chịu lực được nữa.

2. Mômen uốn giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ có trục đối xứng

Mômen uốn giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ có trục đối xứng được trình bày trên hình 17.3.

Điều kiện xác định vị trí trục trung hòa ở trạng thái dẻo là:

$$N = \int_F \sigma dF = 0$$

Với $F = F_k + F_n$, ở vùng F_k thì $\sigma = \sigma_{ch}$; còn ở vùng F_n thì $\sigma = -\sigma_{ch}$ (chú ý đang xét ở trạng thái dẻo), ta có:

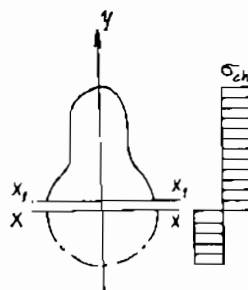
$$\int_{F_k} \sigma_{ch} dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} dF = 0$$

Ta rút ra $F_k = F_n$, nghĩa là trục trung hòa X-X chia mặt cắt thành hai phần bằng nhau. Ở trạng thái dẻo giới hạn này, điều kiện tương đương tĩnh phải là:

$$\begin{aligned} M_{gh} &= \int_F \sigma_{ch} y \cdot dF = \int_F \sigma_{ch} (+y) dF - \int_F \sigma_{ch} (-y) dF = \\ &= \sigma_{ch} \int_{F_k} y \cdot dF + \sigma_{ch} \int_{F_n} y \cdot dF = \sigma_{ch} (S_k^+ + S_n^+) = \sigma_{ch} \cdot S_x^* \end{aligned} \quad (17.5)$$

S_k^+ và S_n^+ là giá trị tuyệt đối của các mômen tĩnh của vùng kéo F_k và vùng nén F_n đối với trục trung hòa X-X. Đối với hình tròn đường kính d : $S_x^* = \frac{d^3}{6}$; hình vành khăn đường kính trong D , chiều dày δ : $S_x^* = D^2 \cdot \delta$; hình tam giác: $S_x^* = 0,097 bh^2$; hình chữ I: $S_x^* = (1,44 \div 1,17) W_x$; hình thang chiều cao h , đáy lớn b_2 , đáy nhỏ b_1 :

$$S_x^* = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2} \left[b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right].$$



Hình 17.3.

§3. PHÂN TÍCH ĐÀN ĐÈO LÝ TƯỜNG DẦM CHỊU UỐN NGANG

Chúng ta sẽ khảo sát những dầm dài mà mặt cắt ngang có hai trục đối xứng và bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp đến kết quả vì $\sigma_z \gg \tau_{yz}$. Sự khác nhau cơ bản giữa uốn thuần túy và uốn ngang là ở chỗ trong uốn ngang mômen uốn thay đổi dọc trục z của dầm. Do đó chiều cao vùng đàn hồi h_{ch} thay đổi theo z . Từ công thức (17.4), đối với dầm mặt cắt chữ nhật, chúng ta tìm được quan hệ chiều cao vùng đàn hồi và mômen uốn:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{M}{M_{gh}}} \quad (a)$$

Phương trình (a) cho quan hệ giữa chiều cao vùng đàn hồi và hoành độ z . Để có một khái niệm cụ thể, chúng ta hãy khảo sát vấn đề tất vãi trường hợp chịu tải của dầm trên hai gối tựa.

1. Dầm chịu tải trọng phân bố đều

Dầm chịu tải trọng phân bố đều được thể hiện trên hình 17.4 a.

Mômen uốn ở mặt cắt z bất kỳ:

$$M = \frac{q}{2} (l^2 - z^2) \quad (b)$$

Mômen giới hạn xuất hiện ở mặt cắt $z = 0$ với giá trị:

$$M_{gh} = \frac{q_{gh} l^2}{2} \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta có:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{q}{q_{gh}} \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)} \quad (d)$$

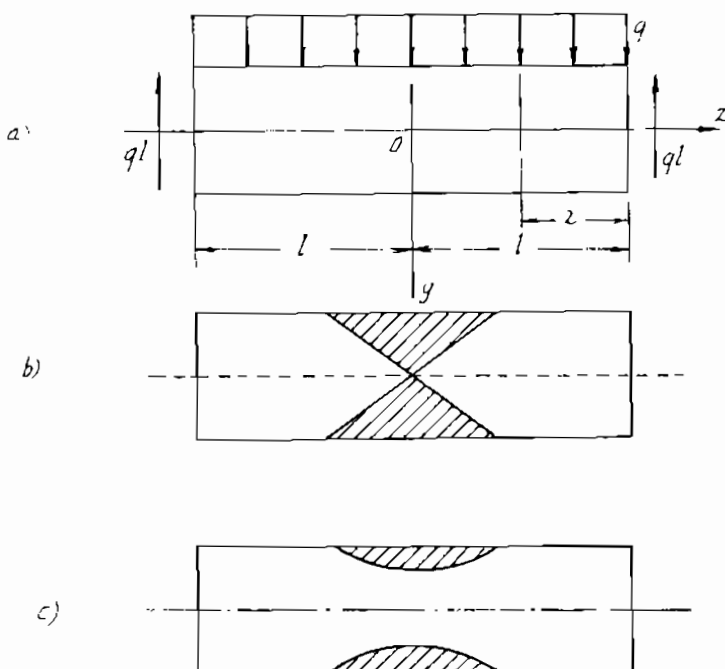
Kết quả này cho ta thấy: $h_{ch} = f(q, z)$.

Khi tải trọng đạt được giá trị giới hạn q_{gh} thì:

$$\frac{h_{ch}}{h} = \frac{z\sqrt{3}}{l} \quad (e)$$

Trên hình 17.4b là biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo. Khác với uốn thuần túy, trong trường hợp này chỉ xuất hiện ở mặt cắt $z = 0$. Tại đây mômen uốn không thể tăng được nữa và bằng M_{gh} . Khi đó một khớp quay tại $z = 0$ được hình thành, khớp quay như thế được gọi là khớp dẻo. Với $q = 0,9 q_{gh}$ thì: $\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{0,1 + 0,9 \frac{z^2}{l^2}}$.

Vùng dẻo hình thành trong trường hợp này được cho trên hình 17.4c.



Hình 17.4.

Khi $q \leq \frac{2}{3} q_{gh}$, nói chung vùng dẻo không hình thành và dầm chỉ chịu biến dạng đàn hồi.

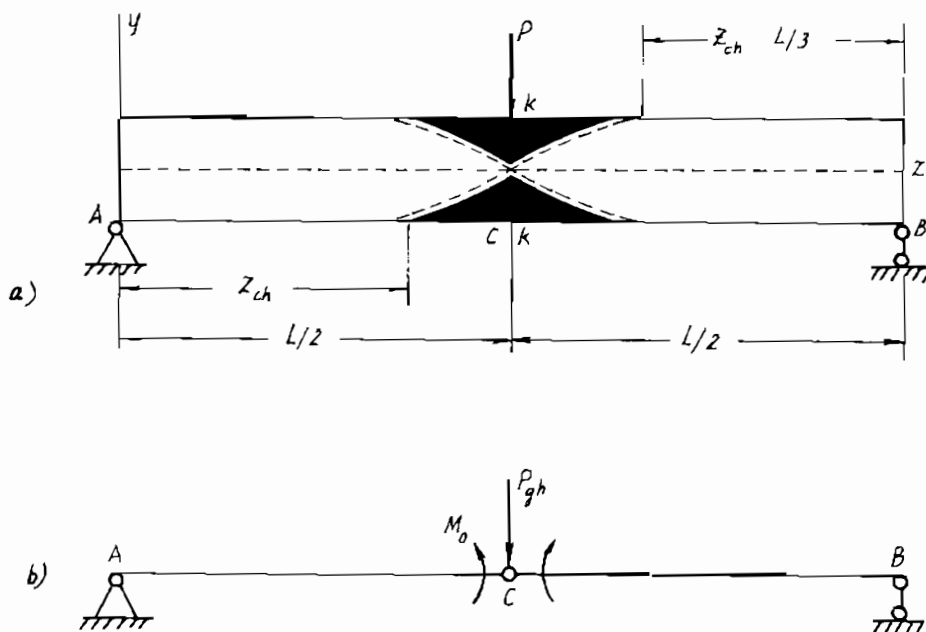
2. Dầm chịu một lực tập trung đặt ở giữa dầm

Bây giờ ta khảo sát vấn đề trường hợp chịu tải của dầm mặt cắt chữ nhật mà biểu đồ kéo của vật liệu không có sự củng cố (hình 17.1c) chịu lực tập trung.

Xét dầm trên hình 17.5a. Giả sử P đã đạt được P_{ch} , với giá trị này thì chỉ điểm K ở mặt cắt giữa dầm đạt được σ_{ch} .

Tại $z = L/2$, $M = M_{max} = P.L/4$; khi $P = P_{ch}$ thì giá trị mômen uốn tương ứng với lúc bắt đầu biến dạng dẻo trên dầm là:

$$M_{ch} = P \frac{L}{4} \quad \text{và} \quad P_{ch} = 4 \frac{M_{ch}}{L} \quad (e)$$



Hình 17.5.

Khi P tăng lớn hơn P_{ch} thì một miền biến dạng dẻo được hình thành (nghĩa là trong đó $\sigma = \sigma_{ch}$).

a. Biên giới của các đoạn đàn hồi và dẻo

Biên giới của các đoạn đàn hồi và dẻo được xác định như sau:

$$M(z) = \frac{1}{2} P \cdot z_{ch} = M_{ch} = \frac{1}{4} P_{ch} L$$

$$\text{Do đó: } \frac{z_{ch}}{L} = \frac{P_{ch}}{2P} ; z_{ch} = L \frac{P_{ch}}{2P} .$$

trong đó: khi $0 \leq z \leq z_{ch}$ ta có dầm ở trạng thái đàn hồi; khi $z_{ch} \leq z \leq L/2$ ta có dầm ở trạng thái đàn hồi và dẻo.

Biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo trong đoạn đàn hồi – dẻo được xác định như sau:

Khi $M > M_{ch} = \sigma_{ch} \cdot W_x$:

$$M = 2 \int_0^{h/2} b \cdot \sigma \cdot y \cdot dy = \frac{M_{ch}}{2} \left[3 - \left(\frac{\rho}{\rho_{ch}} \right)^2 \right] \quad (17.6)$$

ta có:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{ch} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_{ch}}}}$$

trong đó ρ_{ch} là bán kính cong lúc dầm bắt đầu hình thành biến dạng dẻo. Cụ thể là: $\frac{1}{\rho_{ch}} = \frac{M_{ch}}{EJ_x}$.

$$\text{Từ } M_{ch} = \frac{P_{ch} L}{4} ; M(z) = \frac{P \cdot z}{2} ; \frac{h_{ch}}{h} = \frac{\rho}{\rho_{ch}}, \text{ rút ra } h_{ch} \text{ tại } z > z_{ch}:$$

$$h_{ch} = h \sqrt{3 - 4 \frac{P \cdot z}{P_{ch} L}} \quad (h)$$

Khi P tăng thì miền dẻo (tô đen trên hình 17.5) lan dần ra toàn bộ chiều cao dầm, nghĩa là: $h_{ch} \rightarrow 0$.

b. Tải trọng giới hạn

Ta gọi giá trị của lực ứng với lúc mặt cắt $z = L/2$ chiều cao vùng đàn hồi bị cạn kiệt, dầm không còn khả năng chịu tải nữa và nó trở thành một cơ cấu là tải trọng giới hạn (hình 17.5b).

Tại đây ($z = L/2$) mômen uốn không tăng được nữa và bằng mômen giới hạn (ở đó hình thành một khớp quay ta gọi khớp dẻo):

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot M_{gh}}{L}$$

Theo (17.6), đối với mặt cắt chữ nhật:

$$M_{gh} = \frac{3}{2} M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4}$$

Do đó:

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} M_{gh} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} \cdot P_{ch} \cdot \frac{L}{4} = \frac{3}{2} P_{ch}$$

$$P_{gh} = \frac{3}{2} P_{ch} \quad (i)$$

Khi $P = P_{ch}$ thì $z_{ch} = L/3$ (biên của đoạn đàn hồi bằng 1/3 chiều dài dầm) và theo (h) ta rút ra:

$$h_{ch} = \sqrt{3} \cdot h \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{z}{L}} \quad \text{với } z > L/3 \quad (k)$$

Đường nét đứt trên hình 17.5a là đồ thị của hàm (k).

3. Dầm siêu tĩnh

Đối với các hệ tĩnh định thì khả năng chịu tải của nó bị cạn kiệt lúc có một khớp dẻo được hình thành. Điều này lại không xảy ra đối với hệ siêu tĩnh khi mới chỉ có một số khớp dẻo $m \leq$ bậc siêu tĩnh của hệ được hình thành.

Dưới đây chúng ta hãy xét một ví dụ đơn giản về dầm siêu tĩnh hình 17.6a để minh họa cho những nhận xét vừa nêu và vẫn giữ giả thiết $\sigma_z \gg \tau_{yz}$.

Biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi cho trên hình 17.6b. Tại B: $M_{max} = 13 PL/64$, trên mặt cắt này sẽ xuất hiện điểm đầu tiên đạt giới hạn chảy $\sigma = \sigma_{ch}$ và mômen tương ứng lúc này là:

$$M_{ch} = \frac{13 P_{ch} L}{64}$$

do đó:

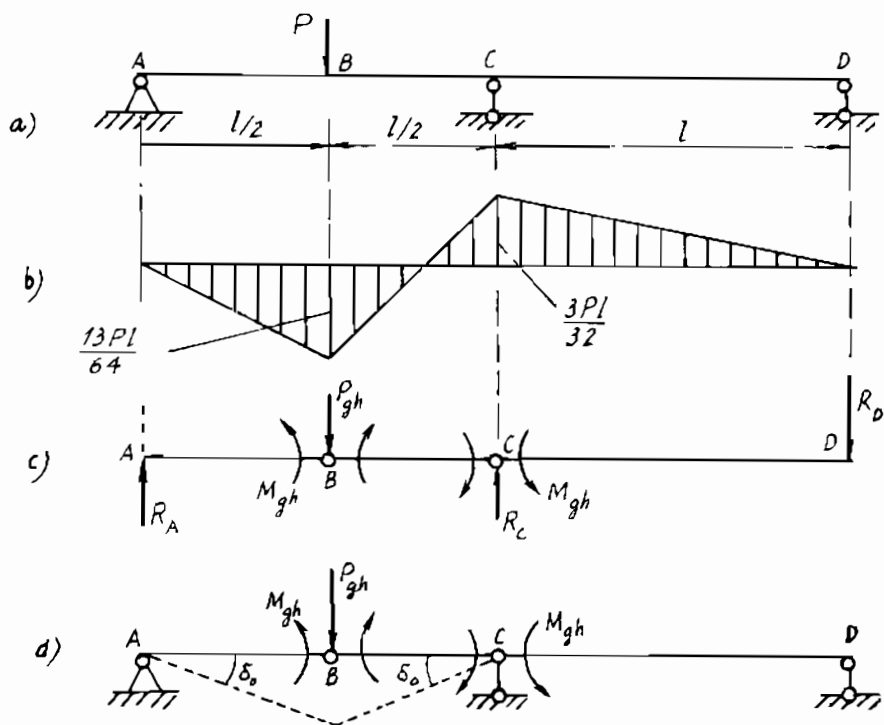
$$P_{ch} = \frac{64}{13} \cdot \frac{M_{ch}}{L}.$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật:

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{6}$$

do đó:

$$P_{ch} = \frac{32}{39} \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{L}.$$



Hình 17.6.

Khi P tăng ($P > P_{ch}$) thì miến dẻo hình thành ở B sau đó ở C . Dầm trở thành cơ cấu khi các khớp dẻo B và C đã được hình thành (hình 17.6c), chiều các mômen tại các khớp dẻo cho ta biết chiều mở của các khớp dẻo.

Tải trọng giới hạn được xác định từ điều kiện cân bằng mômen giới hạn và mômen uốn tại các mặt cắt có khớp dẻo và các phương trình cân bằng. Cụ thể là:

$$\sum m_c(F_k) = 0 = R_A \cdot L - P_{gh} L/2 + R_D \cdot L = 0 \quad (a)$$

Mặt khác:

$$M_{gh}^B = R_A L/2 \rightarrow R_A = 2M_{gh}/L$$

$$M_{gh}^C = R_D L \rightarrow R_D = M_{gh}/L$$

Phương trình (a) trở thành:

$$\frac{2M_{gh}L}{L} - P_{gh} \frac{L}{2} + \frac{M_{gh}}{L} \cdot L = 0 \rightarrow P_{gh} = \frac{6M_{gh}}{L} \quad (b)$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{4} \rightarrow P_{gh} = 1,5 \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{L}$$

Nếu gọi n là hệ số an toàn thì lực cho phép theo phương pháp cân bằng giới hạn là:

$$[P_{gh}] = \frac{P_{gh}}{n} = 1,5 \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{n \cdot L}$$

Theo quan điểm của phương pháp ứng suất cho phép, tải trọng giới hạn là P_{ch} , vì thế tải trọng cho phép là:

$$[P_{ch}] = \frac{P_{ch}}{n} = \frac{32}{39} \sigma_{ch} \frac{b \cdot h^2}{n \cdot L}$$

Từ các kết quả này ta rút ra:

$$[P_{gh}] = 183\% [P_{ch}]$$

Tải trọng giới hạn còn có thể được xác định theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ. Cụ thể là:

Giả sử dầm vừa mới chuyển thành một cơ cấu, cho dầm một chuyển vị khả dĩ, ta phải có (theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, từ hình 17.6d).

$$\sum F_k \delta r_k = 0 \rightarrow P_{gh} \delta S - 3M_{gh} \delta \theta = 0$$

Vì $\delta S = (L/2) \cdot \delta \theta$, do đó:

$$P_{gh} = \frac{3 M_{gh}}{L/2} \cdot \frac{\delta \theta}{\delta \theta} = \frac{6 M_{gh}}{L} \quad (c)$$

Kết quả (c) $\equiv$ (b).

§4. PHÂN TÍCH ĐÀN HỒI DẪO LÝ TƯỜNG THANH MẶT CẮT TRÒN CHỊU XOẮN

Chúng ta sẽ tìm nghiệm của bài toán về xoắn đàn hồi dẻo của một thanh mặt cắt tròn với giả thiết rằng mặt cắt ngang vẫn luôn luôn phẳng ngay cả ngoài giới hạn đàn hồi và vật liệu của thanh đàn hồi dẻo là lý tưởng.

Ở trạng thái đàn hồi, ứng suất tiếp tại một mặt cắt ngang đã biết từ chương 7:

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (a)$$

Hai thành phần của ứng suất này theo các trục x và y là:

$$\tau_{xz} = - \frac{M_z}{J_p} y \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p} x \quad (b)$$

Các thành phần còn lại bằng không.

Theo điều kiện dẻo của Xanhvơ năng ta nhận được τ trong miền dẻo:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} = \tau_{ch} \quad (c)$$

Như vậy qui luật phân bố ứng suất trong miền đàn hồi là quan hệ (a), còn trong miền dẻo là (c). Biểu đồ biểu diễn sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang dọc theo bán kính được cho trên hình 17.7a.

Trạng thái ứng suất trong thanh có thể được mô tả như sau:

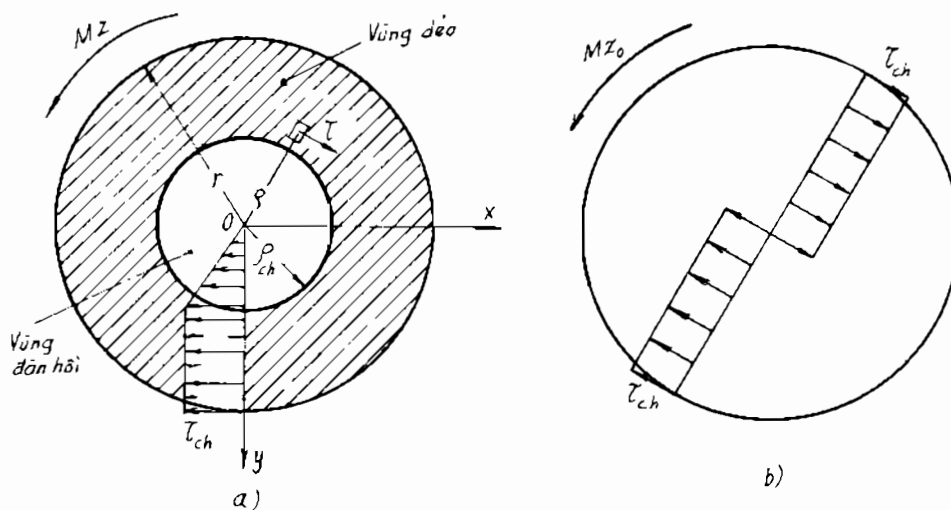
$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\rho}{\rho_{ch}} \tau_{ch} & \text{khi } \rho \leq \rho_{ch} \\ \tau &= \tau_{ch} & \text{khi } \rho \geq \rho_{ch} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

trong đó ρ_{ch} là bán kính của nhân đàn hồi.

Ở hai đầu cuối, ứng suất tiếp τ phải cân bằng với mômen xoắn ngoài:

$$M_z = \int_F \tau \rho dF = \frac{\tau_{ch}}{\rho_{ch}} \int_{F_d} \rho^2 dF + \tau_{ch} \int_{F_d} \rho dF \quad (d)$$

Để cho gọn ta đặt:



Hình 17.7.

$J_{pd} = \int_{F_d} \rho^2 dF = \frac{\pi \rho_{ch}^4}{2}$ là mômen quán tính độc cực của diện tích phần nhân đàn hồi.

$S_{pd} = \int_{F_d} \rho dF = \frac{2}{3} \pi (r^3 - \rho_{ch}^3)$ là mômen tĩnh độc cực của diện tích vùng dẻo.

F_d , F_d lần lượt là diện tích vùng đàn hồi và vùng dẻo.

Với những ký hiệu này, quan hệ (đ) có dạng:

$$M_z = \tau_{ch} \left(\frac{J_{pd}}{\rho_{ch}} + S_{pd} \right) \quad (17.7)$$

Thay các công thức J_{pd} và S_{pd} vào (17.7) và sau khi đơn giản ta được:

$$M_z = \tau_{ch} \frac{2}{3} \pi r^3 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \right] \quad (e)$$

Khi $\rho_{ch} = 0$, ứng suất tại mọi điểm trên mặt cắt ngang đều đạt được giới hạn chảy τ_{ch} trạng thái này được gọi là trạng thái giới hạn. Mômen xoắn giới hạn tương ứng là M_{zgh} :

$$M_{zgh} = \frac{2\tau_{ch}}{3} \pi r^3 \quad (g)$$

Công thức (e) và (g) cho ta tỷ số:

$$\frac{M_z}{M_{zgh}} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \quad (17.8)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất ở trạng thái dẻo được biểu diễn trên hình 17.7b. Cũng như trong bài toán uốn với bán kính nhân đàn hồi đủ bé, ngay cả bằng một nửa bán kính mặt cắt ($\rho_{ch} = r/2$), công thức (17.8) cho độ lớn $M_z = 0,969 M_{zgh}$, nghĩa là nhỏ hơn mômen giới hạn 3%. Khi mômen xoắn $M_z \leq 3 M_{zgh}/4$ thì mặt cắt là đàn hồi.

§5. NGHIÊN CỨU KHẢ NĂNG CHỊU TẢI CỦA KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP LÀM BẰNG VẬT LIỆU CỨNG DẸO LÝ TƯỞNG (hình 17.1c)

Trong đại đa số các trường hợp, để có một nghiệm chính xác ngoài giới hạn đàn hồi, với mọi điều kiện thực của một quá trình biến dạng là điều hết sức khó khăn. Ví dụ, việc xác định bằng tính toán chỉ trường ứng suất đàn hồi trong vùng có sự tập trung ứng suất đã là một bài toán rất phức tạp. Tuy nhiên, đối với những chi tiết làm bằng vật liệu có tính dẻo lớn, sự tập trung ứng suất gây ra do tải trọng tĩnh sẽ không nguy hiểm và có thể không cần chú ý tới. Bởi lẽ là sau khi đã đạt được giới hạn chảy ứng suất lớn nhất trong miền có

hiện tượng tập trung ứng suất sẽ không tăng được nữa. Trong khi đó, cùng với quá trình tăng tải hiện tượng chảy vẫn tiếp tục lan dần vào phần còn lại của vật thể. Điều này dẫn đến sự san bằng ứng suất không những chỉ ở vùng có sự tập trung ứng suất mà còn trong tất cả các trường hợp ứng suất đàn hồi phân bố không đều trên mặt cắt của chi tiết. Trong thực tế kỹ thuật người ta cũng chỉ mong biết được lực lớn nhất có thể tác dụng lên kết cấu mà với lực đó khả năng làm việc của kết cấu vừa vặn bị cạn kiệt. Vì thế trong điều kiện có biến dạng dẻo lớn và chất tải tĩnh thì khả năng chịu tải của kết cấu được xác định không phải bởi ứng suất lớn nhất trong chúng mà bởi tải trọng giới hạn. Với tải trọng này biến dạng tổng thể của chi tiết sẽ tăng đột ngột khi tải trọng không tăng. Do tính thực dụng đó của việc xác định lực phá hủy cũng như việc xây dựng công thức đánh giá độ tin cậy của kết cấu sẽ được nghiên cứu trong tiết này.

1. Uốn dầm cứng dẻo

Trước hết hãy xét một thanh chịu một lực kéo đã đạt được giá trị $P_{ch} = F \cdot \sigma_{ch}$ (F là diện tích mặt cắt ngang). Với lực kéo này thì toàn thanh bị chảy dẻo và không có một điểm nào trong thanh có ứng suất lớn hơn σ_{ch} .

Vấn đề sẽ khác đi đối với thanh chịu uốn. Qui luật thay đổi ứng suất trên mặt cắt ngang từ lúc bắt đầu chất tải đến lúc đạt được trạng thái dẻo trên toàn bộ mặt cắt, tức là trạng thái giới hạn đã được nghiên cứu trong mục trên đối với biểu đồ biến dạng đàn dẻo lý tưởng. Nếu bỏ qua biến dạng đàn hồi và chỉ kể đến biến dạng dẻo, trong trường hợp này ta sẽ nhận được chỉ mômen giới hạn M_{gh} :

$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x = W_x \left(\frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch} \right) = \sigma_{ch}^u W_x \quad (17.9)$$

Đại lượng $\sigma_{ch}^u = \frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch}$ gọi là giới hạn chảy khi uốn.

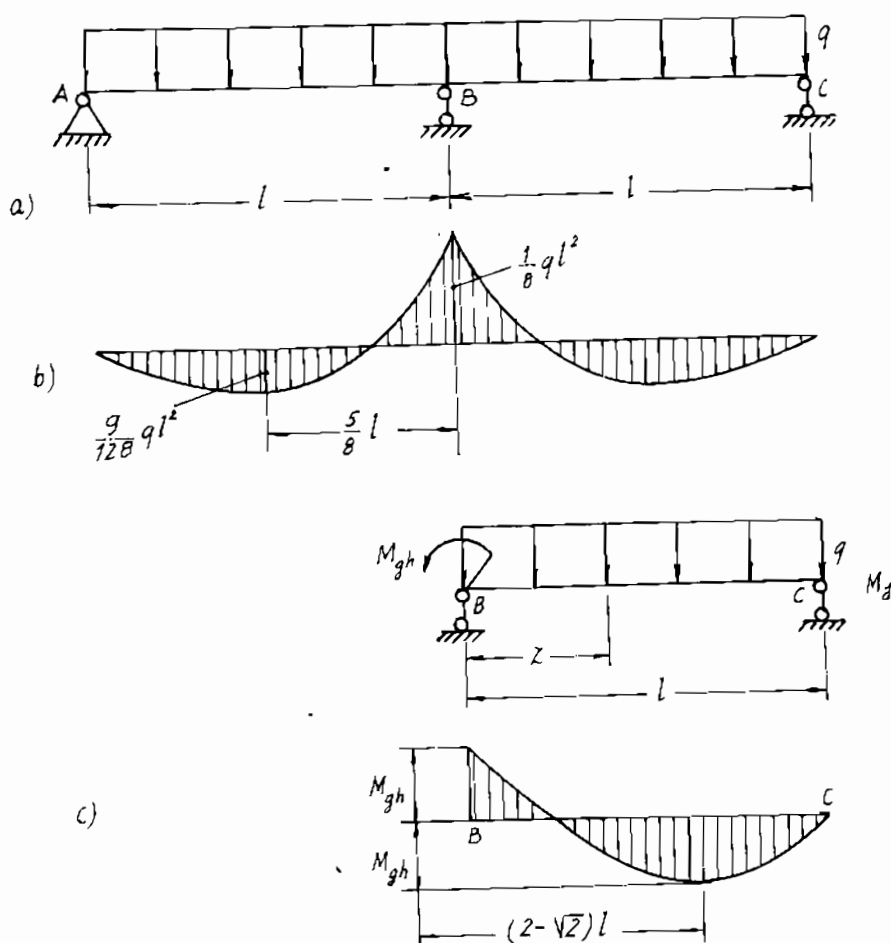
Tỷ số $\frac{S_x}{W_x}$ bằng 1,5 đối với mặt cắt chữ nhật; bằng 1,7 đối với mặt cắt tròn; bằng 1,15 đối với mặt cắt chữ I.

Việc tính toán theo tải trọng giới hạn cho phép xác định chính xác độ an toàn thực của chi tiết làm bằng vật liệu cứng dẻo.

Sau đây là một ví dụ về việc xác định tải trọng giới hạn với dầm liên tục chịu tải trọng phân bố đều (hình 17.8a), với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt tới kết quả.

Hình 17.8b là biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi. Mômen lớn nhất ở gối tựa giữa B là:

$$M_B = q.l^2/8.$$



Hình 17.8.

Nếu mômen này đạt được giá trị $M_{gh} = \sigma_{ch} S_x$ thì ở mặt cắt này xuất hiện một khớp dẻo. Khác với khớp thông thường, khớp dẻo có mômen khác không và bằng M_{gh} . Sự chảy dẻo ở mặt cắt này đã làm giảm một bậc siêu tĩnh trong hệ. Trong trường hợp của chúng ta dầm trở thành tĩnh định và khả năng làm việc của hệ chưa bị cạn kiệt. Khi tiếp tục tăng tải trọng, mỗi một nhịp của hệ làm việc như một dầm đơn giản trên hai gối tựa.

Mômen uốn ở mặt cắt z kể từ gối tựa giữa là:

$$M(z) = \frac{q l^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \quad (a)$$

Khi M đạt được giá trị M_0 tại mặt cắt $z = z_0$ nào đó, thì ở mặt cắt này hình thành khớp dẻo thứ hai và khả năng chịu tải của dầm bị cạn kiệt, vì khi ấy dầm đã biến thành một cơ cấu. Tải trọng gây ra trạng thái như thế được xác định bởi đẳng thức:

$$M_{gh} = \frac{q_{gh} l^2}{2} \left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$$

Kết quả cho ta:

$$q_{gh} = \frac{2 M_{gh}}{l^2} \cdot \frac{2 - \frac{z}{l}}{\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}} \quad (b)$$

Từ điều kiện cực tiểu q_{gh} ta có:

$$z_0 = l (2 - \sqrt{2}) \quad \text{và} \quad q_{gh} = 11,7 \frac{M_{gh}}{l^2} = 11,7 \frac{\sigma_{ch} S_x}{l^2} \quad (c)$$

Nếu gọi q là tải trọng gây ra ứng suất lớn nhất ở một điểm trên mặt cắt và vừa bằng giới hạn chảy thì q_{ch} được xác định từ điều kiện:

$$\frac{q^2 \cdot l}{8} = \frac{q_{ch} \cdot l^2}{8} = \sigma_{ch} W_x$$

nghĩa là:

$$q_{ch} = \frac{8\sigma_{ch}W_x}{l^2}$$

Tỷ số các tải trọng nhận được từ hai quan điểm tính là:

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 1,46 \frac{S_x}{W_x} \quad (d)$$

Đối với mặt cắt chữ nhật: $\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 2,2$.

2. Uốn và cắt đồng thời

Khi kể đến sự làm việc đồng thời của ứng suất pháp và ứng suất tiếp thì mômen giới hạn bị giảm. Vấn đề là cần phải thiết lập được quan hệ giữa các giá trị của mômen uốn và lực cắt ở trạng thái giới hạn $f(M_{gh}^*, Q_{gh}^*) = 0$. Biểu thức của M_{gh}^* và Q_{gh}^* có dạng:

$$M_{gh}^* = \int_F y \cdot \sigma \cdot dF; \quad Q_{gh}^* = \int_F \tau \cdot dF \quad (17.10)$$

ở đây F là diện tích mặt cắt ngang; y là tung độ tính từ trục chia mặt cắt thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Ở trạng thái giới hạn, ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt phải tuân theo điều kiện chảy. Ví dụ điều kiện dẻo Huber – Mises, trong trường hợp riêng này của trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt có dạng:

$$\sigma_{td}^2 = \sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_{ch}^2 = 3\tau_{ch}^2 \quad (a)$$

trong đó τ_{ch} là giới hạn chảy khi trượt thuần túy.

Để xác định sự phân bố của ứng suất trên mặt cắt, từ (a) ta tìm ứng suất tiếp:

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \quad (b)$$

và đòi hỏi với ứng suất tiếp ấy lực cắt là lớn nhất với giá trị cho trước của mômen uốn:

$$Q_{gh}^* = \int_F \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} dF \quad (c)$$

Như đã chỉ rõ trong phép tính biến phân, để có điều đó thì điều kiện sau đây phải được thỏa mãn:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\lambda \cdot y \cdot \sigma + \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \right] = 0 \quad (d)$$

Từ đây rút ra:

$$\sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3} \lambda \cdot y}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \quad (đ)$$

và theo (b):

$$\tau = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3(1 + 3 \lambda^2 y^2)}} \quad (e)$$

ở đây λ là thông số đặc trưng cho tỷ số M_{gh}^* và Q_{gh}^* .

Từ (đ) và (e) ta được (17.10) dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} M_{gh}^* &= \sigma_{ch} \sqrt{3} \lambda \int_F \frac{y^2 dF}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \\ Q_{gh}^* &= \tau_{ch} \int_F \frac{dF}{\sqrt{1 + 3 \lambda^2 y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Quan hệ (17.10) là phương trình đường cong giới hạn $Q_{gh}^* = f(M_{gh}^*, \lambda)$ dưới dạng thông số.

Trường hợp mặt cắt ngang là hình chữ nhật ($b \times h$), đường cong giới hạn này được xây dựng như sau:

- Khi không kể đến lực cắt thì mômen giới hạn là:

$$M_{gh} = S_x \sigma_{ch} = \frac{b \cdot h^4}{4} \sigma_{ch}$$

- Ngược lại, khi không kể đến mômen thì lực cắt giới hạn là:

$$Q_{gh} = F_x \tau_{ch} = b \cdot h \cdot \tau_{ch}$$

Nếu ký hiệu: $\xi = \frac{y}{h}$; $m = \frac{M_{gh}^*}{M_{gh}}$; $q = \frac{Q_{gh}^*}{Q_{gh}}$, từ quan hệ (17.10) ta

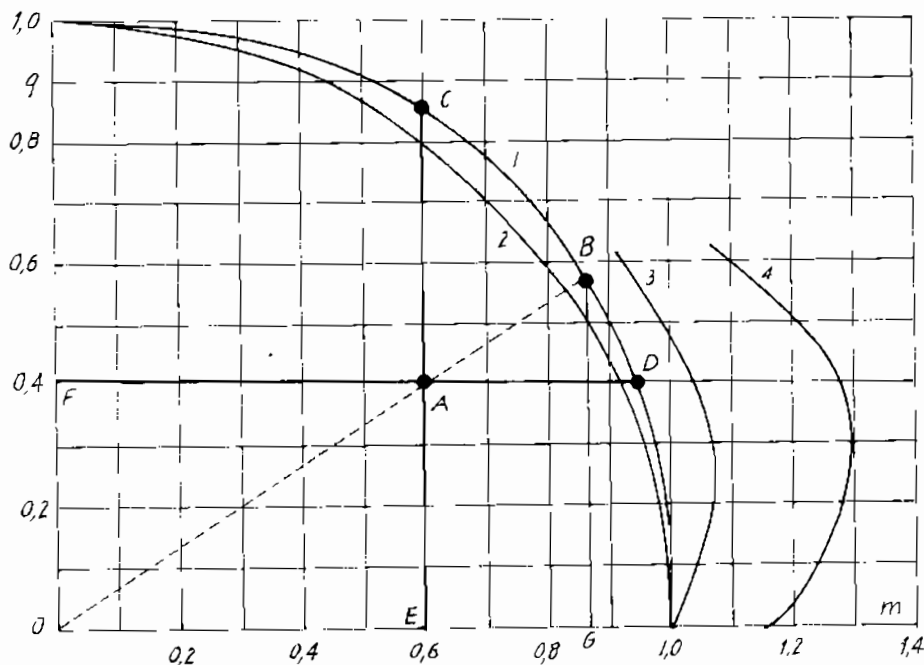
tìm được:

$$\left. \begin{aligned} m &= 8 \lambda_1 \int_0^{1/2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\text{sh} 2\mu - 2\mu}{2\text{sh}^2 \mu} \\ q &= 2 \int_0^{1/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\mu}{\text{sh} \mu} \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Ở đây λ_1 là thông số mới thay thế cho λ , cụ thể là:

$$\lambda_1 = 2\text{sh} \mu = \sqrt{3} \lambda \cdot h$$

Trên hình (17.9) là đường cong giới hạn được xây dựng từ phương trình (17.11). Bạn đọc có thể nhận được các đường cong giới hạn với các tỷ số b/h khác nhau trực tiếp từ (17.10) bằng phần mềm Mathcad 2001.



Hình 17.9.

Với mặt cắt hình chữ I lý tưởng, nghĩa là có thành rất mảnh còn chiều cao lớn hơn cánh nhiều lần, đường cong giới hạn là một vòng tròn (hình 17.9).

$$m^2 + q^2 = 1 \quad (17.12)$$

Các đường cong giới hạn đối với các mặt cắt hình chữ I với các quan hệ khác nhau của kích thước mặt cắt sẽ nằm giữa đường cong 1 và 2.

Từ đồ thị ở hình (17.9) cho thấy, với lực cắt cho trước thì mômen uốn có thể xác định theo phương trình (17.12). Khi đó độ an toàn đảm bảo tới 13% với tỷ số b/h nhỏ và tới 40% với b/h lớn so với nghiệm chính xác của bài toán phẳng với vật liệu cứng dẻo. Sau khi đã xây dựng được đường cong giới hạn, ta có thể xác định được hệ số an toàn đối với trạng thái ứng suất của chi tiết chịu M và Q . Trước hết tính tỷ số $m_0 = M/M_{gh}$, $q_0 = Q/Q_{gh}$ và định vị điểm $A(m_0, q_0)$ trong hệ tọa độ (m, q) ; trên hình 17.9 ta đã chọn $m_0 = 0,6$; $q_0 = 0,4$.

Độ lớn của tải trọng giới hạn phụ thuộc vào qui luật tác dụng của M và Q . Khi Q là hằng và M tăng thì điểm A di chuyển theo đường FD. Do đó, hệ số an toàn (đối với mặt cắt chữ nhật):

$$k_1 = \frac{FD}{FA} = \frac{0,95}{0,60} = 1,58$$

Khi M là hằng thì hệ số an toàn theo lực cắt là:

$$k_2 = \frac{EC}{EA} = \frac{0,84}{0,40} = 2,10$$

Nếu M và Q cùng tăng theo một tỷ lệ thì:

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{0,87^2 + 0,58^2}}{\sqrt{0,60^2 + 0,40^2}} = 1,45$$

Trong trường hợp mặt cắt ngang có hình dạng bất kỳ, với một độ chính xác đầy đủ có thể lấy đường tròn (17.12) làm đường cong giới hạn. Khi ấy hệ số an toàn với sự tăng tỷ lệ của M và Q có thể xác định bằng giải tích như sau:

Từ hình (17.9) ta có:

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{q}{q_0} = \frac{m}{m_0}$$

Do đó: $m = k.m_0 = k/k_m$; $q = kq_0 = k/k_q$ (g)

ở đây k_m và k_q là hệ số an toàn do tác dụng riêng rẽ của M và Q:

$$k_m = \frac{1}{m_0} = \frac{M_{gh}}{M} \quad ; \quad k_q = \frac{1}{q_0} = \frac{Q_{gh}}{Q} \quad ;$$

Thay (g) vào (17.12) ta tìm được hệ số an toàn tác dụng đồng thời của M và Q:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_q}} = \frac{k_m k_q}{\sqrt{k_m^2 + k_q^2}} \quad (17.13)$$

3. Uốn và kéo đồng thời

Đối với thanh chịu uốn và kéo đồng thời, ở trạng thái giới hạn biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang của thanh là hai mảnh chữ nhật, phần chịu kéo của mặt cắt ứng suất đạt giới hạn chảy kéo σ_{ch}^+ , còn phần kia chịu nén đạt σ_{ch}^- . Hãy xét mặt cắt có một trục đối xứng – trục thẳng đứng chẳng hạn (hình 17.10).

Ta gọi phần diện tích chịu nén của mặt cắt là F_1 và khoảng cách từ biên của phần này đến trục x là y_0 . Trục x là đường phân chia hai vùng kéo và nén của mặt cắt khảo sát. Giả sử diện tích F_1 nhỏ hơn diện tích vùng kéo và tách ra trong vùng kéo một diện tích định lượng $F_2 = F_1$. Khi đó phần diện tích còn lại của vùng kéo:

$$F_0 = F - (F_1 + F_2) = F - 2F_1$$

sẽ chịu lực kéo:

$$P_{gh} = F_0 \sigma_{ch} = (F - 2F_1) \sigma_{ch} \quad (a)$$

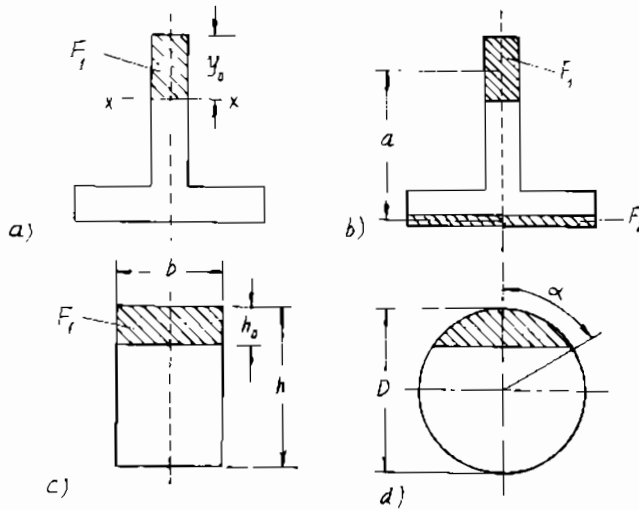
Còn mômen uốn nội lực tác dụng trong mặt phẳng thẳng đứng bằng:

$$M_{gh} = F_1 a \cdot \sigma_{ch} \quad (b)$$

trong đó: F là diện tích của toàn bộ mặt cắt;

a là khoảng cách giữa trọng tâm các phần F_1 và F_2 .

Để có mômen uốn lớn nhất với một giá trị cho trước của P_{gh} thì diện tích F_2 cần phải lấy sao cho a là lớn nhất, nghĩa là phải lấy F_2 ở biên của mặt cắt (hình 17.10b).



Hình 17.10.

Các đẳng thức (a) và (b) cho phương trình đường cong giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ chứa trong đó đại lượng F_1 như một thông số bất kỳ.

Ví dụ, đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật, nếu chiều cao vùng nén là $y_0 = h_0$ (hình 17.10c) thì:

$$F_1 = F_2 = b \cdot h_0 \quad ; \quad a = h - h_0 \quad ;$$

$$P_{gh} = b(h - 2h_0) \sigma_{ch} = F \left(1 - 2 \frac{h_0}{h} \right) \sigma_{ch}$$

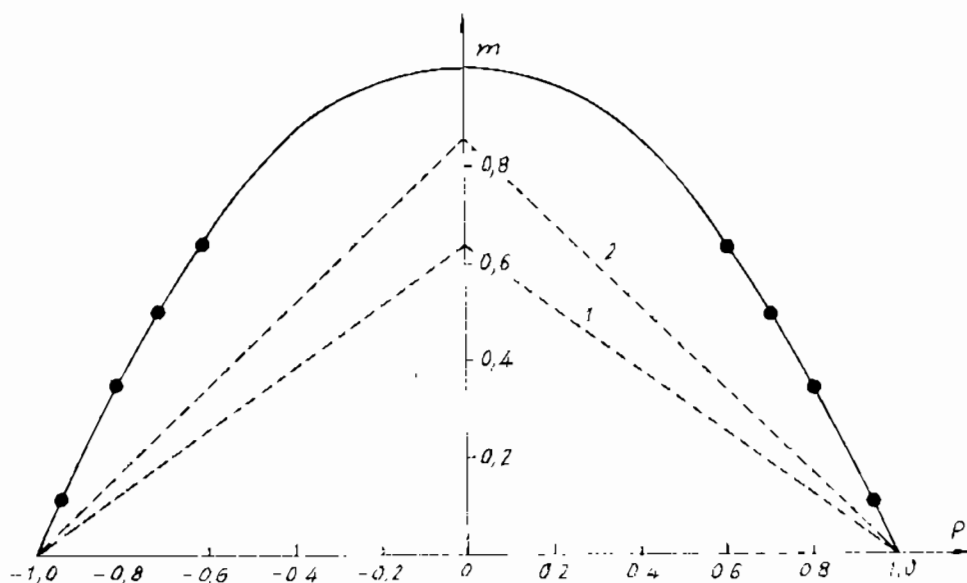
$$M_{gh} = b \cdot h_0 (h - h_0) \sigma_{ch} = W_{ch} \frac{4h_0}{h} \left(1 - \frac{h_0}{h} \right) \sigma_{ch}$$

Ta gọi $P_{gh} = F \cdot \sigma_{ch}$ và $M_{gh} = S_x \cdot \sigma_{ch}$ là lực kéo và mômen uốn giới hạn của mặt cắt khi chịu tác dụng riêng rẽ. Khuỷ tỷ số h_0/h trong các phương trình trên ta có phương trình đường cong giới hạn trong hệ tọa độ (m, p) :

$$m = p_2 = 1 \quad (17.14)$$

trong đó: $m = \frac{M_{gh}^*}{M_{gh}}$ và $p = \frac{P_{gh}^*}{P_{gh}}$.

Đường cong giới hạn là đường parabol (17.14), đó là đường liên tục như trên hình 17.11.



Hình 17.11.

Đối với mặt cắt tròn đường kính D (hình 17.10d), với tư cách là thông số của vùng nén ta lấy góc α . Khi đó F_1 và hai lần mômen tĩnh $F_1 a$ đối với đường kính nằm ngang bằng:

$$F_1 = \frac{D^2}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) \quad ; \quad F_1 a = \frac{1}{6} D^3 \sin^3 \alpha$$

$$\text{Mặt khác: } P_0 = F \cdot \sigma_{ch} = \frac{\pi D^3}{4} \sigma_{ch} ; \quad M_{gh} = S_x^* \cdot \sigma_{ch} = \frac{1}{6} D^3 \sigma_{ch}$$

Theo các công thức (a) và (b) phương trình đường cong giới hạn trong trường hợp này là:

$$\left. \begin{aligned} m &= \sin^3 \alpha \\ p &= 1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Các điểm đen trên hình (17.11) là các giá trị được tính theo công thức (17.15), nhưng đối với mặt cắt chữ nhật với giá trị p cho trước, m giới hạn chỉ khác với giá trị của nó không lớn hơn 8%.

Nếu tính theo ứng suất pháp cực đại: $\sigma_{max} = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$ thì từ điều kiện $\sigma_{max} = \sigma_{ch}$ ta nhận được vùng tải trọng giới hạn bị chặn bởi đường:

$$\frac{M}{\sigma_{ch} W} + \frac{P}{F \cdot \sigma_{ch}} = 1$$

hoặc là trong mặt phẳng (m, p) thì phương trình trên có dạng:

$$m \cdot \frac{S_x}{W} + p = 1$$

Những đường thẳng này được cho trên hình 17.11. Đường 1 đối với mặt cắt chữ nhật ($S_x/W = 1,5$); đường 2 đối với mặt cắt chữ I có $S_x/W = 1,25$.

Để xác định hệ số an toàn theo tải trọng giới hạn, ta sử dụng công thức (17.14) và thu được:

$$k = \frac{k_p}{2k_m} \left(\sqrt{k_p^2 + 4k_m^2} - k_p \right) \quad (17.16)$$

trong đó: $k_m = \frac{M_{gh}}{M}$; $k_p = \frac{P_{gh}}{P}$; $P_{gh} = F \cdot \sigma_{ch}$ và $M_{gh} = S_x^* \cdot \sigma_{ch}$.

4. Xoắn và kéo đồng thời các trục tròn

Mômen xoắn giới hạn M_{gh} và lực kéo tới hạn P_{gh} được biểu diễn qua ứng suất tiếp τ và ứng suất pháp σ như sau:

$$M_{gh} = 2\pi \int_a^b r^2 \tau \cdot dr ; P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \cdot \sigma \cdot dr$$

trong đó: a và b là bán kính trong và ngoài của trục;

r là bán kính tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt.

Ở trạng thái giới hạn, các ứng suất σ và τ phải tuân thủ điều kiện dẻo Huber – Mises. Nhờ vậy mà biểu thức của lực dọc P_{gh} được viết như sau:

$$P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} dr \quad (17.17)$$

Để P_{gh} đạt cực đại với giá trị cho trước của mômen xoắn như đã làm ở mục 2 §5, ta phải có điều kiện:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(r^2 \tau + \lambda \cdot r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} \right) = 0$$

Từ đây và từ điều kiện dẻo (a) của mục 2 §5, ta tìm được sự phân bố ứng suất:

$$\tau = \frac{r \cdot \sigma_{ch}}{\sqrt{9\lambda^2 + 3r^2}} = \frac{r \cdot \tau_{ch}}{\sqrt{3\lambda^2 + 3r^2}}$$

$$\sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}}$$

còn mômen và lực dọc bằng:

$$M_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \int_a^b \frac{r^3 dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} ; P_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \sqrt{3}\lambda \int_a^b \frac{r \cdot dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} \quad (17.18)$$

Khi $\lambda = 0$, ta có $P_{gh} = 0$ và mômen xoắn giới hạn:

$$M_0 = M_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \frac{b^3 - a^3}{3} = \tau_{ch} W_{pch} \quad (a)$$

Đối với trục đặc ($a = 0$), mômen chống xoắn của mặt cắt $W_{pch} = \frac{2\pi b^3}{3}$; trong khi đó mômen chống xoắn đàn hồi của mặt cắt $W_p = \frac{\pi b^3}{2}$, nghĩa là $\frac{W_{pch}}{W_p} = 1,33$.

Khi $\lambda \rightarrow \infty$ thì mômen xoắn bằng không, lực dọc trục giới hạn là:

$$P_{gh} = \pi (b^2 - a^2) \sigma_{ch} = F \cdot \sigma_{ch} \quad (b)$$

còn ứng suất kéo (khi $\lambda = \infty$) thì phân bố đều trên mặt cắt.

Nếu ký hiệu: $\alpha = \frac{a}{b}$, $m = \frac{M_{gh}^*}{M_{gh}}$, $p = \frac{P_{gh}^*}{P_{gh}}$ và sau khi tính các tích phân (17.18) ta có phương trình giới hạn dưới dạng các thông số:

$$\left. \begin{aligned} p &= 2\mu \frac{\sqrt{\mu^2 + 1} - \sqrt{\mu^2 + \alpha^2}}{1 - \alpha^2} \quad \text{với} \quad \mu = \frac{\lambda \sqrt{3}}{b} \\ m &= \frac{1}{1 - \alpha^3} \left[(1 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + 1} - (\alpha^2 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + \alpha^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

Trong trường hợp hiệu $(b - a)$ rất nhỏ, khi khử dạng bất định trong (17.19) ta có:

$$p = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad m = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad p^2 + m^2 = 1 \quad (17.20)$$

nghĩa là đường cong giới hạn đối với vỏ mỏng là đường tròn.

Đối với trục đặc ($\alpha = 0$), sau khi khử μ từ (17.19), phương trình của m là:

$$m = \frac{2 + |p|}{2} \sqrt{1 - |p|} \quad (c)$$

Với mức độ an toàn thấp, có thể thừa nhận đường tròn $p^2 + m^2 = 1$ là đường cong giới hạn đối với chiều dày bất kỳ của thành ống, còn hệ số an toàn được tính theo công thức:

$$k = \frac{k_m k_p}{\sqrt{k_m^2 + k_p^2}} \quad (17.21)$$

Ở đây hệ số an toàn khi tác động riêng rẽ của lực dọc P và mômen M bằng:

$$k_m = \frac{M_{gh}}{M} ; \quad k_p = \frac{P_{gh}}{P}$$

Thêm vào đó các lượng M_{gh} và P_{gh} được tính theo công thức (a) và (b).

§6. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG GIỚI HẠN

Phương pháp cân bằng giới hạn được giới thiệu dưới đây, cho phép xác định tải trọng phá hủy thực đối với mọi vật thể cứng dẻo (thanh, tấm, vỏ) trên cơ sở hai định lý tĩnh và động.

Trong phương pháp này cũng như mục đích nghiên cứu ở §5, trạng thái đàn hồi dẻo của kết cấu không được nghiên cứu trước như các phương pháp trước đó mà được bắt đầu ngay vào việc xác định trạng thái ở đó kết cấu hết khả năng làm việc, gọi là trạng thái giới hạn.

Với mục đích đó, biểu đồ quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ và $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ được xấp xỉ bởi biểu đồ kéo đối với vật liệu cứng dẻo không củng cố. Nghĩa là khi $\sigma < \sigma_{ch}$ thì kết cấu không bị biến dạng, còn khi $\sigma > \sigma_{ch}$ thì kết cấu có thể biến dạng không hạn chế (hình 17.1c). Dưới đây chúng ta sẽ nghiên cứu hai định lý cơ bản nhất: tĩnh và động. Hai định lý này cho phép đánh giá hai phía của tải trọng giới hạn mà ta đã làm quen qua cách giải các bài toán đơn giản nhất ở §5.

1. Định lý tĩnh

1.1. Trạng thái khả dĩ tĩnh

Một trạng thái chịu lực của vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ tĩnh, nếu đối với trạng thái ấy các điều kiện cân bằng theo ứng suất ở mọi điểm của vật thể đều được thỏa mãn.

Chúng ta ký hiệu những điểm này là M^* tương ứng với tenxơ ứng suất σ_{ij}^* (hình 17.12). Vì thế những trạng thái ứng suất này thỏa mãn điều kiện:

$$f_{ch}(\sigma_{ij}^*) \leq 0. \quad (17.22)$$

Những điểm biểu diễn trạng thái thực của vật thể được ký hiệu bằng chữ M ứng với tenxơ ứng suất σ_{ij} .

1.2. Định lý tĩnh

“Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ tĩnh luôn luôn bé hơn tải trọng phá hủy thực”.

Để đơn giản cách chứng minh, chúng ta giả thiết rằng lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với các trạng thái thực và khả dĩ tĩnh. Với mục đích đó, ta ký hiệu V_i và ξ_{ij} là tốc độ chuyển vị của điểm đặt các ngoại lực và tốc độ biến dạng các điểm của vật thể ở trạng thái thực. Do đó đối với trạng thái thực ta có:

$$\int_S X_{vi} V_i ds = \int_v \sigma_{ij} \xi_{ij} dv \quad (17.23)$$

và đối với trạng thái khả dĩ tĩnh:

$$\int_S X_{vi}^* V_i ds = \int_v \sigma_{ij}^* \xi_{ij} dv \quad (17.24)$$

Trong các phương trình trên, X_{vi} , X_{vi}^* là hình chiếu của tải trọng tác dụng trên bề mặt vật thể lên phương các trục tọa độ. Thực hiện phép trừ quan hệ (17.23) và (17.24) ta được:

$$\int_S (X_{vi} - X_{vi}^*) V_i ds = \int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \xi_{ij} dv$$

Có thể chứng minh mặt chảy dẻo là mặt lồi. Cho nên:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij} > 0$$

do đó: $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \epsilon_{ij} > 0$ (xem hình 17.12)

$$\text{Vì vậy:} \quad \int_S X_{vi}^* V_i ds < \int_S X_{vi} V_i ds \quad (17.25)$$

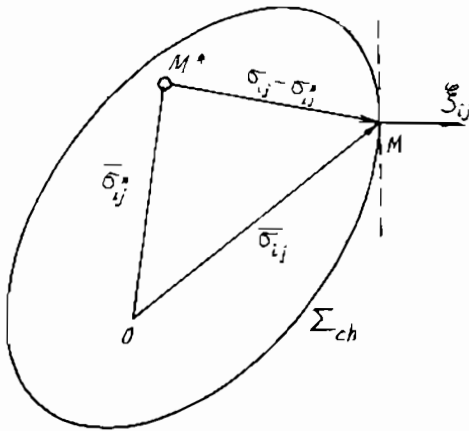
Kết quả này cho thấy công suất của tải trọng bề mặt ứng với trạng thái ứng suất khả dĩ tĩnh trên các tốc độ chuyển vị thực luôn nhỏ hơn công suất của tải trọng bề mặt ở trạng thái thực trên chính những tốc độ đó. Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng, theo (17.25) ta có:

$$\sum P_i^* V_i = \sum P_i V_i \quad (17.26)$$

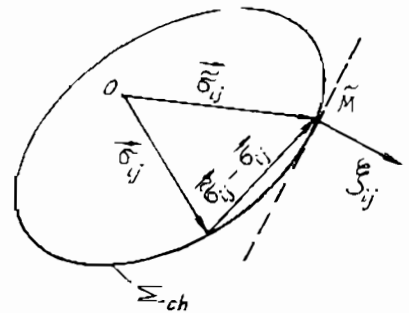
Trường hợp $i = 1$, kết quả này là:

$$P^* < P \quad (17.27)$$

Đó là điều phải chứng minh.



Hình 17.12.



Hình 17.13.

Định lý tĩnh thiết lập giá trị gần đúng dưới của tải trọng giới hạn. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ tĩnh khác nhau ta sẽ có những tải trọng khác nhau nhỏ hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng

lớn nhất trong chúng sẽ gần nhất với tải trọng thực cần tìm. Vì lẽ đó phương pháp xác định tải trọng giới hạn bằng cách khảo sát các trạng thái khả dĩ tĩnh được gọi là *phương pháp tĩnh*.

2. Định lý động

2.1. Trạng thái khả dĩ động

Trạng thái chịu lực của vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ động, nếu các điều kiện bề mặt theo chuyển vị và các điều kiện liên tục của biến dạng ở mỗi điểm của vật thể được thỏa mãn. *Các phương trình cân bằng có thể không cần phải thỏa mãn*. Như vậy, các điểm biểu diễn trạng thái ứng suất ở các điểm của vật thể đối với trạng thái khả dĩ động phải nằm trên mặt bắt đầu chảy dẻo $\sum_{ch}$ (hình 17.13).

2.2. Định lý động

Chúng ta ký hiệu những điểm này là $\tilde{M}$ và tenxơ ứng suất tương ứng là $\tilde{\sigma}_{ij}$ (hình 17.13).

Cũng như định lý tĩnh, ở đây ta giả thiết lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với trạng thái thực, khi thừa nhận các chuyển vị tỷ lệ với tốc độ $\tilde{V}_i$ và $\tilde{\xi}_{ij}$ của trạng thái khả dĩ động là các chuyển vị khả dĩ. Do đó ta nhận được:

$$\int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds = \int_v \sigma_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

hoặc là:

$$\int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds = \int_v \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv - \int_v (\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \tilde{\xi}_{ij} dv \quad (a)$$

Bởi vì, mặt dẻo là lồi (hình 17.13) nên ta có:

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}) \tilde{\xi}_{ij} > 0$$

Do đó rút ra:

$$\int_v \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv > \int_s X_{vi} \tilde{V}_i ds \quad (17.28)$$

Tích phân bên trái là công suất nội lực ở trạng thái khả dĩ động của vật thể. Rõ ràng là có thể chọn độ lớn của tải trọng bề mặt $\tilde{X}_i$ sao cho công suất của chúng trên các tốc độ khả dĩ động bằng công suất của nội lực, nghĩa là:

$$\int_s \tilde{X}_i \tilde{V}_i ds = \int \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv \quad (17.29)$$

So sánh quan hệ (17.28) và (17.29) ta có:

$$\int_s \tilde{X}_i \tilde{V}_i ds > \int_s X_i V_i ds \quad (17.30)$$

Nghĩa là công suất của tải trọng bề mặt tương ứng với trạng thái khả dĩ động trên các tốc độ chuyển vị khả dĩ động luôn lớn hơn công suất của tải trọng thực bề mặt trên chính những tốc độ này.

Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng thì theo (17.30):

$$\sum \tilde{P}_i \tilde{V}_i > \sum P_i V_i \quad (17.31)$$

Đối với trường hợp một lực ($i = 1$) thì:

$$\tilde{P} > P \quad (17.32)$$

trong đó theo (17.29):

$$\tilde{P} = \frac{1}{\tilde{V}} \int \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lý động được phát biểu như sau:

“Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ động luôn lớn hơn tải trọng giới hạn phá hủy thực”.

Khác với định lý tĩnh, định lý động xác định giá trị gần đúng trên (giá trị giới hạn trên) của tải trọng giới hạn thực. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ động khác nhau, ta có thể xác định được những tải trọng khác nhau luôn lớn hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng nhỏ nhất trong chúng cho ta giá trị giới hạn trên của tải trọng

giới hạn thực. Phương pháp xác định tải trọng giới hạn như thế được gọi là *phương pháp động*.

Vì thế, các định lý tĩnh và động cho ta khả năng xác lập sự đánh giá về hai phía của tải trọng phá hủy thực. Để một trạng thái khả dĩ là trạng thái thực thì nó đồng thời phải là trạng thái khả dĩ động và ngược lại. Nếu tải trọng giới hạn được xác định bằng các phương pháp tĩnh và động trùng nhau thì điều đó có nghĩa là tải trọng giới hạn nhận được là thực và nghiệm nhận được của bài toán là đầy đủ.

Ví dụ

Một dầm siêu tĩnh được cho như hình 17.14a. Hãy xác định tải trọng giới hạn q_{gh} ?

GIẢI

a) Tải trọng giới hạn theo định lý tĩnh

Với phản lực R_B ta sẽ khảo sát tất cả các trạng thái khả dĩ tĩnh của dầm.

Điều kiện cân bằng tại z bất kỳ cho ta:

$$M(z) = R_B \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}$$

Giá trị cực đại của M xuất hiện khi:

$$z = z_0 = \frac{R_B}{q}$$

và bằng:

$$M = M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q}$$

Từ điều kiện $M_{\max}$ không thể vượt quá mômen giới hạn của mặt cắt M_{gh} :

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q} < M_{gh},$$

ta rút ra điều kiện thứ nhất của tải trọng phá hủy:

$$q_{1t} \geq \frac{R_B^2}{2M_{gh}} \quad (a)$$

Mặt khác điều kiện cân bằng cho phép xác định giá trị mômen lớn nhất tại ngàm A:

$$M_{Amax} = -R_B \cdot l + \frac{q \cdot l^2}{2}$$

Tại đây $M_{Amax} \leq M_{gh}$, điều đó cho ta:

$$q_{2t} \leq \frac{2M_{gh}}{l^2} + \frac{2R_B}{l} \quad (b)$$

Đồ thị các hàm $q_{1t}(R_B)$ và $q_{2t}(R_B)$ được cho trên hình 17.14d. Các bất đẳng thức (a) và (b) được thỏa mãn trong miền gạch sọc giữa hai đồ thị này. Định lý tĩnh đã khẳng định rằng tải trọng phá hủy thực lớn hơn tất cả các tải trọng được xác định bởi các điểm của miền gạch sọc. Điểm K là giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện này. Vì vậy R_B được tìm từ điều kiện:

$$q_{1t}(R_B) = q_{2t}(R_B)$$

Cụ thể là:

$$R_B = 2 \left(\sqrt{2} + 1 \right) \frac{M_{gh}}{l} = 4,82 \frac{M_{gh}}{l}$$

Khi thay R_B vào (b), ta nhận được tải trọng phá hủy (giới hạn) theo định lý tĩnh:

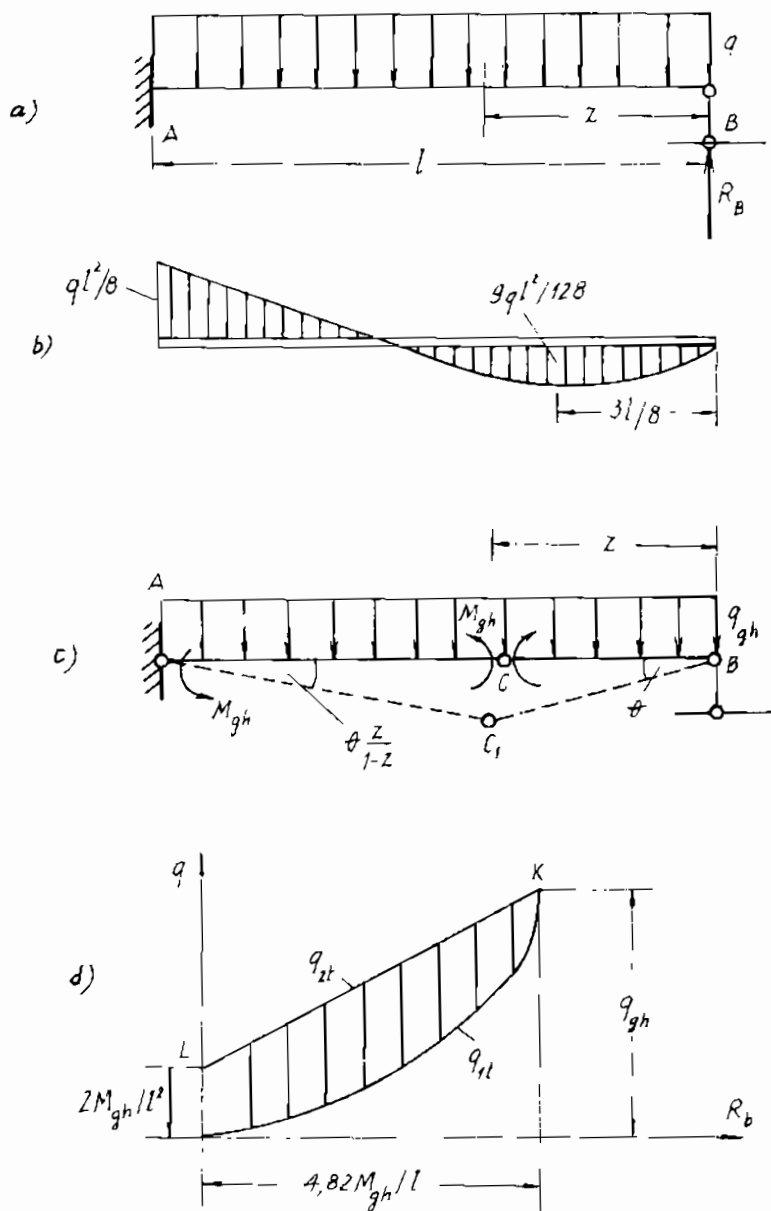
$$q_t = q_{gh} = 11,6 \cdot \frac{M_{gh}}{l^2} \quad (c)$$

b) Tải trọng giới hạn theo định lý động

Một trạng thái khả dĩ động được cho trên hình 17.14c bởi đường nét đứt. Định lý động cho ta phương trình công khả dĩ sau đây:

$$q \cdot S_{\Delta AC_1B} - \left(M_{gh} \cdot \delta\theta + 2M_{gh} \frac{\delta\theta \cdot z}{l-z} \right) = 0$$

trong đó: $S_{\Delta AC_1B}$ là diện tích tam giác AC_1B .



Hình 17.14.

Do đó:

$$q = \frac{M_{gh}}{l} \cdot \frac{1+z}{z(1-z)} \quad (d)$$

Tương ứng với định lý động thì cường độ tải trọng phá hủy sẽ phải là giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị q trong (d). Để có $q = q_d$ nhỏ nhất ta phải tìm nghiệm của phương trình sau:

$$\frac{dq}{dz} = z^2 + 2l \cdot z - l^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là $z = 0,414l$. Khi khảo sát dấu của đạo hàm bậc hai cho thấy:

Với $z = 0,414l$, hàm (d) có giá trị cực tiểu và đúng bằng kết quả (c);

Với $M_{gh} = 1$ và $l = 1$ thì $q = q_d = 11,616766$, và có đồ thị như hình (17.15).

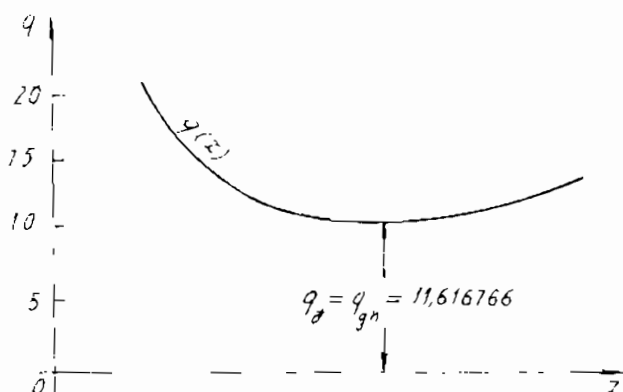
Điều này nói lên rằng các trạng thái khả dĩ tĩnh và động trùng nhau và trùng với trạng thái phá hủy thực.

§7. TÍNH ỐNG DÀY TRONG VÀ NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

1. Bài toán phẳng – khái niệm và định nghĩa

Trong kỹ thuật người ta thường gặp phải những vật thể dài mà trục của nó trùng với trục z và chịu tải trọng vuông góc và không đổi dọc theo trục này.

Trong những vật thể như vậy, biến dạng và chuyển vị chỉ xảy ra trong một mặt phẳng trùng với mặt cắt ngang (vuông góc với trục z). Những tường chắn và đập chắn, đường hầm tàu điện ngầm, con lăn



Hình 17.15.

hình trụ, đặc biệt là các ống dày dài chịu áp lực p phân bố đều bên trong và bên ngoài dọc theo chiều dài z của ống v.v. Những bài toán mà chuyển vị chỉ xảy ra trong một mặt phẳng của mặt cắt ngang như thế gọi là bài toán biến dạng phẳng. Ngược với bài toán biến dạng phẳng là bài toán ứng suất phẳng. Đó là các vật thể mỏng dạng tấm chịu tác dụng của tải trọng nằm trong mặt phẳng tấm và phân bố đều theo chiều dày tấm. Những tường ngăn trong các nhà cao tầng, vách ngăn giữa các khoang trong máy bay, tàu biển v.v.

Trong mục này chúng ta chỉ quan tâm đến các ống dày dài mặt cắt tròn chịu áp lực phân bố đều bên trong và bên ngoài dọc theo chiều dài ống. Ống được gọi là dày nếu chiều dày của nó lớn hơn một phần mười bán kính trung bình của ống.

Do tính đối xứng trục cả về tải trọng và kết cấu đối với trục ống, mà các biến dạng và chuyển vị cũng đối xứng đối với trục này. Hãy khảo sát một ống dày dài bán kính trong a , bán kính ngoài b (hình 17.16a) chịu áp lực bên trong p_a , bên ngoài p_b .

2. Nghiệm bài toán trong miền đàn hồi

Ta hãy xét một phân tố sáu mặt được tách ra quanh một điểm bất kỳ trong ống như hình (17.16a, b, c, d, e). Từ điều kiện cân bằng của phân tố (hình 17.16e), ta rút ra:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (17.33)$$

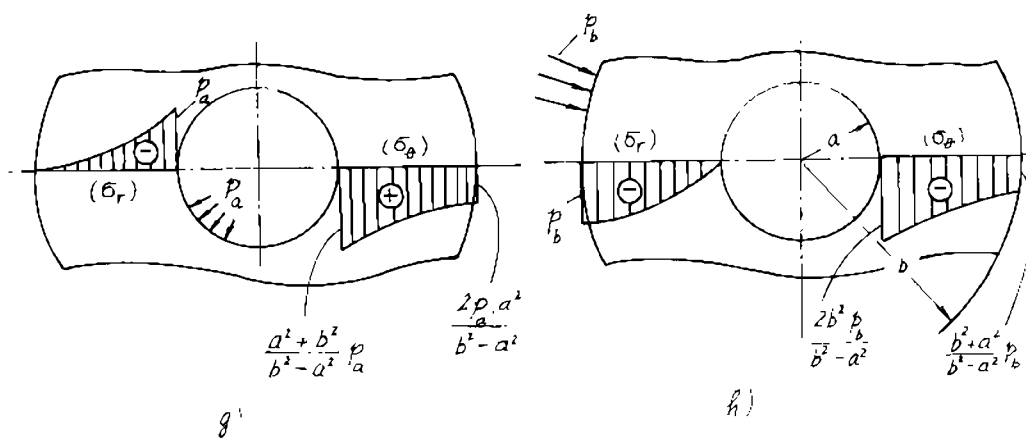
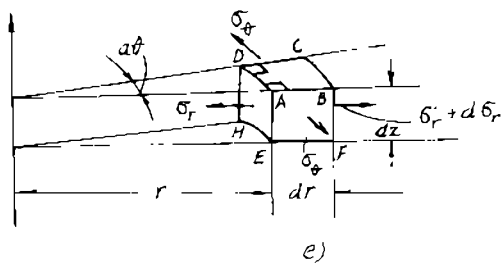
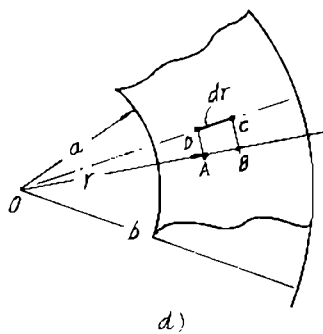
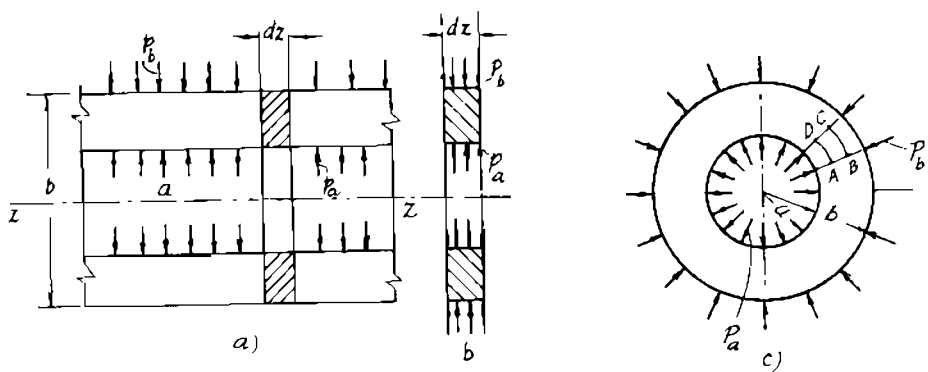
Quan hệ hình học (1.8) của Cauchy trong trường hợp bài toán đối xứng trục với hệ tọa độ cực r, θ là:

$$\epsilon_\theta = \frac{W}{r} ; \epsilon_r = \frac{dW}{dr} ; \gamma_{r\theta} = 0 \quad (17.34)$$

trong đó: W là chuyển vị hướng kính.

Định luật Húc dạng ngược trong bài toán này khi kể đến (17.34) có dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{dW}{dr} + \mu \frac{W}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{W}{r} + \mu \frac{dW}{dr} \right) \end{aligned} \quad (17.35)$$



Hình 17.16.

Thay (17.35) vào (17.33) ta thu được phương trình vi phân cân bằng theo chuyển vị $W(r)$:

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} = 0 \quad (17.36)$$

hoặc là:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(W.r)}{dr} \right) = 0$$

Tích phân liên tiếp hai lần phương trình này, ta có nghiệm tổng quát của bài toán theo chuyển vị:

$$W(r) = A . r + \frac{B}{r} \quad (17.37)$$

Thay (17.37) vào (17.35) ta được nghiệm bài toán theo ứng suất:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \quad (17.38a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) + \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \quad (17.38b)$$

Các hằng số tích phân A , B được tìm từ điều kiện biên của bài toán. Cụ thể là:

$$\sigma_r = -p_a \quad \text{và} \quad \sigma_r = -p_b \quad (a)$$

Giải hệ (a) ta được A và B , sau đó thay vào hệ (17.38a, b), cuối cùng ta được:

$$\sigma_r = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (17.39a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{r^2 (b^2 - a^2)} \quad (17.39b)$$

Biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ khi chỉ chịu riêng biệt áp lực p_a bên trong và p_b bên ngoài được mô tả trên hình (17.16g, h).

3. Trạng thái đàn hồi dẻo lý tưởng của ống dày dài chịu áp lực bên trong

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu cách tìm nghiệm gần đúng của ống dày dài chịu áp lực p_a bên trong.

Trong miền đàn hồi các ứng suất pháp hướng kính σ_r và tiếp tuyến σ_θ được xác định từ các công thức (17.39a, b) khi $p_b = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.40)$$

Các ứng suất dọc trục σ_z đối với trạng thái biến dạng phẳng được rút ra từ điều kiện $\varepsilon_z = 0$ và định luật Húc có biểu thức:

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (b)$$

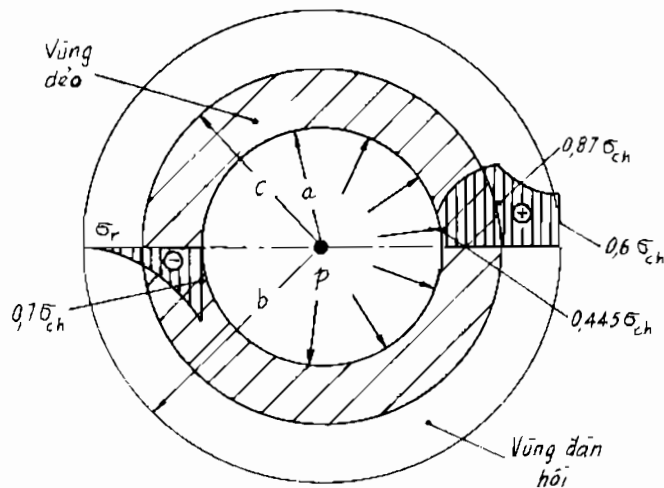
Đối với ống làm bằng vật liệu không chịu nén thì hệ số Poatxông $\mu = 0,5$. Khi đó công thức (b) có dạng:

$$\sigma_z = 0,5 (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (c)$$

Trong trạng thái đàn hồi dẻo, mặt cắt ngang của ống được chia thành hai vùng vành khăn đàn hồi và dẻo (hình 17.17). Vùng trong được gạch xọc $a \leq r \leq c$ là vùng biến dạng dẻo, còn vùng ngoài $c \leq r \leq b$ là vùng biến dạng đàn hồi.

Nếu gọi q là áp lực hướng kính trên biên giữa vùng đàn hồi và dẻo tại $r = c$, công thức (17.40) được viết lại như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{q c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{q c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.41)$$



Hình 17.17.

Khi xem vật liệu là đàn hồi dẻo lý tưởng và thừa nhận điều kiện dẻo của Huber – Mises. Ta có ứng suất tương đương trong hệ tọa độ trụ r, θ trong trường hợp này là:

$$\sigma_{td} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) = \sigma_{ch} \quad (d)$$

Do ứng suất σ_θ luôn lớn hơn σ_r cho nên điều kiện dẻo của Huber – Mises trong trường hợp này có dạng:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \quad (g)$$

Để xác định ứng suất trong miền dẻo ta sẽ giải đồng thời phương trình cân bằng (17.33) và phương trình điều kiện dẻo (g). Thay (g) vào (17.33) ta nhận được:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_{ch}}{r}$$

Đây là phương trình có biến số phân ly, vì vậy khi tích phân ta có:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln r + c \quad (h)$$

Hằng số c trong (h) được tìm từ điều kiện biên $\sigma_{r=a} = -p$. Cụ thể là:

$$-p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln a + c$$

Do đó:
$$c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln a - p$$

Thay kết quả này vào (h) ta thu được:

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{a}{r} \quad (17.42)$$

Từ (g) dễ dàng rút ra:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \quad (17.43)$$

Bởi vì, trạng thái ứng suất ở vùng dẻo của ống được mô tả bởi các ứng suất (17.42) và (17.43), cho nên tại $r = c$ ta nhận được hai phương trình xác định q và c:

$$\begin{aligned} -\frac{q \cdot c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} - 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} \\ \frac{q \cdot c^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} + 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất ta rút ra:

$$q = p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{c}{a} \quad (17.44)$$

Thay (17.44) vào phương trình thứ hai và sau khi biến đổi ta được phương trình xác định c:

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = \frac{p\sqrt{3}}{2\sigma_{ch}} \quad (17.45)$$

Sau khi đã tìm được c từ phương trình (17.45), theo công thức (17.44) ta tìm được áp lực hướng kính q giữa vùng đàn hồi và dẻo. Ứng suất trong vùng dẻo được tính theo công thức (17.42), (17.43), còn ứng suất trong vùng đàn hồi được tính theo công thức (17.41).

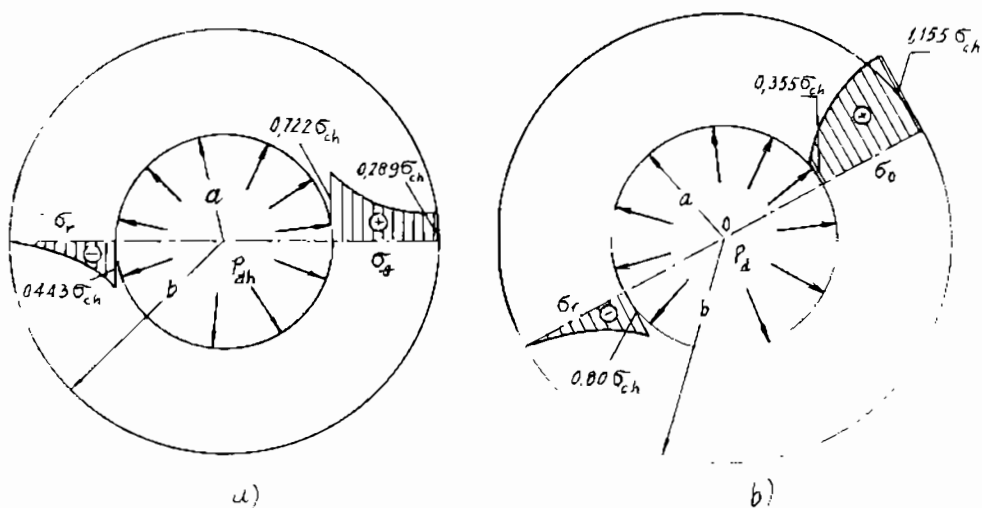
4. Trạng thái giới hạn bên đàn hồi của ống

Trạng thái giới hạn tương ứng với giá trị $c = a$ là trạng thái giới hạn bên đàn hồi của ống. Khi thay giá trị $c = a$ vào phương trình (17.45) và giải, ta tính được áp lực p_a tương ứng với trạng thái này:

$$p_a = p_{dh} = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (17.46)$$

Ở trạng thái này ứng suất trong ống theo (17.40) là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (17.47)$$



Hình 17.18 .

Hình (17.18a) là biểu đồ các ứng suất (17.47) với $b/a = 2$. Trong trường hợp này giới hạn đàn hồi của áp lực bên trong $p_a = p_{dh} = 0,433 \sigma_{ch}$.

Ứng suất ở mặt trong của ống $r = a$ là:

$$\sigma_r = 0,433 \sigma_{ch} ; \quad \sigma_\theta = 0,722 \sigma_{ch}$$

và ở mặt ngoài $r = b$ là:

$$\sigma_r = 0 ; \quad \sigma_\theta = 0,289 \sigma_{ch}.$$

5. Trạng thái giới hạn bền dẻo

Trạng thái này đạt được khi $c = b$. Sau khi thay $c = b$ vào (17.41) và giải, ta được áp lực giới hạn dẻo:

$$p_d = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{b}{a} \quad (17.48)$$

Ứng suất trong ống ở trạng thái giới hạn dẻo này được xác định theo (17.42), (17.43) sau khi thay (17.48) vào chúng. Cụ thể là:

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \ln \frac{b}{r} ; \quad \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ch} \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right) \quad (17.49)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất (17.49) với tỷ số $b/a = 2$ được mô tả trên hình 17.18b. Trong trường hợp này áp lực $p_d = 0,800 \sigma_{ch}$.

Các ứng suất (17.49) ở mặt trong của ống $r = a$ bằng:

$$\sigma_r = -0,800 \sigma_{ch} ; \quad \sigma_\theta = 0,355 \sigma_{ch}.$$

còn ở mặt ngoài $r = b$:

$$\sigma_r = 0 ; \quad \sigma_\theta = 1,155 \sigma_{ch}.$$

Biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ ở trạng thái đàn dẻo với tỷ số $b/a = 2$ với áp lực bên trong $p = 0,700 \sigma_{ch}$, được biểu diễn trên hình 17.19. Trong trường hợp này bán kính đường biên giới giữa vùng dẻo và vùng đàn hồi được tìm từ phương trình (17.45). Cụ thể là:

$$c = 1,44a$$

Áp lực trên biên giới giữa các vùng đàn hồi và dẻo được xác định theo (17.44) bằng:

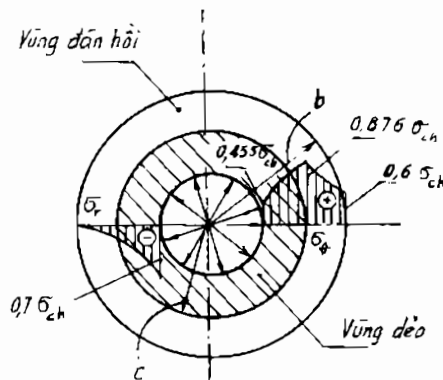
$$q = 0,279 \sigma_{ch}$$

Thay giá trị áp lực $p = 0,700 \sigma_{ch}$ vào công thức (17.42) và (17.43) ta nhận được công thức xác định ứng suất trong vùng dẻo $a \leq r \leq 1,44a$ của ống:

$$\sigma_r = \sigma_{ch} (1,155 \ln r/a - 0,700) ; \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 1,155 \sigma_{ch}$$

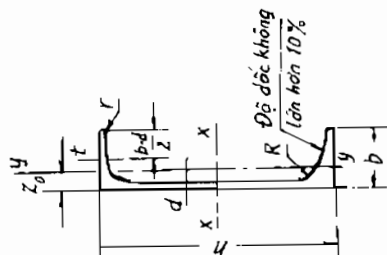
Ứng suất trong vùng đàn hồi $1,44a \leq r \leq 2a = b$ của ống với $b/a = 2$ và $q = 0,279 \sigma_{ch}$ được tính theo công thức (17.41), kết quả là:

$$\sigma_r = -0,300 \sigma_{ch} \left(\frac{4a^2}{r^2} - 1 \right) ; \quad \sigma_\theta = 0,300 \sigma_{ch} \left(\frac{4a^2}{r^2} + 1 \right).$$



Hình 17.19.

PHỤ LỤC

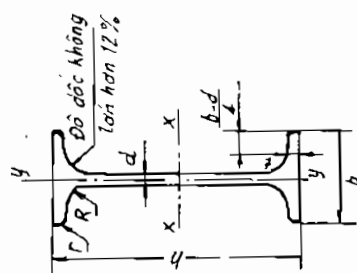


Bảng 1. Thép cán nóng TCVN 1654 – 75 thép chữ C

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
									X - X				Y - Y			
	h	b	d	t	R	r		I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ¹	I _y , cm ⁴	W _y , cm ³	i _y , cm	Z ₀ , cm	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,950	1,16	
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24	
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31	
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44	

Bảng 1 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
									X - X			Y - Y				
									I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ³	I _y , cm ⁴	W _y , cm ³	i _y , cm	z _n , cm
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	11,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,0	20,00	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,0	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	23,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,0	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,00	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,60	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,40	3,230	2,75



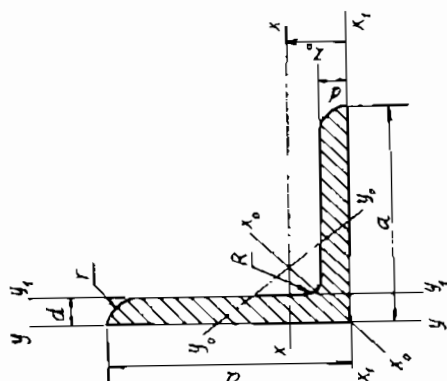
Bảng 2. Thép cán nóng TCVN 1655 – 75

Thép chữ I

Số hiệu	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng I m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục						
									X - X				Y - Y		
									I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ³			I _y , cm ⁴
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	23,10	2,32

Bảng 2 tiếp theo

Số hiện	Kích thước, mm						Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục					
									X - X			Y - Y		
	h	b	d	t	R	r			I _x , cm ⁴	W _x , cm ³	i _x , cm	S _x , cm ³	I _y , cm ⁴	W _y , cm ³
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	25,0
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	23,7
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	66,70	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54



Bảng 3. Thép cán nóng TCVN 1656 – 75

Thép góc L đều cạnh

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục						
							X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁
	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _{x0} max, cm ⁴	i _{x0} max, cm	I _{yy} min, cm ⁴	i _{yy} min, cm	I _{x1} , cm ⁴
2	20	3	3,5	1,2	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	3,5	1,2	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4			1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4,0	1,3	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80

Bảng 3 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm			Diện tích mặt cắt ngang, cm^2	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
						X - X		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$		$X_1 - X_1$	
	I_x , cm^4	i_x , cm	I_{x0} max, cm^4										i_{x0} max, cm
						z_0 , cm							
3,2	32	4,5	1,5	1,85	1,46	1,77	0,97	2,82	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
	4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
	4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4,0	40	5,0	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
	4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
	5			3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	5,0	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
	4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
	5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30
5,0	50	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,554	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33
	4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,33
	5			4,80	3,77	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42
5,6	56	6,0	2,0	4,38	3,44	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52
	5			5,41	4,25	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57
6,3	63	7,0	2,3	4,96	3,90	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69
	5			6,13	4,81	23,10	1,94	36,00	2,44	9,52	1,25	41,50	1,72
	6			7,28	5,72	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78
7,0	70	8,0	2,7	6,86	5,80	31,90	2,16	50,70	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
	6			8,15	6,38	37,60	2,15	59,60	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
	7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,20	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
	8			10,70	8,37	48,2	2,13	76,40	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02

Bảng 3 tiếp theo

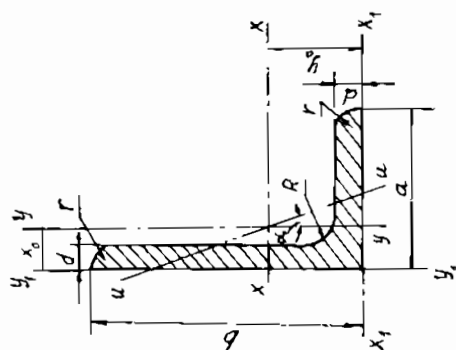
Số liệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
							X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁	
	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _{x0} max, cm ⁴	i _{x0} max cm	I _{y0} min, cm ⁴	i _{y0} min, cm	I _x , cm ⁴	z ₀ , cm
8,0	80	6	9	3,0	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
		7			10,80	8,51	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
		8			12,30	9,65	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	157,0	2,27
9,0	90	6	10	3,3	10,60	8,33	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43
		7			12,30	9,64	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47
		8			13,90	10,90	106,0	2,76	168,0	3,49	43,8	1,77	194,0	2,51
		9			15,60	12,20	118,0	2,75	180,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55
10,0	100	7	12	4,0	13,80	10,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71
		8			15,60	12,20	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75
		10			19,20	15,10	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83
		12			22,80	17,90	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91
		14			26,30	20,60	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	427,0	2,99
		16			29,70	23,30	261,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06
11,0	110	7	12	4,0	15,20	11,90	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96
		8			17,20	13,50	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294,0	3,87	467,0	4,87	122	2,49	516,0	3,36
		9			22,0	17,3	327,0	3,86	520,0	4,86	135	2,48	582,0	3,40
		10			24,3	19,1	360,0	3,85	571,0	4,84	149	2,47	649,0	3,45
		12			28,9	22,7	422,0	3,82	670,0	4,82	174	2,46	782,0	3,53
		14			33,4	26,2	482,0	3,80	764,0	4,78	200	2,45	916,0	3,61
		16			37,8	29,6	539,0	3,78	853,0	4,75	224	2,44	105,1	3,68
14,0	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466,0	4,34	739,0	5,47	192	2,79	818,8	3,78
		10			27,3	21,5	512,0	4,33	814,0	5,16	211	2,78	911,0	3,82
		12			32,5	25,5	602,0	4,31	957,0	5,43	248	2,76	109,7	3,90

Bảng 3 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng 1 m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục							
							X - X		X ₀ - X ₀		Y ₀ - Y ₀		X ₁ - X ₁	
							I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _{x0} max, cm ⁴	i _{x0} max, cm	I _{y0} min, cm ⁴	i _{y0} min, cm	I _{x1} , cm ⁴	i _{x1} , cm
160	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774,0	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844,0	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913,0	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
18,0	180	20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
		11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
20,0	200	12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
		12	18	6,0	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07

Bảng 4. Thép cán nóng TCVN 1657 – 75

Thép góc L không đều cạnh



Số hiệu	Kích thước, mm				Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục											
							X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U		Góc lệch, tgα	
	b	a	t	R			r	I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _{x1} , cm ⁴	Y _o , cm	I _{y1} , cm ⁴	X _o , cm	I _u min, cm ⁴	i _u min, cm	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
								1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
								3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381

Bảng 4 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm					Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng l m chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục										Góc lệch, tgα	
								X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U			
	b	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _x , cm ⁴	I _y , cm ⁴	Y ₁ , cm	I _y , cm ⁴	X ₁ , cm	I _x , cm ⁴		U - U
4,5/2,8	45	28	3 4	5,0	1,7	2,14 2,80	1,68 2,20	1,43 1,42	1,32 1,69	0,79 0,78	9,02 12,10	1,47 1,51	2,20 2,98	0,64 0,68	0,79 1,02	0,61 0,60	0,382 0,379		
5/3,2	50	32	3 4	5,5	1,8	2,42 3,17	1,90 2,49	1,60 1,59	1,99 2,56	0,91 0,90	12,40 16,60	1,60 1,85	3,26 0,76	0,72 0,76	1,18 1,52	0,70 0,69	0,403 0,401		
5,6/3,6	56	36	4 5	6,0	2,0	3,58 4,41	2,81 3,46	1,78 1,77	3,70 4,48	1,02 1,01	23,20 29,20	1,82 1,86	6,25 7,91	0,84 0,88	2,19 2,66	0,78 0,78	0,406 0,404		
6,3/4	63	40	4 5 6 8	7,0	2,3	4,04 4,98 5,90 7,68	3,17 3,91 4,63 6,03	2,01 2,00 1,99 1,96	5,16 6,26 7,28 9,15	1,13 1,12 1,11 1,09	33,0 41,40 49,90 66,90	2,03 2,08 2,12 2,20	8,51 10,80 13,10 17,90	0,91 0,95 0,99 1,07	3,07 3,72 4,36 5,58	0,87 0,86 0,86 0,85	0,387 0,396 0,393 0,386		
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	2,23	9,05	1,27	56,70	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406		
8/5	80	5 6	5	8,0	2,7	6,36 7,55	4,99 5,92	2,56 2,55	12,7 14,8	1,41 1,40	84,6 102	2,60 2,65	20,80 25,20	1,13 1,17	7,58 8,88	1,09 1,08	0,387 0,386		
9/5,6	90	56	5,5 6 8	9,0	3,0	7,86 8,54 11,18	6,17 6,70 8,77	2,88 2,88 2,85	19,7 21,2 27,1	1,58 1,58 1,56	132 145 194	2,92 2,95 3,04	32,20 35,20 47,80	1,26 1,28 1,36	11,8 12,7 16,3	1,22 1,22 1,21	0,384 0,384 0,380		
10/6,3	100	63	6 7 8 10	10	3,3	9,59 11,10 12,69 15,50	7,53 8,70 9,87 12,10	3,20 3,19 3,48 3,15	30,6 35,0 39,2 47,1	1,79 1,78 1,77 1,75	198 232 266 333	3,23 3,28 3,32 3,40	49,90 58,70 67,60 85,80	1,42 1,46 1,50 1,58	18,2 20,8 23,4 28,3	1,38 1,37 1,36 1,35	0,393 0,392 0,391 0,387		

Bảng 4 tiếp theo

Số hiệu	Kích thước, mm					Diện tích mặt cắt ngang, cm ²	Khối lượng chiều dài, kg	Đại lượng tra cứu cho các trục										Góc lệch, tgα
								X - X		Y - Y		X ₁ - X ₁		Y ₁ - Y ₁		U - U		
	b	a	t	R	r			I _x , cm ⁴	i _x , cm	I _y , cm ⁴	i _y , cm	I _{x1} , cm ⁴	Y _o , cm	I _{y1} , cm ⁴	X _o , cm	I _u , min, cm ⁴	i _u , min, cm	
11/7	110	70	6,5 8	10	3,3	11,40 13,90	8,98 10,90	3,53 3,51	45,6 54,6	2,00 1,98	286 353	3,55 3,61	74,30 92,30	1,58 1,64	26,9 32,3	1,53 1,52	0,402 0,400	
12,5/8	125	80	7 8 10 12	11	3,7	14,10 16,00 19,70 23,40	11,00 12,50 15,50 18,30	4,01 4,00 3,98 3,95	73,7 83,0 100,0 117,0	2,29 2,28 2,26 2,21	452 518 649 781	4,0 4,05 4,14 4,22	119,0 137,0 173,0 210,0	1,80 1,84 1,92 2,00	43,4 48,8 59,3 69,5	1,76 1,75 1,74 1,72	0,407 0,406 0,404 0,400	
14/9	140	90	8 10	12	4,0	18,00 22,20	14,10 17,50	4,49 4,47	120,0 146,0	2,58 2,56	727 911	4,49 4,58	194,0 245,0	2,03 2,12	70,3 85,5	1,98 1,96	0,411 0,409	
16/10	160	100	9 10 12 14	13	4,3	22,90 25,30 30,00 34,70	18,00 19,80 23,60 27,30	5,15 5,13 5,11 5,08	186,0 204,0 239,0 272,0	2,85 2,84 2,82 2,80	1221 1359 1634 1910	5,19 5,23 5,32 5,40	300,0 335,0 405,0 477,0	2,23 2,28 2,36 2,43	110,0 121,0 142,0 162,0	2,20 2,19 2,18 2,16	0,391 0,390 0,388 0,385	
18/11	180	110	10 12	14	4,7	28,30 33,70	22,20 26,40	5,80 5,77	276,0 324,0	3,12 3,10	1933 2324	5,88 5,97	444,0 537,0	2,44 2,52	165,0 194,0	2,42 2,40	0,375 0,374	
20/12,5	200	125	11 12 14 16	14	4,7	34,90 37,90 43,90 49,80	27,40 29,70 34,40 39,10	6,45 6,43 6,41 6,38	446,0 482,0 551,0 617,0	3,58 3,57 3,54 3,52	2920 3189 3726 4264	6,50 6,54 6,62 6,71	718,0 786,0 922,0 1061	2,79 2,83 2,91 2,99	264,0 285,0 327,0 367,0	2,75 2,74 2,73 2,72	0,392 0,392 0,390 0,388	
25/16	250	160	12 16 18 20	18	6,0	48,30 63,60 71,10 78,50	37,9 49,9 55,8 61,7	8,07 8,02 7,99 7,97	1032 1333 1475 1613	4,62 4,58 4,56 4,53	6212 8308 9358 10410	7,97 8,14 8,23 8,31	1634 2200 2487 2776	3,53 3,69 3,77 3,85	604,0 781,0 866,0 949,0	3,54 3,50 3,49 3,48	0,410 0,408 0,407 0,405	

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. С. Д. Пономарев и других
Расчеты на прочность в машиностроении, Т1, Т3, Машгиз - 1959
2. А. А. Уманский – Строительная механика самолета, М. 1961
3. Clough R. W., Penzien J. – Dynamics of Structures, New – York, 1975
4. А. Ф. Смирнов – Сопротивление Материалов., М, 1975
5. Малинин Н. Н – Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975
6. I. Miroloubov et les autres – Résistance des matériaux – Manuel de résolution des problèmes – Mir, 1977
7. Я. Г. Пановко, И. И. Губановас - Устойчивость и колебания упругих систем. М, 1979
8. С. П. Тимошенко, Дж. Гудер – Теория Упругости. М, 1979
9. Serge Laroze – Résistance des matériaux et structures T2, T3, Eyrolles Masson, 1984
10. Phan Kỳ Phùng, Đặng Việt Cường – Lý thuyết dẻo và từ biến, NXB Giáo dục, 1997
11. Đặng Việt Cường – Nghiên cứu đường cong dẻo giới hạn và hệ số an toàn của vỏ trụ làm bằng vật liệu cứng dẻo – TTCTKH.HNCH toàn quốc lần thứ VII – 2002
12. Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai – Sức bền vật liệu T1, T2, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2002
13. Đặng Việt Cường, Lê Quang Minh – Lý thuyết dẻo ứng dụng, NXB Khoa học và Kỹ thuật , 2003
14. Đặng Việt Cường, Nguyễn Đức Trung – Về một giải pháp tiếp cận các bài toán Sức bền vật liệu bằng tin học. TTCTKH.CHKT toàn quốc, 2001
15. Lều Thọ Trình – Cơ học kết cấu, T2, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005

16. Đặng Việt Cương – Cơ ứng dụng trong kỹ thuật, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005
17. Đặng Việt Cương – Cơ học kết cấu, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005
18. Đặng Việt Cương – Về một phương pháp mới nghiên cứu độ cứng của các công trình chịu tải trọng di động. TTHNKH toàn quốc CKT&TĐH, 2006
19. Đặng Việt Cương – Tuyển tập các bài toán giải sẵn môn Sức bền vật liệu – T1, T2 – NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2006
20. G. Korn, T. Korn – **Mathematical Handbook**, New York, 1968.

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA SỨC BỀN VẬT LIỆU	5
§1. Mô hình nghiên cứu	5
§2. Các dạng tải trọng và sơ đồ hóa tải trọng	9
§3. Sơ đồ hóa công trình thực	11
§4. Liên kết và phản lực liên kết	13
§5. Khái niệm về phân loại cơ hệ	16
§6. Khái niệm về cấu tạo hệ bất biến hình hình học	18
§7. Hệ biến hình tức thời	19
§8. Khái niệm về chuyển vị và biến dạng đàn hồi	21
§9. Khái niệm về ứng suất	24
§10. Khái niệm về nội lực trên mặt cắt	10
§11. Các loại biến dạng cơ bản và cách xác định các nội lực tương ứng	30
§12. Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực	34
§13. Quy ước vẽ biểu đồ nội lực và các nhận xét	38
§14. Các ví dụ áp dụng	40
Chương 2. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU	57
§1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo	58
§2. Thí nghiệm kéo vật liệu giòn	64
§3. Đặc trưng cơ học của vật liệu khí nén	65
§4. Hiệu ứng Baoxinghe và hệ số Poát xông	66
§5. Đặc trưng cơ học của vật liệu mới	68
§6. Các yếu tố ảnh hưởng đến đặc trưng cơ học của vật liệu	71
§7. Xác định độ cứng của vật liệu	73

Chương 3. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG	85
§1. Khái niệm về trạng thái ứng suất	85
§2. Trạng thái ứng suất khối và phân loại trạng thái ứng suất	87
§3. Trạng thái ứng suất phẳng	92
§4. Vòng tròn MO	98
§5. Các ví dụ áp dụng	103
§6. Biến dạng ở trạng thái ứng suất khối. Định luật Húc tổng quát	111
§7. Thế năng biến dạng đàn hồi	116
Chương 4. KÉO VÀ NÉN	123
§1. Định nghĩa và các giả thiết tính toán	123
§2. Ứng suất và biến dạng	125
§3. Cách tính chuyển vị và nội lực bằng phương pháp vụn năng. Trường hợp tổng quát	125
§4. Chuyển vị và nội lực $U(z)$, $N(z)$ trong bài toán kéo (nén)	128
§5. Ứng suất cho phép, điều kiện bền và cứng	132
§6. Các ví dụ minh họa	135
Chương 5. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ	155
§1. Mômen khối lượng	155
§2. Mômen diện tích	158
§3. Quan hệ giữa các mômen quán tính cấp hai đối với các trục song song	163
§4. Quan hệ giữa các mômen quán tính cấp hai khi xoay trục tọa độ	164
§5. Elip quán tính và thuộc tính của nó	166
§6. Các ví dụ minh họa	167
Chương 6. CÁC TIÊU CHUẨN BỀN VÀ DẪO	175
§1. Nhiệm vụ và cách đặt bài toán lý thuyết bền	175

§2. Các tiêu chuẩn bền ứng dụng của vật liệu đẳng hướng	177
§3. Các tiêu chuẩn bền và dẻo của vật liệu dị hướng	182
Chương 7. XOẮN THANH THẲNG	193
§1. Định nghĩa và khái niệm	193
§2. Ứng suất và biến dạng	195
§3. Điều kiện bền - Điều kiện cứng	197
§4. Chuyển vị, nội lực và phương pháp xác định chúng	198
§5. Xoắn thanh mặt cắt ngang không tròn	203
§6. Các ví dụ áp dụng	210
Chương 8. UỐN PHẪNG VÀ CẮT	223
§1. Khái niệm và định nghĩa	223
§2. Trạng thái ứng suất và biến dạng khi uốn thuần túy	225
§3. Hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang	233
§4. Đường đàn hồi, độ võng và góc xoay	235
§5. Phương pháp tích phân bất định	238
§6. Phương pháp đồ toán (dầm và tải trọng giả tạo)	239
§7. Phương pháp vạn năng	242
§8. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45 và cách sử dụng chương trình	247
§9. Trượt thuần túy và cách tính toán thực hành các mối ghép	249
§10. Các ví dụ áp dụng	262
Chương 9. KẾT CẤU CHỊU LỰC PHỨC TẠP	271
§1. Nguyên tắc tính toán kết cấu chịu lực phức tạp	271
§2. Tính dầm chịu uốn ngang phẳng	277
§3. Ví dụ minh họa	279
§4. Tính kết cấu chủ yếu chịu uốn và xoắn đồng thời	286
§5. Ví dụ minh họa	290
§6. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn chịu kéo hoặc nén	297

§7. Đường trung hòa và lỗi mặt cắt	305
§8. Các ví dụ minh họa	311
Chương 10. CÁC NGUYÊN LÝ VÀ CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG SỨC BỀN VẬT LIỆU	315
I. CÁC NGUYÊN LÝ TỔNG QUÁT	315
§1. Nguyên lý độc lập tác dụng	315
§2. Nguyên lý Sainte – Venant	315
§3. Nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học	316
§4. Năng lượng biến dạng và năng lượng bù	317
§5. Khái niệm về biến phân và phiếm hàm	319
§6. Nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đối với chất điểm	321
§7. Nguyên lý công khả dĩ của Poisson – Lagrange đối với hệ đàn hồi	322
§8. Cách tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính bằng phương pháp Maxwell – Mohr – Верещагин	326
§9. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với vật thể đàn hồi ba chiều. Phương trình biến phân của Lagrange	332
§10. Nguyên lý năng lượng bù của Castigliano	336
§11. Phương pháp Rayleigh – Ritz	337
§12. Phương pháp Bubnov – Galoorkin	345
§13. Phương pháp bình phương tối thiểu	350
II. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT TRONG HỆ ĐÀN HỒI	353
§14. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực	353
§15. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị	354
§16. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị	355
§17. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị	356
§18. Định lý Castighano. Định lý Lagrange	357
§19. Định lý Menabrea về sự cực tiểu của thế năng	359

Chương 11. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH HỆ SIÊU TĨNH	363
I. Phương pháp lực	363
§1. Sự hình thành hệ siêu tĩnh	367
§2. Thực chất của phương pháp lực. Hệ phương trình chính tắc đối với hệ chịu tải trọng	367
§3. Tính hệ siêu tĩnh chịu nhiệt độ thay đổi	374
§4. Tính hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức	376
§5. Sử dụng tính đối xứng khi tính hệ bằng phương pháp lực	379
II. Phương pháp chuyển vị	383
§6. Thực chất của phương pháp chuyển vị	383
§7. Phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị	387
§8. Cách xác định các phần tử trong ma trận K và R_p bằng phương pháp tĩnh	390
Chương 12. ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐÀN HỒI	403
§1. Khái niệm về hiện tượng ổn định	403
§2. Bài toán uốn dọc	405
§3. Giới hạn áp dụng công thức Ôle. Công thức kinh nghiệm của Yaxinsky	408
§4. Công thức Ôle trong miền đàn – dẻo	410
§5. Phương pháp thực hành tính thanh chịu uốn dọc	411
Chương 13. CƠ SỞ TÍNH TOÁN VỎ MỎNG KHÔNG MÔMEN	417
§1. Khái niệm về lý thuyết có và không mômen	417
§2. Tính toán vỏ mỏng tròn xoay theo lý thuyết không mômen	421
§3. Hiệu ứng biên trong vỏ trụ	427
Chương 14. TÍNH TOÁN THANH CONG	435
§1. Khái niệm chung	435
§2. Thanh cong chịu kéo và nén	436
§3. Thanh cong chịu uốn thuần túy	438
§4. Vị trí trục trung hòa	440

§5. Ứng suất trong thanh chịu uốn và kéo (nén) đồng thời	443
Chương 15. ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN	447
§1. Khái niệm về sự phá hủy do mỏi và nguyên nhân của nó	447
§2. Chu trình ứng suất và giới hạn mỏi	449
§3. Biểu đồ giới hạn mỏi	452
§4. Cách tính độ bền mỏi	455
§5. Ví dụ ứng dụng	458
Chương 16. ĐỘNG LỰC HỌC ĐỘ BỀN	465
I. HỆ MỘT BẬC TỰ DO	465
§1. Dao động tự do	466
§2. Dao động cưỡng bức	473
II. HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO	477
§3. Dao động tự do - Phương pháp ma trận độ mềm và phương pháp ma trận độ cứng	478
§4. Dao động cưỡng bức – Phương pháp ma trận độ mềm và phương pháp ma trận độ cứng	488
§5. Các ví dụ minh họa	493
III. DAO ĐỘNG HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO	498
§6. Dao động tự do	498
§7. Dao động cưỡng bức	501
IV. HỆ CHỊU TẢI TRỌNG VÀ CHẠM	502
§8. Phương pháp gần đúng trọng va chạm	503
§9. Khái niệm về lý thuyết sóng va chạm	510
§10. Các ví dụ áp dụng	512
Chương 17. TÍNH TOÁN KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI	521
§1. Những khái niệm cơ bản	521
§2. Uốn thuần túy dầm làm bằng vật liệu đàn hồi dẻo lý tưởng	522
§3. Phân tích dầm dẻo lý tưởng dầm chịu uốn ngang	527

§4.	Phân tích đàn hồi dẻo lý tưởng thanh mặt cắt tròn chịu xoắn	534
§5.	Nghiên cứu khả năng chịu tải của kết cấu chịu lực phức tạp làm bằng vật liệu cứng dẻo lý tưởng	536
§6.	Phương pháp cân bằng giới hạn	550
§7.	Tính ống dày trong và ngoài giới hạn đàn hồi	558
	Phụ lục	569
	Tài liệu tham khảo	580



Sách cùng tác giả

1. **LÝ THUYẾT DÈO VÀ TỪ BIẾN**
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1997
2. **CƠ SỞ CƠ HỌC ỨNG DỤNG**
NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI - 2002
3. **SỨC BỀN VẬT LIỆU, TẬP 1 VÀ TẬP 2**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2001
TÁI BẢN 2003
4. **LÝ THUYẾT DÈO ỨNG DỤNG**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2003
5. **BÀI TẬP SỨC BỀN VẬT LIỆU**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2004
6. **CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2005
TÁI BẢN 2007
7. **CƠ HỌC KẾT CẤU**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2005
8. **TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN**
MÔN "SỨC BỀN VẬT LIỆU", TẬP 1
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2006
9. **TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN**
MÔN "SỨC BỀN VẬT LIỆU", TẬP 2
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2007
10. **SỨC BỀN VẬT LIỆU - TOÀN TẬP**
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT - 2008

Xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.

2 0 8 0 8 5

Sức bền vật liệu toàn tập



2105090000045

136,000

Giá: 136 000đ