

CHƯƠNG 4: XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH PHẪNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

❖ Mục đích của việc xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính:

- + Kiểm tra độ cứng công trình
- + Chuẩn bị cơ sở cho việc nghiên cứu hệ siêu tĩnh

❖ Các giả thiết khi tính toán:

- + Tải trọng gây ra chuyển vị là tải trọng tác dụng tĩnh
- + Chuyển vị của hệ nghiên cứu tuân theo nguyên lý cộng tác dụng

❖ Cách xác định chuyển vị

- + Xuất phát từ nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý công ảo) của hệ thanh.

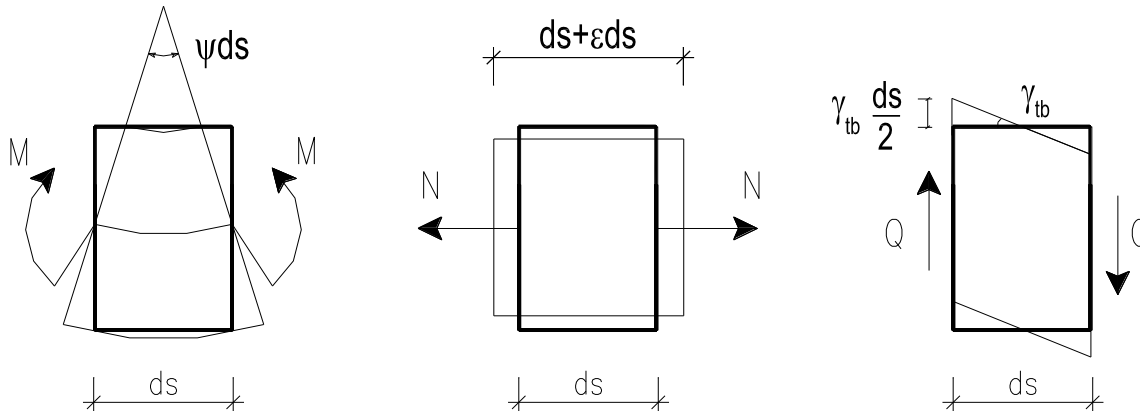
§ 4.1 KHÁI NIỆM VỀ BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

1. Khái niệm

1.1. Biến dạng: là sự thay đổi hình dạng của công trình dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài như tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức gối tựa, chế tạo không chính xác.

Bài toán phẳng, biến dạng của một phân tố thanh có chiều dài ds bao gồm ba thành phần:

- ✓ Biến dạng xoay ψds giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thanh do mômen gây ra, ψ là biến dạng xoay tỷ đối

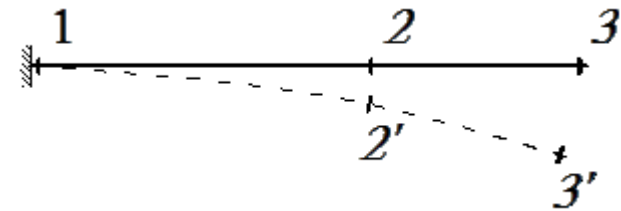


- ✓ Biến dạng dọc trục ε ds giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thành do lực dọc gây ra, ε là biến dạng dọc tỷ đối.
- ✓ Biến dạng trượt γ ds giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố thành do lực cắt gây ra, γ là biến dạng trượt tỷ đối.

1.2 Chuyển vị: là sự thay đổi vị trí của các phân tố trong hệ kết cấu. Có thể nói chuyển vị là hệ quả của quá trình biến dạng trong hệ kết cấu.

❖ Một phân tố trong hệ có thể ba khả năng

- + Không chuyển vị nhưng có biến dạng (vị trí 1)
- + Có chuyển vị và có biến dạng (vị trí 2)
- + Có chuyển vị nhưng không biến dạng (vị trí 3)



❖ Trong thực hành sử dụng khái niệm chuyển vị của tiết diện

2. Các loại chuyển vị: chuyển vị tại một tiết diện xác định có ba thành phần:

- Chuyển vị thẳng theo phương trục x
- Chuyển vị thẳng theo phương trục y
- Chuyển vị xoay (chuyển vị góc)

3. Ký hiệu chuyển vị: Δ_{km}

Chỉ số thứ nhất (k) chỉ vị trí và phương của chuyển vị, chỉ số thứ hai (m) chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Δ_{km} – chuyển vị tương ứng vị trí và phương k do nguyên nhân m gây ra.

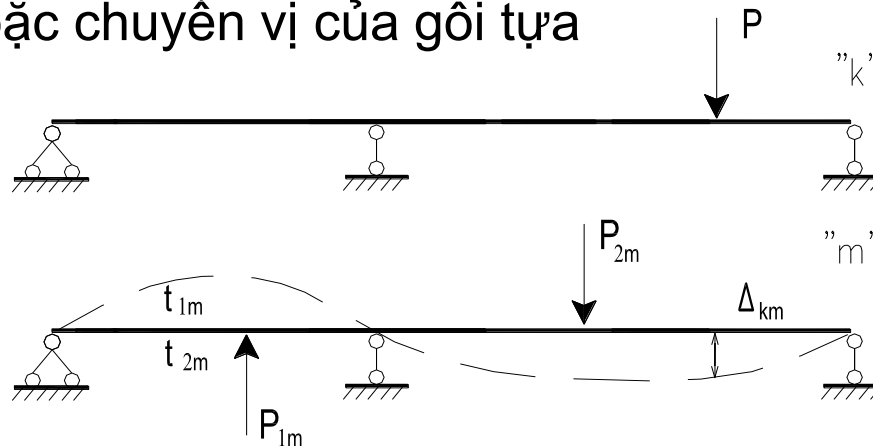
4. Chuyển vị đơn vị: là chuyển vị mà nguyên nhân gây ra bằng đơn vị, ký hiệu là δ_{km}

§ 4.2 CÔNG KHẢ DĨ CỦA NỘI VÀ NGOẠI LỰC

1. Định nghĩa công khả dĩ

Là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé do một nguyên nhân bất kỳ nào đó gây ra.

- Chuyển vị và biến dạng vô cùng bé phải phù hợp với các điều kiện liên kết ngoại cũng như liên kết nội của hệ tức là thỏa mãn điều kiện động học và được gọi là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.
- Nguyên nhân gây ra các chuyển vị khả dĩ có thể là tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ hoặc chuyển vị của gối tựa



Xét hệ ở hai trạng thái

- Trạng thái thứ nhất gọi là trạng thái “k” chịu lực P_k
- Trạng thái thứ hai gọi là trạng thái “m” chịu các nguyên nhân gồm: tải trọng P_m , nhiệt độ t_{1m} , t_{2m}
- ❖ Chuyển vị và biến dạng đàn hồi ở trạng thái “m” được coi là nhỏ và tự động thỏa mãn điều kiện động học nên được xem là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.
- ❖ Gọi Δ_{km} là chuyển vị tại điểm đặt lực P_k do các nguyên nhân của trạng thái “m” gây ra. Tích số $P_k \cdot \Delta_{km}$ là công khả dĩ của lực P_k trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng của trạng thái “m” gây ra, ký hiệu công này là T_{km} :
$$T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

Công khả dĩ là một khái niệm mở rộng, trừu tượng, nhằm mục đích xác định chuyển vị có vị trí và phương bất kỳ do mọi nguyên nhân gây ra.

2. Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý công ảo) áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833).

Nguyên lý công khả dĩ Lagrange:

Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé (tức là những chuyển dời mà các liên kết cho phép) phải bằng không.

$$T_{km} = 0$$

Trong trường hợp hệ biến dạng đàn hồi, S.D.Poisson cho rằng ngoài công khả dĩ của ngoại lực thì phải xét thêm công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ. Do đó đối với hệ đàn hồi biến dạng, nguyên lý cân bằng công khả dĩ được phát biểu như sau:

Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ T_{km} của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực A_{km}^ trên những biến dạng đàn hồi tương ứng phải bằng không.*

$$T_{km} + A_{km}^* = 0 \Rightarrow T_{km} = -A_{km}^*$$

3. Công khả dĩ của ngoại lực

Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái “m” bằng tổng tích số giữa ngoại lực tác dụng ở trạng thái “k” với những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m”.

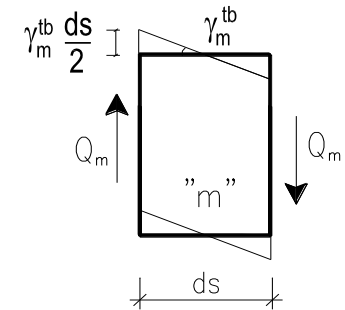
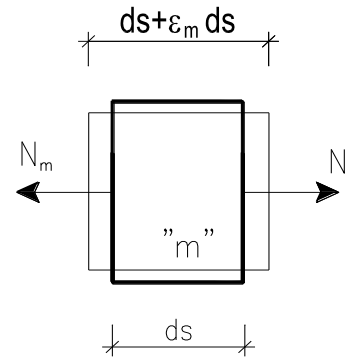
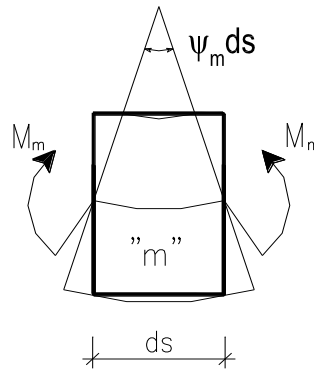
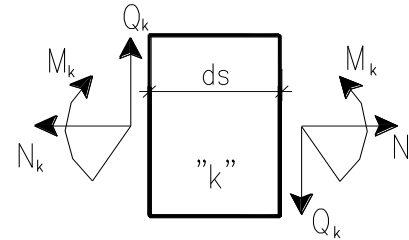
$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{km}$$

4. Công khả dĩ của nội lực

Để tính công khả dĩ của nội lực cho toàn hệ, tính công khả dĩ của nội lực cho một phân tố thanh.

- ✓ Ở trạng thái “k” tách một phân tố thanh có chiều dài ds . Trong trường hợp tổng quát của bài toán phẳng các mặt cắt đầu trái và đầu phải của phân tố có các nội lực M_k , Q_k , N_k tác dụng, các lực này là nội lực trong thanh, nhưng đối với phân tố đang xét chúng được coi như là ngoại lực.

Ở trạng thái “m” tại vị trí tương ứng tách một phân tố thanh có chiều dài ds . Ở trạng thái này phân tố ds có thể có các biến dạng do nội lực M_m , N_m , Q_m hoặc sự thay đổi nhiệt độ.



❖ Biến dạng do các nội lực M_m , N_m , Q_m

- **Biến dạng xoay:** Hai tiết diện ở hai đầu phân tố dưới tác dụng của mômen uốn M_m bị xoay một góc $\psi_m ds$.

$$\psi_m = \frac{M_m}{EI}$$

- **Biến dạng trượt:** hai tiết diện ở hai đầu phân tố dưới tác dụng của lực cắt Q_m bị trượt một góc $\gamma_m^{tb} ds$:

$$\gamma_m^{tb} = \nu \frac{Q_m}{GA}$$

- **Biến dạng dọc:** hai tiết diện ở hai đầu phân tố dưới tác dụng của lực dọc N_m làm cho phân tố thanh bị dãn dài dọc trục một đoạn $\varepsilon_m ds$

$$\varepsilon_m = \frac{N_m}{EA}$$

❖ Biến dạng do thay đổi nhiệt độ

Gọi t_{1m} và t_{2m} là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh (giả thiết rằng $t_{2m} > t_{1m} > 0$). Chấp nhận quy luật biến thiên nhiệt độ trong thanh theo chiều cao tiết diện là bậc nhất, tức là biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng đường thẳng .

Xác định được độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh:

$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu $a = b = h/2$; ta có: $t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$

Với giả thiết rằng $t_{2m} > t_{1m} > 0$

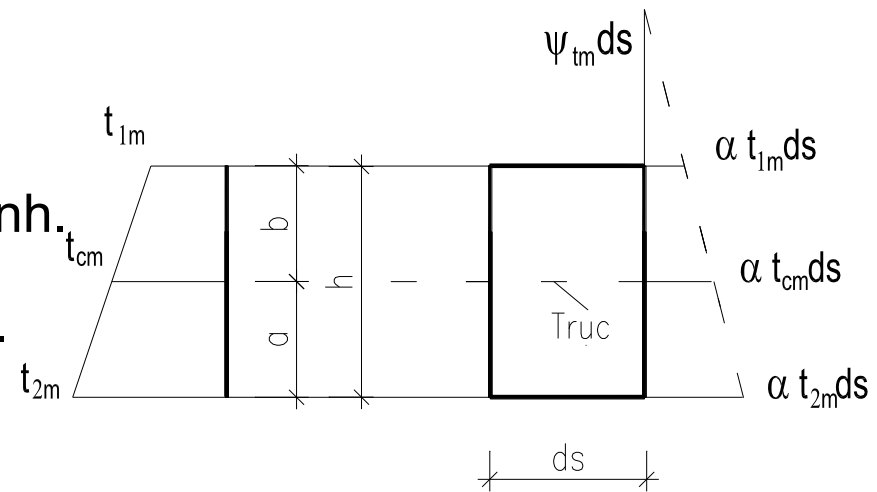
Tiết diện 1-1 ở đầu trái phân tố là cố định.

α là hệ số dẫn nở vì nhiệt của vật liệu.

Phân tố thanh có hai thành phần

biến dạng vì nhiệt:

- **Biến dạng dài dọc theo trục do nhiệt độ t_{cm} gây ra:** $\varepsilon_{tm} ds = \alpha t_{cm} ds$
- **Biến dạng xoay:** hai tiết diện ở hai đầu phân tố dưới tác dụng của t_{1m} và t_{2m} bị xoay một góc $\psi_{tm} ds$.



$$\psi_{tm} ds = \frac{\alpha t_{2m} ds - \alpha t_{1m} ds}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds$$

Công khả dĩ phân tố thanh của các lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” là:

$$dT_{km} = M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m^{tb} ds + M_k \psi_{tm} ds + N_k \varepsilon_{tm} ds$$

$$dA_{km}^* = - \left[M_k \psi_m ds + N_k \varepsilon_m ds + Q_k \gamma_m^{tb} ds + M_k \psi_{tm} ds + N_k \varepsilon_{tm} ds \right]$$

Công khả dĩ của nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng của trạng thái “m” của toàn hệ bằng tổng tích phân của công khả dĩ của nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng của trạng thái “m” của các thanh:

$$A_{km}^* = - \left[\sum \int M_k \psi_m ds + \sum \int N_k \varepsilon_m ds + \sum \int Q_k \gamma_m^{tb} ds + \sum \int M_k \psi_{tm} ds + \sum \int N_k \varepsilon_{tm} ds \right]$$

Thay các biểu thức ở trên vào có:

$$A_{km}^* = - \left[\sum \int M_k \frac{M_m}{EI} ds + \sum \int N_k \frac{N_m}{EA} ds + \sum \int Q_k v \frac{Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds \right]$$

§ 4.3 CÔNG THỨC CÔNG KHẢ DĨ

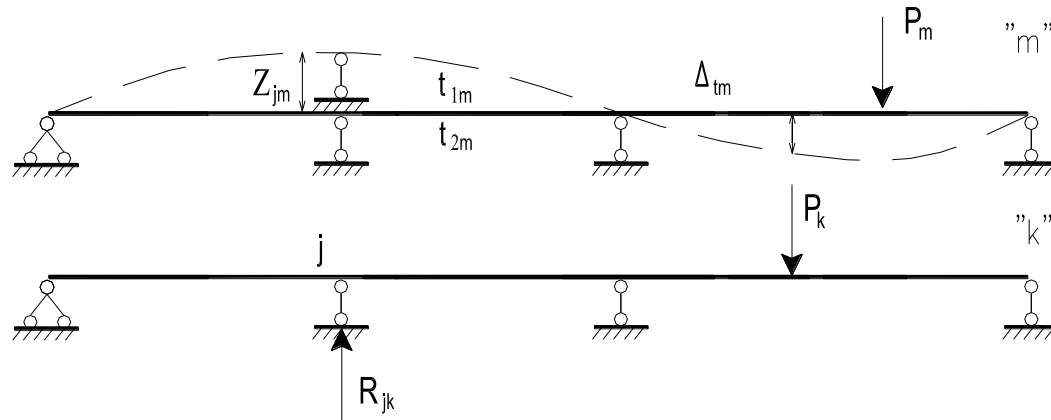
Công thức dưới đây biểu thị sự cân bằng giữa công khả dĩ của các lực tác dụng lên hệ ở trạng thái “k” trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái “m” với công khả dĩ của nội lực ở trạng thái “k” trên những biến dạng khả dĩ tương ứng của hệ ở trạng thái “m”.

$$\sum_i P_{ik} \Delta_{km} = \left[\sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \sum \int v \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \right. \\ \left. + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds \right]$$

Chú ý: các tích phân trên là tích phân định hạn. Công thức chỉ đúng cho hệ đàn hồi tuyến tính gồm các thanh thẳng hoặc cho các thanh cong có độ cong nhỏ. Biểu thức dưới dấu tích phân là liên tục.

Dấu tổng bên phải lấy theo các đoạn thanh, dấu tổng bên trái lấy theo số lực tác dụng ở trạng thái “k”.

§ 4.4 CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH (CÔNG THỨC MAXWELL – MOHR, 1874)



Xét hệ thanh chịu các nguyên nhân: tải trọng P_m , nhiệt độ là t_{1m} và t_{2m} và chuyển vị cưỡng bức gối tựa là Z_{jm} . Đây là trạng thái thực "m".

Yêu cầu xác định chuyển vị tại tiết diện k bất kỳ trên hệ.

Để xác định chuyển vị tại tiết diện k, tưởng tượng tạo ra trên sơ đồ tính của hệ đã cho một trạng thái khả dĩ "k" (trạng thái giả tạo); trong đó có đặt một lực P_k sao cho lực này sinh công khả dĩ trên chuyển vị Δ_{km} cần tìm.

- Cần tìm chuyển vị thẳng thì trạng thái khả dĩ cần đặt lực P_k theo phương cần tính chuyển vị tại tiết diện cần tính, chiều tùy ý.
- Cần tìm là chuyển vị xoay thì trạng thái khả dĩ cần đặt lực P_k dưới dạng mômen tập trung (M_k) tại tiết diện cần tính chuyển vị, có chiều tùy ý.

$$P_k \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_m}{EA} ds + \\ \sum \int v \frac{Q_k Q_m}{GA} ds + \sum \int M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int N_k \alpha t_{cm} ds$$

Chia hai vế cho P_k và ký hiệu:

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k} \quad \text{là mômen do lực } P_k = 1 \text{ gây ra trong hệ ở trạng thái "k".}$$

$$\bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k} \quad \text{là lực cắt do lực } P_k = 1 \text{ gây ra trong hệ ở trạng thái "k".}$$

$$\bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k} \quad \text{là lực dọc do lực } P_k = 1 \text{ gây ra trong hệ ở trạng thái "k".}$$

$\bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k}$ là phản lực tại liên kết j do lực $P_k=1$ gây ra ở trạng thái “k”.

Công thức xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính:

$$\Delta_{km} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \\ \sum \int v \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds + \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds$$

Chú ý:

- ✓ Chiều của lực $P_k=1$ (hoặc $M_k=1$) chọn tùy ý: nếu kết quả tính ra mang dấu dương thì chuyển vị cần tìm hướng theo chiều P_k (hoặc M_k) đã chọn; nếu kết quả mang dấu âm thì ngược lại.
- ✓ Tích $R_{jk} \cdot Z_{jm}$ dương khi R_{jk} cùng chiều Z_{jm}
- ✓ Công thức trên chỉ đúng cho hệ thanh đàn hồi tuyến tính gồm các thanh thẳng hay các thanh cong có độ cong nhỏ. Biểu thức dưới dấu tích phân là liên tục.

§ 4.4 CÁCH VẬN DỤNG CÔNG THỨC TÍNH CHUYỂN VỊ

1. Hệ dầm và khung chịu tải trọng

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt và ảnh hưởng của biến dạng dọc do lực dọc gây ra.

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds$$

2. Hệ dàn chịu tải trọng

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds$$

Lực dọc trong các thanh dàn không thay đổi trong phạm vi từng thanh. Các đại lượng E và A cũng không thay đổi.

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{im}}{(EA)_i} l_i$$

3. Hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức

$$\Delta_{kZ} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm}$$

4. Hệ tĩnh định chịu nhiệt độ

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds$$

- + Nhiệt độ như nhau theo chiều dài từng đoạn thanh.
- + Vật liệu trong từng đoạn thanh là như nhau ($\alpha = \text{const}$)
- + Chiều cao trong từng đoạn thanh là như nhau ($h = \text{const}$)

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \cdot \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k)$$

$\Omega(\bar{M}_k)$ là diện tích biểu đồ $\bar{M}_k$ (+) khi biểu đồ mômen căng về phía nhiệt độ thấp.

$\Omega(\bar{N}_k)$ là diện tích biểu đồ $\bar{N}_k$ lấy dấu (+) khi là lực kéo.

§ 4.5 CÁCH TÍNH CÁC TÍCH PHẦN TRONG CÔNG THỨC TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHÉP NHÂN BIỂU ĐỒ

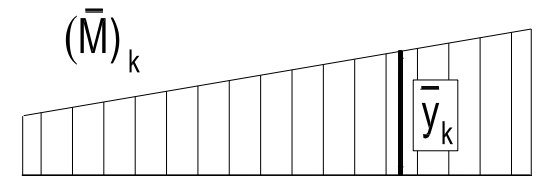
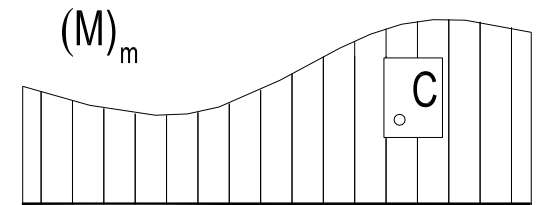
Với hệ dầm, khung, dàn chịu tải trọng có thể thực hiện cách tính tích phần trong công thức chuyển vị đơn giản hơn bằng cách nhân biểu đồ do A. N. Vêrêxaghin đề xuất năm 1925.

$$\Delta_{km} = \int_a^b \bar{M}_k \frac{M_m}{EI} ds = (\bar{M}_k)(M_m) = \sum_i \frac{1}{EI} \bar{y}_k \cdot \Omega_{(M)m}^{ab}$$

Chú ý :

✓ Hệ gồm các thanh thẳng và độ cứng EI của từng thanh là hằng số.

✓ Tung độ $\bar{y}_k$ bắt buộc phải lấy ở biểu đồ có bậc bé hơn hoặc bằng bậc một, diện tích $\Omega_{(M)m}^{ab}$ có thể lấy ở biểu đồ bất kỳ.

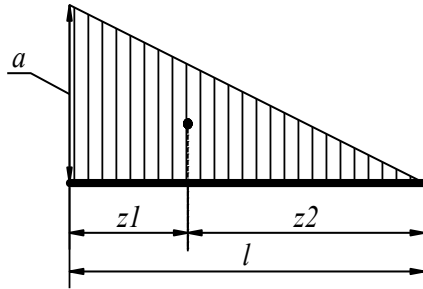


- ✓ Nếu diện tích $\Omega_{(M)m}^{ab}$ và tung độ $\bar{y}_k$ cùng dấu thì tích số mang dấu dương và ngược lại.
- ✓ Trong khoảng từ (a, b) biểu đồ lấy tung độ $\bar{y}_k$ phải là một đoạn thẳng trơn tru. Nếu là đường gãy khúc, cần chia khoảng (a,b) ra làm nhiều đoạn để áp dụng cách nhân cho từng đoạn rồi cộng kết quả với nhau.
- ✓ Nếu biểu đồ lấy diện tích có hình dạng phức tạp ta có thể chia thành các hình cơ bản để tìm được ngay diện tích và tọa độ trọng tâm.

Một số công thức tính diện tích và trọng tâm của các hình cơ bản:

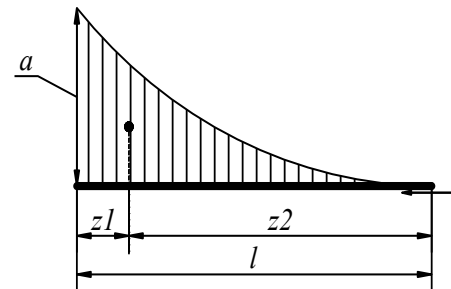
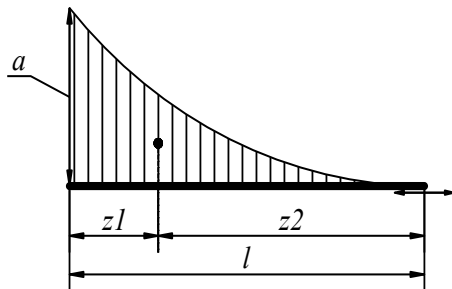
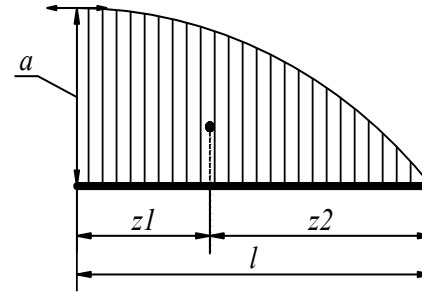
Hình tam giác:

$$\Omega_{(M)m}^{ab} = \frac{a.l}{2}; \quad z_1 = \frac{l}{3}; \quad z_2 = \frac{2l}{3}$$



Hình parabol lõ

$$\Omega_{(M)m}^{ab} = \frac{2al}{3}; \quad z_1 = \frac{3l}{8}; \quad z_2 = \frac{5l}{8}$$



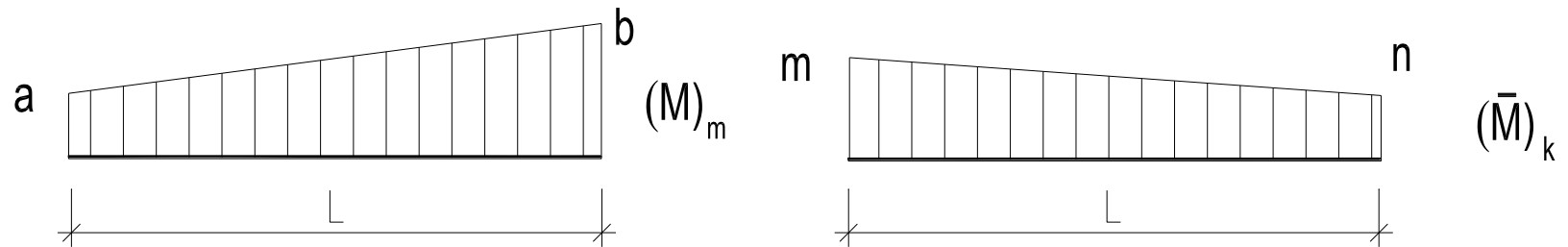
Hình parabol lõm

$$\Omega_{(M)m}^{ab} = \frac{al}{3}; \quad z_1 = \frac{l}{4}; \quad z_2 = \frac{3l}{4}$$

Hình bậc n:

$$\Omega_{(M)m}^{ab} = \frac{al}{n+1}; \quad z_1 = \frac{l}{n+2}; \quad z_2 = \frac{(n+1)l}{n+2}$$

Trường hợp nhân 2 biểu đồ có dạng hình thang, có thể đưa về các hình cơ bản. Tuy nhiên đưa về công thức sau là đơn giản nhất:



$$I = (\bar{M}_k)(M_m) = \frac{L}{6EI} (2am + 2bn + an + bm)$$

§ 4.6 CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI TIẾT DIỆN

Để tính chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện, thực hiện qua 3 bước:

- Vẽ biểu đồ M ở trạng thái thực “m”;
- Lập và vẽ biểu đồ M ở trạng thái khả dĩ “k” với 2 trường hợp như sau:
 - Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa 2 tiết diện theo phương X bất kỳ thì ở trạng thái “k” đặt lực P^* dưới dạng 2 lực ngược chiều nhau bằng đơn vị tại 2 tiết diện đang xét và hướng theo phương X.
 - Muốn tìm chuyển vị xoay tương đối giữa 2 tiết diện thì ở trạng thái “k” ta đặt lực P^* dưới dạng 2 mômen ngược chiều nhau bằng đơn vị tại 2 tiết diện đó.

Tiến hành tính chuyển vị bằng cách nhân biểu đồ mômen.