LÊ NGỌC HỒNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

LÊ NGỌC HỒNG
SỨC BỀN VẬ

Pgs, Pts. LÊ NGỌC HỒNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 1998

60 - 605
KHKT - 98 290 - 18 - 98

# Lời tựa

Sức bền vật liệu (SBVL) là một phần kiến thức căn bản đối với kỹ sư thuộc các ngành kỹ thuật, vì vậy môn học này được bố trí trong chương trình đào tạo của nhiều trường đại học như bách khoa, giao thông, thủy lợi, hàng hải, xây dựng, nông nghiệp... với các tỷ trọng khác nhau.

Giáo trình được biên soạn nhằm đáp ứng nhu cầu về học và dạy SBVL trong trường đại học nên không tham vọng trình bày được đầy đủ các khía cạnh quá phong phú, đa dạng của SBVL mà chỉ giới hạn ở việc diễn giải những phần lý thuyết chủ yếu, phù hợp với chương trình môn học hiện hành trong các trường đại học. Các chương mục được bố trí nhằm tạo điều kiện để các đối tượng khác nhau, tìm hiểu môn học với mức độ khác nhau, dễ dàng tiếp thu phần cơ bản và sau đó có thể đi sâu tìm hiểu thêm những vấn đề riêng biệt cần thiết cho học tập chuyên môn. Giáo trình gồm 15 chương:

*Chương 1* nêu những định nghĩa, khái niệm chính của môn học.

*Chương 2* dành cho việc xây dựng các biểu đồ ứng lực trong thanh, là một trọng điểm của giáo trình.

*Các chương 3, 6, 7, 8* phân tích nội lực và biến dạng, điều kiện bền, điều kiện cứng của thanh chịu các ứng lực đơn giản và tổ hợp các ứng lực: kéo (nén), xoắn, cắt, uốn và sự chịu lực phức tạp. Các đặc trưng vật liệu được giới thiệu trong chương 3.

*Chương 4* trình bày những khái niệm về trạng thái ứng suất nhằm mục đích thiết lập được các điều kiện bền trong trường hợp chịu lực tổng quát.

*Chương 5*, xét các đặc trưng hình học của hình phẳng, một phụ chương quan trọng trong tính toán SBVL.

*Chương 9 và 10* đi sâu vào một vài vấn đề đặc biệt của lý thuyết uốn, xoắn các thanh thường gặp trong thiết kế công trình, chẳng hạn vấn đề uốn xoắn thanh tiết diện mỏng, dầm trên nền đàn hồi.

*Chương 11 và 12* trình bày tương đối giản lược về phương pháp năng lượng để xác định chuyển vị, phương pháp lực để giải hệ thanh siêu tĩnh.

*Chương 13* giới thiệu quan niệm về ổn định và bài toán ổn định theo nghĩa Euler đối với thanh chịu nén đúng tâm và thanh chịu uốn thuần túy.

*Chương 14* xét tác dụng của tải trọng trên thanh gây lực quán tính đáng kể, gọi là tải trọng động. Bài toán dao động và va chạm được giới hạn trong phạm vi hệ một bậc tự do.

*Chương cuối cùng, chương 15*, nghiên cứu kết cấu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi theo mô hình đàn hồi - dẻo lý tưởng nhằm tìm tải trọng giới hạn tác động lên kết cấu.

Cuối mỗi chương đều có câu hỏi nhằm giúp người học hệ thống lại kiến thức và tự kiểm tra mức độ nắm vững lý thuyết của mình.

Giáo trình kế th'ra thành tựu lạt được trong các sách đã xuất bản của Bộ môn sức bền vật liệu Trường đại học xây dựng, đồng thời cũng là kết quả và kinh ıghiệm sau nhiều năm nghiên cứu, giảng dạy của tác giả.

Tác giả chân tl ành cám ơn sự quan tâm và những ý kiến đóng góp của các bạn đồ ıg nghiệp trong quá trình biên soạn.

**TÁC GIẢ**

# Ký hiệu các đại lượng

***Hệ toạ độ***

| | |
|---|---|
| $z$ | trục thanh; |
| $x, y$ | hệ trục chính trung tâm của tiết diện; |
| $\rho, \theta$ | toạ độ cực. |

***Các đặc trưng vật liệu***

| | |
|---|---|
| $E$ | môđun đàn hồi Young; |
| $\mu$ | hệ số nở ngang Poisson; |
| $G$ | môđun đàn hồi trượt. |

***Các đặc trưng hình học***

| | |
|---|---|
| $A$ | diện tích tiết diện; |
| $S, I, W$ | mômen tĩnh, mômen quán tính và mômen chống uốn của tiết diện; |
| $S_x, S_y$ | mômen tĩnh đối với trục $x$ và đối với trục $y$; |
| $I_x, I_y$ | mômen quán tính đối với trục $x$ và đối với trục $y$; |
| $I_{xy}$ | mômen quán tính đối với hệ trục $xy$, còn gọi là mômen quán tính ly tâm; |
| $W_x, W_y$ | mômen chống uốn của tiết diện trong mặt phẳng uốn $yz$ và mặt phẳng uốn $xz$; |
| $W_{x,d}$ | mômen chống uốn dẻo của tiết diện trong mặt phẳng uốn $yz$; |
| $I_p$ | mômen quán tính cực (đối với gốc toạ độ); |
| $I_{xo}$ | mômen quán tính xoắn của tiết diện không phải dạng hình tròn; |
| $r_x, r_y$ | bán kính quán tính của tiết diện; |
| $W_p$ | mômen chống xoắn của tiết diện tròn; |
| $W_{p,d}$ | mômen chống xoắn dẻo của tiết diện tròn; |
| $W_{xo}$ | mômen chống xoắn của tiết diện không tròn; |
| $\delta$ | bề dầy của các tiết diện thành mỏng. |

***Ngoại lực***

| | |
|---|---|
| $F$ | lực tập trung; |
| $p$ | cường độ lực phân bố diện tích; |
| $q$ | cường độ lực ngang phân bố đường; |
| $t$ | cường độ lực dọc phân bố đường; |
| $M, \mathscr{M}$ | mômen tập trung; |
| $m$ | cường độ mômen phân bố. |

***Ứng suất***

| | |
|---|---|
| $p, \sigma, \tau$ | ứng suất toàn phần, ứng suất pháp, ứng suất tiếp; |
| $p_\nu$ | ứng suất toàn phần trên mặt có pháp tuyến $\nu$ đi qua điểm nghiên cứu; |
| $\sigma_\nu$ | ứng suất pháp trên mặt có pháp tuyến $\nu$ đi qua điểm nghiên cứu ; |
| $\tau_{\nu\eta}$ | ứng suất tiếp theo phương $\eta$ trên mặt có pháp tuyến $\nu$ đi qua điểm nghiên cứu; |
| $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ | các ứng suất trong bài toán phẳng của trạng thái ứng suất; |
| $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | các ứng suất chính của trạng thái ứng suất; |

| | |
|---|---|
| $\sigma_{tl}$ | giới hạn tỷ lệ; |
| $\sigma_{ch}$ | giới hạn chảy; |
| $\sigma_b$ | giới hạn bền; |
| $\sigma_o$ | ứng suất giới hạn; |
| $[\sigma]$ | ứng suất cho phép; |
| $\sigma_{th}$ | ứng suất tới hạn. |

***Ứng lực***

| | |
|---|---|
| $N, M, Q$ | các ứng lực trong bài toán phẳng; |
| $\overline{N}, \overline{M}, \overline{Q}$ | các ứng lực do lực đơn vị gây ra khi tính chuyển vị theo công thức Mohr; |
| $\overline{M}$ | mômen uốn chỉ do lực ngang gây ra khi uốn ngang và uốn dọc đồng thời; |
| $N$ | ứng lực dọc (lực dọc); |
| $M_x$ | ứng lực mômen uốn trong mặt phẳng *yz* (mômen uốn quanh trục *x*); |
| $M_y$ | ứng lực mômen uốn trong mặt phẳng *xz* (mômen uốn quanh trục *y*); |
| $M_z$ | ứng lực mômen xoắn (mômen xoắn quanh trục *z*); |
| $Q_x, Q_y$ | ứng lực cắt (lực cắt) theo phương *x* và ứng lực cắt (lực cắt) theo phương *y*; |
| $M_{gh}$ | mômen uốn giới hạn; |
| $\Delta M$ | bước nhảy của biểu đồ mômen uốn; |
| $\Delta Q$ | bước nhảy của biểu đồ lực cắt; |
| $N_{th}$ | lực nén đúng tâm tới hạn; |
| $M_{th}$ | mômen uốn tới hạn. |

***Biến dạng và chuyển vị***

| | |
|---|---|
| $\varepsilon, \gamma$ | biến dạng dài tỷ đối và biến dạng góc tỷ đối; |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | biến dạng dài tỷ đối theo phương *x*, theo phương *y* và theo phương *z*; |
| $\gamma_{xy}$ | biến dạng góc trong mặt phẳng *xy* |
| $\varepsilon_{xy}$ | một nửa biến dạng góc tỷ đối trong mặt phẳng *xy*; |
| $\Delta l$ | biến dạng dài của đoạn thanh; |
| $\theta$ | góc xoắn tỷ đối của thanh; |
| $\Delta_k$ | chuyển vị theo phương *k*; |
| $\Delta_{km}$ | chuyển vị theo phương *k* do nguyên nhân *m*; |
| $y, \varphi$ | độ võng và góc xoay của tiết diện thanh chịu uốn trong mặt phẳng *yz* |

***Các ký hiệu khác***

| | |
|---|---|
| $\lambda$ | độ mảnh của thanh; |
| $\mu$ | hệ số ảnh hưởng của liên kết tới ứng suất tới hạn; |
| $\varphi$ | hệ số giảm ứng suất cho phép khi tính ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm; |
| $(S)$ | biểu đồ của đại lượng *S*; |
| $EA$ | độ cứng của tiết diện khi kéo (nén); |
| $EI$ | độ cứng của tiết diện khi uốn; |
| $GA$ | độ cứng của tiết diện khi cắt; |
| $GI_{xo}$ | độ cứng của tiết diện khi xoắn; |
| $\omega$ | tần số góc của dao động tự do. |

# 1 Những khái niệm chung

## *1-1. SỨC BỀN VẬT LIỆU - MÔN CƠ SỞ KỸ THUẬT*

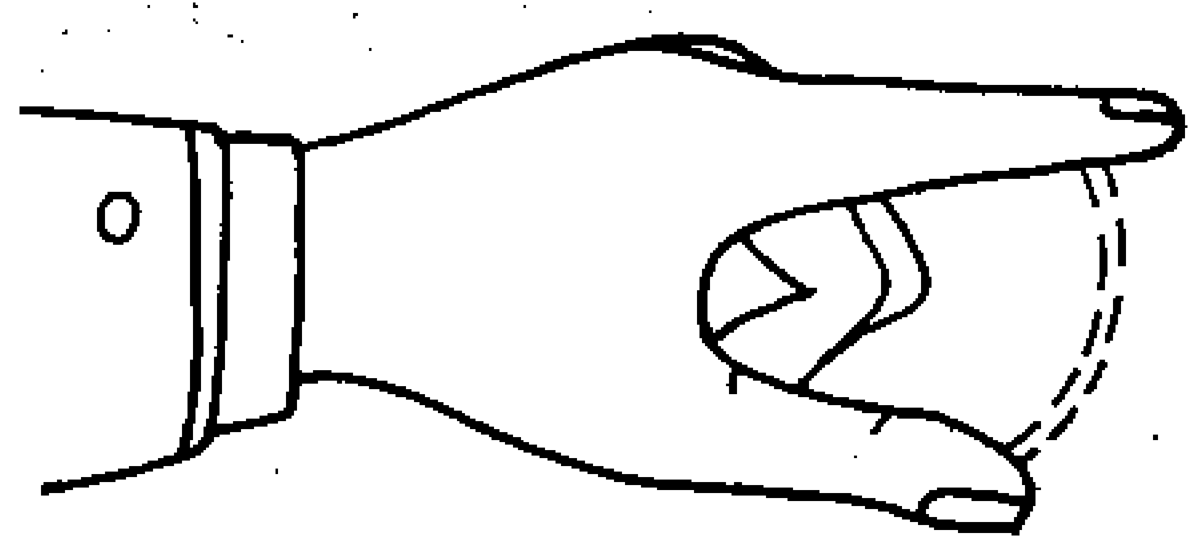
Trong quá trình được chế tạo và tồn tại, các công trình xây dựng và máy móc đều chịu tác động của môi trường bên ngoài, của bản thân công nghệ khai thác và sử dụng, trong đó một dạng tác động quan trọng là tác động cơ học, tức là các tác động thông qua lực và chuyển động. Công trình nhà chịu trọng lượng bản thân, tải trọng sử dụng, tải trọng gió bão... Công trình cầu chịu tác động của trọng lượng bản thân, của đoàn xe di chuyển, của dòng nước chảy, của gió bão... Để chịu được các tác động này và truyền tác động tới các bộ phận khác, mỗi công trình nhất thiết phải có một hệ thống tiếp nhận lực, một "bộ xương", một "bộ khung" gọi là kết cấu chịu lực. Kết cấu chịu lực có thể có một chức năng độc lập, riêng biệt, nhưng cũng có thể kết hợp với các chức năng sử dụng khác tùy theo từng loại công trình, quy mô công trình...

Kết cấu chịu lực cần được tính toán và thiết kế để đảm bảo đủ độ bền, đủ độ cứng và đủ độ ổn định.

*Đủ độ bền* nghĩa là kết cấu có khả năng tiếp nhận được tất cả các tổ hợp lực đặt lên công trình mà không bị phá hỏng trong thời gian tồn tại, trong tuổi thọ của công trình. Một ngôi nhà không sụp đổ trước gió bão ở cấp đã quy định, một đập chắn của hồ chứa nước không bị phá vỡ dưới áp lực nước ở mức tính toán cao nhất của mùa lũ...

*Đủ độ cứng* nghĩa là khi tiếp nhận và truyền tất cả các tác động lực, những thay đổi kích thước hình học của kết cấu không được vượt quá những trị số cho phép, nhằm đảm bảo việc sử dụng công trình một cách bình thường, đáp ứng được yêu cầu công nghệ cần thiết. Dầm cầu chạy trong nhà máy không được có độ võng vượt quá *1/1000* chiều dài, góc xoắn của trục bánh răng trong các hộp số truyền động không được lớn hơn *0,25* rad/m...

*Độ ổn định* là khả năng bảo toàn được trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu trong quá trình chịu lực. Để minh họa cho khái niệm này, ta hãy quan sát hình ảnh một que tăm bị nén bởi hai ngón tay như trên hình 1-1. Khi bóp nhẹ tay, que tăm vẫn thẳng, ta nói dạng cân bằng thẳng ban đầu của thanh là ổn định. Khi bóp nặng tay thì que tăm cũng vẫn thẳng nếu que ngắn và dầy dặn, nhưng sẽ bị cong nếu nó tương đối mỏng mảnh. Trong trường hợp sau, que tăm không bảo toàn được dạng cân bằng thẳng ban đầu của mình, ta nói nó bị mất ổn định.




*Hình 1-1.* Ổn định của que tăm chịu nén

Tính toán kết cấu công trình về độ bền, độ cứng, độ ổn định là nội dung của nhiều môn học. Sức bền vật liệu (SBVL) là một trong những môn học đó, nhằm nghiên cứu những phương pháp, những nguyên tắc chung để tính toán các chi tiết, các bộ phận kết cấu. Phương pháp của SBVL không đòi hỏi những suy luận thật đầy đủ, chặt chẽ, chính xác như những lập luận của toán học. SBVL là một môn khoa học thực nghiệm, được xây dựng trên một số kết quả thực nghiệm và những giả thiết mang tính trực giác, cho phép đơn giản hóa nhiều vấn đề phức tạp mà vẫn giữ lại những mô tả bản chất của các hiện tượng được nghiên cứu. Phương pháp của SBVL, có thể nói, là *phương pháp tư duy kỹ thuật*: giải quyết các bài toán thực tế bằng những cách tương đối không phức tạp mà vẫn đảm bảo được độ chính xác cần thiết, thích hợp. Các kết quả của SBVL được kiểm tra, bổ sung bằng các nghiên cứu của các môn khoa học chính xác khác như Lý thuyết đàn hồi, Lý thuyết dao động.. và bằng những số liệu thực nghiệm.

Thỏa mãn các yêu cầu về bền, cứng và ổn định thường mâu thuẫn với yêu cầu tiết kiệm nguyên vật liệu, giảm giá thành chi phí. Giải quyết mâu thuẫn này là mục đích và động lực của SBVL. Việc ứng dụng các nguyên vật liệu mới, việc hình thành các dạng kết cấu mới, đòi hỏi các phương pháp đánh giá thích hợp, cũng là một lý do quan trọng thúc đẩy sự phát triển của môn học.

Kết cấu công trình là một hệ thống gồm các bộ phận hoặc các phần tử, gọi chung là các chi tiết, được liên kết với nhau đủ để chịu được lực và truyền được lực. Một khung nhà gồm nhiều thanh nối với nhau trong mặt phẳng hay trong không gian, mỗi thanh là một chi tiết; hệ thống dầm, dàn của cầu cũng được hình thành từ nhiều chi tiết, trong đó dàn bao gồm các thanh nối với nhau bằng hàn hoặc đinh tán... Để tính cả hệ thống, trước hết cần phải biết cách tính toán từng chi tiết - là một hệ đơn giản nhất - đó là nội dung của SBVL. Việc tính toán cả hệ thống kết cấu sẽ được nghiên cứu trong môn học khác, như là Cơ học kết cấu, Ổn định và Động lực công trình... Việc ứng dụng kết quả vào từng loại vật liệu cụ thể là nhiệm vụ của những môn Cơ học chuyên ngành như là Kết cấu bê tông, Bêtông cốt thép, Kết cấu kim loại, Chi tiết máy... SBVL là cầu nối giữa những kiến thức cơ bản như Toán, Vật lý, Cơ học lý thuyết và những môn kỹ thuật cụ thể, SBVL là một môn cơ sở kỹ thuật. Hiểu biết về SBVL là nền tảng, là một phần kiến thức quan trọng không thể thiếu đối với các kỹ sư xây dựng, cơ khí...

Lý thuyết SBVL cũng là một bộ phận của Cơ học vật rắn biến dạng, là phần đơn giản và ứng dụng của Lý thuyết đàn hồi, Lý thuyết dẻo...

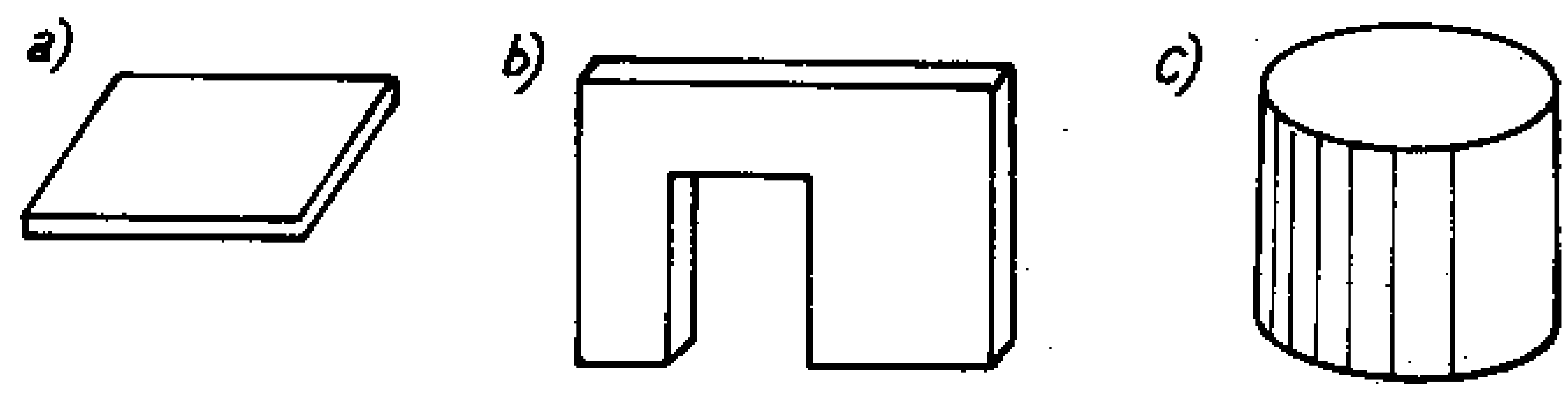
Trên cơ sở thực nghiệm, SBVL sẽ đưa ra những chỉ tiêu để đánh giá độ bền, độ cứng, độ ổn định của các chi tiết công trình.

## *1-2. PHÂN LOẠI CÁC CHI TIẾT CÔNG TRÌNH THEO DẠNG HÌNH HỌC*

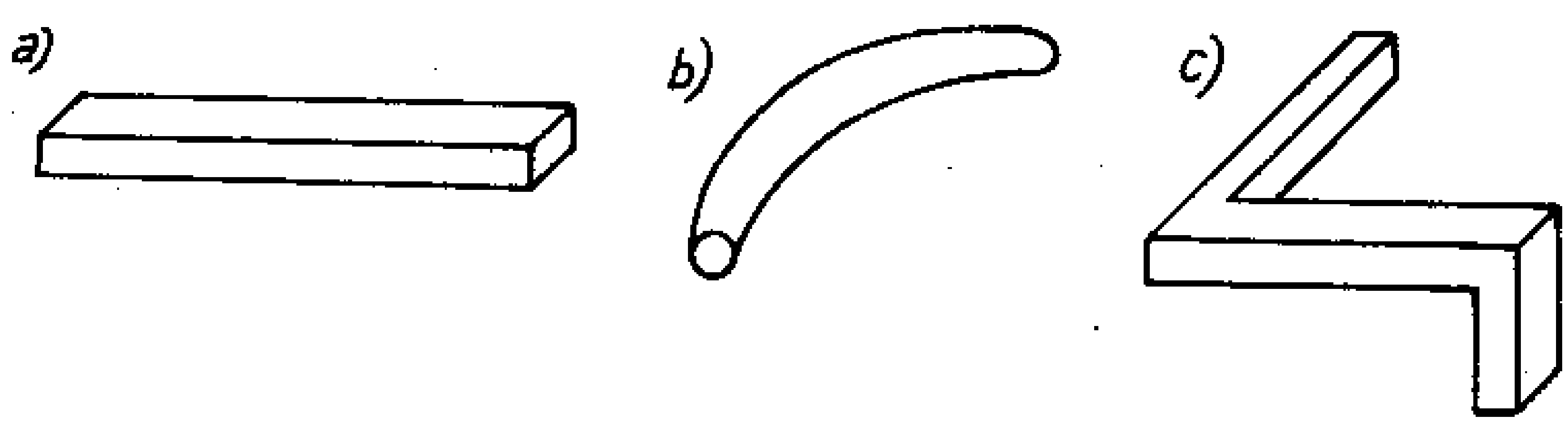
Các chi tiết công trình có nhiều hình dạng khác nhau, việc phân loại chúng giúp cho ta khái quát hóa được phương pháp luận và đề ra được những biện pháp nghiên cứu thích hợp với từng loại.

Các chi tiết được phân loại theo tương quan kích thước hình học trong không gian: hình khối (hình 1-2a), hình tấm hoặc vỏ (hình 1-2b), hình thanh (hình 1-2c).

*Hình 1-2.* Hình khối



*Hình 1-3.* Hình tấm hoặc vỏ



*Hình 1-4.* Hình thanh

Chi tiết hình khối là các chi tiết có kích thước theo ba phương tương đương nhau. Ví dụ các móng máy (hình 1.2a), nền đất (hình 1.2b), viên bi (hình 1.2c) trong các ổ bi truyền lực... Đặc điểm của chi tiết khối là *bài toán ba chiều.*

Chi tiết hình tấm, vỏ là các chi tiết mà kích thước theo một phương (gọi là bề dày) nhỏ thua rất nhiều so với hai kích thước còn lại. Ví dụ như các tấm sàn (hình 1.3a), tấm tường (hình 1.3b), các vòm mái, bình chứa khí, bể chứa dầu (hình 1.3c)... Đặc điểm của các chi tiết này là quy được về *bài toán hai chiều.*

Chi tiết hình thanh là các chi tiết mà kích thước theo hai phương (gọi là mặt cắt ngang) nhỏ thua rất nhiều so với kích thước còn lại (gọi là chiều dài). Tính toán các chi tiết này đơn giản hơn hai loại trên vì có thể quy về *bài toán một chiều* theo phương dài. Các chi tiết hình thanh thường gặp phổ biến hơn cả trong kết cấu công trình: các thanh của khung, các thanh trong dàn, cột, dầm. Do đó trong SBVL người ta chủ yếu nghiên cứu các vật thể hình thanh.

Ta có thể định nghĩa: *Thanh là một vật thể hình học được tạo bởi một hình phẳng A có trọng tâm chuyển động dọc theo đường tựa s, trong quá trình chuyển động hình phẳng luôn luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường tựa.* Hình phẳng chuyển động được gọi là *mặt cắt ngang* hay *tiết diện*, đường tựa *s* được gọi là *trục thanh*.

Ta biểu diễn thanh bởi đường trục kèm theo hình vẽ mặt cắt ngang. Tùy theo dạng của trục mà ta có các loại thanh phẳng gồm thanh thẳng (hình 1.4a), thanh cong (hình 1.4b) và thanh không gian (hình 1.4c). Thanh có diện tích *A* không đổi còn được gọi là thanh lăng trụ. Việc nghiên cứu các đặc trưng hình học của tiết diện sẽ được nhắc tới trong một phần riêng biệt, mặc dầu các đặc trưng này là những định nghĩa thuần túy toán học nhưng lại có liên quan chặt chẽ với độ bền, độ cứng và độ ổn định của thanh.

## 1-3. PHÂN LOẠI NGOẠI LỰC - PHẢN LỰC VÀ LIÊN KẾT

### 1-3-1. Phân loại ngoại lực

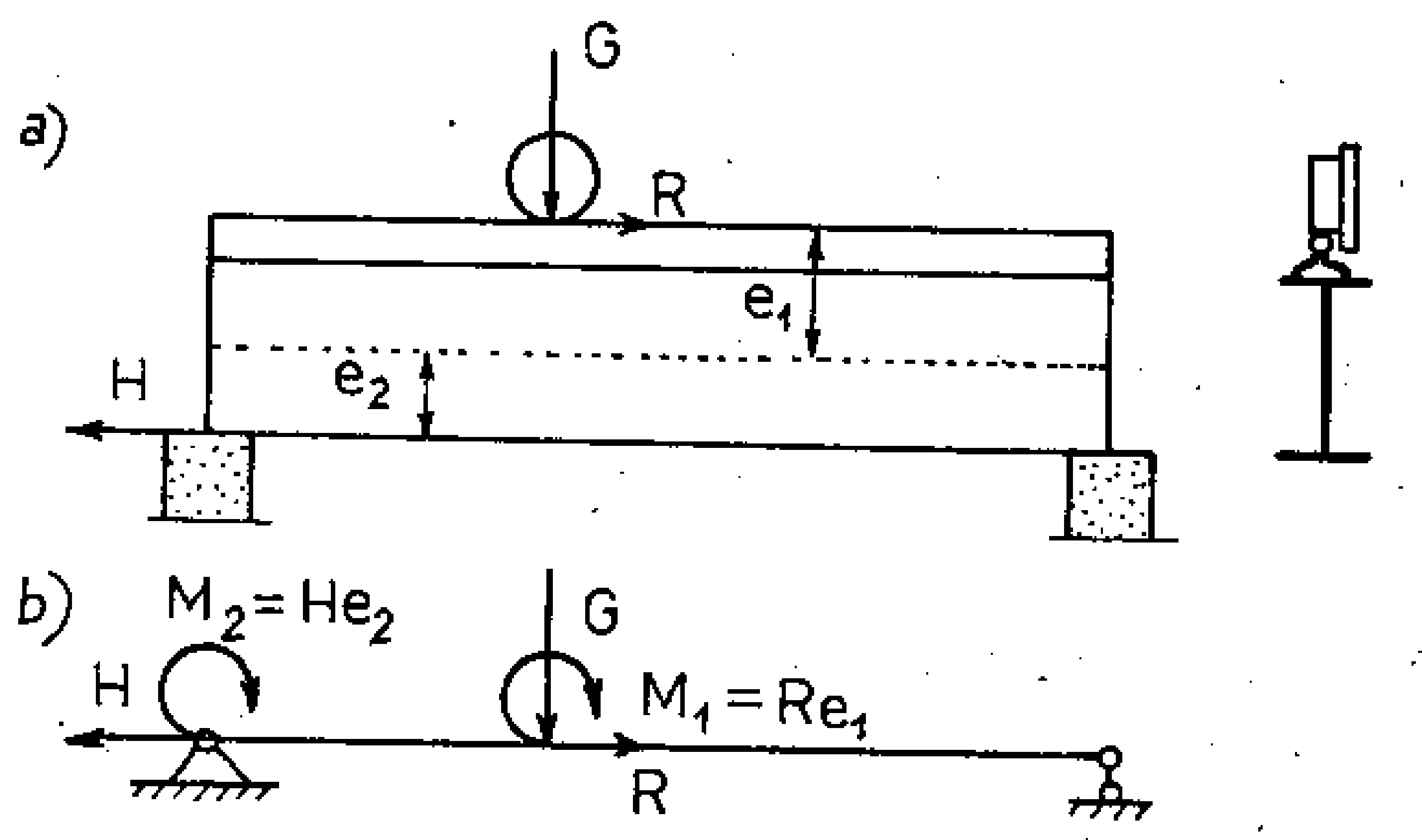
Ngoại lực là những lực của môi trường bên ngoài hoặc của những vật thể khác tác động lên vật thể đang xét.

Ngoại lực bao gồm *tải trọng* và *phản lực*. Tải trọng là những lực chủ động, biết trước, được lấy theo các quy định, tiêu chuẩn, chẳng hạn tiêu chuẩn nhà nước 2737-1995 "Tải trọng và tác động " dùng cho tính toán, thiết kế công trình xây dựng. Phản lực là những lực thụ động, phát sinh ở vị trí liên kết vật thể đang xét với vật thể xung quanh do có tác dụng của tải trọng.

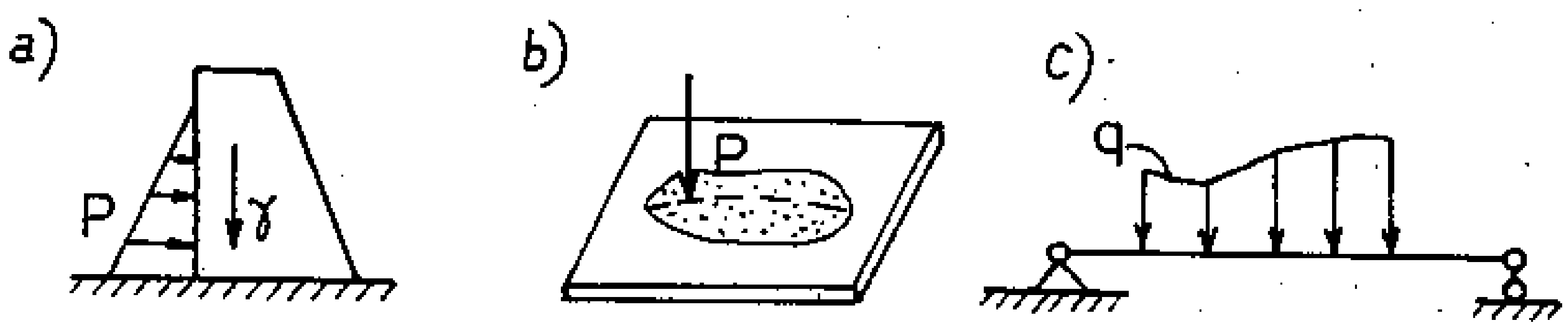
Theo hình thức tác dụng ta có thể phân loại lực tác động thành lực tập trung và lực phân bố.

- *Lực tập trung hoặc mômen tập trung* là những lực hoặc mômen tác dụng tại một điểm của vật thể. Trên thực tế, định nghĩa này chỉ có tính chất quy ước vì qua một điểm, là một khái niệm hình học không có kích thước, không có thể truyền được bất kỳ một tác động hữu hạn nào. Lực tập trung, mômen tập trung là những ví dụ mang ý nghĩa điển hình về việc sơ đồ hóa các hiện tượng thực tế.

Hình 1-5a thể hiện sơ đồ tính của một dầm đỡ chịu tác dụng lực từ một bánh xe của cầu trục. Trọng lượng của cầu trục và của vật được trục $G$, tác dụng theo phương thẳng đứng, được truyền lên dầm qua một diện tích tiếp xúc hữu hạn rất nhỏ giữa bánh xe và ray gắn trên dầm. Các lực dọc trục $R$, chẳng hạn lực hãm phanh, cũng được truyền tới dầm đang xét qua diện tích tiếp xúc này. Chuyển các lực này về trục của dầm, ta nhận thêm các mômen tập trung như trên sơ đồ tính vẽ ở hình 1-5b.




*Hình 1-5.* Sơ đồ truyền lực lên dầm cầu trục




*Hình 1-6.* Các loại lực phân bố

♦ *Lực phân bố* là những hệ lực rải trên một thể tích, một diện tích hoặc một đường của vật thể. Trọng lượng riêng của kết cấu hoặc lực quán tính là loại lực phân bố trong thể tích vật thể (hình 1-6a); áp lực nước lên mặt bên của một đập chắn, trọng lượng đống cát đổ trên mặt sàn là những lực bề mặt (hình 1-6a,b); khi lực bề mặt tác dụng trên diện tích có kích thước theo một chiều bé hơn rất nhiều so với kích thước theo chiều còn lại thì ta có thể coi là lực phân bố theo chiều dài (hình 1-6c). Các lực phân bố được đặc trưng bởi *cường độ*, là *giá trị lực trên một đơn vị thể tích, diện tích hoặc chiều dài phân bố tương ứng.*

* Cường độ lực phân bố thể tích, ký hiệu $\gamma$, thứ nguyên: [Lực/ (Chiều dài)$^3$].

* Cường độ lực phân bố diện tích, ký hiệu $p$, thứ nguyên: [Lực/(Chiều dài)$^2$].

* Cường độ lực phân bố đường, ký hiệu $q$, thứ nguyên: [Lực/Chiều dài].

Cường độ lực phân bố có thể biến thiên hoặc bằng hằng số trên miền tác dụng.

Trong trường hợp các lực phân bố đều hướng theo một phương, hợp lực của chúng có thể tính theo trị số đại số:

* trường hợp phân bố với cường độ $g$ trên thể tích $V$:

$$F = \int_V g dV \text{, khi } g = const \text{ trong thể tích } V \text{ thì } F = gV;$$

* trường hợp phân bố diện tích với cường độ $p$ trên diện tích $S$:

$$F = \int_S p dS \text{, khi } p = const \text{ trên diện tích } S \text{ thì } F = pS;$$

* trường hợp phân bố đường với cường độ $q$ trên chiều dài $L$:

$$F = \int_L q dl \text{, khi } q = const \text{ trên chiều dài } L \text{ thì } F = qL \text{.}$$

Ví dụ trên đoạn thẳng $L=2$ m có lực phân bố đường với cường độ đều $q=4$ kN/m hướng về một phía và vuông góc với đoạn thẳng, thì hợp lực sẽ là một lực $F = 4.2 = 8$ kN đặt tại trung điểm của chiều dài $L$ và cùng chiều với cường độ $q$.

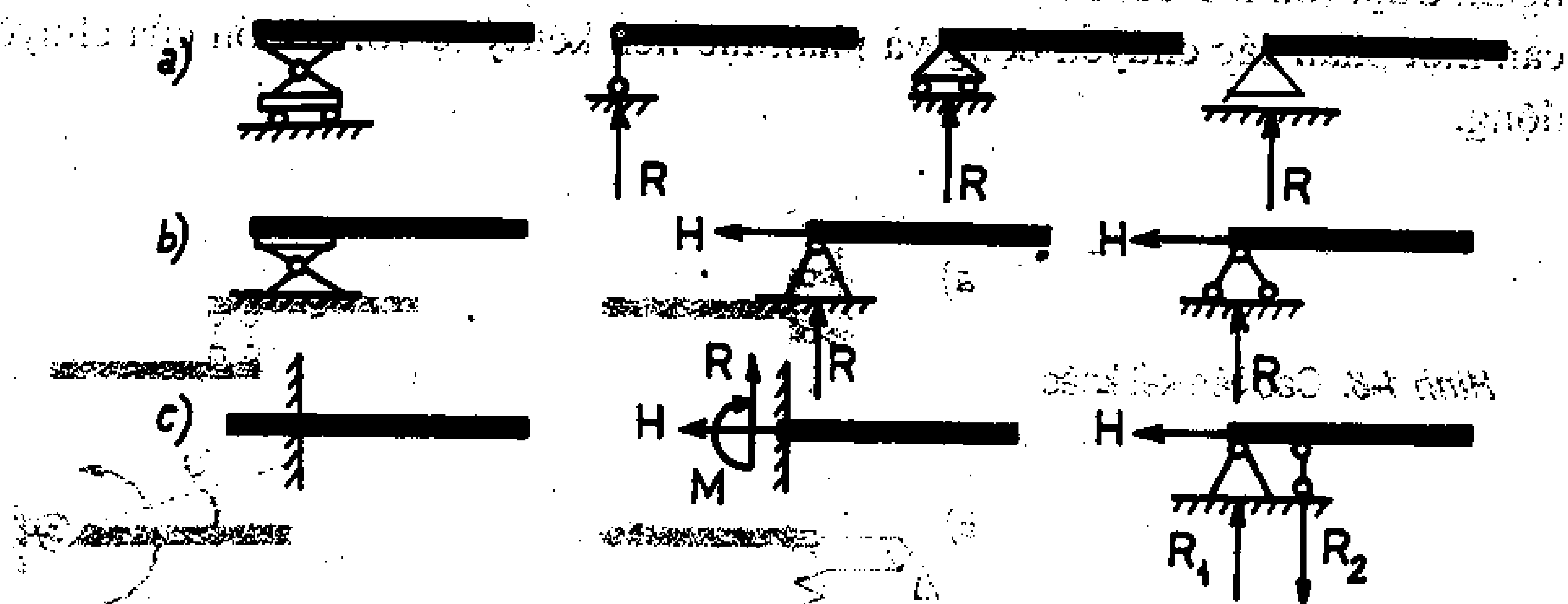
Tùy theo tính chất tác động, tải trọng cũng được phân thành tải trọng tĩnh và tải trọng động. Tải trọng tĩnh là loại tải trọng tăng chậm theo thời gian cho đến khi đạt trị số cuối cùng, sau đó thì dừng lại và không thay đổi. Ví dụ như trọng lượng tòa nhà đối với nền đất, áp lực tĩnh của đất đá lên các tường chắn, trọng lượng riêng của các dàn trên cầu. Khi tính toán với tải trọng tĩnh ta bỏ qua lực quán tính của khối lượng kết cấu.

Tải trọng động là tải trọng gây ra gia tốc biến dạng lớn, do đó, lực quán tính lớn và không thể bỏ qua so với lực tác động. Có thể thấy hiệu ứng của lực động khi quan sát tác dụng nện của một búa nhỏ làm vỡ một viên gạch, hoặc tác dụng của máy đóng cọc, các loại đầm bê tông.

Trong SBVL, về cơ bản, ta khảo sát bài toán tĩnh. Tải trọng động được đề cập trong chương 14 chỉ mang tính chất đặc trưng đối với một vài trường hợp điển hình và đơn giản.

### *1-3-2. Các liên kết đối với thanh, phản lực liên kết*

Một thanh chịu lực bên ngoài sẽ truyền tác động của lực sang các chi tiết, các bộ phận khác ở chỗ liên kết, tiếp xúc với chúng. Ngược lại, các chi tiết, các bộ phận khác sẽ tác động lại thanh đang xét những phản lực cũng tại những chỗ tiếp xúc, liên kết. Thanh bị ngăn cản chuyển động theo phương nào thì sẽ nhận các phản lực tương ứng theo phương ấy. Trên hình 1-7 trình bày ba dạng liên kết thường gặp trong bài toán phẳng của thanh : *liên kết gối tựa di động, liên kết gối tựa cố định, liên kết ngàm.*




*Hình 1-7. Các liên kết cứng*

- ♦ ***Gối tựa di động*** hay ***liên kết đơn*** (hình 1-7a), chỉ ngăn cản chuyển động thẳng dọc theo phương liên kết. Phản lực là một lực $R$ theo phương liên kết.
- ♦ ***Gối tựa cố định*** hoặc ***liên kết khớp*** (hình 1-7b), ngăn cản mọi chuyển động thẳng. Phản lực thường được phân ra hai thành phần: $R$ theo phương thẳng đứng hoặc vuông góc trục thanh và $H$ theo phương nằm ngang hoặc dọc trục thanh. Liên kết khớp, như thế, có hai thành phần phản lực theo hai phương và tương đương hai liên kết đơn.
- ♦ ***Liên kết ngàm*** hay ***liên kết hàn*** (hình 1-7c), ngăn cản mọi chuyển động thẳng và chuyển động quay. Phản lực gồm một lực $V$ phân tích thành hai thành phần $R$, $H$ và một mômen $M$ chống lại sự quay. Như thế, một liên kết ngàm tương đương với ba liên kết đơn.

Trên hình 1-7 cũng trình bày một vài cách thể hiện thường dùng để ký hiệu các liên kết nói trên. Những liên kết này ngăn cản hoàn toàn các chuyển động theo phương liên kết nên được gọi là các liên kết cứng.

Để xác định các phản lực liên kết ta sử dụng các phương trình cân bằng đối với thanh đang xét. Trong bài toán phẳng tổng quát ta có ba phương trình cân bằng dưới các dạng:

1) $\Sigma X = 0;\quad \Sigma Y = 0;\quad \Sigma M_A = 0,$ ($x$, $y$ không song song). (1-1a)

2) $\Sigma M_A = 0;\quad \Sigma M_B = 0;\quad \Sigma M_C = 0,$ ($A$, $B$, $C$ không thẳng hàng). (1-1b)

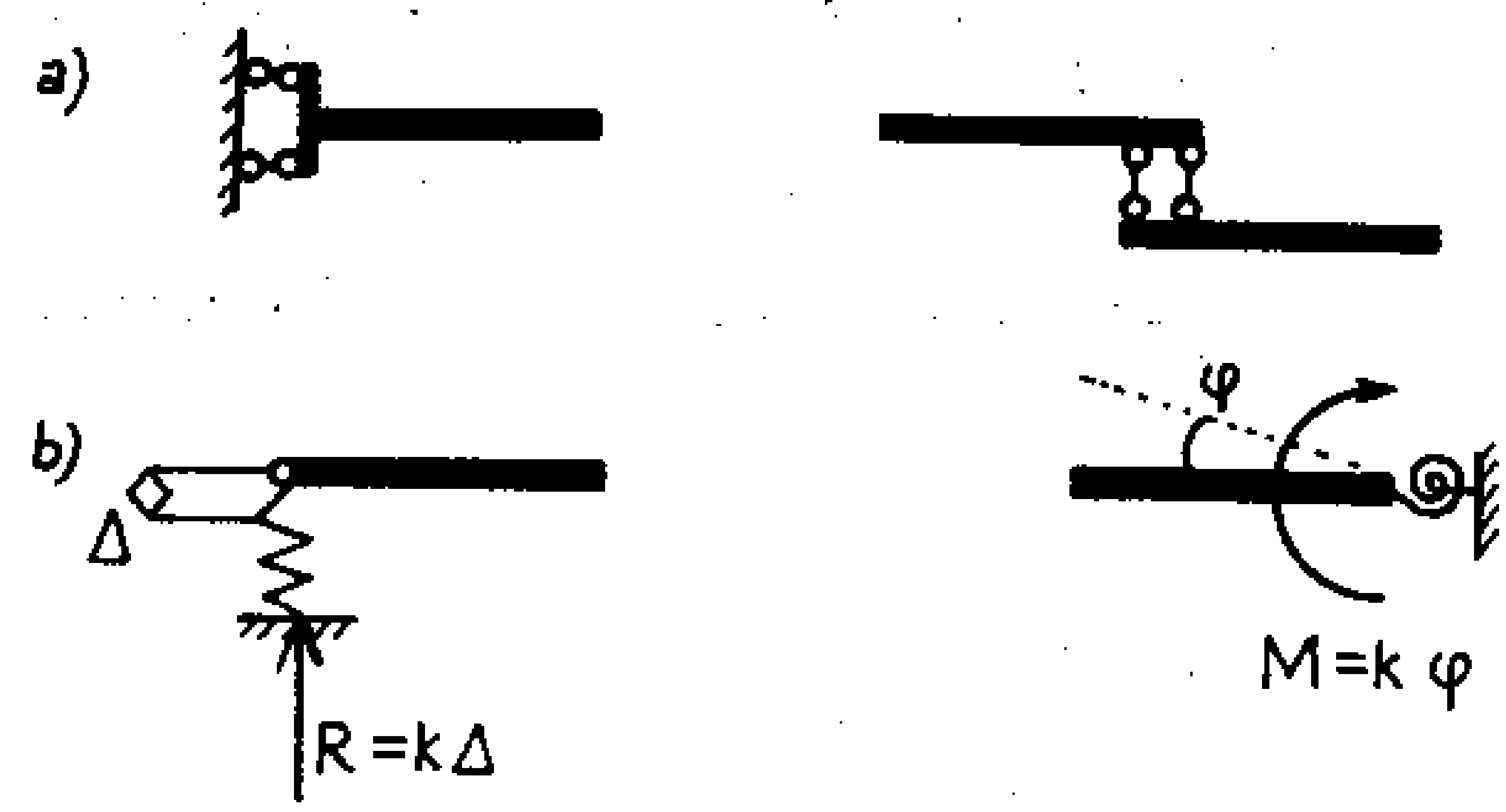
3) $\Sigma X = 0;\quad \Sigma M_A = 0;\quad \Sigma M_B = 0,$ ($AB$ không vuông góc với $x$). (1-1c)

Bài toán không gian có sáu phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = 0;\quad \Sigma Y = 0;\quad \Sigma Z = 0;\quad \Sigma M_x = 0;\quad \Sigma M_y = 0;\quad \Sigma M_z = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

Ngoài những liên kết giới thiệu ở trên, còn tồn tại những dạng liên kết khác như ngàm trượt (hình 1-8a) hoặc các liên kết đàn hồi (hình 1-8c), là liên kết chỉ ngăn cản một phần các chuyển động và phản lực liên kết tỷ lệ với độ lớn của chuyển động.

*Hình 1-8.* Các liên kết khác




Để cố định vị trí của một thanh trong mặt phẳng, ta cần tối thiểu ba liên kết đơn để triệt tiêu ba chuyển động tự do của thanh: hai chuyển động thẳng theo hai phương xác định nào đó và một chuyển động quay.

Nếu đủ số liên kết và bố trí hợp lý thì ba phản lực tương ứng sẽ tìm được từ ba phương trình cân bằng (1-1), thanh được gọi là *tĩnh định*. Khi số liên kết đơn tương đương của một thanh lớn hơn ba thì số ẩn số phản lực lớn hơn số phương trình cân bằng, bài toán được gọi là *siêu tĩnh*. Để giải bài toán siêu tĩnh, ta cần bổ sung thêm những điều kiện phụ, điều này sẽ được đề cập đến trong các chương sau.

## 1-4. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN DẠNG, NỘI LỰC

### 1-4-1. Định nghĩa chuyển vị và biến dạng

Các chi tiết công trình, các vật thể dùng trong kỹ thuật được chế tạo từ vật liệu thực, là những vật thể có thay đổi hình dáng và kích thước khi chịu tác động của các lực bên ngoài. Các yếu tố hình học của vật thể như điểm, đoạn thẳng, góc hợp giữa các phương và thể tích cũng thay đổi. Những sự thay đổi ấy được gọi chung là *biến dạng*.

Sự thay đổi vị trí của một điểm được gọi là *chuyển vị*.

Lượng thay đổi chiều dài của một đoạn chiều dài được gọi là *biến dạng dài tuyệt đối*, nếu chiều dài của đoạn thẳng ban đầu bằng một đơn vị thì biến dạng được gọi là *biến dạng dài tỷ đối*, ký hiệu là $\varepsilon$ kèm theo chỉ số bên dưới biểu thị phương của đoạn thẳng. Biến dạng dài tuyệt đối của một đoạn chiều dài $L$ theo phương $l$ sẽ là

$$\Delta l = \int_L \varepsilon_l \, dl \; . \tag{1-3}$$

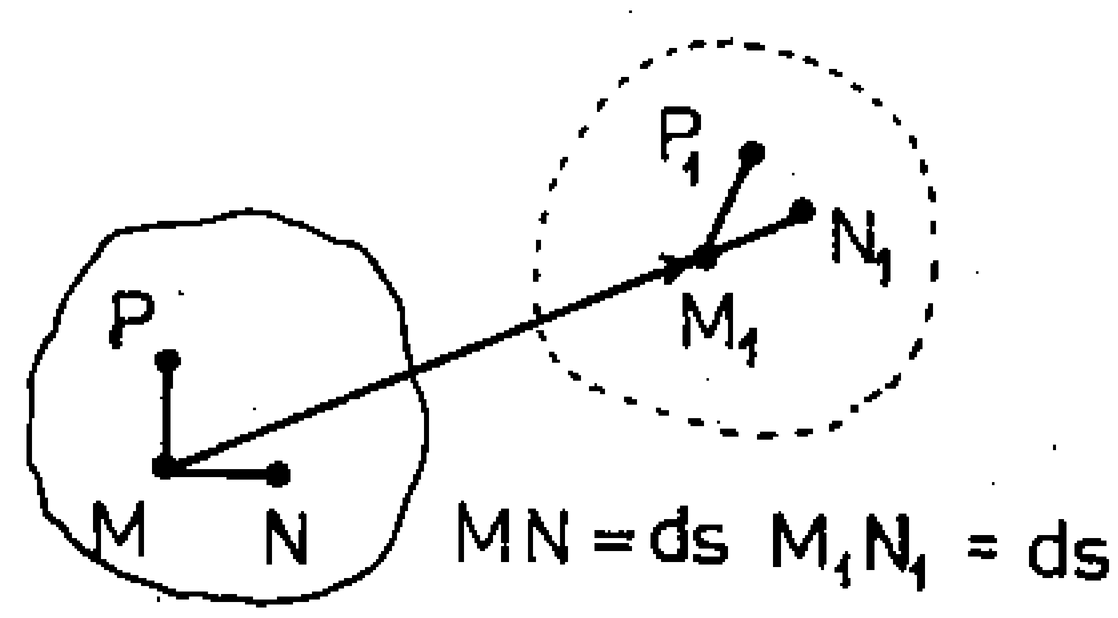
Lượng thay đổi của một góc vuông được gọi là *biến dạng góc*, ký hiệu là $\gamma$ kèm theo hai chỉ số dưới ghi tên của mặt phẳng chứa góc vuông đang xét.

Lượng thay đổi của một đơn vị thể tích được gọi là *biến dạng thể tích tỷ đối*, ký hiệu là $\theta$. Độ thay đổi thể tích của một thể tích $V$ trong vật thể sẽ là

$$\Delta V = \int_V \theta \, dV \; . \tag{1-4}$$

Hình 1-9 biểu diễn trạng thái ban đầu và trạng thái biến dạng của vật thể. Ở trạng thái ban đầu, ta xét điểm $M$ và các điểm lân cận $N$, $P$. Vị trí những điểm này sau biến dạng là $M_1$, $N_1$, $P_1$.

Chuyển vị của điểm $M$ được đặc trưng bởi vectơ $\boldsymbol{MM_1}$.




*Hình 1-9.* Chuyển vị và biến dạng

Biến dạng dài tỷ đối theo phương $MN$ tại điểm đang xét là $\varepsilon_{MN} = \dfrac{ds_1 - ds}{ds}$.

Biến dạng góc tại điểm $M$ đang xét là

$$\gamma_{NMP} = \angle(NMP) - \angle(N_1M_1P)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \angle(N_1M_1P).$$

Các biến dạng $\varepsilon$, $\gamma$, $\theta$ là những đại lượng không thứ nguyên.

### 1-4-2. Biến dạng và chuyển vị của thanh

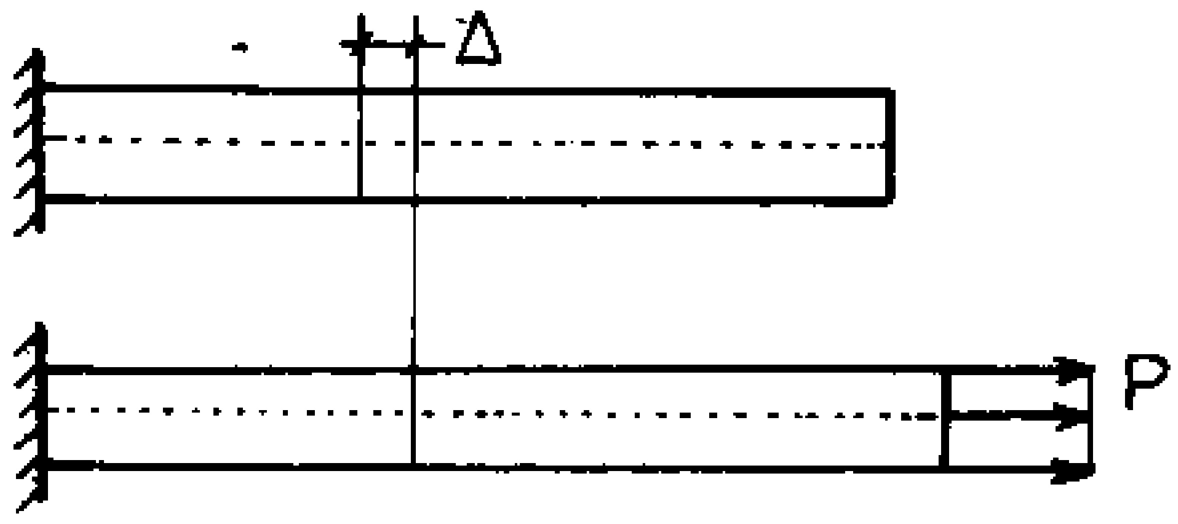
Đối với thanh, được mô tả bằng trục và tiết diện, chuyển vị và biến dạng thường được định nghĩa như sau :

*Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của tiết diện trước và sau khi thanh bị biến dạng.* Theo động học, chuyển vị này được phân tích thành *chuyển vị tịnh tiến* (chuyển vị thẳng của trọng tâm tiết diện) và *chuyển động quay* của mặt phẳng tiết diện quanh trọng tâm.

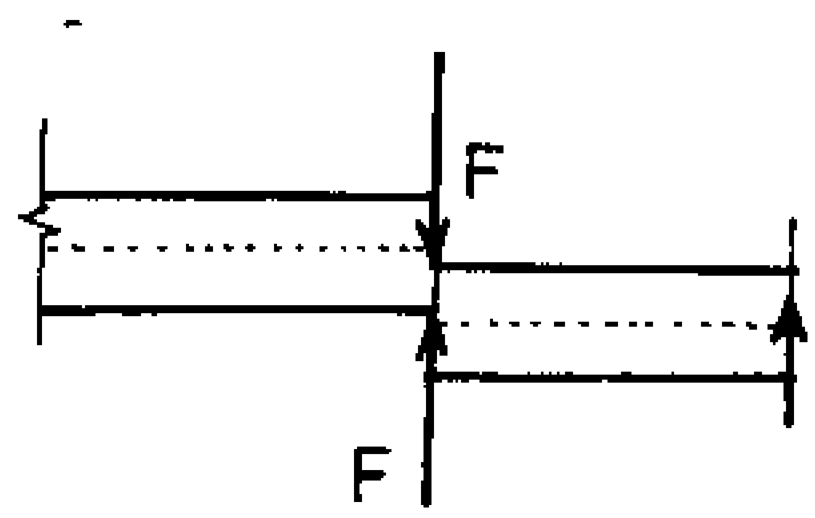
*Biến dạng của thanh là sự thay đổi kích thước hình dáng của tiết diện, sự thay đổi chiều dài độ cong, độ xoắn của trục thanh.* Thông thường, trong SBVL người ta ít quan tâm tới biến dạng của tiết diện, mà quan tâm nhiều hơn tới biến dạng của trục thanh. Theo biến dạng của thanh, người ta chia ra những trường hợp chịu lực cơ bản như sau :

**1- Thanh chịu kéo hoặc nén** (hình 1-10):

Trong trường hợp này, trục thanh không thay đổi độ cong. Nếu thanh thẳng thì sau biến dạng trục thanh vẫn thẳng, các tiết diện chỉ có chuyển vị thẳng là chuyển động tịnh tiến $\Delta$ dọc theo trục thanh.




*Hình 1-10.* Thanh chịu kéo



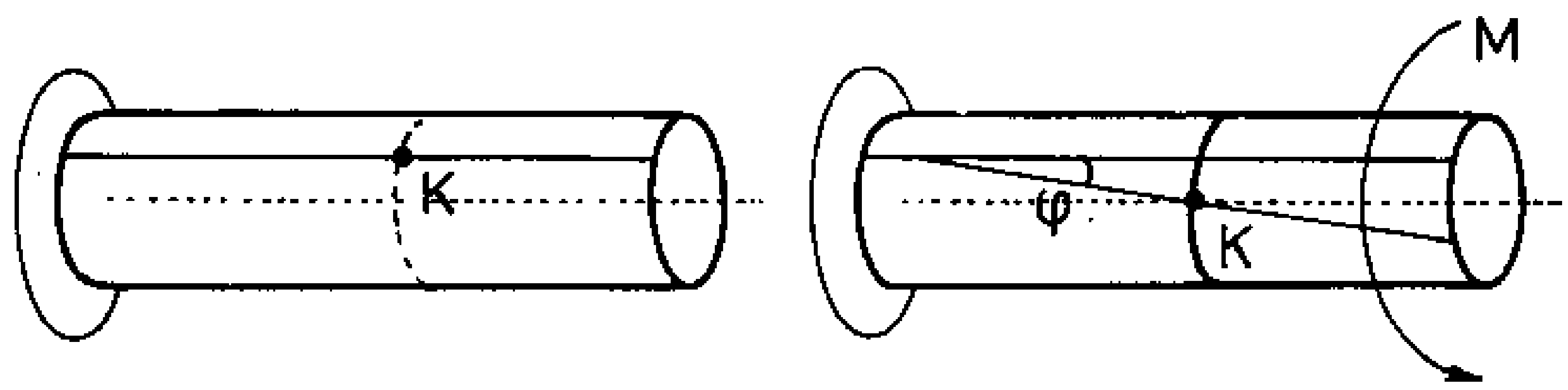

*Hình 1-11.* Thanh chịu cắt

**2- Thanh chịu cắt** (hình 1-11)

Khi này, trục thanh không thay đổi độ cong nhưng bị gián đoạn. Các tiết diện không biến dạng nhưng có sự trượt tương đối giữa hai tiết diện kề nhau ở nơi chịu lực cắt.

**3- Thanh chịu xoắn** (hình 1-12)

Trục thanh không thay đổi độ cong, không thay đổi độ dài. Các tiết diện không có chuyển vị thẳng, nhưng có chuyển vị xoay quanh trục thanh trong mặt phẳng của tiết diện.

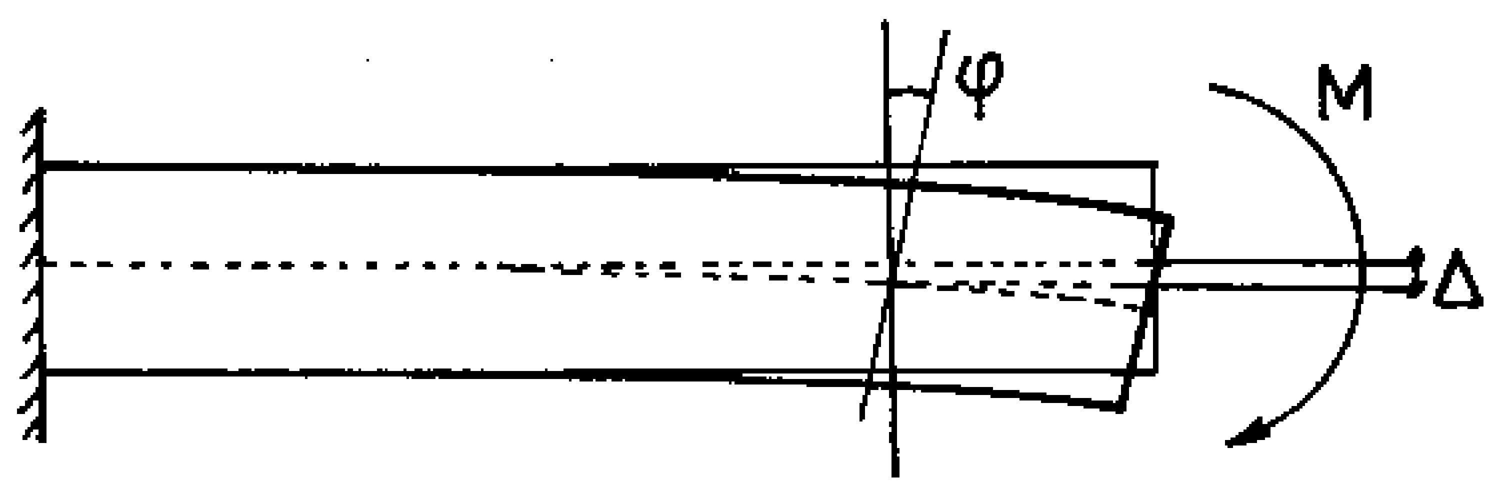



*Hình 1-12.* Thanh chịu xoắn

4- Thanh chịu uốn (hình 1-13)

Trục thanh thay đổi độ cong, không thay đổi độ dài. Tiết diện thanh có cả chuyển vị thẳng $\Delta$ và cả chuyển vị xoay $\varphi$.

*Hình 1-13.* Thanh chịu uốn




Bốn dạng chịu lực hoặc bốn dạng biến dạng của thanh ở trên là những dạng cơ bản hoặc còn gọi là những dạng biến dạng đơn giản, thuần túy. Trong thực tế, thanh có thể biến dạng theo tổ hợp của những trường hợp cơ bản trên: thanh chịu uốn và nén, thanh chịu kéo và xoắn...; những trường hợp này gọi là *thanh chịu lực phức tạp*.

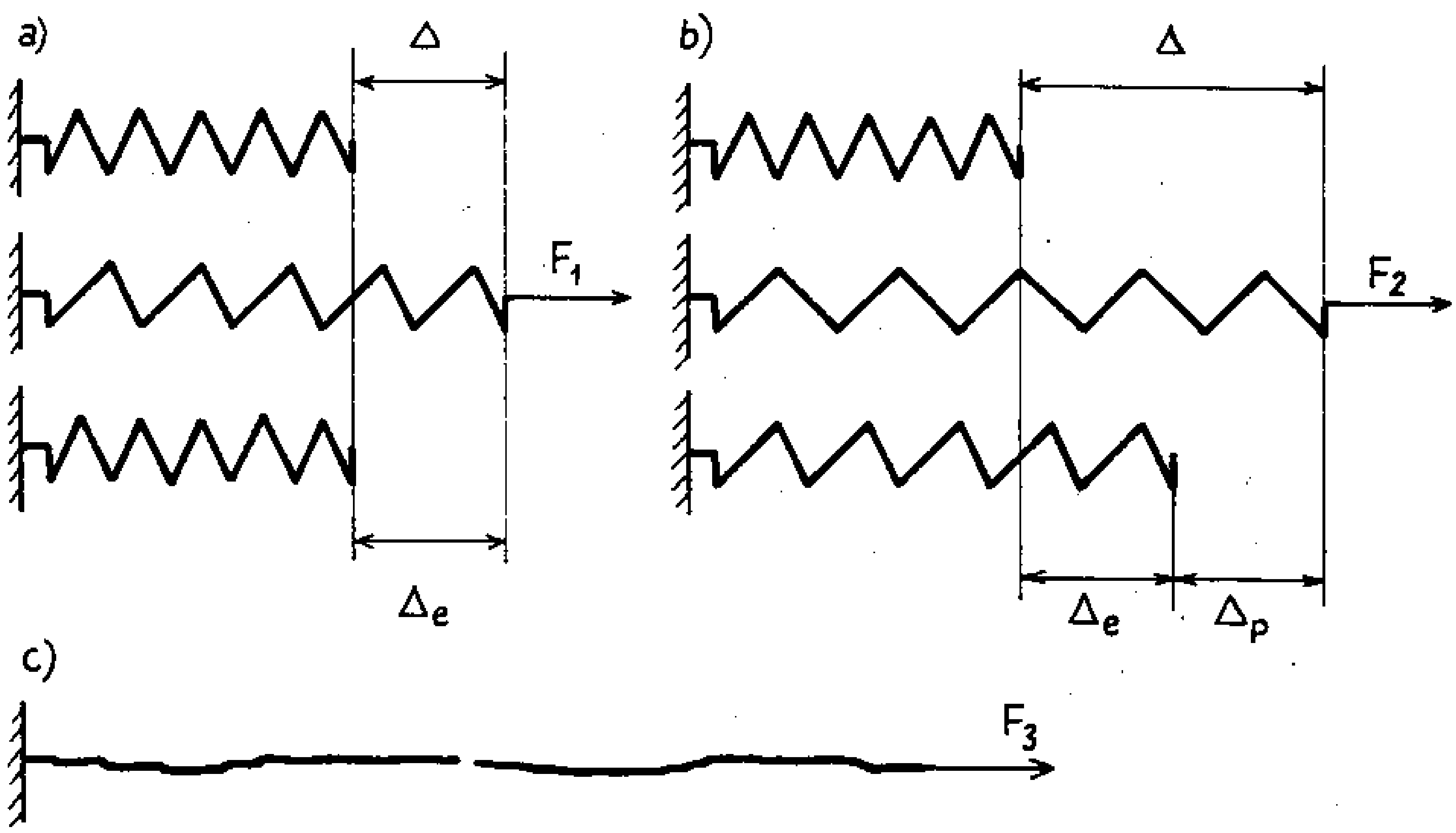
### *1-4-3. Biến dạng đàn hồi, biến dạng dư.*

Dưới tác dụng của ngoại lực vật thể sẽ có biến dạng. Nếu bỏ nguyên nhân gây biến dạng, nói chung, vật thể sẽ khôi phục lại một phần hình dáng cũ. Phần biến dạng bị mất đi khi bỏ nguyên nhân được gọi là *biến dạng đàn hồi*, phần biến dạng còn lại được gọi là *biến dạng dư hay biến dạng dẻo*. Vật thể chỉ có biến dạng đàn hồi được gọi là vật thể *đàn hồi tuyệt đối*. Ta có thể thấy rằng trong một giới hạn tác động nào đó của ngoại lực vật thể sẽ chỉ có biến dạng đàn hồi, vượt quá giới hạn đó trong vật thể sẽ xuất hiện những biến dạng dẻo và thậm chí bị phá hoại. Có thể minh họa nhận xét này qua quan sát một lò xo chịu kéo trên hình 1-14.

Hình 1-14a : Biến dạng đàn hồi tuyệt đối $\Delta = \Delta_e$ (khi lực $F$ nhỏ );

Hình 1-14b : Biến dạng đàn dẻo $\Delta = \Delta_e + \Delta_p$ (khi lực $F$ khá lớn );

Hình 1-14c : Phá hoại, đứt (khi lực $F$ rất lớn ).




*Hình 1-14.* Tính chất các biến dạng

### *1-4-4. Nội lực, phương pháp mặt cắt, ứng suất*

Giữa các phần tử vật chất của vật thể luôn luôn có những lực tương tác. Ở thời điểm ban đầu, khi chưa có tác động của ngoại lực, những lực tương tác này đảm bảo sự không thay đổi hình dạng của vật thể. Khi có tác động của ngoại lực, vật thể biến dạng, những lực tương tác bên trong vật thể cũng thay đổi.

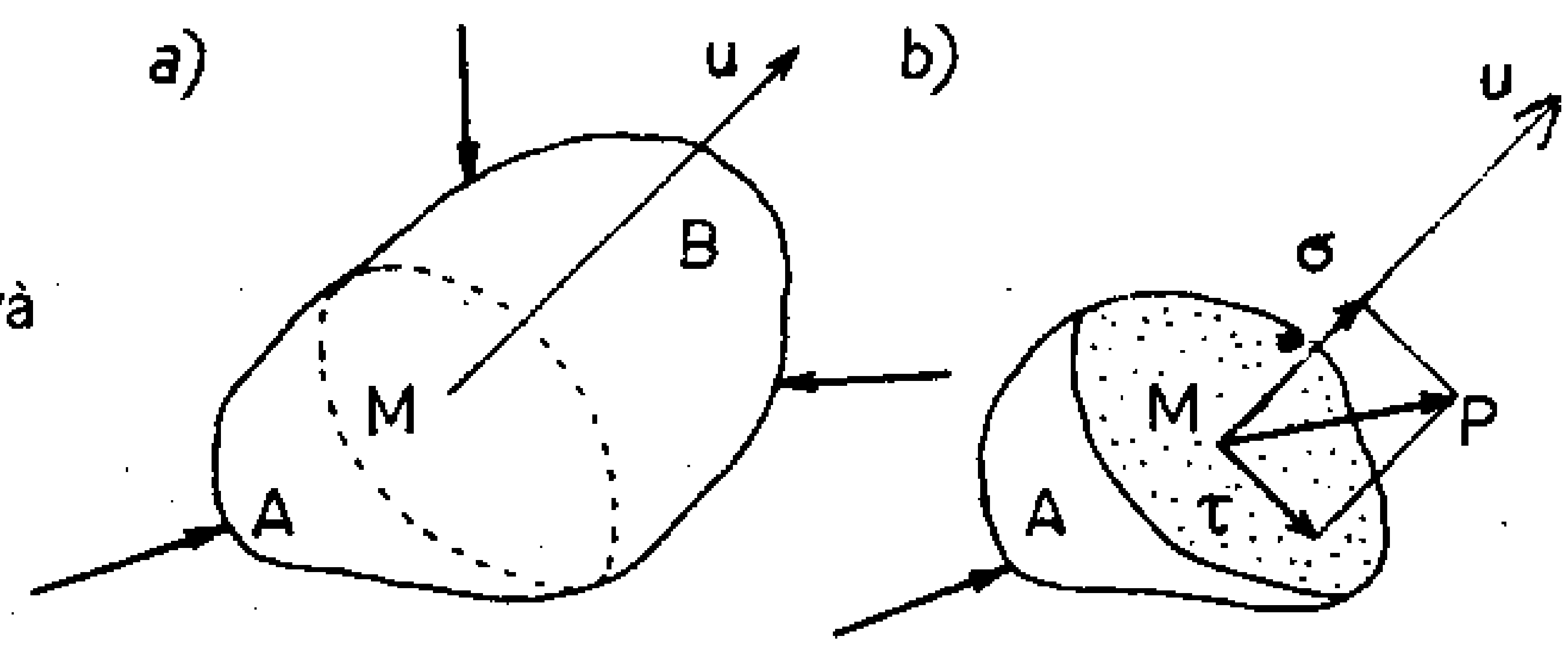
Ta định nghĩa: *nội lực là lượng thay đổi những lực tương tác giữa các phần tử vật chất của vật thể.* Theo định nghĩa, ta thừa nhận nguyên lý "*vật thể ở trạng thái tự nhiên*" nghĩa là ở trạng thái ban đầu, khi chưa có tác động bên ngoài, nội lực trong hệ bằng không.

Để làm xuất hiện, biểu diễn và tính được nội lực, ta dùng *phương pháp mặt cắt* với nội dung như sau:

Xét vật thể cân bằng dưới tác động của một hệ ngoại lực đặt trên nó. Tưởng tượng có một mặt $S$ cắt qua vật thể, chia vật thể thành hai phần $A$ và $B$ như trên hình 1-15a.

Vật thể cân bằng nên mỗi phần của nó cũng cân bằng. Ta hãy xét một phần, chẳng hạn phần $A$. Để phần $A$ cân bằng, ngoài những ngoại lực đặt trên phần $A$, ta phải đặt vào phần này các lực tác dụng tương hỗ của phần $B$. Tác dụng này được thể hiện thông qua một hệ lực đặt trên diện tích tiếp xúc giữa hai phần, nghĩa là trên mặt cắt $S$, như trên hình vẽ 1-15b. Hệ lực này chính là nội lực trên mặt cắt đang xét của vật thể.

*Hình 1-15.* Nội lực và ứng suất




Ký hiệu véctơ $dp$ là tổng của nội lực trên diện tích phân tố $dA$ chứa điểm $M$ thuộc mặt cắt, ta định nghĩa ứng suất toàn phần $p$ tại điểm đang xét là nội lực trên một đơn vị diện tích

$$p = \frac{dp}{dA} \ . \qquad (1\text{-}5)$$

Thứ nguyên của ứng suất là [ Lực] / [Chiều dài]$^2$

Có thể phân tích ứng suất toàn phần ra hai thành phần như trên hình 1-15b:

$$p = \sigma_u + \tau_{uv} \ . \qquad (1\text{-}6)$$

$\sigma_u$ - ứng suất pháp, thành phần vuông góc với mặt cắt tại điểm đang xét $M$;

$\tau_{uv}$ - ứng suất tiếp, thành phần nằm trong mặt cắt;

$u$ - phương pháp tuyến của mặt cắt tại điểm đang xét $M$ ;

$v$ - phương của ứng suất tiếp.

Ứng suất trong thanh phụ thuộc vào biến dạng, phụ thuộc vào tác động của ngoại lực. Nhiệm vụ trước hết của SBVL là tìm được các liên hệ, phụ thuộc đó bằng các nghiên cứu lý thuyết và bằng thực nghiệm. Nhiệm vụ tiếp sau là so sánh các kết quả nhận được với các kết quả thí nghiệm của các loại vật liệu và với các yêu cầu công nghệ để đưa ra được các tiêu chuẩn đánh giá độ bền, độ cứng, độ ổn định của kết cấu, nói chung, và của thanh, nói riêng.

Để thực hiện được mục đích đó, ngoài các kiến thức cần thiết về Toán học, Vật lý, Cơ lý thuyết...SBVL còn được xây dựng trên cơ sở những tiên đề, những giả thiết riêng của nó. Đó là những giả thiết về cấu tạo vật chất của vật thể.

## *1-5. GIẢ THIẾT VỀ VẬT LIỆU TRONG SỨC BỀN VẬT LIỆU*

Các chi tiết công trình được chế tạo từ nhiều vật liệu rất khác nhau: kim loại màu, kim loại đen, bêtông, bêtông cốt thép, gỗ, chất nhựa hữu cơ... Do đó, cấu tạo và tính chất vật lý của các chi tiết, bộ phận công trình cũng rất khác nhau. Để đưa ra được phương pháp tính chung, SBVL nghiên cứu một loại vật liệu quy ước, một loại vật liệu có những tính chất chung nhất, phổ biến nhất của nhiều loại vật liệu thực. Những tính chất này là những giả thiết của môn học nhằm khái quát hóa cấu tạo chung của vật liệu, đồng thời cụ thể hóa đối tượng nghiên cứu và nêu rõ phạm vi áp dụng của môn học. Những giả thiết này được trình bày tóm tắt như sau:

### *1-5-1. Vật liệu có cấu tạo vật chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng*

* Tính *liên tục* nghĩa là vật liệu chiếm đầy không gian của vật thể. Tại mọi điểm trong không gian này ta đều có thể lấy ra được một phần tử vật chất vô cùng bé chứa điểm cần xét. Tọa độ của điểm cũng là tọa độ của phân tố vật thể lấy tại điểm đó. Vật liệu là liên tục trong không gian nên các đại lượng biểu diễn tính chất của nó, ví dụ nội lực, biến dạng, cũng là những hàm liên tục và do đó, ta có thể áp dụng được các phép tính vi phân, tích phân khi nghiên cứu các đại lượng này. Tất nhiên cấu tạo hạt, cấu tạo vi mô của vật thể thường không thỏa mãn giả thiết này, nhưng các chi tiết của kết cấu công trình đều có kích thước vĩ mô nên việc áp dụng giả thiết liên tục để nghiên cứu nội lực và biến dạng trong các chi tiết là chấp nhận được. Hơn nữa, các tính chất cơ học của vật liệu lại được xác định như là những trị số trung bình quy ước của các kết quả thí nghiệm trên các mẫu thử có kích thước vĩ mô, nên khi so sánh kết quả tính toán với kết quả thí nghiệm để đánh giá độ bền thì việc sử dụng giả thiết cấu tạo liên tục của vật thể, trên thực tế, sẽ không gây nên sai số.

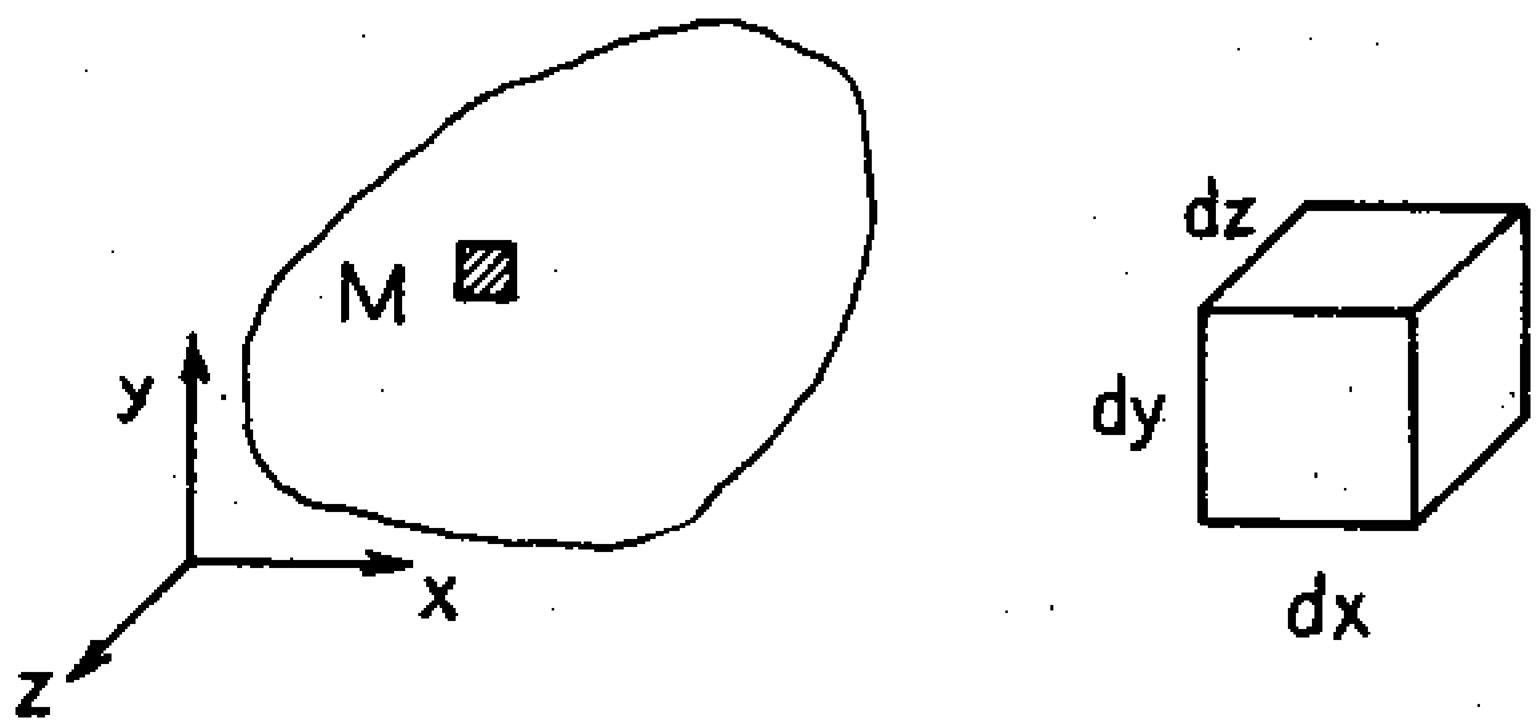
* Tính *đồng nhất* được hiểu là phân tố vật thể lấy tại những điểm khác nhau đều có tính chất cơ học như nhau.

* Tính *đẳng hướng* có nghĩa là tính chất cơ học của vật thể theo mọi phương đều như nhau.

Hai giả thiết về tính đồng nhất và đẳng hướng cho phép ta nghiên cứu các tính chất của toàn vật thể thông qua nghiên cứu tính chất của một phân tố vật thể (hình 1-16), trong một hệ trục tọa độ lựa chọn tùy ý thích hợp, thuận lợi cho tính toán.

Giả thiết về cấu tạo vật chất liên tục cũng là tiên đề, là cơ sở của Cơ học môi trường liên tục, mà trong đó Thủy khí động học, Lý thuyết đàn hồi, Lý thuyết dẻo, Lý thuyết từ biến... chỉ là từng nhánh.

*Hình 1-16.* Vật thể và phân tố vật thể trong hệ tọa độ Descartes




### *1-5-2. Biến dạng của vật thể là đàn hồi tuyệt đối và có trị số bé*

Biến dạng được coi là bé khi các trị số biến dạng tỷ đối $\varepsilon, \gamma, \theta$ nhỏ thua rất nhiều so với đơn vị, chúng là những đại lượng vô cùng bé $|\varepsilon|, |\gamma|, |\theta| << 1$. Trong biểu thức chứa biến dạng ta có thể bỏ qua tích của các biến dạng là những vô cùng bé bậc cao, và chỉ giữ lại những số hạng bậc nhất của biến dạng; kết quả là ta chỉ nhận được các biểu thức tuyến tính của biến dạng. Điều đó cho phép làm đơn giản khá nhiều việc giải các bài toán của SBVL.

### *1-5-3. Vật liệu tuân theo định luật Hooke*

Năm 1660 nhà bác học người Anh Robert Hooke, thông qua những nghiên cứu về sự làm việc của các lò xo, đã phát biểu một tính chất cơ bản, đặc trưng cho biến dạng đàn hồi của lò xo, là "độ dãn dài của lò xo tỷ lệ với lực tác dụng". Định luật mang tên tác giả và được viết dưới dạng biểu thức như sau (xem ký hiệu trên hình 1-14a )

$$F = c\,\Delta . \qquad (1\text{-}7)$$

Hằng số $c$ gọi là *độ cứng* của lò xo. Từ biểu thức (1-7) có thể thấy độ cứng $c$ là trị số lực cần thiết để gây ra biến dạng dài bằng một đơn vị chiều dài. Thứ nguyên của độ cứng $c$ là [Lực / Chiều dài]. Lò xo là một mô hình của vật thể đàn hồi tuyến tính dùng trong SBVL, nói riêng, và trong Cơ học vật rắn biến dạng, nói chung.

Ta có thể nêu định luật Hooke một cách tổng quát như sau :

***"Biến dạng của vật thể tỷ lệ thuận với lực tác động, quan hệ giữa biến dạng và nội lực là quan hệ bậc nhất thuần nhất".***

Ta viết định luật Hooke cho hai trường hợp biến dạng đơn giản của một phân tố tách ra từ vật thể, có các cạnh bằng một đơn vị dài (hình 1-17):

* Phân tố chỉ chịu ứng suất pháp theo một phương (hình 1-17a): biến dạng dài $\varepsilon$ theo phương của ứng suất tỷ lệ với ứng suất

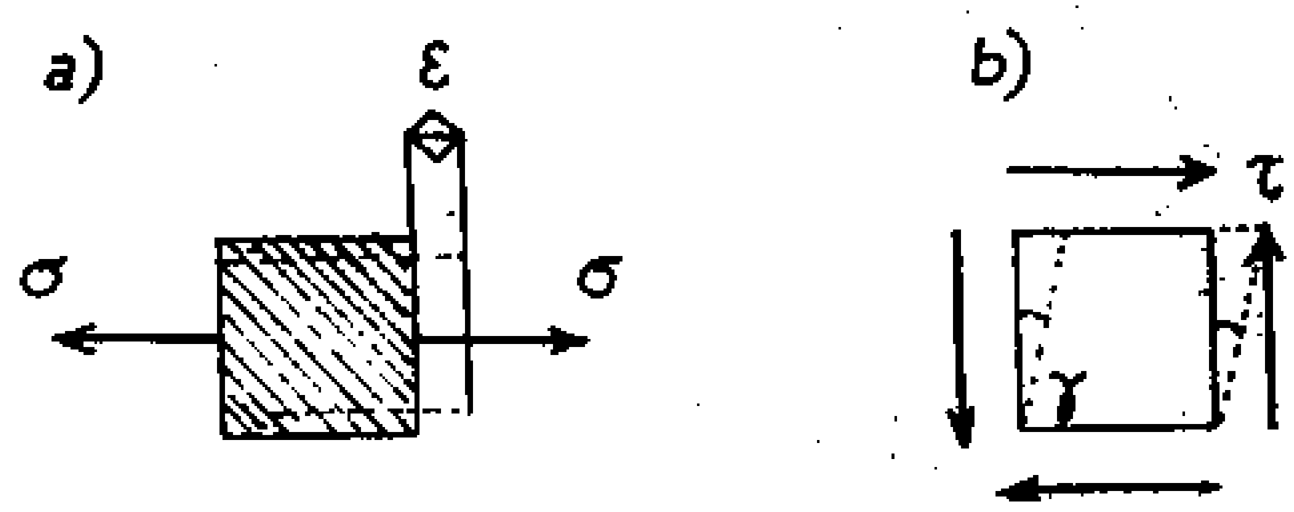
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{hoặc} \quad \sigma = E\,\varepsilon . \tag{1-8}$$

* Phân tố chỉ chịu ứng suất tiếp (hình 1-17b): biến dạng góc $\gamma$ tỷ lệ với ứng suất

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{hoặc} \quad \tau = G\,\gamma . \tag{1-9}$$

Các hệ số tỷ lệ là một hằng số đối với từng loại vật liệu và được xác định bằng thí nghiệm.

*Hình 1-17.* Các biến dạng đơn giản của phân tố




Cùng với giả thiết biến dạng bé, giả thiết định luật Hooke cho phép xây dựng lý thuyết SBVL như là một lý thuyết tuyến tính, trong đó các quan hệ, các phương trình được viết dưới dạng các biểu thức tuyến tính thuần nhất. Riêng trong phần cuối của chương trình, khi nghiên cứu sự làm việc của thanh ngoài giai đoạn đàn hồi thì các giả thiết này có thể bị lược bỏ.

## *1-6. NGUYÊN LÝ ĐỘC LẬP TÁC DỤNG (NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG)*

Khi có một quan hệ tuyến tính thuần nhất $y(x) = kx$ với $k$ là một hằng số, ta có thể viết

$$y(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2$$

vậy

$$y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$$

Biểu thức sau chính là nguyên lý độc lập tác dụng hoặc nguyên lý cộng tác dụng:

***"Một đại lượng do nhiều nguyên nhân gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng rẽ".***

Vì các quan hệ trong SBVL, như trên đã trình bày, là tuyến tính thuần nhất nên ta có thể áp dụng nguyên lý này vào môn học và phát biểu:

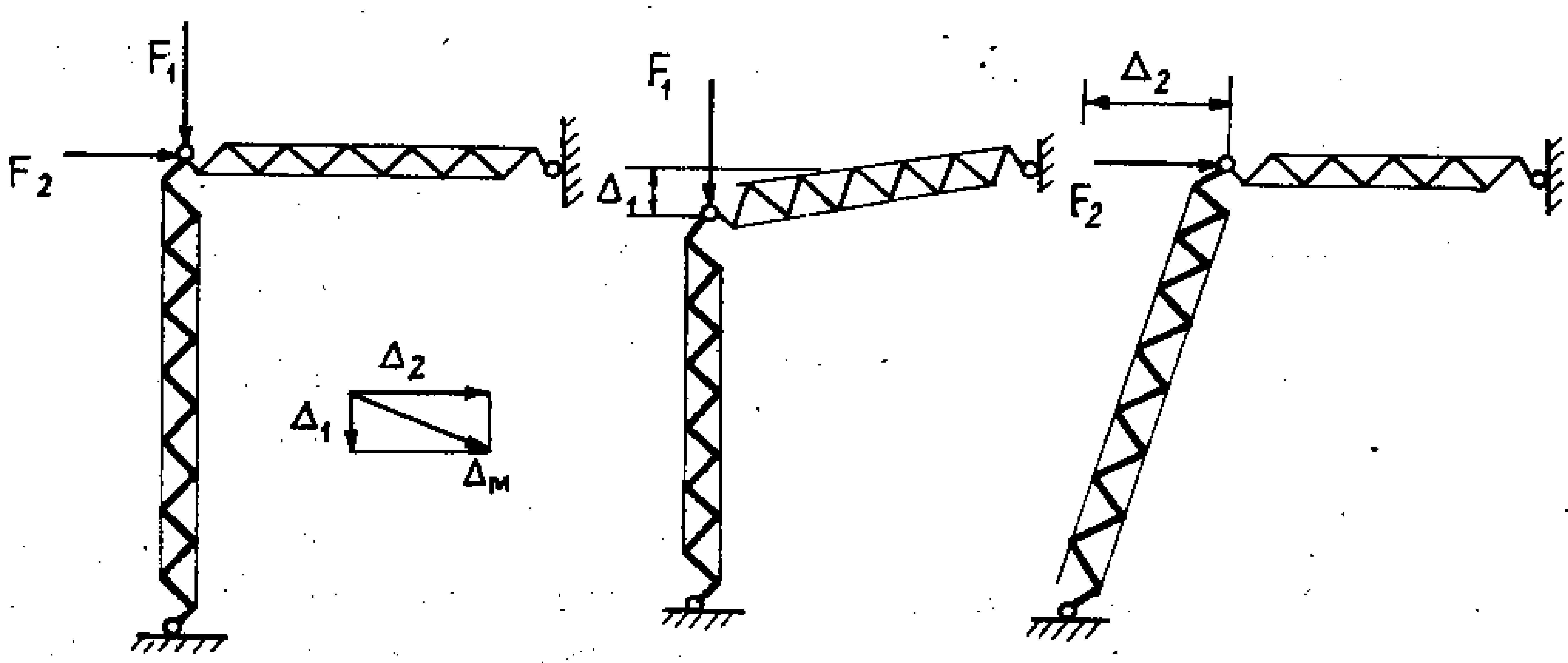
***"Nội lực, biến dạng, chuyển vị của vật thể do một hệ ngoại lực gây ra sẽ bằng tổng các kết quả tương ứng do từng thành phần ngoại lực gây ra riêng rẽ."***

Tổng kết quả có thể là *tổng đại số* hay *tổng véctơ* tùy từng đại lượng cụ thể.

Trên hình 1-18a, chuyển vị của điểm $P$ do lực $F_1$, $F_2$ gây ra:

* viết dưới dạng véctơ sẽ là $\vec{\Delta}_M = \vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2$;

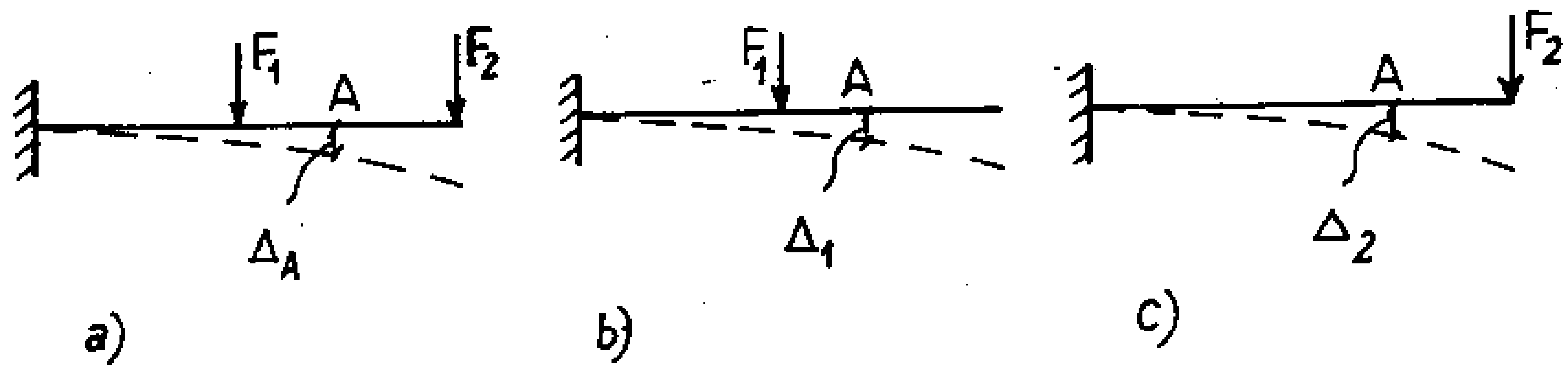
* viết dưới dạng trị số sẽ là $\Delta_M = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2} = \sqrt{\left(\frac{F_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{c_2}\right)^2}$.




*Hình 1-18.* Cộng tác dụng theo vectơ

Trên hình 1-19a chuyển vị thẳng của tiết diện $A$ sẽ là tổng đại số $\Delta_A = \Delta_1 + \Delta_2$.

$\Delta_1$, $\Delta_2$ là chuyển vị trong từng trường hợp tương ứng do lực $F_1$ và $F_2$ gây ra riêng rẽ như chỉ trên các hình 1-19b và c.




*Hình 1-19.* Cộng tác dụng theo giá trị đại số

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

1- 1. Định nghĩa độ bền, độ cứng, độ ổn định của kết cấu công trình. Cho ví dụ minh họa các khái niệm này.

1- 2. Nêu tên những môn học nghiên cứu độ bền, độ cứng, độ ổn định của kết cấu. Nêu vị trí môn học SBVL trong mối tương quan với các môn khoa học cơ bản và các môn kỹ thuật.

1- 3. Vì sao các phương pháp của SBVL được gọi là các phương pháp kỹ thuật? Cách xem xét và cách giải quyết vấn đề của SBVL khác gì với các phương pháp toán học thuần túy?

1- 4. Nêu đặc điểm về kích thước hình học của các vật thể hình dạng thanh, hình dạng tấm vỏ, hình dạng khối. Nêu đặc điểm của bài toán đối với các dạng vật thể này.

1- 5. Thế nào là lực tập trung? Có bao nhiêu loại lực phân bố? Lực tập trung có thể coi là một trường hợp đặc biệt của lực phân bố được không? Nêu thứ nguyên và đơn vị đo các loại lực. Viết biểu thức tìm hợp lực của lực phân bố khi lực phân bố cùng phương chiều.

1- 6. Để liên kết một thanh trong mặt phẳng ta cần đặt vào thanh bao nhiêu liên kết? Nêu các loại liên kết và sơ đồ tương ứng.

1- 7. Thế nào là hệ tĩnh định? Cho ví dụ.

1- 8. Viết các phương trình cân bằng để xác định phản lực liên kết trong bài toán phẳng và trong bài toán không gian.

1- 9. Thế nào là một hệ siêu tĩnh? Cho ví dụ.

1-10. Phát biểu định nghĩa về nội lực trong SBVL. Ứng suất thuộc vào loại lực phân bố nào? Thứ nguyên và đơn vị đo của ứng suất.

1-11. Phương pháp mặt cắt dùng để làm gì? Nêu nội dung phương pháp mặt cắt.

1-12. Nêu định nghĩa về chuyển vị, biến dạng nói chung của vật thể chịu lực. Nêu các đặc trưng chuyển vị và biến dạng đối với thanh.

1-13. Có mấy trường hợp chịu lực cơ bản hoặc biến dạng cơ bản của thanh? Nêu đặc điểm về biến dạng của thanh trong từng trường hợp.

1-14. Thế nào là các biến dạng đàn hồi, biến dạng dẻo?

1-15. SBVL nghiên cứu các thanh làm từ loại vật liệu nào? Giải thích các tính chất của loại vật liệu này.

1-16. Thế nào là biến dạng bé? Sử dụng khái niệm bé của biến dạng, ta nhận được những kết quả đơn giản như thế nào đối với các biểu thức chứa các biến dạng?

1-17. Phát biểu định luật Hooke. Trong những quan hệ sau đây giữa lực tác động $F$ và độ biến dạng $\Delta$ của vật thể, quan hệ nào tuân theo định luật Hooke:

a) $F = a\,\Delta + b$ ; b) $\Delta^2 = c\,F$ ; c) $F = g(\Delta)\,\Delta$ ;

d) $\Delta = f(F)\,P$ ; e) $a\,F + b\,\Delta = 0$ ; f) $a\,F + b\,\Delta = c$,

với $a$, $b$, $c$ là những hằng số; $f(F)$ là một hàm của $F$; $g(\Delta)$ là một hàm của $\Delta$.

1-18. Để nhận được các quan hệ, các phương trình là tuyến tính thuần nhất, SBVL đã sử dụng những giả thiết, nguyên lý nào?

1-19. Nêu điều kiện để áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng. Cho những ví dụ thỏa mãn và những ví dụ không thỏa mãn điều kiện này. Vì sao trong SBVL ta có thể áp dụng được nguyên lý cộng tác dụng?

# 2 Nội lực trong bài toán thanh

## 2-1. HỢP LỰC CỦA NỘI LỰC TRÊN TIẾT DIỆN - ỨNG LỰC

Như đã trình bày trong chương 1, nội lực được thể hiện bằng phương pháp mặt cắt và là một hệ lực phân bố trên mặt cắt đang xét. Ứng suất là cường độ của nội lực, nghĩa là nội lực trên một đơn vị diện tích. Việc tìm luật phân bố trên mặt cắt của các ứng suất là một nhiệm vụ của SBVL. Tuy nhiên, đối tượng nghiên cứu của SBVL là những chi tiết hình thanh, đặc trưng bởi mặt cắt ngang và trục, nên mặt cắt thường xét là những mặt cắt vuông góc với trục, hoặc gọi là tiết diện.

Để đơn giản trình bày nhưng không làm mất đi tính tổng quát của cách đặt vấn đề, ta xét bài toán phẳng của một thanh cân bằng dưới tác động của ngoại lực như trên hình 2-1a. Trục thanh và ngoại lực đều nằm trong mặt phẳng $yz$ chứa trục đối xứng $y$ của tiết diện. Trường hợp tiết diện không có trục đối xứng sẽ được nghiên cứu sau.

Để tìm nội lực trên tiết diện 1-1 của thanh, ta sử dụng phương pháp mặt cắt: tưởng tượng cắt thanh tại tiết diện và xét sự cân bằng của một phần thanh, giả sử phần $A$ như trên hình 2-1b. Phần $A$ được cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực đặt trên phần $A$ và nội lực, là một hệ ứng suất $p$ phân bố trên tiết diện. Hợp tất cả nội lực, ta được một lực $\vec{R}$ có trị số, phương chiều nào đó và đặt tại một điểm nào đó trên tiết diện như biểu diễn ở hình 2-1c. Dời lực $\vec{R}$ về điểm nằm trên trục thanh, ta nhận được một lực $\vec{R}'$ và một mômen $M$ nằm trong mặt phẳng hình vẽ. Lực $R'$ được phân ra hai thành phần $N$ và $Q$ như trên hình 2-1d.

Như thế, trong bài toán phẳng hợp lực của nội lực trên tiết diện có ba thành phần:

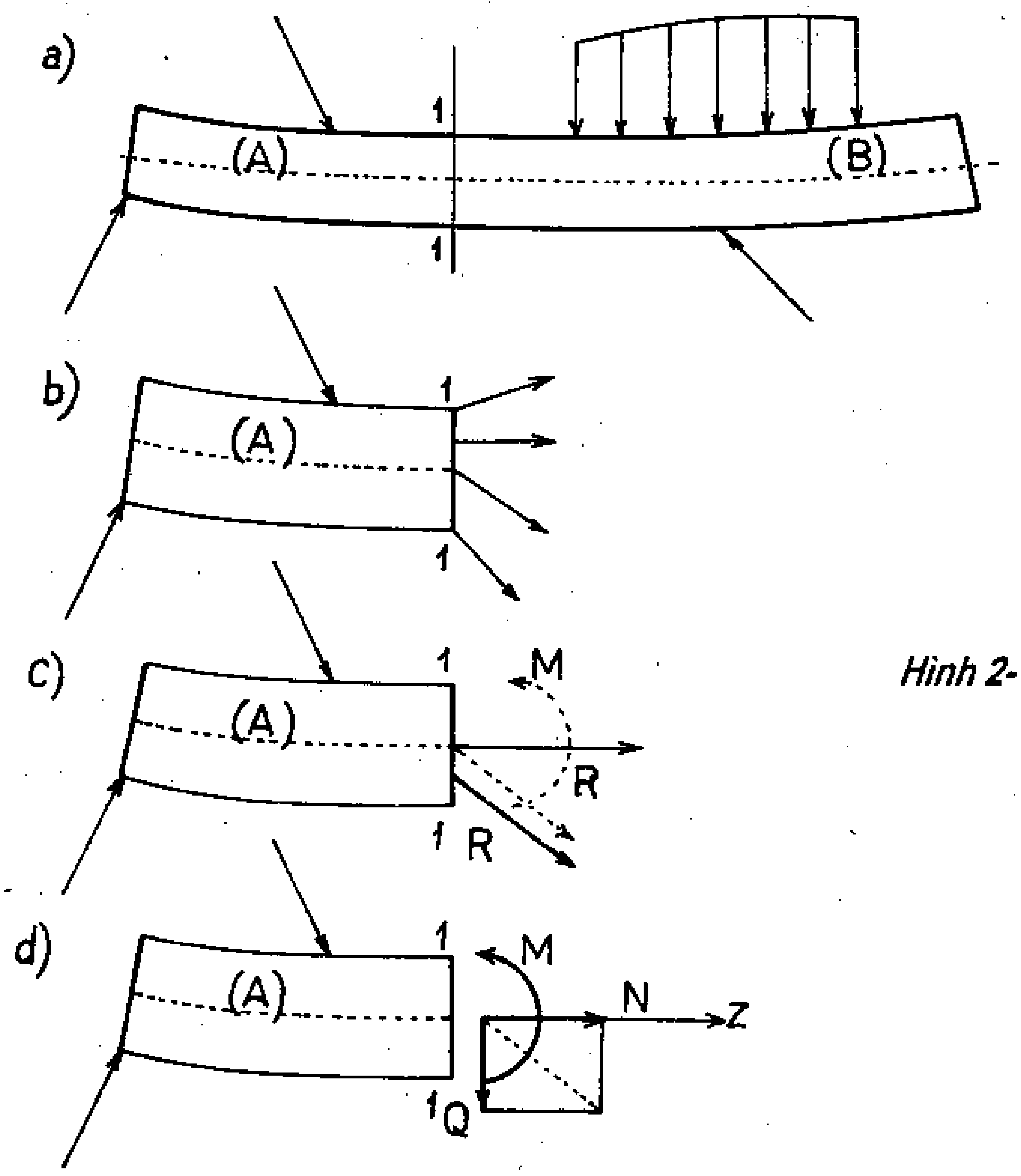
$M$ - *mômen uốn*, nằm trong mặt phẳng của trục thanh;

$N$ - *lực dọc*, vuông góc với mặt phẳng tiết diện, theo phương tiếp tuyến của trục thanh;

$Q$ - *lực cắt*, nằm trong tiết diện, vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh.

Ứng suất là nội lực trên một đơn vị diện tích của mặt cắt.

Mômen uốn, lực dọc, lực cắt là hợp lực của nội lực trên toàn bộ tiết diện và được gọi là các *ứng lực*. Lực dọc là tổng của ứng suất pháp, lực cắt là tổng của ứng suất tiếp, mômen uốn là tổng mômen của các ứng suất đối với trục $x$ vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ.

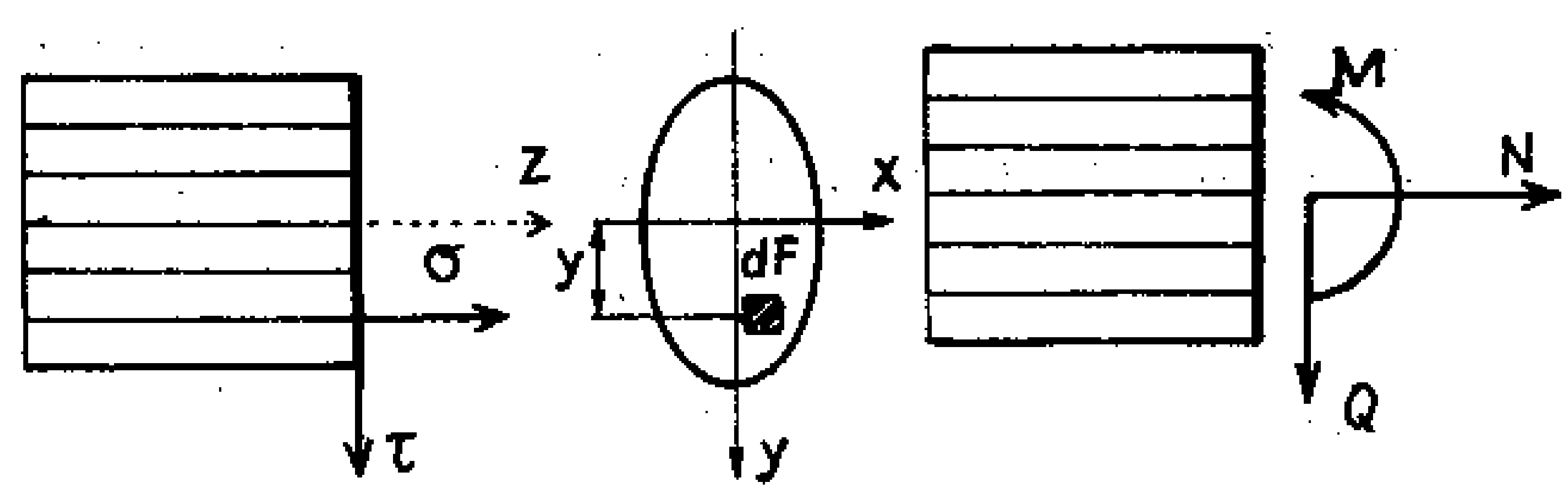



*Hình 2-1.* Ứng lực là hợp lực của nội lực trên tiết diện

Trên diện tích phân tố $dA$ của tiết diện, tổng ứng suất pháp, ứng suất tiếp tương ứng là $\sigma dA, \tau dA$; tổng mômen với trục $x$, chỉ do ứng suất pháp gây ra, là $y\sigma dA$. Trên toàn bộ tiết diện, những ứng lực này, theo ký hiệu trên hình vẽ 2-2, sẽ là

$$N = \int_F \sigma\, dA\,; \qquad Q = \int_F \tau\, dA\,; \qquad M = \int_F \sigma\, y\, dA\,. \qquad (2\text{-}1)$$

*Hình 2-2.* Quan hệ giữa ứng suất và ứng lực



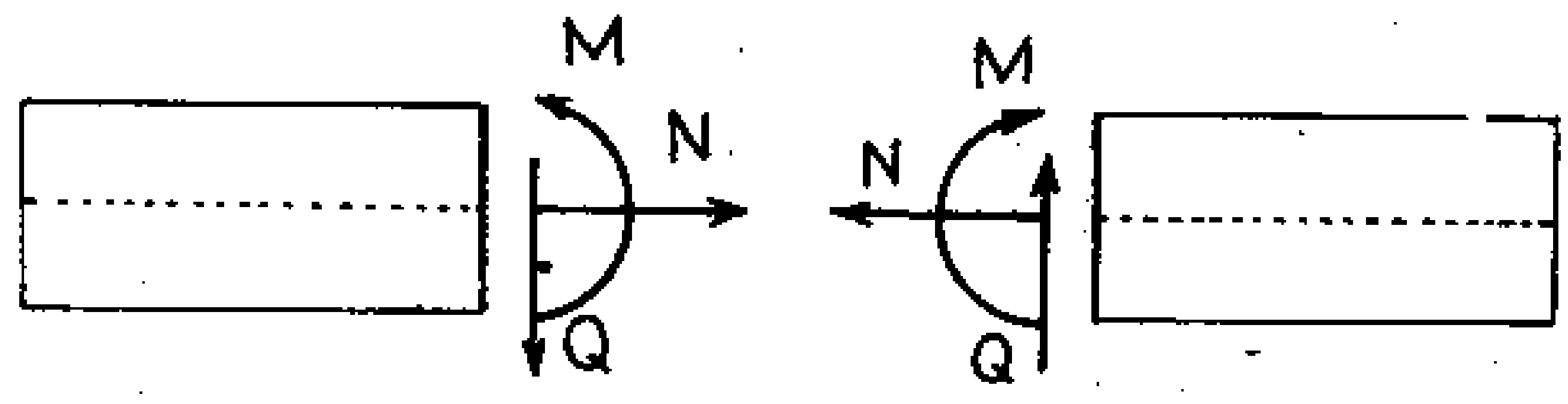

***Quy ước về dấu:***

- *Lực dọc N dương khi hướng ra khỏi mặt cắt.*
- *Lực cắt Q dương khi có xu hướng đi quanh phần đang xét theo chiều kim đồng hồ.*

- *Mômen uốn M dương khi làm thanh cong thêm, đối với các thanh cong; hoặc làm giãn phía dưới cuả thanh, làm co phía trên của thanh thẳng nằm ngang.*

Chiều dương của các đại lượng này được quy định như trên hình 2-3.

Hình vẽ cho thấy có thể gọi lực dọc $N$, mômen uốn $M$ là hai thành phần *ứng lực đối xứng*, còn lực cắt $Q$ là thành phần *ứng lực phản xứng.*




***Hình 2-3.*** Chiều dương của $M, N, Q$

Những thanh chủ yếu chịu mômen uốn được gọi là *dầm.*

Khi tìm $M, N, Q$ ta giả thiết các chiều của chúng là dương. Nếu kết quả tìm được là âm thì chiều của chúng ngược với chiều giả thiết, tức là hướng theo chiều âm. Do đó khi giả thiết các chiều của nội lực là dương thì ta nhận được các kết quả đại số bao hàm cả dấu.

Dưới tác động của ngoại lực và ứng lực $M, N, Q$ phần thanh đang xét nằm ở thái cân bằng. Từ ba phương trình cân bằng trong bài toán phẳng ta có thể xác định được ba giá trị chưa biết của $M, N, Q$.

$$N + \sum_i hch_N(F_i) = 0; \quad Q + \sum_i hch_Q(F_i) = 0; \quad M + \sum_i M_C(F_i) = 0. \quad (2\text{-}2)$$

trong đó:

$F_i$ - các ngoại lực đặt trên phần thanh đang xét;

$hch_N(F_i)$, $hch_Q(F_i)$ - hình chiếu của $F_i$ theo phương lực dọc $N$ và theo phương lực cắt $Q$; hình chiếu là dương nếu hướng theo chiều dương của $N$ hoặc $Q$;

$M_C(F_i)$ - mômen của $F_i$ đối với trọng tâm mặt cắt đang xét, mômen này mang dấu dương nếu quay cùng chiều với chiều dương của mômen nội lực.

Tổng $\Sigma$ được lấy đối với toàn bộ ngoại lực $F_i$.

Từ (2-2) ta cũng có thể viết trực tiếp biểu thức để tính các ứng lực, mà không cần viết các phương trình cân bằng, như sau:

$$N = -\sum_i hch_N(F_i); \quad Q = -\sum_i hch_Q(F_i); \quad M = -\sum_i M_C(F_i). \quad (2\text{-}3)$$

***Quy tắc tính ứng lực*** theo biểu thức (2-3) được phát biểu như sau:

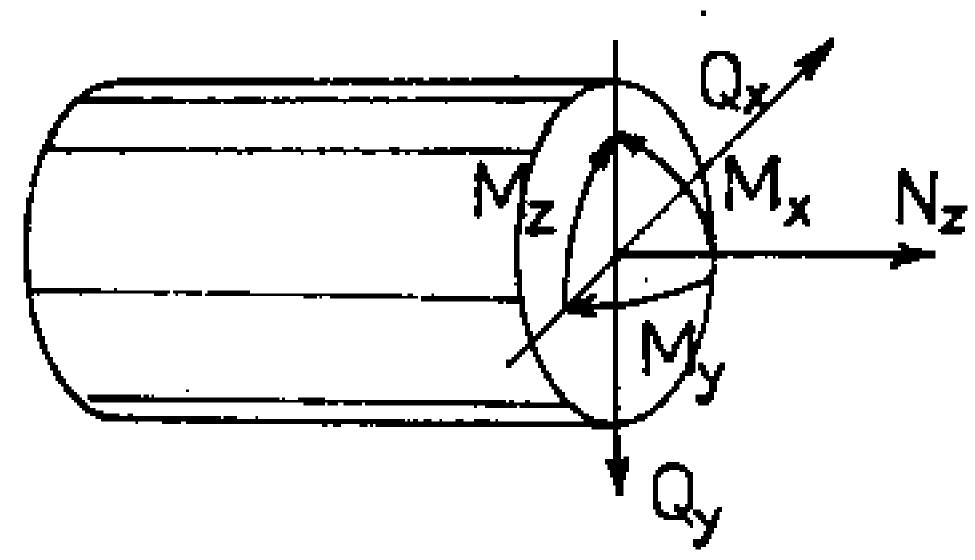
- *Lực dọc bằng tổng các ngoại lực trong đoạn thanh đang xét, chiếu lên phương trục thanh*; hình chiếu mang dấu trừ nếu cùng chiều dương của lực dọc, mang dấu cộng nếu ngược với chiều dương của lực dọc.

- *Lực cắt bằng tổng các ngoại lực trong đoạn thanh đang xét, chiếu lên phương vuông góc trục thanh*; hình chiếu mang dấu trừ nếu cùng chiều dương của lực cắt, mang dấu cộng nếu ngược với chiều dương của lực cắt .

- *Mômen uốn bằng tổng mômen của các ngoại lực trong đoạn thanh đang xét, lấy đối với trọng tâm của tiết diện đang xét*; mômen của các ngoại lực mang dấu trừ nếu cùng chiều dương của mômen nội lực và mang dấu cộng nếu ngược chiều dương của mômen nội lực.

Trong *bài toán không gian*, chiếu các hợp lực của nội lực trên toàn bộ tiết diện lên ba trục và trên ba mặt phẳng tọa độ, ta nhận được ba hình chiếu của véctơ lực và ba mômen của mômen hợp lực. Những thành phần này được ký hiệu là $N$, $Q_x$, $Q_y$, $M_x$, $M_y$, $M_z$, lần lượt gọi là lực dọc, lực cắt theo phương $x$, lực cắt theo phương $y$, mômen uốn quanh trục $x$ (nằm trong mặt phẳng $yz$), mômen uốn quanh trục $y$ (nằm trong mặt phẳng $xz$), mômen xoắn (nằm trong mặt phẳng tiết diện). Các đại lượng này cũng thường được gọi là lực dọc, lực cắt, mômen uốn, mômen xoắn của thanh và được trình bày trên hình 2-4.

*Hình 2-4.* Ứng lực trong bài toán không gian




***Ví dụ 2-1***. Xác định ứng lực trong các thanh $AB$, $BC$ của hệ chịu lực $F$ cho trên hình 2-5a.

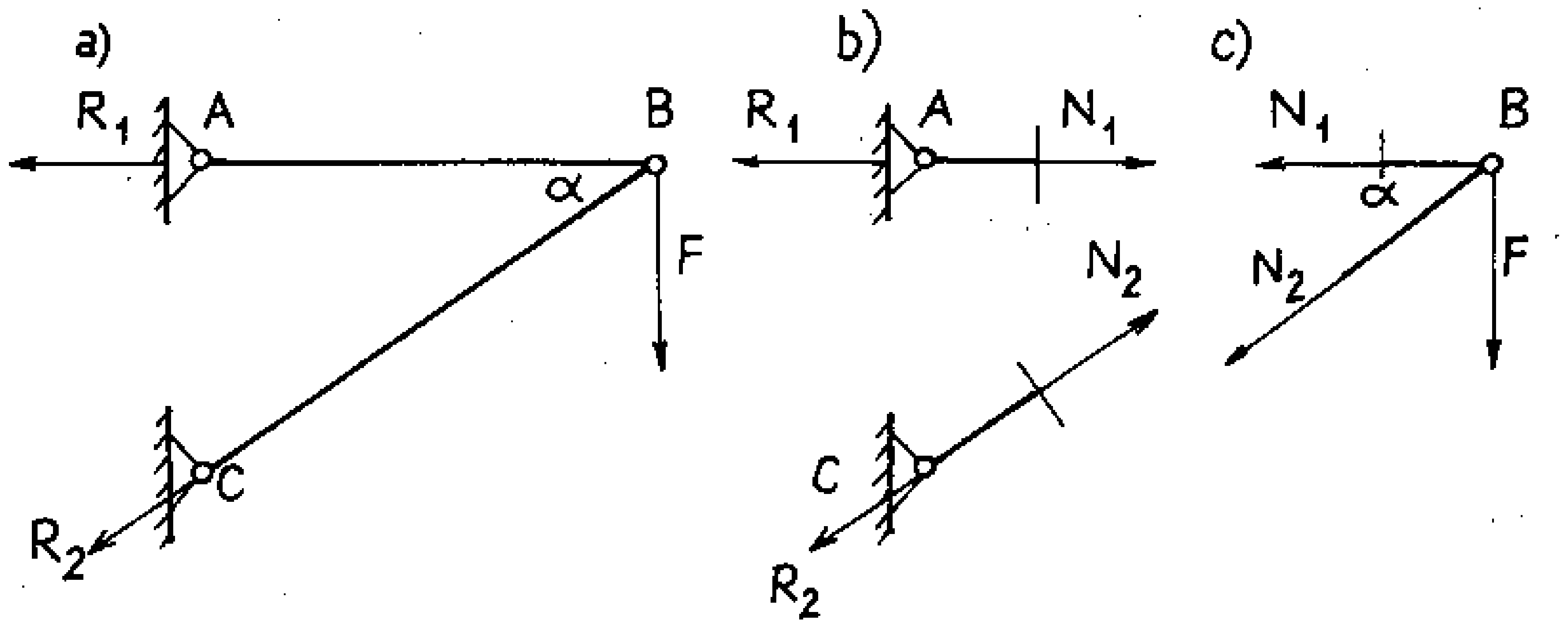
*Bài giải*- Thanh $AB$, $BC$ có liên kết hai đầu khớp nên chúng ngăn cản chuyển động theo phương nối hai đầu thanh. Do đó, phản lực tại các gối khớp $A$ và $C$ có phương dọc trục các thanh như trên hình 2-5a. Bằng phương pháp mặt cắt, xét cân bằng của phần thanh có các phản lực như trên hình 2-5b ta có thể thấy nội lực trong các thanh chỉ có thành phần lực dọc $N$; mômen uốn và lực cắt bằng không.

Ta có thể phát biểu một cách tổng quát: *trong các thanh thẳng, liên kết hai đầu khớp, khi tải trọng chỉ đặt ở khớp hoặc không có tải trọng ngang trong thanh thì ứng lực trên tiết diện chỉ có một thành phần là lực dọc*. Những hệ thanh như vậy được gọi là dàn, là một dạng kết cấu được sử dụng nhiều trong công trình cầu, cộng xưởng, nhà ...

Điều kiện cân bằng của nút B (hình 2-5c):

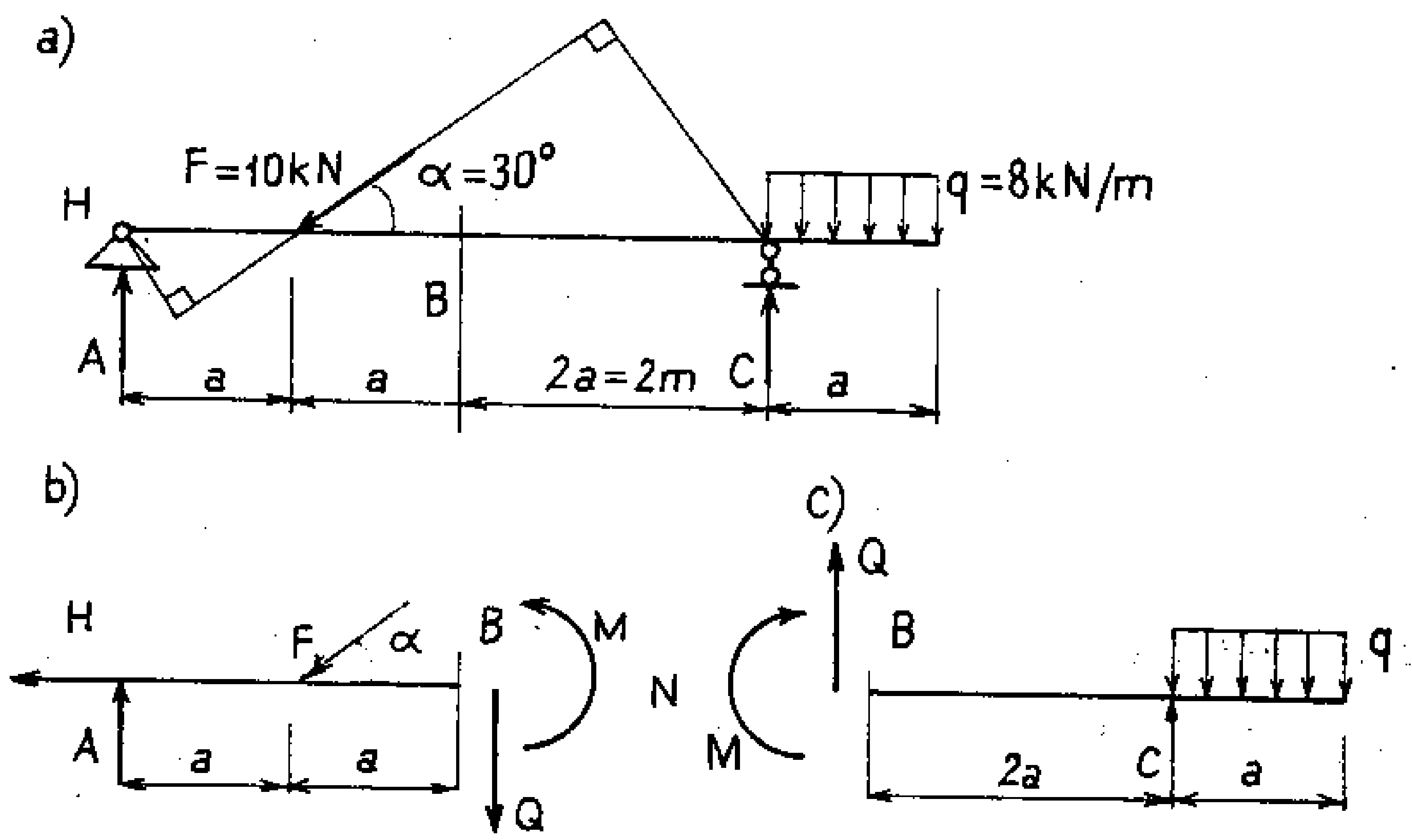
$\Sigma Y = 0 \rightarrow N_2 \sin\alpha + F = 0 \rightarrow N_2 = -F/\sin\alpha$;

$\Sigma X = 0 \rightarrow N_1 - N_2 \cos\alpha = 0 \rightarrow N_1 = -N_2 \cos\alpha = F \cot g\alpha$.




*Hình 2-5.* Cho ví dụ 2-1

***Ví dụ 2-2***. Tìm ứng lực tại tiết diện *B* ở chính giữa nhịp *AC* của thanh chịu lực cho trên hình 2-6a.




*Hình 2-6.* Cho ví dụ 2-2

*Bài giải*. Để xác định ứng lực, trước tiên cần tính các phản lực, là một phần của ngoại lực.

Các phản lực gồm: hai phản lực *A* và *C* theo phương thẳng đứng, phản lực *H* theo phương nằm ngang tại gối tựa trái.

Tổng hình chiếu theo phương ngang cho:

$$H + F\cos 30^o = 0 \rightarrow H = -F\frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ kN}.$$

Tổng mômen đối với gối tựa $A$ cho:

$$Fa\sin 30^o - C4a + qa\frac{9a}{2} = 0 \rightarrow C = \frac{F}{8} + \frac{9qa}{8} = 10{,}25 \text{ kN}.$$

Tổng mômen đối với gối tựa $C$ cho:

$$A4a - F3a\sin 30^o + qa\frac{a}{2} = 0 \rightarrow A = \frac{3F}{8} - \frac{qa}{8} = 2{,}75 \text{ kN}.$$

Có thể kiểm tra kết quả bằng tổng hình chiếu các lực theo phương thẳng đứng

$$A + C - F\sin 30^o - qa = 2{,}75 + 10{,}25 - 10\frac{1}{2} - 8.1 = 0.$$

Bằng phương pháp mặt cắt, cắt thanh tại tiết diện $B$ và xét phần trái như trên hình 2-6b. Sau khi đặt ngoại lực gồm các phản lực $A$, $H$ tải trọng $F$ vào phần thanh đang xét và đặt nội lực $M$, $N$, $Q$ theo chiều dương vào mặt cắt, sử dụng quy tắc (2-3) ta có:

$$N = H + F\cos 30^o = -5\sqrt{3} + 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

$$Q = A - F\sin 30^o = 2{,}75 - 10.\frac{1}{2} = -2{,}25 \text{ kN};$$

$$M = A2a - F(a\sin 30^o) = 2{,}75.2.1 - 10.1.\frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ kNm}.$$

Nếu xét phần phải của thanh, như trên hình 2-6c, ta cũng nhận được các kết quả tương tự.

Ứng lực tại các tiết diện khác nhau sẽ khác nhau; để có hình ảnh về sự biến thiên đó ta vẽ biểu đồ ứng lực.

## 2-2. BIỂU ĐỒ ỨNG LỰC. PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT BIẾN THIÊN

Biểu đồ ứng lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của ứng lực trên các tiết diện dọc theo trục thanh. Từ biểu đồ ta có thể biết được những tiết diện nào có ứng lực lớn, qua đó đánh giá được sự làm việc của thanh và bố trí hợp lý vật liệu.

Để vẽ biểu đồ, ta cho các mặt cắt biến thiên dọc theo trục $z$ của thanh, viết được các biểu thức giải tích của các ứng lực, sau đó vẽ đồ thị của các hàm số này theo biến số $z$.

***Ví dụ 2-3***. Vẽ biểu đồ ứng lực trong dầm côngxôn chiều dài $L$ chịu lực tập trung $F$ tại mút tự do.

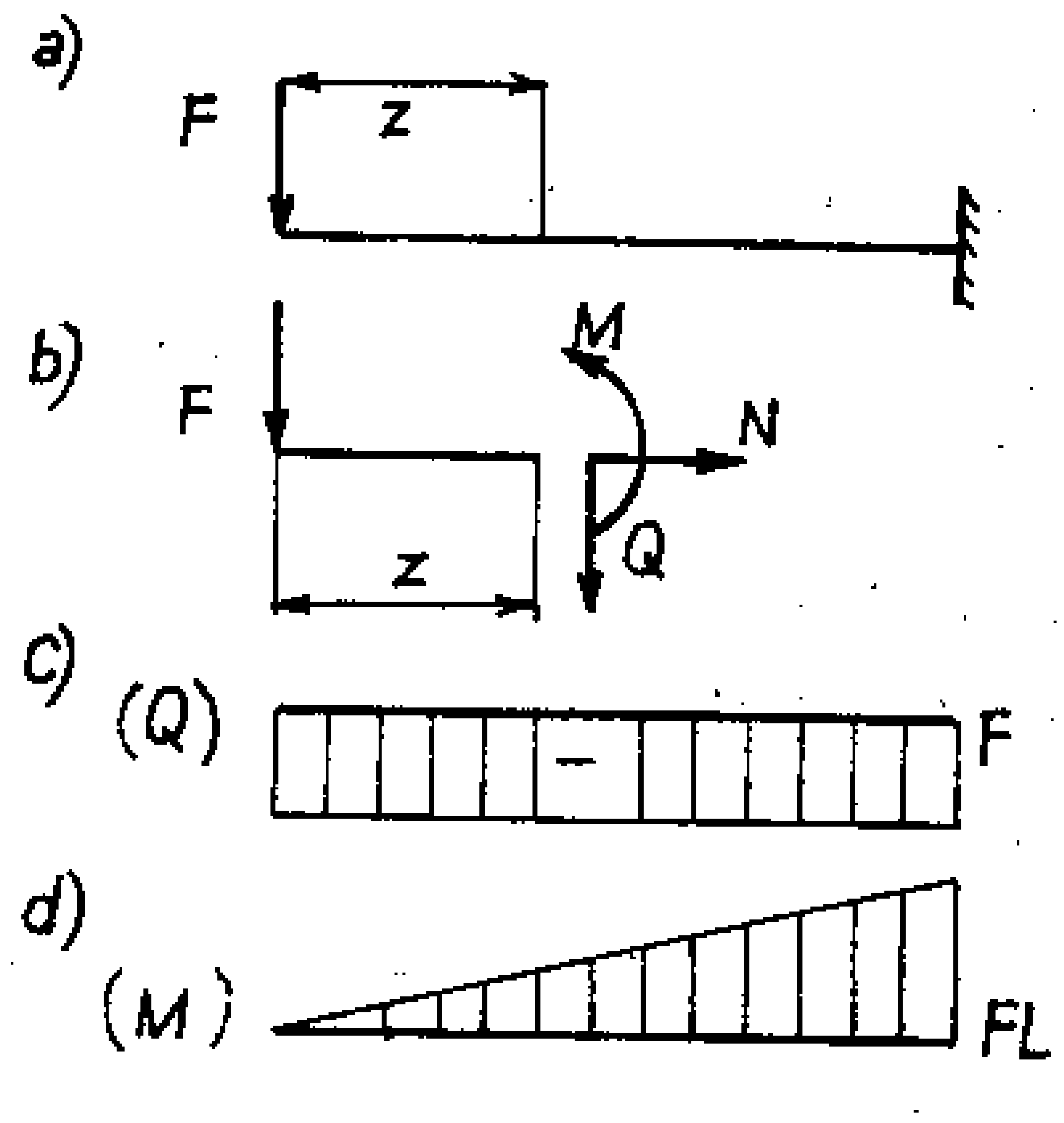
*Bài giải*. Ta nhận thấy nếu dùng phương pháp mặt cắt và xét phần thanh không chứa liên kết ngàm thì không cần xác định phản lực. Phần trái của thanh với mặt cắt biến thiên có tọa độ $z$, biến thiên từ $0$ tới $L$ $(0 \le z \le L)$, và các ứng lực theo chiều dương được vẽ trên hình 2-7b.

Áp dụng quy tắc (2-3) để xác định nội lực, ta được:

$N = 0$; $Q = -F$; $M = -Fz$.

Đồ thị của các hàm số $Q$, $M$ vẽ trên hình 2-7c, d.

Tên của biểu đồ được đặt trong ngoặc đơn, ví dụ ($Q$), ($M$). Biểu đồ lực dọc, lực cắt nhất thiết phải ghi rõ dấu (+) hoặc (–). Biểu đồ mômen uốn không cần ghi dấu nhưng đặt các tung độ của biểu đồ về phía thanh bị căng.




*Hình 2-7.* Cho ví dụ 2-3

Trong ví dụ đang xét, mômen uốn mang dấu âm ($M = -Fz$), nên phía trên của thanh bị giãn. Phù hợp với nó, ta đặt biểu đồ mômen uốn lên phía trên. Sau khi vẽ dạng biểu đồ, ta kẻ các đường tung độ vuông góc với trục thanh. Độ lớn của tung độ chính bằng giá trị ứng lực tại tiết diện tương ứng.

***Ví du 2-4***. Vẽ biểu đồ ứng lực trong dầm đơn giản, hai đầu có liên kết khớp tựa một cố định và một di động, chiều dài nhịp $L$, chịu tải trọng phân bố đều $q$.

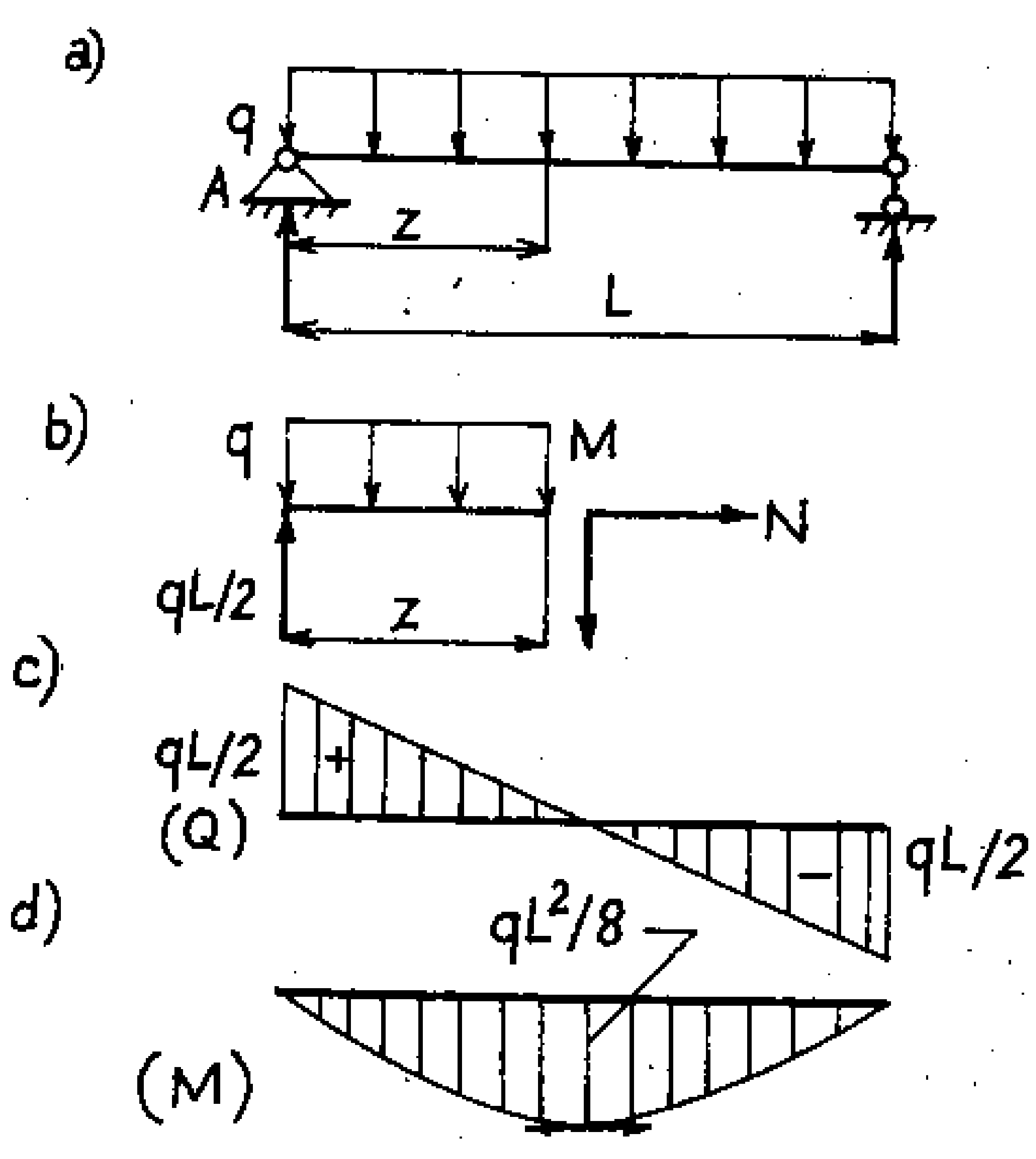
Bài giải. Có thể nhận thấy phản lực thẳng đứng tại hai gối tựa bằng nhau và bằng một nửa tổng của tải trọng $qL$, phản lực nằm ngang tại gối cố định bằng không.

Cắt thanh tại tiết diện có tọa độ $z$ $(0 \le z \le L)$. Đặt vào phần bên trái của thanh các ngoại lực và ứng lực tại mặt cắt (hình 2-8b), theo quy tắc (2-3) ta được:

$N = 0$;

$$Q = \frac{qL}{2} - qz;$$

$$M = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$




*Hình 2-8.* Cho ví dụ 2-4

Đồ thị của các hàm số này trình bày trên hình 2-8c, d. Biểu đồ lực cắt $Q$ phản xứng qua tiết diện giữa nhịp dầm, là một đường bậc nhất, bằng không tại giữa dầm. Biểu đồ mômen uốn $M$ đối xứng qua tiết diện giữa nhịp dầm, trị số cực đại bằng $qL^2/8$ tại giữa dầm.

***Ví du 2-5***. Vẽ biểu đồ ứng lực trong dầm mút thừa, chịu mômen tập trung $M_0$ như trên hình 2-9a.

*Bài giải*. Phản lực gối tựa có chiều giả thiết như trên hình 2-9a và được xác định từ hai phương trình cân bằng mômen đối với hai gối tựa:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow BL - M_o = 0 \rightarrow B = M_o / L ;$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow AL - M_o = 0 \rightarrow A = M_o / L .$$

Để viết đầy đủ biểu thức của ứng lực trong toàn dầm, ta phải dùng hai loại mặt cắt. Mặt cắt thứ nhất 1-1 có tọa độ $z_1$ $(0 \le z_1 \le L)$ để xét đoạn $AB$. Mặt cắt thứ hai 2-2 có tọa độ $z_2$ $(0 \le z_2 \le a)$ để xét đoạn mút thừa. Đặt ngoại lực và ứng lực cho từng phần thanh xét, như trên hình 2-9b, theo quy tắc (2-3), ta nhận được:

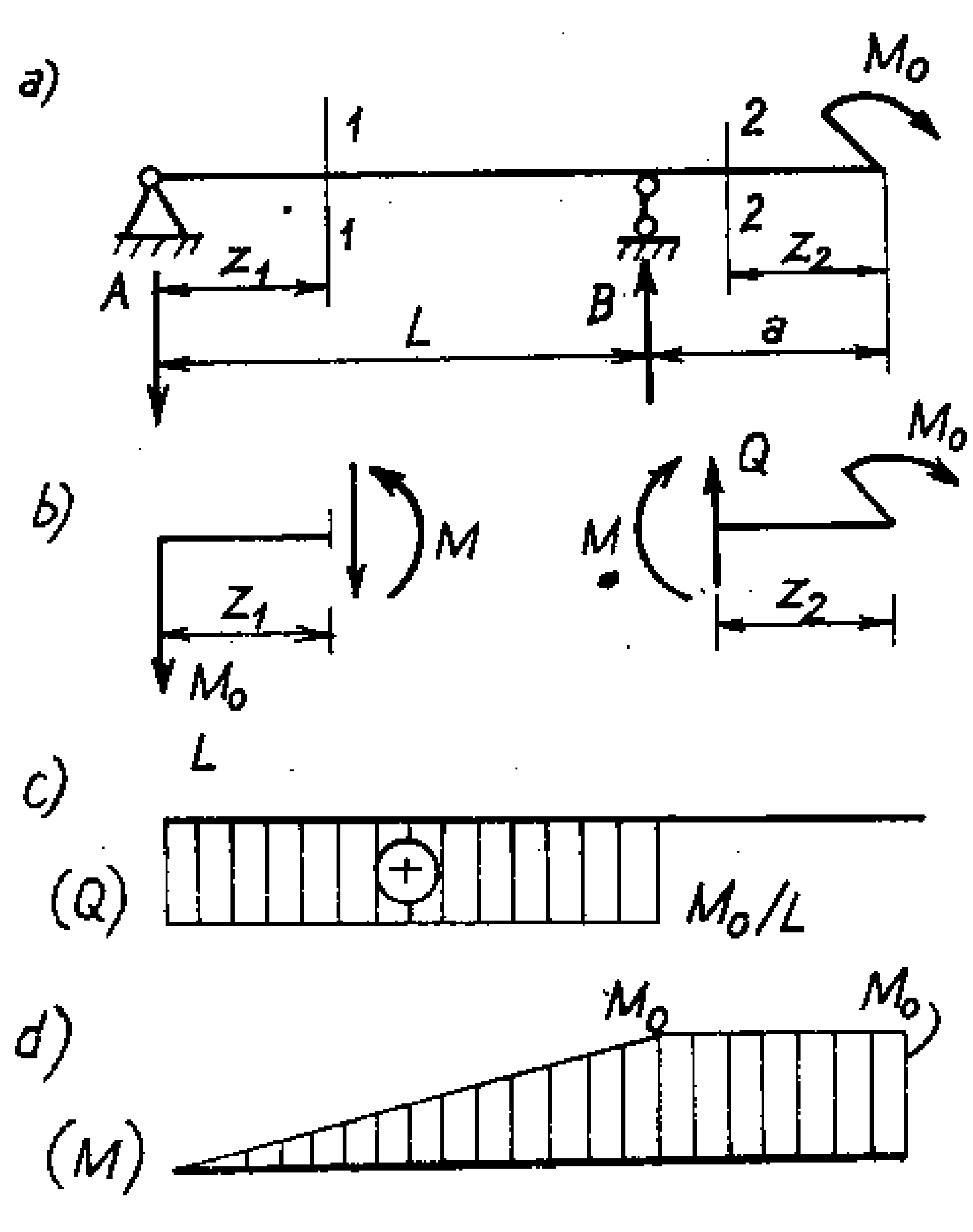
* tại mặt cắt 1-1 $(0 \le z_1 \le L)$:

$$Q = -A = -M_O / L ;$$

$$M = -Az_1 = -M_O z_1 / L ;$$

* tại mặt cắt 2-2 $(0 \le z_2 \le a)$:

$$Q = 0 \ ; \ M = -M_O .$$




*Hình 2-9.* Cho ví dụ 2-5

Biểu đồ $Q$ vẽ trên hình 2-9c, bằng hằng số trong đoạn $AB$ và bằng không trong đoạn mút thừa. Biểu đồ $M$ vẽ trên hình 2-9d, là đường bậc nhất trong đoạn $AB$ và là hằng số trong đoạn mút thừa .

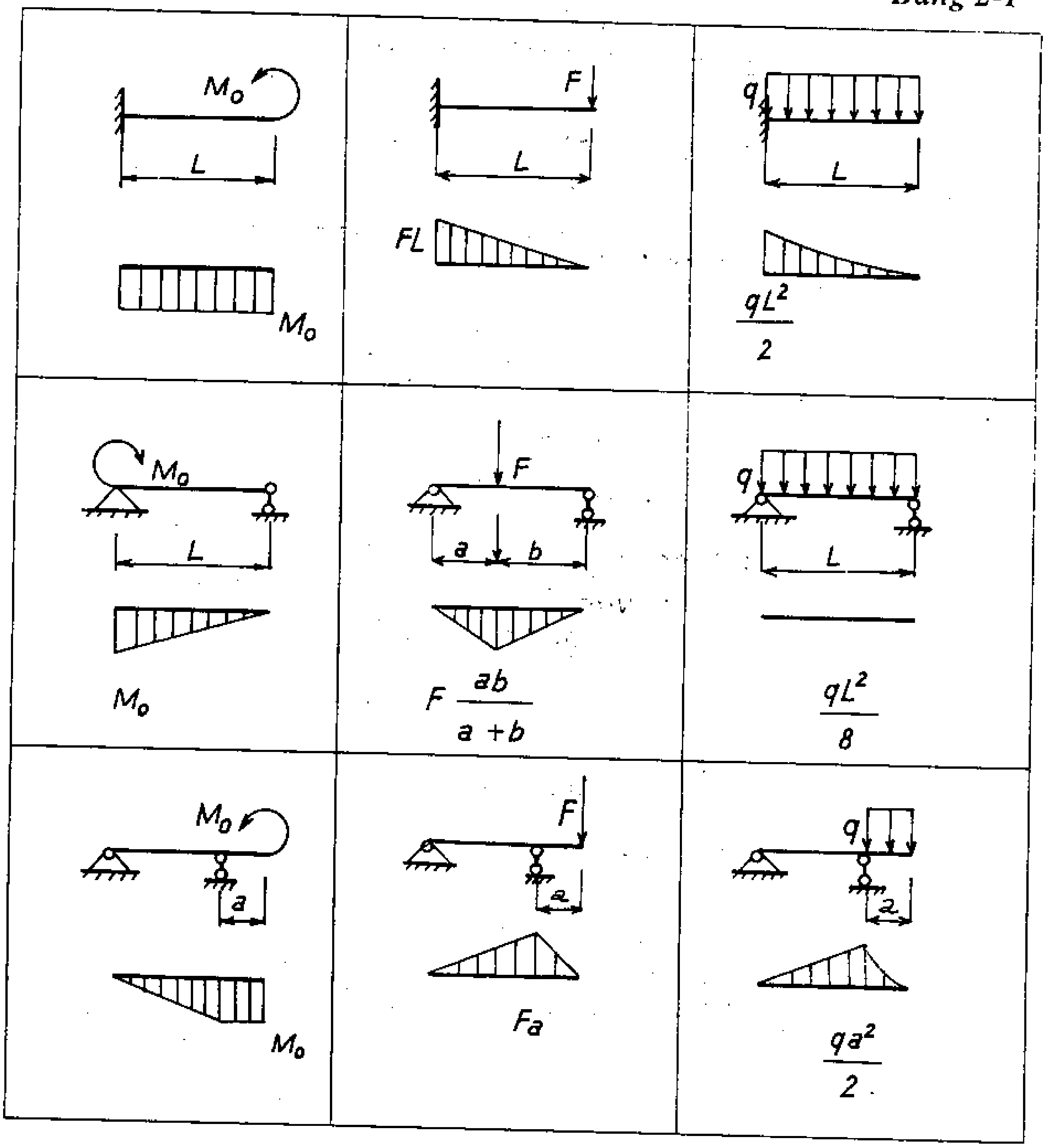
Biểu đồ mômen uốn trong những trường hợp chịu lực cơ bản của các dầm côngxôn, dầm đơn giản và dầm mút thừa cho trong bảng 2-1.

Qua những ví dụ ở trên và quy tắc xác định ứng lực (2 -3) ta có nhận xét:

- ♦ Nếu chỉ có tải trọng vuông góc với trục, gọi là tải trọng ngang, thì trong thanh thẳng chỉ có lực cắt và mômen uốn; lực dọc bằng không.

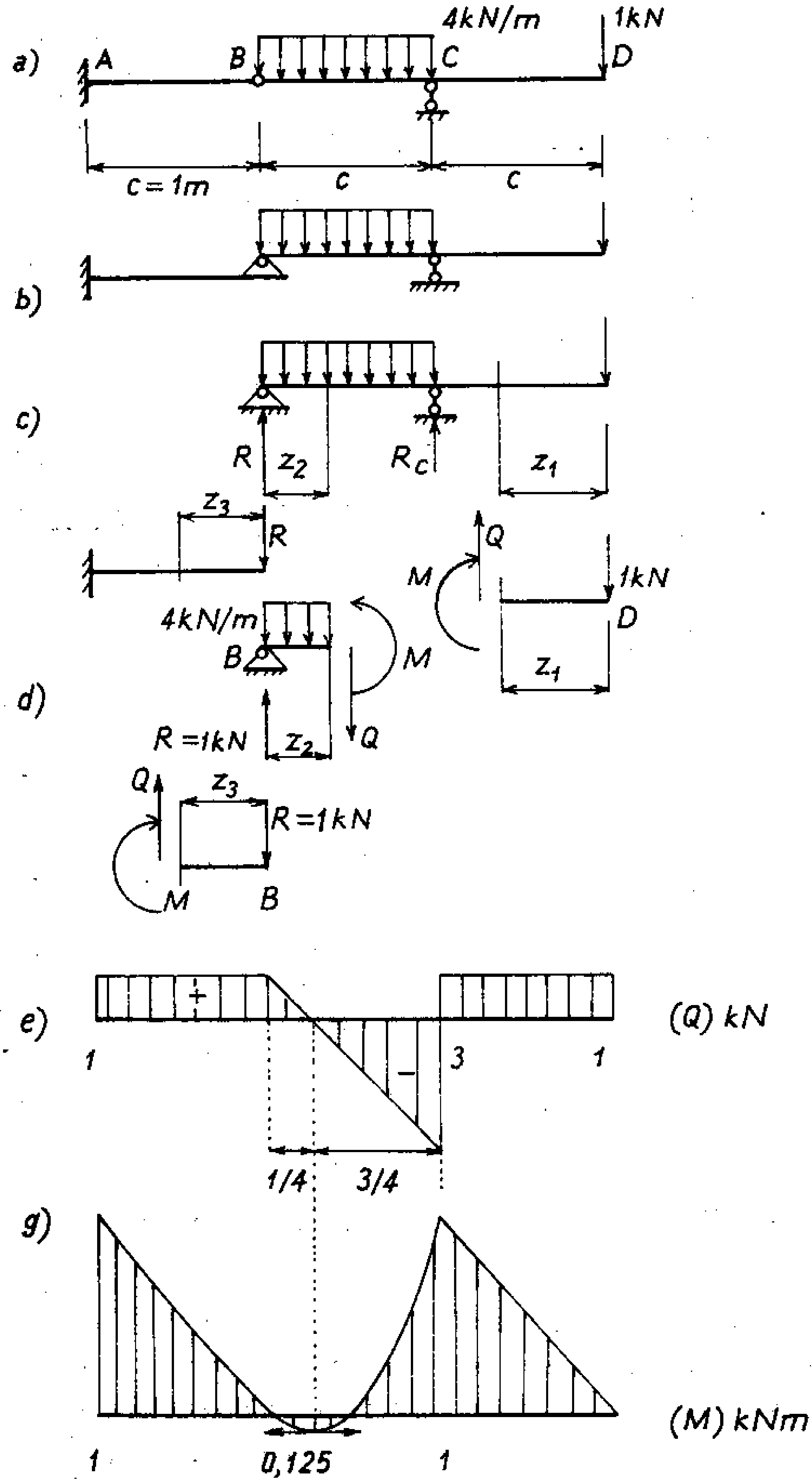
♦ Nếu chỉ có tải trọng nằm dọc trục, gọi là tải trọng dọc, thì trong thanh thẳng chỉ tồn tại lực dọc; mômen uốn và lực cắt bằng không.

*Bảng 2-1*




__*Ví dụ 2-6*__. Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt của dầm ghép tĩnh định cho trên hình 2-10a.

__*Bài giải*__. Tổng số các liên kết đơn đối với cả hai dầm là sáu: ngàm tại *A* (tương đương ba liên kết đơn), gối tựa di động tại *C* (tương đương một liên kết đơn), liên kết khớp tại *B* (tương đương hai liên kết đơn). Hai dầm có thể tiếp nhận tải trọng, số liên kết đơn của hệ bằng số phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng của riêng từng dầm, ta gọi hệ là dầm ghép tĩnh định.




*Hình 2-10.* Cho ví dụ 2-6

Khi tìm nội lực ta cần phân biệt *dầm chính và dầm phụ*. Dầm chính là dầm đứng độc lập mà vẫn có thể chịu được tải trọng, đầm phụ là đầm không đứng độc lập mà phải tựa lên đầm chính mới có thể chịu được lực. Tải trọng đặt trên đầm chính không ảnh hưởng tới dầm phụ, tải trọng đặt trên đầm phụ sẽ được truyền tới đầm chính thông qua các phản lực liên kết. Hệ trên hình 2-10a có dầm *AB* là dầm chính, đầm *BCD* là đầm phụ. Trên hình 2-10b phân tích sự làm việc của hai dầm, trong đó đầm phụ *BCD* đặt lên trên đầm chính *AB*; liên kết khớp tại *B* được coi là gối tựa đối với dầm phụ *BCD*. Dầm phụ *BC* nhận phản lực *R* và dầm chính sẽ nhận một lực bằng *R* nhưng có chiều ngược lại (hình 2-10c). Lực dọc trong các dầm đều bằng không, trên tiết diện chỉ có lực cắt *Q* và mômen uốn *M* như trình bày trên hình 2-10d.

Điều kiện cân bằng của dầm *BC* cho ta

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow R.1 + 1.1 - 4.1.0,5 = 0 \rightarrow R = 1 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow R_C.1 - 4.1.0,5 - 1.2 = 0 \rightarrow R_C = 4 \text{ kN}.$$

Theo quy tắc (2-3), ta có:

* Tại mặt cắt *1-1* có hoành độ $z_1$ tính từ gốc *D* như trên hình 2-10d:

$Q = 1$ kN; $M = -1$ kNm; $(0 \le z_1 \le 1m)$.

* Tại mặt cắt *2-2* có hoành độ $z_2$ tính từ gốc *B* như trên hình 2-10d:

$Q = 1 - 4z_2$ kN; $M = 1.z_2 -$ [illegible] $\frac{\quad}{2}$ kNm; $(0 \le z_2 \le 1m)$.

* Tại mặt cắt *3-3* có hoành độ $z_3$ ch[illegible]ầm chính *AB* như trên hình 2-10d:

$Q = 1$ kN; $M = -1z_3$ [illegible]; $(0 \le z_3 \le 1m)$.

Theo các biểu thức, ta vẽ được biểu [illegible] *Q* và *M* trong hệ như trên hình 2-10e, f. Cần lưu ý rằng khi vẽ biểu đồ m[illegible]en uốn trong đoạn chứa mặt cắt *2-2*, là đường cong bậc hai, ta cần xác định [illegible] giá trị: hai giá trị ở hai đầu đoạn và giá trị cực trị. Đạo hàm cấp một $M' = 1-4z_2$ triệt tiêu tại $z_2 = 1/4$ m nên mômen uốn cực trị bằng: $M_m = 1.\frac{1}{4} - 4.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0,125$ kNm.

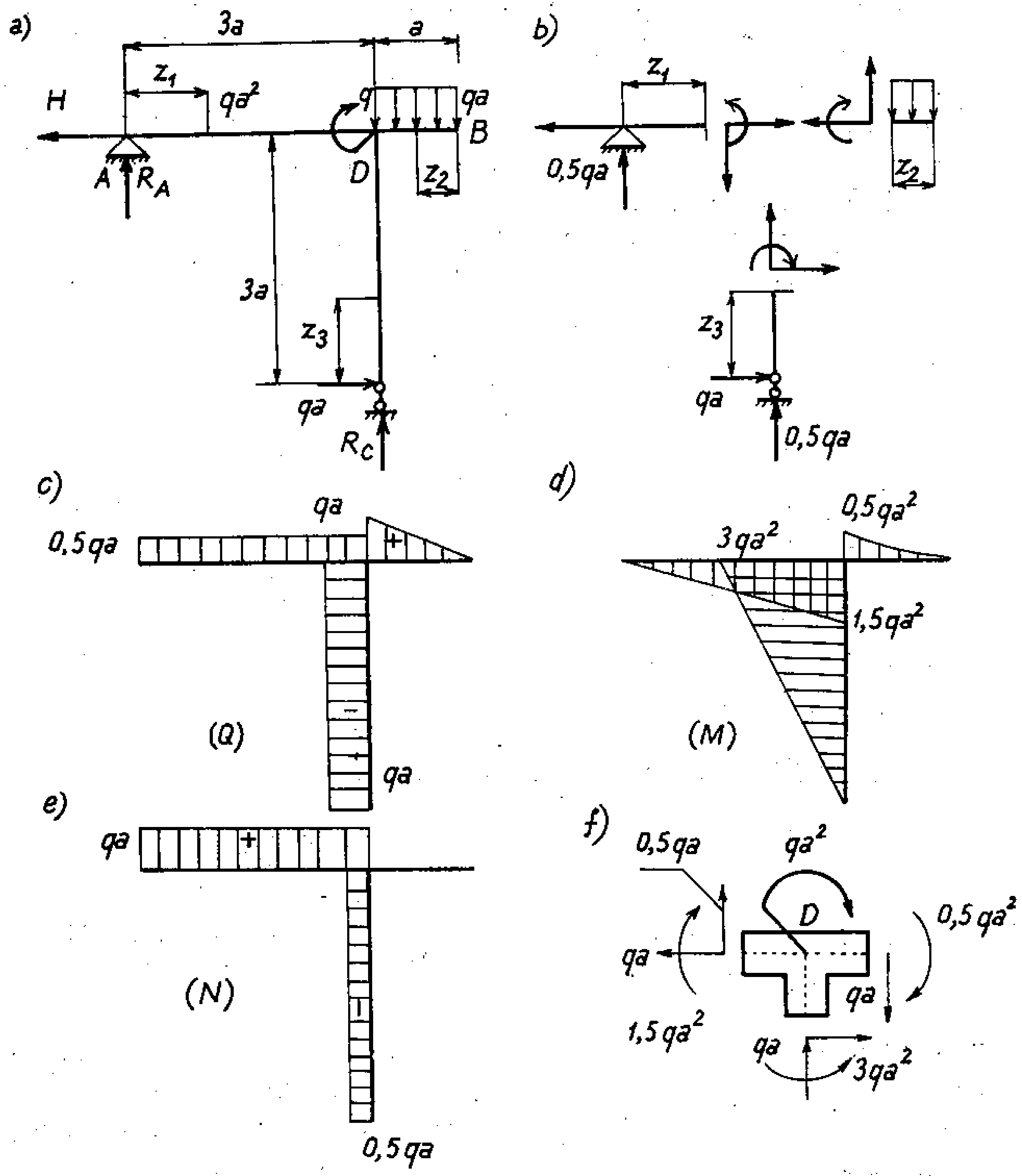
***Ví dụ 2-7***. Vẽ biểu đồ ứng lực trong khung chịu các tải trọng như trên hình 2-11a.

***Bài giải***. Các phản lực gối tựa được xác định từ phương trình cân bằng tĩnh học

$$\Sigma X = 0 \rightarrow -H + qa = 0 \rightarrow H = qa;$$

$$\Sigma M_D = 0 \rightarrow R_A.3a - qa^2 - qa(a/2) + qa.3a = 0 \rightarrow R_A = 0,5qa;$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -qa^2 - qa.3{,}5a + qa.3a + R_C.3a = 0 \rightarrow R_C = 0{,}5\,qa.$$




*Hình 2-11.* Cho ví dụ 2-7

Để tìm biểu thức ứng lực, ta chia khung thành ba đoạn: hai đoạn nằm ngang và một đoạn thẳng đứng với các mặt cắt biến thiên có các tọa độ tương ứng là $z_1$, $z_2$, $z_3$ như trên hình 2-11a.

* Tại mặt cắt có tọa độ $z_1$ $(0 \le z_1 \le 3a)$: $N = qa$; $Q = 0{,}5\,qa$; $M = -0{,}5\,qa\,z_1$.

* Tại mặt cắt có tọa độ $z_2$ $(0 \le z_2 \le a)$: $N = 0$; $Q = qz_2$; $M = -0{,}5\,qaz_2^2$.

* Tại mặt cắt có tọa độ $z_3$ $(0 \le z_3 \le 3a)$ của đoạn thanh thẳng đứng thì quy ước

dấu của lực dọc, lực cắt vẫn giữ như đối với thanh nằm ngang, khi vẽ biểu đồ cần ghi kèm theo dấu; dấu của mômen uốn được tự quy định và khi vẽ biểu đồ cần đặt các tung độ về phía thớ căng của thanh mà không ghi dấu. Trong bài này, ta tự quy ước chiều dương của mômen là chiều làm căng thớ trái như trình bày trên hình 2-11b; sau này ta đặt tung độ có giá trị dương sang phía trái đường chuẩn và đặt tung độ có giá trị âm sang phía phải đường chuẩn. Quy tắc (2-3) cho ta biểu thức của nội lực tại mặt cắt này như sau

$$N = -0{,}5\,qa\;;\quad Q = -qa\;;\quad M = qa\,z_3\,.$$

Các biểu đồ được trình bày trên hình 2-11c, d, e.

Đối với khung, có thể kiểm tra kết quả bằng việc xét *cân bằng các nút*. Nếu tách nút ra khỏi hệ thì ta phải đặt vào nút những ngoại lực tập trung (nếu có) và ứng lực tại mặt cắt, giá trị của ứng lực này được lấy theo các biểu đồ vừa vẽ. Sau khi đặt những lực trên, nếu ứng lực ở các nút tính đúng thì nút sẽ cân bằng, các phương trình cân bằng được thỏa mãn. Nếu các điều kiện cân bằng không thỏa mãn thì các trị số ứng lực đã tính sai.

Cụ thể đối với khung đang xét, ta tách nút *D* và xem điều kiện cân bằng của nút. Tại nút có mômen ngoại lực tập trung bằng $0{,}5qa^2$ theo chiều kim đồng hồ. Ứng lực tại các mặt cắt gồm:

- Mặt cắt trái có lực dọc, bằng $+qa$, hướng ra khỏi mặt cắt; lực cắt, bằng $+0{,}5qa$, đi quanh nút theo chiều kim đồng hồ, hướng lên; mômen uốn, bằng $1{,}5qa^2$ làm căng phía dưới của thanh, có chiều quay với mũi tên chỉ hướng ở trên.
- Mặt cắt phải có lực dọc bằng không; lực cắt, bằng $+qa$, đi quanh nút theo chiều kim đồng hồ, hướng xuống; mômen uốn bằng $0{,}5qa^2$ làm căng phía trên của thanh, có chiều quay với mũi tên chỉ hướng ở dưới.
- Mặt cắt nằm ngang của phần thanh thẳng đứng có lực dọc bằng $-0{,}5qa$ hướng vào mặt cắt, lực cắt, bằng $-qa$, đi quanh nút ngược chiều kim đồng hồ, hướng sang phải; mômen uốn, bằng $3qa^2$, làm căng phía trái của thanh, có chiều quay với mũi tên chỉ hướng ở bên phải.

Đặt tất cả những lực vào nút như chỉ trên hình 2-11f, dễ dàng nhận thấy các phương trình cân bằng được thỏa mãn $\sum X = 0;\ \sum Y = 0;\ \sum M_D = 0.$

__*Ví du 2-8*__. Xác định ứng lực trong hệ các thanh chịu tải trọng như trên hình 2-12a.

__*Bài giải*__. Các thanh thẳng *AB*, *BC*, *BD* có liên kết khớp ở hai đầu, không có tải trọng ngang đặt trong thanh nên trên tiết diện chỉ có lực dọc *N*. Sử dụng mặt cắt *1-1* cắt qua thanh *BD* và xét cân bằng phần dưới (hình 2-12b) ta có:

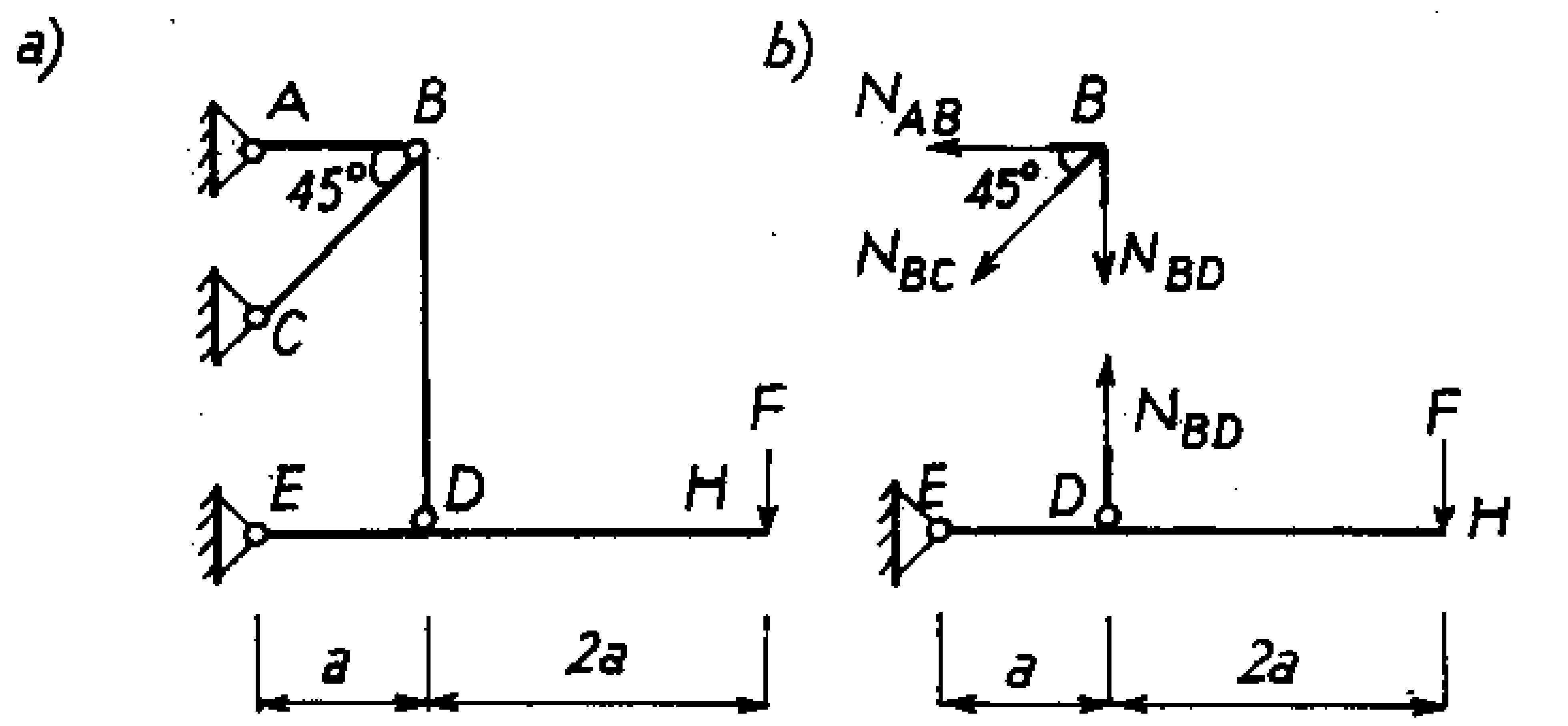
$\sum M_E = 0 \rightarrow N_{BD}.a - F.3a = 0 \rightarrow N_{BD} = 3F$ ;

Sử dụng mặt cắt 2 -2 và xét cân bằng nút $B$ với $N_{BD}$ đã biết

$\sum Y = 0 \rightarrow N_{BD} + N_{BC} \cos 45^o = 0 \rightarrow N_{BC} = -3\sqrt{2}F$ ;

$\sum X = 0 \rightarrow N_{BA} + N_{BC} \sin 45^o = 0 \rightarrow N_{BA} = -3F$ .

Thanh nằm ngang $EDH$ là dầm mút thừa chịu lực tập trung tại mút tự do, có thể tham khảo bảng 2-1 để vẽ biểu đồ mômen uốn.

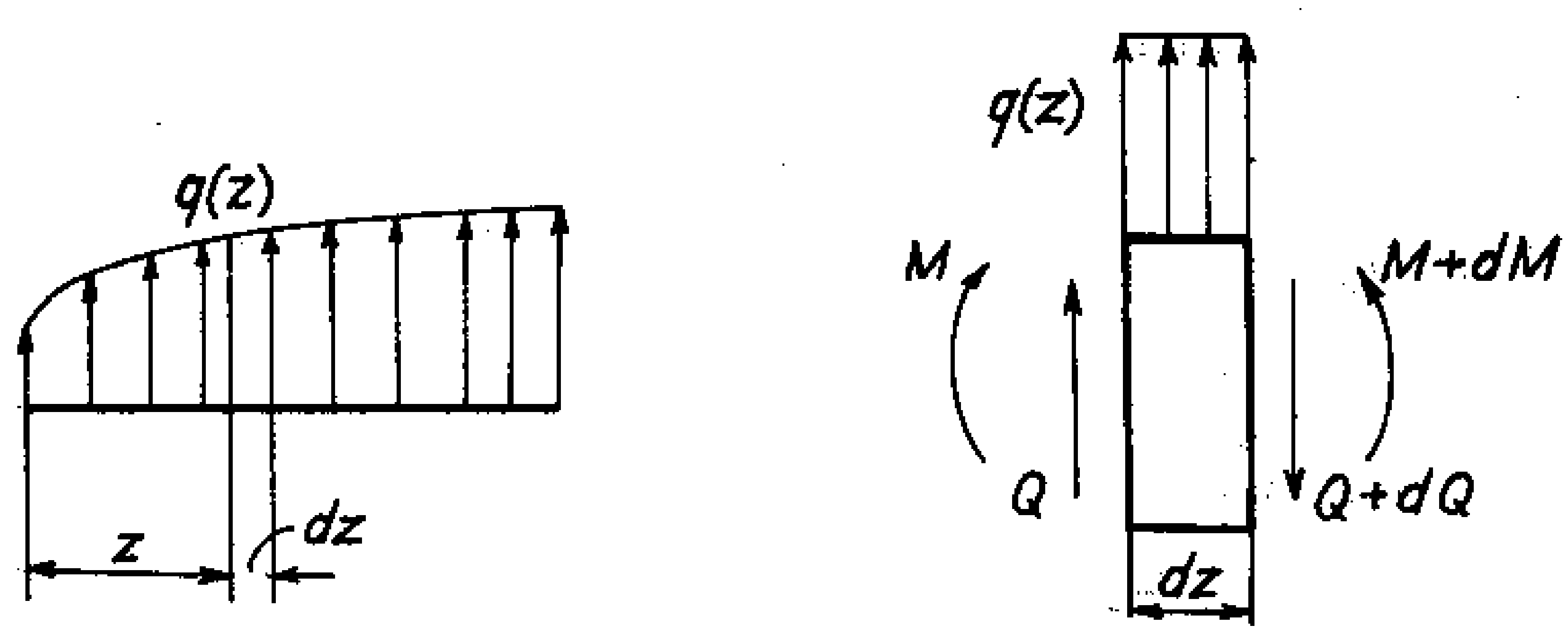



*Hình 2-12.* Cho ví dụ 2-8

## 2-3. QUAN HỆ GIỮA MÔMEN UỐN, LỰC CẮT VÀ TẢI TRỌNG NGANG TRONG THANH THẲNG

### 2-3-1. Quan hệ vi phân giữa mômen uốn, lực cắt và tải trọng ngang phân bố

Xét thanh thẳng chịu tải trọng phân bố đường với cường độ $q(z)$, viết điều kiện cân bằng của một đoạn chiều dài phân tố $dz$ tại hoành độ $z$ như trên hình 2-13, mặt cắt bên trái có tọa độ $z$, mặt cắt bên phải có tọa độ $z + dz$.




*Hình 2-13.* Quan hệ vi phân giữa ứng lực và tải trọng phân bố

Phân tố cân bằng dưới tác động của tải trọng $q$; của ứng lực ở mặt cắt bên trái là

$M$, $Q$ và của ứng lực ở mặt cắt bên phải là $M+dM$ và $Q+dQ$

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow Q + q.dz - (Q+dQ) = 0 \rightarrow dQ / dz = q;$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow M + Q.dz + q.dz^2/2 - (M+dM) = 0 \rightarrow dM / dz = Q.$$

Trong phương trình cân bằng thứ hai ta đã bỏ qua số hạng chứa $dz^2$, là vô cùng bé bậc hai so với vô cùng bé bậc một $dz$. Các kết quả trên được viết lại như sau

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q. \qquad (2\text{-}5)$$

*Đạo hàm bậc nhất theo trục z của mômen uốn bằng lực cắt. Đạo hàm bậc hai của mômen uốn bằng đạo hàm bậc nhất của lực cắt và bằng cường độ lực phân bố.* Chiều của trục $z$ hướng từ trái qua phải, lực phân bố mang dấu dương nếu hướng lên.

Từ quan hệ (2-5) ta có nhận xét:

* dạng các biểu đồ là đường thẳng hoặc đường cong tùy theo tải trọng phân bố $q$;
* vị trí cực trị của biểu đồ mômen uốn: mômen uốn cực trị tại tiết diện có lực cắt bằng không;
* có thể tính được giá trị của ứng lực tại một tiết diện khi biết giá trị ứng lực tại một tiết diện khác

$$dQ = qdz \rightarrow \int_A^B dQ = \int_A^B qdz \rightarrow Q_B - Q_A = S_q. \qquad (2\text{-}6)$$

$$dM = Qdz \rightarrow \int_A^B dM = \int_A^B Qdz \rightarrow M_B - M_A = S_Q, \qquad (2\text{-}7)$$

$S_Q$, $S_q$ tương ứng là diện tích của biểu đồ lực cắt $Q$ và diện tích của biểu đồ tải trọng phân bố trong đoạn $AB$.

### 2-3-2. Quan hệ bước nhảy của biểu đồ mômen uốn, lực cắt và các tải trọng tập trung

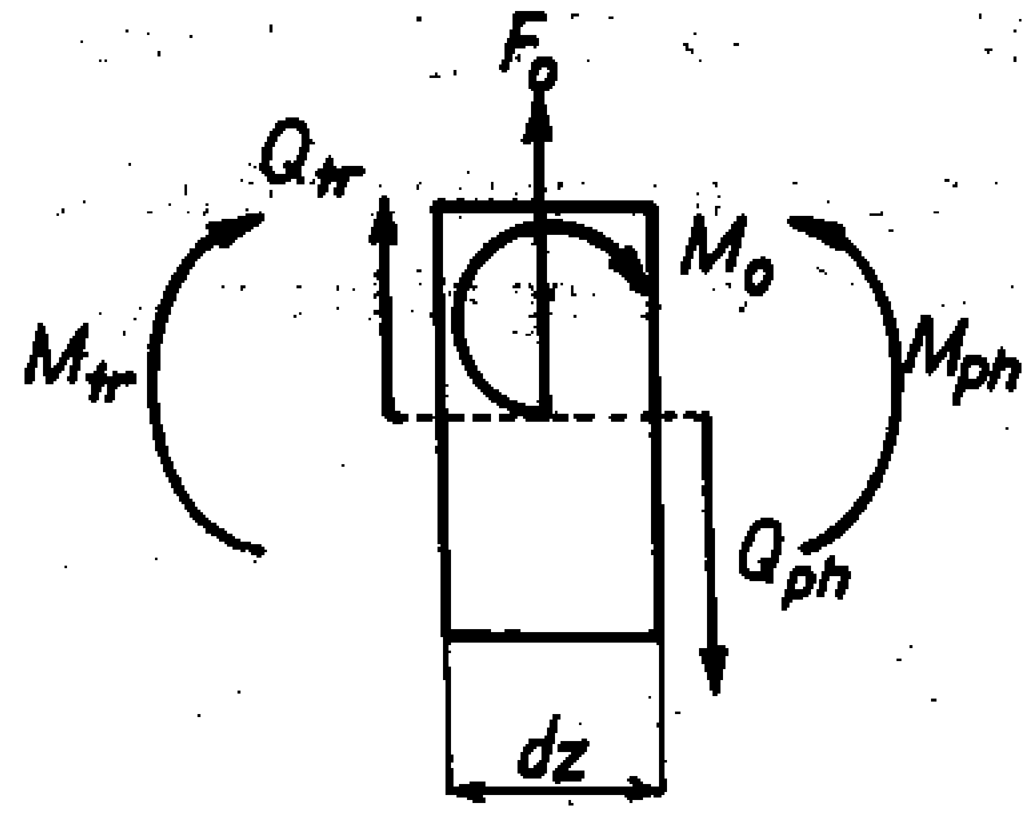
Cho một thanh thẳng chịu lực ngang tập trung $F_0$ và mômen tập trung $M_0$, ta hãy xét điều kiện cân bằng của đoạn thanh $dz$ có các ngoại lực tập trung như trên hình 2-14.

Ứng lực trên tiết diện bên trái là $M_{tr}$; $Q_{tr}$; ứng lực trên tiết diện bên phải sẽ là $M_{ph}$; $Q_{ph}$.

Trị số $\Delta M = M_{ph} - M_{tr}$ gọi là bước nhảy của mômen uốn.

Trị số $\Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr}$ gọi là bước nhảy của lực cắt.

*Hình 2-14.* Quan hệ giữa ứng lực và tải trọng tập trung




Phương trình cân bằng cho ta:

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F_o; \tag{2-8}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_o . \tag{2-9}$$

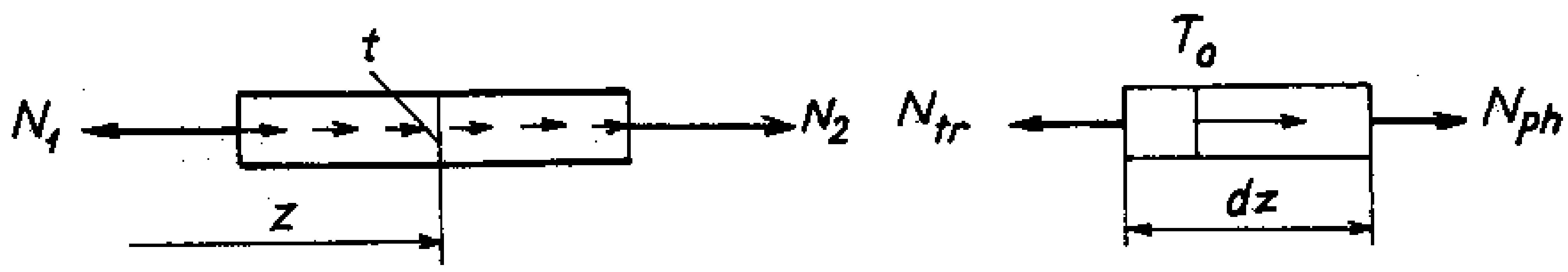
Tại tiết diện đặt lực tập trung (hoặc mômen ngoại lực tập trung), biểu đồ lực cắt (hoặc biểu đồ mômen uốn) sẽ có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số của các lực tập trung (hoặc mômen tập trung). Bước nhảy của lực cắt là dương nếu ngoại lực hướng lên. Bước nhảy của mômen uốn là dương nếu mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ. Chiều trục $z$ đi từ trái qua phải.

Các quan hệ (2-5), (2-6), (2-7), (2-8), (2-9) được sử dụng để kiểm tra các biểu đồ ứng lực, để vẽ nhanh biểu đồ và để giải bài toán ngược là bài toán tìm biểu đồ lực cắt khi biết biểu đồ mômen uốn hoặc tìm tải trọng khi biết các biểu đồ ứng lực.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có thể viết quan hệ vi phân giữa lực dọc $N$ và tải trọng phân bố dọc trục $t$, quan hệ giữa bước nhảy $\Delta N$ của biểu đồ lực dọc và lực dọc tập trung $T_0$ trên thanh thẳng (xem ký hiệu và dấu các đại lượng trên hình 2-15)

$$\frac{dN}{dz} = t , \tag{2-10}$$

$$\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = T_o . \tag{2-11}$$



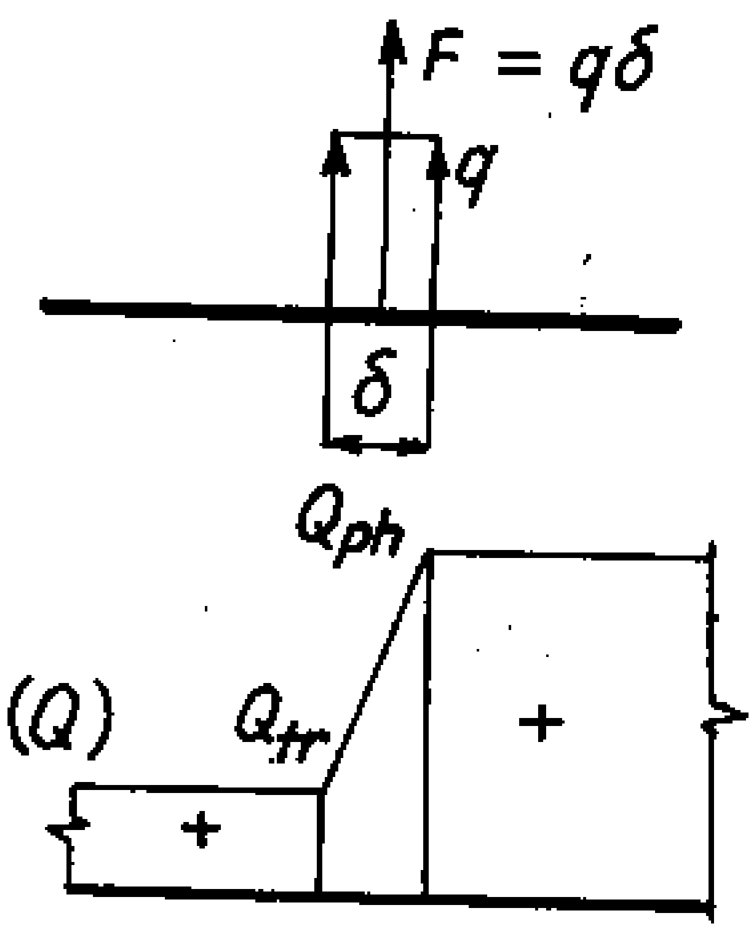

*Hình 2-15.* Quan hệ giữa lực dọc và tải trọng dọc trục

Bước nhảy của biểu đồ mômen uốn, lực cắt chỉ là một nhận xét mang tính quy ước, là hệ quả của việc sơ đồ hóa các tải trọng tập trung. Lực tập trung $F$, tác động lên thanh trên hình 2-16 thực ra chỉ là hợp lực của những lực phân bố đường với cường độ $q$ nào đó trên chiều dài $\delta$ rất nhỏ. Ta có thể giả thiết $q$ là hằng số và bằng giá trị trung bình $q = F/\delta$.

Tương ứng với tải trọng phân bố hằng số thì biểu đồ lực cắt sẽ là đường bậc nhất và hiệu $Q_{ph} - Q_{tr}$, theo quan hệ (2-6), sẽ bằng diện tích lực phân bố $q$:

$$Q_{ph} - Q_{tr} = S_q = q\delta = F.$$

Khi cho đoạn chiều dài $\delta$ tiến tới không ta sẽ có sơ đồ lực tập trung $F$ và biểu đồ lực cắt sẽ có bước nhảy $\Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F$.



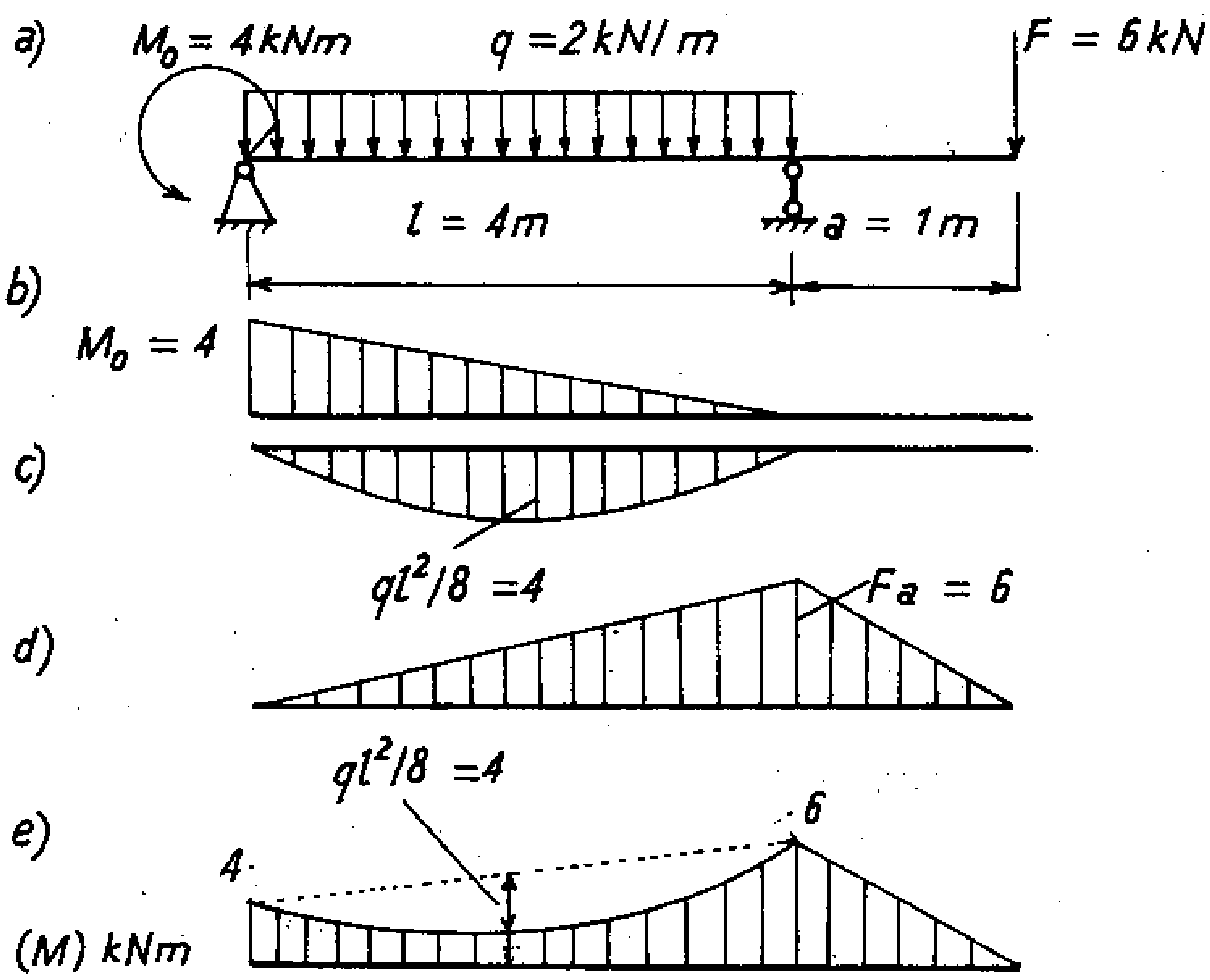

*Hình 2-16.* Bước nhảy của lực cắt

## 2-4. CÁCH VẼ BIỂU ĐỒ THEO NHẬN XÉT

### 2-4-1. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Khi thanh chịu tác dụng của nhiều tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ ứng lực trong thanh do từng tải trọng gây ra lần lượt rồi cộng đại số các biểu đồ ứng lực đó để nhận được kết quả cuối cùng.

Ví du 2-9. Vẽ biểu đồ mômen trong dầm cho trên hình 2-17$a$ bằng cách cộng biểu đồ.




*Hình 2-17.* Cho ví dụ 2-9

*Bài giải*. Tải trọng trên thanh được chia thành ba trường hợp cơ bản đã cho trong bảng 2-1. Vẽ biểu đồ cho từng trường hợp:

* trên hình 2-17b là biểu đồ mômen uốn do mômen $M_o$ gây ra,
* trên hình 2-17c là biểu đồ mômen uốn do tải trọng phân bố $q$ gây ra,
* trên hình 2-17d là biểu đồ mômen uốn do tải trọng tập trung $F$ gây ra,
* trên hình 2-17e là biểu đồ mômen uốn tổng cộng cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số của các tung độ tại tiết diện tương ứng trên hình 2-17b,c,d.

### 2-4-2. Cách vẽ theo từng điểm

Trong cách này, theo tải trọng đã cho và theo các liên hệ vi phân (2-5), ta nhận xét dạng của các biểu đồ và từ đó xác định số điểm cần thiết để vẽ được biểu đồ. Nếu biểu đồ trong đoạn đang xét là hằng số thì chỉ cần một giá trị ở điểm đầu hoặc ở điểm cuối đoạn; nếu biểu đồ là đường bậc nhất thì cần hai giá trị ở hai đầu đoạn; nếu biểu đồ là đường cong thì cần ba giá trị tại điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm bậc hai. Các giá trị cần thiết ở những điểm đặc biệt được tìm theo phương pháp mặt cắt hoặc theo nhận xét suy ra từ (2-6), (2-7), (2-8), (2-9).

***Ví dụ 2-10***. Tìm biểu đồ mômen uốn trong dầm cho trên hình 2-18a bằng cách vẽ theo từng điểm.

*Bài giải*.

♦ *Xác định các phản lực*: $\sum M_D = 0 \rightarrow V_B = 25$ kN ;

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_D = 15 \text{ kN}.$$

Dầm được phân thành ba đoạn $AB$, $BC$, $CD$.

♦ *Biểu đồ lực cắt Q*:

* Trong đoạn $AB$ không có tải trọng ngang phân bố, lực cắt là hằng số. Bằng mặt cắt sát tiết diện $A$ ta tìm được $Q_A = -10$ kN. Cũng có thể nhận xét rằng: tại $A$ có lực tập trung bằng $10$ kN nên biểu đồ lực cắt có bước nhảy bằng $10$ kN; lực đi xuống nên bước nhảy cũng đi xuống.

* Trong đoạn $BC$ lực cắt là hằng số. Tại $B$ có lực tập trung là phản lực $V_B$ hướng lên bằng $25$ kN nên biểu đồ lực cắt có bước nhảy hướng lên bằng $25$ kN. Trị số lực cắt tại $B$ trong đoạn này theo công thức (2-8) bằng

$$Q_{ph} = Q_{tr} + \Delta Q = -10 + 25 = 15 \text{ kN}.$$

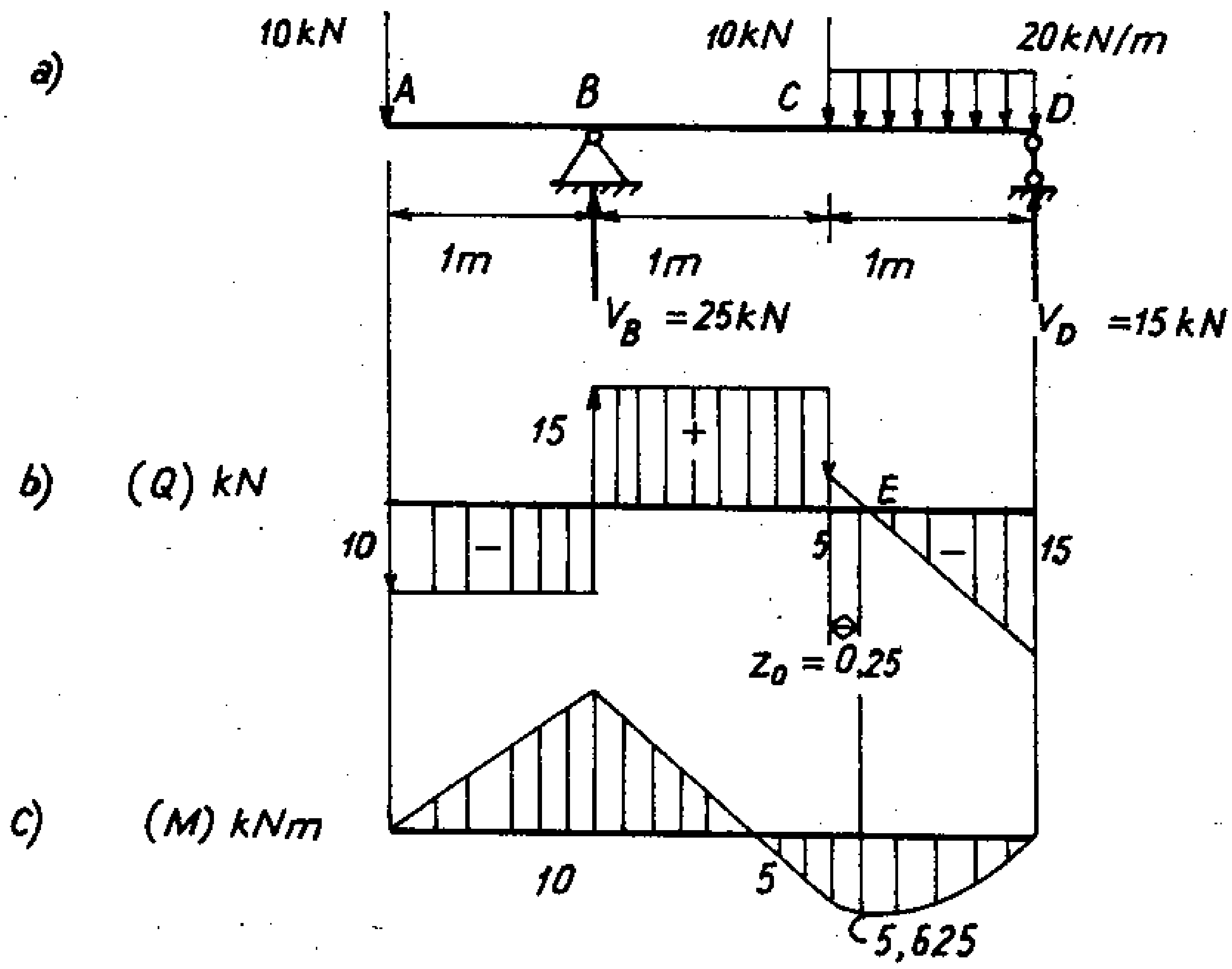
* Trong đoạn $CD$ lực cắt là đường bậc nhất. Tại $C$, đi từ trái sang phải, biểu đồ có bước nhảy đi xuống bằng lực tập trung $10$ kN nên

$$Q_{ph} = Q_{tr} + \Delta Q = 15 - 10 = 5 \text{ kN}.$$

Lực cắt tại cuối đoạn $CD$ có thể tính theo công thức (2-6)

$$Q_D = Q_C - S_q = 5 + (-20).1 = -15 \text{ kN}.$$

Trong biểu thức vừa tính, diện tích $S_q$ mang dấu âm vì tải trọng phân bố $q$ hướng xuống. Biểu đồ $Q$ là đường thẳng nối hai điểm qua $C$ và $D$ có tung độ $Q_C$, $Q_D$ như trên hình 2-18b. Dễ dàng tìm được vị trí tiết diện $E$ có lực cắt bằng không $z_0 = 0{,}25$ m.




*Hình 2-18.* Cho ví dụ 2-10

♦ *Biểu đồ mômen uốn M*:

* Biểu đồ mômen uốn trong đoạn $AB$ là đường bậc nhất. Tại $A$ không có mômen ngoại lực tập trung nên biểu đồ mômen uốn không có bước nhảy, do đó $M_A = 0$. Mômen uốn tại $B$ tìm được theo công thức (2-7):

$$M_B = M_A + S_Q = 0 + (-10).1 = -10 \text{ kNm}.$$

Đặt các tung độ $M_A$, $M_B$ ta vẽ được biểu đồ mômen uốn trong $AB$.

* Biểu đồ mômen uốn trong đoạn $BC$ cũng là đường bậc nhất. Tại $B$ không có mômen ngoại lực tập trung nên không có bước nhảy, giá trị $M_B$ vẫn giữ nguyên bằng $-10$ kNm. Tại tiết diện $C$, theo (2-7):

$$M_C = M_B + S_Q = -10 + 15.1 = 5 \text{ kNm}.$$

* Trong đoạn $CD$ tải trọng ngang phân bố đều nên biểu đồ mômen uốn là đường cong bậc hai. Tại C không có mômen tập trung nên $M_C$ không thay

đổi. Mômen uốn cực trị tại tiết diện $E$ có lực cắt bằng không cũng được tính theo (2-7): $M_E = M_C + S_Q = 5 + 5.0{,}25/2 = 5{,}625$ kNm.

Tại gối tựa $D$ mômen uốn bằng không. Nối tung độ mômen tại $C$, $E$, $D$ bằng đường cong, ta nhận được biểu đồ mômen uốn như trên hình 2-18c. Có thể kiểm tra giá trị của $M_D$ theo (2-7): $M_D = M_E + S_Q = 5{,}625 + (-15.0{,}75/2) = 0$.

### 2-4-3. Bài toán suy ngược

Bài toán suy ngược là bài toán cho biết biểu đồ mômen uốn, yêu cầu tìm biểu đồ lực cắt và đôi khi tìm ngược lại tải trọng tương ứng. Để giải bài toán này ta sử dụng liên hệ vi phân giữa nội, ngoại lực và quan hệ bước nhảy của biểu đồ đã trình bày ở trên.

Khi biểu đồ mômen uốn là một đường bậc hai dạng $Az^2 + Bz + C$ thì ta xác định $A$, $B$, $C$ theo ba tung độ đã biết trên biểu đồ, sau đó tìm lực cắt bằng đạo hàm bậc nhất của mômen uốn là $2Az + B$.

Khi biểu đồ mômen uốn là đường bậc nhất $Az + B$ thì ta cũng có thể tìm được lực cắt bằng biện pháp tương tự như trên sau khi xác định được $A$ và $B$. Tuy nhiên ta có thể tính giá trị $Q$ bằng hệ số góc của biểu đồ mômen uốn theo biểu thức $Q = \dfrac{dM}{dz} = tg\alpha$. Góc $\alpha$ dương của biểu đồ mômen uốn là góc thuận chiều kim đồng hồ như trên hình 2-19.


*Hình 2-19.* Dấu của lực cắt theo tiếp tuyến của biểu đồ mômen uốn

Nếu biểu đồ lực cắt, mômen uốn có bước nhảy thì tương ứng có những ngoại lực tập trung đặt lên thanh.

***Ví du 2-11.*** Vẽ biểu đồ lực cắt cho dầm đã xét trong ví dụ 2-9 sau khi đã vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách cộng tác dụng.

*Bài giải.*

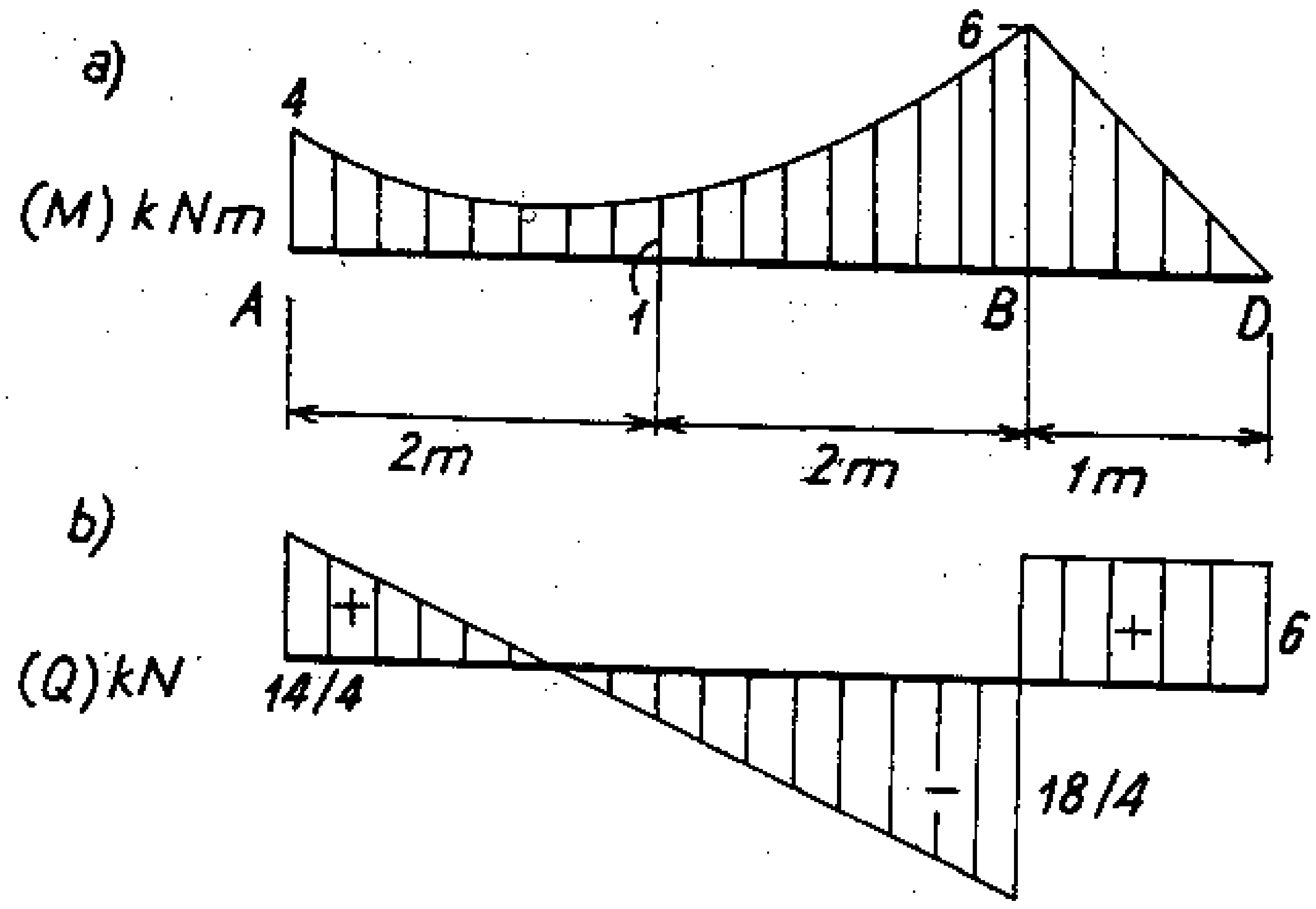
* Trong đoạn thứ nhất $AB$, biểu đồ mômen uốn là đường bậc hai $M = Az^2 + Bz + C$, xác định $A$, $B$, $C$ theo điều kiện:

- tại $z = 0$ $\rightarrow$ $M = -4$ kNm $\rightarrow$ $C = -4$;
- tại $z = 2$ $\rightarrow$ $M = -1$kNm $\rightarrow$ $A.2^2 + B.2 + C = -1$,
- tại $z = 4$ $\rightarrow$ $M = -6$ kNm $\rightarrow$ $A.4^2 + B.4 + C = -6$.

Từ đó tìm được: $A = -1$ ; $B = 14/4$ ; $C = -4$;

$$Q = \frac{dM}{dz} = 2Az + B = -\frac{9}{4}z + \frac{15}{4} \Rightarrow khi\ z = 0 \rightarrow Q = \frac{14}{4}\,\text{kN},$$

và $$\Rightarrow khi\ z = 4 \rightarrow Q = -\frac{18}{4}\,\text{kN}.$$




*Hình 2-20.* Cho ví dụ 2-11

* Trong đoạn thứ hai *BC*, biểu đồ mômen uốn là đường bậc nhất, lực cắt là hằng số $Q = tg\alpha = +6/1 = 6$ kN. Trị số $\alpha$ dương vì góc quay từ trục đến đường biểu đồ mômen uốn thuận chiều kim đồng hồ.

Với các trị số của lực cắt trong từng đoạn, ta vẽ được biểu đồ như trên hình 2 -20b.

***Ví dụ 2-12***. Cho sơ đồ khung và biểu đồ mômen uốn, lực dọc như trên hình 2-21a, b. Hãy vẽ biểu đồ lực cắt và các tải trọng tác động.

*Bài giải*.

♦ *Biểu đồ lực cắt*

* Trong đoạn *AB*, lực cắt là hằng số $Q = tg\alpha = -\frac{4}{2} = -2$ kN.

* Trong đoạn *BC*, lực cắt là hằng số $Q = tg\alpha = +\frac{3,5-2}{1} = 1,5$ kN.

* Trong đoạn *CD*, lực cắt là hàm bậc nhất. Nếu lấy chiều dương của trục theo hướng *CD* thì có thể thấy dấu của mômen uốn là âm vì làm căng phía trên của thanh nằm ngang tương ứng. $M = Az^2+Bz+C$, xác định *A, B, C* theo điều kiện:

- tại $z = 0 \rightarrow M = -2$ kNm $\rightarrow C = -2$ ;
- tại $z = 2 \rightarrow M = 0 \quad \rightarrow A2^2 + B.2 + C = 0$ ;

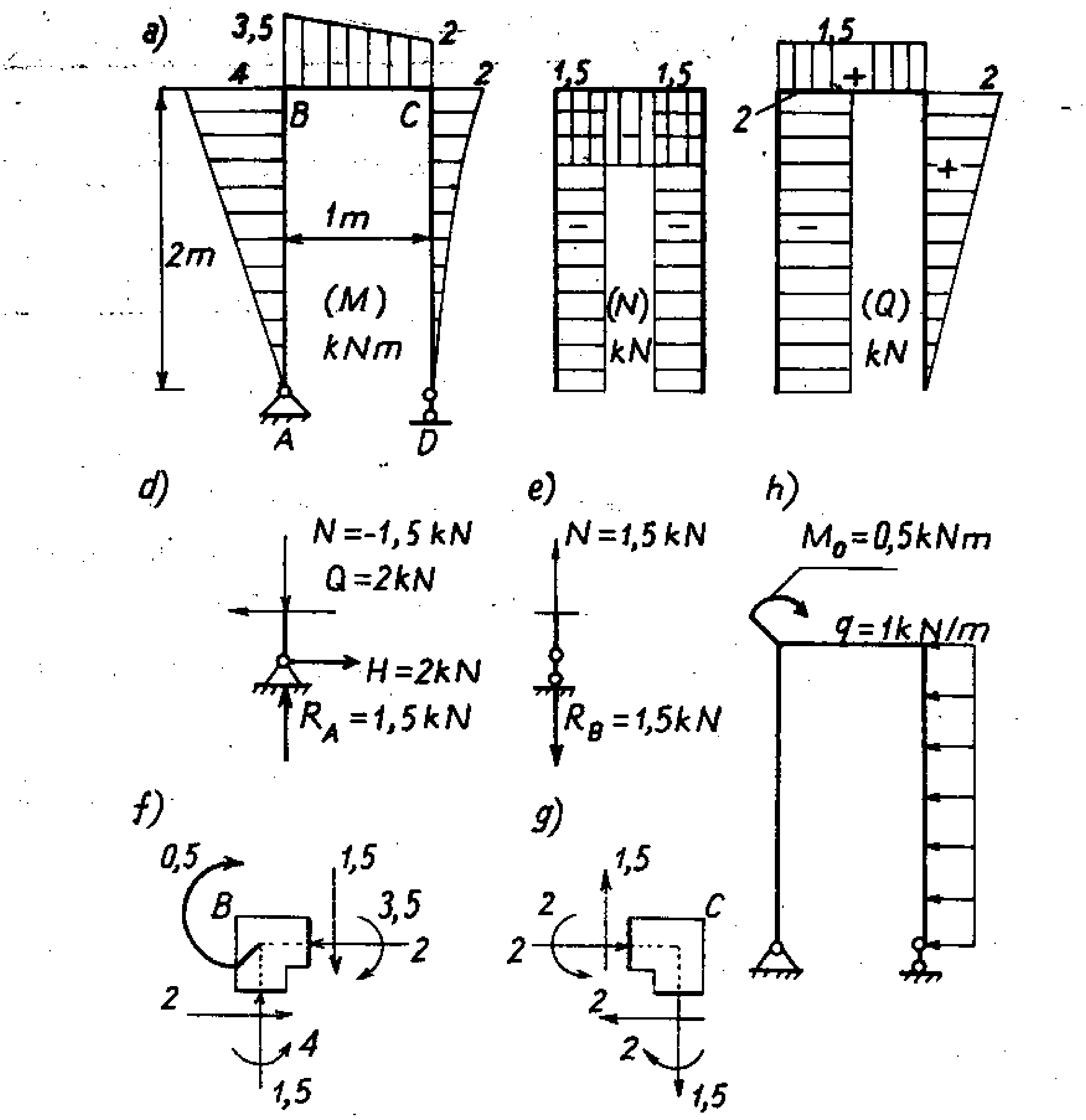
- tại $z = 2 \rightarrow \dfrac{dM}{dz} = 0 \quad \rightarrow \quad 2A.2 + B = 0.$

Giải ra: $A = -0,5$ ; $B = 2$ ; $C = -2$.

Lực cắt trong đoạn $CD$ là $Q = 2Az + B = -z + 2$. Khi $z = 0$ ; $Q_C = 2$ kN.

Khi $z = 2$ ; $Q_D = 0$.

Với các trị số tìm được ta vẽ biểu đồ lực cắt như trên hình 2-21c.




*Hình 2-21.* Cho ví dụ 2-12

♦ *Tải trọng*

Trong các đoạn thanh lực dọc là hằng số nên không có lực phân bố dọc trục.

* Trong đoạn $AB$, $BC$ mômen uốn là đường bậc nhất nên cũng không có tải trọng ngang phân bố.

* Trong đoạn $CD$ mômen là đường bậc hai nên tải trọng ngang phân bố là hằng số $q = \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = 2A = -1$ kN/m.

Dấu trừ chứng tỏ chiều của tải trọng phân bố hướng sang trái (là chiều đi xuống nếu đoạn $CD$ đặt nằm ngang và trục $z$ đi theo hướng $CD$ ).

Trong các đoạn thanh các biểu đồ không có bước nhảy nên không có các tải trọng tập trung trong đoạn thanh. Tuy nhiên có thể có những tải trọng tập trung đặt ở nút hoặc các đầu thanh.

Xét cân bằng đoạn thanh sát đầu $A$ như trên hình 2-21d, ta đặt vào mặt cắt nội lực $M$, $N$, $Q$ và để phần thanh cân bằng ta phải có ngoại lực là một lực thẳng đứng hướng lên bằng $1,5$ kN, một lực nằm ngang hướng sang phải bằng 2 kN.

Xét đoạn thanh sát đầu $D$ như trên hình 2-21e, để cân bằng ta cần đặt thêm một lực tập trung hướng xuống bằng $1,5$ kN.

Xét cân bằng nút $B$ (hình 2-21f), để cân bằng cần một mômen ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ bằng $0,5$ kNm.

Xét cân bằng nút $C$ (hình 2-21g), sau khi đặt ứng lực vào các mặt cắt, ta thấy nút được cân bằng. Tại nút này không có các ngoại lực tập trung.

Các ngoại lực tác dụng được vẽ trên hình 2-21h. Các lực tập trung tại $A$, $D$ có thể coi là những phản lực liên kết và không vẽ trên hình.

## 2-5. BIỂU ĐỒ ỨNG LỰC TRONG THANH CONG

Trong bài toán phẳng, trên tiết diện của thanh cong cũng có những ứng lực như đối với thanh thẳng là $M$, $N$, $Q$. Trục của thanh cong là những đường cong nên vị trí của tiết diện thường được xác định trong hệ tọa độ độc cực; mômen uốn, lực cắt, lực dọc là những hàm số theo biến số góc $\varphi$, chúng cũng được xác định từ những phương trình cân bằng theo quy tắc như đối với thanh thẳng (2-3).

Từ điều kiện cân bằng của một đoạn chiều dài phân tố $ds$ của thanh như trên hình 2-22, ta có thể nhận được các quan hệ vi phân giữa ứng lực và tải trọng phân bố trên thanh như sau:

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{\rho} + t; \qquad \frac{dQ}{ds} = \frac{N}{\rho} + q; \qquad \frac{dM}{ds} = Q + m, \qquad (2\text{-}12)$$

trong đó:

$\rho$ - bán kính cong của trục thanh;

$m$ - cường độ mômen phân bố, thứ nguyên là [Lực][Chiều dài]/[Chiều dài].

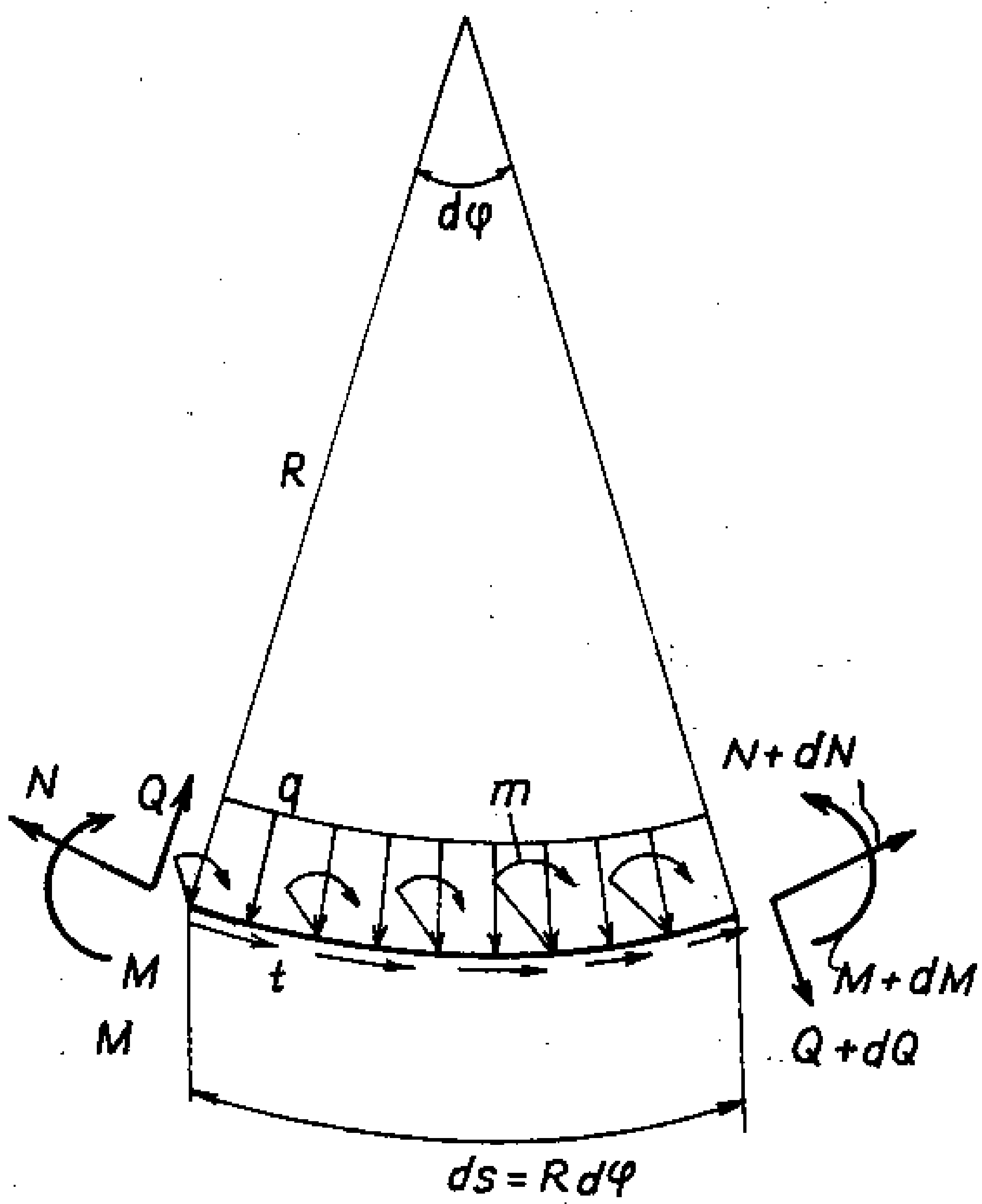
$ds = \rho\, d\varphi$ - vi phân chiều dài trục;

$t$ - cường độ lực phân bố dọc trục, thứ nguyên là [Lực ]/ [Chiều dài];

$q$ - cường độ lực phân bố ngang trục, thứ nguyên là [Lực ]/ [Chiều dài];

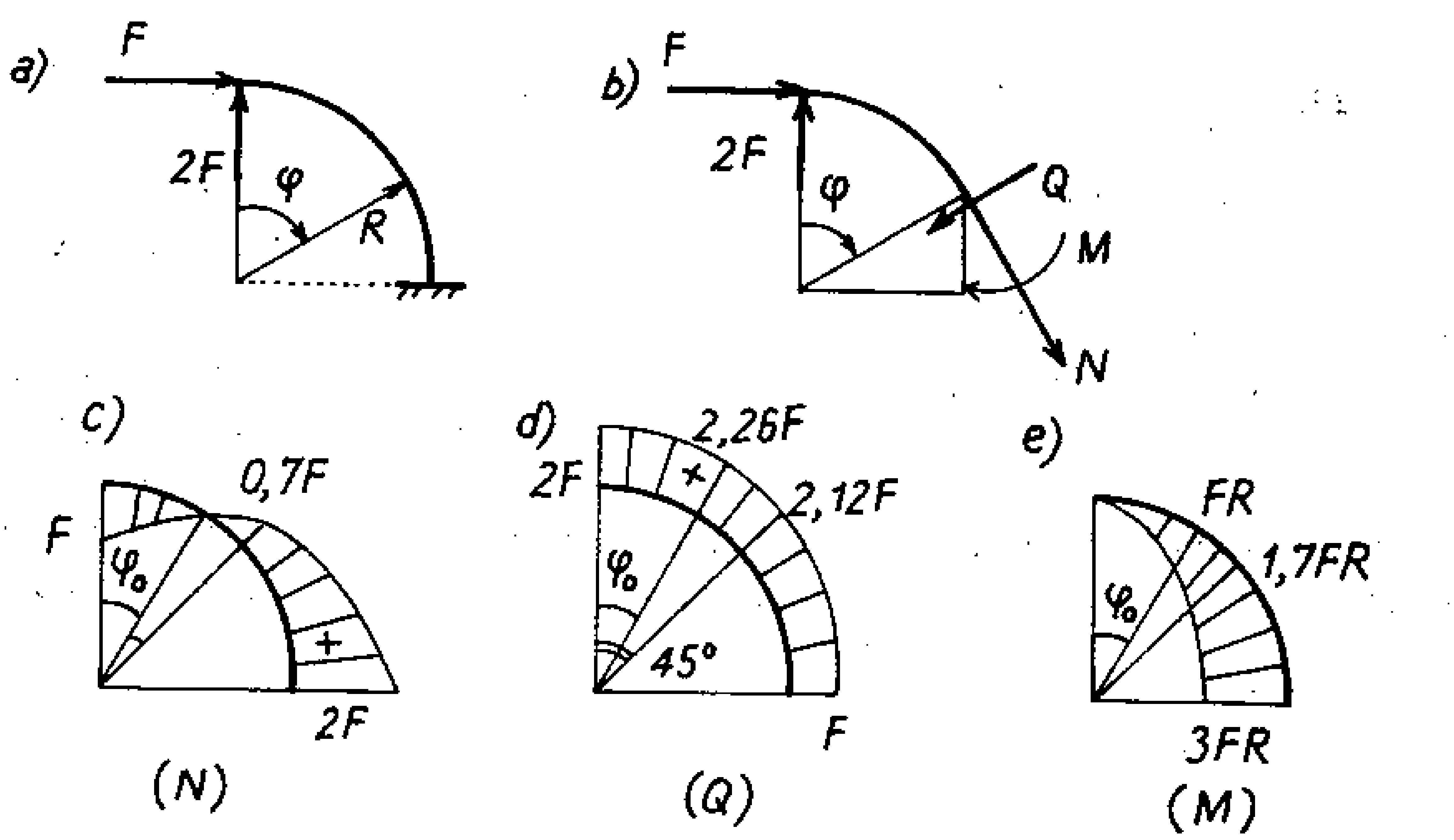
Dấu dương các đại lượng trong quan hệ (2-12) lấy theo hình vẽ 2-22.

Trường hợp đặc biệt, khi cho $\rho = \infty$, $ds = dz$ ta nhận được quan hệ vi phân giữa ứng lực và ngoại lực đối với thanh thẳng (2-5), (2-8), (2-10), (2-11).




*Hình 2-22.* Phân tố thanh cong

**Ví dụ 2-13**. Vẽ biểu đồ $N, M, Q$ cho thanh cong tròn trên hình 2-23a.




*Hình 2-23.* Cho ví dụ 2-13

Bài giải. Cắt thanh tại tiết diện *1-1*, xác định bởi góc $\varphi$ $(0 < \varphi < 90^o)$, xét cân bằng của phần trên, đặt ngoại lực và các ứng lực tại mặt cắt theo chiều dương như trên hình 2-23b, theo quy tắc (2-3) ta có:

$$N = 2F\sin\varphi - F\cos\varphi = F(2\sin\varphi - \cos\varphi)\ ;$$

$$Q = 2F\cos\varphi - F\sin\varphi = F(2\cos\varphi - \sin\varphi)\ ;$$

$$M = -2FR\sin\varphi - F(R - R\cos\varphi) = -FR(2\sin\varphi + 1 - \cos\varphi).$$

Tính các trị số của ứng lực tại các tiết diện có góc $\varphi$ khác nhau, ta vẽ được các biểu đồ. Lực cắt đạt cực trị khi lực dọc bằng không, nghĩa là khi

$$2\sin\varphi - \cos\varphi = 0 \;\rightarrow\; tg\varphi = 0{,}5 \;\rightarrow\; \varphi = \varphi_0 = 26^0 56'$$

$$\sin\varphi_0 = 0{,}4472; \quad \cos\varphi_0 = 0{,}8944.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi = 0$ | $\rightarrow$ | $N = -F$ ; | $Q = 2F$ ; | $M = 0$ . |
| $\varphi = \varphi_0$ | $\rightarrow$ | $N = 0$ ; | $Q = 1{,}3416F$ ; | $M = -FR$ . |
| $\varphi = 45^o$ | $\rightarrow$ | $N = 0{,}7F$ ; | $Q = 2{,}1F$ ; | $M = 1{,}7FR$ . |
| $\varphi = 90^o$ | $\rightarrow$ | $N = 2F$ ; | $Q = F$ ; | $M = 3FR$ . |

Khi vẽ cần chú ý đặt các tung độ theo phương vuông góc với trục thanh, tức là theo phương bán kính, như trên hình 2-23c,d, e.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

2- 1. Nêu định nghĩa về hai cách biểu diễn nội lực trên tiết diện thanh: biểu diễn theo ứng suất và biểu diễn theo các ứng lực *M*, *N*, *Q*.

2- 2. Viết và giải thích các quan hệ giữa các thành phần *M*, *N*, *Q* và ứng suất trên tiết diện trong bài toán phẳng của thanh.

2- 3. Nêu trình tự xác định *M*, *N*, *Q* trên tiết diện thanh bằng phương pháp mặt cắt.

2- 4. Nêu quy ước dấu của các thành phần ứng lực *M*, *N*, *Q* trong bài toán phẳng của thanh.

2- 5. Trong bài toán thanh không gian tổng quát có bao nhiêu thành phần hợp lực của nội lực trên tiết diện? Vẽ, viết ký hiệu và nêu tên gọi của các ứng lực này.

2- 6. Khi nào một thanh chịu lực được gọi là dầm? Thế nào là dầm côngxon, dầm đơn giản, dầm mút thừa, dầm ghép tĩnh định? Vẽ sơ đồ của các dầm này.

2- 7. Viết và giải thích các quan hệ vi phân giữa $M$, $Q$ và cường độ tải trọng ngang phân bố trên thanh thẳng $q$. Nêu dấu của các đại lượng có mặt trong quan hệ.

2- 8. Các quan hệ vi phân ghi ở câu hỏi 2-7 có thay đổi gì, nếu trên thanh ngoài tải trọng ngang phân bố còn có mômen ngoại lực phân bố với cường độ $m$.

2- 9. Chứng minh quan hệ giữa lực dọc $N$ với các tải trọng dọc trục phân bố $t$ và tập trung $F$ trên thanh thẳng: $\frac{dN}{dz} = t$ ; $\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = F$ .

2-10. Chứng minh các biểu thức (2-12) đã nêu trong mục 2-5 về quan hệ giữa $M$, $N$, $Q$ và các tải trọng trong bài toán phẳng của thanh cong.

2-11. Có tồn tại hay không tồn tại quan hệ giữa bước nhảy của $M$, $N$, $Q$ và các tải trọng tập trung trong bài toán phẳng của thanh cong? Hãy viết và phát biểu những quan hệ này, nếu có.

2-12. Nêu cách tìm biểu thức của mômen uốn $M$ và lực cắt $Q$ trên dầm chịu tải trọng ngang phân bố bằng việc giải các phương trình vi phân

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q \quad \text{và} \quad \frac{dQ}{dz} = q .$$

Tìm cách xác định các hằng số tích phân.

# 3 Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm

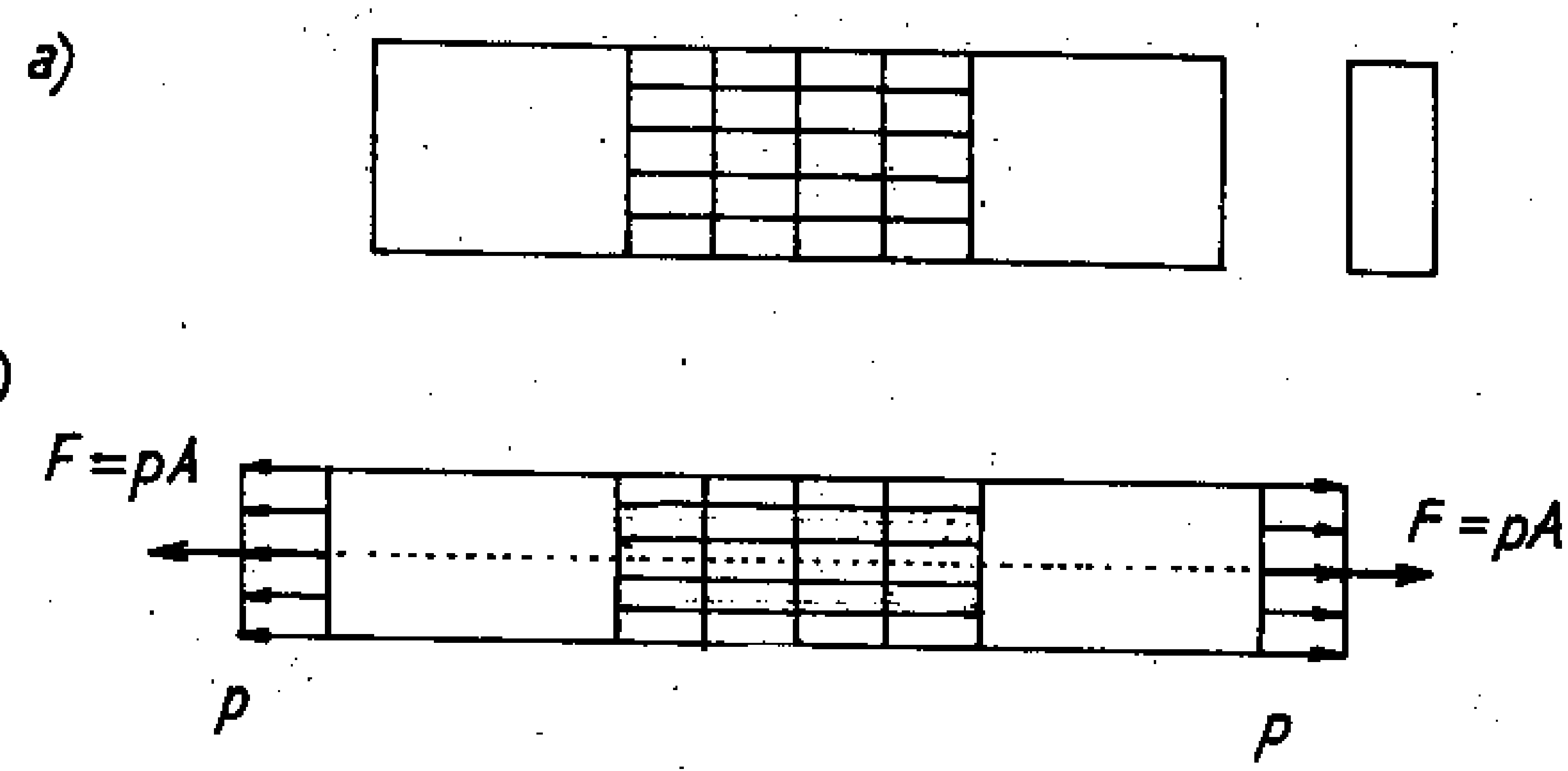
## 3-1. ỨNG SUẤT TRÊN TIẾT DIỆN

### 3-1-1. Định nghĩa

Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên tiết diện chỉ tồn tại một ứng lực là lực dọc $N$; lực dọc dương thì thanh chịu kéo, lực dọc âm thì thanh chịu nén. Trong ví dụ 2-2 đã xét ở chương 2 thì thanh $AB$ chịu kéo và thanh $BC$ chịu nén. Cột, trụ chịu nén bởi trọng lượng bản thân. Mắt xích của dây xích truyền chuyển động, dây cáp của kết cấu treo, cáp cần cẩu nâng hạ tải là những thanh chịu kéo. Những thanh của kết cấu dàn cũng chỉ chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm khi tải trọng đặt tại các mắt dàn... Có thể thấy dạng chịu lực này là trường hợp khá phổ biến của các thanh thẳng dùng trong kỹ thuật.

### 3-1-2 Giả thiết về biến dạng của thanh

Để nghiên cứu, ta xét một thanh thẳng có tiết diện không đổi và kẻ trên bề mặt thanh một mạng các đường thẳng song song với trục và các đường thẳng vuông góc với trục như trên hình 3-1a. Các đường vuông góc với trục đặc trưng cho tiết diện, các đường song song với trục đặc trưng cho các lớp vật liệu nằm dọc trục.




*Hình 3-1.* Quan sát biến dạng của thanh thẳng chịu kéo đúng tâm

Cho thanh chịu kéo bởi hai hệ lực ngược chiều nhau, cường độ $p$ phân bố đều trên diện tích tiết diện $A$ ở hai đầu như trên hình 3-1b. Hợp lực $F = pA$ của hệ lực sẽ nằm theo phương trục thanh. Bằng phương pháp mặt cắt, dễ dàng thấy trên mọi tiết diện của thanh chỉ có một ứng lực là lực dọc $N = F$.

Sau khi thanh chịu lực, ta thấy các góc vuông không thay đổi, các đường vuông góc với trục thanh vẫn thẳng, các đường song song với trục vẫn giữ những khoảng cách hầu như không đổi và dãn dài ra những đoạn bằng nhau.

Trên cơ sở quan sát này, có thể nêu những giả thiết về tính chất biến dạng của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm:

1- Các tiết diện của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục.

2- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không chèn ép, xô đẩy nhau trong quá trình biến dạng. Nói cách khác, ta có thể bỏ qua ứng suất pháp trên những mặt cắt song song với trục thanh.

3- Các thớ vật liệu dọc trục có biến dạng dài bằng nhau.

Giả thiết thứ nhất gọi là giả thiết tiết diện phẳng Bernoulli. Giả thiết thứ hai gọi là giả thiết về sự không tác dụng tương hỗ giữa các thớ dọc. Hai giả thiết này cũng là hai giả thiết cơ bản về tính chất biến dạng của thanh trong nhiều trường hợp chịu lực khác.

### *3-1-3. Biểu thức ứng suất*

Trong trường hợp đang xét, các góc vuông không đổi nên theo định luật Hooke (1-9), ứng suất tiếp trên tiết diện sẽ bằng không.

Ứng suất pháp tỷ lệ với biến dạng dài theo (1-8): $\sigma = E\varepsilon$.

Vì biến dạng dài dọc trục là như nhau với mọi thớ dọc, là hằng số tại mọi điểm trên tiết diện, nên ứng suất pháp cũng là hằng số trên tiết diện. Do đó, biểu thức (2-1) biểu thị quan hệ giữa ứng lực $N$ và ứng suất $\sigma$ có dạng:

$$N = \int_A \sigma \, dA = \sigma \int_A dA = \sigma A .$$

Từ đó, ta nhận được biểu thức đơn giản để tính ứng suất pháp

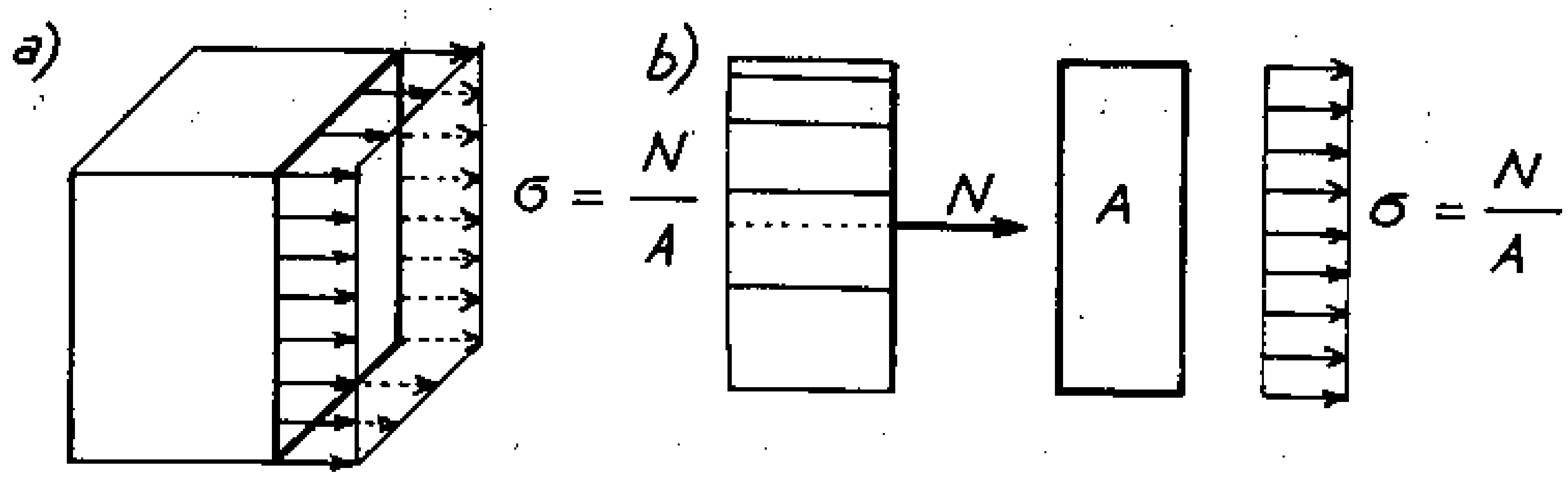
$$\sigma = \frac{N}{A}. \tag{3-1}$$

$N$ - lực dọc tại tiết diện đang xét, tìm được theo phương pháp mặt cắt;

$A$ - diện tích tiết diện.

Biểu đồ không gian và biểu đồ phẳng của ứng suất pháp trên tiết diện được trình bày lần lượt trên hình 3-2a, b.

Vì ứng suất phân bố đều trên tiết diện, vật liệu tại mọi điểm trên tiết diện làm việc như nhau nên có thể kết luận rằng kéo, nén đúng tâm là một dạng chịu lực hợp lý của kết cấu, chẳng hạn các thanh trong hệ dàn, hệ dây.

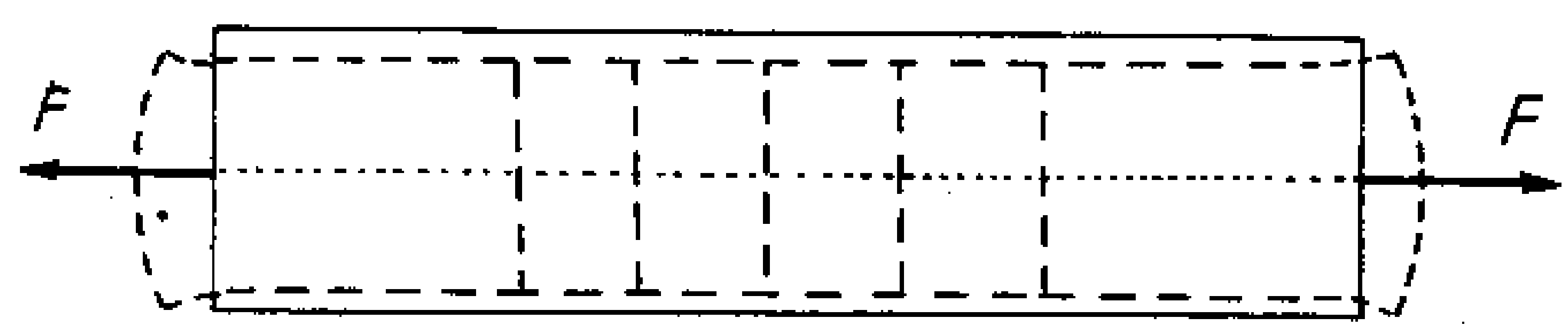



*Hình 3-2.* Biểu đồ ứng suất pháp

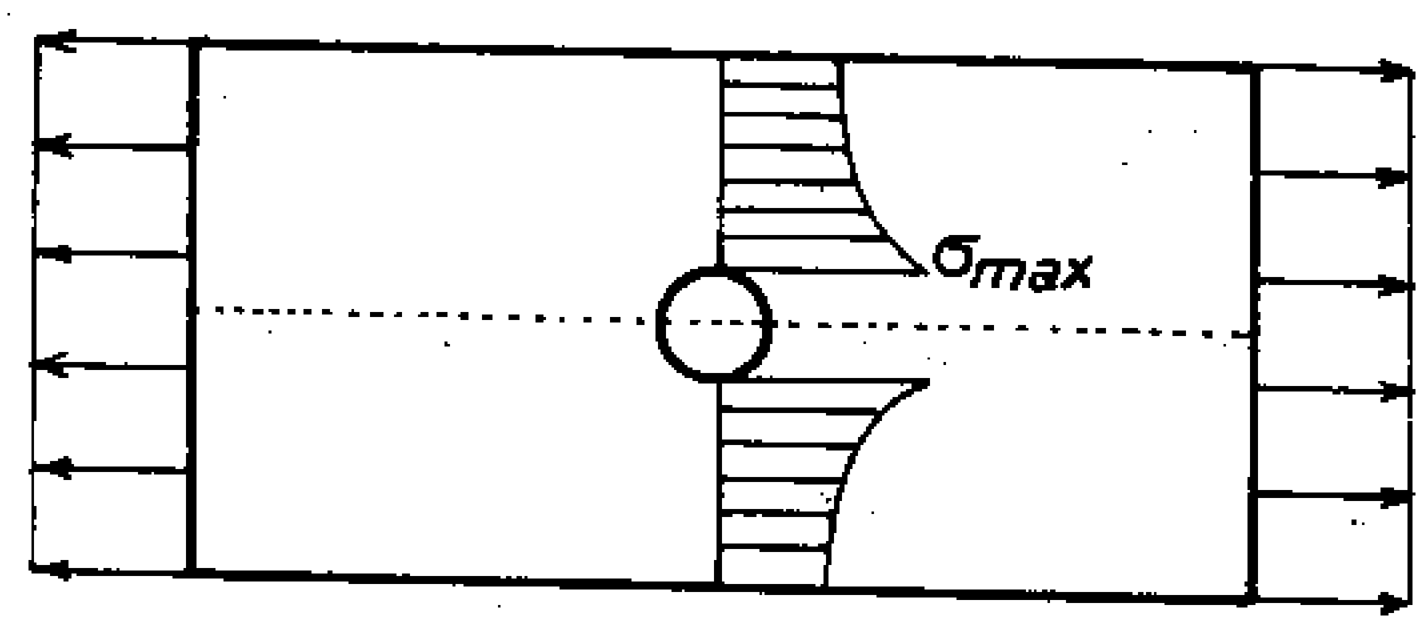
### 3-1-4. Nhận xét

* Khi tải trọng tại hai đầu thanh không phải là hệ lực phân bố đều như đã giả thiết, chẳng hạn là một lực tập trung hoặc một hệ lực phân bố có hợp lực nằm trùng trục thanh như trên hình 3-3, thì những tiết diện ở hai đầu thanh không còn phẳng. Nhưng ở xa hai đầu thanh, giả thiết tiết diện phẳng vẫn chấp nhận được và ứng suất vẫn được tính theo công thức (3-1). Nhận xét này được gọi là nguyên lý Saint-Venant và được phát biểu tổng quát như sau:

*Sự phân bố ứng suất và biến dạng của vật thể tại những miền xa nơi đặt lực sẽ không thay đổi nếu thay hệ lực đã cho bằng một hệ lực khác tương đương.*




*Hình 3-3.* Nguyên lý Saint-Venant




*Hình 3-4.* Ứng suất tập trung quanh lỗ khoét

* Xét thanh có những tiết diện bị giảm yếu cục bộ, chẳng hạn thanh tiết diện chữ nhật có lỗ khoét tròn như trên hình 3-4. Thực nghiệm và lý thuyết đều cho thấy: tại tiết diện bị giảm yếu ứng suất pháp sẽ không phân bố đều theo (3-1)

mà phân bố theo đường cong, đạt giá trị lớn nhất $\sigma_{max}$ tại mép lỗ khoét. Hiện tượng này gọi là *sự tập trung ứng suất.*

Hệ số tập trung ứng suất là tỷ số giữa ứng suất tập trung lớn nhất $\sigma_{max}$ và ứng suất tính theo công thức $\sigma = N/A_o$ ($A_o$ là diện tích tiết diện giảm yếu)

$$k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}. \tag{3-2}$$

Ứng suất tập trung được nghiên cứu trong Lý thuyết đàn hồi và bằng thực nghiệm.

## 3-2. BIẾN DẠNG CỦA THANH

### 3-2-1. Biến dạng dài dọc trục

Theo định luật Hooke, biến dạng dài dọc trục của một đơn vị chiều dài thanh là

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}. \tag{3-3}$$

Biến dạng dài dọc trục của một vi phân chiều dài thanh $dz$ là $\varepsilon.\,dz$.

Biến dạng dài dọc trục của cả chiều dài thanh $L$, ký hiệu $\Delta L$, là

$$\Delta L = \int_L \varepsilon\, dz = \int_L \frac{N}{EA} dz. \tag{3-4}$$

Khi tỷ số $\frac{N}{EA}$ là hằng trên cả chiều dài $L$ : $\Delta L = \frac{NL}{EA}$. (3-5)

Khi tỷ số $\frac{N}{EA}$ là hằng trên từng đoạn chiều dài $L_i$: $\Delta L = \sum_i \left(\frac{NL}{EA}\right)_i$. (3-6)

Khi $EA$ là hằng trên cả chiều dài $L$ : $\Delta L = \frac{\Omega_N}{EA}$. (3-7)

với $\Omega_N$ là diện tích biểu đồ lực dọc trên đoạn chiều dài $L$.

### 3-2-2. Biến dạng dài theo phương ngang

Có thể nhận thấy biến dạng dài theo phương dọc trục và biến dạng dài theo phương ngang trục sẽ có dấu ngược nhau. Các nghiên cứu thực nghiệm và lý thuyết cho thấy độ lớn của hai loại biến dạng này tỷ lệ với nhau, hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào vật liệu. Ký hiệu biến dạng dài theo phương ngang là $\varepsilon'$ và hệ số tỷ lệ là $\mu$, ta có quan hệ:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}. \qquad (3\text{-}8)$$

### *3-2-3. Các hằng số đàn hồi của vật liệu. Độ cứng khi kéo, nén của tiết diện*

* Trong các biểu thức viết ở trên ta gặp các hệ số $E$ và $\mu$, là hai hằng số đàn hồi của vật liệu, được xác định từ thí nghiệm.

Hằng số $E$ gọi là *môđun đàn hồi khi kéo, nén* có thứ nguyên [*Lực*/ (*Chiều dài*)$^2$]. $E$ cũng được gọi là hằng số *Young* theo tên của nhà vật lý, thiên văn người Anh Thomas Young (1773-1829). Môđun đàn hồi thể hiện độ cứng khi biến dạng của vật liệu và là một đặc trưng quan trọng hàng đầu của vật liệu trong tính toán kết cấu công trình.

Hằng số $\mu$ được gọi là *hệ số nở ngang hay hằng số Poisson* theo tên nhà bác học người Pháp Simon Denie Poisson (1781-1840), người đầu tiên đưa hệ số này vào cơ học các vật liệu. Hằng số $\mu$ là một đại lượng không thứ nguyên. Với mọi loại vật liệu, giá trị của $\mu$ nằm trong khoảng $0 \le \mu \le 0,5$.

Bảng 3-1 cho giá trị trung bình của hằng số $E$, $\mu$ đối với một số loại vật liệu thường gặp.

***Bảng 3-1***

| Vật liệu | $E$ (kN/cm$^2$) | $\mu$ |
|---|---|---|
| Thép cán | $2,1.10^4$ | $0,30 \pm 0,05$ |
| Hợp kim nhôm. | $7,0.10^3$ | 0,30 |
| Đồng | $1,0.10^4$ | 0,32 |
| Bêtông | $2,4.10^3$ | 0,20 |
| Gỗ dọc thớ | $1,0.10^3$ | 0,48 |
| Gỗ ngang thớ | $4,0.10^1$ | 0,02 |
| Gạch | $7,0.10^2$ | 0,25 |
| Caosu | 0,7 | 0,50 |

* Biến dạng của thanh phụ thuộc vào tích $EA$. Tích này càng lớn thì biến dạng càng nhỏ, vì vậy ta gọi $EA$ là độ cứng khi kéo, nén của tiết diện. Trị số $\frac{EA}{L}$ được gọi là độ cứng khi kéo, nén của thanh.

### *3-2-4. Chuyển vị của tiết diện*

Khi thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm trục thanh vẫn thẳng. Các tiết diện không xoay, vẫn vuông góc trục và chỉ chuyển vị tịnh tiến dọc trục. Tại tiết diện ở hoành độ $z$, chuyển vị dọc trục là $w$ thì tại tiết diện lân cận ở hoành độ $z+dz$ chuyển vị dọc trục sẽ là $w+dw$.

Biến dạng dài của chiều dài $dz$ là $dw$, biến dạng của một đơn vị chiều dài sẽ là $\frac{dw}{dz}$. Vậy:

$$\frac{dw}{dz} = \varepsilon = \frac{N}{EA}. \qquad (3\text{-}9)$$

Ta phát biểu: *đạo hàm bậc nhất của chuyển vị dọc trục w sẽ bằng biến dạng dài tỷ đối ε.*

Như thế, chuyển vị được xác định bằng việc giải phương trình vi phân bậc nhất (3-9).

Khi $\varepsilon = \frac{N}{EA}$ = const theo chiều dài đoạn thanh thì $w$ là một hàm bậc nhất.

Hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên, tức là điều kiện của chuyển vị tại đầu đoạn thanh.

Trong một số bài toán, sau khi đã biết biến dạng, có thể tìm được chuyển vị một cách đơn giản bằng cách xét các liên hệ hình học chuyển vị-biến dạng trực tiếp trên hình vẽ. Các ví dụ sau sẽ minh hoạ chi tiết cách giải này.

***Ví dụ 3-1***. Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất trên tiết diện dọc theo trục thanh và tìm chuyển vị các điểm đặt lực $F_1$, $F_2$ của thanh chịu lực cho trên hình 3-5 a. Cho biết:

$F_1 = 10$ kN; $F_2 = 40$ kN; $F_3 = 70$ kN;
$L_1 = 10$ cm; $L_2 = 15$ cm; $L_3 = 20$ cm; $L_4 = 25$ cm; $L_5 = 50$ cm;
$A_1 = 25$ cm$^2$; $A_2 = 20$ cm$^2$; $A_3 = 40$ cm$^2$; $E = 10^4$ kN/cm$^2$.

*Bài giải*- Trước hết, ta vẽ biểu đồ lực dọc theo phương pháp mặt cắt.

Mặt cắt 1-1, nằm trong đoạn $L_1$, (hình 3-5b) có $N_1 = 10$ kN.

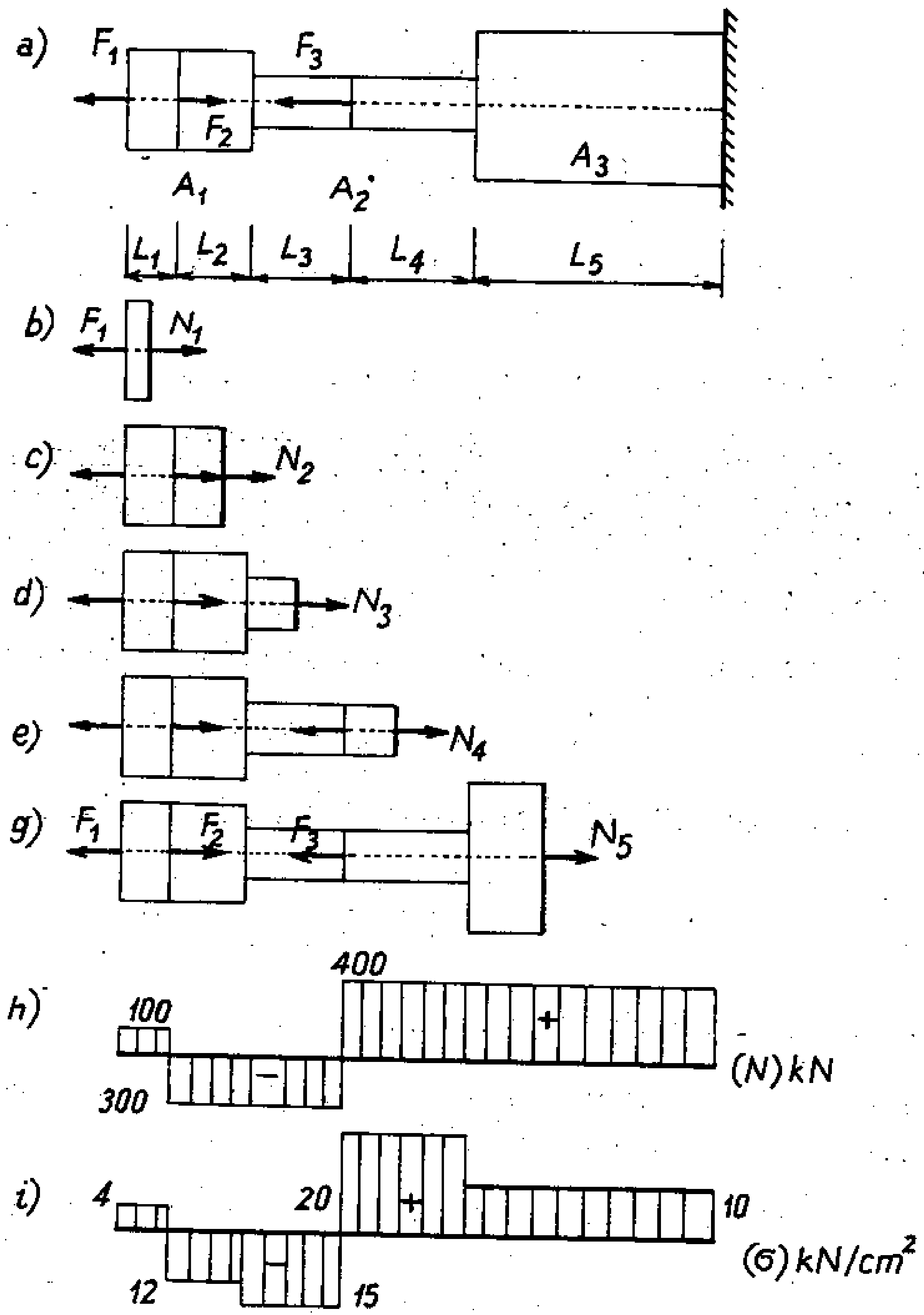
Mặt cắt 2-2, nằm trong đoạn $L_2$, (hình 3-5c) có $N_2 = -30$ kN.

Mặt cắt 3-3, nằm trong đoạn $L_3$, (hình 3-5d) có $N_3 = -30$ kN.

Mặt cắt 4-4, nằm trong đoạn $L_4$, (hình 3-5e) có $N_4 = 40$ kN.

Mặt cắt 5-5, nằm trong đoạn $L_5$, (hình 3-5g) có $N_5 = 40$ kN.

Các ứng lực chỉ phụ thuộc tải trọng mà không phụ thuộc kích thước tiết diện nên ta chỉ cần xét lực dọc của một trong hai mặt cắt 2-2, 3-3 là đủ cho cả hai đoạn $L_2$ và $L_3$. Tương tự, cũng chỉ cần xét một trong hai mặt cắt 4-4, 5-5 là cũng đủ tìm lực dọc cho cả hai đoạn $L_4$ và $L_5$.




*Hình 3-5.* Cho ví dụ 3-1

Biểu đồ lực dọc $N$ được vẽ trên hình 3-5h, đơn vị ghi theo kN.

Ứng suất trên tiết diện, theo công thức (3-1), trong từng đoạn sẽ là

đoạn $L_1$: $\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{100}{25} = 4$ kN/cm$^2$;

đoạn $L_2$: $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-300}{25} = -12$ kN/cm$^2$;

đoạn $L_3$: $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-300}{20} = 15$ kN/cm$^2$;

đoạn $L_4$: $\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{400}{20} = 20$ kN/cm$^2$;

đoạn $L_5$: $\sigma_5 = \frac{N_5}{A_3} = \frac{400}{40} = 10$ kN/cm$^2$.

Biểu đồ ứng suất pháp dọc theo trục thanh được vẽ trên hình 3-5i (theo đơn vị kN/cm$^2$).

Biến dạng dài của thanh được tính theo công thức (3-6):

$$\Delta L = \sum_i \left(\frac{NL}{EA}\right)_i = \frac{100.10}{10^4.25} + \frac{-300.15}{10^4.25} + \frac{-300.20}{10^4.20} + \frac{400.25}{10^4.20} + \frac{400.50}{10^4.40} =$$

$$= 0{,}056 \text{ cm.}$$

Chuyển vị của điểm đặt lực $F_1$ bằng độ dãn dài của thanh, vậy $w_1 = 0{,}056$ cm.

Điểm đặt lực $F_1$ di chuyển sang trái một đoạn $0{,}056$ cm.

Chuyển vị của điểm đặt lực $F_3$ bằng tổng độ dãn dài của hai đoạn $L_4$ và $L_5$.

$$w_3 = \Delta L_4 + \Delta L_5 = \frac{400.25}{10^4.20} + \frac{400.50}{10^4.40} = 0{,}1 \text{ cm.}$$

Điểm đặt lực $F_3$ di chuyển sang trái một đoạn $0{,}1$ cm.

***Ví du 3-2***. Vẽ biểu đồ chuyển vị tại các tiết diện của thanh cho trên hình 3-6a. Cho biết $F, a, EA, L$ và bỏ qua trọng lượng bản thân.

*Bài giải*. Bằng phương pháp mặt cắt, ta có: với $0 \le z \le a$, $N_1 = 0;$

$a \le z \le 2a,$ $N_2 = -F.$

Trong đoạn 1, phương trình của chuyển vị là

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{N_1}{EA} = 0 \rightarrow w_1 = C_1.$$

Trong đoạn 2, phương trình của chuyển vị là

$$\frac{dw_2}{dz} = \frac{N_2}{EA} = -\frac{F}{EA} \rightarrow w_2 = -\frac{F}{EA}z + C_2.$$

$C_1$, $C_2$ là hai hằng số tích phân, tìm theo điều kiện biên.

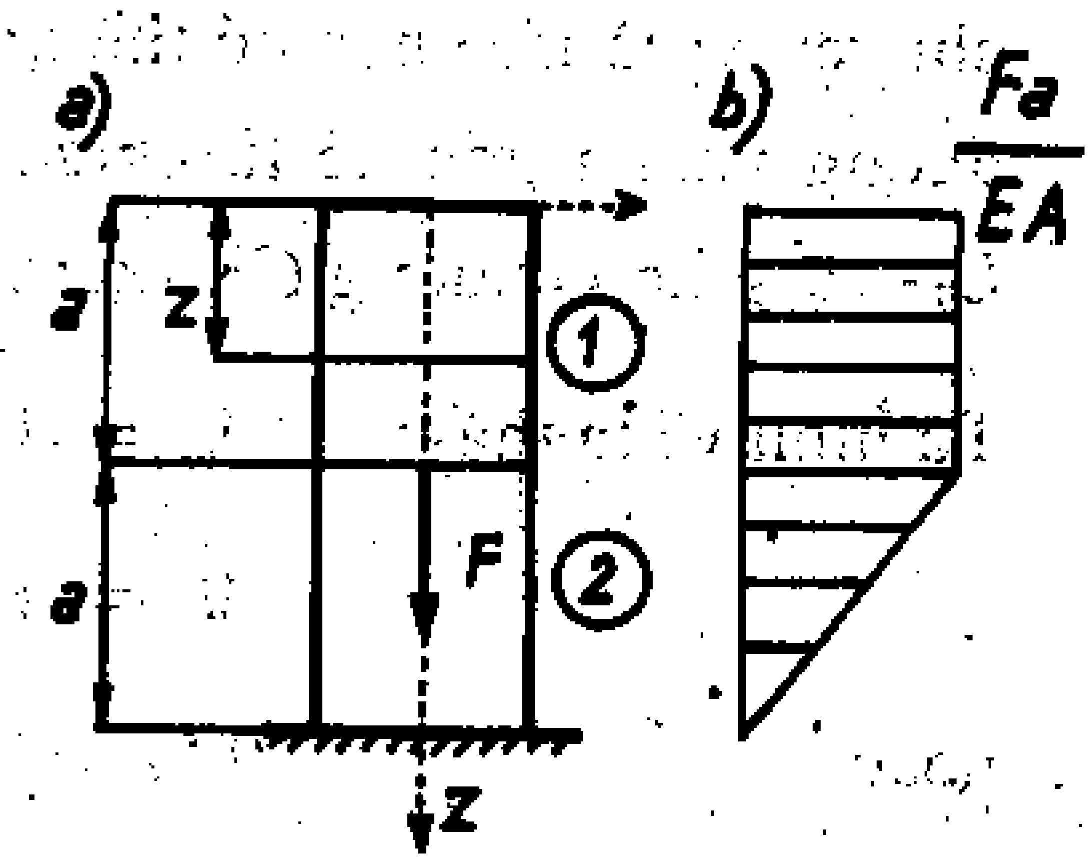
Tại $z = 2a$, $w_2 = 0 \rightarrow C_2 = \dfrac{2Fa}{EA}$

do đó $\quad w_2 = \dfrac{F}{EA}(2a - z).$

Tại $z = a$, $w_1 = w_2 \rightarrow C_1 = \dfrac{Fa}{EA}$

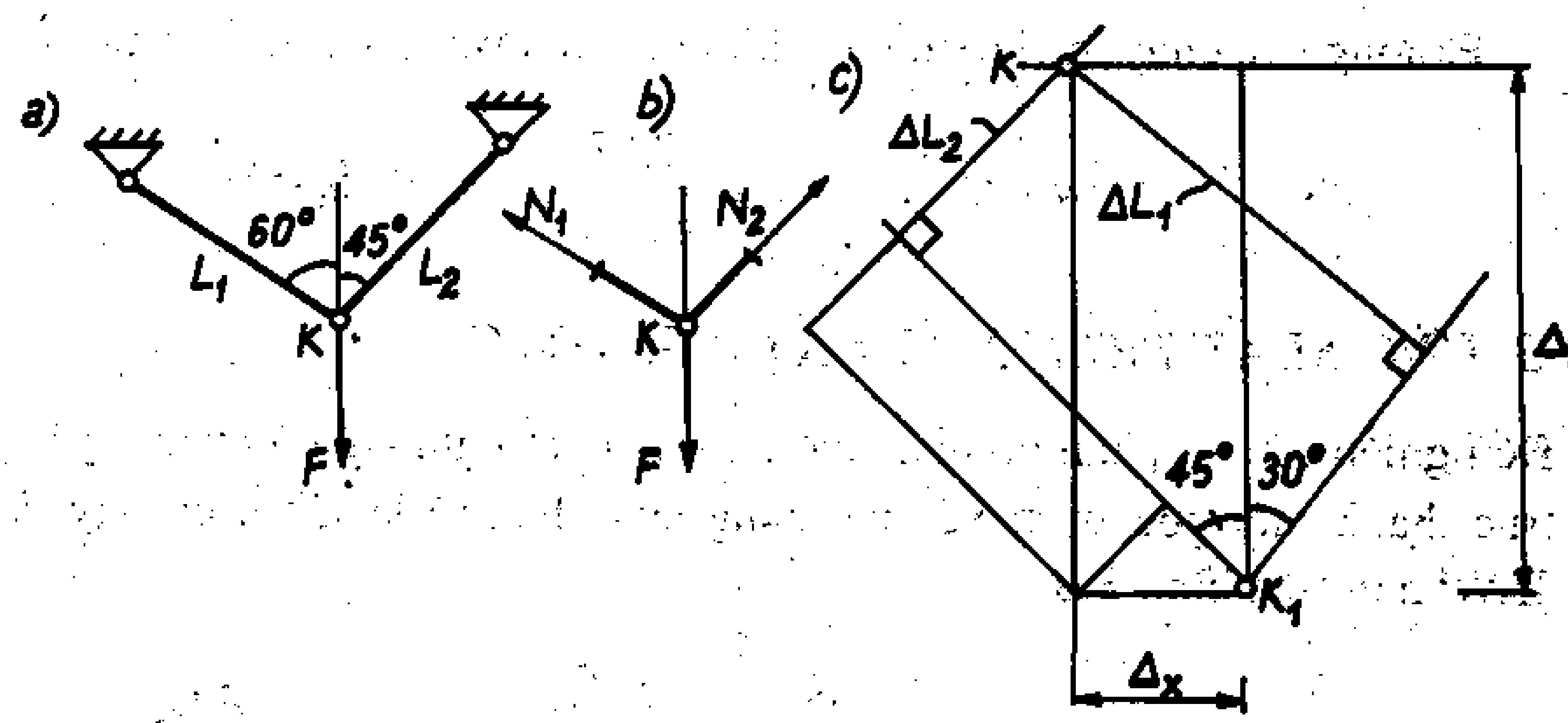
do đó $\quad w_1 = \dfrac{Fa}{EA}.$

Biểu đồ chuyển vị trong đoạn 1 là đường hằng số, trong đoạn 2 là đường bậc nhất như trên hình 3-6b.



*Hình 3-6.* Cho ví dụ 3-2

***Ví dụ 3-3***. Xác định chuyển vị tại khớp $K$ của hệ có hai thanh trên hình 3-7a. Cho biết diện tích tiết diện của hai thanh là $A=5$ cm²; $E=10^4$ kN/cm²; $L_1=1$ m; $L_2= 2$ m; $F=30$ kN.



*Hình 3-7.* Cho ví dụ 3-3

***Bài giải***. Xét cân bằng của khớp $K$, theo hai phương trình cân bằng hình chiếu các lực như trên hình 3-7b:

$$-N_1 \sin 60^o + N_2 \sin 45^o = 0 \; ; \quad N_1 \cos 60^o + N_2 \cos 45^o - F = 0 \, .$$

ta có: $\quad N_1 = 21{,}96$ kN ; $N_2 = 26{,}89$ kN.

Biến dạng dài của các thanh:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1} = \frac{21{,}96.100}{10^4.5} = 4{,}4.10^{-2} \text{ cm.}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA_2} = \frac{26{,}89.200}{10^4.5} = 10{,}76.10^{-2} \text{ cm.}$$

Vị trí sau biến dạng của khớp $K$ sẽ là giao điểm của cung tròn tâm $B$ bán kính $L_1+\Delta L_1$ và cung tròn tâm $C$ bán kính $L_2+\Delta L_2$. Tuy nhiên, các biến dạng và chuyển vị là nhỏ nên có thể xác định vị trí khớp $K$ như là giao điểm của hai đường vuông góc kẻ từ chiều dài $L_1+\Delta L_1$ theo phương $BK$ và từ chiều dài $L_2+\Delta L_2$ theo phương $CK$ (xem hình 3-7).

Từ hình vẽ ta thấy: $\Delta L_1 = \Delta_y sin30^o + \Delta_x cos30^o;$

$\Delta L_2 = \Delta_y sin45^o - \Delta_x cos45^o,$

hoặc: $0,5\Delta_y + 0,866\Delta_x = 4,4.10^{-2}$ cm;

$0,707\Delta_y - 0,707\Delta_x = 10.76.10^{-2}$ cm.

Sau khi giải hệ phương trình, ta được: $\Delta_x = -2,36.10^{-2}$ cm; $\Delta_y = 12,87.10^{-2}$ cm.

Chuyển vị toàn phần của khớp $K$ là $\Delta_K = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = 13,08.10^{-2}$ cm.

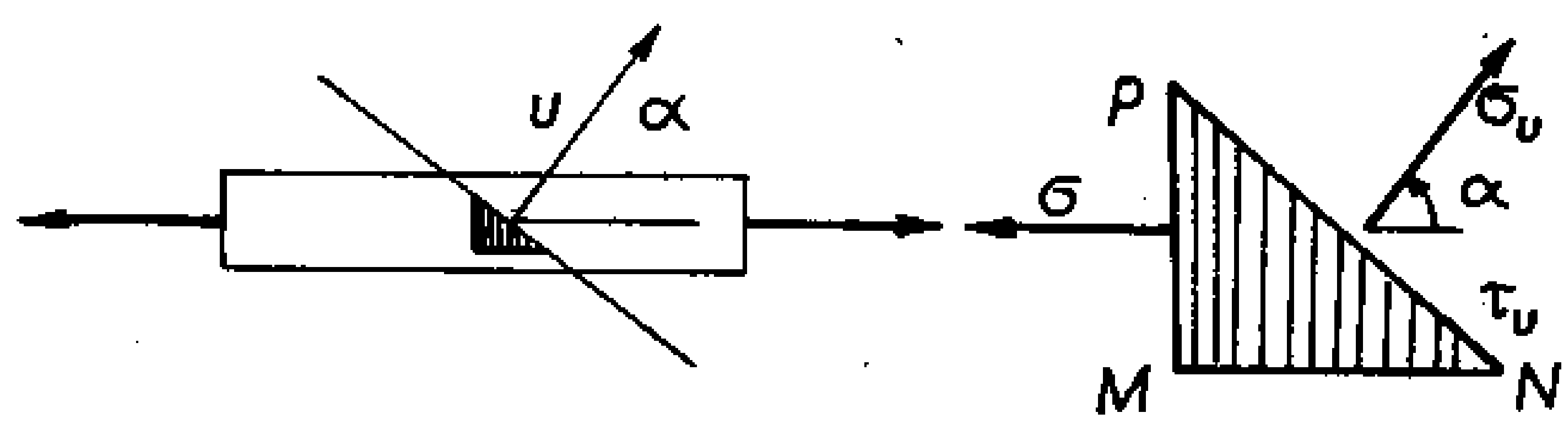
Phương của chuyển vị toàn phần hợp với phương nằm ngang $x$ một góc:

$$\varphi = arctg\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = arctg\frac{12,87}{-2,36} = arctg(-5,45).$$

## 3-3. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT NGHIÊNG

Để nghiên cứu sự phân bố ứng suất trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến $u$ hợp với trục thanh một góc $\alpha$, ta xét cân bằng của phân tố lăng trụ có đáy là tam giác $MNP$ như trên hình 3-8.

*Hình 3-8.* Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng




* Trên mặt $PM$ thuộc tiết diện chỉ có ứng suất pháp $\sigma$ tính theo công thức (3-1) đã biết.

* Trên mặt $MN$ song song với trục thanh không có ứng suất pháp (theo giả thiết về sự không tác dụng tương hỗ giữa các lớp vật liệu dọc trục), đồng thời cũng không có ứng suất tiếp (vì các góc vuông không thay đổi).

* Trên mặt nghiêng $PN$ có cả ứng suất pháp, ký hiệu $\sigma_\alpha$, và ứng suất tiếp, ký hiệu $\tau_\alpha$. Ứng suất pháp mang dấu dương khi hướng ra ngoài mặt cắt, ứng suất

tiếp mang dấu dương khi chiều ứng suất đi vòng quanh phân tố đang xét theo chiều kim đồng hồ.

Trên hình 3-8, các ứng suất được vẽ theo chiều dương.

$$\Sigma U = 0 \rightarrow \sigma_\alpha dA_{PN} - \sigma dA_{MP} \cos\alpha = 0;$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow \tau_\alpha dA_{PN} - \sigma dA_{MP} \sin\alpha = 0.$$

Thay $\cos\alpha = \dfrac{PM}{PN} = \dfrac{dA_{MP}}{dA_{PN}}$ ta được:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha\,; \tag{3-10}$$

$$\tau_\alpha = \sigma \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\,. \tag{3-11}$$

Ta có thể nêu những nhận xét sau:

- Trên tiết diện ứng suất pháp $\sigma$ phân bố đều, do đó trên mặt cắt nghiêng ứng suất pháp $\sigma_\alpha$ và ứng suất tiếp $\tau_\alpha$ cũng phân bố đều.
- Cực trị của ứng suất pháp ứng với góc $\alpha = 0$ nên ứng suất pháp trên tiết diện $\sigma = N/A$ là ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đang xét.
- Cực trị của ứng suất tiếp ứng với góc $\alpha = 45^o$ nên ứng suất tiếp trên mặt nghiêng $45^o$ so với trục thanh, đạt cực trị

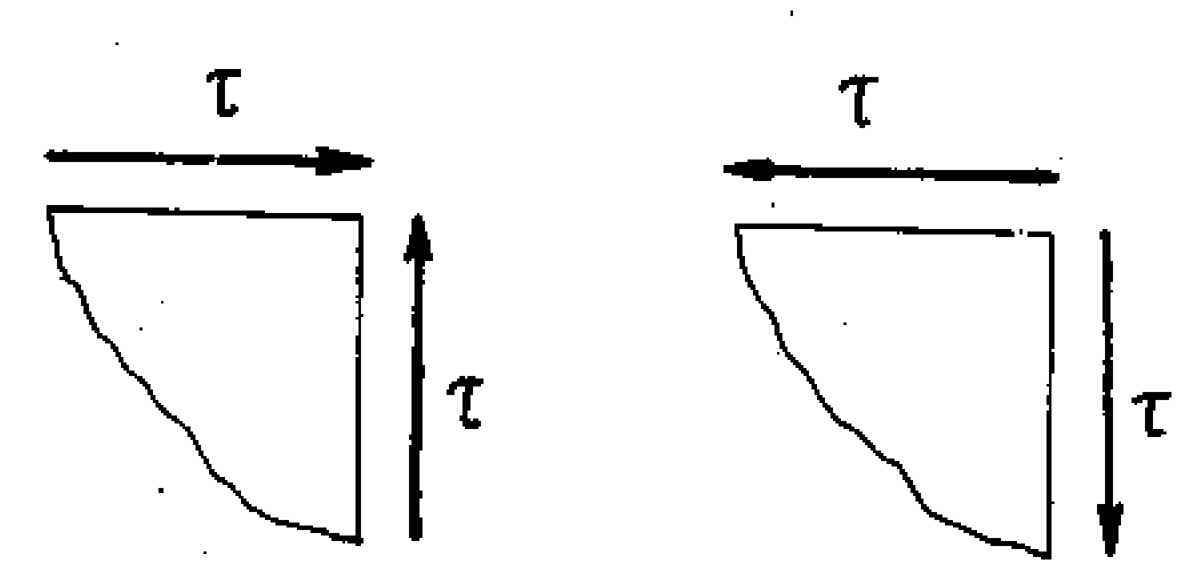
$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{\sigma}{2}\,. \tag{3-12}$$

- Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

Ứng suất tiếp trên mặt có pháp tuyến hợp với trục thanh một góc $\alpha + 90^o$, theo công thức (3-11) là:

$$\tau_{\alpha+90^o} = \frac{\sigma}{2}\sin 2(\alpha + 90^o) = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha = -\tau_\alpha\,. \tag{3-13}$$

Ứng suất tiếp trên hai mặt vuông góc với nhau có giá trị bằng nhau và có hướng đi quanh phân tố theo hai chiều ngược nhau. Nhận xét này được tổng quát hóa thành định luật đối ứng của ứng suất tiếp và được phát biểu như sau:




*Hình 3-9.* Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

*Trên hai mặt cắt phân tố vuông góc với nhau thì thành phần ứng suất tiếp* *vuông góc với giao tuyến chung sẽ bằng nhau, cùng đi vào hoặc cùng đi xa khỏi giao tuyến chung đó.*

Định luật được minh họa trên hình 3-9.

## 3-4. THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

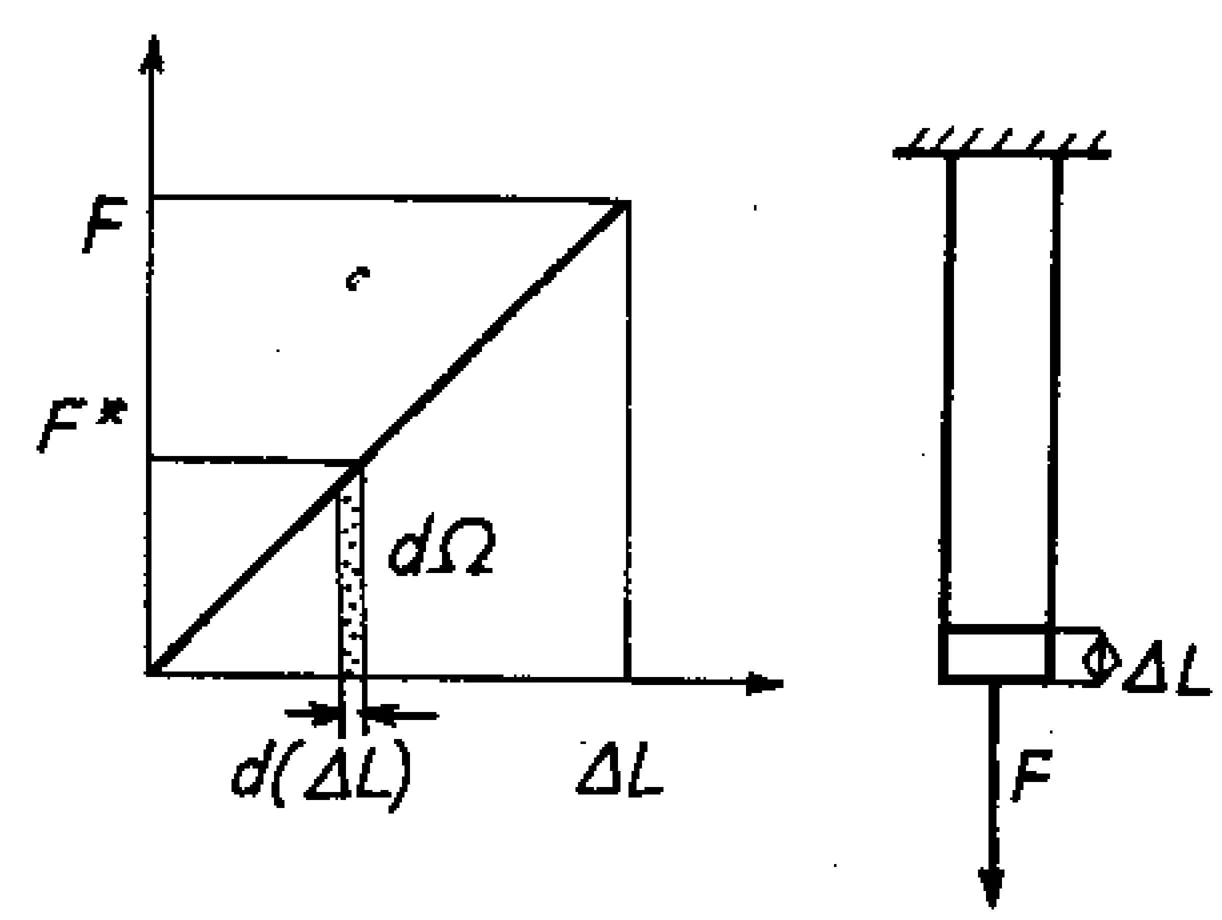
### 3-4-1 Định nghĩa

Khi chịu tác động của ngoại lực, vật thể sẽ biến dạng. Điểm đặt các lực có di chuyển, ngoại lực sản sinh một công, ký hiệu $\mathcal{A}$. Công $\mathcal{A}$ của ngoại lực chính là năng lượng làm vật thể biến dạng. Khi bỏ ngoại lực, vật thể sẽ khôi phục lại hình dạng ban đầu nếu vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Năng lượng làm vật thể trở lại hình dáng ban đầu, là năng lượng tích luỹ bên trong vật thể trong quá trình biến dạng, được gọi là thế năng biến dạng đàn hồi (TNBDĐH), ký hiệu $\boldsymbol{U}$. Bỏ qua nhiệt năng, theo định luật bảo toàn năng lượng của quá trình thuận, nghịch này, ta có:

$$\mathcal{A} = \boldsymbol{U}\,. \qquad (3\text{-}14)$$

Xét thanh thẳng chịu kéo bởi lực đúng tâm $F$, lực dọc trong thanh $N = F$, chuyển vị của điểm đặt lực sẽ bằng biến dạng dài của thanh $\Delta L$.

Đồ thị quan hệ giữa $F$ và $\Delta L$ là đường bậc nhất như trên hình 3-10. Lực không phải là hằng trong quá trình di chuyển của điểm đặt lực, nhưng trong một di chuyển vô cùng bé $d(\Delta L)$ thì giá trị lực tương ứng $F^*$ được coi là không đổi, do đó vi phân của công trên di chuyển này là




$$d\mathcal{A} = F^*.\,d(\Delta L) = d\Omega$$

*Hình 3-10.* Xác định TNBDĐH

với $d\Omega$ là vi phân diện tích như trên hình 3-10.

Công $\mathcal{A}$ của lực $F$ trên toàn bộ di chuyển $\Delta L$ được tính bằng tổng các vi phân của công:

$$\mathcal{A} = \int_{\Delta L} d\mathcal{A} = \int_{\Omega} d\Omega = \Omega = \frac{F.\Delta L}{2} = \frac{N.\Delta L}{2}.$$

Biểu thức trên là công thức của lực tác dụng trên các chuyển vị đàn hồi, bằng một nửa tích giữa trị số cuối cùng của lực với trị số cuối cùng của chuyển vị.

Theo định nghĩa (3-14), suy ra

$$\boldsymbol{U} = \mathcal{A} = \frac{F.\Delta L}{2} = \frac{N.\Delta L}{2}. \qquad (3\text{-}15)$$

### *3-4-2. TNBDĐH riêng*

TNBDĐH riêng là TNBDĐH trong một đơn vị thể tích của vật thể, ký hiệu $\boldsymbol{u}$. Trong trường hợp thanh chịu kéo hoặc nén có thể tích là $AL$, ta có:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{U}}{AL} = \frac{1}{2}.\frac{N}{A}.\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \qquad (3\text{-}16)$$

Như vậy, *TNBDĐH riêng bằng một nửa tích giữa trị số cuối cùng của ứng suất với trị số cuối cùng của biến dạng dài tỷ đối.*

TNBDĐH của toàn bộ vật thể

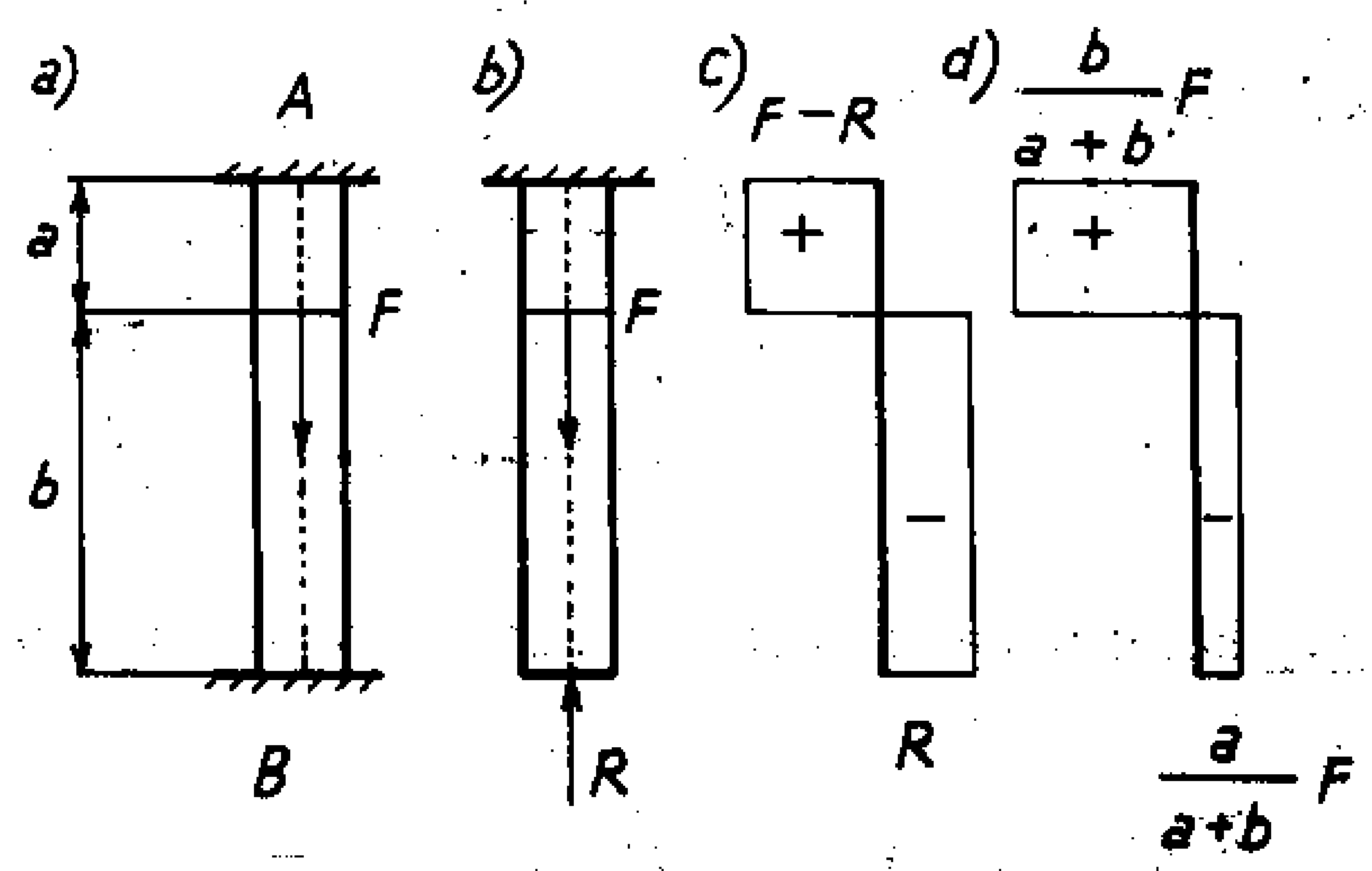
$$\boldsymbol{U} = \int_V \boldsymbol{u}\, dV = \int_V \frac{1}{2}\sigma\,\varepsilon\, dV. \qquad (3\text{-}17)$$

## *3-5. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH*

Trong bài toán siêu tĩnh, khi số liên kết của thanh nhiều hơn số lượng liên kết cần thiết đủ để cố định vị trí của thanh, thì số các phương trình cân bằng tĩnh học không đủ để xác định tất cả các nội lực trong hệ, số lượng các phương trình còn thiếu được gọi là bậc siêu tĩnh. Để giải được bài toán siêu tĩnh, cần bổ sung thêm những phương trình mô tả điều kiện biến dạng của hệ, gọi là những phương trình biến dạng. Ta sẽ xem xét cách giải qua những ví dụ trình bày dưới đây.

*Ví dụ 3-4*. Vẽ biểu đồ lực dọc cho thanh thẳng $AB$ có tiết diện không đổi, bị ngàm chặt tại hai đầu và chịu lực đúng tâm $F$ tại tiết diện $C$ như trên hình 3-11a.

*Hình 3-11.* Cho ví dụ 3-4




*Bài giải*. Để cố định vị trí thanh, chỉ cần liên kết ngàm tại một đầu thanh là đủ, chẳng hạn tại đầu phía trên $A$. Liên kết ngàm thứ hai là thừa, bài toán trở thành siêu tĩnh. Để bài toán trở thành tĩnh định, ta giải phóng liên kết ngàm ở đầu phía dưới $B$ và thay bằng phản lực $R$ có chiều giả thiết như trên hình 3-11b.

Bằng phương pháp mặt cắt, ta dễ dàng xác định được lực dọc trong đoạn $AC$ là $N_1 = F - R$; trong đoạn $BC$ là $N_2 = -R$ (hình 3-11c).

Theo điều kiện liên kết tại hai đầu thanh thì biến dạng dài của thanh phải bằng không, phương trình biến dạng là $\Delta L = 0$. Khai triển phương trình này ta có:

$$\Delta L = \sum\left(\frac{NL}{EA}\right)_i = \frac{N_1L_1}{EA} + \frac{N_2L_2}{EA} = \frac{(F-R)a}{EA} + \frac{-Rb}{EA} = 0.$$

Suy ra:
$$R = \frac{a}{a+b}F,$$

dấu dương của kết quả chứng tỏ chiều phản lực $R$ đúng như đã giả thiết.

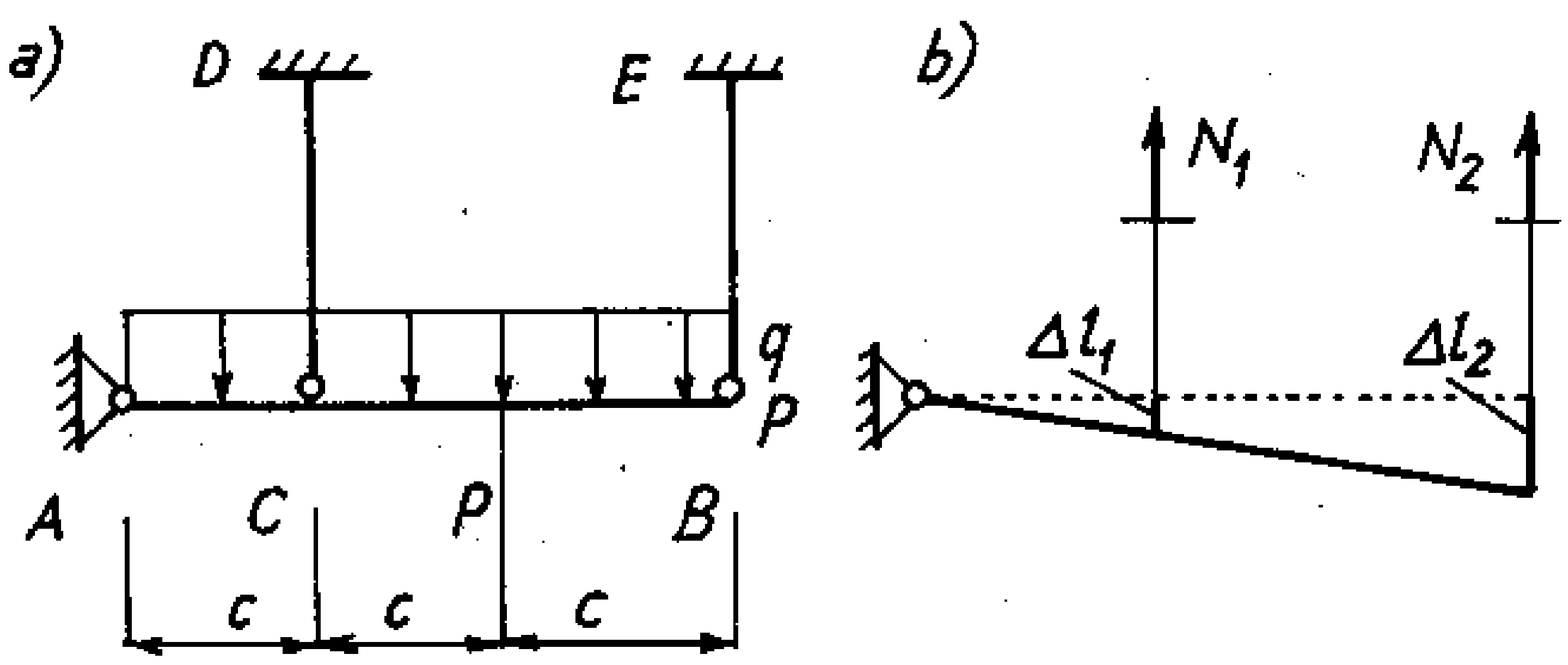
Thay giá trị của $R$ vào biểu thức lực dọc trong từng đoạn ta được:

$$N_1 = \frac{b}{a+b}F; \qquad N_2 = -\frac{a}{a+b}F.$$

Biểu đồ lực dọc cần tìm vẽ trên hình 3-11d.

<u>*Ví dụ 3-5.*</u> Xác định chuyển vị tại điểm $P$ trên trục thanh tuyệt đối cứng $AB$ chịu lực phân bố đều với cường độ $q$, thanh được treo bởi hai dây $CD$, $BE$ như trên hình 3-12a. Thanh $CD$, $BE$ cùng vật liệu có môđun đàn hồi $E$, cùng chiều dài $l$ và cùng diện tích tiết diện $A$.

*Hình 3-12.* Cho ví dụ 3-5




<u>*Bài giải.*</u> Bằng phương pháp mặt cắt, ta có phương trình cân bằng mômen đối với điểm $A$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N_1c + N_2 3c - q3c\frac{3c}{2} = 0 \rightarrow N_1 + 3N_2 = 4{,}5qc. \qquad \text{(a)}$$

Sau biến dạng, thanh $CD$ có độ dãn dài $\Delta L_1$, thanh $BE$ có độ dãn dài $\Delta L_2$, thanh nằm ngang $AB$ vẫn thẳng. Trên hình 3-12b, theo tỷ lệ, ta có $\Delta L_2 = 3\Delta L_1$ hoặc

$$\frac{N_2 L_2}{EA} = 3\frac{N_1 L_1}{EA} \rightarrow N_2 = 3N_1. \qquad \text{(b)}$$

Kết hợp (a) và (b) ta tìm được: $N_1 = 0{,}45qc$ ; $N_2 = 1{,}35qc$.

Chuyển vị của điểm $P$, nằm ở trung điểm của đoạn $CB$, sẽ bằng:

$$\Delta_P = \frac{1}{2}(\Delta L_1 + \Delta L_2) = 2\Delta L_1 = 2\frac{N_1 L_1}{EA} = 0{,}9\frac{qcl}{EA}.$$

## *3-6. CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU*

### *3-6-1. Nhận xét chung*

Để đánh giá được độ bền của thanh hoặc hệ kết cấu, ta cần tìm hiểu cách ứng xử của vật liệu trong quá trình chịu lực và trên cơ sở đó đề ra các tiêu chuẩn, định lượng các điều kiện đảm bảo sự làm việc bình thường, an toàn của kết cấu. Yêu cầu thứ nhất được thực hiện thông qua việc thí nghiệm xác định các chỉ tiêu cơ học, gọi là các *đặc trưng cơ học của vật liệu*, được trình bày trong mục này. Yêu cầu thứ hai phụ thuộc vào chủ quan, quan điểm của người nghiên cứu, người sử dụng công trình, được quy định theo các tiêu chuẩn, quy phạm nhà nước sẽ được giới thiệu trong mục 3-8.

Môn học SBVL, như đã nói trong chương 1, nghiên cứu những mô hình vật liệu quy ước, nên để tìm được các đặc trưng chịu lực của vật liệu, trước hết ta hãy tiến hành phân loại vật liệu thực. Một cách khái quát, vật liệu có thể chia thành hai nhóm: nhóm vật liệu dẻo và nhóm vật liệu giòn.

*Vật liệu dẻo* là loại vật liệu khi bị phá hoại thì có biến dạng lớn, quan sát được bằng mắt trong điều kiện bình thường, chẳng hạn như thép, đồng, gỗ, chất dẻo...

*Vật liệu giòn* là loại vật liệu khi bị phá hoại thì có biến dạng nhỏ, không quan sát được bằng mắt trong điều kiện bình thường, chẳng hạn như gạch, bêtông, gang...

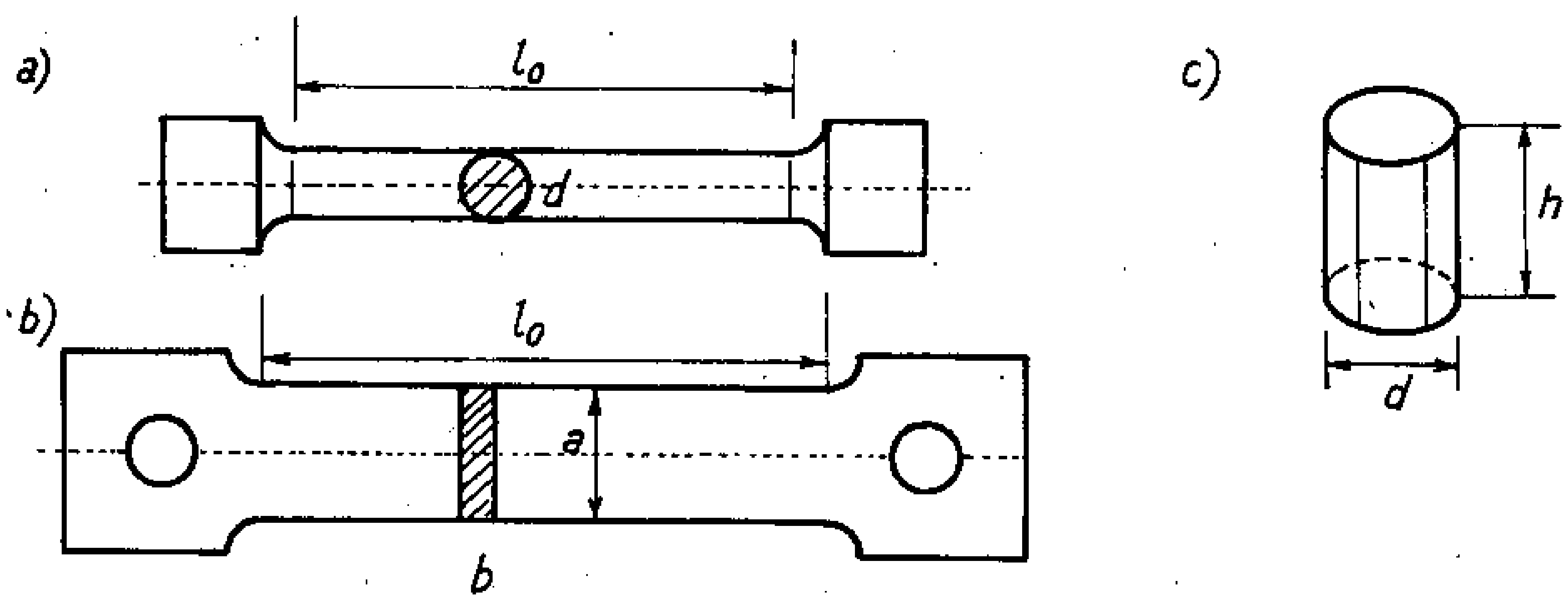
Tất nhiên, phân loại này chỉ mang tính tương đối, quy ước. Trong những điều kiện không bình thường vật liệu dẻo có thể trở thành vật liệu giòn, chẳng hạn ở nhiệt độ rất thấp thì một thanh làm từ chất dẻo cũng bị kéo đứt mà ta không kịp nhận thấy được sự dãn dài của thanh.

Những thí nghiệm đặc trưng, tương đối đơn giản, khả thi và phổ biến là các thí nghiệm kéo, nén các mẫu vật liệu hình thanh. Máy thí nghiệm có thể là máy đa năng, máy chuyên dụng kéo, nén. Bộ phận tạo lực có thể là hệ thống cơ học hoặc hệ thống thuỷ lực. Trên máy có thiết bị tự động ghi lại được đồ thị quan hệ giữa lực kéo $F$ và biến dạng dài của thanh. Những máy thí nghiệm thế hệ mới còn được trang bị máy tính có khả năng điều khiển tự động quá trình thí nghiệm, từ việc cho máy vận hành đến việc thu nhận, xử lý kết quả, vẽ đồ thị của cả quá trình hoặc chỉ của một giai đoạn thí nghiệm. Hầu hết trong các máy thí nghiệm, trục của thanh mẫu và lực tác dụng đều theo phương thẳng đứng.

### *3-6-2. Mẫu thí nghiệm*

Thông thường, ta hay dùng mẫu thép ít cácbon đại diện cho nhóm vật liệu dẻo; mẫu thép nhiều cácbon (hàm lượng cácbon lớn hơn 2%), chẳng hạn gang xám, đại diện cho nhóm vật liệu giòn; trong xây dựng cũng có thể dùng mẫu bêtông làm đại diện cho nhóm vật liệu giòn. Vật liệu làm mẫu đại diện của nhóm tuy có thể khác nhau nhưng các kết quả thí nghiệm đều mang những nét đặc trưng chung của nhóm.

♦ ***Mẫu thép, gang chịu kéo*** là những thanh hình trụ tròn, tiết diện có đường kính ban đầu $d$ (hình 3-13a) với chiều dài chuẩn ban đầu $l_0$ được quy định chung là $l_0 = 10d$ cho mẫu dài, $l_0 = 5d$ cho mẫu ngắn, hoặc là những thanh lăng trụ tiết diện chữ nhật (hình 3-13b) diện tích ban đầu $A_0$ với tỷ số cạnh dài trên cạnh ngắn $a/b$ nằm trong phạm vi từ $1$ tới $5$, chiều dài chuẩn ban đầu theo quy định chung là $l_o = 11,3\sqrt{A_o}$ cho mẫu dài và $l_o = 5,65\sqrt{A_o}$ cho mẫu ngắn. Việc quy định các tỷ lệ hình học trên cho phép ta có thể so sánh một cách thống nhất các kết quả nhận được từ các phòng thí nghiệm khác nhau.

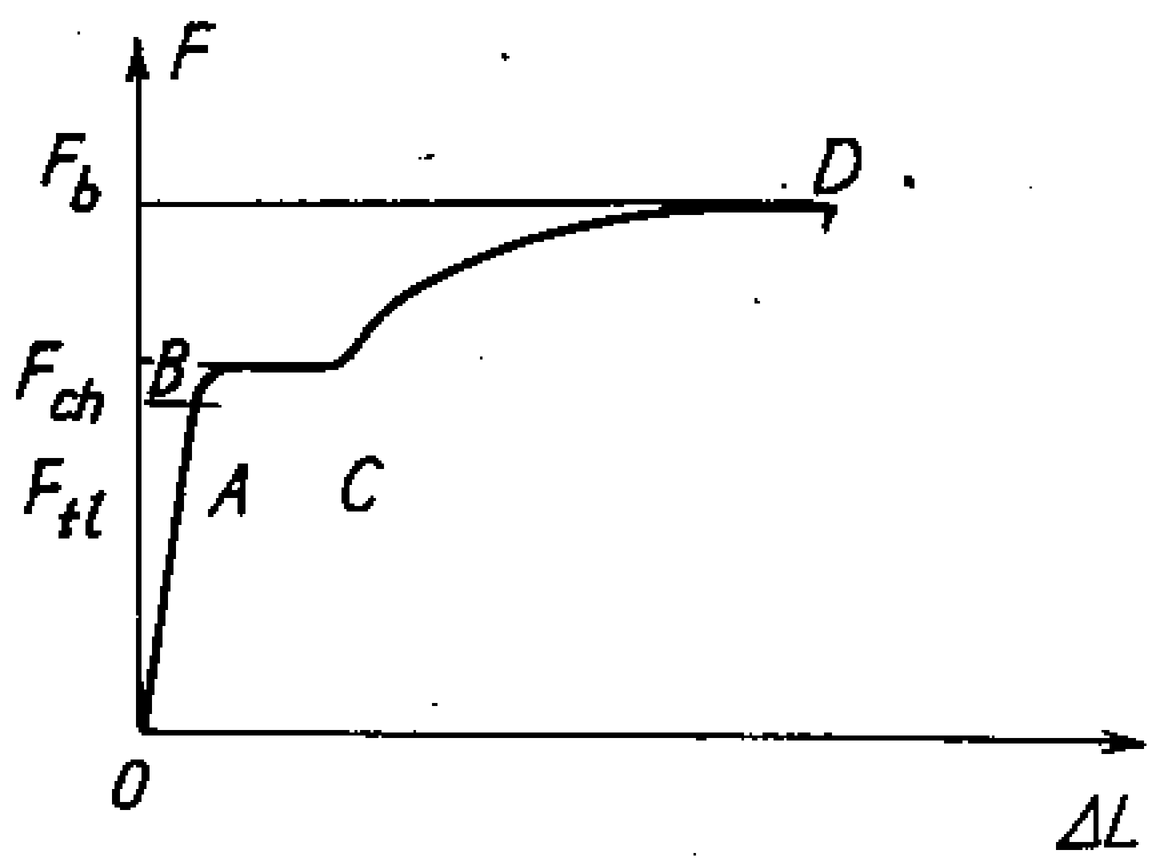



*Hình 3-13.* Hình dạng mẫu thí nghiệm

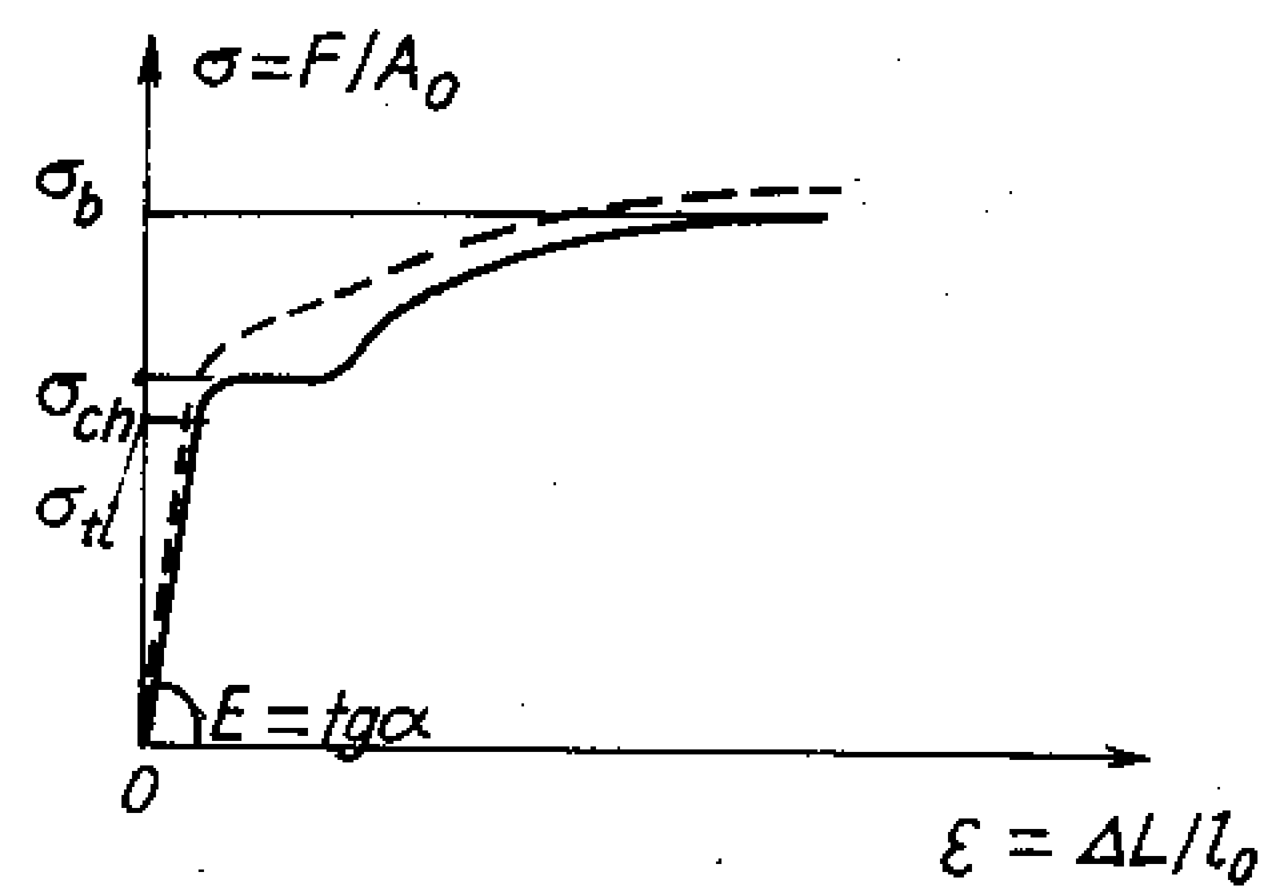
♦ ***Mẫu thép, gang chịu nén*** cũng là những thanh hình trụ tròn nhưng ngắn để đảm bảo thanh mẫu ổn định, trục thanh không bị cong trong quá trình thí nghiệm nén (hình 3-13c). Chiều cao $h_0$ lớn hơn nhưng không vượt quá ba lần đường kính ban đầu $d$. Mẫu bêtông chịu nén thường là những khối lập phương có kích thước cạnh là *15*cm, *20*cm hoặc hình trụ ngắn có đường kính tiết diện *10* cm.

### *3-6-3 Đồ thị thí nghiệm và đặc trưng cơ học khi kéo của vật liệu dẻo*

Đồ thị quan hệ lực-biến dạng dài của mẫu được trình bày trên hình 3-14 gồm ba giai đoạn:




*Hình 3-14.* Biểu đồ kéo mẫu VL dẻo




*Hình 3-15.* Biểu đồ quy ước $\sigma \div \varepsilon$ khi kéo VL dẻo

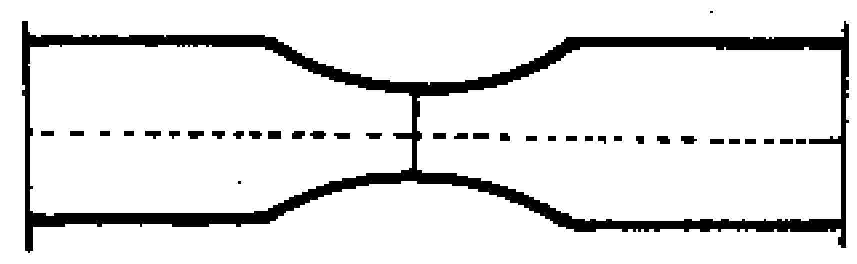
* *Giai đoạn tỷ lệ OA*. Đồ thị là đường thẳng, quan hệ $F$-$\Delta L$ là bậc nhất tuân theo định luật Hooke. Giai đoạn này kết thúc tại điểm *A*, tương ứng với giá trị lực kéo là $F_{tl}$. Tỉ số giữa lực kéo tỷ lệ $F_{tl}$ và diện tích ban đầu của tiết diện $A_o$ được gọi là giới hạn tỷ lệ $\sigma_{tl} = \dfrac{F_{tl}}{A_o}$. Biến dạng của thanh trong giai đoạn này nói chung rất nhỏ.

* *Giai đoạn chảy BC*. Sau một đoạn cong chuyển *AB* rất ngắn và có dạng khác nhau đối với các mẫu thí nghiệm, đồ thị nằm ngang. Lực tương ứng, ký hiệu $F_{ch}$ không tăng nhưng biến dạng vẫn tăng, ở giai đoạn này vật liệu không có khả năng tiếp nhận thêm tải trọng. Ta gọi tỷ số giữa $F_{ch}$ và diện tích $A_o$ là giới hạn chảy, ký hiệu $\sigma_{ch} = \dfrac{F_{ch}}{A_o}$. Độ dài của thềm chảy cũng khác nhau đối với từng loại vật liệu nhưng thường lớn hơn biến dạng trong giai đoạn tỷ lệ.

* *Giai đoạn củng cố CD*. Quan hệ $F$-$\Delta L$ là đường cong có độ dốc giảm dần. Lực tăng, thanh dài thêm, các tiết diện nhỏ dần lại. Khi lực đạt tới trị số $F_b$, tương ứng với điểm *D* trên đồ thị, xuất hiện một (đôi khi hai) tiết diện giảm yếu nhất bị thắt nhỏ lại đột ngột. Ứng suất tại tiết diện "cổ thắt" này tăng nhanh, tốc độ tăng lực của máy tăng không kịp với tốc độ biến dạng, đồ thị đi xuống và mẫu đứt.

Tiết diện đứt có dạng trên hình 3-16. Ta gọi tỷ số giữa $F_b$ và diện tích $A_o$ là giới hạn bền, ký hiệu $\sigma_b = \dfrac{F_b}{A_o}$.

*Hình 3-16.* Dạng đứt "cổ thắt "của mẫu thép khi kéo



* *Đồ thị quy ước ứng suất-biến dạng.* Để có các kết quả không phụ thuộc vào kích thước mẫu, trên đồ thị quan hệ lực-biến dạng ta chia các tung độ cho diện tích tiết diện ban đầu $A_o$, chia các hoành độ cho chiều dài ban đầu của mẫu $l_o$, ta nhận được kết quả là một đồ thị giữa ứng suất quy ước $\sigma = \dfrac{F}{A_o}$ và biến dạng tỷ đối quy ước $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{l_o}$ như trên hình 3-15. Đồ thị ứng suất-biến dạng thực khi tính đến sự thay đổi của tiết diện và của chiều dài thanh có dạng đường nét đứt trên hình vẽ 3-15.

Ba trị số giới hạn $\sigma_{tl}$, $\sigma_{ch}$, $\sigma_b$ là ba đặc trưng cơ học của vật liệu dẻo khi chịu kéo. Mô đun đàn hồi $E$ có thể tính như là hệ số góc của giai đoạn tỷ lệ $E = tg\alpha$.

Đặc trưng biến dạng của mẫu được xác định qua các trị số:

- độ biến dạng dài tỷ đối phần trăm $\delta = \dfrac{l_1 - l_o}{l_o} 100\ \%$;
- độ thắt tỷ đối phần trăm $\psi = \dfrac{A_1 - A_o}{A_o} 100\ \%$,

trong đó:

$l_o$, $A_o$ - chiều dài ban đầu của mẫu và diện tích ban đầu của tiết diện;

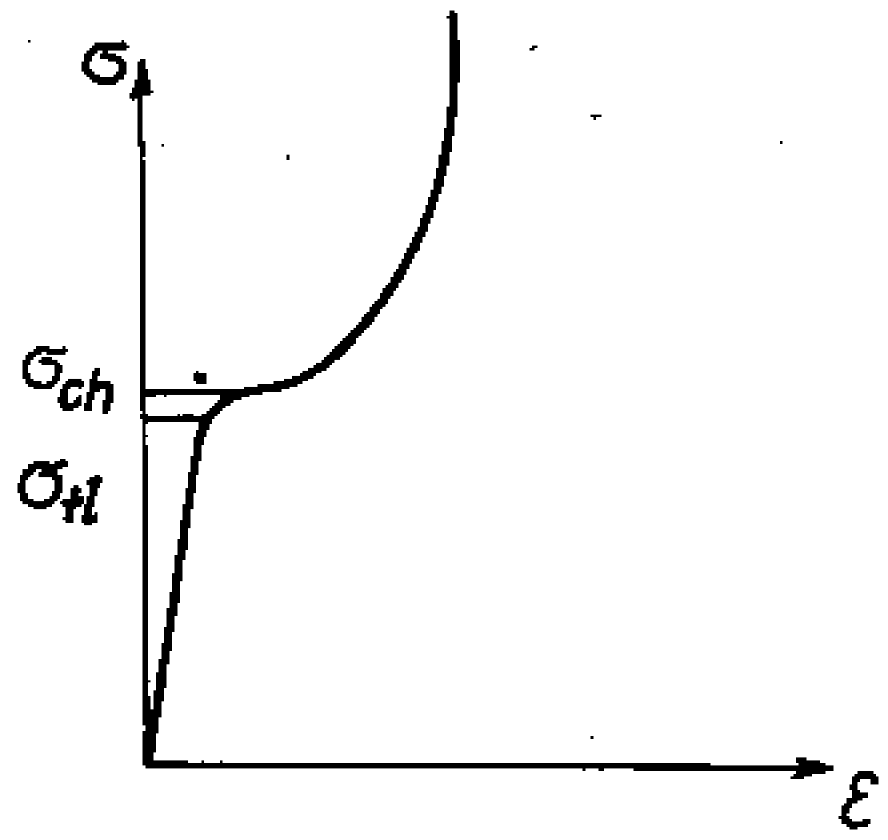
$l_1$ - chiều dài mẫu được chắp lại sau khi mẫu đứt;

$A_1$ - diện tích tiết diện đứt (diện tích thắt).

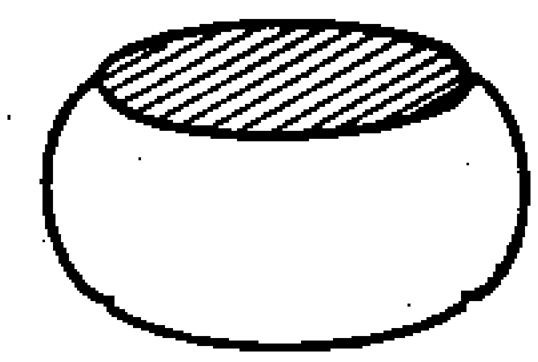
Hai trị số $\delta$, $\psi$ đặc trưng cho tính dẻo của vật liệu, trị số này càng lớn thì khả năng biến dạng của vật liệu càng nhiều.

### 3-6-4. Đồ thị thí nghiệm và đặc trưng cơ học khi nén của vật liệu dẻo

Đồ thị quy ước ứng suất-biến dạng của mẫu được trình bày trên hình 3-17 cũng gồm ba giai đoạn như đồ thị khi kéo, nhưng độ dốc của đồ thị trong giai đoạn củng cố tăng dần, không có lực phá hoại. Lực tăng, mẫu ngắn lại thành hình trống (hình3-18) mà không bị phá vỡ. Hai trị số giới hạn $\sigma_{tl}$, $\sigma_{ch}$ là hai đặc trưng cơ học của vật liệu dẻo khi chịu nén. Thực nghiệm cho thấy các giá trị này khi kéo và khi nén tương ứng bằng nhau, nên ta có thể nói *khả năng chịu kéo và chịu nén của vật liệu dẻo như nhau.*



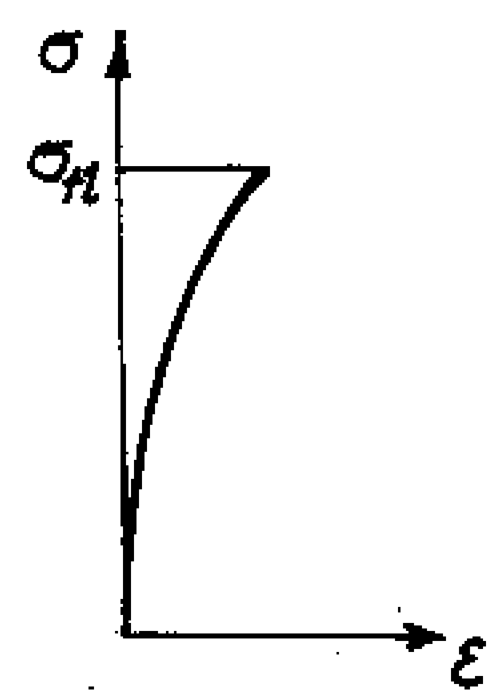

*Hình 3-17.* Đồ thị quy ước $\sigma \div \varepsilon$ khi nén VL dẻo



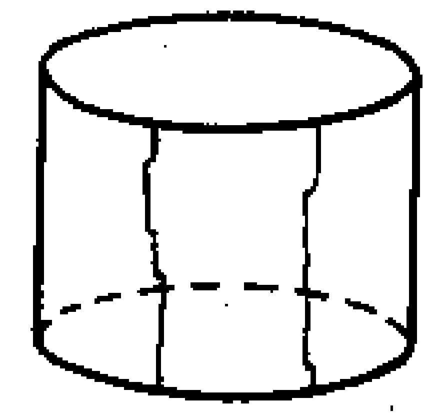
*Hình 3-18.* Mẫu hình trống khi nén VLdẻo

### *3-6-5. Đồ thị thí nghiệm và đặc trưng cơ học của vật liệu giòn*

Đồ thị quy ước quan hệ ứng suất-biến dạng của mẫu như trên hình 3-19 chỉ có một giai đoạn là đường có độ cong bé, gần như thẳng, kết thúc tại điểm *D* lúc mẫu đứt đột ngột khi kéo, hoặc lúc mẫu nứt vỡ khi nén (hình 3-20).




*Hình 3-19.* Đồ thị thí nghiệm VL giòn



*Hình 3-20.* Mẫu nứt vỡ khi nén VL giòn

Đặc trưng cơ học của vật liệu giòn là giới hạn bền khi kéo và giới hạn bền khi nén:

$$\sigma_b^k = \frac{F_b^{kéo}}{A_o}; \quad \sigma_b^n = \frac{F_b^{nén}}{A_o}.$$

Thực nghiệm cho thấy *giới hạn bền khi nén lớn hơn nhiều lần giới hạn bền khi kéo. Vật liệu giòn chịu nén tốt hơn chịu kéo.*

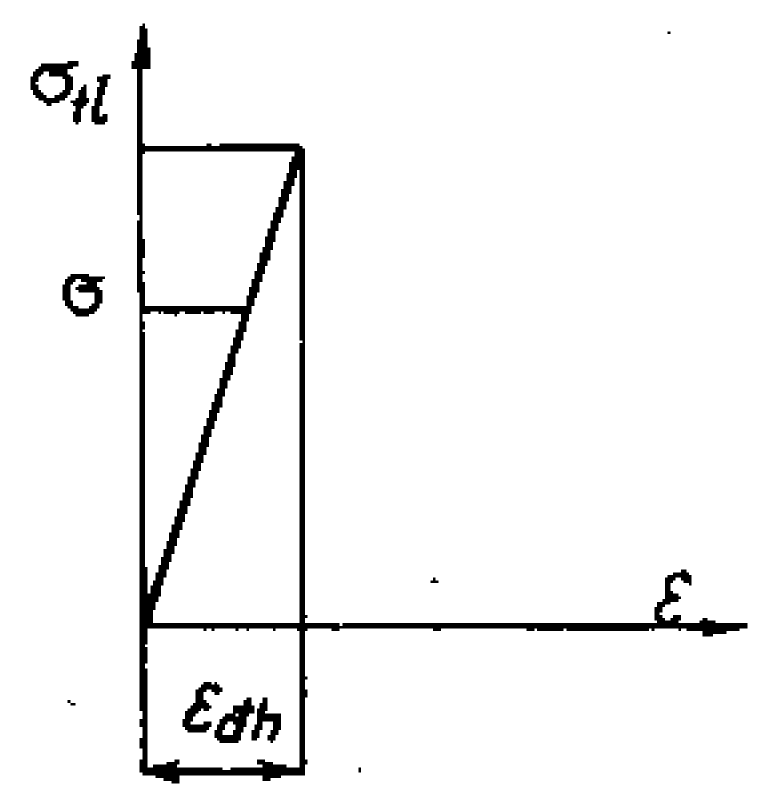
## *3-7. MỘT SỐ HIỆN TƯỢNG TRONG THÍ NGHIỆM VẬT LIỆU*

### *3-7-1. Biến dạng đàn hồi, biến dạng dư*

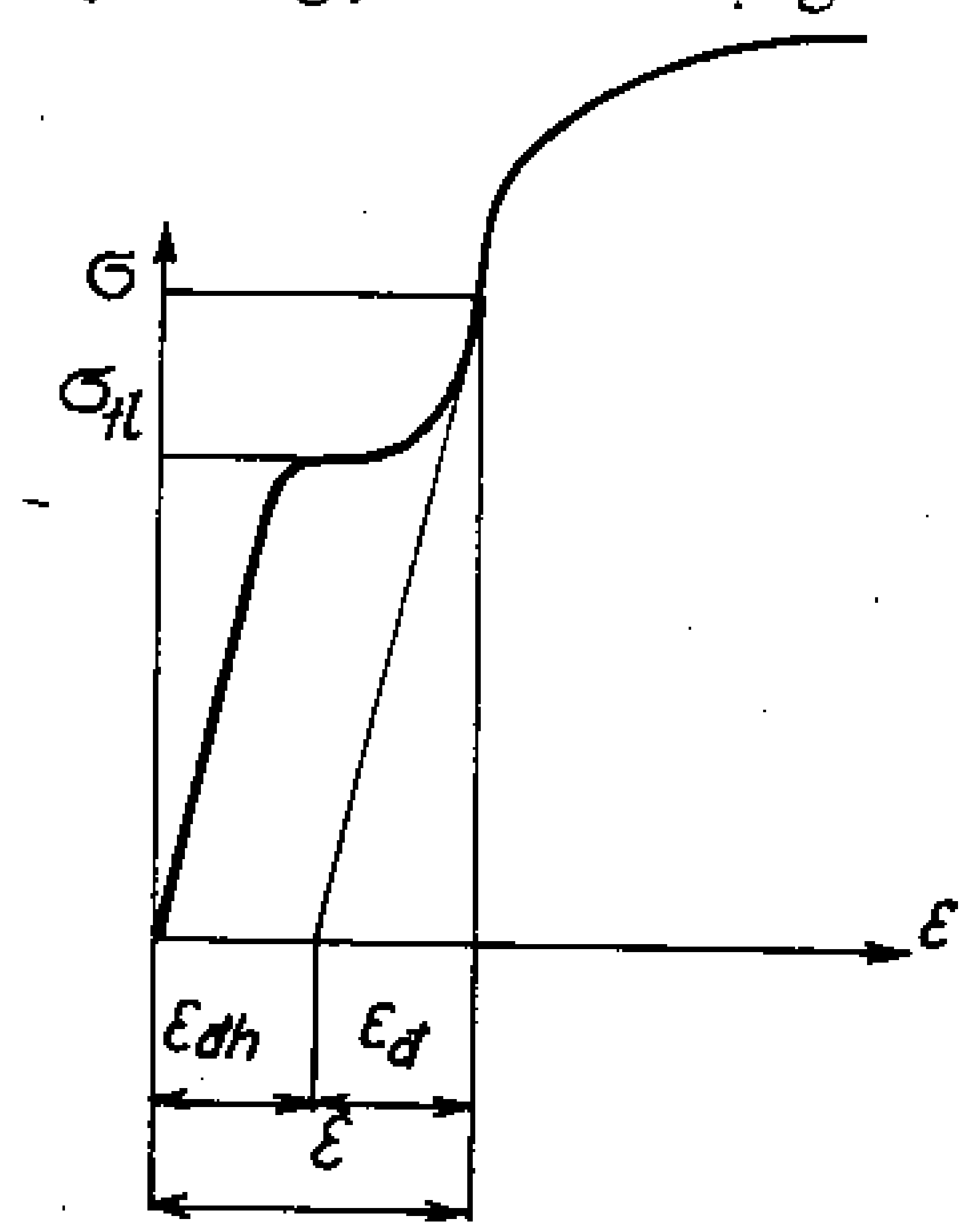
Trong thí nghiệm, sau khi ứng suất đạt tới giá trị $\sigma$ nào đó, nếu dừng tải rồi cho giảm tải về không ta nhận thấy:

* khi ứng suất $\sigma$ nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ ($\sigma < \sigma_{tl}$), điểm dừng nằm trong giai đoạn tỷ lệ, đồ thị sẽ giảm về theo đường thẳng trùng với đường đi ban đầu, khi ứng suất về không thì biến dạng cũng mất đi hoàn toàn. Quá trình biến dạng này mang tính thuận nghịch, biến dạng hoàn toàn đàn hồi và tuân theo định luật Hooke (hình 3-21).

* khi ứng suất $\sigma$ lớn hơn giới hạn tỷ lệ ($\sigma > \sigma_{tl}$), đồ thị sẽ không giảm về theo đường trùng với đường đi ban đầu mà theo một đường thẳng song song với giai đoạn tỷ lệ như trên hình 3-22. Quá trình này là không thuận nghịch, biến dạng gồm phần đàn hồi và phần không đàn hồi, hay còn gọi là biến dạng dư hoặc biến dạng dẻo $\varepsilon = \varepsilon_{dh} + \varepsilon_d$.




*Hình 3-21.* Biến dạng tuyệt đối đàn hồi $\sigma < \sigma_{tl}$




*Hình 3-22.* Biến dạng không tuyệt đối đàn hồi $\sigma > \sigma_{tl}$

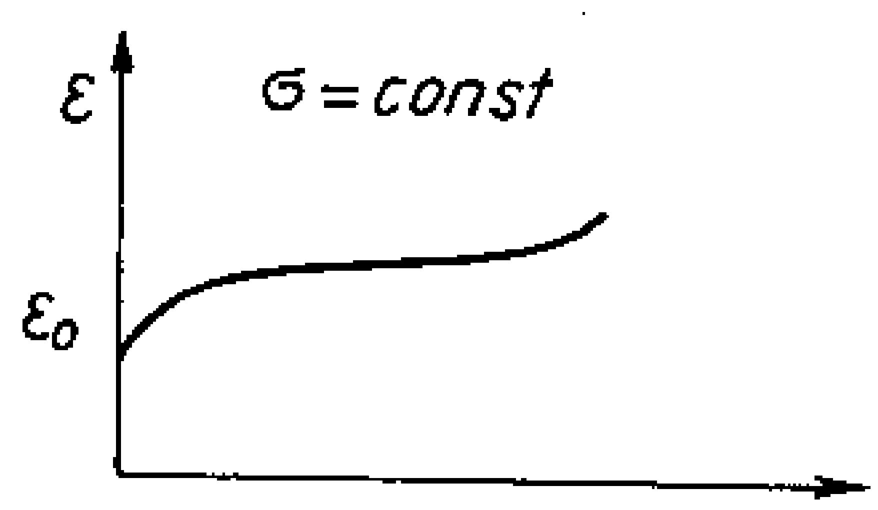
Môn Cơ học nghiên cứu một cách tổng quát về sự làm việc của vật thể trong giới hạn đàn hồi và ngoài giới hạn đàn hồi là Lý thuyết đàn hồi và Lý thuyết dẻo.

### 3-7-2. Biến cứng nguội

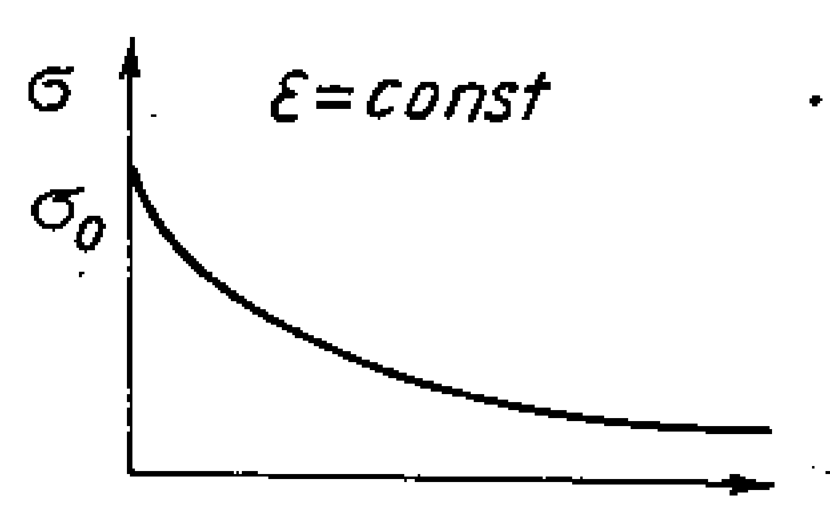
Xét trường hợp vật liệu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi, khi giảm ứng suất về không, đồ thị đạt điểm *H* trên hình 3-22. Nếu lại tăng tải, ứng suất tăng lên và đồ thị sẽ đi theo đường thẳng *HK* của quá trình giảm tải lần trước, sau đó mới theo một đường cong củng cố mới. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng biến cứng nguội, biến cứng nguội làm tăng giới hạn tỷ lệ nhưng làm giảm độ dẻo của vật liệu. Người ta thường sử dụng hiện tượng này trong chế tạo thép cường độ cao.

### 3-7-3. Ảnh hưởng của thời gian, từ biến

Theo thời gian, khi các tác động bên ngoài lên vật thể không thay đổi, ứng suất và biến dạng trong vật thể cũng có những thay đổi. Hiện tượng đó gọi là *hiện tượng từ biến*. Trong thực nghiệm ta chia từ biến (theo nghĩa rộng) thành hai loại: *từ biến và chùng ứng suất*. Hiện tượng từ biến là hiện tượng thay đổi biến dạng theo thời gian khi ứng suất là hằng, đường quan hệ biến dạng-thời gian được gọi là đường cong từ biến (hình 3-23). Hiện tượng chùng ứng suất là hiện tượng thay đổi ứng suất theo thời gian khi biến dạng là hằng, đường quan hệ ứng suất-thời gian được gọi là đường cong chùng ứng suất (hình 3-24). Môn Cơ học nghiên cứu những hiện tượng này gọi là Lý thuyết từ biến. Ảnh hưởng của từ biến cần được đặc biệt để ý khi tính toán các công trình cần có tuổi thọ sử dụng cao, cỡ hàng dăm chục năm, hoặc công trình làm việc ở nhiệt độ cao, chế độ tải trọng thay đổi nhanh, thất thường...

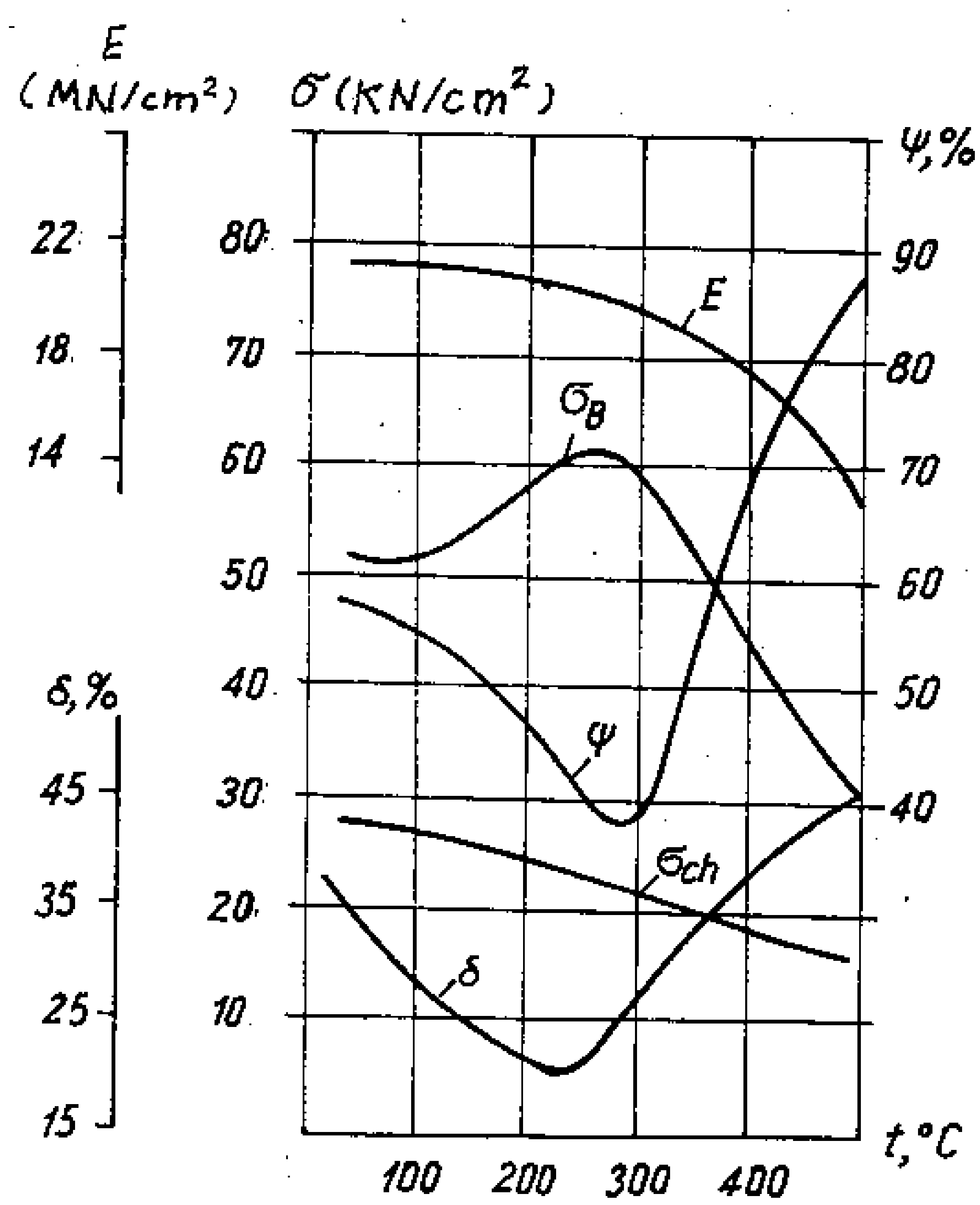



*Hình 3-23.* Đường cong từ biến




*Hình 3-24.* Đường cong chùng ứng suất

Nhiệt độ cũng là một tác nhân ảnh hưởng tới sức bền của vật liệu. Khi làm việc ở nhiệt độ thấp, tính dẻo của vật liệu bị giảm, tính giòn thể hiện mạnh. Ngược lại, ở nhiệt độ cao, các đặc trưng cơ học của phần lớn vật liệu bị giảm và đặc biệt hiện tượng lưu biến phát triển mạnh. Có thể quan sát những ảnh hưởng này của nhiệt độ qua đồ thị trình bày trên hình 3-25.




*Hình 3-25.* Ảnh hưởng của nhiệt độ tới các đặc trưng cơ học của thép

## 3-8. CÁC QUAN ĐIỂM TÍNH TOÁN KẾT CẤU

### 3-8-1. Quan điểm tính theo ứng suất cho phép

Theo quan điểm này, độ bền của toàn bộ vật thể hoặc toàn bộ kết cấu được bảo đảm chỉ khi từng phần tử vật chất lấy tại mọi điểm trong hệ được bảo đảm. Cách suy diễn như vậy rất đơn giản và thiên về an toàn. Độ bền tại từng điểm của hệ được bảo đảm nếu ứng suất, hoặc tổ hợp các ứng suất phát sinh ở đó không vượt quá một trị số giới hạn xác định nào đó, gọi là *ứng suất cho phép*. Trị số của ứng suất cho phép phụ thuộc từng loại vật liệu và tìm được từ các nghiên cứu thực nghiệm. Đối với thanh chịu kéo, nén đúng tâm, điều kiện bền an toàn được viết là

$$|\sigma| \le [\sigma]\ . \qquad (3\text{-}18)$$

Giá trị $[\sigma]$ được gọi là ứng suất cho phép, bằng

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}\ . \qquad (3\text{-}19)$$

trong đó:

$\sigma_o$ - ứng suất nguy hiểm, tìm trực tiếp từ thí nghiệm, phụ thuộc từng loại vật liệu.

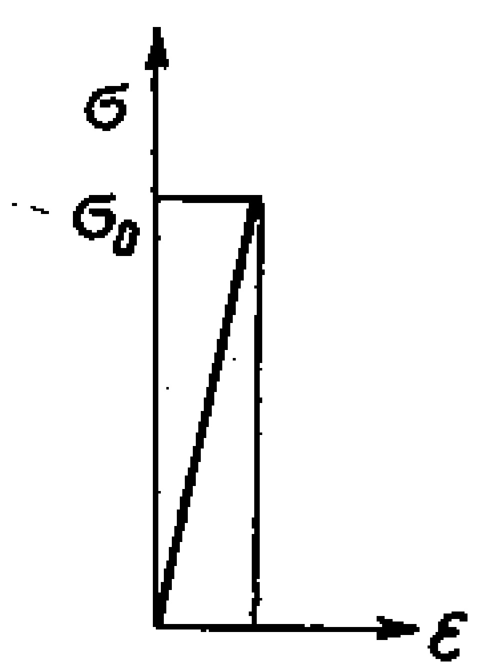
* Với vật liệu giòn, ta lấy ứng suất nguy hiểm bằng giới hạn bền $\sigma_o = \sigma_b$; khi ứng suất $\sigma$ là dương (kéo) thì xác định $\sigma_o$ từ thí nghiệm kéo, khi ứng suất $\sigma$ là âm (nén) thì xác định $\sigma_o$ từ thí nghiệm nén, tức là:

$$[\sigma]_k = \frac{\sigma_{o,k}}{n} \quad \text{và} \quad [\sigma]_n = \frac{\sigma_{o,n}}{n}.$$

* Với vật liệu dẻo, ta lấy $\sigma_o$ là giới hạn tỷ lệ hoặc giới hạn chảy $\sigma_o = \sigma_{tl}$ (hoặc $\sigma_{ch}$), và không cần phân biệt ứng suất kéo hoặc nén. Hai trị số $\sigma_{tl}$ và $\sigma_{ch}$ rất gần nhau, trong nhiều trường hợp rất khó phân biệt, nên ta có thể lấy một trong hai trị số đó làm $\sigma_o$.

Quy phạm của nhiều nước lấy $\sigma_o$ là trị số ứng suất ứng với biến dạng tỷ đối cỡ *0,002* của đồ thị thí nghiệm.

Ta cũng có thể nói: với vật liệu dẻo thì phương pháp tính theo ứng suất cho phép là phương pháp tính trong giới hạn đàn hồi, không cho phép xuất hiện biến dạng dẻo trong kết cấu. Sơ đồ vật liệu là sơ đồ đàn hồi tuyệt đối trên hình 3-26.




*Hình 3-26.* Sơ đồ vật liệu đàn hồi tuyệt đối

*n* - hệ số an toàn kể đến các yếu tố thực tế ảnh hưởng tới độ bền mà chưa được xét đến trong tính toán. Hệ số này phụ thuộc các yếu tố sau:

* phương pháp công nghệ sản xuất vật liệu, kết cấu;
* mức độ tin cậy của các số liệu về tải trọng;
* phương pháp và kết quả tính toán;
* điều kiện làm việc cụ thể của kết cấu;
* ý nghĩa kinh tế xã hội của công trình...

Do sự đơn giản, rõ ràng về trực giác, thiên về an toàn và cho các biến dạng tương ứng của kết cấu là nhỏ nên quan điểm tính theo ứng suất cho phép vẫn là quan điểm cơ bản thường được áp dụng, đặc biệt trong ngành chế tạo máy, công trình hàng hải, hàng không... Trong các chương tiếp theo của giáo trình, các tính toán độ bền của thanh trong mọi trường hợp chịu lực đều được trình bày chủ yếu theo quan điểm này.

Với hệ thanh chịu kéo, nén đúng tâm, điều kiện bền (3-18) được viết là

$$|\sigma|_{max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{max} \le [\sigma] , \qquad (3\text{-}20)$$

vế trái là giá trị lớn nhất của ứng suất phát sinh trong hệ.

Từ điều kiện bền, ta có ba bài toán cơ bản:

*1- **Bài toán kiểm tra*** bền nhằm kiểm tra khả năng thỏa mãn bất đẳng thức (3-20). Bất đẳng thức thoả mãn thì hệ đủ độ bền, bất đẳng thức không thoả mãn thì hệ không đủ bền.

*2- **Bài toán thiết kế*** để tìm kích thước tiết diện sao cho đảm bảo điều kiện bền:

$$A \ge \frac{N}{[\sigma]} .$$

*3- **Bài toán xác định trị số an toàn của tải trọng:*** $N \le A\,[\sigma]$ .

Tương tự điều kiện bền, ta có thể viết điều kiện cứng một cách đơn giản như sau:

*__Biến dạng, chuyển vị phát sinh__* $\le$ *__Biến dạng, chuyển vị cho phép__* .

Trị số biến dạng hoặc trị số chuyển vị cho phép được quy định theo các yêu cầu công nghệ, điều kiện sử dụng bình thường của công trình.

Với thanh chịu kéo, nén đúng tâm điều kiện cứng được thể hiện theo một trong các dạng sau:

* theo biến dạng tỷ đối: $[\varepsilon] \le [\varepsilon]$ ;

* theo biến dạng tuyệt đối của thanh: $\Delta L \le [\Delta L]$ ;

* theo chuyển vị: $w \le [w]$ .

Từ điều kiện cứng, ta cũng có ba bài toán cơ bản như đối với điều kiện bền.

Trong một số trường hợp chịu lực, chẳng hạn kết cấu chịu ứng suất thay đổi theo thời gian hoặc thanh có độ mảnh lớn chịu lực nén và uốn đồng thời, điều kiện bền được thể hiện qua việc so sánh hệ số an toàn thực của kết cấu với hệ số an toàn cho phép $n \le [n]$ .

### *3-8-2. Quan điểm tính độ bền theo tải trọng giới hạn*

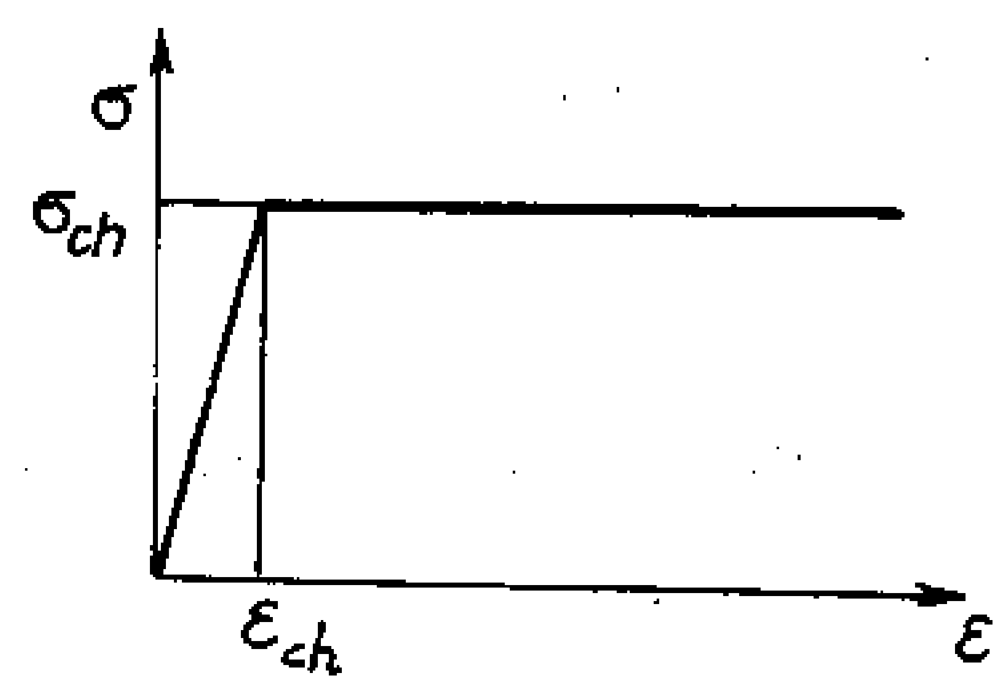
Nhược điểm chính của quan điểm tính độ bền theo ứng suất cho phép là đánh giá độ bền của cả hệ chỉ tại những điểm nguy hiểm, không xem xét đến khả năng chịu lực tiếp sau của toàn hệ. Thật vậy, trong nhiều trường hợp, đối với vật liệu dẻo, dù biến dạng dẻo đã phát sinh, hình thành ở một vài điểm hoặc ở một vài tiết diện thì cũng chưa thể kết luận rằng cả hệ kết cấu đã mất khả năng chịu lực. Để khắc phục điều này và nâng cao hiệu quả kinh tế, người ta còn sử dụng phương pháp tính độ bền theo tải trọng giới hạn.

Điều kiện bền của hệ theo tải trọng giới hạn được viết như sau:

$$F_{max} \le [F] = \frac{F_{gh}}{n}$$

với $n$ là hệ số dự trữ độ bền hoặc hệ số an toàn, có ý nghĩa như đã nêu trong cách tính theo ứng suất cho phép.

Khi xác định tải trọng giới hạn $F_{gh}$ đối với vật liệu dẻo, ta dùng sơ đồ Prandtl, một kiểu đơn giản hoá sơ đồ ứng suất-biến dạng khi coi miền chảy là một đường nằm ngang và không có giai đoạn củng cố (hình 3-27). Cho đến nay, cũng chỉ có thể xác định được tải trọng giới hạn cho một số sơ đồ kết cấu đơn giản.



*Hình 3-27.* Sơ đồ vật liệu đàn dẻo Prandtl

### *3-8-3. Quan điểm tính kết cấu theo trạng thái giới hạn*

Trạng thái giới hạn là trạng thái tương ứng với khi kết cấu không còn đáp ứng được các yêu cầu đặt ra. Ta phân ra hai trạng thái giới hạn: trạng thái thứ nhất là mất khả năng chịu lực, trạng thái thứ hai là không đáp ứng được những yêu cầu sử dụng bình thường về công nghệ hoặc về sinh hoạt đã đặt ra đối với công trình. Độ tin cậy của công trình là khả năng bảo toàn được, trong thời gian sử dụng, tất cả những yêu cầu đã đặt ra đối với công trình khi thiết kế. Độ tin cậy phụ thuộc vào mức độ chuẩn xác của các dữ liệu về tải trọng, về độ bền của bản thân vật liệu, về điều kiện làm việc thực của công trình... và được diễn tả bằng các hệ số trong quá trình tính toán.

*Tải trọng tiêu chuẩn* $F_{tc}$ là tải trọng tác động lên công trình trong điều kiện chuẩn, bình thường, các giá trị của chúng được quy định trong tiêu chuẩn thiết kế, chẳng hạn TCVN 2737-1995 "Tải trọng và tác động" đối với các công trình xây dựng. *Tải trọng tính toán* $F_{tt}$ bằng tải trọng tiêu chuẩn nhân với hệ số tải trọng $n$, hệ số này có giá trị khác nhau với từng loại tải trọng khác nhau và được quy định trong quy phạm. Khi tính toán theo trạng thái giới hạn thứ nhất, thường lấy $n>1$, chẳng hạn trọng lượng bản thân của kết cấu lấy $n=1,1$, hoạt tải lấy $n=1,2$. Cũng có thể lấy $n<1$ nếu điều đó dẫn đến tình trạng làm việc bất lợi cho kết cấu, chẳng hạn tải trọng lặp khi xây dựng công trình có hệ số $n=0,8$. Khi tính trạng thái giới hạn giới hạn thứ hai, ta lấy hệ số $n=1$.

Đặc trưng chịu lực cơ bản của vật liệu là *cường độ chịu lực tiêu chuẩn* $R_{tc}$ được quy định theo tiêu chuẩn nhà nước, có kể đến các điều kiện kiểm tra và những yếu tố xác suất của thí nghiệm xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu. Khi tính toán ta đưa vào hệ số vật liệu $\gamma_m > 1$ để diễn tả những thay đổi mang tính thống kê của tính chất vật liệu cũng như sự khác biệt của các mẫu thí nghiệm. Tỷ số giữa $R_{tc}$ và $\gamma_m$ được gọi là *cường độ chịu lực tính toán* $R_{tt}$

$$R_{tt} = \frac{R_{tc}}{\gamma_m}$$

Đặc điểm làm việc của kết cấu trong các điều kiện thực như là nhiệt độ, xâm thực của môi trường, những khác biệt với các điều kiện thí nghiệm... được đưa vào tính toán qua hệ số điều kiện làm việc $\gamma_{lv}$. Giá trị của $\gamma_{lv}$ cũng được quy định trong các tiêu chuẩn nhà nước.

Có thể kể ra những yếu tố ảnh hưởng và những hệ số tin cậy khác trong tính toán kết cấu chẳng hạn hệ số tin cậy về ý nghĩa kinh tế xã hội của công trình $\gamma_{xh} \leq 1$...

Độ tin cậy và an toàn không phát sinh trạng thái giới hạn thứ nhất của kết cấu được đảm bảo bởi điều kiện

$$N \leq S$$

$N$ - ứng lực phát sinh trong các bộ phận kết cấu, là hàm của tải trọng và các tác động.

$S$ - ứng lực giới hạn mà các chi tiết kết cấu đang tính toán có thể chịu đựng, $S$ là hàm của các tính chất cơ lý vật liệu, các kích thước chi tiết, các điều kiện làm việc.

Ta có thể viết: $N = n F_{tc}$;

$$S = \frac{A^* R_{tc}\gamma_{lv}}{\gamma_m \gamma_{xh}},$$

$A^*$ là đặc trưng kích thước của tiết diện.

Như vậy, điều kiện bền của thanh chịu kéo, nén đúng tâm theo trạng thái giới hạn thứ nhất (lấy $\gamma_m = \gamma$; $\gamma_{xh} = \gamma_{lv} = 1$) có dạng:

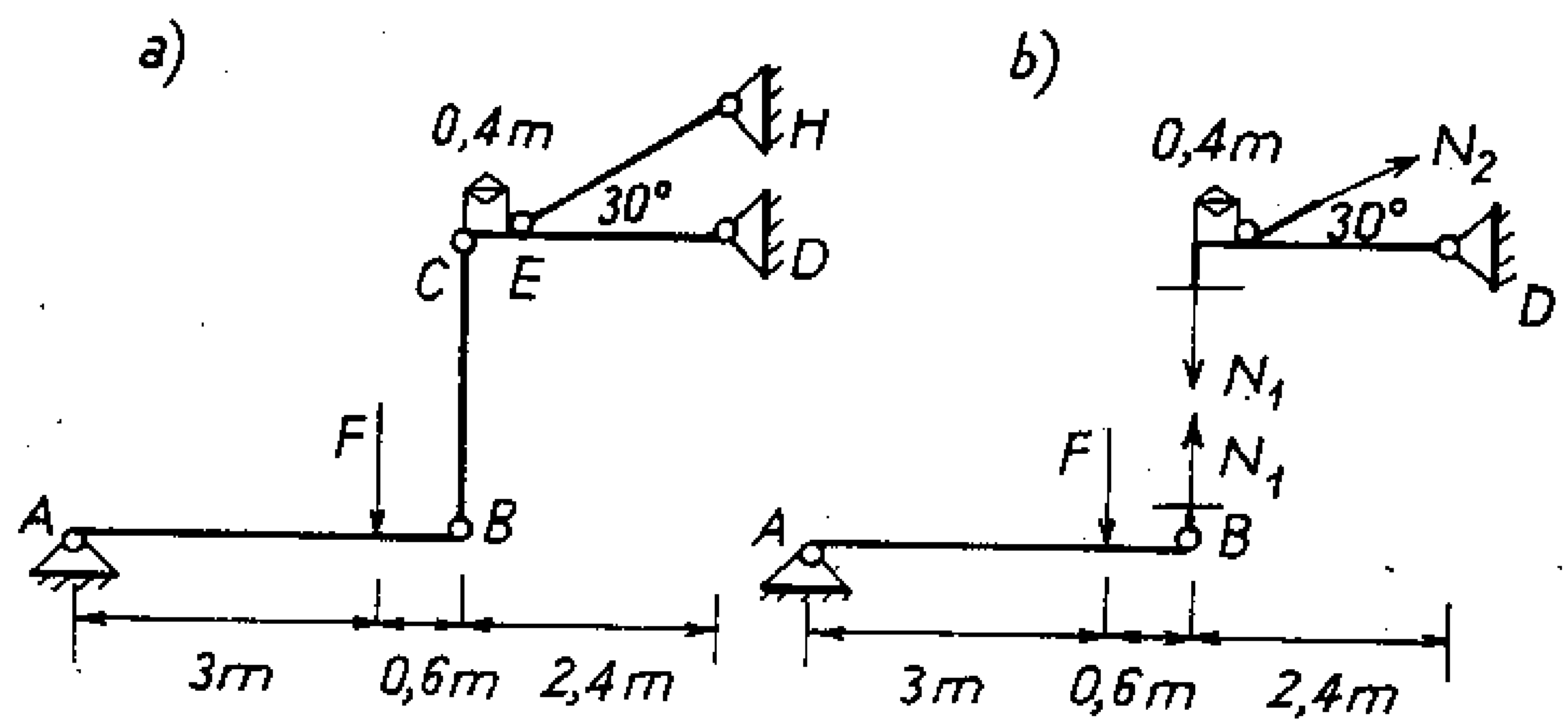
$$N \leq A R\gamma,$$

hoặc theo ứng suất $\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq R\gamma$.

Những điều kiện tương tự cũng được viết cho các trường hợp chịu lực khác của kết cấu.

Hiện nay quan điểm tính kết cấu theo TTGH được dùng phổ biến trong tính toán công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp, cầu... và sẽ được trình bày chi tiết trong các giáo trình chuyên ngành như bêtông, thép.

***Ví dụ 3-6***. Xác định đường kính tiết diện các thanh $BC$, $EH$ của hệ cho trên hình 3-28a theo điều kiện bền. Cho biết $[\sigma] = 16$ kN/cm$^2$.




*Hình 3-28.* Cho ví dụ 3-6

Bài giải. Bằng phương pháp mặt cắt, xác định lực dọc trong thanh $BC$, $EH$ như trên hình vẽ 3-28b.

Phương trình cân bằng đối với dầm $AB$ và dầm $CD$:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow N_1.3,6 - F.3 = 0 \rightarrow N_1 = \frac{3.60}{3,6} = 50 \text{ kN};$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow N_1.2,4 - N_2.2\sin 30^o = 0 \rightarrow N_2 = \frac{2,4N_1}{2\sin 30^0} = \frac{2,4.50}{2.0,5} = 120 \text{ kN}.$$

Diện tích cần thiết của các thanh phải thoả mãn điều kiện bền $A \geq \frac{N}{[\sigma]}$,

* với thanh $BC$:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{50}{16} = 3,125 cm^2 \rightarrow d_1 \geq \sqrt{\frac{4.3,125}{\pi}} = 1,99 \text{ cm};$$

* với thanh $CH$:

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{120}{16} = 7,5 cm^2 \rightarrow d_2 \geq \sqrt{\frac{4.7,5}{\pi}} = 3,09 \text{ cm}.$$

Ta lấy $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 3,1$ cm.

*Ví dụ 3-7*. Cột chịu lực nén $F_o$ đúng tâm và chịu trọng lượng bản thân. Tìm luật biến thiên của tiết diện cột để cột có sức bền đều, nghĩa là ứng suất tại tất cả các tiết diện đều như nhau và bằng ứng suất cho phép. Trọng lượng riêng của vật liệu làm cột $\gamma$, ứng suất cho phép là $[\sigma]$.

*Bài giải*. Cột có độ bền đều chịu nén sẽ có tiết diện thay đổi như trên hình 3-29.

Tại tiết diện toạ độ $z$, giá trị tuyệt đối của lực nén là: $|N| = F_o + \gamma \int_0^z A(\xi)\, d\xi$,

$A(\xi)$ - diện tích mặt cắt tại toạ độ $\xi$, toạ độ này biến thiên từ $0$ tới $z$.

Biểu thức tích phân là thể tích phần cột nằm phía trên mặt cắt có toạ độ $z$ $(0 \leq z \leq L)$.

Ứng suất pháp trên tiết diện bằng $[\sigma]$ nên $F_o + \gamma \int_0^z A(\xi)\, d\xi = A(z)[\sigma]$.

Đạo hàm hai vế, nhận được: $\gamma A\, dz = dA\, [\sigma]$, hoặc $\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dz$.

Suy ra:

$$\ln A = \frac{\gamma}{[\sigma]} z + C. \qquad (*)$$

Nếu ký hiệu diện tích tiết diện trên cùng của thanh là $A_o$ thì ta có điều kiện xác định hằng số tích phân $C$:

$$A(z=0) = A_o \rightarrow \ln A_o = \frac{\gamma}{[\sigma]}.0 + C \rightarrow C = \ln A_o.$$

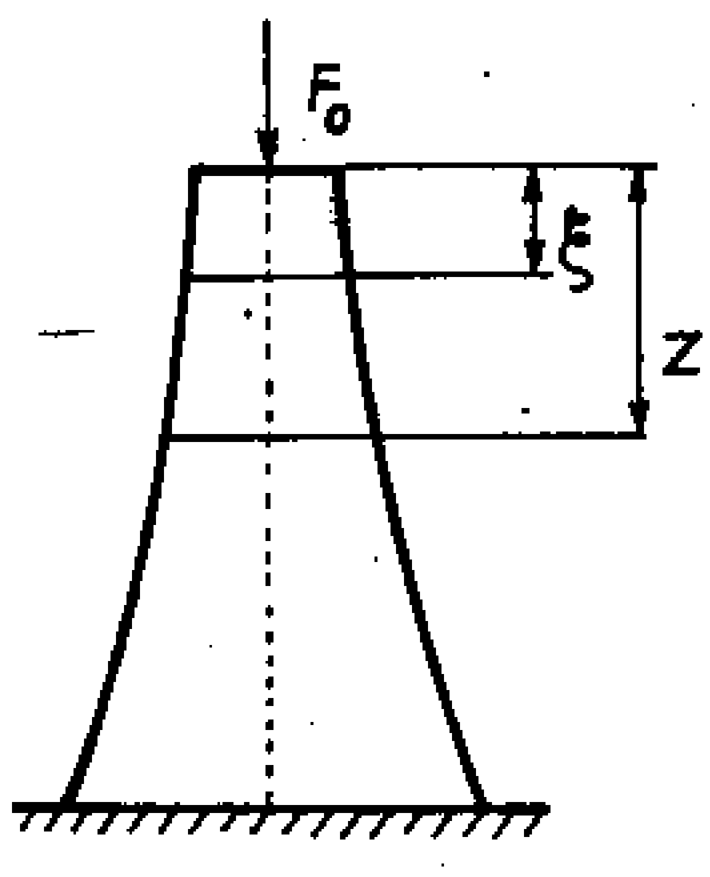
Biểu thức (*) được viết lại như sau: $\ln \frac{A}{A_o} = \frac{\gamma}{[\sigma]} z \rightarrow A = A_o\, e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} z}$.

Diện tích $A_o$ xác định từ điều kiện bền của tiết diện ở đỉnh cột:

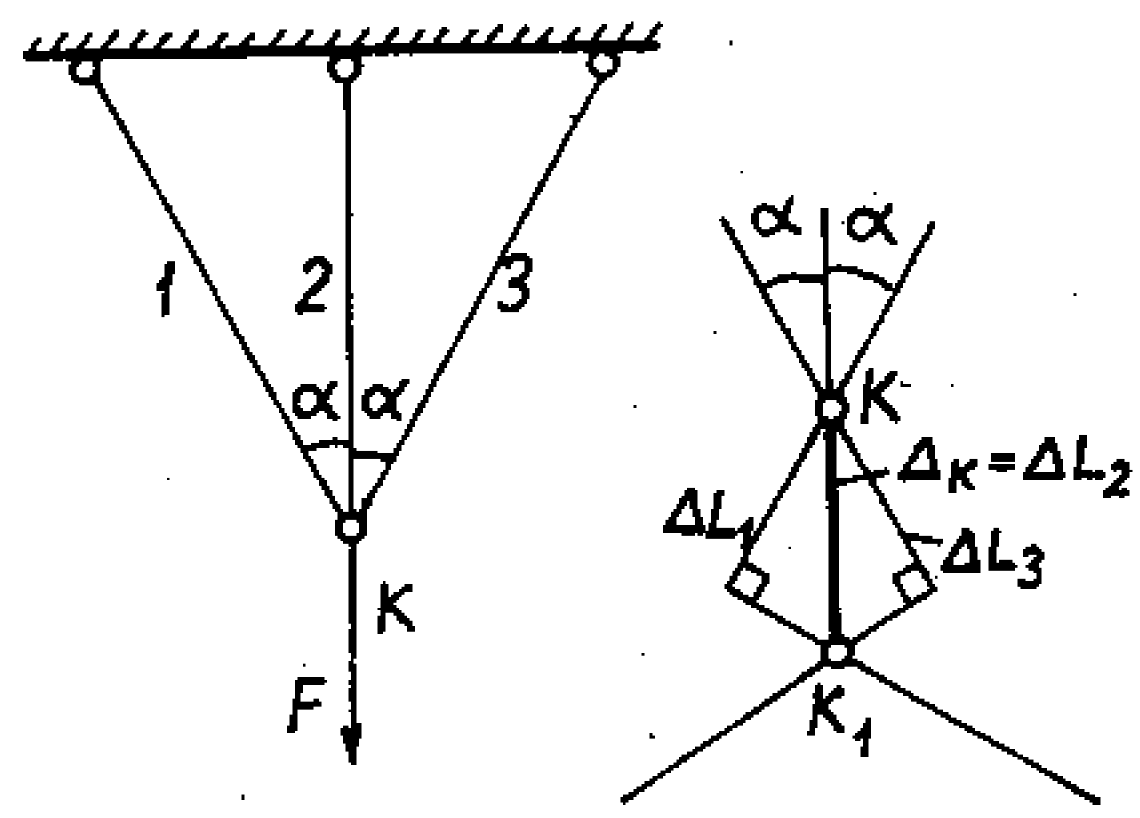
$$A_o = \frac{N_o}{[\sigma]} = \frac{F_o}{[\sigma]}.$$

Vậy luật biến đổi diện tích tiết diện của cột độ bền đều là

$$A(z) = \frac{F_o}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} z}.$$




*Hình 3-29.* Cho ví dụ 3-7




*Hình 3-30.* Cho ví dụ 3-8

<u>*Ví dụ 3-8*</u>. Xác định trị số lớn nhất của lực $F$ đặt trên hệ gồm ba thanh cùng loại vật liệu và cùng diện tích tiết diện như trên hình 3-30a.

<u>*Bài giải*</u>. Hệ có một bậc siêu tĩnh, để giải bài toán thì ngoài các phương trình cân bằng tĩnh học:

$\sum X = 0 \rightarrow N_1 = N_3;$

$\sum Y = 0 \rightarrow N_1 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha + N_2 - F = 0 \rightarrow 2N_1 \cos\alpha + N_2 - F = 0;$ (a)

ta cần có thêm một phương trình biến dạng.

Sau biến dạng, do tính đối xứng, điểm đặt lực $K$ chỉ có di chuyển thẳng đứng tới $K_1$ như trên hình 3-30b, ta có liên hệ: $KK_1 \cos\alpha = \Delta L_2 \cos\alpha = \Delta L_1$,

hoặc $\dfrac{N_2 L_2}{EA} \cos\alpha = \dfrac{N_1 L_1}{EA} \rightarrow N_2 \cos\alpha \dfrac{L_2}{L_1} = N_1 \rightarrow N_2 \cos^2\alpha = N_1$ (b)

Kết hợp (a), (b) và giải ra ta được:

$$N_2 = \frac{F}{1 + 2\cos^3\alpha}; \qquad N_1 = N_3 = \frac{F\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} < N_2.$$

Điều kiện bền sẽ viết theo thanh 2 vì lực dọc trong thanh 2 lớn hơn khi hai thanh có cùng diện tích tiết diện

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{F}{A(1 + 2\cos^3\alpha)} \le [\sigma] \rightarrow F \le A[\sigma](1 + 2\cos^3\alpha).$$

Tải trọng cho phép lớn nhất, lấy với dấu bằng, là

$$F = A[\sigma](1+2cos^3 \alpha).$$

*Nhận xét*: Theo tính toán ở trên, khi thanh giữa làm việc đến giới hạn $N_2 = A[\sigma]$ thì hệ bị phá hỏng. Tuy vậy hai thanh bên còn lại của hệ vẫn làm việc trong giới hạn đàn hồi và vẫn có thể đảm bảo chịu được tải trọng. Như thế, trên thực tế hệ vẫn sử dụng được trong lúc ta quan niệm hệ đã bị loại bỏ. Mâu thuẫn này chính là nhược điểm của quan điểm tính theo ƯSCP, một cách kiểm tra không cho phép xuất hiện biến dạng dẻo và chỉ xét độ bền của một hệ thông qua độ bền của từng điểm, từng tiết diện mà không xét đến khả năng còn chịu lực chung của toàn hệ.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

3- 1. Phát biểu giả thiết tiết diện phẳng Bernoulli. Giả thiết này cho ta kết luận gì khi nghiên cứu ứng suất trên tiết diện.

3- 2. Nêu những ví dụ về các kết cấu có các thanh chỉ chịu kéo hoặc nén đúng tâm. Vì sao có thể nói kéo hoặc nén đúng tâm là một dạng chịu lực hợp lý của thanh?

3- 3. Nêu nguyên lý Saint Venant, cho vài ví dụ thực tế minh hoạ cho nguyên lý này.

3- 4. Thế nào là biến dạng dài dọc trục và biến dạng dài ngang trục của thanh chịu kéo, nén đúng tâm. Biểu thức để tính các biến dạng này.

3- 5. Gọi tên hai hằng số đàn hồi của vật liệu, nêu thứ nguyên của chúng.

3- 6. Đại lượng nào được gọi là độ cứng cơ học của vật liệu; độ cứng khi kéo, nén của tiết diện; độ cứng khi kéo, nén của thanh?

3- 7. Phát biểu và biểu diễn bằng hình vẽ định luật đối ứng của ứng suất tiếp.

3- 8. Định nghĩa thế năng biến dạng đàn hồi của vật thể chịu lực. Định nghĩa và viết biểu thức tính TNBDĐH riêng của thanh chịu kéo, nén.

3- 9. Nêu những điểm đặc trưng và các giai đoạn của đồ thị *lực-độ dãn dài* khi thí nghiệm kéo mẫu làm từ vật liệu dẻo.

3- 10. Nêu các đặc trưng cơ học của vật liệu dẻo và của vật liệu giòn.

3- 11. Vì sao ta nói, khi phân tích các kết quả thí nghiệm, đồ thị *ứng suất-biến dạng* mang tính khái quát cao hơn so với đồ thị *lực-độ dãn dài*?

3- 12. Biến dạng đàn hồi, biến dạng dẻo phát sinh trong những điều kiện nào theo ứng suất của thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm?

3- 13. Thế nào là hiện tượng biến cứng nguội? Hiện tượng từ biến? Hiện tượng chùng ứng suất?

3- 14. Trình bày quan điểm cơ bản của cách tính kết cấu theo ƯSCP. Nêu ưu điểm và sự hạn chế của cách tính này.

3- 15. Nêu sơ đồ vật liệu khi tính độ bền kết cấu theo ƯSCP và theo TTCP.

3- 16. Thế nào là trạng thái giới hạn, độ tin cậy của kết cấu? Độ tin cậy của kết cấu phụ thuộc vào những yếu tố nào?

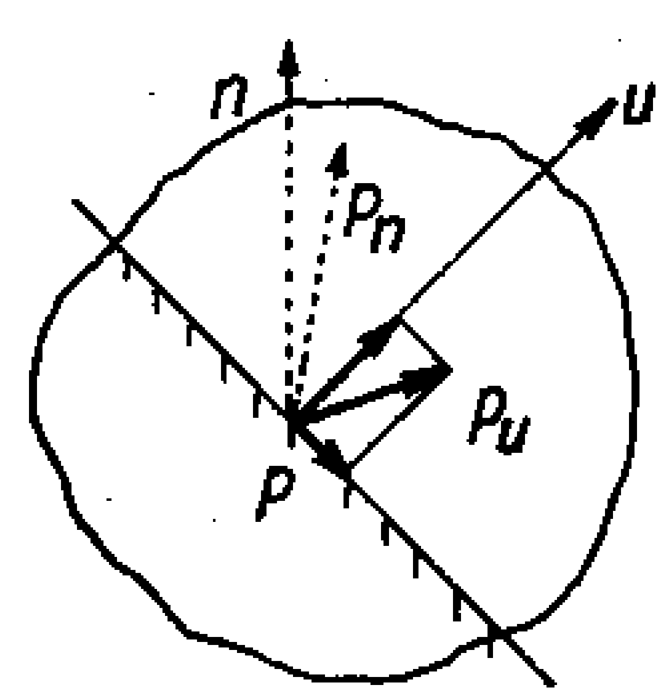
# 4 Trạng thái ứng suất và thuyết bền

## 4-1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

### 4-1-1. Trạng thái ứng suất

Trong chương 2 ta đã thấy: ứng suất trên mặt cắt nghiêng của thanh chịu kéo, nén đúng tâm phụ thuộc vào góc nghiêng $\alpha$ của pháp tuyến mặt cắt. Ta cũng có kết luận tương tự khi xem xét ứng suất tại điểm $P$ của một vật thể bất kỳ chịu lực như trên hình 4-1: ứng suất tại điểm này không chỉ phụ thuộc vị trí của điểm mà còn phụ thuộc phương pháp tuyến của mặt cắt.

Để khái quát hoá tình trạng chịu lực của vật thể tại một điểm, ta định nghĩa: *Trạng thái ứng suất (TTƯS) tại một điểm là tập hợp tất cả những ứng suất trên mọi mặt cắt đi qua điểm đó.* TTƯS là một khái niệm rộng rãi hơn khái niệm ứng suất, và do đó, cho phép ta có thể so sánh sự chịu lực ở điểm này so với ở điểm khác của vật thể. Nghiên cứu TTƯS là tìm quy luật biến đổi của ứng suất trên các mặt cắt đi qua điểm đang xét và tìm các đặc trưng của chúng.




*Hình 4-1.* TTƯS tại một điểm

### 4-1-2. Mặt chính, phương chính, ứng suất chính

Mặt chính tại một điểm là mặt cắt đi qua điểm đó và trên mặt đó không có ứng suất tiếp.

Phương chính là phương pháp tuyến của mặt chính.

Ứng suất chính là ứng suất pháp trên mặt chính. Ứng suất chính có thể dương, âm hoặc bằng không.

### 4-1-3 Phân tố chính, phân loại TTƯS

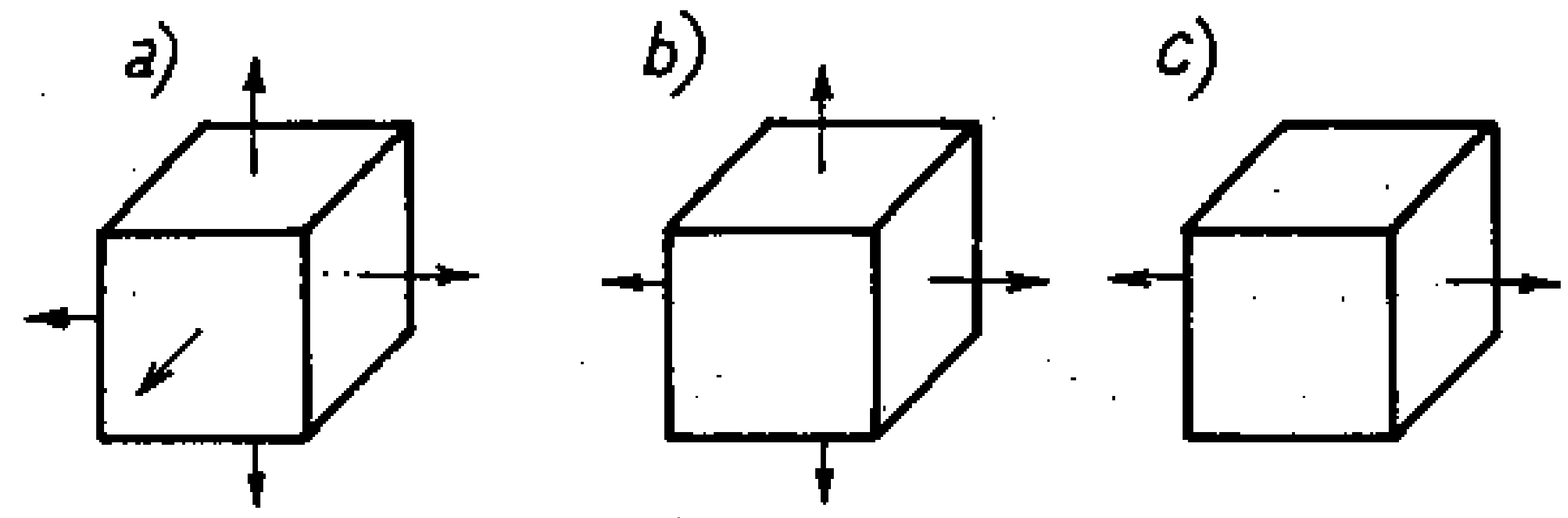
Để nghiên cứu toàn bộ vật thể, ta thường xem xét một phân tố có kích thước vô cùng nhỏ tách ra từ vật thể. Hình dạng phân tố được chọn phù hợp với hệ trục toạ độ dùng để tính toán. Trong hệ toạ độ vuông góc, phân tố là một hình hộp có các mặt giới hạn vuông góc trục toạ độ.

Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng: *tại một điểm của vật thể ta luôn luôn tìm được ba mặt chính và ba mặt chính này tương hỗ vuông góc với nhau.* Ba phương chính lập thành một hệ trục Descartes gọi là hệ toạ độ chính tại điểm đang xét. Phân tố hình hộp lấy tại điểm đang xét có các mặt trùng với những mặt chính được gọi là *phân tố chính*.

Các ứng suất chính được ký hiệu là $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ theo quy ước $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ về giá trị đại số.

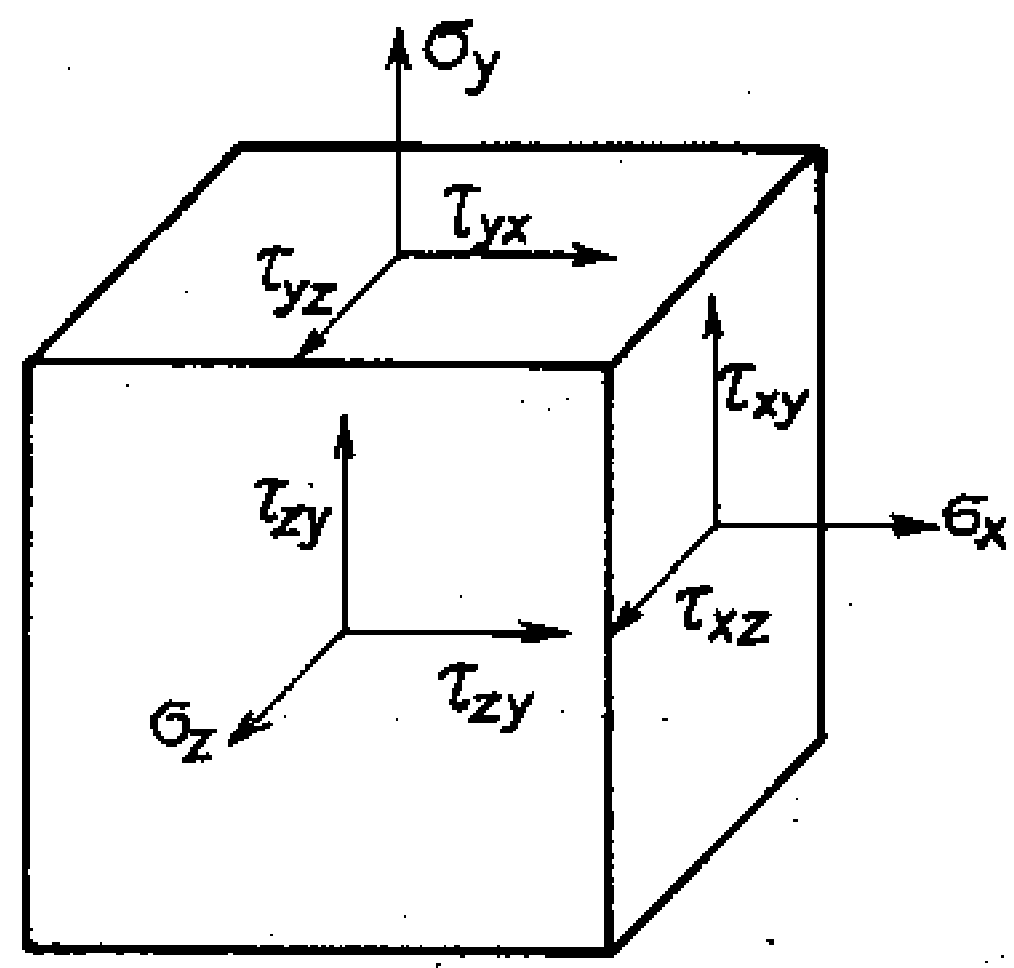
Tuỳ theo số lượng các ứng suất chính, ta phân ra ba loại TTƯS: *TTƯS khối* (hình 4-2a), *TTƯS phẳng* (hình 4-2b), *TTƯS đơn* (hình 4-2c).

*Hình 4-2.* Phân loại TTƯS




TTƯS đơn là trạng thái chịu lực đơn giản nhất, hai trường hợp còn lại được gọi là TTƯS phức tạp.

Trong trường hợp chung, khi phân tố không phải là phân tố chính, trên các mặt bên của phân tố sẽ có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp; ứng suất tiếp có phương bất kỳ nằm trong mặt cắt được phân ra hai thành phần vuông góc với nhau và song song với các cạnh như trên hình 4-3 và TTƯS này được gọi là tổng quát.




*Hình 4-3.* TTƯS tổng quát

Các ứng suất pháp được ký hiệu kèm theo chỉ số chỉ trục vuông góc với mặt cắt $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$; các ứng suất tiếp có hai chỉ số, chỉ số thứ nhất chỉ trục vuông góc với mặt cắt còn chỉ số thứ hai chỉ trục song song với ứng suất $\tau_{xy}$, $\tau_{yx}$, $\tau_{yz}$, $\tau_{zy}$, $\tau_{xz}$, $\tau_{zx}$. Định luật đối ứng của ứng suất tiếp (3-14) cho ta quan hệ

$$\left|\tau_{xy}\right| = \left|\tau_{yx}\right|; \quad \left|\tau_{yz}\right| = \left|\tau_{zy}\right|; \quad \left|\tau_{zx}\right| = \left|\tau_{xz}\right|. \qquad (4\text{-}1)$$

Chín thành phần ứng suất trên ba mặt cắt vuông góc với các trục toạ độ đặc trưng cho TTƯS tại một điểm, lập thành một đại lượng gọi là *tenxơ ứng suất*, ký hiệu $T_\sigma$, viết dưới dạng ma trận như sau:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

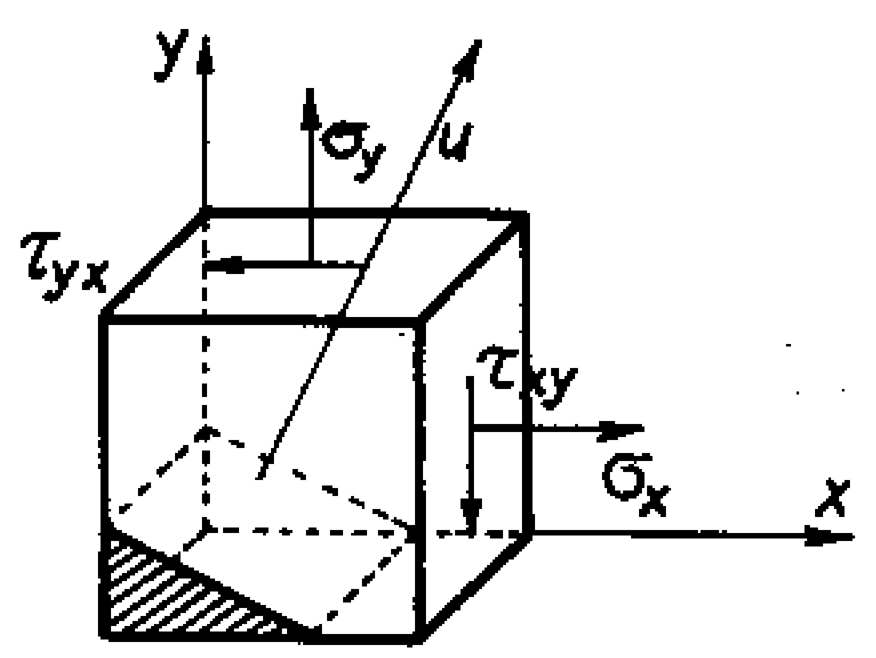
Nghiên cứu chung về TTƯS được đề cập trong Cơ học môi trường liên tục hoặc trong Lý thuyết đàn hồi. Trong giáo trình SBVL chỉ giới thiệu các kết quả chủ yếu đối với TTƯS phẳng, một trường hợp không quá phức tạp mà lại thường gặp khi tính toán các kết cấu thanh.

## 4-2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẲNG

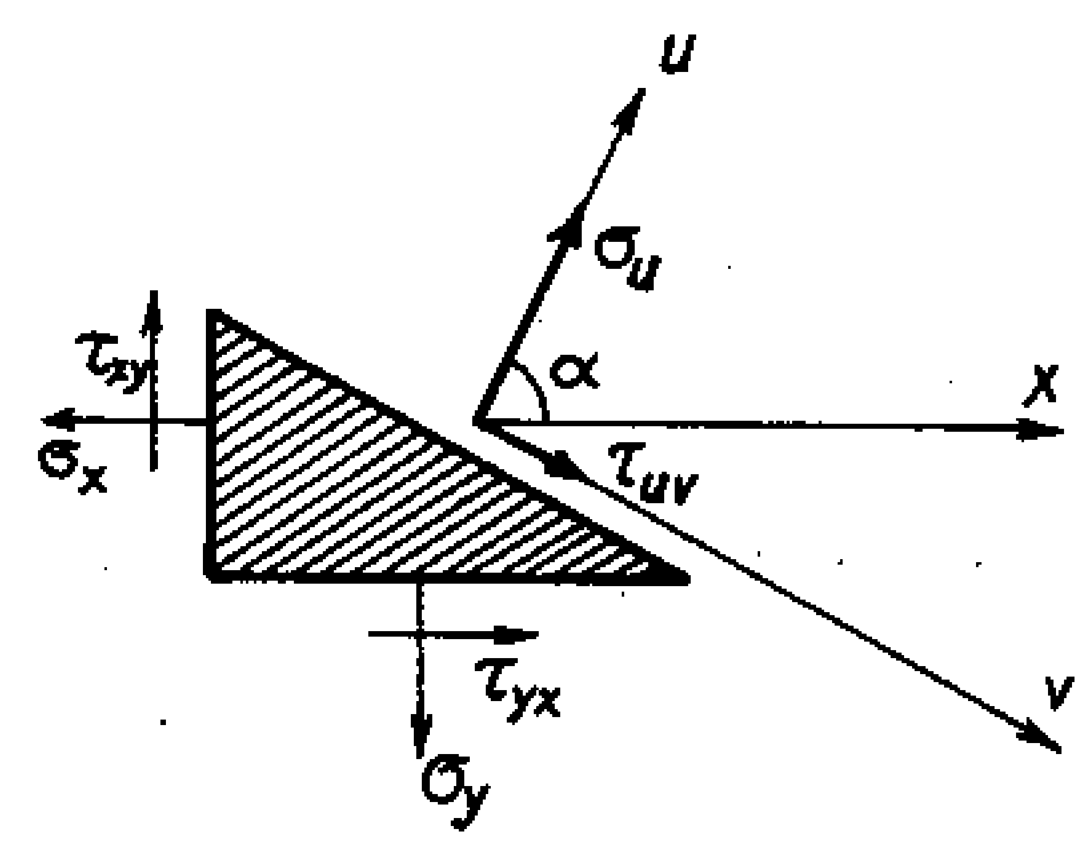
### 4-2-1. TTƯS phẳng tổng quát

Xét phân tố hình hộp chữ nhật trong hệ toạ độ $x$, $y$, $z$ lấy tại điểm $P$ của vật thể. Giả thiết mặt vuông góc với trục $z$ là mặt chính có ứng suất pháp bằng không ($\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$). Những mặt còn lại là bất kỳ, có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Sử dụng định luật đối ứng của ứng suất tiếp (4-1), ta kết luận: Trên mặt vuông góc trục $x$ có ứng suất pháp $\sigma_x$ , ứng suất tiếp $\tau_{xy}$ ; còn trên mặt vuông góc trục $y$ có ứng suất pháp $\sigma_y$ , ứng suất tiếp $\tau_{yx}$ . TTƯS như thế được gọi là TTƯS phẳng tổng quát và được biểu diễn trên hình 4-4. Hai mặt chính còn lại, vuông góc với mặt chính đã biết, sẽ nằm song song với trục $z$.

Dấu của ứng suất tuân theo quy định ở mục 3-4: ứng suất pháp dương hướng ra khỏi mặt cắt, ứng suất tiếp dương đi quanh phân tố theo chiều kim đồng hồ; trên hình 4-5 các ứng suất được đặt theo chiều dương.




*Hình 4-4.* TTƯS phẳng tổng quát




*Hình 4-5.* Ứng suất trên mặt cắt nghiêng

### 4-2-2. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng

Xét mặt cắt nghiêng song song với trục $z$, có pháp tuyến $u$ hợp với trục nằm ngang $x$ một góc $\alpha$ . Trên mặt cắt nghiêng có ứng suất pháp $\sigma_u$ và ứng suất tiếp $\tau_{uv}$. Xét cân bằng của phân tố con hình lăng trụ đáy tam giác có một mặt bên là mặt nghiêng đang xét. Phân tố con được vẽ trên mặt phẳng $xy$ như trên hình 4-5.

* Trên mặt có pháp tuyến là trục $x$, diện tích $dA_x$, có các ứng suất $\sigma_x$ và $\tau_{xy}$.

* Trên mặt có pháp tuyến là trục $y$, diện tích $dA_y$, có các ứng suất $\sigma_y$ và $\tau_{yx}$.

* Trên mặt có pháp tuyến là trục $u$, diện tích $dA_u$, có các ứng suất $\sigma_u$ và $\tau_{uv}$.

Ta có quan hệ giữa các diện tích $dA_x = dA_u \cos\alpha$ ; $dA_y = dA_u \sin\alpha$.

Phương trình cân bằng của các hình chiếu theo hai phương $u$, $v$:

$$\Sigma U = 0 \rightarrow \sigma_u dA_u - \sigma_x \cos\alpha\, dA_x + \tau_{xy} \sin\alpha\, dA_x - \sigma_y \sin\alpha\, dA_y + \tau_{yx} \cos\alpha\, dA_y = 0;$$

$$\Sigma V = 0 \rightarrow \tau_{uv} dA_u - \sigma_x \sin\alpha\, dA_x + \tau_{xy} \cos\alpha\, dA_x - \sigma_y \cos\alpha\, dA_y + \tau_{yx} \sin\alpha\, dA_y = 0.$$

Sau khi rút gọn, sử dụng định luật đối ứng của ứng suất tiếp, ta nhận được:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha ;$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha . \qquad (4\text{-}2)$$

Biểu thức (4-2) được dùng để tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng của TTUS phẳng; dấu của các ứng suất tuân theo quy định chung đã nêu, dấu của góc nghiêng $\alpha$ được lấy theo góc lượng giác: chiều dương là chiều ngược kim đồng hồ tính từ trục nằm ngang $x$.

### *4-2-3. Bất biến của TTUS phẳng*

Ứng suất pháp trên mặt có pháp tuyến $v$, vuông góc với mặt có pháp tuyến $u$ cũng được tính theo công thức (4-2) nếu thay giá trị $\alpha$ bằng giá trị $\alpha - 90^o$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2(\alpha - 90^o) - \tau_{xy} \sin 2(\alpha - 90^o) =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha .$$

Từ đó, kết hợp với biểu thức tính $\sigma_u$, ta có đẳng thức:

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y . \qquad (4\text{-}3)$$

Như vậy, *tại một điểm, tổng ứng suất pháp trên hai mặt vuông góc với nhau là một hằng số, gọi là bất biến của TTUS phẳng.*

### *4-2-4. Cực trị của ứng suất pháp và giá trị ứng suất chính*

Ứng suất pháp là một hàm của biến $\alpha$ nên đạt cực trị khi

$$\frac{d\sigma_u}{d\alpha} = 0 \rightarrow -2\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) = 0 . \qquad (a)$$

Vị trí mặt chính, phương chính tìm được từ điều kiện cho giá trị của ứng suất tiếp bằng không

$$\tau_{uv} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin\,2\alpha + \tau_{xy}\,cos\,2\alpha = 0\,. \qquad (b)$$

Điều kiện (a) và (b) trùng hợp nhau, cho phép ta kết luận: *ứng suất chính là ứng suất pháp cực trị*. Giải các điều kiện này, ta tìm được phương chính:

$$tg2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\,;$$

$$2\alpha = 2\beta \pm k\pi\alpha \;\rightarrow\; \alpha_1 = \beta; \quad \alpha_2 = \beta \pm \frac{\pi}{2}\,. \qquad (c)$$

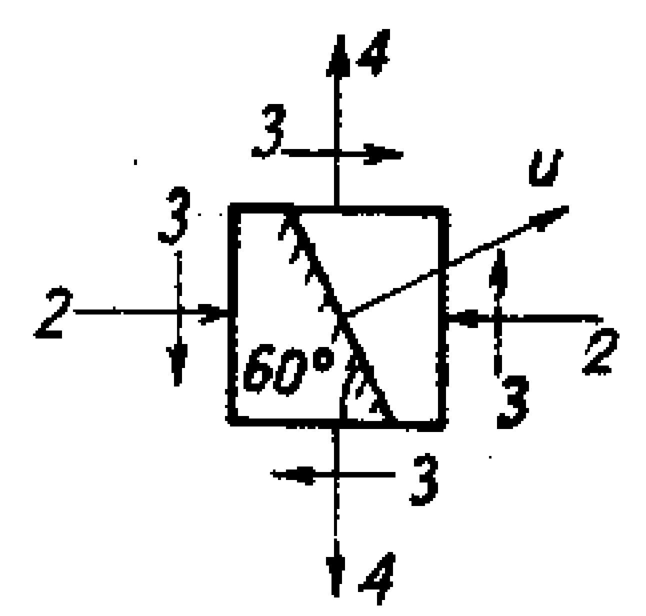
Ta thấy hai phương chính tìm được vuông góc với nhau, do đó *hai mặt chính cũng vuông góc với nhau* và cùng vuông góc với mặt chính đã biết.

Thay giá trị (c) vào công thức của ứng suất pháp, sau khi biến đổi, ta có giá trị của hai ứng suất chính, đồng thời là ứng suất cực trị:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \qquad (4\text{-}4)$$

Phần căn thức mang dấu cộng khi tính $\sigma_{max}$ và mang dấu trừ khi tính $\sigma_{min}$.

***Ví dụ 4-1***. Tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng của TTUS phẳng cho trên hình 4-6. Các ứng suất cho theo kN/cm$^2$.



*Hình 4-6.* Cho ví dụ 4-1

*Bài giải*. Theo quy ước, ta có:

$\sigma_x = -2$ kN/cm$^2$ ; $\sigma_y = 4$ kN/cm$^2$ ;

$\tau_{xy} = -3$ kN/cm$^2$ ; $\alpha = +30^o$ .

Vậy $\quad \sigma_u = \dfrac{-2+4}{2} + \dfrac{-2-4}{2} cos\,60^o - (-3)\,sin\,60^o = 1{,}1$ kN/cm$^2$ ;

$$\tau_{uv} = \frac{-2-4}{2} sin60^o + (-3)\,cos60^o = -4{,}1 \text{ kN/cm}^2\,.$$

***Ví dụ 4-2***. Tìm các ứng suất chính của TTUS cho trên hình 4-7. Ứng suất cho theo kN/cm$^2$.

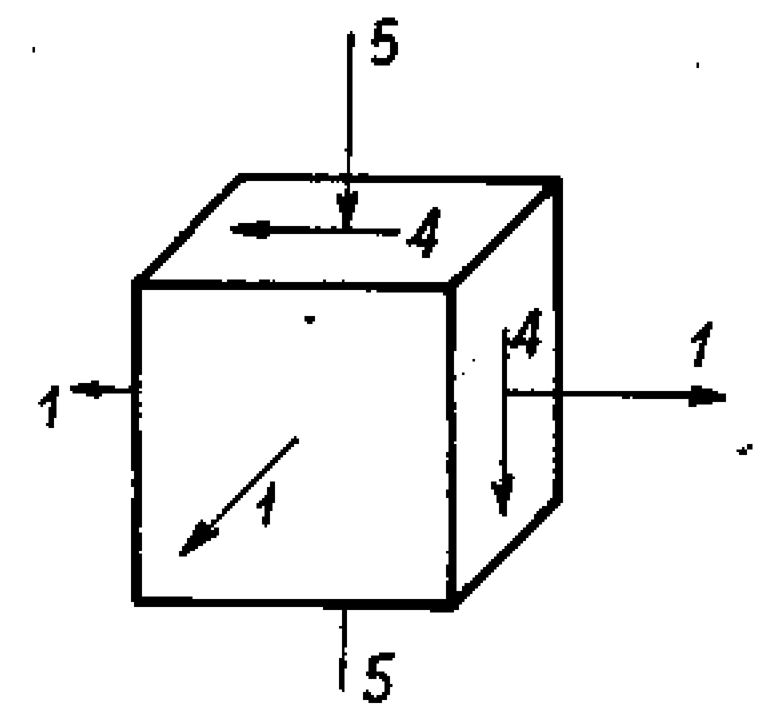
*Bài giải*. Theo đề bài, ta đã biết một mặt chính. Hai mặt chính còn lại sẽ là những mặt nghiêng vuông góc với mặt chính đã cho. Biểu thức của ứng suất trên những mặt nghiêng này cũng được tính theo công thức (4-2) mà không phụ thuộc vào ứng suất chính đã cho $1$ kN/cm$^2$. Vậy hai ứng suất chính còn lại sẽ tìm từ công thức (4-4) với:

$\sigma_x = 1$ kN/cm2 ;

$\sigma_y = -5$ kN/cm2 ;

$\tau_{xy} = 4$ kN/cm2 .

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{1-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+5}{2}\right)^2 + 4^2} = \begin{matrix} 3 \\ -7 \end{matrix} \text{ kN/cm}^2.$$



*Hình 4-7.* Cho ví dụ 4-2

Theo quy ước:

$\sigma_1 = 3$ kN/cm2 ; $\sigma_2 = 1$ kN/cm2 ; $\sigma_3 = -7$ kN/cm2 .

## 4-3. VÒNG TRÒN MOHR ỨNG SUẤT

### 4-3-1. Phương trình vòng tròn Mohr

Quan hệ (4-2) là quan hệ giữa ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt nghiêng của TTƯS phẳng viết qua tham số $\alpha$, ta khử tham số này bằng cách viết lại (4-2) dưới dạng:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos 2\alpha - \tau_{xy} sin 2\alpha\right)^2 ;$$

$$\tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos 2\alpha + \tau_{xy} sin 2\alpha\right)^2 .$$

Cộng hai vế và rút gọn, ta nhận được phương trình:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 .$$

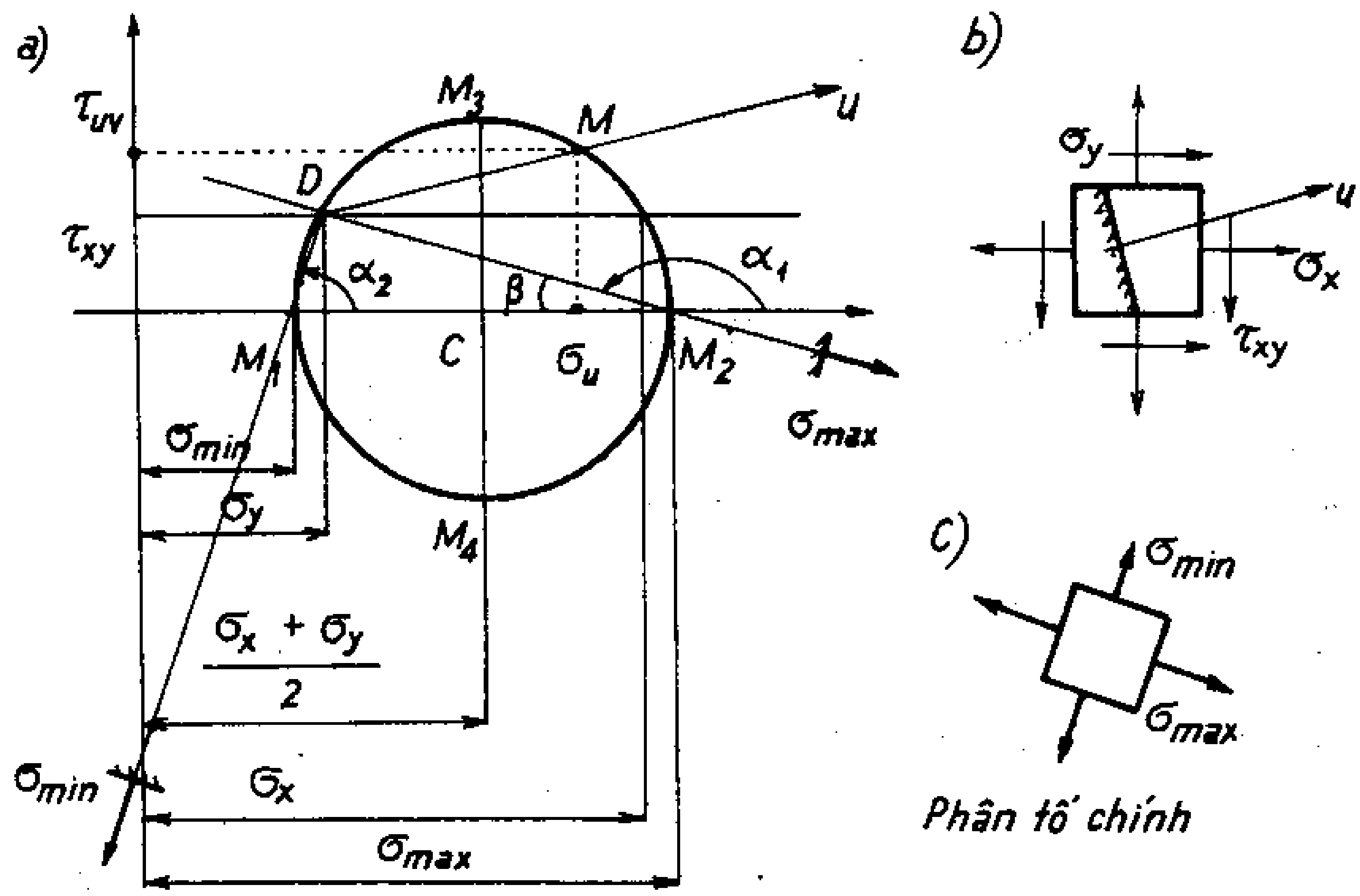
Đây là phương trình đường tròn trong hệ trục $\sigma_u$, $\tau_{uv}$ có:

$$\text{tâm } C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \tau_{xy}\right) ; \quad \text{bán kính } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Vòng tròn này được gọi là vòng tròn Mohr ứng suất của TTƯS phẳng đã cho.

### 4-3-2. Cách dựng vòng tròn Mohr

Trước tiên ta lập hệ trục vuông góc $\sigma_u$, $\tau_{uv}$. Trên trục hoành $\sigma_u$, lấy điểm $A$, $B$ có hoành độ $\sigma_x$ và $\sigma_y$ (trên hình 4-8 giả thiết $\sigma_x > \sigma_y$), trung điểm của $AB$ chính là tâm $C$ của vòng tròn. Đặt điểm $D(\sigma_y, \tau_{xy})$, gọi là cực; $CD = \sqrt{BC^2 + BD^2}$ là bán kính $R$ của vòng tròn. Với tâm $C$, bán kính $R$ ta vẽ được vòng tròn Mohr như trên hình 4-8.




*Hình 4-8.* Vòng tròn Mohr ứng suất

### *4-3-3. Tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng*

Mỗi điểm trên vòng Mohr đặc trưng cho một mặt cắt nghiêng, hoành độ là trị số của ứng suất pháp và tung độ là trị số của ứng suất tiếp. Nếu từ cực $D$ kẻ tia song song với pháp tuyến mặt cắt, hợp với trục hoành một góc $\alpha$, cắt vòng Mohr tại điểm $M$ thì có thể chứng minh được rằng điểm $M$ đặc trưng cho mặt cắt nghiêng đang xét (hình 4-8a), nghĩa là có thể đo hoành độ của $M$ bằng $\sigma_u$ và tung độ của $M$ bằng $\tau_{uv}$.

### *4-3-4. Ứng suất chính, cực trị của ứng suất*

Điểm $M_1$, $M_2$ là những điểm có tung độ bằng không, đặc trưng cho các mặt chính. Nhưng các điểm này có hoành độ cực trị nên đồng thời lại đặc trưng cho mặt có ứng suất pháp cực trị, như đã biết khi nghiên cứu biểu thức giải tích của ứng suất. Các ứng suất chính là

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = OM_{1,2} = OC \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Phương chính là phương $DM_1$, $DM_2$. Mặt chính là những mặt vuông góc với phương chính, phân tố chính có vị trí chỉ trên hình 4-8c.

Điểm $M_3$ , $M_4$ là những điểm có tung độ cực trị, đặc trưng cho mặt có ứng suất tiếp cực trị

$$|\tau|_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,, \tag{4-5}$$

hoặc
$$|\tau|_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\,. \tag{4-6}$$

### *4-3-5. TTỨS phẳng đặc biệt, TTỨS trượt thuần tuý*

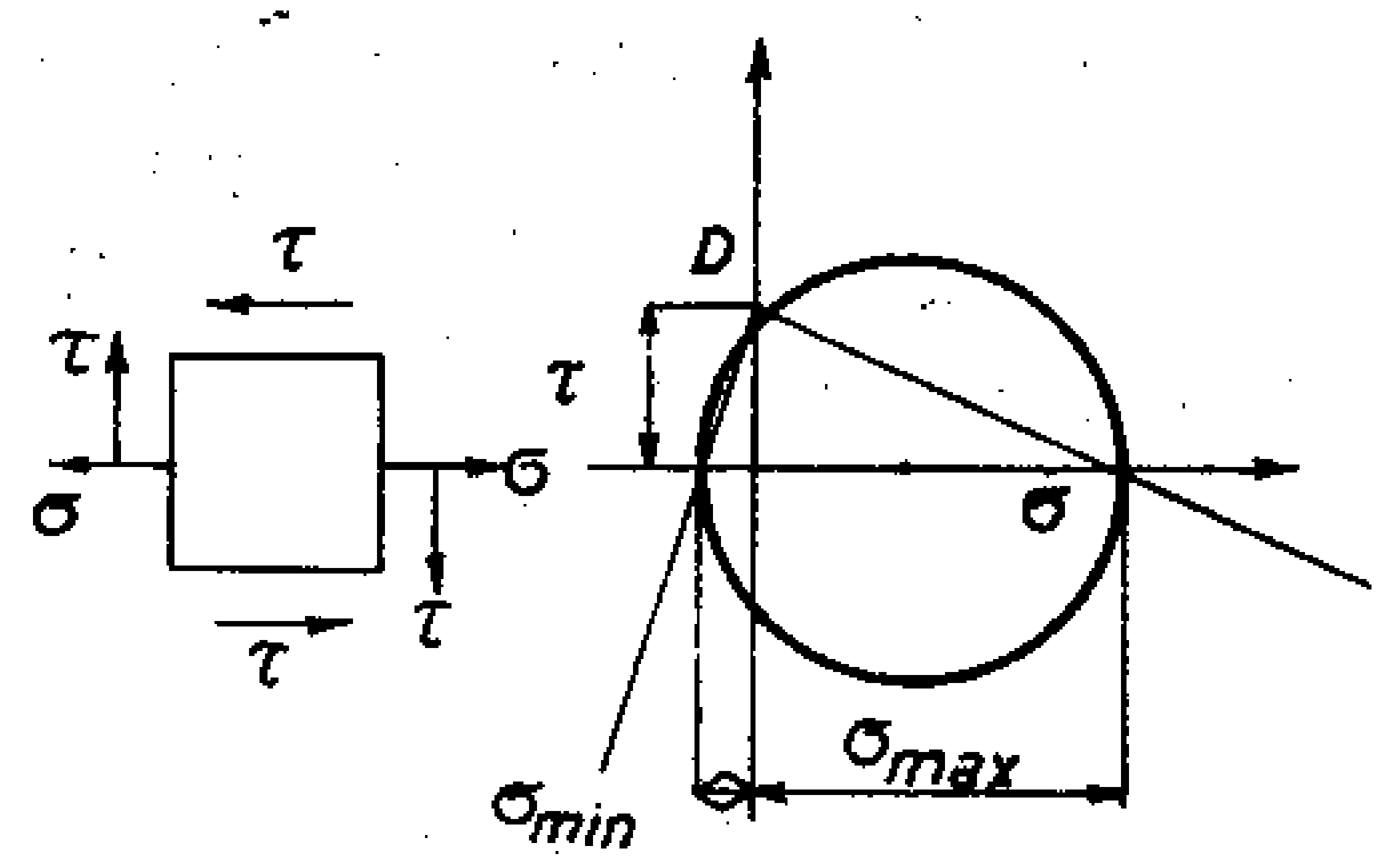
♦ *TTỨS phẳng đặc biệt* là TTỨS phẳng có một ứng suất pháp, chẳng hạn $\sigma_y$, bằng không. Vòng tròn Mohr của TTỨS này được vẽ trên hình 4-9.

Trị số các ứng suất cực trị, theo (4-4), là $\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$ .

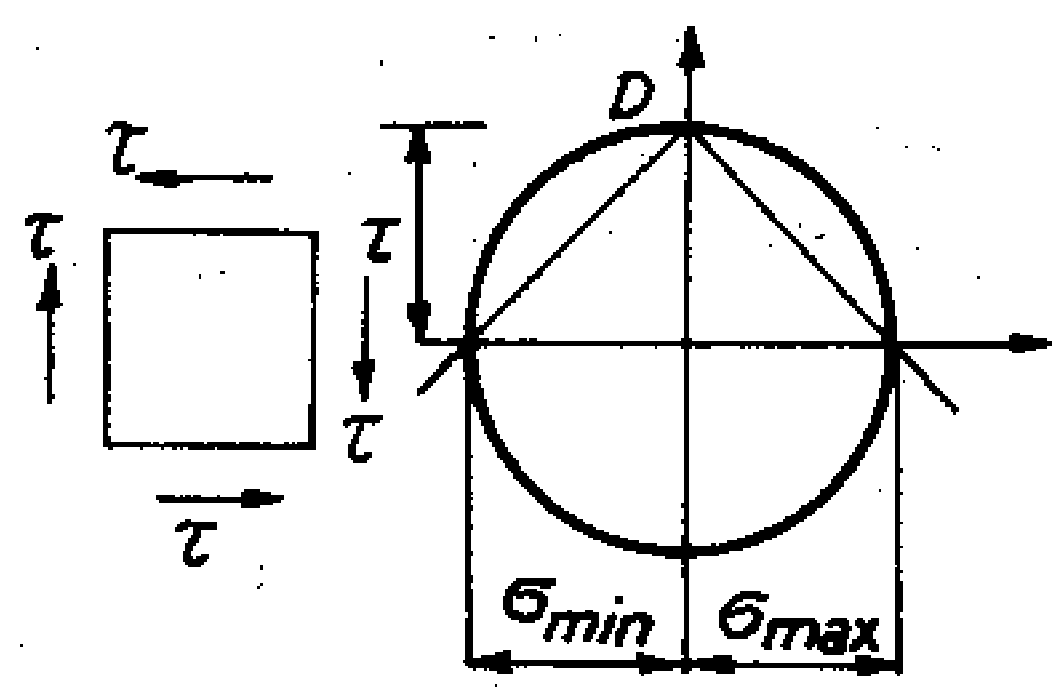
Do đó các ứng suất chính là

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} > 0; \quad \sigma_2 = 0\,; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < 0. \tag{4-7}$$

Ứng suất tiếp cực trị, theo (4-6), là $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$ .



*Hình 4-9.* TTỨS phẳng đặc biệt



*Hình 4-10.* TTỨS trượt thuần tuý

♦ *TTỨS trượt thuần tuý* là TTỨS phẳng có hai ứng suất pháp đều bằng không.

Vòng tròn Mohr của TTỨS này được vẽ trên hình 4-10.

Trị số các ứng suất cực trị, theo (4-4), là $\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm|\tau|$.

Các ứng suất chính là $\sigma_1 = |\tau|$; $\sigma_2 = 0$ ; $\sigma_3 = -|\tau|$. (4-9)

Phương chính lập với trục hoành các góc $45^0$.

Ứng suất tiếp cực trị $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau$. (4-10)

## 4-4. QUAN HỆ ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG. ĐỊNH LUẬT HOOKE

### 4-4-1. TTỨS đơn

ở TTỨS đơn, phân tố chính chỉ có biến dạng dài.

Biến dạng dài theo phương của ứng suất: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$. (4-11)

Biến dạng dài theo phương vuông góc với ứng suất: $\varepsilon' = -\mu \dfrac{\sigma}{E}$. (4-12)

Ứng suất pháp không gây biến dạng góc.

### 4-4-2. TTỨS trượt thuần tuý

Ở TTỨS trượt thuần tuý, phân tố không có biến dạng dài, chỉ có biến dạng góc trong mặt phẳng tác dụng của ứng suất tiếp (hình 4-10)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad (4\text{-}13)$$

với $$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

### 4-4-3. TTỨS tổng quát

Ở TTỨS này, phân tố có cả biến dạng dài của các cạnh và biến dạng góc của các góc vuông.

Trên cơ sở các kết quả trình bày ở trên, ta thừa nhận:

- Ứng suất pháp chỉ gây biến dạng dài, ứng suất tiếp chỉ gây biến dạng góc trong mặt phẳng tác dụng của ứng suất tiếp.
- Nguyên lý độc lập tác dụng: các quan hệ là tuyến tính nên biến dạng do nhiều thành phần ứng suất gây ra bằng tổng các biến dạng do từng ứng suất gây ra riêng rẽ.

♦ ***Biến dạng dài***, chẳng hạn theo phương $x$, sẽ phụ thuộc vào các ứng suất pháp

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \varepsilon_x(\sigma_x) + \varepsilon_y(\sigma_y) + \varepsilon_z(\sigma_z),$$

$\varepsilon_x(\sigma_x)$ - biến dạng dài theo phương $x$ do $\sigma_x$, theo (4-11), $\varepsilon_x(\sigma_x) = \sigma_x/E$;

$\varepsilon_x(\sigma_y)$ - biến dạng dài theo phương $x$ do $\sigma_y$, theo (4-12), $\varepsilon_x(\sigma_y) = -\mu\sigma_y/E$;

$\varepsilon_x(\sigma_z)$ - biến dạng dài theo phương $x$ do $\sigma_z$, theo (4-12), $\varepsilon_x(\sigma_z) = -\mu\sigma_z/E$.

Làm phép tính tương tự cho các biến dạng dài theo phương $y$ và $z$ còn lại, ta có

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right]; \qquad (4\text{-}14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right].$$

♦ ***Biến dạng góc*** trong từng mặt phẳng, do ứng suất tiếp tương ứng gây ra, theo 4-13, là

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \qquad (4\text{-}15)$$

Đôi khi người ta còn dùng ký hiệu một nửa biến dạng góc như sau:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}; \qquad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}.$$

♦ Biến dạng thể tích tỷ đối, ký hiệu $\theta$, là lượng thay đổi của một đơn vị thể tích.

Thể tích ban đầu của phân tố: $dV = dx.dy.dz$.

Sau biến dạng, chiều dài các cạnh thay đổi, chẳng hạn cạnh $dx$ trở thành $dx+\varepsilon_x dx$, do đó thể tích của phân tố trở thành

$$dV_1 = (dx+\varepsilon_x dx)(dy+\varepsilon_y dy)(dz+\varepsilon_z dz) = dx.dy.dz\,(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z).$$

Biến dạng thể tích tỷ đối $\theta$ sẽ là

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dxdydz(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - dxdydz}{dxdydz} =$$

$$= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1.$$

Sau khi khai triển biểu thức, bỏ qua tích của các biến dạng là những vô cùng bé bậc cao so với bản thân các biến dạng, nhận được:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (4\text{-}16)$$

Theo (4-14) thay biến dạng bởi ứng suất, ta có

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (4\text{-}17)$$

Các biểu thức (4-14), (4-15), (4-17) gọi chung là định luật Hooke tổng quát, diễn tả quan hệ tuyến tính thuần nhất giữa ứng suất và biến dạng.

Chín giá trị các biến dạng dài và biến dạng góc vừa nêu đặc trưng cho trạng thái biến dạng tại điểm đang xét. Chúng cũng lập thành một đại lượng gọi là tenxơ biến dạng, có những tính chất tương tự như tenxơ ứng suất.

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Những nghiên cứu về TTBD được đề cập trong Cơ học môi trường liên tục hoặc trong Lý thuyết đàn hồi.

### *4-5-4. TTUS phẳng*

Biểu thức biến dạng qua ứng suất:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y\right]; \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x\right];$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \qquad (4\text{-}16)$$

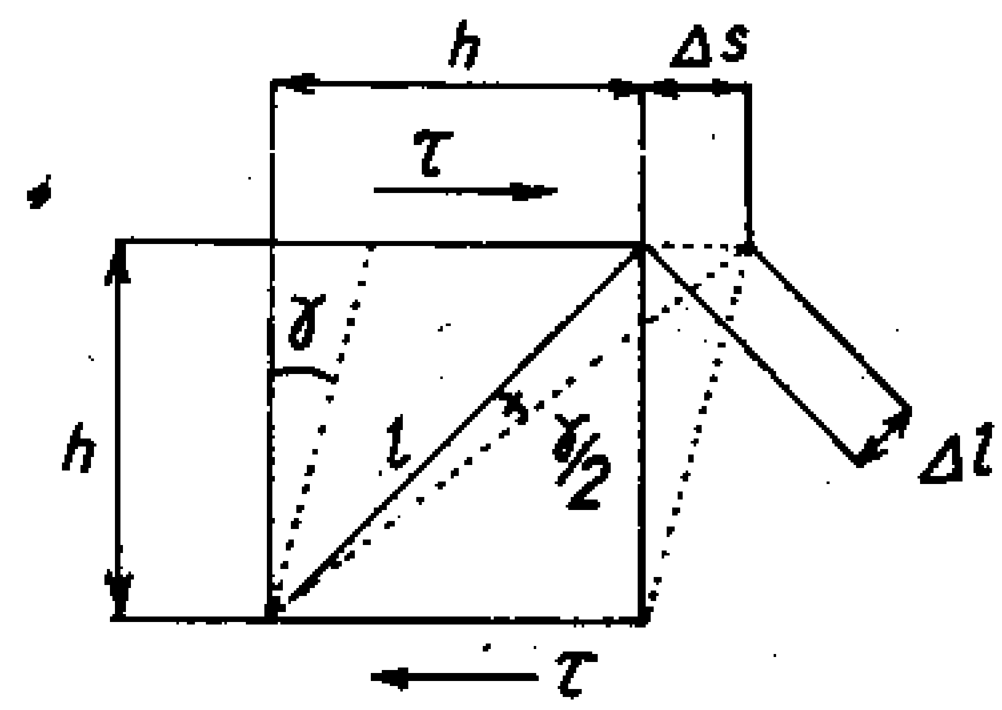
Biểu thức ứng suất qua biến dạng:

$$\sigma_x = E\left[\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right]; \quad \sigma_y = E\left[\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right]; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \qquad (4\text{-}17)$$

### *4-5-5. Quan hệ giữa các hằng số đàn hồi E, μ và G*

Xét một phân tố phẳng hình vuông chịu biến dạng trượt thuần tuý, trên các cạnh có ứng suất tiếp. Sau biến dạng, góc vuông có biến dạng $\gamma$, đường chéo $l$ của phân tố có biến dạng dài tuyệt đối $\Delta l$ như trên hình 4-11.

Do biến dạng nhỏ, từ hình 4-11 ta có thể viết $\Delta l = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta s$.




*Hình 4-11.* Quan hệ giữa các hằng số đàn hồi

Chiều dài đường chéo của phân tố $l = h\sqrt{2}$, do đó: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{2h} = \frac{\gamma}{2}$. (a)

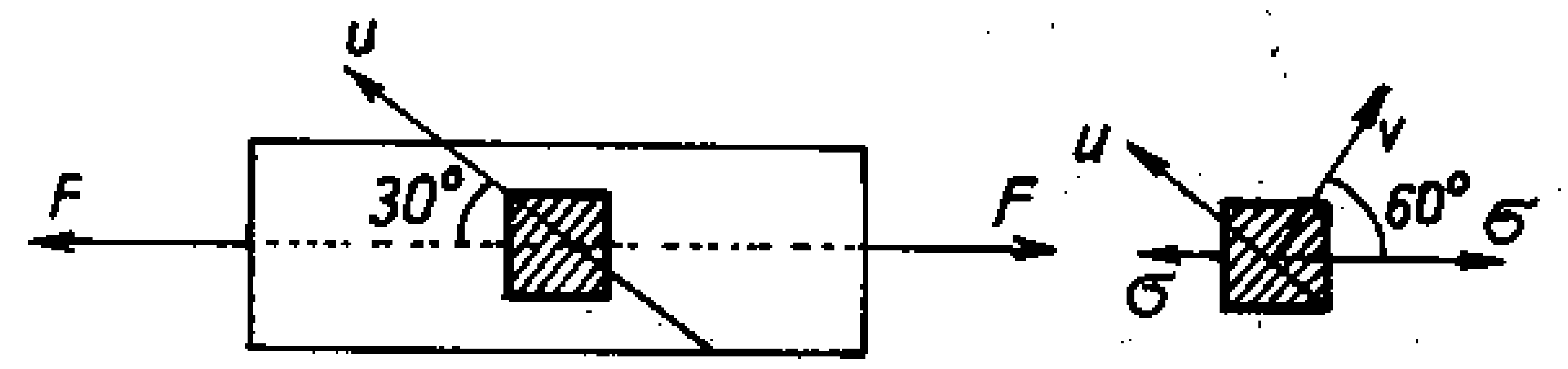
Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần tuý $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, đường chéo của phân tố cũng là phương của ứng suất chính thứ nhất, do đó biến dạng dài theo phương đường chéo là

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3) = \frac{1+\mu}{E}\tau. \qquad (b)$$

So sánh (a) và (b), ta rút ra quan hệ:

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma = G\gamma\ , \quad \text{hoặc} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

***Ví dụ 4-3***. Người ta đo được biến dạng dài theo phương nghiêng $u$ tại một điểm trên bề mặt của thanh chịu kéo $\varepsilon_u = 10^{-2}$ (hình 4-12). Cho biết diện tích tiết diện $A = 2$ cm$^2$, góc nghiêng $\alpha = 30^0$, môđun đàn hồi $E = 10^3$ kN/cm$^2$, hệ số nở ngang $\mu = 0{,}4$. Xác định trị số lực $F$.




*Hình 4-12.* Cho ví dụ 4-3

*Bài giải*. Phân tố thanh, có các mặt song song và vuông góc với trục thanh, ở trạng thái ứng suất đơn với trị số ứng suất chính $\sigma = F/A$. Phương $v$, vuông góc với phương $u$, có góc nghiêng với trục thanh là $+\ 60^o$, do đó ứng suất pháp theo phương này là $\sigma_v = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 120^o = \frac{\sigma}{4}$.

Sử dụng bất biến của TTỨS phẳng (4-3), ta tính được: $\sigma_u = \sigma - \sigma_v = \frac{3}{4}\sigma$.

Theo định luật Hooke: $E\varepsilon_u = \sigma_u - \mu\sigma_v = \frac{3-\mu}{4}\sigma = \frac{3-\mu}{4}\frac{F}{A}$,

suy ra $\quad F = \frac{4}{3-\mu}EA\varepsilon_u = \frac{4}{3-0{,}4}10^3.2.10^{-2} = 30{,}77$ kN.

## 4-5. BIỂU THỨC CỦA THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

### 4-5-1. TNBDĐH riêng

Khi xét TNBDĐH riêng trên một đơn vị thể tích, ta tính công thực của các ứng suất trên các biến dạng tương ứng của phân tố. Để đơn giản, ta xét phân tố chính trên hình 4-13, các ứng suất là $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ với các biến dạng dài tương ứng là $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. Công được xác định bằng tổng công thực của tất cả các ứng suất trên các biến dạng tương ứng theo công thức (3-6), do đó ta có TNBDĐH riêng:

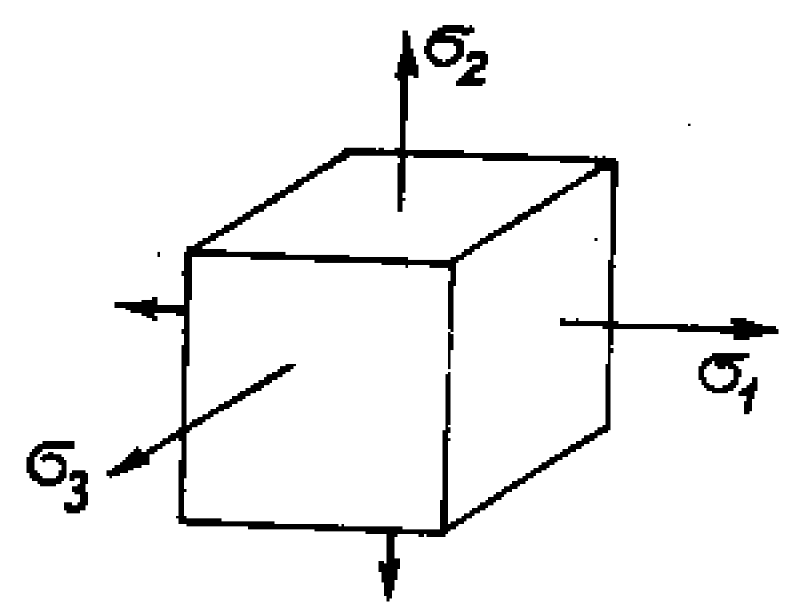
$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)\,, \tag{4-18}$$

trong đó biến dạng $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ là biến dạng dài theo các phương chính do tất cả các ứng suất chính gây ra, tính theo công thức (4-14)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$



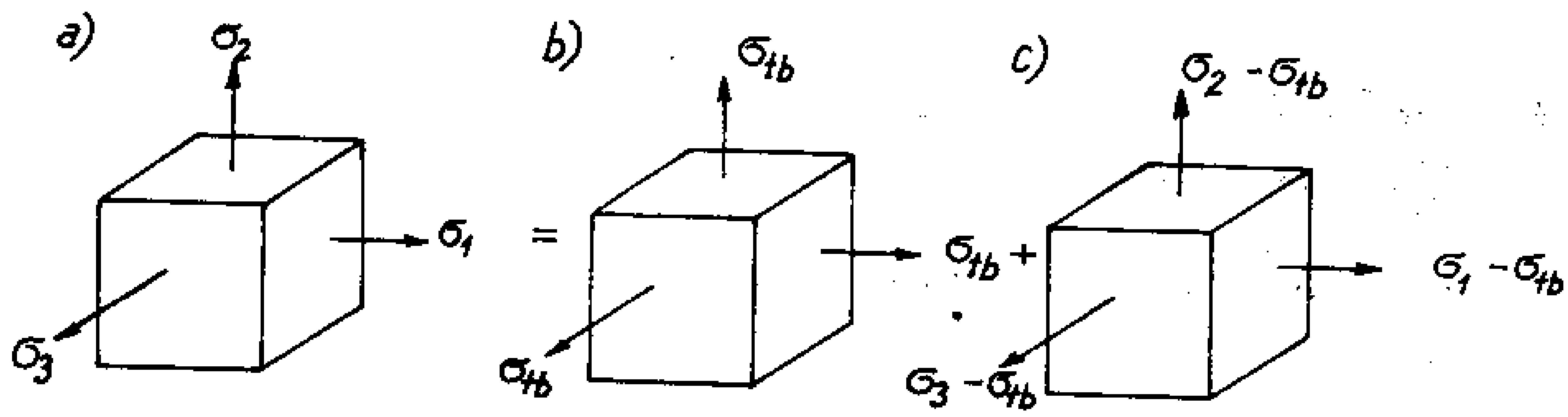

*Hình 4-13.* TTƯS khối

Thay biến dạng theo công thức trên vào biểu thức (4-18) của TNBDĐH riêng, ta có

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \qquad (4\text{-}19)$$

### *4-5-2. TNBDĐH thể tích và TNBDĐH hình dáng*

Có thể phân tích trạng thái ứng suất khối thành tổng của hai TTƯS như trên hình 4-14.




*Hình 4-14.* Phân tích TTƯS thành hai TTƯS biến dạng riêng rẽ

* Một trạng thái kéo hoặc nén đều theo ba phương (hình 4-14b) với ứng suất chính là trị số trung bình

$$\sigma_{tb} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Do kéo, nén đều nên tỷ lệ kích thước các cạnh không thay đổi, nói cách khác TTƯS kéo, nén đều theo ba phương không có biến dạng về hình dáng, mà chỉ có biến dạng về thể tích.

* Một trạng thái (hình 4-14c) đặc trưng bởi các ứng suất chính có giá trị

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb}; \quad \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb}; \quad \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{tb}.$$

Vì tổng của ba ứng suất chính $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$, nên theo công thức (4-17), TTƯS thứ hai không có biến dạng thể tích mà chỉ có thay đổi về hình dáng .

Nếu chia TNBDĐH của phân tố ra thành hai phần: một phần gọi là TNBD thể tích và một phần gọi là TNBD hình dáng thì: TNBD thể tích chính là TNBDĐH của TTƯS thứ nhất; TNBD hình dáng chính là TNBDĐH của TTƯS thứ hai.

$$u = u_{tt} + u_{hd}$$

Theo biểu thức tính TNBDĐH (4-19), ta tính được:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right],$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb})\right] =$$

$$= \frac{3-2\mu}{2E}\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2.$$

Do đó:

$$u_{hd} = u - u_{tt} = \frac{1+\mu}{E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right). \quad (4\text{-}20)$$

Đề nghị bạn đọc tự biến đổi để nhận được biểu thức vừa viết, xem như một bài tập.

## *4-6. ĐIỀU KIỆN BỀN CỦA VẬT LIỆU Ở TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHỨC TẠP*

### *4-6-1. Độ bền của vật liệu ở TTƯS đơn*

Ở TTƯS đơn độ bền của phân tố chỉ phụ thuộc vào một ứng suất chính.

Điều kiện bền cho TTƯS đơn đã được thiết lập trong chương kéo, nén đúng tâm

$$\sigma \le [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}.$$

Trị số ứng suất giới hạn $\sigma_o$ tìm từ những thí nghiệm kéo, nén đơn giản, lấy bằng $\sigma_b$ đối với vật liệu giòn và bằng $\sigma_{ch}$ hoặc $\sigma_{tl}$ đối với vật liệu dẻo.

Dấu bằng trong điều kiện bền được coi là trường hợp giới hạn.

### *4-6-2. Độ bền của vật liệu ở TTƯS khối*

Ở TTƯS khối độ bền của phân tố phụ thuộc vào ba ứng suất chính. Có hai cách đánh giá độ bền như sau:

**1- Suy diễn hình thức**

Giống như đối với TTƯS đơn, điều kiện bền có thể viết dưới dạng:

$$\sigma_1 \le [\sigma_1]; \quad \sigma_2 \le [\sigma_2]; \quad \sigma_3 \le [\sigma_3],$$

các trị số giới hạn cho phép ở vế phải cũng phải tìm từ các thí nghiệm.

Tuy nhiên, ý tưởng viết điều kiện bền của vật liệu ở TTƯS khối theo cách suy diễn hình thức như vừa trình bày là không khả thi vì hai lý do sau:

* Thí nghiệm kéo, nén theo ba chiều đòi hỏi những thiết bị phức tạp, không phổ biến rộng rãi như thí nghiệm kéo, nén theo một chiều.

* Trong các thí nghiệm phải đảm bảo tỷ số giữa các ứng suất chính giống như ở TTUS thực đang xét, kết quả thí nghiệm phụ thuộc vào các tỷ số này. Chẳng hạn, khi xét trường hợp $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = k_1$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = k_2$ thì cũng phải thí nghiệm với tỷ số ứng suất chính tương tự và sẽ nhận được kết quả $[\sigma_1] = k_1 [\sigma_2]$; $[\sigma_2] = k_2 [\sigma_3]$.. Số lượng các giá trị thực tế của $k_1, k_2$ là vô cùng nhiều nên không thể thực hiện được tất cả các thí nghiệm tương ứng với các trường hợp thực tế.

Do vậy, để đánh giá điều kiện bền của trạng thái ứng suất phức tạp ta phải dựa trên các nhận định, các phán đoán hoặc gọi là các giả thiết về nguyên nhân cơ bản gây ra sự phá hoại của vật liệu.

### 2- Giả thiết về nguyên nhân gây ra sự phá hoại của vật liệu

Một cách tổng quát, điều kiện bền của vật liệu có thể viết dưới dạng bất đẳng thức sau

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C) \leq 0 , \qquad (4\text{-}21)$$

với $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các ứng suất chính và $C$ là đặc trưng cơ học của vật liệu.

Dạng cụ thể, đơn giản hoá của (4-21) được viết tuỳ theo từng cách đánh giá, từng cách giả thiết về nguyên nhân gây nên sự phá hỏng của vật liệu.

*Thuyết bền là những giả thiết về nguyên nhân cơ bản gây nên sự phá hỏng của vật liệu*, nguyên nhân này không phụ thuộc vào dạng của TTUS, nhờ đó ta có thể viết điều kiện bền của TTUS phức tạp khi chỉ có các kết quả thí nghiệm ở TTUS đơn. Sự chuẩn xác của các thuyết bền được đánh giá thông qua các kết quả kiểm nghiệm và sử dụng thực tế. Dưới đây sẽ giới thiệu một vài thuyết bền đặc trưng, thường dùng trong kỹ thuật xây dựng, cơ khí.

### *4-6-3. Thuyết bền ứng suất pháp (thuyết bền thứ nhất)*

<u>*Phát biểu*</u>: *Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở TTUS khối là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới một giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.*

<u>*Biểu thức*</u>: Nếu ký hiệu giới hạn của ứng suất pháp lớn nhất là $L$ thì, ở TTUS khối, điều kiện bền sẽ viết là $(\sigma_1, \sigma_3) \leq L$. Còn ở TTUS đơn giới hạn của ứng suất chính là $[\sigma]$. Giới hạn không phụ thuộc dạng của TTUS nên $L = [\sigma]$.

Vậy điều kiện bền ở TTUS khối được viết là $(\sigma_1, \sigma_3) \leq [\sigma]$

Hoặc viết riêng biệt $\sigma_1 \leq [\sigma]_k$ ; (4-22)

$|\sigma_3| \leq [\sigma]_n$ . (4-22)

Thuyết bền ứng suất pháp tuy ra đời sớm nhất nhưng quá sơ sài nên không phù hợp với thực tế và chỉ đúng đối với TTƯS đơn.

### *4-6-4. Thuyết bền biến dạng dài (thuyết bền thứ hai)*

__*Phát biểu*__: *Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở TTƯS khối là do trị số của biến dạng dài lớn nhất đạt tới một giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTƯS.*

__*Biểu thức*__: Nếu ký hiệu giới hạn của biến dạng dài lớn nhất là $L$ thì ở TTƯS khối, điều kiện bền sẽ viết là $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq L$ . Còn ở TTƯS đơn, biến dạng dài lớn nhất $\varepsilon = \sigma / E$ sẽ có giới hạn là $[\sigma] / E$.

Giới hạn không phụ thuộc dạng của TTƯS nên $L = [\sigma] / E$.

Điều kiện bền ở TTƯS khối được viết là

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] . \qquad (4\text{-}23)$$

Thuyết bền biến dạng dài tiến bộ hơn thuyết bền thứ nhất, cho các kết quả tương đối phù hợp với vật liệu giòn.

### *4-6-5. Thuyết bền ứng suất tiếp (thuyết bền thứ ba)*

__*Phát biểu*__: *Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở TTƯS khối là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp đạt tới một giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTƯS.*

__*Biểu thức*__: Nếu ký hiệu giới hạn của ứng suất tiếp lớn nhất là $L$ thì ở TTƯS khối, điều kiện bền sẽ viết là $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq L$ . Ở TTƯS đơn $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$ nên giới hạn của ứng suất tiếp lớn nhất sẽ là $\frac{1}{2}[\sigma]$.

Điều kiện giới hạn không phụ thuộc dạng của TTƯS cho phép ta viết $L = \frac{1}{2}[\sigma]$.

Vậy điều kiện bền ở TTƯS khối được viết là

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \qquad (4\text{-}24)$$

Thuyết bền ứng suất tiếp chưa kể đến ảnh hưởng của ứng suất chính thứ hai $\sigma_2$ nhưng khá thích hợp với vật liệu dẻo.

### *4-6-6. Thuyết bền TNBDĐH hình dáng (thuyết bền thứ tư)*

*Phát biểu: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở TTUS khối là do: trị số lớn nhất của TNBDĐH hình dáng đạt tới một giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.*

*Biểu thức:* Nếu ký hiệu giới hạn của TNBDĐH hình dáng là $L$ thì, ở TTUS khối, điều kiện bền sẽ viết là

$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right] \le L .$$

Ở TTUS đơn, TNBDĐH hình dáng $u_{hd}=\frac{1+\mu}{3E}\sigma^2$, sẽ có giới hạn là $\frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2$.

Giới hạn không phụ thuộc dạng của TTUS nên $L = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2$.

Vậy điều kiện bền ở TTUS khối được viết là

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \le [\sigma]. \qquad (4\text{-}25)$$

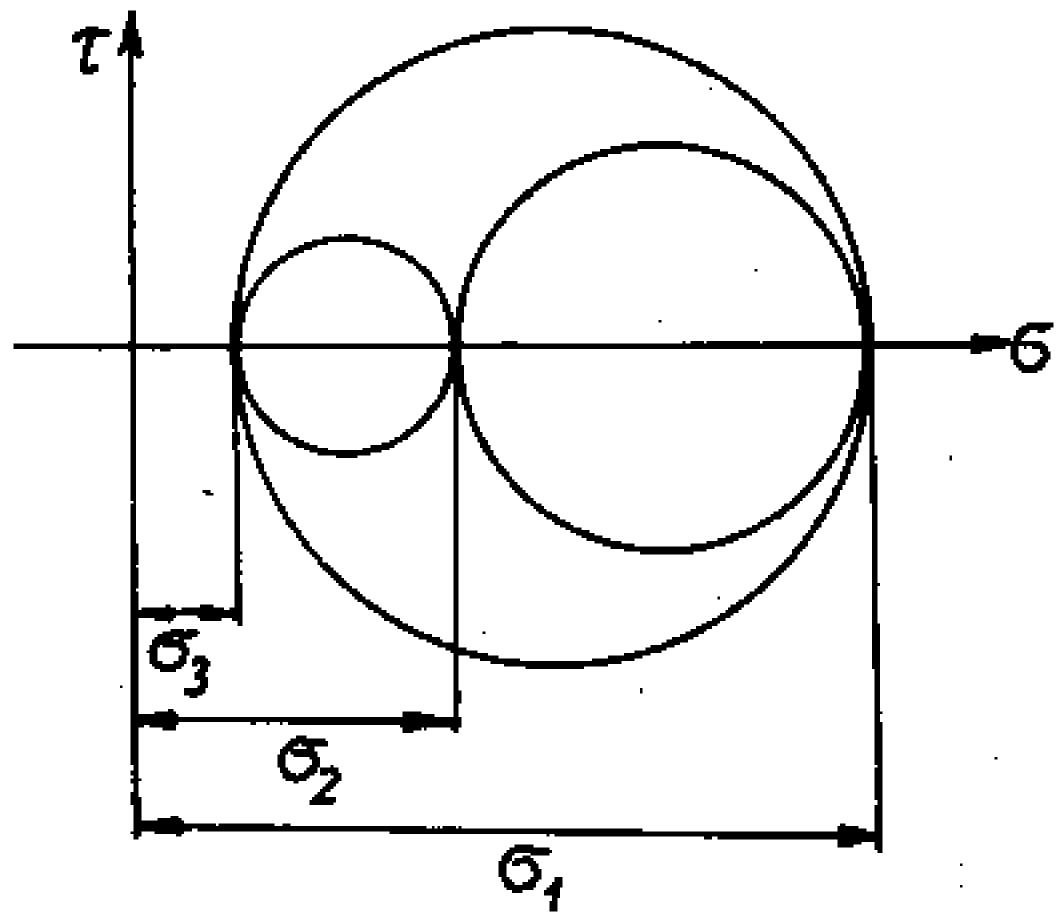
Thuyết bền ứng suất tiếp và thuyết bền TNBDĐH hình dáng thích hợp với vật liệu dẻo. Trạng thái giới hạn của vật liệu dẻo là sự phát sinh biến dạng dẻo, nên điều kiện (4-24) và (4-25) lấy với dấu bằng cũng có thể coi là điều kiện phát sinh những biến dạng dẻo đầu tiên trong vật liệu. Những điều kiện này được gọi tương ứng là điều kiện dẻo Trefftz- Saint Venant và điều kiện dẻo Huber-Misès, có ý nghĩa quan trọng khi nghiên cứu bài toán ngoài giới hạn đàn hồi.

### *4-6-7. Thuyết bền Mohr*

Khác với những thuyết bền đã trình bày ở trên, xây dựng trên cơ sở giả thuyết, thuyết bền Mohr được xây dựng trên cơ sở kết quả các thực nghiệm. Mỗi trạng thái ứng suất khối với các ứng suất chính $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ sẽ có ba vòng tròn Mohr với các đường kính tương ứng $\sigma_1-\sigma_2$, $\sigma_2-\sigma_3$, $\sigma_1-\sigma_3$ như trên hình 4-15. Nếu TTUS là trạng thái giới hạn về độ bền thì vòng tròn Mohr lớn nhất với đường kính $\sigma_1-\sigma_3$ được gọi là vòng tròn Mohr giới hạn.

Giả thử ta đã tiến hành một số lượng lớn thí nghiệm cho các TTUS khác nhau và đã tìm được trạng thái giới hạn tương ứng của chúng. Trong mặt phẳng toạ độ $\sigma$, $\tau$ ta nhận được một họ các vòng tròn Mohr giới hạn như trên hình 4-16. Đường bao của họ các vòng tròn Mohr này sẽ xác định những tổ hợp ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các TTUS có độ bền giới hạn, điểm cắt trục hoành của đường bao tương ứng với trạng thái ba ứng suất chính kéo có giá trị như nhau.

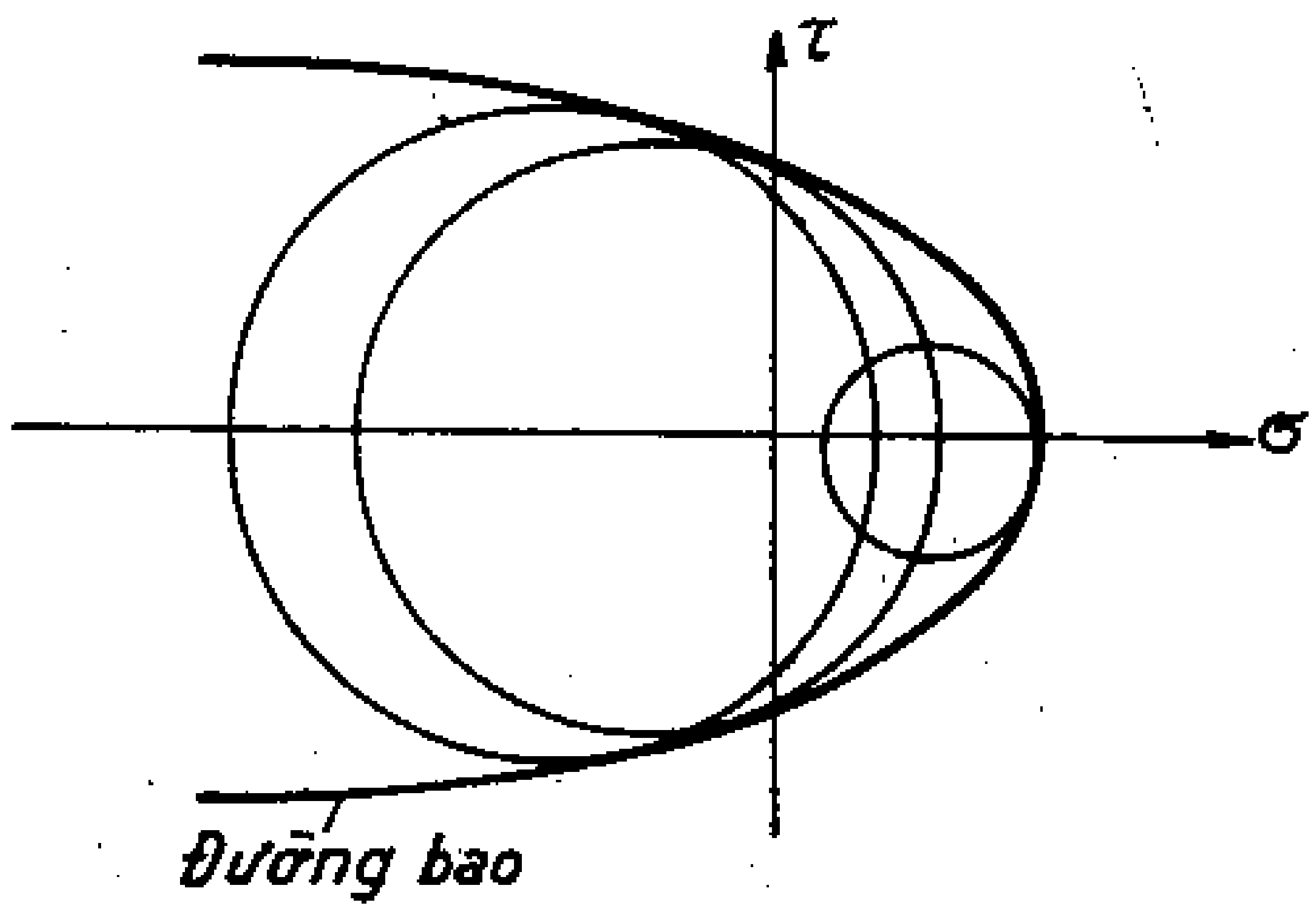
*Hình 4-15.* Ba vòng tròn Mohr của TTƯS khối




Ta giả thiết rằng *đường bao là duy nhất đối với mỗi loại vật liệu.*

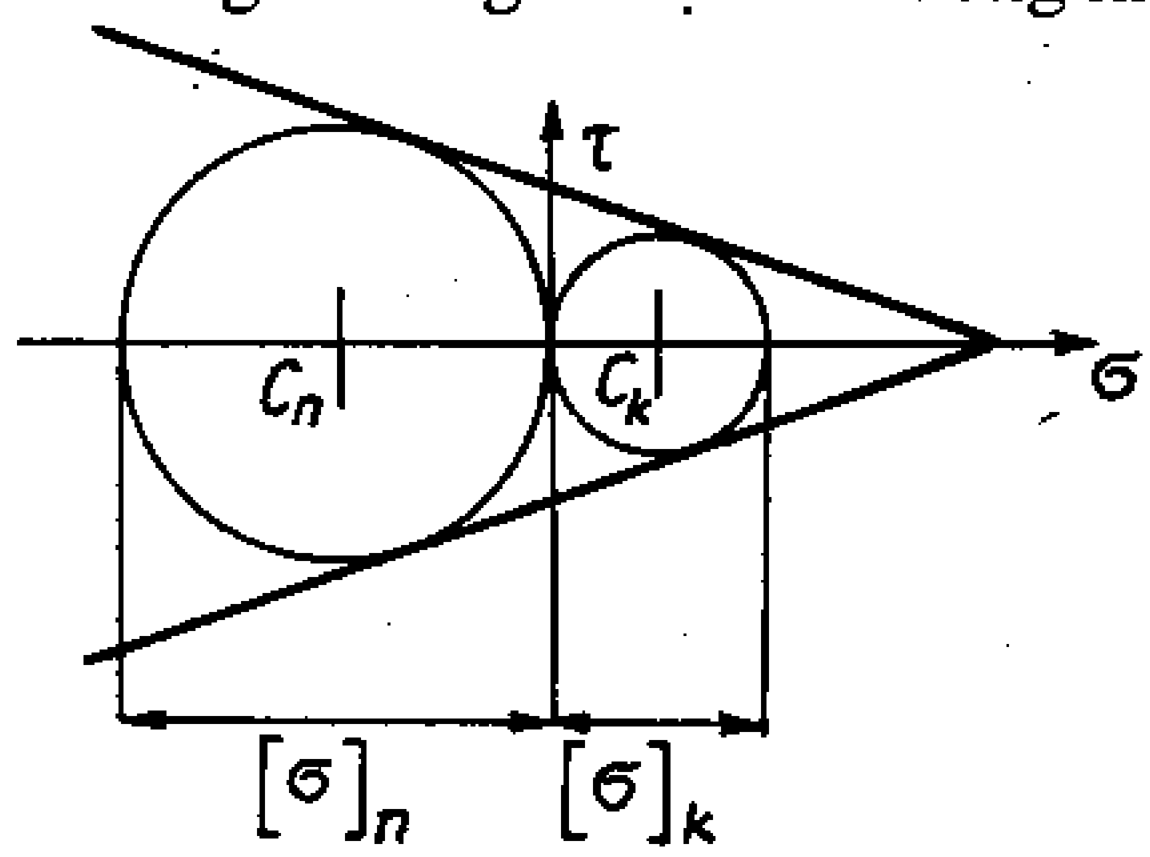
Nếu một TTƯS cụ thể nào đó có vòng tròn Mohr lớn nhất nằm trong đường bao thì TTƯS đó đảm bảo bền; vòng tròn Mohr lớn nhất tiếp xúc với đường bao thì TTƯS đó ở giới hạn bền; vòng Mohr lớn nhất nằm cắt qua đường bao thì TTƯS đó bị phá hỏng.

*Hình 4-16.* Họ các vòng tròn Mohr giới hạn và đường bao của chúng




Việc vẽ chính xác đường bao đòi hỏi một số lượng rất lớn các thí nghiệm, hầu như không thể thực hiện nổi. Ta có thể xây dựng gần đúng đường bao trên cơ sở một số lượng tối thiểu các thí nghiệm: thí nghiệm kéo với vòng Mohr giới hạn có đường kính $[\sigma]_k$ ; thí nghiệm nén với vòng Mohr giới hạn có đường kính $[\sigma]_n$.

*Hình 4-17.* Đường bao đơn giản hoá



Ở đây, ta dùng ký hiệu ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ , $[\sigma]_n$ thay thế cho các ứng suất giới hạn $\sigma_{ok}$ , $\sigma_{on}$ là đã kể đến hệ số an toàn. Đường bao được thay thế gần đúng bằng tiếp tuyến chung của hai vòng tròn giới hạn như trên hình 4-17.

Ta hãy xét một trạng thái ứng suất có vòng tròn Mohr lớn nhất $\sigma_1$, $\sigma_3$ tiếp xúc với đường bao. TTƯS này nằm ở giới hạn về độ bền (trên hình 4-18 đường tròn của TTƯS được thể hiện bằng đường nét đứt). Từ hình vẽ ta có tỷ lệ thức:

$$\frac{MM_1}{PM_1} = \frac{NN_1}{PN_1},$$

với:
$$MM_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n - [\sigma]_k); \qquad PM_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n + [\sigma]_k);$$

$$NN_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k); \qquad PN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_k - (\sigma + \sigma)).$$

Sau khi thay thế các trị số này vào tỷ lệ thức trên, ta nhận được điều kiện giới hạn

$$\frac{[\sigma]_n - [\sigma]_k}{[\sigma]_n + [\sigma]_k} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3) - [\sigma]_k}{[\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3)},$$

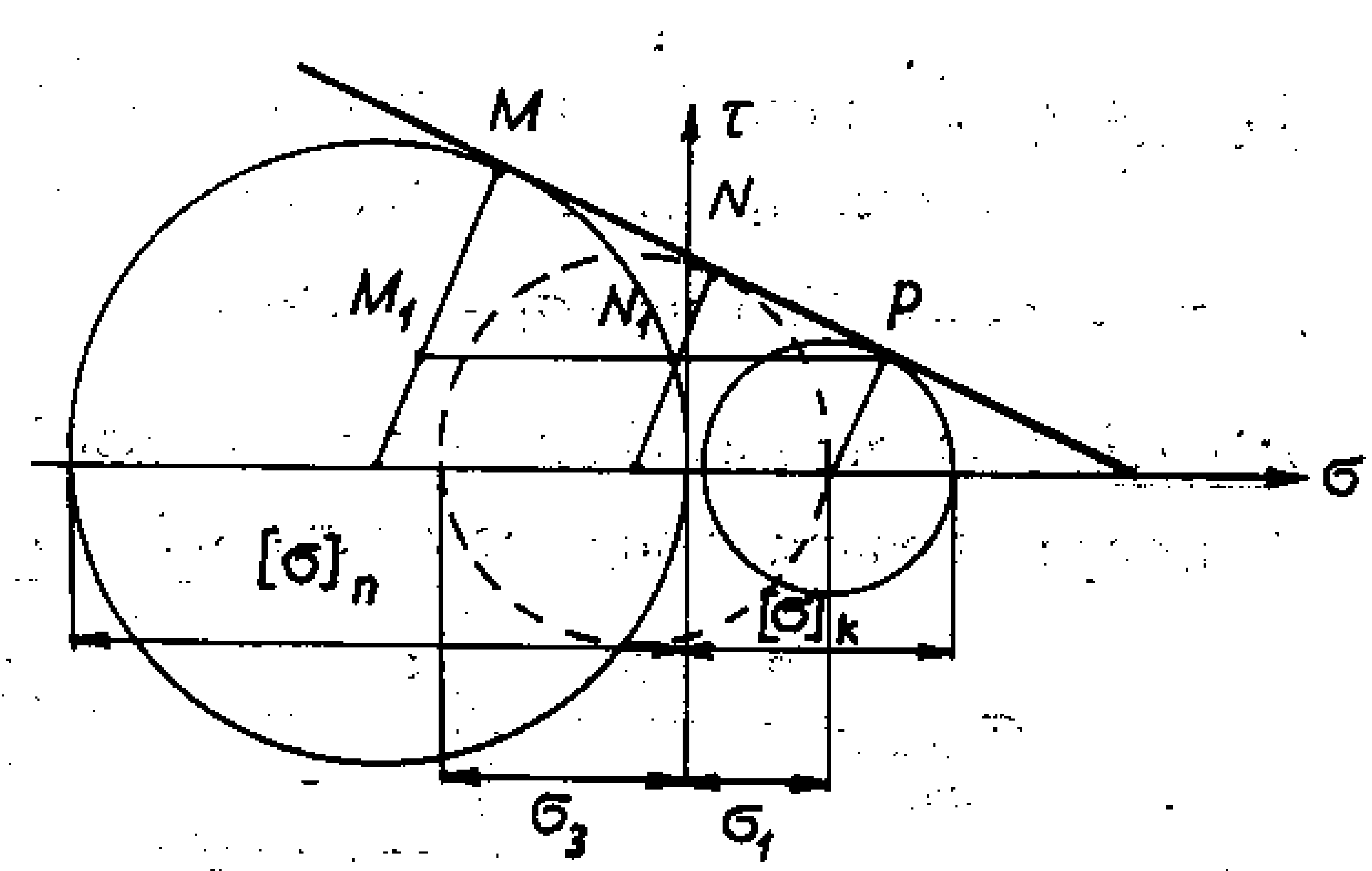
hoặc
$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}\sigma_3 = [\sigma]_k .$$

Điều kiện bền được viết là
$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}\sigma_3 \le [\sigma]_k ,$$

hoặc
$$\sigma_1 - \alpha\sigma_3 \le [\sigma]_k , \qquad (4\text{-}26)$$

với hệ số
$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} . \qquad (4\text{-}27)$$

*Hình 4-18.* Quan hệ giữa TTƯS giới hạn và đường bao




***Ví du 4-4.*** **Viết điều kiện bền theo ứng suất tiếp và theo TNBDĐH hình dáng cho các TTƯS phẳng đặc biệt và TTƯS trượt thuần tuý**

*Bài giải.*

♦ *TTUS phẳng đặc biệt* có các ứng suất chính xác định theo công thức (4-7)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} > 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < 0.$$

* Theo thuyết bền ứng suất tiếp (4-24): $\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$,

ta có $$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]. \tag{4-28}$$

* Theo thuyết bền thế năng (4-25):

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \le [\sigma],$$

ta có $$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{4-29}$$

♦ *TTUS trượt thuần tuý* có thể coi là một trường hợp riêng của TTUS phẳng đặc biệt khi lấy $\sigma = 0$, nên ta có điều kiện bền

* Theo thuyết bền ứng suất tiếp là $|\tau| \le \frac{1}{2}[\sigma]$.

* Theo thuyết bền thế năng là $|\tau| \le \frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma]$.

Hoặc viết chung là $|\tau| \le [\tau]$

với ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = \frac{1}{2}[\sigma]$ theo TBUST;

$[\tau] = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma]$ theo TBTN.

***Ví du 4 -6.*** Kiểm tra bền của phân tố vật thể chịu các ứng suất: $\sigma_x = -4$ kN/cm$^2$; $\sigma_y = -6$ kN/cm$^2$; $\sigma_z = 3$ kN/cm$^2$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2$ kN/cm$^2$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$. Cho biết $[\sigma] = 12$ kN/cm$^2$.

*Bài giải:* Một ứng suất chính là $\sigma_z = 3$ kN/cm$^2$. Hai ứng suất chính còn lại, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ứng suất chính đã cho, là

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{-4-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4+6}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{matrix} -2{,}764 \\ -7{,}236 \end{matrix}\ \text{kN/cm}^2$$

Do đó: $\sigma_1 = 3$ kN/cm$^2$; $\sigma_2 = -2{,}764$ kN/cm$^2$; $\sigma_3 = -7{,}326$ kN/cm$^2$.

Theo thuyết bền ứng suất tiếp:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 3 - (-7{,}236) = 10{,}236 < [\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2.$$

Theo thuyết bền thế năng:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \sqrt{3^2 + (-2{,}764)^2 + (-7{,}236)^2 + 3(-2{,}764) - (-2{,}764)(-7{,}236) - (-7{,}236)3} =$$

$$= 8{,}888 < 12 \text{ kN/cm}^2.$$

*Kết luận*: Phân tố đủ bền theo cả hai thuyết bền.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

4- 1. Khi nói TTƯS tại điểm *P* và tại điểm *M* giống nhau, ta có thể nói ứng suất tại hai điểm này như nhau hay không?

4- 2. Thế nào là mặt chính, phương chính, ứng suất chính? Tồn tại ít nhất bao nhiêu mặt chính tại một điểm? Khi nào ta nói TTƯS tại điểm đang xét là TTƯS đơn, TTƯS phẳng, TTƯS khối?

4- 3. Nêu ký hiệu của ứng suất pháp và của ứng suất tiếp.

4- 4. Nêu dấu của các đại lượng trong công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng.

4- 5. Chứng minh rằng: ứng suất pháp cực trị và ứng suất chính trùng nhau.

4- 6. Điểm *D* trên vòng tròn Mohr đặc trưng cho ứng suất trên mặt nghiêng nào?

4- 7. Có thể tính trị số ứng suất chính của TTƯS phẳng theo những công thức nào?

4- 8. Khi nào các biến dạng được coi là bé?

4- 9. Có bao nhiêu thuyết bền? Nêu nguyên nhân phá hỏng của vật liệu theo thuyết bền ứng suất pháp, theo thuyết bền ứng suất tiếp, theo thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng.

4-10. Cơ sở của thuyết bền Mohr khác gì cơ sở của các thuyết bền nêu ở câu 4-8?

4-11. Viết điều kiện bền của TTƯS phẳng đặc biệt theo các thuyết bền ứng suất tiếp, thuyết bền thế năng.

# 5 Đặc trưng hình học của tiết diện

## *5-1. KHÁI NIỆM CHUNG*

Khi tính toán kết cấu, ta thường gặp các đại lượng phản ánh tính chất hình học của tiết diện, chẳng hạn diện tích *A* đã gặp trong chương kéo, nén đúng tâm. Tuy nhiên độ chịu lực của thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích mà còn phụ thuộc nhiều yếu tố khác mà ta gọi chung là các *đặc trưng hình học cuả tiết diện*.

Ta có thể minh chứng nhận xét này qua ví dụ đơn giản với một tờ bìa phẳng bằng giấy có dạnh hình chữ nhật. Cầm một cạnh và giữ tờ giấy theo phương thẳng đứng, để cạnh đối diện tiếp xúc với mặt bàn nằm ngang. Chỉ cần ấn nhẹ tay, tờ giấy sẽ cong đi; tờ giấy không chịu được lực nén. Nhưng nếu cuộn tờ giấy đó thành một ống tròn thì ta có thể đè nặng tay lên một đầu ống giấy mà ống giấy vẫn thẳng và chịu được lực nén. Diện tích mặt cắt ngang của tờ bìa giấy trong hai trường hợp là như nhau nhưng độ chịu lực lại khác nhau.

Ta cũng có nhận xét tương tự khi quan sát biến dạng uốn của một chiếc thước kẻ mỏng bằng cách giữ chặt thước kẻ theo phương nằm ngang ở một đầu và ở đầu còn lại chịu một lực theo phương thẳng đứng. Độ cong của thanh sẽ khác nhau khi đặt chiều mỏng của thước theo phương ngang và khi đặt chiều mỏng của thước theo phương thẳng đứng. Diện tích tiết diện ngang của thước kẻ trong cả hai trường hợp vẫn như nhau.

Một lưỡi xẻng có mặt được uốn cong sẽ chịu lực khoẻ hơn lưỡi xẻng có mặt để phẳng; vành bánh xe đạp, xe máy có gân nổi sẽ cứng hơn vành bánh phẳng không có gân.

Như vậy, độ chịu lực của thanh không chỉ phụ thuộc diện tích mà còn phụ thuộc hình dáng, cách sắp đặt của tiết diện, phụ thuộc các đặc trưng hình học của tiết diện. Hiểu biết các đặc trưng này cho phép tính toán được độ bền, độ cứng, độ ổn định của thanh và cho phép thiết kế tiết diện thanh một cách tiết kiệm, hợp lý.

## *5-2. DIỆN TÍCH, MÔMEN TĨNH, TRỌNG TÂM*

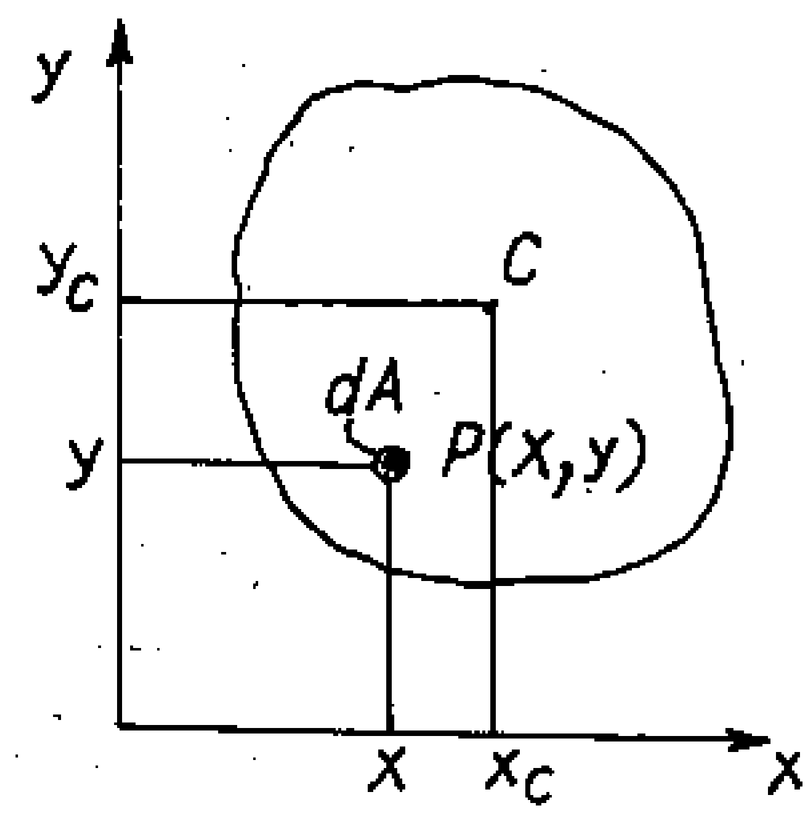
Cho hình phẳng, ta hãy lấy một vi phân diện tích *dA* chứa điểm *P(x,y)* như trên hình 5-1. Ta có các định nghĩa:

Diện tích hình phẳng: $$A = \int_A dA\ ,\tag{5-1}$$

Mômen tĩnh của hình phẳng đối với trục $x$ và trục $y$:

$$S_x = \int_A ydA\ ; \quad S_y = \int_A xdA\ .\tag{5-2}$$

Như vậy, mômen tĩnh đối với một trục bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố $dA$ và khoảng cách từ phân tố đến trục. Mômen tĩnh có thứ nguyên là [chiều dài]$^3$, giá trị có thể dương hoặc âm.



*Hình 5-1.* Hình phẳng và hệ toạ độ

Trục trung tâm là trục có mômen tĩnh bằng không $S = 0$.

Giao của hai trục trung tâm gọi là *trọng tâm của tiết diện*. Trên hình 5-1, ký hiệu trọng tâm của hình là C với toạ độ $x_c$ ; $y_c$.

*Định luật Varignon* "mômen của hệ lực đối với một trục bằng mômen của hợp lực đối với trục đó" cho phép ta tính

$$S_x = \int_A ydA = y_c A = \sum y_{c_i} A_i\ ; \qquad S_y = \int_A xdA = x_c A = \sum x_{c_i} A_i\ .\tag{5-3}$$

Vậy *mômen tĩnh của một hình phẳng đối với một trục bằng diện tích của hình phẳng nhân với khoảng cách từ trọng tâm tới trục.*

$$S = A \times (\textit{khoảng cách từ trọng tâm đến trục}).\tag{5-4}$$

Từ công thức trên, ta có thể tìm được toạ độ trọng tâm trong hệ trục $x,y$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_{c_i}}{\sum A_i}\ ; \qquad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_{c_i}}{\sum A_i}\ .\tag{5-5}$$

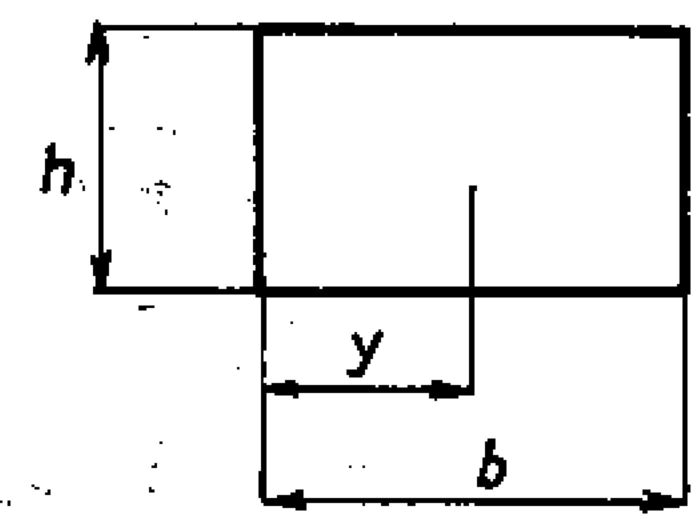
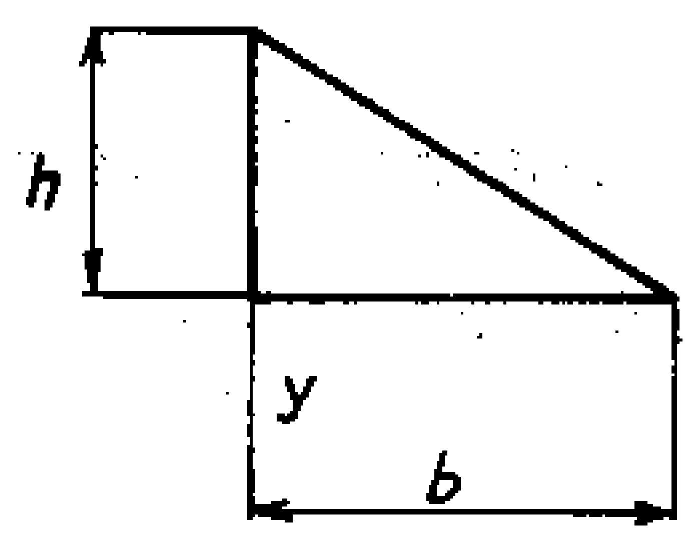
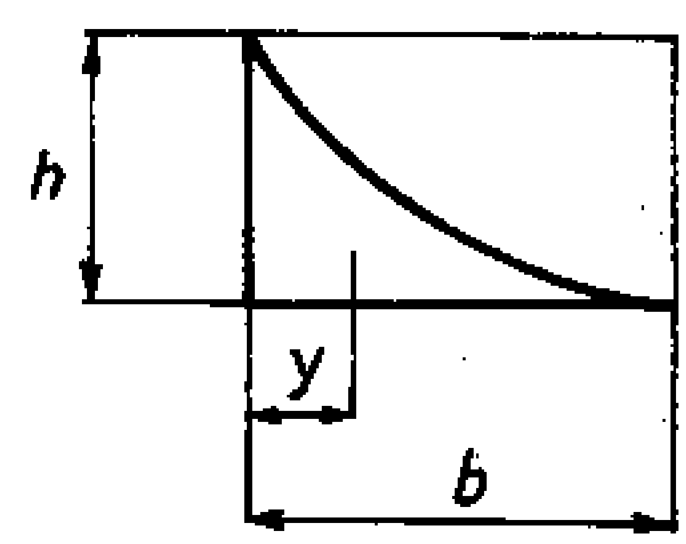
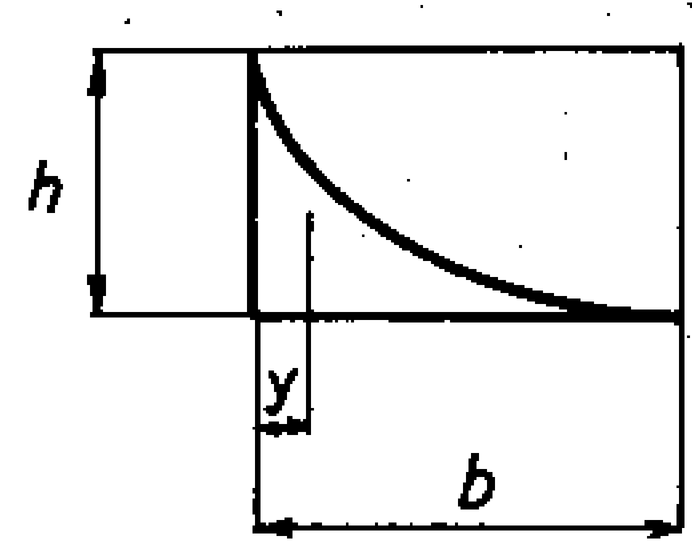
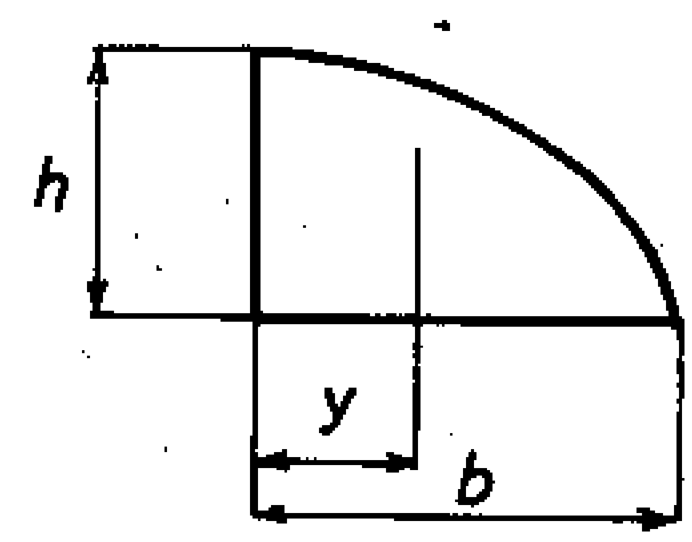
Công thức (5-5) cho phép tìm toạ độ trọng tâm của hình phẳng bất kỳ. Thông thường, trong kỹ thuật ta hay gặp những tiết diện có hình dáng đơn giản và những tiết diện có hình phức tạp ghép từ nhiều hình đơn giản.

Với những hình đơn giản như hình chữ nhật, hình tròn, hình tam giác hoặc tiết diện các loại thép định hình I, U, thép góc đều cạnh, thép góc không đều cạnh, tiết diện các ray đường sắt... ta đã biết hoặc tra theo các bảng diện tích, vị trí trọng tâm trong các Sổ tay thiết kế.

Trên bảng 5-1 cho diện tích và trọng tâm một số hình phẳng đơn giản. Phụ lục 1 ở cuối sách cung cấp trị số các đặc trưng hình học của tiết diện một số dạng thép định hình thường gặp, mang tính chất tham khảo khi giải các bài tập.

Với những hình ghép từ nhiều hình đơn giản thì ta tính diện tích, mômen tĩnh của hình bằng tổng diện tích, tổng mômen tĩnh của các hình đơn giản; tọa độ trọng tâm tính theo công thức (5-5).

***Bảng 5-1***

| Hình | Diện tích | Trọng tâm |
|---|---|---|
|  | $A=bh$ | $y=b/2$ |
|  | $A=bh/2$ | $y=b/3$ |
|  | $A=bh/3$ | $y=b/4$ |
|  | $A=bh/(n+1)$ | $y=b/(n+2)$ |
|  | $A=2bh/3$ | $y=3b/8$ |

***Ví du 5-1.*** Tìm trọng tâm của một nửa hình tròn bán kính $R$ (hình 5-2)

*Bài giải.* Chọn hệ trục ban đầu $x,y$ trong đó $y$ là trục đối xứng; ta chỉ cần xác định toạ độ $y_C$ theo công thức: $y_C = \frac{S_x}{A}$.

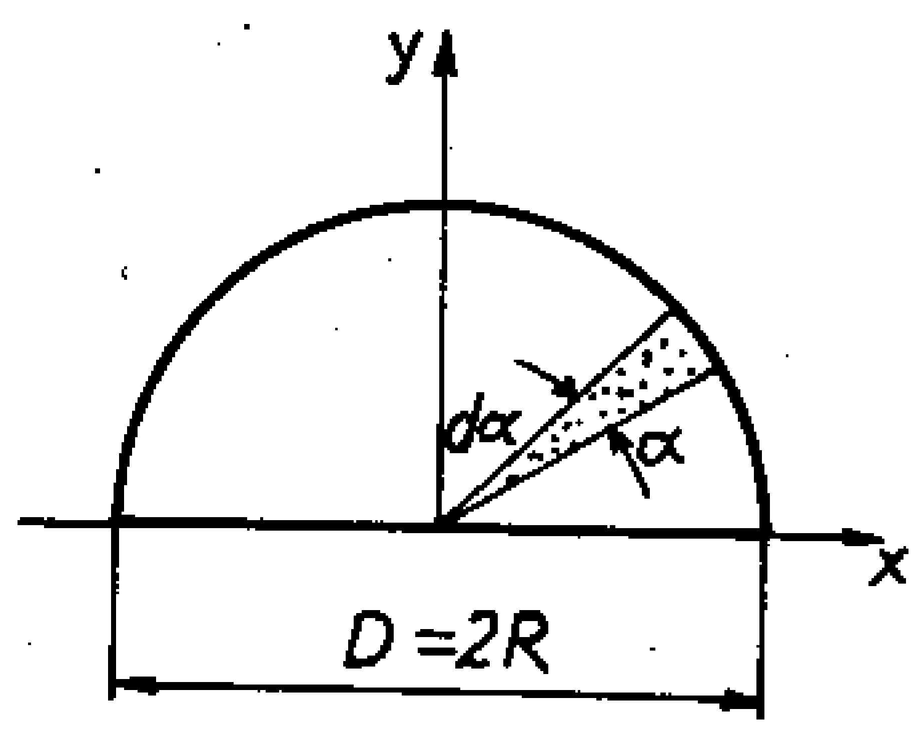
Lấy diện tích vi phân là một hình quạt có góc chắn ở tâm $d\alpha$

$$dA = \frac{1}{2}R.Rd\alpha \rightarrow A = \int_A dA = \int_0^{\pi} \frac{R^2}{2} d\alpha = \frac{\pi R^2}{2}.$$

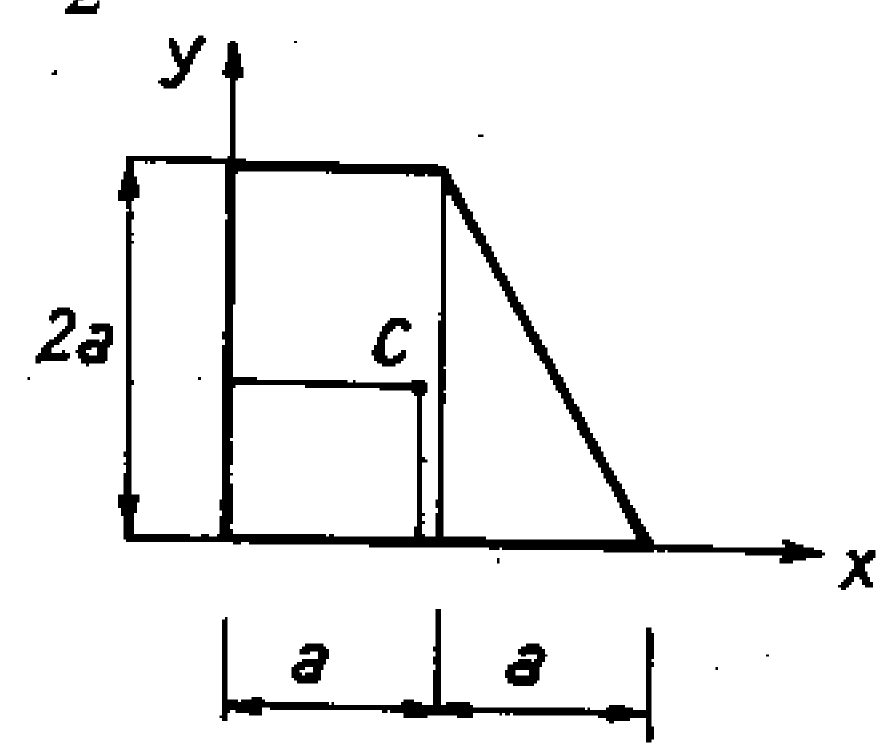
Khoảng cách từ trọng tâm diện tích vi phân $dA$ đến trục $x$ là

$$y = \frac{2}{3}R\sin\alpha \rightarrow S_x = \int_A ydA = \int_0^{\pi} \frac{1}{3}R^3 \sin\alpha d\alpha = \frac{2}{3}R^3.$$

Toạ độ trọng tâm nửa hình tròn $y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}424R.$




*Hình 5-2.* Cho ví dụ 5-1




*Hình 5-3.* Cho ví dụ 5-2

***Ví du 5-2.*** Xác định trọng tâm hình thang cho trên hình 5-3.

*Bài giải.* Hình đã cho được chia thành một hình chữ nhật và một hình tam giác.

Hệ trục toạ độ ban đầu chọn là hệ trục $x, y$ như trên hình 5-3.

Diện tích hình: $A = 2a^2 + a^2 = 32a^2$.

Mômen tĩnh đối với các trục:

$$S_x = 2a^2.a + a^2\frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a^3; \quad S_y = 2a^2.\frac{a}{2} + a^2\left(a + \frac{a}{3}\right) = \frac{7}{3}a^3.$$

Toạ độ trọng tâm: $x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{8}{9}a$; $y_C = \frac{7}{9}a$.

## 5-3. CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH

***Mômen quán tính của hình phẳng đối với trục bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố dA và bình phương khoảng cách từ phân tố đến trục:***

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA. \tag{5-6}$$

***Mômen quán tính ly tâm của hình phẳng đối với hệ trục bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố dA và khoảng cách từ phân tố đến hai trục:***

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{5-7}$$

***Mômen quán tính cực của hình phẳng đối với một điểm bằng tổng của tích giữa diện tích phân tố dA và bình phương khoảng cách từ phân tố đến điểm đó***

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \tag{5-8}$$

Từ định nghĩa, ta có những nhận xét:

* Mômen quán tính có thứ nguyên [chiều dài]$^4$.

* Mômen quán tính cực $I_p$ bằng tổng mômen quán tính đối với hai trục vuông góc $x, y$ có gốc tại điểm cực:

$$I_p = I_x + I_y. \tag{5-9}$$

Nếu lấy hai trục $u, v$ vuông góc với nhau, có gốc tại cực $O$ thì ta cũng có:

$$I_p = I_u + I_v.$$

Từ đó suy ra: $$I_x + I_y = I_u + I_v = const. \tag{5-10}$$

Như vậy, tại một điểm, *tổng mômen quán tính đối với hai trục vuông góc là một hằng số*, tổng này cũng gọi là *bất biến của mômen quán tính.*

* Mômen quán tính đối với trục luôn luôn dương, mômen quán tính ly tâm có thể dương, âm hoặc bằng không. Trên hình 5-1, mômen quán tính ly tâm là trị số dương vì toàn bộ các diện tích vi phân $dA$ đều nằm trong góc phần tư thứ nhất. Nếu hệ trục xoay quanh gốc một góc vuông thì mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục mới lại mang trị số âm, như thế sẽ tồn tại một góc quay mà ứng với góc quay đó mômen quán tính ly tâm sẽ bằng không.

*Hệ trục có mômen quán tính ly tâm bằng không* được gọi là *hệ trục chính.*

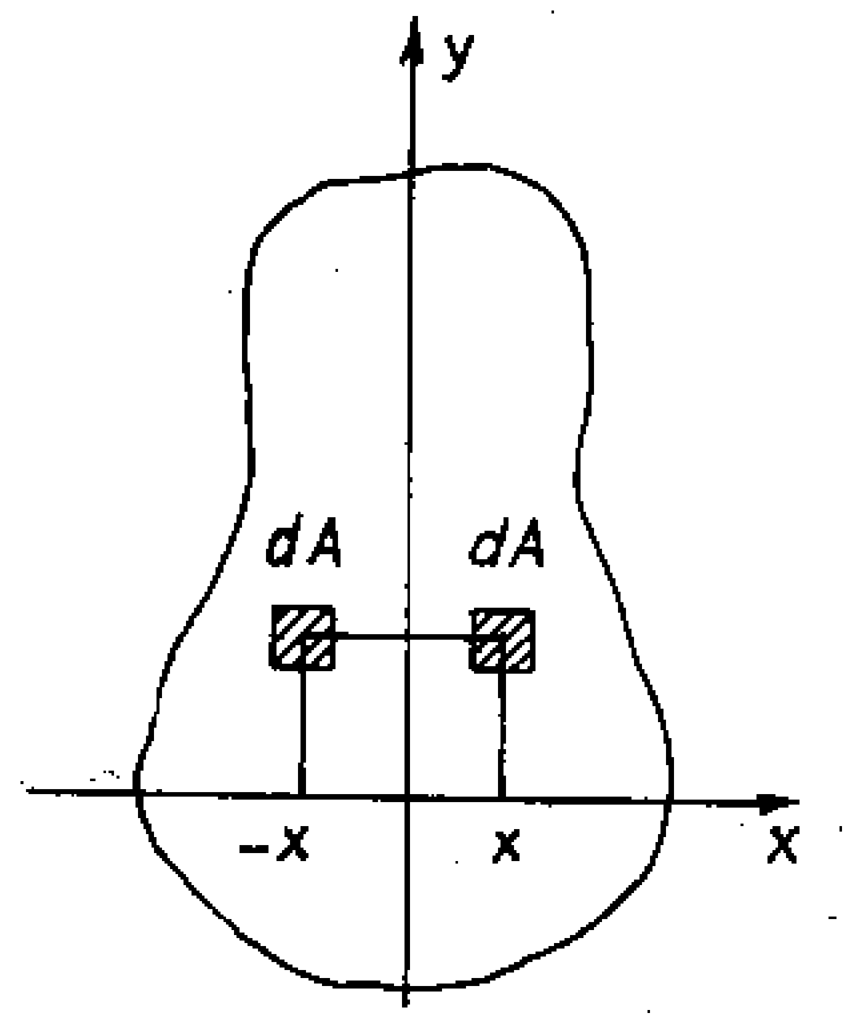
Hình có trục đối xứng thì bất kỳ *hệ trục vuông góc nào chứa trục đối xứng đều là hệ trục chính* (hình 5-4). Thực vậy, hình đối xứng nên luôn luôn tồn tại những cặp diện tích vi phân có tích $xydA$ và $- xydA$, tổng của từng cặp bằng không, nên theo định nghĩa, mômen quán tính ly tâm bằng không.

*Hệ trục chính trung tâm là hệ trục chính có gốc tại trọng tâm*, khi đó:

$$S_x = 0\,; \quad S_y = 0. \tag{5-11}$$

$$I_x = 0\,; \quad I_y = 0. \tag{5-12}$$

Mômen quán tính đối với trục chính trung tâm được gọi là mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện. Sau này, mọi tính toán ứng suất, biến dạng của thanh đều được tiến hành trong hệ trục toạ độ gồm trục thanh $z$ và hai trục chính trung tâm của tiết diện. Trong các ví dụ tiếp sau, ta sẽ xác định mômen quán tính chính trung tâm của các hình đơn giản.



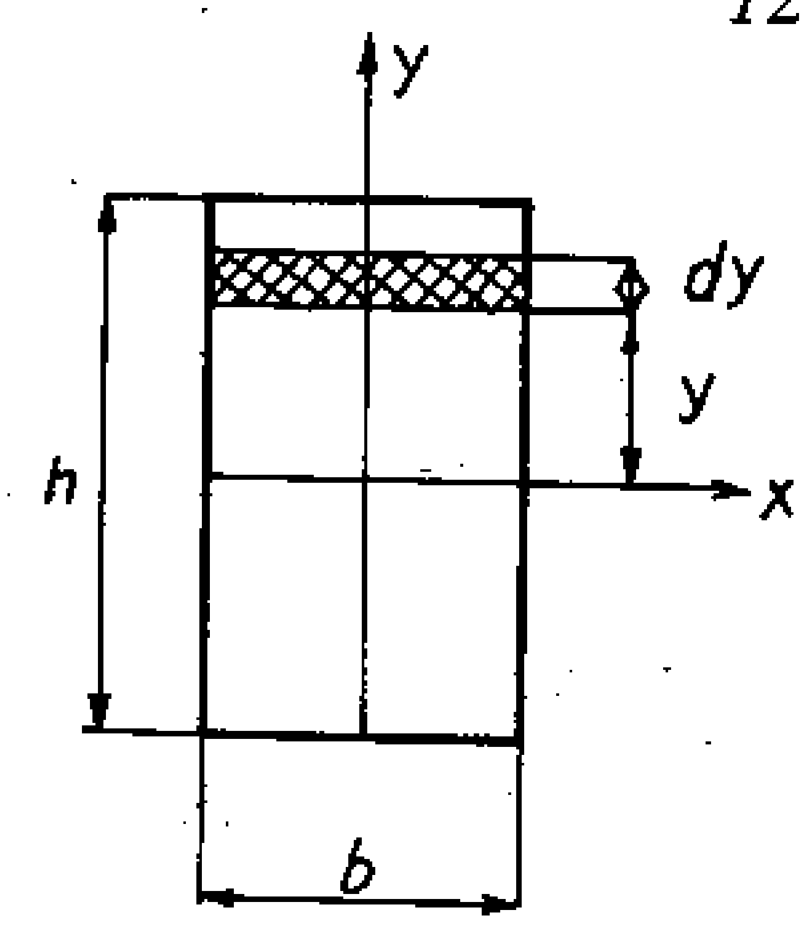

*Hình 5-4.* Hệ trục chính của tiết diện đối xứng

Ví du 5-3. Xác định mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện chữ nhật kích thước $b$x$h$ (hình 5-5).

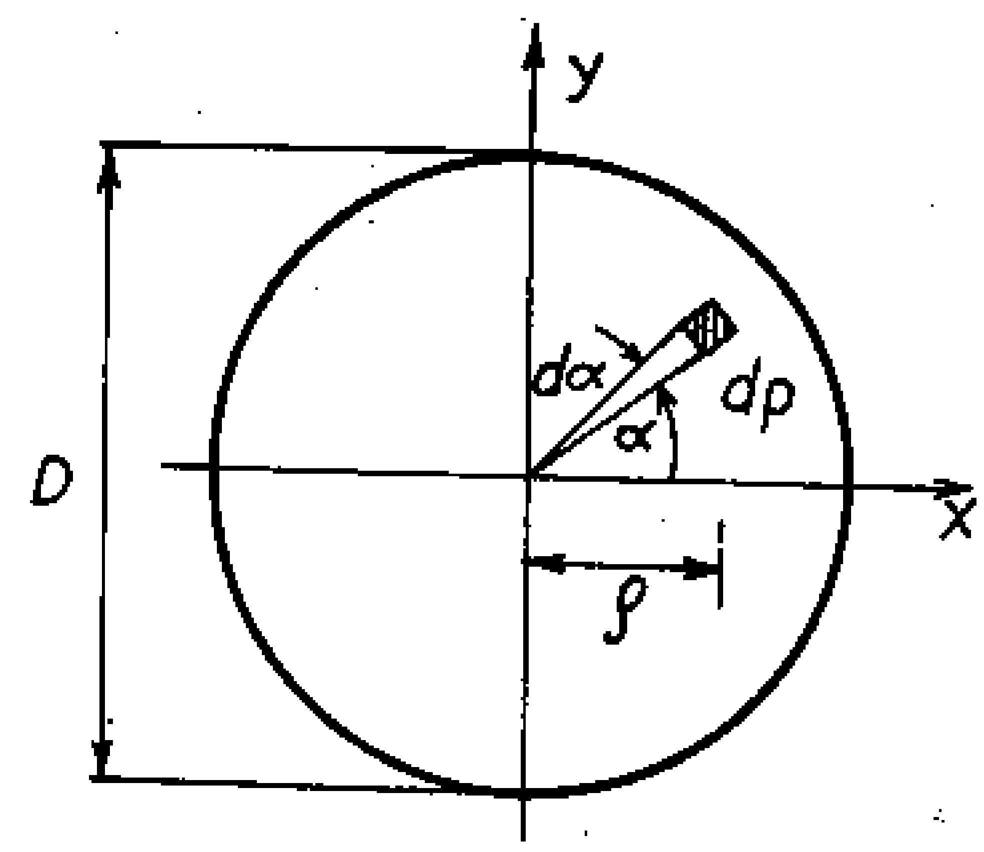
Bài giải. Hệ có hai trục đối xứng $x$, $y$ là hệ trục chính trung tâm. Để tính $I_x$ ta lấy diện tích vi phân $dA$ là một giải bề rộng $b$, bề dầy $dy$, khoảng cách đến trục $x$ là $y$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Tương tự: $$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$




*Hình 5-5.* Cho ví dụ 5-3




*Hình 5-6.* Cho ví dụ 5-4

Ví du 5-4. Xác định mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện hình tròn đặc đường kính $d=2R$ (hình 5-6).

Bài giải. Để giải bài toán đơn giản hơn, ta hãy tính mômen quán tính cực đối với tâm $O$, vì $I_p = I_x + I_y$ mà $I_x = I_y$ do tính đối xứng, nên $I_x = I_y = I_p / 2$.

Chọn diện tích vi phân là một hình giới hạn bởi hai tia $\alpha$, $\alpha + d\alpha$ và hai đường tròn có bán kính $\rho$, $\rho + d\rho$ như trên hình 5-6.

$$dA = \rho\, d\alpha \,.\, d\rho = \rho\, d\rho .\, d\alpha$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0{,}1D^4 .$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0{,}05D^4 .$$

***Ví du 5-5.*** Xác định mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện hình tròn rỗng (hình 5-7).

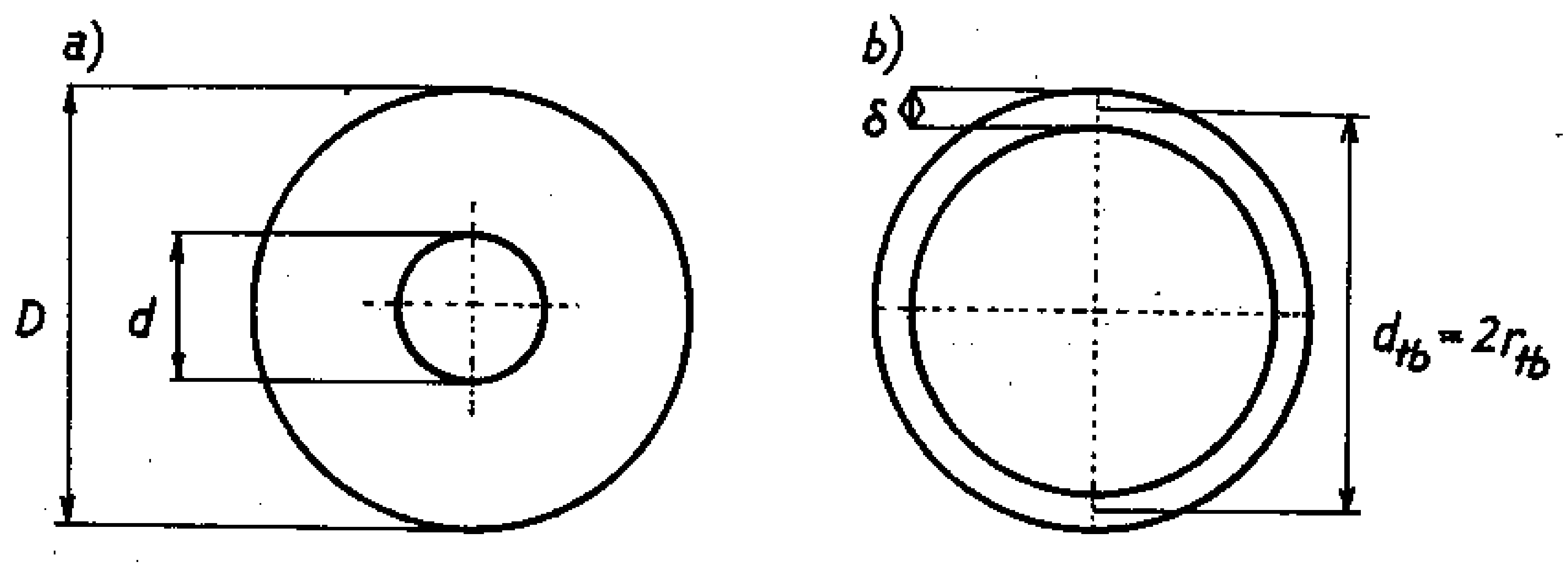
***Bài giải.*** Diện tích của tiết diện bằng hiệu giữa diện tích hình tròn đặc đường kính $D$ và diện tích hình tròn đặc đường kính $d$ (hình 5-7a)

$$A = A^{(D)} - A^{(d)}.$$

Do đó, nếu chú ý đến cận tích phân, ta nhận được:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA = I_x^{(D)} - I_x^{(d)} = 0{,}05D^4 - 0{,}05d^4.$$

Vậy: $\qquad I_x = I_y \approx 0{,}05D^4\,(1 - \alpha^4) \quad$ với $\alpha = \dfrac{d}{D}$.




*Hình 5-7.* Cho ví dụ 5-5

Đối với vành mỏng bán kính trung bình $r_{tb}$ bề dầy $\delta$ (hình 5-7b), ta có thể lấy

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \approx r_{tb}^2 \int_A dA = r_{tb}^2 A = r_{tb}^2\, 2\pi r_{tb}\delta = \frac{\pi\delta d_{tb}^3}{4} \approx 0{,}8\delta d_{tb}^3 ,$$

$$I_x = I_y \approx 0{,}4\delta\, d_{tb}^3 .$$

Công thức chính xác của mômen quán tính cực, tìm bằng cách chia cận tích phân, là

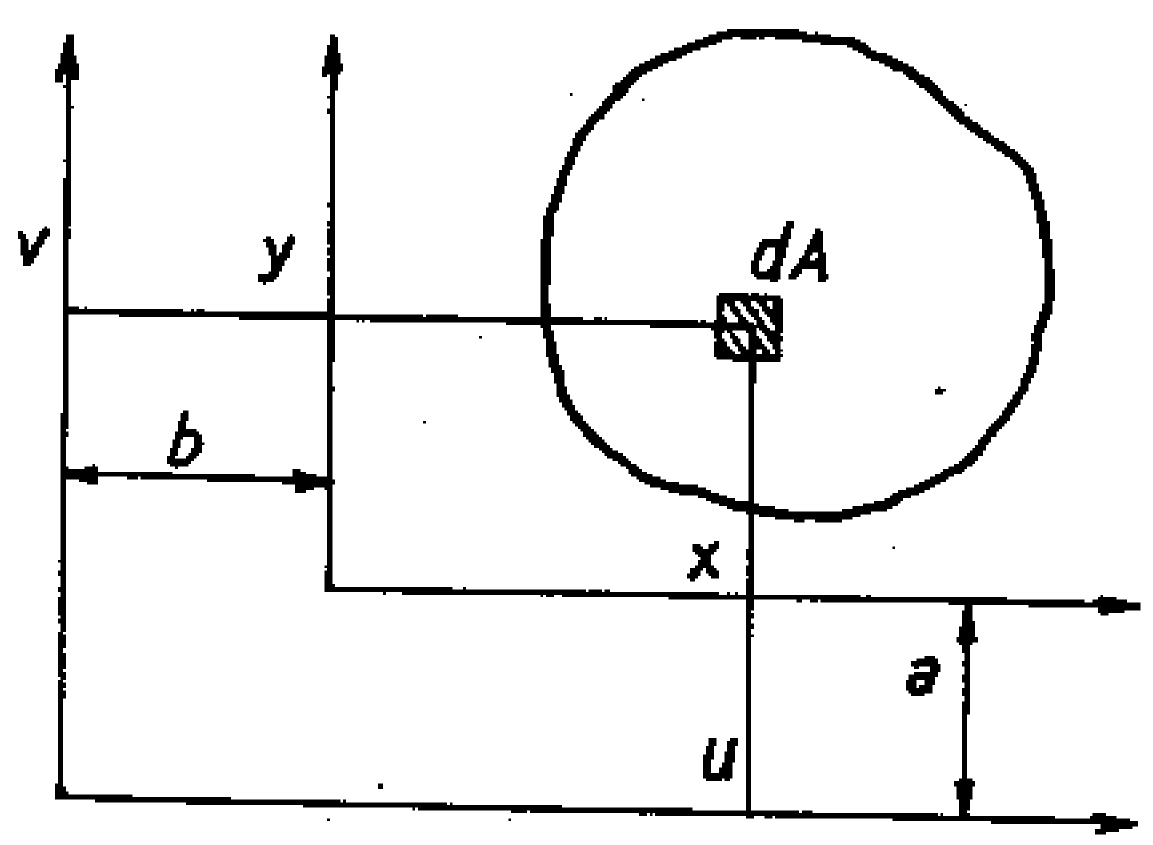
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \delta d_{tb}^3}{4}\left[1 + \left(\frac{\delta}{d_{tb}}\right)^2\right].$$

Sai số của công thức gần đúng có bậc $\left(\frac{\delta}{d_{tb}}\right)^2$.

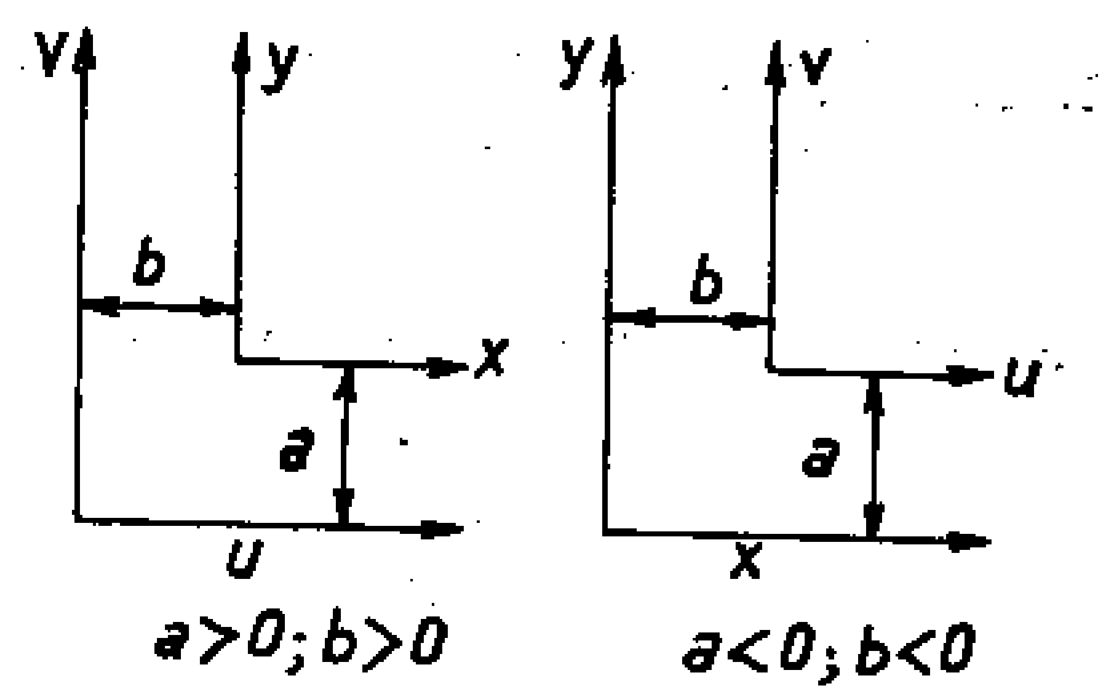
## 5-4. MÔMEN QUÁN TÍNH KHI CHUYỂN TRỤC SONG SONG

Giả thử có hình phẳng $A$ và biết các đặc trưng hình học của hình trong hệ trục $x$, $y$. Ta cần tìm các mômen quán tính của hình đối với hệ trục $u$, $v$ song song với các trục ban đầu. Hình 5-8 cho thấy sự liên hệ tọa độ của điểm giữa hai hệ trục

$$u = x + b; \qquad v = y + a.$$




*Hình 5-8.* Chuyển trục song song




*Hình 5-9.* Dấu của trị số a và b

Theo định nghĩa

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a\int_A y dA + a^2 \int_A dA =$$
$$= I_x + 2aS_x + a^2 A;$$
$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x+b)(y+a) dA = \int_A xy dA + a\int_A x dA + b\int_A y dA + ba\int_A dA =$$
$$= I_{xy} + bS_x + aS_y + abA.$$

Tiến hành tương tự cho $I_v$, ta nhận được công thức tính mômen quán tính khi chuyển trục song song:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x + 2a\, S_x + a^2 A; \\ I_v &= I_y + 2b\, S_y + b^2 A; \\ I_{uv} &= I_{xy} + b\, S_x + a\, S_y + ab\, A. \end{aligned} \qquad (5\text{-}13)$$

trong đó: $a$ - khoảng cách giữa hai trục $u$, $x$ ;

$b$ - khoảng cách giữa hai trục $v$, $y$ ;

Dấu của các đại lượng này được quy ước như trên hình vẽ 5-9.

Nếu hệ trục cũ $x$, $y$ là hệ trục trung tâm thì:

$$I_u = I_x + a^2A \; ; \qquad I_v = I_y + b^2A \; ; \qquad I_{uv} = I_{xy} + ab\,A \qquad (5\text{-}14)$$

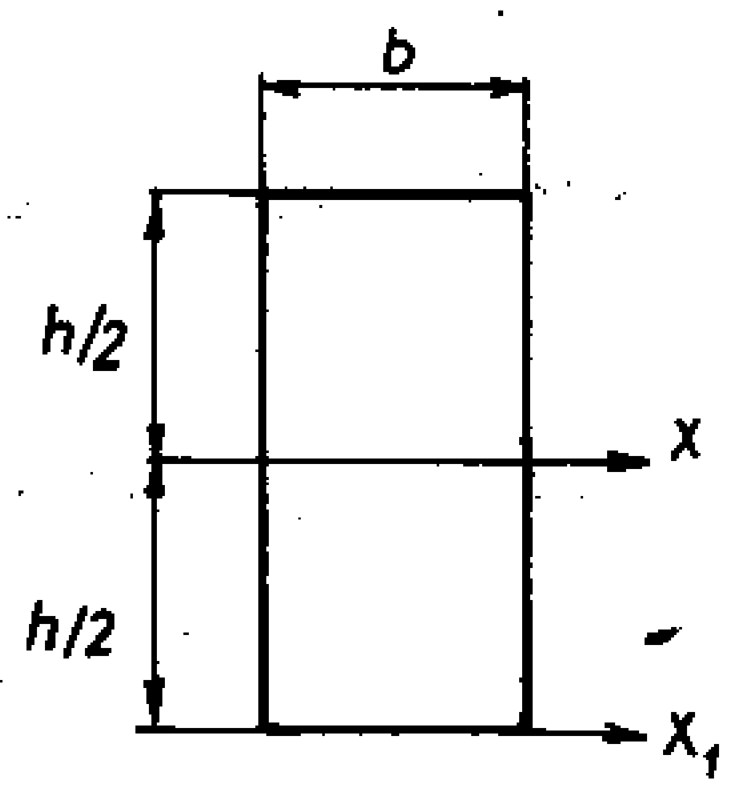
Công thức (5-14) thường được dùng để tính mômen quán tính của các hình phức tạp. Công thức cũng cho thấy: trong tất cả các trục song song thì trục trung tâm luôn luôn có mômen quán tính nhỏ nhất.

Khi khoảng cách $a$ lớn, mômen quán tính đối với trục cũ rất nhỏ thì có thể tính gần đúng $I_u \approx a^2A$. Công thức này thường được sử dụng trong kết cấu thép, vì mặt cắt các thép định hình có kích thước bé so với kích thước tiết diện các thanh ghép.

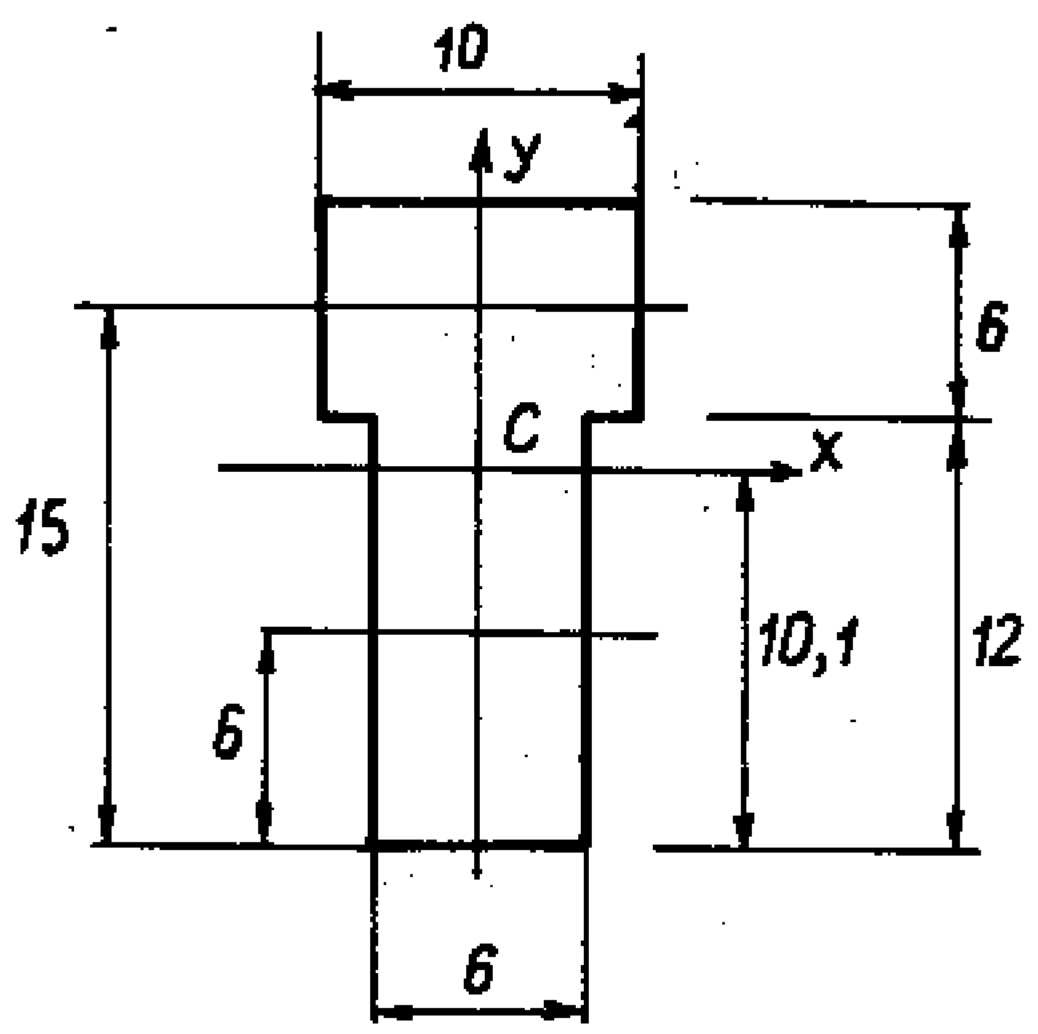
*__Ví dụ 5-6__*. Xác định mômen quán tính đối với trục $x_1$ trùng với cạnh đáy của hình chữ nhật (hình 5-10).

*__Bài giải__*. Sử dụng công thức (5-14):

$$I_{x_1} = I_x + a^2A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$




*Hình 5-10.* Cho ví dụ 5-6




*Hình 5-11.* Cho ví dụ 5-7

*__Ví dụ 5-7__*. Xác định mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện ghép hình T với các kích thước cho theo cm trên hình 5-11.

*__Bài giải__*. Chọn hệ trục ban đầu trong đó $x_0$ trùng với cạnh đáy dưới, trục y là trục đối xứng.

Diện tích tiết diện: $A = 10.6 + 6.12 = 132$ cm$^2$.

Mômen tĩnh đối với trục $x_0$: $S_{x_0} = 60.15 + 72.6 = 1332$ cm³.

Tung độ của trọng tâm: $y_c = \dfrac{S_{x_0}}{A} = \dfrac{1332}{132} = 10,1$ cm.

Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục $xCy$, từ hình 5-11 tìm được khoảng cách từ trọng tâm chung đến trọng tâm của từng hình chữ nhật đơn giản.

$I_{xy} = 0$;

$$I_y = I_y^I + I_y^{II} = \frac{6.10^3}{12} + \frac{12.6^3}{12} = 716\,\text{cm}^4,$$

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} = \left[\frac{10.6^3}{12} + (15-10,1)^2 60\right] + \left[\frac{6.12^3}{12} + (10,1-6)^2 72\right] = 3695\,\text{cm}^4.$$

## 5-5. MÔMEN QUÁN TÍNH KHI XOAY TRỤC, TRỤC CHÍNH

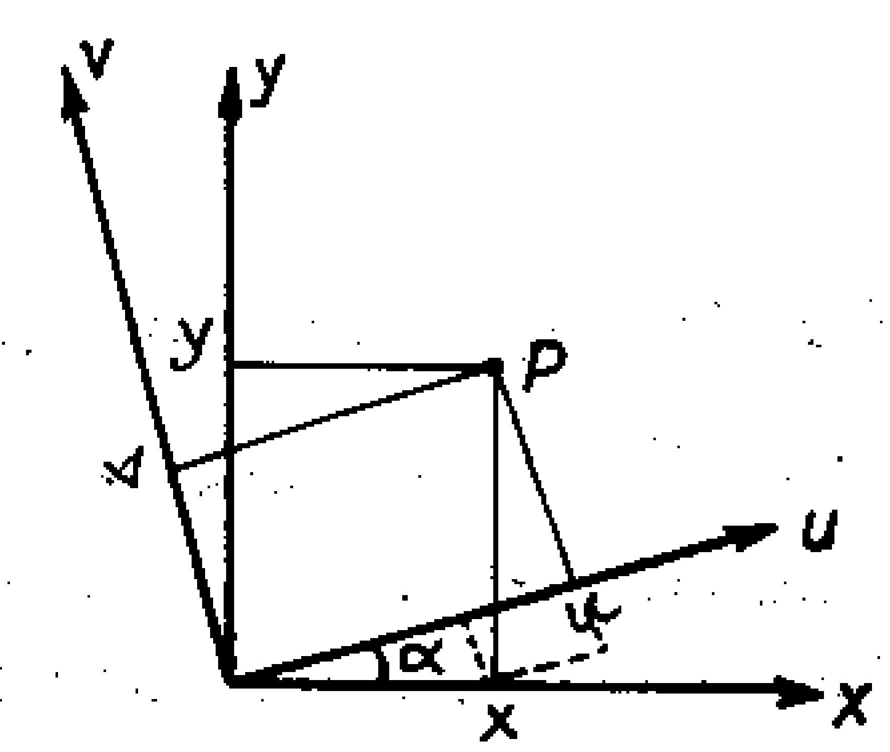
### 5-5-1. Mômen quán tính khi xoay trục

Xét hệ trục $u$, $v$ được tạo thành bằng cách xoay hệ trục ban đầu $x$, $y$ một góc $\alpha$, chiều dương của góc này tính ngược chiều kim đồng hồ (hình 5-12).

Toạ độ của phân tố diện tích $dA$ trong hệ trục cũ $x$, $y$ và trong hệ trục mới $u$, $v$ có liên hệ như sau:

$$u = y\sin\alpha + x\cos\alpha\,;$$

$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha\,.$$




*Hình 5-12.* Liên hệ toạ độ khi xoay trục

Thay biểu thức liên hệ này vào định nghĩa của mômen quán tính đối với trục $u$ ta có

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA =$$

$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy dA + \sin^2\alpha \int_A x^2 dA$$

$$= I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2a\,. \qquad (5\text{-}14)$$

Tiến hành tương tự, ta có biểu thức của mômen quán tính đối với trục v

$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2a\,. \qquad (5\text{-}15)$$

Cộng (5-14) và (5-15), ta nhận lại bất biến của đặc trưng hình học (5-10):

$$I_x + I_y = I_u + I_v = const.$$

Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục $u$, $v$:

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (y\sin\alpha + x\cos\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dA =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\left(\int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA\right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\int_A xy dA =$$

$$= \sin a \cos a\,(I_x - I_y) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, I_{xy}\,. \qquad (5\text{-}16)$$

Sử dụng liên hệ:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2a\,; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

ta viết lại các kết quả (5-14), (5-15), (5-16)

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha\,,$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha\,. \qquad (5\text{-}17)$$

### *5-5-2. Trục chính, mômen quán tính chính*

Công thức tính mômen quán tính khi xoay trục (5-17) hoàn toàn tương tự như công thức tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng của TTƯS phẳng (4-2), nên ta có thể suy ra những kết luận như đã nêu trong chương 4:

* Vị trí trục quán tính chính được xác định từ phương trình

$$tg 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\,. \qquad (5\text{-}18)$$

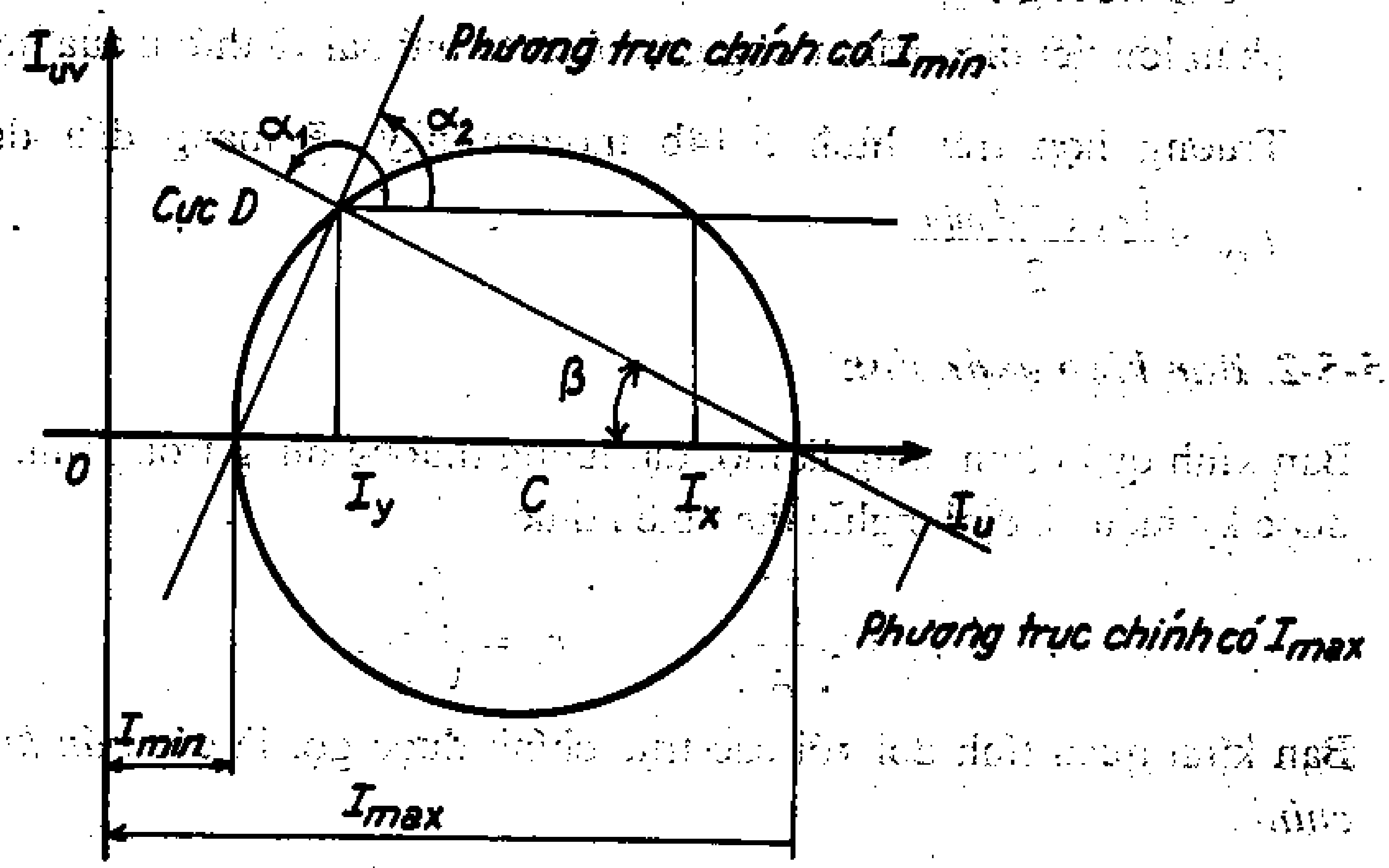
Từ phương trình ta nhận được hai trục chính, hai trục này vuông góc với nhau.

* Mômen quán tính chính cũng là trị số cực trị của mômen quán tính khi xoay trục

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}\,. \qquad (5\text{-}19)$$

* Quan hệ giữa mômen quán tính đối với trục $I_u$ và mômen quán tính ly tâm $I_{uv}$ cũng có thể biểu diễn bằng vòng tròn trong hệ trục $I_u$, $I_{uv}$ gọi là vòng tròn Mohr quán tính như trên hình 5-13. Cách vẽ, cách sử dụng vòng Mohr quán tính tương tự như đối với vòng Mohr ứng suất: tìm mômen quán tính đối với hệ

trục có phương bất kỳ, trục chính và mômen quán tính chính... Lưu ý là vòng Mohr ứng suất có thể cắt qua trục tung nhưng vòng Mohr quán tính chỉ nằm trong góc phần tư thứ nhất vì $I_u$ luôn luôn dương.




*Hình 5-13.* Vòng tròn Mohr quán tính

Từ hình vẽ vòng Mohr quán tính ta còn có thể tìm vị trí các trục có mômen quán tính chính theo biểu thức

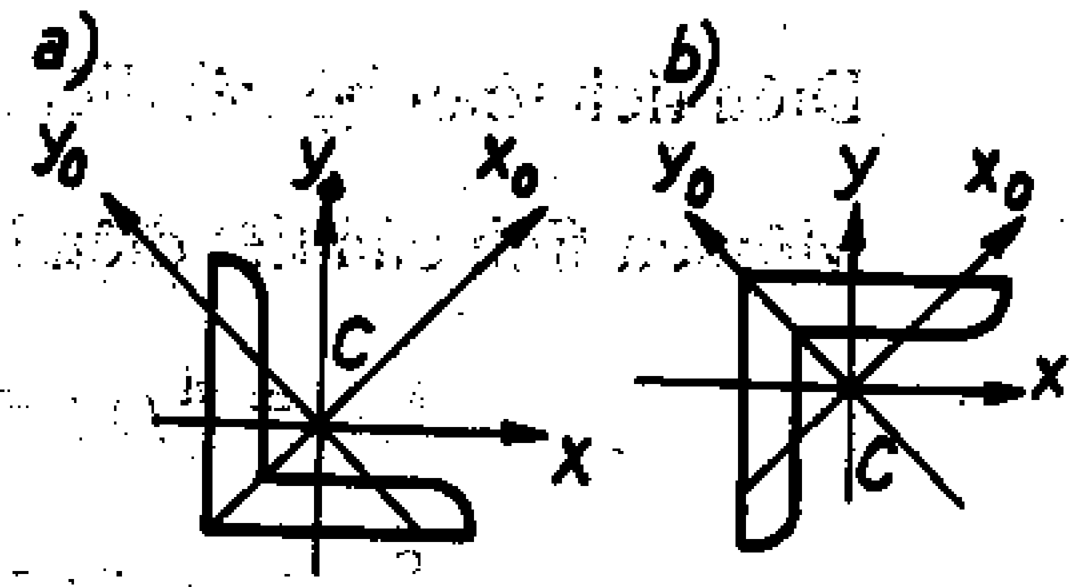
$$tg\alpha_1 = tg(180 - \beta) = -tg\beta = -\frac{I_{xy}}{I_{max} - I_y} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_{max}}; \quad (5\text{-}20)$$

$$tg\alpha_2 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_{min}}. \quad (5\text{-}21)$$

Các công thức (5-20), (5-21) thường được sử dụng để tìm mômen quán tính ly tâm của thép góc không đều cạnh.

Ví dụ 5-8. Tìm mômen quán tính ly tâm của thép góc đều cạnh đối với hệ trục trung tâm $xCy$ song song với các cạnh (hình 5-14). Cho biết các mômen quán tính chính trung tâm $I_{x_0} = I_{max}$; $I_{y_0} = I_{min}$.

Bài giải. Ta hãy tính mômen quán tính đối với hệ trục $xCy$ bằng cách cho hệ trục $x_0Cy_0$ xoay một góc $45^0$ thuận chiều kim đồng hồ như trên hình 5-14a. Khi đó, theo (5-17):




*Hình 5-14.* Cho ví dụ 5-7

$$I_{xy} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} sin(-90^0) - I_{x_0y_0} cos(-90^0) = -\frac{I_{max} - I_{min}}{2}.$$

Trong trường hợp hình 5-14a, mômen quán tính ly tâm $I_{xy}$ mang dấu âm vì phần lớn tiết diện nằm trong góc phần tư thứ hai và thứ tư của hệ trục $xCy$.

Trường hợp trên hình 5-14b mômen này sẽ mang dấu dương, tức là $I_{xy} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2}$.

### 5-5-2. Bán kính quán tính

Bán kính quán tính cũng là một đại lượng thường dùng trong tính toán kết cấu, được ký hiệu và định nghĩa theo biểu thức

$$r_x = \sqrt{\frac{i_x}{A}}; \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

Bán kính quán tính đối với các trục chính được gọi là các *bán kính quán tính chính.*

Có thể thấy khi xoay trục, tổng bình phương các bán kính quán tính bằng một hằng số

$$r_u^2 + r_v^2 = r_x^2 + r_y^2 = \frac{I_x + I_y}{A} = const$$

<u>*Ví dụ 5-9*</u>. Xác định trục chính trung tâm, mômen quán tính đối với hệ trục này của tiết diện ghép từ các thép định hình cho trên hình 5-15. Kích thước cho theo cm.

<u>*Bài giải*</u>. Từ bảng thép định hình, ta tìm được các đặc trưng hình học cần thiết của mỗi hình đơn:

♦ Thép góc $100\times100\times10$, ký hiệu $1$, có: $A_1 = 19,2$ cm$^2$ ; $y_{o,1} = 2,83$ cm ;

$I_{u,1} = I_{max} = 284$ cm$^4$ ; $I_{v,1} = I_{min} = 74,1$ cm$^4$ ; $I_{x,1} = I_{y,1} = 179$ cm$^4$ .

♦ Thép U N° 22, ký hiệu 2, có: $A_2 = 26,7$ cm$^2$ ; $x_{o,2} = 2,21$ cm ;

$I_{x,2} = 2110$ cm$^4$ ; $I_{y,2} = 151$ cm$^4$ .

Diện tích toàn bộ tiết diện: $A = 19,2 + 26,7 = 45,9$ cm$^2$ .

Mômen tĩnh của tiết diện lấy với các trục $x_2$ , $y_2$ đi qua trọng tâm hình $2$ là

$$S_{x_2} = A_1y_1 = 19,2(11 - 2,83) = 157 \text{ cm}^3;$$

$$S_{y_2} = A_1x_1 = 19,2(2,21 + 2,83) = 96,7 \text{ cm}^3.$$

Toạ độ trọng tâm của tiết diện trong hệ toạ độ $x_2$, $y_2$ là

$$x_{2,C} = \frac{S_{y_2}}{A} = \frac{96,7}{45,9} = 2,1 \text{ cm}; \qquad y_{2,C} = \frac{S_{x_2}}{A} = \frac{157}{45,9} = 3,42 \text{ cm}.$$

Ký hiệu hệ trục trung tâm có gốc tại $C$, có phương song song với các trục $x$, $y$ là $XCY$. Theo công thức chuyển trục song song (5-14), ta cần xác định khoảng cách giữa các trục

$$a_1 = 11 - 2,83 - 3,42 = 4,75 \text{ cm}; \quad b_1 = 2,83 + 2,21 - 2,1 = 2,94 \text{ cm};$$

$$a_2 = -3,42 \text{ cm}; \qquad b_2 = -2,1 \text{ cm}.$$

Mômen quán tính đối với trục trung tâm $X$:

* của thép góc: $I_X^{(1)} = I_{x,1} + a_1^2 A_1 = 179 + 4,75^2.19,2 = 612,2 \text{ cm}^4$;

* của thép chữ U: $I_X^{(2)} = I_{x,2} + a_2^2 A_2 = 2110 + 3,42^2.26,7 = 2422,3 \text{ cm}^4$;

* của toàn tiết diện: $I_X = I_X^{(1)} + I_X^{(2)} = 612,2 + 2422,3 = 3034,5 \text{ cm}^4$.

Mômen quán tính đối với trục trung tâm $Y$

* của thép góc: $I_Y^{(1)} = I_{y,1} + b_1^2 A_1 = 179 + 2,94^2.19,2 = 345 \text{ cm}^4$;

* của thép chữ U: $I_Y^{(2)} = I_{y,2} + b_2^2 A_2 = 151 + 2,1^2.26,7 = 268,7 \text{ cm}^4$;

* của toàn tiết diện: $I_Y = I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} = 345 + 268,7 = 613,7 \text{ cm}^4$.

Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục $x_1, y_1$ của thép góc, theo kết quả từ ví dụ 5-8 đã xét, mang dấu dương và bằng $I_{x_1y_1} = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{2}$.

Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục trung tâm $X,Y$

* của thép góc: $I_{XY}^{(1)} = I_{x_1y_1} + a_1 b_1 A_1 = \dfrac{I_{max} + I_{min}}{2} + a_1 b_1 A_1$

$$= \frac{284 - 74,1}{2} + 4,75.2,94.19,2 = 373 \text{ cm}^4;$$

* của thép chữ U: $I_{XY}^{(2)} = a_2 b_2 A_2 = (-3,42)(-2,1).26,7 = 191,7 \text{ cm}^4$;

* của toàn tiết diện: $I_{XY} = I_{XY}^{(2)} + I_{XY}^{(2)} = 373 + 191,7 = 564,7 \text{ cm}^4$.

Vị trí trục chính trung tâm xác định theo phương trình (5-18):

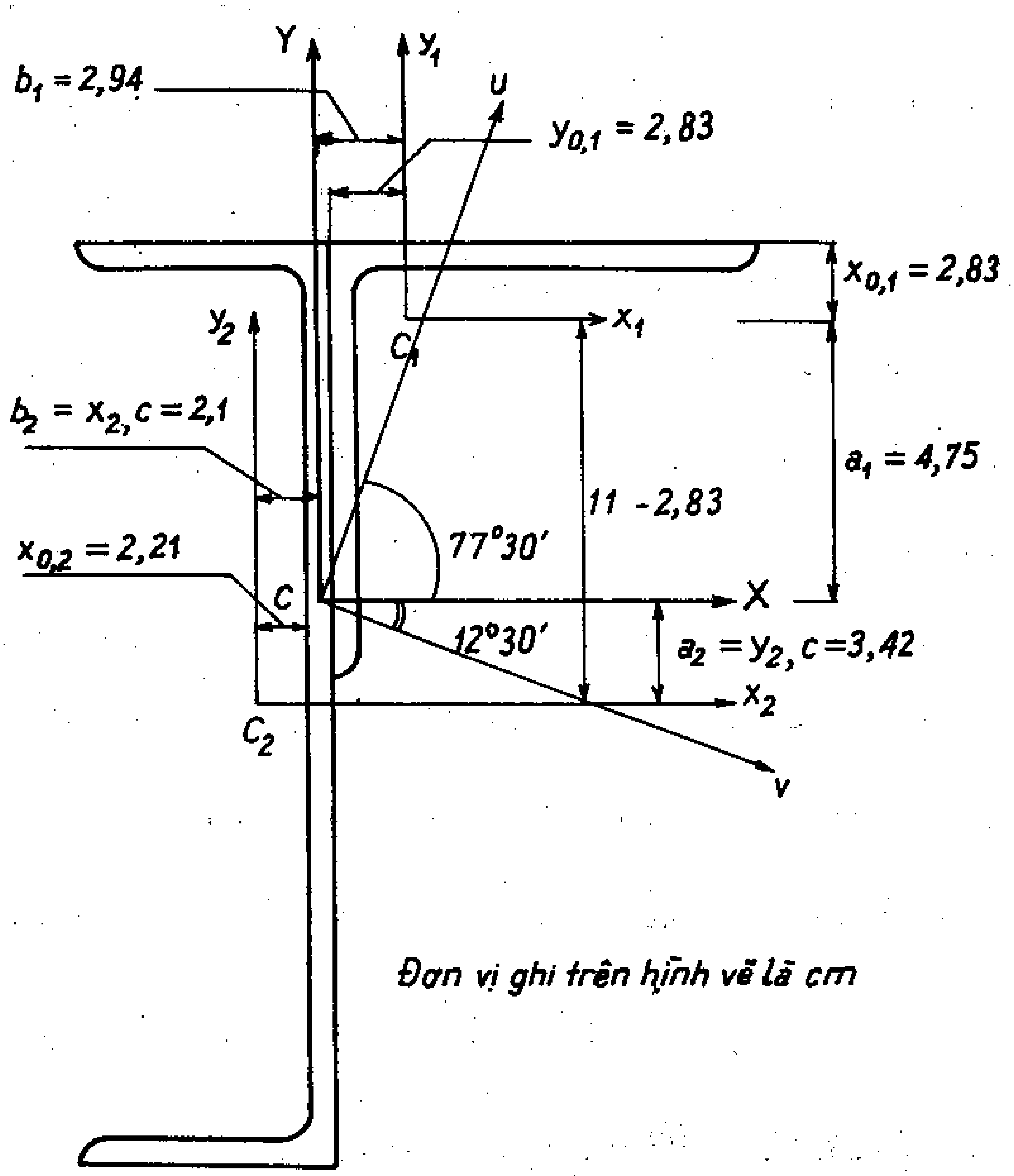
$$tg2\alpha = -\frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y} = -\frac{2.564,7}{3035,5 - 613,7} = -0,465 = -tg25^o .$$

Vị trí của hai trục chính trung tâm chỉ trên hình 5-15.

Trị số mômen quán tính chính trung tâm, theo công thức (5-19), bằng:

$$I_{max} = \frac{3035,5 + 613,7}{2} + \sqrt{\left(\frac{3035,5 - 613,7}{2}\right)^2 + 564,7^2} = 3641,2 \text{ cm}^4;$$

$$I_{min} = \frac{3035,5 + 613,7}{2} - \sqrt{\left(\frac{3035,5 - 613,7}{2}\right)^2 + 564,5^2} = 488,5 \text{ cm}^4.$$




*Hình 5-15.* Cho ví dụ 5-9

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

5- 1. Viết công thức tính mômen tĩnh đối với một trục của một hình phẳng khi biết diện tích và vị trí trọng tâm của hình. Thứ nguyên và các đơn vị thường dùng của mômen tĩnh.

5- 2. Nêu cách xác định trọng tâm của một hình ghép từ nhiều hình đơn giản.

5- 3. Đối với những trục nào thì mômen tĩnh của một hình bằng không? Tên gọi các trục này là gì?

5- 4. Định nghĩa các mômen quán tính: đối với một trục, đối với hệ trục, đối với gốc toạ độ. Thứ nguyên và các đơn vị thường dùng của các mômen quán tính.

5- 5. Những hệ trục nào được gọi là hệ trục chính, hệ trục chính trung tâm? Chỉ vị trí hệ trục này đối với hình chữ nhật, hình tròn, hình tam giác đều, hình có một trục đối xứng.

5- 6. Viết công thức tính mômen quán tính chính trung tâm của hình chữ nhật, hình tròn.

5- 7. Viết công thức liên hệ giữa mômen quán tính của hệ trục trung tâm và hệ trục song song.

5- 8. Viết công thức tính mômen quán tính khi xoay trục.

5- 9. Chứng minh rằng mômen quán tính chính là mômen quán tính cực trị khi xoay trục. Viết công thức để tính các mômen quán tính cực trị.

5-10. Nêu cách vẽ vòng Mohr quán tính, cách dùng vòng Mohr để tìm mômen quán tính khi xoay trục, tìm trục chính và trị số của mômen quán tính chính.

5-11. Hãy cho biết trục nào của hình vuông có mômen quán tính lớn hơn: trục trung tâm song song với cạnh, trục trùng với đường chéo.

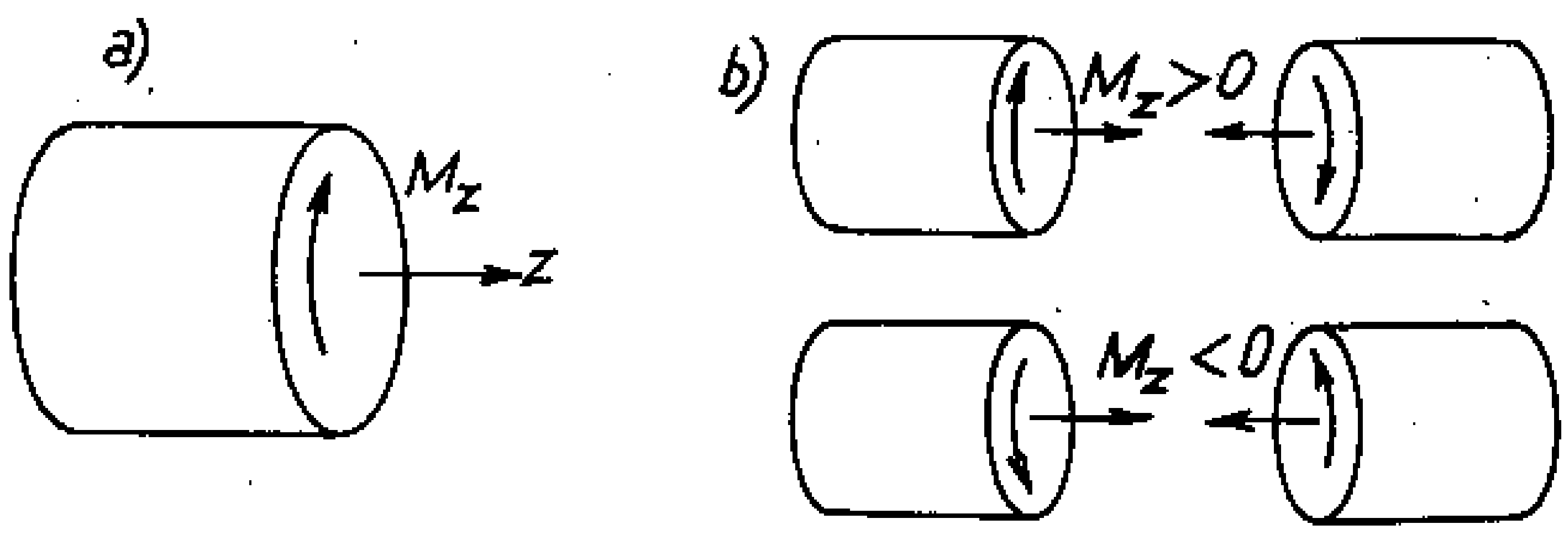
# 6 Thanh chịu xoắn, chịu cắt

## 6-1. ỨNG SUẤT TRÊN TIẾT DIỆN TRÒN CỦA THANH CHỊU XOẮN

### 6-1-1. Biểu đồ mômen xoắn

Một thanh chịu xoắn nếu ứng lực trên tiết diện chỉ là một mômen nằm trong mặt phẳng tiết diện, gọi là ứng lực *mômen xoắn* hoặc mômen xoắn nội lực, ký hiệu $M_z$(hình 6-1a).

*Quy ước dấu*: $M_z$ mang dấu dương khi nhìn vào tiết diện ta thấy mômen quay thuận chiều kim đồng hồ như trên hình 6-1b.




*Hình 6-1.* Ứng lực mômen xoắn và quy ước dấu

Ngoại lực gây xoắn thường là những mômen, những ngẫu ngoại lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh. Những trục truyền chuyển động quay, trục môtơ, các thanh trong khung không gian của nhà khi tính tải trọng gió lệch... là những cấu kiện chịu xoắn.

Thanh chịu xoắn thuần tuý nếu ứng lực chỉ có $M_z$. Theo phương pháp mặt cắt, phương trình cân bằng của mômen đối với trục thanh cho phép xác định mômen xoắn tại tiết diện

$$M_z = [-\sum \mathcal{M} - \sum \int_l m_z dz] \,, \tag{6-1}$$

$\mathcal{M}$ - mômen xoắn ngoại lực tập trung, thứ nguyên [*Lực* × *Chiều dài*];

$m_z$ - mômen xoắn ngoại lực phân bố, thứ nguyên [*Lực* × *Chiều dài*]/[*Chiều dài*].

Dấu trừ là do chuyển các số hạng từ vế trái của phương trình cân bằng sang vế phải.

Từ quan hệ (6-1) có thể viết được những liên hệ tương tự như liên hệ giữa mômen uốn với tải trọng ngang đã trình bày trong chương 2:

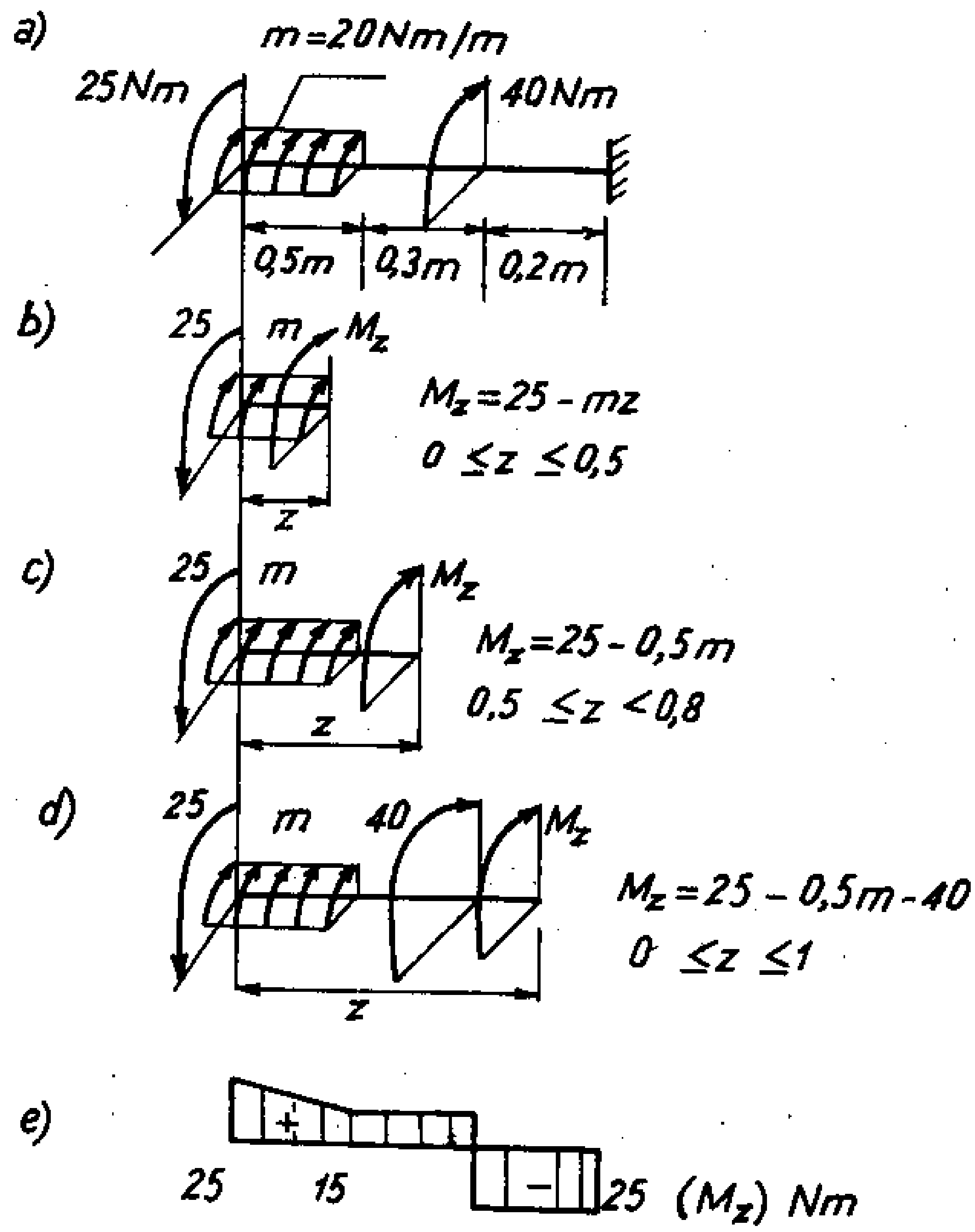
* Quan hệ bước nhảy của mômen xoắn nội lực và mômen xoắn ngoại lực tập trung

$$M_{z,ph} - M_{z,tr} = \mathcal{M}.$$

* Quan hệ vi phân giữa mômen xoắn nội lực và mômen xoắn ngoại lực phân bố dọc trục

$$\frac{dM_z}{dz} = m(z).$$

***Ví du 6-1***. Vẽ biểu đồ mômen xoắn của trục cho trên hình 6-2.




*Hình 6-2.* Cho ví dụ 6-1

*Bài giải*. Chia thanh thành ba đoạn và thực hiện mặt cắt trong từng đoạn như trên hình 6-2b, c, d ta nhận được:

$M_1 = 25 - 20z$ Nm $\quad (0 \le z \le 0,5\text{m});$

$M_2 = 25 - 20.0,5 = 15$ Nm $= const \quad (0,5 \le z \le 0,8\text{m});$

$M_3 = 25 - 20.0,5 - 40 = -25$ Nm $= const \quad (0,8 \le z \le 1,2\text{m}).$

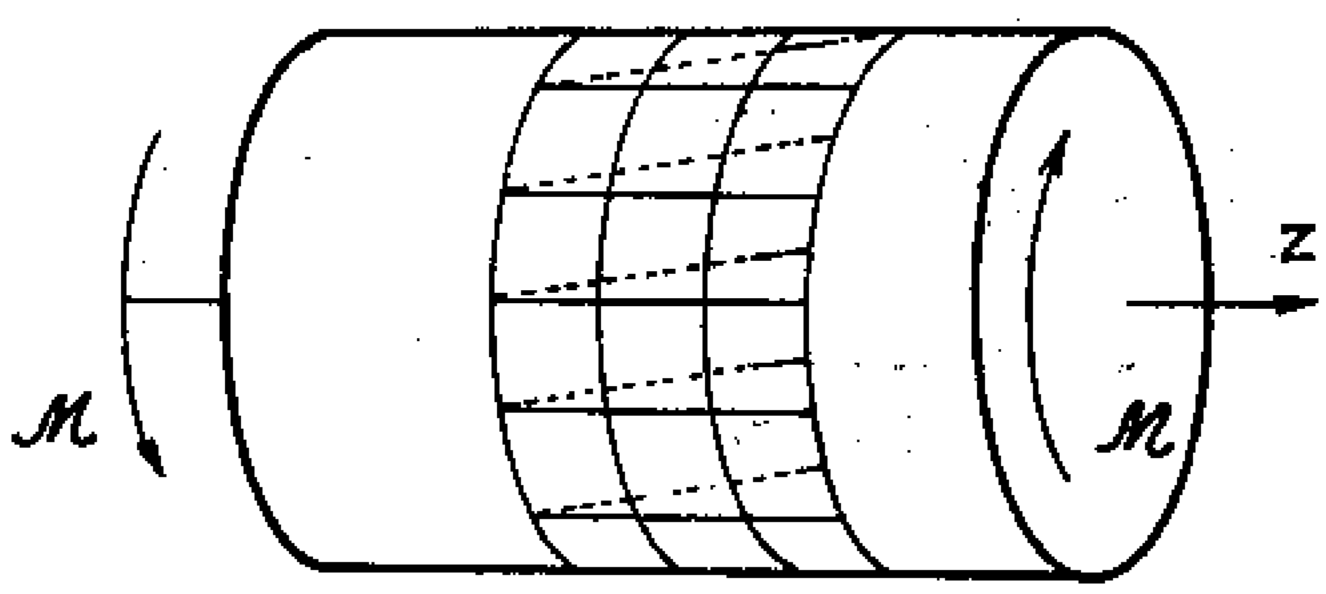
Biểu đồ $M_z$ vẽ trên hình 6-2e.

### *6-1-2. Những giả thiết về biến dạng của thanh*

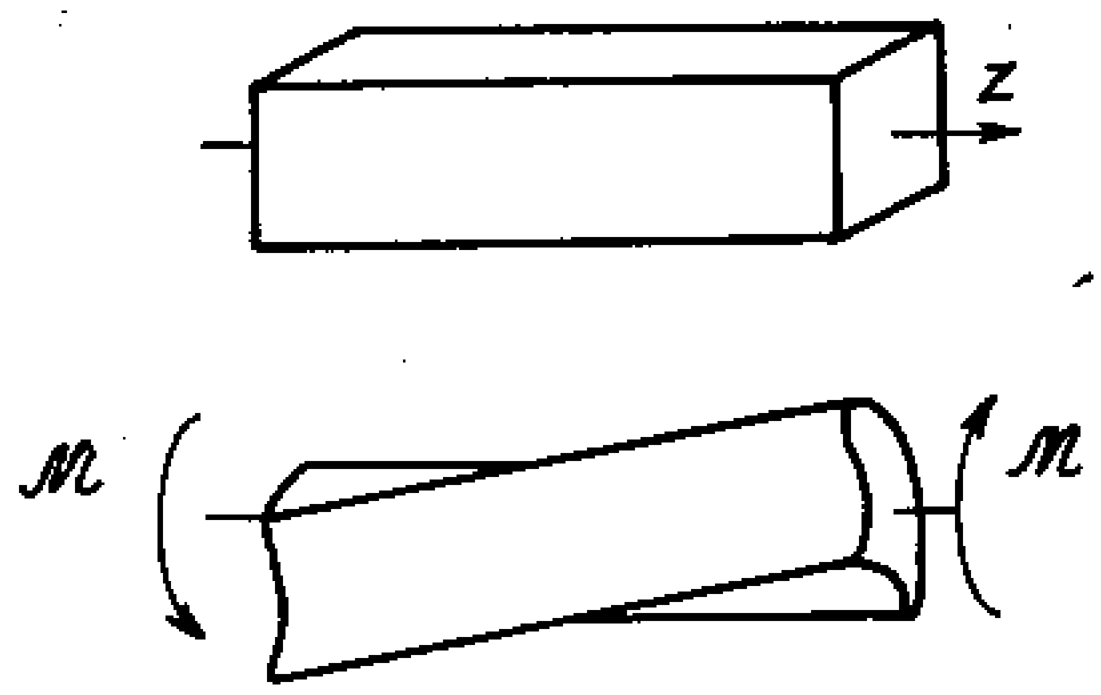
Để quan sát sự làm việc của thanh tiết diện tròn chịu xoắn ta kẻ trên bề mặt thanh một mạng lưới gồm các đường sinh và các đường tròn chu tuyến (hình 6-3). Khi chịu mômen xoắn ngoại lực $\mathcal{M}$ ở hai đầu, với biến dạng bé trong giai đoạn đàn hồi, ta nhận thấy:

* Chiều dài thanh và khoảng cách giữa các đường tròn hầu như không thay đổi. Các góc vuông thay đổi

* Các đường tròn vẫn phẳng, bán kính không thay đổi. Mặt phẳng của các vòng tròn có chuyển động quay quanh trục, góc quay của các vòng tròn khác nhau.




*Hình 6-3.* Biến dạng thanh tiết diện diện tròn chịu xoắn




*Hình 6-4.* Sự vênh của tiết không tròn khi xoắn

Từ thực nghiệm trên, nếu coi biến dạng bên trong thanh cũng như biến dạng ở mặt ngoài thanh, ta chấp nhận các giả thiết:

1- Thanh không có biến dạng dài dọc trục.

2- Tiết diện thanh vẫn phẳng chỉ thực hiện chuyển động quay quanh trục $z$ một góc $\varphi$, gọi là góc xoay của tiết diện và trong trường hợp tổng quát, là hàm số của toạ độ $z$. Quy ước chiều dương của góc xoay trùng với chiều dương của mômen xoắn nội lực.

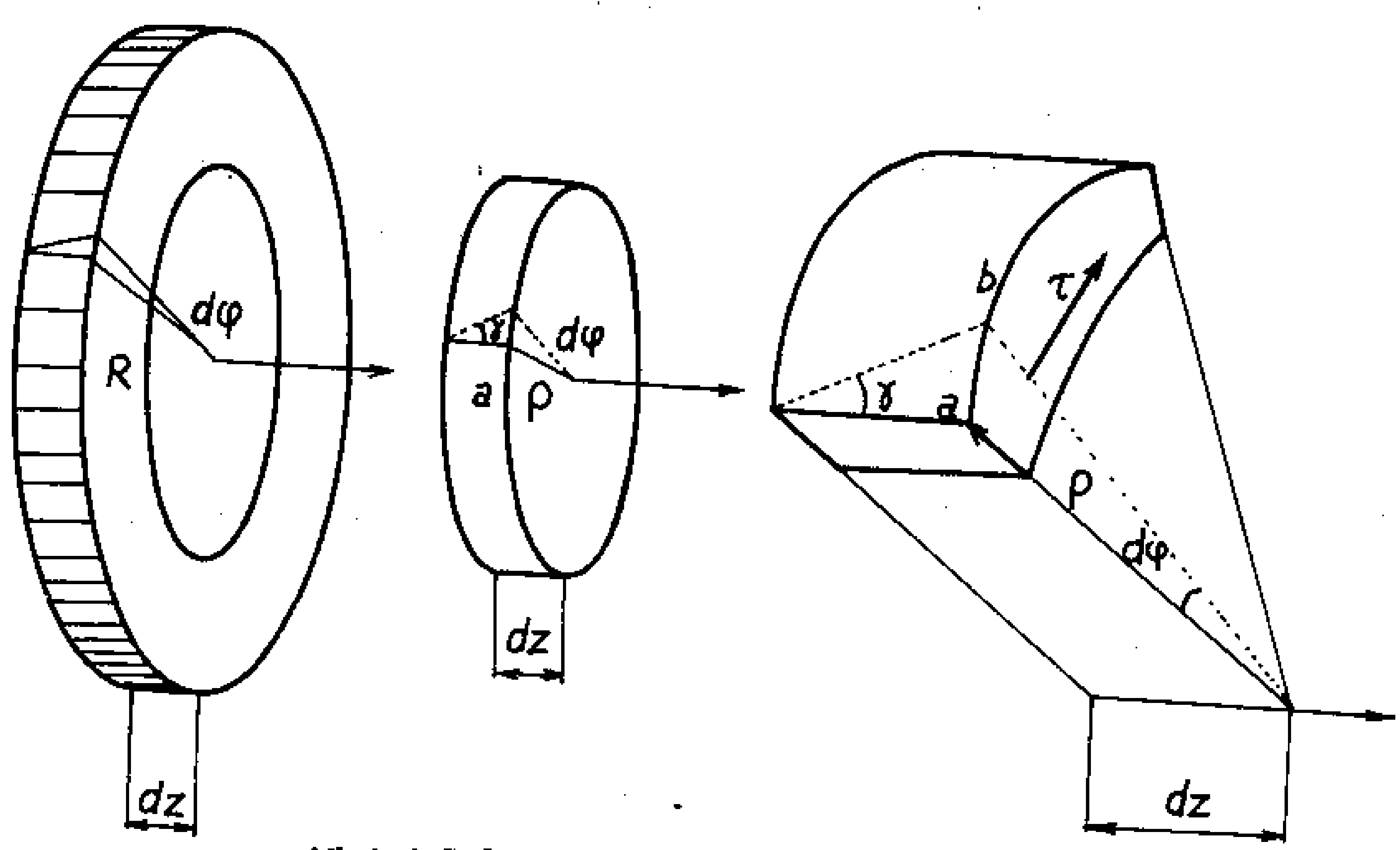
Cần lưu ý rằng khi tiết diện không phải hình tròn thì giả thiết này không phù hợp. Khi này các tiết diện thanh bị "vênh" khỏi mặt phẳng, việc giải bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn, vượt khỏi khuôn khổ của giáo trình SBVL (xem hình 6-4 đối với thanh tiết diện chữ nhật)

3- Bán kính tiết diện vẫn thẳng và không thay đổi chiều dài.

4- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ, hoặc nói cách khác, bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt song song với trục.

### *6-1-3. Công thức tính ứng suất tiếp trên tiết diện*

Theo các giả thiết đã nêu, trên tiết diện ứng suất pháp bằng không, chỉ tồn tại ứng suất tiếp. Để tính ứng suất, ta hãy khảo sát biến dạng của một phân tố thanh có chiều dài $dz$ (hình 6-5a).




*Hình 6-5.* Phân tích biến dạng thanh chịu xoắn

Tiết diện bên trái, ở toạ độ $z$, có góc xoay $\varphi$.

Tiết diện bên phải, ở toạ độ $z+dz$, sẽ có góc xoay $\varphi+d\varphi$.

Hiệu số $d\varphi$, là góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau $dz$, được gọi là góc xoắn của đọan thanh có chiều dài $dz$. Bán kính của tiết diện bên phải cũng có góc xoay tương đối $d\varphi$ so với bán kính tương ứng của tiết diện bên trái như trên hình 6-5a.

Xét phân tố con hình trụ tròn có bán kính $\rho$ ( $\rho \le R$ ). Bán kính $R$ thẳng nên góc xoay của bán kính $\rho$ cũng là $d\varphi$. Biến dạng của góc vuông ở mặt bên của phân tố con (hình 6-5b), bằng

$$\gamma = \frac{ab}{dz} = \rho\frac{d\varphi}{dz} = \rho.\theta . \qquad \text{(a)}$$

Trị số $\theta$ là góc xoay tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài, gọi là góc xoắn tỷ đối của thanh, là hằng số trên tiết diện và là hàm số theo toạ độ $z$, có thứ nguyên là [*Rad/Chiều dài*]

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} . \qquad \text{(6-2)}$$

Theo định luật Hooke, biến dạng góc tỷ lệ với ứng suất tiếp trên tiết diện, ứng suất này có phương vuông góc với bán kính

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho \qquad \text{(b)}$$

Theo định nghĩa, tổng mômen đối với trục $z$ của các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện $A$ chính là mômen xoắn $M_z$

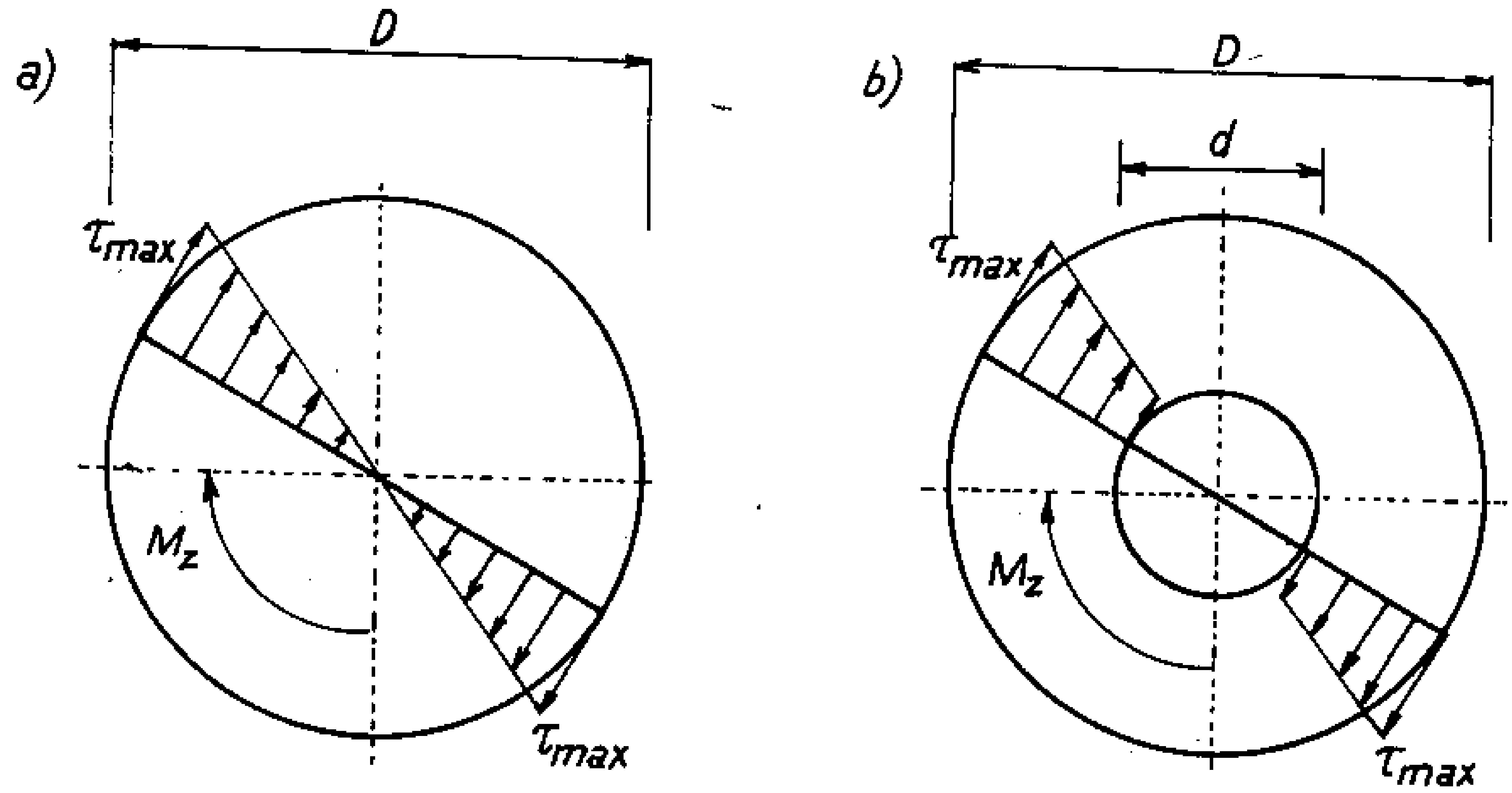
$$M_z = \int_A \tau\rho dA = \int_A G\theta\rho^2 dA \quad \text{(c)}$$

Tích $G\theta$ là hằng số trên tiết diện, $\int_A \rho^2 dA$ là mômen quán tính cực $I_p$ của tiết diện, nên

$$G\theta = \frac{M_z}{I_p}. \quad \text{(6-3)}$$

Thay biểu thức vừa nhận được vào quan hệ (b), ta có công thức tính ứng suất tiếp

$$\tau = \frac{M_z}{I_p}\rho \quad \text{(6-4)}$$




*Hình 6-6.* Biểu đồ ứng suất tiếp khi xoắn

Ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính, có chiều của mômen xoắn $M_z$ và có trị số tỷ lệ với khoảng cách $\rho$ từ điểm đang xét tới trọng tâm tiết diện. Biểu đồ ứng suất tiếp dọc theo bán kính là đường bậc nhất như trên hình 6-6 với trị số lớn nhất khi $\rho = R$.

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{I_p}R = \frac{M_z}{W_p} \quad \text{(6-6)}$$

$W_p = \frac{I_p}{R}$ là một đặc trưng hình học của tiết diện, gọi là mômen chống xoắn, có thứ nguyên [*Chiều dài*$^3$].

Tiết diện tròn đặc (hình 6-6a): $W = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2D^3$.

Tiết diện tròn rỗng (hình 6-6b): $W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left[1-(\frac{d}{D})^4\right] \approx 0{,}2D^3\left[1-\alpha^4\right]$.

### *6-1-4. Điều kiện bền*

Phân tích ứng suất trên phân tố vẽ ở hình 6-5c cho thấy các phân tố vật thể của thanh chịu xoắn ở trạng thái trượt thuần tuý, phân tố nguy hiểm là phân tố có $\tau_{max}$ ở sát mặt ngoài.

Điều kiện bền được viết là $\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \le [\tau]$.

Trị số cho phép của ứng suất tiếp lấy theo kết quả thực nghiệm hoặc theo các thuyết bền:

* theo thuyết bền ứng suất tiếp: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$;

* theo thuyết bền thế năng: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$.

Từ điều kiện bền ta cũng có ba bài toán cơ bản: bài toán kiểm tra, bài toán thiết kế tiết diện, bài toán xác định tải trọng cho phép.

## *6-2. BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ CỦA THANH CHỊU XOẮN*

### *6-2-1. Biến dạng*

Góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài, theo (6-3):

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \qquad (6\text{-}7)$$

Góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau *dz* chiều dài, theo (6-2):

$$d\varphi = \theta dz = \frac{M_z}{GI_p}dz$$

Góc xoay tương đối của hai tiết diện ở hai đầu đoạn thanh dài *L*, gọi là góc xoắn của đoạn thanh, sẽ là

$$\varphi = \int_L \frac{M_z}{GI_p}dz \qquad (6\text{-}8)$$

Khi $\frac{M_z}{GI_p}$ là hằng trên cả chiều dài *L*: $$\varphi = \frac{M_z L}{GI_p} \qquad (6\text{-}9)$$

Khi $\frac{M_z}{GI_p}$ là hằng trên từng đoạn của chiều dài *L*: $$\varphi = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GI_p}\right)_i \qquad (6\text{-}10)$$

Các biểu thức vừa nêu diễn tả định luật Hooke viết cho biến dạng và nội lực mômen xoắn của thanh chịu xoắn. Tích $GI_p$ là *độ cứng chống xoắn của tiết diện*, $GI_p / L$ là *độ cứng chống xoắn của thanh*.

### *6-2-2. Chuyển vị của các tiết diện*

Góc xoay $\varphi$ của tiết diện được xác định từ quan hệ vi phân $\theta = \dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{M_z}{GI_p}$.

Sau khi tích phân ta nhận được: $\varphi = \int \theta dz + C = \int \dfrac{M_z}{GI_p} dz + C$;

hằng số tích phân $C$ xác định theo điều kiện liên kết của hai đầu đoạn thanh.

Cũng có thể xác định góc xoay của tiết diện theo các quan hệ hình học giữa chuyển vị và biến dạng trong từng bài toán cụ thể, tương tự những nhận xét đã làm khi nghiên cứu thanh chịu kéo, nén đúng tâm trong chương 3.

### *6-2-3. Điều kiện cứng*

Biến dạng, chuyển vị của thanh chịu xoắn không được vượt quá những trị số cho phép cho trước. Ta có thể viết điều kiện cứng theo góc xoắn tỷ đối

$$\theta = \frac{M_z}{GI_p} \le [\theta]. \qquad (6\text{-}12)$$

Góc xoắn cho phép được lấy theo các yêu cầu công nghệ, chẳng hạn đối với các trục truyền lực trong chế tạo máy trị số $[\theta]$ thường dao động trong khoảng $(6 \div 60).10^{-2}$ rad/m.

***Ghi chú***. Trục của các động cơ là những thanh chịu xoắn. Trị số mômen xoắn tác động $\mathcal{M}$ phụ thuộc công suất của động cơ, ký hiệu $\mathcal{N}$, và vận tốc vòng $n$ (số vòng/phút) hoặc vận tốc góc $\omega$ (số góc quay tính theo radian/ giây).

Cho cân bằng công suất của mômen và của động cơ $\mathcal{M}\omega = \mathcal{N}$ ta nhận được biểu thức tính mômen xoắn, tính theo đơn vị Nm, như sau:

* khi công suất cho theo Watt (Nm/giây), vận tốc cho theo $\omega$:

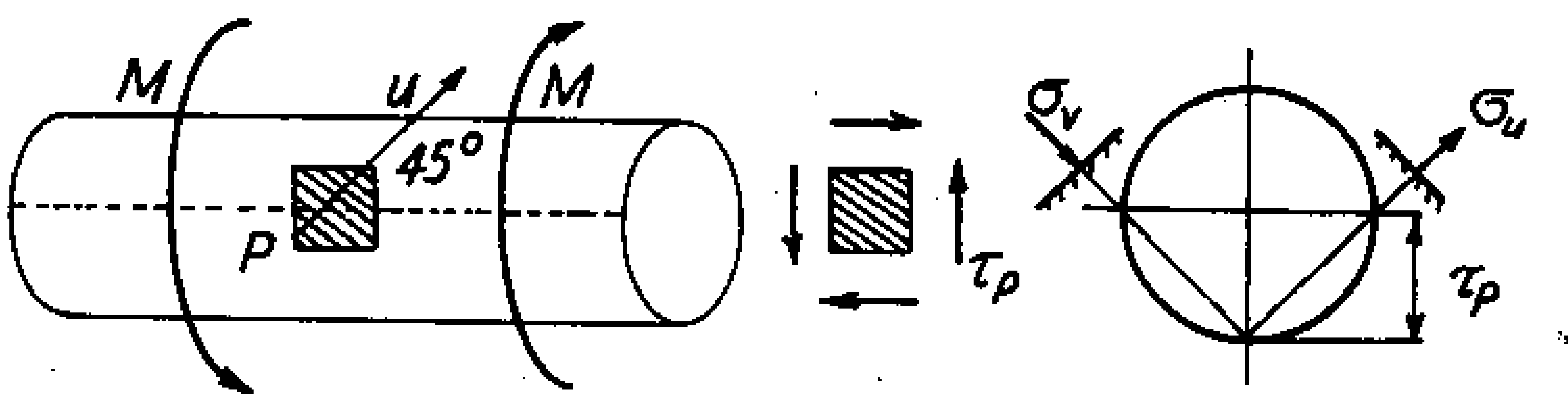
$$\mathcal{M} = \mathcal{N}/\omega, \qquad (6\text{-}13)$$

* khi công suất cho theo mã lực ($1$Cv $= 736$ W), vận tốc cho theo $n$:

$$\mathcal{M} = 7026\, \mathcal{N} / n. \qquad (6\text{-}14)$$

***Ví dụ 6-2***. Bằng thực nghiệm, nhờ dụng cụ đo biến dạng người ta đo được biến dạng dài tỷ đối tại điểm nằm trên bề mặt ngoài của một trục tiết diện tròn đường kính $d = 3$ cm, chịu xoắn, theo phương $u$ nghiêng $45^o$ so với đường sinh $\varepsilon_u = 6.10^{-4}$ (hình 6-7). Xác định trị số của mômen xoắn $M$.

Cho biết $E = 2.10^4$ kN/cm$^2$, hệ số Poisson $\mu = 0{,}3$.




*Hình 6-7.* Cho ví dụ 6-2

Bài giải. Ứng suất tiếp tại điểm $P$ trên tiết diện, theo (6-6):

$$\tau_P = \tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M}{0,2d^3}.$$

Biến dạng theo phương $u$, theo định luật Hooke: $E\varepsilon_u = \sigma_u - \mu\sigma_v$.

Vòng tròn Mohr của TTƯS trượt thuần tuý tại $P$ như trên hình 6-7 cho ta:

$$\sigma_u = -\sigma_v = \tau_P = \frac{M}{0,2d^3}$$

Từ đó $$E\varepsilon_u = \frac{1+\mu}{0,2d^3}M$$

Kết quả: $$M = \frac{E}{1+\mu}0,2d^3\varepsilon_u = \frac{2.10^4}{1+0,3}0,2.3^3.6.10^{-4} = 49,8 \text{ kN.cm}.$$

**Ví du 6-3.** Trục thép tiết diện tròn rỗng có $d = 0,75D$ truyền chuyển động từ động cơ có công suất $500$ kW với vận tốc $n = 600$ vòng/phút. Tìm đường kính $D$ cần thiết của trục theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

Cho biết $[\sigma] = 20$ kN/cm$^2$, $[\theta] = 3.10^{-4}$ rad/m, $G = 8.10^3$ kN/cm$^2$.

Bài giải. Mômen xoắn tương ứng:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{N}}{\omega} = \frac{\mathcal{N}}{30n/\pi} = \frac{\pi.500.10^3}{30.600} = 87,27 \text{ N/m} = 8,727 \text{ kNcm}.$$

* Điều kiện bền: $$W = 0,2D^3(1-\alpha^4) \geq \frac{M_z}{[\tau]}.$$

Sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp $[\tau] = [\sigma]/2 = 10$ kN/cm$^2$,

từ đó: $$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{8,727}{0,2(1-0,75^4)10}} \approx 1,855 \text{ cm}.$$

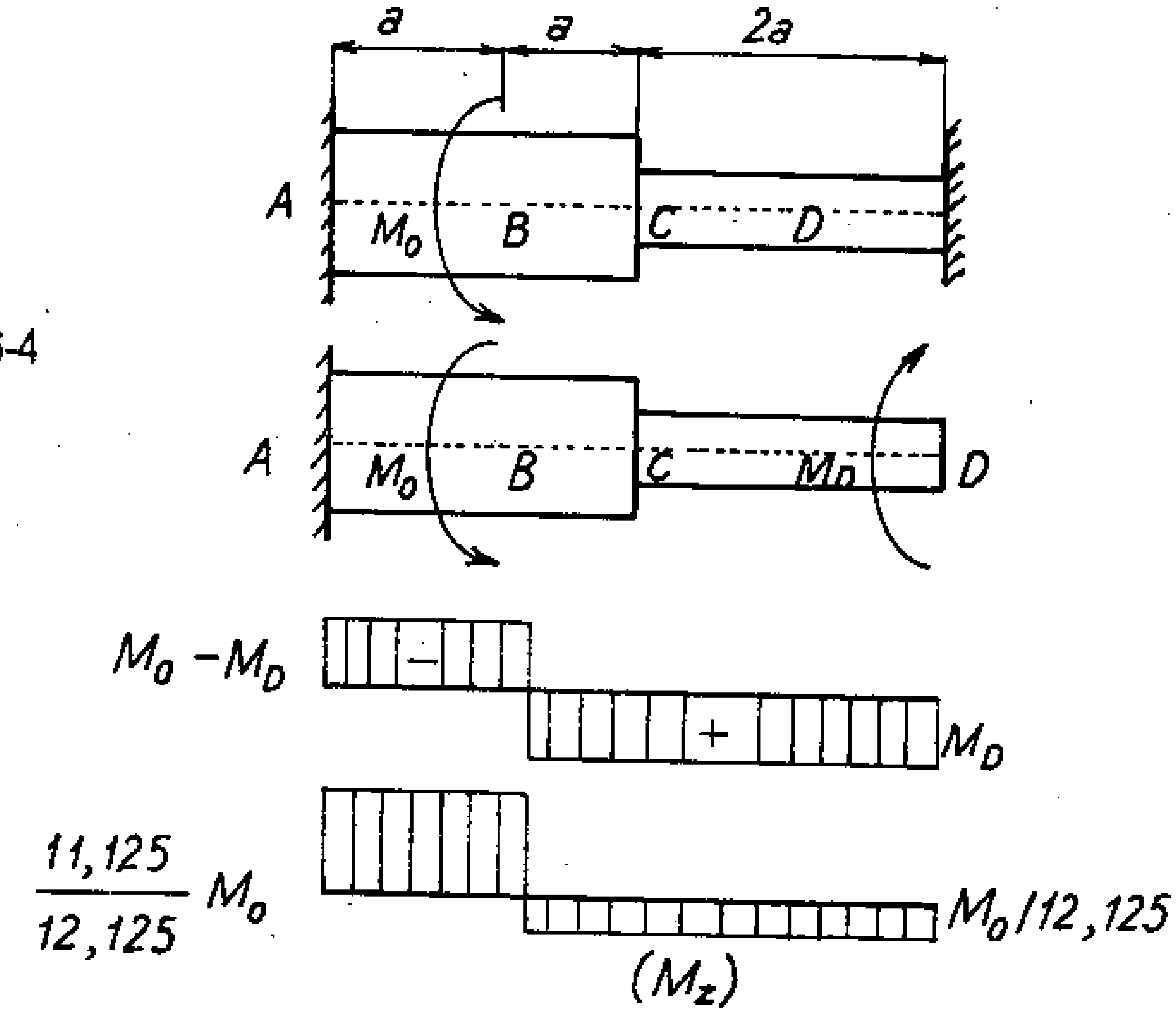
* Điều kiện cứng $$J_p = 0,1D^4(1-\alpha^4) \geq \frac{M_z}{G[\theta]},$$

từ đó: $$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1(1-\alpha^4)[\theta]G}} = \sqrt[4]{\frac{8,727}{8x10^3 x0,1(1-0,75^4)3x10^{-4}}} = 2,701 \text{ cm}.$$

Kết luận: Để thoả mãn cả điều kiện bền và cứng, ta lấy tròn

$$D = 2,8 \text{ cm}; \quad d = 2,1 \text{ cm}.$$

*Ví dụ 6-4*. Vẽ biểu đồ mômen xoắn cho thanh có tiết diện tròn thay đổi theo bậc như trên hình 6-8a.




*Hình 6-8.* Cho ví dụ 6-4

*Bài giải*. Bài toán siêu tĩnh, ta bỏ liên kết ngàm bên phải và thay bằng mômen phản lực $M_D$ trên hình 6-8b. Bằng phương pháp mặt cắt, ta vẽ được biểu đồ mômen tương ứng như trên hình 6-8c.

Điều kiện biến dạng là góc xoắn của thanh bằng không $\varphi_{AB} = 0$..

Ta tính mômen quán tính cực của tiết diện trên hai đoạn

$$I_{p1} = 0,1(1,5d)^4 = 0,50625d^4; \qquad I_{p2} = 0,1d^4.$$

$$\varphi_{AB} = \sum\left(\frac{M_z l}{GI_p}\right) = \frac{-(M_o - M_D)a}{GI_{p2}} + \frac{M_D a}{GI_{p2}} + \frac{M_D 2a}{GI_{p1}} =$$

$$= \frac{-M_o + M_D}{0,50625} + \frac{M_D}{0,50625} + \frac{2M_D}{0,1} = 0 \rightarrow M_D = \frac{M_o}{12,125}$$

Kết quả, biểu đồ mômen xoắn tìm được như trên hình 6-8d.

## 6-3. THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI KHI XOẮN

TNBDĐH riêng, theo (4-19), bằng

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

Khi xoắn: $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$ ; $\sigma_2 = 0$ nên $u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 = \frac{1}{2G}\frac{M_z^2}{I_p^2}\rho^2$.

TNBDĐH của thanh:

$$U = \int_V u dV = \int_L dz \int_A \frac{M_z^2}{2GI_p^2}\rho^2 dA = \int_L dz\left(\frac{M_z^2}{2GI_p^2}\int_A \rho^2 dA\right) = \int_L \frac{M_z^2}{2GI_p^2} I_p dz,$$

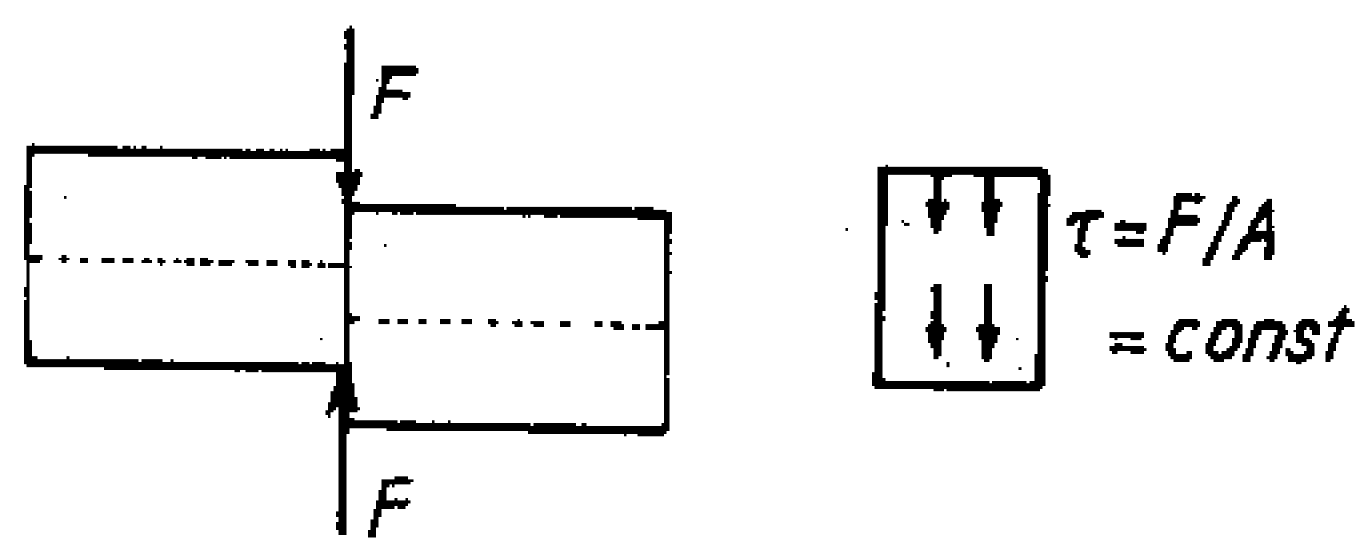
$$U = \int_L \frac{M_z^2}{2GI_p} dz. \tag{6-15}$$

## 6-4. THANH CHỊU CẮT

Biến dạng cắt hoặc biến dạng trượt cũng là một trường hợp chịu lực cơ bản của thanh. Giống như trường hợp chịu xoắn, trên tiết diện chịu cắt cũng chỉ có các ứng suất tiếp. Các ứng suất tiếp này có phương chiều của lực cắt $F$ và phân bố đều trên diện tích $A$ của mặt cắt với trị số trung bình (hình 6-9):

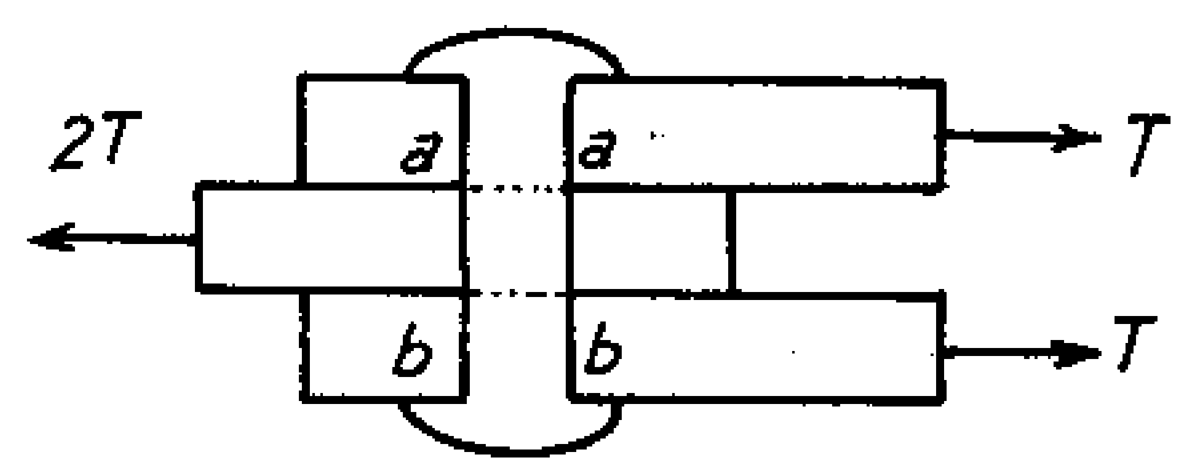
$$\tau = \frac{F}{A}. \tag{6-16}$$

Điều kiện bền khi cắt được viết là: $\tau = \frac{F}{A} \le [\tau]$. (6-17)




*Hình 6-9.* Thanh chịu cắt và ứng suất trên mặt cắt

Các chi tiết liên kết bulông, đinh tán hoặc các mối hàn chịu cắt và cần được kiểm tra về cắt. Trên hình 6-10 là một đinh tán liên kết ba tấm phẳng, gọi là liên kết hai mặt cắt. Ở mặt a-a, b-b trên diện tích $A = 2\frac{\pi d^2}{4}$ đinh tán chịu lực cắt $F = T$.




*Hình 6-10.* Đinh tán có hai mặt chịu cắt

Khi đinh tán có $n$ mặt cắt (liên kết n+1 tấm) thì diện tích chịu cắt $A = n\frac{\pi d^2}{4}$ và $T$ là tổng lực ở một phía của đinh tán.

Điều kiện bền khi cắt được viết theo (6-17).

Đinh tán còn có thể bị phá hỏng theo một dạng khác, gọi là sự *ép mặt*, xảy ra ở diện tích tiếp xúc giữa đinh tán và vách lỗ của từng tấm, ví dụ tấm giữa của liên kết hai mặt cắt trên hình 6-11. Sự phân bố của ứng suất trên bề mặt tiếp xúc giữa vách lỗ và đinh tán rất phức tạp. Ta có thể đánh giá một cách gần đúng độ bền thông qua trị số trung bình của ứng suất, ký hiệu $\sigma_{em}$, như sau:

$$\sigma_{em} = \frac{T}{A_{em}} \leq [\sigma]_{em}, \qquad (6\text{-}18)$$

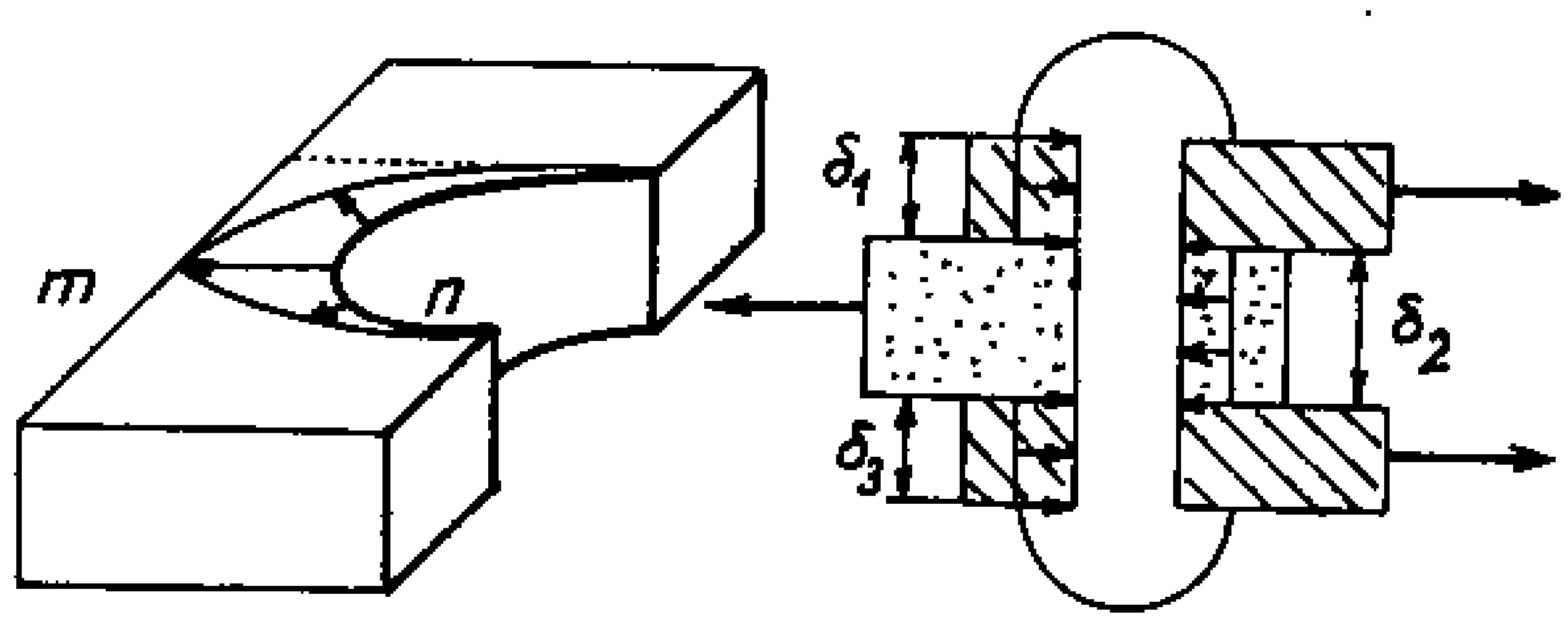
trong đó:

$T$ - tổng lực kéo hướng về một phía;

$A_{em}$ - diện tích ép mặt quy ước;

$[\sigma]_{em}$ - ứng suất ép mặt cho phép, phụ thuộc vào vật liệu và phụ thuộc phương pháp gia công lỗ (thô, tinh...) tìm từ thực nghiệm. Trị số này cho trong sổ tay tính toán kết cấu, thường đã có tính đến sự phân bố không đều của ứng suất trên diện tích ép mặt quy ước.

*Hình 6-11.* Ứng suất ép mặt




Trên hình 6-11, khi tính sự ép mặt giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ hai thì $A_{em} = d\delta_2$, khi tính sự ép mặt giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ nhất và thứ ba thì $A_{em} = d(\delta_1 + \delta_3)$.

Trường hợp tổng quát, khi đinh liên kết nhiều tấm thì

$$A_{em} = \sum d\delta_i = d\sum \delta_i \qquad (6\text{-}19)$$

trong đó: $d$ - đường kính của lỗ đinh tán,

$\delta_i$ - bề dầy của tấm thứ *i*, chỉ số *i* tính theo số tấm chịu lực về một phía.

Ta cần so sánh trị số $A_{em}$ của cả hai phía và chọn trị số nhỏ hơn để kiểm tra bền theo (6-18).

Ngoài ra, khi khoảng cách giữa các lỗ, hoặc khoảng cách từ lỗ đến mép tấm, tương đối bé thì cần kiểm tra khả năng bản bị cắt theo các đường trượt nối từ mép các lỗ lân cận nhau hoặc từ mép lỗ tới mép của tấm; trên hình vẽ 6-11 đường trượt của tấm thứ *i* được thể hiện bằng nét đứt *mn*. Những tính toán liên kết sẽ được trình bày cụ thể trong các giáo trình chuyên môn như kết cấu thép, kết cấu gỗ...

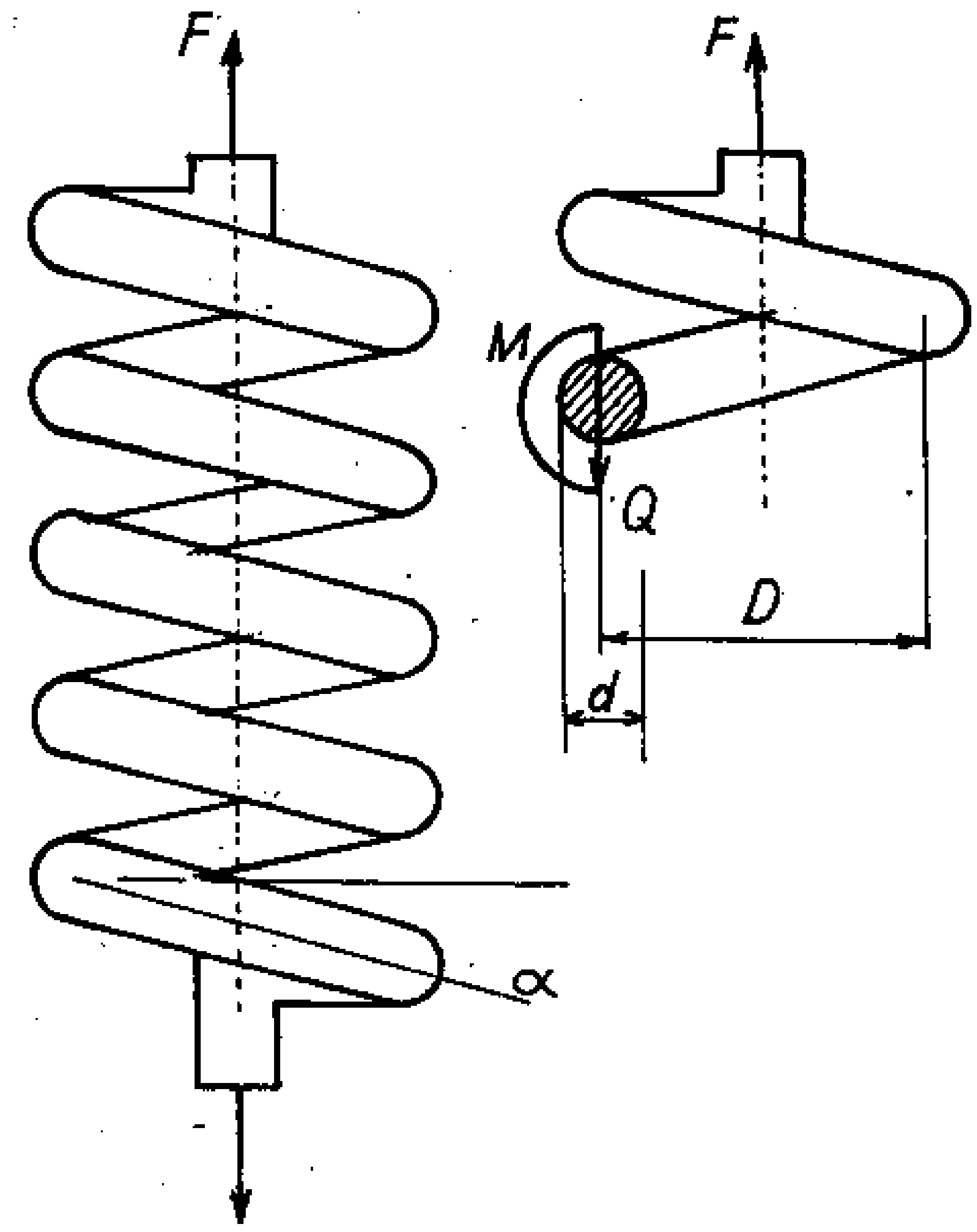
## 6-5. LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ

### 6-5-1. Ứng suất trên tiết diện

Xét một lò xo xoắn ốc hình trụ, tiết diện dây lò xo là hình tròn đặc đường kính $d$, đường kính trung bình của vòng lò xo là $D$, chịu lực kéo $F$ trùng với trục lò xo như diễn tả trên hình 6-12a. Khoảng cách giữa hai vòng lò xo được gọi là bước. Lò xo gọi là bước ngắn nếu góc nghiêng $\alpha$ nhỏ, bước dài nếu góc $\alpha$ lớn.

Với lò xo bước ngắn, mặt phẳng của tiết diện dây lò xo có thể coi là trùng với mặt phẳng chứa trục lò xo; ta xác định được lực cắt $Q$ và mômen xoắn $M_z$ (hình 6-12b):

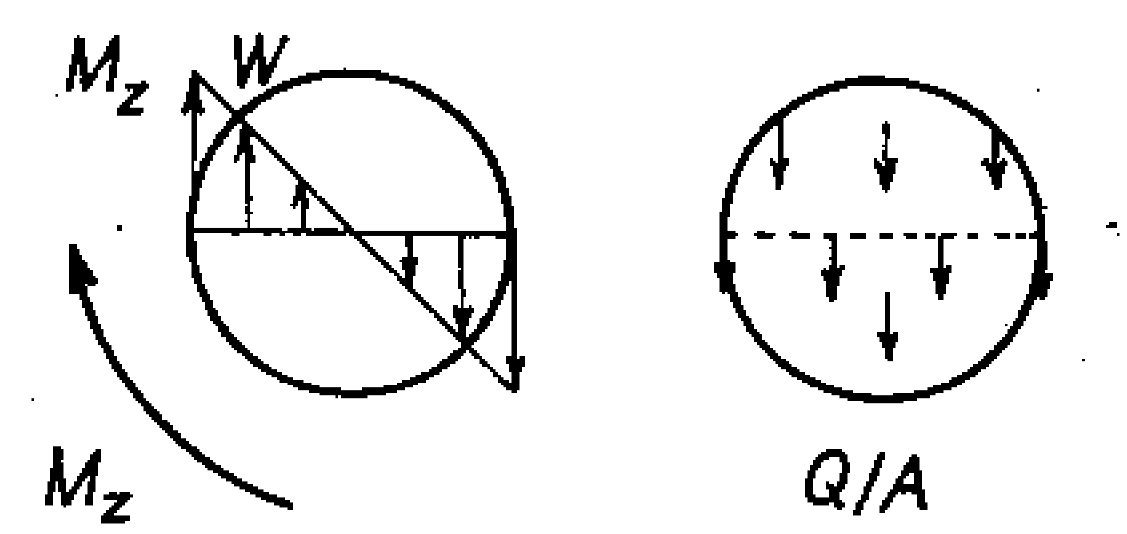
$$Q = F; \quad M_z = FR = FD/2.$$




*Hình 6-12.* Lò xo và ứng lực trên tiết diện

Mômen xoắn gây ứng suất tiếp lớn nhất $M_z / W_p$ tiếp xúc với chu vi tiết diện (hình 6-13a).

Lực cắt $Q$ gây ứng suất tiếp phân bố đều với trị số $Q/A$ có phương, chiều của lực cắt (hình 6-13b).




*Hình 6-13.* Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện

Theo hình 6-13 ta thấy mép trong của tiết diện là điểm nguy hiểm vì hai ứng suất tiếp thành phần cùng chiều, ứng suất tiếp tổng cộng đạt giá trị lớn nhất là

$$\tau_{max} = \frac{Q}{A} + \frac{M_z}{W_p} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{FD}{0{,}4d^3} = \left(1 + \frac{1{,}6}{\pi d^2} \cdot \frac{D}{d}\right)\frac{FD}{0{,}4d^3}, \tag{6-20}$$

hoặc tính gần đúng
$$\tau_{max} = K_1 \frac{FD}{0{,}4d^3}. \tag{6-21}$$

$K_1$ là hệ số điều chỉnh, có giá trị tìm được trong bảng 6-1 theo tỷ số $D/d$.

Bảng 6-1

| D/d | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | >12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 2,06 | 1,58 | 1,40 | 1,31 | 1,25 | 1,21 | 1,18 | 1,16 | 1,14 | 1,13 | 1,12 | 1 |
| $K_2$ | 1,12 | 1,11 | 1,09 | 1,08 | 1,07 | 1,06 | 1,05 | 1,05 | 1,05 | 1,04 | 1,04 | 1 |

### 6-5-2. Độ cứng của lò xo

Để tìm độ dãn $\lambda$ của lò xo ta áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (3-14):

$$T = U.$$

Công thực của ngoại lực $F$ bằng một nửa tích giữa lực và chuyển vị tương ứng

$$T = \frac{F\lambda}{2}.$$

TNBDĐH của thanh chịu xoắn, theo (6-15):

$$U = \int_L \frac{M_z^2}{2GI_p} dz = \int_L \frac{(FD/2)^2}{2GI_p} dz = \frac{F^2 D^2}{8GI_p} L.$$

Cân bằng công ngoại lực $T$ và thế năng $U$ với lưu ý $L = n\pi D$ ($n$ là số vòng dây của lò xo) và mômen quấn tính cực $I_p = 0,1d^4$, ta tính được độ dãn của lò xo

$$\lambda = \frac{8nD^3}{Gd^4} F, \qquad (6\text{-}22)$$

hoặc

$$\lambda = \frac{F}{C}, \qquad (6\text{-}23)$$

trong đó

$$C = \frac{Gd^4}{8nD^3}. \qquad (6\text{-}24)$$

Trị số $C$ được gọi là độ cứng, là một đặc trưng cơ bản của lò xo, phụ thuộc các kích thước hình học, vật liệu. Biểu thức (6-23) cho thấy: độ cứng $C$ là lực cần thiết để lò xo có biến dạng dài bằng một đơn vị.

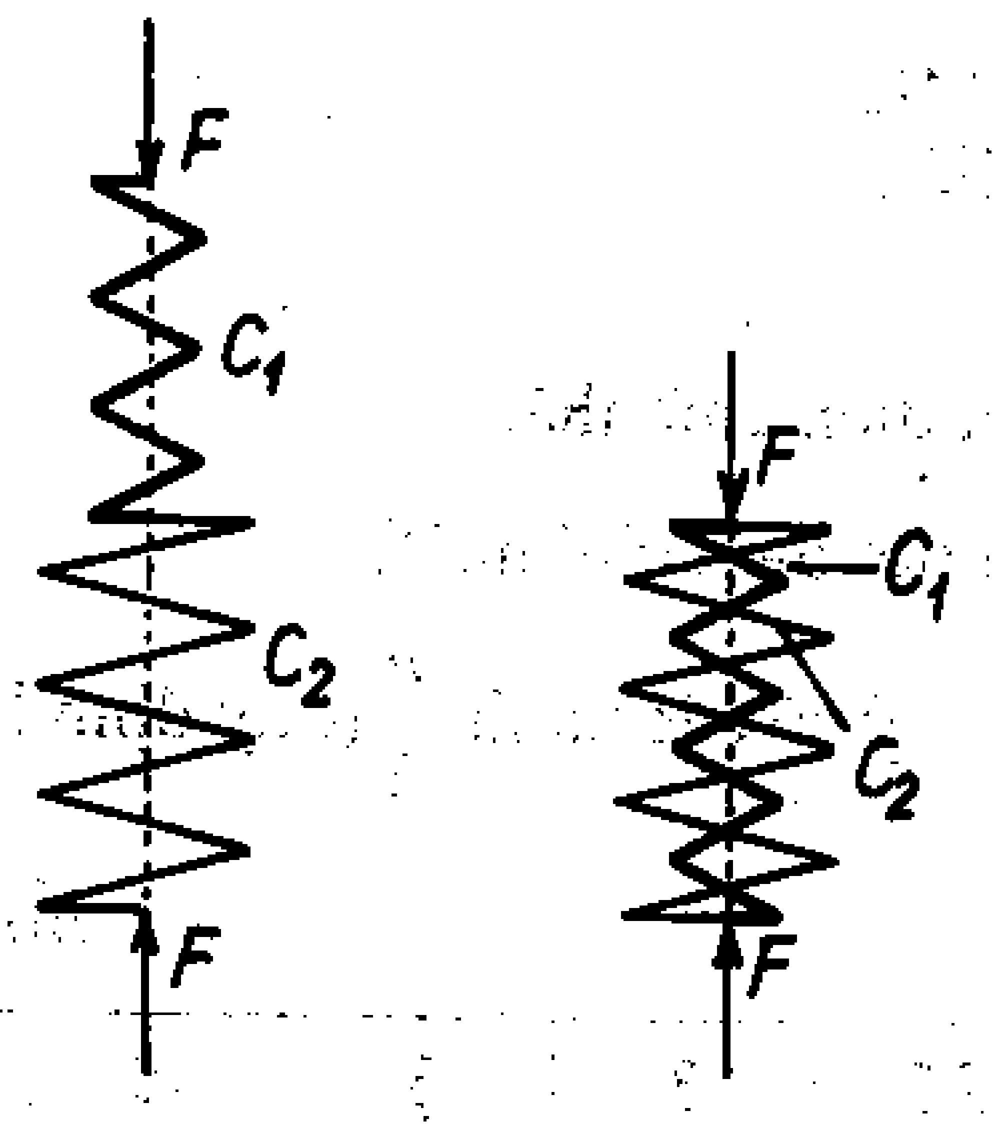
Nếu kể đến ảnh hưởng của lực cắt thì ta tính độ cứng theo công thức $C = K_2 \dfrac{Gd^4}{8nD^3}$.

Hệ số điều chỉnh $K_2$ cho trong bảng 6-1.

<u>*Ví du 6-5.*</u> Tìm độ cứng của hệ gồm hai lò xo có độ cứng riêng biệt $C_1$, $C_2$ khi nối liên tiếp (mắc nối tiếp) như trên hình 6-14*a* và khi đặt lồng vào nhau (mắc song song) như trên hình 4-14*b*, cùng chịu lực $F$.

*Bài giải*

* *Mắc nối tiếp* - Lực tác dụng lên mỗi lò xo như nhau $F_1 = F_2 = F$ và độ dãn của cả hệ bằng tổng độ dãn riêng của mỗi lò xo




Hình 6-14. Cho ví dụ 6-5

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{F_1}{C_1} + \frac{F_2}{C_2} = F\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

So sánh với (6-23) ta thấy:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

hoặc $\quad C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ (6-25)

Nghịch đảo của độ cứng cả hệ bằng tổng nghịch đảo độ cứng riêng từng lò xo.

* *Mắc song song* - Độ dãn hai lò xo bằng nhau và bằng độ dãn chung của cả hệ

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{F_1}{C_1} = \frac{F_2}{C_2}$$

nhưng lực kéo trên hệ bằng tổng lực tác dụng lên hai lò xo

$$F = F_1 + F_2 = \lambda(C_1 + C_2) \rightarrow \lambda = \frac{F}{C_1 + C_2}.$$

So sánh với (6-23) ta thấy $\quad C = C_1 + C_2.$ (6-26)

Độ cứng của hệ bằng tổng độ cứng riêng từng lò xo.

Có thể tổng quát hóa kết luận trên để viết công thức tính độ cứng của hệ lò xo mắc nối tiếp $C^{-1} = \sum_i C_i^{-1}$ và của hệ lò xo mắc song song $C = \sum_i C_i$.

## 6-6. XOẮN THANH CÓ TIẾT DIỆN HÌNH CHỮ NHẬT

Như đã quan sát trên hình 6-4, tiết diện hình chữ nhật của thanh chịu xoắn sẽ bị biến dạng "vênh" khỏi mặt phẳng ban đầu. Giả thiết cơ bản của SBVL là giả thiết tiết diện phẳng không còn được chấp nhận, bài toán xoắn thanh có tiết diện chữ nhật được giải quyết trong khuôn khổ của Lý thuyết đàn hồi và có tên gọi là bài toán Saint-Venant. Theo kết quả của lý thuyết này, biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện $b \times h$ có dạng như trên hình 6-15.

Tại trọng tâm tiết diện, ứng suất tiếp bằng không.

Tại trung điểm cạnh dài $h$, ứng suất tiếp đạt trị số lớn nhất $\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{xo}}$. (6-27)

Tại trung điểm cạnh ngắn $b$, ứng suất tiếp đạt trị số khá lớn $\tau_1 = \beta\tau_{max}$. (6-28)

Góc xoắn tỷ đối của thanh: $\theta = \frac{M_z}{GI_{xo}}$. (6-29)

Trong các công thức trên:

$W_{xo} = \alpha hb^2$ - mômen chống xoắn của tiết diện chữ nhật;

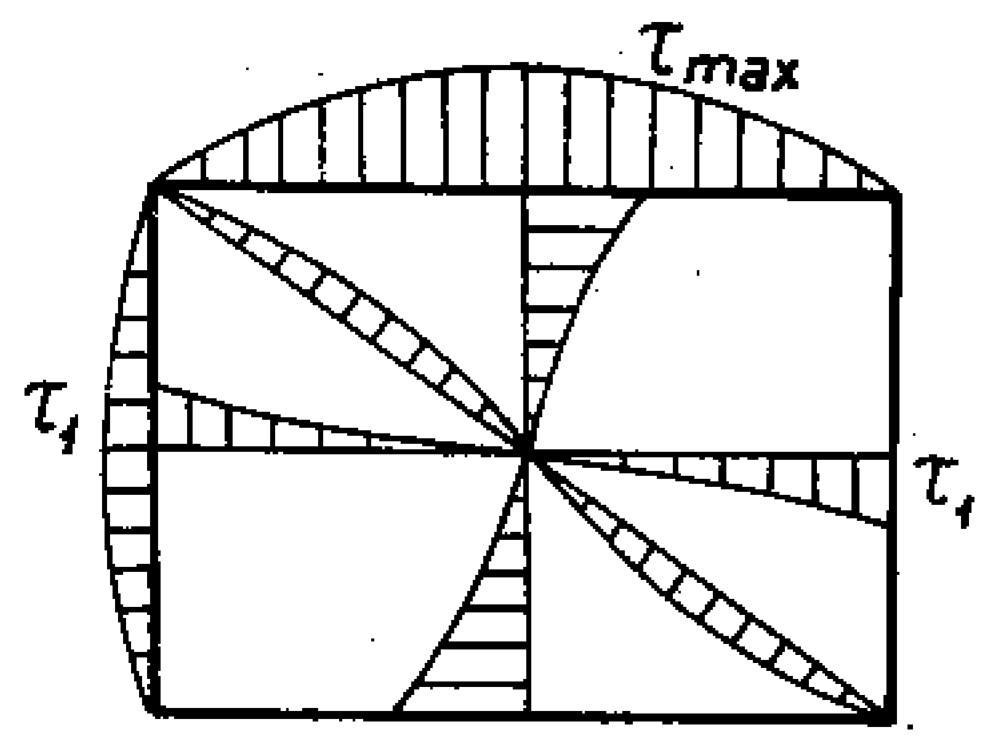
$I_{xo} = \gamma hb^3$ - mômen quán tính xoắn của tiết diện chữ nhật;

$\alpha, \beta, \gamma$ - các hệ số tìm trong bảng 6-2 theo tỷ số các cạnh $\frac{h}{b}$ (quy định lấy $h>b$).

*Bảng 6-2*

| h/b | 1.0 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 6 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,299 | 0,313 | 0,333 |
| $\beta$ | 1,0 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,743 | 0,742 | 0,742 |
| $\gamma$ | 0,141 | 0,156 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,299 | 0,313 | 0,333 |

Khi $\frac{h}{b} \geq 10$ có thể lấy $\alpha = \gamma = \frac{1}{3} = 0,333$.




*Hình 6-15.* Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

6- 1. Chứng minh rằng giữa ứng lực mômen xoắn $M_z$ và tải trọng mômen xoắn phân bố trên thanh thẳng $m_z$ tồn tại quan hệ $\frac{dM_z}{dz} = m_z$ . Nêu những kết luận về dạng biểu đồ $M_z$ khi biết quy luật phân bố của $m_z$.

6- 2. Giả thiết tiết diện phẳng khi xoắn được sử dụng đối với những loại thanh nào, trong những trường hợp nào giả thiết này không thể chấp nhận?

6- 3. Định nghĩa góc xoay của tiết diện, góc xoắn tỷ đối, góc xoắn của thanh.

6- 4. Nêu phương, chiều, trị số của ứng suất tiếp trên tiết diện tròn của thanh chịu xoắn.

6- 5. Đại lượng nào được gọi là mômen chống xoắn, độ cứng khi xoắn của tiết diện thanh? Biểu thức của mômen chống xoắn, của mômen quán tính cực đối với tiết diện tròn đặc, tiết diện tròn rỗng.

6- 6. Viết điều kiện bền, điều kiện cứng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn. Nêu ba bài toán cơ bản tương ứng với các điều kiện này khi tính thanh chịu xoắn.

6- 7. Viết và giải thích các đại lượng trong biểu thức tính TNBD của thanh chịu xoắn.

6- 8. Nêu phương, chiều, trị số của ứng suất tiếp trên tiết diện chịu cắt.

6- 9. Phân loại các loại lò xo xoắn ốc hình trụ. Nêu công thức tính độ cứng của lò xo có bước ngắn.

6-10. Khi nào hệ nhiều lò xo được coi là mắc nối tiếp, mắc song song. Viết công thức tính độ cứng của hệ trong hai trường hợp.

6-11. Nêu đặc điểm biến dạng của thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn, biểu đồ ứng suất tiếp trên tiết diện.

# 7 Thanh chịu uốn phẳng

## 7-1. KHÁI NIỆM CHUNG

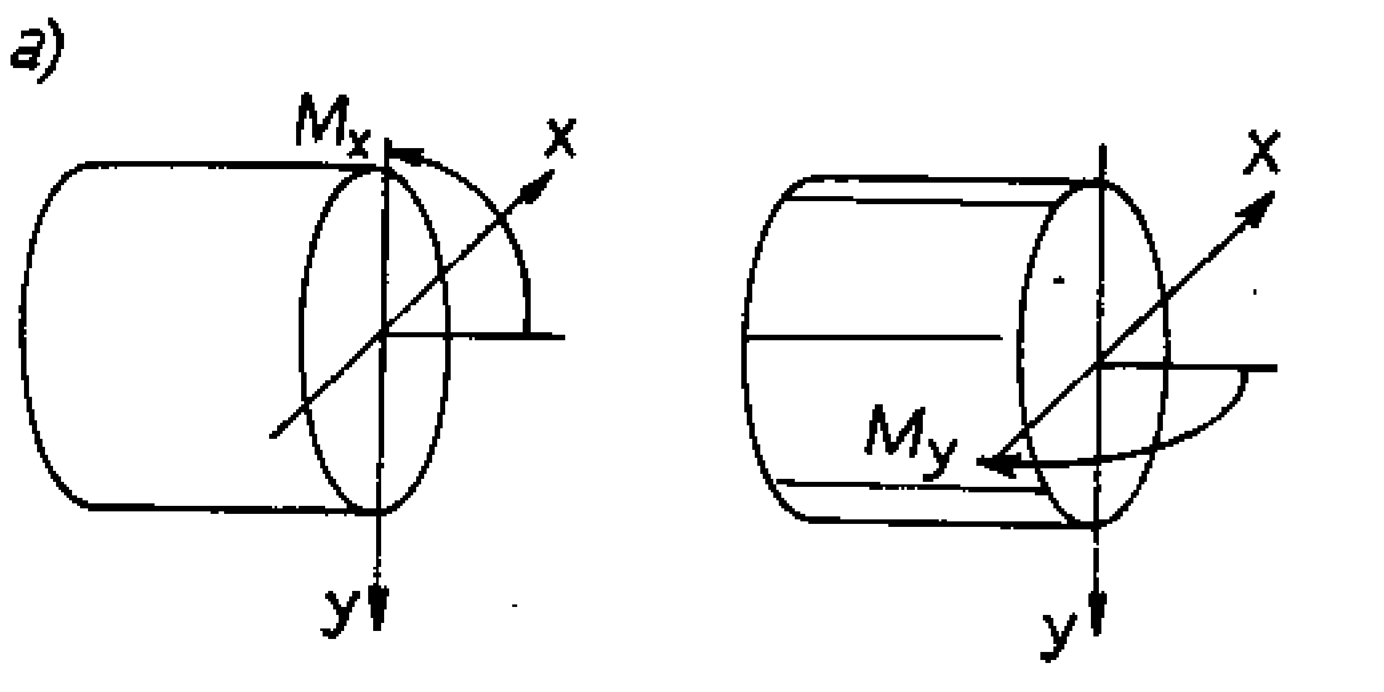
Biến dạng uốn là một dạng biến dạng phổ biến, có thể nói là chủ yếu trong kết cấu công trình. Khi chịu uốn, trục thanh thay đổi độ cong, trên tiết diện có ứng lực mômen uốn nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh, gọi là *mặt phẳng uốn*.

Mặt phẳng chứa trục thanh $z$ và trục quán tính chính trung tâm $x$ hoặc $y$ của tiết diện được gọi là mặt phẳng quán tính chính của thanh.

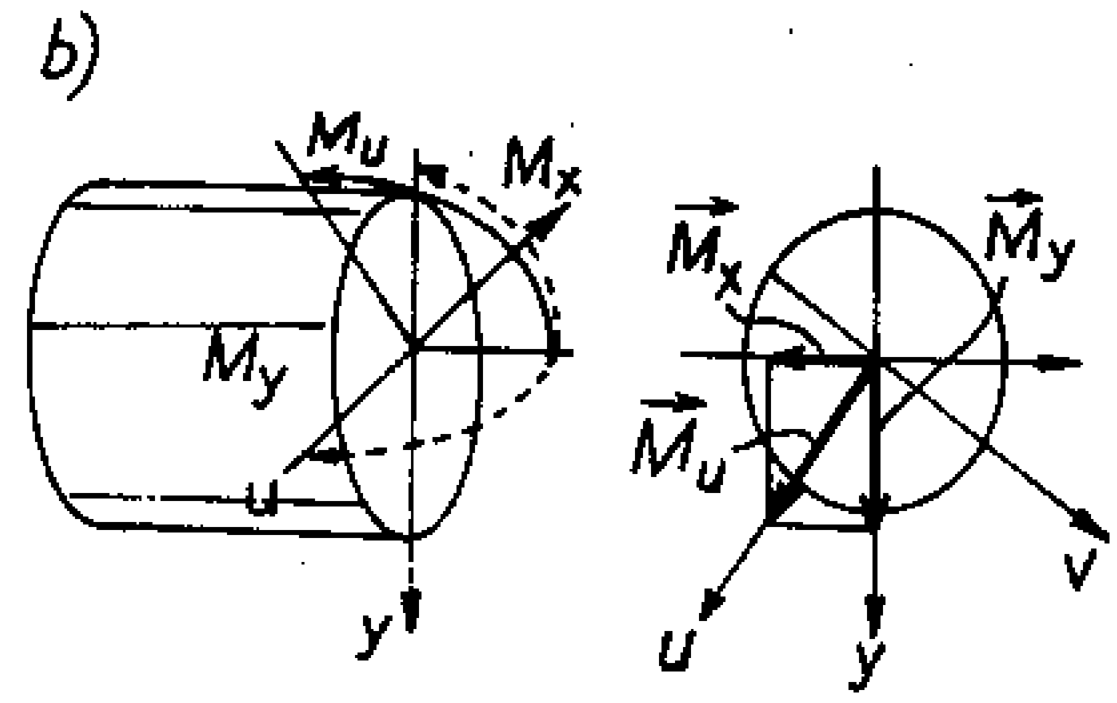
Nếu mặt phẳng uốn trùng với mặt phẳng quán tính chính thì thanh chịu *uốn phẳng*. Thanh có thể chịu uốn trong mặt phẳng $yz$ bởi mômen uốn $M_x$ (mômen quay quanh trục $x$), hoặc trong mặt phẳng $xz$ bởi mômen uốn $M_y$ (mômen quay quanh trục $y$) như biểu diễn trên hình 7-1.

Nếu mặt phẳng uốn không trùng với mặt phẳng quán tính chính thì thanh chịu *uốn không gian* (hình 7-2). Mômen uốn, ký hiệu $M_u$, quay quanh trục trung tâm u vuông góc với mặt phẳng mômen. Luôn luôn có thể phân tích $M_u$ thành hai mômen nằm trong hai mặt phẳng quán tính chính, viết dưới dạng véctơ mômen là $\vec{M}_u = \vec{M}_x + \vec{M}_y$. Bài toán uốn không gian, còn gọi là *uốn xiên*, là tổ hợp của hai bài toán uốn phẳng. Vì vậy ta nghiên cứu trước hết trường hợp uốn phẳng.

Khi uốn, nếu trên tiết diện thanh có cả lực cắt thì thanh được gọi là chịu *uốn ngang*. Khi lực cắt bằng không, chẳng hạn trên thanh có mômen uốn bằng hằng số, ta nói thanh chịu *uốn thuần tuý*.



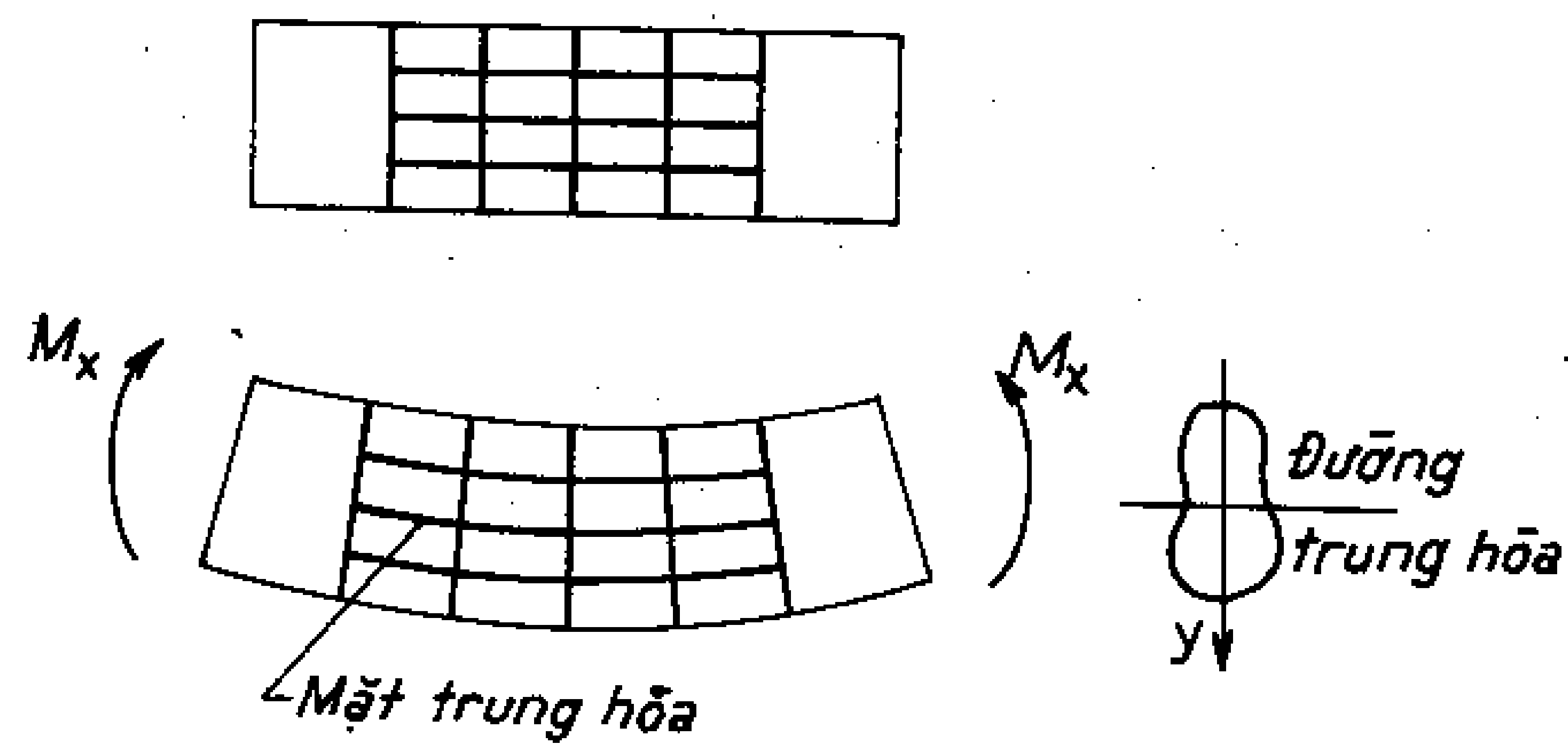

*Hình 7-1.* Thanh chịu uốn phẳng




*Hình 7-2.* Thanh chịu uốn không gian

## 7-2. ỨNG SUẤT TRÊN TIẾT DIỆN THANH CHỊU UỐN THUẦN TUÝ

### 7-2-1. Các giả thiết




*Hình 7-3.* Quan sát biến dạng của thanh thẳng chịu uốn thuần túy

Xét thanh thẳng chịu uốn thuần tuý trong mặt phẳng quán tính chính $yz$. Quan sát biến dạng của thanh trên hình 7-3, ta thấy: những đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng; các đường kẻ song song với trục bị cong , các đường phía trên co lại, các đường kẻ phía dưới dãn ra nhưng vẫn cách đều nhau; các góc vuông vẫn bảo toàn. Trên cơ sở đó, ta giả thiết:

*1- Trước và sau biến dạng tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục.*

*2- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ lên nhau, có thể bỏ qua các thành phần ứng suất pháp trên các mặt song song với trục* $\sigma_x \approx \sigma_y \approx 0$.

*3- Tồn tại một lớp vật liệu song song với trục thanh có chiều dài không đổi, gọi là lớp trung hoà. Giao tuyến của lớp trung hoà với tiết diện là một đường thẳng, gọi là đường trung hoà.*

Hai giả thiết đầu đã được sử dụng trong các chương trước; giả thiết thứ ba được chấp nhận khi xét các biến dạng bé, tiết diện hầu như không bị biến dạng.

### 7-2-2. Công thức tính ứng suất

Xét phân tố thanh có chiều dài $dz$ như trên hình 7-4, ký hiệu:

$d\varphi$ - góc hợp thành giữa hai tiết diện giới hạn của phân tố sau biến dạng;

$\rho$ - bán kính cong của lớp trung hoà $b$-$b$,

$x$ - đường trung hoà trên tiết diện.

Biến dạng dài tỷ đối theo phương $z$ tại điểm có khoảng cách $y$ tới đường trung hoà sẽ là

$$\varepsilon_z = \frac{a_1a_1 - aa}{aa} = \frac{a_1a_1 - bb}{bb} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \qquad (7\text{-}1)$$

Các góc vuông không thay đổi nên ứng suất tiếp trên tiết diện tại điểm đang xét bằng không. Vì $\sigma_x \approx \sigma_y \approx 0$ nên ứng suất pháp trên tiết diện bằng

$$\sigma = E\varepsilon_z = \frac{Ey}{\rho}. \tag{7-2}$$

Khi uốn trong mặt phẳng *yz* đang xét, trong ba ứng lực liên quan tới ứng suất pháp thì lực dọc $N$ và mômen uốn $M_y$ đối với trục $y$ bằng không, chỉ tồn tại mômen uốn $M_x$ xác định bằng phương pháp mặt cắt, các điều kiện này được viết là:

$$N = \int_A \sigma \, dA = 0; \tag{a}$$

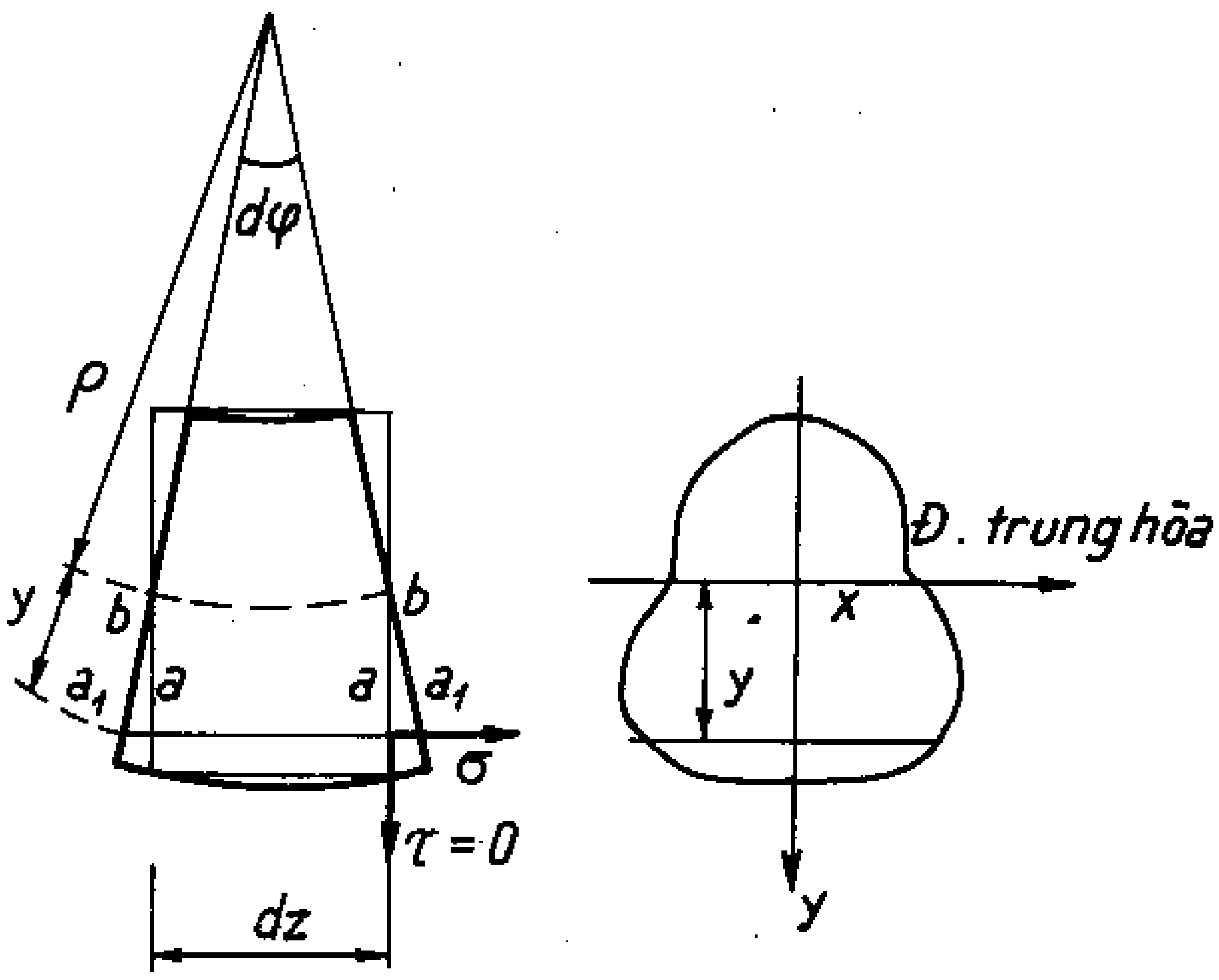
$$M_y = \int_A x\sigma \, dA = 0; \tag{b}$$

$$M_x = \int_A y\sigma \, dA. \tag{c}$$

Thay biểu thức của ứng suất theo (7-2) vào (a), (b) với chú ý $\frac{E}{\rho}$ là hằng số trên tiết diện, ta tìm được hai điều kiện:

$$\int_A y dA = 0; \quad \int_A xy dA = 0.$$

Như vậy mômen tĩnh đối với trục trung hoà $x$ và mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục $xy$ của tiết diện bằng không.




*Hình 7-4.* Biến dạng phân tố *dz* của thanh

*Trục trung hoà x là trục đi qua trọng tâm vuông góc với mặt phẳng uốn, hệ trục xy là hệ trục quán tính chính trung tâm.*

Sau khi đã xác định vị trí đường trung hoà, ta tìm được biểu thức của bán kính cong nhờ biểu thức (c)

$$M_x = \int_A y\sigma \, dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI_x}{\rho}, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \tag{7-3}$$

Thay (7-3) vào (7-2) ta có công thức để tính ứng suất pháp

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \tag{7-4}$$

Dấu các đại lượng: trục $y$ hướng xuống dưới, mômen dương làm căng phía dưới của thanh hoặc mômen uốn là dương khi làm căng phía dương của trục $y$.

### *7-2-3. Biểu đồ, trị số lớn nhất của ứng suất*

Theo công thức (7-4), trị số ứng suất pháp tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách đến đường trung hoà và có dấu khác nhau về hai phía của đường trung hoà. Theo chiều cao tiết diện, biểu đồ ứng suất pháp là đường bậc nhất, bằng không tại đường trung hoà và có trị số lớn nhất tại hai mép như trên hình 7-5.

Ký hiệu $y_k$ và $y_n$ là toạ độ tương ứng của mép tiết diện chịu kéo và mép tiết diện chịu nén, thì trị số lớn nhất của ứng suất pháp bằng:

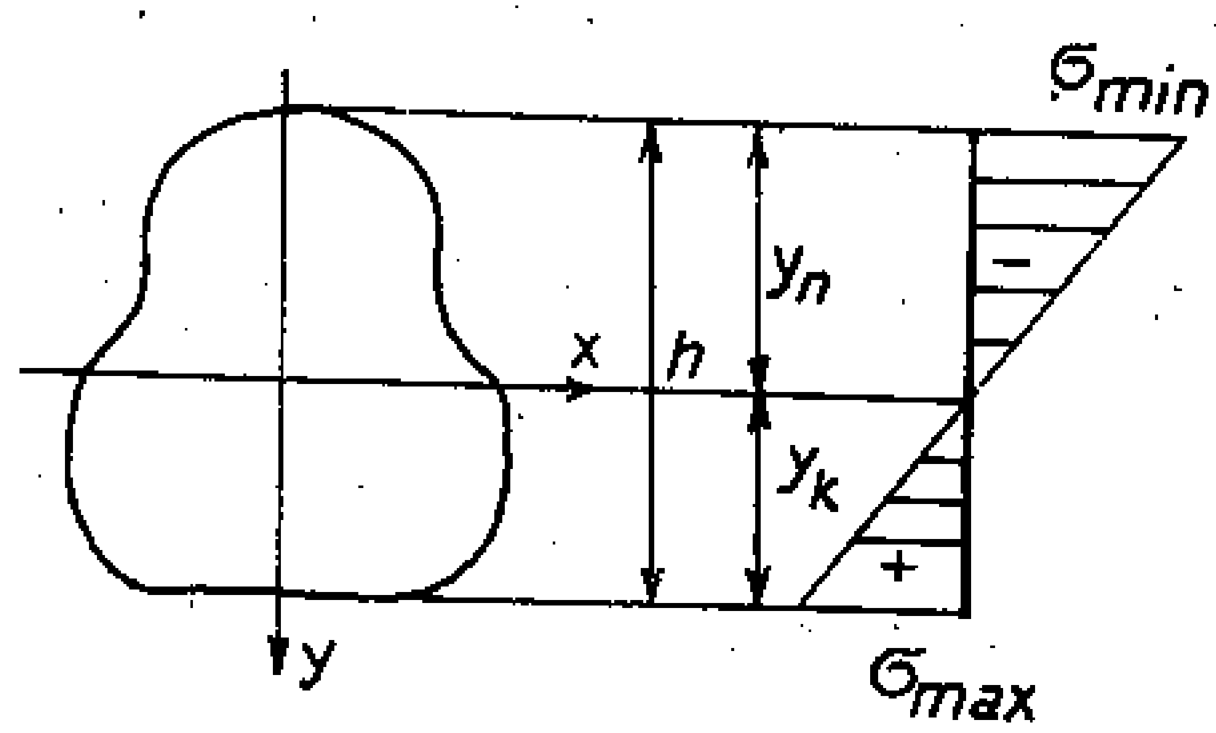
$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{M_x}{I_x} y_{\substack{k \\ n}} = \pm \frac{|M_x|}{W_{\substack{x,k \\ x,n}}} \tag{7-5}$$

Lấy dấu cộng trong (7-5) khi tính $\sigma_{max}$, lấy dấu trừ khi tính $\sigma_{min}$.

Các trị số $\quad W_{x,k} = \dfrac{I_x}{y_k}; \qquad W_{x,n} = \dfrac{I_x}{y_n}, \qquad$ (7-6)

là một đặc trưng hình học của tiết diện, gọi là *mômen chống uốn*.

*Hình 7-5.* Biểu đồ ứng suất pháp trên tiết diện




Nếu tiết diện đối xứng qua trục $x$ thì $W_{x,k} = W_{x,k} = W_x = \dfrac{I_x}{h/2}$; các trị số $\sigma_{max}$, $\sigma_{min}$ bằng nhau

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \tag{7-6}$$

Đối với tiết diện chữ nhật $b \times h$ :

$$W_x = \frac{bh^3 / 12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}. \tag{7-7}$$

Đối với tiết diện tròn đặc đường kính $D$:

$$W_x = \frac{\pi D^4/64}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0{,}1D^3 . \qquad (7\text{-}8)$$

Đối với tiết diện tròn rỗng, đường kính ngoài $D$, tỷ số giữa đường kính trong và đường kính ngoài là $\alpha$:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \approx 0{,}1D^3(1-\alpha^4) . \qquad (7\text{-}9)$$

Trị số mômen chống uốn của các tiết diện thép định hình được tìm theo bảng tiêu chuẩn (phụ lục I).

Đối với tiết diện có hình dạng ghép từ nhiều hình đơn giản, trước hết, ta tìm mômen quán tính trung tâm $I_x$, sau đó tính $W_x$ theo công thức định nghĩa (7-6).

### *7-2-4. Điều kiện bền*

Khi uốn thuần tuý, TTƯS của thanh là TTƯS đơn, điều kiện bền là

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_k \le [\sigma]_k ; \qquad (7\text{-}10a)$$

$$|\sigma_{min}| = \left|\frac{M_x}{I_x} y_n\right| \le [\sigma]_n . \qquad (7\text{-}10b)$$

Khi kiểm tra bền với ứng suất nén, ta lấy giá trị tuyệt đối của ứng suất vì $\sigma_{min} < 0$.

Tiết diện kiểm tra là những tiết diện có trị số mômen dương và mômen âm lớn nhất.

Khi tiết diện đối xứng qua trục $x$ thì trị số $\sigma_{max}$ và $\sigma_{min}$ bằng nhau, điều kiện bền có dạng đơn giản là

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma]_{n}^{k} .$$

Với vật liệu dẻo, khả năng chịu kéo và chịu nén như nhau $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ nên điều kiện bền có dạng:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma]. \qquad (7\text{-}11)$$

### *7-2-5. Dạng hợp lý của tiết diện*

Tiết diện hợp lý là tiết diện cho phép tận dụng hết khả năng làm việc của vật liệu, có độ bền chịu uốn cao khi diện tích tiết diện là nhỏ nhất. Ta có thể xét hình dạng hợp lý từ hai khía cạnh sau:

1- Theo biểu đồ ứng suất pháp, mép dưới của tiết diện có $\sigma_{max}$ và mép trên $\sigma_{min}$. Hình dáng tiết diện sẽ hợp lý khi hai mép cùng đồng thời phá hỏng, tức là đạt đồng thời hai đẳng thức

$$\sigma_{max} = \left|\frac{M_x}{I_x} y_k\right| = [\sigma]_k$$

$$|\sigma_{min}| = \left|\frac{M_x}{I_x} y_n\right| = [\sigma]_n$$

Lập tỷ số của hai đẳng thức, ta nhận được điều kiện hợp lý

$$\frac{|y_k|}{|y_n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \alpha \leq 1.$$

Với dầm làm từ vật liệu giòn $\alpha<1$ nên $y_k < y_n$, tiết diện không đối xứng qua trục $x$.

Với dầm làm từ vật liệu dẻo $\alpha = 1$ nên $y_k = y_n = h/2$, tiết diện đối xứng qua trục $x$.

2- Trị số ứng suất pháp khi uốn tỷ lệ nghịch với mômen chống uốn $W_x$. Ta có thể tăng $I_x$, do đó, tăng $W_x$ bằng cách bố trí vật liệu xa trục. Những tiết diện hình chữ nhật rỗng, hình ống hoặc hình chữ **U**, **I** là những dạng hợp lý. Chẳng hạn thép hình **I**$N^o 20$ có diện tích tiết diện $A = 26,8$ cm$^2$, mômen chống uốn $W_x = 184$ cm$^3$; trong lúc ấy hình vuông với cùng diện tích chỉ có $W_x = 23,12$ cm$^3$, nhỏ hơn $8$ lần!

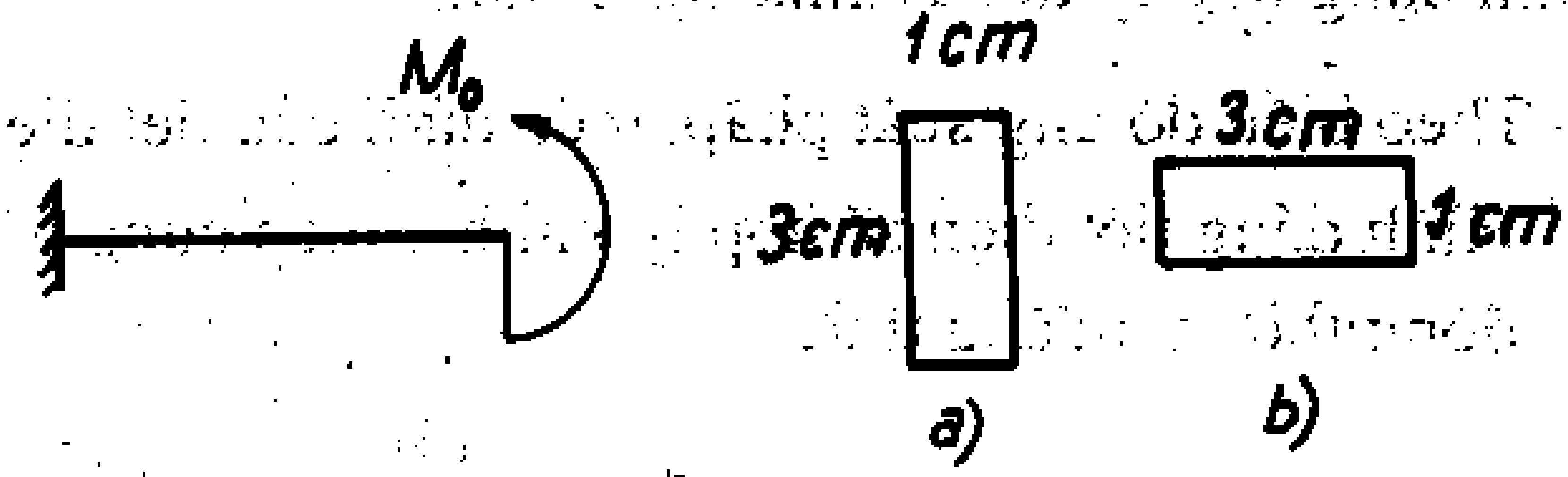
Nói chung, để đánh giá dạng hợp lý của tiết diện người ta thường dùng chỉ số $\beta = \frac{W}{\sqrt[3]{A}}$, là một đại lượng không thứ nguyên. Chỉ số $\beta$ càng cao, khả năng chống uốn của tiết diện càng lớn; tuy nhiên không thể tăng quá lớn chỉ số này khi còn phải xét đến các điều kiện khác, chẳng hạn điều kiện ổn định của dầm.

***Ví dụ 7-1.*** Xác định mômen $M_o$ cho phép tác dụng ở đầu tự do một côngxôn có tiết diện $1 \times 3$ cm$^2$, $[\sigma] = 2,5$ kN/cm$^2$ trong hai trường hợp đặt tiết diện khác nhau như trên hình 7-6a, b.

*Bài giải.* Dầm chịu uốn thuần tuý với mômen uốn $M_x = M_o$.

Theo điều kiện bền, ta có $M_o \leq W_x[\sigma]$.

*Hình 7-6.* Cho ví dụ 7-1




Trường hợp thứ nhất (hình 7-6a): $W_x = \dfrac{1.3^2}{6} = 1,5\,\text{cm}^3$

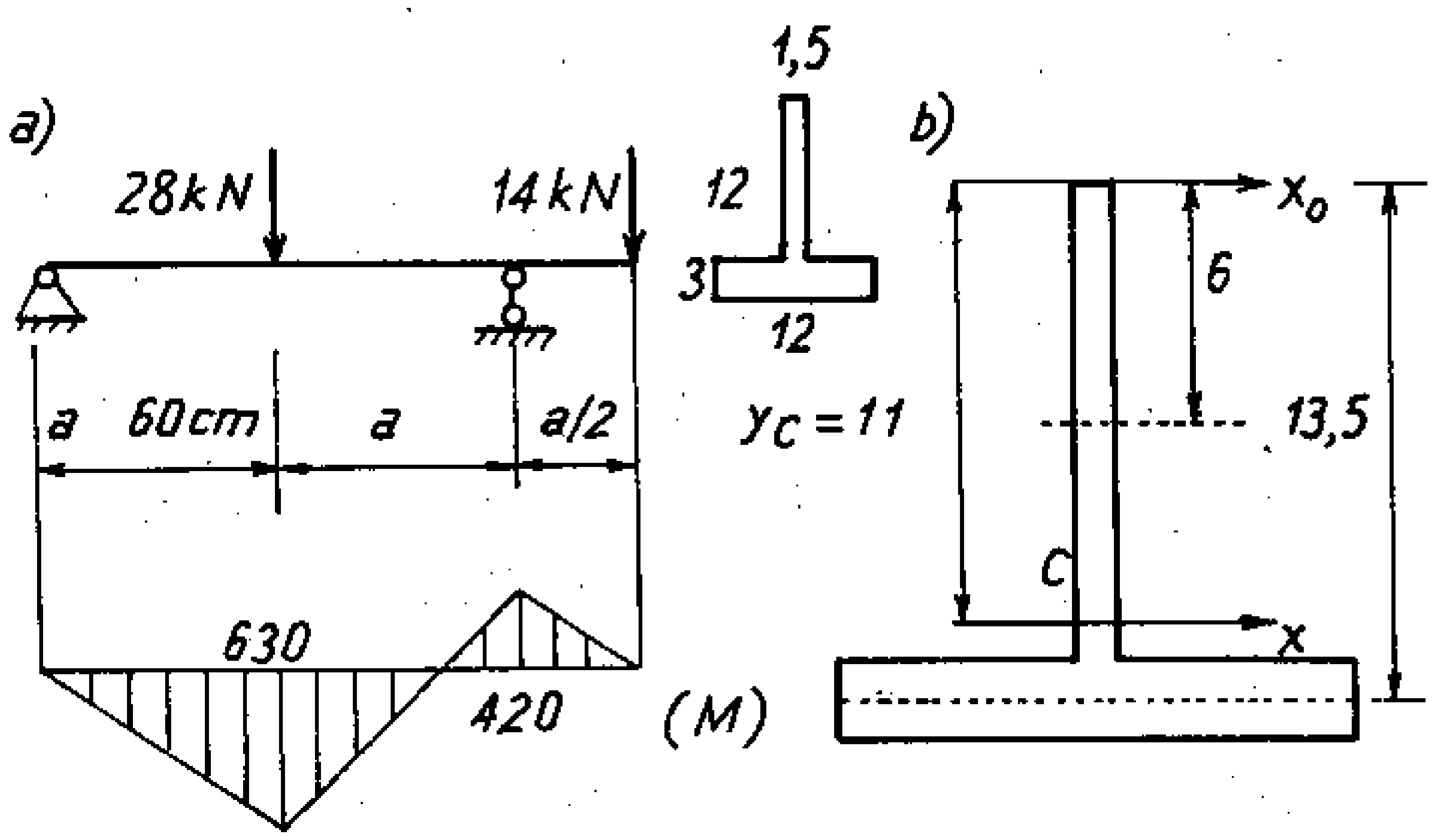
$$M_o \leq 1,5.2 = 3 \text{ kNcm}..$$

Trường hợp thứ hai (hình 7-6b): $W_x = \dfrac{3.1^2}{6} = 0,5\,\text{cm}^3$

$$M_o \leq 0,5.2 = 1 \text{ kNcm}..$$

***Ví dụ 7-2.*** Kiểm tra bền theo ứng suất pháp đối với dầm chịu uốn bởi các tải trọng ngang và có tiết diện cho trên hình 7-7a, kích thước tiết diện cho theo cm. Cho biết $[\sigma]_k = 3$ kN/cm$^2$, $[\sigma]_n = 10$ kN/cm$^2$.

*Hình 7-7.* Cho ví dụ 7-2




*Bài giải.* Chọn hệ trục ban đầu $x_o y$. Trọng tâm hình sẽ nằm trên trục đối xứng $y$

với tung độ $$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{18.6 + 36.13,5}{1,5.12 + 12.3} = 11 \text{ cm}.$$

Hệ trục chính trung tâm chọn là hệ trục $xCy$.

Mômen quán tính chính trung tâm

$$I_x = \frac{1,5.12^3}{12} + (11-6)^2.18 + \frac{12.3^3}{12} + (15 - 1,50 - 11)^2.36 = 918 \text{ cm}^4.$$

Biểu đồ mômen uốn vẽ trên hình 7-7b.

Tại tiết diện có mômen dương lớn nhất $M_x = 630$ kNcm,

$$y_k = 4 \text{ cm}, |y_n| = 11 \text{ cm}.$$

$$\sigma_{max} = \frac{630}{918}4 = 2,75\ \text{kN/cm}^2 < [\sigma]_k ;$$

$$\sigma_{min} = \frac{630}{918}11 = 7,55\ \text{kN/cm}^2 < [\sigma]_n .$$

Tại tiết diện có mômen âm lớn nhất $|M_x| = 420$ kNcm ,

$|y_k| = 11$ cm, $y_n = 4$ cm.

$$\sigma_{max} = \frac{420}{918}11 = 5,03\ \text{kN/cm}^2 > [\sigma]_k ;$$

$$\sigma_{min} = \frac{420}{918}4 = 1,83\ \text{kN/cm}^2 < [\sigma]_n .$$

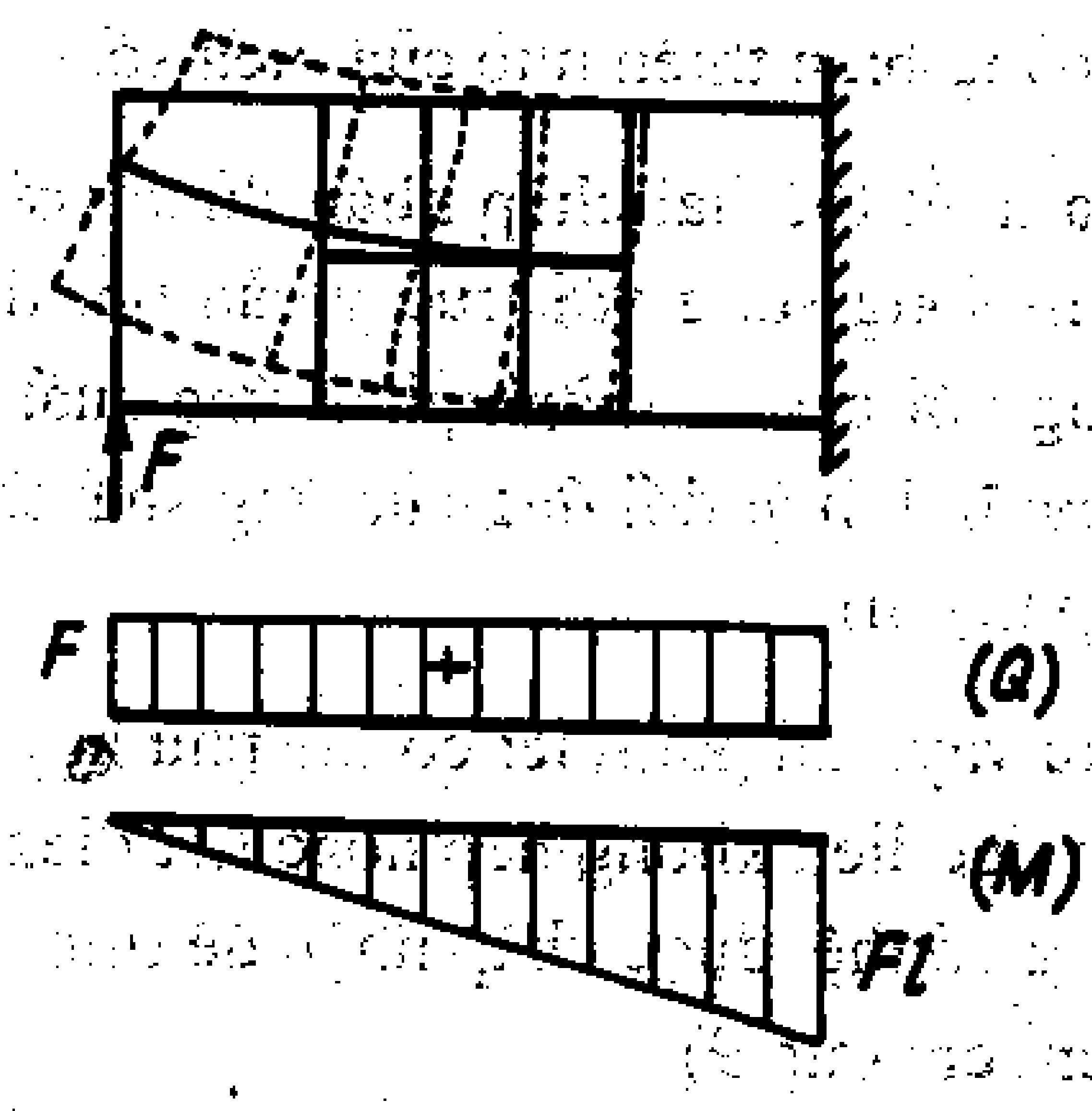
Dầm không đủ bền và bị phá hoại tại tiết diện có trị số mômen không phải là lớn nhất về trị số tuyệt đối.

## 7-3. ỨNG SUẤT TIẾP KHI THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

### 7-3-1. Giả thiết và công thức tính

Quan sát biến dạng một thanh chịu uốn ngang phẳng, có lực cắt $Q_y$ và mômen uốn $M_x$, như trên hình 7-8, ta thấy các đường kẻ vuông góc với trục không còn thẳng, các góc vuông thay đổi.

Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng, trên tiết diện tồn tại cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Tuy nhiên, biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không làm thay đổi chiều dài theo phương ngang trục và phương dọc trục nên ta chấp nhận rằng luật phân bố của ứng suất pháp vẫn được tính theo công thức (7-4)

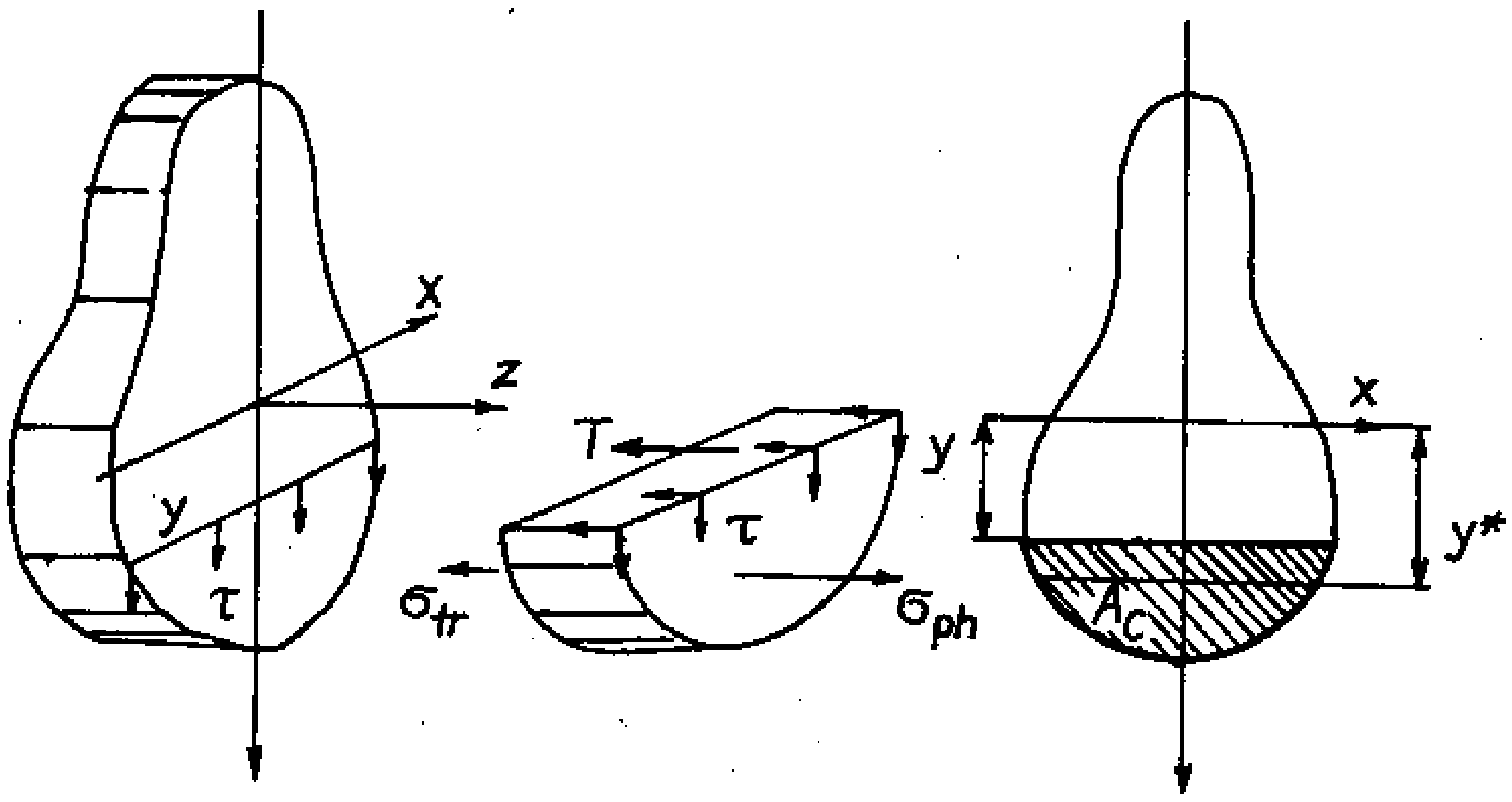



$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y ,$$

*Hình 7-8.* Thanh chịu uốn ngang phẳng

trong đó $y$ là khoảng cách từ điểm tính ứng suất đến trục trung hoà $x$, tức là trục quán tính chính trung tâm của tiết diện.

Để tìm luật phân bố của ứng suất tiếp ta xét cân bằng một phân tố thanh có chiều dài $dz$; giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng uốn $yz$ đi qua điểm cần tìm ứng suất như trên hình 7-9a.




*Hình 7-9.* Phân tố thanh và điều kiện cân bằng của phân tố

Ta giả thiết:

1- Cũng giống như ứng suất pháp, *ứng suất tiếp trên tiết diện phân bố đều theo bề rộng b.*

2- *Ứng suất tiếp chỉ có thành phần thẳng đứng theo phương lực cắt* $Q_y$.

Giả thiết thứ nhất hoàn toàn có thể chấp nhận được khi bề rộng tiết diện là nhỏ so với chiều cao. Điều này cũng tương tự như việc ta coi hàm là hằng số trong khoảng biến thiên nhỏ của biến số.

Giả thiết thứ hai chấp nhận được với tiết diện hình chữ nhật hẹp. Thực vậy, tại cạnh song song với trục $y$ của tiết diện, ứng suất tiếp chỉ có thành phần song song với cạnh; thành phần ứng suất tiếp vuông góc với cạnh phải bằng không theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp (mặt ngoài của thanh tự do với tải trọng tiếp tuyến).

Như vậy, hai giả thiết có thể phù hợp khi nghiên cứu tiết diện chữ nhật hẹp. Với các tiết diện không hẹp hoặc tiết diện có hình dạng khác thì những giả thiết trên cũng có thể được chấp nhận để tính thành phần theo phương $y$ của ứng suất tiếp (xem chương 9).

Xét cân bằng của phân tố trên hình 7-9b, giới hạn bởi các mặt:

* mặt song song với trục $z$, vuông góc với trục $y$, có tung độ $y$;

* mặt có hoành độ $z$, chịu mômen uốn $M_x$, tại điểm toạ độ $y*$ có ứng suất pháp $\sigma = \dfrac{M}{I_x} y*$;

* mặt có hoành độ $z+dz$, chịu mômen uốn $M_x+dM_x$, tại điểm toạ độ $y^*$ có ứng suất pháp $\sigma = \dfrac{M_x + dM_x}{I_x} y^*$;

toạ độ $y^*$ biến thiên theo phần diện tích mặt bên của phần phân tố, ký hiệu $A_c$.

Nếu tại bề rộng $b$, trên mặt tiết diện có các ứng suất tiếp $\tau_y$ theo chiều của lực cắt $Q_y$; thì ở mặt trên song song với trục $z$ của phân tố, theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp, cũng có ứng suất tiếp $\tau_y$ phân bố đều trên bề rộng $b$. Hợp lực của ứng suất tiếp này ở mặt trên, theo phương $z$, là $T = \tau_y.b.dz$.

Phương trình cân bằng hình chiếu theo phương $z$ của tất cả các lực trên phần phân tố :

$$\int_{A_C} \sigma_p dA - \int_{A_C} \sigma_t dA - T = 0\,,$$

Sau khi thay biểu thức của ứng suất pháp và $T$ vào phương trình cân bằng, chuyển vế, ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp:

$$\tau_y = \frac{1}{b.dz} \int_{A_C} \frac{dM_x}{I_x} y^* dA = \frac{dM_x}{dz} . \frac{1}{I_x b} \int_{A_C} y^* dA = \frac{dM_x}{dz} . \frac{S_x^C}{I_x b},$$

hoặc

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^C}{I_x b}, \qquad (7\text{-}12)$$

trong đó:

$b$ - bề rộng thực, hoặc bề rộng phân bố ứng suất tiếp, của tiết diện tại điểm tính ứng suất (xem hình vẽ 7-7).

$S_x^C = \int_A y^* dA$ - mômen tĩnh của phần diện tích tiết diện giới hạn bởi bề rộng $b$ đi qua điểm tính ứng suất, phần diện tích này còn gọi là diện tích cắt. Có thể tính $S_x^C = \bar{y}_C A_C$, với $A_C$ là diện tích phần diện tích cắt, $\bar{y}_c$ là khoảng cách từ trọng tâm diện tích $A_C$ đến trục trung hoà $x$.

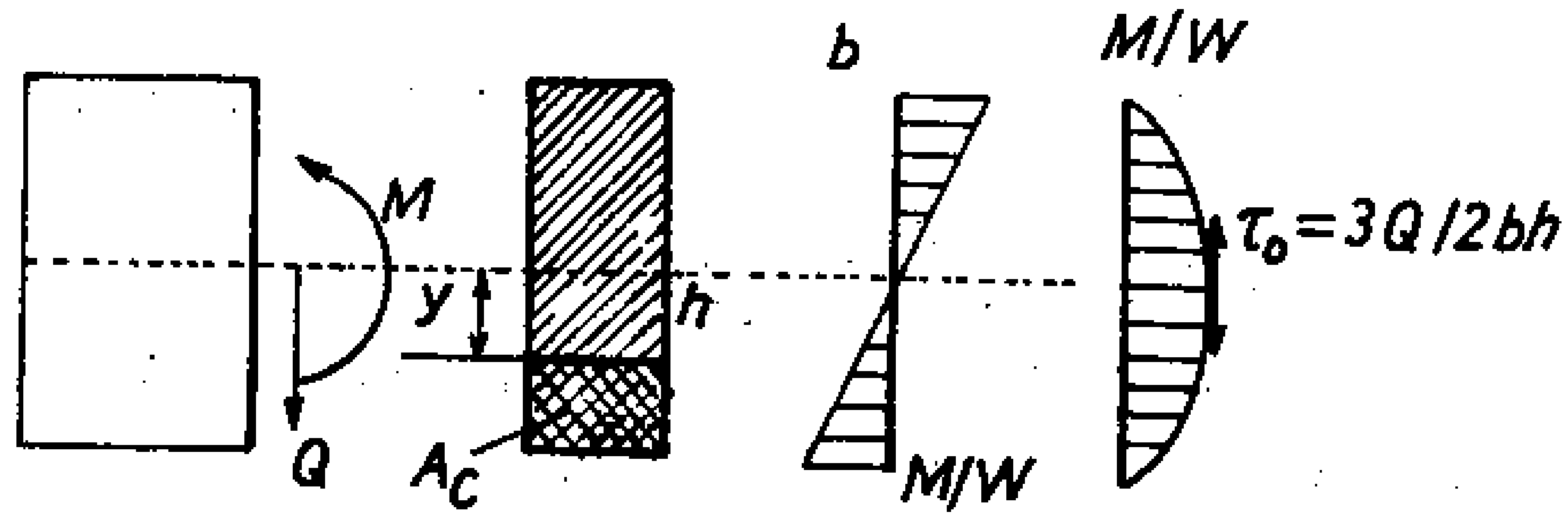
Công thức (7-12) do D. I. Juravski thiết lập đầu tiên nên cũng được gọi là công thức Juravski.

### 7-3-2. Tiết diện chữ nhật

Với tiết diện chữ nhật $b \times h$ (hình 7-10), ta có

$$A_C = \left(\frac{h}{2} - y\right) b\,; \quad \bar{y}_C = y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right); \quad S_x^C = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right];$$

$$\tau_y = \frac{12Q_y}{bh^3.b}.\frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right] = \frac{6Q_y}{bh^3}\left[\frac{h^2}{4} - y^2\right].$$




*Hình 7-10.* Biểu đồ ứng suất trên tiết diện chữ nhật

Biểu đồ ứng suất tiếp là đường bậc hai theo $y$ như trên hình 7-10.

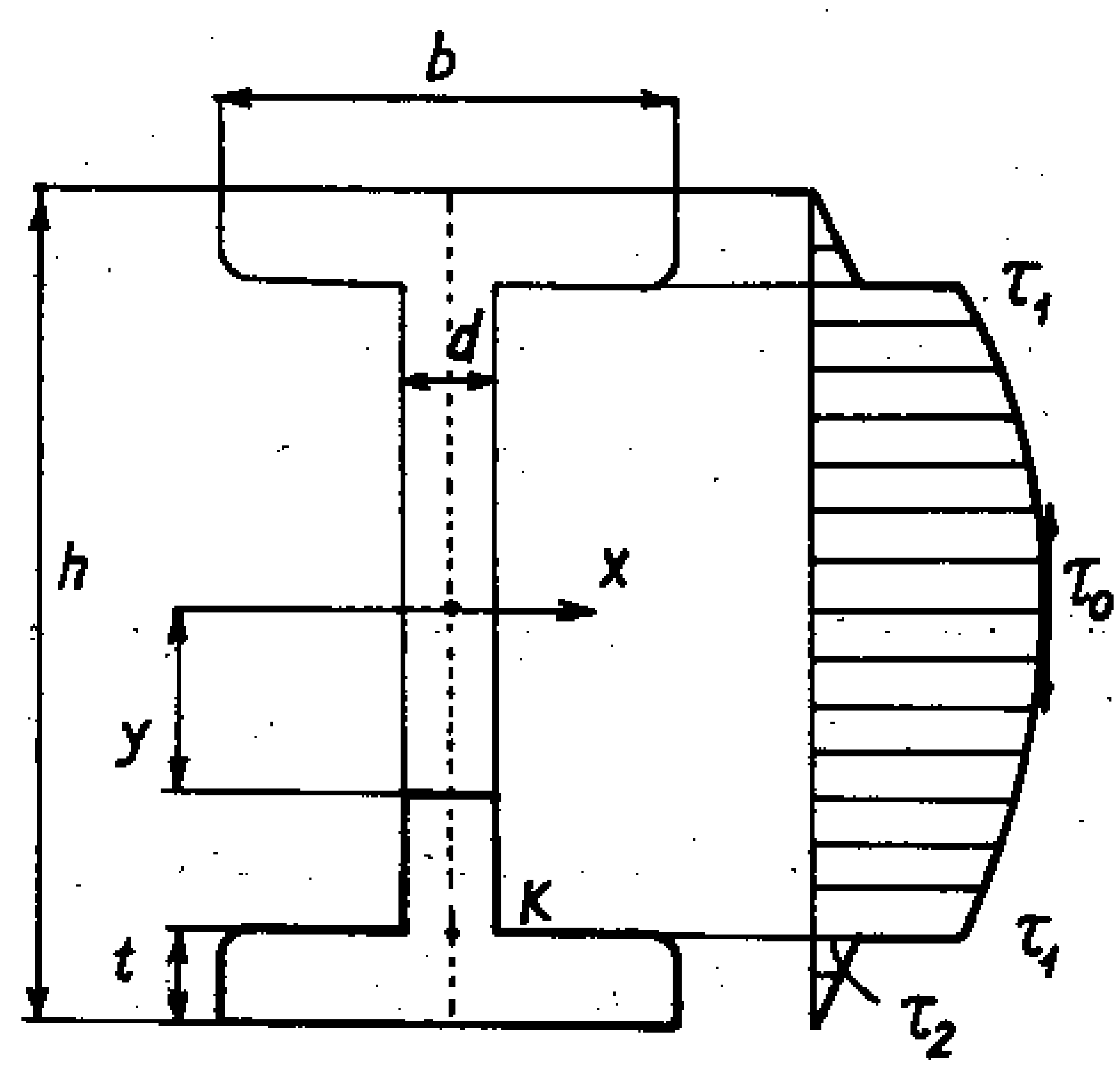
Tại hai mép tiết diện, khi $y = \pm\frac{h}{2}$, $\tau_y = 0$;

Tại đường trung hòa, khi $y = 0$, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất:

$$\tau_{y\,max} = \tau_o = \frac{3}{2}.\frac{Q_y}{bh}.$$

### 7-3-3. Tiết diện chữ I

Tiết diện có hai bề rộng khác nhau: phần bụng là $d$, phần đế là $b$.




*Hình 7-11.* Biểu đồ ứng suất tiếp trên tiết diện chữ I

* Tại phần bụng (hình vẽ 7-11), diện tích cắt $A_c$ bằng một nửa diện tích tiết diện trừ đi diện tích chữ nhật $y \times d$. Do đó, mômen tĩnh của diện tích cắt, cũng bằng mômen tĩnh của một nửa tiết diện trừ đi mômen tĩnh của hình chữ nhật $y \times d$.

Trong bảng thép định hình, mômen tĩnh của một nửa tiết diện được ký hiệu là $S_x$; do đó:

$$S_x^C = S_x - \frac{d \times y^2}{2} \qquad \text{và} \qquad \tau_y = \frac{Q_y}{I_x d}\left(S_x - \frac{d \times y^2}{2}\right).$$

Biểu đồ là đường bậc hai theo toạ độ $y$.

Khi $y = 0$, ở trục trung hoà, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất:

$$\tau_{y\,max} = \tau_o = \frac{Q_y S_x}{I_x d}.$$

Khi $y = y_1 = \frac{h}{2} - t$, điểm tiếp giáp với phần đế,

$$\tau_y = \tau_1 = \frac{Q_y}{I_x d}\left(S_x - \frac{d \times y_1^2}{2}\right).$$

* Tại phần đế, ở điểm tiếp giáp với phần bụng, mômen tĩnh vẫn là $S_x - \frac{d \times y_1^2}{2}$, bề rộng tiết diện là $b >> d$, ứng suất tiếp:

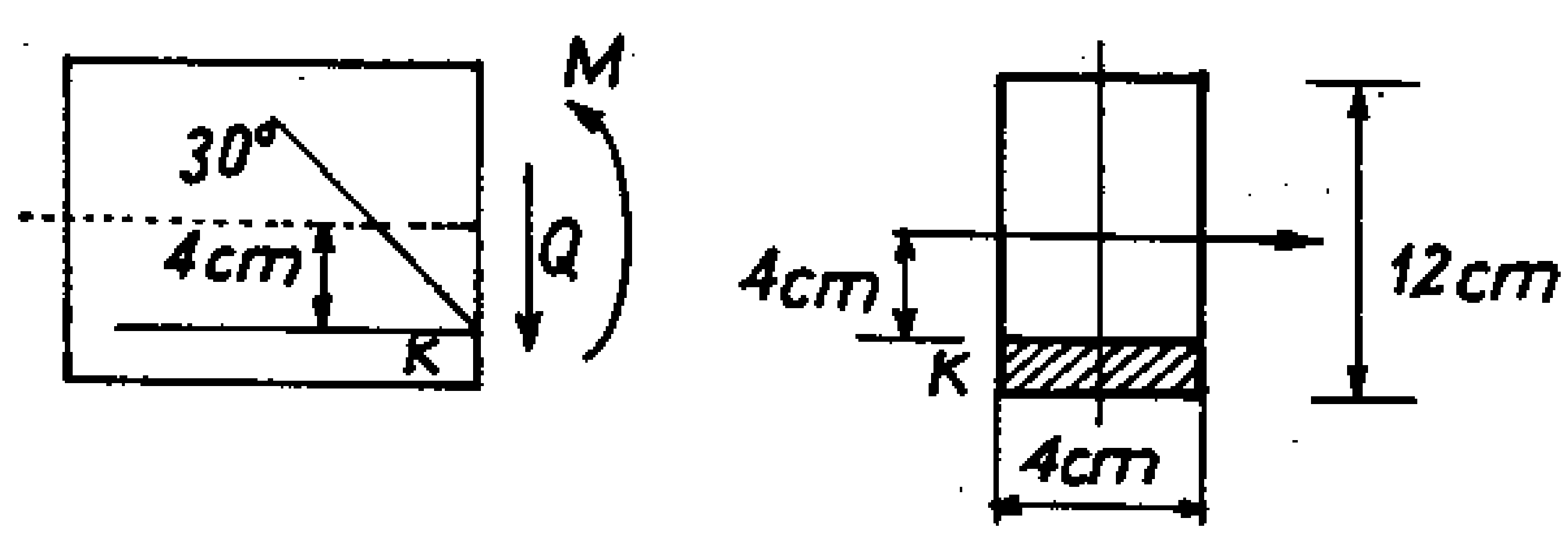
$$\tau_y = \tau_2 = \frac{Q_y}{I_x b}\left(S_x - \frac{d \times y_1^2}{2}\right) << \tau_1.$$

Như thế, biểu đồ ứng suất tiếp có bước nhảy tại điểm $K$ tiếp giáp giữa phần bụng và phần đế.

Ở mép tiết diện, khi $y = \frac{h}{2}$, ứng suất tiếp bằng không. Trong khoảng bề dầy $t$ khá nhỏ của phần đế, để đơn giản, có thể coi biểu đồ là đường thẳng.

*Ví dụ 7-3*. Xác định ứng suất tiếp tại điểm $K$ trên mặt cắt nghiêng $30^o$ so với trục thanh của tiết diện chữ nhật chịu mômen uốn $M=20$ Nm, $Q=1,4$ kN trên hình 7-12.

*Hình 7-12.* Cho ví dụ 7-3




*Bài giải*. Mômen quán tính đối với trục trung hoà: $I_x = \frac{4.12^3}{12} = 576$ cm$^4$.

Mômen tĩnh của phần diện tích cắt: $S_x^c = 2.4.5 = 40$ cm$^3$.

Ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại $K$ trên tiết diện:

$$\sigma = \frac{2000}{576}4 = 13{,}9 \text{ N/cm}^2 ; \qquad \tau = \frac{1400}{576.4}.40 = 24{,}3 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất tiếp tại điểm $K$ trên mặt cắt nghiêng, tính theo công thức (4-2):

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha .$$

Thay $\sigma_x = 13{,}9$ N/cm$^2$; $\sigma_y = 0$ ; $\tau_{xy} = 24{,}3$ N/cm$^2$ ; $\alpha = 60^o$ , ta có

$$\tau_{uv} = \frac{13{,}9}{2} \sin 120^o + 24{,}3.\cos 120^o = -6{,}13 \text{ N/cm}^2.$$

## 7-4. ĐIỀU KIỆN BỀN CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẲNG

### 7-4-1. Điều kiện bền

Trên mặt tiết diện tồn tại ứng suất pháp và ứng suất tiếp, trên mặt song song với trục không tồn tại ứng suất pháp (theo giả thiết 2), do đó có thể gặp những trạng thái ứng suất sau:

1- *TTUS đơn* tại mép trên và mép dưới của tiết diện với trị số ứng suất chính là $\sigma_{max}$ hoặc $\sigma_{min}$. Điều kiện bền là

$$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| = \frac{|M_x|}{I_x}\left|y_{\substack{k\\n}}\right| \le [\sigma]_{\substack{k\\n}} ;$$

với tiết diện đối xứng qua trục $x$: $\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| = \frac{|M_x|}{W_x} \le [\sigma]_{\substack{k\\n}}$ .

*Khi dầm có tiết diện không thay đổi, ta viết điều kiện bền theo trạng thái ứng suất đơn tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất như trong uốn thuần tuý.*

2- *TTUS trượt thuần tuý* tại những điểm trên trục trung hoà với trị số ứng suất tiếp là $\tau_o$.

Điều kiện bền là $\qquad \tau_0 = \frac{Q_y S_x^{(1/2)}}{I_x b} \le [\tau].$

*Khi dầm có tiết diện không thay đổi, ta viết điều kiện bền theo trạng thái ứng suất trượt thuần tuý tại tiết diện có lực cắt lớn nhất.*

Trị số ứng suất tiếp cho phép lấy tuỳ theo thuyết bền:

* theo TBUS tiếp $\quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$;

* theo TB thế năng $[\tau]=\dfrac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$.

3- *TTUS phẳng đặc biệt* tại những điểm còn lại với trị số ứng suất pháp $\sigma=\dfrac{M_x}{I_x}y$ và trị số ứng suất tiếp $\tau=\dfrac{Q_yS_x^c}{I_xb}$.

* Điều kiện bền theo TBUS tiếp: $\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le[\sigma]$;

* Điều kiện bền theo TB thế năng: $\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma]$.

*Điểm kiểm tra là điểm có $\sigma$ và $\tau$ đều khá lớn, ví dụ điểm K tiếp giáp giữa phần bụng và phần đế của tiết diện chữ I.*

*Tiết diện kiểm tra trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt là tiết diện có mômen uốn và lực cắt đều khá lớn, tuỳ thuộc từng trường hợp cụ thể.*

### 7-4-2. Ba bài toán cơ bản

Bài toán kiểm tra bền toàn diện yêu cầu kiểm tra đối với cả ba loại trạng thái ứng suất của dầm. Đối với dầm dài, trị số mômen lớn, có thể chỉ cần kiểm tra trạng thái ứng suất đơn, gọi là kiểm tra bền theo ứng suất pháp.

Để giải bài toán thiết kế hoặc bài toán xác định tải trọng cho phép, trước hết ta tiến hành giải bài toán chỉ theo trạng thái ứng suất đơn, sau đó sẽ tiến hành kiểm tra bền toàn diện dầm với các kích thước tiết diện hoặc với trị số các tải trọng đã lựa chọn.

*Ví du 7-4.* Xác định số hiệu thép I định hình của dầm chịu lực trên hình 7-13a, sau đó kiểm tra bền toàn diện có kể đến trọng lượng riêng của dầm. Cho biết $[\sigma]=16$ kN/cm$^2$.

*Bài giải.* Xác định phản lực gối tựa:

$$A=\frac{40.3+10.3.1,5+50.2}{5}=53\text{ kN};\quad B=\frac{40.2+10.3.3,5+50.3}{5}=67\text{ kN}.$$

Biểu đồ lực cắt và mômen uốn vẽ trên hình 7-13b, c. Trị số lớn nhất của mômen uốn $114$ kNm.

Điều kiện bền theo ứng suất pháp cho $W\ge\dfrac{M}{[\sigma]}=\dfrac{11400}{16}=712,5$ cm$^3$.

Theo bảng thép định hình ta chọn I$N^o36$ có $I_x=13380$ cm$^4$; $W_x=743$ cm$^3$; $S_x=423$ cm$^3$; bề rộng bản đế $b=14,5$ cm; bề dầy bản bụng $\delta=0,75$ cm; bề dầy bản đế $t = 1{,}23$ cm; trọng lượng bản thân trên một mét chiều dài $q = 48{,}6$ daN/m = $0{,}486$ kN/m.

Sơ đồ tính của dầm khi có kể đến trọng lượng bản thân vẽ trên hình 7-13d.

Phản lực gối tựa:

$A = 53 + 0{,}486.2{,}5 = 54{,}215$ kN; $B = 67 + 0{,}486.2{,}5 = 68{,}215$ kN.

Biểu đồ lực cắt và mômen uốn vẽ trên hình 7-13e, f.

Kiểm tra bền theo ứng suất pháp tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{11545{,}8}{743} =$$
$$= 15{,}54 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{max} < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Kiểm tra trượt thuần tuý tại tiết diện có lực cắt lớn nhất theo thuyết bền ứng suất tiếp:

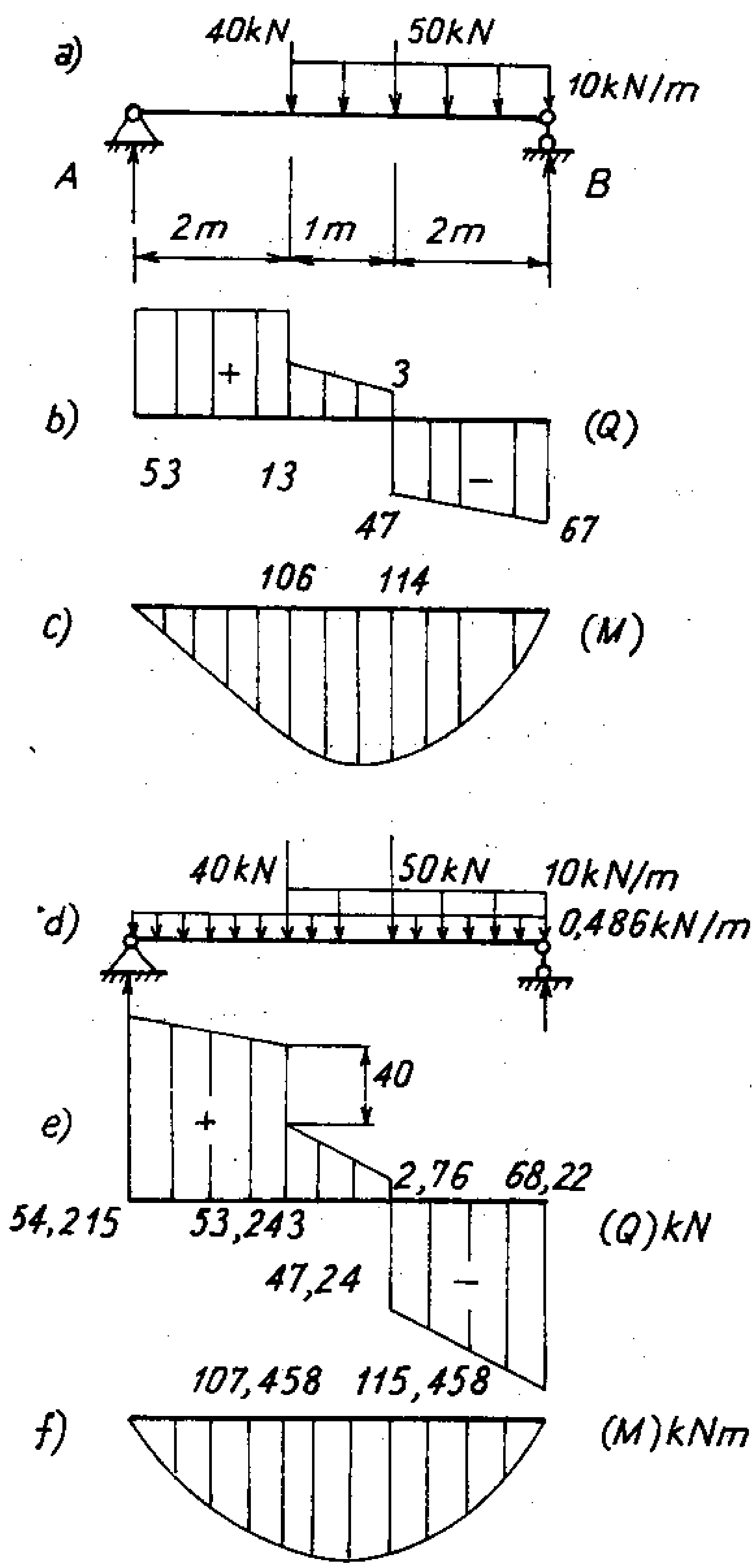
$$\tau_o = \tau_{max} = \frac{QS_x}{I_x\delta} =$$
$$= \frac{68{,}215.423}{13380.0{,}75} =$$
$$= 2{,}87 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\tau_o < \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

Kiểm tra trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt tại tiết diện có $M$ và $Q$ đều khá lớn. Trong ví dụ này, ta xét tiết diện có:

$M = 107{,}458$ kNm,

$Q = 53{,}243$ kN




Hình 7-13. Cho ví dụ 7-4

và kiểm tra tại điểm tiếp giáp giữa bản bụng và bản đế của tiết diện ở toạ độ $y = (h/2) - t = 18 - 1,23 = 16,77$cm.

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{10745,8}{13380} 16,77 = 13,47 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\tau = \frac{QS_x^C}{I\delta} = \frac{53,243}{13380.0,75}\left(423 - \frac{1}{2}0,75.16,77^2\right) = 1,68 \text{ kN/cm}^2.$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{13,47^2 + 4.1,68^2} = 13,88 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Kết luận: dầm làm từ thép hình I *N°36* đủ bền.

## 7-5. QUỸ ĐẠO ỨNG SUẤT CHÍNH

Xét phân tố hình chữ nhật của dầm chịu uốn ngang phẳng. Phân tố có các cạnh song song và vuông góc với trục, chịu các ứng suất $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ và $\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b}$.

Trị số và phương ứng suất chính của trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt này được xác định theo công thức (4-7) trong mục 4-4:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} > 0; \qquad \text{(a)}$$

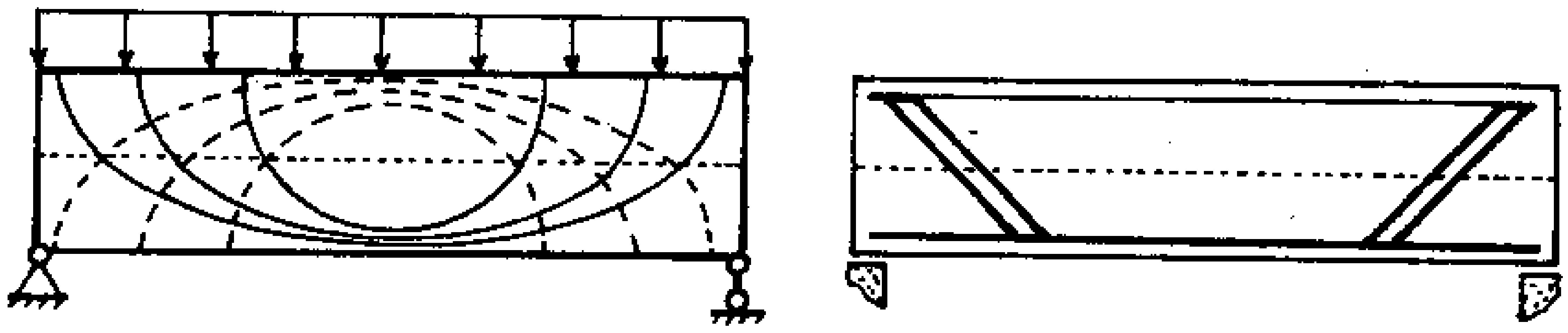
$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} < 0; \qquad \text{(b)}$$

$$tg2\alpha_o = \frac{2\tau}{\sigma}. \qquad \text{(c)}$$

Công thức (c) cho phép tìm phương ứng suất chính tại mỗi điểm của vật thể. Nếu tại mỗi điểm ở mặt bên của thanh ta đánh dấu các phương này thì sẽ nhận được một trường hai phương trực giao.

*Quỹ đạo ứng suất chính là đường cong mà tiếp tuyến tại mỗi điểm trùng với phương của ứng suất chính.* Trên hình 7-14 vẽ dạng quỹ đạo ứng suất chính của một dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều, *hai họ đường cong ứng suất chính kéo và đường cong ứng suất chính nén trực giao với nhau*, cắt trục thanh dưới góc $45^0$. Những đường cong này còn gọi là *đường đồng ứng suất*, nghĩa là trị số ứng suất chính tại mọi điểm trên đường cong bằng nhau.

Biết quỹ đạo ứng suất chính, ta có thể bố trí vật liệu trong dầm một cách hợp lý, chẳng hạn trong dầm bêtông cốt thép thì các sợi thép dọc được đặt ở vùng có các đường ứng suất chính kéo và các thép xiên đặt nghiêng $45^0$ so với trục thanh (hình 7-14).



*Hình 7-14.* Quỹ đạo ƯS chính và sơ đồ đặt cốt thép trong dầm bêtông

## 7-6. THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI CỦA DẦM CHỊU UỐN

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng, theo biểu thức tổng quát (4-19), là

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] ;$$

Sau khi thay thế các giá trị của ứng suất chính của trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt của dầm chịu uốn (a), (b), $\sigma_2 = 0$ và rút gọn ta có:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma^2 + 2(1+\mu)\tau^2\right] = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau}{2G} .$$

Lấy tích phân trên toàn bộ thể tích dầm, ta nhận được TNBDĐH của dầm

$$U = \int_V u\,dV = \int_V \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}\right) dV = \int_l dz \int_A \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}\right) dA =$$

$$= \int_l dz \int_A \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dA + \int_l dz \int_A \frac{Q^2}{2GI^2} \frac{S_x^{c\,2}}{b^2} dA .$$

Nhận xét $\int_A y^2 dA = I$ và ký hiệu $k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_x^{c\,2}}{b^2} dA$ , (7-13)

ta có biểu thức để tính TNBDĐH của dầm:

$$U = \int_l \frac{M^2}{2EI} dz + \int_l k \frac{Q^2}{2GA} dz . \qquad (7\text{-}14)$$

Hệ số $k$ phụ thuộc vào hình dạng tiết diện, phản ánh sự phân bố không đều của ứng suất tiếp, chẳng hạn với tiết diện chữ nhật:

$$dA = b.dy\,;\quad S_x^c = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right];\quad A = b.h\,;\quad I = \frac{bh^3}{12}\ \text{thì}$$

$$k = \frac{bh}{\left(\dfrac{bh^3}{12}\right)^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\left[\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)\right]^2}{b^2}\, bdy = \frac{6}{5} = 1{,}2\,.$$

Đối với tiết diện hình tròn đặc $k = 1,1$; đối với tiết diện thép định hình I trị số $k$ nằm trong khoảng $2 \div 2,4$ , lấy trung bình $2,3$.

Khi dầm dài, số hạng thứ hai trong (7-13) thường nhỏ hơn nhiều lần so với số hạng thứ nhất nên có thể bỏ qua và TNBDĐH của dầm được tính theo công thức gần đúng:

$$U \approx \int_l \frac{M^2}{2EI}dz\,. \qquad (7\text{-}15)$$

## 7-7. BIẾN DẠNG, CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

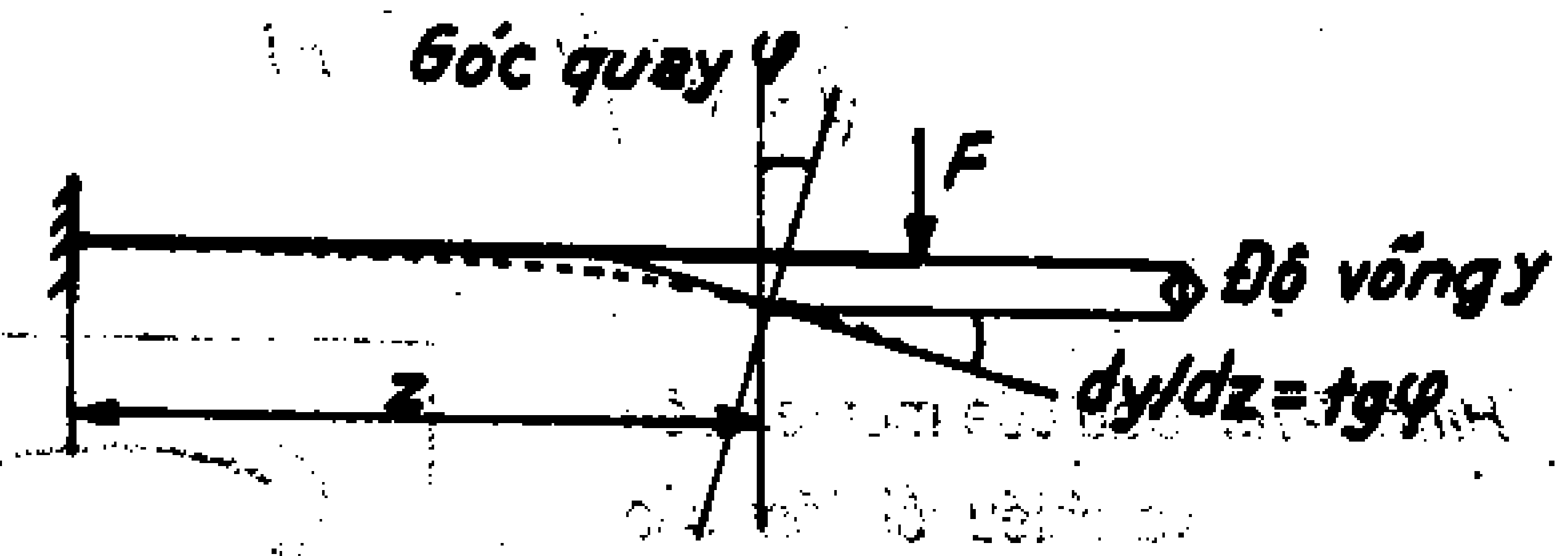
### 7-7-1 Biến dạng của thanh

Biến dạng của thanh chịu uốn là sự thay đổi độ cong của trục. Đường cong của trục dầm sau khi uốn được gọi là *đường đàn hồi*.

Nếu chỉ xét ảnh hưởng của mômen uốn thì độ cong đường đàn hồi của dầm thẳng, theo biểu thức (7-3) đã thiết lập, là

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}\,. \qquad (a)$$

*Hình 7-15.* Chuyển vị của dầm chịu uốn




### 7-7-2. Chuyển vị, độ võng, góc xoay

Chuyển vị của tiết diện được đặc trưng bởi chuyển vị thẳng của trọng tâm và chuyển vị xoay của mặt phẳng tiết diện.

Bỏ qua thành phần chuyển vị thẳng dọc theo trục thanh, ta chỉ tính thành phần chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục gọi là *độ võng*, ký hiệu $y$, thay đổi dọc theo trục thanh:

$$y = y(z) \tag{b}$$

Chuyển vị xoay, hoặc góc xoay, của tiết diện, ký hiệu $\varphi$, là góc hợp giữa mặt phẳng của tiết diện ở lúc trước và sau khi thanh biến dạng.

Chiều dương của độ võng lấy theo chiều trục $y$, chiều dương của góc xoay là góc thuận chiều kim đồng hồ.

Trên cơ sở giả thiết tiết diện phẳng và vuông góc với trục, qua hình 7-15 ta có liên hệ:

$$tg\varphi = \frac{dy}{dz} = y'. \tag{c}$$

Chuyển vị của dầm được xem là bé khi :

* độ võng rất nhỏ so với chiều dài $y << l$;

* góc xoay rất nhỏ so với đơn vị $y' = tg\varphi \approx \varphi << 1$.

### *7-7-3. Phương trình vi phân độ võng*

Theo Hình học vi phân, độ cong của đường cong phẳng có phương trình $y = y(z)$ được xác định theo công thức

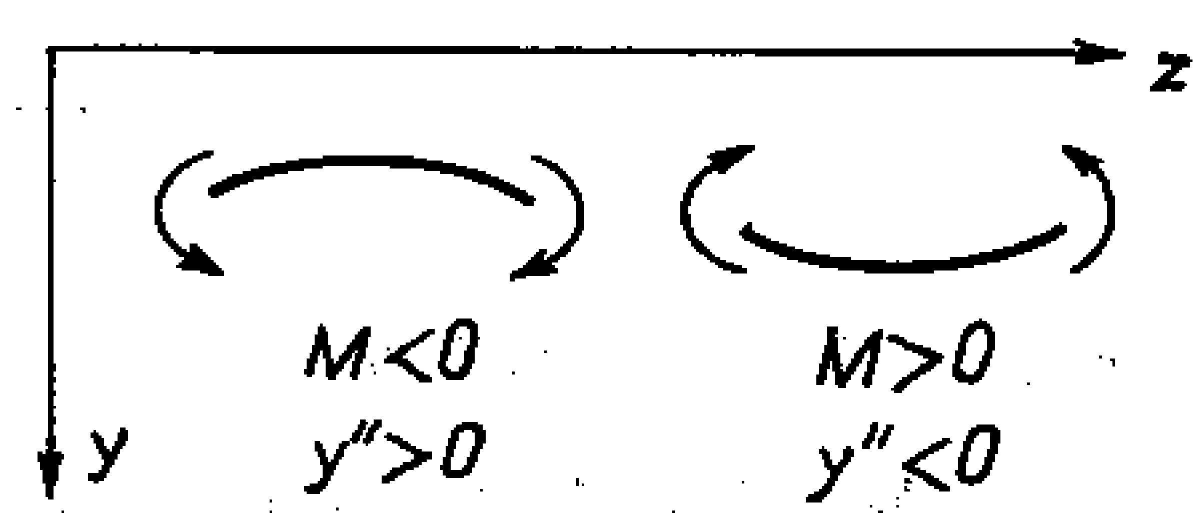
$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}. \tag{d}$$

Dấu $\pm$ lấy tuỳ thuộc chiều của trục tọa độ, sao cho bán kýnh cong $\rho$ là một đại lượng dương.

Kết hợp (a) và (d) ta có phương trình vi phân của độ võng:

$$\frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} = \pm\frac{M_x}{EI_x}. \tag{e}$$

*Hình 7-16.* Dấu của mômen uốn và chiều lồi, lõm của đường đàn hồi




Ta xét dấu của phương trình khi trục $z$ hướng từ trái qua phải, trục $y$ hướng xuống. Hình 7-16 biểu diễn hai khả năng biến dạng của trục thanh, trường hợp thứ nhất mômen uốn là dương và $y''$ âm vì đường cong lồi, trường hợp thứ hai mômen uốn là âm và $y''$ dương vì đường cong lõm. Mômen uốn và $y''$ luôn luôn ngược dấu, vậy trong (e) ta chọn dấu âm.

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}=-\frac{M_x}{EI_x}. \qquad (7\text{-}16)$$

Với dầm có chuyển vị nhỏ, có thể bỏ qua $y'^2$ so với đơn vị, ta nhận được phương trình vi phân gần đúng của độ võng:

$$y''=-\frac{M_x}{EI_x}. \qquad (7\text{-}17)$$

trong đó:

$M_x$ - biểu thức của mômen uốn tại mặt cắt có toạ độ $z$;

$EI_x$ - độ cứng chống uốn của tiết diện (độ cứng chống uốn trong mặt phẳng $yz$).

## 7-8. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Lấy tích phân liên tiếp phương trình 7-17 theo $z$, ta nhận được:

$$\varphi=y'=-\int\frac{M_x}{EI_x}dz+C_1; \qquad (7\text{-}18)$$

$$y=-\int\left[\int\frac{M_x}{EI_x}dz\right]dz+C_1z+C_2. \qquad (7\text{-}19)$$

Các hằng số tích phân $C_i$ được xác định theo điều kiện liên kết tại hai đầu đoạn thanh đang xét, gọi là các *điều kiện biên*. Chẳng hạn tại đầu đoạn thanh bị ngàm chặt thì độ võng và góc xoay phải bằng không, tại đầu đoạn thanh có liên kết khớp tựa thì độ võng bằng không,...

Khi biểu thức của mômen uốn khác nhau trên nhiều đoạn dầm (chẳng hạn $n$ đoạn) thì phải tích phân tìm độ võng trên $n$ đoạn và phải xác định $2n$ hằng số tích phân. Lúc này, phương pháp tích phân trở nên cồng kềnh, phức tạp, ta nên sử dụng các phương pháp khác để lập biểu thức của độ võng, góc xoay (chẳng hạn phương pháp thông số ban đầu sẽ trình bày trong mục 7-10).

***Ví dụ 7-5.*** Xác định độ võng, góc xoay tại đầu tự do $A$ của côngxôn $AB$ bị ngàm tại đầu $B$ chịu tải trọng ngang phân bố đều với cường độ $q$.

*Bài giải.* Tại tiết diện ở hoành độ $z$, bằng phương pháp mặt cắt, ta có $M_x=-\frac{qz^2}{2}$.

Phương trình vi phân độ võng: $y'' = \dfrac{qz^2}{2EI_x}$.

Tích phân liên tiếp hai lần: $y' = \dfrac{qz^3}{6EI_x} + C_1$;

$$y = \frac{qz^4}{24EI_x} + C_1 z + C_2 .$$

Điều kiện biên: tại đầu ngàm $B$, khi $z = l$, thì $y = y' = 0$.

$$y'(l) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{ql^2}{6EI_x}\ ; \qquad y(l) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{ql^4}{8EI_x}.$$

Thay thế vào biểu thức của độ võng, ta có:

$$y = \frac{ql^4}{8EI_x}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{l}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{l}\right)^4\right]; \qquad y' = -\frac{ql^3}{6EI_x}\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^3\right].$$

Tại đầu mút tự do $A$, khi $z = 0$, $y_A = \dfrac{ql^4}{8EI_x}$; $y'_A = -\dfrac{ql^3}{6EI_x}$.

## 7-9. PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO

Ta có hai liên hệ cùng dạng:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q\ ; \tag{a}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M}{EI}. \tag{b}$$

Mômen uốn, lực cắt trong liên hệ thứ nhất tìm được trực tiếp từ phương pháp mặt cắt khi đã biết tải trọng ngang phân bố với cường độ $q$. Do đó, ta cũng có thể tìm độ võng, góc xoay của dầm bằng phương pháp mặt cắt khi đã biết đặc trưng chịu uốn của thanh $M / EI$. Muốn vậy, trong biểu thức (b) ta quan niệm độ võng $y$, góc xoay $\varphi$ tương ứng như mômen uốn, lực cắt trong một dầm chịu tải trọng ngang phân bố có cường độ $-\dfrac{M}{EI}$.

$$y = M_{gt}; \quad \varphi = Q_{gt}; \quad -\frac{M}{EI} = q_{gt}. \tag{7-20}$$

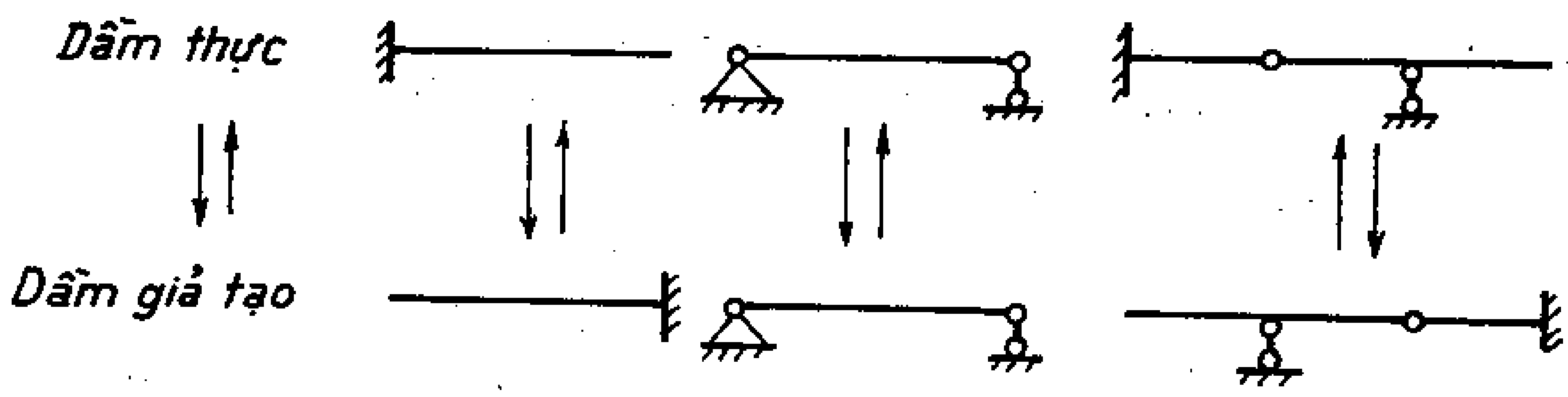
Vì các đại lượng quy đổi có thứ nguyên không giống nhau, nên các đại lượng thứ hai được gọi là "*giả tạo*".

Việc xác định chuyển vị trên dầm thực trở thành việc xác định ứng lực trên một dầm giả tạo chịu tải trọng phân bố với cường độ giả tạo $q_{gt} = -\dfrac{M}{EI}$.

$$\frac{d^2M_{gt}}{dz^2} = \frac{dQ_{gt}}{dz} = q_{gt}.$$

Dầm giả tạo cần có liên kết sao cho có ứng lực giả tạo tương ứng với chuyển vị trên dầm thực. Tại nơi trên dầm thực độ võng, góc xoay bằng không, thì tại tiết diện tương ứng trên dầm giả mômen uốn và lực cắt giả tạo phải bằng không. Tại nơi trên dầm thực độ võng, góc xoay khác không, thì tại tiết diện tương ứng trên dầm giả tạo mômen uốn và lực cắt giả tạo cũng phải khác không.

Trên hình 7-17 trình bày một số dạng tương ứng giữa dầm thực với dầm giả tạo, có thể thấy sự tương ứng này là hai chiều.




*Hình 7-17.* Dầm thực và dầm giả tạo tương ứng

Phương pháp tải trọng giả tạo cho phép xác định trực tiếp trị số của chuyển vị tại một tiết diện mà không cần viết biểu thức chuyển vị của toàn dầm. Phương pháp được áp dụng có hiệu quả đối với thanh đơn, chịu các tải trọng tương đối đơn giản.

*__Ví dụ 7-6__*. Xác định độ võng lớn nhất của một dầm đơn giản, chịu tải trọng phân bố đều (hình 7-18a). $EI = const$.

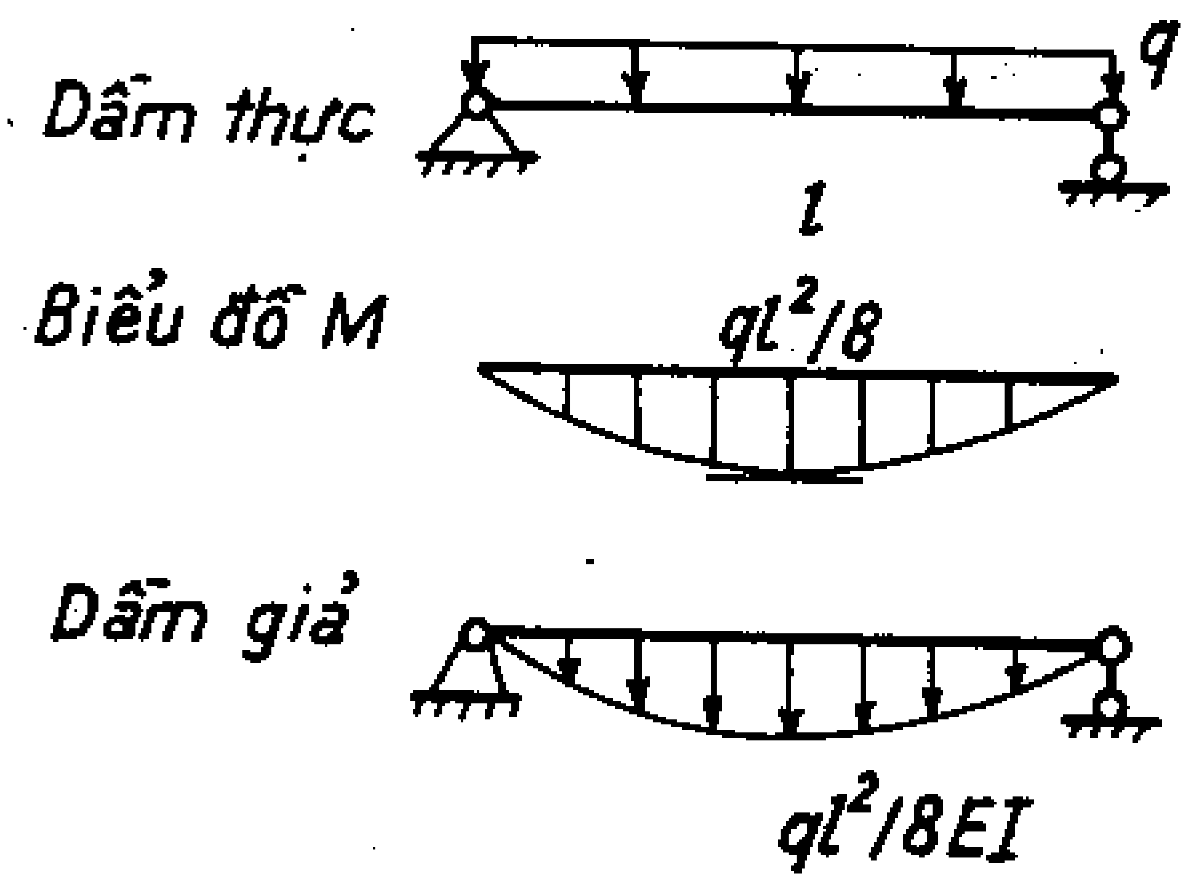
*__Bài giải__*. Trên hình 7-18b là biểu đồ mômen uốn của dầm thực đã cho. Dầm giả tạo (hình 7-18c) cũng là một dầm đơn giản có gối tựa khớp tại hai đầu. Dạng phân bố của tải trọng giả tạo cũng là dạng parabôn bậc hai như của mômen uốn trên dầm thực với trị số lớn nhất ở giữa nhịp $\dfrac{ql^2}{8EI}$. Mômen uốn căng phía dưới là dương; nên $q_{gt}$ là âm, hướng xuống dưới. Ta có thể kết luận: chiều của $q_{gt}$ hướng về chiều đặt biểu đồ mômen uốn trên dầm thực.

Độ võng lớn nhất của dầm thực là độ võng ở giữa nhịp, tương ứng bằng mômen uốn giả tạo tại giữa nhịp.

Phản lực của gối tựa dầm giả tạo bằng một nửa giá trị tải trọng

$$R = \frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2} = \frac{ql^3}{24}.$$

Mômen uốn giả tạo tại giữa nhịp:



*Hình 7-18.* Cho ví dụ 7-6

$$y_{max} = M_{gt\,max} = \frac{ql^3}{24}\frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24}\frac{1}{4}\frac{l}{2} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

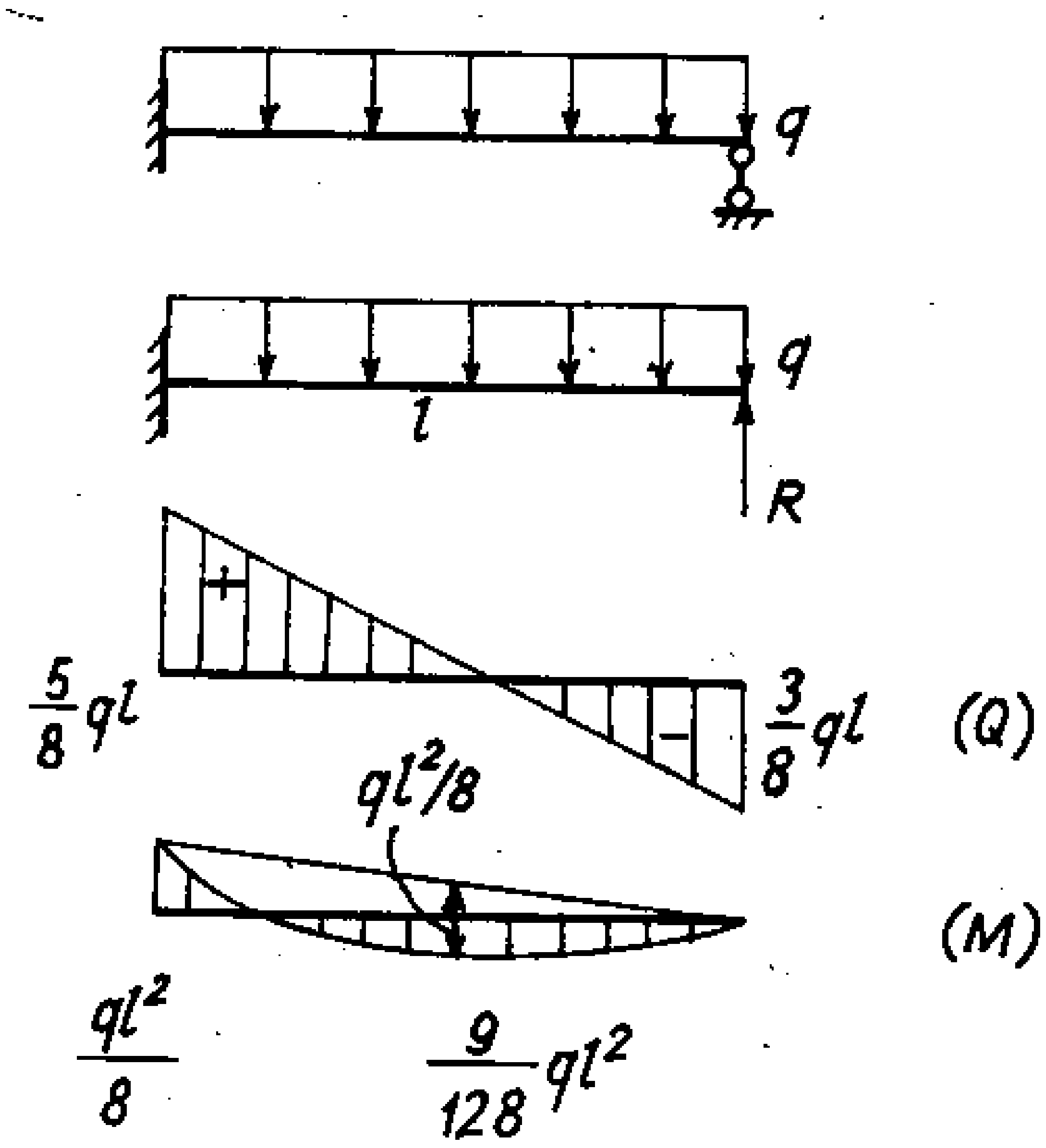
(Xem diện tích và trọng tâm hình tam giác cong ở bảng 5-1).

***Ví dụ 7-7.*** Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm chịu lực cho trên hình 7-19.

*Bài giải*. Bài toán siêu tĩnh, ta thay thế gối tựa bằng một phản lực $R$ chưa biết và điều kiện biến dạng là độ võng của dầm tại $B$ phải bằng không $y_B = 0$.

Độ võng $y_B$ do tải trọng phân bố đều $q$ gây ra, theo kết quả của ví dụ 7-5 là $\frac{ql^4}{8EI}$.

Độ võng $y_B$ do phản lực $R$ được tính theo phương pháp tải trọng giả tạo. Dầm giả tạo, tải trọng phân bố giả tạo tương ứng của trường hợp này trình bày trên hình 7-19. Mômen uốn giả tạo tại ngàm, cũng là độ võng trên dầm thực tại mút tự do, bằng $-\frac{1}{2}\frac{Rl}{EI}l\frac{2l}{3}$. Dấu trừ có nghĩa độ võng do $R$ gây ra có chiều hướng lên.



*Hình 7-19.* Cho ví dụ 7-7

Điều kiện biến dạng $y_B = 0$ cho ta phương trình tìm $R$:

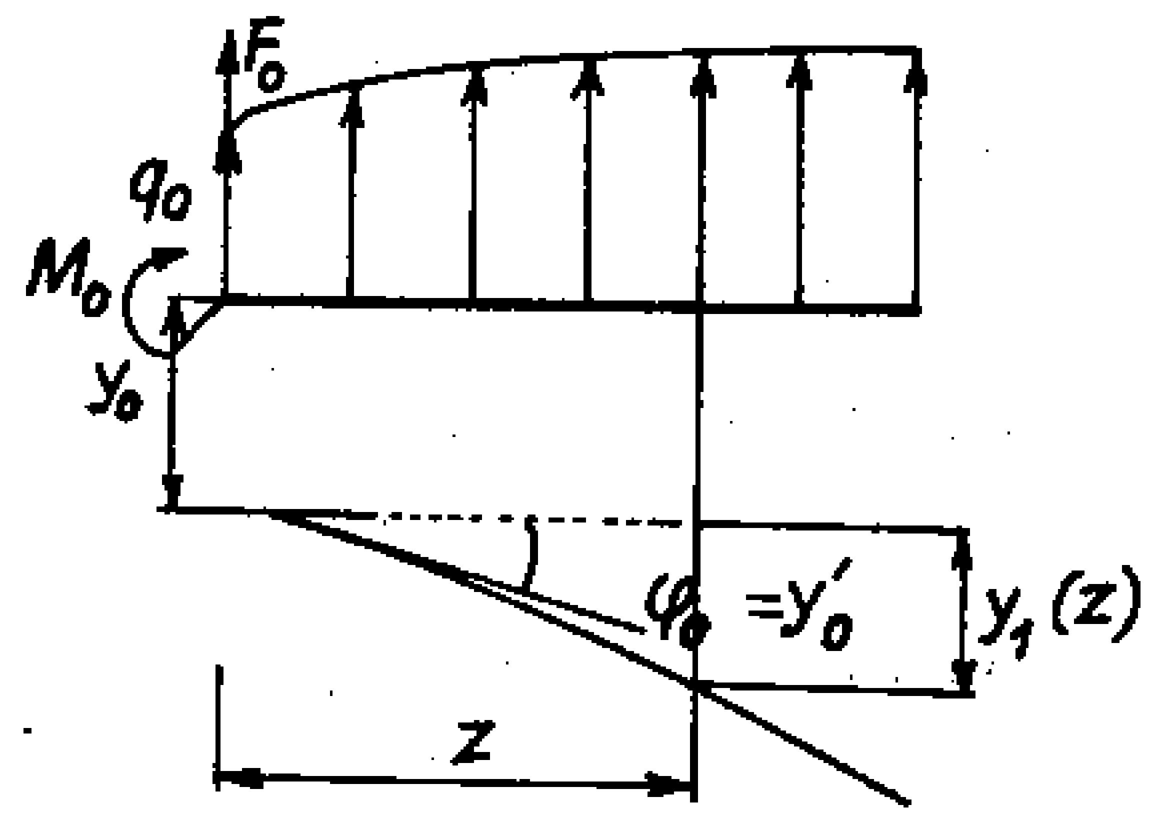
$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{Rl^3}{3EI} = 0 \rightarrow R = \frac{3}{8}ql .$$

Biểu đồ ứng lực trên dầm đã cho cũng là biểu đồ ứng lực trên dầm côngxôn chịu tải trọng phân bố đều $q$ và chịu lực tập trung tại mút tự do $R = \frac{3}{8}ql$. Các biểu đồ cho trên hình 7-19.

## 7-10. PHƯƠNG PHÁP THÔNG SỐ BAN ĐẦU

Phương pháp tích phân không định hạn để tìm độ võng từ phương trình vi phân (7-17) sẽ trở nên cồng kềnh, khó khăn khi phải lập biểu thức mômen uốn cho nhiều đoạn. Bài toán sẽ được giải quyết dễ dàng hơn nếu ta dùng phương pháp thông số ban đầu, một phương pháp được sử dụng rộng rãi trong cơ học công trình.

*Hình 7-20.* Độ võng trong đoạn thứ nhất và các thông số ở mút trái




Xét dầm nằm ngang có $n$ đoạn, gọi tên các đoạn bắt đầu từ 1 theo chiều trục $z$ từ trái sang phải. Xét đoạn thứ nhất có gốc toạ độ nằm ở mút bên tráI (hình 7-20). Trong trường hợp tổng quát, ở mút này có:

* độ võng $y_o$;
* góc xoay $\varphi_o = y'_o$;
* mômen tập trung $M_o$ với chiều dương thuận chiều kim đồng hồ;
* lực tập trung $F_o$ với chiều dương hướng lên trên;
* lực ngang phân bố cường độ $q_o$ với chiều dương hướng lên trên; các đạo hàm của cường độ lực phân bố là $q'_o, q''_o$...

Dấu dương của các lực phù hợp với quy ước dấu trong các quan hệ vi phân và bước nhẩy đã biết.

$$\frac{d^2M}{d^2z} = \frac{dQ}{dz} = q ; \qquad \Delta M = M_o ; \qquad \Delta Q = F_o .$$

Khai triển Mac-Laurin đối với hàm độ võng $y_1$ tại $z = 0$:

$$y_1 = y(0) + y'(0)z + y''(0)\frac{z^2}{2!} + y'''(0)\frac{z^3}{3!} + y^{IV}(0)\frac{z^4}{4!} + y^V(0)\frac{z^5}{5!} + ... \quad (7\text{-}21)$$

với $y(0) = y_o$ ; $y'(0) = \varphi_o$ là độ võng, góc xoay tại mút trái của dầm.

Thay thế $\quad y'' = -\frac{M}{EI}; \quad y''' = -\frac{Q}{EI}; \quad y^{IV} = -\frac{q}{EI}; \quad y^V = -\frac{q'}{EI},$

ta có : $\quad y''(0) = -\frac{M(0)}{EI} = -\frac{M_o}{EI}; \qquad y'''(0) = -\frac{Q(0)}{EI} = -\frac{F_o}{EI};$

$$y^{IV}(0) = -\frac{q(0)}{EI} = -\frac{q_o}{EI}; \qquad y^V(0) = -\frac{q'(0)}{EI} = -\frac{q'_o}{EI}.$$

Nếu tải trọng phân bố là hàm bậc nhất thì $q'' = 0$ và ta dừng lại ở số hạng $y^V(0)$ vừa viết. Thay các giá trị này vào (7-21) ta có :

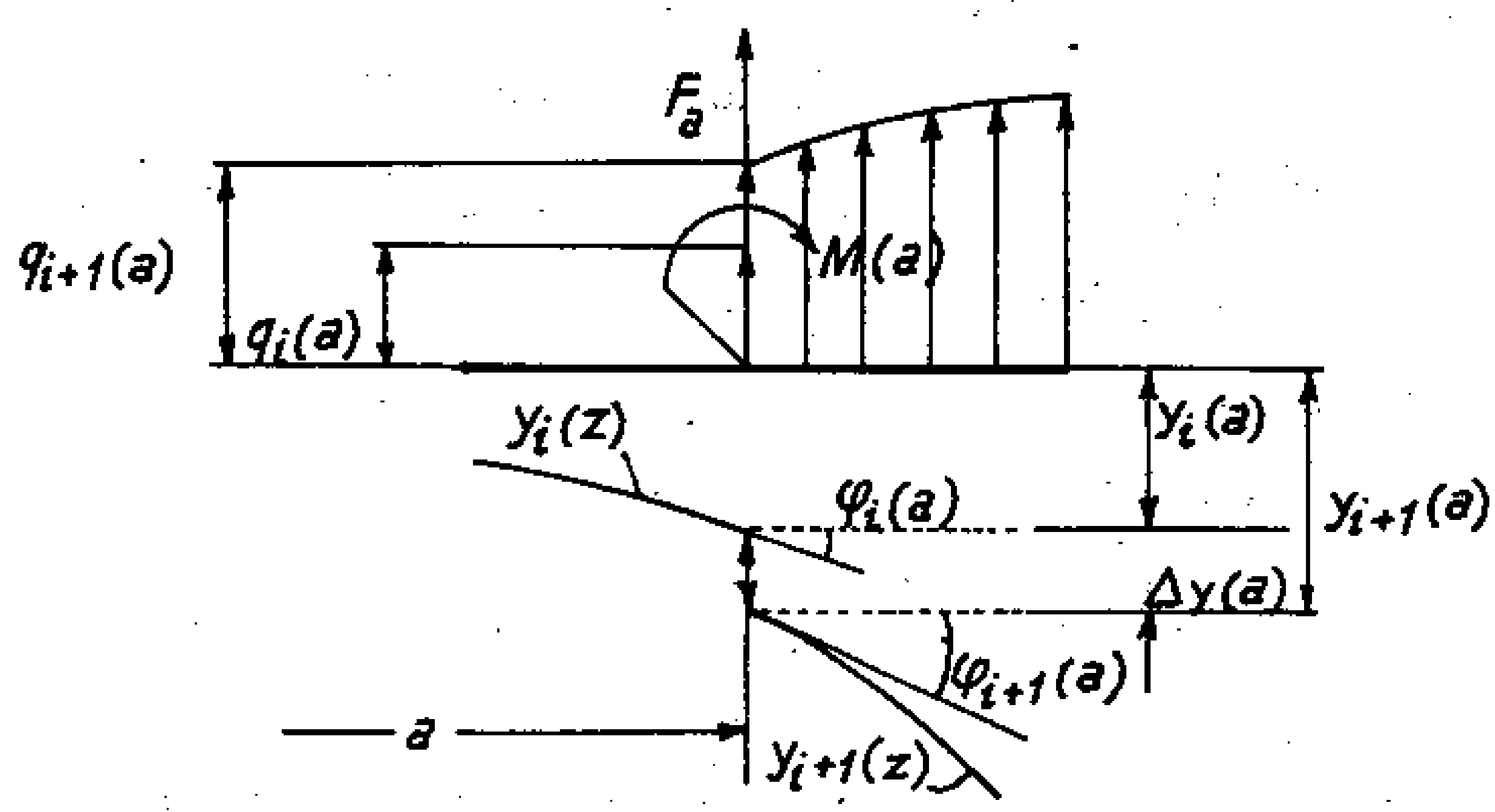
$$y_1 = y_o + \varphi_o z - \frac{1}{EI}\left[\frac{M_o}{2!}z^2 + \frac{F_o}{3!}z^3 + \frac{q_o}{4!}z^4 + \frac{q'_o}{5!}z^5 + ...\right]. \quad (7\text{-}22)$$

Biểu thức này cho phép tính độ võng tại toạ độ $z$ của đoạn thứ nhất qua các thông số ban đầu $y_o$, $\varphi_o$, $M_o$, $F_o$. Một phần các thông số này là biết trước và một phần sẽ được xác định theo các điều kiện biên còn lại của dầm.

Sau khi có biểu thức độ võng trong đoạn thứ nhất, ta xét các đoạn tiếp sau. Để lập được các biểu thức tổng quát, ta khảo sát hai đoạn dầm liên tiếp thứ $i$ và thứ $i+1$, tại tiết diện phân cách ở toạ độ $z = a$ có các ngoại lực $M_a$, $F_a$ và lực phân bố với các gián đoạn:

$$\Delta q_a = (q_a)_{ph} - (q_a)_{tr}; \qquad \Delta q'_a = (q'_a)_{ph} - (q'_a)_{tr}, \quad (7\text{-}23)$$

$(q_a)_{ph}$, $(q_a)_{tr}$, $(q'_a)_{ph}$, $(q'_a)_{tr}$ tương ứng là cường độ và đạo hàm cường độ tải trọng ở bên phải và ở bên trái tiết diện $z = a$. Khi biết tải trọng tác động trên dầm, những đại lượng này là xác định. Dấu dương của các đại lượng này quy ước chỉ định trên hình 7-21.




*Hình 7-21.* Các thông số tại tiết diện chia đoạn $i$ và $i+1$

Kí hiệu $y_i$ và $y_{i+1}$ là biểu thức độ võng của đoạn thứ $i$ và thứ $i+1$; $y_i$ đúng với $z \leq a$ và $y_{i+1}$ đúng với $z \geq a$.

Nếu kéo dài $y_i$ với $z \geq a$ thì sẽ mắc sai số $\Delta y_i(z) = y_{i+1}(z) - y_i(z)$.

Độ võng trong đoạn $y_{i+1}$ sẽ biết nếu biết độ võng của đoạn bên trái $y_i$ và gia số $\Delta y_i$ :

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_i(z). \tag{7-24}$$

Khai triển Mac-Laurin hàm số $\Delta y_i(z)$ tại điểm $z = a$ ta có:

$$\Delta y_i(z) = \Delta y_i(a) + \Delta y'_i(a)\,[z-a] + \Delta y''_i(a)\frac{[z-a]^2}{2!} +$$
$$+ \Delta y'''_i(a)\frac{[z-a]^3}{3!} + \Delta y_i^{IV}(a)\frac{[z-a]^4}{4!} + \Delta y_i^{V}(a)\frac{[z-a]^5}{5!} + \ldots,$$

với ý nghĩa

$$\Delta y_i(a) = y_{i+1}(a) - y_i(a) = \Delta y_a\,;$$

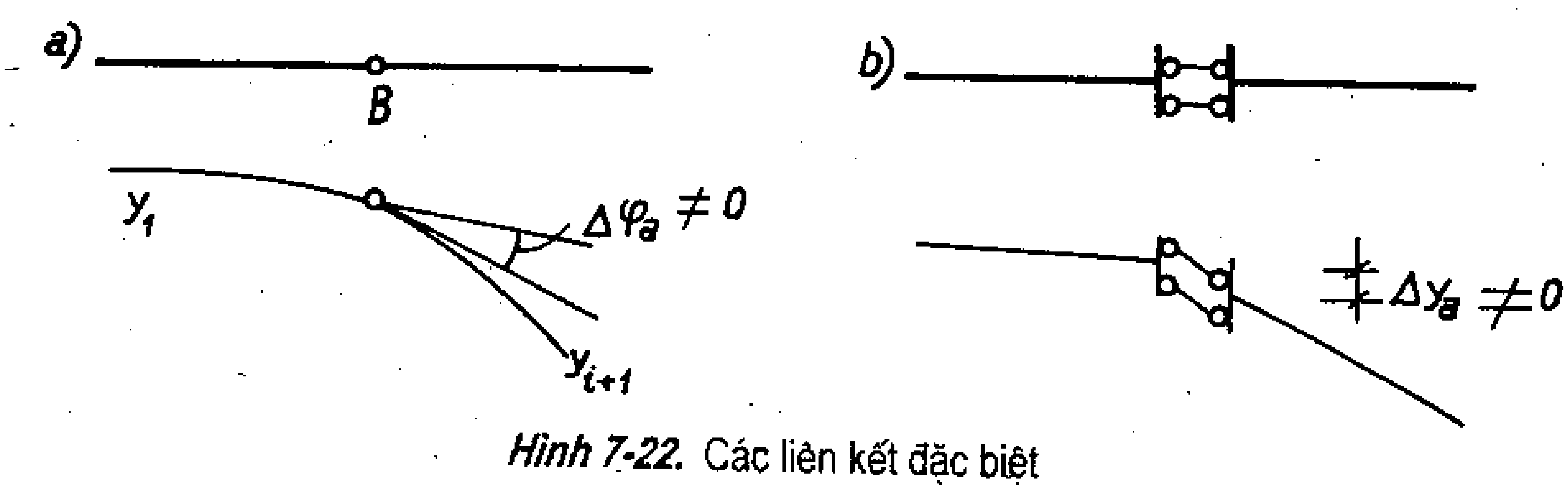
$$\Delta y'_i(a) = y'_{i+1}(a) - y'_i(a) = \Delta y'_a = \Delta\varphi_a\,;$$

$$\Delta y''_i(a) = y''_{i+1}(a) - y''_i(a) = -\left[\frac{M_{i+1}(a)}{EI} - \frac{M_i(a)}{EI}\right] = -\frac{\Delta M_a}{EI} = -\frac{M_a}{EI}\,;$$

$$\Delta y'''_i(a) = y'''_{i+1}(a) - y'''_i(a) = -\left[\frac{Q_{i+1}(a)}{EI} - \frac{Q_i(a)}{EI}\right] = -\frac{\Delta Q_a}{EI} = -\frac{F_a}{EI}\,;$$

$$\Delta y^{IV}_i(a) = y^{IV}_{i+1}(a) - y^{IV}_i(a) = -\left[\frac{q_{i+1}(a)}{EI} - \frac{q_i(a)}{EI}\right] = -\frac{\Delta q_a}{EI}\,;$$

$$\Delta y^{V}_i(a) = y^{V}_{i+1}(a) - y^{V}_i(a) = -\left[\frac{q'_{i+1}(a)}{EI} - \frac{q'_i(a)}{EI}\right] = -\frac{\Delta q'_a}{EI}.$$




*Hình 7-22.* Các liên kết đặc biệt

Khi viết các biểu thức trên, ta đã sử dụng liên hệ vi phân và liên hệ bước nhảy giữa ứng lực và các tải trọng ngang trên thanh. Các bước nhảy của độ võng và góc xoay $\Delta y_a$ , $\Delta\varphi_a$ sẽ bằng không trong trường hợp dầm cấu tạo liên tục và không có những liên kết đặc biệt tại toạ độ $z = a$. Trong trường hợp dầm có những liên kết đặc biệt thì hai đại lượng này có thể khác không, chẳng hạn tại $z = a$ dầm có khớp nối thì $\Delta y'_a \neq 0$ (hình 7-22a), có liên kết ngàm trượt thì $\Delta y_a \neq 0$ (hình 7-22b). $M_a$, $F_a$ là tải trọng tập trung tại $z = a$ . $\Delta q_a$, $\Delta q'_a$ là bước nhảy của cường độ và đạo hàm cường độ tải trọng phân bố tại tiết diện $z = a$.

Thay thế các đại lượng $\Delta$ vào (7-24) ta nhận được:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_a + \Delta\varphi_a [z-a] - \frac{1}{EI}\left[\frac{\Delta M_A}{2!}[z-a]^2 + \frac{\Delta Q_a}{3!}[z-a)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta q_a}{4!}[z-a]^4 + \frac{\Delta q'_a}{5!}[z-a]^5 + \dots \right]. \qquad (7\text{-}25)$$

Khi tải trọng phân bố là hàm bậc nhất theo $z$ thì ta dừng biểu thức ở số hạng $\Delta q'$.

Khi tải trọng phân bố là hàm bậc cao hơn thì phải lấy thêm các đạo hàm tiếp theo.

Các đại lượng còn lại $\Delta y_a$, $\Delta\varphi_a$, $\Delta M_a = M_a$, $\Delta Q_a = F_a$ hoặc đã biết, hoặc được xác định theo điều kiện liên kết của dầm.

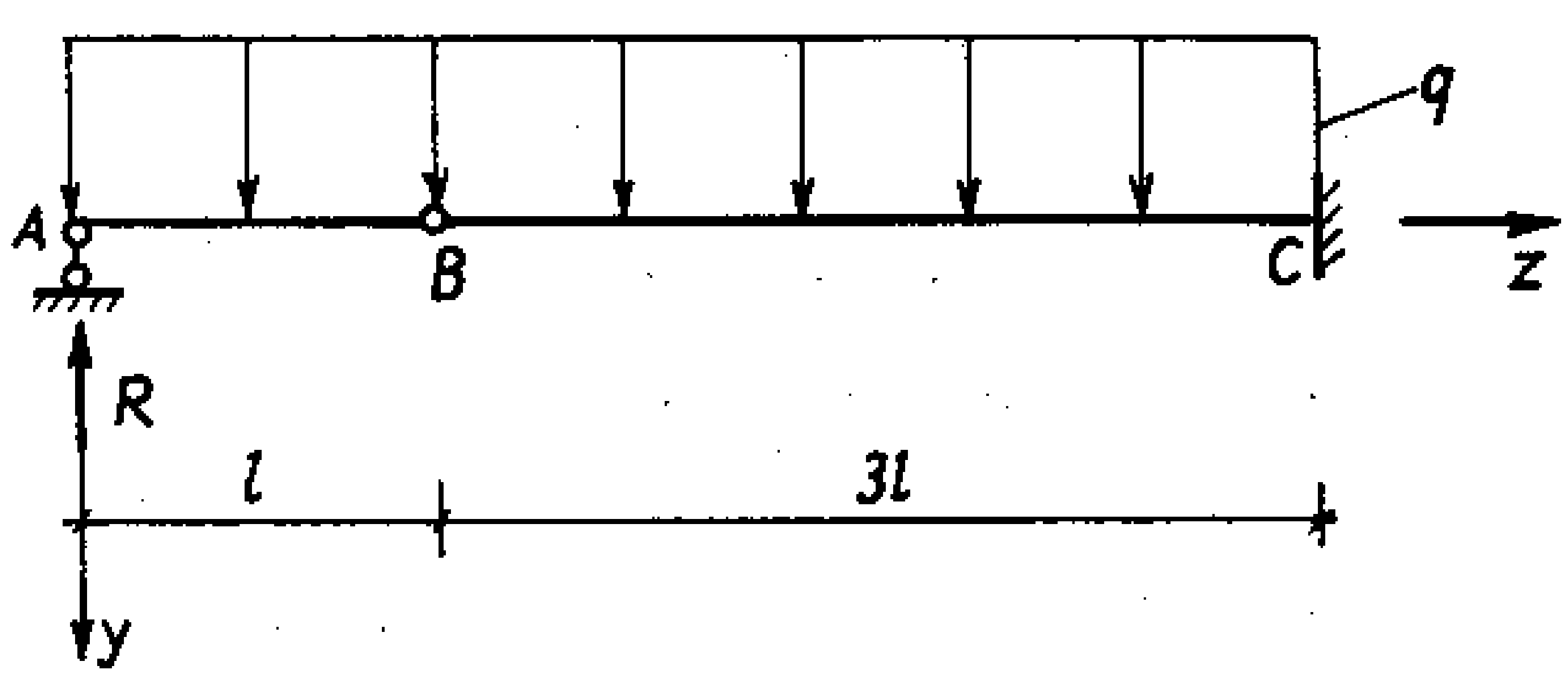
Biết $y_1(z)$ theo biểu thức (7-22), ta sẽ xác định được $y_2(z)$ và lần lượt xác định được độ võng của tất cả các đoạn. Khi độ cứng chống uốn của tiết diện $EI$ không phải là hằng số trong từng đoạn thì, với cách lập luận tương tự, ta cũng có thể lập được biểu thức tính độ võng của dầm cho từng đoạn. Bạn đọc có thể tự tìm hiểu để củng cố hiểu biết của mình.

Sử dụng phương pháp thông số ban đầu, ta có thể giải trực tiếp được một số bài toán siêu tĩnh của dầm chịu uốn. Các ví dụ sau sẽ minh hoạ cho việc sử dụng phương pháp này.

*Ví dụ 7-8*. Tìm độ võng tại khớp $B$ của dầm cho trên hình 7-23 có độ cứng chống uốn $EI$ bằng hằng số.

*Bài giải*. Chọn trục $z$ nằm ngang, hướng sang phải và có gốc ở mút trái $A$. Dầm được chia thành hai đoạn $AB$ và $BC$. Điểm phân cách có toạ độ $z = l$. Biểu thức độ võng sẽ là $y_1$ và $y_2$.

*Hình 7-23.* Cho ví dụ 7-8




Sau khi xác định phản lực của gối tựa tại $A$ là $R = ql/2$, ta lập bảng thông số ban đầu, trong đó ghi rõ các giá trị $\Delta y$, $\Delta\varphi$, $\Delta M$, $\Delta Q$, $\Delta q$, $\Delta q'$...tại điểm ranh giới của các đoạn.

Tại $z = 0$, ta có $\quad \Delta y = y_o = 0$; $\quad \Delta\varphi = \varphi_o \neq 0$;

$\Delta M = 0$; $\quad \Delta Q = R = \dfrac{ql}{2}$;

$\Delta q = (-q) - 0 = -q$; $\quad \Delta q' = 0$.

Tại $z = l$, ta có $\quad \Delta y = y_l = 0$; $\quad \Delta\varphi = \varphi_l \neq 0$;

$\Delta M = \Delta Q = \Delta q = \Delta q' = 0$.

Kết quả được ghi lại trong bảng 7-1.

*Bảng 7-1*

| z | Δy | Δy' | ΔM | ΔQ | Δq | Δq' |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\varphi_0$ | 0 | ql/2 | -q | 0 |
| l | 0 | $\varphi_l$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Theo phương trình (7-22) và (7-25) ta viết được

$$y_l = \varphi_o z - \frac{1}{EI}\left[\frac{(ql/2)}{12}z^3 - \frac{q}{24}z^4\right], \quad \text{với} \quad (0 \leq z \leq l).$$

$$y_2 = y_l + \Delta\varphi_l(z - l), \quad \text{với} \quad (l \leq z \leq 4l).$$

Các thông số chưa biết $\varphi_o$ và $\Delta\varphi_l$ xác định theo điều kiện liên kết:

Tại $z = 4l$ ( thuộc $y_2$ ),

$$y = 0 \;\rightarrow\; \varphi_o.4l - \frac{1}{EI}\left[\frac{(ql/2)}{12}(4l)^3 - \frac{q}{24}(4l)^4\right] + \Delta\varphi_l.3l = 0;$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; \varphi_o - \frac{1}{EI}\left[\frac{ql}{4}(4l)^2 - \frac{q}{6}(4l)^3\right] + \Delta\varphi_l = 0.$$

Từ đó giải ra : $\quad \varphi_o = \dfrac{44}{3}.\dfrac{ql^3}{EI}$; $\quad \Delta\varphi_l = \dfrac{64}{3}.\dfrac{ql^3}{EI}$.

Sau khi thay các giá trị tìm được của $\varphi_o$ và $\Delta\varphi_l$, biểu thức của độ võng sẽ là:

$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left[352\left(\frac{z}{l}\right) - \left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right], \quad \text{với} \quad (0 \leq z \leq l).$$

$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left[352\left(\frac{z}{l}\right) - \left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4 - 512\left(\frac{z}{l} - 1\right)\right], \quad \text{với} \quad (l \leq z \leq 4l).$$

Độ võng tại khớp $B$ (khi $z = l$): $\quad y_B = \dfrac{44}{3}\cdot\dfrac{ql^4}{EI}$.

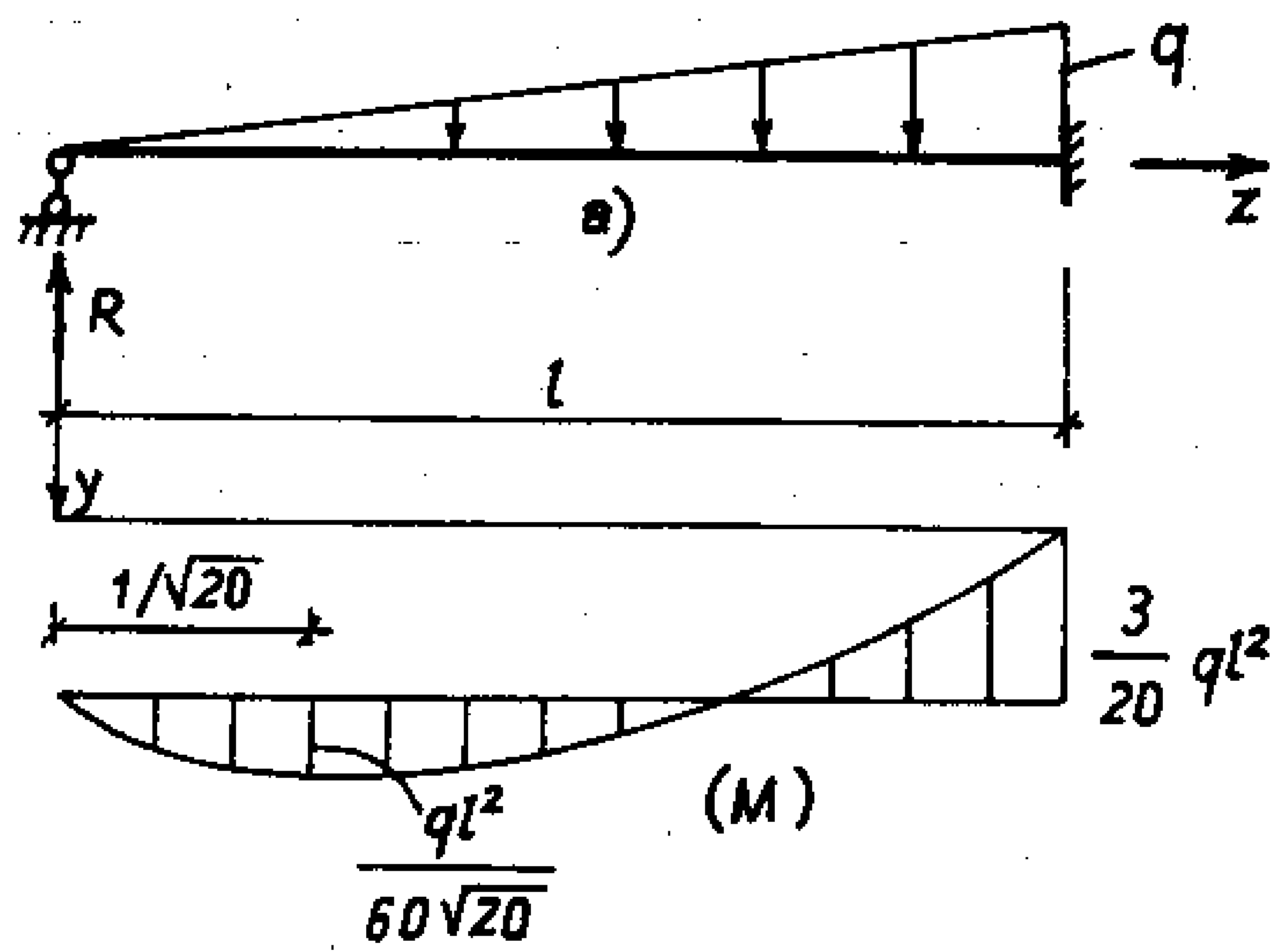
***Ví dụ 7-9***. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm siêu tĩnh cho trên hình 7-24a.

*Bài giải*. Gọi phản lực gối tựa trái là $R$. Dầm có một đoạn với các điều kiện tại mút trái ($z=0$):

$$\Delta y = y_o = 0\,; \qquad \Delta\varphi = \varphi_o \neq 0\,; \qquad \Delta M = 0\,;$$

$$\Delta Q = R\,; \qquad \Delta q = q_o = 0\,; \qquad \Delta q' = q'_0 = \frac{-q}{l}.$$

$$y = \varphi_o . z - \frac{1}{EI}\left[\frac{R}{3!}z^3 - \frac{(q/l)}{5!}z^5\right], \text{ với } \quad (0 \le z \le l)$$




*Hình 7-24.* Cho ví dụ 9-10

Điều kiện biên ở mút phải tại $z = l$, $y = y' = 0$ cho ta hệ phương trình để tìm $\varphi_o$ và $R$:

$$\varphi_o l - \frac{1}{EI}\left[\frac{R}{6}l^3 - \frac{(q/l)}{120}l^5\right] = 0\,;$$

$$\varphi_o - \frac{1}{EI}\left[\frac{Rl^2}{2} - \frac{ql^3}{24}\right] = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình: $\varphi_o = \dfrac{ql^3}{120EI}$; $\quad R = \dfrac{ql}{10}$.

Từ đó ta có:

$$y = \frac{ql^4}{120EI}\left[\left(\frac{z}{l}\right) - \left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^5\right];$$

$$y' = \frac{ql^3}{120EI}\left[1 - 3\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right];$$

$$M = EIy'' = \frac{ql^2}{120}\left[6.\left(\frac{z}{l}\right) - 20\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$$

Khi $z = 0$, $M = 0$.

Khi $z = l$, $M = -\dfrac{7ql^2}{60}$.

Khi $z = \dfrac{l}{\sqrt{10}}$, $M = M_{max} = \dfrac{ql^2}{30\sqrt{10}}$.

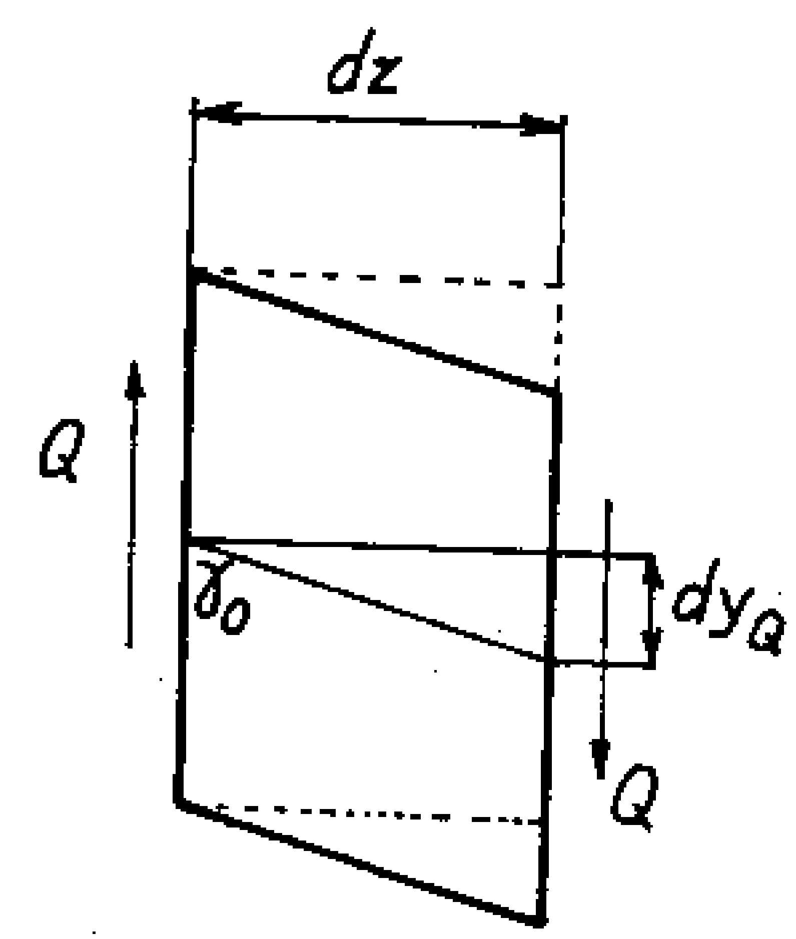
Biểu đồ mômen uốn vẽ trên hình 7-24b.

## 7-11. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CẮT TỚI ĐỘ VÕNG TRONG DẦM CHỊU UỐN

Khi chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen uốn, ta đã nhận được phương trình vi phân độ võng (7-17):

$$y''_M = -\frac{M}{EI}.$$

Để xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt $Q$ gây ra tới độ võng của dầm, ta khảo sát một phân tố thanh có chiều dài $dz$ như trên hình 7-25.




*Hình 7-25.* Biến dạng góc của phân tố thanh

Do biến dạng trượt, trục thanh sẽ xoay đi một góc rất nhỏ $\gamma_o$. Sự chênh lệch độ võng ở hai tiết diện bên phải và bên trái của phân tố là một lượng vi phân, ký hiệu $dy_Q$, bằng:

$$dy_Q = tg\gamma_o\,.\,dz \;\rightarrow \frac{dy_Q}{dz} = tg\gamma_o \approx \gamma_o,$$

$\gamma_o$ là biến dạng góc tại trục thanh, tỉ lệ với ứng suất tiếp $\tau_o$ trên đường trung hoà của tiết diện:

$$\gamma_o = \frac{\tau_o}{G} \;\rightarrow \frac{dy_Q}{dz} = \frac{\tau_o}{G}.$$

Ứng suất tiếp $\tau_o$ được xác định theo công thức (7-12) hoặc viết gọn lại là

$$\tau_o = \alpha.\frac{Q}{A}$$

Hệ số $\alpha$ có giá trị phụ thuộc hình dáng của tiết diện:

* Tiết diện hình chữ nhật $\alpha = 3/2$.

* Tiết diện tròn đặc $\alpha = 4/3$.

* Tiết diện tròn rỗng $\alpha = 2$.

* Tiết diện I hoặc chữ nhật rỗng $\alpha = A/A_t$,

  $A$ - diện tích toàn bộ tiết diện,

  $A_t$ - diện tích các phần tiết diện theo phương thẳng đứng (phần bụng).

Như vậy ta nhận được : $$\frac{dy_Q}{dz} = \alpha\frac{Q}{GA}, \qquad (7\text{-}26)$$

hoặc $$\frac{d^2y_Q}{d^2z} = \frac{\alpha}{GA}.\frac{dQ}{dz}. \qquad (7\text{-}27)$$

Độ võng chung bằng tổng của độ võng $y_M$ do mômen uốn và độ võng $y_Q$ do lực cắt gây ra riêng biệt

$$y = y_M + y_Q$$

Đạo hàm hai vế ta có $$y'' = y''_M + y''_Q$$

Thay biểu thức của $y''_M$ , $y''_Q$ theo (7-26) và (7-27) vào quan hệ vừa viết, ta nhận được phương trình vi phân độ võng của dầm có kể đến ảnh hưởng của lực cắt:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} + \frac{\alpha}{GA}.\frac{dQ}{dz}. \qquad (7\text{-}28)$$

Tích phân phương trình (7-28) và xác định hằng số tích phân theo các điều kiện biên ta sẽ có biểu thức của độ võng, góc xoay. Trong ví dụ trình bày dưới đây, ta sẽ đánh giá ảnh hưởng của lực cắt tới biến dạng của dầm và xác định phạm vi sử dụng của các phương trình độ võng.

*__Ví dụ 7-10.__* Xét độ võng của dầm đơn giản nằm ngang có khớp tựa ở hai đầu, chịu tải trọng ngang phân bố đều với cường độ $q$.

*Bài giải*. Ứng lực của dầm tại tiết diện ở toạ độ $z$ tính từ gối tựa bên trái

$$M = \frac{ql}{2}z - q\frac{z^2}{2} \; ; \qquad Q = \frac{ql}{2} - qz.$$

Phương trình vi phân độ võng: $$y'' = \frac{q}{2EI}\left[zl - z^2\right] - \frac{\alpha q}{GA}.$$

Sau hai lần tích phân ta có: $$y = \frac{q}{24EJ}\left[z^4 - 2z^3\right] - \frac{\alpha q}{2GA}z^2 + C_1z + C_2.$$

Điều kiện biên tại hai đầu thanh $y_{(z=0)} = y_{(z=l)} = 0$ cho phép tìm được

$$C_1 = \frac{ql^3}{24EI} + \frac{\alpha ql}{2GA}; \qquad C_2 = 0.$$

Biểu thức độ võng của dầm

$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x^3}{l^3} - 2\frac{x^2}{l^2} + 1\right) + \frac{\alpha ql^2}{2GA}\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Tại giữa nhịp ( $y = l/2$ ) độ võng đạt cực trị và bằng :

$$y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{\alpha ql^2}{8GA} = \frac{5ql^4}{384EI}\left[1 + \frac{48\alpha EI}{5GAl^2}\right].$$

Trong các biểu thức, số hạng thứ nhất biểu thị ảnh hưởng của mômen uốn và số hạng thứ hai biểu thị ảnh hưởng của lực cắt. Số hạng thứ hai cùng bậc với bậc của tỷ số $\frac{I}{Al^2}$.

Khi tiết diện dầm là đặc, chẳng hạn hình chữ nhật hoặc hình tròn đặc, thì tỷ số $\frac{I}{A}$ có bậc của $h^2$ và $\frac{I}{Al^2}$ có bậc của $\left(\frac{h}{l}\right)^2$.

Đối với dầm ngắn $\frac{h}{l} > \frac{1}{5}$ thì số hạng thứ hai trong ngoặc có thể đáng kể so với đơn vị.

Khi dầm dài $\frac{h}{l} < \frac{1}{5}$ thì số hạng thứ hai rất nhỏ so với đơn vị, có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

Khi tiết diện dầm là rỗng, chẳng hạn tiết diện ghép của các cột điện cao thế, các tháp, dầm dàn.., thì bậc của tỷ số $\frac{I}{Al^2}$ có bậc xấp xỉ đơn vị. ảnh hưởng của lực cắt là đáng kể, cần đưa vào tính toán, đặc biệt khi tính toán về ổn định. Nghiên cứu về các dạng kết cấu này được trình bày trong các sách chuyên khảo, chẳng hạn trong giáo trình Sức bền vật liệu của S.P.Timoshenko.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

7- 1. Những mặt phẳng nào của thanh được gọi là mặt phẳng quán tính chính? Một thanh có bao nhiêu mặt phẳng quán tính chính?

7- 2. Những trường hợp nào được gọi là uốn thuần tuý, uốn phẳng, uốn không gian?

7- 3. Nêu những giả thiết cơ bản khi tính thanh chịu uốn thuần tuý, uốn ngang phẳng.

7- 4. Viết và giải thích công thức tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên tiết diện thanh chịu uốn ngang phẳng.

7- 5. Vẽ biểu đồ ứng suất trên tiết diện thanh hình chữ nhật chịu uốn ngang phẳng.

7- 6. Vẽ biểu đồ ứng suất trên tiết diện thanh thép định hình chữ **I** chịu uốn ngang phẳng.

7- 7. Viết biểu thức định nghĩa mômen chống uốn của tiết diện, công thức tính mômen chống uốn của tiết diện chữ nhật, tiết diện hình tròn đặc, hình tròn rỗng.

7- 8. Nêu những dạng tiết diện hợp lý của thanh chịu uốn.

7- 9. Trình bày những lo ại TTƯS của thanh chịu uốn ngang phẳng.

7-10. Viết các điều kiện ·ền và nêu vị trí điểm kiểm tra các điều kiện bền này của thanh chịu uốn.

7-11. Giải thích vì sao điểm tiếp giáp giữa phần bụng và phần đế của tiết diện thép định hình chữ I chịu uốn phẳng lại có thể ở TTƯS nguy hiểm hơn so với những điểm ở mép hoặc ·rên đường trung hoà của tiết diện.

7-12. Trình bày cách tìm phương chính và ứng suất chính tại một điểm của dầm chịu uốn ngang phẳng. Vẽ dạng quỹ đạo ứng suất chính của dầm chịu uốn ngang phẳng, dầm chịu uốn thuần tuý.

7-13. Viết và giải thích biểu thức tính TNBDĐH của thanh chịu uốn.

7-14. Nêu đặc trưng biến dạng cơ bản của một thanh chịu uốn. Viết quan hệ giữa đặc trưng này với mômen uốn, đặc trưng hình học, đặc trưng cơ học của thanh.

7-15. Nêu các chuyển vị của tiết diện thanh chịu uốn, độ võng, góc xoay.

7-16. Điều kiện để sử dụng phương trình vi phân tuyến tính của độ võng $y'' = -\frac{M}{EI}$.

7-17. Viết điều kiện biên để xác định hằng số tích phân khi xác định chuyển vị của dầm côngxôn, dầm đơn giản, dầm mút thừa chịu tải trọng ngang phân bố đều trên toàn chiều dài.

7-18. Nêu nhược điểm của phương pháp tích phân không định hạn để xác định độ võng.

7-19. Trình bày cơ sở của phương pháp tải trọng giả tạo để xác định chuyển vị trong dầm chịu uốn.

7-20. Viết các thứ nguyên của độ võng, góc xoay, mômen uốn giả tạo, lực cắt giả tạo, tải trọng ngang phân bố giả tạo trong phương pháp tải trọng giả tạo để xác định chuyển vị trong dầm chịu uốn.

7-21. Nêu các bước để xác định chuyển vị của dầm chịu uốn theo phương pháp tải trọng giả tạo. Ưu và nhược điểm của phương pháp này so với phương pháp tích phân trực tiếp.

7-22. Những đại lượng nào được gọi là các thông số ban đầu trong phương pháp thông số ban đầu? Trong những thông số này có bao nhiêu thông số chưa biết?

7-23. Viết phương trình tổng quát để tìm độ võng theo phương pháp thông số ban đầu.

7-24. Nêu quy tắc về dấu của các đại lượng trong phương pháp thông số ban đầu.

7-25. Lập phương trình vi phân của thành phần độ võng do lực cắt gây ra.

7-26. Khi nào cần xét và khi nào không cần xét đến ảnh hưởng của lực cắt tới độ võng.

# 8 Thanh chịu lực phức tạp

## 8-1. KHÁI NIỆM CHUNG

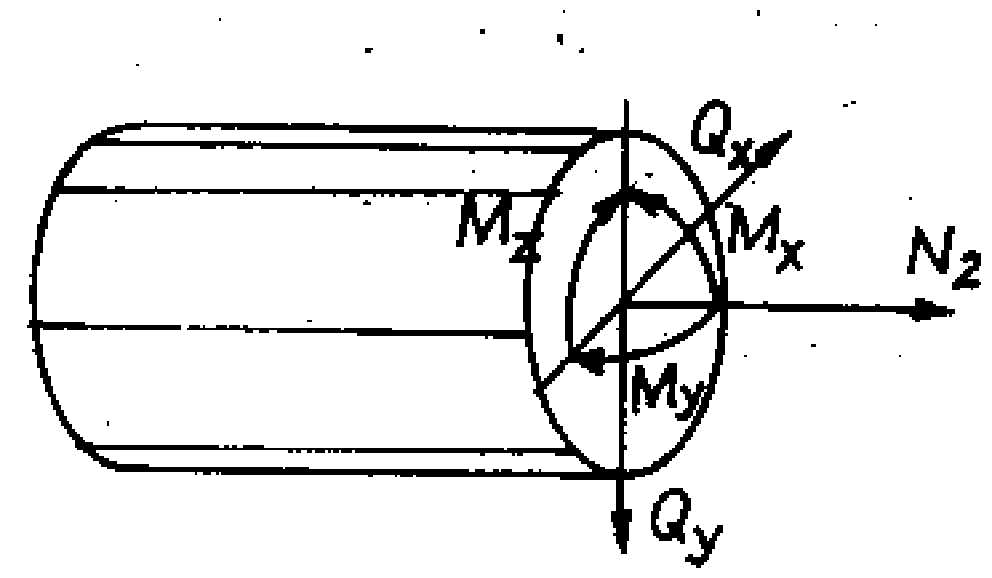
### 8-1-1. Thanh chịu lực đơn giản

Những trường hợp chịu lực của thanh khi kéo (nén), uốn phẳng, xoắn đã xét trong các chương trước được gọi là những trường hợp *chịu lực đơn giản*. Khi này, trên tiết diện thanh chỉ tồn tại một loại ứng lực độc lập: hoặc lực dọc, hoặc mômen uốn đi kèm theo lực cắt, hoặc mômen xoắn. Trong những trường hợp này, ngoại lực tác động trên thanh hoặc chỉ là những lực dọc trục thanh, ký hiệu $F_z$ (kéo nén đúng tâm) hoặc chỉ là những mômen và lực ngang nằm trong một mặt phẳng quán tính chính, ký hiệu $F_y$ (uốn trong mặt phẳng $xz$) và $F_x$ (uốn trong mặt phẳng $yz$) hoặc chỉ là những ngẫu ngoại lực $\mathcal{M}_z$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh (xoắn).

### 8-1-2. Thanh chịu lực phức tạp

Tổ hợp những trường hợp chịu lực đơn giản được gọi là trường hợp chịu lực phức tạp.

Tổng quát nhất, trên tiết diện thanh có đủ sáu thành phần ứng lực như ở hình 8-1: lực dọc $N$, mômen uốn $M_x$ và lực cắt $Q_y$ (uốn trong mặt phẳng $xz$), mômen uốn $M_y$ và lực cắt $Q_x$ (uốn trong mặt phẳng $yz$), mômen xoắn $M_z$.




*Hình 8-1.* Thanh chịu lực phức tạp tổng quát

### 8-1-3. Ứng suất trên tiết diện

Theo nguyên lý cộng tác dụng đã trình bày trong chương 1 thì ứng suất và biến dạng của thanh khi chịu lực phức tạp sẽ bằng tổng ứng suất hoặc tổng biến dạng do từng ứng lực gây ra riêng rẽ.

Ứng suất pháp trên tiết diện chỉ do lực dọc, mômen uốn gây ra và bằng:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(N) + \vec{\sigma}(M_x) + \vec{\sigma}(M_y).$$

Các ứng suất pháp thành phần có cùng phương, nên ta viết tổng theo trị đại số

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_x) + \sigma(M_y);$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x. \qquad (8\text{-}1)$$

Ứng suất tiếp trên tiết diện chỉ do lực cắt, mômen xoắn gây ra và bằng

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(Q_y) + \vec{\tau}(Q_x) + \vec{\tau}(M_z) \qquad (8\text{-}2)$$

Các ứng suất tiếp thành phần có phương khác nhau nên không chuyển được biểu thức sang phép cộng đại số.

Thành phần $\vec{\tau}(Q_y)$ có phương, chiều phù hợp với lực cắt $Q_y$ và có trị số

$$\tau(Q_y) = \frac{Q_y S_x^C}{I_x b};$$

Thành phần $\vec{\tau}(Q_x)$ có phương, chiều phù hợp với lực cắt $Q_x$ và có trị số

$$\tau(Q_x) = \frac{Q_x S_y^C}{I_y h};$$

Thông thường, đối với dầm dài, khi tính ứng suất và biến dạng có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn và do đó trong những trình bày tiếp sau, ta không xét đến các ứng suất tiếp $\tau(Q_x)$, $\tau(Q_y)$.

Thành phần $\vec{\tau}(M_z)$ có trị số và phương, chiều phụ thuộc vào dạng tiết diện. Chẳng hạn với tiết diện hình tròn thì ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính, có chiều phù hợp chiều của mômen xoắn nội lực $M_z$ và có trị số

$$\tau(M_z) = \frac{M_z}{I_p}\rho.$$

Trong các công thức trên, $xy$ là hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện; $z$ là trục thanh; lực dọc $N$ là dương khi kéo; mômen xoắn $M_z$ là dương khi nhìn vào tiết diện thấy mômen quay thuận chiều kim đồng hồ; mômen uốn $M_x$, $M_y$ là dương khi làm căng các thớ nằm ở phía dương của trục tương ứng $y$ hoặc $x$; lực cắt $Q_x$, $Q_y$ là dương khi hướng theo chiều dương của trục.

Ta có thể xét các trường hợp riêng của sự chịu lực phức tạp, khi bỏ qua lực cắt:

**1- Uốn xiên**, hoặc **uốn không gian** khi thanh chịu uốn trong cả hai mặt phẳng quán tính chính. Ứng lực trên tiết diện, khi bỏ qua các lực cắt, sẽ gồm mômen uốn $M_x$ và mômen uốn $M_y$, như trên hình 8-2a.

Ứng suất pháp trên tiết diện thanh chịu uốn xiên:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x . \tag{8-3}$$

Hợp hai mômen uốn $M_x$, $M_y$ ta được một mômen uốn $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, mômen $M_u$ nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh và một trục $v$ nào đó trên tiết diện như trên hình 8-2b. Như thế, ta cũng có thể định nghĩa: *thanh chịu uốn xiên nếu ứng lực là một mômen uốn nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh và một trục trung tâm của tiết diện nhưng không phải là trục quán tính chính.* Mọi trục trung tâm của hình tròn đều là những trục quán tính chính, nên những tiết diện dạng hình tròn có thể tính như thanh chịu uốn phẳng, mặc dầu do tác động của tải trọng có thể tồn tại đồng thời hai mômen uốn $M_x$, $M_y$ trên tiết diện.

Ứng suất pháp trên tiết diện hình tròn sẽ là:

$$\sigma = \frac{M_u}{I_u} v = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{I_x} v \tag{8-4}$$

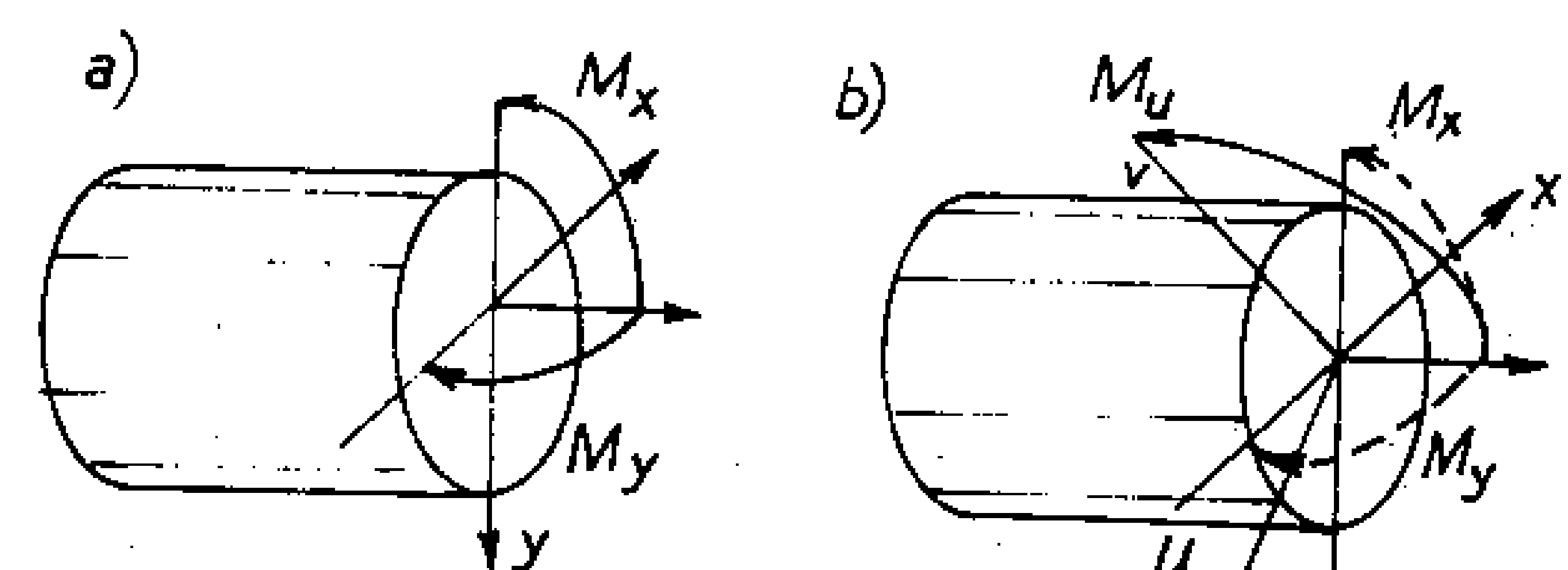
trong đó:

$I_u = I_x \approx 0{,}05 D^4 \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$ - mômen quán tính chính trung tâm của tiết diện.

$d$, $D$ - đường kính trong và đường kính ngoài của tiết diện.

$v$ - khoảng cách từ điểm tính ứng suất tới trục trung hoà $u$.

*Hình 8-2.* Thanh chịu uốn xiên

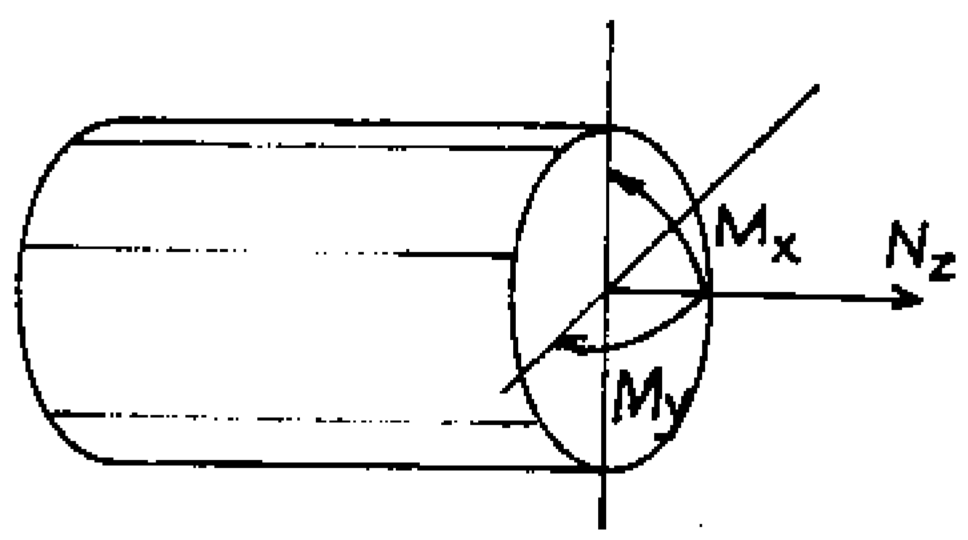



**2- Uốn cộng kéo (nén)**, còn gọi là **uốn và kéo (nén) đồng thời**, khi ứng lực trên tiết diện gồm lực dọc $N$, mômen uốn $M_x$, $M_y$ hoặc lực dọc và một trong hai mômen uốn này như trên hình 8-3.

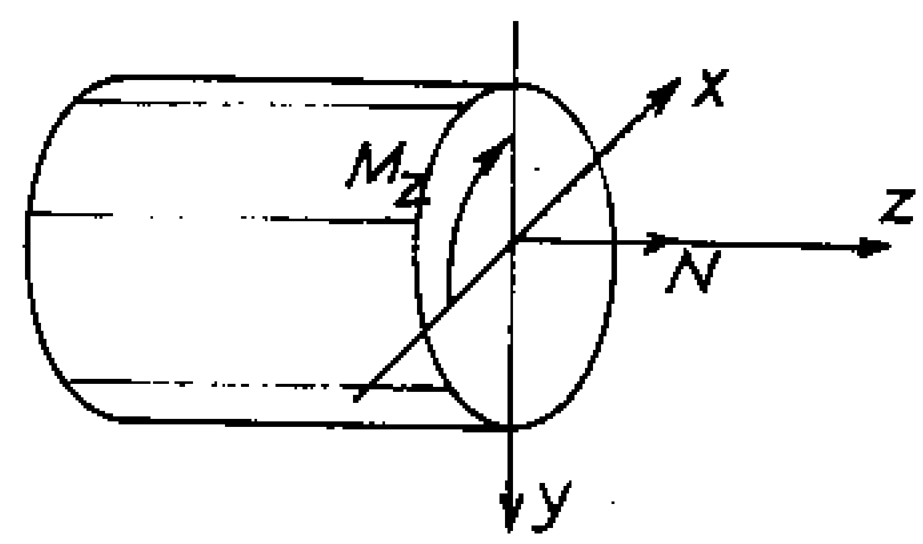
Ứng suất pháp trên tiết diện:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x . \qquad (8\text{-}5)$$

Khi tiết diện tròn: $$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{I_x}y . \qquad (8\text{-}6)$$




*Hình 8-3.* Thanh chịu uốn và kéo đồng thời




*Hình 8-4.* Thanh chịu kéo và xoắn đồng thời

3- **Kéo (nén) cộng xoắn**, còn gọi là **kéo (nén) và xoắn đồng thời**, khi ứng lực trên tiết diện gồm lực dọc $N$ và mômen xoắn $M_z$ như trên hình 8-4.

Khi tiết diện hình tròn ứng suất pháp và ứng suất tiếp được tính theo công thức

$$\sigma = \frac{N}{A} = const ; \qquad \tau = \frac{M_z}{I_p}\rho . \qquad (8\text{-}7)$$

## *8-2. ỨNG SUẤT PHÁP VÀ ĐIỀU KIỆN BỀN THEO ỨNG SUẤT PHÁP*

### *8-2-1. Đường trung hoà*

*Đường trung hoà trên tiết diện là quỹ tích những điểm có ứng suất pháp bằng không.*

Phương trình đường trung hoà tìm được theo điều kiện $\sigma = 0$, có dạng:

$$\frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y + \frac{N}{A} = 0 . \qquad (8\text{-}8)$$

Trong phương trình: $N$, $M_x$, $M_y$ là các ứng lực; $I_x$, $I_y$, $A$ là các đặc trưng hình học. Tại tiết diện đang xét, những trị số này là xác định và là những hằng số; $x$, $y$ là toạ độ điểm nằm trên đường trung hoà.

Ta có những nhận xét như sau về tính chất đường trung hoà:

- Đường trung hoà là một đường thẳng, đi qua gốc toạ độ khi lực dọc $N = 0$, không đi qua gốc toạ độ khi lực dọc $N \neq 0$.
- Ứng suất pháp tại một điểm trên tiết diện tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó tới đường trung hoà.

Chứng minh- Theo hình học giải tích, khoảng cách $d$ từ điểm $P(x_P, y_P)$ tới đường thẳng $ax + by + c = 0$ được tính bởi công thức $d = \dfrac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Vậy khoảng cách từ điểm $P$ trên tiết diện tới đường trung hoà trên hình 8-5 là

$$d = \frac{\dfrac{M_y}{I_y} x_P + \dfrac{M_x}{I_x} y_P + \dfrac{N}{P}}{\sqrt{\left(\dfrac{M_x}{I_x}\right)^2 + \left(\dfrac{M_y}{I_y}\right)^2}}.$$

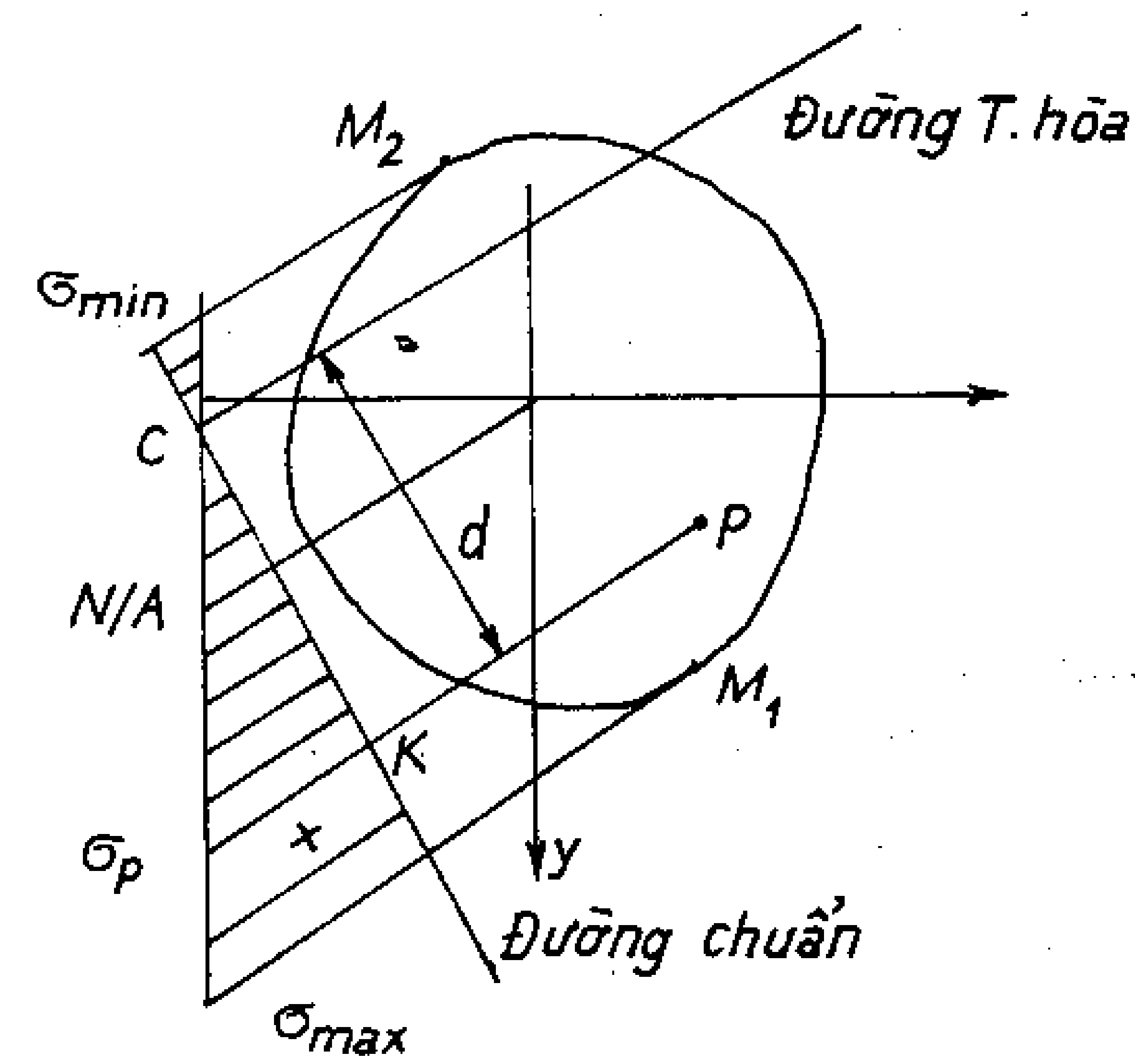
Tử số, theo công thức (8-1) chính là ứng suất pháp $\sigma_P$ tại điểm đang xét; mẫu số, chứa mômen uốn và các đặc trưng hình học, là hằng số trên tiết diện, ký hiệu $K$. Vậy:

$$\sigma_P = K\, d. \tag{8-9}$$

Đó là điều cần phải chứng minh

Như vậy, những điểm có khoảng cách như nhau tới đường trung hoà (những điểm nằm trên cùng một đường thẳng song song với đường trung hoà) thì có ứng suất pháp như nhau. Ứng suất pháp trên tiết diện đạt giá trị lớn nhất tại điểm xa đường trung hoà nhất.

*Hình 8-5.* Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất pháp




### *8-2-2. Biểu đồ ứng suất pháp*

Trên cơ sở các nhận xét và hệ quả nêu trên, ta có thể vẽ biểu đồ ứng suất pháp trên tiết diện (hình 8-5) theo thứ tự như sau:

* Kẻ đường thẳng, gọi là đường chuẩn, vuông góc đường trung hoà;

* Xét một điểm $P$ trên tiết diện, theo công thức (8-1) tính ứng suất pháp $\sigma_P$. Qua điểm $P$ kẻ một đường thẳng song song với đường trung hoà, đường kẻ cắt đường chuẩn tại $K$;

* Từ $K$ đặt tung độ $\sigma_P$. Nối tung độ vừa đặt với gốc $C$ trên đường chuẩn, ta nhận được biểu đồ ứng suất pháp. Biểu đồ giới hạn bởi hai đường thẳng song song đường trung hoà và tiếp xúc với chu vi tiết diện tại hai điểm xa đường trung hoà nhất ($M_1$, $M_2$);

* Tại trọng tâm tiết diện ứng suất pháp luôn luôn là $\sigma = \dfrac{N}{A}$.

### 8-2-3. Ứng suất pháp lớn nhất

Biết điểm xa đường trung hoà nhất $M_1$ và $M_2$, ta có thể tính trị số ứng suất pháp lớn nhất

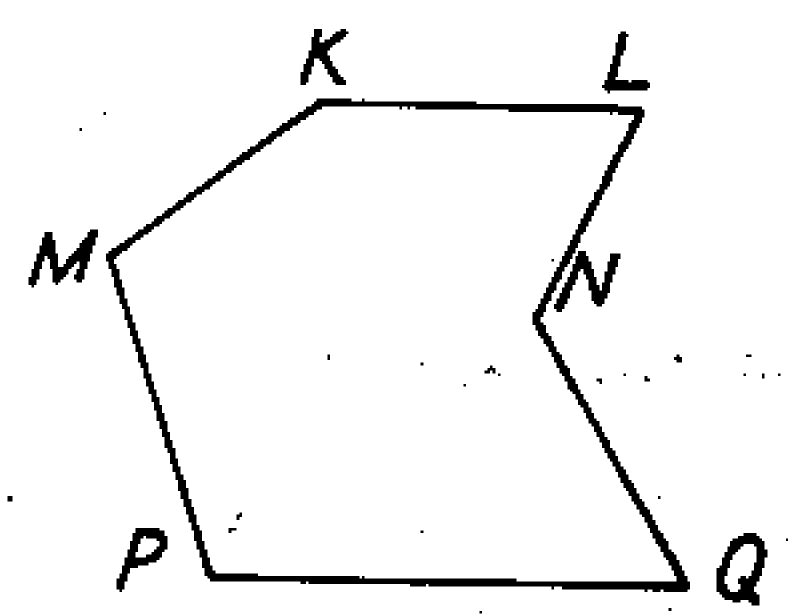
$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_M + \frac{M_y}{I_2} x_M \qquad (8\text{-}9)$$

Như vậy, trong trường hợp tổng quát, muốn tìm $\sigma_{max}$ và $\sigma_{min}$ ta cần vẽ đường trung hòa rồi tìm điểm $M_1$, $M_2$ và theo đó tính ứng suất.

Ta có thể tính đơn giản hơn cho một số trường hợp sau:

♦ Tiết diện hình đa giác (hình 8-6)

Ta nhận thấy điểm $M_1$ và $M_2$ chỉ nằm trên đỉnh lồi. Để tính $\sigma_{max}$ và $\sigma_{min}$ ta không cần vẽ đường trung hoà mà chỉ cần tính ứng suất pháp tại các đỉnh lồi theo (8-1), chẳng hạn các điểm $K$, $L$, $M$, $P$, $Q$ rồi so sánh với nhau tìm trị số *max*, *min*.



***Hình 8-6.*** Tiết diện đa giác

♦ Tiết diện hình chữ nhật, thép hình chữ I (hình 8-7)

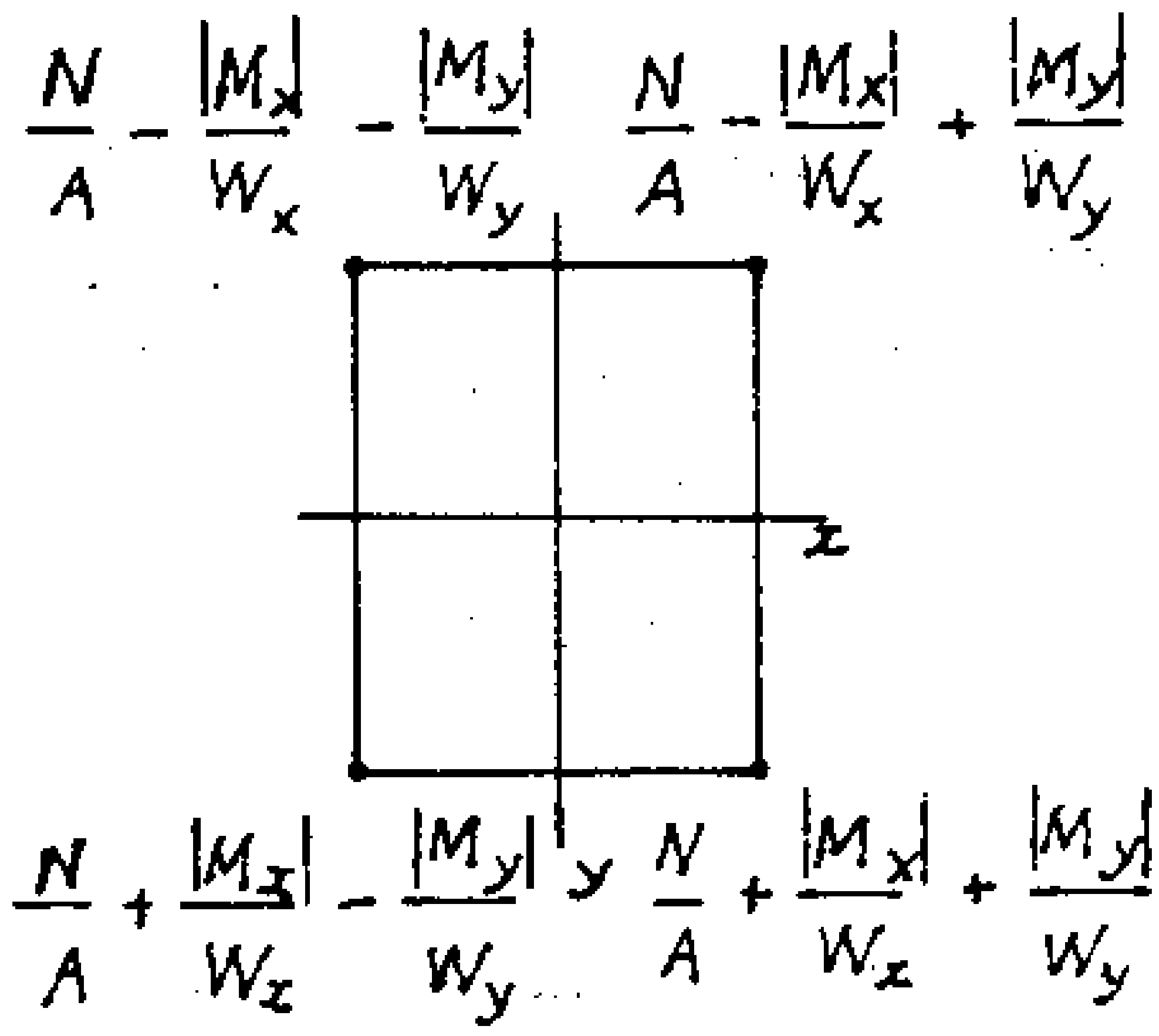
Lực dọc gây ra ứng suất pháp như nhau trên toàn tiết diện, bằng $\dfrac{N}{A}$.

Mômen uốn $M_x$ gây ứng suất $\pm\dfrac{|M_x|}{W_x}$ trên các cạnh song song với trục $x$.

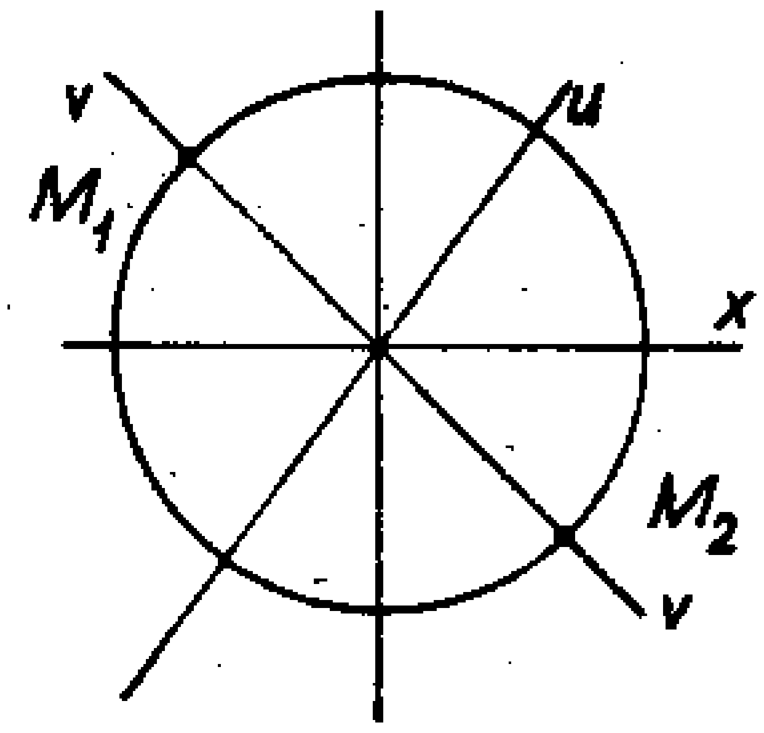
Mômen uốn $M_y$ gây ứng suất $\pm\dfrac{|M_y|}{W_y}$ trên các cạnh song song với trục $y$.

Ứng suất pháp đạt giá trị lớn nhất tại các đỉnh và bằng:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y}. \tag{8-10}$$




*Hình 8-7.* Ứng suất trên tiết diện chữ nhật




*Hình 8-8.* Ứng suất trên tiết diện tròn

♦ <u>*Tiết diện hình tròn*</u> (hình 8-8)

Tác dụng của hai mômen uốn $M_x$, $M_y$ có thể thay thế bởi mômen uốn $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . Mômen uốn $M_u$ gây ra trị số ứng suất pháp lớn nhất tại các điểm $M_1$, $M_2$ trên chu vi tiết diện, tính theo công thức (8-6). Ta có:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}. \tag{8-11}$$

### *8-2-4. Điều kiện bền*

Khi chỉ kể đến ứng suất pháp, TTƯS trong thanh là TTƯS đơn nên ta có điều kiện bền:

$$\left|\sigma_{\substack{max \\ min}}\right| \le [\sigma]_n^k . \tag{8-12}$$

Trong trường hợp chung, $\sigma_{max}$ và $\sigma_{min}$ tìm theo công thức tổng quát (8-7) hoặc theo các công thức (8-8),(8-9) tuỳ theo dạng của tiết diện. Ta có thể viết điều kiện bền cụ thể cho các trường hợp sau:

♦ tổng quát: $$\left|\sigma_{\substack{max \\ min}}\right| = \left|\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_M + \frac{M_y}{I_y} x_M\right| \le [\sigma]_n^k ; \tag{8-13}$$

♦ tiết diện chữ nhật: $$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| = \left|\frac{N}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y}\right| \le [\sigma]^k_n ; \quad (8\text{-}14)$$

♦ tiết diện hình tròn: $$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| = \left|\frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}\right| \le [\sigma]^k_n . \quad (8\text{-}15)$$

Với vật liệu dẻo, $[\sigma]_k = [\sigma]_n$ và được ký hiệu chung là $[\sigma]$.

## *8-3. ĐỘ VÕNG CỦA DẦM*

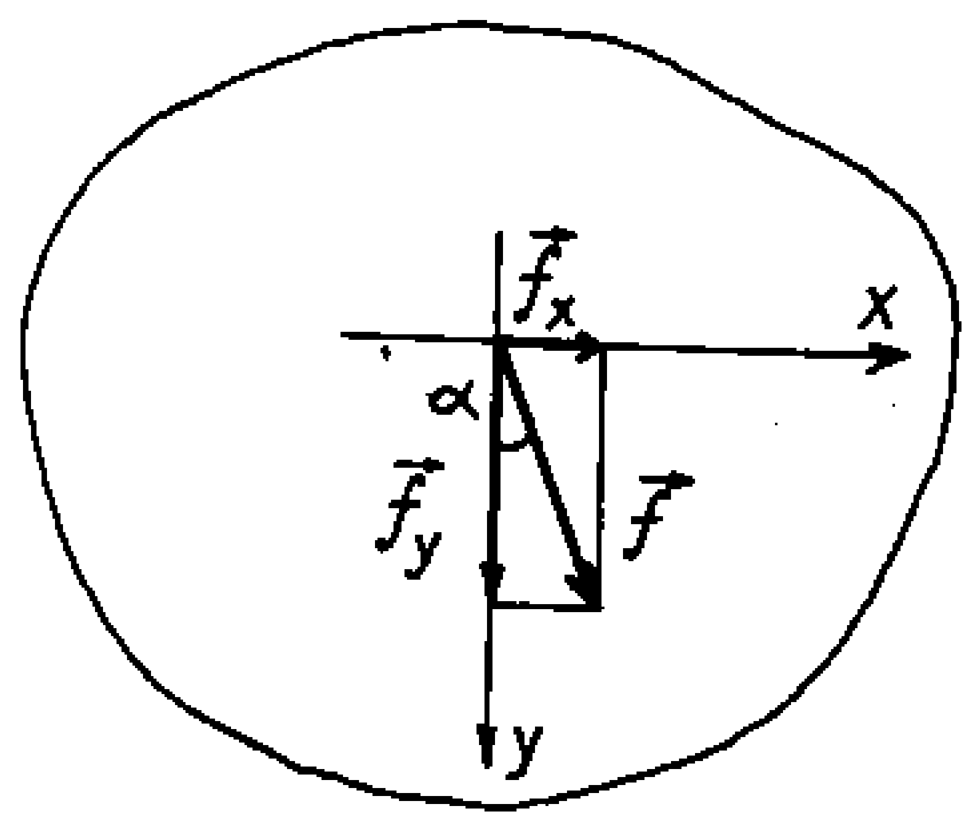
Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng do lực dọc, ta tìm độ võng của thanh do mômen uốn gây ra. Nếu ký hiệu $\vec{f}_x$ là véc tơ độ võng theo phương $x$ do mômen uốn $M_y$ gây ra, $\vec{f}_y$ là véc tơ độ võng theo phương $y$ do mômen uốn $M_x$ gây ra,.thì độ võng toàn phần tại tiết diện do cả hai mômen uốn gây ra sẽ là tổng của hai véc tơ thành phần

$$\vec{f} = \vec{f}_x + \vec{f}_y, \quad \text{hoặc} \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} .$$

Véctơ chuyển vị toàn phần $\vec{f}$ hợp với trục $y$ một góc $\beta$ (hình 8-9) có

$$tg\beta = \frac{f_x}{f_y} .$$

Các độ võng thành phần được xác định theo các phương pháp đã biết trong chương uốn trên cơ sở các phương trình vi phân độ võng



***Hình 8-9.*** Độ võng khi uốn không gian

$$f_x'' = -\frac{M_y}{EI_y} \quad \text{và} \quad f_y'' = -\frac{M_x}{EI_x} ,$$

$EI_x, EI_y$ là độ cứng chống uốn của tiết diện trong các mặt phẳng $yz$ và $xz$.

__*Ví du 8-1*__. Dầm đơn giản bằng gỗ, tiết diện hình tròn đường kính $D= 16$ cm, chịu lực như trên hình 8-10. Xác định trị số cho phép của tải trọng $F$ theo điều kiện bền. Cho biết $a=50$ cm, ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,2$ kn/cm$^2$..

__*Bài giải*__. Các lực tập trung nằm theo hai phương vuông góc với nhau, các phương này cũng là các trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, ký hiệu $x$ và $y$. Lực $F$ theo phương $y$, gây ra biểu đồ mômen uốn $M_x$ trong mặt phẳng $yz$. Lực

$2F$ theo phương $x$, gây ra biểu đồ mômen uốn $M_y$ trong mặt phẳng $xz$.

* Tại tiết diện đặt lực $F$:

$$M_x = \frac{8}{6}Fa; \quad M_y = \frac{4}{6}Fa;$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} =$$

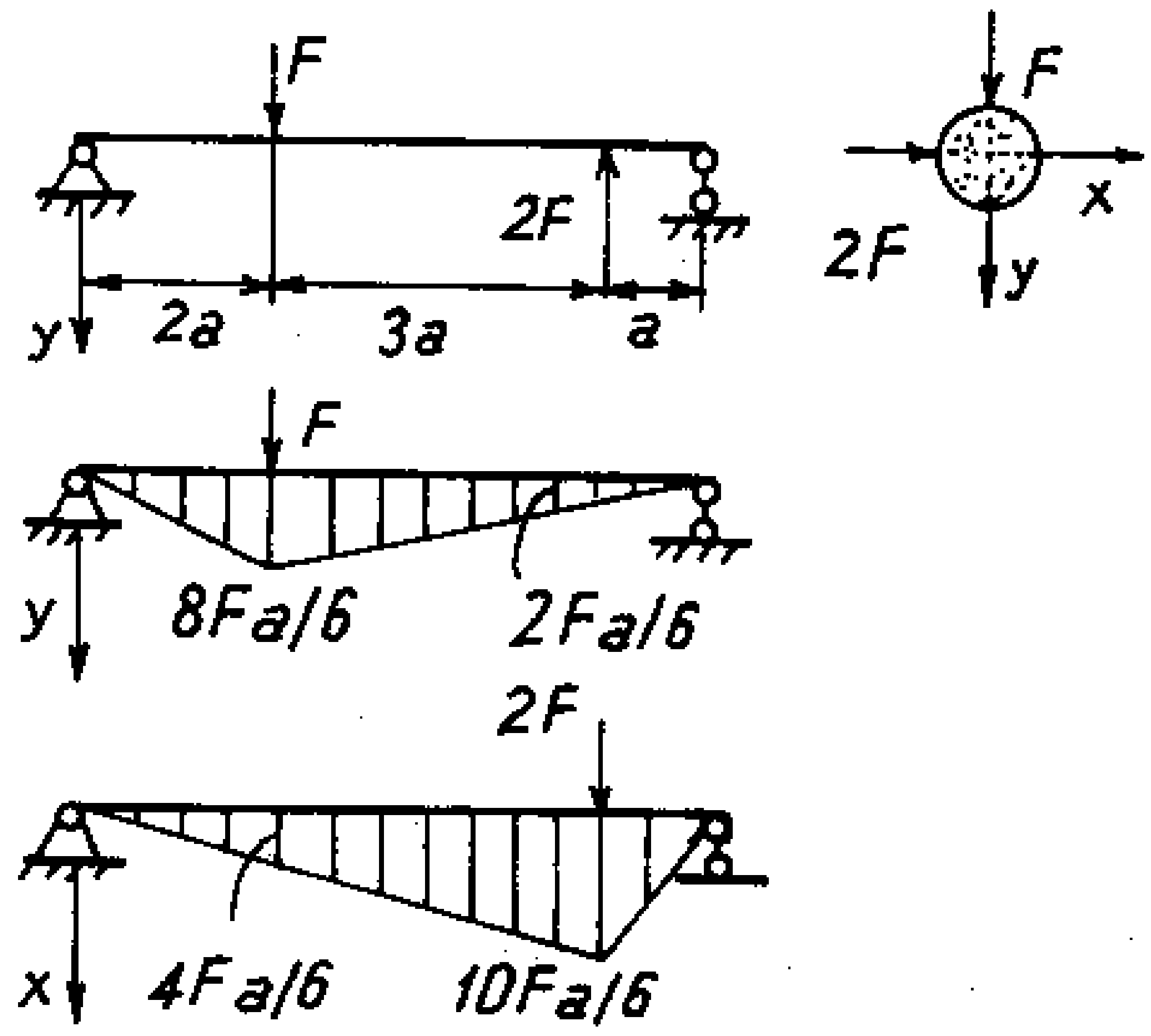
$$= \frac{aF}{6}\sqrt{8^2 + 4^2} = 1{,}49Pa.$$

* Tại tiết diện đặt lực $2F$:

$$M_x = \frac{2}{6}Fa; \quad M_y = \frac{10}{6}Fa;$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} =$$

$$= \frac{aF}{6}\sqrt{2^2 + 10^2} = 1{,}7Fa.$$




*Hình 8-10.* Cho ví dụ 8-1

Như vậy, tiết diện đặt lực $2F$ nguy hiểm hơn. Điều kiện bền cho tiết diện tròn chịu uốn xiên, theo (8-13), là

$$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x} \le [\sigma] \rightarrow \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \le [\sigma]W_x.$$

Tại tiết diện nguy hiểm:

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 1{,}7Fa \le [\sigma]W_x \rightarrow F \le \frac{[\sigma]W_x}{1{,}7a} = \frac{1{,}2.0{,}1.16^3}{1{,}7.50} = 5{,}78kN.$$

__*Ví dụ 8-2*__. Cột của nhà công nghiệp (hình 8-11) có tiết diện chữ nhật $25 \times 40$ cm$^2$, chiều cao từ chân tới vai cột là $5{,}1$ m. Trọng lượng phần mái truyền lên đỉnh cột là $F_1 = 86$ kN, lực của dầm cầu chạy tác động lên vai cột gồm hai thành phần: thành phần thẳng đứng $F_2 = 62$ kN đặt cách mép ngoài của cột một đoạn $42$ cm và thành phần nằm ngang $F_3 = 3{,}6$ kN. Tìm trị số ứng suất pháp lớn nhất phát sinh tại chân cột. Kích thước trên hình cho theo cm.

__*Bài giải*__. Ký hiệu hệ trục quán tính chính trung tâm $x$, $y$ của tiết diện cột như trên hình 8-11.

Ứng lực tại mặt cắt ở chân cột:

$N = -86 - 62 = -148$ kN;

$M_y = 86(20-10) - 62(30-20) - 3{,}6.510 = -1596$ kNcm.

Ứng suất lớn nhất tại chân cột:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_y|}{W_y} =$$

$$= \frac{-148}{1000} \pm \frac{1596}{\frac{25.40^2}{6}} =$$

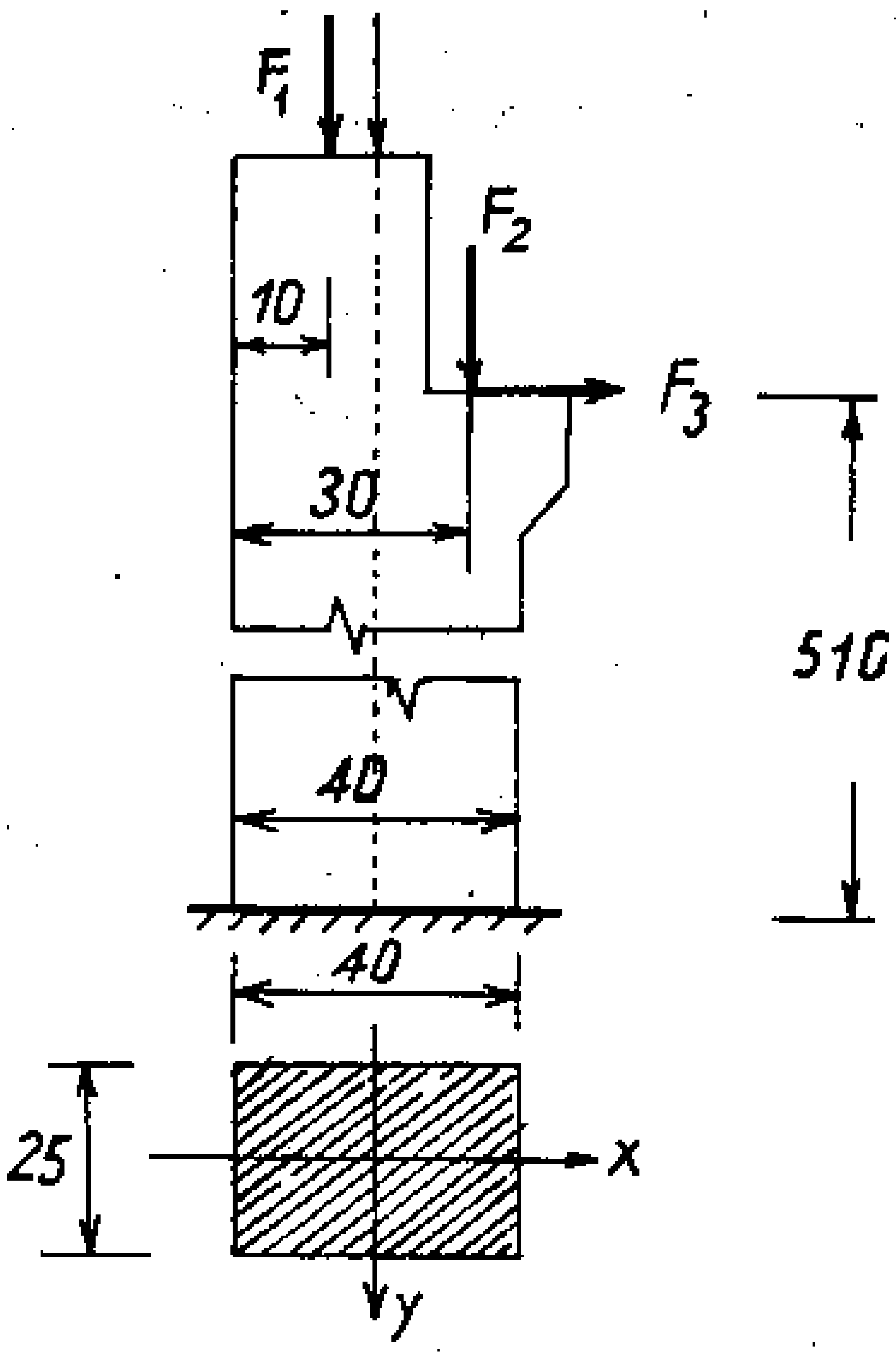
$$= (-0,148 \pm 0,2394)\ \text{kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{max} = -0,148 + 0,2394 =$$

$$= 0,0914\ \text{kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{min} = -0,148 - 0,2394 =$$

$$= -0,3874\ \text{kN/cm}^2.$$



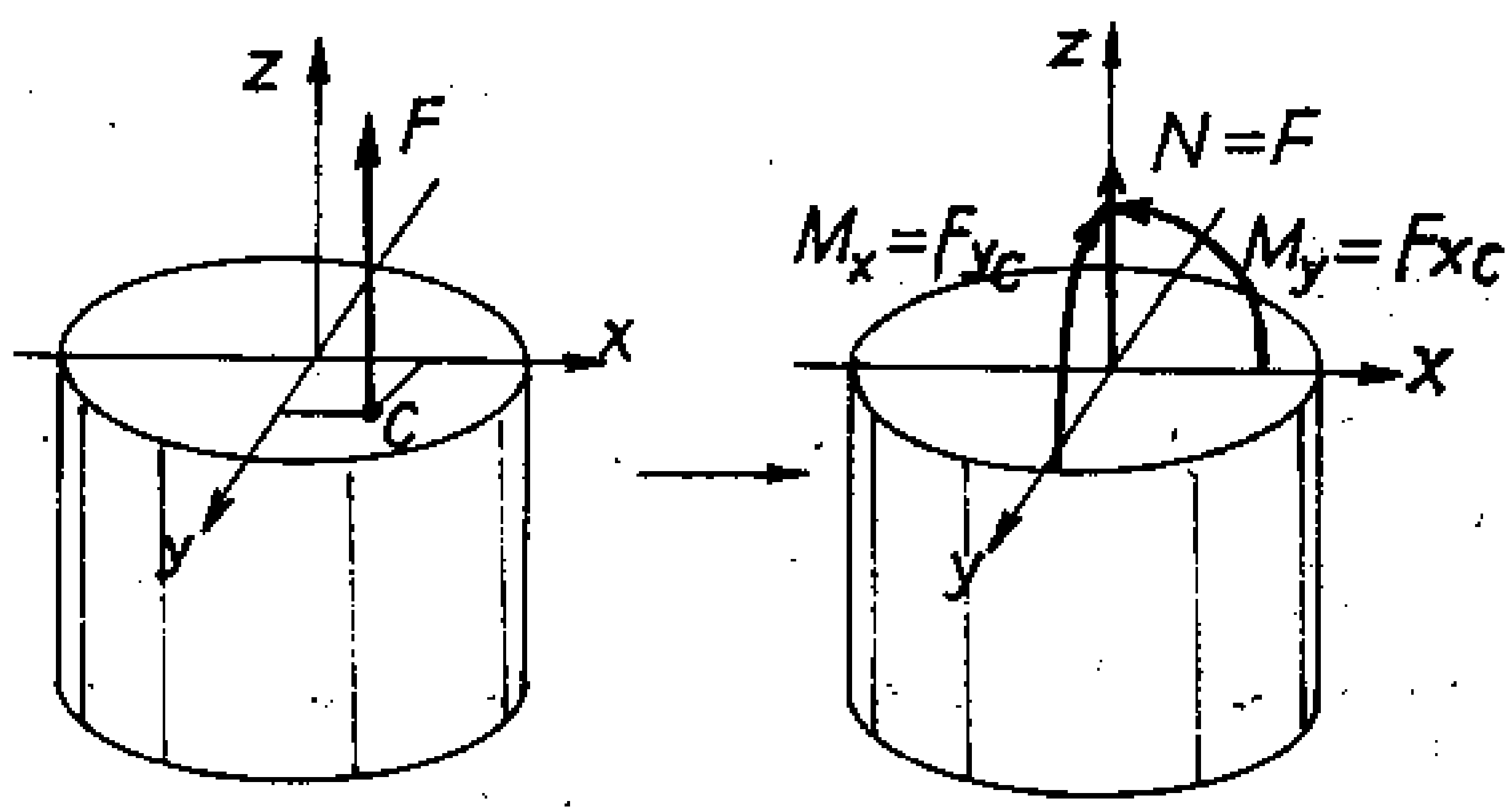

*Hình 8-11.* Cho ví dụ 8-2

# 8-4. THANH THẲNG CHỊU KÉO HOẶC NÉN LỆCH TÂM

## 8-4-1. Biểu thức ứng suất trên tiết diện

Thanh chịu kéo lệch tâm khi ngoại lực là những lực song song nhưng không trùng với trục thanh. Đây là trường hợp chịu lực thường gặp ở những cột, thanh chịu kéo nén vì hầu như ta không thể đặt lực đúng trọng tâm tiết diện.

*Hình 8-12.* Kéo lệch tâm và các nội lực tương ứng




Nếu trên tiết diện có lực $F$ đặt lệch tâm tại điểm $C(x_C, y_C)$ như trên hình 8-12, bằng cách chuyển lực về trọng tâm tiết diện, ta nhận được:

* lực dọc: $N = F$ ; (8-16)

* các mômen uốn: $M_x = F.y_C$ ; (8-17)

$M_y = F.x_C$ . (8-18)

Trong các biểu thức vừa nêu, $F>0$ khi là lực kéo, $x_C$, $y_C$ lấy dấu theo hệ toạ độ đã chọn.

Nếu trên tiết diện có nhiều lực $F_i$ đặt lệch tâm tại điểm tương ứng $C_i(x_{C_i}, y_{C_i})$, thì giá trị lực $F$ và điểm đặt $C$ được tính theo kết quả của hợp lực:

$$F = \sum F_i \; ; \qquad (8\text{-}19)$$

$$x_C = \frac{\sum F_i x_{C_i}}{\sum F_i}; \qquad y_C = \frac{\sum F_i y_{C_i}}{\sum F_i}. \qquad (8\text{-}20)$$

Với các ứng lực theo (8-16,17,18) ứng suất pháp trên tiết diện, theo (8-1) sẽ là:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{F}{A} + \frac{F y_C}{I_x} y + \frac{F x_C}{I_y} x .$$

Suy ra:

$$\sigma = \frac{F}{A}\left[1 + \frac{y_C y}{r_x^2} + \frac{x_C x}{r_y^2}\right], \qquad (8\text{-}21)$$

trong đó $r_x, r_y$ là các bán kính quán tính của tiết diện: $r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ ; $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$.

* Với tiết diện hình chữ nhật $b \times h$:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; \quad r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

* Với tiết diện hình tròn rỗng có đường kính ngoài $D$ đường kính trong $d$:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{64 \pi D^2 (1-\alpha^2)}} = \frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2},$$

trong đó ký hiệu $\alpha = d/D$.

* Bán kính quán tính của tiết diện các thép định hình tìm được ở bảng theo số hiệu thép.

Qua biểu thức tính ứng suất (8-21), ta có những nhận xét sau:

♦ Bài toán kéo (nén) lệch tâm có thể tính theo trường hợp kéo và uốn đồng thời, và ngược lại bài toán kéo và uốn đồng thời cũng có thể tính theo trường hợp kéo (nén) lệch tâm. Trong trường hợp sau, lực và điểm đặt lực sẽ được tính như sau:

$$F = N\,; \quad x_C = \frac{M_y}{N}; \quad y_C = \frac{M_x}{N}. \qquad (8\text{-}22)$$

♦ Định luật tác dụng tương hỗ: ứng suất pháp tại điểm $A$ do lực $F$ đặt tại điểm $C$ gây ra cũng bằng ứng suất pháp tại điểm $C$ do lực $F$ đặt tại điểm $A$ gây ra.

♦ Ứng suất pháp tại trọng tâm tiết diện do lực lệch tâm $F$ gây ra không phụ thuộc vào vị trí điểm đặt lực và luôn bằng $N/A$.

### 8-4-2. Đường trung hoà khi kéo (nén) lệch tâm

Phương trình đường trung hoà tìm theo điều kiện $\sigma = 0$; từ (8-21), ta có:

$$1 + \frac{y_C y}{r_x^2} + \frac{x_C x}{r_y^2} = 0 .$$

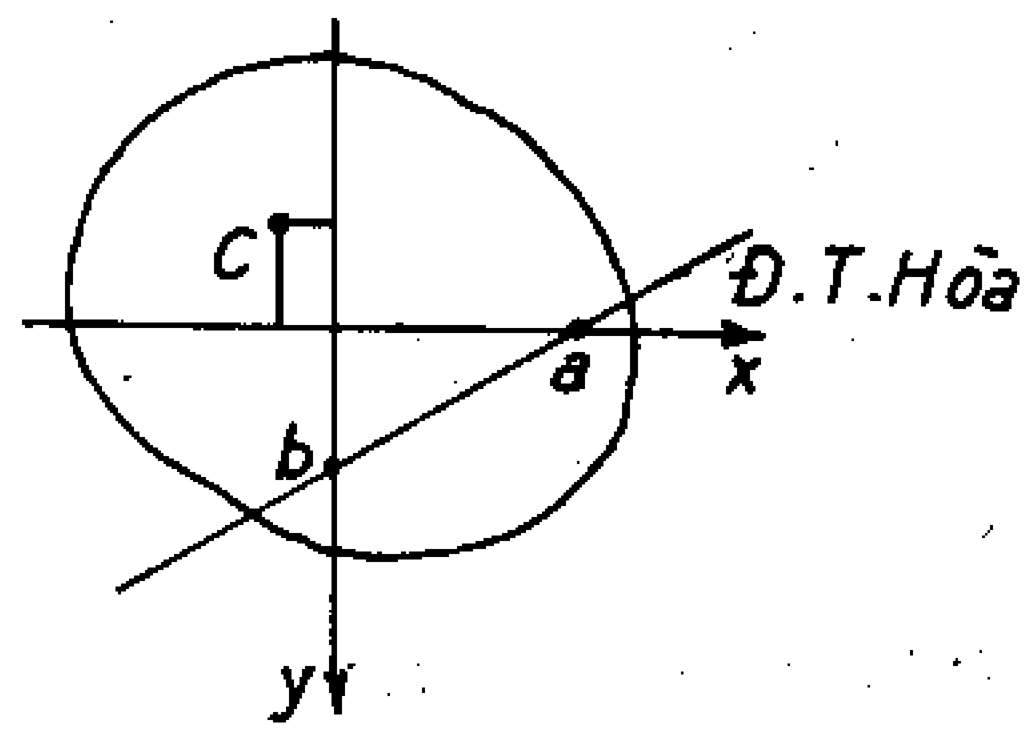
Nếu đặt: $$a = -\frac{r_y^2}{x_C}; \qquad b = -\frac{r_x^2}{y_C}, \qquad (8\text{-}22)$$

phương trình đường trung hoà sẽ có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 . \qquad (8\text{-}23)$$

Hai thông số $a$ và $b$ là hoành độ và tung độ của giao điểm của đường trung hoà với trục hoành và với trục tung như chỉ trên hình 8-13.

*Hình 8-13.* Vị trí đường trung hoà và điểm đặt lực C




Từ biểu thức (8-22) của $a$ và $b$ ta dễ dàng nhận thấy, ngoài những tính chất chung, đường trung hoà khi kéo (nén) lệch tâm còn có đặc điểm riêng sau:

1- Đường trung hoà không phụ thuộc giá trị của tải trọng mà chỉ phụ thuộc vị trí đặt tải trọng, đường trung hoà và điểm đặt lực luôn luôn nằm trong góc phần tư đối đỉnh của hệ trục toạ độ.

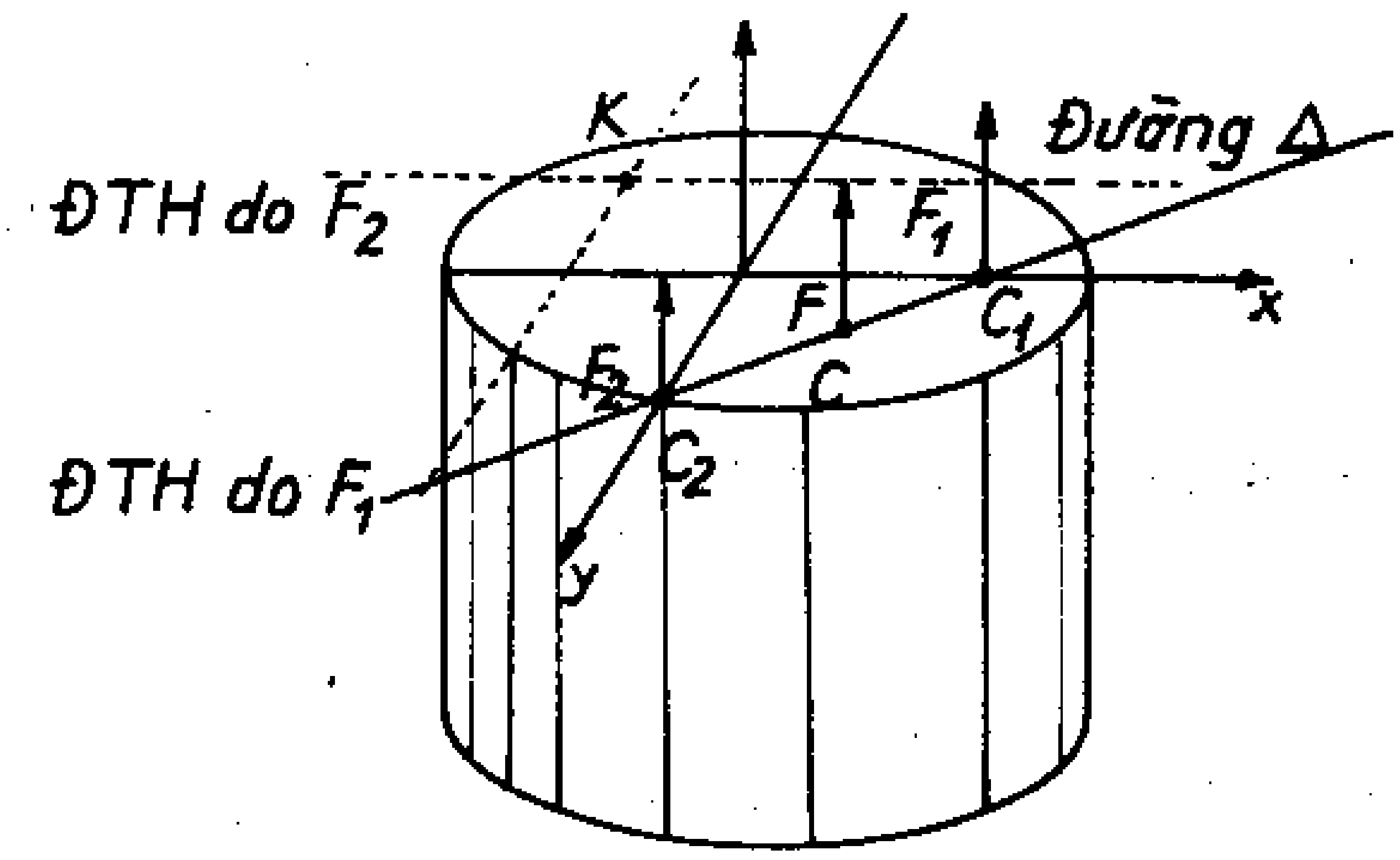
2- Điểm đặt lực nằm trên trục $x$ thì đường trung hoà nằm song song với trục $y$ và ngược lại.

3- Khi điểm đặt lực di chuyển theo một đường thẳng thì đường trung hoà sẽ xoay quanh một điểm trên tiết diện.

Tính chất này được chứng minh trên hình 8-14, trong đó ta giả thử điểm $C$ đặt lực $F$ di chuyển theo đường thẳng $\Delta$. Lực $F$ luôn luôn có thể phân ra thành hai thành phần $F_1$ và $F_2$:

* $F_1$ đặt tại điểm $C_1$ (giao điểm của $\Delta$ và trục $x$). Đường trung hoà tương ứng với lực $F_1$ sẽ song song với trục $y$ và có vị trí không đổi (vì điểm đặt lực $C_1$ không đổi).

* $F_2$ đặt tại điểm $C_2$ (giao điểm của $\Delta$ và trục $y$). Đường trung hoà tương ứng với lực $F_2$ sẽ song song với trục $x$ và có vị trí không đổi (vì điểm đặt lực $C_2$ không đổi).




*Hình 8-14.* Chứng minh tính chất 3 của ĐTH

Ứng suất trên tiết diện do lực $F$ gây ra sẽ bằng tổng của ứng suất do lực $F_1$ và của ứng suất do lực $F_2$. Tại giao điểm $K$ của hai đường trung hoà ứng suất pháp sẽ bằng không, do đó đường trung hoà do lực $F$ gây ra sẽ phải đi qua $K$. Vị trí điểm $K$ là cố định nên đường trung hoà sẽ xoay quanh $K$ khi $F$ di chuyển trên $\Delta$.

## 8-5. LÕI TIẾT DIỆN

Vị trí đường trung hoà tuỳ thuộc vị trí điểm đặt lực nên tồn tại hai khả năng về những vị trí đặt lực để sao cho:

* *đường trung hoà cắt qua tiết diện*, ứng suất trên tiết diện có hai dấu;

* *đường trung hoà nằm ngoài hoặc chỉ tiếp xúc với chu vi tiết diện*, ứng suất trên tiết diện chỉ có một loại dấu (phụ thuộc dấu lực dọc).

*Lõi tiết diện là một miền kín bao quanh trọng tâm tiết diện và thoả mãn tính chất sau: nếu lực lệch tâm đặt trong miền thì đường trung hoà nằm ngoài tiết diện, nếu lực đặt trên chu vi của miền thì đường trung hoà nằm tiếp tuyến với chu vi tiết diện.*

Như vậy, khi lực lệch tâm đặt trong phạm vi lõi thì ứng suất pháp tại mọi điểm trên tiết diện mang cùng một dấu, tuỳ theo lực đặt kéo hoặc nén.

Để xác định lõi của tiết diện, ta lần lượt cho đường trung hoà tiếp xúc với chu vi tiết diện tại một số điểm trên chu vi. Biết các trị số $a$, $b$ của mỗi đường trung hoà này, ta sẽ xác định được các điểm đặt lực $C(x_C, y_C)$ tương ứng theo (8-22)

$$x_C = -\frac{r_y^2}{a}; \qquad y_C = -\frac{r_x^2}{b}. \tag{8-24}$$

♦ Trường hợp tiết diện chữ nhật có các cạnh $B$ x $H$ như trên hình 8-15.

* Cho đường trung hoà nằm theo cạnh $AB$, xác định được $a = \infty$; $b = H/2$.

Theo (8-23), ta có điểm đặt lực tương ứng $C_1$ nằm trên trục $y$ có toạ độ

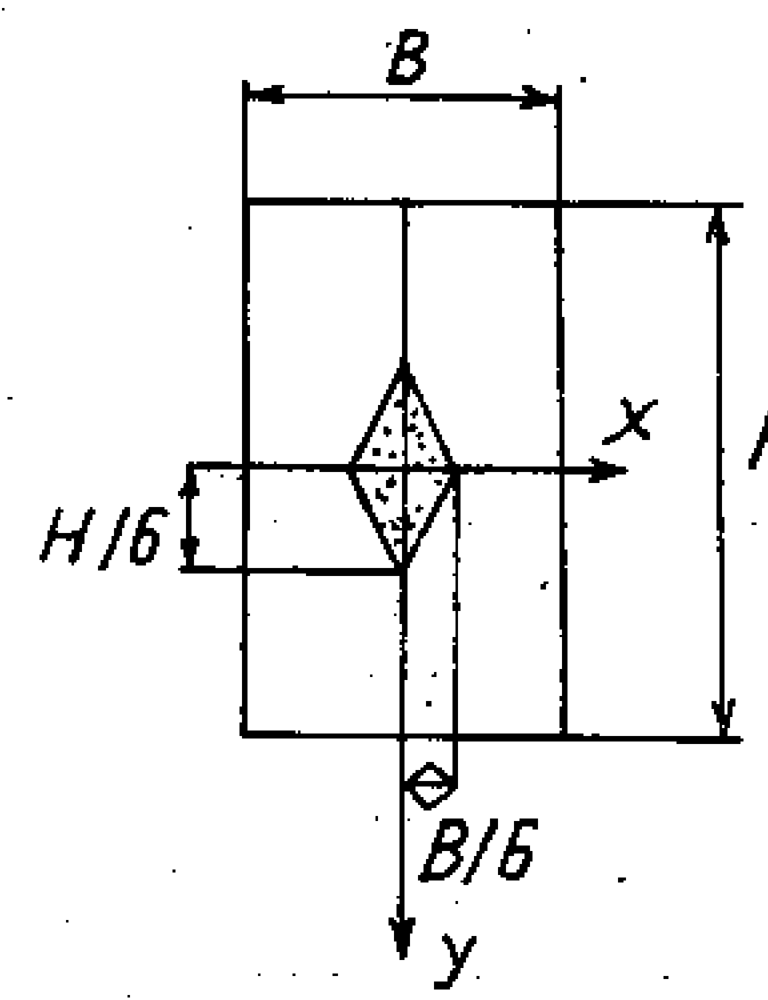
$$x_{C_1} = -\frac{r_y^2}{a} = 0 \quad ; \; y_{C_1} = -\frac{r_x^2}{b} = -\frac{H^2/12}{H/2} = -\frac{H}{6}.$$

* Cho đường trung hoà nằm theo cạnh $BC$, tương tự ta có điểm đặt lực $C_2$ nằm trên trục x có toạ độ $x_{C_2} = -\frac{B}{6}$, $y_{C_2} = 0$.

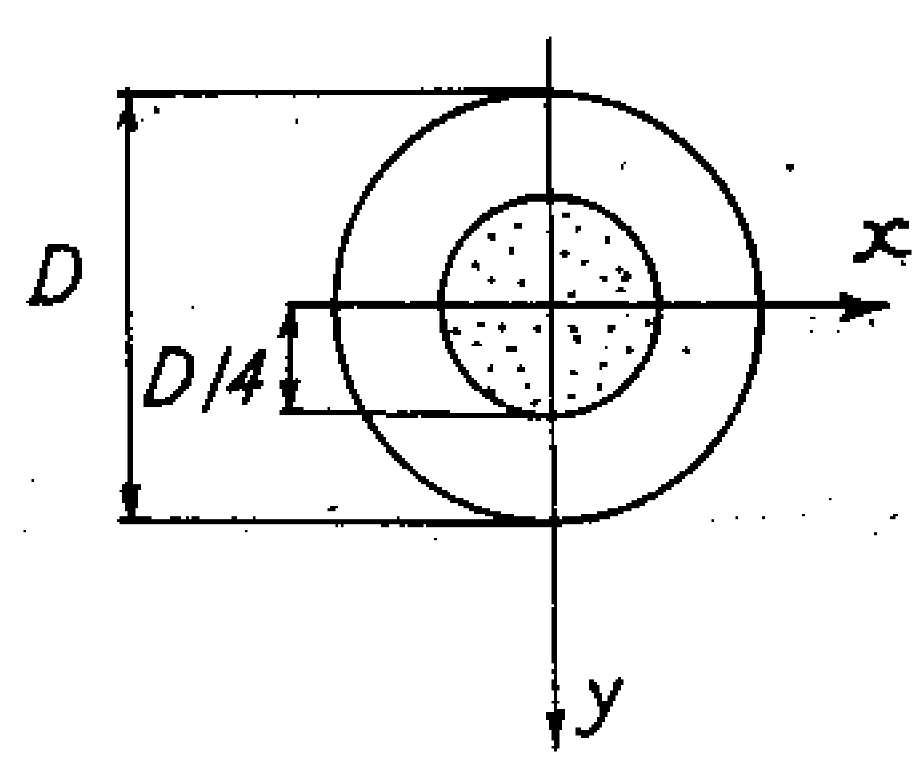
* Khi chuyển từ vị trí $AB$ đến $BC$, đường trung hoà xoay quanh điểm $B$ nên điểm đặt lực di chuyển theo một đường thẳng nối $C_1C_2$.

Do tính đối xứng ta vẽ được phần còn lại của chu vi lõi. Lõi là một hình thoi có các đường chéo bằng $H/3$ và $B/3$ như trên hình 8-15.

♦ Trường hợp tiết diện hình tròn đặc đường kính $D$, lõi cũng là một hình tròn có đường kính $D/4$ như trên hình 8-16.




*Hình 8-14.* Lõi tiết diện chữ nhật




*Hình 8-16.* Lõi tiết diện hình tròn

Sử dụng khái niệm về lõi tiết diện, ta có thể tìm được độ lệch tâm cho phép của một cột bằng vật liệu giòn chịu nén lệch tâm. Giả thiết lực nén đặt trên trục $x$ với độ lệch tâm $e$ như trên hình 8-17. Khi $e > h/6$ đường trung hoà song song với trục $y$ và cắt qua tiết diện, nếu cột được chế tạo bằng vật liệu không có khả năng chịu kéo thì phần tiết diện chịu kéo sẽ bị phá hoại, phần tiết diện chịu lực còn lại chỉ là $b$ x $h'$. Trọng tâm tiết diện di chuyển sang phía điểm đặt lực. Nếu khoảng cách

$(h/2) - e$ vẫn lớn hơn $h'/3$ thì lực vẫn đặt ngoài lõi của tiết diện chịu lực và trọng tâm vẫn chuyển dịch về phía điểm đặt lực, di chuyển chỉ dừng lại khi $h'/3 = (h/2) - e$ hoặc $h' = 3[(h/2) - e]$.

Trên phần tiết diện chịu lực còn lại có diện tích

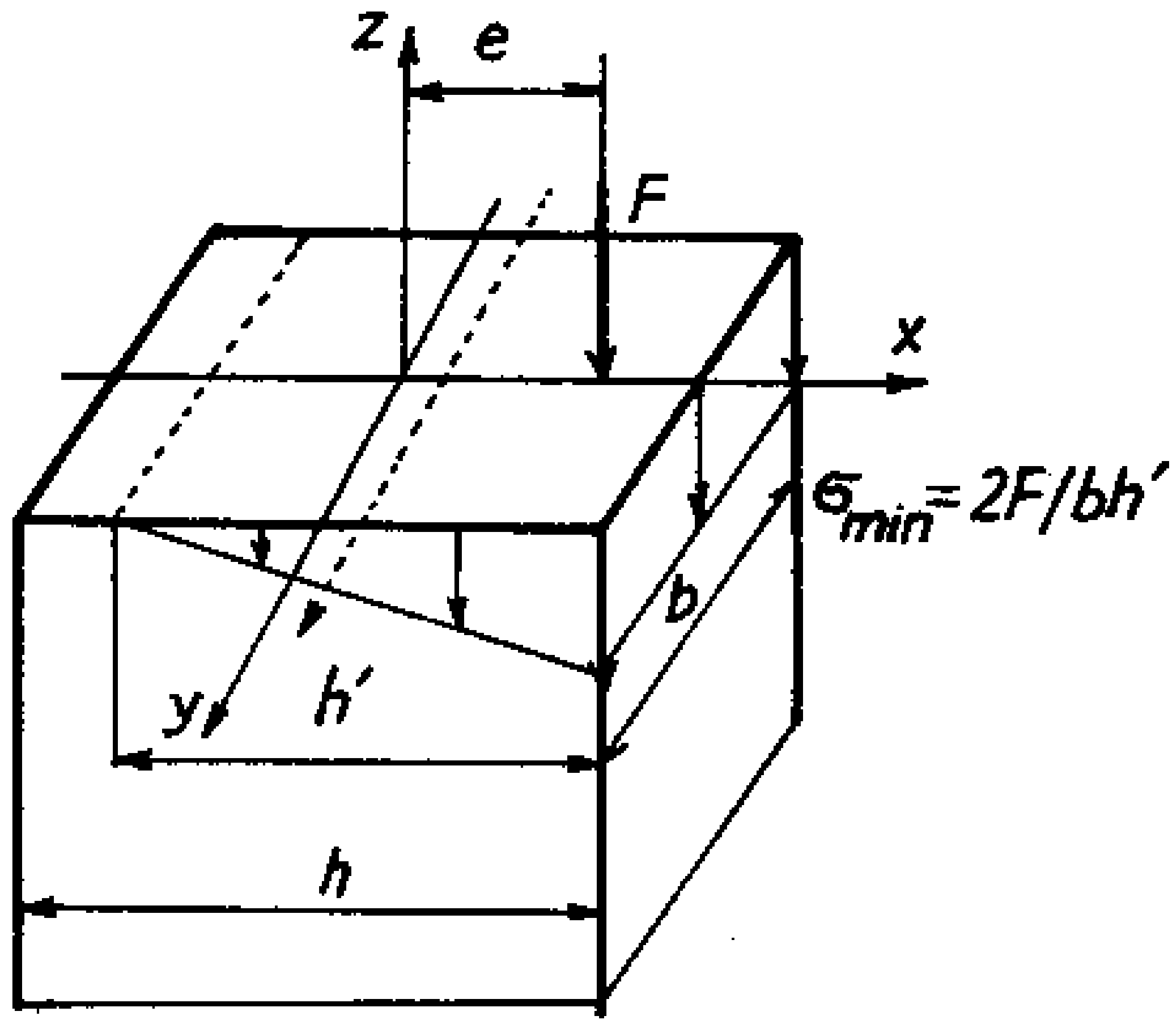
$A' = bh' = 3[(h/2) - e]$,

ứng suất pháp nén lớn nhất sẽ là

$$|\sigma_{min}| = 2\frac{F}{A'} = 2\frac{F}{bh'} = \frac{4}{3}.\frac{F}{b(h-2e)}.$$

Điều kiện bền

$$|\sigma_{min}| = \frac{4}{3}.\frac{F}{b(h-2e)} \le [\sigma]_n$$




*Hình 8-17.* Xác định độ lệch tâm cho phép

cho phép ta tìm được khoảng lệch tâm cho phép: $e \le \frac{h}{2} - \frac{2}{3}.\frac{F}{b[\sigma]_n}$.

## 8-6. THANH CHỊU UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Khi chịu xoắn, trên tiết diện thanh xuất hiện ứng suất tiếp.

♦ Với thanh có tiết diện tròn, ứng suất tiếp đạt cực trị $\tau_{max} = \frac{M_z}{W_P} = \frac{M_z}{2W_x}$ tại mọi điểm trên chu vi tiết diện, trong đó có điểm đạt $\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm\frac{M_u}{W_x}$. Thanh ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt, điều kiện bền viết theo các thuyết bền:

* thuyết bền ứng suất tiếp: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 4M_z^2}}{W_x} \le [\sigma]$;

* thuyết bền thế năng: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 3M_z^2}}{W_x} \le [\sigma]$.

♦ Với thanh có tiết diện chữ nhật, ứng suất tiếp đạt cực trị $\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{xo}}$ tại trung điểm cạnh dài (giả thử cạnh này song song trục $x$), tại đó ứng suất pháp đạt trị số $\sigma = \frac{M_x}{W_x}$.

Tại trung điểm cạnh ngắn, ứng suất tiếp đạt trị số $\tau_1 = \gamma\tau_{max} = \gamma\dfrac{M_z}{W_{xo}}$ và ứng suất pháp đạt giá trị $\sigma_1 = \dfrac{M_y}{W_y}$.

Điều kiện bền của thanh tại các điểm này cũng được viết theo các thuyết bền. Ngoài ra cũng vẫn cần thỏa mãn điều kiện bền theo ứng suất pháp tại các góc của tiết diện như khi thanh chỉ chịu uốn xiên

$$\left|\sigma_{\substack{max\\min}}\right| = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma].$$

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

8- 1. Nêu những ví dụ thực tế về thanh chịu lực phức tạp.

8- 2. Nêu các dạng ngoại lực chỉ gây ra từng trường hợp chịu lực đơn giản của thanh thẳng.

8- 3. Giải thích và nêu điều kiện áp dụng nguyên lý cộng tác dụng khi tính ứng suất và biến dạng của thanh chịu lực phức tạp.

8- 4. Phân loại bài toán phẳng và bài toán không gian khi thanh chịu lực phức tạp.

8- 5. Vì sao có thể nói thanh tiết diện tròn chỉ chịu uốn phẳng?

8- 6. Cách tính trị số ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện thanh chịu lực phức tạp khi tiết diện có hình dạng bất kỳ và khi tiết diện thanh có hình dạng đặc biệt như hình chữ nhật hoặc hình tròn.

8- 7. Nêu quan hệ giữa nội lực trong thanh với tải trọng tác dụng song song với trục thanh nhưng đặt lệch tâm (trường hợp một lực và trường hợp nhiều lực).

8- 8. Viết các biểu thức chứng tỏ rằng đường trung hoà trên tiết diện thanh chịu kéo (nén) lệch tâm chỉ phụ thuộc vị trí điểm đặt lực mà không phụ thuộc độ lớn của lực.

8- 9. Định nghĩa lõi của tiết diện. Vẽ lõi của tiết diện hình tròn, tiết diện hình chữ nhật.

8-10. Giải thích rằng: vì sao ta có thể tận dụng, tăng khả năng chịu lực của cột làm từ vật liệu giòn chịu nén lệch tâm khi sử dụng khái niệm lõi tiết diện?

# 9 Những vấn đề đặc biệt trong lý thuyết uốn và xoắn thanh

## *9-1. ỨNG SUẤT TIẾP KHI UỐN NGANG PHẲNG*

### *9-1-1. Công thức Juravski-Navier đối với tiết diện chữ nhật hẹp.*

Ứng lực trên tiết diện của dầm chịu uốn ngang phẳng, gồm có mô men uốn $M_x$ và lực cắt $Q_y$, nằm trong mặt phẳng quán tính chính $yz$ của thanh. Lực cắt $Q_y$ gây ra ứng suất tiếp. Đối với dầm có tiết diện chữ nhật hẹp $b \times h$, ta chấp nhận giả thiết ứng suất phân bố đều theo bề rộng $b$ của tiết diện và đã kết luận trong chương 7 là ứng suất tiếp có phương, chiều của lực cắt và được tính theo công thức Juravski-Navier

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b}, \qquad (9\text{-}1)$$

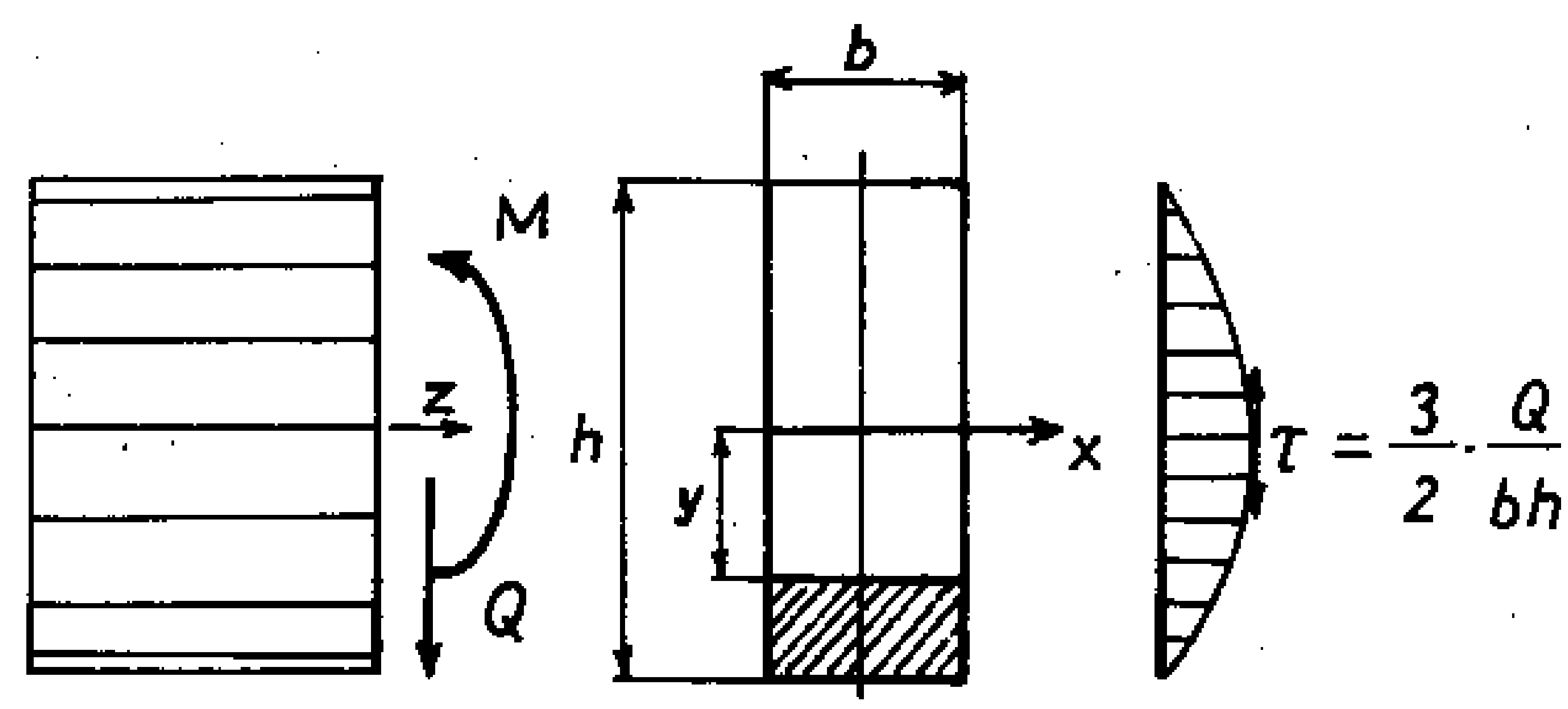
hoặc

$$\tau_y = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \qquad (9\text{-}2)$$

Trên hình 9.1 vẽ biểu đồ phân bố ứng suất tiếp $\tau_y$ theo chiều cao tiết diện. Biểu đồ đạt trị số lớn nhất tại những điểm nằm trên trục $x$:

$$\tau_{max} = \tau_0 = \frac{3}{2}.\frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2}.\frac{Q_y}{A}$$

với $A = bh$ là diện tích tiết diện.



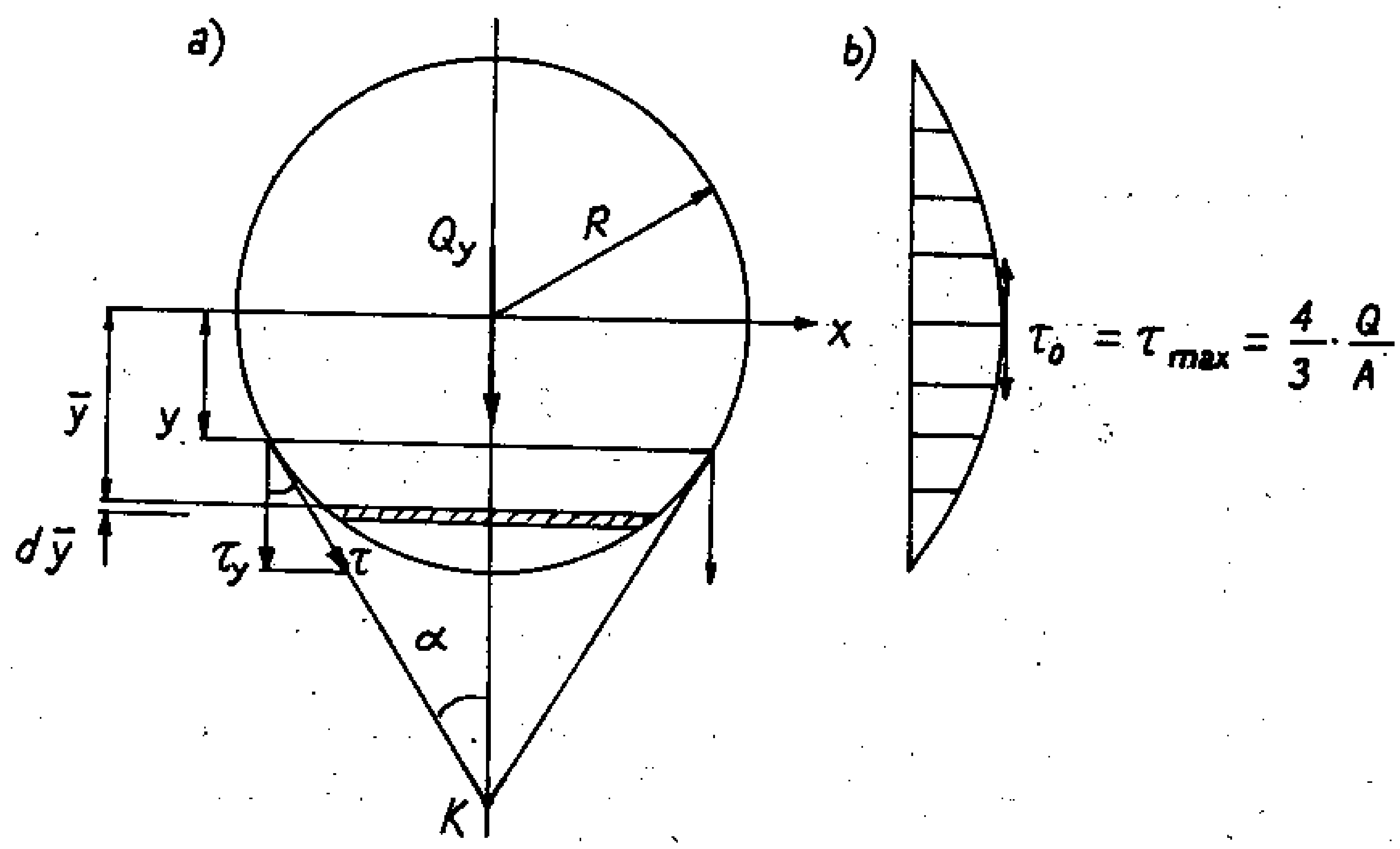

*Hình 9-1.* Biểu đồ ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật hẹp

### 9-1-2. *Mở rộng công thức Juravski cho tiết diện đặc không hẹp*

Khi tiết diện có bề rộng không hẹp, chẳng hạn hình vuông, hình tròn.., ứng suất tiếp trên tiết diện sẽ có hai thành phần: một thành phần theo phương $y$, ký hiệu $\tau_y$, và một thành phần theo phương $x$, ký hiệu $\tau_x$. Lý thuyết đàn hồi đã nghiên cứu biểu thức chính xác của các thành phần ứng suất này. Ở đây, chỉ nêu ra một vài biện pháp tính gần đúng dựa trên những nhận xét đơn giản.

Nếu chấp nhận giả thiết thành phần ứng suất tiếp $\tau_y$ phân bố đều trên bề rộng tiết diện thì theo cách chứng minh của công thức (9.1), ta vẫn có thể sử dụng công thức này để tính thành phần $\tau_y$. Sau khi biết $\tau_y$, trong một số trường hợp và chấp nhận thêm một vài giả thiết hợp lý, ta có thể tính được ứng suất tiếp toàn phần hoặc ứng suất tiếp thành phần $\tau_x$. Chẳng hạn, xét tiết diện hình tròn hoặc tam giác, tại hai mép của bề rộng $b$ ứng suất tiếp toàn phần sẽ có phương tiếp tuyến với chu vi tiết diện nên chúng đồng quy tại một điểm $K$. Một cách hợp lý, ta có thể giả thiết: tại những điểm còn lại trên bề rộng $b$, ứng suất tiếp toàn phần cũng đồng quy tại điểm $K$. Do đó, sau khi tính được $\tau_y$ theo công thức (9-1), ta có thể tính được $\tau_x$ hoặc $\tau$ toàn phần .

Cụ thể, ta hãy xác định ứng suất tiếp trên tiết diện tròn bán kính $R$ (hình 9-2a).




*Hình 9-2.* Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện tròn

Bề rộng $b$ tại điểm khảo sát: $$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Mômen quán tính của toàn tiết diện: $$I_x = \frac{\pi . R^4}{4}.$$

Mômen tĩnh của phần diện tích cắt: $S_x = \int_y^R 2\bar{y}\sqrt{R^2 - \bar{y}^2}\,d\bar{y}$.

Sau khi tích phân ta nhận được: $S_x = \frac{2}{3}(R^2 - y^2)^{3/2}$.

Theo công thức (9-1), thành phần ứng suất tiếp theo phương lực cắt sẽ là :

$$\tau_y = \frac{4Q}{3\pi R^4}(R^2 - y^2). \tag{9-3}$$

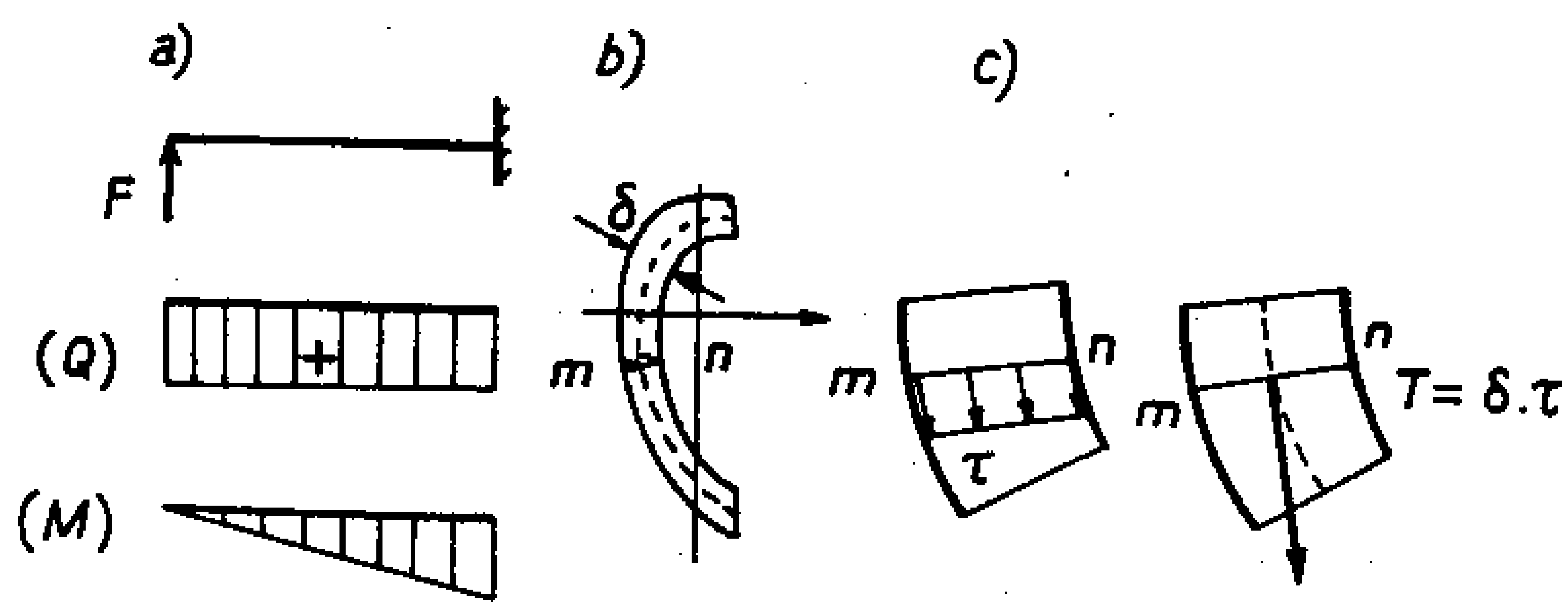
Trên hình 9-2b vẽ biểu đồ ứng suất tiếp $\tau_y$ theo công thức trên, với giá trị $\tau_{max}$ tại những điểm trên trục $x$ bằng:

$$\tau_o = \tau_{max} = \frac{4Q.R^2}{3\pi R^4} = \frac{4}{3}.\frac{Q}{A}$$

Ứng suất tiếp toàn phần tại hai mép tiết diện sẽ tiếp tuyến với chu vi tiết diện và có giá trị:

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos\alpha} = \tau_y\frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4Q}{3\pi R^4}\sqrt{R^2 - y^2}.$$

### *9-1-3. Ứng suất tiếp trên tiết diện có dạng dải chữ nhật hẹp*

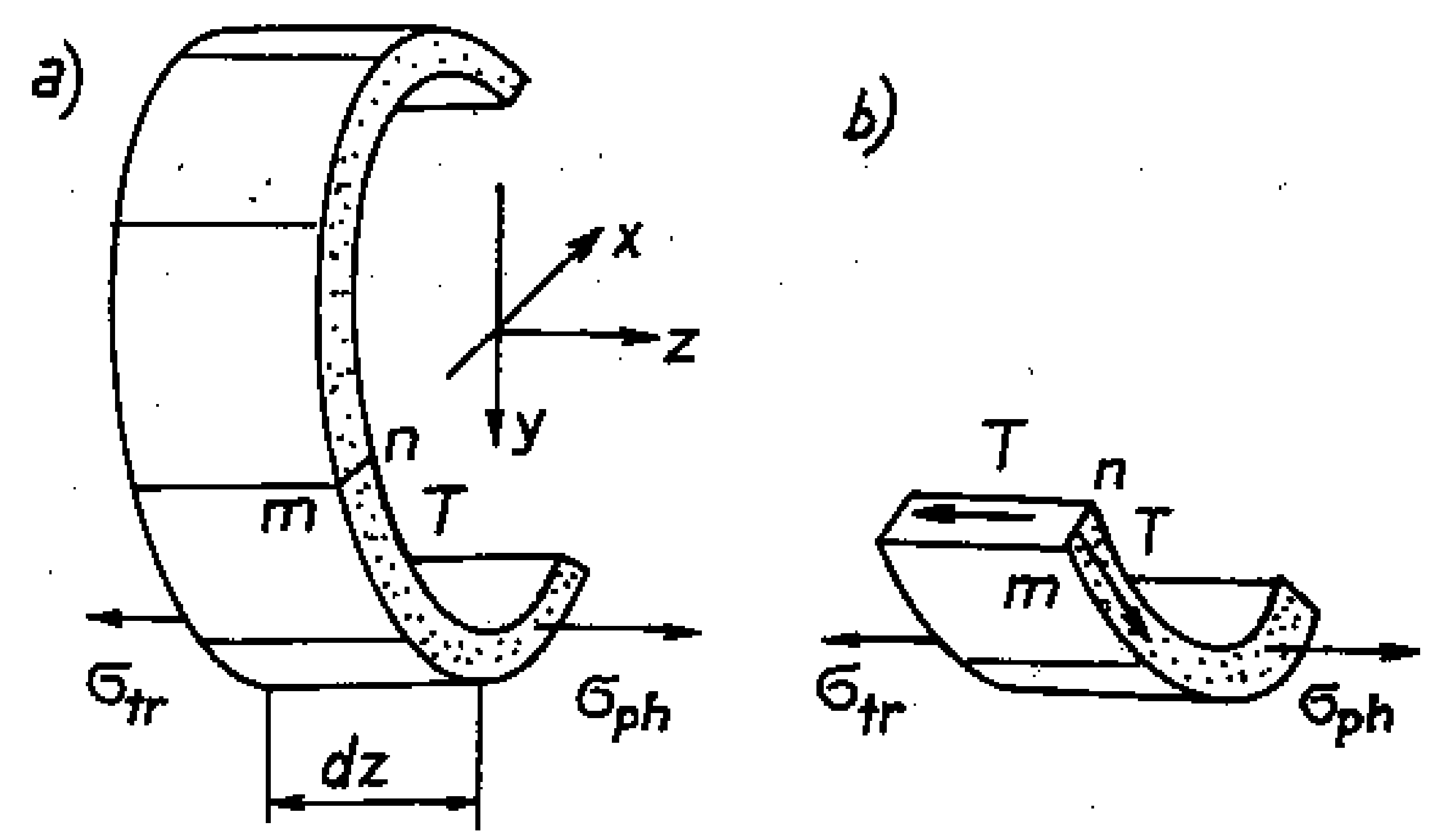



*Hình 9-3.* Ứng suất tiếp trên tiết diện giải chữ nhật

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng có tiết diện dạng dải chữ nhật hẹp như trên hình 9-3. Đường cách đều hai cạnh bên của tiết diện gọi là đường trung bình. Bề dầy $\delta$ của tiết diện là chiều dài đoạn thẳng vuông góc với đường trung bình và nằm trong phần tiết diện.

Khi bề dày $\delta$ nhỏ so với chiều dài đường trung bình, ta có thể giả thiết rằng ứng suất tiếp phân bố đều trên bề dầy và có phương trùng với tiếp tuyến của đường trung bình như chỉ trên hình 9-3c. Ký hiệu ứng suất tiếp này là $\tau$ thì hợp lực của chúng trên bề dầy $\delta$ là:

$$T = \delta.\tau \text{ [ Lực / chiều dài ] .} \tag{a}$$




*Hình 9-4.* Cân bằng của phân tố thanh

Xét một đoạn thanh có chiều dài $dz$ (hình 9-4a).

Tiết diện bên phải của phân tố có mômen uốn $M_x$, do đó, có ứng suất pháp:

$$\sigma_{ph} = \frac{M_x}{I_x} y .$$

Tiết diện bên trái có mômen uốn $(M_x - dM_x)$, do đó có ứng suất pháp:

$$\sigma_{tr} = \frac{M_x - dM_x}{I_x} y ,$$

$y$ là khoảng cách từ điểm tính ứng suất pháp tới trục trung hoà $x$.

Trên bề dày $m$-$n$ có hợp lực của ứng suất tiếp là $T$ nằm theo phương vuông góc với $m$-$n$.

Để tính $T$ ta viết điều kiện cân bằng của "phân tố con", tách ra từ phân tố thanh $dz$ và giới hạn bởi mặt phẳng song song với trục thanh đi qua bề dầy $m$-$n$ ( hình 9-4b). Trên mặt giới hạn đó, theo định luật đối ứng cuả ứng suất tiếp, hợp lực của ứng suất tiếp cũng có giá trị $T$ song song trục $z$ và vuông góc với $m$-$n$.

Phương trình cân bằng tổng các lực theo phương $z$

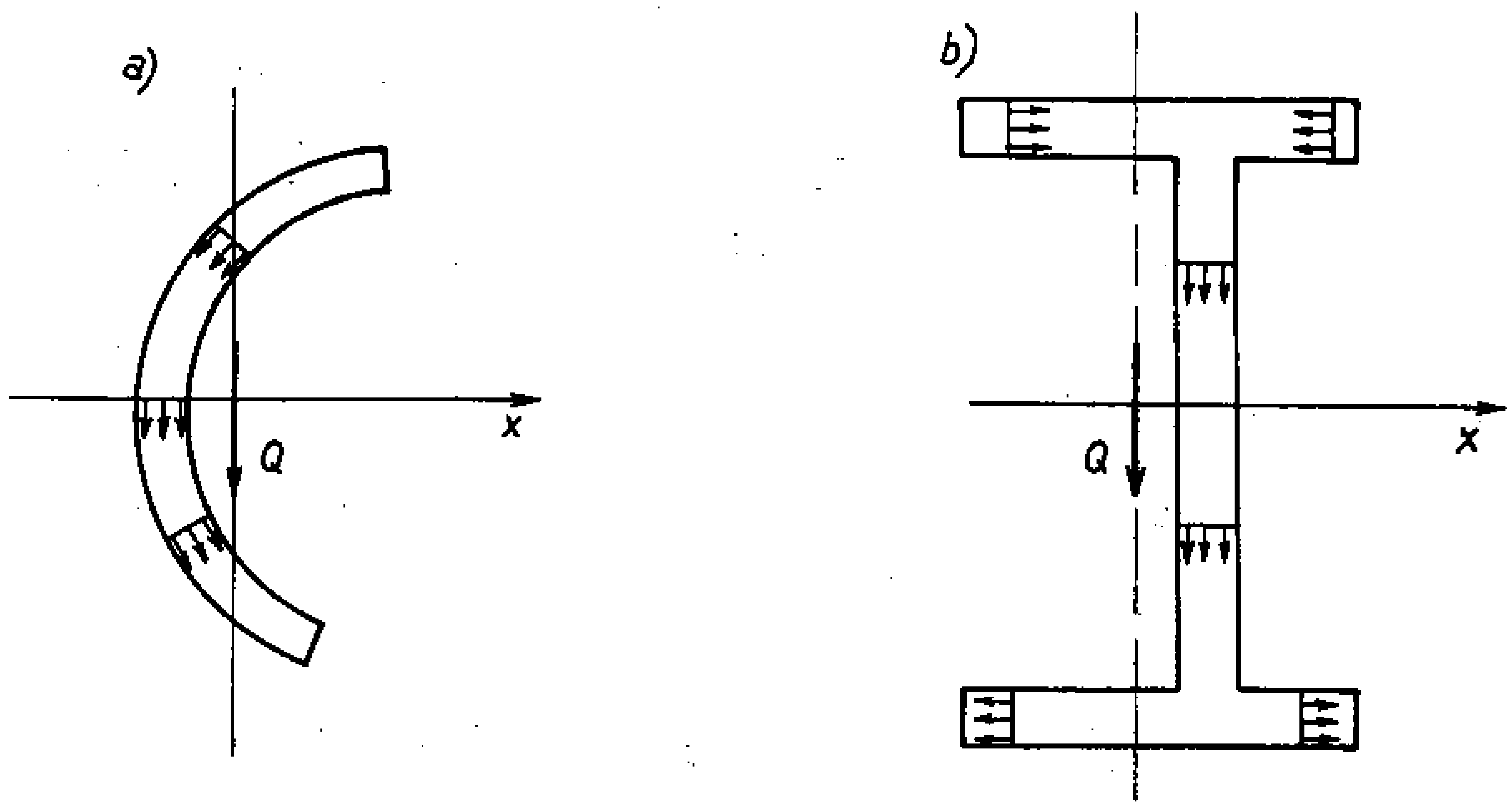
$$\int_{A_C} \sigma_{ph} dA - \int_{A_C} \sigma_{tr} dA - T dz = 0 ,$$

cho
$$T dz = \int_{A_C} (\sigma_{ph} - \sigma_{tr})\, dA = \int_{A_C} \left( \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_x - dM_x}{I_x} \right) dA$$

Suy ra
$$T = \frac{dM_x}{dz} . \frac{\int_{A_C} y dA}{I_x} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x} .$$

Thay vào biểu thức định nghĩa (a) của hợp lực $T$ ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp: $$\tau = \frac{Q\,S_x^c}{I_x\delta}. \qquad (9\text{-}4)$$

Ứng suất tiếp tính theo (9-4) tạo thành luồng phân bố đều trên bề dầy $\delta$, có phương song song với tiếp tuyến của đường trung bình, có chiều phù hợp với chiều của lực cắt $Q$ ( hình 9-5a).




*Hình 9-5.* Luồng ứng suất tiếp trên tiết diện

Từ sự phân bố của ứng suất tiếp, ta có nhận xét:

a- Theo định nghĩa, hợp lực của ứng suất tiếp sẽ bằng lực cắt, nên tổng của ứng suất tiếp chiếu theo phương $y$ sẽ có giá trị bằng lực cắt và điểm đặt của hợp lực các ứng suất tiếp trên toàn tiết diện sẽ trùng với điểm đặt của lực cắt $Q$.

b- Khi dầm chịu uốn ngang phẳng trong mặt phẳng $xz$ có lực cắt $Q_x$ thì ứng suất tiếp do $Q_x$ gây ra cũng đi thành luồng theo chiều $Q_x$ và tính theo biểu thức

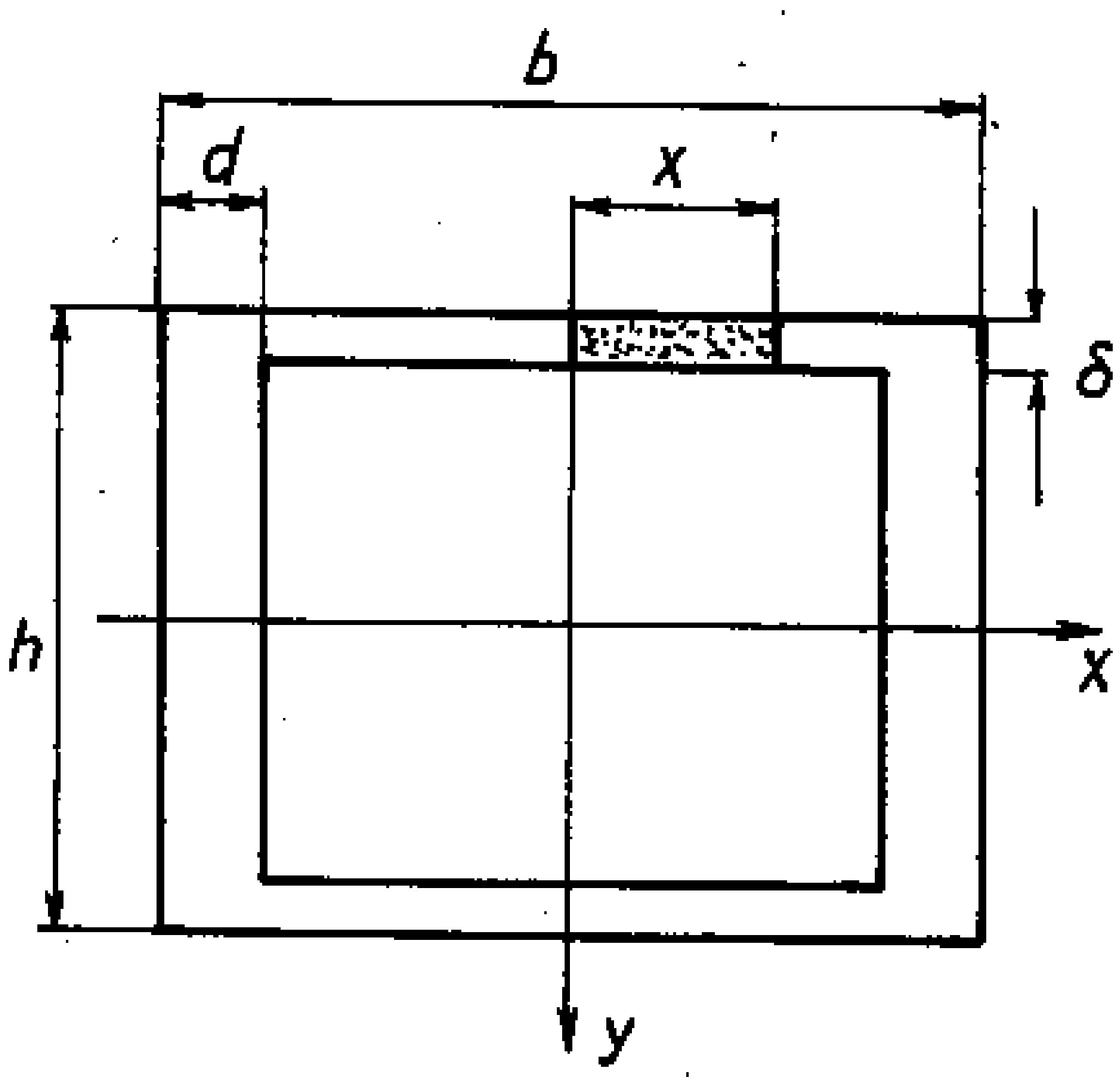
$$\tau = \frac{Q_x S_y^c}{I_y\delta}, \qquad (9\text{-}5)$$

$S_y^c$ là mômen tĩnh đối với trục $y$ của một phần tiết diện giới hạn bởi bề dầy $\delta$ đi qua điểm tính ứng suất.

c- Trong trường hợp uốn không gian có lực cắt $Q_x$ và $Q_y$ thì ứng suất tiếp toàn phần sẽ bằng tổng đại số của các ứng suất tiếp do $Q_x$ và $Q_y$ gây ra riêng rẽ vì các ứng suất thành phần này cùng chiều.

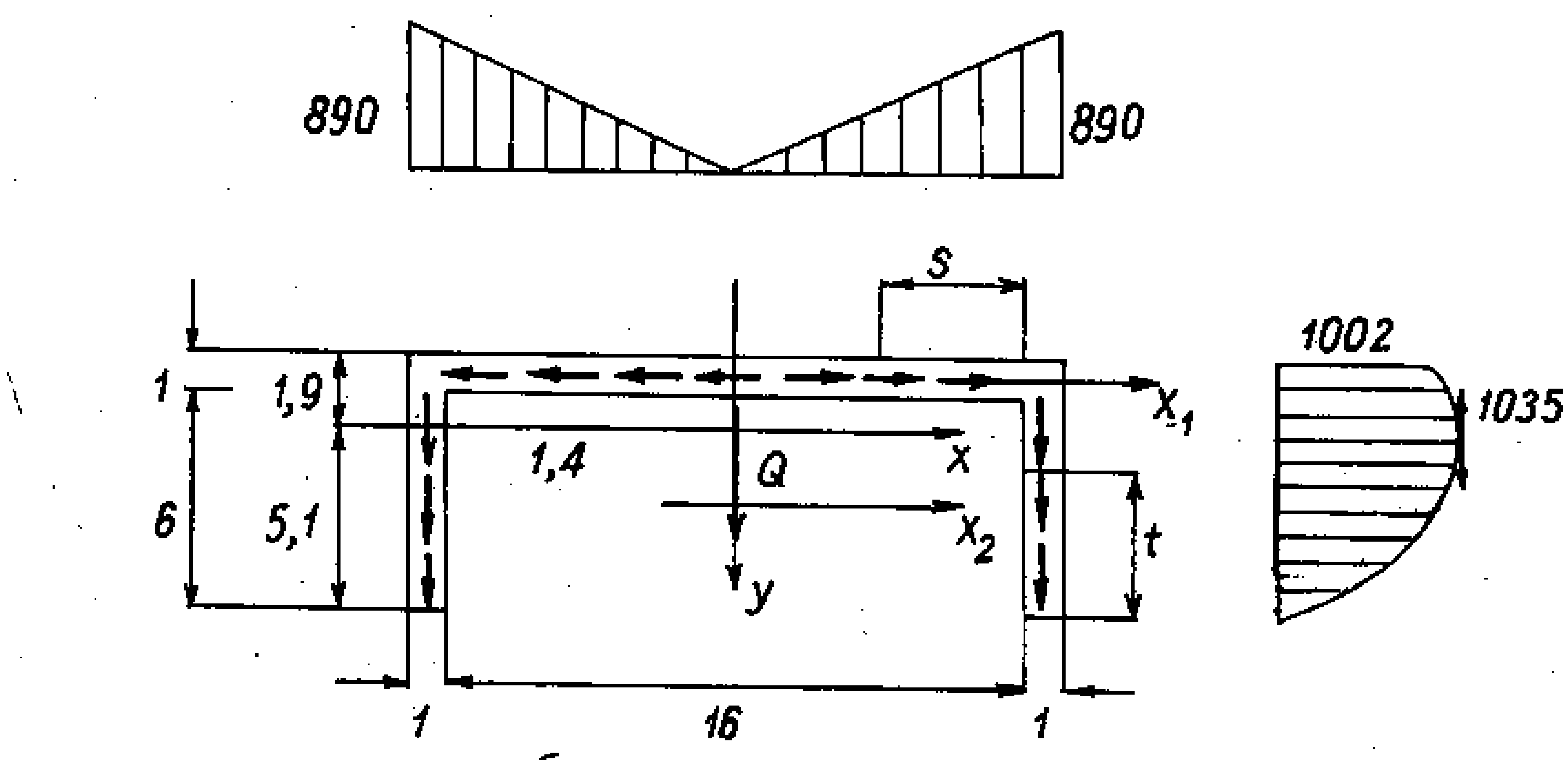
d- Với tiết diện mỏng kín ta vẫn có thể áp dụng công thức trên nhưng diện tích cắt sẽ lấy là phần diện tích giới hạn bởi một bề rộng đi qua điểm đang xét và một bề rộng đi qua một điểm nào đó đã biết giá trị của ứng suất tiếp. Ví dụ với hình chữ nhật rỗng có hai trục đối xứng, để tính ứng suất tiếp trên phần diện tích nằm ngang, ta có thể lấy diện tích cắt như trên hình 9-6 vì tại tiết diện đối xứng trên trục $y$, ứng suất tiếp sẽ bằng không (do tính phản xứng của ứng suất tiếp). Trong công thức (9-4) ta sẽ lấy:

$$S_x^c = A^c y_c = A^c \frac{h}{2} = x\delta\left(\frac{h}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \approx \frac{h\delta}{2} x, \quad (0 \le x \le \frac{b-d}{2}).$$




*Hình 9-6.* Diện tích cắt khi tính ứng suất tiếp trên tiết diện mỏng kín

**Ví dụ 9.1**. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp cho tiết diện có kích thước như trên hình 9-7 chịu lực cắt $Q_y = 10000$ N (kích thước ghi theo cm).




*Hình 9-7.* Cho ví dụ 9-1

Trong hệ trục ban đầu $x_1y$, trọng tâm của tiết diện có tung độ:

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{2.6.1.3,5}{18.1 + 2.6.1} = 1,4 \text{ cm}.$$

Hệ trục quán tính chính trung tâm $xy$ có:

$$\bar{I}_x = \frac{18.1^3}{12} + 1,4^2.18 + 2\frac{1.6^3}{12} + 2(3,5-1,4)^2 6 = 125,7 \text{ cm}^4.$$

Ở phần cánh đứng, tại điểm có tọa độ $t$ $(0 \le t \le 6)$:

$$S_x^c = 1.t.\left(5,1 - \frac{t}{2}\right) = 5,1t - \frac{t^2}{2} \;;$$

$$\tau = \frac{Q\,S_x^c}{I_x.\delta} = \frac{10000}{125,7.1}\left(5,1t - \frac{t^2}{2}\right) \text{ N/cm}^2.$$

Khi $t = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = 0;$

$t = 6 \quad \rightarrow \quad \tau = 1002$ N/cm$^2$;

$t = 5,1 \quad \rightarrow \quad \tau = \tau_{max} = 1035$ N/cm$^2$.

Ở phần cánh nằm ngang, tại điểm có toạ độ $s$ $(0 \le s \le 16)$:

$$S_x^c = 7.1.(3,5-1,9) + s.1.1,4 = 11,2 - 1,4\,s \text{ cm}^3.$$

$$\tau = \frac{Q\,S_x^c}{I_x.\delta} = \frac{10000}{125,7.1}(11,2-1,4s) \text{ N/cm}^2.$$

Khi $s = 0 \quad \rightarrow \quad \tau = 890$ N/cm$^2$;

$s = 8 \quad \rightarrow \quad \tau = 0$;

$s = 16 \quad \rightarrow \quad \tau = -890$ N/cm$^2$.

Biểu đồ và chiều của ứng suất tiếp cho trên hình 9-7.

*Ghi chú*: Tại góc của tiết diện, ứng suất tiếp sẽ có cả các thành phần theo phương $x$ và phương $y$ và không tính theo các biểu thức (9-4), (9-5) ở trên. Tại các góc này có hiện tượng tập trung ứng suất do sự thay đổi đột ngột của tiết diện. Hiện tượng này được nghiên cứu bằng phương pháp thực nghiệm hoặc theo Lý thuyết đàn hồi.

Để đơn giản trong tính toán và không mắc sai số lớn, ta có thể tính và vẽ biểu đồ ứng suất theo đường trung bình ($0 \le t \le 6,5$ và $-0,5 \le s \le 17$).

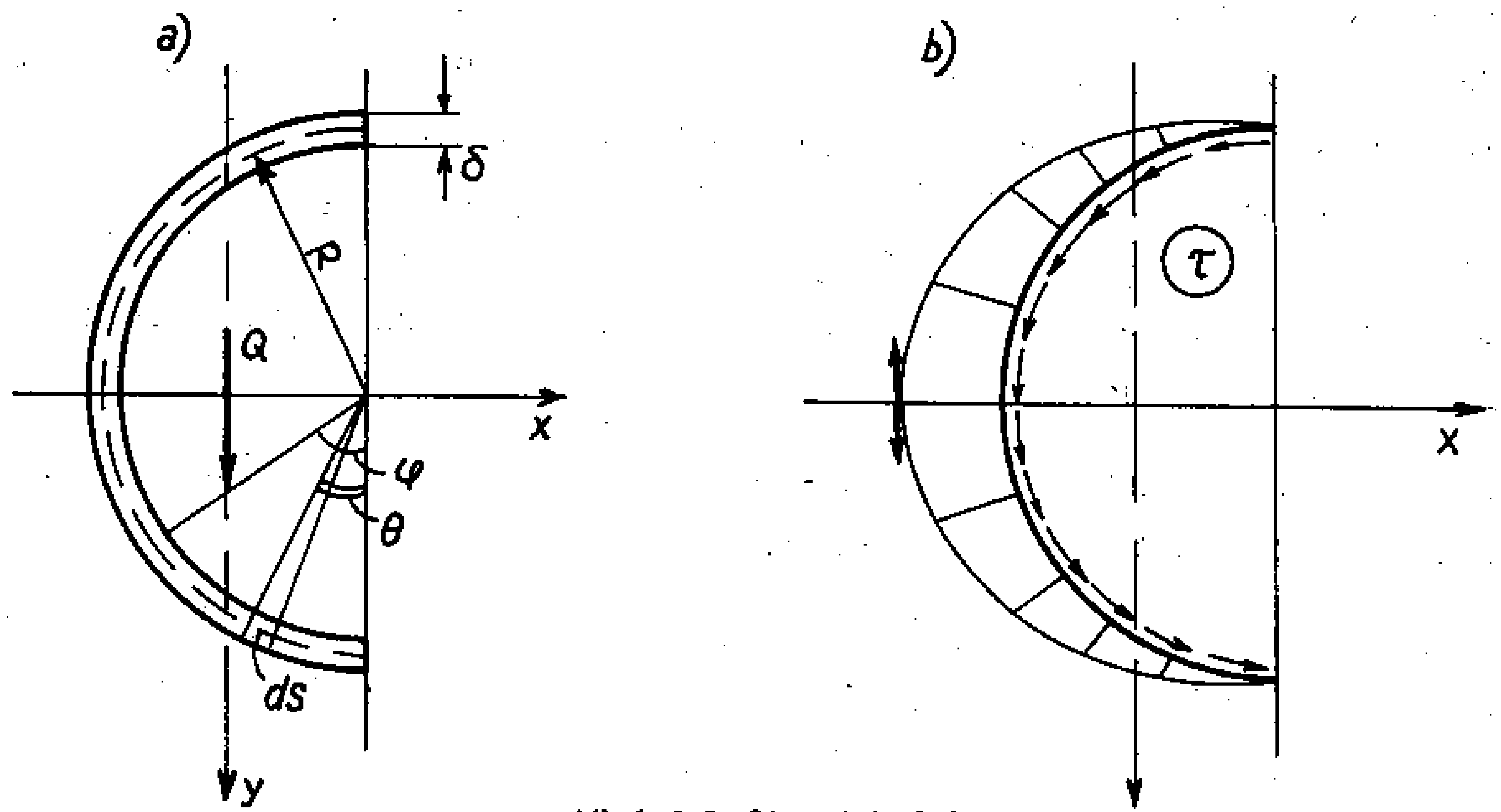
***Ví dụ 9.2***. Vẽ biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện là một nửa hình vành khăn (hình 9-8a) với bán kính trung bình $R$, bề dầy $\delta$ và chịu lực cắt $Q_y$. Cho biết $\delta << R$.

*Bài giải.*

Diện tích phân tố tại toạ độ $\theta$: $\quad dA = \delta.ds = \delta.R.d\theta.$

Khoảng cách từ phân tố đến trục $x$ $\quad y = R.\cos\theta.$

Theo định nghĩa $\quad I_x = \int_0^{\pi} R^2.\cos^2\theta.\delta.R.d\theta = \dfrac{\pi.\delta.R^3}{2}.$




*Hình 9-8.* Cho ví dụ 9-2

Xét ứng suất trên bề dầy $\delta$ ở toạ độ $\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi)$, diện tích cắt sẽ là phần trong giới hạn $0 \le \varphi \le \pi$, do đó :

$$S_x^c = \int_{A_C} ydA = \int_0^{\varphi} R\cos\theta.\delta R d\theta = \delta R^2 \sin\varphi .$$

$$\tau = \frac{Q S_x^c}{I_x.\delta} = \frac{2Q}{\pi\delta^2 R^3}\delta R^2 \sin\varphi = \frac{2Q}{\pi\delta R}\sin\varphi .$$

Tại $\varphi = 0$ và $\varphi = \pi \rightarrow \quad \tau = 0;$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \quad \tau = \tau_{max} = \frac{2Q}{\pi.\delta.R} = 2\tau_{th} \text{ với } \tau_{th} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi.\delta.R} .$$

Biểu đồ trình bày trên hình 9-8b.

## 9-2. TÂM UỐN

Trên tiết diện thanh mỏng chịu uốn ngang phẳng sẽ xuất hiện luồng ứng suất tiếp.

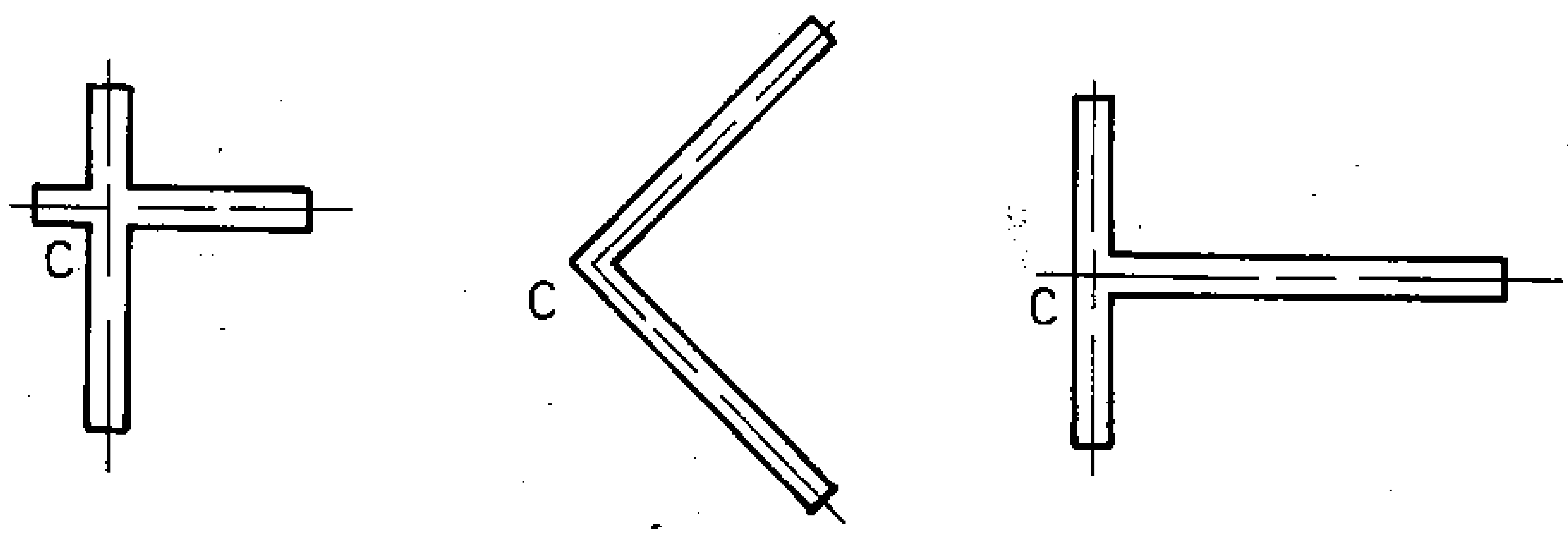
Nếu thanh chịu uốn trong mặt phẳng đối xứng của tiết diện thì luồng ứng suất tiếp có hợp lực đặt trên trục đối xứng. Tải trọng ngang gây uốn cũng nằm trong mặt phẳng đối xứng, đi qua trọng tâm, trên tiết diện sẽ không xuất hiện mômen xoắn, đúng với định nghĩa uốn phẳng.

Khi thanh chịu uốn trong mặt phẳng không đối xứng của tiết diện, hoặc tiết diện không có trục đối xứng, thì mômen của luồng ứng suất tiếp đối với trọng tâm sẽ khác không (xem hình 9-5a). Nếu đường tải trọng trùng với trục quán tính chính trung tâm, không gây mômen với trọng tâm thì tiết diện không cân bằng về mômen xoắn, thanh sẽ chịu thêm một sự xoắn phụ do luồng ứng suất tiếp gây ra. Thanh chịu tải trọng uốn ngang phẳng nhưng lại kèm thêm hiện tượng xoắn. Để tránh sự xoắn phụ này, tải trọng ngang cũng cần tạo ra một mômen cân bằng với mômen của luồng ứng suất tiếp. Muốn thế, đường tải trọng phải lệch khỏi trọng tâm tiết diện. Giao điểm của đường tải trọng này với trục $x$ được gọi là *tâm uốn.* Điều kiện cân bằng của mômen trong mặt phẳng tiết diện sẽ cho phép ta xác định được vị trí của tâm uốn.

Nếu tiết diện có trục đối xứng và chịu uốn trong mặt phẳng chứa trục đối xứng này thì tâm uốn sẽ là trọng tâm tiết diện.

Nếu tiết diện gồm các giải chữ nhật đồng quy tại một điểm thì tâm uốn chính là điểm đồng quy $C$ vì rằng luồng ứng suất tiếp của các giải không gây ra mômen với điểm đồng quy (xem hình 9-9).

Tâm uốn là một hiện tượng cần được quan tâm khi sử dụng các thanh có tiết diện thành mỏng và được S.P.Timoshenko nhận xét đầu tiên vào năm 1913 khi nghiên cứu sự uốn xoắn của thanh lăng trụ.




*Hình 9-9.* Tâm uốn của tiết diện gồm các giải chữ nhật đồng quy

***Ví dụ 9-3***. Xác định tâm uốn của tiết diện cho trên hình 9-10 chịu lực cắt $Q_y$.

*Bài giải*. Giả sử luồng ứng suất tiếp có chiều như trên hình vẽ. Hợp lực ứng suất tiếp ở phần cánh trên và cánh dưới có giá trị bằng nhau và ký hiệu là $T$, hợp lực ứng suất tiếp ở phần bản bụng ký hiệu $R$. Điểm có mômen do các hợp lực này gây ra bằng không, chính là tâm uốn $C$, ở khoảng cách $e$ so với hợp lực $R$ sẽ thoả mãn điều kiện

$$Re - 2T\frac{h}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad e = \frac{Th}{R}$$

Ta hãy tính $T$ theo giá trị ứng suất tiếp trên phần cánh ở toạ độ $t$ $(0 \le t \le b)$

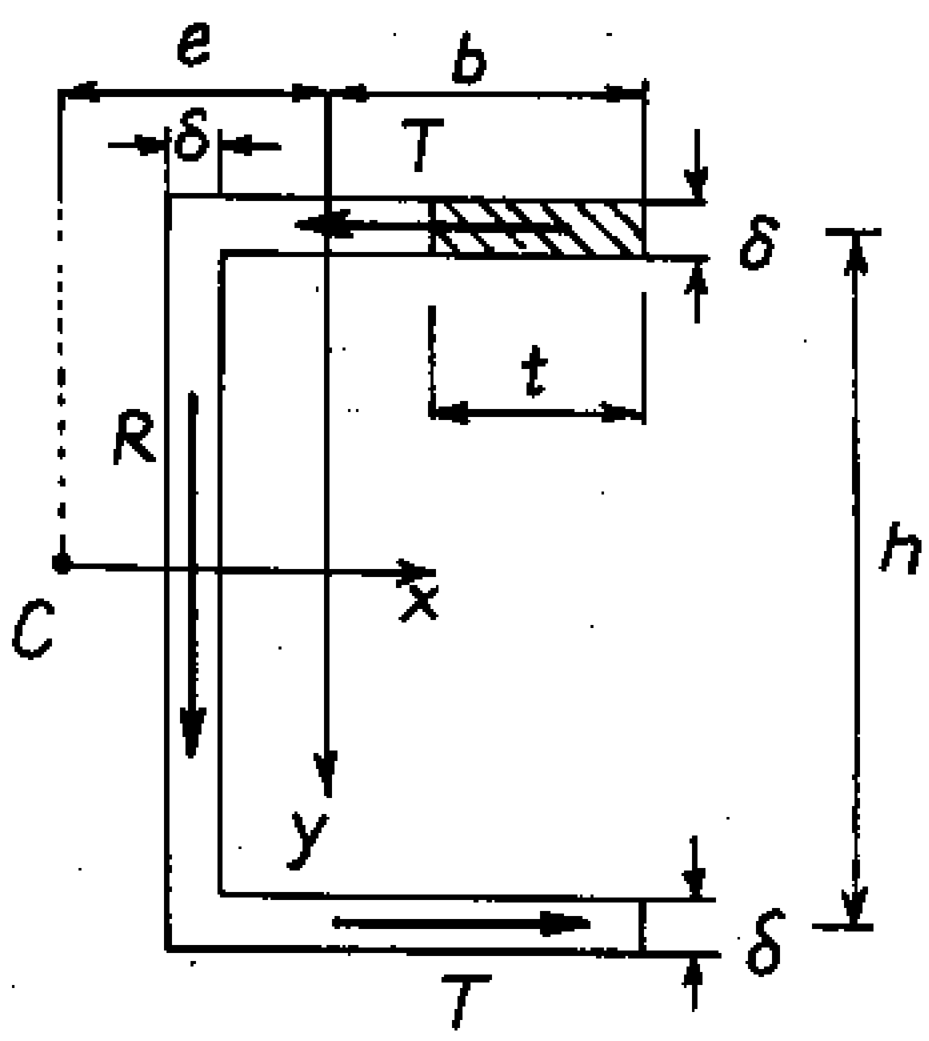
$$\tau = \frac{QS_x^c}{I_x.\delta} = \frac{Q_y}{I_x.\delta}.\delta.t.\frac{h}{2} \quad \rightarrow \quad T = \int_0^b \tau.\delta.dt = \frac{Q.h.\delta}{2I_x}\int_0^b t.dt = \frac{Q.h.\delta.b^2}{4I_x}.$$

Hợp lực $R$ là tổng hình chiếu theo phương $y$ của toàn bộ ứng suất tiếp trên tiết diện. Theo định nghĩa về hợp lực của nội lực, lực $R$ có giá trị bằng lực cắt.

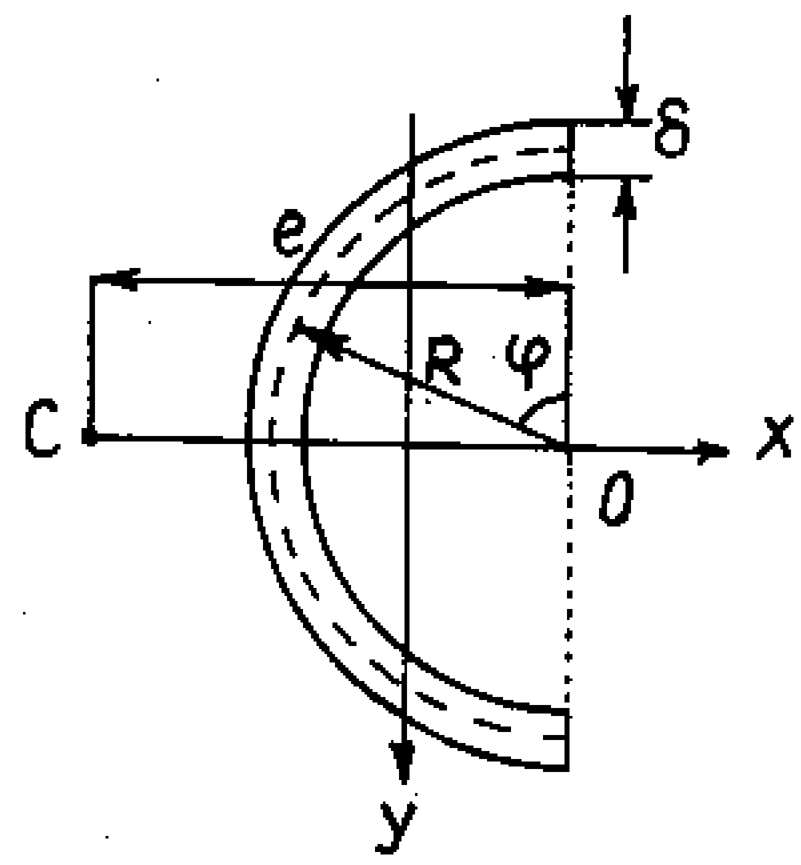
Do đó: $$e = \frac{Th}{R} = \frac{Qh^2\delta b^2}{4I_xQ} = \frac{\delta h^2 b^2}{4I_x}.$$

Với $\delta << b$ và $h$, trong tính toán thông thường ta có thể lấy gần đúng:

$$I_x = \frac{\delta_1 h^3}{12} + 2\left(\frac{h}{2}\right)^2 \delta b = \frac{\delta_1 h^3}{12} + \frac{\delta bh^3}{2}.$$




*Hình 9-10.* Cho ví dụ 9-3




*Hình 9-11.* Cho ví dụ 9-4

Ví dụ 9-4. Tìm tâm uốn của tiết diện dạng một nửa hình vành khăn chịu uốn trong mặt phẳng vuông góc với trục đối xứng (hình 9-11).

Bài giải. Mômen đối với điểm $O$ (tâm vòng tròn) sẽ là:

$$M = \int_A \tau R dA = \int_A \tau R\delta\, ds = \int_0^\pi \tau R\delta\, Rd\varphi = \int_0^\pi \frac{2Q}{\pi\delta R} \sin\varphi R^2 \delta\, d\varphi = \frac{4RQ}{\pi}.$$

Mômen này phải cân bằng với mômen của tải trọng đặt ở tâm uốn ở khoảng cách $e$, tính từ điểm $O$ về phía trái. Giá trị của tải trọng tại mặt cắt đang xét sẽ bằng giá trị lực cắt $Q$, vậy mômen của tải trọng với điểm $O$ là $Qe$. Do đó:

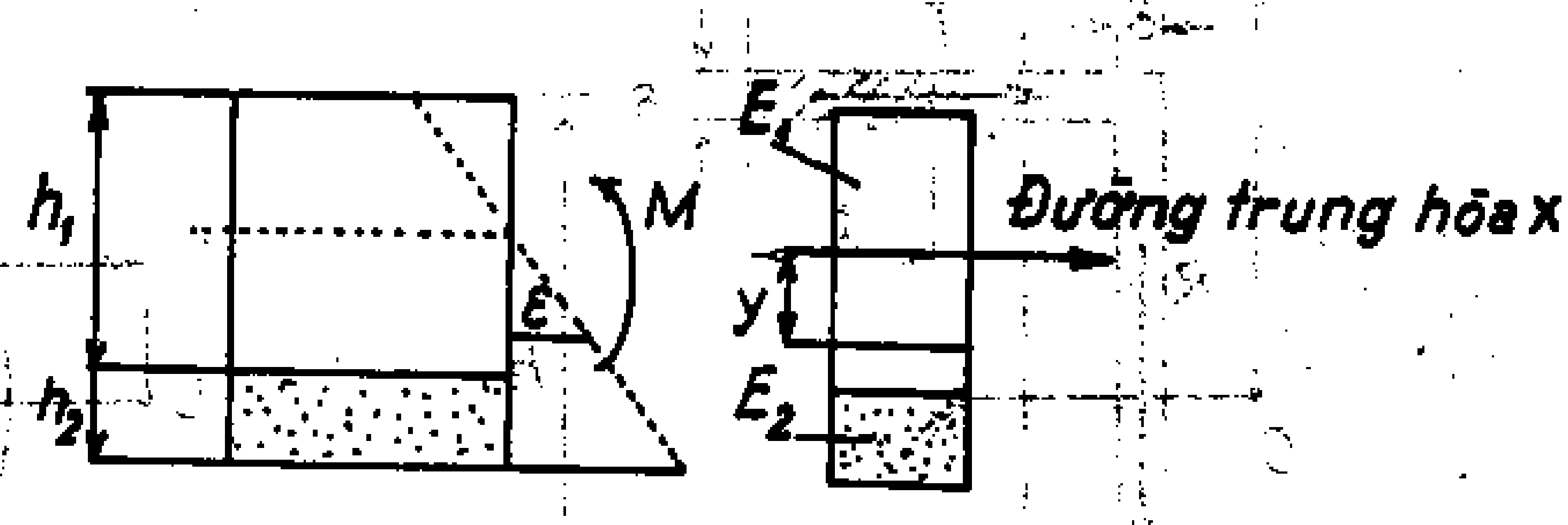
$$Qe = \frac{4RQ}{\pi} \rightarrow e = \frac{4R}{\pi}.$$

## 9-3. UỐN DẦM GỒM NHIỀU LỚP VẬT LIỆU

### 9-3-1. Biểu thức tính ứng suất pháp.

Dầm gồm nhiều lớp vật liệu gắn chặt với nhau và làm việc như một hệ duy nhất còn được gọi là dầm composite, chẳng hạn hai tấm kim loại khác nhau được dán chặt với nhau, dầm bê tông cốt thép liên hợp.... Trong phạm vi chương trình, ta giả thiết rằng liên kết giữa các lớp vật liệu là tuyệt đối cứng, bề mặt tiếp xúc của các lớp vật liệu liền nhau sẽ cùng làm việc và cùng biến dạng như nhau. Việc nghiên cứu bài toán một cách tỉ mỉ hơn, khi liên kết không tuyệt đối cứng, được đề cập trong các sách chuyên khảo.

Để trình bày được đơn giản nhưng vẫn giữ được tính ứng dụng tổng quát, ta xét dầm có hai lớp vật liệu và ký hiệu diện tích mặt cắt, môđun đàn hồi tương ứng của từng lớp là $A_1$, $E_1$, $A_2$, $E_2$. Sử dụng giả thiết tiết diện phẳng, ta thấy: khi mômen uốn dương thì phần tiết diện phía trên chịu nén, phần tiết diện phía dưới chịu kéo; biến dạng dài $\varepsilon$ của thanh là hàm bậc nhất theo toạ độ $y$ như chỉ trên hình 9-12.




*Hình 9-12.* Giả thiết tiết diện phẳng

Tại lớp trung hoà, biến dạng dài bằng không; tại những lớp khác biến dạng dài sẽ tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách $y$ tới lớp trung hoà và tỷ lệ với độ cong của lớp trung hoà $\varepsilon = y/\rho$ với $\rho$ là bán kính cong của lớp trung hoà.

Ứng suất trong mỗi lớp vật liệu, theo định luật Hooke sẽ là :

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1\frac{y}{\rho}; \qquad (9\text{-}6)$$

$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2\frac{y}{\rho}. \qquad (9\text{-}7)$$

Điều kiện lực dọc bằng không cho ta biểu thức tìm vị trí đường trung hoà $x$ trên tiết diện:

$$N = \int_A \sigma . dA = 0 \rightarrow \int_{A_1} E_1 . \frac{y}{\rho} dA + \int_{A_2} E_2 . \frac{y}{\rho} dA = 0,$$

hoặc

$$E_1 \int_{A_1} \frac{y}{\rho} dA + E_2 \int_{A_2} \frac{y}{\rho} dA = 0.$$

Sau khi đưa bán kính cong ra khỏi dấu tích phân, ta được điều kiện:

$$E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA = 0, \qquad (9\text{-}8)$$

Sử dụng định nghĩa về mômen uốn, ta có điều kiện để xác định độ cong $1/\rho$ của thanh:

$$M=\int_A \sigma y.dA \rightarrow M=\frac{1}{\rho}\left[E_1\int_{A_1} y^2dA+E_2\int_{A_2} y^2dA\right]=\frac{1}{\rho}\left[E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}\right],$$

suy ra: $$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}},\qquad (9\text{-}9)$$

trong đó: $$I_{1,x}=\int_{A_1} y^2dA \quad \text{và} \quad I_{2,x}=\int_{A_2} y^2dA \qquad (9\text{-}10)$$

là mômen quán tính đối với trục trung hoà $x$ có vị trí được xác định theo biểu thức (9-8).

Thay (9-9) vào (9-6),(9-7) ta sẽ tính được ứng suất.

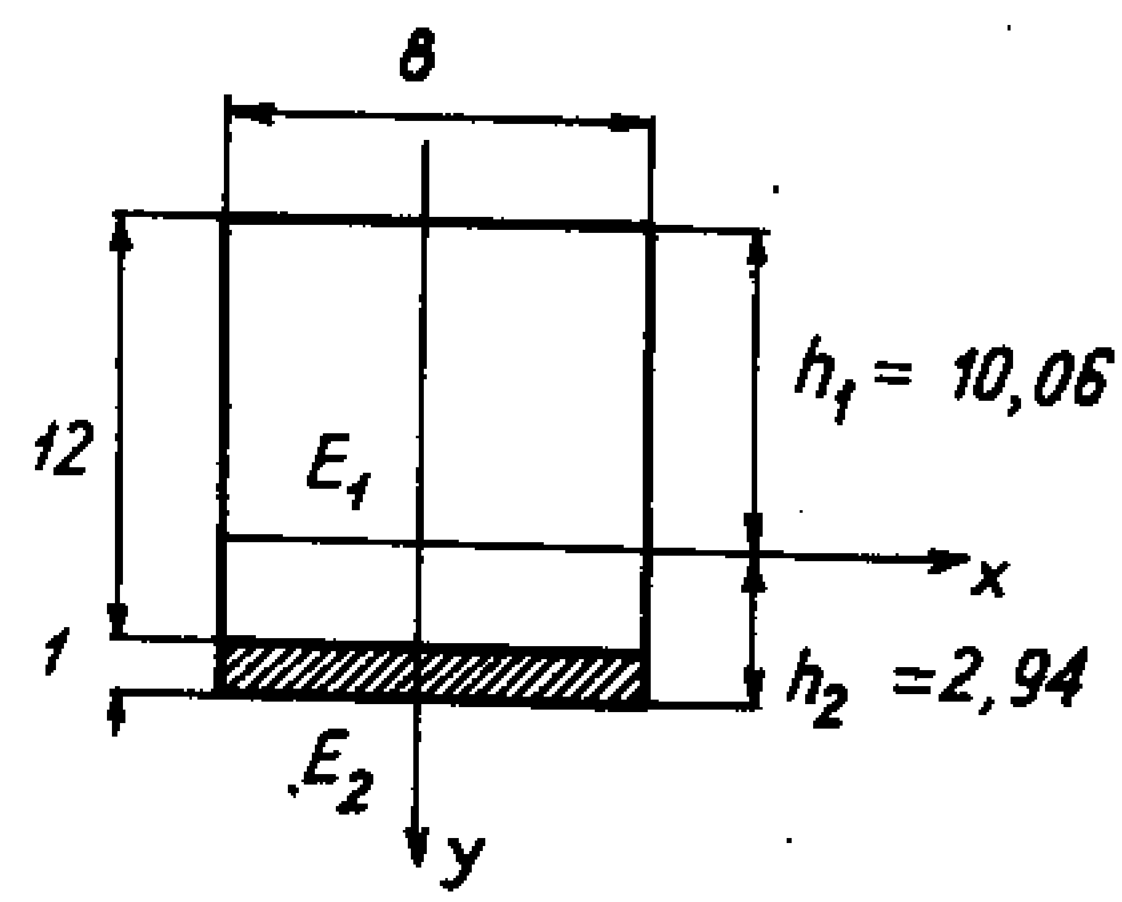
Thay (9-9) vào phương trình vi phân đường đàn hồi ta có phương trình xác định độ võng:

$$y''=\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}}. \qquad (9\text{-}11)$$

Trong trường hợp dầm gồm ba hoặc nhiều lớp vật liệu thì các phép tính vẫn tiến hành tương tự.

**Ví dụ 9-5**: Dầm ghép bằng hai lớp vật liệu có tiết diện cho trên hình 9-13 (kích thước cho theo cm) và chịu mômen uốn bằng $350$ kNcm.

Tìm ứng suất pháp lớn nhất, nhỏ nhất phát sinh trong mỗi lớp vật liệu. Cho biết $E_1=7.10^2$ kN/cm$^2$ và $E_2=1,4.10^4$ kN/cm$^2$.



*Hình 9-13.* Cho ví dụ 9-5

**Bài giải**. Giả thiết đường trung hoà nằm trong phần lớp vật liệu 1. Kí hiệu các khoảng cách từ trục này đến mép trên và mép dưới tương ứng là $h_1$ và $h_2$. Ta có:

$$E_1\int_{A_1} ydA=E_1\int_{-h_1}^{12-h_1} 8y.dy=\frac{7.10^2.8}{2}\left[(12-h_1)^2-(-h_1)^2\right]=6,72.10^4.(6-h_1);$$

$$E_2\int_{A_2} ydA=E_2\int_{12-h_1}^{12-h_1+1} 8y.dy=11,2.10^4.(12,5-h_1).$$

Theo biểu thức xác định vị trí đường trung hoà (9-8):

$$6{,}72(6-h_1)+11{,}2(12{,}5-h_1)=0.$$

Từ đó ta có: $h_1 = 10{,}06$ cm.

Mômen quán tính đối với trục trung hoà $x$ tìm được theo công thức chuyển trục song song:

$$I_{1,x}=\frac{8.12^3}{12}+(10{,}06-6)^2.8.12=2732 \text{ cm}^4;$$

$$I_{2,x}=\frac{8.1^3}{12}+(12{,}5-10{,}06)^2.8.1=48 \text{ cm}^4.$$

Ứng suất nén lớn nhất của lớp vật liệu *1* phát sinh ở biên trên tiết diện khi $y=-10{,}06$ cm và ứng suất kéo lớn nhất phát sinh ở lớp dưới của vật liệu khi $y=12-10{,}06=1{,}94$ cm.

$$\sigma_{1,min}=E_1\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}}(-10{,}06)=-0{,}95 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{1,max}=E_1\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}}(1{,}94)=0{,}185 \text{ kN/cm}^2.$$

Đối với vật liệu *2*, ứng suất pháp nhỏ nhất ứng với $y=1{,}94$ cm và ứng suất pháp lớn nhất ứng với $y=2{,}94$ cm.

$$\sigma_{2,min}=E_2\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}}(1{,}94)=3{,}70 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{2,max}=E_2\frac{M}{E_1I_{1,x}+E_2I_{2,x}}(2{,}94)=5{,}60 \text{ kN/cm}^2.$$

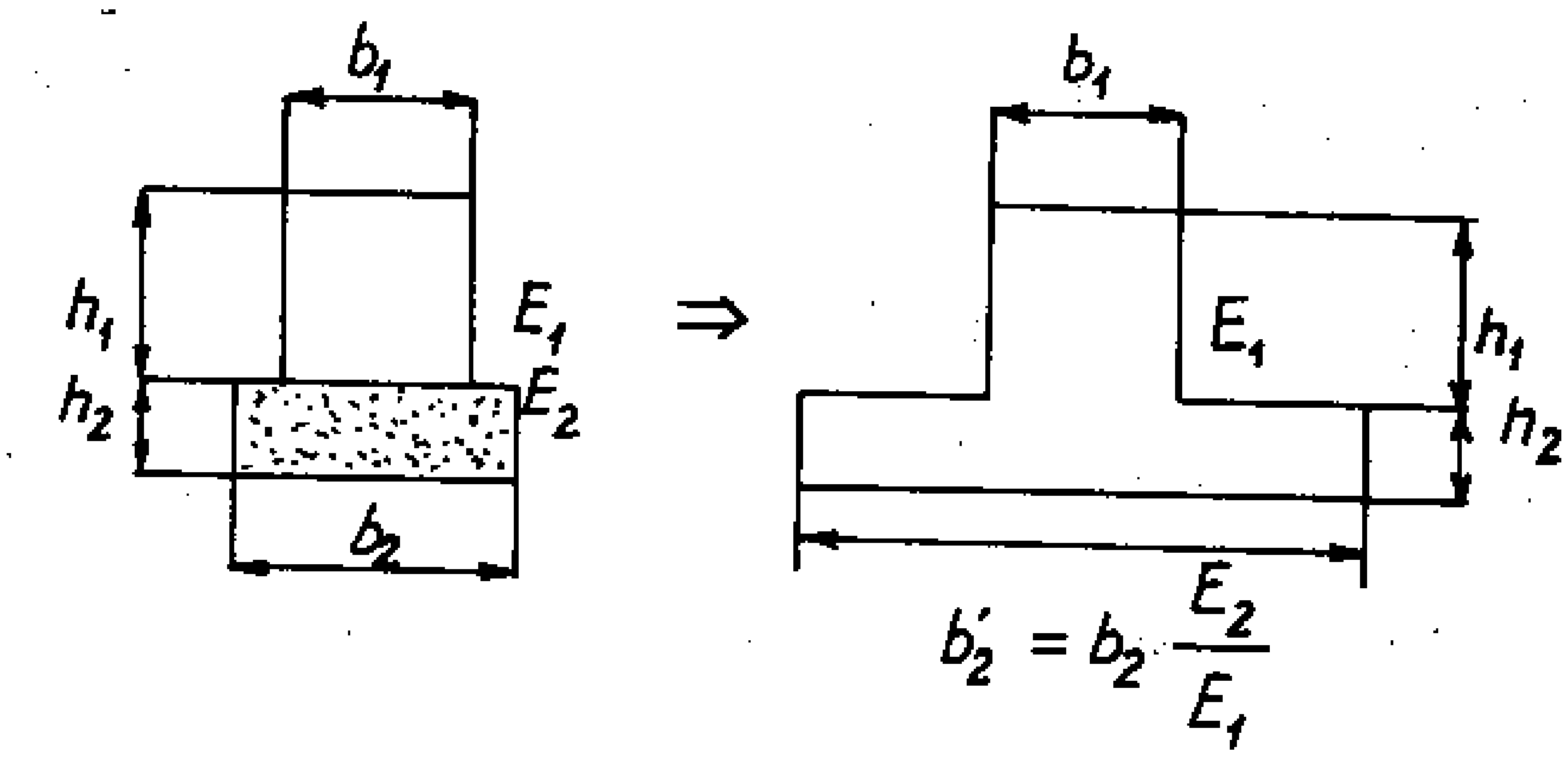
Tại nơi tiếp giáp của hai lớp vật liệu, biểu đồ ứng suất pháp sẽ có bước nhảy.

### 9-3-2. Phương pháp quy đổi tiết diện

Nội dung phương pháp này là quy đổi tiết diện gồm hai hoặc nhiều lớp vật liệu thành tiết diện khác tương đương có cùng chiều cao nhưng chỉ làm từ một loại vật liệu và có biến dạng, ứng suất pháp giống như biến dạng và ứng suất pháp trên tiết diện thực.

Giả thử dầm có hai lớp vật liệu $E_1$, $E_2$ trên hai phần diện tích $A_1$, $A_2$ của tiết diện kích thước tương ứng $b_1$ x $h_1$ và $b_2$ x $h_2$ như trên hình 9-14. Vị trí trục trung hoà và độ cong được xác định theo các biểu thức (9-7), (9-9).

Ta hãy xét một dầm làm từ một loại vật liệu (ví dụ $E_1$) có chiều cao $h_1+h_2=h$ và bề rộng các phần tương ứng là $b_1$ và $b'_2 = b_2\dfrac{E_2}{E_1}$. Ta sẽ chứng minh được rằng vị trí trục trung hoà và độ cong của dầm một lớp vật liệu này cũng được xác định theo các biểu thức (9-7), (9-9). Do đó, việc tính dầm có hai lớp vật liệu được thực hiện như tính dầm một loại vật liệu nhưng bề rộng tiết diện đã có biến đổi, hoặc gọi là tiết diện quy đổi.




*Hình 9-14.* Tiết diện ban đầu và tiết diện quy đổi

Tiết diện quy đổi có diện tích các phần là $A_1$, $A_2\dfrac{E_2}{E_1}$ cùng môđun đàn hồi $E_1$.

Khi chịu uốn, vị trí trục trung hoà của tiết diện quy đổi được xác định theo biểu thức của trục trung tâm:

$$\int_A ydA = \int_{A_1} ydA + \int_{A'_2} ydA = \int_{A_1} ydA + \int_{A_2} y\frac{E_2}{E_1}dA = 0,$$

hay

$$E_1\int_{A_1} ydA + E_2\int_{A_2} ydA = 0.$$

Đây cũng chính là biểu thức để xác định vị trí trục trung hoà của tiết diện ban đầu (9-8).

Biểu thức tính độ cong của dầm quy đổi: $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_x},$$

với $$I_x = \int_A y^2dA = \int_{A_1} y^2dA + \int_{A'_2} y^2dA = \int_{A_1} y^2dA + \int_{A_2} y^2\frac{E_2}{E_1}dA = I_{1,x} + \frac{E_2}{E_1}I_{2,x}.$$

Do đó: $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_x} = \frac{M}{E_1 I_{1,x} + E_2 I_{2,x}}.$$

Biểu thức này trùng với biểu thức tính độ cong (9-9) của dầm chế tạo từ hai loại vật liệu. Nghĩa là biến dạng của dầm ban đầu và biến dạng của dầm quy đổi là như nhau. Ứng suất của dầm quy đổi trên phần tiết diện có môđun đàn hồi $E_1$ trùng với ứng suất trong dầm ban đầu, trên phần vật liệu có môđun đàn hồi $E_2$

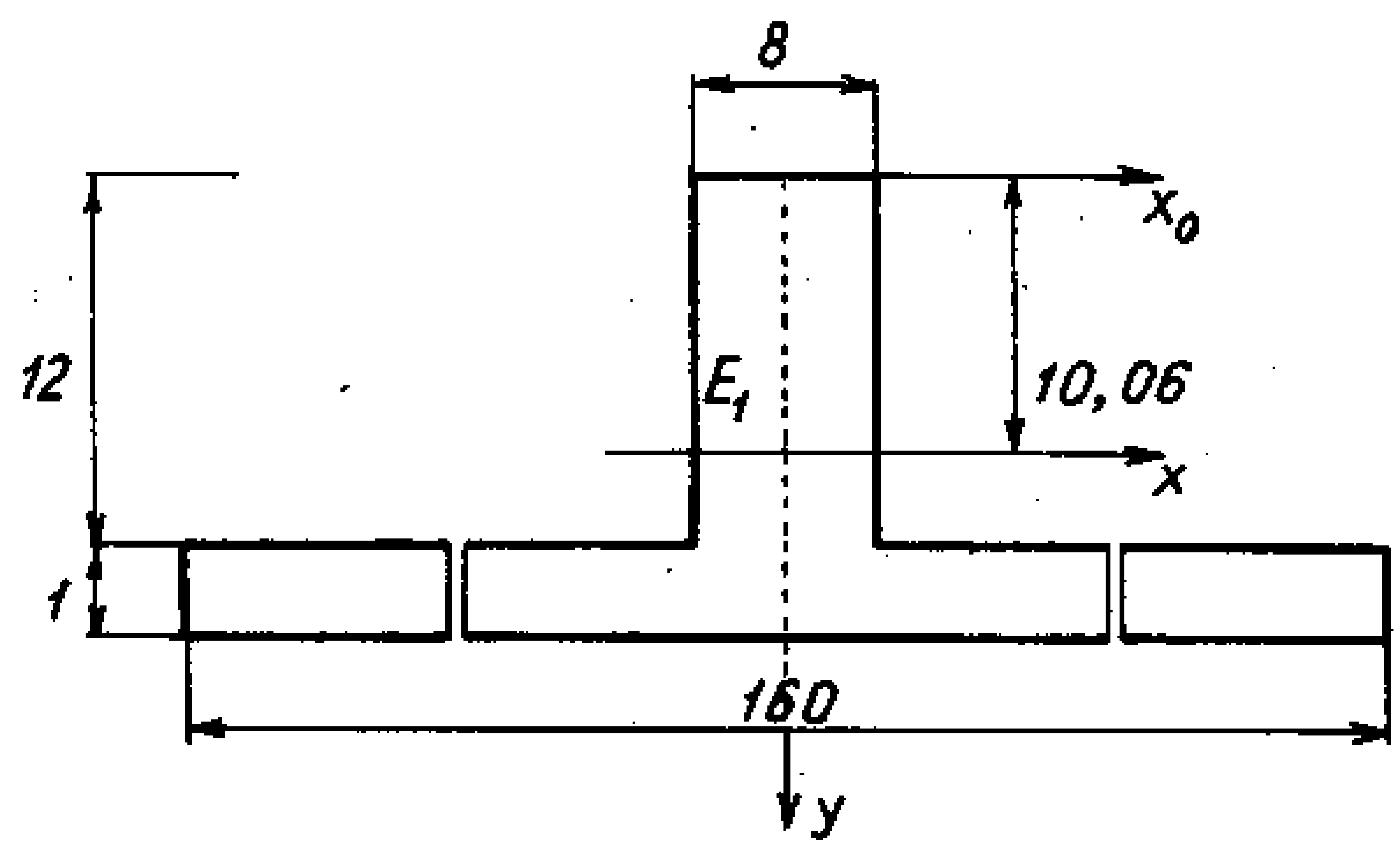
thì ứng suất thực sẽ bằng ứng suất tính theo dầm quy đổi nhân với tỷ số $\frac{E_2}{E_1}$.

Phương pháp quy đổi tiết diện dễ áp dụng cho dầm có số lớp vật liệu lớn hơn hai. Vật liệu của dầm quy đổi có thể là một trong những vật liệu của dầm ban đầu, hoặc cũng có thể lấy là một loại vật liệu có môđun đàn hồi $E_0$ bất kì chọn tuỳ ý.

***Ví dụ 9-6***. Giải lại bài toán đã nêu trong ví dụ 9-5 bằng phương pháp quy đổi tiết diện.

*Bài giải*. Ta giữ lớp vật liệu phía trên không đổi, lớp vật liệu phía dưới có bề rộng $8$ cm nay sẽ quy đổi thành bề rộng $8.\frac{E_2}{E_1} = 8.20 = 160$ cm.

Tiết diện quy đổi có kích thước như trên hình 9-15 (tính theo cm).




*Hình 9-15.* Cho ví dụ 9-6

Tọa độ trọng tâm của tiết diện trong hệ tọa độ $x_0y$ là:

$$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{8.12.6 + 1.160.12,5}{8.12 + 160.1} = 10,06 \text{ cm}.$$

Mô men quán tính đối với trục trung hoà $x$ là :

$$I_x = \frac{8.12^3}{12} + 8.12(10,06 - 6)^2 + \frac{160.1^3}{12} + 160.(12,5 - 10,06)^2 = 3698 \text{ cm}^4.$$

Ứng suất trong dầm quy đổi tại các điểm đặc biệt:

* Tại biên trên, $y = -10,06$ cm :

$$\sigma = \frac{M}{I}y = \frac{350}{3698}.(-10,06) = -0,95 \text{ kN/cm}^2.$$

* Tại điểm ngăn cách hai phần tiết diện $y = 1,94$ cm :

$$\sigma = \frac{350}{3698}.(1,94) = 0,185 \text{ kN/cm}^2.$$

* Tại biên dưới $y = 2,94$ cm :

$$\sigma = \frac{350}{3698}.(2,94) = 0,28 \text{ kN/cm}^2.$$

Trong phần vật liệu $E_1$, ứng suất trong dầm quy đổi cũng là ứng suất trong dầm đã cho.

Trong phần vật liệu $E_2$, ứng suất thực sẽ bằng ứng suất quy đổi nhân với tỉ số $\frac{E_2}{E_1} = 20$.

Vậy ứng suất thực trên phần vật liệu $E_2$ sẽ là:

* Tại điểm tiếp giáp với lớp $E_1$, $y = 1,94$ cm: $\sigma = 0,185.20 = 3,70$ kN/cm$^2$.

* Tại biên dưới tiết diện, $y = 2,94$ cm: $\sigma = 0,28.20 = 5,60$ kN/cm$^2$.

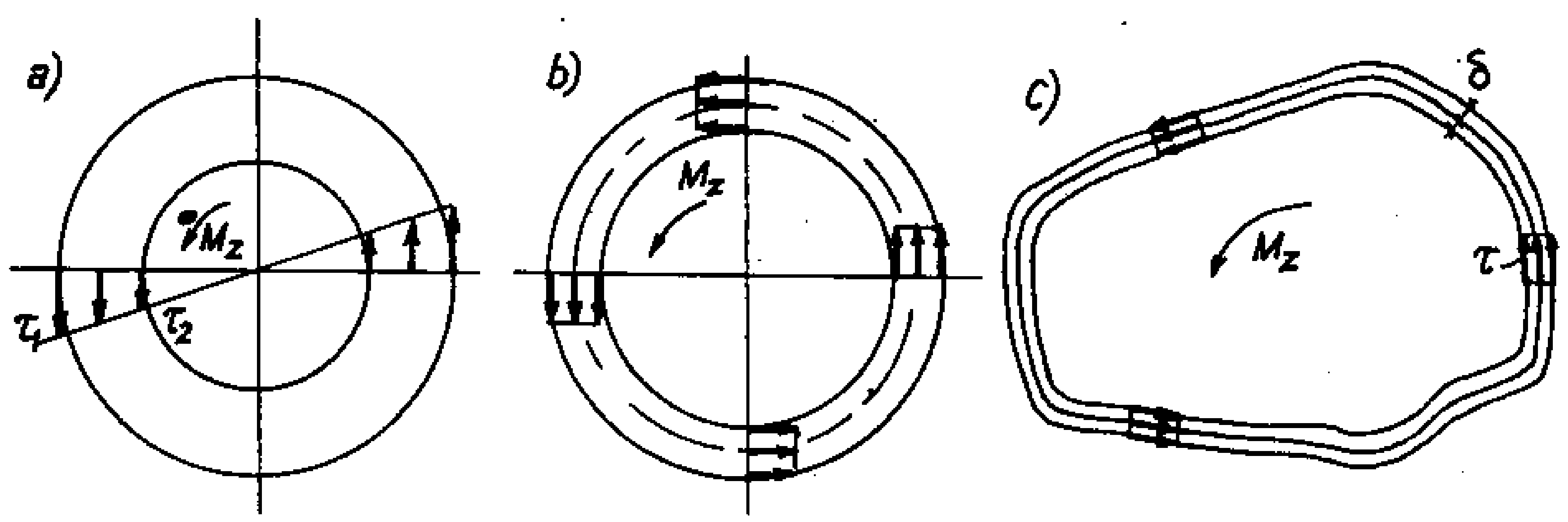
Những kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả đã nhận được trong ví dụ 9-5.

## 9-4. XOẮN THANH CÓ TIẾT DIỆN MỎNG KÍN

### 9-4-1. Biểu thức ứng suất

Trong phần trên của giáo trình, ta đã nghiên cứu ứng suất và biến dạng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn. Trong phần này, ta sẽ mở rộng các công thức đã có đối với thanh thẳng có tiết diện mỏng, kín (ống hình trụ tròn, ống hộp chữ nhật mỏng, ống có tiết diện mỏng hình enlip...) chịu xoắn.

Trên hình 9-16 cho ta hình ảnh về sự phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện mỏng kín chịu xoắn.

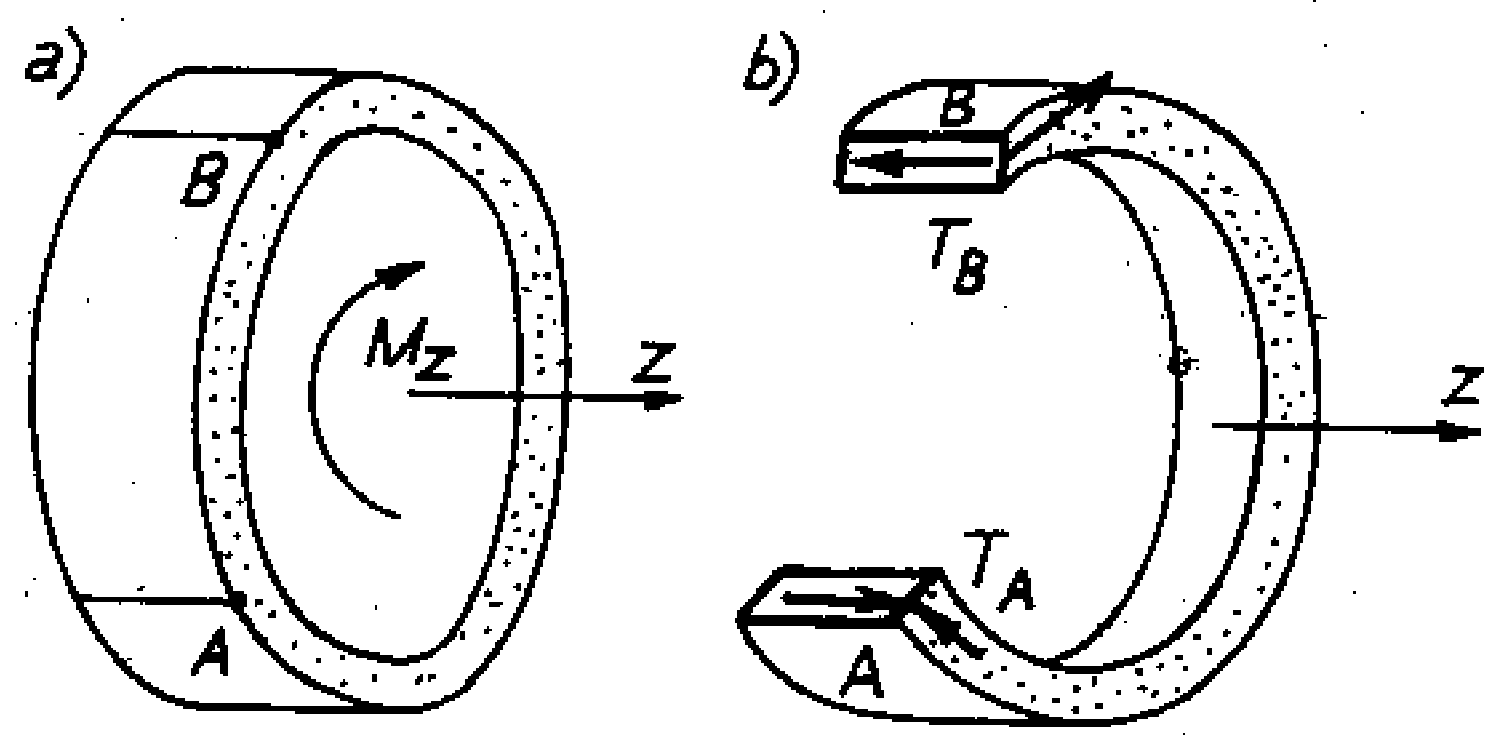



*Hình 9-16.* Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện mỏng kín chịu xoắn

Đối với tiết diện hình tròn rỗng, ứng suất tiếp phân bố bậc nhất trên bề dày tiết diện (hình 9-16a), do đó, khi thành hoặc bề dày của tiết diện là nhỏ, ta có thể cho rằng ứng suất này phân bố đều trên bề dày (hình 9-16b).

Còn đối với tiết diện mỏng kín có hình dạng bất kì (hình 9-16c) ta cũng có thể kết luận một cách hợp lí rằng: *ứng suất tiếp có phương tiếp tuyến với đường trung bình và phân bố đều trên bề dày tiết diện*. Nói một cách khác, trên tiết diện sẽ hình thành một *luồng ứng suất tiếp* đi theo chiều mômen xoắn $M_z$. Tổng mômen của ứng suất tiếp đối với trục thanh sẽ bằng mômen xoắn nội lực $M_z$.

Hợp lực của ứng suất tiếp $\tau$ trên bề dày tiết diện, ký hiệu $T$, cũng đi thành luồng trên tiết diện và bằng $T = \tau\delta$. Để tìm hiểu quan hệ của $T$ tại các điểm khác nhau trên tiết diện, ta hãy khảo sát đoạn chiều dài $dz$ của thanh chịu xoắn như trên hình 9-17a.




*Hình 9-17.* Sự cân bằng của một phần phân tố thanh chiều dài dz

Trên mặt tiết diện chỉ có ứng suất tiếp $\tau$.

Tại điểm $A$, bề dày tiết diện $\delta_A$, sẽ có ứng lực $T_A = \tau_A\,\delta_A$.

Tại điểm $B$, bề dày tiết diện $\delta_B$, sẽ có ứng lực $T_B = \tau_B\,\delta_B$.

Xét cân bằng của một phần đoạn thanh, giới hạn bởi hai mặt phẳng song song với trục thanh và đi qua các bề dày $\delta_A$, $\delta_B$ (hình 9-17b).

Theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp, trên mặt cắt song song với trục $z$, cũng có ứng suất tiếp với trị số tương ứng bằng $\tau_A$ và $\tau_B$. Hợp lực của các các ứng suất tiếp này song song với trục thanh:

* trên mặt đi qua điểm $A$ là $\tau_A.\delta_A.dz = T_A\,dz$ ;

* trên mặt đi qua điểm $B$ là $\tau_B.\delta_B.dz = T_B\,dz$ .

Điều kiện cân bằng của phần thanh đang xét:

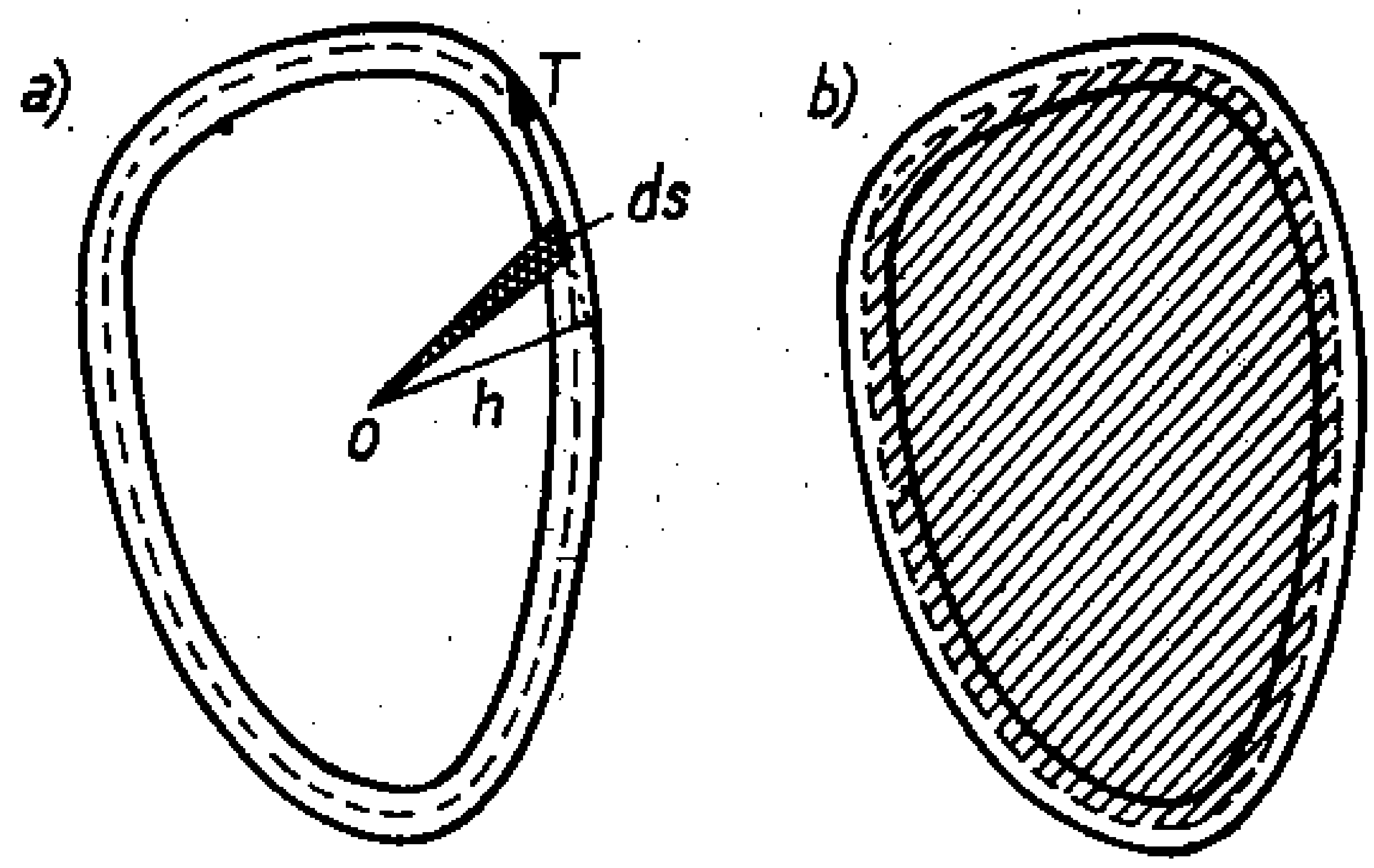
$$\sum Z = 0 \quad\Rightarrow\quad T_A = T_B = T = const. \qquad (9\text{-}12)$$

Biểu thức chứng tỏ: hợp lực của ứng suất tiếp trên bề dầy tại mọi điểm là như nhau, là một hằng số trên tiết diện, dù bề dày của tiết diện tại các điểm có thể khác nhau. Kết luận này cũng cho ta lời giải thích về khái niệm "luồng ứng suất" nêu ở trên. Luồng ứng suất tương tự luồng chất lỏng chảy trong ống dẫn có tiết diện thay đổi: lưu lượng dòng chảy $T$ là như nhau đối với mọi mặt cắt.

Điều kiện cân bằng mômen của luồng ứng suất tiếp và mômen xoắn nội lực $M_z$ cho phép ta xác định được trị số ứng suất tiếp.

Trên hình 9-18a, diện tích phân tố $dF = \delta\, ds$ có hợp lực $\tau\delta\, ds = T ds$, mômen với tâm $O$ là $Tds.h$.

*Hình 9-18.* Tìm giá trị của luồng ứng suất $T$




Đối với toàn tiết diện: $$M_z = \oint_s Tds.h\,. \qquad (9\text{-}13)$$

Trong biểu thức $T$ là hằng số, $h.ds$ là hai lần diện tích của tam giác có đáy $ds$ và chiều cao $h$. Diện tích tam giác này được tô đậm trên hình vẽ 9-18a. Giá trị tích phân ở vế phải của (9-37) sẽ là hai lần diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi đường trung bình của tiết diện như chỉ trên hình 9-18b. Ký hiệu phần diện tích này là $\Omega$ thì phương trình cân bằng (9-13) được viết lại là

$$M_z = 2T\Omega\,.$$

Từ đó tìm được: $$T = \frac{M}{2\Omega}\,.$$

Thay $T = \tau\delta$ ta tính được ứng suất tiếp tại điểm đang xét là:

$$\tau = \frac{M}{2\Omega\delta} \qquad (9\text{-}14)$$

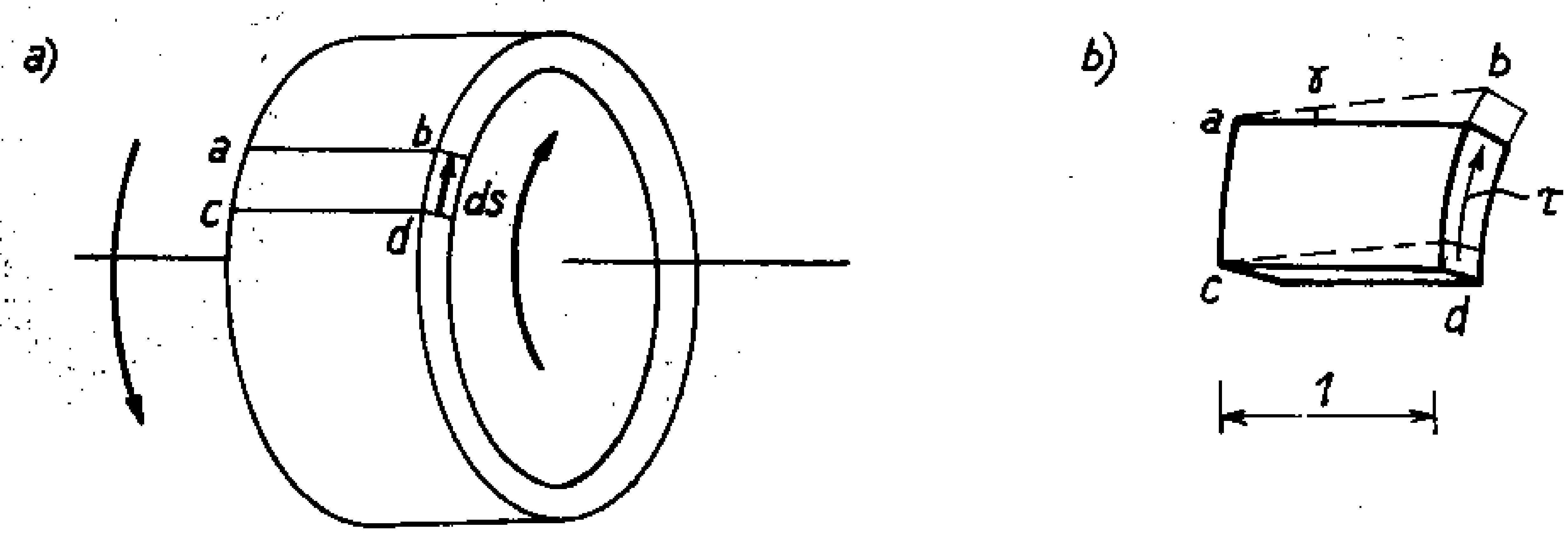
Cần lưu ý rằng công thức (9-14) được suy luận từ các quan hệ cân bằng tĩnh học, không phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Do đó, ứng suất tiếp khi xoắn thuần túy thanh có thành mỏng không phụ thuộc vào vật liệu và có thể áp dụng công thức để tính ứng suất tiếp cho thanh chịu xoắn làm từ các loại vật liệu khác nhau. Bề dày của các thành tiết diện càng nhỏ thì kết quả càng phù hợp với các kết quả thực nghiệm.

### 9-4-2. Biểu thức tính góc xoắn

Để tính góc xoắn của thanh thành mỏng, ta sẽ sử dụng biểu thức cân bằng giữa công của mômen trên chuyển vị góc và công của ứng suất trên các biến dạng tương ứng.

Xét đoạn thanh (hình 9-19a) có chiều dài bằng đơn vị, chịu mômen xoắn $M_z$, có góc xoắn tương đối $\theta$. Công đàn hồi của mômen xoắn sẽ là $\dfrac{M_z\theta}{2}$.

Trong đoạn thanh chỉ có ứng suất tiếp $\tau$, xét phân tố có cạnh $ds$ như trên hình 9-19b, phân tố có biến dạng góc $\gamma$ và thể tích là $1.\delta.ds$.




*Hình 9-19.* Tính công của nội lực

Công trong một đơn vị thể tích của ứng suất tiếp là $\dfrac{\tau.\gamma}{2}$ hoặc theo định luật Hooke sẽ là $\dfrac{\tau^2}{2G}$. Công trên thể tích phân tố đang xét là $\dfrac{\tau^2}{2G}\delta ds$.

Công trên đoạn thanh đang xét sẽ là tổng công của $\tau$ trên toàn bộ chiều dài đường trung bình:

$$\oint_S \frac{\tau^2}{2G}\delta.ds.$$

Cho cân bằng công của mômen và của ứng suất, trong đó $\tau$ được tính theo (9-14) ta nhận được quan hệ:

$$\frac{M_z\theta}{2} = \oint_S \frac{\delta}{2G}.\frac{M_z^2}{4\Omega^2\delta^2}ds = \frac{M_z^2}{2.4G\Omega^2}\oint_S \frac{ds}{\delta}.$$

Vì $M_z$, $G$, $\Omega$ là không đổi theo biến số $s$ nên sau khi tích phân ta có biểu thức của góc xoắn $\theta$ trên một đơn vị chiều dài thanh:

$$\theta = \frac{M_z}{4G\Omega^2}\oint_S \frac{ds}{\delta} = \frac{M_z}{I_{xo}G}. \qquad (9\text{-}15)$$

Ký hiệu $$I_{xo} = \frac{4\Omega^2}{\oint_S \frac{ds}{\delta}}, \qquad (9\text{-}16)$$

với $I_{xo}$ được gọi là *mômen quán tính xoắn*, là một đặc trưng hình học của tiết diện. Để tính $I_{xo}$ ta cần lấy tích phân biểu thức ở mẫu số:

* Nếu bề dày $\delta = const$ trên tiết diện, gọi $L$ là chiều dài đường trung bình thì:

$$I_{xo} = \frac{4\delta\,\Omega^2}{L}. \qquad (9\text{-}17)$$

* Nếu bề dày $\delta$ là hằng trên từng đoạn chiều dài $l_i$ của đường trung bình thì:

$$I_{xo} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{l_i}{\delta_i}}. \qquad (9\text{-}18)$$

Các công thức để tính ứng suất và biến dạng viết ở trên cho thanh thành mỏng kín chịu xoắn thuần tuý được được gọi là công thức Bredtl.

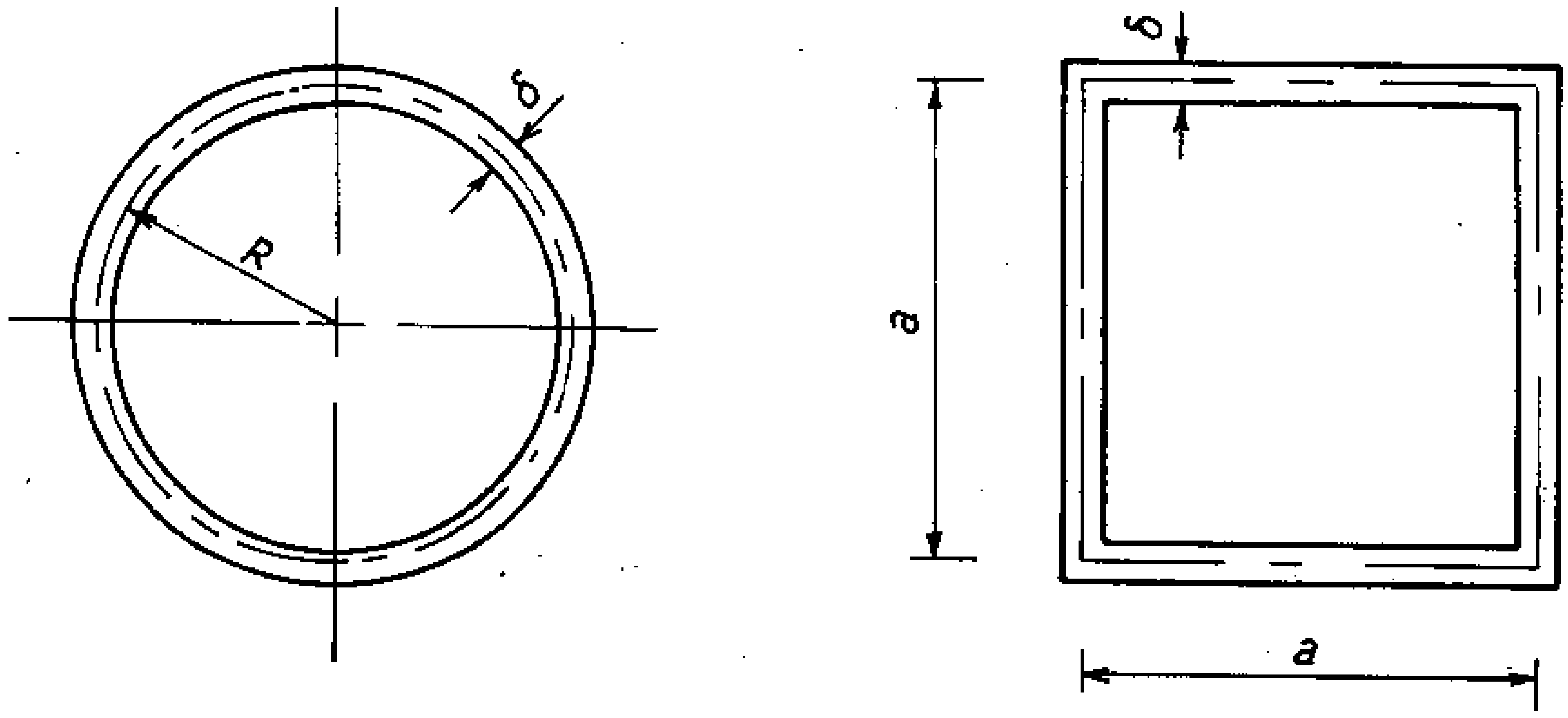
***Ví du 9-7***. So sánh ứng suất tiếp và góc xoắn của hai ống chịu xoắn làm từ cùng một loại vật liệu, chịu cùng một mômen xoắn, tiết diện có cùng bề dày $\delta$ và cùng chiều dài đường trung bình nhưng một tiết diện hình tròn rỗng (hình 9-20a), một tiết diện hình vuông rỗng (hình 9-20b).

*Bài giải*. Gọi bán kính của hình tròn là $R$, cạnh của hình vuông là $a$, theo đề bài ta có $2\pi R = 4a$ hoặc $\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$.

Theo công thức (9-14) để tính ứng suất tiếp:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\dfrac{M}{2\delta\,\Omega_1}}{\dfrac{M}{2\delta\,\Omega_2}} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{a^2}{\pi R^2} = \frac{(\pi/2)^2}{\pi} = \frac{\pi}{4} < 1;$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\dfrac{M}{\dfrac{G.4\delta\,\Omega^2}{L_1}}}{\dfrac{M}{\dfrac{G.4\delta\,\Omega^2}{L_2}}} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 < 1.$$

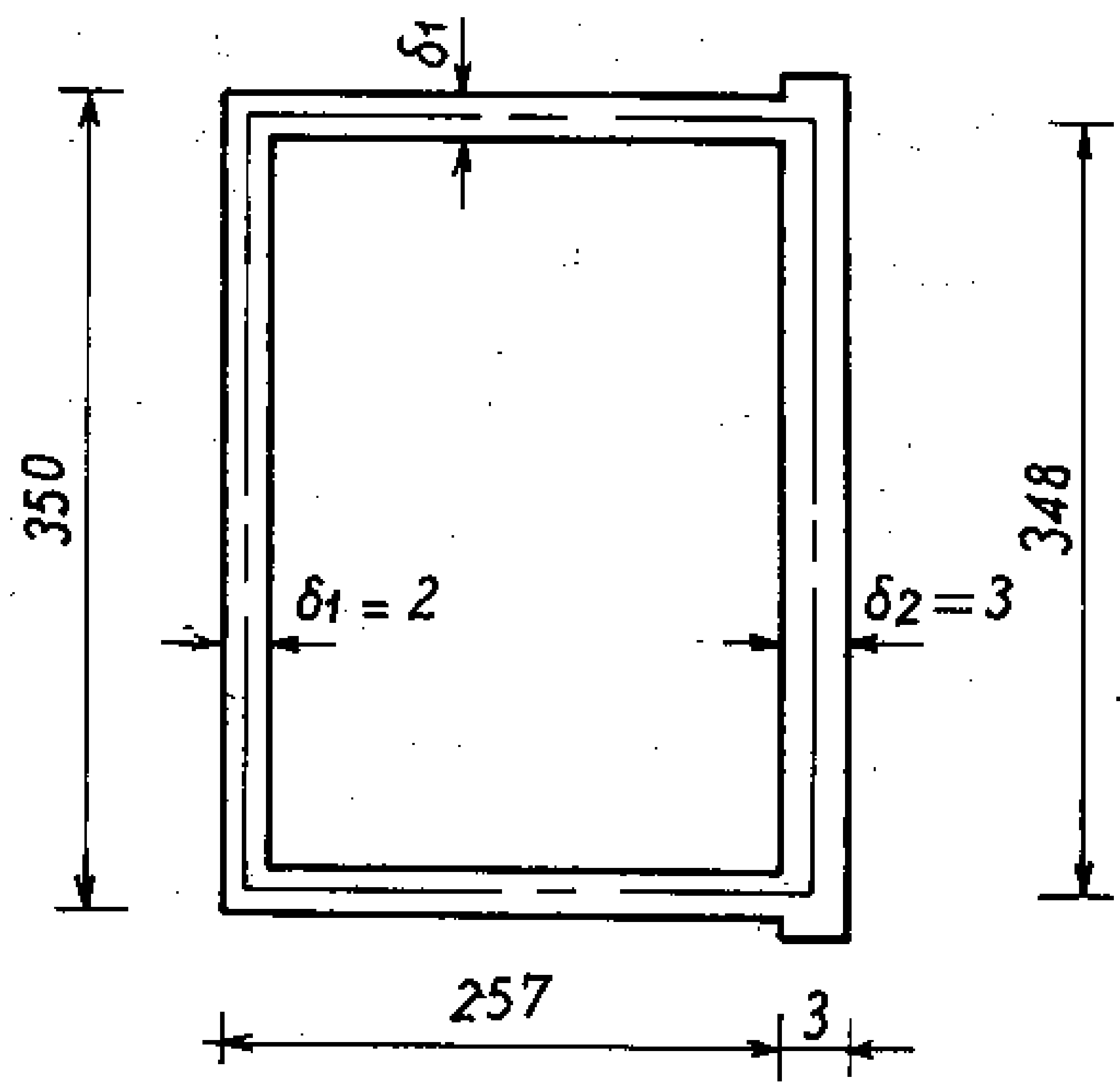



*Hình 9-20.* Cho ví dụ 9-7

Kết quả cho thấy ứng suất và biến dạng của tiết diện hình tròn rỗng nhỏ hơn ứng suất và biến dạng của tiết diện hình vuông rỗng.

**Ví dụ 9-8**. Trên hình 9-21 diễn tả tiết diện của một thanh thẳng chịu xoắn làm từ thép tấm dày *2* mm gấp nếp chữ U, ghép với một tấm đồng dày *3* mm; thanh dài 2 m một đầu ngàm một đầu tự do chịu mômen xoắn *4* kNm.

Tính ứng suất tiếp trên tiết diện và góc xoắn của thanh. Cho biết môđun đàn hồi khi trượt *G* của thép là $8.10^3$ kN/cm$^2$, của đồng $4{,}2.10^3$ kN/cm$^2$. Kích thước trên hình vẽ cho theo mm.




*Hình 9-21.* Cho ví dụ 9-8

*Bài giải*. Ở trên ta đã nhận xét công thức tính ứng suất tiếp được suy diễn từ điều kiện cân bằng tĩnh học, do đó công thức cũng được sử dụng để tính ứng suất của tiết diện có nhiều loại vật liệu khác nhau như trong ví dụ này.

Diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi đường trung bình (hình 9-21):

$$\Omega = 25{,}75.34{,}8 = 816{,}3 \text{ cm}^2.$$

Trên phần diện tích có bề dày $\delta_1$: $\tau_1 = \dfrac{M}{2\Omega\delta_1} = \dfrac{400}{2.816{,}3.0{,}2} = 1{,}225$ kN/cm$^2$.

Trên phần diện tích có bề dày $\delta_2$: $\tau_2 = \dfrac{400}{2.816{,}3.0{,}3} = 0{,}817$ kN/cm$^2$.

- Để tính góc xoắn, ta sử dụng công thức Bredtl (9-15) nhưng đưa môđun đàn hồi trượt $G$ vào trong biểu thức tích phân, vì tiết diện có hai loại vật liệu khác nhau:

$$\theta = \frac{M_z}{4\Omega^2}\oint_S \frac{ds}{G\delta}$$

$G_1, G_2$ là môđun đàn hồi trượt của thép và của đồng.

Ta tính giá trị của tích phân :

$$\oint_S \frac{ds}{G\delta} = \int_{l_1} \frac{ds}{G_1\delta_1} + \int_{l_2} \frac{ds}{G_2\delta_2} =$$

$$= \frac{2.25{,}75 + 34{,}8}{8.10^3.0{,}2} + \frac{34{,}8}{4{,}0.10^3.0{,}3} = 81{,}556.10^{-3}\ \text{cm}^2/\text{kN}.$$

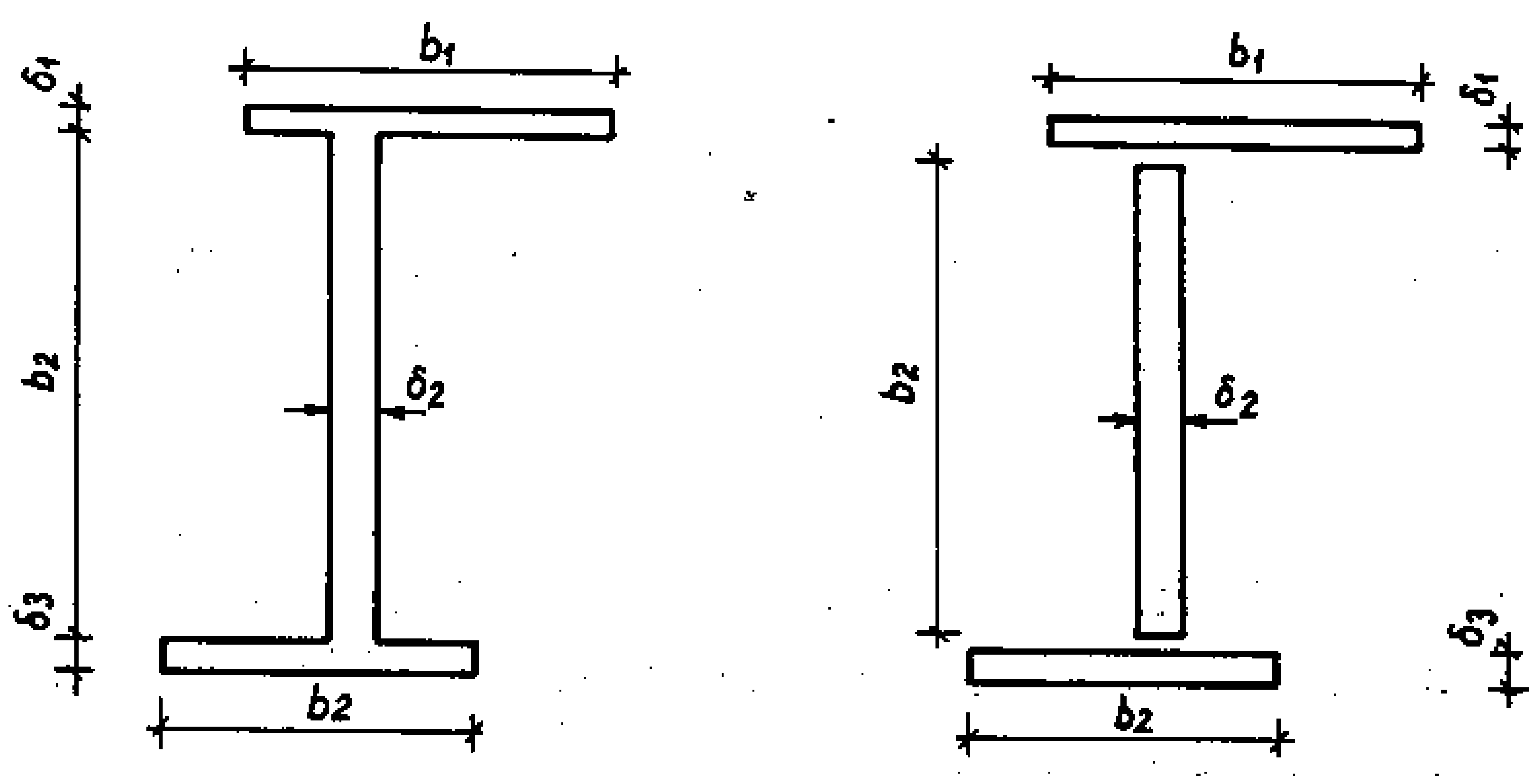
Do đó: $$\theta = \frac{400}{4.(816{,}3)^3}.81{,}556.10^{-3} = 1{,}22.10^{-4}\ \text{rad/cm}.$$

Góc xoắn của thanh dài 2 m sẽ là $\varphi = \theta.200 = 0{,}0244$ rad $(1^0 24')$

## 9-5. XOẮN THANH CÓ TIẾT DIỆN MỎNG HỞ

Thanh có tiết diện hình chữ nhật mỏng là trường hợp đơn giản nhất của thanh có tiết diện mỏng hở, đã được đề cập ở chương 6. Trên cơ sở bài toán cơ bản đó ta có thể nghiên cứu trường hợp thanh có tiết diện mỏng hở được hình thành từ các hình chữ nhật mỏng.

Xét tiết diện mỏng hở chịu mômen xoắn $M$ như trên hình 9-22. Tiết diện được chia thành những phần tử chữ nhật mỏng có kích thước $b_i$, $\delta_i$ (quy ước $b_i > \delta_i$) cùng chịu xoắn.




*Hình 9-22.* Xoắn thanh có tiết diện mỏng hở

Mômen xoắn $M$ trên tiết diện sẽ phân thành các mômen $M_i$ tác dụng vào từng phần tử:

$$M = M_1 + M_2 + ... = \Sigma M_i \,. \qquad \text{(a)}$$

Các phần tử hình chữ nhật mỏng có các góc xoắn $\theta_1$, $\theta_2$, ...$\theta_i$ tuân theo luật (6-29)

$$\theta_i = \frac{M_i}{\frac{1}{3}Gb_i\delta^3{}_i}.$$

Nhưng các phần tử này là các bộ phận của một tiết diện duy nhất nên các góc xoắn $\theta_i$ phải bằng nhau và bằng góc xoắn $\theta$ của tiết diện, nghĩa là:

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta \ ,$$

hoặc
$$\theta = \frac{M_1}{\frac{1}{3}Gb_1\delta_1^3} = \frac{M_2}{\frac{1}{3}Gb_2\delta_2^3} = \ ... \ = \frac{\sum M_i}{\frac{1}{3}G\sum b_i\delta_i^3}.$$

Theo (a) ta có :
$$\theta = \frac{M}{\frac{1}{3}G\sum b_i\delta_i^3} = \frac{M}{GI_{xo}}. \qquad \text{(9-19)}$$

Kí hiệu $I_{xo} = \frac{1}{3}\sum b_i\delta_i^3$ gọi là mômen quán tính xoắn của tiết diện.

Ứng suất tiếp trên từng giải chữ nhật sẽ đạt giá trị lớn nhất tại trung điểm của cạnh dài $b_i$ theo công thức (6-27):

$$\tau_{i\,max} = \frac{M_i}{\frac{1}{3}b_i\delta_i^2} = \frac{1}{\frac{1}{3}b_i\delta_i^2}.\frac{M.\frac{1}{3}b_i\delta_i^3}{\frac{1}{3}\sum b_i\delta_i^3} \ ,$$

suy ra
$$\tau_{i\,max} = \frac{M}{I_{xo}}.\delta_i$$

Ứng suất tiếp lớn nhất ở giữa chiều dài của giải có bề dầy lớn nhất:

$$\tau_{max} = \frac{M}{I_{xo}}\delta_{max} \,. \qquad \text{(9-20)}$$

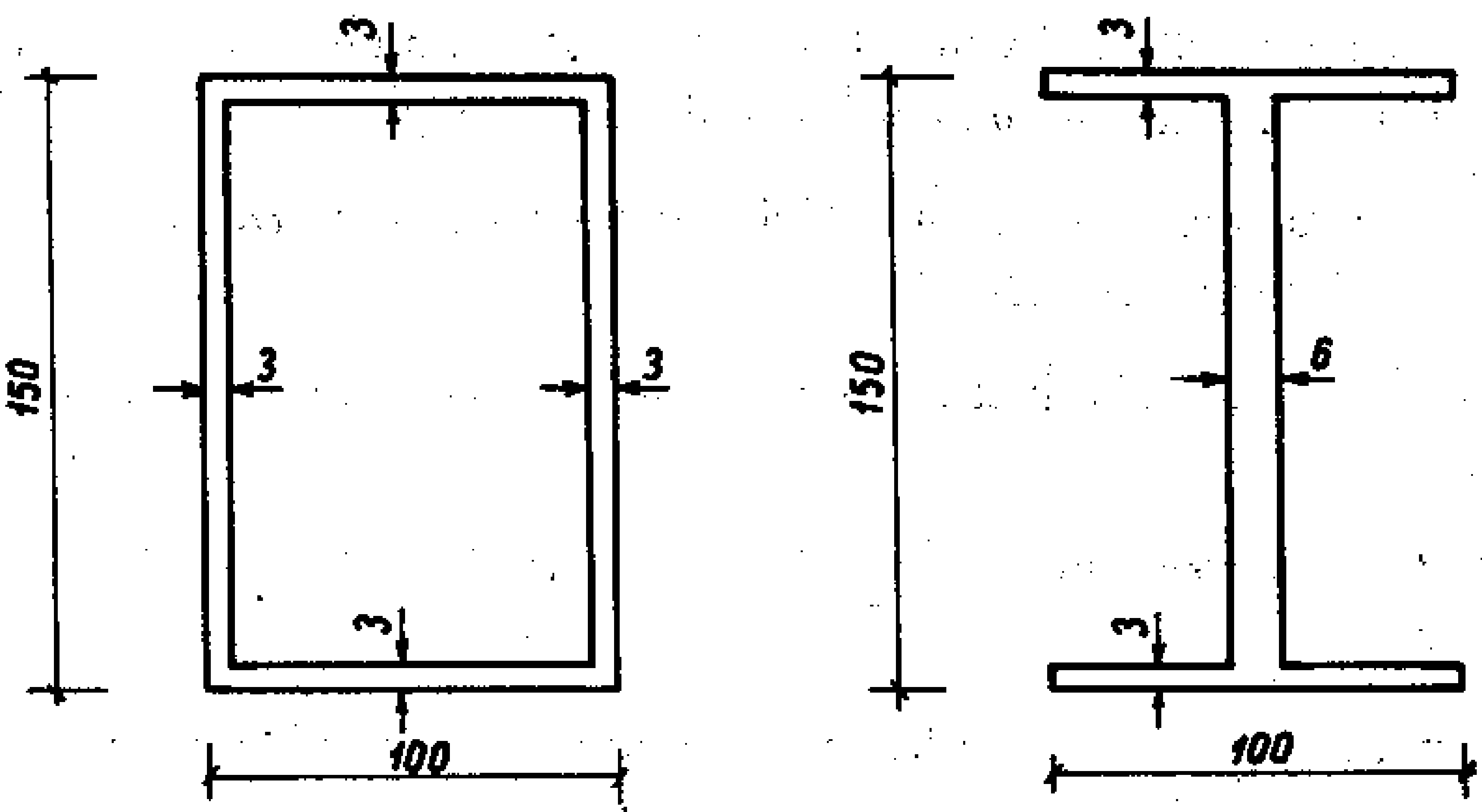
***Ví dụ 9-9.*** So sánh độ bền và độ cứng khi xoắn của hai phương án cấu tạo tiết diện với cùng một chi phí vật liệu: tiết diện kín (hình 9-23a) và tiết diện hở (hình 9-23b). Kích thước cho theo mm.

*Bài giải.*

* Tiết diện kín: $\Omega = 147.97 = 14259$ mm$^2$;

$$\tau_1 = \frac{M}{2\Omega\delta} = \frac{M}{2.14259.3} = \frac{M}{85554};$$

$$I_{xo}^{(1)} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{4.14259^2.3}{2(147+97)} = 4999650 \text{ mm}^4.$$




*Hình 9-23.* Cho ví dụ 9-9

* Tiết diện hở: $I_{xo}^{(2)} = \frac{1}{3}\sum \delta_i^3 b_i = \frac{1}{3}\left[2.100.3^2 + 144.6^3\right] = 12168$ mm$^4$;

$$\tau_{2max} = \frac{M}{I_{xo}^{(2)}}\delta_{max} = \frac{M}{12168}6 = \frac{M}{2028}.$$

**Để so sánh độ bền ta lập tỉ số của ứng suất tiếp:**

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2028}{85554} \approx \frac{1}{42} < 1$$

**Để so sánh độ cứng, ta lập tỉ số của mômen quán tính xoắn :**

$$\frac{I_{xo}^{(1)}}{I_{xo}^{(2)}} = \frac{4999650}{12168} \approx 410 >> 1$$

Vậy tiết diện kín có độ bền và độ cứng lớn hơn nhiều lần độ bền và độ cứng của tiết diện hở.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

9- 1. Nêu giả thiết của công thức Juravski để tính ứng suất tiếp trên thanh chịu uốn phẳng.

9- 2. Viết và giải thích các ký hiệu trong công thức tính ứng suất tiếp cho thanh có tiết diện mỏng hở chịu uốn phẳng, chịu uốn không gian.

9- 3. Tâm uốn của một tiết diện mỏng chịu uốn phẳng là gì? Để xác định vị trí tâm uốn, ta sử dụng điều kiện nào?

9- 4. Trình bày những giả thiết cơ bản khi tính dầm có tiết diện gồm nhiều lớp vật liệu.

9- 5. Viết điều kiện xác định vị trí đường trung hoà khi uốn dầm làm từ nhiều lớp vật liệu.

9- 7. Nêu phương pháp quy đổi tiết diện để tính ứng suất, biến dạng của dầm làm từ nhiều lớp vật liệu.

9- 8. Nêu giả thiết về phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện mỏng kín chịu xoắn.

9- 9. Viết và giải thích các công thức Bredtl tính ứng suất, biến dạng trên tiết diện mỏng kín chịu xoắn.

9-10. Nêu điểm khác nhau về hình ảnh phân bố ứng suất tiếp trên các tiết diện mỏng kín và hở chịu xoắn.

9-11. Viết công thức tính mômen chống xoắn $W_{xo}$, mômen quán tính xoắn $J_{xo}$ của tiết diện mỏng kín và mỏng hở.

# 10 Dầm trên nền đàn hồi

## *10-1. NỀN, MÔ HÌNH NỀN*

Trong thực tế thường gặp những dầm đặt tiếp xúc liên tục trên bề mặt một môi trường hoặc một vật thể đàn hồi khác, ví dụ như dầm móng đặt trên nền đất; cầu phao, phà chuyển tải nằm trên mặt nước; tà vẹt đường sắt rải trên nền đá. Bài toán xác định nội lực trong dầm là một dạng bài toán siêu tĩnh đặc biệt, trong đó phản lực nền là một hệ lực phân bố liên tục trên chiều dài của dầm và phụ thuộc vào biến dạng của dầm cũng như phụ thuộc vào quan niệm về mô hình nền. Trong chương này, ta không đi sâu phân tích tỉ mỉ các mô hình nền mà chỉ dừng lại ở một mô hình đơn giản, thuận tiện cho việc tính toán và hay dùng trong kĩ thuật công trình là mô hình *nền Winkler*. Theo mô hình này, *cường độ phản lực của nền tại một điểm tỉ lệ với độ lún của nền tại điểm đó*. Nếu ký hiệu $p$ là phản lực nền trên một đơn vị diện tích, $y$ là độ lún thì mô hình nền Winkler được biểu diễn bằng quan hệ:

$$p = k\,y\,; \qquad (10\text{-}1)$$

$k$ gọi là *hệ số nền*, một đặc trưng cơ học cơ bản của nền, tìm được từ các thí nghiệm (bảng 10-1). Thứ nguyên của hệ số nền $k$ theo biểu thức định nghĩa (10-1) sẽ là: [Lực/(chiều dài)$^3$]; đơn vị đo, chẳng hạn, là MN/m$^3$.

***Bảng 10-1***

| Loại nền | Hệ số nền $k$ (MN/m$^3$) |
|---|---|
| Đất chặt | 50 - 100 |
| Đất rất chặt | 100 - 200 |
| Nền đá rất rắn | 1000 - 15000 |
| Nền cọc | 50 - 150 |
| Gạch, đá xây | 4000 - 6000 |
| Bê tông | 8000 - 15000 |

**Mô hình nền Winkler phản ảnh tương đối đúng hình ảnh làm việc của dầm trong một số bài toán như dầm đặt trên nền cọc, phao nổi trên mặt nước và khi các độ**

lún, chuyển vị tại mặt tiếp xúc của kết cấu với nền có giá trị dương, hướng về phía nền.

## 10-2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐỘ VÕNG CỦA DẦM TRÊN NỀN WINKLER

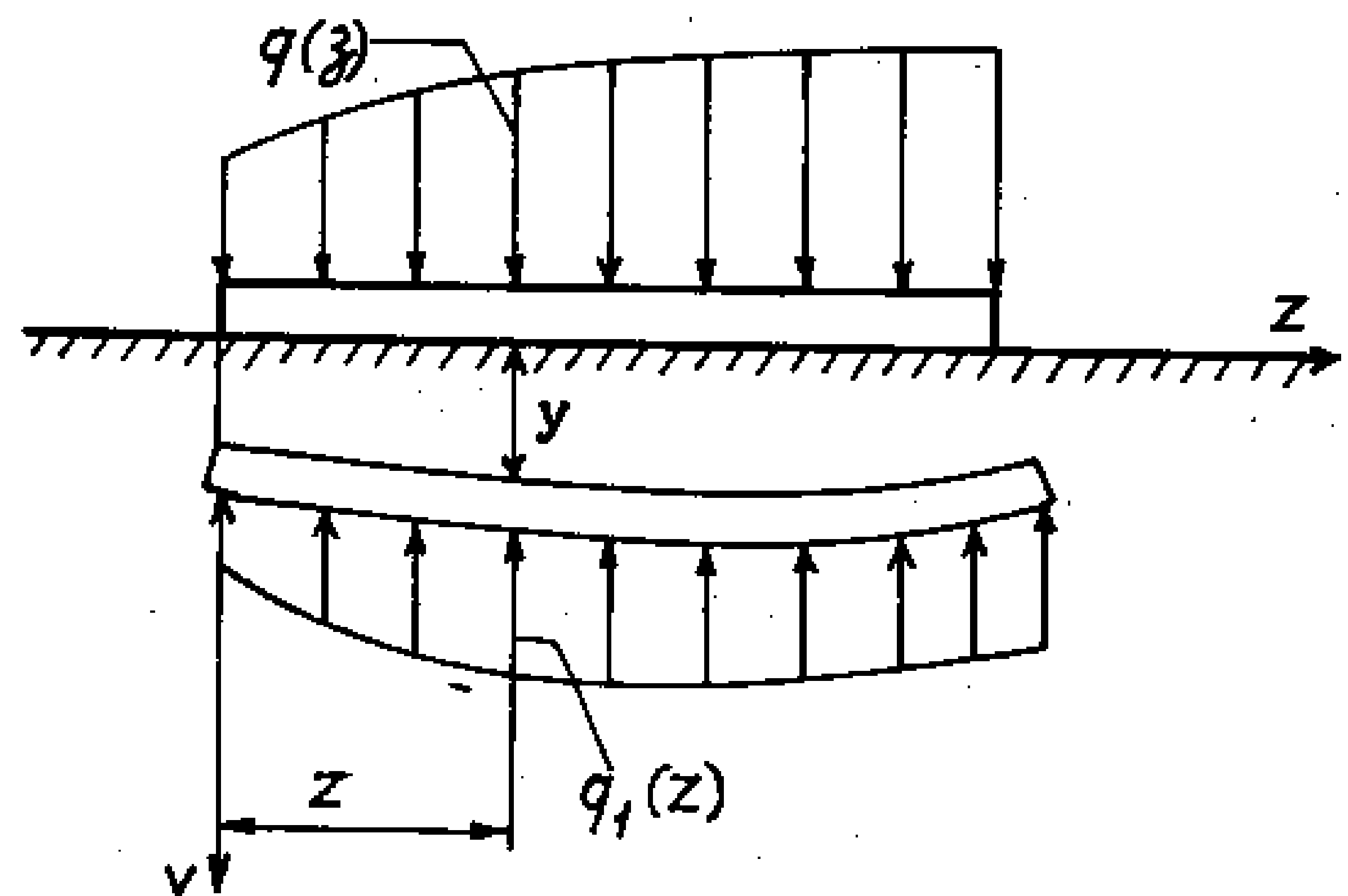
Xét một dầm có $EI$ là hằng số, đặt trên nền đàn hồi và chịu tải trọng ngang phân bố $q_z$ hướng xuống (hình 10-1). Nếu tại mặt cắt toạ độ $z$ dầm có độ võng $y$ thì ta giả thiết rằng độ lún của nền cũng có giá trị $y$ và, do đó, có phản lực $ky$. Các phản lực này phân bố lên đáy dầm, dọc theo chiều dài. Dầm có bề rộng $b$ thì phản lực này có thể quy đổi về một hệ lực phân bố đường dọc theo chiều dài dầm với cường độ :

$$q_1 = bq = bky = Ky. \qquad (10\text{-}2)$$

Hệ số $K$ có thứ nguyên [Lực/(Chiều dài)$^2$].

Trục $y$ có chiều từ trên xuống dưới, ngoại lực tác dụng lên dầm $q$ và $q_1$ có chiều hướng lên là dương để phù hợp với các liên hệ vi phân giữa nội và ngoại lực đã biết. Dầm sẽ chịu tải trọng ngang phân bố tổng cộng là $-q+q_1$.

*Hình 10-1.* Tải trọng và phản lực tác động lên dầm




Phương trình vi phân độ võng của dầm chịu uốn là: $\dfrac{d^2y}{dz^2} = -\dfrac{M}{EI}$.

Lấy đạo hàm hai lần, chú ý tới liên hệ vi phân giữa mômen uốn và tải trọng ngang phân bố, ta nhận được:

$$\frac{d^4y}{dz^4} = -\frac{1}{EI}\left[-q+q_1\right], \text{ hay } EIy^{IV} = q - q_1 = q - Ky.$$

Viết lại dưới dạng $$y^{IV} + 4\alpha^4 y = \frac{q}{EI}, \qquad (10\text{-}3)$$

trong đó ký hiệu $$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}.$$

$\alpha$ là một đặc trưng của dầm và nền, có thứ nguyên là: [(chiều dài)$^{-1}$].

Nghiệm của phương trình (10-3) được trình bày dưới dạng

$$y = \bar{y} + y^* \tag{10-4}$$

$\bar{y}$ - nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không vế phải:

$$\bar{y} = e^{\alpha z}(C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z) + e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z)\ ; \tag{10-5}$$

$y^*$ - một nghiệm riêng nào đó của phương trình vi phân có vế phải.

Khi tải trọng phân bố $q$ có dạng bậc nhất $q=az+b$ thì nghiệm riêng có dạng:

$$y^* = \frac{az+b}{4\alpha EI} = \frac{q}{K}\ ; \tag{10-6}$$

do đó:

$$y = e^{\alpha z}(C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z) + e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z) + \frac{q}{K}.$$

Các hằng số $C_i$ được xác định theo các điều kiện biên.

## 10-3. DẦM DÀI VÔ HẠN

Xét trường hợp dầm có chiều dài được xem là vô hạn chịu một lực tập trung $F$ như trên hình 10-2a.

Vì dầm dài vô hạn nên tiết diện đặt lực $F$ có thể coi là tiết diện đối xứng của dầm. Bài toán là đối xứng, nếu chọn gốc toạ độ tại điểm đặt lực thì chỉ cần xét một nửa dầm có $z \geq 0$.

Khi không có lực phân bố, nghiệm riêng của phương trình lấy là $y^* = 0$.

$$y = e^{\alpha z}(C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z) + e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z)$$

Ở xa điểm đặt lực, độ võng phải tắt dần, do đó hệ số của hàm số $e^{\alpha z}$ phải bằng không $C_1 = C_2 = 0$.

Độ võng và các đạo hàm của độ võng sẽ phụ thuộc hai hằng số $C_3$, $C_4$.

$$y = e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z)\ ; \tag{10-7a}$$

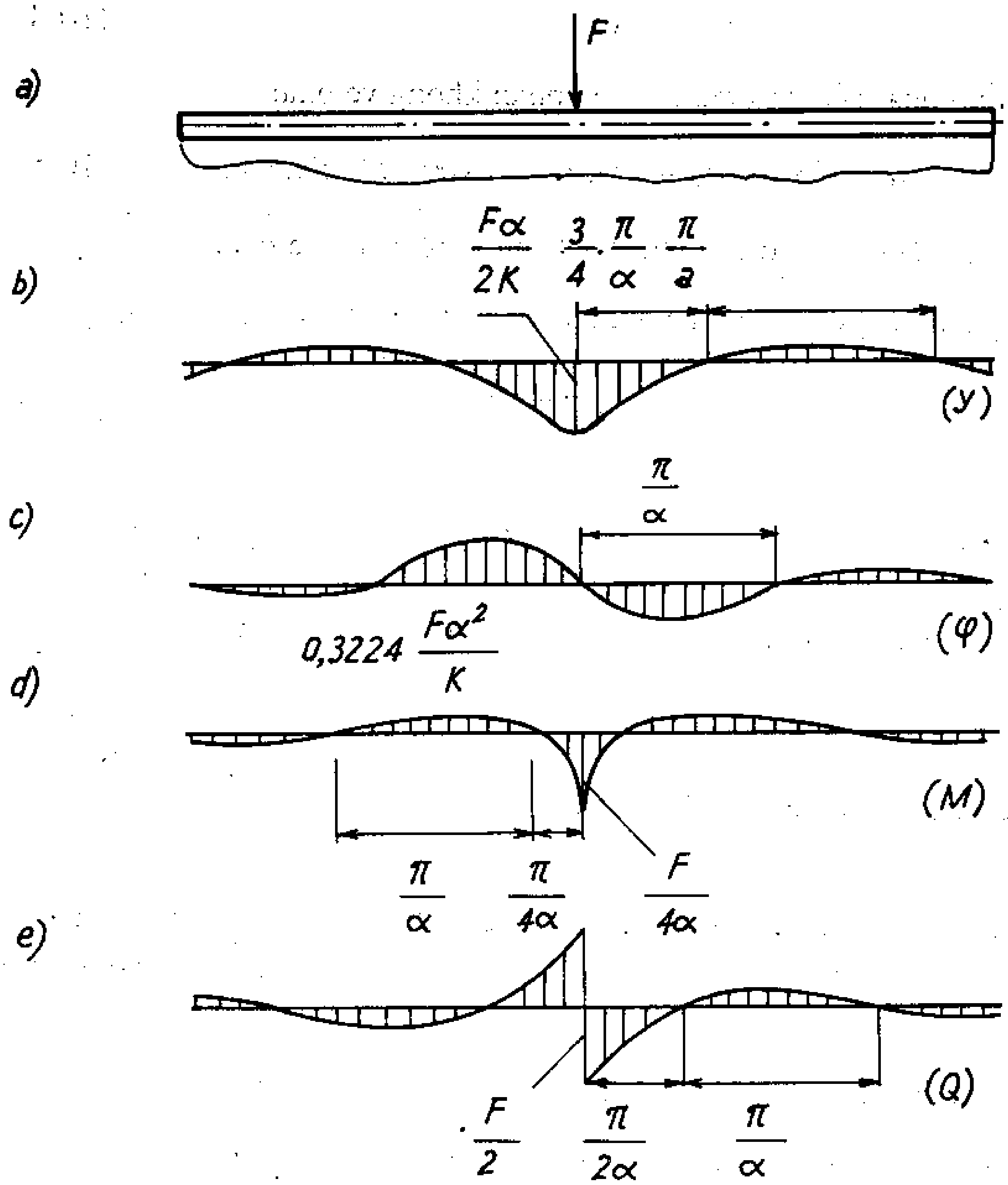
$$\varphi = y' = -\alpha e^{-\alpha z}\left[(C_3 - C_4)\cos\alpha z + (C_3 + C_4)\sin\alpha z\right]\ ; \tag{10-7b}$$

$$M = -EIy'' = -2\alpha^2 EIe^{-\alpha z}(C_3 \sin\alpha z - C_4 \cos\alpha z)\ ; \tag{10-7c}$$

$$Q = -EIy''' = -2\alpha^3 EIe^{-\alpha z}\left[(C_3 + C_4)\cos\alpha z + (C_4 - C_3)\sin\alpha z\right]. \tag{10-7d}$$

Bài toán đối xứng, độ võng là hàm liên tục, đối xứng với trục $y$ nên tại tiết diện ở trục đối xứng đạo hàm phải bằng không

$$y'(0) = \varphi(0) = 0. \tag{10-7e}$$




*Hình 10-2.* Biểu đồ chuyển vị và ứng lực của dầm

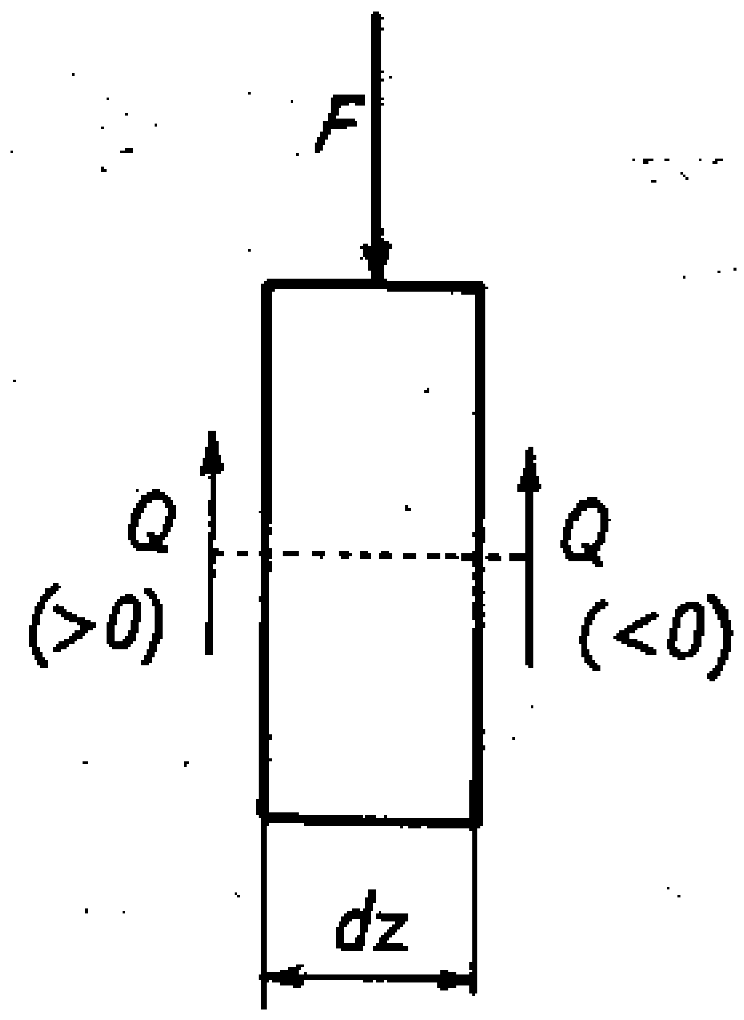
Lực cắt, là hàm phản xứng và có bước nhảy tại gốc toạ độ, phải thoả mãn điều kiện: lực cắt tại bên phải và bên trái tiết diện $z = 0$ có giá trị bằng nhau nhưng trái dấu. Từ điều kiện cân bằng của đoạn thanh $dz$ lấy tại gốc toạ độ như trên hình 10-3, ta được:

$$Q(0) = -\frac{F}{2}. \tag{10-7f}$$

Theo (10-7b,d,e,f) ta có hệ phương trình :

$$C_3 - C_4 = 0\,; \qquad C_3 + C_4 = \frac{F}{4\alpha^3 EI}.$$

Giải hệ phương trình tìm được: $C_3 = C_4 = \frac{F}{8\alpha^3 EI} = \frac{\alpha F}{2K}$.




*Hình 10-3.* Phân tố thanh tại gốc toạ độ.

Thay các hằng số này vào (10-7a,b,c,d) ta có các biểu thức rút gọn:

$$y = \frac{\alpha F}{2K}\eta_o(\alpha z);$$

$$\varphi = -\frac{\alpha^2 F}{K}\eta_3(\alpha z);$$

$$M = \frac{F}{4\alpha}\eta_1(\alpha z);$$

$$Q = -\frac{F}{2}\eta_2(\alpha z). \qquad (10\text{-}8)$$

trong đó các hàm:

$$\eta_o(\alpha z) = e^{-\alpha z}(\cos\alpha z + \sin\alpha z); \qquad \eta_1(\alpha z) = e^{-\alpha z}(\cos\alpha z - \sin\alpha z);$$

$$\eta_2(\alpha z) = e^{-\alpha z}\cos\alpha z; \qquad \eta_3(\alpha z) = e^{-\alpha z}\sin\alpha z. \qquad (10\text{-}9)$$

Trị số các hàm $\eta_o$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ tìm được theo bảng (xem phụ lục II).

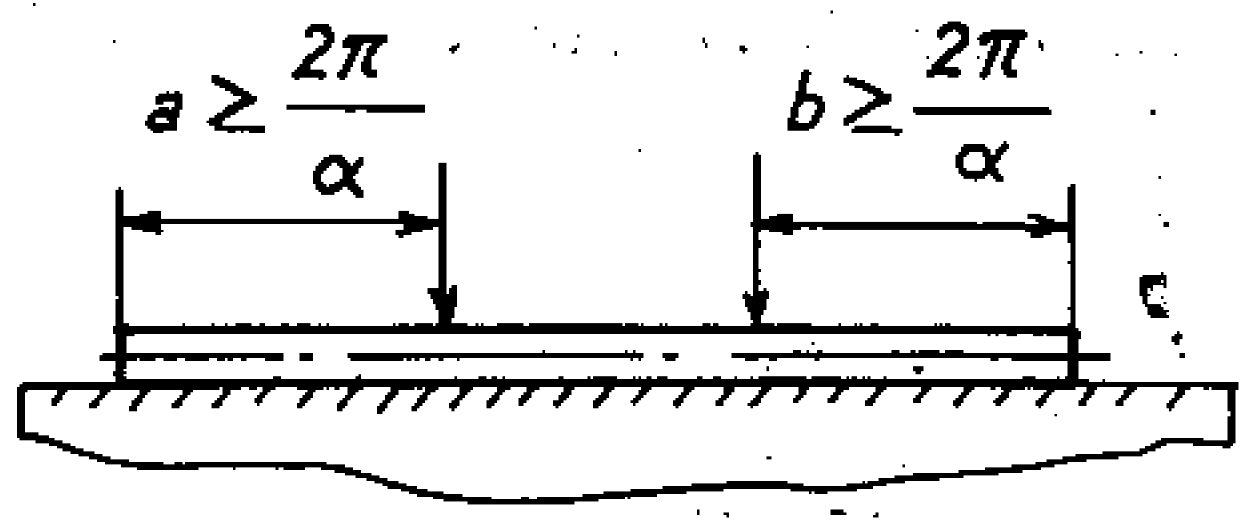
Theo biểu thức (10-8) ta vẽ được các biểu đồ độ võng, góc xoay, mômen uốn, lực cắt cho nửa bên phải ($z \geq 0$), sau đó suy ra cho nửa bên trái ($z \leq 0$). Theo tính chất đối xứng (biểu đồ độ võng, mômen uốn) hoặc phản xứng (biểu đồ góc xoay, lực cắt) ta nhận được kết quả như trên hình 10-3b, c, d, e.

Các biểu đồ là hàm tắt dần và tuần hoàn theo chu kì $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Nếu độ võng lớn nhất tại gốc toạ độ là $y_{max} = \frac{F\alpha}{2K}$ thì sau một chu kì, tại $z = \frac{2\pi}{\alpha}$, độ võng chỉ còn là $y\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = \frac{\alpha F}{K}\eta_o(2\pi) = \frac{\alpha F}{2K}.0{,}00187$ nghĩa là chỉ gần bằng $0{,}2\%$ độ võng lớn nhất. Trên thực tế ta có thể coi $y\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \approx 0$, đó là cơ sở để kết luận về độ dài tương đối của dầm :

*Dầm được xem là dài vô hạn nếu khoảng cách từ điểm đặt lực tới các đầu mút của dầm lớn hơn* $\frac{2\pi}{\alpha}$ (hình 10-4). Khi các khoảng cách này nhỏ hơn $\frac{2\pi}{\alpha}$ thì dầm được xem là có chiều dài hữu hạn.

*Hình 10-4.* Điều kiện về dầm dài vô hạn




Sử dụng nghiệm (10-8) đối với trường hợp một lực tập trung và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, có thể dễ dàng tìm được chuyển vị và nội lực của dầm dài trên nền đàn hồi với các dạng tải trọng khác.

Xét dầm dài vô hạn có tải trọng phân bố đều $q$ trên chiều dài $l$ như trên hình 10-5.

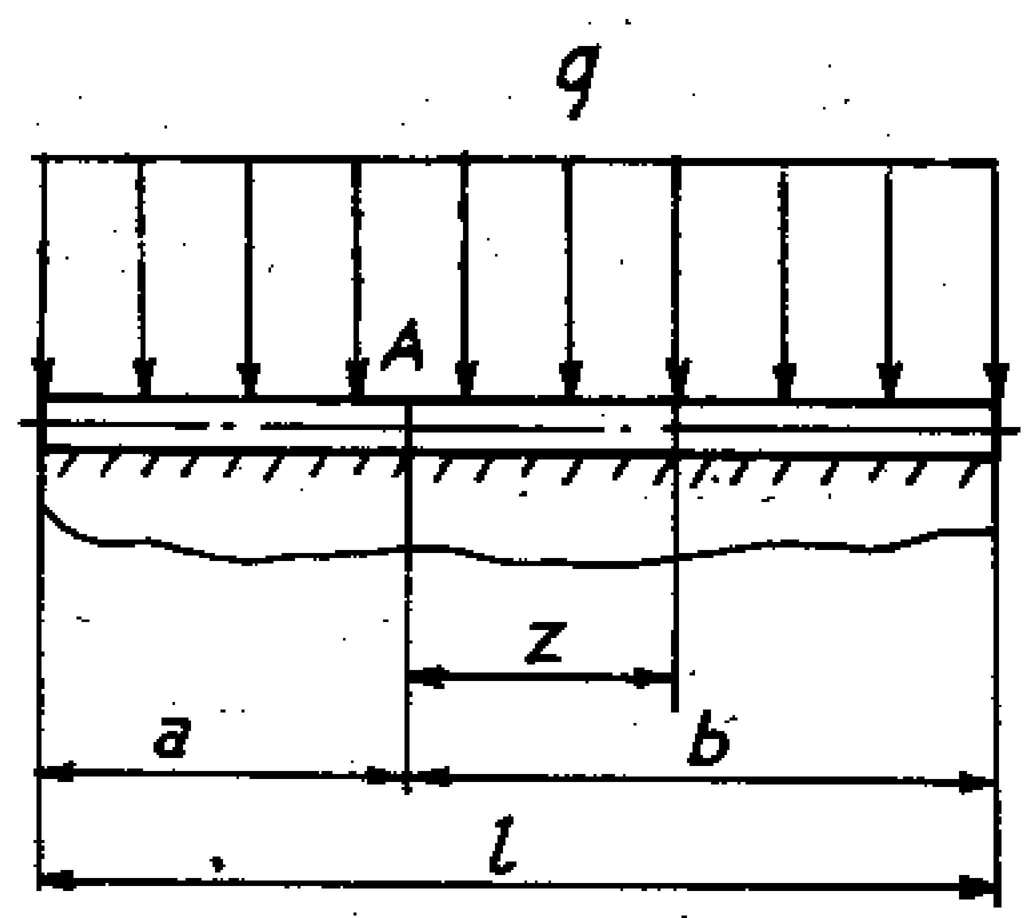
Độ võng tại tiết diện $A$, nằm trong đoạn đặt tải, được tính bằng tổng độ võng do các tải trọng phân tố $qdz$ ở cách $A$ một đoạn $z$:

$$y = \int_o^a \frac{qdz}{2K}\alpha\,\eta_o(\alpha z) + \int_o^b \frac{qdz}{2K}\alpha\,\eta_o(\alpha z) =$$

$$= \int_o^a \frac{q\alpha}{2K} e^{-\alpha z}(\cos\alpha z + \sin\alpha z)dz + \int_o^b \frac{q\alpha}{2K} e^{-\alpha z}(\cos\alpha z + \sin\alpha z)dz\,.$$

Kết quả: $$y = \frac{q}{2K}\left[2 - e^{-\alpha a}\cos\alpha a - e^{-\alpha b}\cos\alpha b\right]. \qquad (10\text{-}10)$$

Khi các khoảng cách $a$ và $b$ lớn, các giá trị $e^{-\alpha a}$, $e^{-\alpha b}$ là rất nhỏ thì độ võng sẽ tiến tới giá trị $y = \frac{q}{K}$. Nghĩa là: trong đoạn đặt tải, tại điểm cách xa hai đầu đoạn thì độ võng sẽ bằng hằng số; dầm không có độ cong và mômen uốn sẽ bằng không.




*Hình 10-5.* Dầm chịu lực phân bố

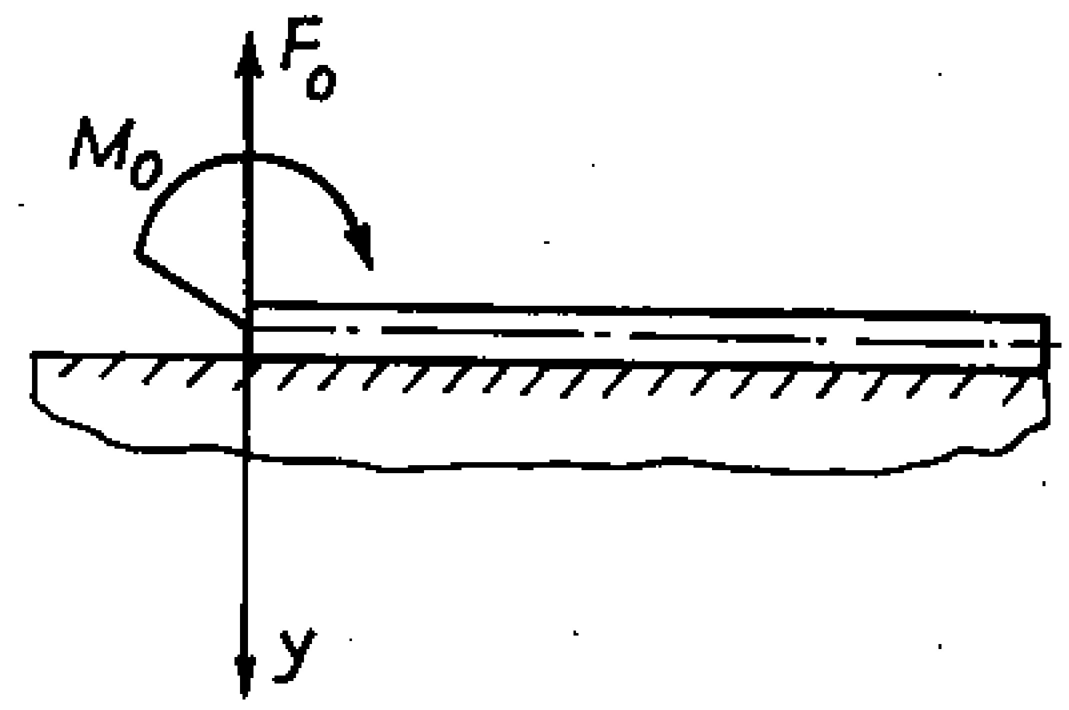
Nếu điểm $A$ nằm ngoài, giả sử bên phải đoạn đặt tải thì độ võng sẽ là :

$$y = \int_b^a \frac{q\alpha}{2K} e^{-\alpha z}(\cos\alpha z + \sin\alpha z)dz =$$

$$= \frac{q}{2K}\left(e^{-\alpha b}\cos\alpha b - e^{-\alpha a}\cos\alpha a\right). \qquad (10\text{-}11)$$

Bài toán dầm có chiều dài bán vô hạn đặt trên nền đàn hồi cũng được giải quyết trên cơ sở nghiệm tương tự như đối với dầm dài vô hạn. Các hằng số $C_1 = C_2 = 0$, các hằng số $C_3$, $C_4$ được xác định theo điều kiện biên tại tiết diện đầu mút dầm, tại đó đặt gốc toạ độ.

Xét dầm bán vô hạn chịu mômen $M_o$ và lực $F_o$ tại đầu mút trên như hình 10-6.




*Hình 10-6.* Dầm bán vô hạn chịu lực tập trung

Nghiệm vẫn có dạng tổng quát (10-7a)

$$y = e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z).$$

Điều kiện biên tại mút dầm $z = 0$:

$$M = M_o \text{ và } Q = F_o.$$

Theo các biểu thức (10-7c,d) khi $z = 0$ ta có:

$$2\alpha^2 EI\, C_4 = M_o; \qquad 2\alpha^3 EI\,(C_3 + C_4) = F_o.$$

Từ đó xác định được:

$$C_4 = \frac{M_o}{2EJ\alpha^2} = \frac{2\alpha^2}{K}M_o; \quad C_3 = \frac{2\alpha}{K}F_o - \frac{2\alpha^2}{K}M_o. \qquad (10\text{-}12)$$

Thay các hằng số này vào các biểu thức (10-7) bạn đọc có thể nhận được biểu thức của độ võng, góc xoay, mômen uốn, lực cắt của dầm.

## *10-4. DẦM DÀI HỮU HẠN*

Đối với dầm có độ dài hữu hạn, độ võng khi tải trọng phân bố bậc nhất sẽ là :

$$y = \frac{q}{K} + e^{\alpha z}(C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z) + e^{-\alpha z}(C_3 \cos\alpha z + C_4 \sin\alpha z).$$

Để thuận tiện cho các phép tính, ta dùng tổ hợp của các nghiệm độc lập của phương trình vi phân là:

$$Y_1(\alpha z) = ch\alpha z.\cos\alpha z;$$

$$Y_2(\alpha z) = \frac{1}{2}[ch\alpha z.\sin\alpha z + sh\alpha z.\cos\alpha z];$$

$$Y_3(\alpha z) = \frac{1}{2}sh\alpha z.\sin\alpha z;$$

$$Y_4(\alpha z) = \frac{1}{4}[ch\alpha z.\sin\alpha z - sh\alpha z.\cos\alpha z]. \qquad (10\text{-}13)$$

Các hàm $Y_i$ gọi là các hàm Krưlov, đã được lập thành bảng để tra các trị số (xem phụ lục II) và có các tính chất sau:

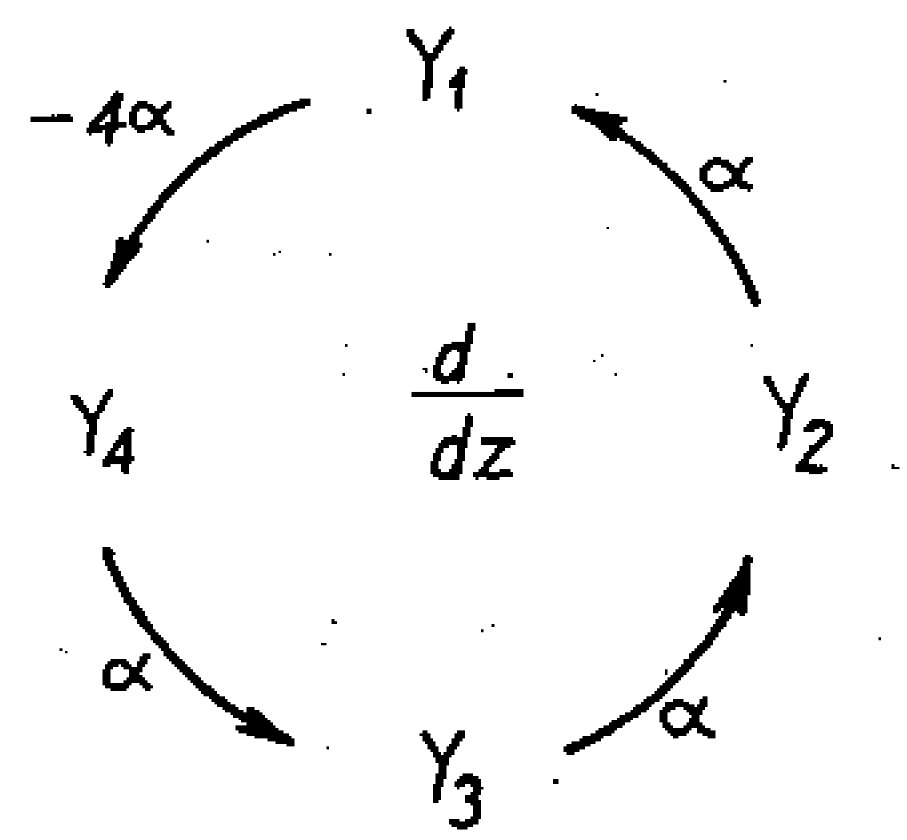
* $Y_1(0) = 1$;  $Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0$.

* Đạo hàm bậc nhất của các hàm có quan hệ:

$$\frac{dY_1}{dz} = -4\alpha Y_4 \; ; \qquad \frac{dY_2}{dz} = \alpha Y_1 \; ;$$

$$\frac{dY_3}{dz} = \alpha Y_2 \; ; \qquad \frac{dY_4}{dz} = \alpha Y_3 \, .$$

Qui tắc đạo hàm bậc nhất được minh hoạ theo vòng tròn như trên hình 10-7.




*Hình 10-7.* Đạo hàm các hàm Krulov

Khi đó nghiệm bài toán sẽ là :

$$y = \frac{q}{K} + AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4 \; ;$$

$$\varphi = y' = \frac{q'}{K} - 4\alpha AY_4 + \alpha BY_1 + \alpha CY_2 + \alpha DY_3 \; ;$$

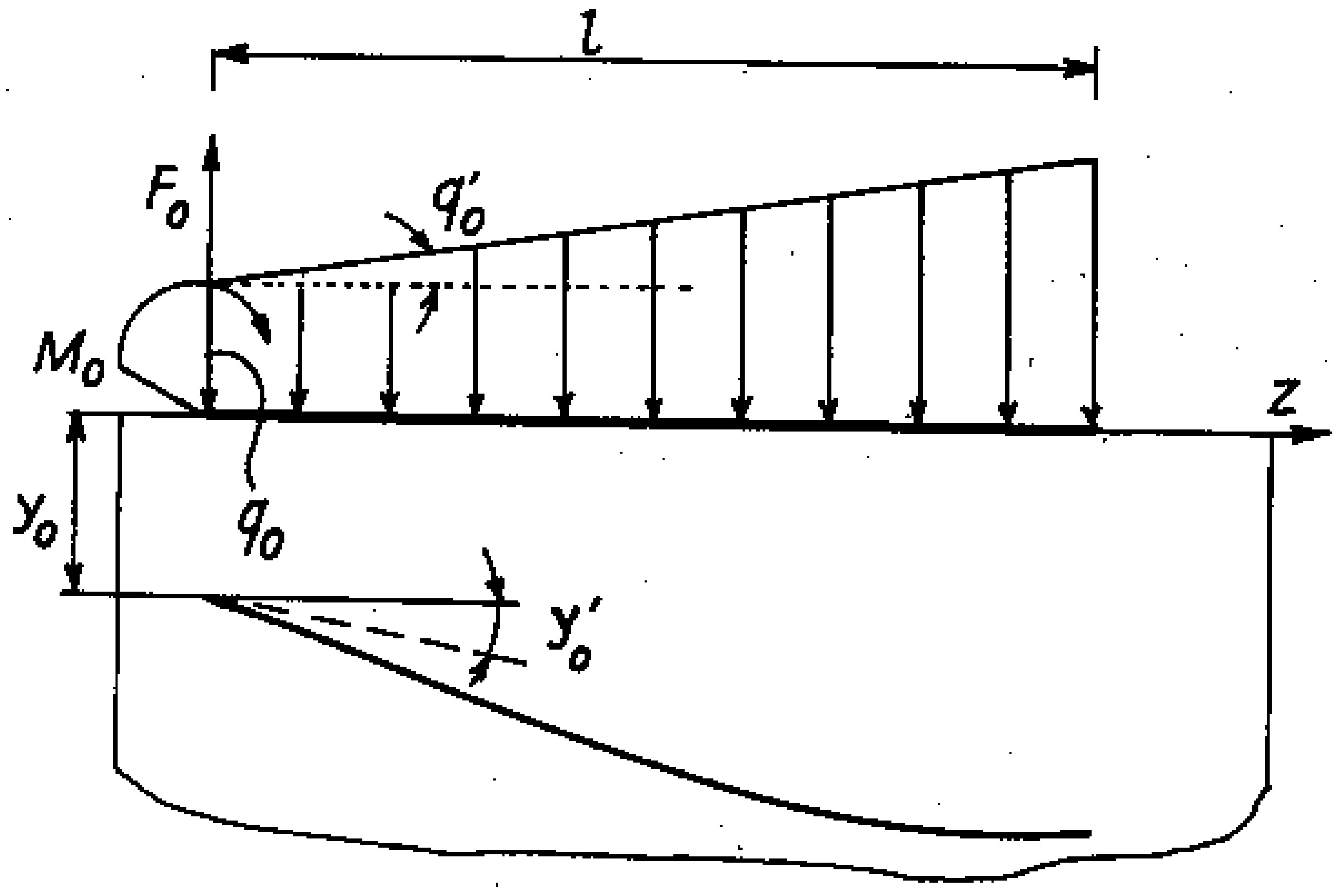
$$M = -EIy'' = KAY_3 + KBY_4 - \frac{K}{4}CY_1 - \frac{K}{4}DY_2 \; ;$$

$$Q = K\alpha AY_2 + K\alpha BY_3 + K\alpha CY_4 - \frac{K}{4}\alpha DY_1 \, .$$

Các hằng số tích phân được xác định theo điều kiện tại đầu dầm $z = 0$:

$$y(0) = y_o \; ; \qquad \varphi(0) = \varphi_o \; ; \qquad M(0) = M_o \; ; \qquad Q(0) = Q_o \, .$$

*Hình 10-8.* Dầm hữu hạn một đoạn




Theo các điều kiện này ta có hệ phương trình:

$$\frac{q_o}{K} + A = y_o \; ; \qquad \frac{q'_o}{K} + \alpha B = \varphi_o \; ;$$

$$-\frac{K}{4}C = M_o; \qquad -\frac{\alpha K}{4}D = Q_o.$$

Từ đó tìm được các hằng số :

$$A = y_o - \frac{q_o}{K}; \quad B = -\frac{q'_o}{\alpha K} + \frac{\varphi_o}{K}; \quad C = -\frac{4M_o}{K}; \quad D = -\frac{4Q_o}{\alpha K}.$$

Ngoài giá trị của tải trọng $q_o$ và $q'_o$ đã biết; hai trong bốn thông số $y_o$, $\varphi_o$, $M_o$, $Q_o$ được cho trước, hai thông số còn lại được xác định theo điều kiện biên ở cuối dầm khi $z = l$. Sau khi thay các hằng số $A, B, C, D$ ta có các nghiệm:

$$y = \frac{q}{K} + \left(y_o - \frac{q_o}{K}\right)Y_1 + \left(\frac{\varphi_o}{K} - \frac{q'_o}{\alpha K}\right)Y_2 - 4\frac{M_o}{K}Y_3 - 4\frac{Q_o}{\alpha K}Y_4;$$

$$\varphi = \frac{q'}{K} - 4\alpha\left(y_o - \frac{q_o}{K}\right)Y_4 + \alpha\left(\frac{\varphi_o}{K} - \frac{q'_o}{\alpha K}\right)Y_1 - 4\alpha\frac{M_o}{K}Y_2 - 4\frac{Q_o}{K}Y_3;$$

$$M = (Ky_o - q_o)Y_3 + (\varphi_o - \frac{q'_o}{\alpha})Y_4 - M_oY_1 + \frac{Q_o}{K}Y_2;$$

$$Q = \alpha(Ky_o - q_o)Y_4 + (\alpha\varphi_o - q'_o)Y_3 + 4\alpha M_oY_2 + Q_oY_1. \qquad (10\text{-}14)$$

Đây chính là phương pháp thông số ban đầu viết cho dầm hữu hạn trên nền đàn hồi có một đoạn (hình 10-8); nếu dầm có nhiều đoạn thì (10-14) là nghiệm của đoạn đầu tiên bên trái, nghiệm trong các đoạn còn lại của dầm được viết giống như trong phương pháp thông số ban đầu đã nghiên cứu ở mục 9-4.

Độ võng và mômen uốn trong đoạn thứ $i+1$ được viết theo độ võng và mômen uốn của đoạn thứ $i$ như sau:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\Delta y_a - \frac{\Delta q_a}{K}\right)Y_1[\alpha(z-a)] + \left(\frac{\Delta\varphi_a}{K} - \frac{\Delta q'_a}{\alpha K}\right)Y_2[\alpha(z-a)] +$$
$$-4\frac{\Delta M_a}{K}Y_3[\alpha(z-a)] - 4\frac{\Delta Q_a}{\alpha K}Y_4[\alpha(z-a)];$$

$$M_{i+1} = M_i + (K\Delta y_a - \Delta q_a)Y_3[\alpha(z-a)] + \left(\Delta\varphi_a - \frac{\Delta q'_a}{\alpha}\right)Y_4[\alpha(z-a)] +$$
$$+\Delta M_aY_1[\alpha(z-a)] + \frac{\Delta Q_a}{K}Y_2[\alpha(z-a)].$$

trong đó :

$a$ - toạ độ tiết diện phân chia hai đoạn $i$ và $i+1$;

$\Delta y_a$, $\Delta\varphi_a$ - bước nhảy của độ võng, góc xoay tại tiết diện $z = a$;

$\Delta q_a$, $\Delta q'_a$ - bước nhảy của cường độ và đạo hàm cường độ của lực phân bố tại $z=a$ (chiều $q$ hướng xuống là dương);

$\Delta M_a = M_a$ - mômen tập trung tại $z = a$;

$Q_a = F_a$ - lực tập trung đặt tại $z = a$.

Chiều dương của $M_a$, $F_a$ như chỉ trên hình 10-8.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

10-1. Nêu đặc điểm và biểu thức của mô hình nền Winkler. ý nghĩa vật lý và thứ nguyên của hệ số nền.

10-2. Viết phương trình vi phân của độ võng dầm nằm trên nền đàn hồi Winkler. Giải thích các đại lượng trong phương trình. Viết dạng của nghiệm tổng quát trong trường hợp tải trọng ngang phân bố đều với cường độ $q$.

10-3. Trình bày dạng của nghiệm tổng quát và điều kiện biên trong bài toán dầm dài vô hạn chịu một lực ngang tập trung $F$.

10-4. Vẽ dạng biểu đồ độ võng, mômen uốn và lực cắt của dầm dài vô hạn chịu lực tập trung. Đặc điểm của những biểu đồ này.

10-5. Nêu điều kiện để có thể coi một dầm là dài vô hạn.

10-6. Nêu phương pháp tìm độ võng, mômen uốn và lực cắt của dầm dài vô hạn chịu nhiều lực tập trung, chịu lực phân bố trên một đoạn chiều dài.

10-7. Viết và giải thích dạng nghiệm của bài toán dầm dài hữu hạn đặt trên nền đàn hồi.

# 11 Tính chuyển vị theo các phương pháp năng lượng

## *11-1. KÝ HIỆU, CÁC KHÁI NIỆM CHUNG*

### *11-1-1. Ký hiệu chuyển vị*

Trong các chương trước của giáo trình, để xác định chuyển vị của thanh thẳng ta thường giải các phương trình vi phân có dạng khác nhau tùy thuộc từng trường hợp chịu lực cụ thể đơn giản của thanh: kéo nén, xoắn, uốn. Tuy nhiên còn có những phương pháp khác tổng quát hơn, tiện dụng hơn và có thể sử dụng rộng rãi cho cả hệ thanh. Những phương pháp này dựa trên các nguyên lý năng lượng và được gọi là phương pháp năng lượng. Chương 11 giới thiệu một số các phương pháp hay sử dụng đối với hệ thanh đàn hồi tuyến tính như các phương pháp dựa trên định lý Castigliano, định lý tương hỗ Betti hoặc Maxwell, công thức Maxwell-Mohr...

Chuyển vị trong hệ thanh bao gồm chuyển vị thẳng (chuyển động của trọng tâm tiết diện: theo phương dọc trục, theo phương vuông góc với trục) và chuyển vị quay (chuyển động quay của mặt phẳng tiết diện: quay quanh trục thanh và quay quanh trục nằm trong mặt phẳng tiết diện). Ta gọi chung là chuyển vị của tiết diện theo phương $k$, phương $k$ là phương thẳng khi nói chuyển vị thẳng và là phương vòng khi nói chuyển vị quay.

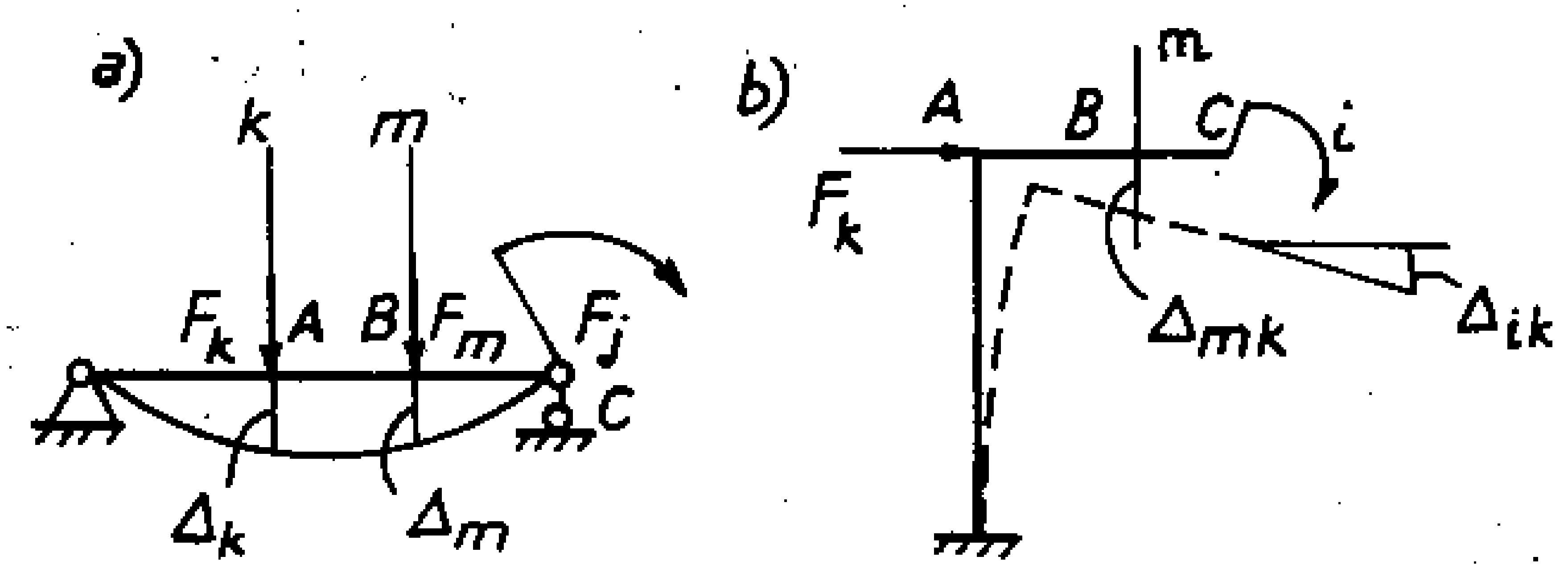
Ký hiệu chung các chuyển vị bởi chữ $\Delta$ kèm theo một chỉ số $k$ biểu thị vị trí và phương của chuyển vị: $\Delta_k$; hoặc kèm theo hai chỉ số, một chỉ số $k$ biểu thị vị trí và phương của chuyển vị, một chỉ số $m$ biểu thị nguyên nhân gây ra chuyển vị: $\Delta_{km}$. Các tải trọng tương ứng theo phương của các chuyển vị cũng được ký hiệu bằng chữ $F$ kèm theo chỉ số $k$ biểu thị vị trí và phương của lực: $F_k$; chẳng hạn tương ứng với chuyển vị thẳng ta có lực tập trung (phương thẳng) và tương ứng với chuyển vị quay ta có mômen tập trung (phương vòng).

Trên hình 11-1a, phương $k$ và $m$ là phương thẳng đứng tại tiết diện $A$, $B$; phương $j$ là phương vòng tại gối tựa $C$; $F_k$ là một lực tập trung theo phương thẳng đứng tại tiết diện $A$; $F_m$ là một lực tập trung theo phương thẳng đứng tại tiết diện $B$; $F_j$

là mômen đặt tại gối tựa $B$; $\Delta_k$ và $\Delta_m$ là độ võng của dầm tại tiết diện $A$, $B$.

Tương tự, trên hình 11-1b, $F_k$ là một lực tập trung theo phương nằm ngang đặt tại tiết diện $A$; $\Delta_{mk}$ là chuyển vị thẳng đứng của tiết diện $B$ do nguyên nhân là lực $F_k$ gây ra và $\Delta_{ik}$ là góc xoay của tiết diện $C$ do nguyên nhân là lực $F_k$ gây ra.

*Hình 11-1.* Ký hiệu chuyển vị và lực




Ta cũng thường dùng ký hiệu $\delta_{km}$ để chỉ chuyển vị theo phương và vị trí $k$ do nguyên nhân lực theo phương và vị trí $m$ là một đơn vị ($\overline{F}_m = 1$). Trị số $\delta_{km}$ được gọi là chuyển vị đơn vị.

Dưới đây, để cho gọn ta gọi chuyển vị (lực) theo phương và vị trí $k$ là *chuyển vị (lực) theo phương k,* chữ phương bao hàm cả phương và vị trí.

Trong phạm vi đàn hồi tuyến tính, ta có thể viết:

* Chuyển vị theo phương $k$ do lực $F_m$ bằng: $\Delta_{km} = \delta_{km} F_m$; (11-1)

* Chuyển vị theo phương $k$ do nhiều lực $F_i$ bằng: $\Delta_k = \sum_i \delta_{ki} F_i$. (11-2)

Các biểu thức (11-1), (11-2) là cơ sở để tính toán chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính và cũng được gọi là biểu thức tổng quát của định luật Hooke.

### *11-1-2. Chuyển vị khả dĩ*

*Chuyển vị khả dĩ hoặc biến dạng khả dĩ* được hiểu là bất cứ một dạng chuyển vị, một dạng biến dạng nào bảo đảm được các điều kiện liên kết của hệ, hoặc còn gọi là các điều kiện biên hình học của hệ. Chẳng hạn, với hệ trên hình 11-1a, những chuyển vị theo đường đàn hồi thoả mãn điều kiện: tại hai gối tựa độ võng bằng không là những chuyển vị khả dĩ; với hệ trên hình 11-1b, những chuyển vị theo đường biến dạng trục thanh thoả mãn điều kiện: tại ngàm mọi chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay đều bằng không là những chuyển vị khả dĩ.

Chuyển vị thực của hệ chỉ là một trong các chuyển vị khả dĩ.

### *11-1-3. Công của ngoại lực, công nội lực, thế năng biến dạng đàn hồi*

Công là số đo năng lượng được thực hiện của lực khi điểm đặt lực có các chuyển vị. Công của ngoại lực, ký hiệu $T$, là công dương vì gây ra các chuyển vị. Công của nội lực, ký hiệu $A^*$, là công âm vì ngăn cản chuyển vị. Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng thì một hệ biến dạng đàn hồi ở trạng thái cân bằng sẽ thoả mãn điều kiện:

$$T = -A^*. \qquad (11\text{-}3)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi $U$, gọi tắt là thế năng, là phần năng lượng tích luỹ bên trong vật thể trong quá trình biến dạng. TNBDĐH là một đại lượng xác định dương.

Khi bỏ qua năng lượng không hồi phục như nhiệt năng hoặc năng lượng gây biến dạng dẻo, theo nguyên lý bảo toàn năng lượng TNBDĐH sẽ có trị số bằng công của nội lực nhưng ngược dấu $U = -A^*$.

Hoặc ta có: $$T = U = -A^* \qquad (11\text{-}4)$$

Dưới đây, ta lập biểu thức của các đại lượng năng lượng kể trên.

*Biểu thức của TNBDĐH:* Từ kết quả ở các chương trước (các công thức 3-8, 6-8, 7-8) ta có biểu thức của TNBDĐH đối với hệ thanh đàn hồi tuyến tính chịu lực tổng quát, có tổng chiều dài $L$:

$$U = \int_L \frac{N^2}{2EA}dz + \int_L \frac{M_x^2}{2EI_x}dz + \int_L \frac{M_y^2}{2EI_y}dz + \int_L \frac{M_z^2}{2GI_{xo}}dz +$$

$$+ \int_L \alpha_y \frac{Q_y^2}{2GA}dz + \int_L \alpha_x \frac{Q_x^2}{2GA}dz. \qquad (11\text{-}5)$$

Trong bài toán phẳng với các ứng lực là $N$, $M_x$, $Q_y$ thì biểu thức chỉ còn lại ba số hạng:

$$U = \int_L \frac{N^2}{2EA}dz + \int_L \frac{M_x^2}{2EI_x}dz + \int_L \alpha_y \frac{Q_y^2}{2GA}dz. \qquad (11\text{-}6)$$

Trong dầm chịu uốn, bỏ qua ảnh hưởng lực dọc, lực cắt thì:

$$U = \int_L \frac{M_x^2}{2EI_x}dz. \qquad (11\text{-}7)$$

*Biểu thức công của lực:* Ta sẽ tính công của lực $F_i$ trên chuyển vị cùng phương $\Delta_i$ của điểm đặt lực. Giả thử điểm đặt lực có một số gia chuyển vị $\delta(\Delta_i)$ rất nhỏ, lực $F_i$ là hằng trong di chuyển rất nhỏ này sẽ sinh một công $\delta T = F_i.\delta(\Delta_i)$.

Công của lực $F_i$ trên toàn bộ chuyển vị $\Delta_i$, trong trường hợp tổng quát, sẽ là tổng của các công phân tố $\delta T$

$$T = \int_A \delta T = \int_{\Delta_i} F_i \delta(\Delta_i). \qquad (11\text{-}8)$$

Ta xét các trường hợp riêng:

* Lực là hằng trong quá trình di chuyển $\Delta_i$: $\qquad T = F_i . \Delta_i$. $\qquad$ (11-9)

Trường hợp này xảy ra khi lực $F_i$ độc lập với chuyển vị $\Delta_i$, chẳng hạn chuyển vị khả dĩ do nguyên nhân nào đó gây ra. Khi này công $T$ được gọi là *công khả dĩ và bằng tích của lực với chuyển vị cùng phương.*

Trên hình 11-2a, *công được xác định bằng diện tích hình chữ nhật có cạnh là $F_i$ và $\Delta_i$.*

* Lực và chuyển vị có quan hệ tuyến tính (tuân theo định luật Hooke) $\Delta_i = \delta_{ii} F_i$

$$T = \int_{\Delta_i} \frac{\Delta_i}{\delta_{ii}} \delta(\Delta_i) = \frac{\Delta_i^2}{2\delta_{ii}} = \frac{1}{2} F_i \Delta_i . \qquad (11\text{-}10)$$

Trường hợp này xảy ra trong các hệ đàn hồi tuyến tính mà nguyên nhân gây ra chuyển vị là lực $F_i$. Trên hình 11-2b, *công $T$ bằng diện tích hình tam giác có cạnh là $F_i$ và $\Delta_i$.*

Công của nhiều lực $F_i$ đặt trên hệ đàn hồi tuyến tính sẽ bằng tổng công của tất cả các lực trên các chuyển vị cùng phương tương ứng:

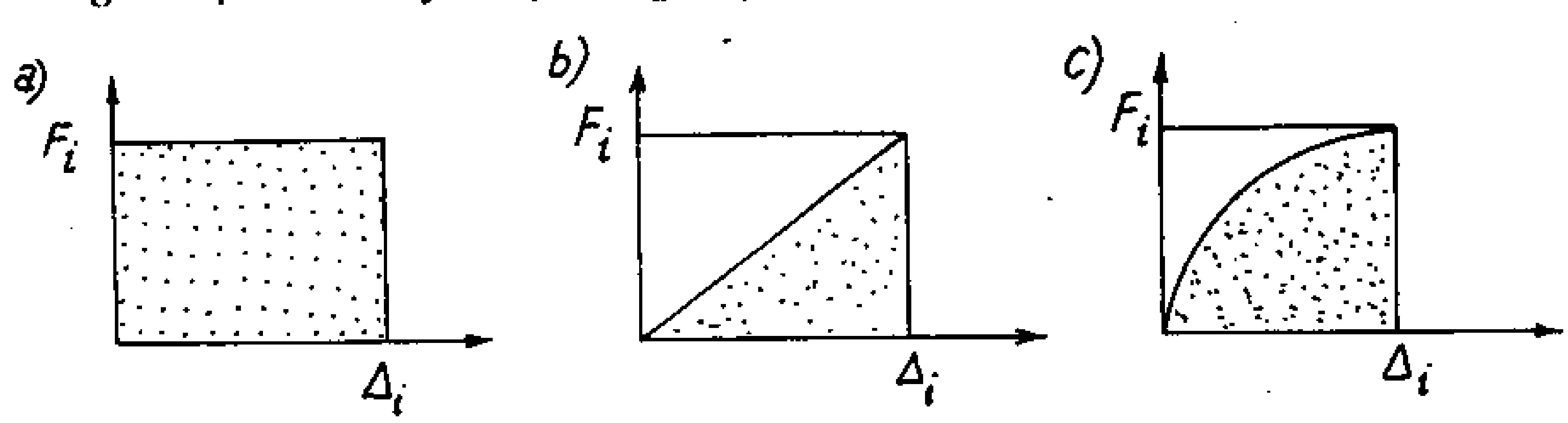
$$T = \frac{1}{2} \sum_i F_i \Delta_i . \qquad (11\text{-}11)$$

Cần lưu ý rằng $\Delta_i$ là giá trị cuối cùng của chuyển vị theo phương $i$, chuyển vị này không phụ thuộc vào thứ tự đặt của các lực $F_i$.

Biểu thức (11-4), khi này, được gọi là định lý Clapeyron:

$$U = T = \frac{1}{2} \sum_i F_i \Delta_i . \qquad (11\text{-}12)$$

Định lý được phát biểu: *TNBD của hệ đàn hồi tuyến tính bằng một nửa tổng của tích giữa lực với chuyển vị tương ứng.*




*Hình 11-2.* Công của ngoại lực

* Trường hợp khi quan hệ $F_i$ và $\Delta_i$ là phi tuyến theo đường cong trên hình 11-2c (trường hợp đàn hồi phi tuyến) thì công $T$ bằng diện tích hình tam giác cong có cạnh là $F_i$ và $\Delta_i$ và biểu thức tổng quát là tích phân (11-8).

## 11-2. ĐỊNH LÝ CASTIGLIANO

Theo định lý Clapeyron, TNBD của hệ đàn hồi tuyến tính là hàm của các lực $F_i$. Giả thử một lực $F_k$ trong số các lực này có một biến thiên vô cùng nhỏ $\delta F_k$ thì các chuyển vị $\Delta_i$, là hàm của các lực $F_i$ sẽ tăng thêm số gia $\delta\Delta_{ik}$ tương ứng bằng:

$$\delta\Delta_{1k} = \frac{\partial\Delta_1}{\partial F_k}\delta F_k\,; \quad \delta\Delta_{2k} = \frac{\partial\Delta_2}{\partial F_k}\delta F_k\,; \ldots\ldots; \quad \delta\Delta_{nk} = \frac{\partial\Delta_n}{\partial F_k}\delta F_k\,.$$

Thế năng $U$ hoặc công $T$ của ngoại lực cũng sẽ có một số gia tương ứng:

$$\delta U_k = \delta T_k = F_1\delta\Delta_{1k} + F_2\delta\Delta_{2k} + \ldots\ldots + F_n\delta\Delta_{nk} =$$

$$= F_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial F_k}\delta F_k + F_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial F_k}\delta F_k + \ldots\ldots + F_n\frac{\partial\Delta_n}{\partial F_k}\delta F_k = \delta F_k\sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial\Delta_i}{\partial F_k}\,.$$

Từ đó, nhận được biểu thức đạo hàm riêng theo lực $F_k$ của thế năng:

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = lim\left(\frac{\delta U_k}{\delta F_k}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Delta_i}{\partial F_k}F_i\,. \qquad (11\text{-}13)$$

Theo định lý Clapeyron (11-12): $2U = \sum_i F_i\Delta_i$.

Lấy đạo hàm riêng theo $F_k$ của cả hai vế, với chú ý $\dfrac{\partial(F_k\Delta_k)}{\partial F_k} = \left(F_k\dfrac{\partial\Delta_k}{\partial F_k} + \Delta_k\right)$,

ta nhận được:

$$2\frac{\partial U}{\partial F_k} = F_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial F_k} + F_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial F_k} + \ldots\ldots + \left(F_k\frac{\partial\Delta_{k1}}{\partial F_k} + \Delta_k\right) + \ldots\ldots + F_n\frac{\partial\Delta_n}{\partial F_k}\,,$$

hoặc

$$2\frac{\partial U}{\partial F_k} = \sum_{i=1}^{n}F_i\frac{\partial\Delta_i}{\partial F_k} + \Delta_k\,. \qquad (11\text{-}14)$$

Lập hiệu hai vế của (11-14) với (11-13), ta nhận được biểu thức tính chuyển vị:

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} = \Delta_k\,. \qquad (11\text{-}15)$$

Biểu thức này mang tên *định lý Castigliano* và được phát biểu như sau: *Đối với hệ đàn hồi tuyến tính thì chuyển vị theo một phương nào đó bằng đạo hàm của TNBD lấy theo biến số là lực có cùng vị trí và phương với chuyển vị.*

Khi xét hệ thanh thì TNBD được xác định theo công thức (11-5) hoặc công thức đơn giản (11-6), (11-7) trong những trường hợp đặc biệt. Chẳng hạn, với dầm chịu uốn phẳng, nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt thì

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} dz \quad \text{và} \quad \Delta_k = \frac{\partial}{\partial F_k}\left(\int_L \frac{M^2}{2EI} dz\right). \qquad (11\text{-}16)$$

Ta đã bỏ các chỉ số của ký hiệu mômen uốn $M$, mômen quán tính $I$ để đơn giản cách viết.

Trong trường hợp đang xét, có thể đưa ký hiệu đạo hàm vào trong dấu tích phân và viết như sau:

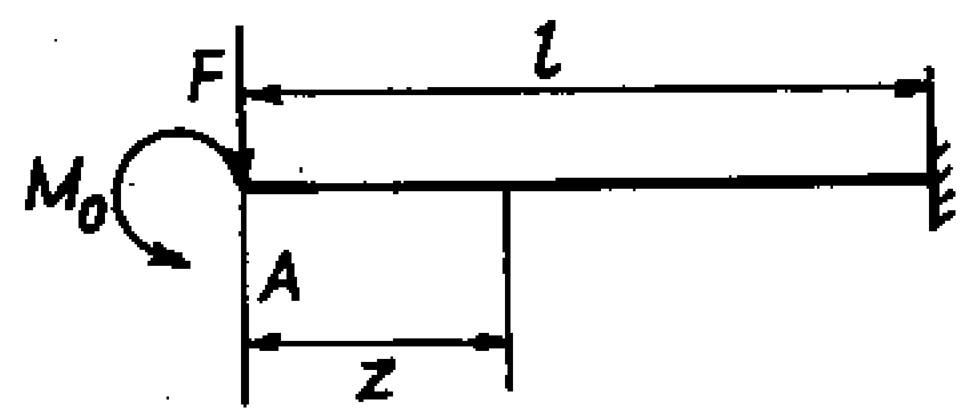
$$\Delta_k = \int_L \frac{\partial}{\partial F_k}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) dz = \int_L \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial F_k}}{EI} dz. \qquad (11\text{-}17)$$

__*Ví dụ 11-1*__. Tìm độ võng tại $A$ của dầm côngxôn chiều dài $l$ chịu lực như trên hình 11-3; $EI = const$.

<u>*Bài giải*</u>. Độ võng tại $A$ có phương của lực $F$.

Công thức để xác định độ võng là (11-17)

$$\Delta = \int_L \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial F}}{EI} dz.$$



*Hình 11-3.* Cho ví dụ 11-1

Trong bài toán đang xét: $\quad M = -M_o - Fz; \quad \dfrac{\partial M}{\partial F} = -z.$

Do đó $$\Delta = \int_L \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial F}}{EI} dz = \int_0^l \frac{M_o z + Fz^2}{EI} dz = \frac{M_o l^2}{2EI} + \frac{Fl^3}{3EI}.$$

Dấu dương của kết quả cho thấy chuyển vị cùng chiều với lực tương ứng.

***Chú thích***: Trong trường hợp cần xác định chuyển vị theo phương $k$ nhưng trên hệ không có lực theo phương này thì ta đặt thêm lực $F_k$ rồi áp dụng công thức tính $\Delta_k$ một cách bình thường, sau đó cho giá trị $F_k = 0$.

__*Ví dụ 11-2*__. Xác định chuyển vị theo phương ngang tại tiết diện $C$ của khung chịu lực $F$ như trên hình 11-4.

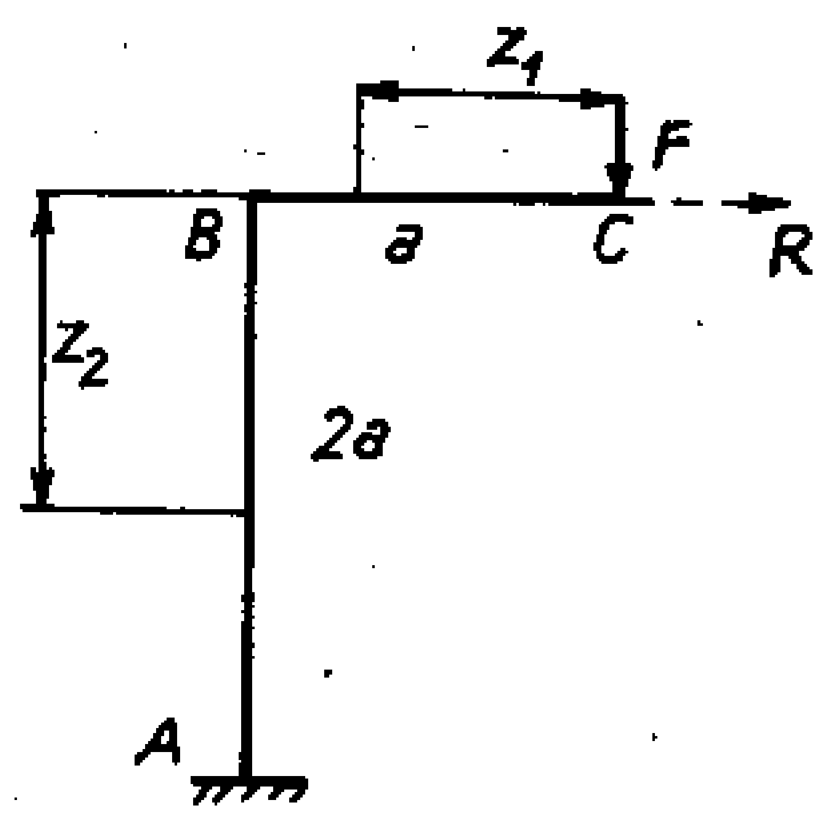
<u>*Bài giải*</u>. Phương chuyển vị là phương nằm ngang tại $C$, ta đặt thêm một lực theo phương này, ký hiệu $R$ (lực này thể hiện bằng đường đứt nét trên hình 11-4).

$M = -Fz_1;\qquad \dfrac{\partial M}{\partial R} = 0$ với $(0 \le z_1 \le a)$

$M = -Fa - Rz_2;\quad \dfrac{\partial M}{\partial R} = -z$ với $(0 \le z_2 \le 2a)$

$$\Delta_R = \int\limits_L \frac{M\dfrac{\partial M}{\partial F}}{EI}dz = \int\limits_0^{2a} \frac{(Fa + Rz_2)z_2}{EI}dz_2 =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(2Fa^3 + \frac{8}{3}Ra^3\right).$$




*Hình 11-4.* Cho ví dụ 11-2

Cho $R=0$, ta tính được chuyển vị ngang cần tìm $\Delta_R = \dfrac{2Fa^3}{EI}$.

## 11-3. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ

### 11-3-1. Biểu thức của nguyên lý công khả dĩ đối với hệ thanh

Nguyên lý công khả dĩ là một nguyên lý được sử dụng rộng rãi khi giải quyết các bài toán tĩnh học trong cơ học.

Nguyên lý được phát biểu như sau:

*Đối với một hệ cô lập nằm ở trạng thái cân bằng thì tổng công khả dĩ của các lực trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng của hệ phải bằng không.*

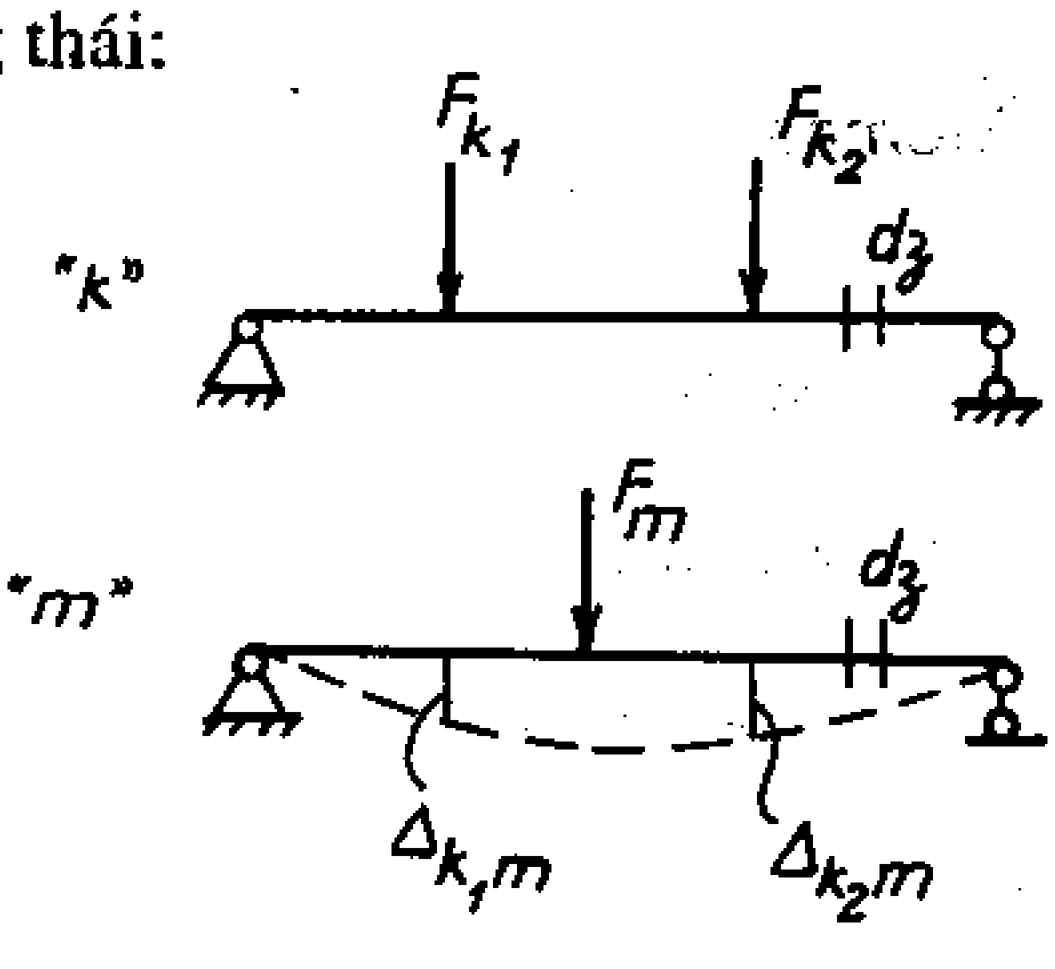
Áp dụng vào hệ biến dạng trong đó có phát sinh nội lực thì *công sẽ bao gồm công của ngoại lực và công của nội lực.*

Xét hệ thanh phẳng tương ứng với hai trạng thái:

* Trạng thái $k$ (hình 11-5a): hệ chịu các ngoại lực $F_k$.

* Trạng thái $m$ (hình 11-5b): hệ chịu các nguyên nhân $m$, trong hệ tồn tại các chuyển vị khả dĩ $\Delta_{km}$.

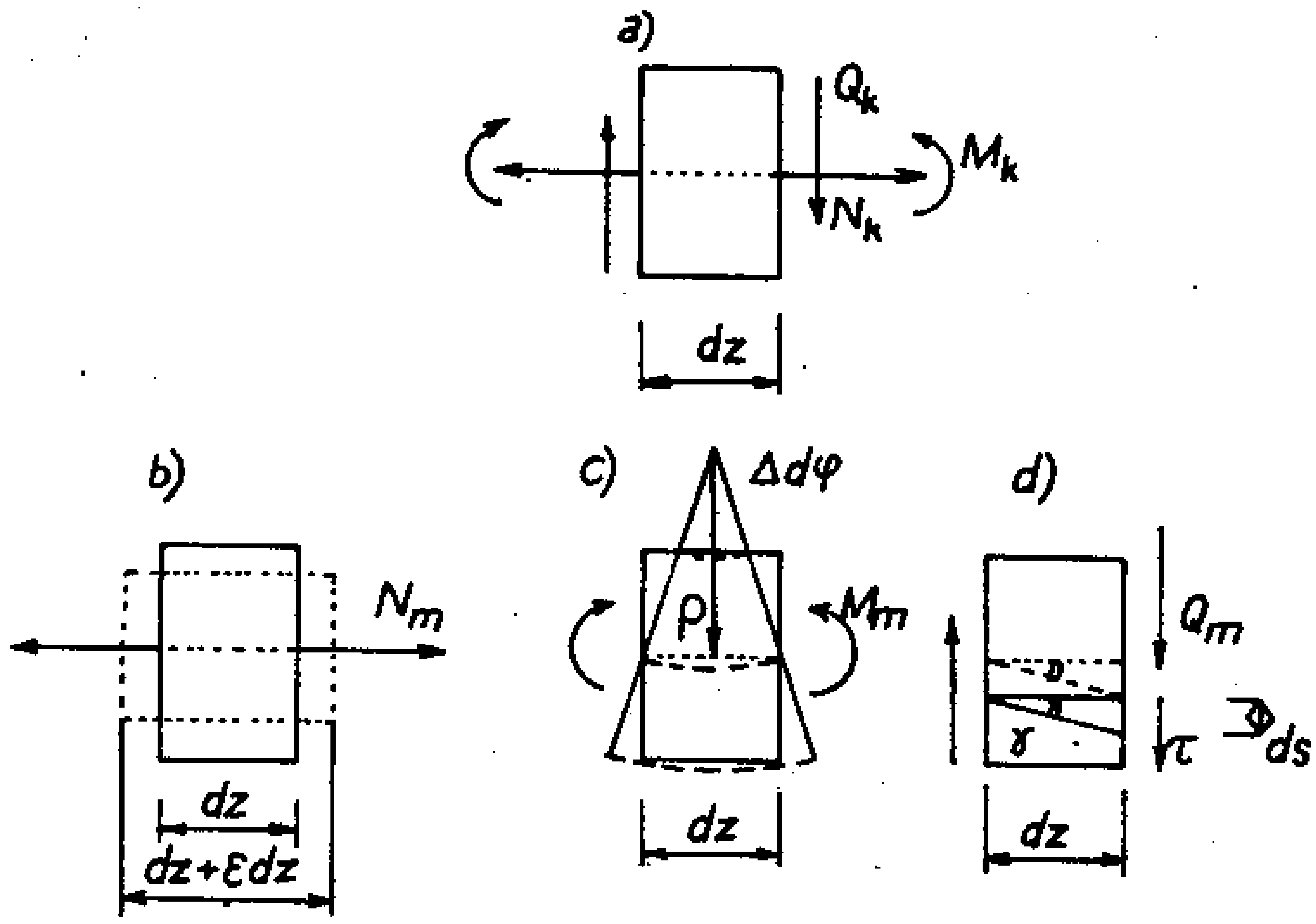
Công khả dĩ $T$ của tất cả các ngoại lực $F_k$ trên các chuyển vị khả dĩ $\Delta_{km}$, theo (11-9) là




*Hình 11-5.* Các trạng thái $k$ và $m$

$$T = \Sigma F_k\, \Delta_{km}. \qquad (11\text{-}18)$$

Để tính công khả dĩ của nội lực trên toàn chiều dài của hệ, ta xét một đoạn chiều dài phân tố $dz$ như trên hình 11-6 và tính công khả dĩ của nội lực trên phân tố đó, gọi là công phân tố của nội lực.




*Hình 11-6.* Công khả dĩ của nội lực trên phân tố thanh

Ở trạng thái $k$ trên phân tố có lực dọc $N_k$, mômen uốn $M_k$, lực cắt $Q_k$ (hình 11-6a). Đối với phân tố đang xét thì những ứng lực này là ngoại lực.

Ở trạng thái $m$ trên phân tố cũng có những ứng lực phẳng nào đó, ký hiệu tương ứng là $N_m$, $M_m$, $Q_m$. Những ứng lực này gây ra các biến dạng khả dĩ theo những kết quả đã biết trong các chương kéo (nén), uốn đã xét ở phần trên của giáo trình

* Lực dọc gây ra độ dãn dài $\Delta dz = \varepsilon\, dz = \dfrac{N_m}{EA} dz$ (hình 11-6b).

* Mômen uốn gây ra góc xoay của tiết diện $\Delta d\varphi = \dfrac{dz}{\rho} = \dfrac{M_m}{EI} dz$ (hình 11-6c).

* Lực cắt gây ra biến dạng góc $\gamma = \dfrac{\tau}{G} = \dfrac{Q_m}{G}\dfrac{S_x^c}{Ib}$, do đó chuyển vị trượt theo phương ứng suất tiếp là $ds = \gamma\, dz$ (hình 11-6d).

Công khả dĩ của lực dọc $N_k$ trên chuyển vị khả dĩ tương ứng là

$$N_k \varepsilon\, dz = N_k \cdot \frac{N_m}{EA} dz \,. \qquad (11\text{-}19)$$

Công khả dĩ của mômen $M_k$ trên chuyển vị khả dĩ tương ứng là

$$M_k \Delta d\varphi = M_k \cdot \frac{M_m}{EI} dz \,. \qquad (11\text{-}20)$$

Công của ứng suất tiếp $\tau_k$ trên chuyển vị trượt khả dĩ tương ứng là $\tau_k.ds$, hoặc:

$$\tau_k.\gamma\, dz = \tau_k.\frac{Q_m}{G}\frac{S_x^c}{Ib}dz = \frac{Q_k S_x^c}{Ib}.\frac{Q_m}{G}\frac{S_x^c}{Ib}dz = \frac{Q_k Q_m}{G}\frac{(S_x^c)^2}{(Ib)^2}dz. \qquad (11\text{-}21)$$

Công của toàn bộ ứng suất tiếp $\tau_k$ trên chuyển vị trượt khả dĩ ở trạng thái $m$ là

$$\int_A (\tau_k.\gamma\, dz)dA = \int_A \left(\frac{Q_k Q_m}{G}\frac{(S_x^c)^2}{(Ib)^2}dz\right)dA =$$

$$= \frac{Q_k Q_m}{GA}dz\left[\frac{A}{I^2}\int\frac{(S_x^c)^2}{b^2}dA\right] = k\frac{Q_k Q_m}{GA}dz, \qquad (11\text{-}22)$$

với
$$k = \frac{A}{I^2}\int\frac{(S_x^c)^2}{b^2}dA.$$

Hệ số $k$ phụ thuộc vào hình dáng tiết diện đã được trình bày trong chương uốn khi tính TNBDĐH (xem 7-5-2).

Như vậy công phân tố của tất cả các lực ở trạng thái $k$ trên chuyển vị khả dĩ ở trạng thái $m$ bằng

$$N_k\varepsilon\, dz + M_k\,\Delta d\varphi + \int_A(\tau_k.\gamma\, dz)dA = \left[\frac{N_k N_m}{EA} + \frac{M_k M_m}{EI} + k\frac{Q_k Q_m}{GA}\right]dz.$$

Đối với phân tố $dz$ đang xét thì $N_k$, $M_k$, $Q_k$ giữ vai trò như những ngoại lực, do đó công của nội lực $dA^*$ sẽ bằng công của ngoại lực nhưng mang dấu ngược lại

$$dA^* = -\left[\frac{N_k N_m}{EA} + \frac{M_k M_m}{EI} + k\frac{Q_k Q_m}{GA}\right]dz. \qquad (11\text{-}23)$$

Công khả dĩ của nội lực trên toàn bộ chiều dài của hệ thanh:

$$A^* = -\int_L\left[\frac{N_k N_m}{EA} + \frac{M_k M_m}{EI} + k\frac{Q_k Q_m}{GA}\right]dz.$$

Cho tổng công ngoại lực $T$ và nội lực $A^*$ bằng không, ta nhận được biểu thức của nguyên lý công khả dĩ:

$$\Sigma F_k\,\Delta_{km} = \int_l\frac{N_k N_m}{EA}dz + \int_l\frac{M_k M_m}{EI}dz + \int_l k\frac{Q_k Q_m}{GA}dz. \qquad (11\text{-}24)$$

trong đó:

$\Delta_{km}$ - chuyển vị theo phương $k$ (ở trạng thái $k$) do nguyên nhân $m$ (ở trạng thái $m$) gây ra;

- $N_k, M_k, Q_k$ – ứng lực của hệ thanh ở trạng thái $k$ (do nguyên nhân $F_k$ gây ra);
- $N_m, M_m, Q_m$ - ứng lực của hệ thanh ở trạng thái $m$ (do nguyên nhân $F_m$ gây ra).

Vế trái biểu thức là công của ngoại lực $F_k$ trên những chuyển vị khả dĩ của hệ do nguyên nhân $m$ (chẳng hạn lực $F_m$) gây ra.

Lưu ý là khi tính công trên biến dạng dài và trên góc xoay thì ta tính theo lực dọc, mômen uốn; nhưng khi tính biến dạng trượt thì ta lại tính theo ứng suất tiếp. Sở dĩ có sự khác nhau như vậy vì khi kéo nén hoặc uốn thì tiết diện vẫn phẳng, còn khi uốn ngang chịu thêm lực cắt thì tiết diện không còn phẳng, ứng suất tiếp phân bố phi tuyến theo chiều cao. Nếu tính công trên biến dạng dài và trên biến dạng xoay một cách tỷ mỷ theo ứng suất thì ta vẫn nhận được cùng một kết quả; việc này đã được thực hiện trong các chương 3, chương 7 khi tính TNBDĐH.

### *11-3-2. Định lý Betti về sự tương hỗ của công khả dĩ các ngoại lực*

Nếu áp dụng biểu thức (11-24) để tính công của ngoại lực $F_m$ trên những chuyển vị khả dĩ của hệ do nguyên nhân lực $F_k$ gây ra thì trị số vế phải của biểu thức vẫn giữ nguyên và ta có kết quả

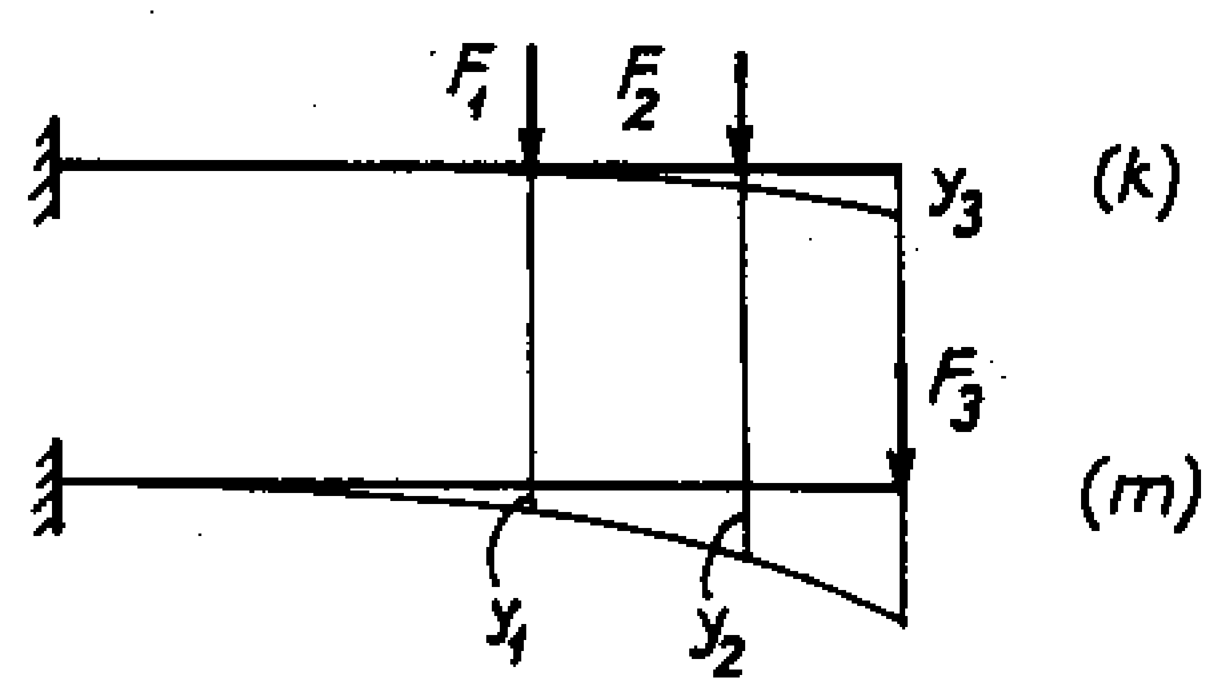
$$\Sigma F_k\,\Delta_{km} = \Sigma F_m\,\Delta_{mk}\,. \qquad (11\text{-}25)$$

Kết quả này được gọi là định lý Betti về sự tương hỗ của công khả dĩ các ngoại lực. Định lý được phát biểu như sau:

*Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của ngoại lực tác động lên hệ ở trạng thái k trên những chuyển vị khả dĩ của hệ ở trạng thái m sẽ bằng công khả dĩ của ngoại lực tác động lên hệ ở trạng thái m trên những chuyển vị khả dĩ của hệ ở trạng thái k.*

Có thể minh hoạ định lý Betti trên hình vẽ 11-7 khi hệ là một dầm. Ở trạng thái $k$, hệ chịu lực $F_1$, $F_2$. Ở trạng thái $m$, hệ chịu lực $F_3$. Với ký hiệu các chuyển vị trên hình vẽ, ta có biểu thức

$$F_1 y_1 + F_2 y_2 = F_3 y_3$$



***Hình 11-7.*** Định lý tương hỗ của công khả dĩ

### 11-2-3. Định lý Maxwell về sự tương hỗ của các chuyển vị đơn vị

Nếu hệ ở trạng thái $k$ chỉ đặt một lực đơn vị theo phương $k$, ký hiệu $\overline{F}_k = 1$, và nhận được chuyển vị đơn vị $\delta_{mk}$ theo phương $m$, hệ ở trạng thái $m$ chỉ đặt một lực đơn vị theo phương $m$, ký hiệu $\overline{F}_m = 1$, và nhận được chuyển vị đơn vị $\delta_{km}$ theo phương $k$ thì từ định lý Betti ta có đẳng thức

$$\delta_{mk} = \delta_{mk} . \tag{11-26}$$

Kết quả này được gọi là định lý Maxwell và được phát biểu như sau:

*Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị theo phương k do lực theo phương m gây ra sẽ bằng chuyển vị đơn vị theo phương m do lực theo phương k gây ra.*

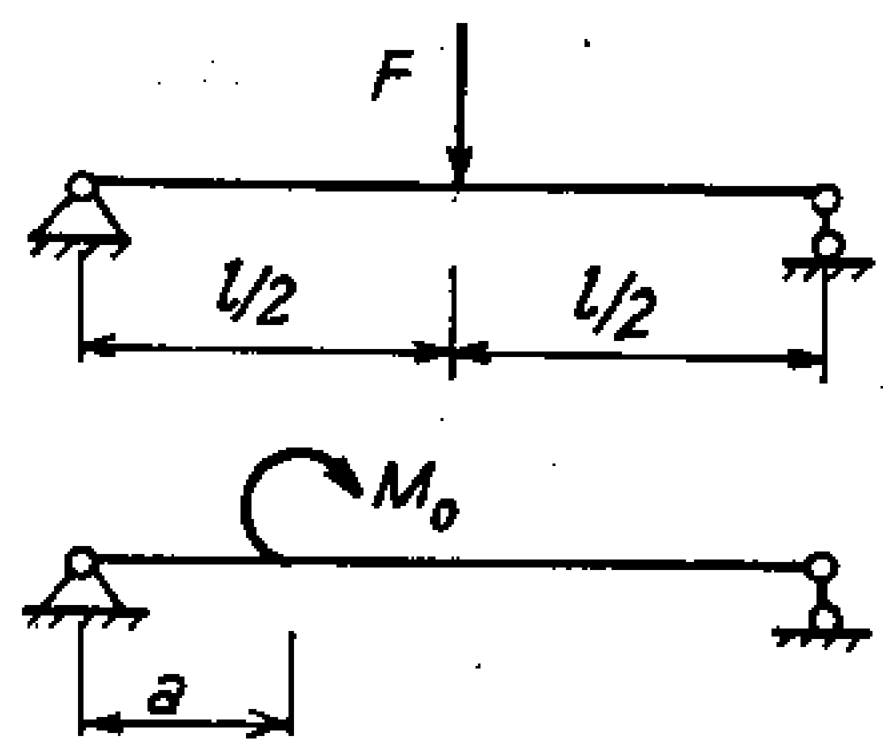
Có thể áp dụng các định lý trên để tính chuyển vị của hệ thanh.

<u>*Ví du 11-3*</u>. Biết biểu thức độ võng của dầm đơn giản chịu lực ngang tập trung $F$ ở chính giữa nhịp (hình 11-8):

$$y = \frac{F}{4EI}\left(-\frac{z^3}{3} + \frac{l^2 z}{4}\right),$$

với $(0 \le z \le l/2)$.

Tìm độ võng ở giữa nhịp do mômen $M_o$ đặt cách gối tựa trái một đoạn $a \le l/2$ gây ra.




*Hình 11-8.* Cho ví dụ 11-3

<u>*Bài giải*</u>.

Biểu thức góc xoay trên dầm do lực $F$ gây ra $\varphi = y' = \frac{F}{4EI}\left(-z^2 + \frac{l^2}{4}\right)$.

Góc xoay tại tiết diện đặt mômen là $\varphi_{MF} = \frac{F}{4EI}\left(-a^2 + \frac{l^2}{4}\right)$.

Ký hiệu $y_{FM}$ là độ võng tại giữa nhịp do mômen $M_o$ gây ra, định lý Betti cho ta quan hệ $F . y_{FM} = M_o . \varphi_{MF}$

từ đó $$y_{FM} = \varphi_{MF}\,\frac{M_o}{F} = \frac{M_o}{4EI}\left(-a^2 + \frac{l^2}{4}\right).$$

Khi $a=0$, mômen đặt tại gối tựa, độ võng ở giữa nhịp bằng $\frac{M_o l^2}{16EI}$.

## 11-4. CÔNG THỨC MAXWELL - MOHR

### 11-4-1. Thiết lập công thức

Trên cơ sở biểu thức của nguyên lý công khả dĩ (11-24), ta có thể nhận được một công thức rất thuận tiện và tổng quát để tính chuyển vị theo phương $k$ bất kỳ do nguyên nhân $m$ gây ra.

Giả thử hệ chịu các nguyên nhân $m$ đã biết, ta gọi trạng thái này của hệ là trạng thái $m$. Ứng lực phát sinh là $N_m$, $M_m$, $Q_m$. Chuyển vị theo phương $k$ cần tìm là $\Delta_{km}$.

Lập một trạng thái $k$, là trạng thái hệ chỉ chịu một lực đơn vị $\overline{F}_k = 1$ theo phương $k$, chiều của lực chọn tùy ý. Ứng lực phát sinh ở trạng thái này là $\overline{N}_k$, $\overline{M}_k$, $\overline{Q}_k$.

Công khả dĩ của lực $\overline{F}_k$ trên chuyển vị khả dĩ $\Delta_{km}$, theo (11-24), sẽ là

$$\overline{F}_k . \Delta_{km} = \int_l \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} dz + \int_l \frac{\overline{M}_k M_m}{EI} dz + \int_l k \frac{\overline{Q}_k Q_m}{GA} dz .$$

Vì $\overline{F}_k = 1$ nên ta nhận được công thức Maxwell - Mohr (năm 1874) để tính chuyển vị:

$$\Delta_{km} = \int_l \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} dz + \int_l \frac{\overline{M}_k M_m}{EI} dz + \int_l k \frac{\overline{Q}_k Q_m}{GA} dz . \qquad (11\text{-}27)$$

Nếu kết quả dương thì chuyển vị cùng chiều với lực đặt $F_k$.

Nếu hệ có nhiều đoạn thanh với biểu thức ứng lực khác nhau thì cần lấy tích phân theo từng đoạn rồi thực hiện phép tổng

$$\Delta_{km} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} dz + \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_k M_m}{EI} dz + \sum \int_{l_i} k \frac{\overline{Q}_k Q_m}{GA} dz . \qquad (11\text{-}28)$$

Trong bài toán không gian, ta có thể viết công thức Maxwell - Mohr như sau:

$$\Delta_{km} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} dz + \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_{x,k} M_{x,m}}{EI_x} dz + \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_{y,k} M_{y,m}}{EI_y} dz +$$

$$+ \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_{z,k} M_{z,m}}{GI_{xo}} dz + \sum \int_{l_i} k_y \frac{\overline{Q}_{y,k} Q_{y,m}}{GA} dz + \sum \int_{l_i} k_x \frac{\overline{Q}_{x,k} Q_{x,m}}{GA} dz . \qquad (11\text{-}29)$$

### *11-4-2. Vận dụng công thức*

a- **Dầm, khung phẳng:** Có thể bỏ qua ảnh hưởng lực dọc, lực cắt và công thức trở thành:

$$\Delta_{km} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_k M_m}{EI} dz \qquad (11\text{-}30)$$

b- **Hệ thanh liên kết khớp chịu tải trọng ở nút, hệ dàn:** Trong hệ chỉ tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{km} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} dz$$

Lực dọc, cũng như $E$, $A$ thường không thay đổi trên từng thanh $l_i$ nên có thể đưa chúng ra ngoài dấu tích phân và nhận được công thức đại số tính chuyển vị trong dàn:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} \int_{l_i} dz = \sum \frac{\overline{N}_k N_m}{EA} l_i . \qquad (11\text{-}34)$$

Dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh của hệ.

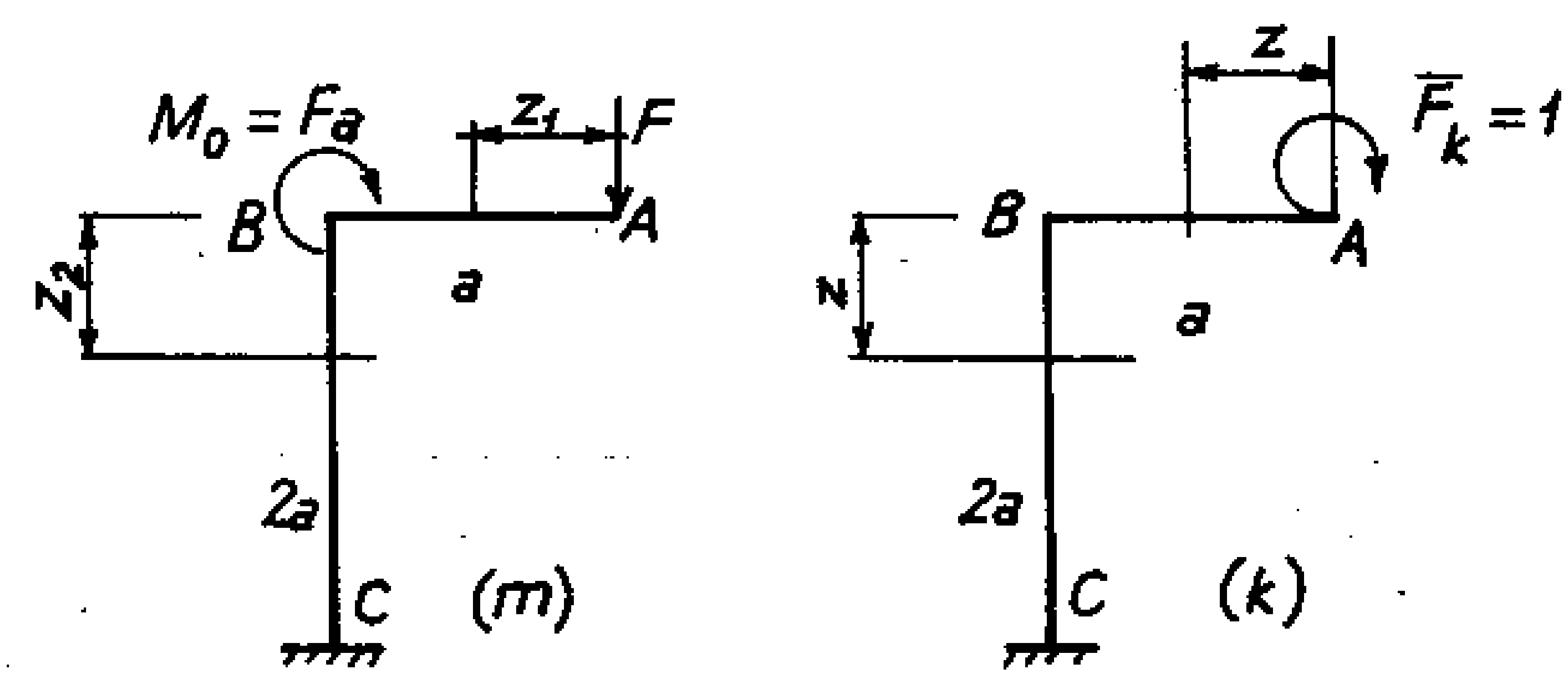
*Ví dụ 11-4*. Xác định góc xoay tại đầu mút $A$ của khung có độ cứng $EI$ chịu lực chịu lực như trên hình 11-9a.

*Bài giải*. Trạng thái đã cho như trên hình 11-9a là trạng thái $m$.

Mômen uốn ở trạng thái $m$: $M_m = -Fz_1$ với $(0 \le z_1 \le a)$;

$M_m = -2Fa$ với $(0 \le z_2 \le 2a)$.

*Hình 11-9.* Cho ví dụ 11-4



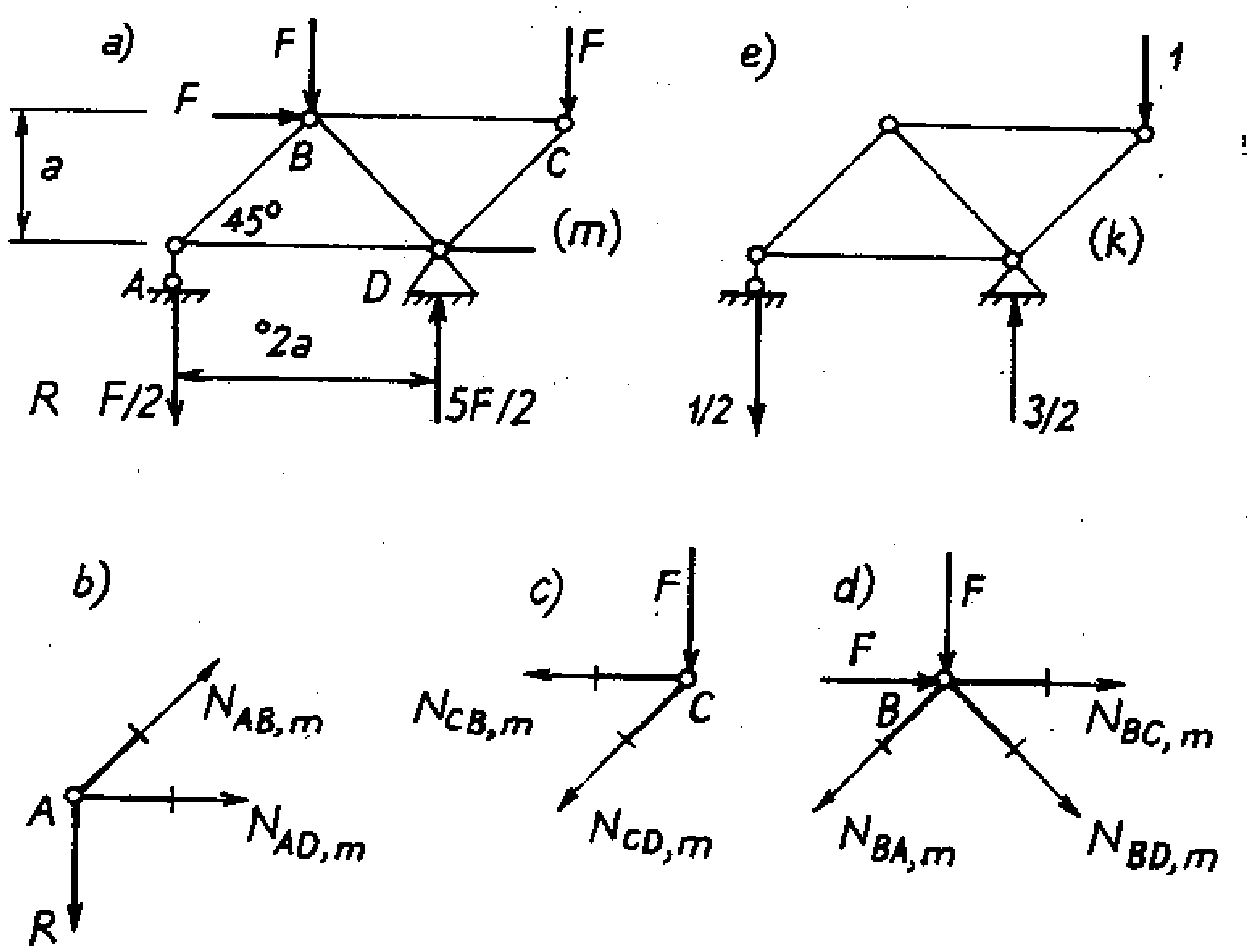

Lập trạng thái $k$ là trạng thái hệ chỉ chịu lực đơn vị theo phương cần tìm chuyển vị. Chuyển vị là góc xoay tại $A$ nên lực đơn vị $\overline{F}_k$ là một mômen uốn đặt tại $A$, chiều chọn tuỳ ý, chẳng hạn thuận chiều kim đồng hồ như trên hình 11-9b.

Mômen uốn ở trạng thái $k$: $\overline{M}_k = -1$ $(\forall z)$.

$$\Delta_{km} = \varphi_A = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_k M_m}{EI} dz = \frac{1}{EI}\left[\int_0^a 1.Fz_1 dz_1 + \int_0^{2a} 1.2Fadz_2\right] = \frac{9Fa^2}{2EI}.$$

***Ví du 11-5***. Xác định chuyển vị thẳng đứng tại mắt $C$ của hệ dàn cho trên hình 11-10a.

*Bài giải*. Hệ đã cho là trạng thái $m$. Sau khi xác định được phản lực, lực dọc $N_m$ trong các thanh xác định bằng phương pháp tách mắt theo thứ tự như chỉ trên các hình 11-10b, c, d (tách mắt $A$ tìm lực dọc trong thanh $AB$, $AD$; tách mắt $C$ tìm lực dọc trong thanh $CD$, $CB$ rồi tách mắt $B$ tìm lực dọc trong thanh còn lại $BD$)




*Hình 11-10.* Cho ví dụ 11-5

**Bảng 11-1**

| Thanh | $l$ | EA | $N_m$ | $\overline{N}_k$ | $N_m\overline{N}_k l/EA$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| AB | $a\sqrt{2}$ | EA | $F\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 2Fa/EA |
| AD | 2a | EA | $-F/2$ | $-1/2$ | Fa/2EA |
| CB | 2a | EA | F | 1 | 4Fa/EA |
| CD | $a\sqrt{2}$ | EA | $-F\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ Fa/EA |
| BD | 2a | EA | $-F\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | Fa/EA |

Trạng thái $k$ là trạng thái hệ chỉ chịu một lực đơn vị theo phương thẳng đứng đặt tại nút $C$ như trên hình 11-10e. Cách xác định lực dọc $\overline{N}_k$ trong các thanh cũng tiến hành tương tự như ở trạng thái $m$.

Kết quả được ghi trong bảng 11-1. Nhân tương ứng các cột 2,4,5 rồi chia cho $EA$ ở cột 3, lấy tổng, ta nhận được trị số chuyển vị thẳng đứng của mắt $C$.

$$\Delta_{km} = \frac{15 + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{Fa}{EA}.$$

## 11-5. PHÉP "NHÂN BIỂU ĐỒ" VÊRÊXAGHIN

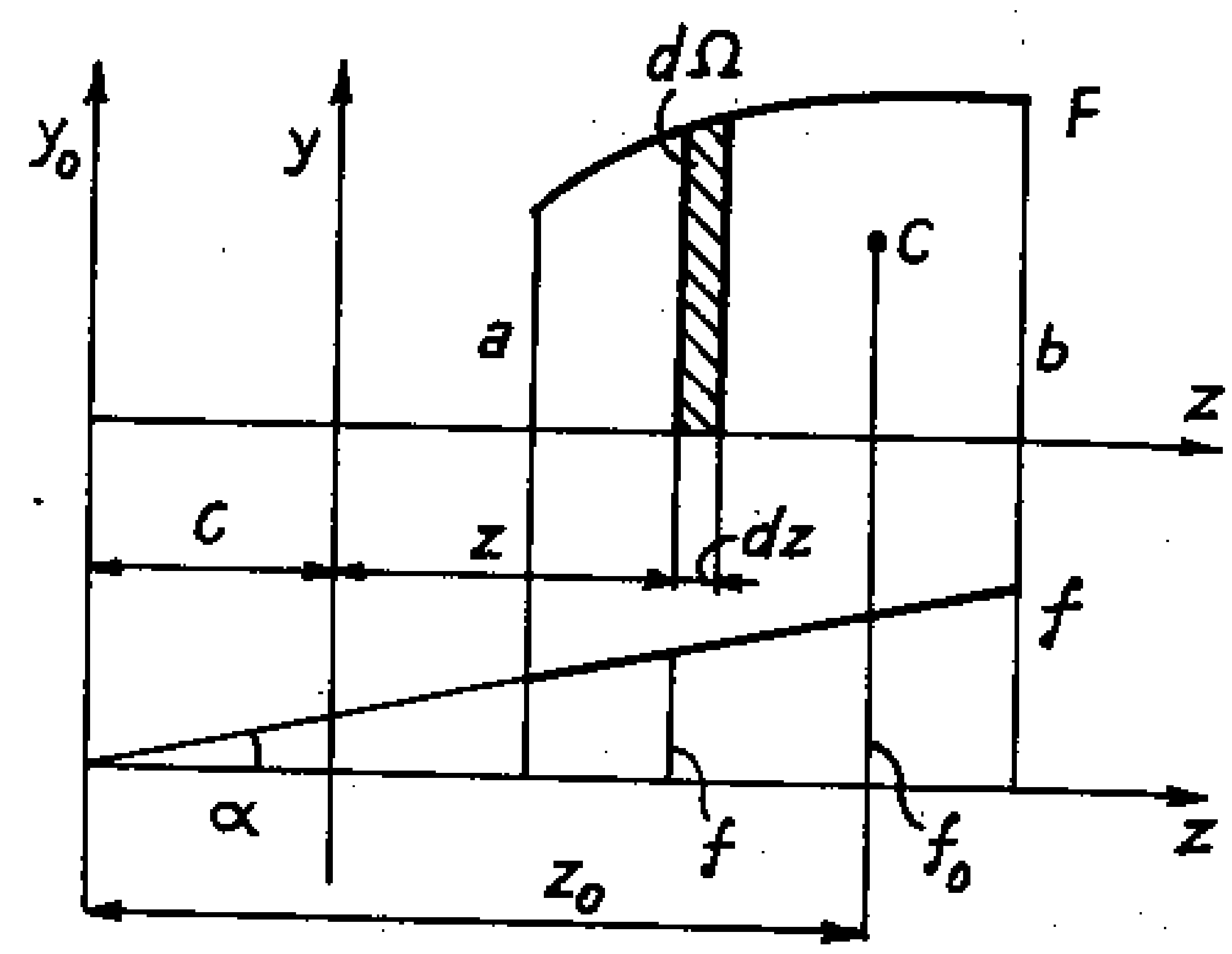
Tích số dưới dấu tích phân trong công thức Maxwell-Mohr luôn luôn có ít nhất một thừa số là hàm bậc nhất, chẳng hạn thừa số ứng lực đơn vị (vì chỉ do những lực tập trung gây ra). Các tích phân này có thể viết dưới dạng chung

$$I = \int_a^b F(z)f(z)dz, \qquad (11\text{-}32)$$

với ít nhất một trong hai hàm $F, f$ là hàm bậc nhất.

Khi đó, phép tích phân có thể tính như một phép nhân đại số nhờ một biến đổi mang tên "phép nhân biểu đồ" do A.N Vêrêxaghin đề nghị năm 1924.

*Hình 11-11.* Phép nhân biểu đồ Vêrêxaghin




Đồ thị của hai hàm $F$ và $f$ trong đoạn $[a, b]$ được chỉ trên hình 11-11.

Hàm $F$ có dạng bất kỳ, diện tích của đồ thị $\Omega$ có trọng tâm $C$.

Hàm $f$ là bậc nhất, đồ thị có góc nghiêng $\alpha$ so với trục $z$, do đó có thể viết

$$f = (z+c)tg\alpha.$$

Bây giờ ta xét tích phân xác định trong $[a, b]$ của tích hai hàm

$$I=\int_a^b Ffdz=\int_a^b F(z+c)tg\alpha dz= tg\alpha\int_a^b (z+c)Fdz=tg\alpha\int_a^b (z+c)d\Omega .$$

Biểu thức tích phân là mômen tĩnh của diện tích $\Omega$ đối với trục $y_o$.

Mômen tĩnh bằng diện tích $\Omega$ nhân với khoảng cách từ trọng tâm $C$ của diện tích tới trục

$$\int_a^b (z+c)d\Omega = z_0\Omega .$$

Vậy $$I=\int_a^b Ffdz= tg\alpha\int_a^b (z+c)d\Omega = z_0 tg\alpha .\Omega .$$

Nhưng $z_o tg\alpha$ lại là tung độ $y_o$ của hàm $f$ tại hoành độ ứng dưới trọng tâm $C$ của diện tích $\Omega$ cho nên

$$I=\int_a^b Ffdz = y_o\,\Omega. \qquad (11\text{-}33)$$

Phép tích phân đã được thay thế bằng một phép nhân đại số: nhân diện tích biểu đồ $\Omega$ của một hàm với tung độ $y_o$ của hàm bậc nhất còn lại, tung độ $y_o$ lấy tại hoành độ tương ứng với trọng tâm diện tích $\Omega$. Phép tính này, được gọi là phép nhân biểu đồ Vêrêxaghin, rất tiện lợi khi tính chuyển vị của hệ thanh đàn hồi tuyến tính, được kỹ hiệu như sau:

$$I=\int_a^b Ffdz = (\mathrm{F})\,(\mathrm{f}) = y_o\,\Omega.$$

Khi sử dụng phép tính này, công thức tính chuyển vị Maxwell-Mohr được viết lại như sau:

$$\Delta_{km}=\frac{1}{EA}(\overline{N}_k)(N_m)+\frac{1}{EI}(\overline{M}_k)(M_m)+\frac{k}{GA}(\overline{Q}_k)(Q_m) . \qquad (11\text{-}34)$$

Đôi khi người ta không ghi các lượng $EA$, $EI$, $GA$ trong công thức để đơn giản cách viết nhưng cần hiểu ngầm rằng các đại lượng này có mặt ở mẫu số của phép tính

$$\Delta_{km}=(\overline{N}_k)(N_m)+(\overline{M}_k)(M_m)+k(\overline{Q}_k)(Q_m) . \qquad (11\text{-}35)$$

***Một số điểm cần lưu ý khi thực hiện phép nhân:***

1- Tung độ $y_o$ nhất thiết phải lấy ở đồ thị của đường bậc nhất (hoặc hằng số). Đường bậc nhất này phải trơn, không bị gãy. Nếu cả hai hàm $F$ và $f$ đều là những hàm bậc nhất thì có thể lấy diện tích $\Omega$ ở bất kỳ đồ thị nào, tung độ $y_o$ lấy ở đồ thị còn lại.

2- Kết quả phép nhân mang dấu dương khi diện tích và tung độ đều cùng dấu hoặc cùng nằm về một phía của đường chuẩn.

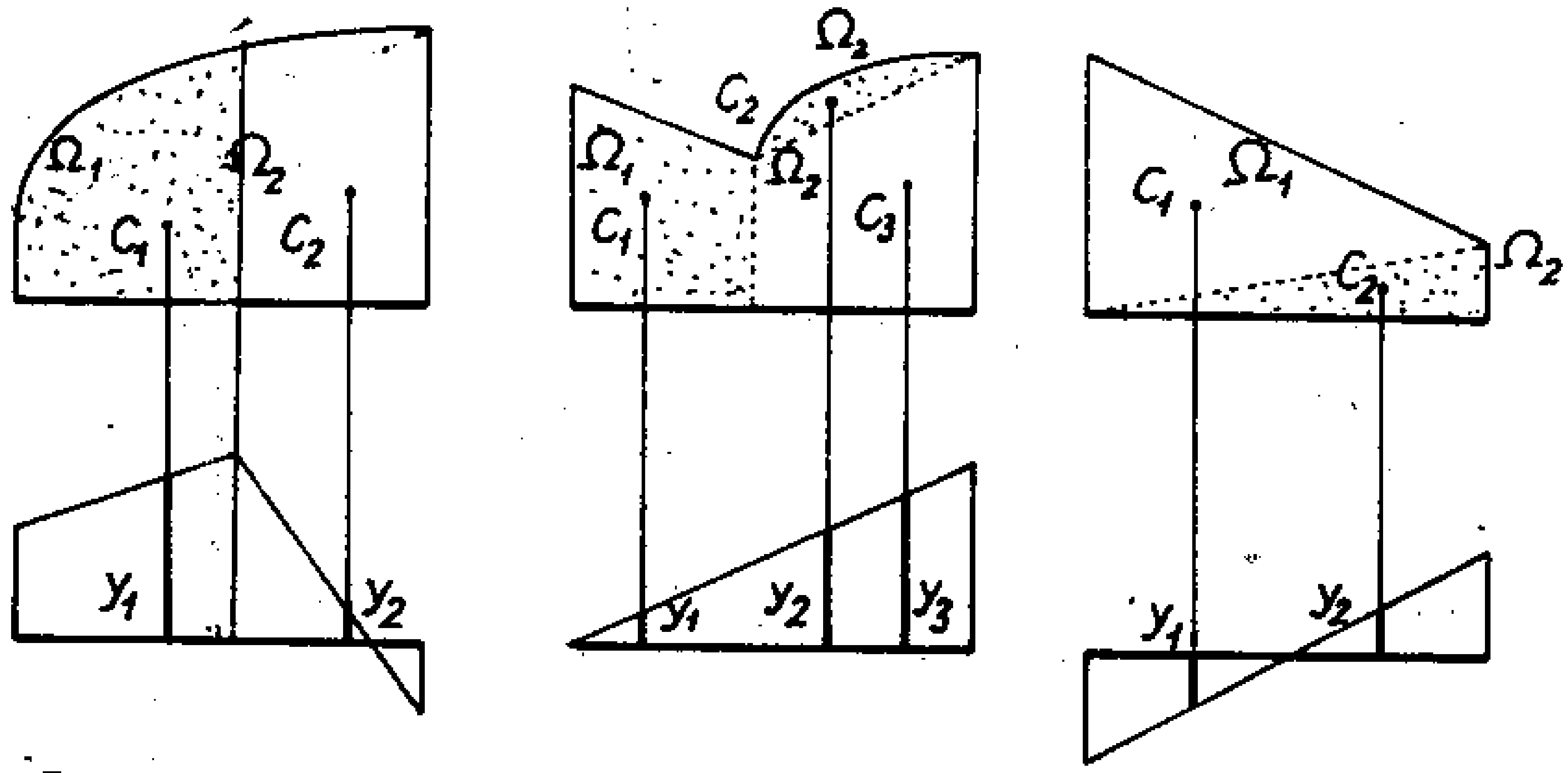
3- Nếu đồ thị bậc nhất, định lấy tung độ $y_o$, bị gãy khúc thì phải chia chiều dài lấy tích phân thành từng đoạn, trong mỗi đoạn đồ thị này là một đường thẳng trơn, để thực hiện phép nhân; sau đó lấy tổng kết quả phép nhân trong các đoạn (xem hình 11-12a).

4- Khi diện tích là một hình phức tạp, có thể chia thành những hình đơn giản, áp dụng phép nhân biểu đồ đối với từng hình rồi lấy tổng (xem hình 11-12b, c).

5- Kết quả của phép nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng sẽ bằng không.

Những điểm chú ý nêu trên xuất phát từ cách chứng minh công thức và tính chất của các tích phân xác định. Độc giả có thể dễ dàng tự tìm hiểu.

Diện tích, trọng tâm các hình đơn giản có thể tham khảo kết quả ghi trong chương đặc trưng hình học (bảng 5-1).




$I = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$ $\quad I = \Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3$ $\quad I = -\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$

*Hình 11-12.* Các chú ý khi nhân biểu đồ

<u>*Ví dụ 11-6*</u>. Tìm độ võng tại tiết diện *A* của dầm chịu lực cho trên hình 11-13a.

<u>*Bài giải*</u>. Trạng thái *m* là trạng thái dầm chịu tải trọng đã cho.

Mômen uốn tại *B*: $\quad M_{m,B} = -\dfrac{qa^2}{2}$.

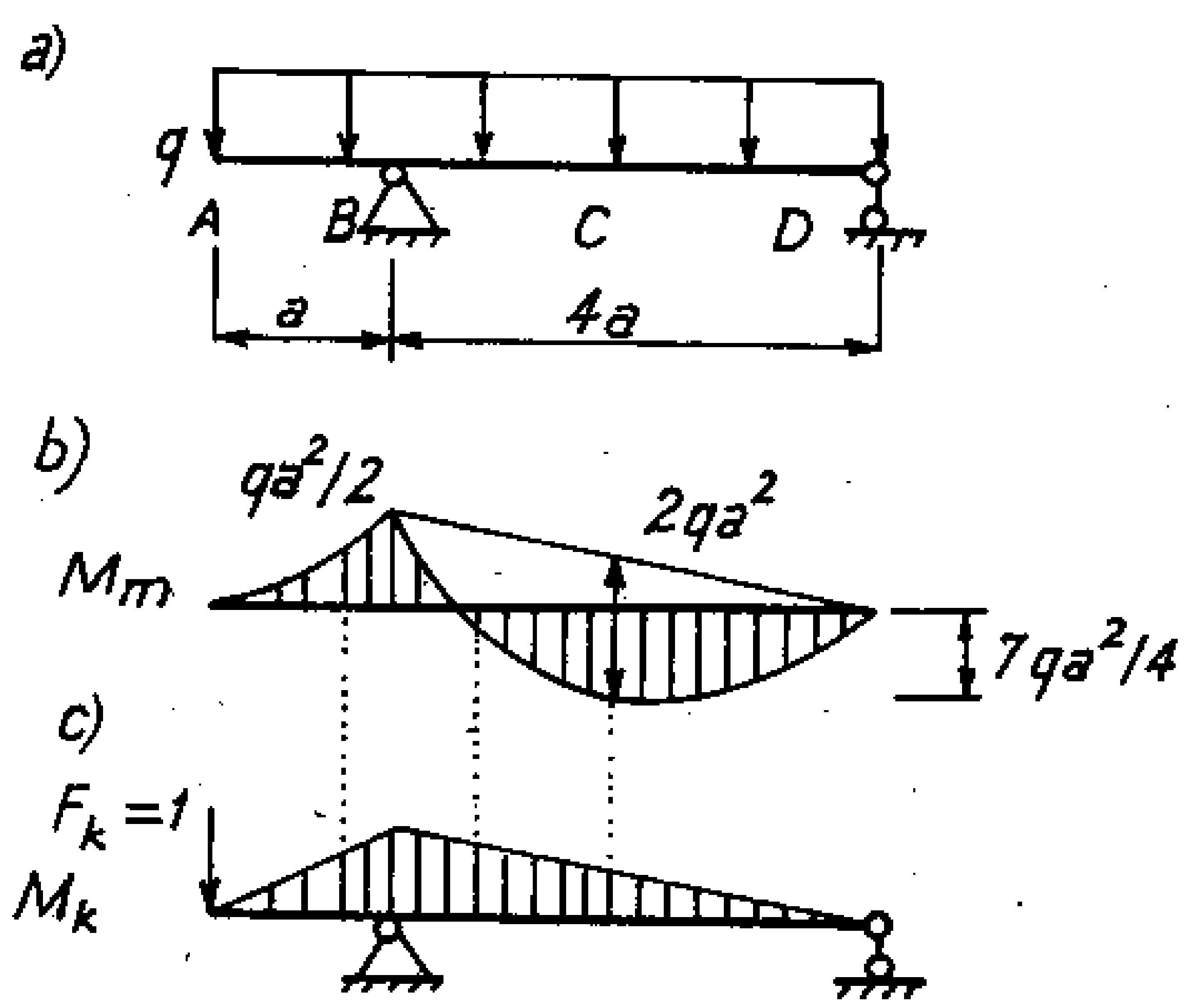
Mômen uốn tại giữa nhịp (tính theo phương pháp cộng tác dụng):

$$M_{m,C} = \frac{q(4a)^2}{8} - \frac{qa^2}{4} = \frac{3}{4}qa^2 .$$

Biểu đồ mômen $M_m$ được vẽ trên hình 11-13b.

Trạng thái $k$ là trạng thái dầm chịu lực đơn vị đặt thẳng đứng tại $A$. Biểu đồ mômen $\overline{M}_k$ được vẽ trên hình 11-13c.

Để nhân biểu đồ, ta xét hai đoạn $AB$ và $BD$. Trong đoạn $BD$ diện tích $M_m$ được chia thành hai phần: diện tích parabôn bậc hai có mũi tên $2qa^2$ trừ đi diện tích tam giác có chiều cao $qa^2/2$.



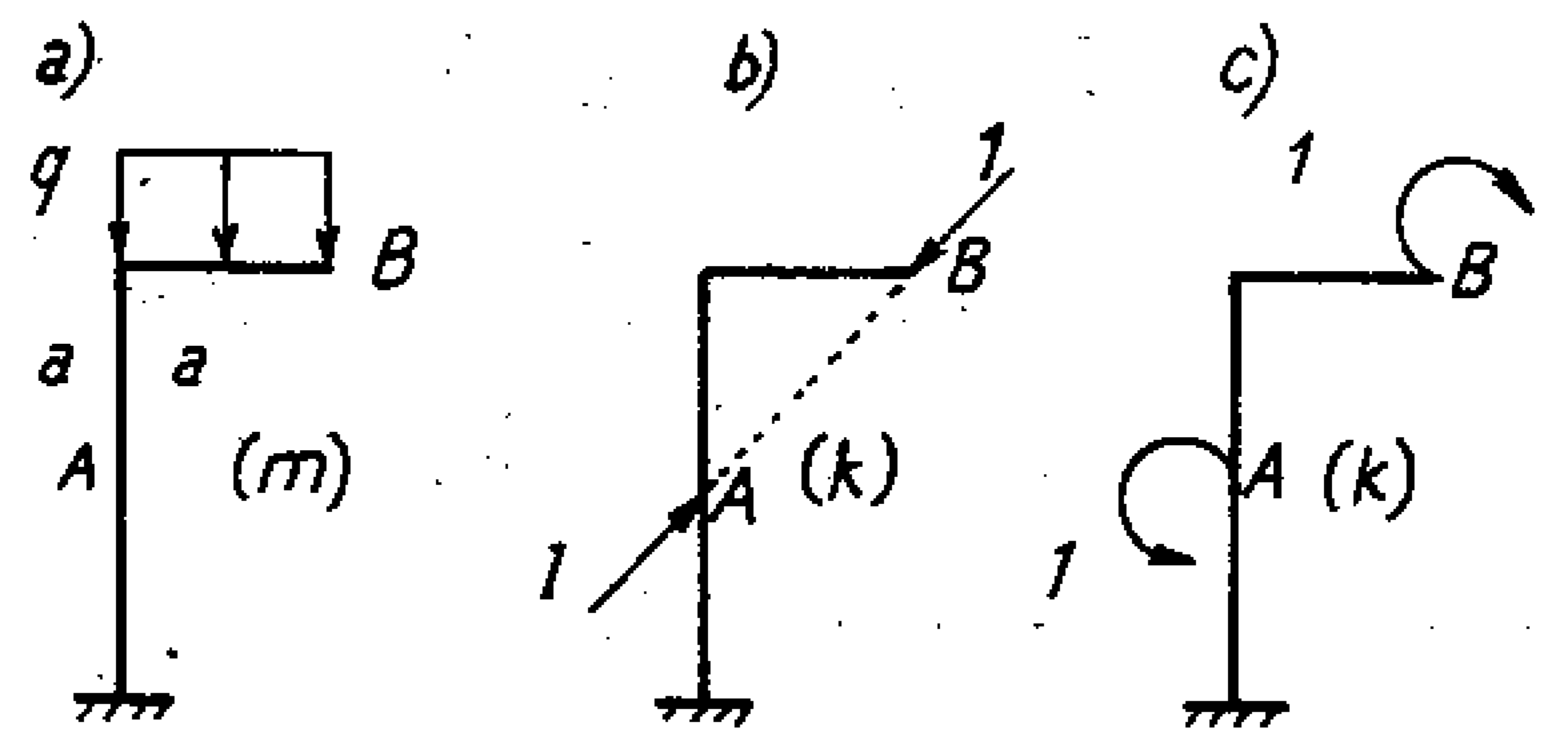

*Hình 11-13.* Cho ví dụ 11-6

$$EI.\Delta_{km} = Ely_A = (\overline{M}_k)(M_m) =$$

$$=\left(\frac{1}{3}.\frac{qa^2}{2}.a\right)\frac{3}{4}a+\left(\frac{1}{2}.\frac{qa^2}{2}.4a.\frac{2}{3}\right)a-\left(\frac{2}{3}.2qa^2.4a\right)\frac{a}{2}=-\frac{17}{8}qa^4.$$

## 11-6. CHUYỂN VỊ TƯƠNG ĐỐI

Chuyển vị tương đối theo phương $k$ giữa hai tiết diện trên hệ thanh sẽ là hiệu số chuyển vị tuyệt đối của từng tiết diện theo phương $k$. Trạng thái $k$ khi xét chuyển vị tương đối sẽ là trạng thái của hệ chịu hai lực đơn vị ngược chiều nhau theo phương $k$ đặt tại hai tiết diện đang xét.




*Hình 11-14.* Trạng thái $k$ khi tính chuyển vị tương đối

Chẳng hạn, với khung chịu lực trên hình 11-14a. Khi tính chuyển vị thẳng tương đối theo phương nối hai tiết diện $A$ và $B$ (độ xích lại gần hoặc độ xa thêm so với nhau) thì trạng thái $k$ là trạng thái đặt tại hai tiết diện hai lực đơn vị ngược chiều nhau theo phương nối $AB$ như trên hình 11-14b; còn khi tính góc xoay tương đối của hai tiết diện này thì ở trạng thái $k$ ta đặt tại hai tiết diện hai mômen đơn vị ngược chiều nhau như trên hình 11-14c.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

11- 1. Định nghĩa các chuyển vị trong hệ thanh. Giải thích ký hiệu của chuyển vị $\Delta_k$, $\Delta_{km}$. Khi nào các chuyển vị này là chuyển vị thẳng, khi nào là chuyển vị xoay?

11- 2. Nêu ý nghĩa của ký hiệu chuyển vị đơn vị $\delta_{km}$. Tại sao ta có thể gọi công thức tính chuyển vị $\Delta_k = \sum \delta_{ki} F_i$ là công thức tổng quát của định luật Hooke cho hệ thanh đàn hồi tuyến tính?

11- 3. Nêu và phân biệt ba đại lượng về năng lượng trong hệ vật rắn, nói chung, hệ thanh, nói riêng: công $T$ của ngoại lực, công $A^*$ của nội lực, thế năng biến dạng $U$. Viết quan hệ giữa các đại lượng này trong hệ đàn hồi.

11- 4. Phát biểu định lý Castigliano. Viết biểu thức của thế năng $U$ trong trường hợp thanh chịu lực tổng quát, trong hệ dầm chịu uốn, trong hệ thanh chịu kéo (nén).

11- 5. Thế nào là các chuyển vị khả dĩ, cho ví dụ về các chuyển vị khả dĩ đối với một dầm côngxôn, dầm mút thừa.

11- 6. Phát biểu nguyên lý công khả dĩ. Viết biểu thức của nguyên lý và giải thích các ký hiệu trong biểu thức.

11- 7. Phát biểu định lý Maxwell - Betti về sự tương hỗ của các chuyển vị đơn vị.

11- 8. Viết công thức Maxwell-Mohr để tính chuyển vị theo phương $k$ do nguyên nhân lực $m$ gây ra trong trường hợp tổng quát và trong hệ chịu uốn, hệ chịu kéo (nén). Giải thích các đại lượng trong công thức.

11- 9. Người ta còn gọi phương pháp xác định chuyển vị theo công thức Maxwell-Mohr là phương pháp tải trọng đơn vị. Hãy giải thích vì sao?

11-10. Trong phép "nhân biểu đồ Vêrêxaghin" thì tung độ $y_o$ nhất thiết phải lấy ở đồ thị của hàm số nào?

11-11. Viết lại công thức tính chuyển vị Maxwell - Mohr khi sử dụng phép nhân biểu đồ Vêrêxaghin (trường hợp tổng quát và các trường hợp đặc biệt).

# 12 Giải hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực

## *12-1. KHÁI NIỆM CHUNG*

Trong công trình, các thanh được liên kết với nhau tạo thành một hệ kết cấu làm nhiệm vụ chịu và truyền lực sang các bộ phận khác của công trình. Tính *bất biến hình* là một yêu cầu cơ bản đối với hệ kết cấu, nghĩa là hệ cần giữ được điểm đặt lực, không chuyển động như một cơ cấu. Những hệ thanh không thoả mãn tính chất này được gọi là những *hệ biến hình.* Đương nhiên rằng, trong kết cấu công trình, chúng ta chỉ sử dụng các *hệ bất biến hình.*

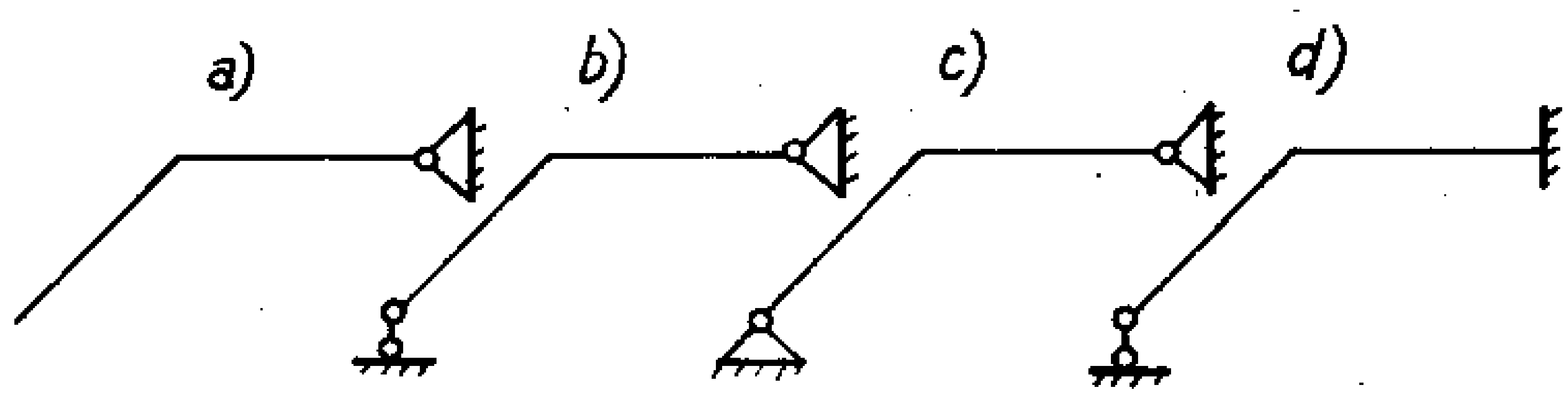
Hệ bất biến hình gồm *hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh.*

*Hệ được gọi là tĩnh định khi chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học ta cũng xác định được đầy đủ các yếu tố lực của hệ, bao gồm cả nội lực và ngoại lực.*

Nói cách khác hệ tĩnh định là hệ có vừa đủ số liên kết cần thiết.

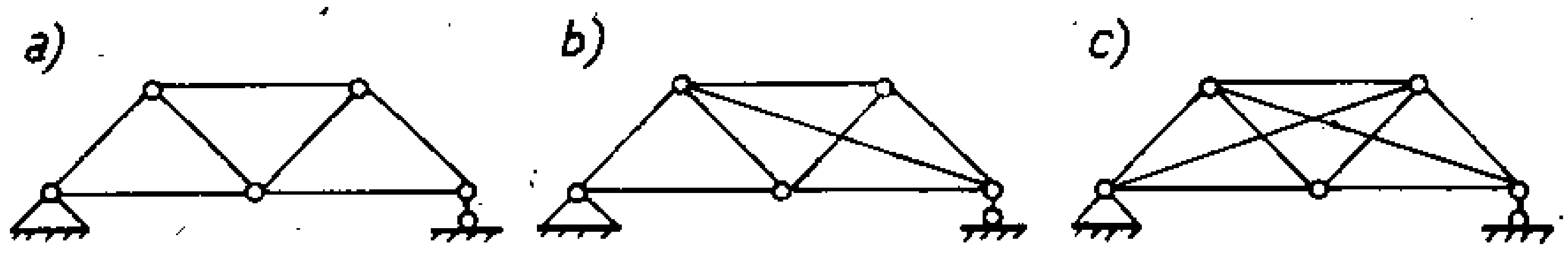
Hệ siêu tĩnh là hệ có số lượng liên kết nhiều hơn số lượng liên kết cần thiết, *số lượng liên kết thừa quy đổi ra liên kết đơn được gọi là bậc siêu tĩnh.* Như đã trình bày trong chương mở đầu của giáo trình, liên kết đơn là liên kết chỉ ngăn cản chuyển vị theo một phương xác định và do đó chỉ có một thành phần phản lực theo phương ngăn cản chuyển vị.

Trên hình 12-1 lần lượt trình bày các hệ biến hình (hình 12-1a), tĩnh định (hình 12-1b) và hệ có một bậc siêu tĩnh (hình 12-1c, d) của cùng một hệ gồm hai thanh thẳng hàn với nhau.




*Hình 12-1.* Hệ biến hình, hệ tĩnh định hệ siêu tĩnh

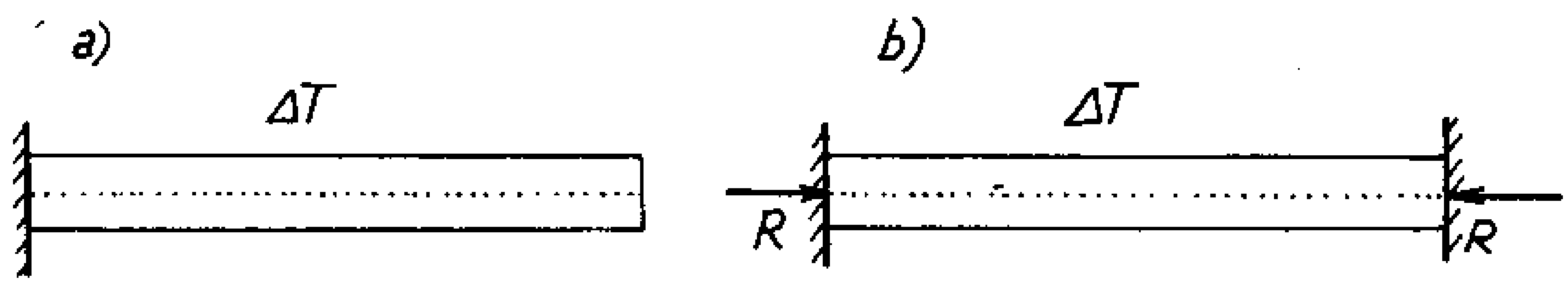
Trên hình 12-2 là các hệ tĩnh định (hình 12-2a) và hệ siêu tĩnh (hình 12-2b, c) của một dàn phẳng.




*Hình 12-2.* Dàn tĩnh định và dàn siêu tĩnh

Ưu điểm của hệ siêu tĩnh là: biến dạng, chuyển vị và nội lực, nói chung, nhỏ hơn biến dạng, chuyển vị và nội lực của hệ tĩnh định tương ứng.

Nhưng hệ siêu tĩnh có nhược điểm là sẽ phát sinh nội lực khi nhiệt độ thay đổi hoặc khi có các chuyển vị cưỡng bức. Chẳng hạn, do sự tăng nhiệt độ, thanh tĩnh định trên hình 12-3a được dãn dài tự do sẽ không có nội lực, nhưng thanh siêu tĩnh trên hình 12-3b không được dãn dài sẽ chịu lực nén $R$ và trên tiết diện sẽ xuất hiện lực dọc.




*Hình 12-3.* Ảnh hưởng thay đổi nhiệt độ trên hệ

Một đặc điểm của hệ siêu tĩnh là sự phân phối nội lực trong hệ phụ thuộc vào tỷ số độ cứng $EA$, $EI$... của các bộ phận, chi tiết trong kết cấu: bộ phận hoặc chi tiết nào có độ cứng lớn hơn thì sẽ chịu lực nhiều hơn.

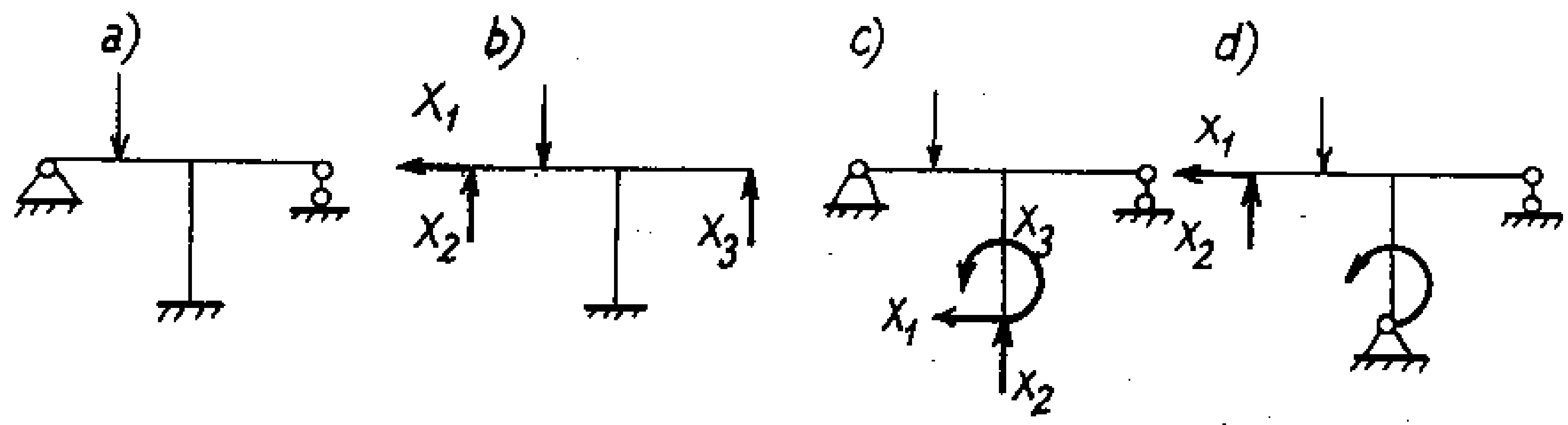
Việc giải bài toán siêu tĩnh trong từng trường hợp chịu lực thuần túy như kéo nén, xoắn, uốn của một thanh hoặc hệ thanh đơn giản đã được trình bày riêng trong các chương 3, 6, 7. Trong chương này, ta sẽ mở rộng phương pháp đã sử dụng để nhận được các phương trình tổng quát và thuận tiện hơn khi giải hệ siêu tĩnh có cấu tạo và chịu lực phức tạp hơn.

## 12-2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

### 12-2-1. Hệ cơ bản

Hệ cơ bản là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh bằng cách cắt bỏ bớt các liên kết thừa và thay thế liên kết bị cắt bỏ bởi các lực tương ứng ký hiệu $X_i$. Các lực $X_i$ sẽ là các ẩn số của bài toán, vì vậy phương pháp được gọi là *phương pháp lực*.

Nếu cắt bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định, số lượng ẩn số bằng số bậc siêu tĩnh. Nếu chỉ cắt bỏ một phần các liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh, số lượng ẩn số bằng số liên kết thừa cắt bỏ. Thông thường, ta hay sử dụng hệ cơ bản là hệ tĩnh định. Trên hình 12-4a vẽ sơ đồ một cầu dẫn là hệ có ba bậc siêu tĩnh và các hệ cơ bản tĩnh định tương ứng (hình 12-4b, c, d).




*Hình 12-4.* Hệ siêu tĩnh và các hệ cơ bản tĩnh định

### *12-2-2. Hệ phương trình chính tắc*

Để hệ cơ bản hoàn toàn tương đương với hệ siêu tĩnh đã cho thì biến dạng của hệ cơ bản phải giống như biến dạng của hệ siêu tĩnh. Khi các liên kết bị cắt bỏ là liên kết cứng thì chuyển vị theo phương liên kết phải bằng không, vì vậy chuyển vị $\Delta_i$ trong hệ cơ bản theo phương $X_i$ cũng phải bằng không. Chuyển vị này phụ thuộc tải trọng $F$, phụ thuộc các lực ẩn số $X_k$ và có thể viết:

$$\Delta_i = \Delta_i(F, X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n) = 0.$$

Đối với hệ đàn hồi tuyến tính thì:

$$\Delta_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + .... + \delta_{ik} X_k + ... + \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0, \qquad (12\text{-}1)$$

trong đó:

$\delta_{ik}$ - chuyển vị theo phương lực $X_i$ do lực đơn vị theo phương $X_k$ gây ra trong hệ cơ bản;

$\delta_{ik}X_k$ - chuyển vị theo phương lực $X_i$ do lực $X_k$ gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{iF}$ - chuyển vị theo phương lực $X_i$ do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Viết điều kiện (12-1) cho tất cả các chuyển vị của liên kết bị cắt bỏ (cho $i = 1, 2, 3, ..., n$), ta nhận được hệ $n$ phương trình bậc nhất đối với $n$ ẩn số $X_i$ như sau:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + .... + \delta_{1k}X_k + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} = 0;\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + .... + \delta_{2k}X_k + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (12\text{-}2)\\
&\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + .... + \delta_{ik}X_k + ... + \delta_{in}X_n + \Delta_{iF} = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + .... + \delta_{nk}X_k + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} = 0.
\end{aligned}$$

Hệ phương trình (12-2) được gọi là *hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực*.

Số hạng $\Delta_{iF}$ được gọi là *số hạng tự do*; đối với hệ dầm, khung:

$$\Delta_{iF} = (\overline{M}_i)(M_F). \qquad (12\text{-}3)$$

Hệ số $\delta_{ii}$ được gọi là *hệ số chính*; đối với hệ dầm, khung:

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) > 0. \qquad (12\text{-}4)$$

Hệ số $\delta_{ik}$ $(I \neq k)$ được gọi là *hệ số phụ*; đối với hệ dầm, khung:

$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k). \qquad (12\text{-}5)$$

Theo định lý tương hỗ thì $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

$(M_F)$ - biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

$(\overline{M}_i)$ - biểu đồ mômen uốn do lực đơn vị $\overline{X}_i = 1$ theo phương *i* gây ra trong hệ cơ bản.

Đối với các hệ dàn hoặc kết cấu khác, ta cũng tìm các số hạng tự do, hệ số chính và hệ số phụ theo các công thức tính chuyển vị đã biết (11-33), (11-34), (11-38).

Như đã trình bày ở trên, từ một hệ siêu tĩnh đã cho ta có thể có nhiều hệ cơ bản. Thông thường ta chọn hệ cơ bản là một hệ tĩnh định và có sơ đồ dễ dàng, thuận lợi cho việc tính hoặc vẽ các biểu đồ ứng lực. Đồng thời hệ cơ bản sẽ là hợp lý nếu hệ cho nhiều hệ số phụ $\delta_{ik}$ bằng không.

Giải hệ phương trình chính tắc, ta tìm được các ẩn số $X_i$. Hệ siêu tĩnh đã cho và hệ cơ bản là tương đương nên các đại lượng trong hai hệ là hoàn toàn như nhau. Ta có thể viết biểu thức xác định một đại lượng *S* bất kỳ của hệ theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S_F + \sum S_i = S_F + \sum \overline{S}_i X_i. \qquad (12\text{-}6)$$

trong đó:

$S_F$ - đại lượng *S* do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$S_i$ - đại lượng *S* do lực $X_i$ gây ra trong hệ cơ bản;

$\overline{S}_i$ - đại lượng *S* do lực đơn vị $\overline{X}_i = 1$ theo phương *i* gây ra trong hệ cơ bản.

Chẳng hạn biểu thức xác định mômen uốn:

$$M = M_F + \sum \overline{M}_i X_i. \qquad (12\text{-}7)$$

***Ví du 12-1***. Vẽ biểu đồ mômen, lực cắt trên dầm có độ cứng *EI* bằng hằng số và sơ đồ như trên hình 12-5a.

*Bài giải*. Hệ đã cho có một bậc siêu tĩnh. Cắt bỏ gối tựa bên trái và thay bằng phản lực $X_1$, ta nhận được hệ cơ bản trên hình 12-5b.

Biểu đồ mômen uốn do tải trọng và do ẩn số bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản được vẽ trên hình 12-5c, d.

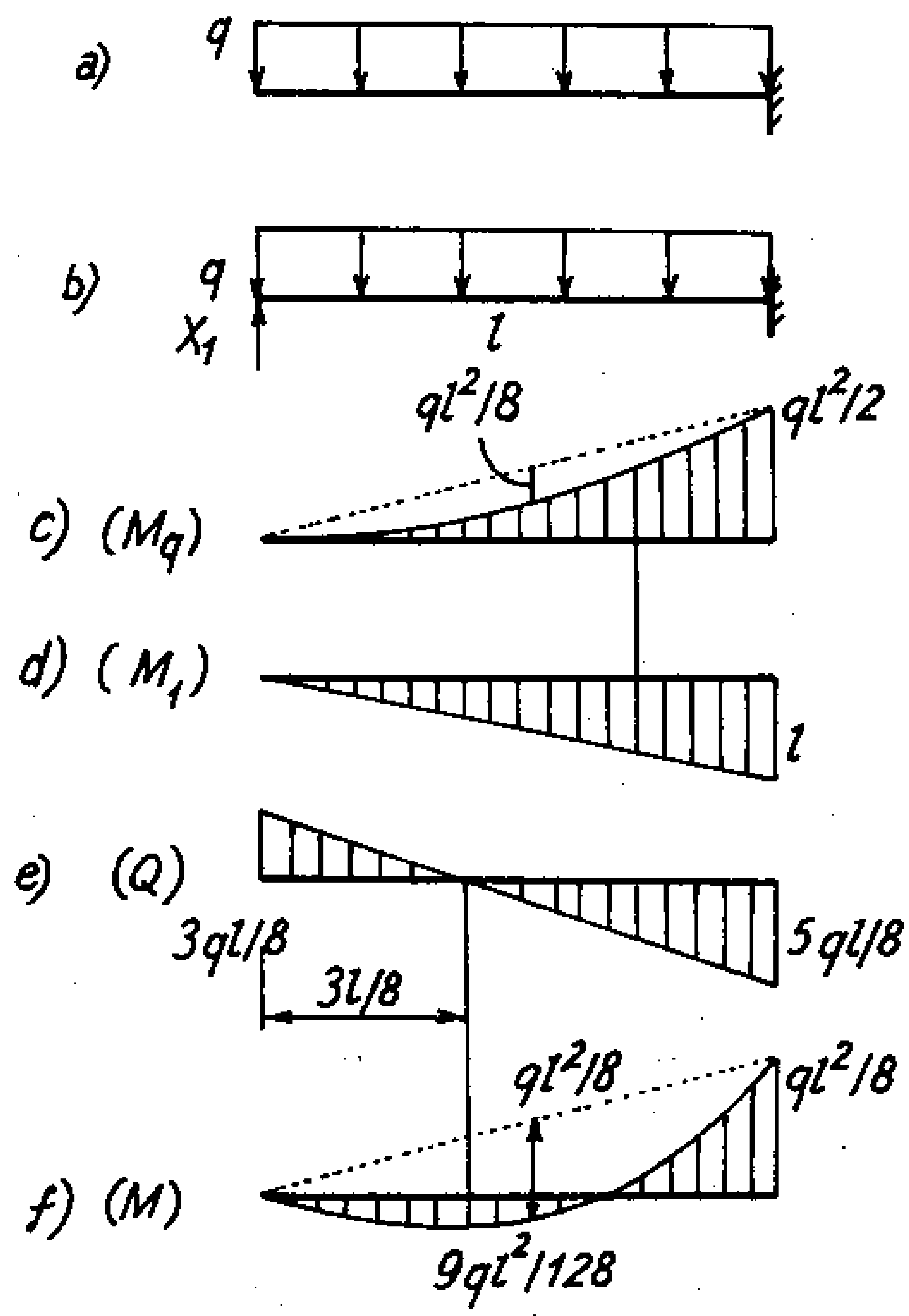
Tính các trị số:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EI}\cdot\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EI}.$$

$$\Delta_{1q} = (\overline{M}_1)(M_q) = -\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot\frac{3}{4}l = -\frac{ql^3}{8EI}.$$

Phương trình chính tắc của bài toán một ẩn số $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1q} = 0.$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql.$$




*Hình 12-5.* Cho ví dụ 12-1

Sau khi đặt lực $X_1 = 3ql/8$ vào hệ cơ bản, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ lực cắt và mômen uốn của dầm. Kết quả như trên hình 12-5e và f.

***Ví du 12-2***. Giải hệ siêu tĩnh cho trên hình 12-6a.

*Bài giải*. Hệ có hai bậc siêu tĩnh, hệ cơ bản chọn như trên hình 12-6b. Các biểu đồ mômen uốn do tải trọng và do ẩn số bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản được vẽ trên hình 12-6c, d, e.

Hệ phương trình chính tắc:

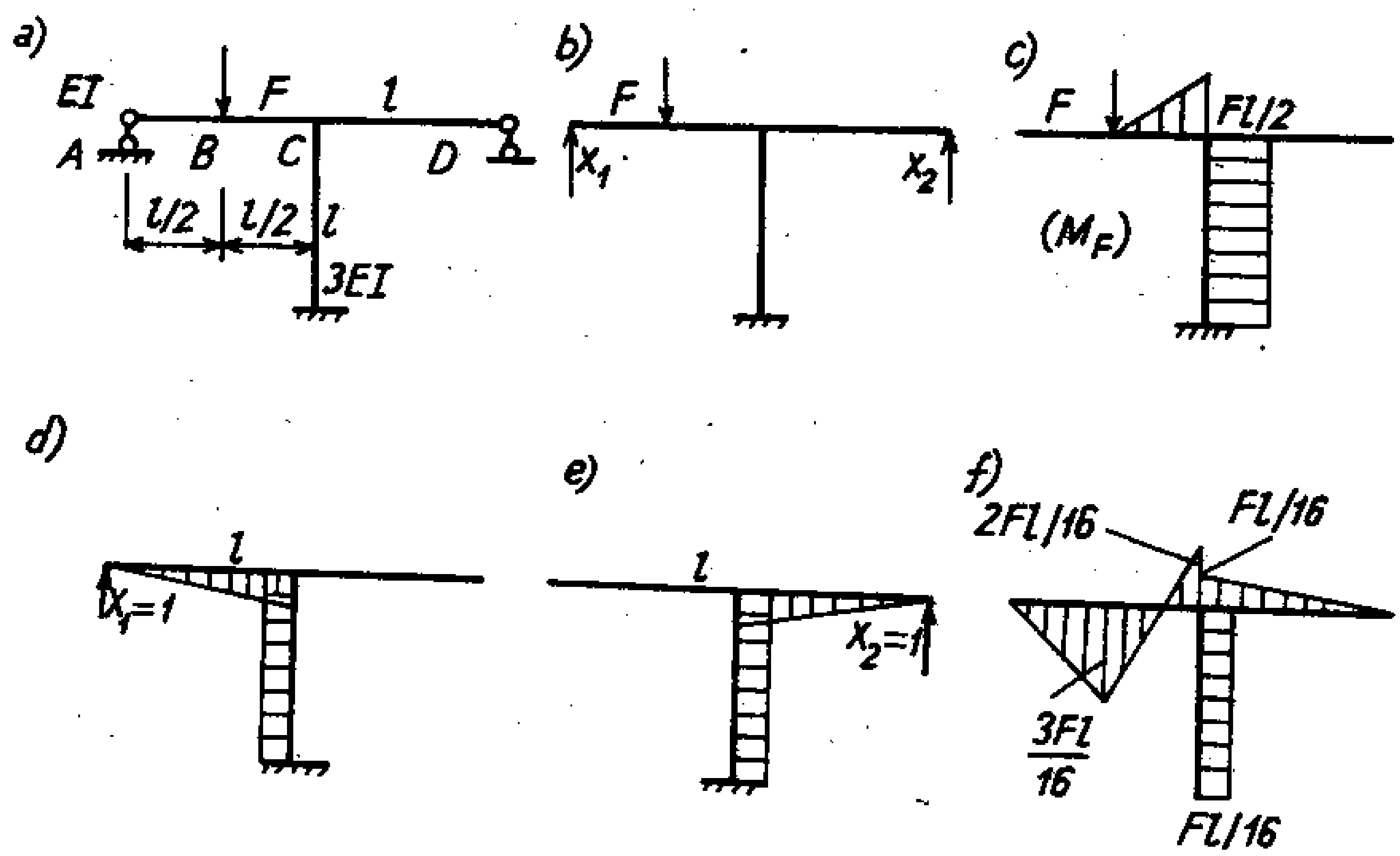
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI}\cdot\frac{l^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l + \frac{1}{3EI}.l^2.l = \frac{2l^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{3EI}.l^2.l = -\frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI}.\frac{1}{2}.\frac{Fl}{2}.\frac{l}{2}.\frac{5}{6}l - \frac{1}{3EI}.\frac{Fl^2}{2}.l = -\frac{13Fl^3}{48EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{3EI}.\frac{Fl^2}{2}.l = \frac{Fl^3}{6EI}.$$




*Hình 12-6.* Cho ví dụ 12-2

Sau khi thay vào hệ phương trình chính tắc, ta có:

$$\frac{2l^3}{3EI}X_1 - \frac{l^3}{3EI}X_2 - \frac{13Fl^3}{48EI} = 0; \qquad -\frac{l^3}{3EI}X_1 + \frac{2l^3}{3EI}X_2 + \frac{Fl^3}{6EI} = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình: $X_1 = \frac{6}{16}F$; $X_2 = -\frac{1}{16}F$.

Mômen uốn trong hệ được xác định theo biểu thức:

$$M = M_F + \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2$$

Tại tiết diện $A$: $M = 0$.

Tại tiết diện $B$: $M = \frac{l}{2}X_1 = \frac{l}{2}.\frac{6}{16}F = \frac{3}{16}Fl$.

Tại tiết diện $C$ thuộc đoạn $AC$: $M = -\frac{Fl}{2} + lX_1 = -\frac{Fl}{2} + \frac{6Fl}{16} = -\frac{2}{16}Fl$.

Tại tiết diện $C$ thuộc đoạn $DC$: $M = lX_2 = -\frac{Fl}{16}$.

Tại tiết diện thuộc đoạn thẳng đứng:

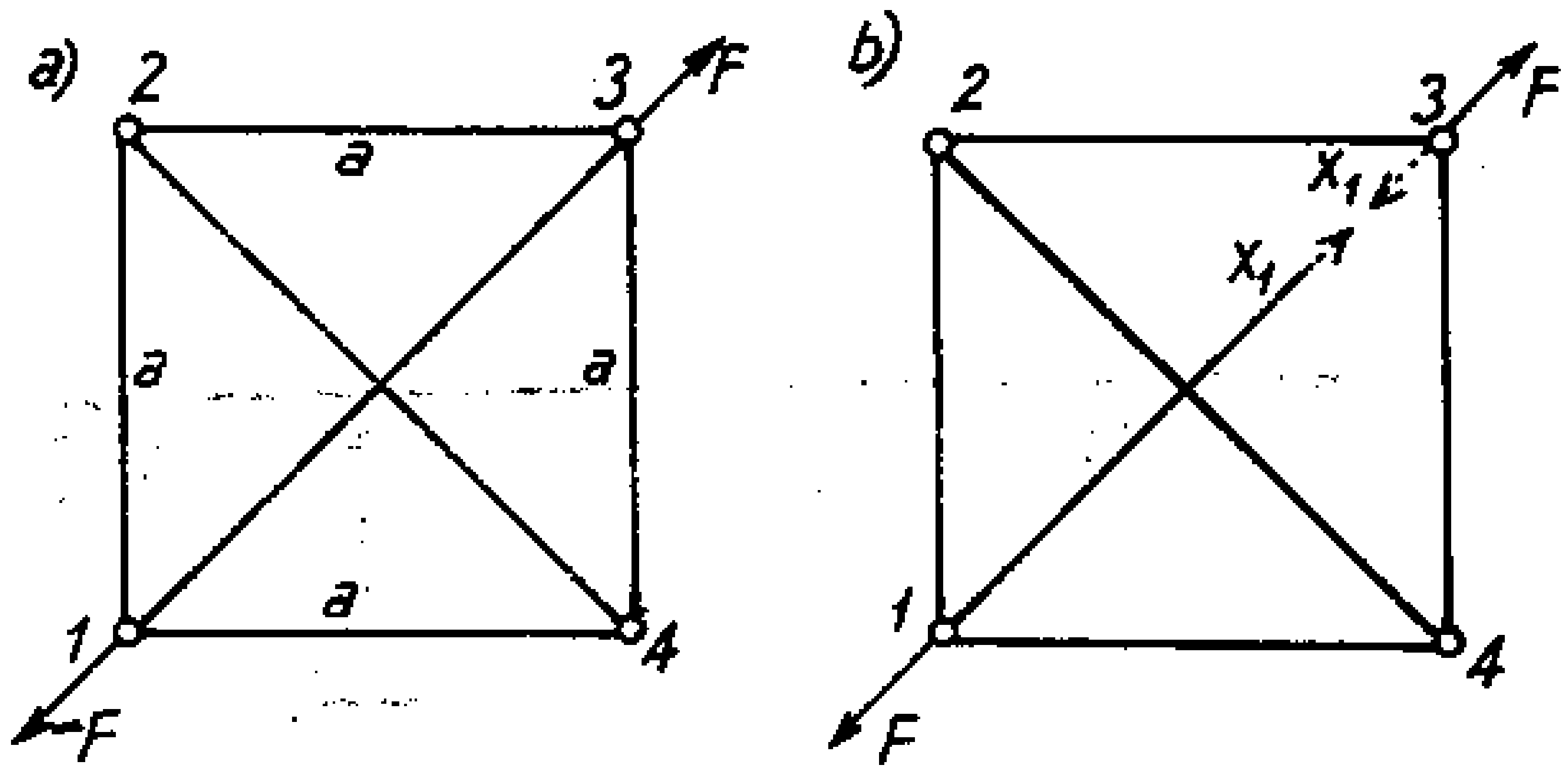
$$M = -\frac{Fl}{2} + lX_1 - lX_2 = -\frac{Fl}{2} + \frac{6Fl}{16} + \frac{Fl}{16} = \frac{Fl}{16}.$$

Biểu đồ mômen uốn tìm được như trên hình 12-6f.

***Ví dụ 12-3.*** Xác định lực dọc trong hệ thanh liên kết khớp cho trên hình 12-7a.

*Bài giải*. Chọn hệ cơ bản như trên hình 12-7b bằng cách tách thanh *1-3* khỏi liên kết khớp *3*. Thanh chỉ chịu lực dọc nên lực liên kết tương ứng là ẩn số $X_1$, nằm theo phương dọc trục 1-3. Để đơn giản nét vẽ, ta đã không vẽ hết chiều dài thanh *1-3* trên hệ cơ bản. Đặt hai lực $X_1$ cùng phương theo thanh *1-3* nhưng ngược chiều nhau. Phương trình chính tắc sẽ biểu diễn điều kiện bằng không của chuyển vị tương đối theo phương *1-3* giữa hai tiết diện cắt ra ở khớp *3*.

*Hình 12-7.* Cho ví dụ 12-3




Bằng phương pháp tách mắt, ta lần lượt xác định được lực dọc trong thanh do tải trọng $F$, ký hiệu $N_m$ và do ẩn số đơn vị $\overline{X}_1 = 1$ gây ra, ký hiệu $\overline{N}_1$. Kết quả được ghi trong bảng 12-1.

***Bảng 12-1***

| Thanh | Độ cứng | $l$ | $N_m$ | $\overline{N}_1$ | $\overline{N}_1 N_m l$ | $\overline{N}_1 \overline{N}_1 l$ | $N_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-2 | EA | a | $\sqrt{2}F/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-Fa/2$ | $a/2$ | $-F(2-\sqrt{2})/2$ |
| 1-4 | EA | a | $\sqrt{2}F/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-Fa/2$ | $a/2$ | $-F(2-\sqrt{2})/2$ |
| 2-3 | EA | a | $\sqrt{2}F/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-Fa/2$ | $a/2$ | $-F(2-\sqrt{2})/2$ |
| 3-4 | EA | a | $\sqrt{2}F/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-Fa/2$ | $a/2$ | $-F(2-\sqrt{2})/2$ |
| 2-4 | EA | $a\sqrt{2}$ | $-F$ | 1 | $-Fa\sqrt{2}$ | $a\sqrt{2}$ | $F(\sqrt{2}-1)$ |
| 1-3 | EA | $a\sqrt{2}$ | 0 | 1 | 0 | $a\sqrt{2}$ | $F\sqrt{2}$ |

$$\Delta_{1F} = \sum\left(\frac{1}{EA}\overline{N}_1 N_m l\right) = -\frac{4+2\sqrt{2}}{2EA}Fa;$$

$$\delta_{11} = \sum\left(\frac{1}{EA}\overline{N}_1\overline{N}_1 l\right) = \frac{4+4\sqrt{2}}{2EA}a;$$

$$X_1 = \frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{4+4\sqrt{2}}F = F\sqrt{2}.$$

Kết quả tính lực dọc trong các thanh được ghi ở cột cuối của bảng 12-1.

## 12-3. DẦM LIÊN TỤC

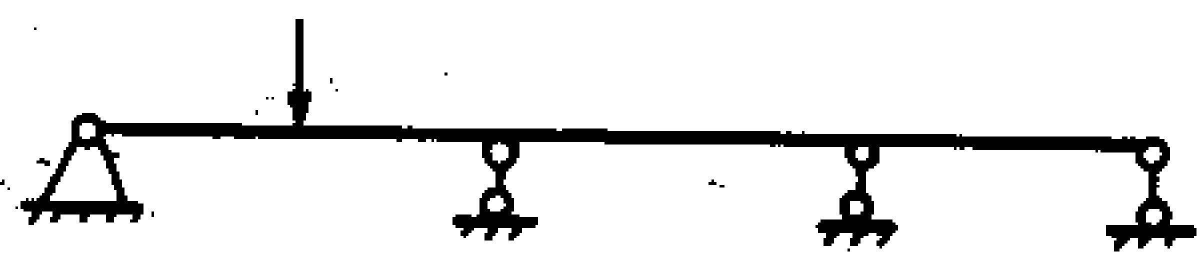
### 12-3-1. Phân loại dầm liên tục

Dầm liên tục là một dầm thẳng, siêu tĩnh. Dạng kết cấu này thường gặp trong thực tế kỹ thuật, chẳng hạn dầm nối các khung nhà, dầm giằng của móng, xà nhà nằm vắt qua các vì kèo của mái nhà công nghiệp, dầm cầu... Vì những đặc điểm và tính sử dụng khá rộng rãi này, ta sẽ viết phương trình chính tắc dưới một dạng riêng, thuận tiện hơn khi tính dầm liên tục.

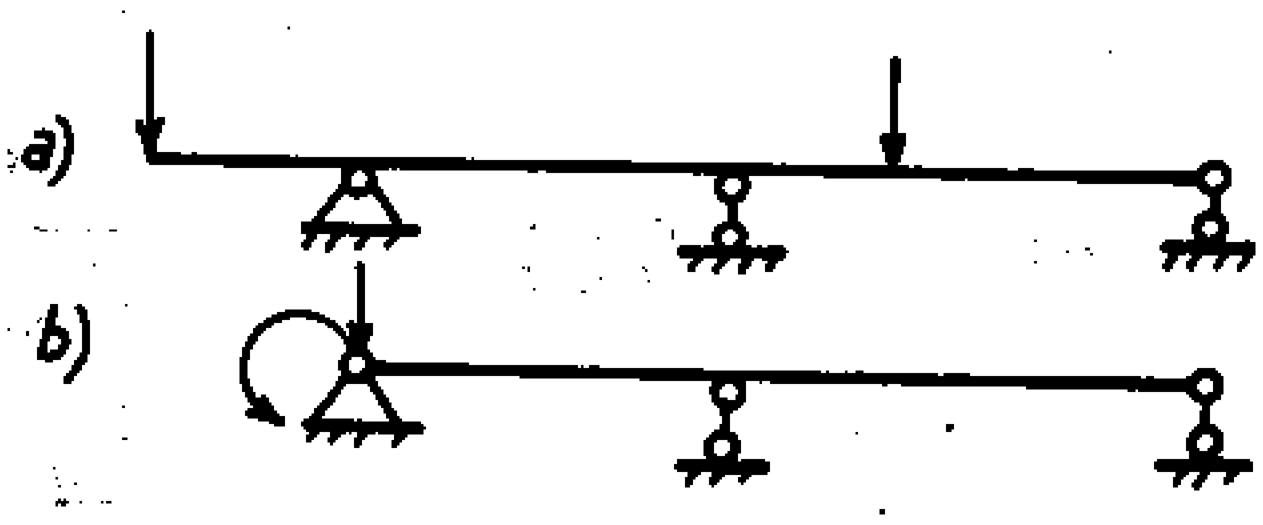
Trước khi giải bài toán, ta hãy phân loại các dạng dầm liên tục thường gặp.

- *Dầm liên tục đơn giản* là dầm đặt trên gối tựa, trong đó có một gối tựa cố định, và số gối tựa là $k$ lớn hơn 2 như chỉ trên hình 12-8. Bậc siêu tĩnh sẽ bằng $n=k-2$.

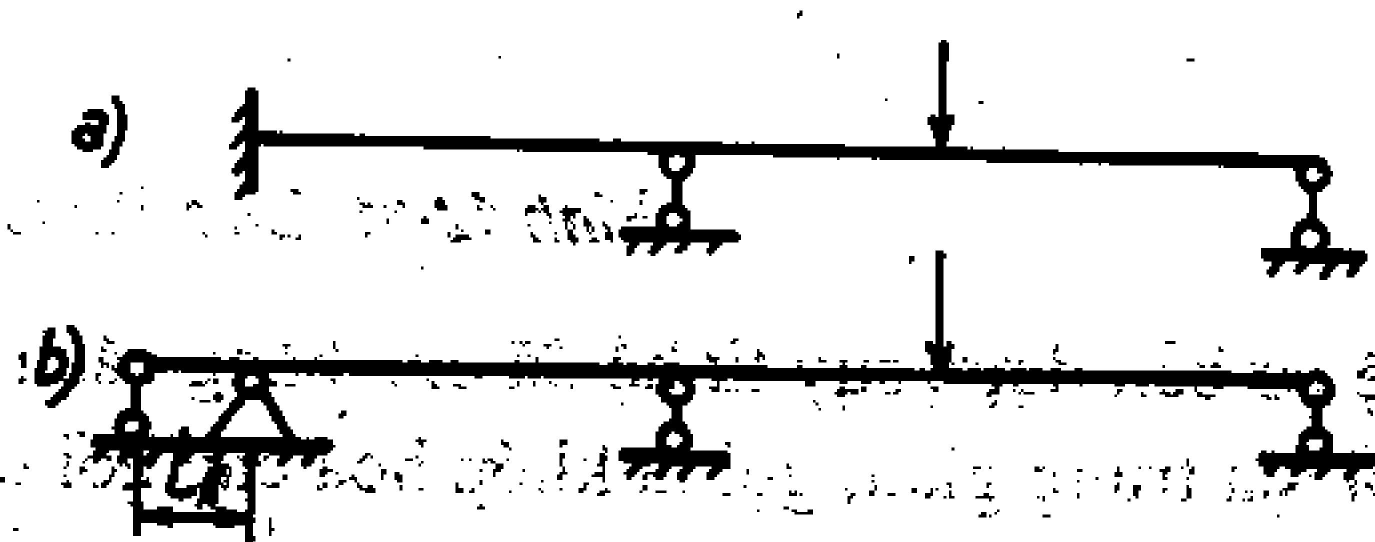
- *Dầm liên tục mút thừa* là dầm đặt trên $k>2$ gối tựa, trong đó có một gối tựa cố định nhưng một hoặc hai đầu dầm không đặt trên gối tựa như trên hình 12-9a. Dầm liên tục mút thừa có thể dễ dàng chuyển về dầm liên tục đơn giản bằng cách cắt mút thừa và chuyển tải trọng trên mút thừa về gối tựa gần nhất (xem hình 12-9b).



*Hình 12-8.* Dầm liên tục đơn giản




*Hình 12-9.* Dầm liên tục mút thừa




*Hình 12-10.* Dầm liên tục có đầu ngàm

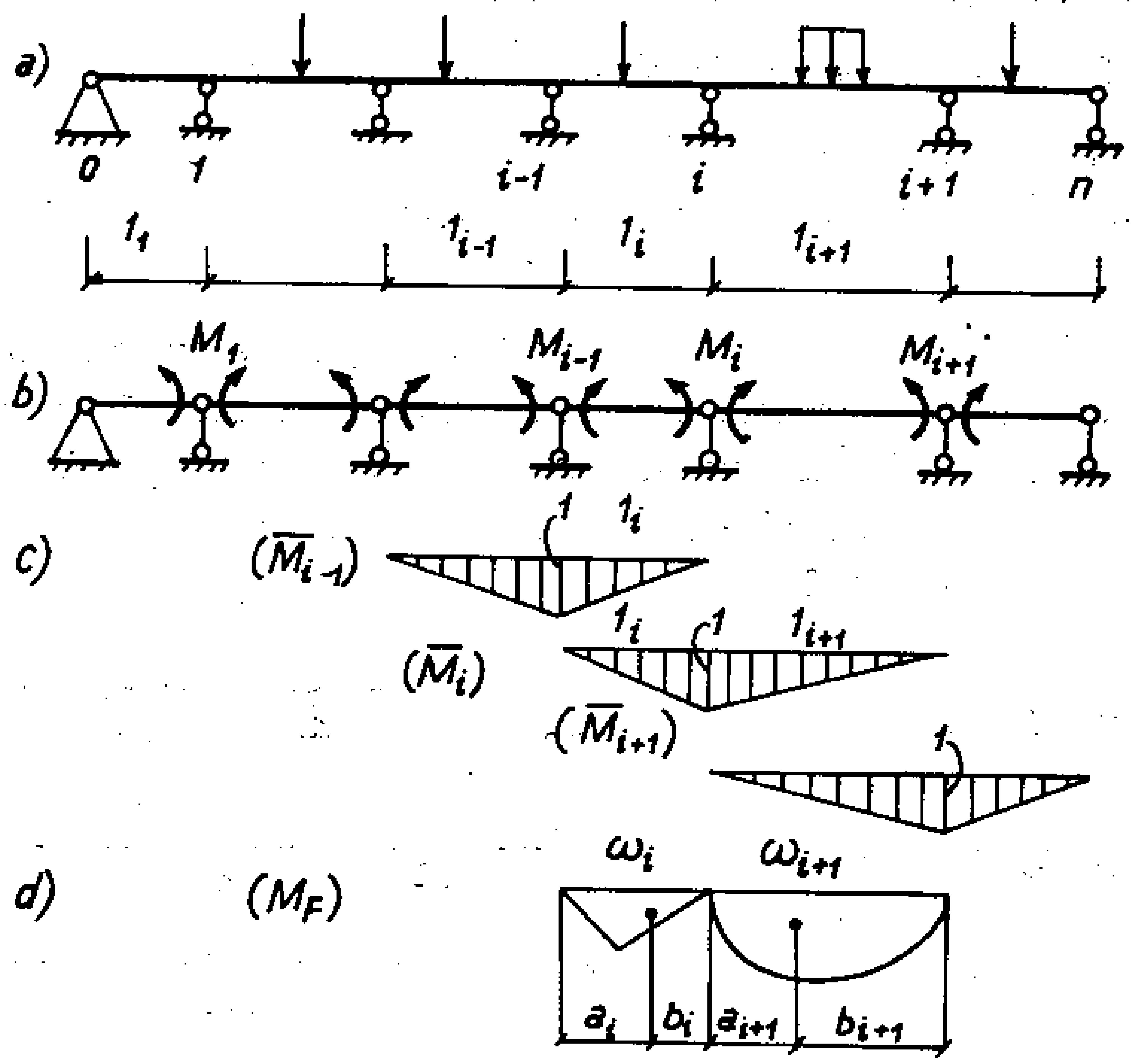
- ***Dầm liên tục có đầu ngàm*** **là dầm có một hoặc hai đầu mút bị ngàm và có** thêm các gối tựa trung gian như trên hình 12-10a. Dầm liên tục có đầu ngàm cũng có thể chuyển thành dầm liên tục đơn giản bằng cách thay thế ngàm bởi một đoạn dầm nối liên tục với chiều dài vô cùng bé $l_1 \to 0$ và có gối tựa ở hai đầu đoạn thêm này (xem hình 12-10b).

Như thế, về cơ bản ta chỉ cần nêu cách tính đối với dầm liên tục đơn giản là đủ.

Cũng cần lưu ý thêm rằng vai trò của gối tựa di động hoặc gối tựa cố định là như nhau khi dầm chỉ chịu tải trọng ngang và bỏ qua biến dạng do lực dọc.

### 12-3-2. Phương trình ba mômen

Xét dầm liên tục đơn giản có $n$ bậc siêu tĩnh và giả thiết độ cứng chống uốn $EI$ của tiết diện là hằng số trên toàn chiều dài. Trên hình 12-11a ta đánh số các gối tựa từ trái sang phải bắt đầu từ số không, chiều dài nhịp đầu tiên là $l_1$, chiều dài nhịp nằm giữa gối tựa thứ $i$ và gối tựa thứ $i+1$ ký hiệu là $l_i$.




*Hình 12-11.* Dầm liên tục và hệ cơ bản

Hệ cơ bản được suy từ hệ đã cho bằng cách cắt bỏ liên kết ngăn cản xoay ở các gối tựa trung gian, gọi là khớp hoá các gối tựa liên tục, và thay thế vào đó ta đặt các mômen ẩn số $X_i = M_i$. Hai mômen tại tiết diện bên trái và tiết diện bên phải gối tựa thứ $i$ đặt ngược chiều nhau và được ký hiệu là $M_i$. Như vậy, phương trình chính tắc biểu thị điều kiện bằng không của chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện bên phải và bên trái gối tựa trong hệ siêu tĩnh.

Hệ cơ bản vừa chọn là một hệ các dầm đơn giản tĩnh định độc lập với nhau, mômen đơn vị $\overline{M}_i$ chỉ ảnh hưởng đến biến dạng, chuyển vị của hai dầm có nhịp $l_i$, $l_{i+1}$ ở hai bên của gối tựa thứ $i$. Như thế, nếu $i$ khác $k$ hai đơn vị trở lên thì hệ số $\delta_{ik}$ sẽ bằng không. Hệ phương trình chính tắc sẽ có nhiều hệ số bằng không, trở nên thuận tiện hơn khi giải. Chẳng hạn phương trình ở hàng thứ $i$ chỉ còn lại là

$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i\,(i+1)}M_{i+1} + \Delta_{iF} = 0, \qquad (12\text{-}8)$$

$\delta_{i(i-1)}$, $\delta_{ii}$, $\delta_{i\,(i+1)}$, $\Delta_{iF}$ lần lượt là góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ $i$ do các mômen đơn vị $\overline{M}_{i-1}, \overline{M}_i, \overline{M}_{i+1}$ và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Biểu đồ mômen uốn nội lực do mômen đơn vị $\overline{M}_{i-1}, \overline{M}_i, \overline{M}_{i+1}$ và do tải trọng gây ra trong đoạn $i$ và $i+1$ được vẽ trên hình 12-11.

Ta ký hiệu:

$\omega_i$, $\omega_{i+1}$ - diện tích biểu đồ $M_F$ trong nhịp $i$ và trong nhịp $i+1$;

$a_i$, $b_i$ - khoảng cách từ trọng tâm diện tích $\omega_i$ tới gối tựa gần nhất bên trái (gối tựa thứ $i-1$) và tới gối tựa gần nhất bên phải (gối tựa thứ $i$).

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EI}.\frac{l_i}{2}.\frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI};$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EI}\left(\frac{l_i}{2}.\frac{2}{3} + \frac{l_{i+1}}{2}\frac{2}{3}\right) = \frac{l_i + l_{i+1}}{3EI};$$

$$\delta_{i\,(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EI}.\frac{l_{i+1}}{2}.\frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI};$$

$$\Delta_{iF} = (\overline{M}_i)(M_F) = \frac{1}{EI}\left(\omega_i\frac{a_i}{l_i} + \omega_{i+1}\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}\right).$$

Thay các giá trị này vào (12-8), ta nhận được phương trình đối với ba mômen $M_{i-1}$, $M_i$, $M_{i+1}$ là phương trình chính tắc viết cho gối tựa thứ $i$

$$l_iM_{i-1} + 2(l_1 + l_{i+1})\,Mi + l_{i+1}M_{i+1} + 6\left(\omega_i\frac{a_i}{l_i} + \omega_{i+1}\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}\right) = 0. \quad (12\text{-}9)$$

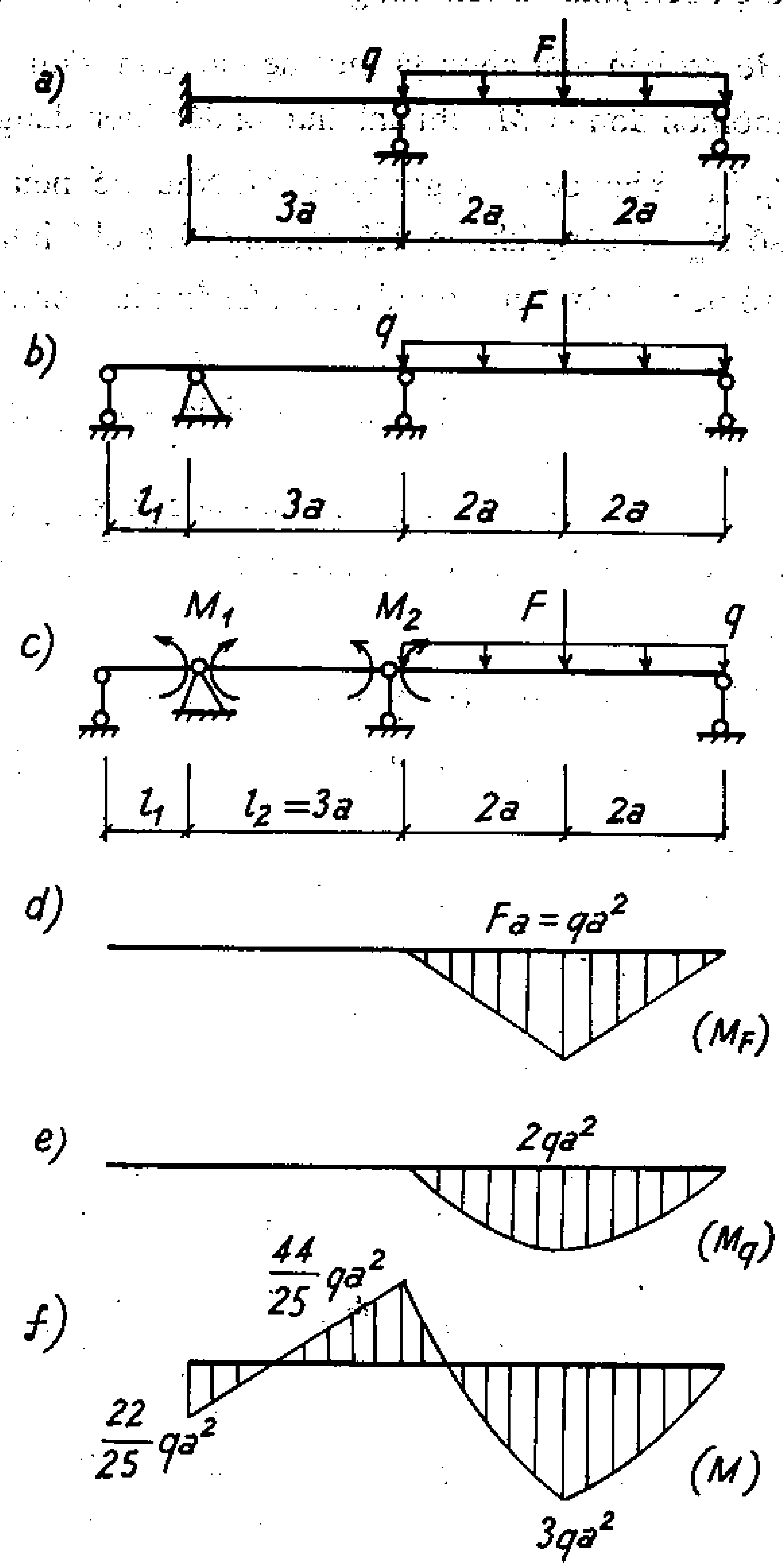
Viết phương trình tương tự cho các gối trung gian của dầm, ta nhận được $n$ phương trình chứa $n$ ẩn số là các mômen uốn ở gối tựa. Các phương trình này được gọi là *phương trình ba mômen*.

***Ví dụ 12-5.*** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục có đầu ngàm cho trên hình 12-12a.

***Bài giải.*** Dầm đã cho trên hình 12-12a được biến đổi thành dầm liên tục đơn giản như trên hình 12-12b bằng cách bỏ ngàm và kéo dài dầm thêm một đoạn có chiều dài $l_1 \to 0$ và có gối tựa tại hai đầu đoạn.

Hệ có hai bậc siêu tĩnh. Hệ cơ bản, các ẩn số mômen gối tựa và các nhịp được đánh số như trên hình 12-12c.

Biểu đồ mômen uốn do ngoại lực, theo nguyên lý cộng tác dụng được vẽ riêng thành biểu đồ do lực tập trung $F$ và biểu đồ do lực phân bố $q$, biểu đồ chỉ có trong nhịp $l_3$, như trên hình 12-12d, e.




***Hình 12-12.*** Cho ví dụ 12-5

Phương trình ba mômen viết cho hai gối tựa 1 và 2:

$$l_1 M_o + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 6\left(\omega_1 \frac{a_1}{l_1} + \omega_2 \frac{b_2}{l_2}\right) = 0 \,;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 6\left(\omega_2 \frac{a_2}{l_2} + \omega_3 \frac{b_3}{l_3}\right) = 0 .$$

Trong bài toán đang xét:

$l_1 = 0$; $l_2 = 3a$; $l_3 = 4a$; $M_o = 0$; $M_3 = 0$; $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 0$;

$\omega_3$ bao gồm diện tích biểu đồ do $F$ gây ra $\omega_{3F} = 2qa^3$ với các khoảng cách $a_3 = 2a$; $b_3 = 2a$ và diện tích biểu đồ do $q$ gây ra $\omega_{3q} = 16qa^3/3$ với các khoảng cách $a_3 = 2a$; $b_3 = 2a$.

Cho nên hệ hai phương trình trên trở thành:

$$6aM_1 + 3aM_2 = 0;$$

$$3aM_1 + 14aM_2 + 6\left(2qa^3 \frac{2a}{4a} + \frac{16qa^3}{3}\frac{2a}{4a}\right) = 0 .$$

hoặc:

$$2M_1 + M_2 = 0;$$

$$3M_1 + 14M_2 + 22qa^2 = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình: $M_1 = \frac{22}{25}qa^2$; $M_2 = -\frac{44}{25}qa^2$.

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 12-12f.

## 12-4. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

Chuyển vị trong hệ siêu tĩnh được tính theo công thức Mohr, chẳng hạn khi sử dụng phép nhân biểu đồ Vêrêxaghin thì chuyển vị theo phương $k$ sẽ là

$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k)(M),$$

với $(\overline{M}_k)$ và $(M)$ là biểu đồ mômen uốn đơn vị và biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh. Như thế, ta phải giải hai bài toán siêu tĩnh: một bài toán để vẽ $(M)$ và một bài toán để vẽ $(\overline{M}_k)$.

Tuy nhiên, ta có thể đơn giản hoá tính toán bằng nhận xét: chuyển vị trong hệ siêu tĩnh và trong hệ cơ bản phải giống như nhau, nên ta có thể tính chuyển vị chỉ trong hệ cơ bản.

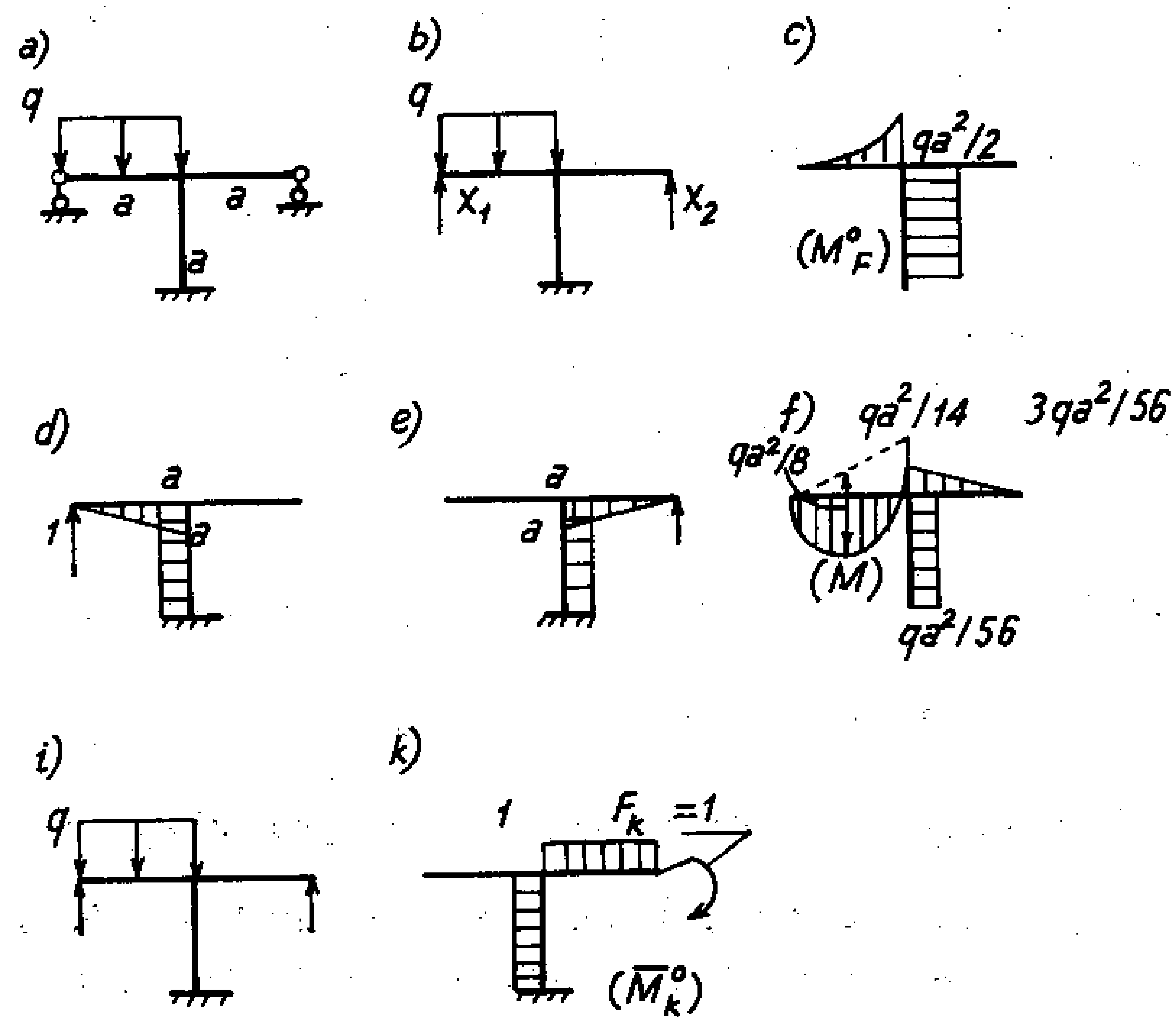
$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k^o)(M),$$

$(M)$ - biểu đồ mômen do tất cả các lực (gồm tải trọng và các lực ẩn số gây ra) trong hệ cơ bản, cũng chính là biểu đồ mômen trong hệ siêu tĩnh đã cho.

$(\overline{M}_k^o)$ - biểu đồ mômen uốn chỉ do lực bằng đơn vị theo phương $k$ gây ra trong hệ cơ bản, hệ cơ bản này không nhất thiết phải trùng với hệ cơ bản đã chọn khi tìm *(M)*.

***Ví dụ 12-6***. Xác định góc xoay tại tiết diện ở gối tựa *A* trong khung cho trên hình 12-13*a* có $EI = const$.

*Bài giải*. Hệ cơ bản và các biểu đồ mômen uốn tương ứng trong hệ cơ bản cho trên các hình 12-13b, c, d, e.




*Hình 12-13.* Cho ví dụ 12-6

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \qquad \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Các hệ số của phương trình:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(\frac{a^2}{2}.\frac{2}{3}a + a^2.a\right) = \frac{4a^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{a^3}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{3}.\frac{qa^2}{2}.a.\frac{3}{4}a - \frac{qa^3}{2}a\right) = -\frac{5}{8EI}qa^4;$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI}.\frac{qa^3}{2}.a = \frac{1}{2EI}qa^4.$$

Nghiệm của hệ phương trình: $X_1 = \frac{3}{7}qa;$ $X_2 = -\frac{3}{56}qa.$

Biểu đồ mômen uốn *(M)* trong hệ siêu tĩnh vẽ trên hình 12-13f.

Để tính góc xoay tại A, ta chọn hệ cơ bản như cũ. Trạng thái *k* là trạng thái hệ cơ bản chỉ chịu mômen đơn vị đặt tại gối tựa *A*, biểu đồ mômen uốn $(\overline{M}_k^o)$ vẽ trên hình 12-13k.

$$\varphi_A = \Delta_k = (\overline{M}_k^o)(M) = \frac{1}{EI}\left(\frac{3}{56}qa^2.\frac{a}{2}.1 - \frac{1}{56}qa^3.1\right) = \frac{qa^3}{28EI}.$$

Dấu dương chứng tỏ góc xoay thuận với chiều đã giả thiết của mômen đơn vị.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

12-1. Thế nào là hệ thanh biến hình, hệ thanh bất biến hình, hệ thanh tĩnh định, hệ thanh siêu tĩnh. Cho mỗi loại hệ hai ví dụ.

12-2. Nêu nội dung phương pháp lực để giải hệ thanh siêu tĩnh. Ý nghĩa của phương trình chính tắc.

12-3. Viết và giải thích các biểu thức tính hệ số và số hạng tự do trong phương trình chính tắc.

12-4. Giải thích cách xác định biểu đồ ứng lực, nói chung, và biểu đồ mômen uốn, nói riêng, của hệ siêu tĩnh sau khi đã có nghiệm của hệ phương trình chính tắc.

12-5. Nêu ưu điểm của việc chọn hệ cơ bản khi giải dầm liên tục theo phương trình ba mômen.

12-6. Nêu biện pháp đơn giản để tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh.

# 13 Ổn định của thanh thẳng chịu nén, uốn

## 13-1. KHÁI NIỆM CHUNG

Các chương trước của giáo trình đã đề cập tới việc xác định trạng thái ứng suất, biến dạng, chuyển vị của thanh và đã đánh giá độ bền, độ cứng cuả thanh trong các trường hợp chịu lực. Tuy nhiên, thực tế cho thấy: các điều kiện này nhiều khi cũng chưa đảm bảo đầy đủ khả năng làm việc bình thường của kết cấu. Cùng với việc phân tích độ bền, độ cứng các kỹ sư cần quan tâm tới độ ổn định của kết cấu.

Sơ đồ tính, tính chất vật liệu mà chúng ta đặt ra với kết cấu là những khái niệm tuyệt đối, lý tưởng. Trong thực tế, kết cấu còn chịu những yếu tố thực, những nhiễu động. Dưới ảnh hưởng của những nhiễu động này, kết cấu có thể có những biến dạng lệch khỏi sơ đồ tính ban đầu. Khi ngừng nhiễu động, kết cấu có thể quay trở lại hoặc không quay trở lại sơ đồ tính ban đầu.

Ta định nghĩa một cách khái quát: *độ ổn định của kết cấu là khả năng duy trì, bảo toàn được dạng cân bằng ban đầu trước các nhiễu động có thể xảy ra.*

*Hình 13-1.* Các vị trí cân bằng của quả cầu


Để làm rõ hơn khái niệm này, ta hãy xét sự ổn định vị trí của vật rắn qua sự cân bằng của quả cầu ở những vị trí khác nhau trên một bề mặt: trên đáy lõm (độ cong dương), trên đỉnh lồi (độ cong âm) và trên mặt nằm ngang (độ cong bằng không). Những vị trí cân bằng này gọi là vị trí cân bằng ban đầu. Nếu cho quả cầu một xê dịch nhỏ đưa nó từ vị trí cân bằng ban đầu sang một vị trí lân cận mới, gọi là vị trí cân bằng nhiễu động, và sau đó ngừng nhiễu động thì ta dễ dàng nhận thấy:

* Trong trường hợp thứ nhất trên hình 13-1a, quả cầu sẽ quay trở lại vị trí ban đầu. Vị trí cân bằng ban đầu là *ổn định.*

* Trong trường hợp thứ hai trên hình 13-1b, quả cầu sẽ không quay trở lại vị trí ban đầu mà tiếp tục chuyển động. Vị trí cân bằng ban đầu, khi này, là *không ổn định.*

* Trong trường hợp thứ ba trên hình 13-1c, quả cầu sẽ không quay trở lại vị trí ban đầu nhưng cũng không chuyển động xa hơn mà nằm ngay tại vị trí cân bằng nhiễu động. Vị trí cân bằng ban đầu là *phiếm định.*

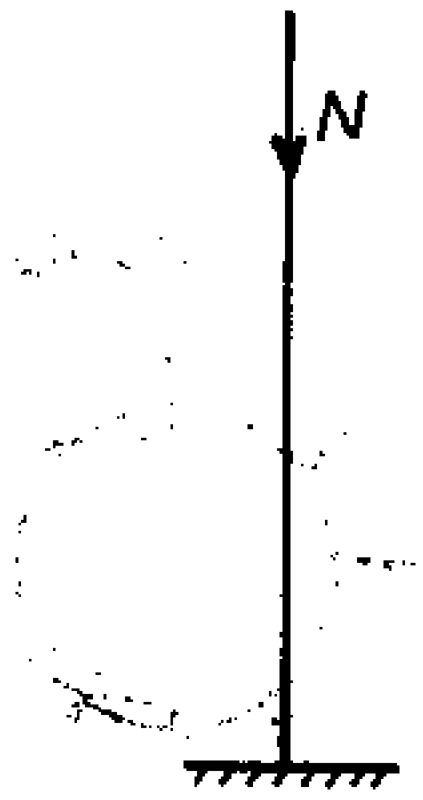
Điều kiện để quả cầu có vị trí cân bằng ổn định là độ cong của bề mặt tựa $k > 0$.

Hiện tượng tương tự cũng xảy ra đối với *trạng thái cân bằng biến dạng* của hệ kết cấu. Để đơn giản, ta xét một thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực $N$ như trên hình 10-2. Trong quá trình xem xét, ta sẽ tăng dần trị số của lực, bắt đầu từ $0$. Trạng thái cân bằng ban đầu của thanh là dạng thẳng, thanh chỉ chịu nén đúng tâm. Gây cho thanh một nhiễu động, chẳng hạn bằng một lực ngang nhỏ $R$ đủ đưa thanh ra khỏi vị trí thẳng, thanh sẽ cong đi. Dạng cân bằng cong này gọi là trạng thái cân bằng nhiễu động. Nếu ngừng các nhiễu động, bỏ lực ngang $R$, ta nhận thấy sẽ xảy ra các khả năng sau:

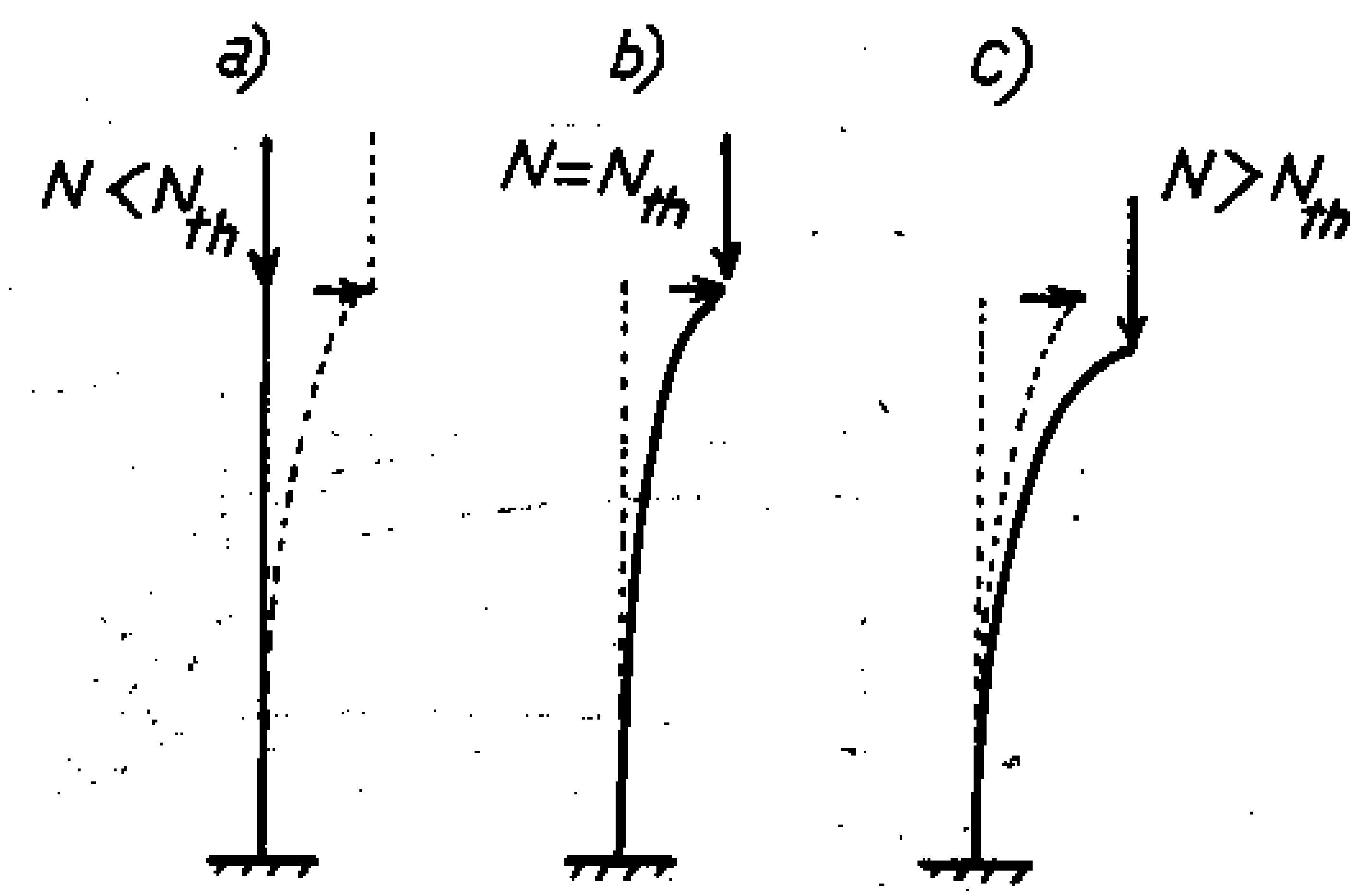
* Khi giá trị lực nén $N$ bé, chẳng hạn nhỏ hơn một trị số $N_{th}$ nào đó, thanh sẽ thẳng trở lại. Trạng thái cân bằng ban đầu của thanh là *ổn định* (hình 13-3a).

* Khi giá trị lực nén $N$ lớn, vượt quá trị số $N_{th}$, thanh không thẳng trở lại mà tiếp tục cong thêm, xa dần trạng thái cân bằng ban đầu. Trạng thái cân bằng ban đầu của thanh, khi này, là trạng thái *cân bằng không ổn định* (hình 13-3c). Khi bị mất ổn định, thanh sẽ cong thêm, ngoài chịu nén thanh còn chịu uốn, ứng suất và biến dạng sẽ tăng lên dẫn tới phá hoại.

* Tồn tại một trạng thái chuyển tiếp trung gian, khi lực nén $N = N_{th}$, sau khi bỏ nhiễu động, thanh không thẳng trở lại nhưng cũng không cong thêm. Thanh giữ nguyên trạng thái cân bằng nhiễu động (hình 13-3b). Trạng thái trung gian này được gọi là trạng thái *cân bằng tới hạn.* Trị số lực nén $N_{th}$ tương ứng được gọi là *lực nén tới hạn.*




***Hình 13-2.*** Thanh thẳng chịu nén




***Hình 13-3.*** Các dạng cân bằng của thanh

Cần lưu ý rằng nhiễu động luôn luôn tồn tại, sẵn có trong điều kiện thực của kết cấu. Đó là độ cong ban đầu của trục thanh khi chế tạo, là sự không đồng đều của tiết diện, là độ lệch tâm vốn có của lực nén, là những tác động ngẫu nhiên của tải trọng ngang ..., là tất cả những yếu tố sai lệch thực tế không thể tránh khỏi so với đIêu kiện "lý tưởng". Vì vậy, bài toán ổn định của thanh mang ý nghĩa thực tế rất lớn. Khi tính toán kết cấu, cần đảm bảo để thanh không bị mất ổn định. Đối với thanh chịu nén đúng tâm thì điều kiện này được biểu diễn bởi bất đẳng thức:

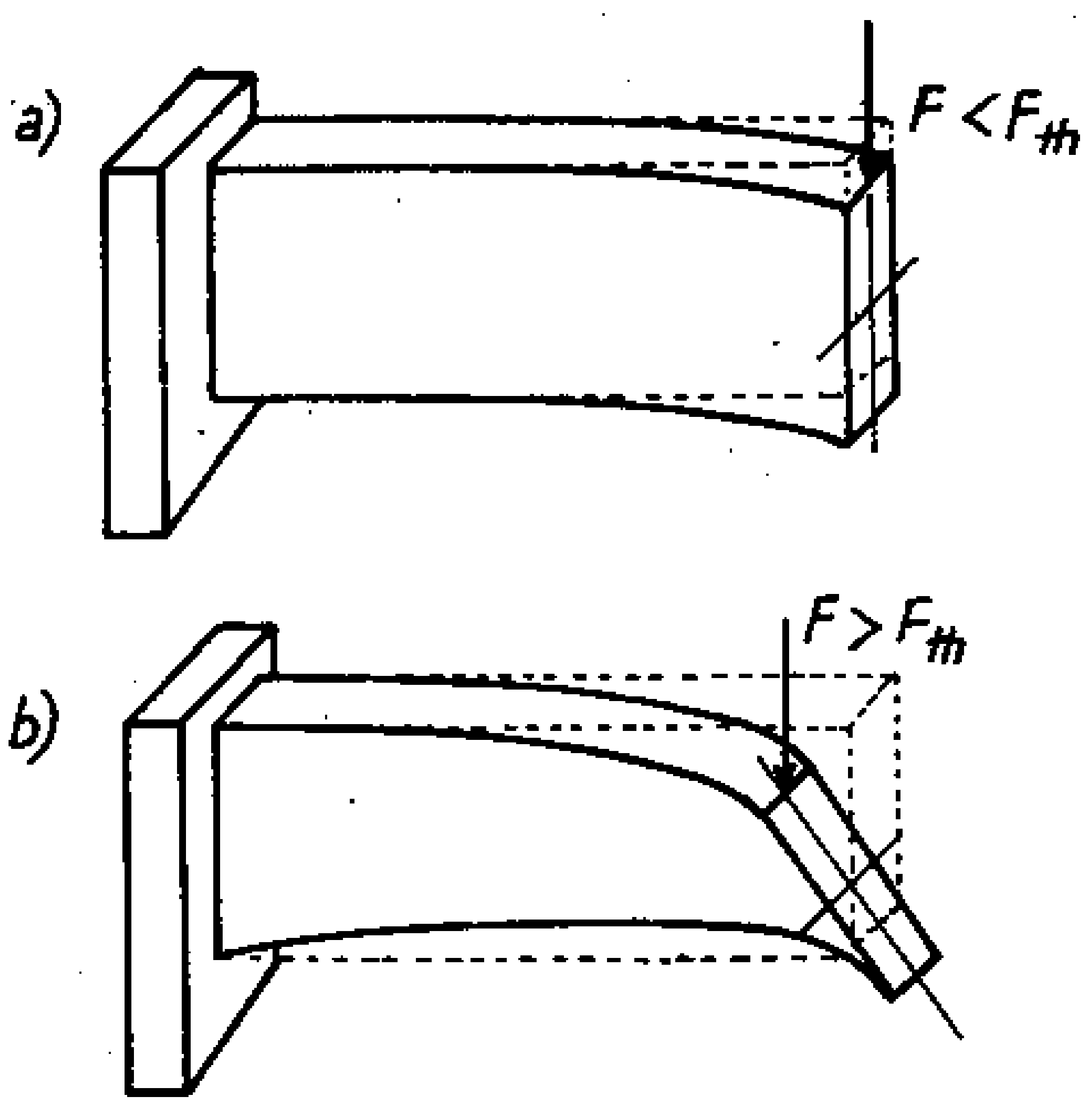
$$N \le N_{th}.$$

Hiển nhiên rằng cách đặt vấn đề như trên về điều kiện ổn định độc lập với các điều kiện bền và điều kiện cứng đã nêu trong các chương trước.

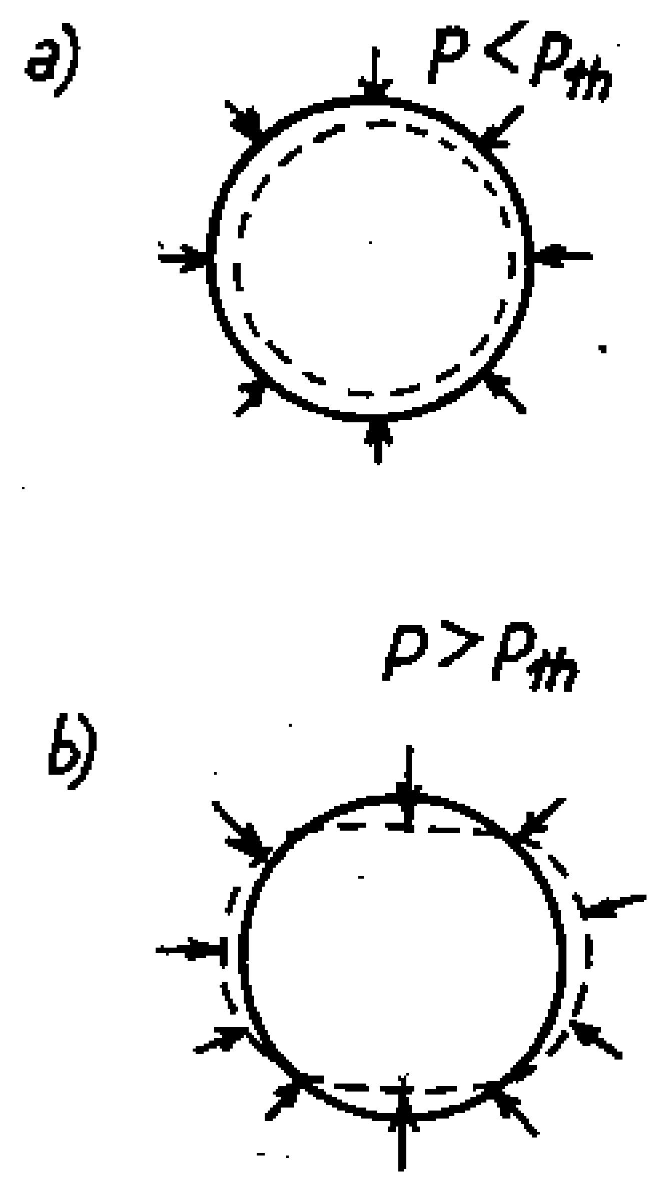
Thực tế cho thấy thanh có thể mất ổn định trong giới hạn đàn hồi, khi ứng suất chưa vượt quá giới hạn tỷ lệ $\sigma_{tl}$, và thanh cũng có thể mất ổn định ngoài giới hạn đàn hồi, khi ứng suất trong thanh vượt quá giới hạn tỷ lệ $\sigma_{tl}$.

Hiện tượng mất ổn định cũng có thể xảy ra đối với các trường hợp chịu lực khác của thanh, ví dụ như:

- Dầm chịu uốn sẽ ổn định khi lực ngang $F \le F_{th}$, trong dầm chỉ có biến dạng uốn như trên hình 13-4a; khi $F > F_{th}$ thì dầm mất ổn định, ngoài biến dạng uốn thanh còn có biến dạng xoắn như trên hình 13-4b.
- Ống mỏng chịu áp lực bên ngoài sẽ ổn định khi $p \le p_{th}$, tiết diện vẫn tròn như trên hình 10-5a; mất ổn định khi $p > p_{th}$, tiết diện sẽ không còn tròn mà có dạng đường đứt nét như trên hình 13-5b.




*Hình 13-4.* Ổn định của dầm



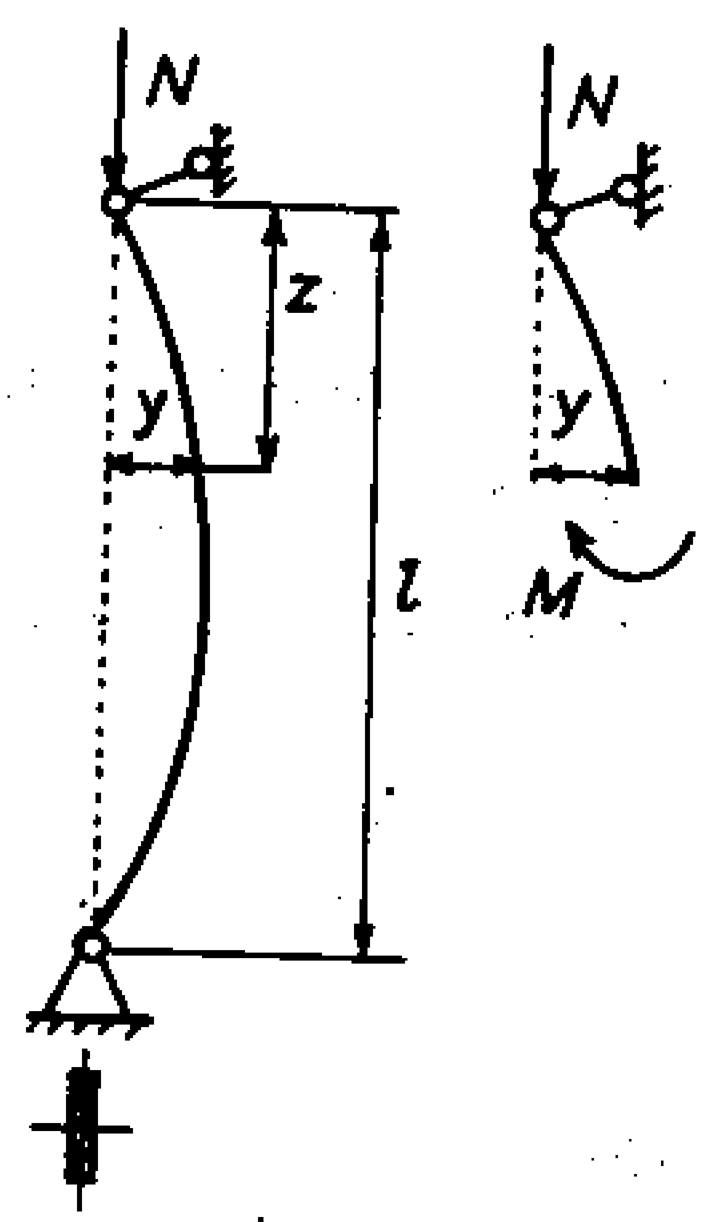

*Hình 13-5.* Ổn định của ống

Lịch sử xây dựng cũng đã ghi lại nhiều thảm hoạ do việc tính toán chưa đầy đủ điều kiện ổn định của kết cấu, chẳng hạn vụ sập cầu vượt sông Lavrentia có nhịp chính dài *549*m ở Mỹ năm 1907 làm chết *74* người, tiêu hao *9. 000* tấn kim loại. Cầu Mekhelstein ở Thuỵ sĩ với nhịp không lớn, tổng cộng có *42*m, cũng bị sập đổ năm 1891 khi đoàn tầu khách *12* toa chạy qua làm chết *74* và bị thương *200* hành khách. Nguyên nhân xảy ra thảm họa là sự mất ổn định của một thanh chịu nén trong dàn cầu, kéo theo sự phá hoại toàn bộ cầu.

Ngày nay, vấn đề ổn định kết cấu đã được quan tâm nghiên cứu và được trình bày trong những chuyên đề, giáo trình riêng biệt. Trong khuôn khổ SBVL ta chỉ nghiên cứu bài toán cơ bản nhất: bài toán ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm, hoặc còn gọi là bài toán uốn dọc (thanh cong khi chịu lực dọc trục), mà mục đích chính là xác định lực nén tới hạn để kiểm tra điều kiện ổn định.

## 13-2. BÀI TOÁN EULER XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN

### 13-2-1. Thanh thẳng liên kết khớp ở hai đầu




*Hình 13-6.* Bài toán Euler

Xét một thanh thẳng liên kết khớp ở hai đầu, chịu lực nén đúng tâm $N$ có phương không thay đổi. Giả thử lực nén đạt tới trị số tới hạn $N = N_{th}$, thanh bị uốn cong và tiết diện ở toạ độ $z$ có độ võng $y \neq 0$ nằm trong mặt phẳng có độ cứng chống uốn nhỏ nhất như trên hình 13-6.

Ký hiệu độ cứng chống uốn trong mặt phẳng đang xét của tiết diện là $EI$, mômen uốn tại tiết diện là $M$, ta có phương trình vi phân độ võng là

$$y'' = -\frac{M}{EI}. \qquad (13\text{-}1)$$

Bằng phương pháp mặt cắt, xét thanh ở trạng thái biến dạng như trên hình 13-5b, ta có

$$M = N\,y. \qquad (a)$$

Thay (a) vào (13-1) ta nhận được phương trình vi phân cấp hai thuần nhất:

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \qquad (13\text{-}2)$$

với ký hiệu:

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI} \qquad (13\text{-}3)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (13-2):

$$y = C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z. \qquad (b)$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện biên:

* tại $z = 0$ thì $y=0$; thay vào (b) ta có: $C_1 = 0$; do đó $y = C_2 \sin\alpha z$. (c)

* tại $z = l$ thì $y=0$; thay vào (c) ta có: $C_2 \sin\alpha l = 0$. (d)

Như vậy, hoặc $C_2 = 0$ hoặc $\sin\alpha l = 0$.

Theo (c), điều kiện $C_2 = 0$ dẫn tới kết luận $y \equiv 0$, trái với giả thiết ban đầu.

Để nhận được nghiệm cho độ võng $y$ khác không thì $\sin\alpha l = 0$. Do đó:

$$\alpha l = k\pi \quad \text{với } k \text{ là số tự nhiên, hoặc} \quad \alpha^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \tag{e}$$

So sánh (13-3) và (e) ta suy ra

$$N = k^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{với} \quad k=1, 2, 3... \tag{13-4}$$

Biểu thức (13-4) là điều kiện để độ võng của thanh khác không, tức là điều kiện mất ổn định của thanh. Giá trị bé nhất khác không của (13-4) ứng với $k=1$ sẽ là lực tới hạn:

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{f}$$

Mặt khác, trên tiết diện tồn tại hai trục quán tính chính trung tâm, là hai trục trung tâm có mômen quán tính cực trị $I_{max}$ và $I_{min}$. Để có giá trị bé của (f) thì ta sử dụng $I_{min}$, có nghĩa là thanh sẽ cong trong mặt phẳng có độ cứng chống uốn $EI$ bé nhất. Biểu thức lực tới hạn khi này sẽ là

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}. \tag{13-5}$$

Như thế, lực tới hạn là lực nén nhỏ nhất tạo cho thanh thêm một dạng cân bằng cong khác với dạng cân bằng thẳng ban đầu.

Theo các kết luận trên, ta có thể nhận thấy một vài vấn đề chưa được giải quyết rành mạch, chẳng hạn độ võng của thanh có dạng $y = C_2 \sin\frac{\pi z}{l}$ nhưng trị số của độ võng không xác định, hoặc dạng độ võng sẽ ra sao nếu tải trọng nhận giá trị lớn hơn trị số ứng với $k=1$ là $N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$ nhưng nhỏ hơn trị số ứng với $k=2$ là $N_{th,2} = 4\frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2}$...

Để trả lời các câu hỏi này, ta cần lưu ý rằng công thức Euler được xây dựng trên cơ sở phương trình vi phân tuyến tính gần đúng của độ võng (13-1), phương trình này chỉ được chấp nhận khi biến dạng nhỏ, công thức Euler chỉ cho giá trị lực tới hạn ở thời điểm thanh bắt đầu cong mà không kết luận về quá trình tiếp tục cong của thanh. Lagrange đã lặp lại nghiên cứu của Euler nhưng xuất phát từ phương trình vi phân phi tuyến chính xác của đường đàn hồi $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI}$ và đã kết luận rằng: khi lực nén đạt giá trị của Euler thì thanh bắt đầu cong và sau đó, dù lực tăng rất ít, biến dạng của thanh sẽ phát triển rất nhanh dẫn thanh tới trạng thái bị phá hoại. Vì vậy, khi không có những liên kết phụ để hạn chế độ võng thì chỉ xảy ra đường cong ứng với $k=1$, không tồn tại những đường biến dạng ứng với các trị số cao hơn.

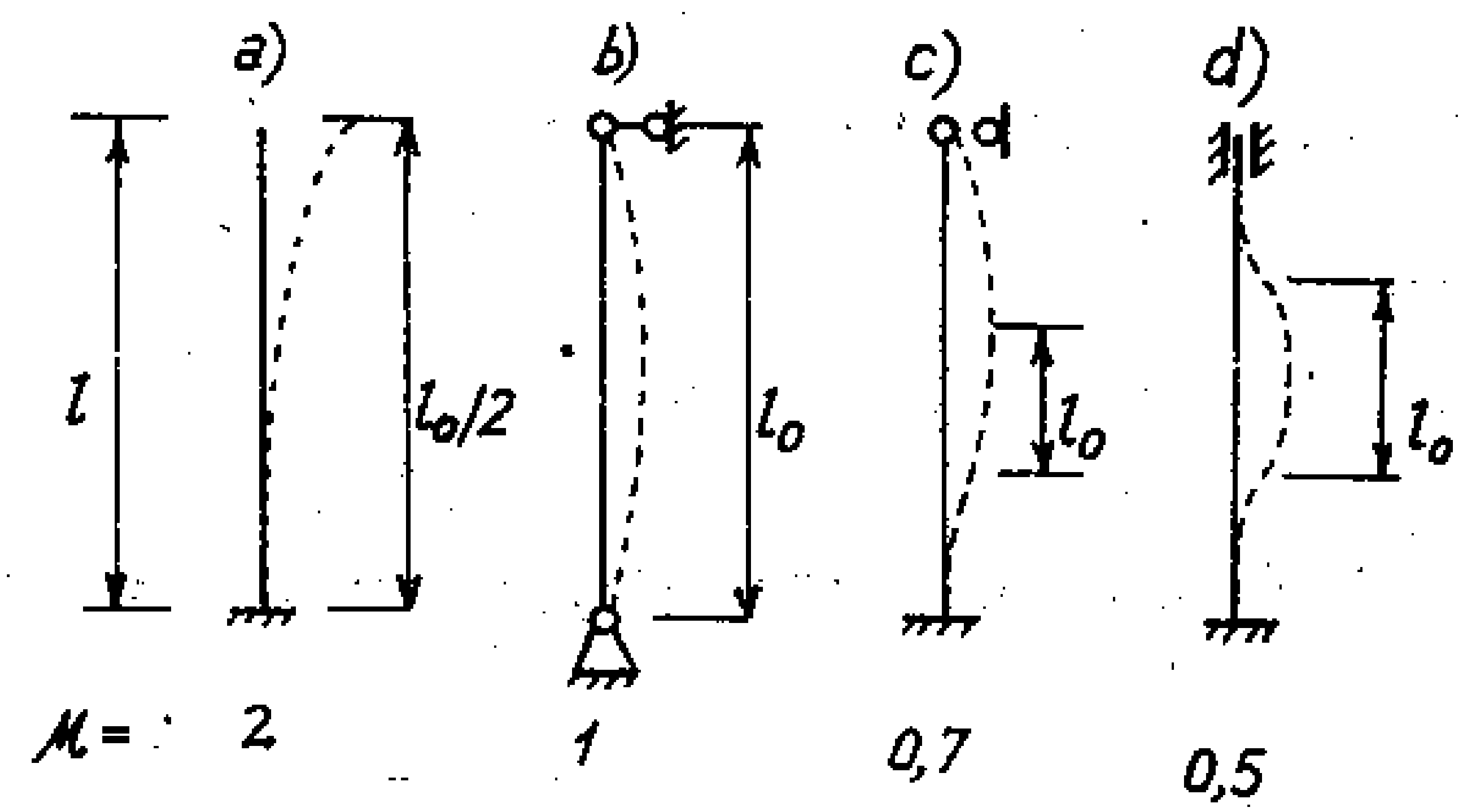
### *13-2-2. Thanh thẳng có các liên kết khác ở hai đầu*

Lặp lại phép giải bài toán đã tiến hành ở trên nhưng thay đổi các điều kiện biên, ta nhận được biểu thức của lực tới hạn trong từng trường hợp liên kết cụ thể của thanh và có thể viết một cách tổng quát

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}, \qquad (13\text{-}6)$$

trong đó $\mu$ là hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết ở hai đầu thanh, trị số cho trên hình 13-7.

*Hình 13-7.* Hệ số ảnh hưởng liên kết $\mu$ ($l_o = \mu l$)




Nghiên cứu tỷ mỷ hơn có thể thấy $\mu$ là số lần chiều dài của thanh ứng với một nửa bước sóng hình *sin* của đường cong trục thanh. Chẳng hạn hai lần chiều dài đối với thanh côngxôn (hình 13-7a), một lần chiều dài đối với thanh liên kết khớp ở hai đầu (hình 13-7b), một nửa chiều dài đối với thanh liên kết ngàm ở hai đầu (hình 13-7d).

Trị số $l_o = \mu l$ được gọi là *chiều dài quy đổi của thanh khi tính ổn định.* Công thức tính lực tới hạn theo chiều dài quy đổi là

$$N_{th} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_o^2}. \qquad (13\text{-}7)$$

Bài toán tìm lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng tâm được nhà bác học thiên tài Leonhard Euler (1707-1783) giải lần đầu tiên vào năm 1744 và công thức (13-6) mang tên ông, gọi là *công thức Euler*.

Công thức (13-6) sử dụng trị số $I_{min}$ đúng với trường hợp thanh có liên kết như nhau trong hai mặt phẳng quán tính chính $xz$ và $yz$. Khi thanh có liên kết khác nhau trong hai mặt phẳng thì cần tính lực tới hạn riêng biệt trong từng mặt phẳng, và chọn trị số nhỏ hơn làm lực tới hạn thực.

## 13-3. ỨNG SUẤT TỚI HẠN. GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC EULER

### 13-3-1. Ứng suất tới hạn, độ mảnh

Thương số giữa lực tới hạn $N_{th}$ và diện tích $A$ của tiết diện là ứng suất trên tiết diện thanh ngay trước thời điểm thanh bị mất ổn định, được gọi là *ứng suất tới hạn*, ký hiệu $\sigma_{th}$. Có thể viết:

$$\sigma_{th} = \frac{N_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{r_{min}}\right)^2} \tag{13-8}$$

với $r_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện (xem định nghĩa ở 5-4-2).

Gọi $\lambda$ là *độ mảnh của thanh*: $\lambda = \frac{\mu l}{r_{min}}$, (13-9)

ta nhận được công thức tính ứng suất tới hạn của Euler:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{13-10}$$

Độ mảnh $\lambda$ là một đặc trưng ổn định của thanh, trị số này càng lớn thì khả năng ổn định của thanh càng nhỏ, tên gọi "độ mảnh" cũng xuất phát từ ý nghĩa: *thanh càng mảnh thì càng dễ mất ổn định*. Độ mảnh phụ thuộc vào chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện.

### 13-3-2. Giới hạn áp dụng công thức Euler

Phương trình vi phân đường đàn hồi (13-1), cơ sở để giải bài toán Euler, chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi. Do đó, kết quả của bài toán cũng chỉ đúng khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi, tức là khi ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{tl},$$

hoặc khi $$\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}. \qquad (g)$$

Nếu ký hiệu $$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}, \qquad (13\text{-}11)$$

thì điều kiện để áp dụng công thức Euler là

$$\lambda \ge \lambda_o. \qquad (13\text{-}12)$$

Thanh có độ mảnh thỏa mãn điều kiện (13-12) được gọi là *thanh có độ mảnh lớn*. Chẳng hạn đối với thép xây dựng thường dùng $\lambda_o \approx 100$ đối với gỗ $\lambda_o \approx 75$.

Thanh có độ mảnh nhỏ hơn $\lambda_o$ được gọi là *thanh có độ mảnh vừa hoặc bé*. Không thể áp dụng công thức Euler để tính ứng suất tới hạn đối với những thanh có độ mảnh vừa và bé.

## 13-4. ỔN ĐỊNH CỦA THANH LÀM VIỆC NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

Nghiên cứu lý thuyết về ổn định ngoài giới hạn đàn hồi còn gặp những khó khăn nhất định và chưa cho một kết quả thống nhất. Trong kỹ thuật, ta thường áp dụng những công thức đơn giản rút ra từ thực nghiệm.

### 1 - Thanh có độ mảnh vừa $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_o$

Có thể dùng công thức của Iashinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda. \qquad (13\text{-}13)$$

Hằng số *a*, *b* phụ thuộc vào vật liệu và tìm được từ thí nghiệm.

* Với thép ít cácbon $a = 31$ kN/cm$^2$; $b = 0{,}14$ kN/cm$^2$.

* Với gỗ $a = 2{,}93$ kN/cm$^2$; $b = 0{,}0194$ kN/cm$^2$.

Quan hệ giữa $\sigma_{th}$ và $\lambda$ là bậc nhất. Có thể tìm được giới hạn $\lambda_1$ theo biểu thức:

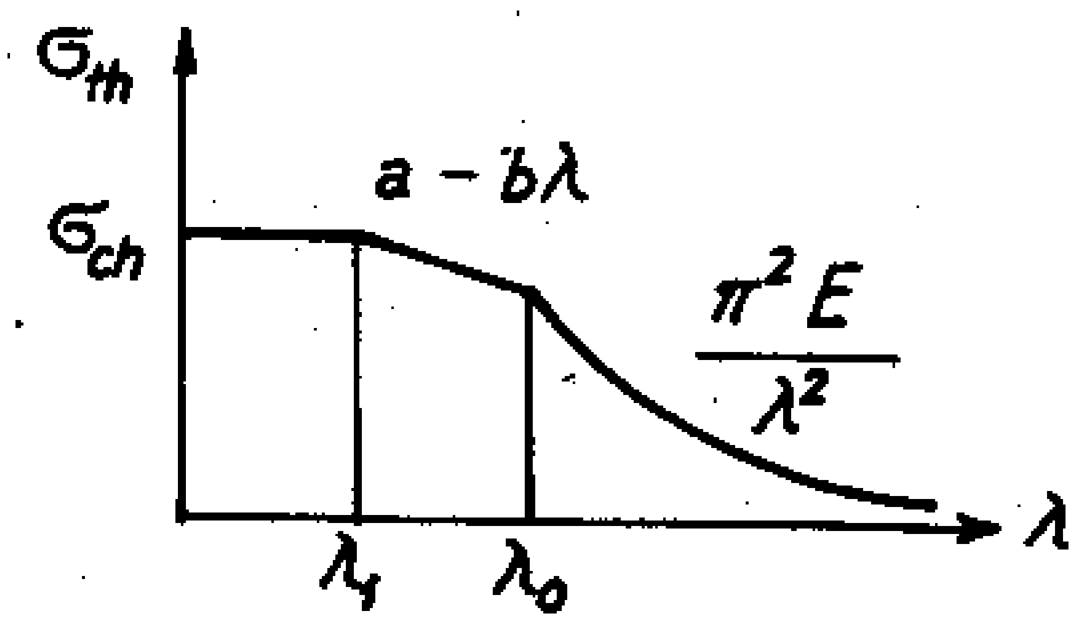
$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b}.$$

### 2 - Thanh có độ mảnh bé $\lambda \le \lambda_1$

Vì độ mảnh quá bé nên khi chịu nén thì thanh không thể bị cong, trạng thái tới hạn của thanh cũng đồng thời là trạng thái phá hoại của vật liệu. Sự phá hoại này mang đặc trưng giòn, chẳng hạn với bêtông, khi ứng suất đạt giới hạn bền; hoặc mang đặc trưng xuất hiện biến dạng dẻo, chẳng hạn với thép, khi ứng suất đạt giới hạn chảy

$$\sigma_{th} = \begin{cases} \sigma_b & (\textit{vật liệu giòn}) \\ \sigma_{ch} & (\textit{vật liệu dẻo}) \end{cases} \qquad (13\text{-}14)$$

Đồ thị quan hệ giữa ứng suất tới hạn $\sigma_{th}$ và độ mảnh $\lambda$ của thanh làm từ vật liệu dẻo được vẽ trên hình 13-8.




*Hình 13-8.* Quan hệ $\sigma_{th}$ và $\lambda$

***Ví dụ 13-2***. Tính lực tới hạn của một cột có liên kết khớp ở hai đầu, làm từ thép định hình I $N^o22$ trong hai trường hợp: a) chiều cao của cột $4$ m; b) chiều cao của cột $2$ m.

*Bài giải*. Từ bảng thép định hình (phụ lục I) ta có các số liệu của thép I $N^o22$: $r_{min} = r_y = 2,27$ cm; $A = 30,6$ cm$^2$;

Các đặc trưng của thép: $E = 2,1.10^4$ kN/cm$^2$; $a = 31$ kN/cm$^2$; $b = 0,14$ kN/cm$^2$; $\lambda_o \approx 100$.

* Trường hợp a - $\lambda = \dfrac{\mu l}{r_{min}} = \dfrac{1.400}{2,27} = 176 > \lambda_o \approx 100$.

Thanh có độ mảnh lớn, áp dụng công thức Euler

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 2,1.10^4}{176^2} = 6,69 \text{ kN/cm}^2;$$

$$N_{th} = \sigma_{th} A = 6,69.30,6 = 204,7 \text{ kN}.$$

* Trường hợp b - $\lambda = \dfrac{\mu l}{r_{min}} = \dfrac{1.200}{2,27} = 88 < \lambda_o$.

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} = \frac{31 - 21}{0,14} = 71; \quad \rightarrow \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$$

Thanh có độ mảnh vừa, áp dụng công thức Iashinski:

$$\sigma_{th} = a - b\,\lambda = 31 - 0,14.88 = 18,68 \text{ kN/cm}^2;$$

$$N_{th} = \sigma_{th} A = 18,68.30,6 = 571,6 \text{ kN}.$$

## 13-5. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH ỔN ĐỊNH

Trong chương 3 ta đã viết điều kiện bền của thanh chịu nén

$$\sigma = \frac{|N|}{A} \le [\sigma]. \qquad (13\text{-}15)$$

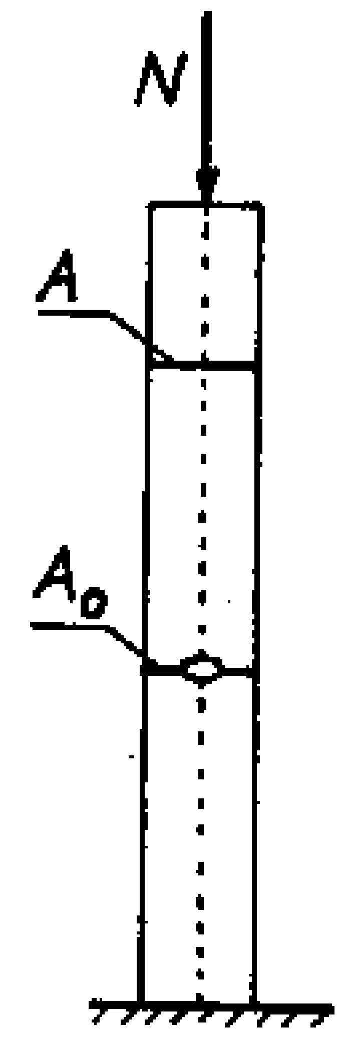
trong đó:

$N$ - giá trị lực dọc;

$A$ - diện tích tiết diện giảm yếu cục bộ của thanh, chẳng hạn với hệ trên hình 13-9 trị số $A$ là $A_o$ lấy tại tiết diện có khoét lỗ;

$[\sigma]$ - ứng suất bền cho phép, bằng ứng suất giới hạn $\sigma_o$ chia cho hệ số an toàn $n$ về bền:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}.$$




*Hình 13-9.* Diện tích tiết diện $A$ và $A_o$

Điều kiện ổn định của thanh chịu nén, kể đến hệ số an toàn, có thể viết dưới dạng

$$\sigma = \frac{|N|}{A} \le [\sigma]_{ôd} = \frac{\sigma_{th}}{k}. \qquad (13\text{-}16)$$

Sự giảm yếu của một vài tiết diện không ảnh hưởng đáng kể đến độ ổn định chung của thanh, do đó diện tích $A$ sẽ lấy bằng diện tích tiết diện nguyên của thanh.

Trị số ứng suất tới hạn lấy theo các công thức (13-10), (13-13), (13-14) tuỳ theo độ mảnh của thanh. Để giảm bớt khó khăn khi tính toán, ta đưa thêm ký hiệu:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{ôd}}{[\sigma]}. \qquad (h)$$

Khi đó, điều kiện ổn định (13-16) được viết lại, có dạng tương tự điều kiện bền như sau:

$$\frac{|N|}{\varphi A} \le [\sigma]. \qquad (13\text{-}17)$$

Hệ số $\varphi$ được gọi là *hệ số uốn dọc* hoặc *hệ số giảm ứng suất cho phép*, theo biểu thức định nghĩa (h) sẽ là một hàm phụ thuộc độ mảnh

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{ôd}}{[\sigma]} = \frac{n}{k}.\frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} = \varphi(\lambda).$$

Dạng hàm $\varphi = \varphi(\lambda)$ là đã biết và có thể lập sẵn thành bảng cho từng loại vật liệu.

Khi tính toán ta chỉ cần tra bảng tìm hệ số $\varphi$ theo độ mảnh $\lambda$ của thanh. Cách tính ổn định như vậy theo (13-17) được gọi là cách tính thực hành, cách tính theo quy phạm hoặc cách tính theo hệ số giảm ứng suất cho phép (vì hệ số $\varphi$ luôn luôn nhỏ hơn $1$). Ưu điểm của cách tính này không chỉ ở chỗ đơn giản, gọn gàng mà còn ở chỗ chuẩn xác hơn, tập hợp được nhiều số liệu thống kê hơn khi lấy tỷ số của hai hệ số an toàn $\frac{n}{k}$.

**Bảng tra hệ số $\varphi$** ***Bảng 13-1***

| Độ mảnh $\lambda$ | Trị số $\varphi$ | | |
|---|---|---|---|
| | Thép CT3 | Gang | Gỗ |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,54 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,34 | 0,60 |
| 80 | 0,75 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | | 0,25 |
| 120 | 0,45 | | 0,22 |
| 130 | 0,40 | | 0,18 |
| 140 | 0,36 | | 0,16 |
| 150 | 0,32 | | 0,14 |
| 160 | 0,29 | | 0,12 |
| 170 | 0,26 | | 0,11 |
| 180 | 0,23 | | 0,10 |
| 190 | 0,21 | | 0,09 |
| 200 | 0,19 | | 0,08 |

Theo điều kiện ổn định ta cũng có ba bài toán cơ bản:

♦ Bài toán kiểm tra $$\frac{|N|}{\varphi A} \le [\sigma]. \qquad (13\text{-}18)$$

Nếu bất đẳng thức thoả mãn thì thanh ổn định, không thoả mãn thì thanh mất ổn định.

◆ Bài toán xác định lực nén cho phép $|N| \leq \varphi\, A[\sigma]$. (13-19)

◆ Bài toán thiết kế, xác định tiết diện $A \geq \dfrac{|N|}{\varphi[\sigma]}$. (13-20)

Riêng với bài toán thiết kế, cách giải có phần phức tạp hơn vì hệ số $\varphi$ phụ thuộc độ mảnh $\lambda$, độ mảnh lại chưa biết vì tiết diện chưa xác định. Do đó, bài toán sẽ được giải bằng *cách thử đúng dần*, thay bài toán thiết kế bằng bài toán kiểm tra. Có thể tiến hành như sau: thoạt tiên, ta cho $\varphi$ một trị số trung bình nào đó, chẳng hạn $\varphi = 0,5$; theo (13-20) xác định được diện tích tiết diện; tính được bán kính quán tính $i_{min}$ và độ mảnh $\lambda$ của thanh; tìm hệ số $\varphi$ theo bảng 13-1; tiến hành kiểm tra lại điều kiện ổn định (13-18); nếu điều kiện ổn định chưa thoả mãn thì tiến hành chọn lại bằng cách tăng kích thước tiết diện rồi lại kiểm tra (13-18) cho tới khi thoả mãn. Nếu xảy ra trường hợp vế trái của (13-18) quá nhỏ so với vế phải thì có thể rút bớt kích thước tiết diện cho tới khi thấy đạt yêu cầu tiết kiệm.

***Ví dụ 13-2***. Chọn tiết diện hình tròn cho cột chống bằng gỗ của một côngxôn có kích thước và chịu lực như trên hình 13-10, cho biết $[\sigma] = 1,1$ kN/cm$^2$.

*Bài giải*. Thanh chống chịu nén, bằng phương pháp mặt cắt ta xác định được

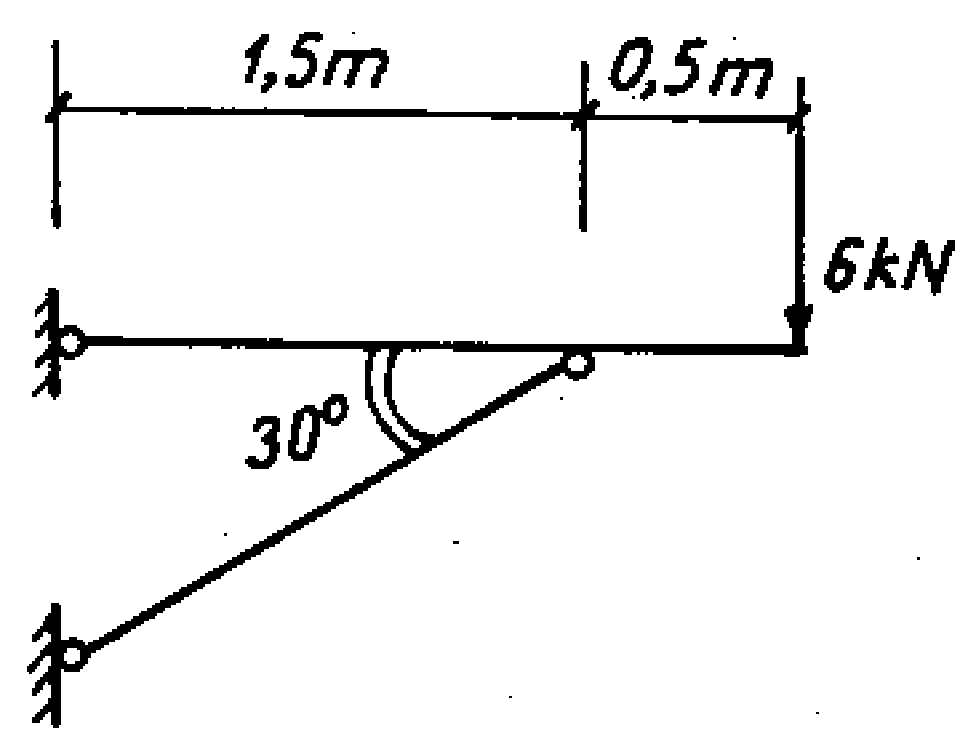
$$\Sigma M_A = 6.2 + N.1,5.\cos 30^o = 0$$

suy ra $N = -9,24$ kN.

Chiều dài cột chống:

$$l = 1,5/\cos 30^o = 1,73 \text{ m} = 173 \text{ cm}.$$

Giả thiết $\varphi = 0,5$, diện tích tiết diện sẽ bằng $A \geq \dfrac{|N|}{\varphi[\sigma]} = \dfrac{9,24}{0,5.1,1} = 16,8$ cm$^2$.




*Hình 13-10.* Cho ví dụ 13-2

Đường kính cần thiết là $d \geq \sqrt{\dfrac{4.16,8}{\pi}} = 4,62$ cm.

* Chọn lần 1, $d = 5$ cm : $A = 19,63$ cm$^2$; $r_x = r_y = d/4 = 1,25$ cm;

$$\lambda = \frac{\mu\, l}{r_{min}} = \frac{1.173}{1,25} = 138.$$ Tra bảng 13-1 ta có $\varphi \approx 0,16$.

Kiểm tra $\dfrac{|N|}{\varphi A} = \dfrac{9,24}{0,16.19,63} = 2,94$ kN/cm$^2 > [\sigma]$.

* Chọn lần 2, $d = 8$ cm : $A = 50,26$ cm$^2$; $r_x = r_y = d/4 = 2$ cm;

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_{min}} = \frac{1.173}{2} = 86,5$$ Tra bảng 13-1 ta có $\varphi \approx 0,59$.

Kiểm tra $\frac{|N|}{\varphi A} = \frac{9,24}{0,59.50,26} = 0,31\ \text{kN/cm}^2 < [\sigma] = 1,1\ \text{kN/cm}^2$.

* Chọn lần 3, $d = 7$ cm : $A = 38,48$ cm$^2$; $r_x = r_y = d/4 = 1,75$ cm;

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_{min}} = \frac{1.173}{1,75} \approx 100$$ Tra bảng 13-1 ta có $\varphi \approx 0,31$.

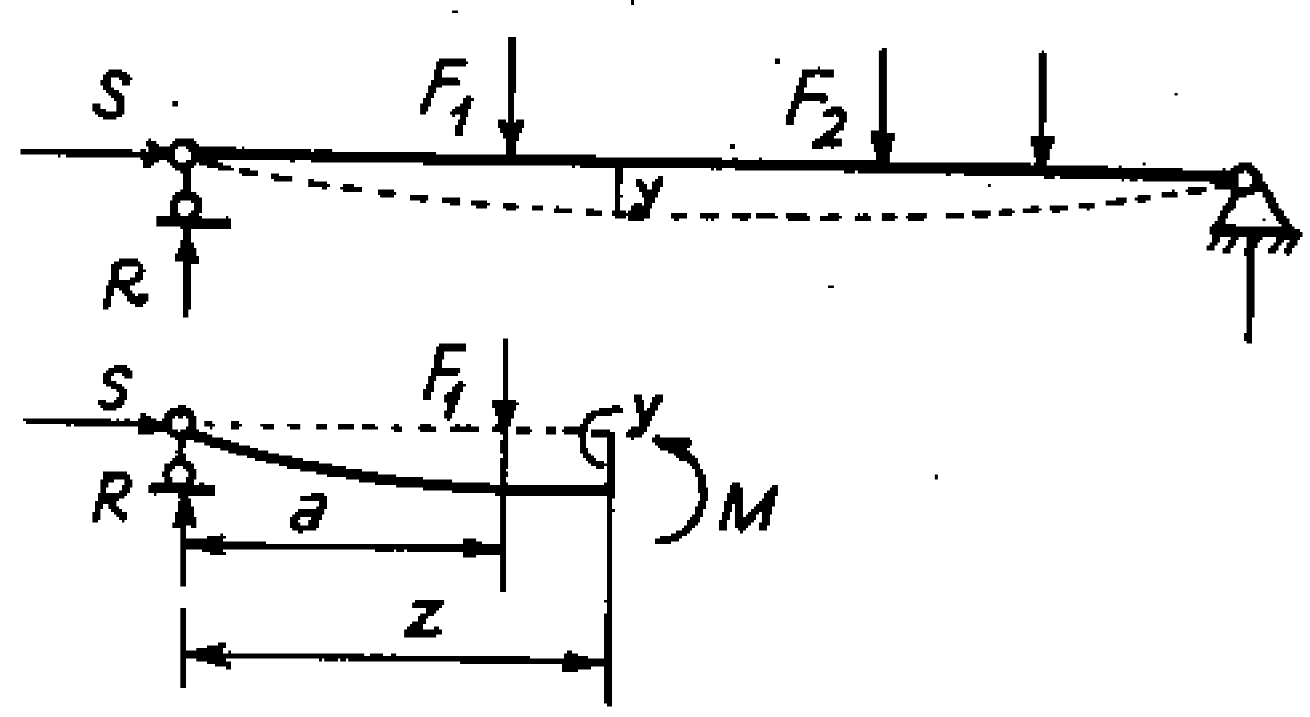
Kiểm tra $\frac{|N|}{\varphi A} = \frac{9,24}{0,31.38,48} = 0,77\ \text{kN/cm}^2 < 1,1\ \text{kN/cm}^2$.

Kết luận: chọn đường kính tiết diện 7cm.

## 13-6. THANH CHỊU UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

### 13-6-1. Khái niệm, phương trình vi phân của đường đàn hồi

*Hình 13-11.* Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời




Xét một thanh chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc trong mặt phẳng yz. Ở trạng thái biến dạng như trên hình 13-11a, ta thấy không chỉ tải trọng ngang mà cả tải trọng dọc cũng gây ra mômen uốn. Mômen uốn do tải trọng dọc tỷ lệ với độ võng, nên khi thanh có độ mảnh lớn thì trị số mômen này là đáng kể và cần đưa vào tính toán. Bằng phương pháp mặt cắt (hình 13-11b), xét thanh ở trạng thái biến dạng, ta tìm được trị số của mômen uốn

$$M = Sy + [Rz - F_1\{z - a\}].$$

Lượng $Sy$ là mômen uốn do lực dọc; lượng trong móc vuông là mômen uốn chỉ do tải trọng ngang, ký hiệu $\overline{M}$ và xác định bình thường như khi không có tải trọng dọc. Khi đó biểu thức của mômen uốn sẽ được viết tổng quát là

$$M = \overline{M} + Sy. \qquad (13\text{-}21)$$

Biểu thức (13-21) cho thấy nội lực không những phụ thuộc vào ngoại lực mà còn phụ thuộc vào biến dạng, đó là một đặc điểm khác biệt của bài toán đang xét. Độ võng được xác định theo phương trình vi phân đường đàn hồi (13-1):

$$y'' = -\frac{M}{EI}. \qquad (13\text{-}22)$$

Thay giá trị (13-21) vào (13-22), sau khi rút gọn ta có

$$y'' + k^2 y = -\frac{\overline{M}_x}{EI_x}, \qquad (13\text{-}23)$$

trong đó $$k^2 = \frac{S}{EI_x}. \qquad (10\text{-}24)$$

Giải phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất (13-23), kết hợp với các điều kiện biên, ta tìm được độ võng $y$, sau đó tính mômen uốn theo (13-21).

Nghiệm tổng quát của (13-23) sẽ là

$$y = y^* + \overline{y},$$

$y^*$ - nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất $y^* = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$ ;

$\overline{y}$ - nghiệm riêng của phương trình có vế phải, phụ thuộc vào biểu thức cụ thể của mômen uốn ngang $\overline{M}$, do đó, phụ thuộc vào dạng cụ thể của tải trọng ngang.

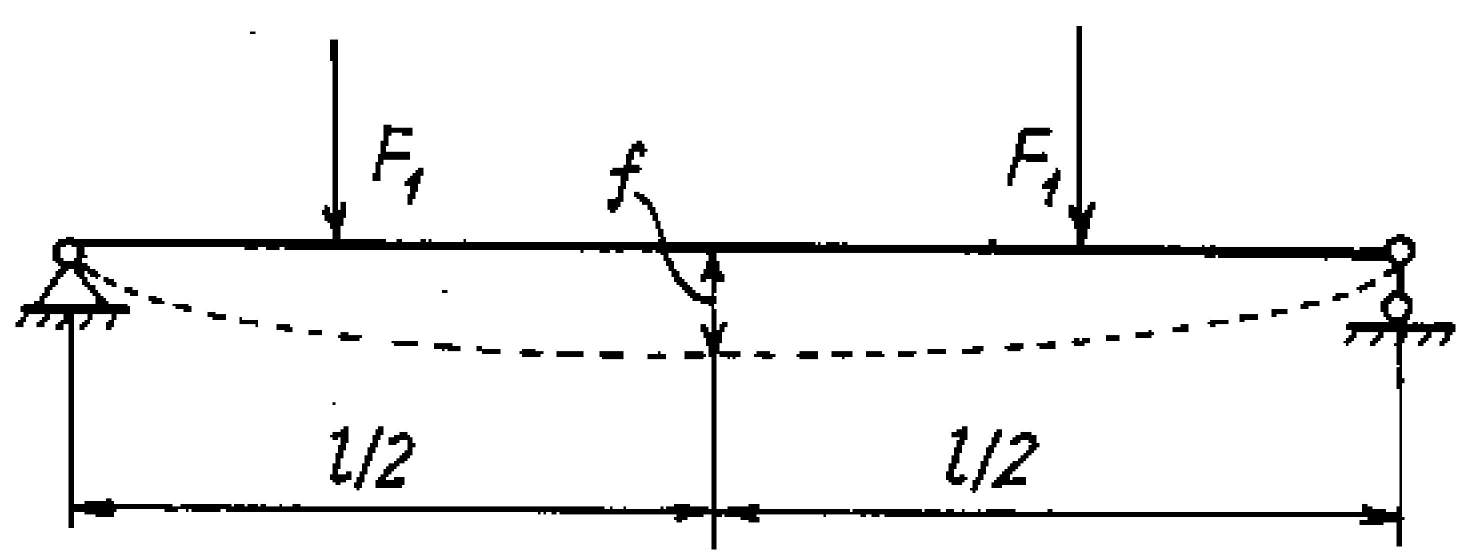
Để tránh những khó khăn chi tiết của từng bài toán riêng biệt, ta có thể giải bài toán một cách gần đúng như sẽ trình bày dưới đây.

### *13-6-2. Biểu thức gần đúng của độ võng*

*a- Thanh thẳng có liên kết khớp ở hai đầu*

Giả thiết tải trọng ngang hướng về một phía và đối xứng qua tiết diện chính giữa nhịp như trên hình 13-12. Khi đó độ võng cũng đối xứng, đạt cực trị $f$ ở chính giữa nhịp và bằng không ở hai đầu.

*Hình 13-12.* Đường đàn hồi dạng đối xứng




Có thể chọn hàm độ võng $y$, thoả mãn các điều kiện kể trên, dưới dạng

$$y = f \sin\frac{\pi z}{l}. \qquad (i)$$

Độ võng $\overline{y}$, do tải trọng ngang cũng có thể viết dưới dạng tương tự

$$\overline{y} = \bar{f} \sin\frac{\pi z}{l}. \qquad (k)$$

Trị số độ võng cực trị $\bar{f}$ tại chính giữa dầm do tải trọng ngang gây ra có thể tìm được bằng các phương pháp quen thuộc đã biết. Quan hệ giữa $\bar{y}$ và mômen $\overline{M}$ vẫn được diễn tả bằng phương trình vi phân của đường đàn hồi

$$\bar{y}'' = -\frac{\overline{M}}{EI_x} \tag{l}$$

Thay (l) vào phương trình vi phân độ võng (13-23), ta nhận được quan hệ

$$y'' + k^2 y = \bar{y}'' \tag{13-25}$$

Thay thế các biểu thức độ võng (i) và (k) vào (13-25), sau khi thu gọn ta được

$$f = \frac{\bar{f}}{1 - \dfrac{S}{\left(\dfrac{\pi^2 EI_x}{l^2}\right)}}$$

Ký hiệu $N_{Euler} = \dfrac{\pi^2 EI_x}{l^2}$, biểu thức này có dạng công thức tính lực tới hạn Euler tương ứng với độ cứng chống uốn của mặt phẳng đang xét $EI_x$ thay cho độ cứng nhỏ nhất $EI_{min}$.

$$f = \frac{\bar{f}}{1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}}. \tag{13-26}$$

Thay (13-26) vào (k), kết hợp với (l) ta có thể viết biểu thức của độ võng khi uốn ngang, uốn dọc đồng thời

$$y = \frac{\bar{y}}{1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}}. \tag{13-27}$$

$\bar{y}$ là độ võng của dầm chỉ do tải trọng ngang, tìm được bằng các phương pháp quen thuộc đã biết (biểu thức hoặc trị số tại từng tiết diện).

Với các tải trọng ngang không đối xứng nhưng cùng hướng về một phía, ta vẫn chấp nhận công thức (13-27) để tính độ võng.

*b- Thanh thẳng có liên kết khác ở hai đầu*

Khi thanh chịu uốn ngang, uốn dọc đồng thời có các kiểu liên kết khác, ta cũng có thể dùng công thức (13-27) để tính độ võng, trong đó biểu thức của lực Euler được điều chỉnh bằng hệ số ảnh hưởng liên kết $\mu$ có giá trị như khi tính ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm (hình 13-6).

$$N_{Euler} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}. \qquad (13\text{-}28)$$

### *13-6-3. Biểu thức gần đúng của mômen uốn*

Sau khi xác định được độ võng $y$, ta tính mômen uốn theo (13-21)

$$M = \overline{M} + Sy = \overline{M} + S\frac{\overline{y}}{1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}}. \qquad (13\text{-}29)$$

Tuy nhiên cũng có thể tính được mômen uốn bằng một phép gần đúng tiếp theo như sau:

* Từ phương trình vi phân đường đàn hồi, ta có quan hệ $\dfrac{M_x}{\overline{M}_x} = \dfrac{y''}{\overline{y}''}$.

* Lấy đạo hàm cấp hai của $y$ và $\overline{y}$ theo biểu thức gần đúng (i), (k), kết hợp với (13-26) ta nhận được:

$$\frac{M_x}{\overline{M}_x} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2 f \sin\dfrac{\pi z}{l}}{\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2 \overline{f} \sin\dfrac{\pi z}{l}} = \frac{f}{\overline{f}} = \frac{1}{1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}}.$$

Như vậy, biểu thức tính mômen uốn $M$ do uốn ngang và uốn dọc đồng thời được biểu thị theo mômen uốn $\overline{M}$ do uốn ngang:

$$M_x = \frac{\overline{M}_x}{1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}}. \qquad (13\text{-}30)$$

Tính mômen uốn theo (13-30) đơn giản hơn tính theo (13-29), nhưng kém chính xác hơn vì phải chấp nhận hai lần gần đúng.

### *13-6-4. Ứng suất và điều kiện bền*

Nội lực trên thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời bao gồm lực dọc $N = -S$ và mômen uốn $M$.

Ứng suất pháp trên tiết diện thanh: $\sigma = -\dfrac{S}{A} + \dfrac{M_x}{I_x} y$.

Ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện chữ nhật, khi sử dụng công thức gần đúng thứ hai của mômen uốn, được viết là

$$\sigma_{max} = -\frac{S}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} \approx -\frac{S}{A} + \frac{|\overline{M}_x|}{W_x\left(1 - \dfrac{S}{N_{Euler}}\right)}. \qquad (13\text{-}32)$$

Biểu thức (13-32) cho thấy khi tải trọng ngang và dọc tăng lên $n$ lần thì ứng suất tăng lên lớn hơn $n$ lần. Do đó điều kiện bền không thể viết theo ứng suất cho phép

$$\sigma_{max} \le [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}$$

mà cần đưa hệ số an toàn vào tải trọng.

Khi này, điều kiện bền của thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời phải viết (khi sử dụng công thức gần đúng thứ hai của mômen uốn) dưới dạng:

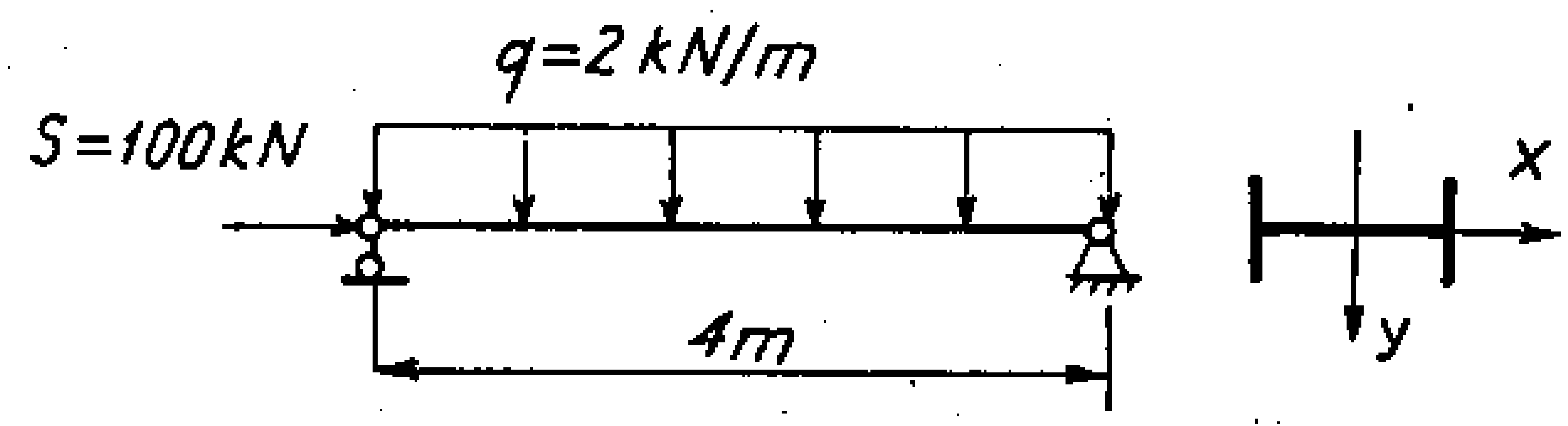
$$-\frac{nS}{A} + \frac{|n\overline{M}_x|}{W_x\left(1 - \frac{nS}{N_{Euler}}\right)} \le \sigma_o .$$

Ngoài ra, cần lưu ý kiểm tra ổn định của thanh trong mặt phẳng quán tính không chứa tải trọng ngang, là mặt phẳng $xz$ vuông góc với mặt phẳng hình vẽ 13-11:

$$\frac{S}{\varphi A} \le [\sigma].$$

Hệ số uốn dọc $\varphi$ tìm ở bảng 13-1 theo trị số của độ mảnh $\lambda_{xz}$ của thanh trong mặt phẳng $xz$: $\lambda_{xz} = \dfrac{\mu_{xz} l}{i_y}$.

***Ví dụ 13-3***. Tìm mômen uốn và độ võng lớn nhất của dầm thép chữ I $N^o 36$ chịu lực như trên hình 13-13.




*Hình 13-13.* Cho ví dụ 13-3

*Bài giải*. Sử dụng bảng thép định hình (phụ lục I), tương ứng với số hiệu I $N^o 36$ và các ký hiệu trên hình 13-13, ta có

$$A = 61{,}9\ \text{cm}^2;\ I_x = 516\ \text{cm}^4;\ I_y = 13380\ \text{cm}^4;\ E = 2{,}1.10^4\ \text{kN/cm}^2.$$

Trị số lớn nhất của mômen uốn, độ võng do tải trọng ngang gây ra tại giữa nhịp:

$$\overline{M} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4\ \text{kNm};$$

$$\bar{y} = \frac{5}{384}.\frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5}{384}.\frac{2.10^{-2}.400^4}{2,1.10^4.516} = 0,615 \text{ cm.}$$

Trị số lực Euler: $$N_{Euler} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2.2,1.10^4.516}{(1.400)^2} = 668 \text{ kN.}$$

Độ võng của dầm, theo công thức gần đúng (13-21):

$$y = \frac{\bar{y}}{1 - \frac{S}{N_{Euler}}} = \frac{0,615}{1 - \frac{120}{668}} = 0,75 \text{ cm} \quad \text{tăng} \quad 22\%$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ nhất:

$$M = \overline{M} + Sy = 4 + 90.0,075 = 4,675 \text{ kNm},$$

tăng *16, 88%* so với mômen chỉ do lực ngang.

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ hai:

$$M = \frac{\overline{M}}{1 - \frac{S}{N_{Euler}}} = \frac{4}{1 - \frac{120}{668}} = 4,87 \text{ kNm},$$

tăng *4%* so với công thức gần đúng thứ nhất, thiên về an toàn.

## *13-7. THANH CÓ ĐỘ MẢNH LỚN, CHỊU NÉN LỆCH TÂM*

Thanh thẳng chịu nén lệch tâm là một trường hợp thường gặp trong thực tế vì độ lệch tâm của lực là không tránh khỏi. Khi thanh mềm, có độ mảnh lớn, chẳng hạn các kết cấu bằng kim loại, hiện tượng uốn dọc làm cho quan hệ chuyển vị - ngoại lực, quan hệ nội lực - ngoại lực trở thành các quan hệ phi tuyến, phức tạp như đã thấy từ các nghiên cứu ở trên. Ta khảo sát thêm trường hợp một thanh côngxôn chịu nén bởi lực $F$ có độ lệch tâm $e$ như trên hình 13-14 nhằm mục đích thiết lập mối quan hệ giữa lực nén $F$ và độ lệch tâm $e$.

Mômen uốn tại tiết diện có toạ độ $z$: $M = F(e + \delta - y)$.

Phương trình vi phân của đường đàn hồi: $EI\,y'' = F(e + \delta - y)$

được viết dưới dạng: $y'' + k^2 y = k^2(e + \delta)$.

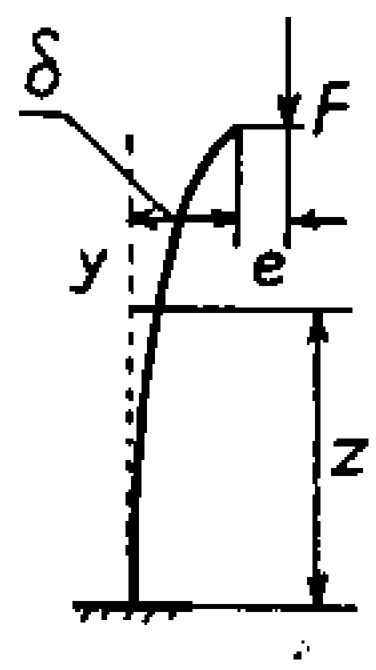
Nghiệm tổng quát: $y = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + e + \delta$.

Điều kiện biên: khi $z = 0$ thì $y = y' = 0$; khi $z = l$ thì $y = \delta$.

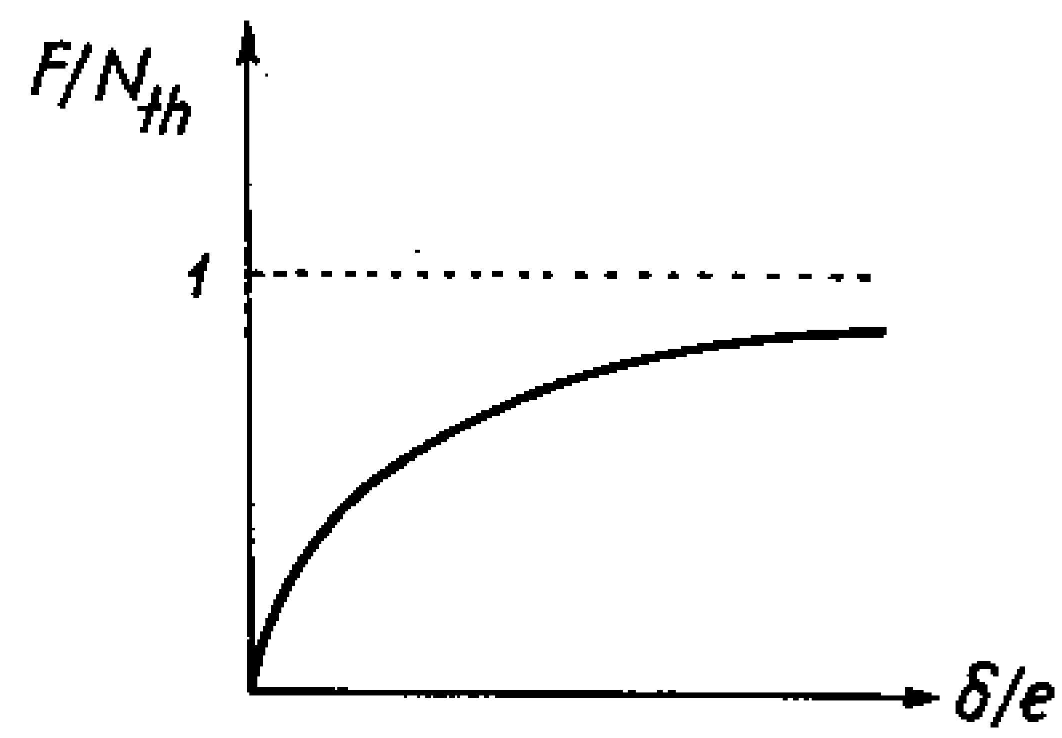
Từ hai điều kiện đầu: $C_1 + e + \delta = 0$; $kC_2 = 0$, ta có $C_2 = 0$.

Điều kiện biên thứ ba cho $C_1 \cos kl + e = 0.$

Biểu thức độ võng sẽ là $y = \dfrac{1 - \cos kz}{\cos kl} e.$




*Hình 13-14.* Cột chịu nén lệch tâm



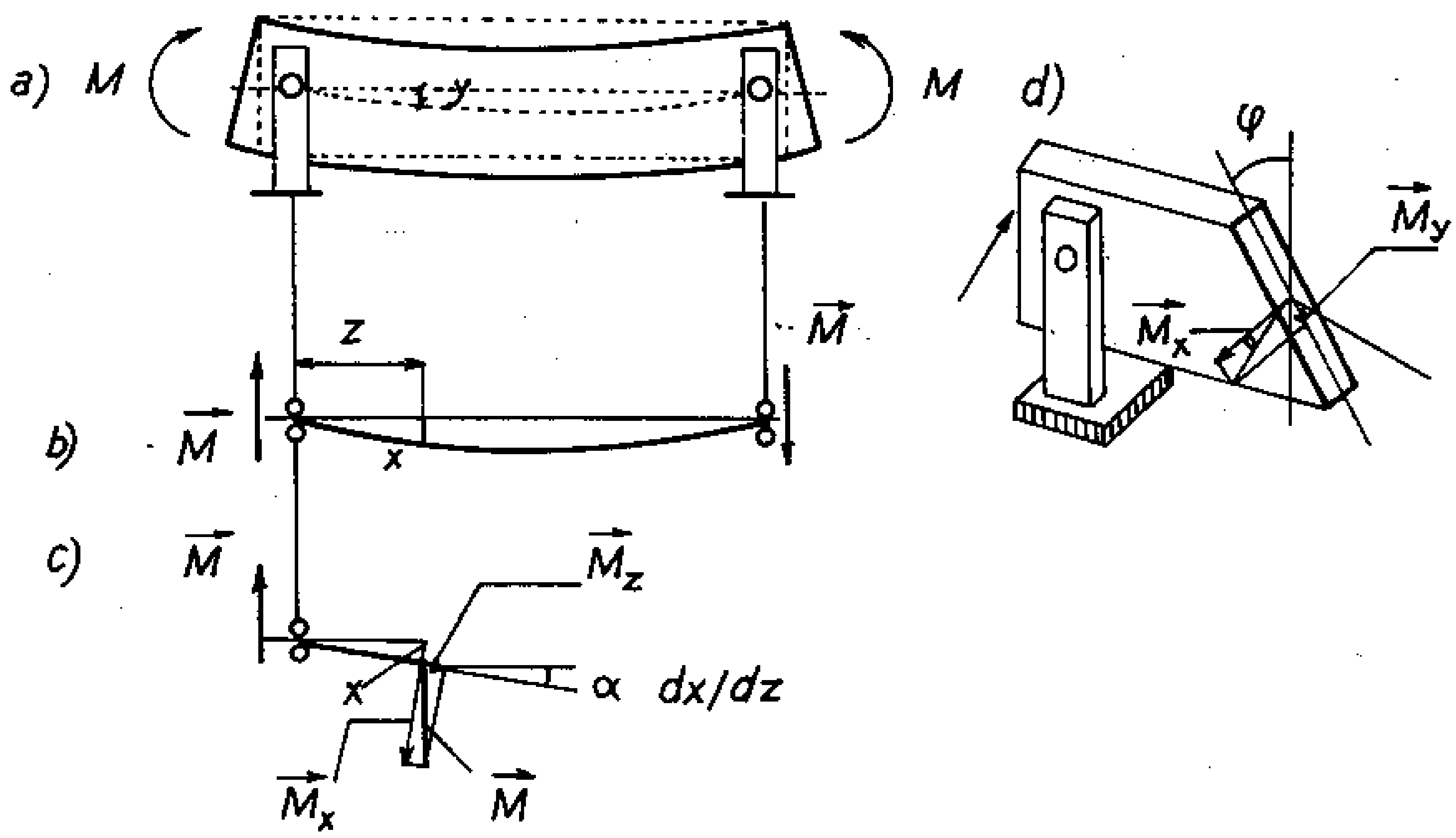

*Hình 13-15.* Quan hệ độ võng - lực nén (dạng không thứ nguyên)

Đồ thị quan hệ giữa độ võng của đầu tự do $\delta$ và lực nén $F$ được trình bày trên hình 13-15. Đồ thị cho thấy khi lực nén tiến tới trị số lực tới hạn thì độ võng tăng vô hạn, không phụ thuộc vào độ lệch tâm $e$. Do đó, bài toán Euler được coi như một trường hợp giới hạn.

## 13-8. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CHỊU UỐN

Khi trị số tải trọng ngang trên dầm chịu uốn phẳng vượt quá một trị số tới hạn thì dầm sẽ mất ổn định, ngoài biến dạng uốn dầm sẽ có biến dạng xoắn. Để đảm bảo dầm không mất ổn định, tải trọng ngang cần nhỏ hơn trị số tới hạn. Vì sự phức tạp của bài toán, trong mục này ta chỉ xét bài toán ổn định của dầm tiết diện chữ nhật chịu uốn bởi hai mômen $M$ trong mặt phẳng $yoz$ như trên hình 13-16a. Hai đầu thanh được liên kết sao cho tại liên kết độ võng $y$ theo phương $y$, độ võng $x$ theo phương $x$ và góc xoắn $\varphi$ của tiết diện quanh trục $z$ bằng không. Bài toán tìm mômen tới hạn được giải quyết theo quan điểm của Euler như đã được tiến hành đối với thanh chịu nén đúng tâm: tìm điều kiện để tồn tại một dạng cân bằng, khác với dạng cân bằng đã cho ban đầu. Ở đây, dạng cân bằng ban đầu là dạng chịu uốn, dạng cân bằng khác là dạng uốn và xoắn đồng thời.

Giả thiết mômen uốn $M$ đạt giá trị tới hạn, ngoài biến dạng uốn, thanh còn có biến dạng xoắn như trên hình 13-16b. Tiết diện thanh có độ võng $y$ do mômen uốn $M_x$ (hình 13-16a), độ võng $x$ do mômen uốn $M_y$ (hình 13-16b) và góc xoắn $\varphi$ do mômen xoắn $M_z$ (hình 13-16d). Trên hình vẽ các mômen được biểu diễn bằng các véctơ mômen. Ta giả thiết mômen ngoại lực $M$ vẫn nằm trong mặt phẳng ban đầu, nghĩa là véctơ mômen ngoại lực giữ phương không đổi; tương tự như giả thiết phương lực dọc $N$ không thay đổi trong bài toán thanh chịu nén. Khi đó, từ điều kiện cân bằng, véctơ mômen nội lực toàn phần trên tiết diện cũng vẫn giữ phương không đổi. Véctơ mômen nội lực toàn phần được phân ra thành véctơ mômen xoắn và véctơ mômen uốn. Véctơ mômen xoắn $\vec{M}_z$ có phương $z$ của trục thanh sau biến dạng, véctơ mômen uốn $\vec{M}_x$ có phương $x$ của tiết diện sau biến dạng và véctơ mômen uốn $\vec{M}_y$ có phương $y$ của tiết diện sau biến dạng.




*Hình 13-16.* Ổn định của dầm chịu uốn thuần tuý

Xem các góc quay là nhỏ, có thể tính mômen uốn và mômen xoắn như sau:

* Theo hình 13-16c: mômen uốn quanh trục $x$ là $M_x = M\cos\alpha \approx M$ ;

mômen xoắn $M_z = M\sin\alpha \approx M tg\alpha \approx M\dfrac{dx}{dz} = M\,x'$.

* Theo hình 13-13d: mômen uốn quanh trục $y$ là $M_y = M_x\, tg\varphi \approx M\varphi$ .

trong đó: $\varphi$ - góc xoắn của tiết diện đang xét;

$\alpha$ - góc nghiêng của trục thanh so với trục thanh trong mặt phẳng $xz$;

$$\alpha \approx tg\alpha = \frac{dx}{dz}.$$

Ký hiệu độ cứng khi uốn và khi xoắn của tiết diện lần lượt là $EI_x$, $EI_y$, $GI_{xo}$, ta có các quan hệ vi phân:

- uốn trong mặt phẳng $yz$ : $EI_x\, y'' = -M_x = -M$ ; (a)
- uốn trong mặt phẳng $xz$ : $EI_y\, x'' = -M_y = -M\varphi$ ; (b)
- xoắn $GI_{xo}\dfrac{d\varphi}{dz} = M_z = Mx'$ . (c)

Lấy đạo hàm theo $z$ ở phương trình (c) và thay $x''$ theo (b), ta nhận được quan hệ

$$GI_{xo}\varphi'' = Mx'' = -M.\frac{M}{EI_y}\varphi . \qquad \text{(d)}$$

Đặt: $$m^2 = \frac{M^2}{EI_y GI_{xo}}, \qquad (13\text{-}15)$$

ta viết lại phương trình (d): $\varphi'' + m^2\varphi = 0.$ (13-16)

Nghiệm của phương trình: $\varphi = C_1 \cos mz + C_2 \sin mz.$ (13-17)

Điều kiện biên: tại $z= 0$ và $z= l$ thì góc xoắn $\varphi = 0$.

Điều kiện thứ nhất cho $C_1 = 0$; điều kiện thứ hai $C_2 \sin ml = 0$ cho nghiệm không tầm thường $\sin ml=0$, từ đó suy ra:

$$m = \frac{k\pi}{l}, \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Kết hợp với (13-15), ta tìm được giá trị của mômen uốn tới hạn ứng với trị số $k=1$

$$M_{th} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_y GI_{xo}} . \qquad (13\text{-}18)$$

Với những dầm có liên kết và chịu các loại tải trọng khác, ta cũng có thể dùng phương pháp như trên để xác định tải trọng tới hạn, bạn đọc có thể tìm trong các sách chuyên đề về Lý thuyết ổn định kết cấu, chẳng hạn của S. P. Timoshenko, A. C. Volmir...

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

13- 1. Định nghĩa dạng cân bằng ổn định và dạng cân bằng không ổn định của hệ biến dạng đàn hồi.

13- 2. Nêu những yếu tố thực tế là nguyên nhân nhiễu động đưa thanh chịu nén ra khỏi dạng cân bằng thẳng lý tưởng ban đầu.

13- 3. Nêu dấu hiệu mất ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm trong bài toán Euler. Khi mất ổn định, thanh sẽ cong trong mặt phẳng nào?

13- 4. Định nghĩa độ mảnh của thanh thẳng. Tại sao ta có thể nói: độ mảnh là một đặc trưng quan trọng khi tính toán ổn định của thanh? Độ mảnh phụ thuộc những yếu tố nào?

13- 5. Viết và giải thích các đại lượng trong công thức tính ứng suất tới hạn, lực tới hạn của thanh có độ mảnh lớn, độ mảnh vừa, độ mảnh bé. Công thức xác định các độ mảnh giới hạn $\lambda_o$, $\lambda_1$.

13- 6. Trình bày cách lập bảng để tính hệ số giảm ứng suất cho phép $\varphi$.

13- 7. Viết điều kiện ổn định theo hệ số $\varphi$. Nêu các bước giải quyết bài toán kiểm tra ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm theo cách này.

13- 8. Tại sao có thể nói cách viết điều kiện ổn định theo hệ số $\varphi$ có độ tin cậy, chuẩn xác hơn cách viết điều kiện ổn định theo ứng suất tới hạn cho phép.

13- 9. Đặc điểm và cách giải bài toán thiết kế xác định tiết diện thanh thẳng chịu nén đúng tâm theo điều kiện ổn định.

13-10. Nêu đặc điểm của bài toán thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

13-11. Trong phương pháp gần đúng để giải bài toán uốn ngang và uốn dọc đồng thời, ta giả thiết trước dạng độ võng. Dạng giả thiết này phải tuân theo những điều kiện gì? Nêu dạng độ võng của thanh có liên kết khớp ở hai đầu, thanh côngxôn.

13-12. Vì sao khi thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời cần viết điều kiện bền theo tải trọng có kể đến hệ số an toàn mà không viết theo ứng suất cho phép.

13-13. Trình bày hiện tượng ổn định và mất ổn định của dạng cân bằng chịu uốn.

13-14. Khi giải bài toán ổn định theo phương pháp Euler, nói một cách tổng quát, ta đã dựa vào điều kiện nào để xác định tải trọng tới hạn?

# 14 Thanh chịu tải trọng động

## 14-1. KHÁI NIỆM CHUNG

### *14-1-1. Tải trọng tĩnh, tải trọng động*

Khi thanh biến dạng dưới tác động của ngoại lực, các phần tử vật chất trong thanh sẽ chuyển động, phát sinh gia tốc chuyển động và, kèm theo đó, lực quán tính. Bản chất của mọi quá trình đều là động, tuy nhiên để đơn giản phép tính, ta cần xem xét một cách hợp lý khi nào có thể bỏ qua và khi nào không thể bỏ qua các hiệu ứng động.

Nếu gia tốc nhỏ, lực quán tính bé thì có thể bỏ qua lực quán tính so với các tải trọng tác dụng. Bài toán khi này gọi là *bài toán tĩnh*, chẳng hạn khi tải trọng đặt lên hệ một cách rất êm đềm, từ từ trong một thời gian đáng kể.

Còn khi gia tốc biến dạng lớn, không thể bỏ qua lực quán tính so với tải trọng tác động thì bài toán là *bài toán động*, tải trọng trong trường hợp này được gọi là *tải trọng động*.

Sự khác biệt giữa bài toán động với bài toán tĩnh chính là sự có mặt hay không có mặt của lực quán tính, có kể hay không kể đến động năng chuyển động trong biểu thức tính toán.

Cũng cần phân biệt tải trọng động với tải trọng di động, là loại tải trọng tĩnh thay đổi vị trí tác dụng trên hệ.

### *14-1-2. Phân loại tải trọng động*

Vì gia tốc là đặc điểm của bài toán động nên ta có thể phân loại tải trọng động theo gia tốc chuyển động.

* *Bài toán chuyển động có gia tốc không đổi* $\vec{a} = const$. Thuộc loại bài toán này trong kỹ thuật là trường hợp chuyển động của các thang máy, vận thăng trong xây dựng, nâng hoặc hạ các vật nặng, trường hợp chuyển động tròn với vận tốc quay bằng hằng số của các vô lăng hoặc các trục truyền động.

* *Bài toán chuyển động có gia tốc thay đổi và là hàm xác định theo thời gian* $\vec{a} = \vec{a}(t)$, Một trường hợp riêng thường gặp là trường hợp gia tốc thay đổi tuần

hoàn theo thời gian, gọi là *dao động*. Thuộc loại này là bài toán các bàn rung, đầm dùi, đầm bàn để làm chặt các vật liệu; bài toán dao động của các máy công cụ....

* *Bài toán, trong đó chuyển động xảy ra rất nhanh trong một thời gian rất ngắn*, luật biến thiên của gia tốc không xác định hoặc không thể biểu diễn bằng những hàm số giải tích thông thường. Bài toán còn gọi là *bài toán va chạm*, là sự tiếp xúc giữa các vật thể chuyển động, kèm theo sự thay đổi rất lớn của vận tốc trong một khoảng thời gian rất nhỏ cỡ phần nghìn giây. Thuộc loại này là những trường hợp: dừng, phanh một cách đột ngột các chuyển động; đóng cọc bằng búa; các vật chuyển động trên sông va vào trụ cầu, sóng đập vào đê đập chắn...

### *14-1-3. Các giả thiết khi tính toán*

Việc giải quyết bài toán động của thanh là một bài toán phức tạp, liên quan nhiều tới tính chất vật liệu, các số liệu thực nghiệm. Trong phạm vi chương trình, ta chỉ tìm hiểu những cách giải tương đối đơn giản, những bài toán không có mức độ phức tạp lớn hoặc không đòi hỏi lời giải chính xác cao, những trường hợp phổ biến nhất thường gặp trong thực tế kỹ thuật công trình.

Ta chấp nhận những giả thiết như sau:

1- Tính chất vật liệu khi chịu tải trọng tĩnh và khi chịu tải trọng động là như nhau, chẳng hạn định luật Hooke, các hằng số đàn hồi giữ nguyên không thay đổi.

2- Chấp nhận các giả thiết về tính chất biến dạng của thanh như khi chịu tải trọng tĩnh, chẳng hạn các giả thiết tiết diện phẳng, giả thiết thớ dọc không tác dụng tương hỗ.

Khi giải quyết bài toán, ta sẽ sử dụng các kết quả, các nguyên lý về động lực học. Dưới đây, nhắc lại những nguyên lý cơ bản:

♦ *Nguyên lý D'Alembert*: Vật thể chuyển động sẽ nằm ở trạng thái tĩnh nếu đặt vào vật thể lực quán tính tỷ lệ với khối lượng và gia tốc chuyển động

$$\vec{F}_{qt} = -m\vec{a} \qquad (14\text{-}1)$$

Nếu $m$ là khối lượng tập trung thì lực quán tính là một lực tập trung. Nếu $m$ là khối lượng phân bố thì lực quán tính cũng là lực phân bố theo luật phân bố của khối lượng $m$. Ta sẽ vận dụng nguyên lý này khi biết gia tốc $a$, chẳng hạn trong bài toán gia tốc không đổi hoặc bài toán dao động.

♦ *Nguyên lý bảo toàn năng lượng*: Khi bỏ qua nhiệt năng và các năng lượng không hồi phục thì tổng biến thiên động năng $\Delta K$ và biến thiên thế năng $\Delta U$

của hệ đàn hồi từ trạng thái 1 đến trạng thái 2 bằng công $T$ của ngoại lực sinh ra trong quá trình đó.

$$\Delta K + \Delta U = T. \quad (14\text{-}2)$$

♦ *Nguyên lý bảo toàn xung lượng*: Động lượng của hệ trước và sau va chạm là một trị số không đổi.

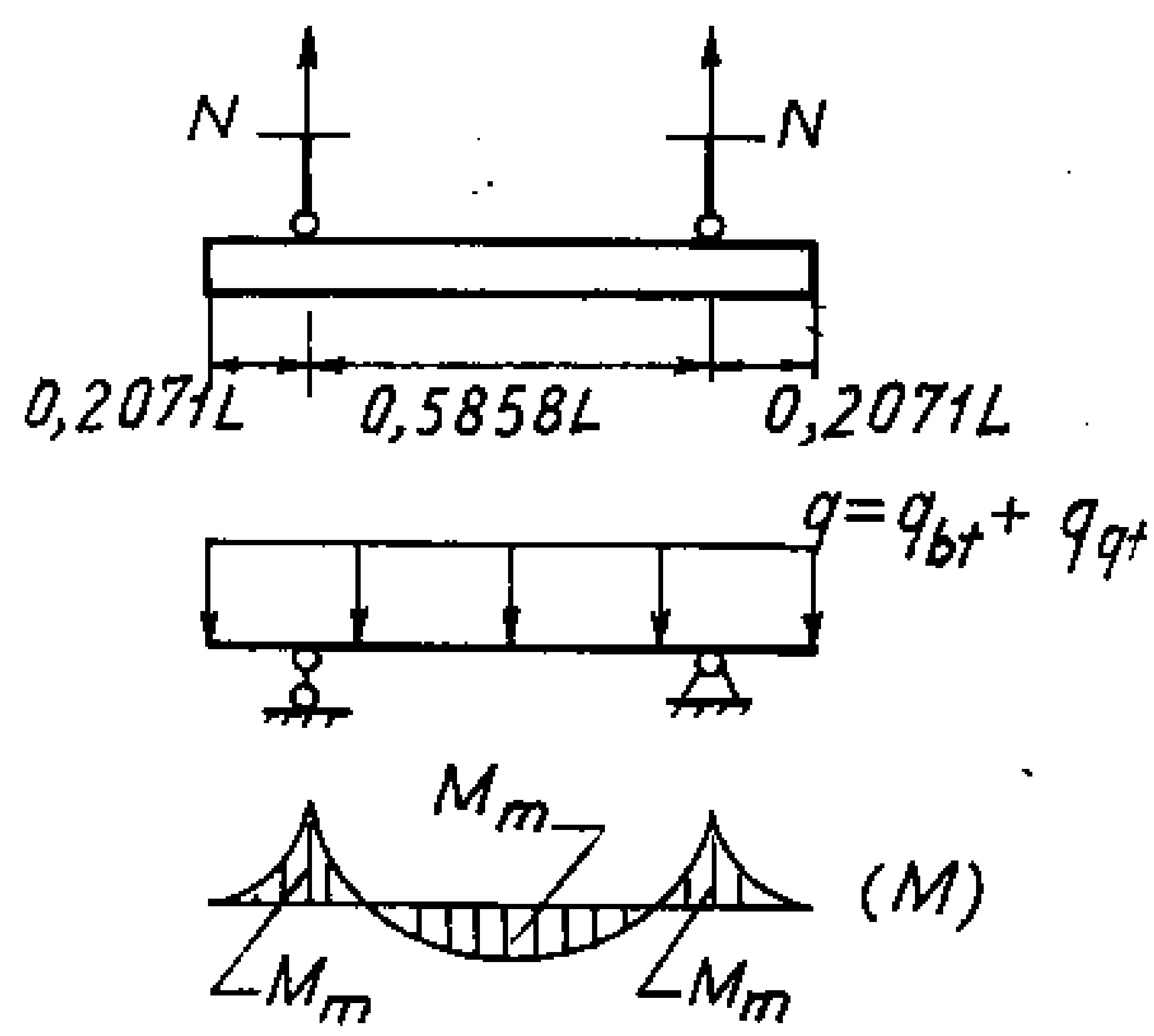
Hai nguyên lý về năng lượng sẽ được sử dụng trong bài toán va chạm, khi không xác định được gia tốc biến dạng.

## *14-2. BÀI TOÁN CÓ GIA TỐC KHÔNG ĐỔI*

Với loại bài toán này, ta chỉ cần đặt lực quán tính theo (14-1) vào hệ thì bài toán trở thành tĩnh và hoàn toàn áp dụng được các công thức đã có trong phần tĩnh để giải bài toán. Nhờ hai giả thiết đã nêu, kết quả nhận được chính là kết quả của bài toán động.

### *1- Bài toán kéo vật nặng lên cao nhanh dần đều*

Dầm bêtông dài 5m, có trọng lượng riêng $\rho = 22$ kN/m$^3$ được kéo lên cao nhanh dần đều, sau *10* giây được đưa lên cao *10* m so với vị trí nằm yên ban đầu. Diện tích tiết diện $A = 600$ cm$^2$. Bỏ qua trọng lượng dây, xác định lực kéo trong dây và mômen uốn lớn nhất trong dầm (hình 14-1).



*Hình 14-1.* Bài toán nâng dầm nhanh dần đều

Gia tốc chuyển động nhanh dần đều tìm theo công thức:

$$a = \frac{2}{t^2}(S - v_0 t) = \frac{2}{10^2}10 = 0{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Gia tốc hướng lên, cùng chiều chuyển động. Khối lượng của dầm phân bố đều nên lực quán tính là một hệ lực hướng xuống phân bố đều với cường độ:

$$q_{qt} = ma = \frac{\gamma A}{g}a.$$

Đặt lực quán tính vào dầm, hệ được xem là ở trạng thái tĩnh. Dầm chịu lực phân bố đều gồm trọng lượng riêng và lực quán tính với cường độ tổng cộng là

$$q = q_{bt} + q_{qt} = \gamma A + \frac{\gamma A}{g}a = \gamma A\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 22.0{,}6\left(1 + \frac{0{,}2}{9{,}81}\right) = 1{,}3469 \text{ kN/m}.$$

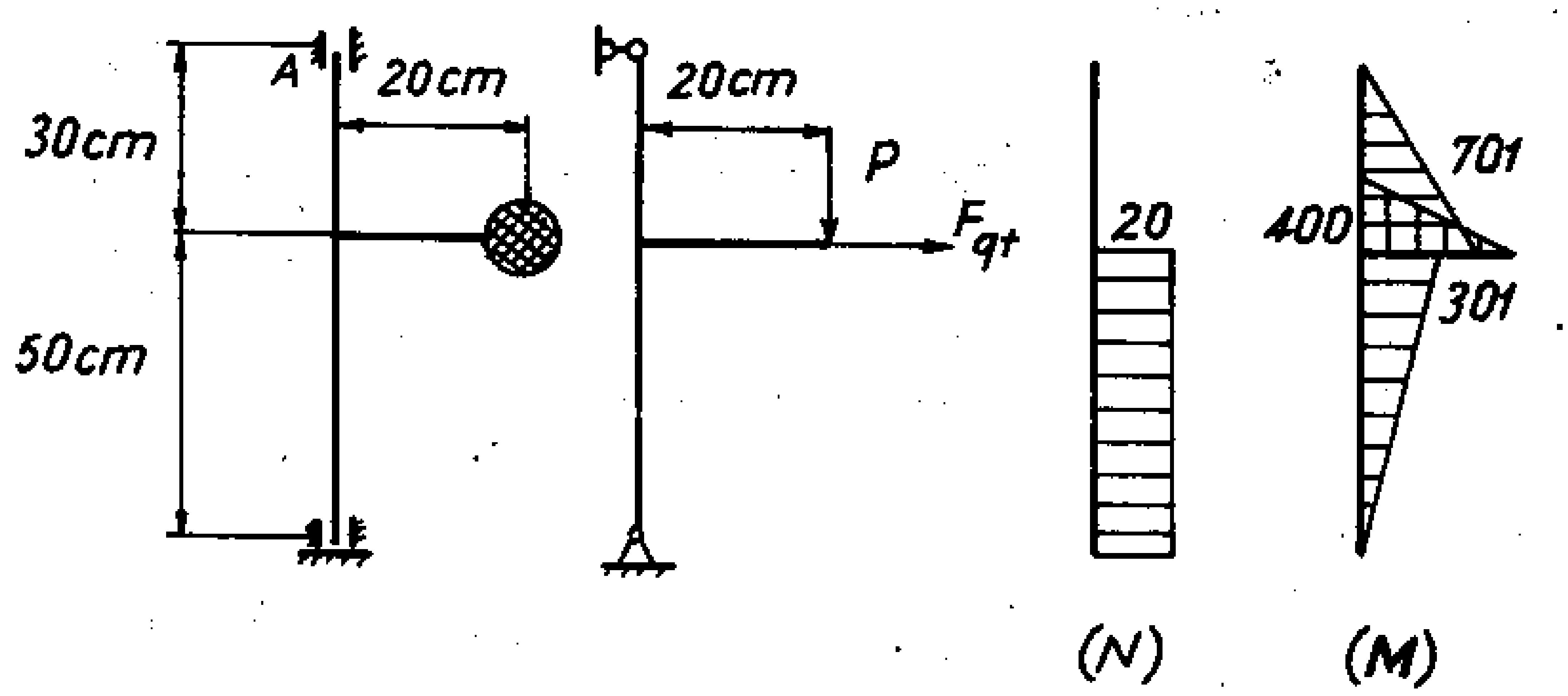
Lực căng trong dây: $N = \frac{qL}{2} = 1,3469.2,5 = 3,3673$ kN.

Giá trị lớn nhất của biểu đồ mômen uốn:

$$M_m = q\frac{(0,2071L)^2}{2} = 1,3469\frac{(0,2071L)^2}{2} = 0,7219 \text{ kN/m}.$$

## 2- Bài toán chuyển động quay

Thanh $AB$ có tiết diện tròn rỗng, đường kính ngoài $3$ cm, đường kính trong $2,5$ cm mang vật nặng $20$ N, quay quanh trục với vận tốc góc $\omega = 12$ rad/s. Xác định ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện thanh, bỏ qua trọng lượng bản thân của kết cấu (hình 14-2).




*Hình 14-2.* Bài toán chuyển động quay đều

Khi vật nặng quay quanh trục với vận tốc không đổi, vật sẽ có gia tốc hướng tâm $a = r\omega^2/2$, do đó có lực quán tính ly tâm $F_{qt} = ma = mr\omega^2/2$. Đặt vào hệ các lực quán tính, hệ sẽ ở trạng thái cân bằng.

Trục sẽ chịu các ngoại lực: trọng lượng vật nặng $P=20$ N;

lực quán tính $F_{qt} = \frac{20}{9,8}.0,2.12^2/2 = 29,39$ N.

Trục được tính như một dầm đơn giản chịu tác dụng của lực $P$ *và* $F_{qt}$. Biểu đồ ứng lực cho trên hình 14-2; lực dọc tính theo N, mômen uốn tính theo Nm.

Tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất $M=701$ Ncm, $N=0$:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|}{W} = \frac{|M|}{0,1D^3\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right)} = \frac{701}{0,1.3^3\left(1-\frac{2,5^4}{3^4}\right)} = 501,46 \text{ N/cm}^2.$$

Tại tiết diện có lực dọc và mômen uốn khá lớn: $N=20$ N, $M=301$ Ncm:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W} = \frac{|N|}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} + \frac{|M|}{0{,}1D^3\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} =$$

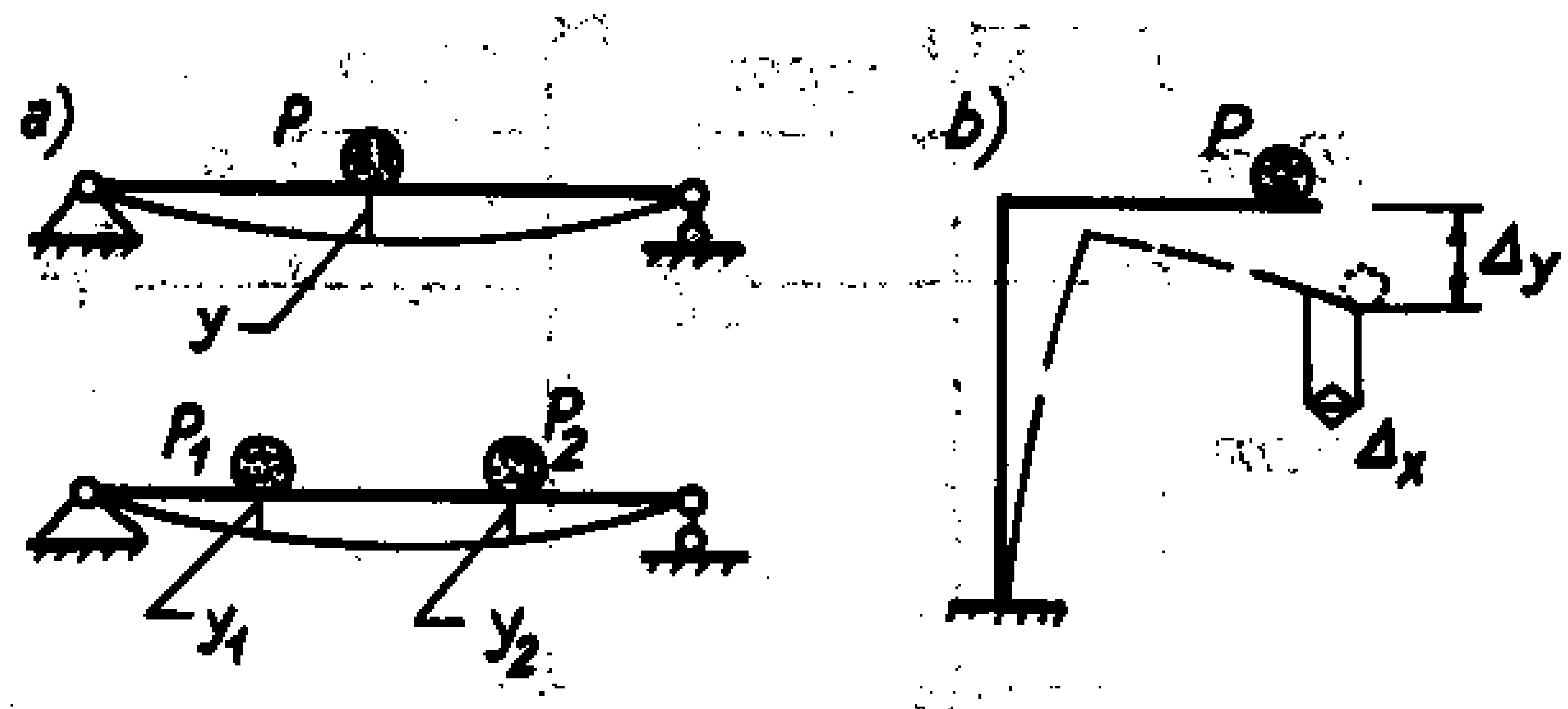
$$= \frac{20}{0{,}7854(3^2 - 2{,}5^2)} + \frac{301}{0{,}1.3^3\left(1 - \frac{2{,}5^4}{3^4}\right)} = 224{,}56 \text{ N/cm}^2.$$

Vậy ứng suất pháp lớn nhất là $|\sigma|_{max} = 501{,}46$ N/cm².

## 14-3. BÀI TOÁN CÓ GIA TỐC THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN

### 14-3-1. Bậc tự do của hệ

*Hình 14-3.* Xác định bậc tự do của hệ

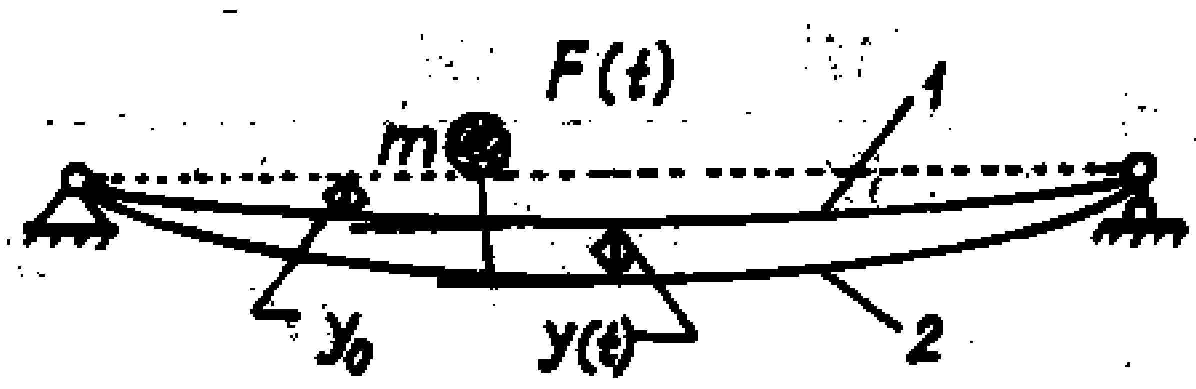



Khi chuyển động, các phần vật chất của hệ sẽ chuyển động. Số lượng các thông số độc lập cần thiết đủ để xác định vị trí tất cả các khối lượng trên hệ được gọi là số bậc tự do. Trên hình 14-3a, dầm không khối lượng mang một vật nặng $P$, để xác định vị trí của vật nặng $P$ ta chỉ cần biết độ võng $y$ tại tiết diện đặt vật; hệ có một bậc tự do. Trên hình 14-3b là dầm mang hai khối lượng, hệ có hai bậc tự do. Trên hình 14-3c tuy hệ mang một vật nặng nhưng cần hai thông số mới xác định đầy đủ vị trí của vật ở trạng thái biến dạng, hệ có hai bậc tự do. Khi kể đến trọng lượng của các liên kết đàn hồi, của dầm thì hệ sẽ có bậc tự do bằng vô cùng. Trong phần sau, ta chỉ khảo sát hệ có một bậc tự do.

### 14-3-2. Phương trình vi phân tổng quát của hệ một bậc tự do

Xét dầm, bỏ qua trọng lượng bản thân, mang khối lượng m và chịu lực $F(t)$ thay đổi theo thời gian tại tiết diện đặt vật nặng như sơ đồ trên hình 14-4.

*Hình 14-4.* Sơ đồ của bài toán dao động của hệ một bậc tự do



Ta gọi trạng thái cân bằng ban đầu là trạng thái của dầm chỉ chịu khối lượng $m$, khối lượng này có chuyển vị $y_o$ (đường *1* trên hình 14-4). Hệ là đàn hồi tuyến tính nên quan hệ giữa lực tác động $mg$ và chuyển vị là:

$$y_o = \delta . mg \qquad (14\text{-}3)$$

Có thể thấy $\delta$ là chuyển vị tại tiết diện đặt khối lượng do lực bằng đơn vị đặt tại tiết diện đó gây ra. Giá trị $y_o$ hoặc $\delta$ có thể tìm bằng các phương pháp đã quen biết.

Sau khi chịu lực động $F(t)$, còn gọi là lực cưỡng bức, khối lượng sẽ có chuyển vị thêm $y(t)$ tính từ trạng thái cân bằng ban đầu (đường *2* trên hình 14-4).

Đặt vào dầm lực quán tính $\overline{F}_{qt} = -m\overline{a} = -m\ddot{y}(t)$, dầm sẽ ở trạng thái tĩnh và ta có thể tìm được chuyển vị thêm $y(t)$. Các lực gây ra chuyển vị thêm gồm lực động $F(t)$, lực quán tính $\overline{F}_{qt}$ và, để tổng quát, ta xét cả lực cản nhớt, là loại lực cản ngược chiều chuyển động và tỷ lệ với vận tốc $\overline{F}_c = -\beta\,\dot{y}$, $\beta$ gọi là hệ số tỷ lệ. Lực cản nhớt, nói chung, bao gồm lực cản của môi trường, lực cản do ma sát của các liên kết và lực cản bên trong của bản thân kết cấu. Kết cấu công trình thường chuyển động với vận tốc nhỏ nên lực cản môi trường có thể bỏ qua; lực cản do ma sát của các liên kết có thể khắc phục giảm đến tối thiểu; quan trọng và đáng kể nhất là lực cản bên trong của kết cấu. Lực cản bên trong này phụ thuộc vào bản chất vật liệu chế tạo kết cấu, vào hàng loạt các yếu tố khác, chẳng hạn nhiệt độ, mà không thể loại bỏ, khắc phục.

Hệ ở trạng thái tĩnh nên ta vẫn có quan hệ tỷ lệ giữa lực và chuyển vị theo (14-3)

$$y(t) = \delta[F(t) + F_{qt} + F_c] = \delta[F(t) - m\ddot{y}(t) - \beta\,\dot{y}(t)].$$

Quan hệ này được viết gọn lại dưới dạng

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F(t)}{m}, \qquad (14\text{-}4)$$

trong đó, ta đặt

$$2\alpha = \frac{\beta}{m}; \qquad (14\text{-}5)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta}. \qquad (14\text{-}6)$$

Trị số $\alpha$ gọi là hệ số cản nhớt, xác định bằng thực nghiệm, thường gặp $\alpha < \omega$.

Quan hệ (14-4) là phương trình vi phân chuyển động tổng quát của hệ có một bậc tự do.

## 14-4. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG TỰ DO

### 14-4-1. Dao động tự do không lực cản

Dao động tự do là dao động của hệ không kèm theo lực cưỡng bức, hệ thực hiện chuyển động do một kích thích ban đầu nào đó, chẳng hạn chịu một chuyển vị cho ban đầu hoặc vận tốc kích thích ban đầu. Cho $F(t) = \alpha = 0$, ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do không lực cản:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \qquad (14\text{-}7)$$

Nghiệm của phương trình $y(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$.

Biểu diễn $C_1$, $C_2$ qua hai hằng số tích phân mới là $A$ và $\varphi$ bằng cách đặt

$$C_1 = A\sin\varphi; \quad C_2 = A\cos\varphi,$$

Ta có phương trình dao động tự do

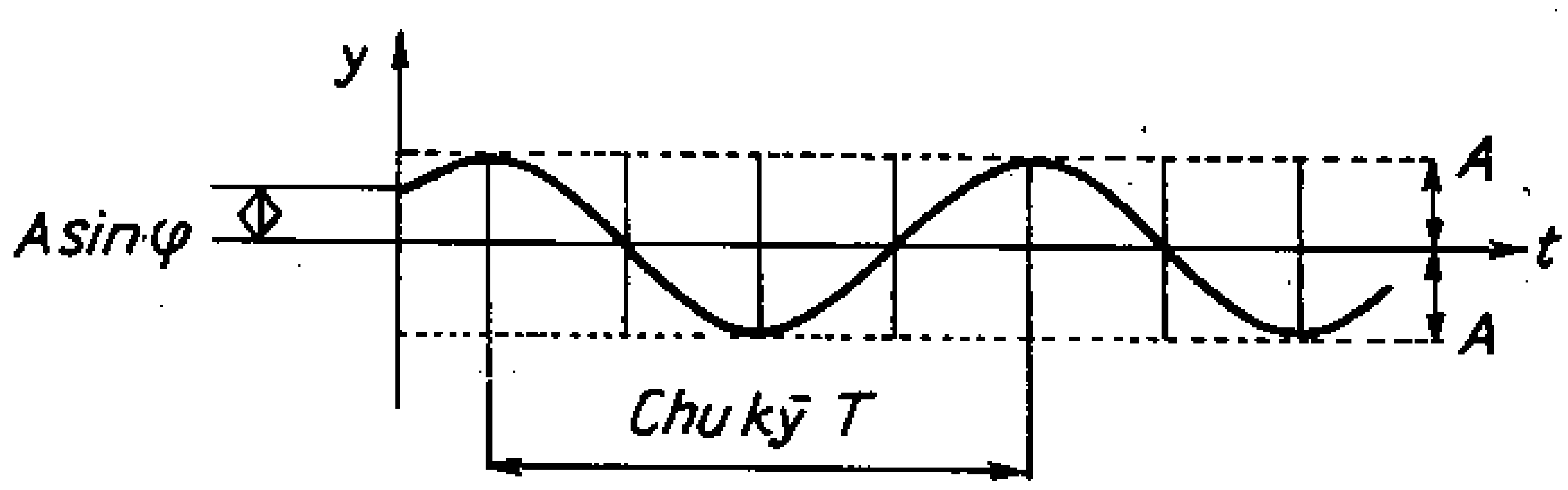
$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (14\text{-}8)$$

Hai hằng số được xác định theo điều kiện ban đầu: tại thời điểm $t = 0$ thì $y = y(0)$ và $y' = y'(0)$.

Phương trình (14-8) cho thấy:

* Chuyển động tự do không lực cản là một dao động điều hoà tuần hoàn có biên độ $A$ và chu kỳ (thời gian thực hiện một dao động) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Đồ thị dao động có dạng hình sin như trên hình 14-5.




*Hình 14-5.* Dao động tự do không lực cản

* Tần số dao động, hoặc tần số vòng, là số dao động thực hiện trong một đơn vị thời gian (s), ký hiệu $f$, là $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

* Tần số góc là số dao động thực hiện trong $2\pi$ đơn vị thời gian, hoặc số góc quét trong một đơn vị thời gian, bằng $2\pi f$ hoặc $2\pi f = 2\pi\dfrac{\omega}{2\pi} = \omega$.

Tần số góc $\omega$ còn gọi là *tần số dao động riêng* của hệ, là một đặc trưng quan trọng khi tính toán dao động, được tính theo biểu thức (14-6), đơn vị của $\omega$ là Hertz (1/s)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{y_o}} . \tag{14-9}$$

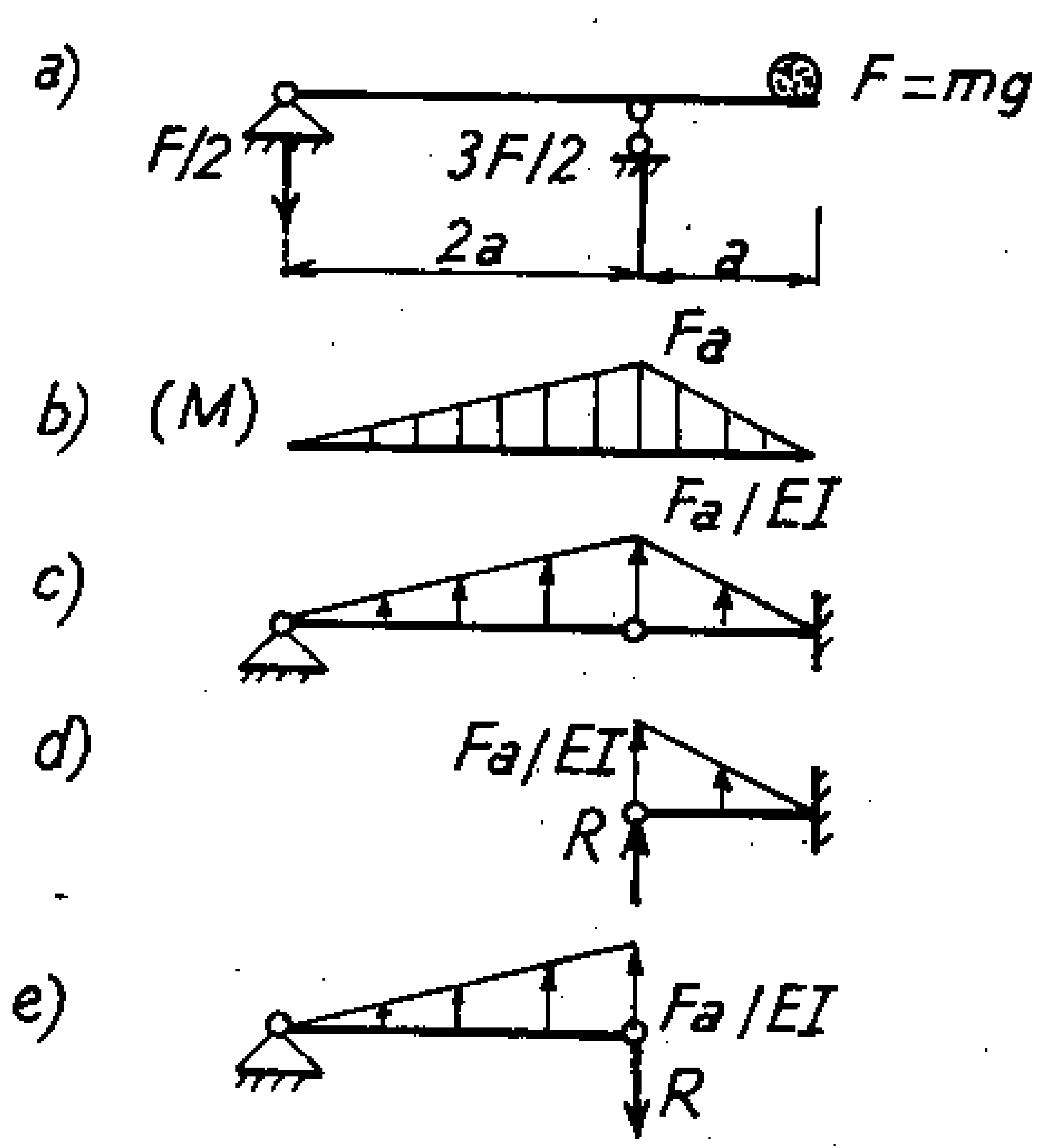
***Ví du 14-1***. Xác định tần số dao động của dầm mút thừa mang khối lượng $m$ tại đầu tự do (hình 14-6a). Cho biết $a$; độ cứng chống uốn của tiết diện $EI$.

*Bài giải*. Tìm chuyển vị tĩnh bằng phương pháp tải trọng giả tạo, biểu đồ mômen uốn do lực $F$ gây ra trong hệ như trên hình 14-6b, dầm giả tạo chịu lực phân bố giả tạo vẽ trên hình 14-6c.

Lực truyền từ dầm phụ lên dầm chính (hình 14-6e, d):

$$R = \frac{2}{3}.\frac{Fa}{EI}.\frac{2a}{2} = \frac{2Fa^2}{3EI}$$

Mômen uốn giả tạo tại ngàm của dầm giả tạo, chính là độ võng tại mút tự do của dầm chính (hình 14-6d)



*Hình 14-6.* Cho ví dụ 14-1

$$y_o = M_{gt} = Ra - \frac{1}{2}.\frac{Fa}{EI}.a.\frac{2a}{3} = \frac{2Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^3}{3EI} = \frac{Fa^3}{EI}$$

Tần số dao động riêng, theo (11-9), bằng: $\omega = \sqrt{\frac{g}{y_o}} = \sqrt{\frac{gEI}{Fa^3}}$ .

### *14-4-2. Dao động tự do có lực cản*

Phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\,\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 . \tag{14-10}$$

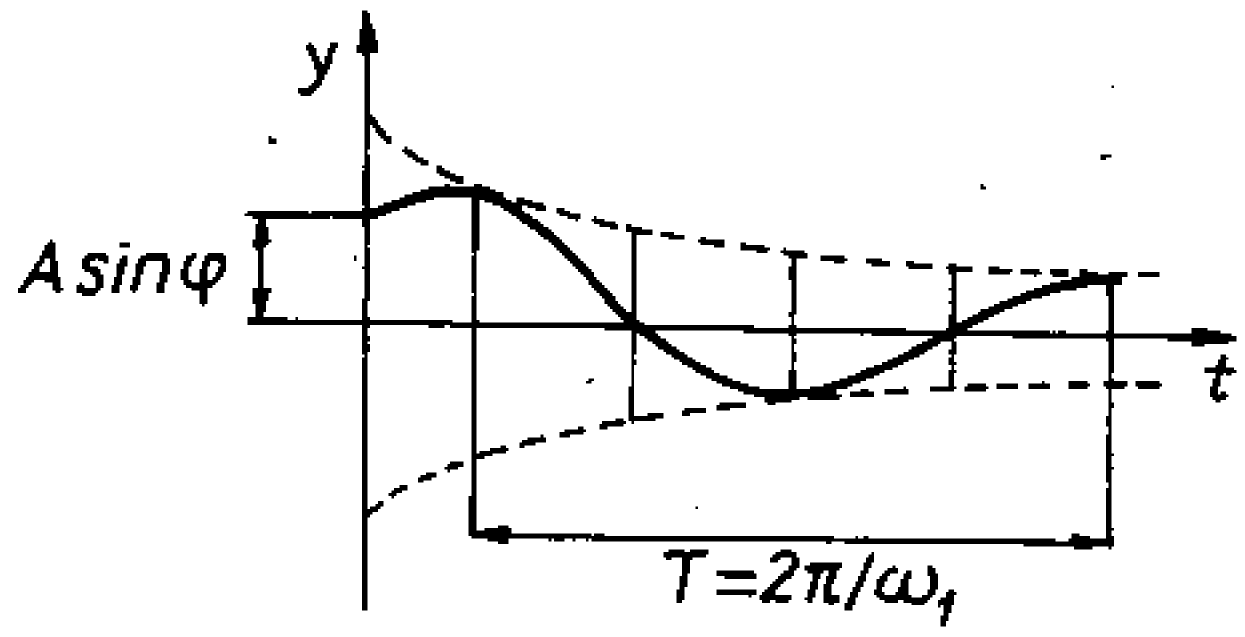
Với điều kiện hạn chế đã nêu $\alpha < \omega$ (lực cản không quá lớn), nghiệm có dạng:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} sin(\omega_1 t + \varphi) . \tag{14-11}$$

Dao động là hàm tắt dần theo thời gian, với tần số góc

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} . \tag{14-12}$$

Đồ thị biểu diễn dao động như trên hình 14-7.

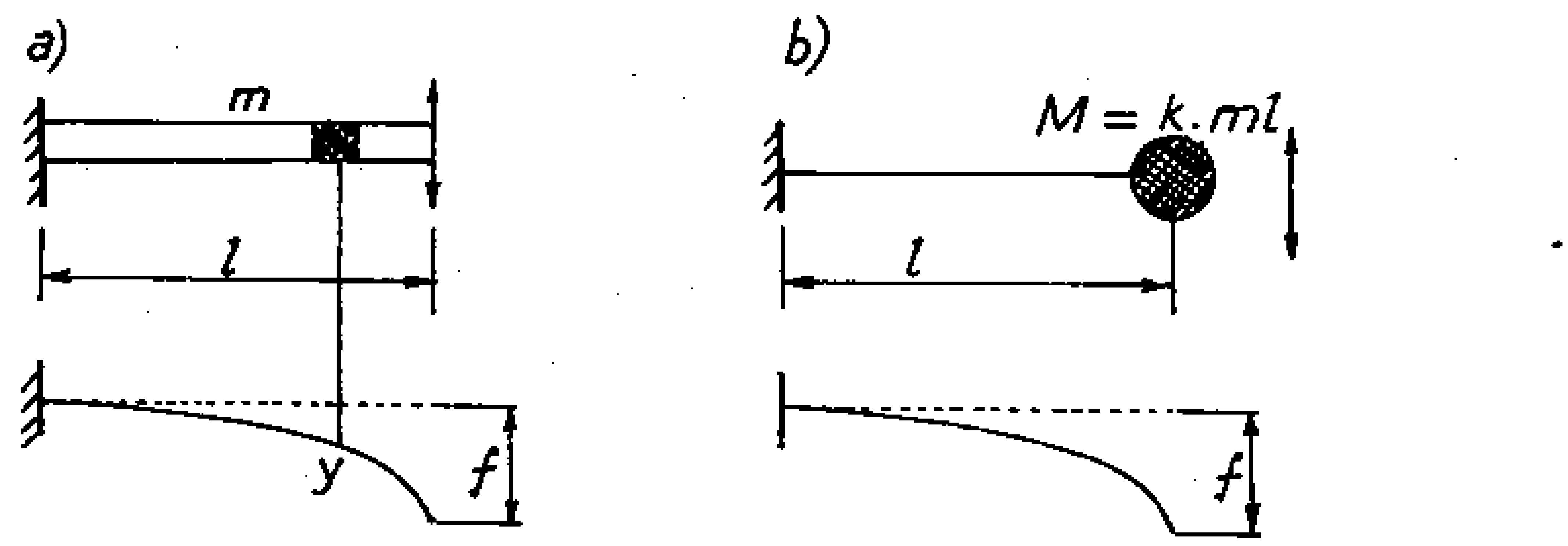



*Hình 14-7.* Dao động tự do có lực cản

## 14-5. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ KỂ KHỐI LƯỢNG CỦA DẦM VÀ LIÊN KẾT

Khi khối lượng của bản thân dầm, nói riêng, hoặc của các liên kết đàn hồi, nói chung, đáng kể so với khối lượng đặt sẵn trên hệ thì phải đưa các khối lượng này vào tính toán. Hệ trở nên có nhiều hoặc vô cùng bậc tự do, bài toán trở thành khá phức tạp. Ta có thể sử dụng những phương pháp gần đúng để xác định tần số dao động riêng của hệ, chẳng hạn theo phương pháp tương đương về năng lượng. Theo phương pháp này, ta quy đổi khối lượng phân bố thành một khối lượng tập trung quy đổi với các hệ số thu gọn khối lượng *k* khác nhau tuỳ theo vị trí điểm đặt khối lượng quy đổi và tuỳ theo dạng liên kết của dầm.

Xét dao động ngang của dầm côngxôn có khối lượng phân bố đều *m*. Tập trung khối lượng *ml* về đầu tự do với hệ số thu gọn *k* như trên hình 14-8, cần xác định trị số *k*.




*Hình 14-8.* Tìm hệ số thu gọn khối lượng

Giả thiết độ võng *y* có dạng của độ võng tĩnh và thay đổi theo thời gian

$$y=\frac{1}{2}f(t)\left(3\frac{z^2}{l^2}-\frac{z^3}{l^3}\right). \qquad (*)$$

Dạng (*) thoả mãn các điều kiện biên: tại ngàm $z=l$ thì $y=dy/dz=0$;

tại đầu tự do $y=f(t)$ là hàm của $t$.

Động năng chuyển động của dầm có khối lượng phân bố bằng:

$$\int_l \frac{m\dot{y}^2}{2}dz = \frac{33}{140} \cdot \frac{ml\dot{f}^2}{2} \ .$$

Động năng chuyển động của dầm có khối lượng tập trung $M$ bằng:

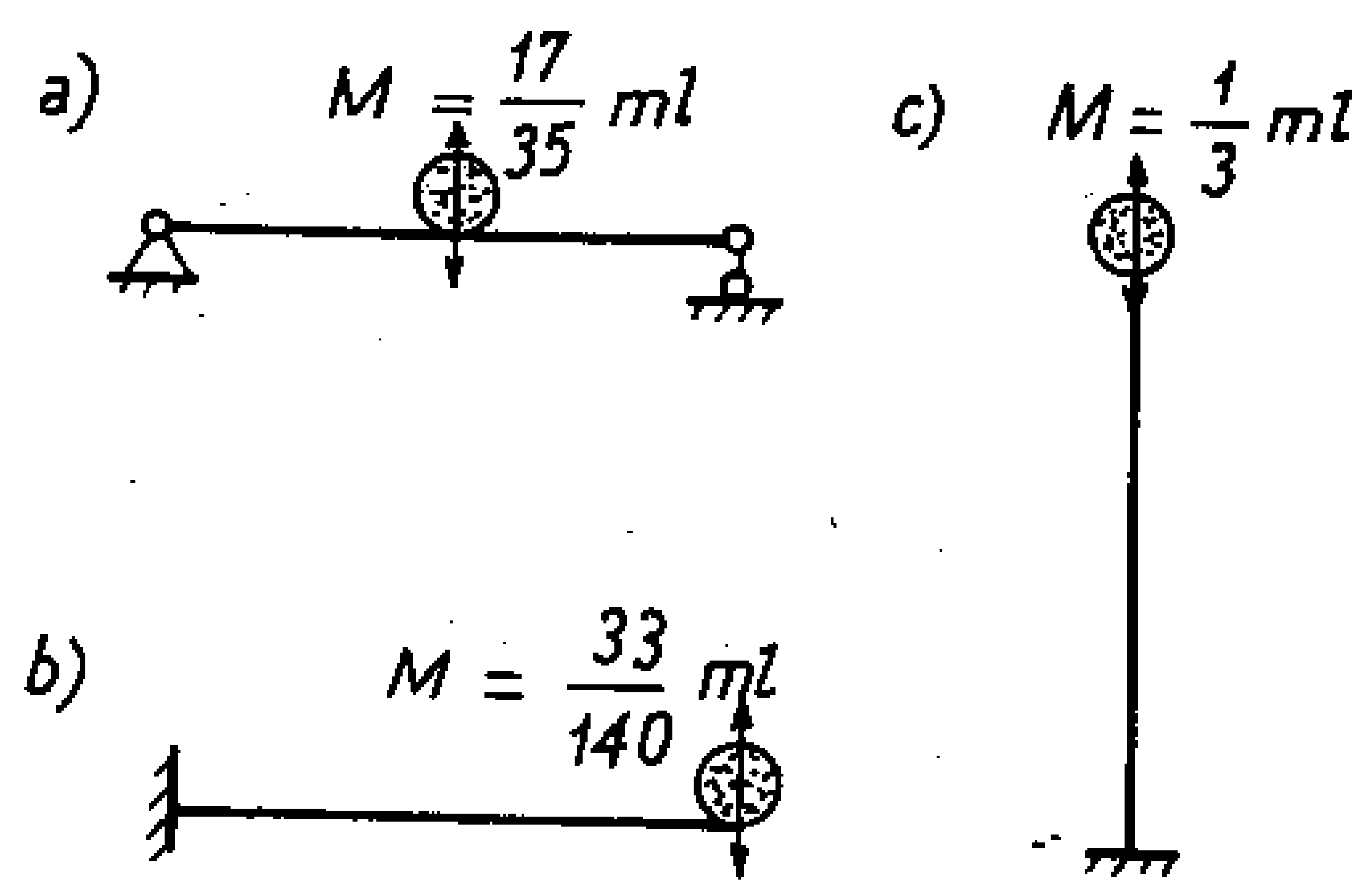
$$\frac{M\dot{f}^2}{2} = \frac{kml\dot{f}^2}{2}$$

Cân bằng động năng của hai trường hợp, ta tìm được hệ số thu gọn khối lượng $k$ trong trường hợp đang xét $k = \frac{33}{140} \approx 0{,}236$.

Tiến hành các phép tính tương tự, ta sẽ nhận được hệ số $k$ cho các trường hợp khác. Kết quả ghi trên hình 14-9, ký hiệu ↔ chỉ phương dao động.

* Khối lượng phân bố đều $m$ trên chiều dài $L$ của một dầm đơn giản được quy đổi thành một khối lượng tập trung đặt ở chính giữa nhịp (hình 14-9a) có trị số $\frac{17}{35}mL$.

* Khối lượng phân bố đều $m$ trên chiều dài $L$ của một dầm côngxôn được quy đổi thành một khối lượng tập trung đặt ở đầu tự do có trị số $\frac{33}{140}mL$ khi xét dao động theo phương ngang trục (xem hình 14-8b) hoặc có trị số $\frac{1}{3}mL$ khi xét dao động theo phương dọc trục (hình 14-9c).




*Hình 14-9.* Hệ số thu gọn khối lượng

Các hệ số quy đổi cũng được gọi là các *hệ số thu gọn khối lượng*.

## 14-6. DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

### 14-6-1. Biểu thức của chuyển vị

Ta xét một trường hợp đặc trưng cho dao động cưỡng bức, khi lực cưỡng bức là hàm tuần hoàn theo thời gian với biên độ $F_o$, tần số góc không đổi $\Omega$ viết dưới dạng $F(t) = F_o \sin\Omega t$. Lực cưỡng bức bất kỳ có thể khai triển theo chuỗi Fourier của những hàm lượng giác. Vì vậy trường hợp riêng mà ta nghiên cứu không làm giảm tính tổng quát của kết quả.

Phương trình vi phân dao động có dạng phương trình cấp hai không thuần nhất:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F_o}{m} \sin \Omega t \qquad (14\text{-}13)$$

Nghiệm tổng quát là tổng của nghiệm phương trình không vế phải $y^*$, có dạng (14-11), và nghiệm riêng phương trình có vế phải $\bar{y}$. Nghiệm riêng $\bar{y}$ có thể tìm dưới dạng:

$$\bar{y} = C \sin \Omega t + D \cos \Omega t$$

thay $\bar{y}$ vào phương trình (14-13), sau một số biến đổi ta tìm được:

$$\bar{y} = A_1 \sin(\Omega t + \psi), \qquad (14\text{-}14)$$

với ký hiệu

$$A_1 = \frac{\delta F_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}}; \qquad (14\text{-}15)$$

$$\psi = \arccos\left(\frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2\Omega^2}}\right). \qquad (14\text{-}16)$$

Nghiệm tổng quát của dao động cưỡng bức, bằng tổng của (14-11) và (14-14)

$$y(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + A_1 \sin(\Omega t + \psi). \qquad (14\text{-}17)$$

Số hạng thứ nhất tắt dần theo thời gian, sau một thời gian đủ lớn hệ chỉ còn lại số hạng thứ hai với tần số của lực cưỡng bức $\Omega$, biên độ $A_1$:

$$y(t) = A_1 \sin(\Omega t + \psi) = \frac{\sin(\Omega t + \psi)}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} \delta . F_o . \qquad (14\text{-}18)$$

Có thể thấy lượng $\delta . F_o$ tương đương với giá trị chuyển vị gây ra bởi một lực tĩnh, có trị số bằng biên độ của lực cưỡng bức và có phương theo phương dao động. Ta ký hiệu chuyển vị tĩnh này là $y_t$. Trị số $y_t$ có thể xác định theo các phương pháp tính chuyển vị đã biết. Như vậy, ta có thể viết:

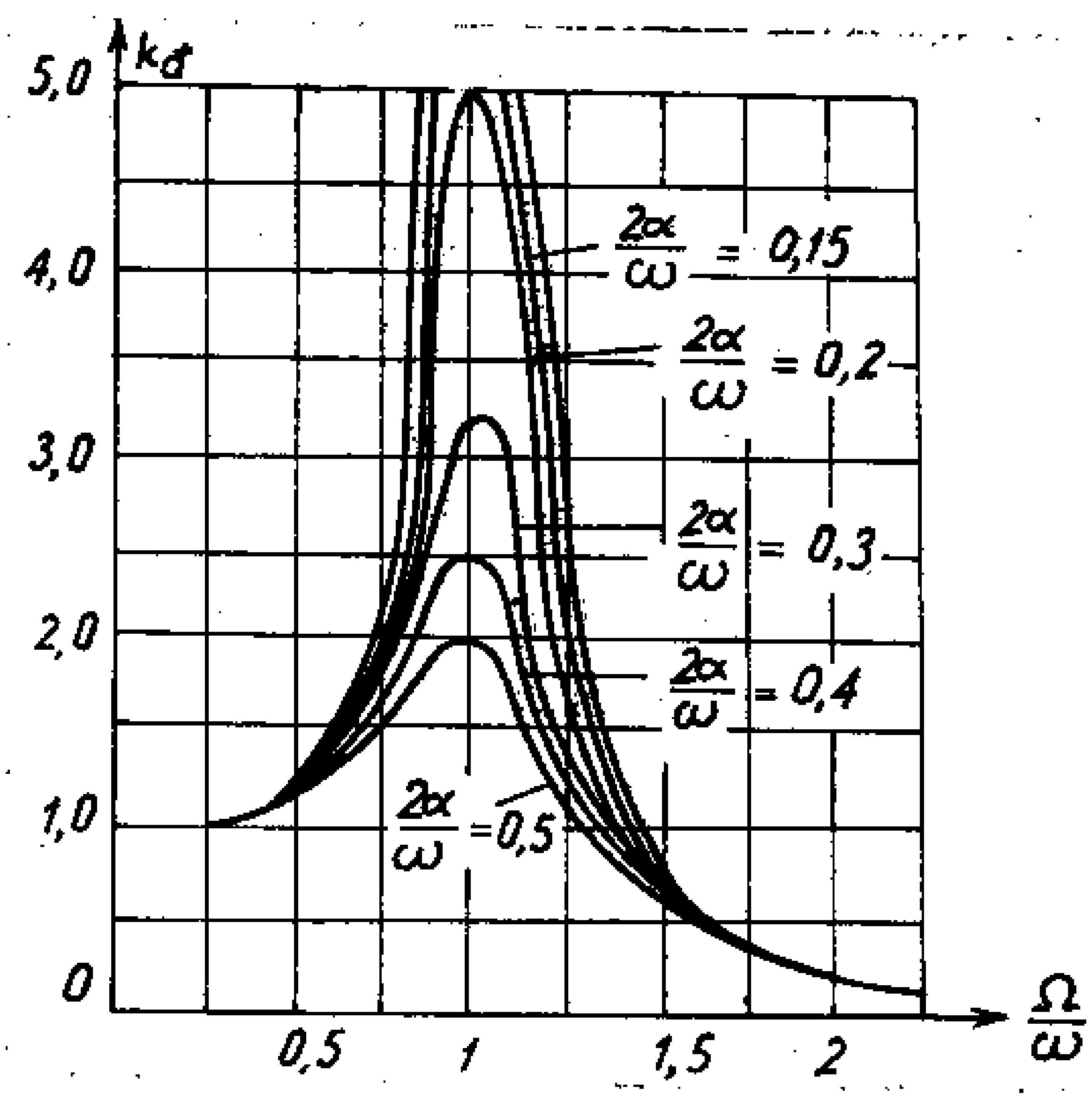
$$y(t) = \frac{\sin(\Omega t + \psi)}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \frac{4\alpha^2\Omega^2}{\omega^4}}} y_t = k_d(t)\, y_t ,$$

trong đó $k_d(t)$ gọi là *hệ số động*, là hàm theo thời gian, hàm này đạt cực trị $K_d$ khi $\sin(\Omega t + \psi) = 1$. Chuyển vị cực trị tương ứng, ký hiệu $y_d$, bằng:

$$y_d = K_d \cdot y_t, \tag{14-19}$$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}}. \tag{14-20}$$

Hệ số động cực trị $K_d$ càng lớn thì hiệu ứng động càng lớn. Hệ số này phụ thuộc tỷ số $\Omega / \omega$. Đồ thị quan hệ giữa $K_d$ và $\Omega / \omega$ ứng với các giá trị khác nhau của hệ số cản nhớt $\alpha$ được trình bày trên hình 14-10.




*Hình 14-10.* Đồ thị quan hệ $K_d$ và $\Omega / \omega$

### *14-6-2. Hiện tượng cộng hưởng*

Đồ thị $K_d$ - $(\Omega / \omega)$ cho thấy: khi $\Omega / \omega \approx 1$, nghĩa là khi tần số lực cưỡng bức trùng với tần số dao động riêng của hệ, thì chuyển vị động $y_d$ rất lớn, có thể bằng vô cùng nếu không có lực cản. Đó là *hiện tượng cộng hưởng*.

Trên thực tế, tồn tại cả một miền gọi là miền cộng hưởng, nằm trong khoảng $0{,}75 \le \dfrac{\Omega}{\omega} \le 1{,}25$; hệ số động trong miền này đạt trị số khá lớn.

Trong những trường hợp cần tránh hiện tượng cộng hưởng, ta cần cấu tạo hệ sao cho tần số dao động riêng của hệ không gần với tần số của lực cưỡng bức, chẳng hạn thay đổi khối lượng của hệ hoặc thay đổi độ cứng của kết cấu bằng cách đặt thêm các thiết bị giảm chấn như lò xo, các tấm đệm đàn hồi...

### *14-6-3. Kết luận chung về tính toán kết cấu chịu dao động cưỡng bức*

Theo biểu thức (14-19), chuyển vị động tỷ lệ với chuyển vị tĩnh. Mặt khác, vật liệu tuân theo định luật Hooke và các hệ số đàn hồi không đổi khi tĩnh cũng như khi động nên ta có thể viết một cách tổng quát biểu thức tương tự (14-19) cho đại lượng nghiên cứu bất kỳ $S$:

$$S_d = K_d S_t ; \tag{14-21}$$

và $$S = S_o + S_d = S_o + K_d S_t, \qquad (14\text{-}22)$$

trong đó:

$S$ - đại lượng nghiên cứu, có thể là chuyển vị, ứng lực, ứng suất, biến dạng của hệ;

$S_o$ - đại lượng tương ứng trong bài toán tĩnh do tác động của trọng lượng $M$ đặt sẵn trên hệ;

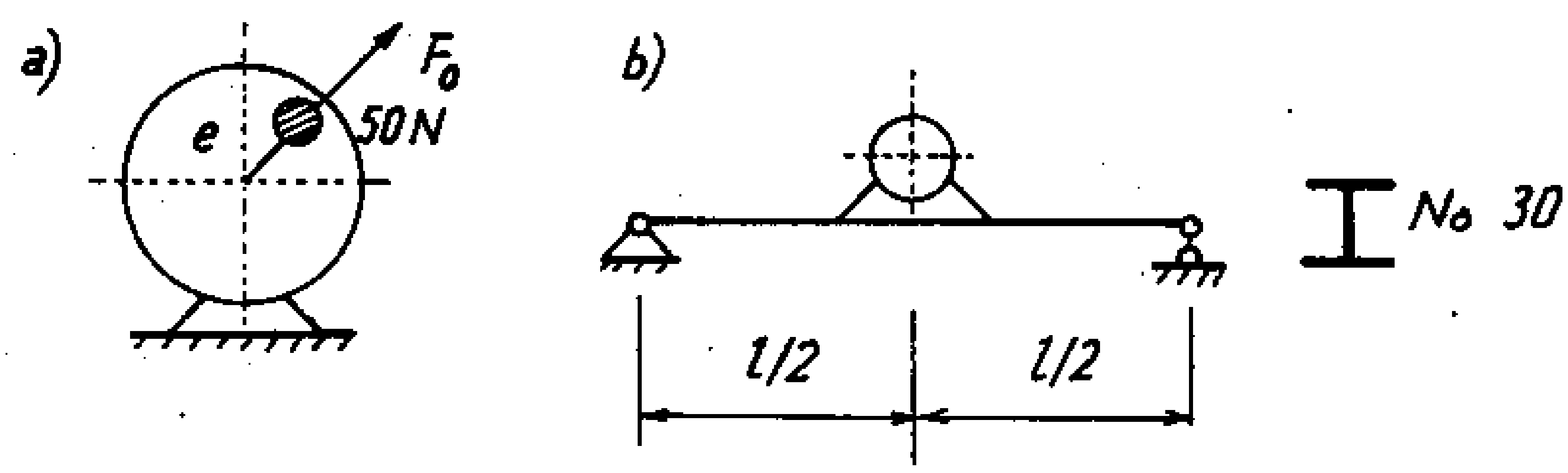
$S_t$ - đại lượng tương ứng trong bài toán tĩnh do tác động của một lực tĩnh, có trị số bằng biên độ của lực cưỡng bức và có phương theo phương dao động.

$K_d$ - hệ số động cực trị, tính theo biểu thức (14-20).

Cần lưu ý rằng hệ số $K_d$ là hằng số trên toàn dầm và với mọi đại lượng $S$.

Khi kể đến khối lượng bản thân của kết cấu, có thể đưa các khối lượng phân bố về các khối lượng tập trung quy đổi như đã trình bày trên hình 14-9.

***Ví dụ 14-2***. Một môtơ trọng lượng *6* kN đặt tại chính giữa dầm đơn giản (hình 14-11) có chiều dài nhịp *4,5* m làm từ thép I*N°30*, có tốc độ quay của trục $n = 600$ vòng/min. Trục có trọng lượng *50* N, có độ lệch tâm $e = 0,5$ cm . Bỏ qua lực cản, tính ứng suất pháp lớn nhất phát sinh trên tiết diện của dầm.




*Hình 14-11.* Cho ví dụ 14-2

Bài giải.

Tốc độ góc của trục quay: $\Omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{\pi 600}{30} = 62,85$ rad/s.

Lực ly tâm phát sinh khi trục quay lệch tâm:

$$F_o = \frac{1}{2} m e \Omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{50}{9,80} 0,5.62,85^2 = 5038 \text{ N}.$$

Lực cưỡng bức có dạng: $F(t) = F_o \sin\Omega t = 5,038 \sin 62,85t$ kN.

Độ võng ban đầu, do trọng lượng môtơ $P$ đặt sẵn gây ra: $y_o = \dfrac{Pl^3}{48EI}$.

Theo bảng thép định hình $I_x = 7080$ cm$^4$; $W_x = 472$ cm$^3$; $E = 2,1.10^4$ kN/cm$^2$.

$$y_o = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{6.(450)^3}{48.2,1.10^4.7080} = 0,0766 \text{ cm}$$

Tần số dao động riêng của dầm: $\omega = \sqrt{\frac{g}{y_o}} = \sqrt{\frac{980}{0,0766}} = 113 \text{ 1/s.}$

Hệ số động, khi bỏ qua lực cản:

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}} = \frac{1}{\left|1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{\omega^2}{\left|\omega^2-\Omega^2\right|} = \frac{113^2}{113^2-62,85^2} = 1,448.$$

Mômen uốn lớn nhất tại tiết diện chính giữa nhịp bằng:

$$M = M_o + M_d = M_o + K_d M_t = \frac{Pl}{4} + K_d\frac{F_o l}{4} =$$

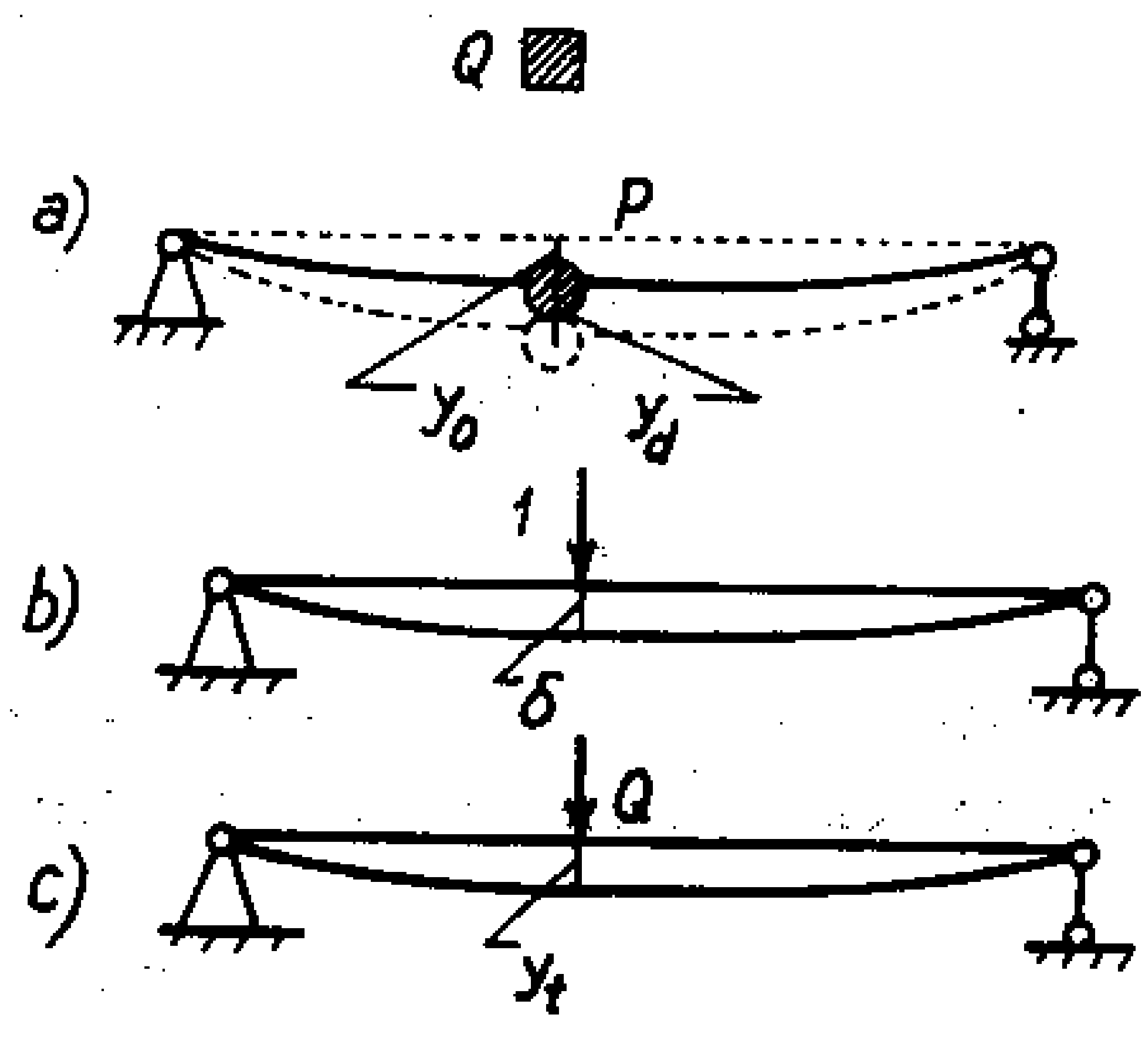
$$= \frac{6.4,5}{4} + 1,448\frac{5,038.4,5}{4} = 14,957 \text{ kNm.}$$

Ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện: $\sigma_{max} = \frac{M}{W} = \frac{1495,7}{472} = 3,17 \text{ kN/cm}^2.$

## *14-7. BÀI TOÁN TẢI TRỌNG VA CHẠM*

### *14-7-1. Va chạm theo phương thẳng đứng*

Xét một dầm, bỏ qua trọng lượng bản thân, mang vật nặng $P$ và chịu va chạm bởi vật nặng $Q$, rơi theo phương thẳng đứng vào dầm tại tiết diện đặt vật nặng $P$ với vận tốc lúc va chạm $v_o$ như chỉ trên hình 14-12a.



*Hình 14-12.* Va chạm trên hệ một bậc tự do

Ở trạng thái ban đầu, khi chưa va chạm, do trọng lượng $P$ tiết diện đặt vật có chuyển vị $y_o$.

Sau va chạm, ta giả thiết cả hai vật $P$, $Q$ cùng chuyển động xuống dưới, đạt chuyển vị lớn nhất $y_d$ rồi sau đó thực hiện dao động tự do tắt dần quanh vị trí cân bằng ban đầu.

Gọi trạng thái $I$ là trạng thái khi vật $Q$ chạm vật $P$ và cả hai cùng di chuyển xuống dưới với vận tốc $v_1$. Trạng thái 2 là trạng thái khi vật $Q$ và $P$ đạt tới chuyển vị lớn nhất $y_d$ xuống phía dưới.

Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (14-2) cho quá trình hệ chuyển từ trạng thái $1$ sang trạng thái 2

$$\Delta K + \Delta U = T.$$

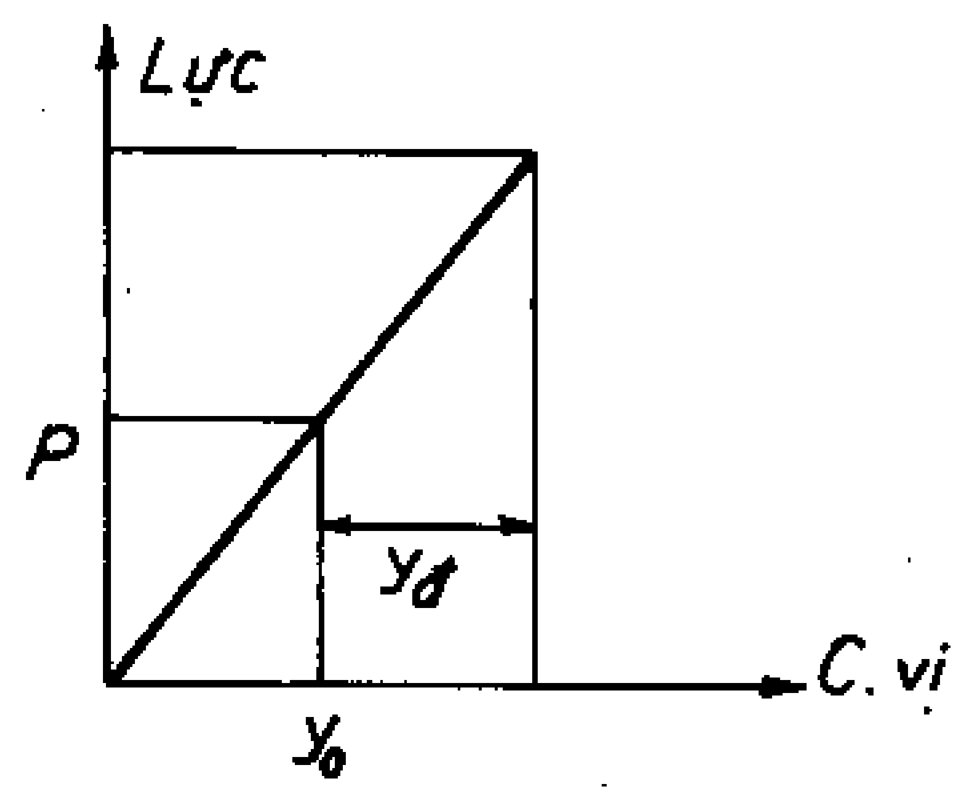
Biến thiên của động năng: $\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}$, với $v_2 = 0$ ($P$ và $Q$ ngừng chuyển động xuống phía dưới để chuyển động lên phía trên).

Theo định lý bảo toàn động lượng thì động lượng trước khi va chạm, là $\frac{Q}{g} v_o$, sẽ bằng động lượng sau va chạm, là $\frac{Q+P}{g} v_1$, ta có:

$$\frac{Q}{g} v_o = \frac{Q+P}{g} v_1 \rightarrow v_1 = \frac{Q}{Q+P} v_o.$$

Vậy
$$\Delta K = -\frac{Q+P}{2g} \cdot \left( \frac{Q}{Q+P} v_o \right)^2 = -\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_o^2.$$

Thế năng BDĐH của hệ được tính trên cơ sở đồ thị quan hệ tuyến tính giữa lực-chuyển vị như trên hình 14-13, biểu đồ này đúng khi thanh chịu tải trọng tĩnh cũng như khi thanh chịu tải trọng động theo giả thiết đã nêu.



*Hình 14-13.* Đồ thị tính TNBD

Ở trạng thái $1$, do lực tĩnh $P$ thanh có chuyển vị $y_o$, TNBDĐH tương ứng

$$U_1 = \frac{P y_o}{2}.$$

Sử dụng ký hiệu chuyển vị đơn vị $\delta$, là chuyển vị do một lực có trị số bằng $1$ đặt theo phương va chạm gây ra như trên hình 14-12b, ta có thể viết:

$$y_o = \delta . P \rightarrow U_1 = \frac{y_o^2}{2\delta}.$$

Ở trạng thái 2, thanh có chuyển vị $(y_0 + y_d)$. Do giả thiết tính chất vật liệu khi tải trọng tĩnh cũng như khi chịu tải trọng động, ta có thể viết biểu thức tương tự của TNBDĐH

$$U_2 = \frac{(y_o + y_d)^2}{2\delta}; \quad \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{y_d^2 + 2 y_o y_d}{2\delta}.$$

Công của ngoại lực trong di chuyển từ trạng thái *1* tới trạng thái *2* là công của các trọng lượng $Q+P$ không đổi trong đoạn chuyển dời $y_d$. Vậy:

$$T = (Q + P)\, y_d.$$

Từ nguyên lý bảo toàn năng lượng $\Delta K + \Delta U = T$, ta có:

$$-\frac{Q^2}{2g(Q+P)}v_o^2 + \frac{y_d^2 + 2y_o y_d}{2\delta} = (Q+P)y_d$$

hay:

$$y_d^2 + 2y_o y_d - 2\delta(Q+P)y_d = \frac{\delta Q}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}v_o^2. \qquad (14\text{-}21)$$

Lượng $\delta.P = y_o$ là chuyển vị theo phương va chạm của tiết diện va chạm do một lực bằng trọng lượng $P$ đặt tĩnh theo phương va chạm gây ra.

Lượng $\delta.Q$, ký hiệu $y_t$, là chuyển vị theo phương va chạm của tiết diện va chạm do một lực bằng trọng lượng $P$ đặt tĩnh theo phương va chạm gây ra $y_t = \delta.Q$, sơ đồ xác định $y_t$ như trên hình 14-12c.

Phương trình (14-21) được viết gọn như sau:

$$y_d^2 + 2y_t y_d - \frac{v_o^2}{g\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}y_t = 0. \qquad (14\text{-}22)$$

Nghiệm dương của phương trình là

$$y_d = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{gy_t\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}}\right]y_t = k_d\, y_t \qquad (14\text{-}23)$$

Trong đó, hệ số động của bài toán va chạm theo phương thẳng đứng là

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{gy_t\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}}. \qquad (14\text{-}24)$$

Trường hợp đặc biệt, khi vật nặng $Q$ rơi tự do từ độ cao $H$ xuống dầm, $v_o = \sqrt{2gH}$

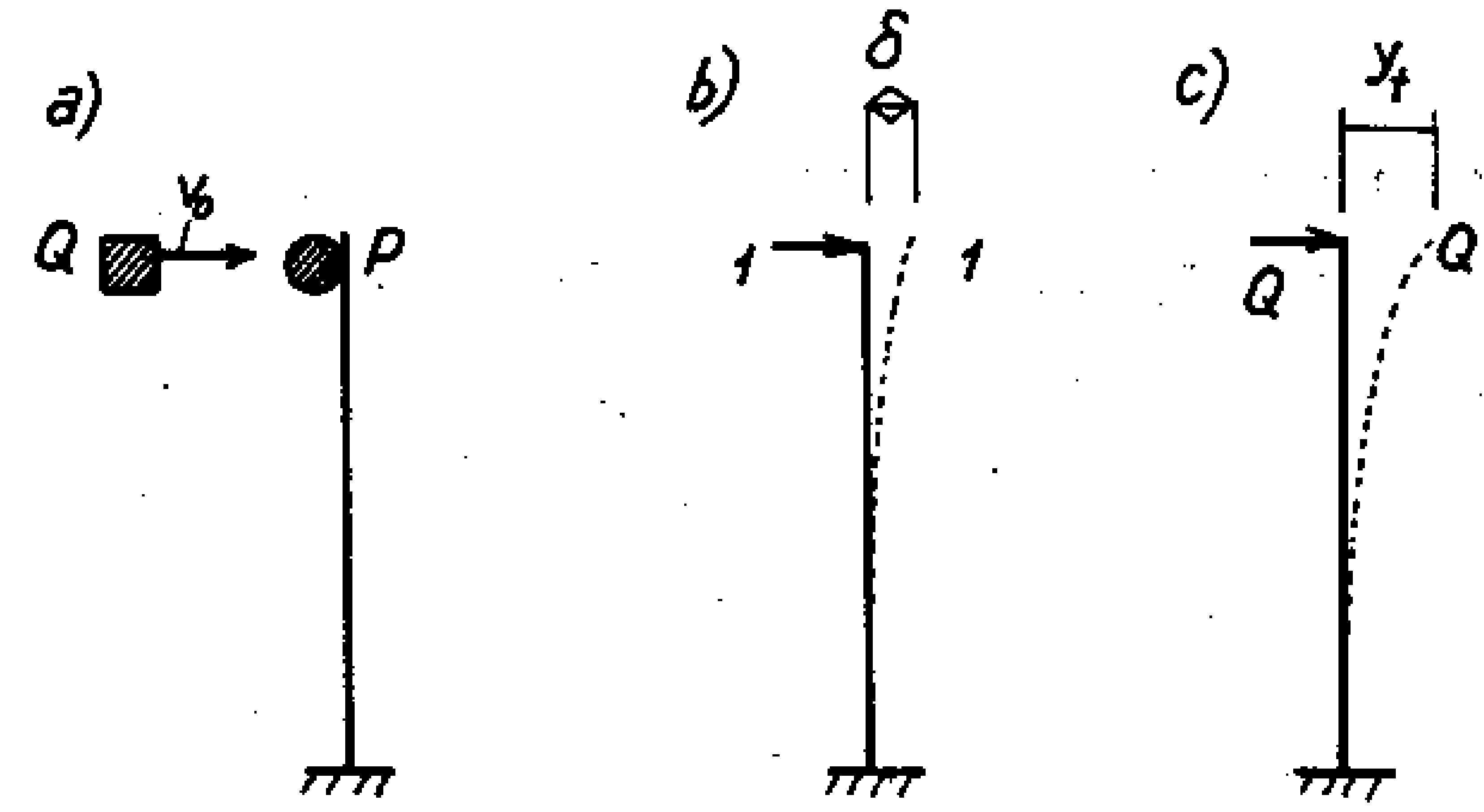
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}}. \qquad (14\text{-}25)$$

Khi $H = 0$ thì $k_d = 2$, nghĩa là khi đặt đột ngột toàn bộ trị số tải trọng lên hệ thì nội lực, biến dạng, chuyển vị sẽ lớn gấp đôi trường hợp đặt tải tĩnh, từ từ.

### *14-7-2. Va chạm theo phương nằm ngang*

Xét hệ có một bậc tự do chịu va chạm bởi vật nặng $Q$ chuyển động theo phương nằm ngang với vận tốc $v_o$ vào trọng lượng đặt sẵn $P$ (hình 14-14a).

Ở trạng thái ban đầu, khi chưa va chạm, tiết diện đặt vật $P$ không có chuyển vị theo phương ngang. Sau va chạm, ta giả thiết cả hai vật $P$, $Q$ cùng chuyển động sang phải đạt chuyển vị lớn nhất $y_d$ rồi sau đó thực hiện dao động tự do tắt dần quanh vị trí cân bằng ban đầu.




*Hình 14-14.* Va chạm theo phương ngang

Tiến hành những bước tương tự như đối với trường hợp va chạm theo phương thẳng đứng, ta sẽ tìm được chuyển vị $y_d$. Trong trường hợp đang xét:

$$v_1 = \frac{Q}{Q+P} v_o; \qquad \Delta K = -\frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_o^2;$$

$U_1 = 0$ (dầm chưa có chuyển vị ngang theo phương va chạm);

$U_2 = \dfrac{y_d^2}{2\delta}$ (ở trạng thái 2 dầm chỉ có chuyển vị $y_d$).

Công ngoại lực $T = 0$ (chuyển vị theo phương vuông góc với trọng lượng $Q$ và $P$).

Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (14-2): $\Delta K + \Delta U = T$, ta có:

$$\frac{y_d^2}{2\delta} - \frac{Q^2}{2g(Q+P)} v_o^2 = 0.$$

Đặt: $y_t = \delta.Q$ - chuyển vị theo phương ngang do một lực bằng trọng lượng của vật gây va chạm $Q$ đặt tĩnh theo phương va chạm, xác định theo sơ đồ trên hình 14-14c;

$\delta$ - chuyển vị do một lực có trị số bằng $1$ đặt theo phương va chạm, xác định theo sơ đồ trên hình 14-14b.

Nghiệm dương của phương trình

$$y_d = \frac{v_o}{\sqrt{gy_t\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}}\,y_t = k_d y_t \,. \qquad (14\text{-}26)$$

Hệ số động của bài toán va chạm theo phương nằm ngang là:

$$k_d = \frac{v_o}{\sqrt{gy_t\left(1+\dfrac{P}{Q}\right)}} \,. \qquad (14\text{-}27)$$

### *14-7-3. Kết luận chung về bài toán va chạm*

a- *Công thức tính các đại lượng*: trên cơ sở biểu thức tính chuyển vị toàn phần

$$y = y_o + y_d = y_o + k_d y_t \,,$$

và quan hệ định luật Hooke, ta có thể viết biểu thức tính đại lượng $S$ bất kỳ trong bài toán va chạm:

$$S = S_o + S_d = S_o + k_d S_t \,.$$

trong đó:

$S_o$ - đại lượng cần tính do vật nặng đặt sẵn trên hệ gây ra;

$S_t$ - đại lượng cần tính do một lực bằng trọng lượng vật gây va chạm $Q$ đặt theo phương va chạm gây ra (lực nằm ngang khi va chạm ngang, thẳng đứng khi va chạm thẳng đứng).

$k_d$ - hệ số động của bài toán va chạm, tính theo (14-25) khi va chạm theo phương thẳng đứng và tính theo (14-27) khi va chạm theo phương nằm ngang.

Trong cả hai trường hợp $y_t$ là chuyển vị theo phương va chạm do một lực bằng trọng lượng của vật gây va chạm $Q$ đặt tĩnh theo phương va chạm gây ra như chỉ trên hình 14-12c hoặc 14-14c.

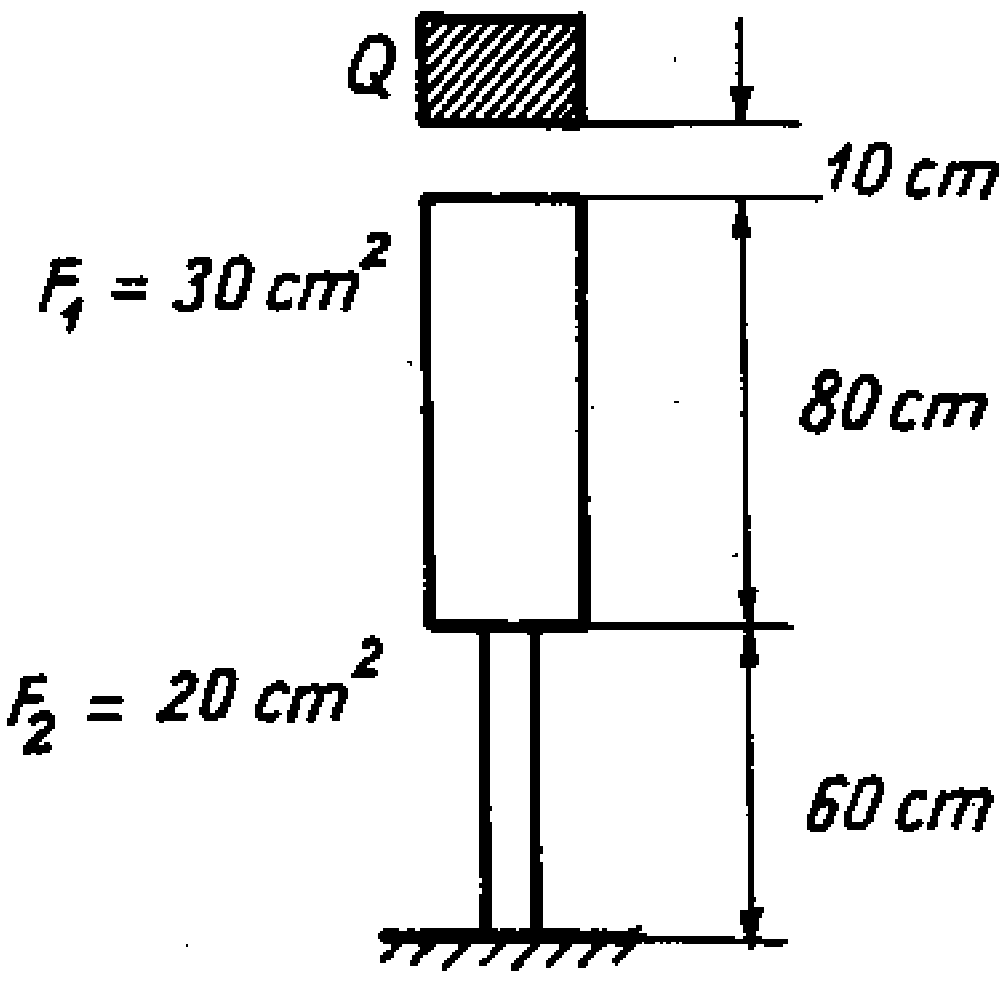
b- *Trường hợp kể tới khối lượng của kết cấu*: khi này có thể thu gọn khối lượng về tiết diện chịu va chạm bằng cách sử dụng các hệ số thu gọn khối lượng như trên hình 14-9.

c- *Giảm ảnh hưởng của va chạm*: ta giảm hệ số động bằng cách:

* Tăng thêm khối lượng đặt sẵn $P$. Biện pháp này làm tăng trị số của $S_o$.

* Làm mềm kết cấu để tăng thêm trị số chuyển vị $y_t$. Biện pháp này có thể đạt được khi đặt thêm các tấm đệm, lò xo ở tiết diện va chạm hoặc ở các gối tựa.

*Ví dụ 14-3*. Xác định ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện một cột chịu va chạm theo phương thẳng đứng cho trên hình 14-15. Bỏ qua trọng lượng cột. Cho biết: $Q = 600$ kN; $H = 6$ cm; $E = 10^3$ kN/cm$^2$.




*Hình 14-15.* Cho ví dụ 14-3

*Bài giải*. Chuyển vị tĩnh $y_t$ bằng biến dạng dài của cột do trọng lượng $Q$ đặt tĩnh trên cột là

$$y_t = \Delta L = \frac{Q.l_1}{EA_1} + \frac{Ql_2}{EA_2} =$$

$$= \frac{0,6.80}{10^3.30} + \frac{0,6.60}{10^3.20} = 3,4.10^{-3} \text{ cm.}$$

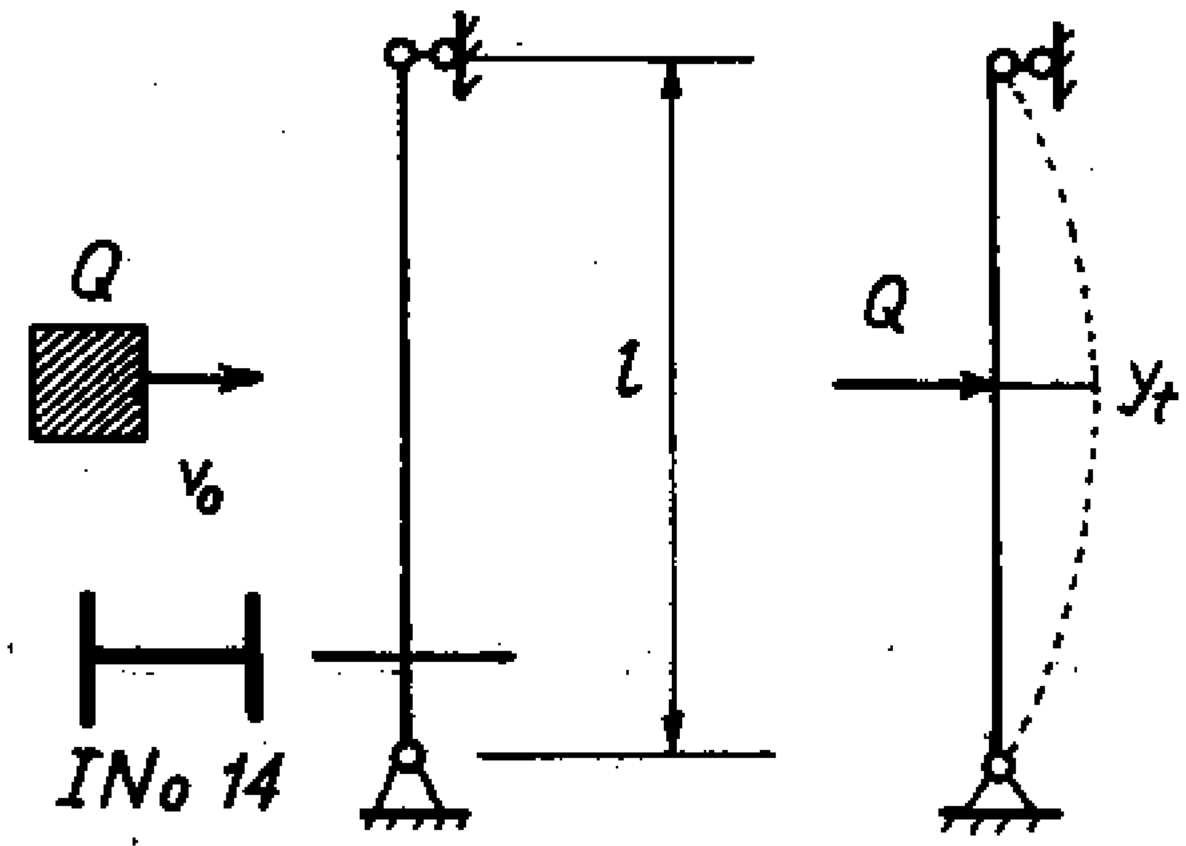
Hệ số động:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t\left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.6}{3,4.10^{-3}}} = 60,41.$$

Ứng suất pháp lớn nhất trên tiết diện:

$$\sigma = k_d\sigma_t = k_d\frac{Q}{A_2} = 60,41\frac{0,6}{20} = 1,82 \text{ kN/cm}^2.$$

*Ví dụ 14-4*. Xác định hệ số động của dầm thép chữ I$N^o14$ (hình 14-16) chịu va chạm bởi vật có trọng lượng $100$ N chuyển động theo phương ngang với vận tốc $v_o = 20$ km/h khi không kể và khi có kể đến trọng lượng của dầm.




*Hình 14-16.* Cho ví dụ 14-4

*Bài giải*. Từ bảng thép định hình, với I $N^o14$ ta có các đặc trưng:
trọng lượng trên $1$ mét dài $137$N;
mômen quán tính $I_x = 572$ cm$^4$;
môđun đàn hồi $E = 2,1.10^4$ kN/cm$^2$.

Chuyển vị tĩnh: $$y_t = \frac{Ql^3}{48EI_x} = \frac{0,1.400^3}{48.2,1.10^4.572} = 1,1.10^{-2} \text{ cm.}$$

Vận tốc chuyển động: $v_o = 20$ km/h $= 555,5$ cm/s.

Khi không kể đến trọng lượng bản thân

$$k_d = \frac{v_o}{\sqrt{gy_t}} = \frac{555,5}{\sqrt{980.1,1.10^{-2}}} = 169$$

Khi kể đến trọng lượng bản thân, ta thu gọn trọng lượng về tiết diện va chạm ở chính giữa dầm với hệ số thu gọn là *17/35* và có trọng lượng thu gọn là $P = \frac{17}{35}.137.4 = 266$ N,

$$k_d = \frac{v_o}{\sqrt{gy_t\left(1+\frac{P}{Q}\right)}} = \frac{555,5}{\sqrt{980.1,1.10^{-2}(1+\frac{266}{100})}} = 88 \; .$$

Như thế, trọng lượng bản thân làm giảm ảnh hưởng va chạm. Việc không kể trọng lượng bản thân khiến phép tính thiên về an toàn.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

14- 1. Tại sao ta có thể nói: việc phân loại tải trọng tĩnh và tải trọng động chỉ mang tính chất tương đối, ước lệ.

14- 2. Nêu và giải thích các giả thiết về vật liệu khi tính thanh chịu tải trọng động.

11- 3. Ta dùng nguyên lý nào để đưa bài toán động về bài toán tĩnh tương đương, khi biết gia tốc của chuyển động.

14- 4. Giải thích những lực tác động lên khối lượng *m* trong bài toán dao động hệ một bậc tự do.

14- 5. Thế nào là lực cản nhớt? Giải thích nguyên nhân của lực cản nhớt.

14- 6. Thế nào là dao động tự do của một hệ? Đặc điểm dao động tự do của hệ có một bậc tự do khi không có lực cản và khi có lực cản nhớt.

14- 7. Tần số dao động riêng của hệ một bậc tự do là gì? Biểu thức để tính.

14- 8. Hệ số thu gọn khối lượng là hệ số gì? Cho ví dụ đối với dầm côngxôn và dầm đơn giản.

14- 9. Nêu các giả thiết khi tính thanh chịu tải trọng va chạm theo SBVL.

14-10. Giải thích các biện pháp làm giảm ảnh hưởng của tải trọng va chạm lên một hệ kết cấu.

14-11. Giải thích vì sao tính toán va chạm không kể đến khối lượng kết cấu sẽ thiên về an toàn so với tính toán có kể đến khối lượng kết cấu.

# 15 Tính độ bền kết cấu theo tải trọng giới hạn

## *15-1. KHÁI NIỆM CHUNG, CÁC GIẢ THIẾT CƠ BẢN*

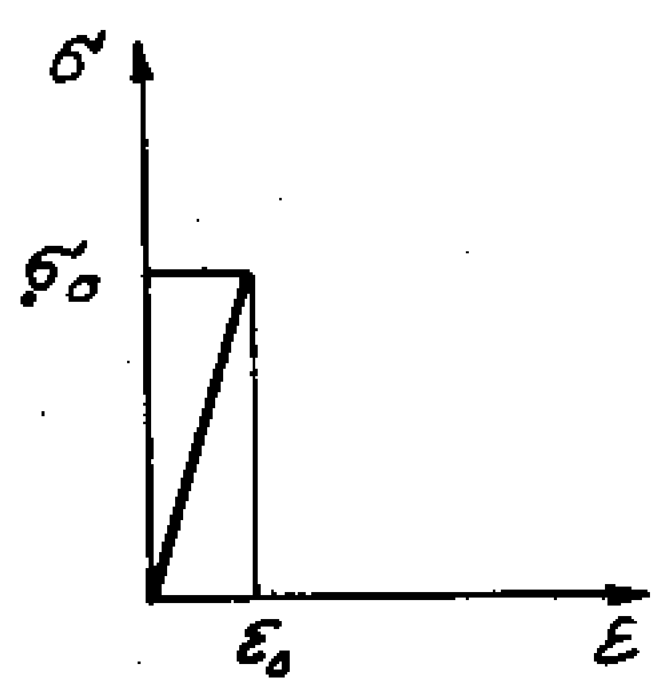
Trong các chương trước, độ bền được đánh giá theo quan điểm ứng suất cho phép (ƯSCP). Theo quan điểm này, độ bền của hệ kết cấu được đảm bảo nếu độ bền tại từng điểm thuộc hệ được đảm bảo, độ bền tại từng điểm được đảm bảo khi tại điểm đó chỉ tồn tại biến dạng đàn hồi. Như thế, theo quan điểm ƯSCP sự xuất hiện của biến dạng dẻo, dù chỉ tại một điểm, cũng đồng nghĩa với sự phá hoại, sự loại bỏ toàn bộ hệ, vì vậy quan điểm này còn được gọi là quan điểm đàn hồi. Trong cách tính theo ƯSCP: vật liệu đàn hồi tuyệt đối; tuân theo định luật Hooke; ở trạng thái ứng suất đơn; quan hệ ứng suất - biến dạng là đường thẳng như trên hình 15-1.

Điều kiện bền được viết là

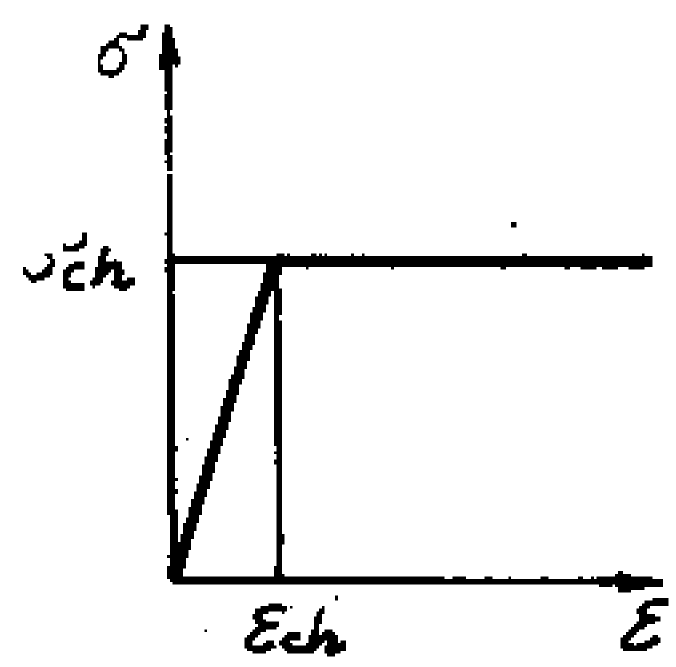
$$\sigma \le [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}.$$

Ứng suất giới hạn $\sigma_o$ là giới hạn bền $\sigma_B$ đối với vật liệu giòn, là giới hạn tỷ lệ $\sigma_{tl}$ hoặc giới hạn chảy $\sigma_{ch}$ đối với vật liệu dẻo, $n$ là hệ số an toàn.

Như thế, cách tính theo ƯSCP có lập luận đơn giản nhưng rõ ràng về điều kiện bền của kết cấu, thiên về an toàn và cho các biến dạng chuyển vị nhỏ ($\varepsilon \le \varepsilon_o$).




*Hình 15-1.* Vật liệu đàn hồi




*Hình 15-2.* Vật liệu đàn dẻo lý tưởng

Tuy nhiên, đối với vật liệu dẻo thì giới hạn $\sigma_o$ chưa phải là ứng suất phá hoại của vật liệu, mặt khác ta cũng có thể thấy sự xuất hiện biến dạng dẻo, sự phá hoại vật liệu ở một vài điểm, ở một vài tiết diện, thậm chí ở một vài vùng cục bộ chưa thể đồng nghĩa với sự mất hoàn toàn khả năng chịu lực của cả hệ. Tải trọng, khi này vẫn có thể được hệ tiếp nhận và có thể tăng thêm, tương tự như việc loại bỏ một thanh thừa của hệ thanh siêu tĩnh cũng chưa phải đã gây ra sự biến hình của kết cấu và hệ thanh vẫn chịu được lực. Cách đánh giá bền theo ƯSCP chưa xét đến khả năng chịu lực chung của toàn bộ hệ. Như vậy, việc đánh giá độ bền của kết cấu cần được xem xét đến khả năng chịu lực của toàn bộ hệ: hệ còn đáp ứng được hoặc không còn đáp ứng được các yêu cầu chịu lực đã đặt ra. Trạng thái phân cách giữa sự đáp ứng và sự không đáp ứng ấy được gọi là *trạng thái giới hạn của kết cấu*, tải trọng tương ứng được gọi là *tải trọng giới hạn*, ký hiệu $F_{gh}$. Cách đánh giá độ bền theo quan điểm như vậy được gọi là *cách tính theo tải trọng giới hạn* (TTGH). Cách tính này cho phép phát sinh các biến dạng dẻo; chỉ khi các biến dạng dẻo phát triển tới mức nào đó thì hệ kết cấu mới bị biến hình, trở thành trạng thái giới hạn và không chịu được lực.

Điều kiện bền được đánh giá thông qua việc so sánh hệ số an toàn thực và hệ số an toàn cho phép:

$$n = \frac{F_{gh}}{F} \geq [n].$$

Cơ sở của cách tính theo TTGH là giả thiết về đồ thị quan hệ ứng suất - biến dạng bao gồm hai giai đoạn: *giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy*, mô tả như trên hình 15-2. Đồ thị mang tên là *sơ đồ Prandt*, vật liệu tuân theo sơ đồ này gọi là vật liệu đàn dẻo lý tưởng. Thực ra, đây cũng là một sự đơn giản hoá đồ thị nhận được từ thí nghiệm kéo, nén mẫu vật liệu dẻo khi thềm chảy kéo dài. Ta cũng chấp nhận sự trùng nhau giữa giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy, thềm chảy kéo dài vô tận.

Theo sơ đồ này: ở giai đoạn đầu; khi ứng suất nhỏ hơn $\sigma_{ch}$ thì vật liệu làm việc hoàn toàn đàn hồi, quan hệ ứng suất - biến dạng tuân theo định luật Hooke và kết thúc tại điểm ($\sigma_{ch}$ , $\varepsilon_{ch}$); sau đó, khi ứng suất tại điểm đang xét đã đạt giá trị $\sigma_{ch}$, vật liệu chuyển sang giai đoạn chảy dẻo, ứng suất không tăng và giữ là hằng số, mặc dầu tải trọng vẫn có thể tăng thêm, biến dạng tại điểm đang xét tăng tuỳ ý.

Phương trình biểu diễn sơ đồ Prandt có thể viết dưới dạng:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{ch} \rightarrow \sigma = E\varepsilon;$$

$$\varepsilon > \varepsilon_{ch} \rightarrow \sigma = \sigma_{ch}.$$

Khi tính kết cấu thanh theo TTGH, trong giai đoạn đàn hồi ta vẫn sử dụng các kết quả tính ứng suất, biến dạng đã được nghiên cứu ở các phần trước; trong giai đoạn đàn dẻo ta cũng chấp nhận những giả thiết định tính về biến dạng của thanh như trong giai đoạn đàn hồi (tiết diện phẳng, thớ dọc không tác dụng tương hỗ...).

Cách tính theo TTGH tận dụng được khả năng làm việc của vật liệu, mang lại hiệu quả kinh tế nhưng cho phép xuất hiện chuyển vị, biến dạng lớn. Cách tính cũng bị hạn chế sử dụng khi tính kết cấu chịu tải trọng động.

## 15-2. HỆ THANH CHỊU KÉO, NÉN

Đặc điểm làm việc của thanh chịu kéo, nén đúng tâm là: ở giai đoạn làm việc đàn hồi, ứng suất pháp $\sigma = N/A$ phân bố đều trên tiết diện. Vì vậy, khi lực dọc tăng lên đạt trị số $N_d = \sigma_{ch} A$ thì ứng suất trên tiết diện sẽ đạt giới hạn chảy, một điểm trên tiết diện chảy dẻo thì toàn bộ tiết diện cũng chảy dẻo, biến dạng dài của thanh trở thành tuỳ ý và thanh không còn tác dụng chịu lực. Với một thanh chịu kéo, nén đúng tâm thì cách tính theo ƯSCP và TTGH cho kết quả như nhau, giới hạn chịu lực là $N_d$.

Trong cách tính theo ƯSCP, hệ thanh chịu kéo nén sẽ bị phá hoại khi lực dọc trong một thanh nguy hiểm đạt tới $N_d$.

Hệ thanh tĩnh định là hệ có vừa đủ số thanh liên kết, vì vậy khi một thanh mất khả năng chịu lực, bị loại bỏ thì hệ sẽ thiếu liên kết, trở thành biến hình và chuyển sang trạng thái giới hạn, mất hoàn toàn khả năng chịu lực. Như thế, với hệ thanh tĩnh định chịu kéo nén đúng tâm thì cách tính theo ƯSCP và TTGH cũng cho cùng một kết quả.

Hệ thanh siêu tĩnh có số lượng thanh liên kết lớn hơn số lượng cần thiết, vì vậy khi một thanh bị chảy dẻo thì hệ có thể chưa bị biến hình, chưa mất khả năng chịu lực. Tải trọng đặt trên hệ vẫn có thể tăng lên, ứng lực trong những thanh đã bị chảy dẻo vẫn giữ nguyên trị số $N_d$, ứng lực trong các thanh còn lại vẫn có thể tăng thêm và các thanh này lần lượt tiếp tục bị chảy dẻo cho tới khi hệ trở thành biến hình, mất hết khả năng chịu lực. Ở trạng thái giới hạn, hệ thanh chịu kéo nén đúng tâm $n$ bậc siêu tĩnh sẽ có tối thiểu $1$ thanh và tối đa $n+1$ thanh bị chảy dẻo. Những ví dụ dưới đây sẽ minh hoạ về cách tính hệ thanh chịu kéo nén đúng tâm theo TTGH.

*Ví du 15-1*. So sánh tải trọng phá hoại tương ứng với hai cách tính theo TTGH và ƯSCP đối với hệ (hình 15-3a) gồm dầm tuyệt đối cứng $AB$ chịu tải trọng ngang phân bố đều cường độ $q$; dầm được liên kết khớp tại $A$ và được giữ bởi hai thanh $BC$, $DE$ có cùng diện tích tiết diện $A$, giới hạn chảy $\sigma_{ch}$.

*Bài giải*. Giải bài toán siêu tĩnh, ta nhận được phương trình cân bằng:

$$a N_1 + 2a N_2 - 2qa^2 = 0.$$

và phương trình biến dạng $\Delta l_2 = 2\Delta l_1 \rightarrow N_2 = 2N_1$.

Từ đó có kết quả: $\quad N_1 = \frac{2}{5}qa; \qquad N_2 = \frac{4}{5}qa.$

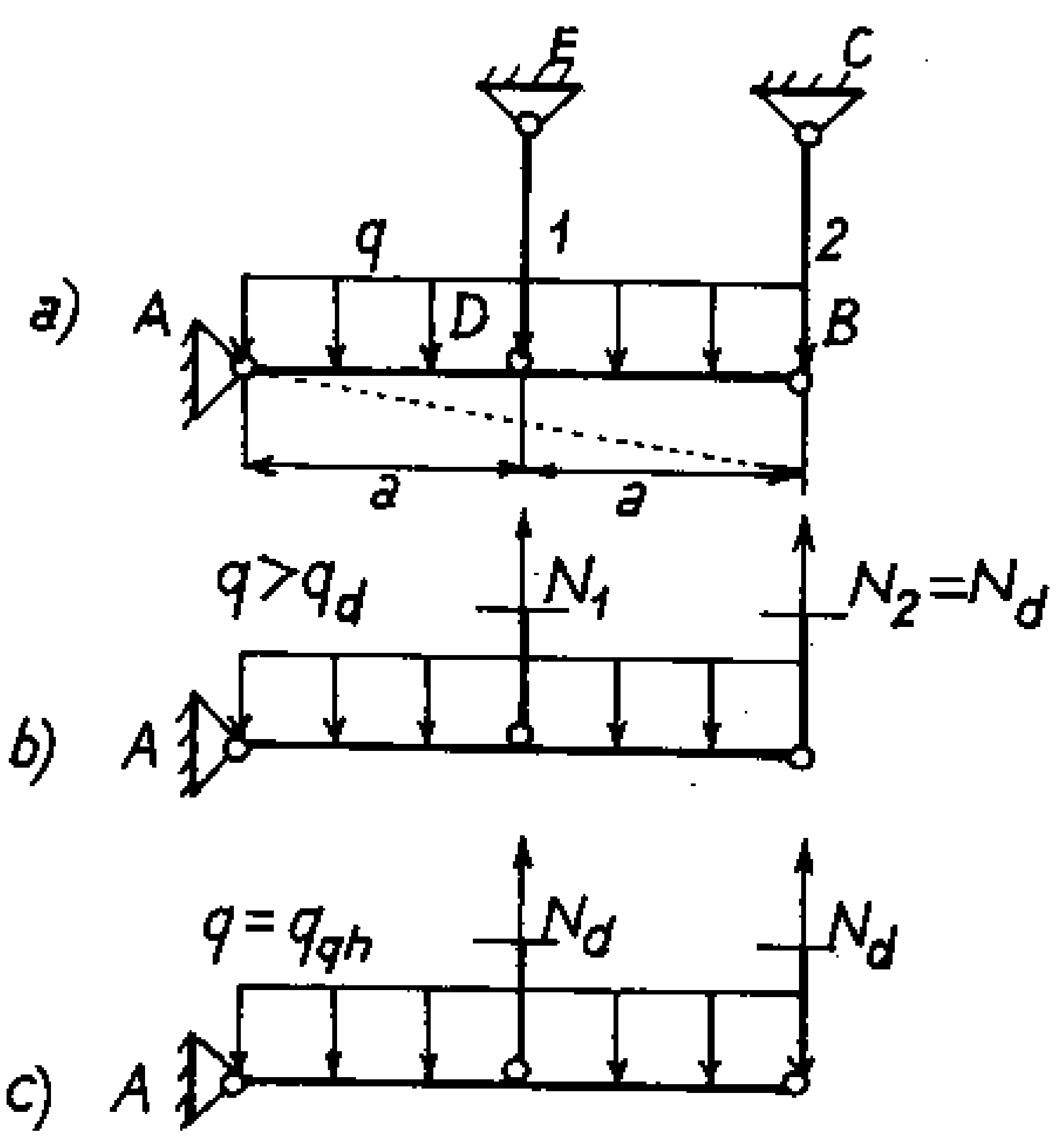
Khi tải trọng tăng lên, thanh 2 sẽ bị chảy dẻo trước. Lực dọc trong thanh 2 đạt giá trị $N_d = \sigma_{ch} A$, tương ứng với giá trị lực phân bố $q_d = \dfrac{5}{4}\dfrac{\sigma_{ch}A}{a}$. Theo quan điểm ƯSCP thì với trị số $q_d$ hệ sẽ bị phá hoại.

Tuy nhiên, khi này, dầm $AB$ vẫn chịu được lực, chưa biến hình vì vẫn được giữ bởi thanh $DE$. Tải trọng vẫn có thể tăng lên $q > q_d$; ứng lực trong thanh 2 đã đạt $N_d$ thì giữ nguyên trị số, không tăng thêm; lực dọc trong thanh 1 tăng thêm và được xác định bằng phương pháp mặt cắt như trên hình 15-3b:

$$\Sigma M_A = aN_1 + 2aN_d - 2qa^2 = 0.$$

$$\rightarrow N_1 = \frac{1}{a}(2qa^2 - 2aN_d) =$$

$$= 2qa - 2N_d = 2qa - 2\sigma_{ch}A.$$




*Hình 15-3.* Cho ví dụ 15-1

Hệ trở thành biến hình chỉ khi thanh 1 cũng bị chảy dẻo, biến dạng dài của cả hai thanh 1 và 2 trở thành tuỳ ý, góc nghiêng $\alpha$ của dầm không xác định, hệ không giữ được tải trọng, mất hoàn toàn khả năng chịu lực. Do đó, điều kiện xuất hiện trạng thái giới hạn của hệ là:

$$N_1 = \sigma_{ch} A \text{ hoặc } \sigma_{ch} A = 2qa - 2\sigma_{ch}A \rightarrow q_{gh} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ch}A}{a}.$$

Để so sánh hai cách tính, ta lập tỷ số giữa $q_{gh}$ và $q_d$:

$$\frac{q_{gh}}{q_d} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{6}{5} > 1.$$

Trong lời giải trên ta xác định lần lượt và thứ tự các thanh bị chảy dẻo cho tới thời điểm hệ bị biến hình, đạt tới trạng thái giới hạn. Cách giải như vậy gọi là cánh giải đàn hồi. Bài toán còn được giải theo một cách khác, nhanh và gọn hơn, gọi là giải theo phương pháp động. Chẳng hạn trong bài toán đang xét, ta thấy rằng hệ sẽ ở trạng thái giới hạn khi cả hai thanh 1, 2 cùng bị chảy dẻo; lực dọc trong hai thanh đều bằng $N_d$. Lúc này hệ sẽ chuyển thành một cơ cấu, có chuyển động. Phương trình cân bằng, xét ở trạng thái giới hạn trên hình 15-3c, cho ta $\Sigma M_A = aN_d + 2aN_d - 2q_{gh}a^2 = 0$.

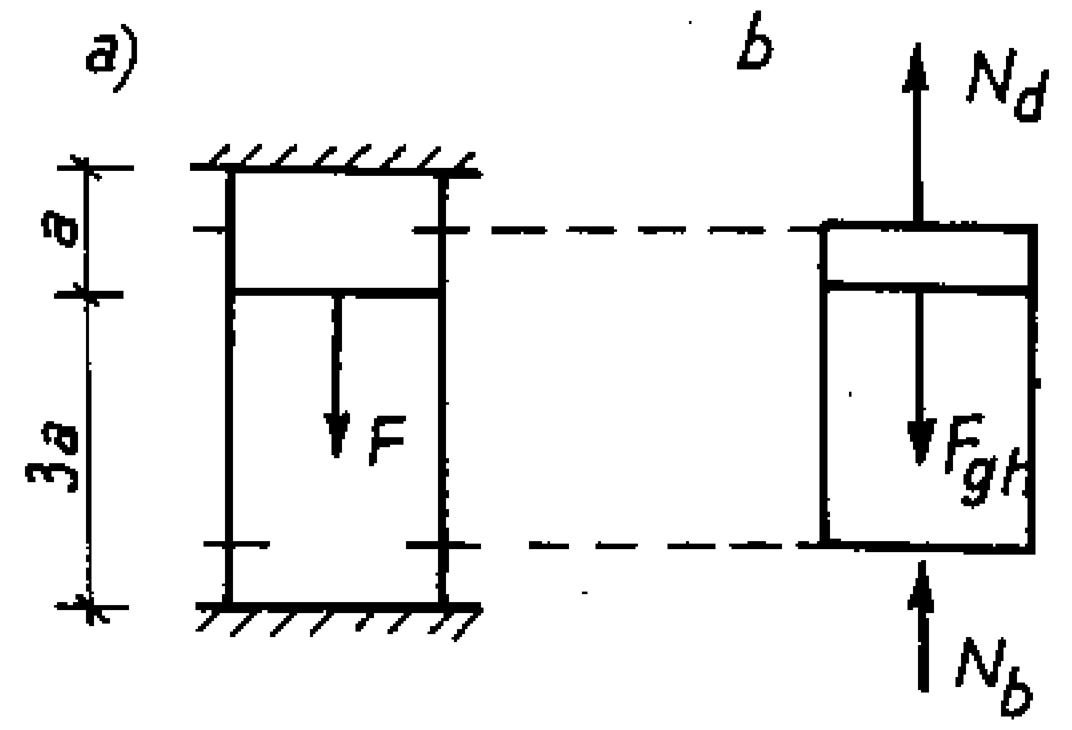
Suy ra: $$q_{gh} = \frac{3}{2}\frac{N_d}{a} = \frac{3}{2}\frac{\sigma_{ch}A}{a}.$$

Ví du 15-2. Kiểm tra bền theo TTGH cho một thanh bị ngàm chặt ở hai đầu, chịu lực $F$ dọc trục như trên hình 15-4a. Cho biết:

$A = 4$ cm$^2$; $F = 85$ kN;

$\sigma_{ch} = 21$ kN/cm$^2$;

$[n] = 1,8$.




Hình 15-4. Cho ví dụ 15-2

Bài giải. Thanh có hai đoạn: đoạn trên chịu kéo và đoạn dưới chịu nén, lực dọc trong từng đoạn là hằng số. Ta giải bài toán theo phương pháp động: nếu chỉ có một đoạn thanh bị chảy dẻo thì điểm đặt lực vẫn được xác định bởi đoạn đàn hồi còn lại, thanh chỉ đạt đến trạng thái giới hạn khi cả đoạn trên và đoạn dưới đều bị chảy dẻo. Bằng phương pháp mặt cắt, xét cân bằng của một phần thanh chứa lực $F$, như chỉ trên hình 15-4b, ta có kết quả:

$$Fgh = 2N_d = 2\sigma_{ch}A = 2.21,4 = 168 \text{ kN}.$$

Hệ số an toàn $n = \frac{F_{gh}}{F} = \frac{168}{85} = 1,97 > [n] = 1,8$.

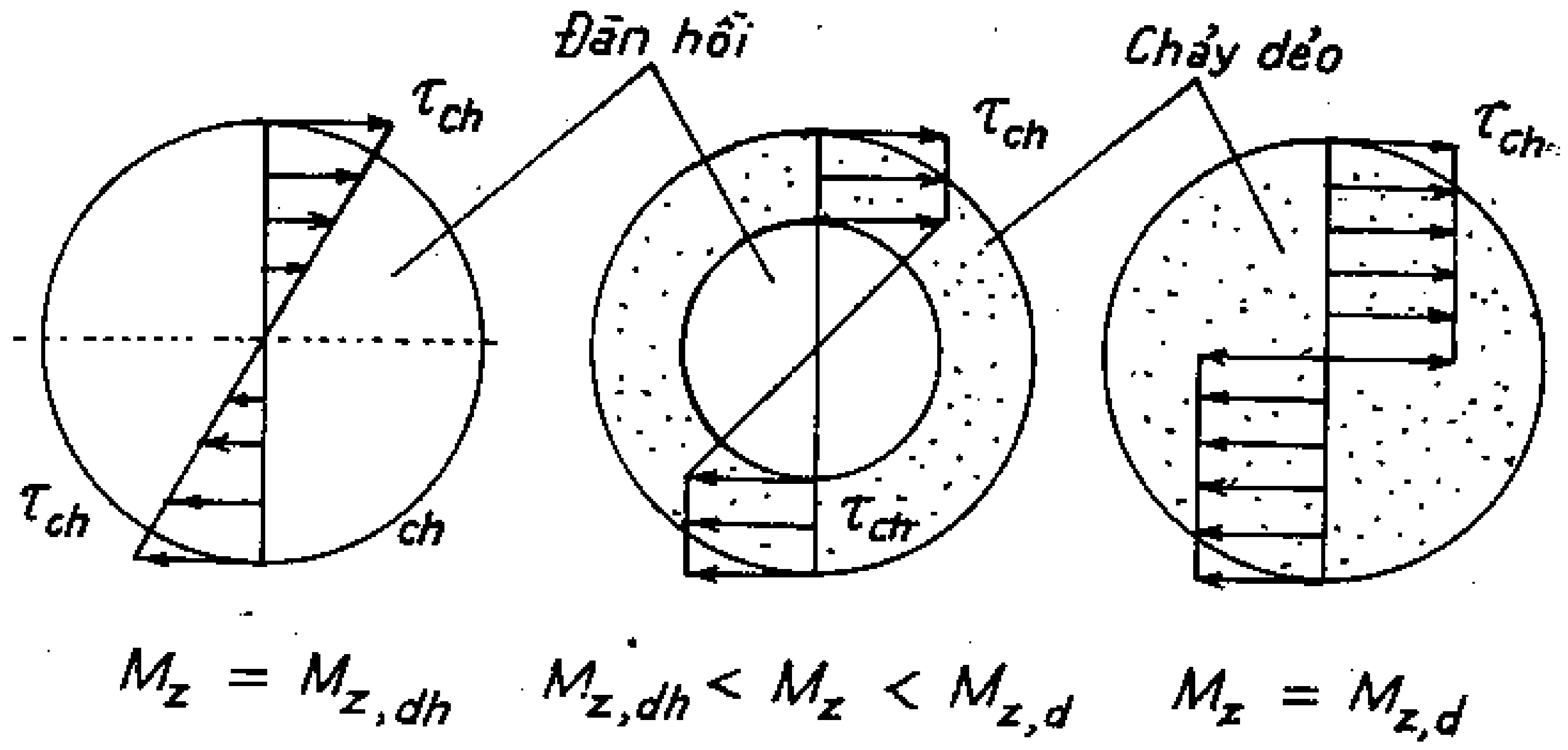
Thanh đảm bảo điều kiện bền theo TTGH.

## 15-3. THANH TIẾT DIỆN TRÒN CHỊU XOẮN

Trong giai đoạn đầu, thanh làm việc hoàn toàn đàn hồi, biểu đồ ứng suất tiếp theo đường kính tiết diện là đường bậc nhất, đạt giá trị lớn nhất trên chu vi:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p}.$$

Giai đoạn đàn hồi kết thúc khi $\tau_{max}$ đạt trị số $\tau_{ch}$. Tương ứng, ta có mômen xoắn đàn hồi $M_{z,dh} = \tau_{ch} W_P$. Với cách tính theo ƯSCP thì đến đây thanh bị phá hoại, nhưng trên thực tế thì thanh vẫn chịu được mômen xoắn, mômen vẫn có thể tăng thêm $M_z > M_{z,dh}$. Khi này ứng suất tại các điểm trên chu vi, đã đạt giới hạn chảy, sẽ không tăng thêm; ứng suất tại những điểm bên trong, chưa đạt giới hạn chảy, sẽ tăng lên tới $\tau_{ch}$ và bị biến dạng dẻo; miền chảy dẻo lan dần vào trong cho tới khi tiết diện bị chảy dẻo hoàn toàn, khi này thanh đạt tới trạng thái giới hạn, mất hoàn toàn khả năng chịu lực. Quá trình phát triển của ứng suất và biến dạng được trình bày trên hình 15-5.




*Hình 15-5.* Sự phát triển biến dạng dẻo khi xoắn

Trị số của mômen xoắn tương ứng ở trạng thái giới hạn, gọi là *mômen xoắn dẻo*, sẽ bằng:

$$M_{z,d} = \int_A \tau\rho\, dA = \tau_{ch} \int_0^{D/2} \rho\,(2\pi\rho\, d\rho) = \tau_{ch} \frac{\pi D^3}{12}.$$

Gọi $W_{P,d} = \dfrac{\pi D^3}{12} \approx 0{,}2667 D^3$ là *mômen chống xoắn dẻo* của tiết diện tròn, ta có biểu thức của mômen xoắn dẻo $M_{z,d} = \tau_{ch}\, W_{P,d}$.

Hiệu quả của cách tính theo TTGH so với cách tính theo ƯSCP thể hiện qua tỷ số của hai mômen phá hỏng:

$$k = \frac{M_{z,d}}{M_{z,dh}} = \frac{W_{P,d}}{W_P} = \frac{0{,}2667 D^3}{0{,}2D^3} = 1{,}3333.$$

## 15-4. THANH CHỊU UỐN THUẦN TUÝ

Thanh chịu uốn thuần túy khi mômen uốn là hằng số dọc theo chiều dài thanh.

Trong giai đoạn đàn hồi, ứng suất pháp phân bố bậc nhất theo chiều cao tiết diện, bằng không tại trục trung hoà $x$, là trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, và đạt trị số lớn nhất tại mép xa đường trung hoà nhất

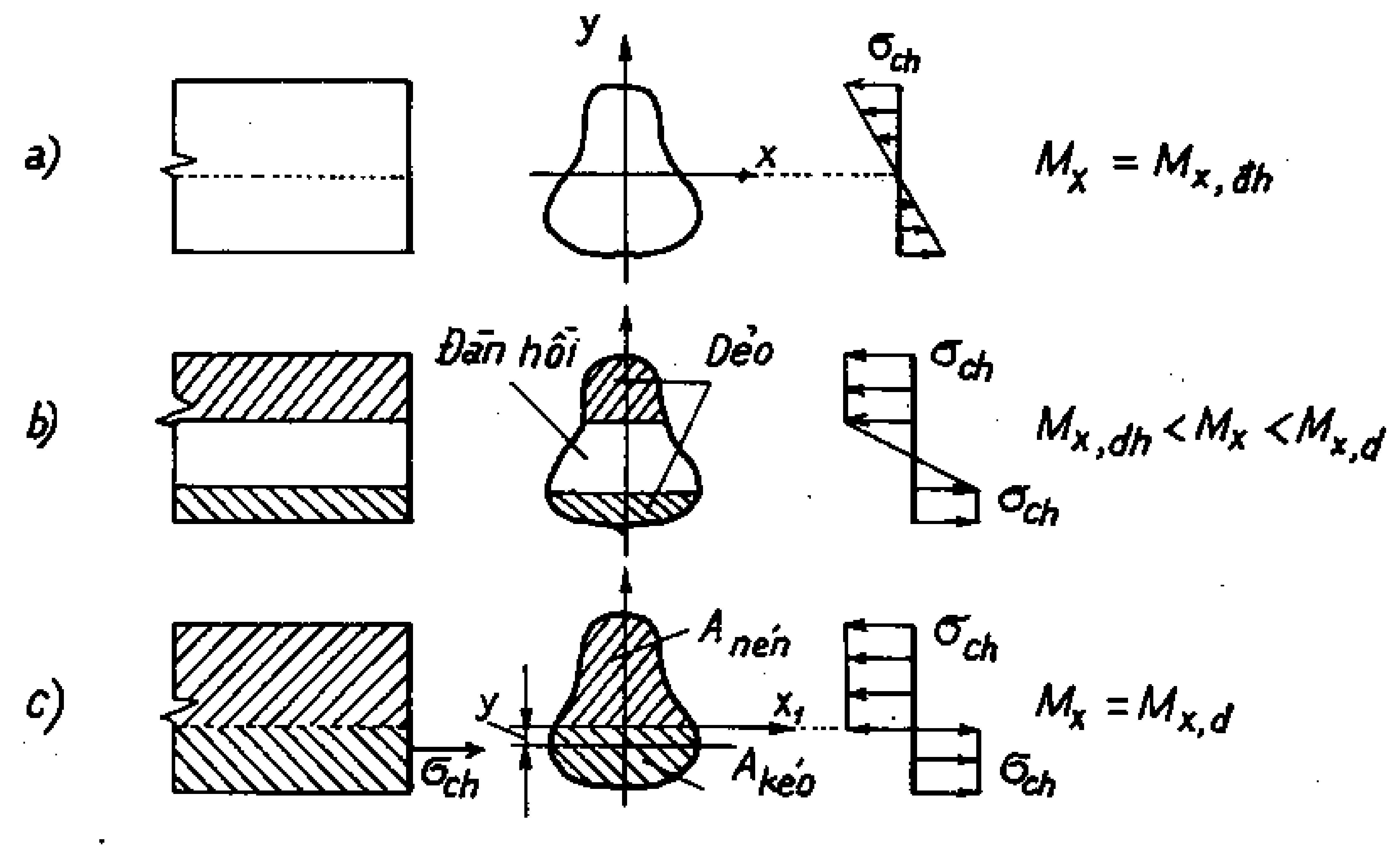
$$|\sigma|_{max} = \frac{M_x}{I_x}|y|_{max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Độ cong của thanh được xác định theo biểu thức $\dfrac{1}{\rho} = \left|\dfrac{M_x}{EI_x}\right|$.

Giai đoạn làm việc đàn hồi kết thúc khi ở mép tiết diện ứng suất đạt giá trị $\sigma_{ch}$, mômen uốn đạt trị số mômen đàn hồi $M_{x,dh} = \sigma_{ch} W_x$.

Khi mép tiết diện bị chảy dẻo, thanh vẫn chịu được mômen uốn lớn hơn trị số $M_{x,dh}$. Ứng suất pháp tại các điểm trên mép tiết diện, đã đạt giới hạn chảy sẽ không tăng thêm. Ứng suất tại những điểm bên trong, chưa đạt giới hạn chảy, tăng lên tới $\sigma_{ch}$ và tại những điểm này sẽ có biến dạng dẻo. Miền chảy dẻo lan dần vào trong; độ cong của thanh tính theo biểu thức, như trong giai đoạn đàn hồi, bằng $\frac{1}{\rho}=\frac{M_{max}}{EI_{x,dh}}$, với $I_{x,dh}$ là mômen quán tính chính trung tâm của phần tiết diện vẫn còn ở trạng thái đàn hồi. Nếu tiết diện còn chưa chảy dẻo hoàn toàn thì $I_{x,dh} > 0$, độ cong của thanh và mặt phẳng của mômen uốn vẫn còn xác định, thanh chưa ở trạng thái giới hạn.

Chỉ khi tiết diện bị chảy dẻo hoàn toàn, miền đàn hồi bị triệt tiêu, mômen quán tính của phần diện tích đàn hồi bằng không, độ cong của thanh trở thành vô cùng, thanh mới mất hoàn toàn khả năng chịu lực, đạt tới trạng thái giới hạn. Ở trạng thái giới hạn, ứng suất trên tiết diện đều đạt giá trị $\sigma_{ch}$, một phần tiết diện $A_k$ chịu kéo, một phần tiết diện $A_n$ chịu nén. Đường phân cách hai miền kéo và nén là trục $x_1$, gọi là *đường trung hoà chảy dẻo*. Vị trí của trục $x_1$, nói chung, không trùng với trục trung hoà đàn hồi $x$. Quá trình phát triển của ứng suất và biến dạng được trình bày trên hình 15-6. Hình 15-6a biểu diễn trạng thái kết thúc của sự làm việc đàn hồi, mômen uốn tương ứng bằng giá trị $M_{x,dh}$. Hình 15-6c biểu diễn trạng thái giới hạn, khi toàn bộ thanh bị chảy dẻo, mômen uốn tương ứng bằng $M_{x,d}$. Hình 15-6b biểu diễn trạng thái trung gian, khi $M_{x,dh}<M_x<M_{x,d}$, trên thanh tồn tại cả phần đàn hồi và cả phần chảy dẻo.




*Hình 15-6.* Sự phát triển miền dẻo trên thanh chịu uốn

Trị số của mômen uốn tương ứng ở trạng thái giới hạn, gọi là *mômen uốn dẻo*, sẽ bằng mômen của các ứng suất:

$$M_{x,d} = \int_A y\sigma\rho\, dA = \int_{A_k} y\sigma_{ch} dA + \int_{A_n} y\sigma_{ch} dA = \sigma_{ch}\left(\int_{A_k} ydA + \int_{A_n} ydA\right)$$

Biểu thức tích phân trong dấu ngoặc chính là tổng giá trị tuyệt đối các mômen tĩnh đối với trục trung hoà của phần diện tích chịu kéo và phần diện tích chịu nén. Ta ký hiệu đại lượng này là $W_{x,d}$ và gọi là *mômen chống uốn dẻo* của tiết diện

$$W_{x,d} = \left|S_{x_I}^{(k)}\right| + \left|S_{x_I}^{(n)}\right|.$$

Khi đó, mômen uốn chảy dẻo sẽ là: $M_{x,d} = \sigma_{ch}.W_{x,d}$.

Vị trí trục trung hoà $x_I$ khi uốn được xác định theo điều kiện: lực dọc, hoặc tổng hình chiếu dọc trục thanh của các ứng suất, bằng không.

$$N = \int_A \sigma dA = \int_{A_k} \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} -\sigma_{ch} dA = \sigma_{ch}\left(\int_{Ak} dA - \int_{A_n} dA\right) = 0.$$

Suy ra: $A_k = A_n$.

Kết quả cho thấy: đường trung hoà chảy dẻo $x_I$ là đường vuông góc với mặt phẳng uốn và chia đôi diện tích tiết diện. Trục $x_I$ chỉ trùng với trục trung tâm $x$ khi tiết diện đối xứng qua trục $x$, chẳng hạn hình chữ nhật, hình tròn, hình I... Dưới đây ta tìm mômen chống uốn dẻo cho các tiết diện nêu trên:

♦ *Tiết diện chữ nhật $b \times h$*: $\left|S_{x_I}^{(k)}\right| = \left|S_{x_I}^{(n)}\right| = \frac{bh}{2}.\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$; $\quad W_{x,d} = \frac{bh^2}{4}$.

$$\alpha = \frac{W_{x,d}}{W_x} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

♦ *Tiết diện hình tròn*: $\left|S_{x_I}^{(k)}\right| = \left|S_{x_I}^{(n)}\right| = \frac{\pi D^2}{8}.\frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12}$; $\quad W_{x,d} = \frac{D^3}{6}$.

$$\alpha = \frac{W_{x,d}}{W_x} = \frac{D^3/6}{\pi D^2/32} \approx \frac{5}{3}.$$

♦ *Tiết diện thép định hình* I, U: tìm $S_x$ theo số hiệu thép trong bảng thép định hình (phụ lục I), trị số trung bình của hệ số $\alpha$ là $1{,}15$.

***Ví dụ 15-3.*** Xác định trị số giới hạn và trị số cho phép của mômen $M$ tác động trên côngxôn có tiết diện cho trên hình 15-7. Cho biết $\sigma_{ch} = 32$ kN/cm², hệ số an toàn $n = 1,85$ , kích thước tiết diện cho theo cm.

*Bài giải*. Một nửa diện tích tiết diện:

$A/2 = (1.4+6.1)/2 = 5$ cm$^2$.

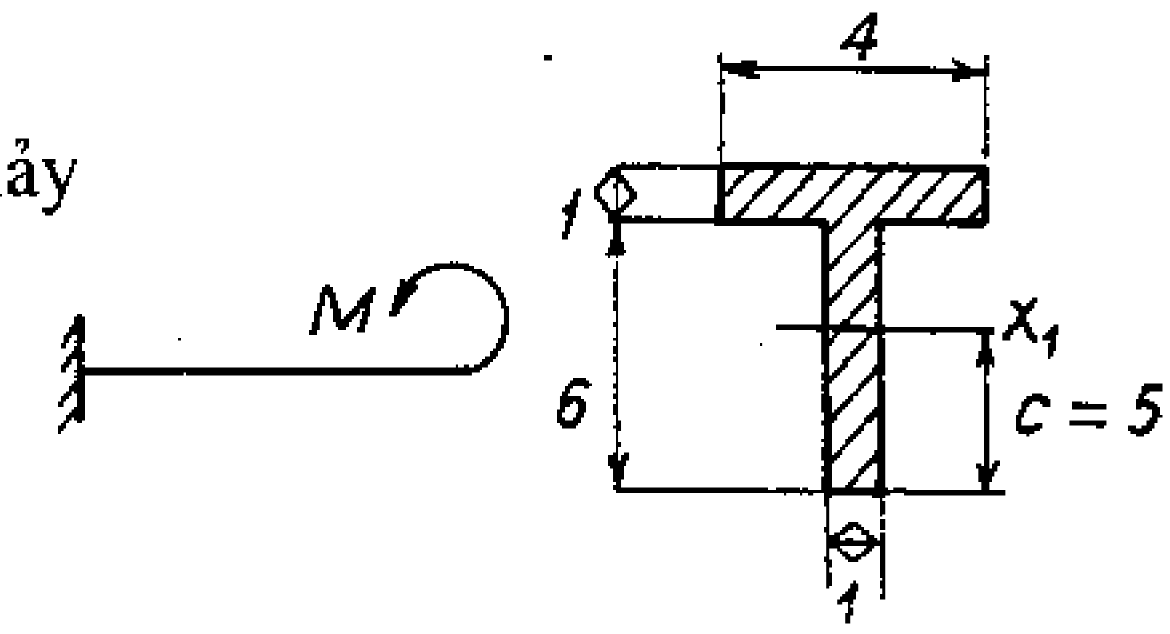
Toạ độ của đường trung hoà chảy dẻo: $c = 5/1 = 5$ cm.

Mômen chống uốn dẻo:

$$W_{x.d} = \left|S_{x_1}^{(k)}\right| + \left|S_{x_1}^{(n)}\right| =$$

$$= 5.1.2,5+1.1.0,5+4.1.1,5 =$$

$$= 19 \text{ cm}^3.$$




*Hình 15-7.* Cho ví dụ 15-3

Mômen ngoại lực giới hạn $M_{gh}$ cũng là trị số của mômen uốn chảy dẻo:

$$M_{gh} = M_{x.d} = \sigma_{ch}.W_{x.d} = 32.19 = 608 \text{ kNcm}.$$

Mômen ngoại lực cho phép: $[M] = M_{gh}/n = 608/1,9 = 320$ kNcm.

## 15-5. THANH CHỊU UỐN NGANG PHẲNG. KHỚP DẺO

Khi thanh chịu uốn ngang phẳng, do có lực cắt $Q$ nên mômen uốn không phải là hằng số và các tiết diện sẽ có mức độ chảy dẻo khác nhau, miền chảy dẻo biến đổi dọc theo chiều dài thanh, khác với trường hợp thanh chịu uốn thuần tuý. Ta hãy xét dầm đơn giản chịu lực tập trung như trên hình vẽ 15-8a. Tại tiết diện đặt lực, mômen uốn đạt giá trị lớn nhất $M_{max} = Fab/(a+b)$. Quá trình hình thành và phát triển biến dạng dẻo khi tăng lực $F$ diễn ra như sau:

*a- Đàn hồi*: Khi $M_{max} = M_{x,dh}$ (hình 15-8b) thì xuất hiện biến dạng dẻo đầu tiên tại mép của tiết diện đặt lực.

*b- Đàn dẻo*: Khi $M_{max} > M_{x,dh}$ thì tại tiết diện đặt lực biến dạng dẻo lan dần vào phía trong, tại các tiết diện lân cận có mômen lớn hơn mômen dẻo thì biến dạng dẻo cũng phát triển vào trong, tiết diện có mômen bằng mômen chảy dẻo thì chỉ có biến dạng dẻo ở mép (hình 15-8c). Tải trọng $F$ tăng và miền chảy dẻo tiếp tục phát triển theo chiều dài và lan vào trong.

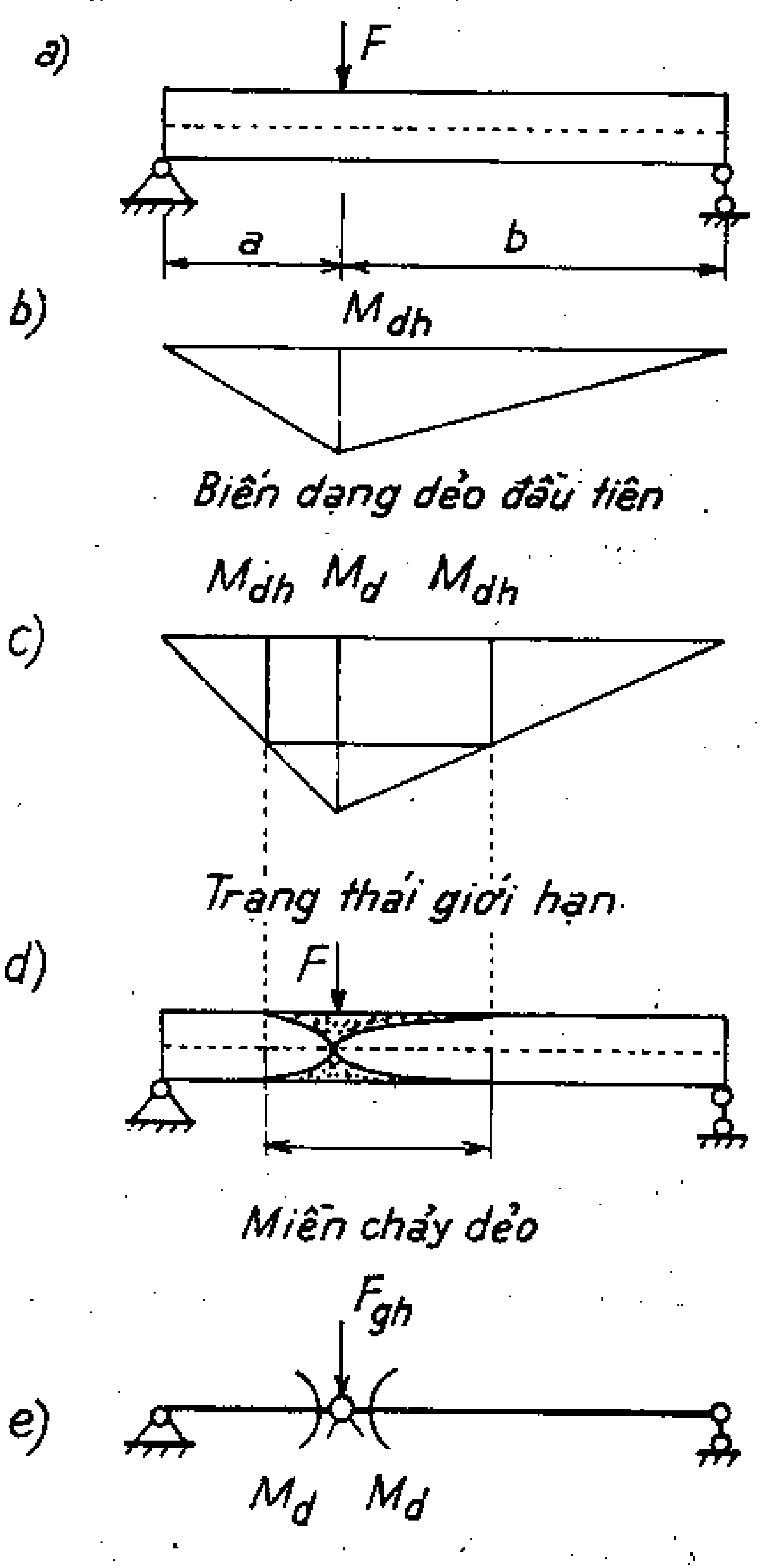
*c- Giới hạn, khớp dẻo*: Tới khi $M_{max} = M_{x,d}$ thì tiết diện đặt lực bị chảy dẻo hoàn toàn, sát cạnh tiết diện này là hai vùng chảy dẻo. Vùng chảy dẻo xảy ra trên một đoạn thanh, ở đó mômen uốn lớn hơn mômen uốn đàn hồi $M_{x,dh}$. Biến dạng ở vùng chảy dẻo là tự do nên ta có thể hình dung rằng: trong mặt phẳng hình vẽ, hai phần thanh đàn hồi phía trái và phía phải được liên kết với nhau chỉ ở một điểm, chúng có thể xoay tương đối với nhau quanh "điểm nối" này như quay quanh một "khớp" (hình 15-8đ).

Như thế, ở trạng thái giới hạn dầm biến thành một cơ cấu, một hệ biến hình vì hình thành một "khớp" tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất (hình 15-8e). Ta gọi "khớp" kiểu này là "khớp dẻo" vì sự làm việc của dầm tại tiết diện chảy dẻo như tại một khớp (hình 15-8d). Tuy nhiên, khớp dẻo khác biệt với "khớp thật" ở những điểm sau:

* tại "khớp thật" của kết cấu, mômen uốn bằng không; còn tại "khớp dẻo"thì mômen uốn khác không và bằng mômen uốn chảy dẻo $M_{x,d}$.

* "khớp thật" có thể chuyển động cả về hai phía theo phương vuông góc với trục (mở cả về hai phía); "khớp dẻo" chỉ chuyển động về phía thớ căng của dầm, hoặc về phía đặt biểu đồ mômen uốn (khớp dẻo chỉ mở về một phía).

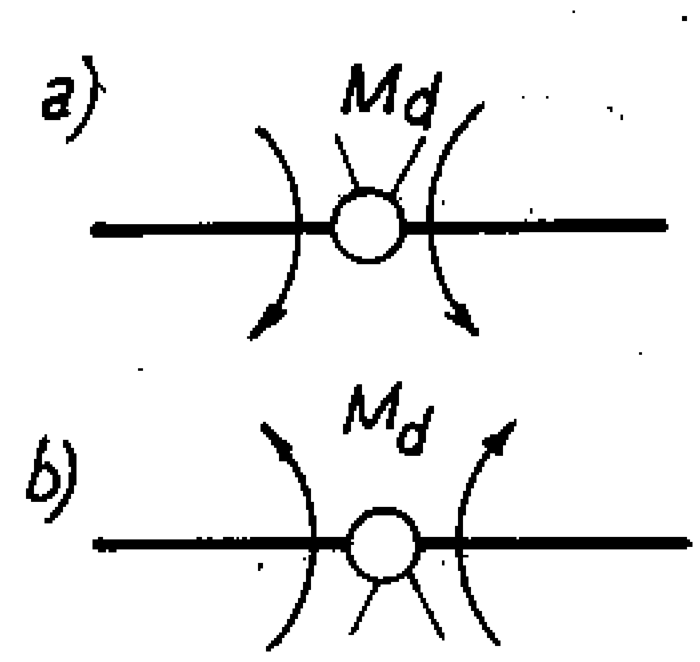
Do đó, cần ký hiệu khớp dẻo kèm theo $M_d$ và chiều mở.




*Hình 12-8.* Sự phát triển miền dẻo trên dầm chịu uốn ngang

Trên hình 12-9a là khớp dẻo mở trên; trên hình 15-9b là khớp dẻo mở dưới.

Đối với hệ thanh tĩnh định chịu uốn thì việc hình thành một khớp dẻo (một tiết diện bị chảy dẻo hoàn toàn) cũng đủ đưa hệ tới trạng thái giới hạn. Còn với hệ thanh $n$ bậc siêu tĩnh chịu uốn thì, ở trạng thái giới hạn, số khớp dẻo tối thiểu sẽ là $1$ và tối đa sẽ là $n+1$.




*Hình 12-9.* Ký hiệu khớp dẻo

Khi tính dầm chịu uốn, ta đã bỏ qua ảnh hưởng ứng suất tiếp tới sự chảy dẻo, điều kiện chảy dẻo chỉ viết theo ứng suất pháp như ở trạng thái ứng suất đơn. Vùng chảy dẻo không có khả năng chịu cắt nên ứng suất tiếp bằng không. Ứng suất tiếp chỉ xuất hiện trên phần đàn hồi của tiết diện và được tính theo công thức Juravski đã biết.

$$\tau = \frac{QS_x^c}{I_x^{dh}.b}$$

$I_x^{dh}$ là mômen quán tính chính trung tâm của phần tiết diện vẫn còn ở trạng thái đàn hồi.

***Ví du 15-3.*** Xác định cường độ giới hạn của tải trọng phân bố đều tác động trên dầm đơn giản có nhịp $l = 3{,}8$ m. Dầm làm từ thép định hình I$N^o18$ có $\sigma_{ch} = 32$ kN/cm$^2$.

*Bài giải.* Từ bảng thép định hình (phụ lục I), mômen tĩnh của một nửa tiết diện I$N^o18$ đối với trục trung hoà $x$ là $S_x = 81{,}4$ cm$^3$.

Mômen chống uốn dẻo: $W_{x,d} = 2.81{,}4 = 162{,}8$ cm$^2$.

Mômen uốn dẻo của tiết diện: $M_{x,d} = \sigma_{ch}.W_{x,d} = 32.162{,}8 = 5209$ kNcm = $= 52{,}09$ kNm.

Mômen uốn lớn nhất trên dầm là $ql^2/8$.

Trị số giới hạn của cường độ tải trọng:

$$q_{gh} = \frac{8}{l^2}M_{x,d} = \frac{8}{3{,}8^2}52{,}09 = 28{,}85 \text{ kN/m}.$$

***Ví du 15-4.*** Xác định kích thước tiết diện chữ nhật của dầm siêu tĩnh cho trên hình 15-10a. Cho biết $F = 25$ kN; $a = 0{,}5m$; $\sigma_{ch} = 26$ kN/cm$^2$; $n = 2$.

*Bài giải*

*a- Cách giải đàn hồi*

Trong cách giải đàn hồi, ta lần lượt xem xét quá trình phát sinh của biến dạng, theo dõi biến dạng dẻo phát triển đến mức độ nào thì kết cấu bị biến hình, mất khả năng chịu lực.

Giai đoạn đầu tiên, dầm làm việc đàn hồi tuyệt đối. Từ điều kiện biến dạng của dầm $y_C = 0$, ta giải hệ siêu tĩnh và vẽ được biểu đồ mômen uốn như trên hình 15-10b. Theo biểu đồ, tại tiết diện ngàm mômen uốn đạt trị số lớn nhất.

Khi lực $F$ tăng, tiết diện ngàm bị chảy dẻo trước tiên và hình thành khớp dẻo đầu tiên. Mômen dẻo $M_{x,d}$ tại khớp có chiều quay làm căng thớ trên của dầm. Dầm làm việc theo sơ đồ tĩnh định như trên hình 15-10c, chịu lực $F$ và mômen $M_{x,d}$; phản lực gối tựa tại $C$ là

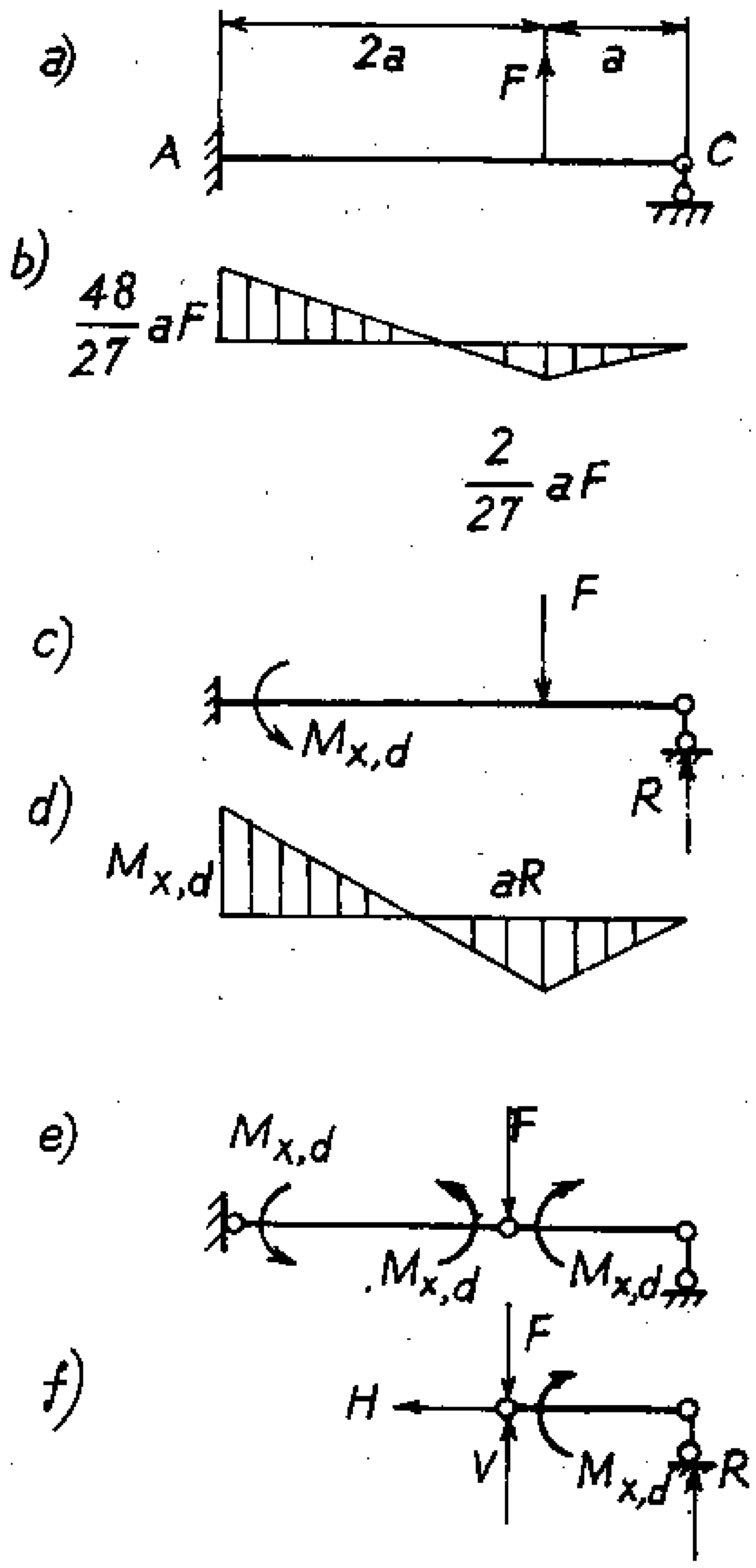
$$R = \frac{2Fa - M_{x,d}}{3a} = \frac{2}{3}F - \frac{M_{x,d}}{3a}$$

Biểu đồ mômen uốn tương ứng của giai đoạn này được trình bày trên hình 15-10d với hai giá trị mômen uốn lớn: tại ngàm và tại tiết diện đặt lực. Tải trọng tiếp tục tăng, mômen uốn tại ngàm đã đạt $M_{x,d}$ sẽ không tăng nữa, mômen tại các tiết diện khác tăng lên.

Mômen uốn tại tiết diện đặt lực bằng: $aR = \frac{2}{3}aF - \frac{M_{x,d}}{3}$ sẽ đạt tới trị số $M_{x,d}$ trước tiên, hình thành thêm một khớp dẻo; dầm làm việc theo sơ đồ hệ biến hình như chỉ trên hình 15-10e và mất khả năng chịu lực. Vậy khi trị số $aR$ bằng $M_{x,d}$ thì dầm ở trạng thái giới hạn. Từ đó, ta xác định được trị số mômen dẻo $M_{x,d}$.

$$aR = \frac{2}{3}aF_{gh} - \frac{M_{x,d}}{3} = M_{x,d}.$$

Suy ra: $F_{gh} = \dfrac{2M_{x,d}}{a}$.




*Hình 15-10.* Cho ví dụ 15-4

Với tiết diện chữ nhật $h = 2b$ thì mômen chống uốn dẻo $W_{x,d} = \dfrac{bh^2}{4} = \dfrac{h^3}{8}$.

Điều kiện bền, có kể đến hệ số an toàn là $nF \le F_{gh} = \dfrac{2\sigma_{ch}W_{x,d}}{a} = \dfrac{2\sigma_{ch}h^3}{8a}$.

Từ đó: $h^3 \ge \dfrac{4naF}{\sigma_{ch}} \rightarrow h^3 \ge \dfrac{4.2.50.25}{26} = 384,6$ cm³. Chọn $h = 7,4$ cm.

Nếu ta đặt $\sigma_{ch}/n = [\sigma]$ thì điều kiện bền ở trên có thể viết theo ứng suất cho phép là:

$$F \le [F] = \frac{2[\sigma]W_{x,d}}{a} \rightarrow h^3 \ge \frac{4aF}{[\sigma]}.$$

*b- Cách giải theo nhận xét (phương pháp động học).*

Trong bài toán đang xét, ta có thể thấy nếu chỉ có một khớp dẻo thì hệ vẫn chưa biến hình; nếu có hai khớp dẻo mở theo hai chiều khác nhau thì hệ sẽ biến hình. Như vậy, dầm đạt tới trạng thái giới hạn khi hình thành hai khớp dẻo mở theo hai chiều khác nhau. Hai khớp dẻo này chỉ có thể xảy ra tại tiết diện có mômen uốn lớn nhất và ngược chiều thớ căng. Trong trường hợp đang xét, không có lực phân bố, biểu đồ mômen chỉ là những đường bậc nhất, thì hai tiết diện đó chắc chắn là tại ngàm và tại nơi đặt lực tập trung. Sơ đồ của dầm ở trạng thái giới hạn như trên hình 15-10e, mômen uốn tại ngàm làm căng thớ trên, mômen uốn tại tiết diện đặt lực làm căng thớ dưới. Bằng việc xét cân bằng của dầm, ta có thể xác định được lực giới hạn. Sơ đồ cho ta hình ảnh về sự chuyển động khả dĩ của hệ ở trạng thái giới hạn, vì thế cách giải theo nhận xét, dựa trên sơ đồ động này, cũng còn được gọi là phương pháp động học.

Tách khớp, xét cân bằng của phần phải như trên hình 15-10g, ta có:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad R = \frac{M_{x,d}}{a}.$$

Xét cân bằng chung toàn hệ (hình 15-10e), ta có:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad 3a\,R - 2a\,F_{gh} + M_{x,d} = 0\ ;$$

$$\rightarrow\ 3\,M_{x,d} - 2a\,F_{gh} + M_{x,d} = 0\ ; \qquad \rightarrow F_{gh} = \frac{2M_{x,d}}{a} = \frac{2\sigma_{ch}W_{x,d}}{a}.$$

Kết quả nhận được theo cách giải này trùng với kết quả theo cách giải đàn hồi. Lời giải theo phương pháp động học tỏ ra ngắn gọn hơn. Trong trường hợp số tiết diện có khả năng bị chảy dẻo lớn hơn số khớp dẻo tối đa, chẳng hạn trên dầm có nhiều lực tập trung, thì cần tổ hợp các khả năng hình thành trạng thái giới hạn thành nhiều phương án, phương án nào cho lực giới hạn nhỏ nhất sẽ là trường hợp xảy ra thực. Để sử dụng phương pháp giải này cần phải biết chắc chắn vị trí của khớp dẻo sẽ hình thành, chiều mở của các khớp dẻo hoặc chiều của mômen uốn dẻo tại các khớp. Trong một số bài toán, vị trí tiết diện có mômen lớn nhất sẽ di chuyển trong quá trình hình thành các khớp dẻo, chẳng hạn trường hợp dầm chịu tải trọng phân bố. Khi đó, không thể dùng cách giải theo nhận xét được.

## CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

15- 1. Nêu ưu điểm và điểm hạn chế của việc đánh giá độ bền kết cấu theo ƯSCP.

15- 2. Nêu tính chất của vật liệu tuân theo sơ đồ Prandtl.

15- 3. Cách đánh giá độ bền kết cấu theo trạng thái giới hạn có những ưu điểm nào, những hạn chế nào?

15- 4. Giải thích thế nào là trạng thái giới hạn chịu lực của hệ kết cấu, thế nào là tải trọng giới hạn? Tải trọng giới hạn sẽ phụ thuộc những yếu tố nào?

15- 5. Vì sao có thể nói: trong quan điểm tính theo TTGH cho phép kết cấu có biến dạng, chuyển vị lớn?

15- 6. Độ dãn dài của thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm sẽ là bao nhiêu, khi ứng suất tại một điểm trên tiết diện đã đạt tới trị số $\sigma_{ch}$ ?

15- 7. Đối với hệ thanh chịu kéo nén đúng tâm thì tính độ bền theo ƯSCP và theo TTGH khi nào cho cùng một kết quả, khi nào cho kết quả khác nhau?

15- 8. Giải thích vì sao biến dạng dẻo trên tiết diện tròn chịu xoắn lại lan dần từ chu vi vào trọng tâm của tiết diện?

15- 9. Hình dạng miền chảy dẻo trên thanh chịu uốn thuần túy khác biệt gì hình dạng miền chảy dẻo trên thanh chịu uốn ngang phẳng?

15-10. Giải thích sự hình thành "khớp dẻo" trên thanh chịu uốn ngang phẳng.

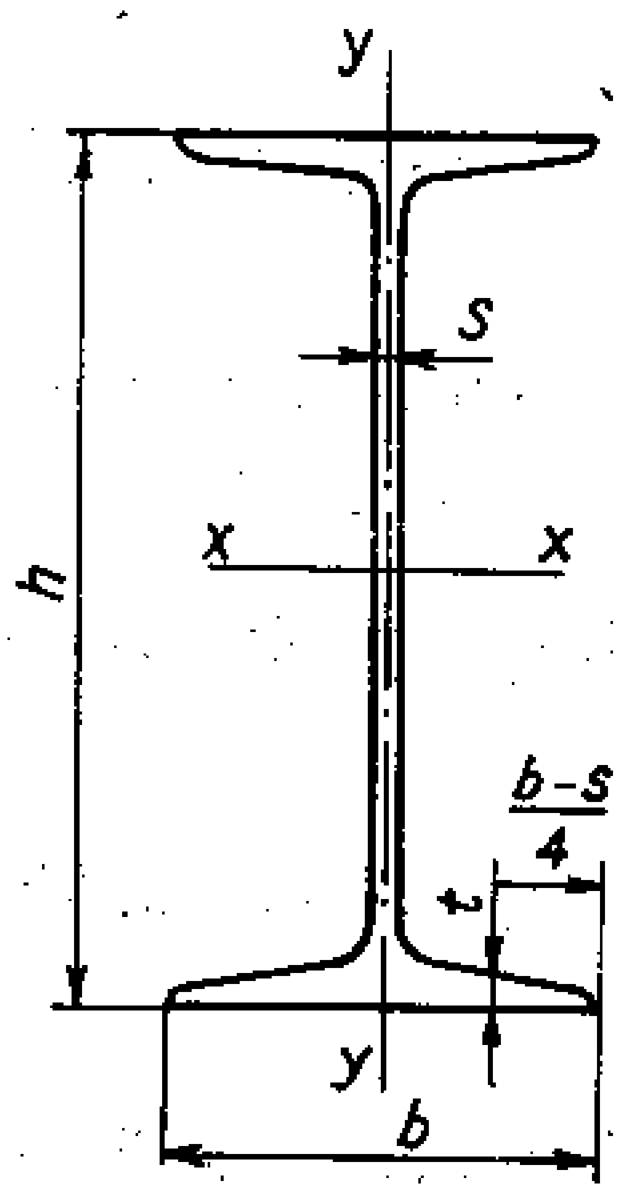
15-11. Nêu những điểm giống và khác nhau giữa "khớp thực" với "khớp dẻo".

15-12. Nêu nội dung cách giải bài toán tìm tải trọng giới hạn theo "phương pháp động học". Điều kiện để có thể thực hiện có kết quả cách giải này?

15-13. Giải thích sự phân phối lại nội lực trong hệ kết cấu khi hệ kết cấu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi.

# Phụ lục I

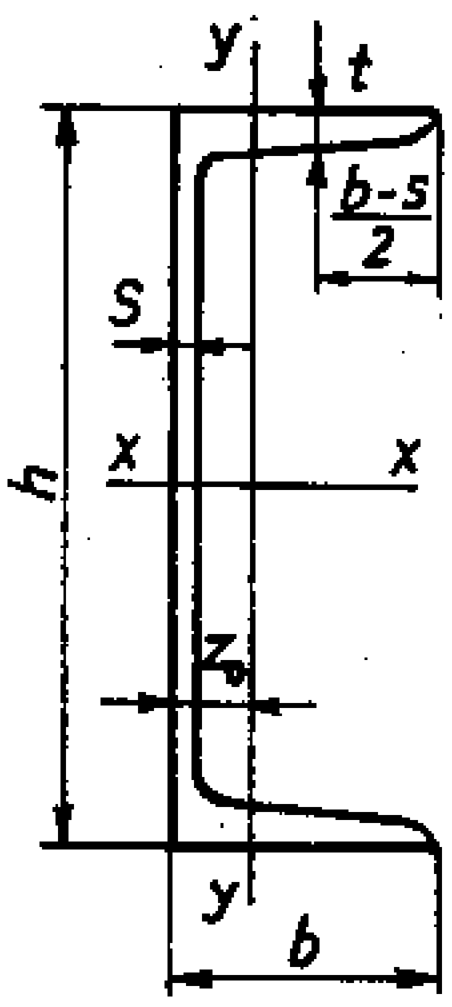
## I-1. THÉP HÌNH I CÁN NÓNG (theo ГОСТ 8239-89)




*h* - chiều cao tiết diện;
*b* - chiều rộng của cánh;
*s* - bề dày của thân;
*t* - chiều dày cánh;
*A* - diện tích tiết diện;
*I* - mômen quán tính;
*W* - mômen chống uốn;
*S* - mômen tĩnh của nửa tiết diện;
*r* - bán kính quán tính;
*m* - khối lượng trên một mét dài.

| Nº | *m* kg/m | Kích thước, mm | | | | *A* cm$^2$ | $I_x$ cm$^4$ | $W_x$ cm$^3$ | $r_x$ cm | $S_x$ cm$^3$ | $I_y$ cm$^4$ | $W_y$ cm$^3$ | $r_y$ cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *h* | *b* | *s* | *t* | | | | | | | | |
| 10 | 9,46 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12 | 198 | 39,7 | 4,06 | 23 | 17,9 | 6,49 | 1,22 |
| 12 | 11,5 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 |
| 14 | 13,7 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 17,4 | 572 | 31,7 | 5,73 | 46,8 | 41,9 | 11,5 | 1,55 |
| 16 | 15,9 | 160 | 81 | 5 | 7,8 | 20,2 | 873 | 109 | 6,57 | 62,3 | 58,6 | 14,5 | 1,7 |
| 18 | 18,4 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 23,4 | 1290 | 143 | 7,42 | 81,4 | 82,6 | 18,4 | 1,88 |
| 20 | 21 | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 26,8 | 1840 | 184 | 8,28 | 104 | 115 | 23,1 | 2,07 |
| 22 | 24 | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 30,6 | 2550 | 232 | 9,13 | 131 | 157 | 28,6 | 2,27 |
| 24 | 27,3 | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 34,8 | 3460 | 289 | 9,97 | 163 | 198 | 34,5 | 2,37 |
| 27 | 31,5 | 270 | 125 | 6 | 9,8 | 40,2 | 5010 | 371 | 11,2 | 210 | 260 | 41,5 | 2,54 |
| 30 | 36,5 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5 | 7080 | 472 | 12,3 | 268 | 337 | 49,9 | 2,69 |
| 33 | 42,2 | 330 | 140 | 7 | 11,2 | 53,8 | 9840 | 597 | 13,5 | 339 | 419 | 59,9 | 2,79 |
| 36 | 48,6 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9 | 13380 | 743 | 14,7 | 423 | 516 | 71,1 | 2,89 |
| 40 | 57 | 400 | 155 | 8,3 | 13,0 | 72,6 | 19062 | 953 | 16.2 | 545 | 667 | 86,1 | 3,03 |
| 45 | 66,5 | 450 | 160 | 9 | 14,2 | 84,7 | 27696 | 1231 | 18,1 | 708 | 808 | 101 | 3,09 |
| 50 | 78,5 | 500 | 170 | 10 | 15,2 | 100 | 39727 | 1589 | 19,9 | 919 | 1043 | 123 | 3,23 |
| 55 | 92,6 | 550 | 180 | 11 | 16,5 | 118 | 55962 | 2035 | 21,8 | 1181 | 1356 | 151 | 3,39 |
| 60 | 108 | 600 | 190 | 12 | 17,8 | 138 | 76806 | 2560 | 23,6 | 1491 | 1725 | 182 | 3,54 |

# I-2. THÉP HÌNH U CÁN NÓNG (theo ГОСТ 8239-89)

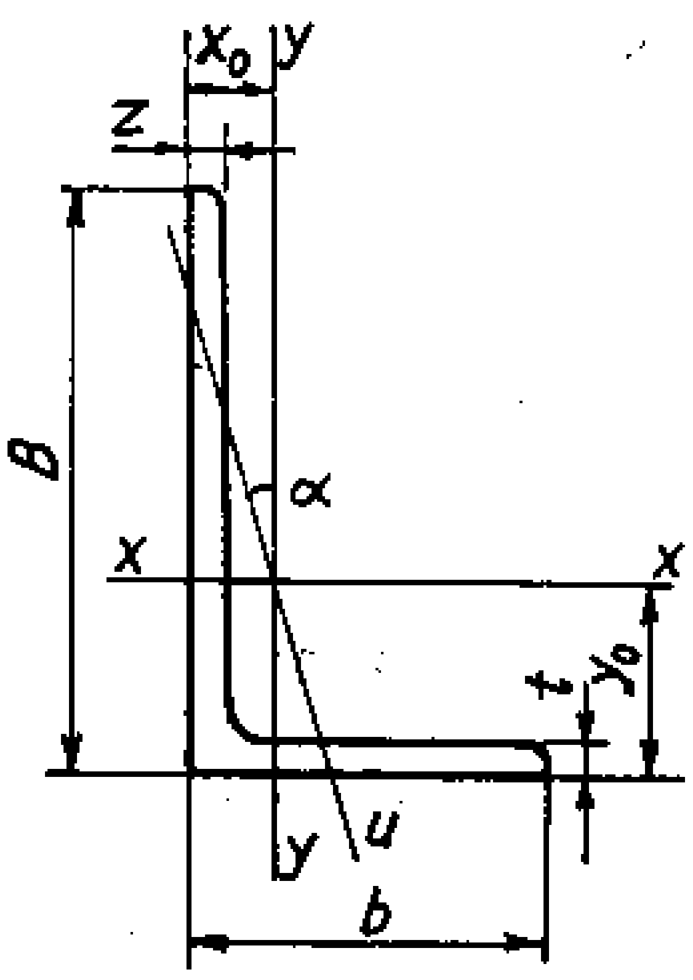



$h$ - chiều cao tiết diện; $I$ - mômen quán tính;
$b$ - chiều rộng của cánh; $W$ - mômen chống uốn;
$s$ - bề dày của thân; $S$ - mômen tĩnh của nửa tiết diện;
$t$ - chiều dày cánh; $r$ - bán kính quán tính;
$A$ - diện tích tiết diện; $m$ - khối lượng trên một mét dài.
$z_0$ - khoảng cách từ trục y đến mép ngoài của thân.

| Nº | $m$ kg/m | Kích thước, mm | | | | $A$ $cm^2$ | $I_x$ $cm^4$ | $W_x$ $cm^3$ | $r_x$ cm | $S_x$ $cm^3$ | $I_y$ $cm^4$ | $W_y$ $cm^3$ | $r_y$ cm | $z_0$ cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $h$ | $b$ | $s$ | $t$ | | | | | | | | | |
| **5** | 4,84 | 50 | 32 | 4,4 | 7 | 6,16 | 22,8 | 9,1 | 1,92 | 5,59 | 5,61 | 2,75 | 0,95 | 1,16 |
| **6,5** | 5,9 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 7,51 | 48,6 | 15 | 2,54 | 9 | 8,7 | 3,68 | 1,08 | 1,24 |
| **8** | 7,05 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 8,98 | 89,4 | 22,4 | 3,16 | 13,3 | 12,8 | 4,75 | 1,19 | 1,31 |
| **10** | 8,59 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 10,9 | 174 | 34,8 | 3,99 | 20,4 | 20,4 | 6,46 | 1,37 | 1,44 |
| **12** | 10,4 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 13,3 | 304 | 50,6 | 4,78 | 29,6 | 31,2 | 8,52 | 1,53 | 1,54 |
| **14** | 12,3 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 15,6 | 491 | 70,2 | 5,6 | 40,8 | 45,4 | 11 | 1,7 | 1,67 |
| **16** | 14,2 | 160 | 64 | 5 | 8,4 | 18,1 | 747 | 93,4 | 6,42 | 54,1 | 63,3 | 13,8 | 1,87 | 1,8 |
| **16a** | 15,3 | 160 | 68 | 5 | 9 | 19,5 | 823 | 103 | 6,49 | 59,4 | 78,8 | 16,4 | 2,01 | 2 |
| **18** | 16,3 | 180 | 70 | 5,1 | 8,7 | 20,7 | 1090 | 121 | 7,24 | 69,8 | 86 | 17 | 2,04 | 1,94 |
| **18a** | 17,4 | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 22,2 | 1190 | 132 | 7,32 | 76,1 | 105 | 20 | 2,18 | 2,13 |
| **20** | 18,4 | 200 | 76 | 5,2 | 9 | 23,4 | 1520 | 152 | 8,07 | 87,8 | 113 | 20,5 | 2,2 | 2,07 |
| **22** | 21 | 220 | 82 | 5,4 | 9,5 | 26,7 | 2110 | 192 | 8,89 | 110 | 151 | 25,1 | 2,37 | 2,21 |
| **24** | 24 | 240 | 90 | 5,6 | 10 | 30,6 | 2900 | 242 | 9,73 | 139 | 208 | 31,6 | 2,6 | 2,42 |
| **27** | 27,7 | 270 | 95 | 6 | 10,5 | 35,2 | 4160 | 308 | 10,9 | 178 | 262 | 37,3 | 2,73 | 2,47 |
| **30** | 31,8 | 300 | 100 | 6,5 | 11 | 40,5 | 5810 | 387 | 12 | 224 | 327 | 43,6 | 2,84 | 2,52 |
| **33** | 36,5 | 330 | 105 | 7 | 11,7 | 46,5 | 7980 | 484 | 13,1 | 281 | 410 | 51,8 | 2,97 | 2,59 |
| **36** | 41,9 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,4 | 10820 | 601 | 14,2 | 350 | 513 | 61,7 | 3,1 | 2,68 |
| **40** | 48,3 | 400 | 115 | 8 | 13,5 | 61,5 | 15220 | 761 | 15,7 | 444 | 642 | 73,4 | 3,23 | 2,70 |

# I-3. THÉP GÓC KHÔNG ĐỀU CẠNH CÁN NÓNG

(theo ГОСТ 8239-89)



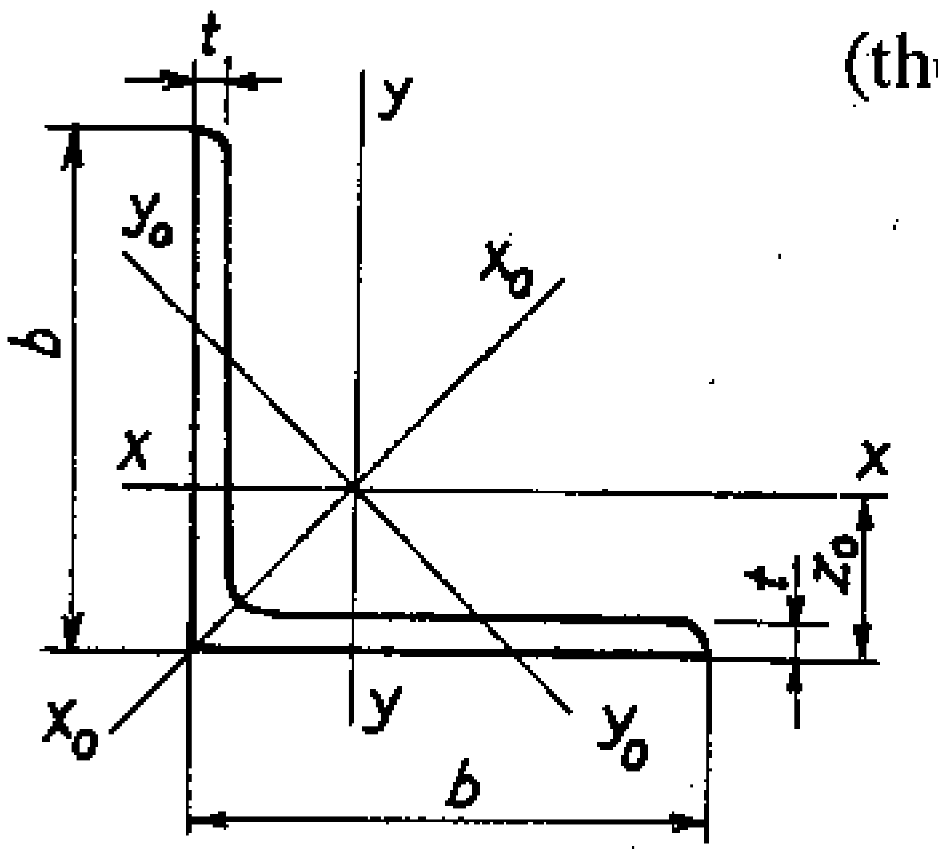

*B* - chiều rộng cánh lớn;
*b* - chiều rộng cánh nhỏ;
*t* - bề dày cánh;
*r* - bán kính quán tính;
$x_o$, $y_o$ - khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh;
$\alpha$ - góc nghiêng của trục chính trung tâm.

*I* - mômen quán tính;
*A* - diện tích tiết diện;
$I_{xy}$ - mômen quán tính ly tâm;
*m* - khối lượng trên một mét dài;

| N° | m kg/m | Kích thước, mm | | | A cm² | $I_x$ cm⁴ | $r_x$ cm | $I_y$ cm⁴ | $r_y$ cm | $I_{u\,min}$ cm⁴ | $r_{u\,min}$ cm | tgα | $\lvert I_{xy} \rvert$ cm⁴ | $x_0$ cm | $y_0$ cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | b | t | | | | | | | | | | | |
| **5 / 3,2** | 2,4 | 50 | 32 | 4 | 3,17 | 7,98 | 1,59 | 2,56 | 0,90 | 1,52 | 0,69 | 0,401 | 2,59 | 0,76 | 1,65 |
| **7,5 / 5** | 4,79 | 75 | 50 | 5 | 6,11 | 34,8 | 2,39 | 12,5 | 1,43 | 7,24 | 1,09 | 0,436 | 12 | 1,17 | 2,39 |
| **9 / 5,6** | 6,7 | 90 | 56 | 6 | 8,54 | 70,6 | 2,88 | 21,2 | 1,58 | 12,7 | 1,22 | 0,384 | 22,5 | 1,28 | 2,95 |
| **10 / 6,3** | 7,53 | 100 | 63 | 6 | 9,58 | 98,3 | 3,2 | 30,6 | 1,79 | 18,2 | 1,38 | 0,393 | 31,5 | 1,42 | 3,23 |
| | 8,7 | | | 7 | 11,1 | 113 | 3,19 | 35 | 1,78 | 20,8 | 1,37 | 0,392 | 36,1 | 1,46 | 3,28 |
| | 9,87 | | | 8 | 12,6 | 127 | 3,18 | 39,2 | 1,77 | 23,4 | 1,36 | 0,391 | 40,5 | 1,5 | 3,32 |
| **11 / 7** | 10,9 | 110 | 70 | 8 | 13,9 | 172 | 3,51 | 54,6 | 1,98 | 32,3 | 1,52 | 0,4 | 55,9 | 1,64 | 3,61 |
| **12,5 / 8** | 11 | 125 | 80 | 7 | 14,1 | 227 | 4,01 | 73,7 | 2,29 | 43,4 | 1,76 | 0,407 | 74,7 | 1,8 | 4,01 |
| | 12,6 | | | 8 | 16 | 256 | 4 | 83 | 2,28 | 48,8 | 1,75 | 0,406 | 84,1 | 1,84 | 4,05 |
| | 15,5 | | | 10 | 19,7 | 312 | 3,98 | 100 | 2,26 | 59,3 | 1,74 | 0,404 | 102 | 1,92 | 4,14 |
| **14 / 9** | 14,1 | 140 | 90 | 8 | 18 | 364 | 4,49 | 120 | 2,58 | 70,3 | 1,98 | 0,411 | 121 | 2,03 | 4,49 |
| | 17,5 | | | 10 | 22,2 | 444 | 4,47 | 146 | 2,56 | 85,5 | 1,96 | 0,409 | 147 | 2,12 | 4,58 |
| **16 / 10** | 18 | 160 | 100 | 9 | 22,9 | 606 | 5,15 | 186 | 2,85 | 110 | 2,20 | 0,39 | 194 | 2,24 | 5,19 |
| | 19,8 | | | 10 | 25,3 | 667 | 5,13 | 204 | 2,84 | 121 | 2,19 | 0,39 | 213 | 2,28 | 5,23 |
| | 23,6 | | | 12 | 30 | 784 | 5,11 | 239 | 2,82 | 142 | 2,18 | 0,388 | 249 | 2,36 | 5,32 |
| **18 / 11** | 22,2 | 180 | 110 | 10 | 28,3 | 952 | 5,80 | 276 | 3,12 | 165 | 2,42 | 0,376 | 295 | 2,44 | 5,88 |
| | 26,4 | | | 12 | 33,7 | 1123 | 5,77 | 324 | 3,10 | 194 | 2,40 | 0,374 | 348 | 2,52 | 5,97 |
| **20 /12,5** | 27,4 | 200 | 125 | 11 | 34,9 | 1449 | 6,45 | 446 | 3,58 | 264 | 2,75 | 0,392 | 465 | 2,79 | 6,5 |
| | 29,7 | | | 12 | 37,9 | 1568 | 6,43 | 482 | 3,57 | 285 | 2,74 | 0,392 | 503 | 2,83 | 6,54 |
| | 34,4 | | | 14 | 43,9 | 1801 | 6,41 | 551 | 3,54 | 327 | 2,73 | 0,39 | 573 | 2,91 | 6,62 |
| | 39,1 | | | 16 | 49,8 | 2026 | 6,38 | 617 | 3,52 | 367 | 2,72 | 0,388 | 643 | 2,99 | 6,71 |

# I-4. THÉP GÓC ĐỀU CẠNH CÁN NÓNG

(theo ГОСТ 8239-89)




*b* - chiều rộng cánh

*t* - bề dày cánh

*r* - bán kính quán tính

$z_o$ - khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh

*m* - khối lượng trên một mét dài

*I* - mômen quán tính

*A* - diện tích tiết diện

$I_{xy}$ - mômen quán tính ly tâm

| N° | *m* kg/m | Kích thước, mm *b* | *t* | *A* cm$^2$ | $I_x$ cm$^4$ | $r_x$ cm | $I_{xo\,max}$ cm$^4$ | $r_{xo\,max}$ cm | $I_{yo\,min}$ cm$^4$ | $r_{yo\,min}$ cm | $\lvert I_{xy}\rvert$ cm$^4$ | $z_0$ cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 3,05 | 50 | 4 | 3,89 | 9,21 | 1,54 | 14,6 | 1,94 | 3,8 | 0,99 | 5,42 | 1,38 |
| | 3,77 | | 5 | 4,80 | 11,2 | 1,53 | 17,8 | 1,92 | 4,63 | 0,98 | 6,57 | 1,42 |
| **5,6** | 3,44 | 56 | 4 | 4,38 | 13,1 | 1,73 | 20,8 | 2,18 | 5,41 | 1,11 | 7,69 | 1,52 |
| | 4,25 | | 5 | 5,41 | 16 | 1,72 | 25,4 | 2,16 | 6,59 | 1,1 | 9,41 | 1,57 |
| **6,3** | 3,90 | 63 | 4 | 4,96 | 18,9 | 1,95 | 29,9 | 2,45 | 7,81 | 1,25 | 11 | 1,69 |
| | 4.81 | | 5 | 6,13 | 23,1 | 1,94 | 36,8 | 2,44 | 9,52 | 1,25 | 13,7 | 1,74 |
| | 5,72 | | 6 | 7,28 | 27,1 | 1,93 | 42,9 | 2,43 | 11,2 | 1,24 | 15,9 | 1,78 |
| **7** | 5,38 | 70 | 5 | 6,86 | 31,9 | 2,16 | 50,7 | 2,72 | 13,2 | 1,39 | 18,7 | 1,9 |
| | 6,39 | | 6 | 8,15 | 37,6 | 2,15 | 59,6 | 2,71 | 15,5 | 1,38 | 22,1 | 1,94 |
| **7,5** | 5,8 | 75 | 5 | 7,39 | 39,5 | 2,31 | 62,6 | 2,91 | 16,4 | 1,49 | 23,1 | 2,02 |
| | 6,89 | | 6 | 8,78 | 46,6 | 2,3 | 73,9 | 2,9 | 19,3 | 1,48 | 27,3 | 2,06 |
| | 7,96 | | 7 | 10,1 | 53,3 | 2,29 | 84,6 | 2,89 | 22,1 | 1,48 | 31,2 | 2,10 |
| **8** | 6,78 | 80 | 5,5 | 8,63 | 52,7 | 2,47 | 83,6 | 3,11 | 21,8 | 1,59 | 30,9 | 2,17 |
| | 7,36 | | 6 | 9,38 | 57 | 2,47 | 90,4 | 3,11 | 23,5 | 1,58 | 33,4 | 2,19 |
| | 8,51 | | 7 | 10,8 | 65,3 | 2,45 | 104 | 3,09 | 27 | 1,58 | 38,3 | 2,23 |
| **9** | 8,33 | 90 | 6 | 10,6 | 82,1 | 2,78 | 130 | 3,5 | 34 | 1,79 | 48,1 | 2,43 |
| | 9,64 | | 7 | 12,3 | 94,3 | 2,77 | 150 | 3,49 | 38,9 | 1,78 | 55,4 | 2,47 |
| | 10,9 | | 8 | 13,9 | 106 | 2,76 | 168 | 3,48 | 43,8 | 1,77 | 62,3 | 2,51 |
| **10** | 10,8 | 100 | 7 | 13,8 | 131 | 3,08 | 207 | 3,88 | 54,2 | 1,98 | 76,4 | 2,71 |
| | 12,2 | | 8 | 15,6 | 147 | 3,07 | 233 | 3,87 | 60,9 | 1,98 | 86,3 | 2,75 |
| | 15,1 | | 10 | 19,2 | 179 | 3,05 | 284 | 3,84 | 74,1 | 1,96 | 110 | 2,83 |
| | 17,9 | | 12 | 22,8 | 209 | 3,03 | 331 | 3,81 | 86,9 | 1,95 | 122 | 2,91 |
| **11** | 11,9 | 110 | 7 | 15,2 | 176 | 3,4 | 279 | 4,29 | 72,7 | 2,19 | 106 | 2,96 |
| | 13.5 | | 8 | 17,2 | 198 | 3,39 | 315 | 4,28 | 81,8 | 2,18 | 116 | 3 |
| **12,5** | 15,5 | 125 | 8 | 19,7 | 294 | 3,87 | 467 | 4,87 | 122 | 2,49 | 172 | 3,36 |
| | 17,3 | | 9 | 22 | 327 | 3,86 | 520 | 4,86 | 136 | 2,48 | 192 | 3,4 |
| | 19,1 | | 10 | 24,3 | 360 | 3,85 | 571 | 4,84 | 149 | 2,47 | 211 | 3,45 |
| | 22,7 | | 12 | 28,9 | 422 | 3,82 | 670 | 4,82 | 174 | 2,46 | 248 | 3,53 |
| **14** | 19,4 | 140 | 9 | 24,7 | 466 | 4,34 | 739 | 5,47 | 192 | 2,79 | 274 | 3,78 |
| | 21,5 | | 10 | 27,3 | 512 | 4,33 | 814 | 5,46 | 211 | 2,78 | 301 | 3,82 |
| | 25,5 | | 12 | 32,5 | 602 | 4,31 | 957 | 5,43 | 248 | 2,76 | 354 | 3,9 |
| **16** | 24,7 | 160 | 10 | 31,4 | 774 | 4,96 | 1229 | 6,25 | 319 | 3,19 | 455 | 4,3 |
| | 27 | | 11 | 34,4 | 844 | 4,95 | 1340 | 6,24 | 348 | 3,18 | 496 | 4,35 |
| | 29,4 | | 12 | 37,4 | 913 | 4,94 | 1450 | 6,23 | 376 | 3,17 | 537 | 4,39 |
| | 34 | | 14 | 43,6 | 1046 | 4,92 | 1662 | 6,2 | 431 | 3,16 | 615 | 4,47 |
| | 38,5 | | 16 | 49,1 | 1175 | 4,89 | 1866 | 6,17 | 485 | 3,14 | 690 | 4,55 |
| **18** | 30,5 | 180 | 11 | 38,8 | 1216 | 5,6 | 1933 | 7,06 | 500 | 3,59 | 716 | 4,85 |
| | 33,1 | | 12 | 42,2 | 1317 | 5,59 | 2093 | 7,04 | 540 | 3,58 | 776 | 4,89 |

# Phụ lục II

## II-1. BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM $\eta_i$

(để tính dầm dài vô hạn trên nền đàn hồi)

| $\alpha z$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ | $\eta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 0,1 | 0,9907 | 0,8100 | 0,9003 | 0,0903 |
| 0,2 | 0,9651 | 0,6398 | 0,8024 | 0,1627 |
| 0,3 | 0,9267 | 0,4888 | 0,7077 | 0,21889 |
| 0,4 | 0,8784 | 0,3564 | 0,6174 | 0,2610 |
| 0,5 | 0,8231 | 0,2415 | 0,5323 | 0,2908 |
| 0,6 | 0,7628 | 0,1431 | 0,4530 | 0,3099 |
| 0,7 | 0,6997 | 0,0599 | 0,3708 | 0,3199 |
| $\pi/4$ | 0,6448 | 0,0000 | 0,3224 | 0,3224 |
| 0,8 | 0,6354 | - 0,0093 | 0,3131 | 0,3223 |
| 0,9 | 0,5712 | –0,0657 | 0,2527 | 0,3185 |
| 1,0 | 0,5083 | –0,1108 | 0,1988 | 0,3096 |
| 1,1 | 0,4476 | –0,1457 | 0,1510 | 0,2967 |
| 1,2 | 0,3899 | –0,1716 | 0,1091 | 0,2807 |
| 1,3 | 0,3355 | –0,1897 | 0,0729 | 0,2626 |
| 1,4 | 0,2849 | –0,2011 | 0,0419 | 0,2430 |
| 1,5 | 0,2384 | –0,2068 | 0,0158 | 0,2226 |
| $\pi/2$ | 0,2079 | –0,2079 | 0,0000 | 0,2079 |
| 1,6 | 0,1959 | –0,2077 | –0,0059 | 0,2018 |
| 1,7 | 0,1576 | –0,2047 | –0,0235 | 0,1812 |
| 1,8 | 0,1234 | –0,1985 | –0,0376 | 0,1610 |
| 1,9 | 0,0932 | –0,1899 | –0,0484 | 0,1415 |
| 2,0 | 0,0667 | –0,1794 | –0,0563 | 0,1231 |
| 2,1 | 0,0439 | –0,1675 | –0,0618 | 0,1057 |
| 2,2 | 0,0244 | –0,1548 | –0,0652 | 0,0896 |
| 2,3 | 0,0080 | –0,1416 | –0,0668 | 0,0748 |
| $3\pi/4$ | 0,0000 | –0,1340 | –0,0670 | 0,0670 |
| 2,4 | –0,0056 | –0,1282 | –0,0669 | 0,0613 |
| 2,5 | –0,0166 | –0,1149 | –0,0658 | 0,0491 |
| 2,6 | –0,0254 | –0,1019 | –0,0636 | 0,0383 |
| 2,7 | –0,0320 | –0,0895 | –0,0608 | 0,0287 |
| 2,8 | –0,0369 | –0,0777 | –0,0573 | 0,0204 |
| 2,9 | –0,0403 | –0,0666 | –0,0534 | 0,0132 |
| 3,0 | –0,04226 | –0,05632 | –0,04929 | 0,00703 |
| 3,1 | –0,04314 | –0,04688 | –0,04501 | 0,00187 |
| $\pi$ | –0,04321 | –0,04321 | –0,04321 | 0,0000 |
| $5\pi/4$ | –0,02786 | 0,00000 | –0,01393 | –0,01393 |
| $6\pi/4$ | –0,00898 | 0,00898 | 0,00000 | –0,00898 |
| $7\pi/4$ | 0,00000 | 0,00579 | 0,00290 | –0,00290 |
| $8\pi/4$ | 0,00187 | 0,00187 | 0,00187 | 0,0000 |

## II-2. BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM KRULOV $Y_i$

(để tính dầm dài hữu hạn trên nền đàn hồi)

| $\alpha z$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,1 | 1,0000 | 0,1000 | 0,0050 | 0,00015 |
| 0,2 | 0,9997 | 0,2000 | 0,0200 | 0,00135 |
| 0,3 | 0,9987 | 0,2999 | 0,0450 | 0,0045 |
| 0,4 | 0,9957 | 0,39965 | 0,0800 | 0,0107 |
| 0,5 | 0,9895 | 0,49895 | 0,1248 | 0,0208 |
| 0,6 | 0,9784 | 0,59745 | 0,17975 | 0,0360 |
| 0,7 | 0,9600 | 0,6944 | 0,24435 | 0,0571 |
| 0,8 | 0,9318 | 0,7891 | 0,31855 | 0,08515 |
| 0,9 | 0,8931 | 0,88035 | 0,40205 | 0,1211 |
| 1,0 | 0,8337 | 0,96675 | 0,49445 | 0,1657 |
| 1,1 | 0,7568 | 1,04645 | 0,59515 | 0,2203 |
| 1,2 | 0,6561 | 1,1173 | 0,70345 | 0,28515 |
| 1,3 | 0,5272 | 1,1767 | 0,81825 | 0,3612 |
| 1,4 | 0,3556 | 1,22165 | 0,9383 | 0,4490 |
| 1,5 | 0,1664 | 1,24855 | 1,06195 | 0,5490 |
| 1,6 | - 0,0753 | 1,2535 | 1,18725 | 0,66145 |
| 1,7 | - 0,3644 | 1,2319 | 1,3118 | 0,7864 |
| 1,8 | - 0,7060 | 1,17885 | 1,4326 | 0,9237 |
| 1,9 | - 1,1049 | 1,0888 | 1,54635 | 1,0727 |
| 2,0 | - 1,5656 | 0,95575 | 1,64895 | 1,2325 |
| 2,1 | - 2,0923 | 0,7735 | 1,73585 | 1,4019 |
| 2,2 | - 2,6882 | 0,5351 | 1,8018 | 1,57905 |
| 2,3 | - 3,3562 | 0,23345 | 1,84075 | 1,7614 |
| 2,4 | - 4,0976 | - 0,1386 | 1,8461 | 1,94605 |
| 2,5 | - 4,9128 | - 0,5885 | 1,81045 | 2,12925 |
| 2,6 | - 5,8003 | - 1,1236 | 1,72555 | 2,3065 |
| 2,7 | - 6,7565 | - 1,7599 | 1,58265 | 2,47245 |
| 2,8 | - 7,7759 | - 2,4770 | 1,3721 | 2,6208 |
| 2,9 | - 8,8471 | - 3,3079 | 1,08375 | 2,7448 |
| 3,0 | - 9,9669 | - 4,24845 | 0,70685 | 2,8346 |
| 3,1 | - 11,1119 | - 5,30225 | 0,2303 | 2,8823 |
| 3,2 | - 12,2656 | - 6,47105 | - 0,3574 | 2,8769 |
| 3,3 | - 13,4048 | - 7,7549 | - 1,0678 | 2,80675 |
| 3,4 | - 14,5008 | - 9,15065 | - 1,9121 | 2,6589 |
| 3,5 | - 15,5198 | - 10,65245 | - 2,9014 | 2,4195 |
| 3,6 | - 16,4218 | - 12,25075 | - 4,04585 | 2,0735 |
| 3,7 | -17,1622 | - 13,9315 | - 5,35435 | 1,60485 |
| 3,8 | - 17,6875 | - 15,67605 | - 6,8343 | 0,9969 |
| 3,9 | - 17,9387 | - 17,45985 | - 8,4909 | 0,2321 |
| 4,0 | - 17,8498 | - 19,25235 | - 10,3265 | - 0,7073 |
| 4,1 | - 17,3472 | - 21,0160 | - 12,3404 | - 1,8392 |
| 4,2 | - 16,3505 | - 22,70545 | - 14,52735 | - 3,1812 |
| 4,3 | - 14,7722 | - 24,26685 | - 16,8773 | - 4,7501 |
| 4,4 | - 12,5180 | - 25,63725 | - 19,37425 | - 6,5615 |
| 4,5 | - 9,4890 | - 26,74465 | - 21,9959 | - 8,6290 |
| 4,6 | - 5,5791 | - 27,50565 | - 24,71165 | - 10,9638 |
| 4,7 | - 0,6812 | - 27,8274 | - 27,4823 | - 13,57315 |

## BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM $Y_i$ (tiếp theo)

| $\alpha z$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 4,8 | 5,3164 | - 27,60515 | - 30,2589 | - 16,4604 |
| 4,9 | 12,5239 | - 26,72385 | - 32,9814 | - 19,6232 |
| 5,0 | 21,0504 | - 25,05645 | - 35,57745 | - 23,0525 |
| 5,1 | 30,9997 | - 22,46605 | - 37,96185 | - 26,7317 |
| 5,2 | 42,4661 | - 18,8057 | - 40,0350 | - 30,6346 |
| 5,3 | 55,5317 | - 13,9201 | - 41,68225 | - 34,72455 |
| 5,4 | 70,2637 | - 7,6440 | - 42,77265 | - 38,9524 |
| 5,5 | 86,7044 | 0,19005 | - 43,15925 | - 43,2557 |
| 5,6 | 104,8687 | 9,75435 | - 42,67745 | - 47,5556 |
| 5,7 | 124,7352 | 21,2199 | - 41,14535 | - 51,75625 |
| 5,8 | 146,2448 | 34,7564 | - 38,32395 | - 55,74285 |
| 5,9 | 169,2837 | 50,5203 | - 34,1198 | - 59,38045 |
| 6,0 | 193,6813 | 68,65775 | - 28,2116 | - 62,5106 |
| 6,1 | 219,2004 | 89,29465 | - 20,3042 | - 64,9518 |
| 6,2 | 245,5231 | 112,5249 | - 10,2356 | - 66,3981 |
| 6,3 | 272,2487 | 138,4120 | 2,28885 | - 66,91745 |
| 6,4 | 298,8909 | 166,9722 | 17,5862 | - 65,9486 |
| 6,5 | 324,7861 | 198,1637 | 35,77125 | - 63,31045 |
| 6,6 | 349,2554 | 231,88005 | 57,2528 | - 58,6895 |
| 6,7 | 371,4244 | 267,9374 | 82,2255 | - 51,74295 |
| 6,8 | 390,2974 | 306,0558 | 110,9037 | - 42,11895 |
| 6,9 | 404,7145 | 347,34985 | 143,4927 | - 30,1819 |
| 7,0 | 413,3762 | 386,80715 | 180,1191 | - 13,2842 |
| 7,1 | 414,8263 | 428,2849 | 220,87175 | 6,7296 |
| 7,2 | 407,4216 | 469,4772 | 265,76635 | 31,02805 |
| 7,3 | 389,3783 | 509,41565 | 314,72645 | 60,0189 |
| 7,4 | 358,7306 | 546,93425 | 367,56875 | 94,1019 |
| 7,5 | 313,3700 | 580,67095 | 423,9858 | 133,6506 |
| 7,6 | 251,0334 | 609,0402 | 483,5233 | 179,00345 |
| 7,7 | 169,3472 | 630,22945 | 545,5557 | 230,44115 |
| 7,8 | 65,8475 | 642,1835 | 609,25955 | 288,16805 |
| 7,9 | - 62,0375 | 642,58715 | 673,6057 | 352,3123 |
| 8,0 | - 216,8647 | 628,8779 | 737,31005 | 422,8713 |
| 8,1 | - 401,1674 | 598,23435 | 798,81785 | 499,7008 |
| 8,2 | - 617,4142 | 547,5808 | 856,28775 | 582,49745 |
| 8,3 | - 867,9091 | 478,5993 | 907,5542 | 670,7544 |
| 8,4 | - 1154,6587 | 372,78655 | 950,11575 | 763,7226 |
| 8,5 | - 1479,3701 | 241,41355 | 981,0984 | 860,3917 |
| 8,6 | - 1843,2880 | 75,6088 | 997,25265 | 959,44835 |
| 8,7 | - 2247,0402 | - 128,58235 | 994,93765 | 1059,2289 |
| 8,8 | - 2690,4845 | - 375,1167 | 970,1255 | 1156,18385 |
| 8,9 | - 3172,6917 | - 667,9794 | 918,36635 | 1252,35606 |
| 9,0 | - 3691,4815 | - 1010,87995 | 834,8607 | 1340,3007 |
| 9,1 | - 4243,5551 | - 1407,3690 | 714,40845 | 1418,0930 |
| 9,2 | - 4824,0587 | - 1860,5365 | 551,49275 | 1481,76105 |
| 9,3 | - 5426,5154 | - 2372,94855 | 340,3091 | 1526,7834 |
| 9,4 | - 6042,3167 | - 2946,2708 | 74,8875 | 1548,0229 |
| 9,5 | - 6660,9594 | - 3581,47555 | - 250,9985 | 1539,7669 |

# Tài liệu tham khảo chính


1- *NGUYỄN Y TÔ* (chủ biên) và các tác giả khác - ***Sức bền vật liệu.*** *Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp, Hà Nội*, 1973.

2- *NGUYỄN Y TÔ* (chủ biên) và các tác giả khác - ***Sức bền vật liệu.*** *Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội*, 1988.

3- *СМИРНОВ А. Ф.* - ***Сопротивление материалов.*** *Высшая школа - Москва*, 1975.

4- *АЛЕКСАНДРОВ А. В., ПТАНОВ В. Д., ДЕРЖАВИН Б. П.* ***Сопротивление материалов.*** *Высшая школа - Москва*, 1995.

5- *BUHOT G., THUILLIER P.* ***Cours de mécanique.*** T.2. ***Résistance des matériaux.*** *Masson. Paris*, 1986 (xuất bản lần thứ tư).

6- *BAZERGUI A., BUI QUOC T., Mc INTYRE G., LABERGE C.* ***Résistance des matériaux.*** *Editions de l'école polytechnique de Montréal*, 1987.

# Mục lục


**Lời tựa** 3

**Ký hiệu các đại lượng** 5

**1. Những khái niệm chung**

1-1. Sức bền vật liệu - Môn cơ sở kỹ thuật 7

1-2. Phân loại các chi tiết công trình theo dạng hình học 9

1-3. Phân loại các ngoại lực- Phản lực và liên kết 10

1-4. Khái niệm về biến dạng, nội lực 14

1-5. Giả thiết về vật liệu trong Sức bền vật liệu 19

1-6. Nguyên lý độc lập tác dụng (Nguyên lý cộng tác dụng) 21

Câu hỏi tự kiểm tra 23

**2. Nội lực trong bài toán thanh**

2-1. Hợp lực của nội lực trên tiết diện- Ứng lực 25

2-2. Biểu đồ ứng lực. Phương pháp mặt cắt biến thiên 30

2-3. Quan hệ giữa mômen uốn, lực cắt và tải trọng ngang trong thanh thẳng 38

2-4. Cách vẽ biểu đồ theo nhận xét 41

2-5. Biểu đồ ứng lực trong thanh cong 47

Câu hỏi tự kiểm tra 49

**3. Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm**

3-1. Ứng suất trên tiết diện 51

3-2. Biến dạng của thanh 54

3-3. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng 60

3-4. Thế năng biến dạng đàn hồi 62

3-5. Bài toán siêu tĩnh 63

3-6. Các đặc trưng cơ học của vật liệu 65

3-7. Một số hiện tượng trong thí nghiệm vật liệu 69

3-8. Các quan điểm tính toán kết cấu 72

Câu hỏi tự kiểm tra 79

**4. Trạng thái ứng suất và thuyết bền**

4-1. Các định nghĩa về trạng thái ứng suất 81

4-2. Trạng thái ứng suất phẳng 83

4-3. Vòng tròn Mohr ứng suất 86

4-4. Quan hệ ứng suất - biến dạng. Định luật Hooke 89
4-5. Biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi 92
4-6. Điều kiện bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp 94
Câu hỏi tự kiểm tra 101

**5. Đặc trưng hình học của tiết diện**

5-1. Khái niệm chung 102
5-2. Diện tích, mômen tĩnh, trọng tâm 102
5-3. Các mômen quán tính 105
5-4. Mômen quán tính khi chuyển trục song song 109
5-5. Mômen quán tính khi xoay trục, trục chính 111
Câu hỏi tự kiểm tra 117

**6. Thanh chịu xoắn, chịu cắt**

6-1. Ứng suất trên tiết diện tròn của thanh chịu xoắn 118
6-2. Biến dạng và chuyển vị của thanh chịu xoắn 123
6-3. Thế năng biến dạng đàn hồi của thanh chịu xoắn 126
6-4. Thanh chịu cắt 127
6-5. Lò xo xoắn ốc hình trụ 129
6-6. Xoắn thanh có tiết diện hình chữ nhật 131
Câu hỏi tự kiểm tra 133

**7. Thanh chịu uốn phẳng**

7-1. Khái niệm chung 134
7-2. Ứng suất trên tiết diện thanh chịu uốn thuần tuý 135
7-3. Ứng suất tiếp khi thanh chịu uốn ngang phẳng 141
7-4. Điều kiện bền của dầm chịu uốn ngang phẳng 146
7-5. Quỹ đạo ứng suất chính 149
7-6. Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn 150
7-7. Biến dạng, chuyển vị của dầm chịu uốn 151
7-8. Phương pháp tích phân không định hạn 153
7-9. Phương pháp tải trọng giả tạo 154
7-10. Phương pháp thông số ban đầu 157
7-11. Ảnh hưởng của lực cắt tới độ võng trong dầm chịu uốn 163
Câu hỏi tự kiểm tra 166

**8. Thanh chịu lực phức tạp**

8-1. Khái niệm chung 168
8-2. Ứng suất pháp và điều kiện bền theo ứng suất pháp 171

8-3. Độ võng của dầm 175
8-4. Thanh thẳng chịu kéo hoặc nén lệch tâm 177
8-5. Lõi tiết diện 180
8-6. Thanh chịu uốn và xoắn đồng thời 182
Câu hỏi tự kiểm tra 183

**9. Những vấn đề đặc biệt trong lý thuyết uốn và xoắn thanh**

9-1. Ứng suất tiếp khi uốn ngang phẳng 184
9-2. Tâm uốn 191
9-3. Uốn dầm gồm nhiều lớp vật liệu 193
9-4. Xoắn thanh có tiết diện mỏng kín 199
9-5. Xoắn thanh có tiết diện mỏng hở 205
Câu hỏi tự kiểm tra 208

**10. Dầm trên nền đàn hồi**

10-1. Nền, mô hình nền 209
10-2. Phương trình vi phân độ võng của dầm trên nền Winkler 210
10-3. Dầm dài vô hạn 211
10-4. Dầm dài hữu hạn 215
Câu hỏi tự kiểm tra 218

**11. Tính chuyển vị theo các phương pháp năng lượng**

11-1. Ký hiệu, các khái niệm chung 219
11-2. Định lý Castigliano 223
11-3. Nguyên lý công khả dĩ 225
11-4. Công thức Maxwell-Mohr 230
11-5. Phép nhân biểu đồ Vêrêxaghin 233
11-6. Chuyển vị tương đối 236
Câu hỏi tự kiểm tra 237

**12. Giải hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực**

12-1. Khái niệm chung 238
12-2. Nội dung phương pháp lực 239
12-3. Dầm liên tục 245
12-4. Cách tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh 249
Câu hỏi tự kiểm tra 251

**13. Ổn định của thanh thẳng chịu uốn, nén**

13-1. Khái niệm chung 252
13-2. Bài toán Euler xác định lực tới hạn 255

13-3. Ứng suất tới hạn, giới hạn áp dụng công thức Euler 258
13-4. Ổn định của thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi 259
13-5. Phương pháp thực hành tính ổn định 261
13-6. Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời 264
13-7. Thanh có độ mảnh lớn chịu nén lệch tâm 269
13-8. Ổn định của dầm chịu uốn 270
Câu hỏi tự kiểm tra 272

**14. Thanh chịu tải trọng động**

14-1. Khái niệm chung 274
14-2. Bài toán có gia tốc không đổi 276
14-3. Bài toán có gia tốc thay đổi theo thời gian 278
14-4. Bài toán dao động tự do 280
14-5. Dao động tự do có kể khối lượng của dầm và liên kết 282
14-6. Dao động cưỡng bức 283
14-7. Bài toán tải trọng va chạm 287
Câu hỏi tự kiểm tra 293

**15. Tính độ bền kết cấu theo tải trọng giới hạn**

15-1. Khái niệm chung, các giả thiết cơ bản 294
15-2. Hệ thanh chịu kéo, nén 296
15-3. Thanh tiết diện tròn chịu xoắn 298
15-4. Thanh chịu uốn thuần túy 299
15-5. Thanh chịu uốn ngang phẳng. Khớp dẻo 302
Câu hỏi tự kiểm tra 307

**Phụ lục I**

I-1. Thép hình I cán nóng 308
I-2. Thép hình U cán nóng 309
I-3. Thép góc không đều cạnh cán nóng 310
I-4. Thép góc đều cạnh cán nóng 311

**Phụ lục II**

II-1. Bảng giá trị các hàm $\eta_i$ 313
II-2. Bảng giá trị các hàm Krulov $Y_i$ 314

**Tài liệu tham khảo chính** 315

Pgs, Pts. LÊ NGỌC HỒNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU


| | | |
|---|---|---|
| *Chịu trách nhiệm xuất bản* | : | Pgs, Pts. TÔ ĐĂNG HẢI |
| *Biên tập* | : | MINH HẰNG, |
| | : | THANH ĐỊNH |
| *Kỹ mỹ thuật* | : | NHƯ MAI |
| *Sửa bản in* | : | MINH HẰNG |
| *Trình bày bìa* | | HƯƠNG LAN |

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT**
70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24 cm.
Tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Giấy phép xuất bản số : 290 - 18 - 16/5/98
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 1998